



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

Teoría de la Información en la Transición Laminar-Turbulenta

Por: Adolfo David Bahamonde Álvarez

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la
Universidad de Concepción para optar al grado académico de Magíster en
Ciencias con Mención en Física

Octubre 2022

Concepción, Chile

Profesor Guía: Héctor Hito Andrés Sepúlveda Allende



© 2019, Adolfo David Bahamonde Álvarez

Ninguna parte de esta tesis puede reproducirse o transmitirse bajo ninguna forma o por ningún medio o procedimiento, sin permiso por escrito del autor.

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento



AGRADECIMIENTOS

Esta ha sido una tesis escrita en tiempos que bien podrían ser descritos por el fenómeno al que le dedicamos el estudio: turbulentos. No habría sido posible realizar este trabajo sin el apoyo de mis padres, Ana Álvarez y Adolfo Bahamonde, y mi hermana, Ana Bahamonde.

También le agradezco por su apoyo a los profesores que me guiaron durante este tiempo, Dr. Héctor Sepúlveda y Dr. Pablo Cornejo. Por las recomendaciones y conversaciones que ayudaron a darle forma a las ideas centrales de ésta investigación.



Resumen

En esta tesis estudiamos la turbulencia, le dedicamos las primeras partes a la revisión de los fundamentos de la teoría de la turbulencia, sus dificultades y cuales son los problemas con ésta. Luego introducimos las herramientas que utilizamos para estudiarla: la teoría de la información, para finalmente proceder a aplicarlas. Para esto empleamos datos de simulaciones numéricas directas y planteamos la metodología usada para el análisis de la entropía, información mutua y complejidad, las cuales son determinadas en su forma continua utilizando los estimadores de Kozachenko-Leonenko (entropía) y Kraskov (información mutua). Para validar la metodología y herramientas utilizadas comparamos la entropía en flujos homogéneos isótropos a diferentes números de Reynolds ($Re_\lambda = 433$, $Re_\lambda = 648$ y $Re_\lambda = 1300$) con resultados reportados anteriormente en la literatura. También observamos que la entropía de las grandes escalas $S(u_{k>})$ se satura luego del rango inercial, proponemos que esto puede ser una medida de los efectos intermitentes y desviaciones de la teoría K41. La parte central del estudio es el análisis de la transición a la turbulencia en una capa límite, nuestros resultados muestran como la información mutua entre las escalas del sistema (caracterizadas por las diferencias de velocidad) alcanza un máximo antes de la transición a la turbulencia seguido de una disminución durante la transición, esto es acompañado de un aumento de la entropía (interpretada como una medida del desorden del sistema). Finalmente estudiamos los perfiles verticales de estas cantidades en un flujo de canal turbulento ($Re_\tau = 5200$), donde observamos que la complejidad tiene un comportamiento logarítmico en la *log-law region* y la entropía disminuye luego de alcanzar un máximo en la *buffer layer*.

Keywords – Turbulencia, Transición a la turbulencia, Complejidad, Teoría de la información, Capa límite

Abstract

In this thesis we studied hydrodynamic turbulence, the first chapters are dedicated to a review of the theory of turbulence, its difficulties and what is the 'problem of turbulence'. Then we introduce information theory, which is used to study turbulence. In order to achieve this, we used data from direct numerical simulations and proposed a methodology used to study mutual information and entropy, which are defined in their continuous form using the Kozachenko-Leonenko estimator (entropy) and the Kraskov estimator (mutual information). In order to validate the tools and methodology used, we compared the entropy of three direct numerical simulations of forced isotropic turbulence at different Reynolds numbers ($Re_\lambda = 433$, $Re_\lambda = 648$ y $Re_\lambda = 1300$) with results that have previously been indicated in the literature. We also observe a saturation in the entropy of the large scales $S(u_{k>})$ during the inertial range, we propose that this could be a measure of intermittency and deviations from K41 theory. The main body of the study is the analysis of the transition to turbulence in a boundary layer. Our results show that the mutual information among the system scales (characterized by the differences in velocity/speed) reaches a maximum before the transition to turbulence, followed by a decrease during the transition, while at the same time there is an increase in entropy (interpreted as a measure of disorder). Finally, we studied the vertical profiles of these quantities in a turbulent channel flow ($Re_\tau = 5200$), where we were able to see that the complexity has a logarithmic behavior in the *log-law region* and the entropy is reduced after reaching a maximum in the *buffer layer*.

Keywords – Turbulence, Information theory, Transition to turbulence, Complexity, Boundary layer

Índice general

| | |
|--|------------|
| AGRADECIMIENTOS | I |
| Resumen | II |
| Abstract | III |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Que es turbulencia? | 3 |
| 1.2. Estado del arte: turbulencia e información | 5 |
| 1.3. Estudio y objetivos | 9 |
| 2. Ecuaciones de Navier-Stokes | 12 |
| 2.1. Ecuaciones de Navier-Stokes en forma solenoidal | 13 |
| 2.2. Ecuaciones de Navier-Stokes en espacio de Fourier | 14 |
| 2.3. Número de Reynolds y ecuaciones en forma adimensional | 17 |
| 2.4. Ecuación de vorticidad | 19 |
| 2.5. Simetrías de las ecuaciones de Navier-Stokes | 21 |
| 3. Estadística | 24 |
| 3.1. Medida y probabilidad | 24 |
| 3.2. Momentos | 28 |
| 3.3. Estadística de varias variables | 30 |
| 3.4. Procesos aleatorios | 32 |
| 3.5. Campos aleatorios | 36 |
| 4. Estadística y Turbulencia | 39 |
| 4.1. Funciones de correlación | 41 |
| 4.2. Simetrías y tensor de correlación. | 43 |
| 4.3. Funciones de correlación en espacio de Fourier | 46 |
| 4.4. Fuerzas externas | 49 |
| 4.5. Balance de energía | 49 |
| 4.6. Balance parcial de energía | 50 |
| 4.7. Balance local | 54 |
| 5. Teoría de Kolmogorov y la Cascada de Energía | 57 |

| | |
|--|------------|
| 5.1. Fenómenos de cascada | 57 |
| 5.2. Teoría K41 de Kolmogorov | 59 |
| 5.3. Ecuación de Karman-Howarth | 65 |
| 5.4. Ley de 4/5 de Kolmogorov | 66 |
| 5.5. Escalamiento anómalo | 68 |
| 6. Estabilidad Hidrodinámica | 71 |
| 6.1. Ecuación de Orr-Sommerfeld | 71 |
| 6.2. Estabilidad en flujos paralelos y ondas de Tollmien-Schlichting | 76 |
| 7. Teoría de la Información | 78 |
| 7.1. Medidas de información | 78 |
| 7.2. Entropía de Shannon, entropía relativa e información mutua | 80 |
| 7.3. Complejidad y teoría de la información. | 85 |
| 7.4. Estimadores continuos de entropía e información mutua. | 95 |
| 8. Análisis de Flujos Turbulentos | 101 |
| 8.1. Metodología aplicada a flujos turbulentos | 101 |
| 8.2. Entropía en teoría K41 | 103 |
| 8.3. Datos utilizados | 105 |
| 8.4. Resultados | 108 |
| 9. Análisis de Resultados | 120 |
| 9.1. Análisis de resultados | 120 |
| 9.2. Conclusiones | 126 |
| Referencias | 129 |
| Apéndices | 139 |
| A1. Ecuaciones de Navier-Stokes en forma Solenoidal | 139 |
| A2. Ecuaciones de Navier-Stokes en espacio de Fourier | 142 |
| A3. Ecuación de vorticidad | 145 |
| A4. Balance parcial de energía | 147 |
| A5. Ecuación de Karman-Howarth | 149 |

Capítulo 1

Introducción

Grandes físicos se han interesado por el estudio de la turbulencia desde los tiempos de Osborne Reynolds [112], aunque las primeras observaciones de la turbulencia se pueden rastrear tan atrás como a la época de Da Vinci, quien en sus dibujos capturó las características de un flujo turbulento con un detalle impresionante para la época [43]. Lev Landau le dedica un capítulo de su sexto tomo en física teórica [78], también propuso un escenario de transición a la turbulencia y es famosa la crítica que le hizo a la teoría de Kolmogorov [51]. Chandrasekhar dictó un curso sobre turbulencia (recientemente las notas de este han sido llevadas a un libro [30]). Kenneth Wilson menciona la turbulencia como ejemplo de un problema con una gran extensión de escalas espaciales en sus artículos sobre renormalización [142, 143] y Feynman utiliza la turbulencia en sus lecturas como ejemplo de la gran cantidad de fenómenos que puede esconder un sistema tan simple como las ecuaciones de Navier-Stokes [47]. El premio Nobel de física en 2021 fue otorgado a 3 científicos por sus aportes al 'entendimiento de sistemas físicos complejos', en particular a Syukuro Manabe y Klaus Hasselmann por sus aportes al estudio del cambio climático (la turbulencia es una parte central en el estudio de la atmósfera), mientras que Parisi también ha estudiado la turbulencia hidrodinámica, es famoso su aporte junto a Frisch sobre modelos multifractales [104].

¿Por qué es tan interesante el estudio de la turbulencia? Puede que existan algunas respuestas relativamente simples a esto. Primero, es un fenómeno que

observamos día a día en casi todos los aspectos de nuestra vida: al mezclar el azúcar en nuestra taza de café agitamos el fluido para mezclarla, constantemente observamos estructuras turbulentas gigantes: las nubes [145]. En nuestro día a día podemos observar flujos turbulentos: la estela tras un barco en movimiento, como observamos en la figura 1.0.1b). También se observan flujos turbulentos en *jets* de fluidos expulsados desde alguna cavidad, como en la figura 1.0.1a), donde se muestra la transición del *jet* desde laminar a turbulento. Juega un rol vital en los aviones, la aerodinámica de los vehículos y hasta en muchos de los deportes que vemos constantemente [55]. Desde el punto de vista de la ingeniería es fundamental comprenderla: todas las industrias poseen cañerías por las que pasan flujos turbulentos y con la urgente necesidad que cambiar nuestras fuentes de energía se ha vuelto más importante comprender el efecto de la turbulencia en la industria de la energía eólica [105]. Nos queda claro entonces que razones prácticas no faltan. Desde un punto de vista teórico la turbulencia ha sido históricamente un problema complicado: la mayoría de los modelos son fenomenológicos y se posee poca comprensión de las estructuras que conforman distintos flujos turbulentos, de la universalidad de algunas de sus características [51] y de como podemos extraer información sobre el fenómeno desde las ecuaciones de Navier-Stokes.

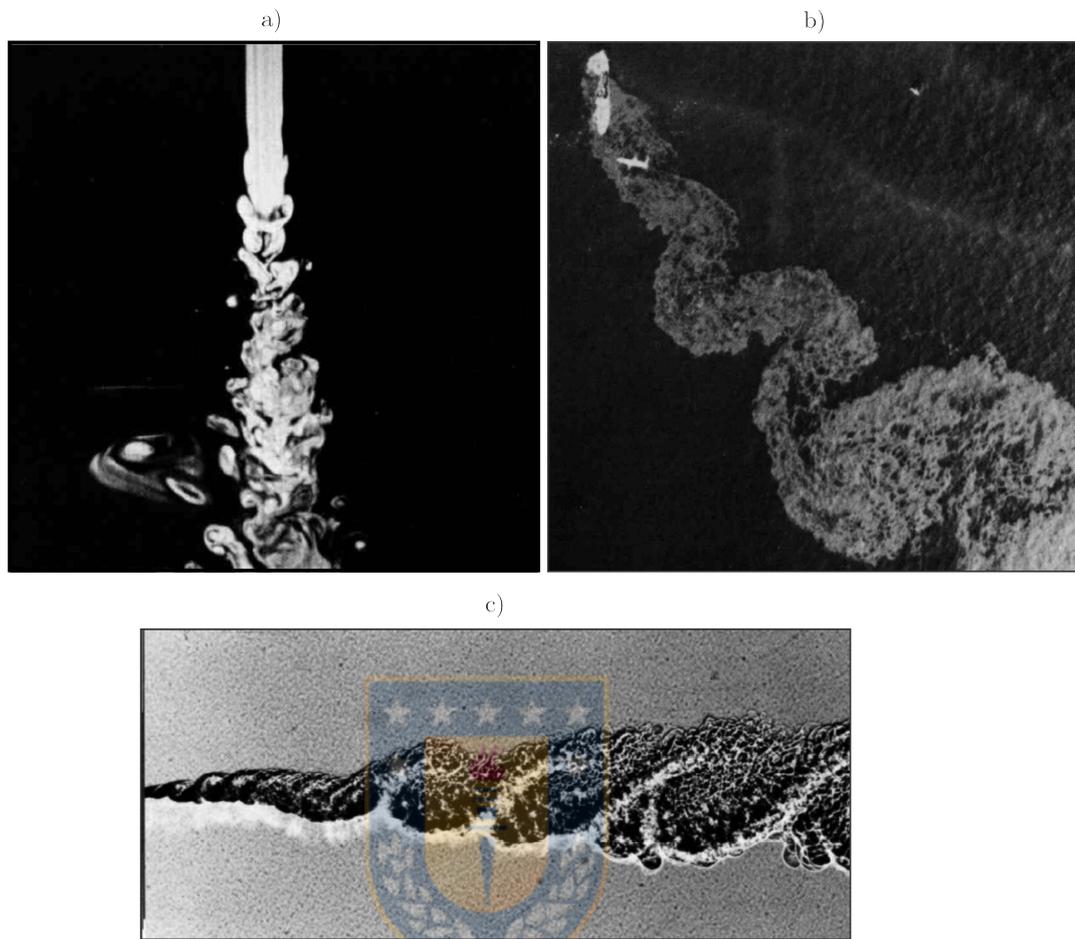


Figura 1.0.1: Fotografías de flujos turbulentos obtenidas del libro *An Album of Fluid Motion* [135]. a) Transición laminar turbulenta en un *jet* de agua. b) Estela turbulenta tras un barco. c) Capa de mezcla turbulenta.

1.1. Que es turbulencia?

Lo más básico para comenzar a estudiar un fenómeno es definirlo. En el caso de la turbulencia la podemos definir según las siguientes características [133],

- Aparente desorden espacial y temporal: este es un ingrediente fundamental. Al observar un flujo turbulento este parece desordenado, sin embargo formalmente esto es solo aparente dado que las ecuaciones de N-S son deterministas y no necesitan de un forzamiento aleatorio para exhibir estados caóticos.
- Sensibilidad a las condiciones iniciales: si consideramos dos configuraciones iniciales de un sistema turbulento, tales que están muy cerca en el espacio

de fase, la evolución del sistema en ambos casos será muy diferente. Esta es una característica de los llamados sistemas 'caóticos' y es lo que motiva el estudio de la turbulencia en el contexto de los sistemas dinámicos.

- Gran número de grados de libertad: los flujos turbulentos son extendidos en un gran rango de escalas (esto puede ser observado en la figura 1.0.1 c), consisten de muchos modos (en el espacio de Fourier) que interactúan fuertemente entre sí ¹.

Junto a estas características se puede agregar que son sistemas fuertemente difusivos ², tridimensionales y disipativos. La turbulencia descrita por Tsinober corresponde a la *turbulencia hidrodinámica*, sin embargo a estos puntos les falta una característica fundamental: en los sistemas turbulentos (incluso no hidrodinámicos) se producen cascadas de las cantidades conservadas (en las ecuaciones no disipativas) entre las distintas escalas. Por ejemplo, en turbulencia hidrodinámica (homogénea e isotropa) se produce una cascada de energía: es inyectada en las escalas más grandes del sistema y fluye hasta las escalas más pequeñas, donde finalmente la energía es disipada. Otros autores como Zakharov y Falkovich [152, 26] proponen una definición menos restrictiva: la turbulencia es el estado de sistemas disipativos no-lineales con muchos grados de libertad muy lejos del equilibrio (básicamente el estado caótico de sistemas extendidos en el espacio). Esta relajación de la definición es la que permite introducir el concepto de turbulencia débil (utilizada como sinónimo de onda débil por Zakharov), la cual consiste de sistemas donde la no-linealidad es débil y por lo tanto se puede tratar el sistema de forma perturbativa. Otro aspecto importante de la turbulencia es que sus distribuciones de probabilidad no son gaussianas, incluso cuando la fuerza excitante es gaussiana esta característica se pierde en la cascada turbulenta [51, 2]. Es importante mencionar que las teorías estadísticas no son las únicas que existen para describir el fenómeno de la turbulencia, hay dos enfoques principales [152]. El primero es estadístico, basado en la teoría de Kolmogorov

¹Un sistema continuo tiene un número infinito de grados de libertad, sin embargo la viscosidad impone un *viscous cutoff* $k_{max} \sim 1/\eta_K$, la razón entre éste y la escala más grande del sistema se considera como una medida de los grados de libertad de un flujo turbulento [51] $(L/\eta_K) \sim Re^{9/4}$. En el espacio de Fourier las no-linealidad de las ecuaciones de Navier-Stokes impone interacciones triádicas entre los modos.

²Los flujos turbulentos son eficientes en mezclar escalares pasivos, para considerar este efecto en el transporte se introduce el concepto de difusión turbulenta [114, 19]. Más recientemente se ha observado el fenómeno de *estocasticidad espontánea*: sin importar la separación inicial de dos partículas en un flujo turbulento, se separan en un tiempo finito [129, 139]

³, y el segundo estructural, basado en la generación de estructuras que poseen forma universal. Más recientemente, el aumento del poder computacional ha permitido la exploración del espacio de estado de sistemas turbulentos, lo que ha llevado al descubrimiento de orbitas periódicas [35], esto asociado al segundo enfoque mencionado anteriormente. También se han desarrollado sistemas simples de ecuaciones diferenciales acopladas conocidos como *shell models* los cuales buscan capturar las principales características de la turbulencia de la forma más simplificada posible [18].

1.2. Estado del arte: turbulencia e información

La fenomenología de lo que llamamos el estado turbulento completamente desarrollado (en sistemas hidrodinámicos) es como sigue: existe una separación entre las escalas en que la energía ingresa al sistema (escala integral) y la escala en la cual esta es disipada (escala de Kolmogorov), existiendo un rango intermedio llamado rango inercial en el cual hay una transferencia de energía constante (en el caso estacionario) desde las escalas integrales hacia las escalas disipativas, esto es conocido como la cascada turbulenta (esta imagen de la turbulencia fue originalmente propuesta por Richardson [38]). La teoría fue posteriormente desarrollada por Kolmogorov [71] (conocida como teoría K41): se asume que, debido a la separación de escalas, ni el forzamiento ni la disipación afectan las cantidades en el rango inercial, por lo que solo son funciones de la transferencia de energía y la escala r que estamos observando. Para caracterizar las escalas se utilizan las diferencias de velocidad longitudinales a una distancia r , los momentos de estas diferencias son conocidos como funciones de estructura $F_p(r)$. La teoría K41 predice que, dada una distancia r en el rango inercial, las funciones de estructura poseen exponentes $\xi_p = p/3$,

$$F_p(r) = \langle [(\vec{v}(\vec{x} + \vec{r}) - \vec{v}(\vec{x})) \cdot \vec{r}]^p \rangle \sim (\epsilon r)^{p/3} \quad (1.2.1)$$

donde los brackets $\langle \cdot \rangle$ representan un promedio de ensamble. Sin embargo, se ha observado que esta teoría no es correcta, debido a que supone que no hay intermitencia en el rango inercial. Originalmente se creía que la intermitencia

³Actualmente se han desarrollado teorías fenomenológicas que explican las desviaciones de la teoría de Kolmogorov, estas son conocidas como teorías multifractales [15]

solo afectaba el rango disipativo, sin embargo diversos experimentos [51] han mostrado que existen desviaciones de la teoría K41. Esto implica escalamiento anómalo (rompimiento de la simetría de escala de las funciones de densidad de probabilidad) en el rango inercial debido a que la intermitencia se extiende a éste. Recientemente, se ha observado que las desviaciones de la teoría K41 se saturan incluso para la función de estructura de segundo orden [65], mostrando evidencia de que la desviación de la teoría de Kolmogorov para el segundo momento no es solo un fenómeno de bajo número de Reynolds. El único resultado que es exacto para los exponentes de las funciones de estructura es para la de tercer orden, con $\xi_3 = 1$. Este exponente es obtenido resolviendo la ecuación de Karman-Howarth [73] solo suponiendo disipación anómala (la disipación se mantiene finita en el límite $Re \rightarrow \infty$) en turbulencia homogénea isotrópica. Para el fenómeno de escalamiento anómalo y las desviaciones de K41 se han propuesto distintos modelos. Los más exitosos han sido los modelos multifractales [94, 15], los cuales suponen que la disipación de energía está concentrada en una región $R(h)$ del espacio, donde h es la singularidad de la región y puede variar en ella (si toda esta región está caracterizada por un solo exponente h entonces el modelo es monofractal). En experimentos recientes [65] se ha observado que el modelo más cercano a los resultados numéricos es el de She y Leveque [124]. Todos estos modelos son fenomenológicos: se obtienen a partir de una imagen del proceso de cascada ⁴ [51] y no a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes. No se han podido obtener soluciones exactas para los momentos de orden distinto a $p = 3$ a partir de estas ecuaciones.

Otro aspecto importante y ampliamente estudiado es la transición a la turbulencia. Landau y Hopf [23] propusieron que en el estado turbulento las cantidades del flujo son descritas por funciones quasi-periódicas y la cantidad de frecuencias asociadas a estas funciones crece con el número de Reynolds, es decir, el flujo en el espacio de fase está limitado a un toroide de dimensión alta. Sin embargo más tarde Ruelle y Takens [116] proponen que este no es el caso para un sistema disipativo y a medida que aumenta el número de Reynolds el espacio de fase

⁴Esta 'imagen' del fenómeno de cascada es como sigue: existen estructuras grandes, estas se rompen en estructuras más y más pequeñas de forma secuencial en el rango inercial, hasta llegar a la escala de Kolmogorov. En las escalas más pequeñas las fuerzas inerciales son del orden de las fuerzas viscosas y las estructuras se disipan.

forma un atractor de dimensión alta pero finita. Es en este segundo contexto que se han aplicado conceptos de la teoría de la información. En los sistemas caóticos el espacio de fase posee características fractales, particularmente la medida es fractal (o multifractal si no es homogénea), por lo que posee una dimensión no-entera, de hecho un atractor extraño puede ser caracterizado por una infinidad de dimensiones [61] D_q . Particularmente, la llamada dimensión de información (asociada a la medida fractal del atractor) nos indica la información ganada al realizar una medición aislada del sistema a un cierto nivel de precisión [46].

Recientemente, se ha observado que la transición a la turbulencia en tuberías pertenece a la misma clase de universalidad que la percolación directa. Estudiando el tiempo de vida medio y el tiempo medio que demoran en dividirse los puntos turbulentos en el flujo se ha definido el número de Reynolds crítico como aquel en que ambos tiempos son iguales (es decir, a partir de este Re es más probable que un punto turbulento se divida y genere más zonas turbulentas a que se produzca relaminarización), dando un valor de $Re_c = 2040 \pm 10$ [6]. Otro flujo canónico donde se ha estudiado la transición es la capa límite. Antes de la transición el flujo es inestable a las perturbaciones, las condiciones de estabilidad son descritas por la ecuación de Orr-Sommerfeld [42]. De interés para nuestro estudio es el escenario de transición propuesto por Baines [7], quien plantea que la transición se debe a la interacción entre dos modos parciales (soluciones de la ecuación de Orr-Sommerfeld) del flujo. El primero es llamado modo viscoso, cuyo efecto es fuerte en la zona cercana a la pared, y el segundo es un modo inviscido⁵, que es despreciable cerca de la pared pero importante en la zona exterior de la capa límite.

Todos los aspectos mencionados anteriormente nos apuntan a una dirección: la turbulencia es un fenómeno de alta complejidad, donde se puede observar la formación de estructuras coherentes y también dinámica aparentemente aleatoria [56, 106]. Esto nos lleva a preguntarnos cómo podemos caracterizar la complejidad de flujos turbulentos. Si bien esta es una pregunta que se ha hecho muchas veces, no es trivial definir una medida de complejidad (de hecho una pregunta válida es si existe ‘una’ medida de complejidad [60]). Bennet [12] propuso la ‘profundidad

⁵Es llamado inviscido debido a que es una solución a la ecuación de Orr-Sommerfeld con viscosidad cero (la ecuación inviscida de Orr-Sommerfeld también es conocida como ecuación de Rayleigh).

lógica', sin embargo no es una medida calculable para efectos prácticos, por lo que una medida más adecuada en nuestro contexto puede ser la información mutua [13]. Otra medida de complejidad fue propuesta por Grassberger, llamada la *EMC (Effective Measure Complexity)*, que es definida como la *mínima cantidad de información total en cualquier tiempo necesaria para una predicción óptima* [59], y ha sido llamada de diferentes maneras por otros autores, como información predictiva o exceso de entropía [84].

Nuestro trabajo está enfocado en aplicar herramientas de la teoría de la información para caracterizar la complejidad, aleatoriedad y las correlaciones (estas últimas medidas como la información mutua) de varios flujos turbulentos. En turbulencia se han utilizado distintas herramientas de la teoría de la información, Cerbus [27] trata el campo de velocidades como un mensaje discreto, a partir de esto estudia la densidad de entropía y concluye que esta disminuye con el número de Reynolds debido a un aumento de correlación en los grados de libertad participantes de la cascada de energía. En esta misma línea [128] ha estudiado la *unpredictability* y el exceso de entropía en el flujo turbulento producido tras un cilindro. También se ha usado la divergencia de Kullback-Leibler o entropía relativa, la cual se ha interpretado como una medida de la intermitencia [58]. Esta también se ha aplicado al estudio de la *auto-similitud* (self-similarity) y distancia de la gaussianidad en capas límites [134]. Anteriormente se ha usado la diferencia de entropía como una medida de la 'complicación' (sin embargo es importante notar que no es una medida de complejidad, sino que de desorden) de un flujo turbulento [16] y también se han caracterizado sistemas turbulentos en términos de la información mutua [63]. En esta última aplicación no se estudió un sistema hidrodinámico, sino que un modelo de turbulencia química. Un estudio de particular interés es el de Shavit y Falkovich [122], quienes investigan la información mutua entre escalas en un modelo de turbulencia débil (*wave turbulence*). Observan que la dirección en que crece la cascada en sistemas turbulentos está determinada por la información mutua entre sus modos, dado que esta indica el crecimiento de las correlaciones en el sistema. Mencionan también que la información mutua es una medida de cuánta información está 'codificada' en las correlaciones del sistema, por lo que es de esperar que la información mutua esté relacionada con la complejidad del sistema. Estas herramientas también

han sido utilizadas en el área de la materia activa [37, 31]. Se ha observado, por ejemplo, que la información mutua sirve como indicador de la transición de fase en el modelo de Vicsek [140] (un comportamiento similar se ha observado en el modelo de Ising [141]). Más recientemente parece haber un aumento del interés en la aplicación de la teoría de la información a flujos turbulentos, Lozano-Durán y Arranz [87] proponen un marco general para la aplicación de cantidades como entropía y flujo de información a sistemas dinámicos. Luego aplican estos conceptos al estudio de la causalidad en la cascada turbulenta y proponen aplicaciones a la modelación y el control de flujos turbulentos. También es interesante el estudio de Tanogami y Akari [127] donde investigan una cantidad similar a una de las que proponemos (información mutua entre las velocidades filtradas en el espacio de Fourier) y también analizan el *learning rate* en la cascada turbulenta: sus resultados sugieren que las estructuras más grandes de la cascada destruyen la información sobre las pequeñas, mientras que las estructuras pequeñas 'aprenden' o reciben un flujo positivo de información de las grandes. Un punto importante a notar es que el trabajo de Tanogami y Akari fue aplicado a un *shell model* y no a simulaciones numéricas directas de flujos turbulentos, por lo que está pendiente confirmar de forma numérica o experimental sus resultados.

1.3. Estudio y objetivos

Comenzamos por describir las motivaciones que nos llevan a realizar esta investigación, si bien la mayoría es una descripción de trabajo que se busca realizar en el futuro, esperamos que este sea un primer paso en las direcciones que planteamos a continuación. La aplicación más natural de la teoría de la información a la turbulencia es al estudio de la pérdida de gaussianidad en la cascada turbulenta. Es sabido que aunque las escalas más grandes son (aproximadamente) gaussianas, esta propiedad se pierde en las escalas más pequeñas. Un importante estudio en esta dirección es el de Granero-Belinchón [58], en su investigación propone la divergencia de Kullback-Leibler entre una distribución gaussiana y la distribución real a cierta escala como una medida de la intermitencia. Más recientemente, se ha observado que en ciertos modelos de turbulencia existe una invariancia de escala 'escondida' en los multiplicadores de Kolmogorov [123]. En su investigación Shavit propone que esta invariancia se

debe a una 'no-localidad extrema' en las interacciones. Podemos aplicar la teoría de la información para estudiar estas interacciones?. Como ya mencionamos anteriormente, Tanogami propone un flujo de información positivo desde las grandes escalas hacia las pequeñas, pero además se cree que las estadísticas del rango inercial y las escalas pequeñas son universales, es decir, deben 'olvidar' la información sobre el forzamiento a gran escala. Existe una relación entre esto y lo propuesto por Tanogami [127]? Puede la teoría de la información decirnos algo sobre la universalidad del rango inercial? Finalmente, donde parece más natural aplicar estas herramientas es en el área de la turbulencia activa, donde las interacciones entre los individuos puede ser efectivamente comunicación. Se han observado similitudes entre la turbulencia activa y la hidrodinámica [21]. Si existe una transferencia de información entre estructuras de diferentes escalas en turbulencia hidrodinámica, puede ocurrir lo mismo en turbulencia activa? Es decir, puede ser que la transferencia de información sea entre estructuras más que a un nivel individual, y además tenga una dirección bien definida? Otra pregunta que nos surge es qué ocurre con el intercambio de información durante la transición a la turbulencia activa.

Presentadas nuestras motivaciones para el estudio de la turbulencia y la teoría de la información, nos enfocamos en lo que buscamos estudiar con nuestro trabajo. Vamos a aplicar la teoría de la información a flujos turbulentos. Comenzamos por el análisis de la distribución de entropía en tres flujos turbulentos canónicos: turbulencia homogénea e isotrópica, capa límite transicional y flujo de canal. La entropía es interpretada como una medida de la aleatoriedad del flujo. Algunas preguntas que surgen son: cómo se comporta la entropía en las diferentes escalas? Como se comporta la entropía en la transición a la turbulencia? Si bien es de esperar que aumente debido a que la aleatoriedad es una de las características más mencionadas del estado turbulento. La entropía es una medida de la información contenida en el flujo, sin embargo la información también está contenida en las correlaciones, las cuales varían entre las escalas del problema. Para estudiar esto último es que analizamos la información mutua entre las escalas del sistema (definidas en el espacio de Fourier y en términos de las diferencias de velocidades), específicamente nos preguntamos lo siguiente: como varía la información mutua a través de las escalas del sistema?Cuál es el cambio relativo de ésta información en

los diferentes estados (laminar, transicional y turbulento) del sistema? Existe una diferencia notable entre las diferentes escalas? Finalmente, queremos determinar la *EMC* o información predictiva.- Esto nos sirve para estudiar la complejidad del sistema, y debido a la noción que se tiene de complejidad (debería alcanzar un máximo entre el estado ordenado y el caótico [60]) esperamos encontrar un máximo en la zona de transición. Luego comparamos estos resultados con la información mutua entre escalas y analizamos si esta última sirve como una medida de complejidad en flujos turbulentos. Los objetivos de nuestro estudio son,

- Plantear el uso de las herramientas de la teoría de la información (entropía, información mutua y complejidad) y proponer una metodología para el análisis de flujos turbulentos.
- Validar nuestra metodología y herramientas usadas comparando con resultados reportados por Granero-Belinchón [58] en flujos homogéneos isótropos.
- Analizar la universalidad de la pequeña escala según los resultados obtenidos para la información mutua en flujos homogéneos isótropos.
- Estudiar el comportamiento de la entropía, información mutua y complejidad en la transición a la turbulencia con la metodología propuesta. Interpretar los resultados y comparar con estudios anteriores (en particular estudio de Langton sobre la transición en la dinámica de autómatas celulares [79]).
- Obtener perfiles verticales de cantidades estudiadas en un flujo de canal y analizar los resultados en el contexto de teorías actuales sobre generación de estructuras turbulentas en capas límite.
- Proponer aplicaciones futuras en la línea de la visión propuesta y los resultados obtenidos.

Capítulo 2

Ecuaciones de Navier-Stokes

La evolución temporal de los fluidos viscosos está descrita (en la mayoría de los escenarios) por las ecuaciones de Navier-Stokes,

$$\partial_t \vec{v} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}_{\text{No linealidad}} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \underbrace{\nu^2 \nabla^2 \vec{v}}_{\text{Disipación}} \quad (2.0.1)$$

Se puede notar que poseen un término no lineal, el cual está asociado al transporte advectivo del momentum (es decir, transporte en la dirección del campo de velocidad \vec{v}). Los otros términos corresponden a la presión (p) y la disipación generada por el efecto de la viscosidad del fluido ν . Durante este trabajo solo consideramos fluidos incompresibles, es decir, no tomamos en cuenta variaciones de densidad. Esto impone la siguiente condición en el campo de velocidades,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.0.2)$$

En términos prácticos, esto se puede considerar como una buena aproximación cuando la escala de velocidad del fluido es menor a $0.3Ma$, donde Ma es el número de Mach [107].

Antes de continuar es importante mencionar que existen otras ecuaciones que pueden describir la dinámica de los fluidos en distintos escenarios. El sistema de Navier-Stokes 2.0.1 se puede obtener a partir de la ecuación de Boltzmann realizando una expansión de Chapman-Enskog en el número de Knudsen $Kn = \ell/L$

[41]. Este número adimensional es una relación entre el *mean-free path* del gas ℓ y una escala macroscópica característica del problema L (por ejemplo, el tamaño del recipiente que contiene el fluido). Cuando consideramos solo los términos de orden 0 obtenemos las ecuaciones de Euler (que no contienen el término viscoso). Si consideramos hasta el primer orden en Kn obtendremos las ecuaciones de Navier-Stokes. En ocasiones, donde $Kn \sim 1$, es necesario considerar los términos cuadráticos. Las ecuaciones que surgen en este caso son conocidas como ecuaciones de Burnett, y si consideramos los términos de orden 3, ecuaciones de super-Burnett. Las diferentes situaciones son resumidas en el diagrama mostrado en la figura 2.0.1.

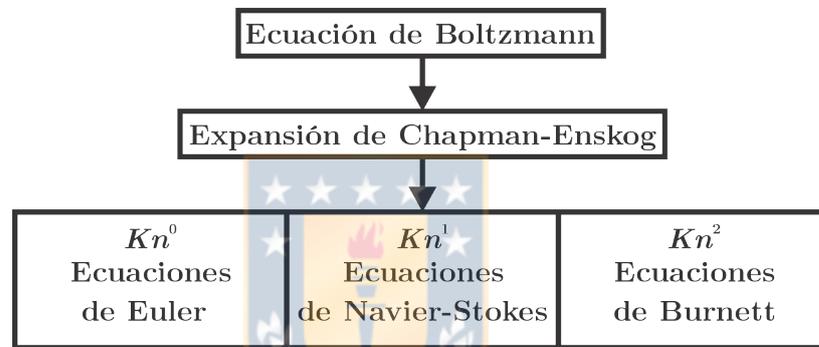


Figura 2.0.1: Distintas ecuaciones obtenidas a partir de la expansión de Chapman-Enskog de la ecuación de Boltzmann.

2.1. Ecuaciones de Navier-Stokes en forma solenoidal

Es instructivo expresar las ecuaciones de Navier-Stokes solo en términos del campo de velocidad. Si tomamos la divergencia de las ecuaciones 2.0.1, y teniendo en cuenta la condición de incompresibilidad, obtenemos la siguiente ecuación diferencial para la presión,

$$\frac{1}{\rho} \partial_i \partial_i p = -\partial_i \partial_j (v_i v_j). \quad (2.1.1)$$

Si consideramos un fluido en un contenedor o un volumen en el cual existe alguna pared se impone la condición de borde de 'no-deslizamiento': el campo de velocidad

se debe anular en la pared ¹,

$$v_i(\vec{x}) = 0 \quad , \quad \vec{x} \in S \quad (2.1.2)$$

donde S es la union de las superficies en que existen paredes. Con estas condiciones presentes podemos expresar las ecuaciones de Navier-Stokes en términos del campo de velocidad y las funciones de Green G (más detalles de la derivación se pueden encontrar en el Apéndice A). Esta forma es conocida como 'solenoidal' [91] ²,

$$(\partial_t - \nu) v_i(\vec{x}, t) = \hat{M}_{imn} (v_m(\vec{x}, t) v_n(\vec{x}, t)) - \hat{L}_{im}(u_m(\vec{x}, t)). \quad (2.1.3)$$

Los operadores \hat{M} y \hat{L} están dados por,

$$\hat{M}_{mnl}(\cdot) = -\frac{1}{2} \left[\partial_n \hat{D}_{ml}(\cdot) + \partial_l \hat{D}_{mn}(\cdot) \right], \quad (2.1.4)$$

$$\hat{L}_{mn}(\cdot) = \nu \partial_m \int_S G(\vec{x}, \vec{x}') n_n \partial_p \partial_p(\cdot) d\vec{x}'. \quad (2.1.5)$$

En estas expresiones S representa el contorno del volumen que contiene el fluido (sujeto a la condición de borde de no-deslizamiento) y n_n un vector normal a esta superficie. El operador \hat{D} está dado por,

$$\hat{D}_{mn}(\cdot) = \delta_{mn}(\cdot) - \partial_m \partial_n \int_V G(\vec{x}, \vec{x}')(\cdot) d\vec{x}' \quad (2.1.6)$$

Donde V es el volumen que contiene el fluido.

2.2. Ecuaciones de Navier-Stokes en espacio de Fourier

También es importante expresar las ecuaciones de Navier-Stokes en el espacio de Fourier. Existen dos razones principales que explican la importancia de esta proyección. La primera es una teórica: es sabido que la turbulencia es un

¹En el caso de las ecuaciones de Euler solo se impone una condición de no-penetración en la pared (se anula la componente normal de la velocidad). La presencia de viscosidad hace necesario introducir una condición extra de no-deslizamiento (se anula la componente tangencial).

²Son llamadas así dado que las soluciones al sistema pertenecen al subespacio de campos vectoriales solenoidales (con divergencia cero).

fenómeno de escalas. Descomponer el campo de velocidades en modos de Fourier nos permite estudiar las diferentes escalas de forma directa (están dadas por la magnitud del número de onda \vec{k}). La segunda es una razón práctica: los métodos más eficientes para realizar simulaciones numéricas directas son espectrales o pseudo-espectrales [97], por lo que es necesario comprender las ecuaciones en el espacio de Fourier para aplicarlos.

Comenzamos por considerar un fluido que llena todo el espacio, entonces la transformada de Fourier (espacial) y su inversa están dadas por,

$$v_i(\vec{k}, t) = \int v_i(\vec{x}, t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{x} \quad (2.2.1)$$

$$v_i(\vec{x}, t) = \int v_i(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{k} \quad (2.2.2)$$

Si consideramos un cubo de volumen L^3 , con L finito entonces la integral $\int d\vec{k}$ es reemplazada por $(\frac{2\pi}{L})^3 \sum_{\vec{k}}$. En la tabla 2.2.1 se muestran los resultados para ambos casos término a término y las ecuaciones que describen los coeficientes de Fourier de la velocidad $v_{i,\vec{k}} = v_i(t, \vec{k})$. La derivación de estas ecuaciones es detallada en el Apéndice B.

| Término | L finito | $L \rightarrow \infty$ |
|---|--|--|
| $\partial_t v_i$ | $\sum_{\vec{k}} \partial_t v_{i,\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ | $\int \partial_t v_{i,\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{k}$ |
| $v_j \partial_j v_i$ | $i \sum_{\vec{k}} k_j \sum_{\vec{p}} v_{j,\vec{p}} v_{i,\vec{k}-\vec{p}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ | $-i \int k_j \int v_{j,\vec{p}} v_{i,\vec{k}-\vec{p}} d\vec{p} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{k}$ |
| $\partial_i p$ | $i \sum_{\vec{k}} k_i \frac{k_n k_m}{k^2} \sum_{\vec{p}} v_{n,\vec{p}} v_{m,\vec{k}-\vec{p}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ | $i \int k_i \frac{k_n k_m}{k^2} \int v_{n,\vec{p}} v_{m,\vec{k}-\vec{p}} d\vec{p} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{k}$ |
| $\nu \partial_j \partial_j p$ | $-\nu \sum_{\vec{k}} k^2 v_{i,\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ | $-\nu \int k^2 v_{i,\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{k}$ |
| Ecuación L finito | | |
| $(\partial_t + \nu k^2) v_{i,\vec{k}} = -ik_n \sum_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}} v_{n,\vec{p}} v_{m,\vec{q}}$ | | |
| Ecuación $L \rightarrow \infty$ | | |
| $(\partial_t + \nu k^2) v_{i,\vec{k}} = -ik_n P_{im} \int \int v_{n,\vec{p}} v_{m,\vec{q}} \delta(\vec{q} + \vec{k} - \vec{p}) d\vec{q} d\vec{p}$ | | |

Cuadro 2.2.1: Términos y ecuaciones de Navier-Stokes en espacio de Fourier en el caso de un fluido llenando el espacio ($L \rightarrow \infty$) y un fluido en una caja finita de volumen L^3 . En el caso de L finito se omiten las constantes dependientes del volumen del fluido.

Ahora debemos hacer varios comentarios sobre las ecuaciones mostradas en la

tabla 2.2.1. Primero notemos la presencia del término P_{im} , este es un operador de proyección,

$$P_{im} = \delta_{im} - \frac{k_i k_m}{k^2} \quad (2.2.3)$$

notamos que al operar sobre un vector v_i obtenemos $P\vec{v} = \vec{v} - (\vec{v} \cdot \hat{k})\hat{k}$ donde \hat{k} es el vector unitario en la dirección de \vec{k} . Por lo tanto P_{im} proyecta un vector sobre el plano perpendicular a \vec{k} .

El siguiente punto es con respecto a las condiciones que debe satisfacer la velocidad en el espacio de Fourier. Primero recordemos que estamos estudiando flujos incompresibles, por lo tanto satisfacen $\partial_i v_i = 0$,

$$\partial_i v_i = \partial_i \int v_{i,\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{k} = i \int k_i v_{i,\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{k} = 0 \quad (2.2.4)$$

Por lo que llegamos a la condición $k_i v_{i,\vec{k}} = 0$ o $\vec{k} \cdot \vec{v}_{\vec{k}} = 0$, es decir, la transformada de Fourier de la velocidad es perpendicular al vector \vec{k} . Además sabemos que la velocidad toma valores reales, por lo tanto $v_i(\vec{x}, t) = v_i^*(\vec{x}, t)$ donde $(\cdot)^*$ representa el conjugado de un número complejo. Por lo tanto,

$$v_{i,\vec{k}}^* = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int v_i e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{x} \quad (2.2.5)$$

y notamos que se satisface,

$$v_{i,\vec{k}}^* = v_{i,-\vec{k}} \quad (2.2.6)$$

Un último comentario sobre las ecuaciones es respecto al término de la derecha (que proviene de la no-linealidad y la presión). Vemos que la suma o la integral es sobre triadas de números de onda $\vec{k} = \vec{p} + \vec{q}$. Existen muchas discusiones importantes sobre el rol de estas interacciones triádicas en la turbulencia [75, 96, 3, 138], el cual discutiremos en otra sección.

2.3. Número de Reynolds y ecuaciones en forma adimensional

Otra forma de expresar las ecuaciones de Navier-Stokes es en forma adimensional. Consideremos el sistema 2.0.1 e introduzcamos escalas de velocidad (U) y longitud (L) características de un flujo, como se muestra en la figura 2.3.2. Si escribimos las distintas cantidades de la ecuación 2.0.1 en función de estas escalas obtenemos,

$$\vec{v} = U\vec{v}' \quad \vec{\nabla} = \frac{1}{L}\vec{\nabla}' \quad \partial_t = \frac{U}{L}\partial_t' \quad p = \rho U^2 p', \quad (2.3.1)$$

donde las cantidades con primas corresponden a las versiones adimensionales. Reemplazando esto en la ecuación 2.0.1 obtenemos,

$$\partial_t' \vec{v}' + (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{v}' = -\vec{\nabla}' p' + \frac{1}{Re} \nabla'^2 \vec{v}'. \quad (2.3.2)$$

La importancia de esta versión de las ecuaciones de Navier-Stokes es que solo dependen de un parámetro adimensional, conocido como el número de Reynolds,

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (2.3.3)$$

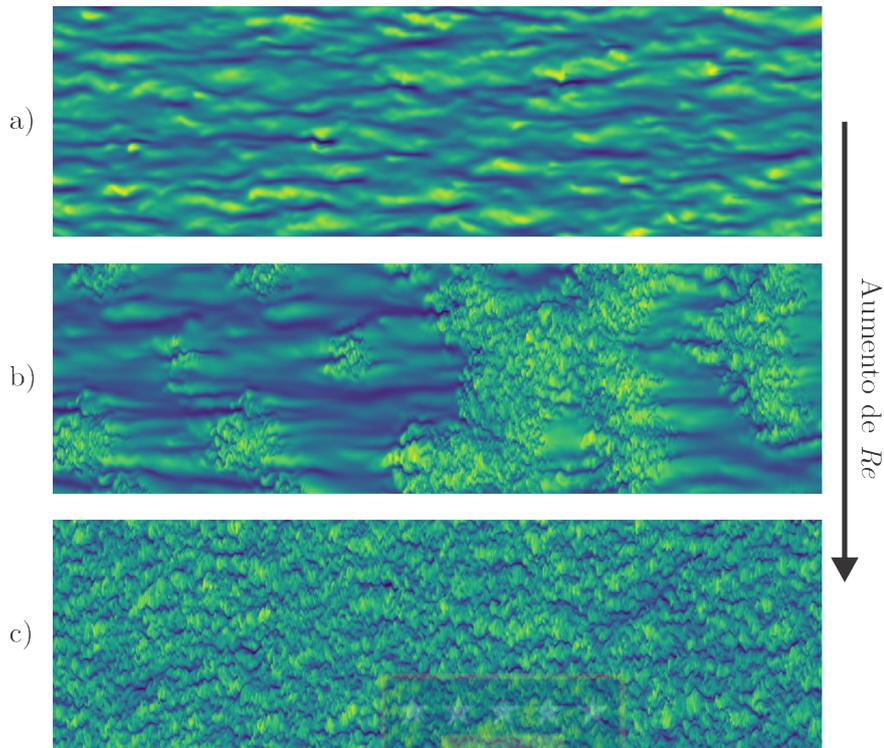


Figura 2.3.1: Ejemplos de flujos a) laminar, b) transicional y c) turbulento. Los campos de velocidad mostrados corresponden a la simulación numérica directa de una capa límite transicional, obtenida desde la base de datos JHTDB.

La importancia de esta cantidad en la dinámica de los fluidos fue descubierta originalmente por Osborne Reynolds [111]. En su investigación de 1895 Reynolds buscaba descubrir las razones tras el cambio en el tipo de movimiento de los fluidos, desde un estado 'ordenado' (conocido como flujo laminar) a un estado 'desordenado' conocido como flujo turbulento. En sus investigaciones en flujos de tuberías Reynolds descubrió que esta transición en la dinámica estaba dictada por el parámetro que actualmente conocemos como número de Reynolds Re . En la figura 2.3.1 se muestran los tres escenarios que pueden ocurrir en un flujo:

- En el estado laminar, donde Re toma valores bajos, la dinámica es dominada por el término viscoso. Esto es mostrado en la figura 2.3.1a)
- A medida que aumenta el número de Reynolds comienzan a aparecer zonas conocidas como 'puntos turbulentos' o 'puffs turbulentos' [6], caracterizados por la aparición de estructuras de pequeña escala, como se observa en la figura 2.3.1b).
- Cuando el número de Reynolds pasa un valor crítico, la dinámica es dominada

por el término no-lineal de la ecuación 2.0.1 y el flujo es caracterizado por una gran extensión de escalas activas en el espacio de Fourier. Este estado corresponde a la figura 2.3.1c).

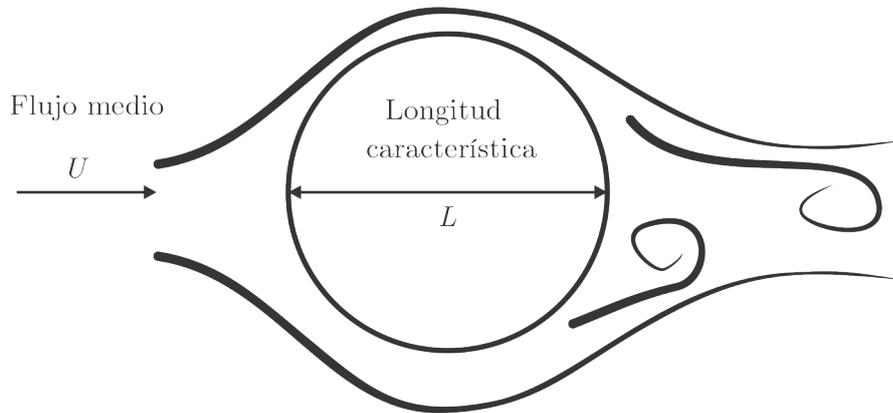


Figura 2.3.2: Esquema de escalas características en un flujo, U representa una escala de velocidad, en este caso corresponde a la velocidad media del flujo no perturbado. L es la escala de longitud, en la figura corresponde al diámetro del cilindro.

2.4. Ecuación de vorticidad

Para comenzar el estudio de la turbulencia hidrodinámica primero debemos saber cuales son las cantidades importantes y cual es su rol en la dinámica del flujo. Las conocidas ecuaciones de Navier-Stokes corresponden al balance de momentum, pero el campo de velocidades no es el único importante y también nos revelarán mucha información sobre la dinámica de los flujos turbulentos cantidades como la vorticidad, helicidad, enstrofia o energía (las últimas 3 son cantidades conservadas por las ecuaciones de Euler, es decir, en ausencia de viscosidad). A continuación presentamos la ecuación de evolución de la vorticidad, a partir de la cual se definen la enstrofia y la helicidad.

La vorticidad es una medida de la rotacionalidad del flujo. Es definida como,

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} \quad (2.4.1)$$

De inmediato podemos notar un aspecto importante sobre la vorticidad, su relación

con la velocidad es no-local, dado que de la ley de Biot-Savart tenemos,

$$\vec{v} = \int \vec{\omega} \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x' \quad (2.4.2)$$

Es lógico pensar que ésta es una cantidad vital en el estudio de la turbulencia, pues al pensar en un flujo turbulento lo primero que se nos viene a la mente es una imagen de distintos tipos de remolinos de diferentes tamaños interactuando entre sí. La ecuación que describe la evolución temporal de la vorticidad es,

$$\partial_t \vec{\omega} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (2.4.3)$$

Detalles sobre su derivación se pueden encontrar en el Apéndice C. Los aspectos más importantes de ésta son:

- La vorticidad también es transportada por advección (segundo término del lado izquierdo).
- Contiene un término asociado al estiramiento de vórtices (primer término al lado derecho).

El segundo punto es importante dado que algunos autores han propuesto que este término es el principal responsable de la emergencia de pequeñas escalas en flujos turbulentos [57]. Esto es aún un debate abierto y se han propuestos otras razones para la ocurrencia de la cascada en el espacio físico, como la auto-amplificación del tensor de deformaciones [67, 25]. Otro punto importante es que el término correspondiente al estiramiento de vórtices es cero en flujos bidimensionales, esto genera una diferencia fundamental entre flujos turbulentos en 2 y 3 dimensiones.

Con la ecuación de vorticidad tenemos la evolución temporal de las dos principales cantidades de un flujo turbulento. A partir de estas se pueden formar las tres invariantes de las ecuaciones de Euler,

- Energía: $E = \frac{1}{2} \int u^2 dV$
- Helicidad: $He = \frac{1}{2} \int \vec{u} \cdot \vec{\omega} dV$
- Enstrofía: $\Omega = \frac{1}{2} \int \omega^2 dV$

Cuando un flujo es turbulento estas invariantes fluyen a través de las escalas

en el espacio de Fourier con una dirección bien definida, este fenómeno es el que se conoce como 'cascada turbulenta' [26], y pueden ser directas o inversas, dependiente de la dirección del flujo.

2.5. Simetrías de las ecuaciones de Navier-Stokes

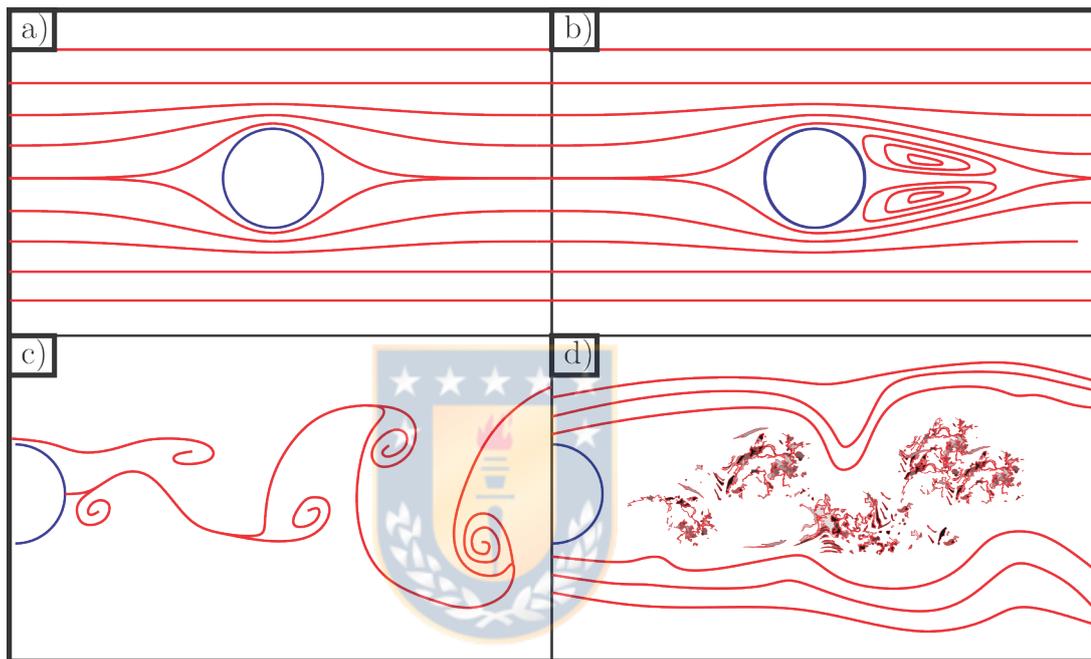


Figura 2.5.1: Esquema de flujo en torno a un cilindro para distintos números de Reynolds. a) $Re \sim 1$, b) $Re \sim 10$, c) $Re \sim 10^2$ y d) $Re \sim 10^4$

Las ecuaciones de Navier-Stokes poseen un conjunto de simetrías que se muestran de forma esquemática en la figura 2.5.1,

- invariancia bajo reflexiones respecto al eje vertical
- invariancia bajo traslaciones respecto al eje horizontal
- invariancia bajo traslaciones en el eje perpendicular a la figura
- invariancia bajo traslaciones temporales

La invariancia bajo reflexiones con respecto al eje vertical se puede observar en el caso a), sin embargo, ésta no es una simetría de las ecuaciones y solo

es aproximada para valores de Re muy bajos ³ [51]. En el caso de reflexiones horizontales, tanto a) como b) presentan ésta simetría, la cual se rompe a medida que aumentamos el número de Reynolds. Cuando llegamos al caso c) también ocurre un cambio en la invariancia bajo traslaciones temporales, que en los casos a) y b) es continua, mientras que en c) pasa a ser discreta. Finalmente en el caso d) (luego de la transición turbulenta) no existe ninguna simetría. Sin embargo, para números de Reynolds altos las simetrías son recuperadas en un sentido estadístico, por esto es tan importante una descripción estadística de la turbulencia.

En términos formales, dada una transformación \hat{g} actuando sobre una solución $\vec{v}(t, \vec{r})$, entonces, como indica Frisch [51] las ecuaciones de Navier-Stokes poseen las siguientes simetrías conocidas (considerando que las solucionamos en una caja periódica de tamaño característico L),

- Traslaciones espaciales, $\hat{g}_\rho : t, \vec{r}, \vec{v} \rightarrow t, \vec{r} + \vec{\rho}, \vec{v}$
- Traslaciones temporales, $\hat{g}_\tau : t, \vec{r}, \vec{v} \rightarrow t + \tau, \vec{r}, \vec{v}$
- Transformaciones de Galileo, $\hat{g}_U : t, \vec{r}, \vec{v} \rightarrow t + \tau, \vec{r} + \vec{U}\tau, \vec{v} + \vec{U}$
- Paridad, $\hat{g}_P : t, \vec{r}, \vec{v} \rightarrow t, -\vec{r}, -\vec{v}$
- Rotaciones, $\hat{g}_R : t, \vec{r}, \vec{v} \rightarrow t, \hat{R}\vec{r}, \hat{R}\vec{v}$
- Escalamiento $\hat{g}_S : t, \vec{r}, \vec{v} \rightarrow \lambda^{1-h}t, \lambda\vec{r}, \lambda^h\vec{v}$

Es importante mencionar que la simetría bajo rotaciones se mantiene solo si $L \rightarrow \infty$ (cuando consideramos el fluido en un cubo con condiciones de borde periódicas, claramente esta simetría no existe en la figura 2.5.1 ⁴). En cuanto a la simetría de escalamiento, en el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes solo es válida si $h = -1$ para viscosidad finita. Para viscosidad cero (o cuando ésta tiende a cero) se permite un rango de valores de h , como mencionaremos más adelante, este exponente esto es crucial para realizar una conexión entre las ecuaciones de Euler y las ecuaciones de Navier-Stokes, y es un tema central en las teorías fenomenológicas que se han desarrollado para explicar la turbulencia desde un

³En este estado el término no-lineal es despreciable y el flujo es conocido como 'flujo de Stokes' o *creeping flow*.

⁴Aunque puede existir en un sentido estadístico en la estela turbulenta del flujo lejos de la pared del cilindro cuando $Re \rightarrow \infty$

punto de vista estadístico.



Capítulo 3

Estadística

La turbulencia ha sido ampliamente estudiada desde un punto de vista estadístico [98]. Es natural preguntarse ¿por qué necesitamos una descripción estadística de la turbulencia, o de sistemas físicos deterministas en general?. La respuesta consiste de dos partes, que en su combinación hacen necesaria una descripción estadística.

- La primera es que a la hora de estudiar un sistema físico no tenemos una certidumbre total sobre las condiciones iniciales/de borde, esto naturalmente introducirá incertidumbre a los resultados medidos y provocará diferencias a la hora de compararlos con resultados teóricos.
- Existen sistemas llamados caóticos que tienen una gran sensibilidad a las condiciones iniciales, es decir, un pequeño cambio en estas generará una gran diferencia en los resultados. Un punto importante de estos sistemas es que poseen una 'medida' (de probabilidad) invariante.

La combinación de estos dos puntos hace conveniente y útil una descripción estadística del problema [98, 36].

3.1. Medida y probabilidad

Ahora que de alguna forma se justifica el 'por qué' necesitamos la estadística, debemos desarrollar las herramientas que utiliza. Primero nos preguntamos, qué es una probabilidad? Una probabilidad es una medida. Esto se entiende mejor al pensar en eventos o procesos estocásticos (es decir, no deterministas). Supongamos

que tenemos la serie de tiempo de una variable aleatoria u , como se muestra en la figura 3.1.1.

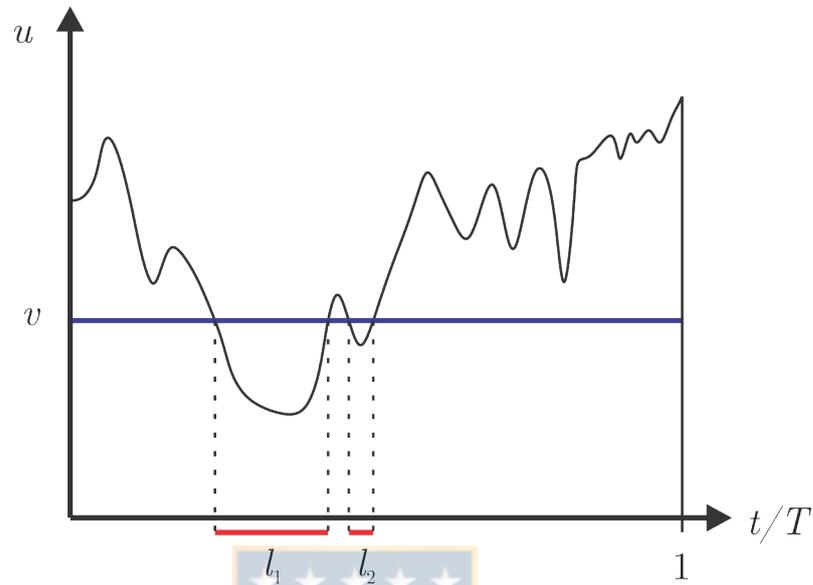


Figura 3.1.1: Probabilidad como la medida de un conjunto.

Ahora realizamos la siguiente pregunta: si seleccionamos n instantes de tiempo al azar, cuántas veces el valor de u será menor a cierto valor v ? En este sentido la probabilidad es una medida, dado que se puede identificar con la razón entre la cantidad de veces que se cumple la condición y el total de veces que ocurre algo, en el caso continuo (como en la figura 3.1.1) es la razón entre los intervalos que cumplen la condición y el tamaño total. Si normalizamos el eje x según el tiempo total de la serie, entonces podemos caracterizar la probabilidad como el tamaño (la medida) de los subconjuntos de $[0, 1]$ que cumplen cierta condición,

$$Pr \{u < v\} = \mu \{x | u < v\} \quad (3.1.1)$$

Donde μ es llamada una medida, que intuitivamente es una forma de identificar el conjunto con un tamaño ¹. En el ejemplo de la figura,

$$Pr \{u < v\} = l_1 + l_2 \quad (3.1.2)$$

¹Para más información sobre teoría de la medida y probabilidad se pueden consultar los textos de Lumley [88] o Lasota [80], por ahora no adentraremos más en estos aspectos matemáticos sin embargo algunos resultados como el teorema de Radon-Nikodym son importantes para el estudio de sistemas dinámicos

Ésta definición de probabilidad es simplemente una generalización del caso discreto, donde la probabilidad de que ocurra un evento entre N será,

$$Pr \{u \leq v\} = \frac{n(u < v)}{N} \quad (3.1.3)$$

Ahora podemos introducir una 'función' que nos describa la probabilidad,

$$F(v) = Pr \{u < v\} = \mu \{x|u < v\} \quad (3.1.4)$$

la cual es conocida como función de probabilidad acumulada. Podemos identificar de inmediato sus propiedades:

- Debe ser monótona creciente, dado que si tenemos $F(v_1) = Pr \{u < v_1\}$ y $F(v_2) = Pr \{u < v_2\}$ con $v_2 > v_1$, es claro que $F(v_2) \geq F(v_1)$. El intervalo asociado a la segunda probabilidad es al menos tan grande como el asociado a la primera.
- La probabilidad $F(v)$ cuando $v \rightarrow -\infty$ debe ser 0. Esto es válido para cantidades físicas, pero pueden tomar un valor infinito en un conjunto de medida 0 sin afectar ésta propiedad (en el conjunto $[0, 1]$ un subconjunto de medida 0 es por ejemplo el de los números racionales).
- La probabilidad $F(v)$ cuando $v \rightarrow \infty$ debe ser 1.
- Dado que $F(v)$ es monótona creciente y es 0 cuando $v \rightarrow -\infty$, entonces $F(v) \geq 0$. Esta es una propiedad de la medida μ , pero también es intuitivo que no puede existir una probabilidad negativa.

Ahora consideremos el caso en que queremos determinar la probabilidad $Pr\{v_1 < u < v_2\}$,

$$Pr\{v_1 < u < v_2\} = \mu\{v_1 < u < v_2\} = \mu\{u < v_2\} - \mu\{u < v_1\} = F(v_2) - F(v_1) \quad (3.1.5)$$

Donde se utiliza la propiedad de la medida de probabilidad (que está normalizada a 1 dado que la probabilidad total es 1) $\mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B)$ [20]. A partir de esto también nos podemos preguntar cuál es la probabilidad de encontrar el valor de la variable u en un intervalo infinitesimal $[v, v + dv]$, la respuesta a esto está dada por la función de densidad $\rho(v)$ (cuya existencia está garantizada bajo

ciertas condiciones por el teorema de Radon-Nikodym). Con esta función podemos expresar la probabilidad de un subconjunto A del espacio de muestra (espacio v que consiste de todos los posibles valores de una realización u del sistema),

$$Pr\{A\} = \nu\{A\} = \int_A \rho(v)\mu(dv) \quad (3.1.6)$$

Donde ν es otra medida construida a partir de la medida μ . Generalmente μ se puede tomar como la medida de Lebesgue (que coincide con la noción usual de volumen en \mathbb{R}^n). La función $\rho(v)$ también se conoce como la derivada de Radon-Nikodym y se escribe como,

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \rho(v) \quad (3.1.7)$$

O en términos de la función de probabilidad acumulada $F(v)$,

$$\rho(v) = \frac{dF}{dv} \quad (3.1.8)$$

Para que $\rho(v)$ sea una densidad de probabilidad debe cumplir ciertas propiedades, teniendo en cuenta que la probabilidad de encontrar u entre dos valores está dada por,

$$Pr\{v_1 < u < v_2\} = \int_{v_1}^{v_2} \rho(v)dv. \quad (3.1.9)$$

Entonces podemos identificar las siguientes propiedades,

- La función debe ser positiva, $\rho(v) \geq 0$
- Debe estar normalizada, es decir, la probabilidad total debe ser 1, $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(v)dv = 1$, por lo tanto $\lim_{v \rightarrow \infty} \rho(v) = \lim_{v \rightarrow -\infty} \rho(v) = 0$

Para comprender mejor los conceptos observemos la imagen 3.1.2. En la figura a) se muestra una serie de tiempo estocástica (ruido blanco gaussiano), la línea roja representa el valor $u = 0$. En el gráfico b) se muestra la función de probabilidad acumulada asociada a esta serie de tiempo, $F(v)$. El punto marcado en rojo corresponde a la probabilidad $Pr\{u \leq 0\}$. Vemos como la función de probabilidad cumple las condiciones descritas anteriormente (es 0 para valores bajos y 1 para valores altos). En la figura c) observamos la densidad de probabilidad asociada. Al calcularla directamente como la derivada obtenemos una distribución 'ruidosa'

(lo que se ve en rojo), pero al graficar en negro la distribución generadora ($\rho(v) = \frac{1}{1.12\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{1.12}\right)^2}$) observamos que ambas coinciden.

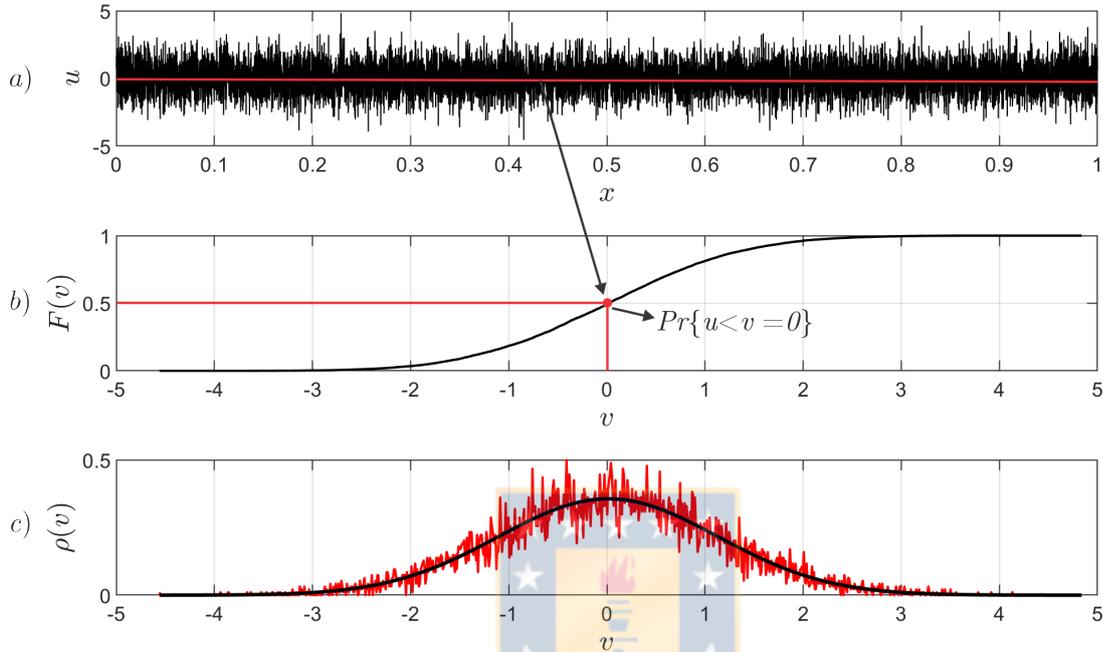


Figura 3.1.2: a) Serie de tiempo generada de forma aleatoria (ruido blanco gaussiano). b) Distribución de probabilidad acumulada de la serie de tiempo. c) Función de densidad de probabilidad de la serie (rojo) y distribución gaussiana (negro) con el mismo valor medio y desviación estándar de la serie.

3.2. Momentos

A partir de la función de densidad de probabilidad podemos derivar diferentes cantidades de interés para la descripción estadística de un sistema. Dada una función de la variable aleatoria V , $f(V)$, su valor esperado o valor medio está dado por,

$$E\{f(U)\} = \langle f(U) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(V)\rho(V)dV \quad (3.2.1)$$

En la expresión anterior se muestran las dos notaciones más utilizadas para los valores medios, $E\{\cdot\}$ y $\langle \cdot \rangle$. De particular interés son los momentos de la variable. El momento de orden n se define como,

$$m_n = \langle U^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} V^n \rho(V)dV \quad (3.2.2)$$

En la tabla 3.2.1 se muestran los nombres de algunos momentos más utilizados. El momento de primer orden, conocido como el valor medio, está dado por,

$$m_1 = \langle U \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} V \rho(V) dV \quad (3.2.3)$$

Y la variable aleatoria u se dice centrada (también llamada la fluctuación) si su valor medio es nulo. Dada una variable aleatoria U , esta se puede centrar restándole su valor medio y definiendo $u = U - \langle U \rangle$, dado que

$$\langle u \rangle = \langle U - \langle U \rangle \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (V - \langle U \rangle) \rho(V) dV = \langle U \rangle - \langle U \rangle = 0 \quad (3.2.4)$$

El segundo momento de la variable centrada u es conocido como la varianza y generalmente se identifica con σ^2 ,

$$\sigma^2 = \langle v^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \rho(V) dV \quad (3.2.5)$$

La raíz de la varianza es llamada desviación estándar, $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. Esta cantidad se puede escribir en función del segundo y primer momento,

$$\sigma^2 = \int v^2 \rho(V) dV \quad (3.2.6)$$

$$= \int (V - \langle U \rangle)^2 \rho(V) dV \quad (3.2.7)$$

$$= \langle U^2 \rangle - 2\langle U \rangle^2 + \langle U \rangle^2 \quad (3.2.8)$$

$$= \langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2 \quad (3.2.9)$$

$$= m_2 - m_1^2 \quad (3.2.10)$$

Los momentos en cierto sentido nos sirven para caracterizar la función de densidad ρ . Los impares nos entregan información sobre la simetría de la densidad (para densidades simétricas, estos momentos son cero). Los momentos pares son un indicador de las 'colas de probabilidad', es decir, sobre la ocurrencia de eventos extremos. También es importante mencionar que se suelen adimensionalizar los momentos según la desviación estándar, estos son llamados momentos

estandarizados,

$$\hat{m}_n = \frac{m_n}{\sigma^n} \quad (3.2.11)$$

| Momento | Nombre |
|---------|-------------|
| m_1 | Valor medio |
| m_2 | Varianza |
| m_3 | Skewness |
| m_4 | Kurtosis |

Cuadro 3.2.1: Nombres usuales asociados a los momentos estadísticos de orden bajo.

Como ejemplo, la distribución gaussiana (también llamada distribución normal) se escribe en términos del primer momento y la desviación estándar,

$$\mathcal{N}(m_1, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-m_1}{\sigma}\right)^2} \quad (3.2.12)$$

Todos los momentos impares de ésta distribución, m_{2n+1} , son 0. Ésta es una característica que proviene de la simetría de la distribución.

3.3. Estadística de varias variables

Para describir el campo de velocidades de un fluido como una variable aleatoria, debemos entregar información sobre 3 variables, una por cada componente de la velocidad. En el caso más general de n variables, la función de distribución acumulada está dada por,

$$F(V_1, \dots, V_n) = Pr\{U_1 < V_n, \dots, U_n < V_n\} \quad (3.3.1)$$

Esta función posee las siguientes propiedades,

- $\lim_{V_m \rightarrow \infty} F(V_1, \dots, V_m, \dots, V_n) = F(V_1, \dots, V_{m-1}, V_{m+1}, \dots, V_n)$ es decir, la función se independiza de la variable V_m cuando $V_m \rightarrow \infty$, y cuando todas las variables tienden a infinito, la probabilidad es uno.
- $\lim_{V_m \rightarrow \infty} F(V_1, \dots, V_m, \dots, V_n) = 0$, la función tiende a cero cuando alguna de las variables tiende a $-\infty$.

En analogía con lo realizado anteriormente, se define la densidad de probabilidad multivariable (también llamada conjunta) como,

$$\rho(V_1, \dots, V_n) = \frac{\partial^n}{\partial_1 \dots \partial_n} F(V_1, \dots, V_n) \quad (3.3.2)$$

Las propiedades de ésta son,

- $\rho(V_1, \dots, V_{m-1}, V_{m+1}, \dots, V_n) = \int \rho(V_1, \dots, V_m, \dots, V_n) dV_m$, a partir de ésta propiedad podemos obtener la densidad de una dimensión: $\rho(V_1) = \int \dots \int \rho(V_1, \dots, V_n) dV_2 \dots dV_n$.
- $\int \dots \int \rho(V_1, \dots, V_n) dV_1 \dots dV_n = 1$, es decir, la función deben estar normalizada.

Las funciones de densidad de una dimensión obtenidas a partir de $\rho(V_1, \dots, V_n)$ son llamadas marginales. También se definen las funciones de densidad condicional como aquellas que nos indican la probabilidad de (V_1, \dots, V_m) tal que las otras variables aleatorias tomen los valores $(V_{m+1} = U_{m+1}, \dots, V_n = U_n)$. El teorema de Bayes nos dice que ésta probabilidad condicional, denotada como $\rho(V_1, \dots, V_m | V_{m+1} = U_{m+1}, \dots, V_n = U_n)$ está dada por,

$$\rho(V_1, \dots, V_m | V_{m+1}, \dots, V_n) = \frac{\rho(V_1, \dots, V_n)}{\rho(V_{m+1}, \dots, V_n)} \quad (3.3.3)$$

Claramente la función de probabilidad condicional está normalizada, dado que,

$$\int \dots \int \rho(V_1, \dots, V_m | V_{m+1}, \dots, V_n) dV_1 \dots dV_m = \int \dots \int \frac{\rho(V_1, \dots, V_n)}{\rho(V_{m+1}, \dots, V_n)} dV_1 \dots dV_m \quad (3.3.4)$$

$$= \frac{\rho(V_{m+1}, \dots, V_n)}{\rho(V_{m+1}, \dots, V_n)} \quad (3.3.5)$$

$$= 1 \quad (3.3.6)$$

Ahora supongamos una distribución de 2 variables, (V_1, V_2) , estas variables se dicen independientes si se cumple,

$$\rho(V_1 | V_2) = \rho(V_1) \quad (3.3.7)$$

esto significa que saber el valor de $V_2 = U_2$ no nos dice nada sobre la distribución de V_1 . Del teorema de Bayes tenemos,

$$\rho(V_1|V_2) = \frac{\rho(V_1, V_2)}{\rho(V_2)} = \rho(V_1) \quad (3.3.8)$$

Por lo que llegamos a la siguiente conclusión: si dos variables aleatorias son independientes su función de distribución conjunta está dada por el producto de sus marginales,

$$\rho(V_1, V_2) = \rho(V_1)\rho(V_2) \quad (3.3.9)$$

También podemos calcular los momentos de múltiples variables, estos están dados por,

$$\langle u_1^{m_1} \dots u_n^{m_n} \rangle = \int \dots \int (V_1 - \langle U_1 \rangle)^{m_1} \dots (V_n - \langle U_n \rangle)^{m_n} \rho(V_1, \dots, V_n) dV_1 \dots dV_n \quad (3.3.10)$$

El momento de la forma $\langle u_1 \dots u_n \rangle$ es conocido como correlación, y la matriz que contiene todas las combinaciones de estos momentos es llamada matriz de correlación. En el caso bidimensional sus componentes son,

$$\langle u_i u_j \rangle = \int \int (V_i - \langle U_j \rangle)(V_i - \langle U_j \rangle) \rho(V_1, V_2) dV_1 dV_2 \quad (3.3.11)$$

Considerando que cuando las variables son independientes podemos descomponer la densidad como el producto de las marginales, de 3.3.11 es simple ver que en este caso la matriz de correlación es diagonal ($\langle u_1 u_2 \rangle = 0$). Éste termino normalizado por el segundo momento es llamado el coeficiente de correlación,

$$\rho_{12} = \frac{\langle u_1 u_2 \rangle}{\sqrt{\langle u_1^2 \rangle \langle u_2^2 \rangle}} \quad (3.3.12)$$

En general, cuando tenemos una matriz de correlación de más dimensiones, los diferentes términos no-diagonales son los coeficientes de correlación ρ_{ij} , $i \neq j$.

3.4. Procesos aleatorios

Hasta ahora hemos descrito el caso de variables aleatorias que no dependen del tiempo, que ocurre si tenemos una serie de tiempo aleatoria? En este caso la variable $U = U(t)$ toma un valor aleatorio en cada instante de tiempo y la función

de probabilidad acumulada también depende del tiempo,

$$F(V; t) = Pr\{U(t) < V\} \quad (3.4.1)$$

Notemos que no es la variable en el espacio de muestra (V) la que depende del tiempo, es U . De la misma forma la función de densidad también dependerá del tiempo,

$$\rho(V; t) = \partial_V F(V; t) \quad (3.4.2)$$

Éstas funciones no son suficientes para describir completamente un proceso aleatorio, recordemos que podemos interpretar la probabilidad como una medida de los eventos que satisfacen una cierta condición. Teniendo esto en cuenta podemos observar que es posible reordenar los datos y esto no cambiara la cantidad de eventos que satisfacen la condición, por lo tanto no cambiará la probabilidad. Un ejemplo de esto es mostrado en la figura 3.4.1.

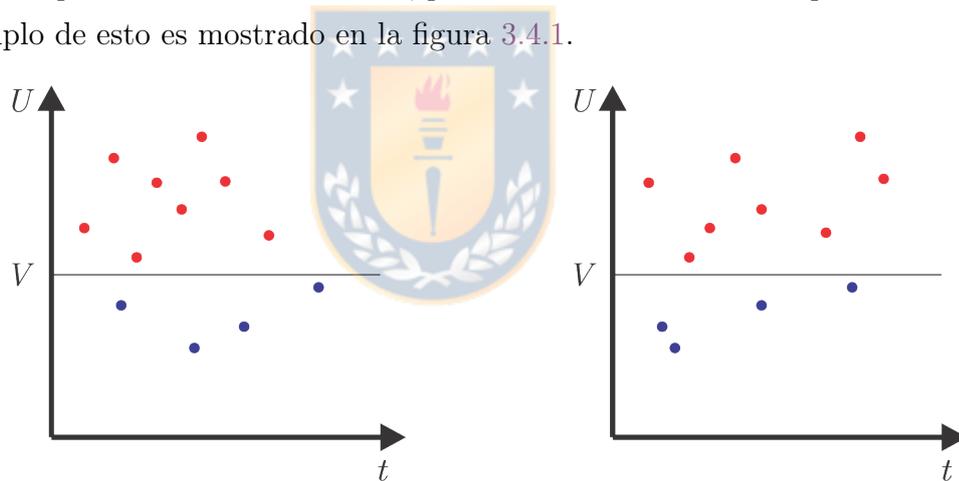


Figura 3.4.1: Variable aleatoria medida en diferentes tiempos, podemos ver que en la derecha se reordenan los datos pero la probabilidad no cambia.

Entonces una pregunta natural es cómo capturar la estructura temporal de un proceso aleatorio. Para esto necesitamos una función de probabilidad de múltiples tiempos, en un caso ideal tendríamos la función de densidad en infinitos puntos. Para ver esto pensemos en la expansión en series de Taylor de la velocidad, la cual nos describe el comportamiento de la variable en una vecindad del punto, en ese caso necesitamos información sobre las derivadas de la variable $U(t)$, la derivada de primer orden está dada por,

$$U'(t) = \frac{dU(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(t+h) - U(t)}{h} \quad (3.4.3)$$

Esto nos dice que para determinar la derivada de primer orden necesitamos considerar la densidad en dos puntos temporales, $\rho(V_1, t; V_2, t + h)$. Para una descripción completa del proceso necesitamos conocer la densidad en un continuo de puntos. Esta información está conocida en el conocido como 'funcional característico' [88].

Ahora consideremos el caso menos general de un proceso estacionario. Se dice que el proceso es estacionario si su función de densidad es invariante bajo translaciones temporales,

$$\rho(V_1, t_1 + T; V_2, t_2 + T; \dots; V_n, t_n + T) = \rho(V_1, t_1; V_2, t_2; \dots; V_n, t_n) \quad (3.4.4)$$

Es claro que la estacionariedad estadística no implica que el proceso en sí sea estacionario (de hecho no lo son, si así fuese sería trivial). Ahora podemos definir la autocovarianza como,

$$R(\tau) = \langle u(t)u(t + \tau) \rangle \quad (3.4.5)$$

Notemos que solo depende la diferencia temporal, debido a la estacionariedad del proceso. Además se define la función de autocorrelación como,

$$r_t(\tau) = \frac{\langle u(t)u(t + \tau) \rangle}{\langle u^2(t) \rangle} \quad (3.4.6)$$

Una de las propiedades de un proceso estacionario es que su función de autocorrelación tiene simetría de paridad, esto se puede ver realizando el cambio $t' = t + \tau$, $R(\tau) = \langle u(t' - \tau)u(t') \rangle = R(-\tau)$.

En la figura 3.4.2 se observa un ejemplo, en la parte superior (a) se muestra la serie de tiempo de la velocidad de una simulación numérica directa en una capa límite turbulenta (está verificada la estacionariedad estadística). Los datos son obtenidos de la base de datos de la Universidad Johns Hopkins ² [83, 82]. En la figura 3.4.2b) se muestra la función de autocorrelación en función de la variable τ (distancia temporal, también llamada *lag*).

²Esta base de datos es constantemente actualizada con diferentes simulaciones, se puede acceder a ella desde: <http://turbulence.pha.jhu.edu>

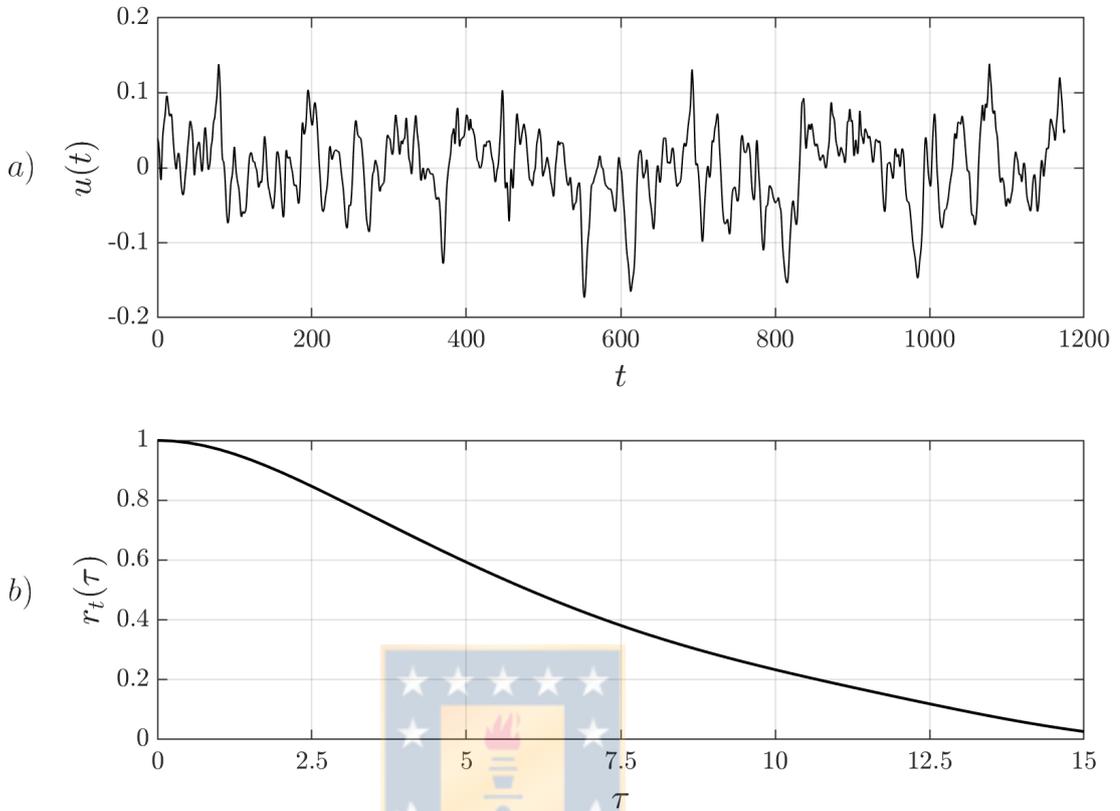


Figura 3.4.2: a) Serie de tiempo de flujo turbulento obtenida a partir de simulación numérica directa de capa límite turbulenta. b) Autocorrelación de la serie de tiempo mostrada.

También podemos definir una escala temporal asociada a la autocorrelación τ_c ,

$$\tau_c = \int_0^{\infty} \rho_t(\tau) d\tau \quad (3.4.7)$$

En la serie de tiempo mostrada en la figura 3.4.2 $\tau_c = 6.73$ [seg].

Si la variable aleatoria $u(t)$ es el campo de velocidad de un flujo, es claro que la función de correlación esta asociada a la energía cinética $E = \langle u^2 \rangle = R(0)$, por lo tanto el espectro de frecuencias de la variable $u(t)$ está dado por la transformada de Fourier de $R(\tau)$,

$$E(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\omega\tau} R(\tau) d\tau \quad (3.4.8)$$

Y la función de correlación se relaciona con el espectro mediante,

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (3.4.9)$$

Un punto importante es que, si el proceso es estacionario, tenemos,

$$R(\tau) = R(-\tau) \quad (3.4.10)$$

Por lo tanto,

$$R(\tau) = 2 \int_0^{\infty} E(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (3.4.11)$$

$$= 2 \int_0^{\infty} E(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega = R(-\tau) \quad (3.4.12)$$

Es decir, debido a la paridad solo conservamos los términos que contienen coseno y las transformaciones se reducen a,

$$R(s) = 2 \int_0^{\infty} E(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega \quad (3.4.13)$$

$$E(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\omega\tau) R(\tau) d\tau \quad (3.4.14)$$

Podemos ver que cuando $\tau = 0$ tenemos,

$$R(0) = \langle u^2(t) \rangle = 2 \int_0^{\infty} E(\omega) d\omega \quad (3.4.15)$$

Podemos ver que la integral entre $[\omega_a, \omega_b]$ de $E(\omega)$ corresponde a la contribución de los modos entre esas frecuencias a la varianza $\langle u^2(t) \rangle$.

3.5. Campos aleatorios

Podemos generalizar aún más las variables aleatorias y considerar que dependen del espacio, en este caso es llamada un campo aleatorio. Si tenemos en cuenta un campo de velocidad $\vec{U}(\vec{x}, t)$ su función de probabilidad acumulada estará dada por,

$$F(\vec{V}; \vec{x}, t) = Pr \{U_i(\vec{x}, t) < V_i\} \quad (3.5.1)$$

Y la función de densidad de probabilidad,

$$\rho(\vec{V}; \vec{x}, t) = \frac{\partial^3 F(\vec{V}; \vec{x}, t)}{\partial V_1 \partial V_2 \partial V_3} \quad (3.5.2)$$

La cual en el caso más general puede depender de N puntos espaciotemporales, $\rho(\vec{V}^{(1)}; \vec{x}^{(1)}, t^{(1)}; \dots; \vec{V}^{(N)}; \vec{x}^{(N)}, t^{(N)})$. En este caso el primer momento está dado por,

$$\langle \vec{U}(\vec{x}, t) \rangle = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \vec{V} \rho(\vec{V}; \vec{x}, t) d\vec{V} \quad (3.5.3)$$

En general, éste valor medio puede depender del tiempo y el espacio. Así como un proceso aleatorio puede ser estacionario (lo que impone ciertas simetrías en la función de densidad), los campos aleatorios pueden ser estacionarios, homogéneos e isótropos. La propiedad de homogeneidad significa que la función de densidad es invariante bajo traslaciones, es decir (para la densidad de un punto), $\rho(\vec{V}; \vec{x}, t) = \rho(\vec{V}; t)$. De la misma forma, el campo se dice isótropo cuando la densidad es invariante bajo rotaciones.

En forma similar al caso de los procesos aleatorios, donde necesitamos estadísticas de múltiples tiempos para analizar la estructura temporal del proceso, ahora se requieren estadísticas de varios puntos para el estudio de la estructura espacial (o espaciotemporal, en el caso más general). El caso más simple es la función de correlación de dos puntos y un tiempo,

$$R(\vec{r}, \vec{x}, t) = \langle u(\vec{x}, t) u(\vec{x} + \vec{r}, t) \rangle \quad (3.5.4)$$

O en el caso que la variable tenga múltiples componentes, tenemos un tensor de correlación,

$$R_{ij}(\vec{r}, \vec{x}, t) = \langle u_i(\vec{x}, t) u_j(\vec{x} + \vec{r}, t) \rangle \quad (3.5.5)$$

Notemos que en el caso de un campo homogéneo la función solo depende de \vec{r} , y si es isótropo solo existe dependencia del módulo, r . Teniendo en cuenta que $R(0, \vec{x}, t) = \langle u^2(\vec{x}, t) \rangle$ entonces la distancia de correlación (también llamada escala integral) está dada por (suponiendo que el campo es homogéneo),

$$L(t) = \frac{1}{R(0,t)} \int_0^\infty R(\vec{r}, t) d\vec{r} \quad (3.5.6)$$

Notemos que en el caso más general, cuando la velocidad tiene múltiples componentes, tenemos varias distancias de correlación $L_{ij}(t)$. También podemos estudiar el espectro de la correlación $R_{ij}(\vec{r}, t)$. En el caso homogéneo se define el tensor espectral como,

$$\Phi_{ij}(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} R_{ij}(\vec{r}, t) d\vec{r} \quad (3.5.7)$$

cuya inversa es,

$$R_{ij}(\vec{r}, t) = \int_0^\infty \Phi_{i,j}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k} \quad (3.5.8)$$

Notemos que cuando $\vec{r} = \vec{0}$ entonces $R_{ij}(\vec{0}, t) = \langle u_i(\vec{x}, t) u_j(\vec{x}, t) \rangle$ ³. Todas las herramientas presentadas a lo largo de éste capítulo serán necesarias para comprender la teoría estadística de la turbulencia presentada en los siguientes capítulos.

³Si estudiamos un flujo turbulento, u_i corresponde a la componente de la fluctuación de la velocidad y la diagonal de $R_{ij}(\vec{0}, t)$ es la energía cinética turbulenta. En este contexto el tensor $R_{ij}(\vec{0}, t)$ es también llamado tensor de esfuerzos de Reynolds

Capítulo 4

Estadística y Turbulencia

A continuación aplicaremos las herramientas estadísticas introducidas anteriormente a flujos turbulentos. Comenzamos por descomponer el campo de velocidad en un valor medio y fluctuaciones fluctuaciones,

$$\vec{u} = \langle \vec{u} \rangle + \vec{u}' \quad (4.0.1)$$

En el estudio de sistemas complejos usualmente se asocian las fluctuaciones a efectos *microscópicos* (en el sentido de que son los efectos de las estructuras más pequeñas del sistema) y el promedio a efectos *macroscópicos* [100]. El promedio considerado es un 'promedio de ensamble', es decir, consideramos que se realiza un experimento similar N veces y luego se promedia sobre todas las realizaciones,

$$\langle v \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v^{(i)} \quad (4.0.2)$$

Este promedio satisface las siguientes propiedades (también llamadas condiciones de Reynolds, debido a que introdujo la descomposición entre el campo medio y las fluctuaciones en su publicación de 1895 [112, 98]),

$$\langle v + u \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u^{(i)} + v^{(i)}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u^{(i)} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v^{(i)} = \langle u \rangle + \langle v \rangle \quad (4.0.3)$$

$$\langle av \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N av^{(i)} = a \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v^{(i)} = a \langle v \rangle \quad (4.0.4)$$

$$\langle \partial_j v \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \partial_j v^{(i)} = \partial_j \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v^{(i)} = \partial_j \langle v \rangle \quad (4.0.5)$$

$$\langle \langle v \rangle u \rangle = \langle v \rangle \langle u \rangle \quad (4.0.6)$$

Es importante notar que la velocidad media aún puede ser dependiente del tiempo y el espacio, dado que es un promedio sobre un ensamble de experimentos. Como fue mostrado en el capítulo anterior esto se puede escribir en términos de la densidad de probabilidad como,

$$\langle u(\vec{x}, t) \rangle = \int v \rho(v; \vec{x}, t) dv \quad (4.0.7)$$

Es importante hacer algunos comentarios sobre como calcular los promedios en situaciones prácticas. Primero, debido al costo computacional de realizar simulaciones numéricas directas de flujos turbulentos, no es posible realizar un promedio de ensamble a partir de estas. En general, solo tenemos acceso a una realización del flujo. Segundo, no existe una forma única de promediar ¹, aunque como hemos mencionado, estamos interesados en promedios que cumplan con las condiciones de Reynolds. El problema es que, en general, los promedios típicos espaciales y temporales no cumplen con estas condiciones al considerar intervalos finitos de espacio/tiempo, sin embargo si las cumplen de forma aproximada [98]. Durante nuestra investigación asumimos que el promedio de ensamble puede ser intercambiado por promedios espaciales/temporales ² siempre que exista simetría en la dirección que se promedia ³.

¹Para una discusión sobre otros tipos de promedios se pueden consultar las investigaciones de Germano [54, 53]

²Esta propiedad es conocida como 'ergodicidad'. Existe evidencia numérica de ergodicidad en flujos turbulentos [52].

³Más detalles sobre como promediar en la teoría estadística de la turbulencia se pueden consultar el capítulo 2 del libro de Monin y Yaglom [98].

4.1. Funciones de correlación

En el capítulo anterior se introdujo la correlación de dos puntos,

$$R_{ij}(\vec{x}, \vec{y}, t_1, t_2) = \langle u_i(\vec{x}, t_1) u_j(\vec{y}, t_2) \rangle \quad (4.1.1)$$

Esta función se puede expresar convenientemente en términos del punto medio, $\vec{R} = \frac{\vec{x} + \vec{y}}{2}$ y la diferencia entre ambos puntos $\vec{r} = \vec{y} - \vec{x}$ (lo mismo puede realizarse para las coordenadas temporales en términos del tiempo medio T y la diferencia temporal τ),

$$R_{ij}(\vec{x}, \vec{y}, t_1, t_2) = R_{ij}(\vec{R}, \vec{r}, T, \tau) \quad (4.1.2)$$

Una ventaja de expresar la correlación en términos de estas variables es que, en el caso de turbulencia homogénea y estacionaria, la función solo dependerá de la diferencia de tiempo τ y la diferencia de posición \vec{r} por lo tanto se tiene,

$$R_{ij}(\vec{r}, \tau) = \langle u_i(\vec{x}, t) u_j(\vec{x} + \vec{r}, t + \tau) \rangle \quad (4.1.3)$$

Dado que estas funciones dependen de la posición y el tiempo, una pregunta fundamental es: ¿A qué distancia (y tiempo) las señales pierden su correlación? Estas escalas son llamadas escalas integrales, de tiempo y espacio, como fueron definidas anteriormente. Si se reescribe la correlación en términos del coeficiente de correlación (que ahora denotaremos por Q_{ij}),

$$R_{ij}(\vec{x}, \vec{y}, t_1, t_2) = Q_{ij}(\vec{x}, \vec{y}, t_1, t_2) \sqrt{\langle v_i^2(\vec{x}, t_1) \rangle} \sqrt{\langle v_j^2(\vec{y}, t_2) \rangle} \quad (4.1.4)$$

El coeficiente debe satisfacer las siguientes condiciones,

$$Q_{ij} \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \vec{x} - \vec{y} \rightarrow \infty \quad (4.1.5)$$

$$Q_{ij} \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad t_1 - t_2 \rightarrow \infty \quad (4.1.6)$$

Es decir, a grandes distancias (temporales o espaciales) las velocidades pierden su correlación. Pensemos ahora en el caso de un flujo homogéneo y estacionario, donde las cantidades solo dependen de \vec{r} y τ . En este caso, con $\vec{r} = 0$, se define la

escala de tiempo integral como,

$$T_{I,ij} = \int_0^{\infty} Q_{ij}(\tau) d\tau \quad (4.1.7)$$

Notemos que si el flujo es isótropo las 3 escalas diagonales son iguales. También definimos una escala integral espacial (fijando $\tau = 0$) como,

$$L_{I,ij}(\hat{r}) = \int_0^{\infty} Q_{ij}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (4.1.8)$$

Esta escala depende, en general, tanto de las componentes que se comparen como de la dirección, en el caso isótropo pierde su dependencia de la dirección y, al igual que en el caso de la escala integral temporal, las componentes diagonales son iguales.

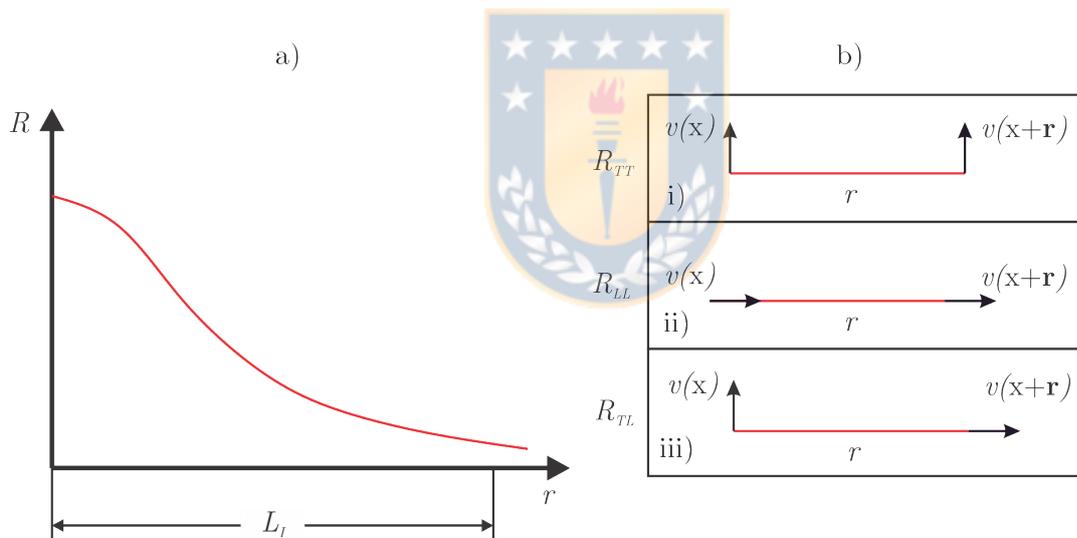


Figura 4.1.1: a) Esquema de escala integral (izquierda). b) componentes del tensor de correlación (derecha). Notemos que se separan las componentes en i) longitudinales , ii) transversales y iii) cruzadas.

En la figura 4.1.1 se muestra como se clasifican las componentes del tensor de correlación según las componentes del vector de velocidad (relativas al vector de posición).

4.2. Simetrías y tensor de correlación.

Ahora estudiaremos como se puede simplificar el tensor de correlación al considerar las simetrías del sistema. En la siguiente discusión asumimos un flujo turbulento homogéneo, isótropo y estacionario. Recordemos que la función de correlación contiene información sobre la energía cinética del sistema,

$$E = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle = \frac{1}{2} R_{ii}(0) \quad (4.2.1)$$

Donde el tensor está evaluado en $\vec{r} = 0$ dado que solo depende de la diferencia de los puntos. Para el caso isótropo debe haber invariancia bajo rotaciones y reflexiones. La primera implica las siguientes propiedades del tensor de correlación [91],

$$\langle u_1^2 \rangle = \langle u_2^2 \rangle = \langle u_3^2 \rangle = \langle u^2 \rangle \quad (4.2.2)$$

Mientras que de la simetría bajo reflexiones se tiene,

$$\langle u_1 u_2 \rangle = \langle u_2 u_3 \rangle = \langle u_1 u_3 \rangle = 0 \quad (4.2.3)$$

Entonces se puede escribir la energía (4.2.1) como,

$$E = \frac{1}{2} R_{ii}(0) = \frac{1}{2} (\langle u_1^2 \rangle + \langle u_2^2 \rangle + \langle u_3^2 \rangle) = \frac{3}{2} \langle u^2 \rangle \quad (4.2.4)$$

Notemos además que para el tensor de correlación se tiene,

$$R_{ij} = \langle u^2 \rangle Q_{ij} \quad (4.2.5)$$

Ahora considerando el caso isótropo (y homogéneo) pero de dos puntos, este se puede escribir como [78, 91],

$$R_{ij}(\vec{r}) = A(r) \hat{n}_i \hat{n}_j + B(r) \delta_{ij} \quad (4.2.6)$$

Donde \hat{n} es un vector unitario en la dirección de \vec{r} . Ahora, es más útil expresar las expresiones en términos de las componentes transversales y longitudinales (como son definidas en la figura 4.1.1). Los coeficientes de correlación longitudinal $f(r)$

y transversal $g(r)$ son definidos tales que,

$$\langle u^2 \rangle f(r) = \langle u_L(\vec{x})u_L(\vec{x} + \vec{r}) \rangle \quad \langle u^2 \rangle g(r) = \langle u_T(\vec{x})u_T(\vec{x} + \vec{r}) \rangle \quad (4.2.7)$$

Para relacionar estas componentes con los coeficientes $A(r)$ y $B(r)$ consideremos (sin perder generalidad) que \vec{r} está sobre un eje coordenado, en este caso x . Entonces tendremos que la componente R_{11} está dada por,

$$R_{11} = A(r) + B(r) \quad (4.2.8)$$

Pero además sabemos que esta coincide con las componentes longitudinales de la velocidad,

$$A(r) + B(r) = \langle u^2 \rangle f(r) \quad (4.2.9)$$

De la misma forma, si consideramos R_{22} , los vectores unitarios tienen componente cero en esta dirección, que corresponde a la transversal por lo que tenemos,

$$R_{22} = B(r) = \langle u^2 \rangle g(r) \quad (4.2.10)$$

Esto nos permite escribir el tensor de correlación como,

$$R_{ij} = \langle u^2 \rangle g(r) \delta_{ij} + \langle u^2 \rangle (f(r) - g(r)) n_i n_j \quad (4.2.11)$$

Ahora, recordemos que el tensor de correlación en su forma más general está dado por,

$$R_{ij}(\vec{r}) = \langle u_i(\vec{x})u_j(\vec{y}) \rangle \quad (4.2.12)$$

Entonces si derivamos con respecto a x_i tenemos,

$$\partial_i R_{ij} = \langle \partial_i u_i(\vec{x})u_j(\vec{y}) \rangle = 0 \quad (4.2.13)$$

donde se aplica la condición de incompresibilidad. Ahora podemos usar esto para relacionar las funciones f y g , derivando el tensor de correlación con respecto a r_i (considerando que $n_i = r_i/r$),

$$\partial_i R_{ij} = \langle v^2 \rangle \partial_i \left[g(r) \delta_{ij} + (f(r) - g(r)) \frac{r_i r_j}{r^2} \right] = 0 \quad (4.2.14)$$

Es útil tener en cuenta al siguiente relación para la derivada de r con respecto a

la componente r_i ,

$$\partial_i r^n = n r^{n-2} r_i \quad (4.2.15)$$

Para la segunda parte tenemos,

$$\partial \left[(f(r) - g(r)) \frac{r_i r_j}{r^2} \right] = \frac{r_i r_j}{r^2} \partial_i (f - g) + (f - g) \partial_i \left(\frac{r_i r_j}{r^2} \right) \quad (4.2.16)$$

$$= (f' - g') \partial_i r \frac{r_i r_j}{r^2} + (f - g) \left[\frac{\partial_i (r_i r_j)}{r^2} + r_i r_j \partial_i (r^{-2}) \right] \quad (4.2.17)$$

$$= (f' - g') r^{-1} r_i \frac{r_i r_j}{r^2} + (f - g) \left[\frac{r_j \partial_i r_i + r_i \partial_i r_j}{r^2} + r_i r_j \frac{(-2r_i)}{r^4} \right] \quad (4.2.18)$$

$$= (f' - g') \frac{(r_i r_i) r_j}{r^3} + (f - g) \left[\frac{3r_j + r_i \delta_{ij}}{r^2} - 2 \frac{r_j (r_i r_i)}{r^4} \right] \quad (4.2.19)$$

$$= (f' - g') \frac{r^2 r_j}{r^3} + (f - g) \left[\frac{4r_j}{r^2} - 2 \frac{r_j r^2}{r^4} \right] \quad (4.2.20)$$

$$= (f' - g') \frac{r_j}{r} + \frac{(f - g)}{r^2} (2r_j) \quad (4.2.21)$$

$$= (f' - g') \frac{r_j}{r} + 2r_j \frac{(f - g)}{r^2} \quad (4.2.22)$$

Mientras que para la otra parte de la derivada del tensor se tiene,

$$\partial_i (g \delta_{ij}) = g' r^{-1} r_i \delta_{ij} = \frac{g'}{r} r_j \quad (4.2.23)$$

Reemplazando llegamos a,

$$\partial_i R_{ij} = \langle v^2 \rangle \frac{r_j}{r} \left[g' + (f' - g') + 2 \frac{(f - g)}{r} \right] = 0 \quad (4.2.24)$$

Entonces para que esto se cumpla en general,

$$g' + (f' - g') + 2 \frac{(f - g)}{r} = 0 \implies g = \frac{r}{2} f' + f \quad (4.2.25)$$

Y reemplazando podemos expresar todo el tensor de correlación de dos puntos en términos de la función $f(r)$,

$$R_{ij}(r) = \langle u^2 \rangle \left[f(r) \delta_{ij} + \frac{1}{2} f'(r) \left(\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right) \right] \quad (4.2.26)$$

Es importante notar que la función f también se puede denotar por $f_{2,L}(r)$ para remarcar que corresponde a la función asociada al tensor de correlación de segundo orden. Siguiendo un procedimiento similar se puede obtener la siguiente relación para el tensor de correlación de tercer orden en términos de su función longitudinal $f_{3,L}(r)$ [50, 39],

$$R_{ij,k}(r) = -\frac{r^2}{2} \partial_r \left[\frac{f_{3,L}(r)}{r} \right] n_i n_j n_k + \frac{1}{4r} \partial_r [f_{3,L}(r)] [n_i \delta_{jk} + n_j \delta_{ik}] - \frac{f_{3,L}(r)}{2} n_k \delta_{ij} \quad (4.2.27)$$

Estas relaciones serán útiles en el próximo capítulo para derivar uno de los pocos resultados exactos que se tiene en turbulencia.

Otra cantidad central en la teoría estadística de la turbulencia es la llamada función de estructura. La función de estructura de orden n es definida como,

$$S_n(\vec{r}) = \langle [v(\vec{x} + \vec{r}) - v(\vec{x})]^n \rangle \quad (4.2.28)$$

En particular, para el caso homogéneo e isótropo se tiene,

$$S_n(r) = \langle [v(r) - v(0)]^n \rangle \quad (4.2.29)$$

La función de estructura de segundo orden se relaciona con el coeficiente de correlación longitudinal, $f_{2,L}(r)$,

$$S_2(r) = 2\langle v^2 \rangle (1 - f_{2,L}(r)) \quad (4.2.30)$$

4.3. Funciones de correlación en espacio de Fourier

Consideremos la correlación de dos puntos (sin asumir simetrías),

$$R_{ij}(\vec{x}, \vec{y}) = \langle v_i(\vec{x}, t) v_j(\vec{y}, t) \rangle \quad (4.3.1)$$

Entonces su transformada de Fourier está dada por,

$$\langle u_{i,\vec{k}} u_{j,\vec{q}} \rangle = \frac{1}{V} \int \int \langle u_i(\vec{x}) u_j(\vec{y}) \rangle e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{y}} d\vec{x} d\vec{y} \quad (4.3.2)$$

Se puede escribir $\vec{y} = \vec{x} + \vec{r}$,

$$\frac{1}{V} \int \int \langle u_i(\vec{x}) u_j(\vec{x} + \vec{r}) \rangle e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x})} e^{-i\vec{q} \cdot (\vec{x} + \vec{r})} d\vec{x} d\vec{r} \quad (4.3.3)$$

$$= \frac{1}{V} \int \int \langle u_i(\vec{x}) u_j(\vec{x} + \vec{r}) \rangle e^{-i(\vec{k} + \vec{q}) \cdot \vec{x}} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} d\vec{x} d\vec{r} \quad (4.3.4)$$

Ahora consideremos el caso homogéneo, el valor de la función en \vec{x} o en $\vec{x} = 0$ debe ser igual. Reemplazando en la integral $\langle u_i(\vec{x}) u_j(\vec{x} + \vec{r}) \rangle$ por $\langle u_i(\vec{0}) u_j(\vec{r}) \rangle$,

$$\frac{1}{V} \int \int \langle u_i(\vec{x}) u_j(\vec{x} + \vec{r}) \rangle e^{-i(\vec{k} + \vec{q}) \cdot \vec{x}} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} d\vec{x} d\vec{r} = \frac{1}{V} \int \int \langle u_i(\vec{0}) u_j(\vec{r}) \rangle e^{-i(\vec{k} + \vec{q}) \cdot \vec{x}} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} d\vec{x} d\vec{r} \quad (4.3.5)$$

Observamos que la única dependencia en \vec{x} es sobre el exponencial, y utilizando la siguiente propiedad,

$$\int e^{-i(k-q)x} dx = \delta_{k,q} \quad (4.3.6)$$

La cual proviene de la orto-normalidad de las funciones, integrando en \vec{x} llegamos a,

$$\frac{1}{V} \int \int \langle u_i(\vec{0}) u_j(\vec{r}) \rangle e^{-i(\vec{k} + \vec{q}) \cdot \vec{x}} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} d\vec{x} d\vec{r} = \delta_{\vec{k}, -\vec{q}} \frac{1}{V} \int \langle u_i(\vec{0}) u_j(\vec{r}) \rangle e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad (4.3.7)$$

Y entonces la transformada de Fourier de la función de correlación estará dada por,

$$\langle u_{i,\vec{k}} u_{j,\vec{q}} \rangle = \delta_{\vec{k}, -\vec{q}} R_{ij}(\vec{k}, \vec{q}) = R_{ij}(\vec{k}, -\vec{k}) = R_{ij}(\vec{k}) = \langle u_{i,\vec{k}} u_{j,-\vec{k}} \rangle \quad (4.3.8)$$

Es decir, la homogeneidad se traduce en el espacio de Fourier en la de-correlación de los modos excepto si la suma vectorial es 0.

Ahora estudiamos la energía en el espacio de Fourier, cuya información está contenida en el tensor de correlación. Recordemos que $E = R_{ii}(\vec{r} = 0)$, por lo tanto,

$$E = \frac{1}{2} R_{ii}(0) = \int R_{ii}(\vec{k}) e^{\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k} |_{\vec{r}=0} \quad (4.3.9)$$

Reemplazando llegamos a,

$$E = \frac{1}{2} \int R_{ii}(\vec{k}) d\vec{k} \quad (4.3.10)$$

Por lo tanto la información espectral de la energía (es decir cuanta energía lleva cada número de onda \vec{k}) está contenida en $R_{ii}(\vec{k})$. Notemos que en el caso isótropo esta energía solo depende del modulo k , por lo que podemos realizar la integral sobre una superficie esférica de radio k ,

$$E = \frac{1}{2} \int R_{ii}(\vec{k}) d\vec{k} = \frac{1}{2} \int E(\vec{k}) d\vec{k} = \int_{k=0}^{\infty} \phi(k) dk \quad (4.3.11)$$

El espectro de energía $\phi(k) = \frac{1}{2} \int R_{ii}(\vec{k}) dS$ es la contribución de energía promedio de los modos con número de onda k (dado que se integra sobre una esfera de radio k). De forma más general podemos aprovechar la simetría bajo rotaciones para escribir el tensor en términos de una función $q(k)$ (siguiendo un procedimiento similar al utilizado en las secciones anteriores para el tensor de correlación en el espacio real). El resultado es,

$$R_{ij}(k) = q(k) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \quad (4.3.12)$$

Entonces la energía espectral está dada por $E(k) = \frac{1}{2} R_{ii}(k) = q(k)$. Podemos relacionar esto al espectro de energía $\phi(k)$ notando que,

$$\phi(k) = \int \frac{1}{2} E(k) dS = 2\pi k^2 E(k) = 2\pi k^2 q(k) \quad (4.3.13)$$

Por lo tanto en el caso isótropo podemos escribir el tensor de correlación en el espacio de Fourier solo en términos del espectro de energía,

$$R_{ij} = \frac{\phi(k)}{4\pi k^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \quad (4.3.14)$$

Un comentario importante sobre el espectro de energía $\phi(k)$ es que al expandir la cantidad en series cerca de $k = 0$, el primer término que aparece es de orden 4 debido a la condición de incompresibilidad [9],

$$\phi(k) = Ck^4 + \mathcal{O}(k^6) \quad (4.3.15)$$

4.4. Fuerzas externas

Para estudiar la turbulencia y evitar que decaiga debido al efecto de la viscosidad, es necesario considerar una fuerza agitadora. Lo usual en el estudio estadístico de la turbulencia es agregar una fuerza estocástica $f(\vec{k}, t)$, la cual debe cumplir también con las condiciones de isotropía, homogeneidad y debe tener divergencia nula (de esta forma no afecta la ecuación para la presión). Otra característica usual es que la fuerza sea gaussiana. Además se puede seleccionar de tal forma que no tenga correlación temporal (esto es también llamado ruido blanco), en términos de la función de correlación esta condición se expresa como,

$$\langle f_i(\vec{k}, t) f_j(\vec{k}', t') \rangle = P_{ij}(\vec{k}) F(k) \delta(\vec{k} + \vec{k}') \delta(t - t') \quad (4.4.1)$$

Donde la condición de ruido blanco se impone mediante la función delta de Dirac $\delta(t - t')$. Además se aplicó el hecho de que la señal es homogénea e isotrópica, por eso el factor $\delta(\vec{k} + \vec{k}')$ y el operador de proyección P_{ij} , como explica McComb [92].

4.5. Balance de energía

En el análisis de los flujos turbulentos podemos realizar tres tipos de balances, el balance global, el local y un tercer balance que llamaremos 'parcial'. El segundo es particularmente útil dado que nos permite analizar como se transfiere la energía entre las distintas escalas. El balance global es simplemente,

$$\partial_t E = -\langle \epsilon \rangle + \langle W \rangle \quad (4.5.1)$$

Donde $\langle \epsilon \rangle$ representa la energía disipada por la viscosidad, cuya expresión es [92],

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\nu}{2} \sum_{ij} \langle (\partial_i v_j + \partial_j v_i)^2 \rangle \quad (4.5.2)$$

En el caso isótropo se puede simplificar a,

$$\langle \epsilon \rangle = 2\nu \sum_{ij} \langle (\partial_i v_j)^2 \rangle \quad (4.5.3)$$

Mientras que W es el trabajo realizado por la fuerza externa,

$$W = \langle \vec{f} \cdot \vec{u} \rangle \quad (4.5.4)$$

Nuevamente aprovecharemos el tensor de correlación de un punto (por esto es tan útil definir las correlaciones, contienen información sobre diversas cantidades necesarias en el análisis de la turbulencia) para poder expresar la disipación. Recordemos que,

$$R_{ij}(\vec{r}) = \int R_{ij}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3k \quad (4.5.5)$$

Entonces vemos que para las derivadas de la velocidad se tiene la siguiente relación [107],

$$\langle \partial_m u_i \partial_n u_j \rangle(\vec{r} = \vec{0}) = \int k_m k_n R_{ij}(\vec{k}) d^3k \quad (4.5.6)$$

Por lo tanto podemos obtener una expresión en términos de la correlación reemplazando en la ecuación 4.5.3 $m = n$ e $i = j$,

$$\langle \epsilon \rangle = \int 2\nu k^2 R_{ii}(k) dk \quad (4.5.7)$$

y esto se puede expresar en términos de la energía espectral,

$$\langle \epsilon \rangle = \int 2\nu k^2 E(k) dk \quad (4.5.8)$$

Un aspecto útil del balance general es que el término no-lineal no introduce energía al sistema, sin embargo como veremos en el balance local si cumple un rol importante en la distribución de energía entre las escalas.

4.6. Balance parcial de energía

Ahora analizaremos el balance de energía utilizando el enfoque de Frisch [51]. Para esto usamos el operador de filtro paso bajo $\hat{P}_{k_0, <}$, el cual posee las siguientes propiedades,

- $\hat{P}_{k_0, <}$ conmuta con los operadores diferenciales ∇ y ∇^2
- Es autoadjunto $\langle f \hat{P}g \rangle = \langle (\hat{P}f)g \rangle$

Las funciones además se pueden descomponer como $\vec{u} = \vec{u}_{<} + \vec{u}_{>}$. Denotamos a la velocidad filtrada como,

$$\hat{P}_{k_0, <} \vec{u} = \vec{u}_{k_0, <} \quad (4.6.1)$$

Donde k_0 indica el número de onda en el cual se filtra la función. Este operador es útil debido a que la turbulencia es un fenómeno que se entiende en un gran rango de escalas. Las grandes estructuras corresponden a valores pequeños de k , dado que $k \sim 1/r$ y las pequeñas estructuras corresponden a valores 'grandes' de k .

Para comprender mejor la aplicación del filtro es útil observar la figura 4.6.1. En el gráfico superior, 4.6.1a), se muestra una señal sin filtrar, que puede corresponder a una componente de la velocidad medida en un segmento del espacio. Al aplicar el filtro paso bajo $\hat{P}_{k_0, <}$ solo conservaremos las grandes estructuras (4.6.1b) mientras que ignoramos la contribución de todas las estructuras tales que $k > k_0$, es decir, las estructuras más pequeñas. Éstas estructuras pequeñas se muestran en la figura 4.6.1c). En la figura 4.6.2 se muestra la aplicación de estos filtros al campo de velocidad de un flujo turbulento homogéneo-isótropo ($Re_\lambda = 1300$).

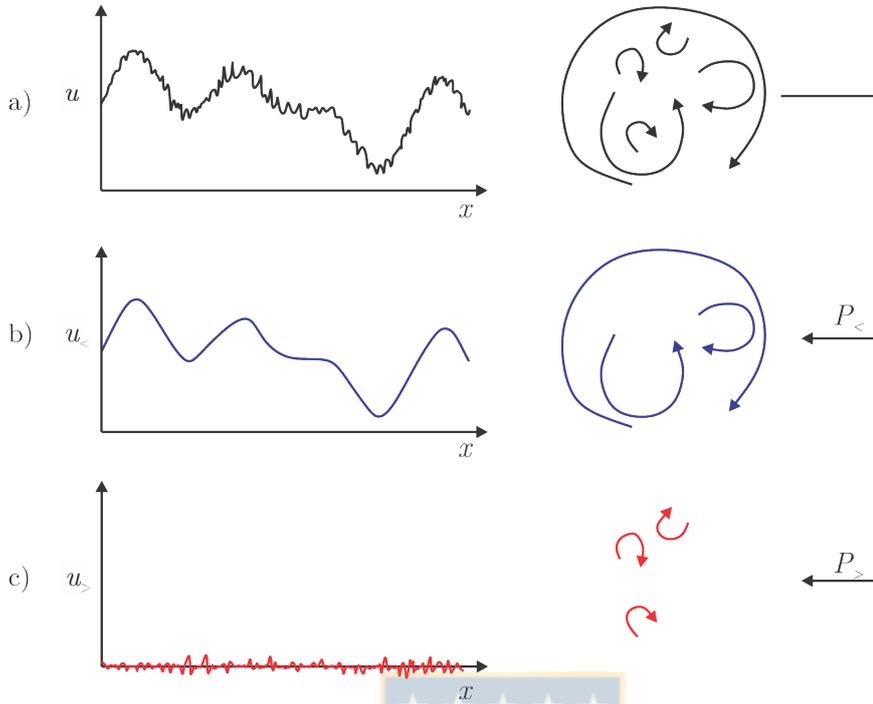


Figura 4.6.1: Esquema de velocidad filtrada en espacio de Fourier. a) Campo de velocidad completo. b) Campo de velocidad filtrado con filtro paso-bajo. c) Campo de velocidad filtrado con filtro paso-alto. En la derecha se muestra esquemáticamente la imagen usual de la turbulencia como un campo de vortices de distintas escalas.

Ahora consideremos las ecuaciones de NS,

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{f} \quad (4.6.2)$$

Si aplicamos el filtro paso bajo tendremos,

$$\partial_t \vec{u}_{k_0, <} + \hat{P}_{k_0, <} \left[(\vec{u}_{k_0, <} + \vec{u}_{k_0, >}) \cdot \vec{\nabla} \right] (\vec{u}_{k_0, <} + \vec{u}_{k_0, >}) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p_{k_0, <} + \nu \nabla^2 \vec{u}_{k_0, <} + \vec{f}_{k_0, <} \quad (4.6.3)$$

Partiendo de ésta ecuación podemos llegar al siguiente balance de energía (los detalles de la derivación se pueden encontrar en el Apéndice D),

$$\partial_t E_{k_0} + \Pi_{k_0} = -2\nu \Omega_{k_0} + W_{k_0} \quad (4.6.4)$$

Donde todas las cantidades son acumuladas desde $k = 0$ hasta k_0 , observamos que aparecen las contribuciones de la disipación y el forzamiento. Pero además tenemos el término Π_{k_0} , que corresponde al flujo de energía a través del cascarón

esférico de radio k_0 ,

$$\Pi_{k_0} = \langle \vec{u}_{k_0,<} \cdot [\vec{u}_{k_0,<} \cdot \vec{\nabla}] \vec{u}_{k_0,>} \rangle + \langle \vec{u}_{k_0,>} \cdot [\vec{u}_{k_0,>} \cdot \vec{\nabla}] \vec{u}_{k_0,>} \rangle \quad (4.6.5)$$

Este flujo proviene del término no-lineal y su rol es transportar la energía a través de las escalas. La ventaja de esta formulación es su generalidad, dado que en su derivación no se asume homogeneidad o isotropía.

Algunos puntos importantes sobre la ecuación A4.1: al considerar un valor de k_0 muy grande (mayor al correspondiente a las escalas más pequeñas del problema) la transferencia Π_{k_0} debe anularse. Esto dado que, como veremos más adelante y como podemos ver a partir de la misma ecuación, en el caso estacionario $\Pi_{k_0} = -2\nu\Omega_{k_0} + W_{k_0}$, sin embargo cuando $k_0 \rightarrow \infty$ estamos efectivamente considerando todo el sistema por lo que (remarcando que estamos considerando el estado estacionario) la energía que ingresa debe ser igual a la disipada.



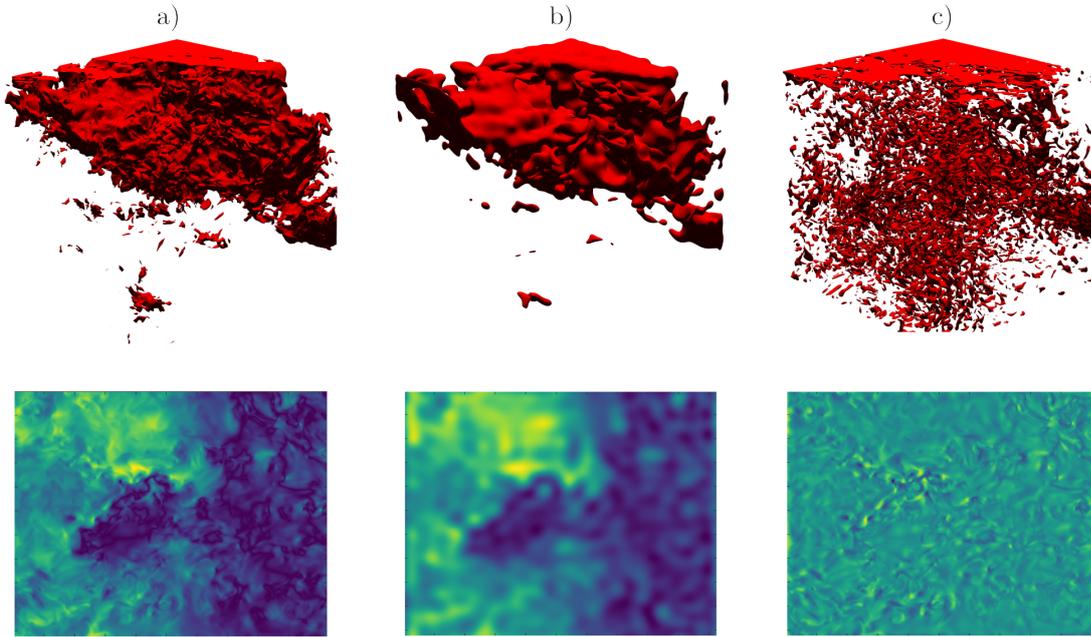


Figura 4.6.2: Ejemplos de un campo de velocidad filtrado en el espacio de Fourier. El caso de la figura corresponde a una simulación de turbulencia forzada homogénea e isotrópica a un número de Reynolds $Re_\lambda = 1300$. a) Campo de velocidad sin filtrar. b) Campo de velocidad filtrado correspondiente a las 'grandes escalas' $u_{k_0, <}$. c) Campo de velocidad filtrado correspondiente a las 'pequeñas escalas', $u_{k_0, >}$. En los tres casos el número de onda de los filtros es $kL = 271$. En las figuras superiores se muestran isosuperficies del campo de (el módulo de) velocidad, en las figuras inferiores se muestran planos de corte en el eje $y - z$.

4.7. Balance local

El balance mostrado en la sección anterior A4.1 corresponde, como mencionamos, a la energía transferida desde una esfera en el espacio de Fourier de radio k_0 hacia todos los otros modos con $k > k_0$. Ahora nos preguntamos, ¿cuál es el balance de energía de un modo k en particular? La respuesta a esto está dada por la siguiente ecuación [107, 2]

$$\partial_t E_k = -T(k) - 2\nu k^2 E_k + F(k) \quad (4.7.1)$$

Donde E_k es la energía del modo con número de onda k , $F(k)$ es la contribución de energía proveniente la fuerza a ese modo y $T(k)$ es la transferencia no-lineal de energía (el término con la viscosidad es la disipación). El término $T(k)$ está dado por,

$$T(k) = \sum_{k \leq \vec{k} \leq k + \Delta k} \sum_{\vec{p} + \vec{q} = \vec{k}} u_{i, \vec{k}} P_{ij}(\vec{k}) q_m u_{m, \vec{p}} u_{j, \vec{q}} \quad (4.7.2)$$

Lo interesante es que vemos como vuelven a aparecer las interacciones triádicas que ya observamos al derivar la ecuación de NS en el espacio de Fourier 2.2.1. Una consecuencia importante de estas interacciones es que existe un balance detallado de energía entre ellas: supongamos que tenemos un flujo con tres modos activos tales que $\vec{k} + \vec{p} + \vec{q} = 0$, denotando a las transformadas de Fourier de la velocidad asociadas a cada componente por $u_{\vec{k}} = a(t)$, $u_{\vec{p}} = b(t)$ y $u_{\vec{q}} = c(t)$ entonces se cumple la siguiente relación,

$$\frac{d}{dt} (a(t)a^*(t) + b(t)b^*(t) + c(t)c^*(t)) = 0 \quad (4.7.3)$$

Es decir, la energía es conservada en las triadas de modos. Este es un aspecto fundamental de las ecuaciones de Navier-Stokes y ha sido ampliamente estudiado, se ha observado que estas interacciones pueden ser no locales a pesar de que el intercambio de energía es principalmente local en el espacio de Fourier [75, 138, 3]. Para finalizar este capítulo mostramos en la figura 4.7.1 una representación esquemática de los tres balances de energía que hemos presentado.

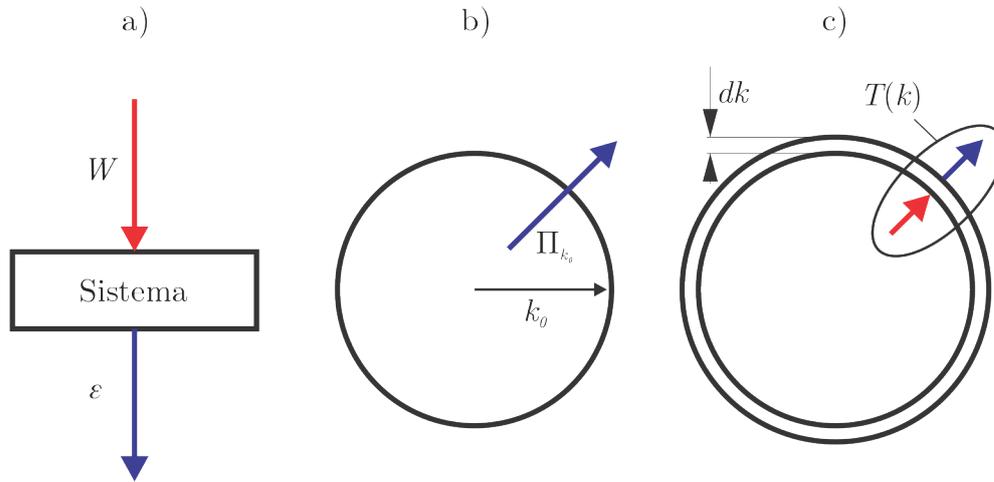
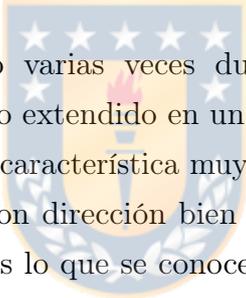


Figura 4.7.1: Esquema de balances de energía. a) Balance global: consideramos la energía que ingresa y sale del sistema completo, provenientes del forzamiento W y la disipación ε . b) Balance parcial: descomponemos el sistema en partes caracterizadas por un número de onda k_0 . El sistema se separa en dos, la velocidad compuesta de todos los modos bajo k_0 y todos los modos sobre este valor, el flujo desde la primera parte del sistema hacia la segunda está dado por la transferencia Π_{k_0} . c) Balance local: consideramos cada número de onda k de forma separada y estudiamos las contribuciones a la energía de este modo en particular. La cantidad $T(k)$ corresponde a las contribuciones de los otros modos a la energía del modo k .

Capítulo 5

Teoría de Kolmogorov y la Cascada de Energía



Como hemos mencionado varias veces durante los capítulos anteriores, la turbulencia es un fenómeno extendido en un gran rango de escalas. Pero aparte de su extensión posee otra característica muy particular de los flujos turbulentos: existen flujos de energía con dirección bien definida, desde las grandes escalas hacia las pequeñas. Esto es lo que se conoce como la 'cascada de energía'. Fue Richardson quién originalmente propuso la 'imagen' de una cascada turbulenta (en un famoso poema [113]): existen grandes estructuras que se rompen en estructuras más y más pequeñas hasta que son disipadas por el efecto de la viscosidad. Durante este capítulo vamos a estudiar los fenómenos de cascada e introduciremos la teoría de la turbulencia desarrollada por Kolmogorov.

5.1. Fenómenos de cascada

El aspecto más fundamental y característico de la turbulencia es la conocida como cascada de energía. Se sabe que la energía es una invariante de las ecuaciones de Euler. En la presencia de viscosidad la energía es disipada y se necesita un mecanismo de inyección de energía para mantener la turbulencia (como hemos mencionado anteriormente generalmente es un forzamiento estocástico blanco en el tiempo para turbulencia homogénea e isotrópica). Se observa que al mantener la turbulencia mediante este forzamiento la energía es disipada

de una manera particular: la mayor parte de la disipación ocurre en escalas muy pequeñas, comparadas con la escala en que la energía es inyectada. Más aún, se ha observado que el flujo de energía en el límite de Reynolds infinito y turbulencia estacionaria (estado que es conocido como turbulencia completamente desarrollada) es constante en un rango intermedio de escalas, conocido como rango inercial.

Un punto importante es que este fenómeno, si bien fue descubierto en el contexto de la turbulencia, hoy se observa en muchos sistemas no-lineales: en turbulencia de onda (también llamada turbulencia débil) [26, 99], en turbulencia bidimensional, turbulencia 'cuántica' (*quantum vortex turbulence*) [110] y se ha observado en otras invariantes de las ecuaciones de Euler como la helicidad o la enstrofia [2]. Estos fenómenos de cascada se pueden dividir en dos tipos ¹: cascadas directas y cascadas inversas, en las primeras el flujo de la cantidad conservada (en las ecuaciones sin viscosidad) va desde las grandes escalas hacia las pequeñas, mientras que en el segundo caso es al revés, el flujo va desde las escalas de inyección hacia las más grandes. Consideremos un sistema en que la energía es inyectada en una escala k_I y disipada en otra escala k_d , la fenomenología de una cascada directa es como sigue (en la figura 5.1.1 se muestra una representación gráfica):

- Primero la energía es inyectada en la escala k_d por algún mecanismo de forzamiento del sistema W (figura 5.1.1 a)).
- Luego la energía fluye a través de un rango de escalas intermedias a una razón Π_k constante (figura 5.1.1 c))
- Finalmente la energía es disipada a una escala k_d que está 'muy alejada' ($k_I \ll k_d$) de la escala de inyección (figura 5.1.1 b)).

Notemos que en la descripción anterior implícitamente estamos asumiendo ciertas características muy importantes del sistema. Primero, que la energía es inyectada de manera local solo en escalas grandes del sistema, segundo que la disipación actúa de manera similar pero en escalas mucho más pequeñas del sistema, y tercero que existe una separación de escalas lo suficientemente grande como para que exista un rango intermedio donde el flujo de energía es constante y no actúa ni el forzamiento ni la disipación. Es importante mencionar que ésta fenomenología

¹A grandes rasgos, existen casos particulares que pueden no entrar en estas categorías.

es en un sentido estadístico, no existe un flujo constante de energía de forma instantánea ².

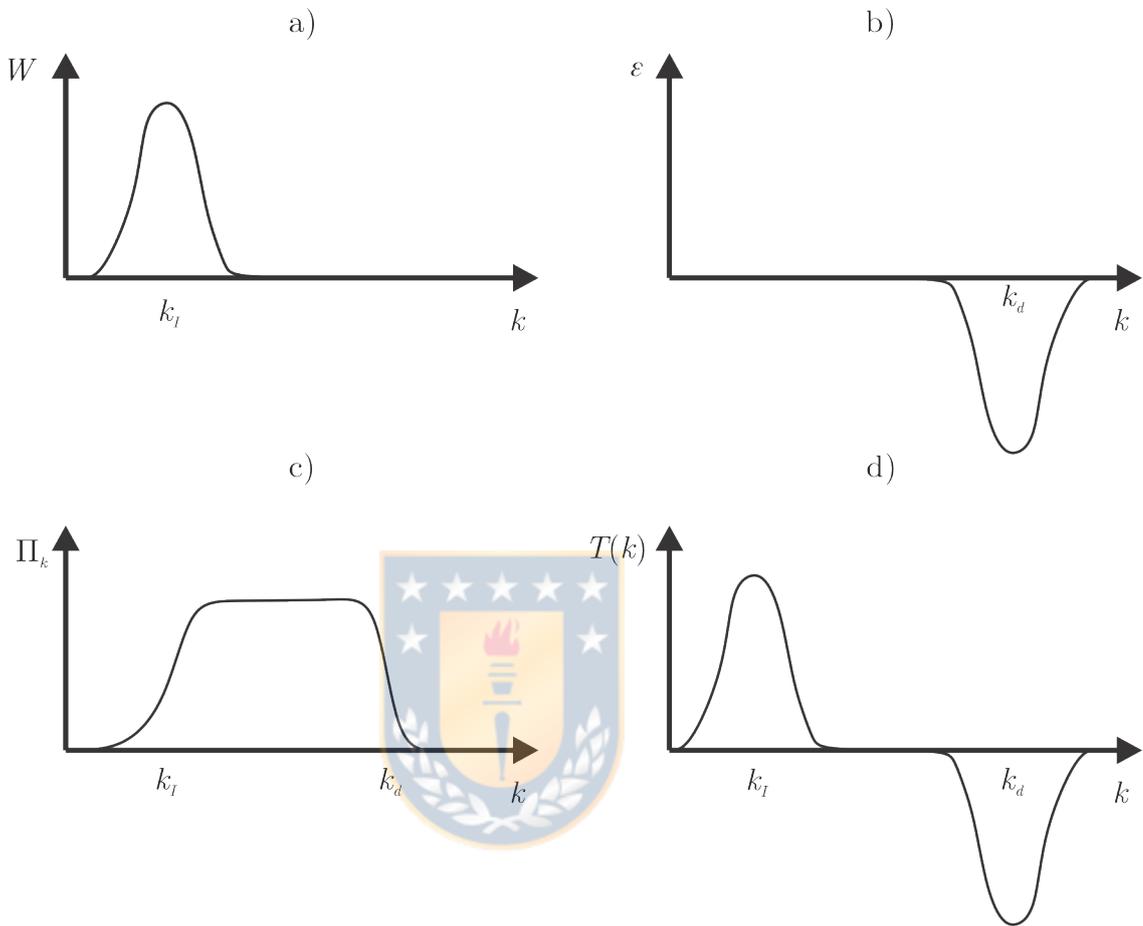


Figura 5.1.1: Esquema de fenómenos de cascadas. a) Distribución de la inyección de energía en espacio de Fourier. b) Distribución de la disipación de energía. c) Flujo de energía (correspondiente al término encontrado en el balance parcial A4.1). d) Transferencia de energía en cada modo (ver ecuación 4.7.1).

5.2. Teoría K41 de Kolmogorov

En 1941 Kolmogorov presentó uno de los resultados más famosos e importantes hasta la fecha en el estudio de la turbulencia, a esta teoría se le conoce como 'K41' [71]. Los principales supuestos de la teoría son los siguientes,

- En escalas suficientemente pequeñas ($r \ll L$, donde L es la escala integral)

²Existen fluctuaciones temporales en la transferencia de energía y en cierto instante de tiempo pueden existir flujos inversos, pero estos son extremadamente poco probables [136] y en promedio los flujos se comportan como en la figura 5.1.1

la turbulencia presenta isotropía y homogeneidad local. Estas poseen una escala características η_K .

- En escalas pequeñas $r \ll L$ las características dinámicas que describen el flujo solo pueden depender de la disipación de energía, $\langle \epsilon \rangle$, y la viscosidad ν .
- Existe un rango de escalas r (llamada rango inercial) la cual está lo suficientemente lejos de la pequeña escala de disipación η_K y la integral L ($\eta \ll r \ll L$). En éste rango las características del flujo solo dependen de la disipación $\langle \epsilon \rangle$ y existe invariancia de escala.

En ésta teoría Kolmogorov se refiere al estado de turbulencia completamente desarrollada, es decir, la existencia del rango inercial en esta teoría se estudia en el límite $Re \rightarrow \infty$ o $\nu \rightarrow 0$ ³. Lo anterior es importante dado que debemos recordar que esta teoría es una teoría de la cascada turbulenta. El rango inercial es la zona de flujo constante que presentamos en la sección anterior y su longitud depende del número de Reynolds. Al estudiar el límite $Re \rightarrow \infty$ estamos extendiendo infinitamente este rango inercial. Sin embargo esto parece contradictorio con el hecho de que ambos límites $Re \rightarrow \infty$ y $\nu \rightarrow 0$ son los mismos: la intuición nos dice que en la ausencia de viscosidad no debe existir un rango inercial, dado que la presencia de un flujo de energía desde las grandes hacia las pequeñas escalas es producto de la disipación. Esto último, como veremos más adelante, es conocido como disipación anómala y es otro de los problemas que ha presentado la turbulencia: en el límite de $\nu \rightarrow 0$ las ecuaciones de Navier-Stokes parecen no converger a las ecuaciones de Euler. Fue Onsager quién propuso una conexión entre las ecuaciones de Navier-Stokes y las de Euler: las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes en el límite de $\nu \rightarrow 0$ corresponderían a soluciones débiles de las ecuaciones de Euler que no conservan la energía. Ésta es conocida como conjetura de Onsager,⁴ fue recientemente demostrada [64] y la conexión entre ambas ecuaciones es un área de estudio en el presente [10]. Se ha observado que al truncar las ecuaciones de Euler en el espacio de Fourier las escalas más pequeñas comienzan a desarrollar una equipartición de energía, mientras que las más grandes presentan un escalamiento similar al de Kolmogorov. El flujo de energía entre ambos regímenes de escalamiento se puede considerar como una disipación si

³Tomar el límite $Re \rightarrow \infty$ es equivalente a $\nu \rightarrow \infty$ [51].

⁴Específicamente Onsager propuso que las soluciones débiles de las ecuaciones de Euler solo pueden exhibir disipación de energía si tiene un exponente de Holder $h \leq 1/3$, esta es la conocida como Conjetura de Onsager [101]

filtramos de alguna manera las escalas que presentan equipartición [32].

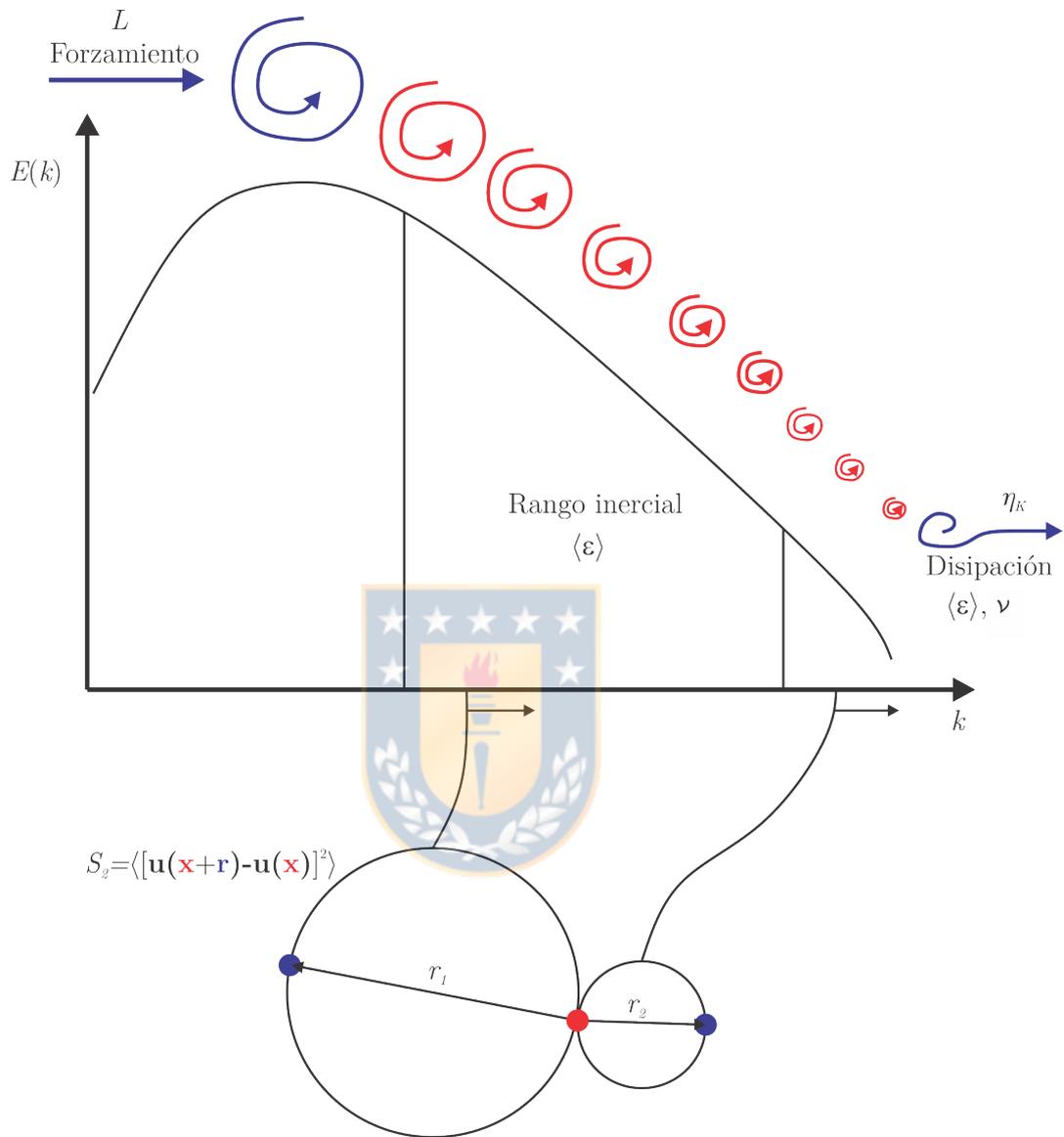


Figura 5.2.1: Esquema de la cascada de energía en la teoría K41. En la figura se muestra como la energía es inyectada en las escalas integrales L y fluye hacia las escalas más pequeñas, donde finalmente es disipada en η_K . La imagen clásica de este proceso es que los vórtices grandes se dividen en vórtices más pequeños hasta que estas estructuras son disipadas en las escalas más pequeñas, conocidas como escalas disipativas.

En la figura 5.2.1 se muestra de forma esquemática el espectro de energía $E(k)$ y la cascada que se produce desde las escalas grandes L hacia las escalas pequeñas η . También se muestra un esquema de las funciones de estructura. Según lo propuesto por Richardson [89] éstas solo contendrán información sobre escalas menores al

círculo del radio \vec{r} . A partir de las hipótesis de Kolmogorov podemos decir que en las escalas pequeñas solo existirá una dependencia de ν y $\langle \epsilon \rangle$. Las dimensiones de éstas cantidades son,

$$[\epsilon] = L^2 T^{-3} \quad [\nu] = L^2 T^{-1} \quad (5.2.1)$$

Donde L representa unidades de longitud y T unidades de tiempo. A partir de esto podemos formar una escala de longitud asociada al rango disipativo,

$$[\langle \epsilon \rangle^m \nu^n] = L^{2n} T^{-n} L^{2m} T^{-3m} = L^1 T^0 \quad (5.2.2)$$

De esto obtenemos las ecuaciones,

$$2n - 2m = 1 \quad n + 3m = 0 \quad (5.2.3)$$

Cuyas soluciones son $n = 3/4$ y $m = -1/4$, por lo que obtenemos la escala de disipación (también conocida como escala de Kolmogorov),

$$\eta_K = \frac{\nu^{3/4}}{\langle \epsilon \rangle^{1/4}} = \left(\frac{\nu^3}{\langle \epsilon \rangle} \right)^{1/4} \quad (5.2.4)$$

Antes de continuar notemos que podemos escribir la disipación en términos de cantidades integrales ⁵ como $\epsilon \sim u_L^3/L$ [107]. En ésta expresión donde u_L es una escala de velocidad integral. Al reemplazar esto en la expresión de η_K obtenemos,

$$\eta_K \sim \left(\frac{\nu^3}{u_L^3/L} \right)^{1/4} = \frac{\nu^{3/4}}{\langle u_L^{3/4} \rangle} L^{1/4} \quad (5.2.5)$$

Dividiendo por L tenemos la razón entre la escala de Kolmogorov y la escala integral,

$$\frac{\eta_K}{L} \sim \frac{\nu^{3/4}}{\langle u_L^{3/4} L^{3/4} \rangle} = \frac{1}{Re^{3/4}} \quad (5.2.6)$$

Es decir, $L/\eta_K \sim Re^{3/4}$. La importancia de este resultado es la siguiente: imaginemos que debemos simular un flujo turbulento resolviendo las ecuaciones de Navier-Stokes de manera directa. Si utilizamos elementos de tamaño $\Delta x = \eta_k$,

⁵Esto se puede realizar dado que consideramos un estado estacionario: la disipación es igual al flujo de energía en el rango inercial e igual a la energía inyectada al sistema por el forzamiento en las escalas integrales.

la razón entre la escala más grande y el tamaño del elemento necesario para resolver todas las escalas es L/η_K . Si realizamos la simulación de turbulencia homogénea e isotrópica en una caja de longitud L , con condiciones de borde periódicas, vamos a necesitar $(L/\eta_K)^3 \sim Re^{9/4}$ elementos. Para un número de Reynolds moderado $Re = 5000$ necesitaríamos del orden de 200 millones de elementos. Ésta es la razón por la cual realizar simulaciones numéricas directas es tan caro computacionalmente: existe una gran diferencia entre las escalas grandes y las más pequeñas de la turbulencia.

Habiendo estudiado las escalas disipativas, ahora centramos nuestra atención en las funciones de estructura. Las unidades de la función de estructura de segundo orden son,

$$[S_2] = L^2 T^{-2} \quad (5.2.7)$$

Sabemos que en el rango inercial esta solo depende de r y $\langle \epsilon \rangle$ (por la hipótesis de existencia del rango inercial), por lo tanto del análisis dimensional tenemos,

$$L^{2m} T^{-3m} L^n = L^2 T^{-2} \quad (5.2.8)$$

De lo cual se obtienen las ecuaciones,

$$2m + n = 2 \quad -3m = -2 \quad (5.2.9)$$

Cuyas soluciones son, $m = 2/3$ y $n = 2/3$, por lo que en el rango inercial la función de estructura tendrá la forma,

$$S_2 = C \langle \epsilon \rangle^{2/3} r^{2/3} \quad (5.2.10)$$

En general, en la teoría K41 las funciones de estructura de orden n tienen la forma,

$$S_n(r) = C_n (\langle \epsilon \rangle)^{n/3} \quad (5.2.11)$$

Es interesante volver a la conjetura de Onsager descrita anteriormente ahora que conocemos la teoría de Kolmogorov. Notemos que los exponentes $n/3 = hn$

corresponden al exponente de Hölder del campo de velocidad,

$$\vec{u}(\vec{x} + \vec{r}) - \vec{u}(\vec{x}) \leq Cr^h \quad (5.2.12)$$

Según la conjetura de Onsager, para la función de estructura de orden n , el máximo valor que puede tomar el exponente es $n/3$ para que exista disipación anómala y soluciones disipativas de Euler [45, 44]. Desde este punto de vista la teoría de Kolmogorov correspondería al caso límite, por lo surge la pregunta: es la teoría de Kolmogorov exacta en el límite $Re \rightarrow \infty$? Como veremos más adelante existen desviaciones de la teoría K41 y los resultados que se han obtenido hasta ahora indican que estas desviaciones no son un efecto de Re finito.

Es necesario remarcar que es importante la localidad del intercambio de energía en el rango inercial. Usualmente para argumentar la localidad de las interacciones se separa la interacción de las estructuras de orden $\sim r$ (en el rango inercial) en dos tipos [51], el primero es un arrastre debido a las estructuras grandes (en inglés *sweeping*) y el segundo es una interacción que produce distorsión de las estructuras debido al esfuerzo de corte. La primera interacción (de arrastre) debido a escalas $L \gg r$ no debería cambiar la estructura ni el contenido de energía del rango inercial $\sim r$, además si el arrastre es uniforme, no produce variaciones en las estructuras finas debido a la invariancia bajo transformaciones de Galileo de las ecuaciones de Navier-Stokes (el efecto es similar a ver la estructura pequeña desde un marco de referencia moviéndose a velocidad constante). La segunda interacción descrita es debido al esfuerzo de corte (gradientes de velocidad), éste es del orden [51],

$$s_r \sim \frac{v_r}{r} \sim \langle \epsilon \rangle^{1/3} r^{-2/3} \quad (5.2.13)$$

Se dice que las estructuras de escalas $L \gg r$ no generan una distorsión considerable debido a que el esfuerzo de corte es pequeño en escalas grandes. Las escalas pequeñas ($\eta \ll r$) tampoco tienen un efecto porque la correlación entre ambas escalas es baja. Estos argumentos usualmente son invocados para decir que la mayor parte de las contribuciones al flujo de energía en una escala $\sim r$ vienen de las escalas cercanas y las interacciones en el rango inercial son locales. Notemos que es muy importante para la teoría la localidad en el rango inercial: estamos asumiendo que en este rango de escalas solo existe dependencia en la escala r

y el flujo de energía ϵ , es decir, el sistema olvida toda la información sobre la inyección de energía. Si existieran interacciones no locales entonces ya no sería válida la hipótesis de Kolmogorov y existiría una dependencia en el forzamiento de gran escala L incluso dentro del rango inercial. Bajo este punto de vista la teoría de Kolmogorov nos describe un rango inercial con estadísticas universales.

Un punto importante es que la cascada de energía es un fenómeno en el espacio de Fourier, pero no se debe tener la imagen en el espacio real de una estructura grande rompiéndose en otras más pequeñas, como explican Sagaut y Tsinober [117, 132] en el espacio físico se debe reemplazar la imagen de cascada por una de generación de gradientes de velocidad. Una mejor imagen de como realmente ocurren los procesos y la generación de pequeñas escalas en la turbulencia puede ser obtenida observando experimentos modernos (numéricos o experimentales), éstos generalmente están enfocados en la colisión de tubos de vórtices para analizar como a partir de esto nacen estructuras pequeñas [115, 148]. Los mecanismos de generación de escalas en el espacio real son un campo de investigación activo actualmente y el debate sobre si existe solo un mecanismo (como el estiramiento de vórtices) o una combinación de efectos (como la auto-amplificación del tensor de deformaciones) sigue abierto.

5.3. Ecuación de Karman-Howarth

Hasta ahora hemos descrito parte de la teoría estadística de la turbulencia. Como hemos visto los puntos centrales de ésta son las funciones de correlación (o de estructura), por lo que necesitamos una ecuación que describa su evolución temporal.

En el caso de turbulencia isótropa la evolución de las funciones de estructura longitudinales de segundo orden está dada por la ecuación de Karman-Howarth,

$$\partial_t R_{LL}(r, t) = \left(\partial_r + \frac{4}{r} \right) (R_{LL,L}(r, t) + 2\nu \partial_r R_{LL}(r, t)) \quad (5.3.1)$$

Donde las funciones longitudinales están dadas por,

$$R_{LL} = \langle u_r(\vec{x})u_r(\vec{x} + \vec{r}) \rangle \quad R_{LL,L} = \langle u_r(\vec{x})^2 u_r(\vec{x} + \vec{r}) \rangle \quad (5.3.2)$$

En estas funciones u_r se refiere a la proyección longitudinal de la velocidad.

Notemos el acoplamiento de la función de estructura de segundo orden con la de tercer orden. Este tipo de acoplamiento ocurre para todos los momentos estadísticos del campo de velocidad y es conocido como el 'problema de cierre' de las ecuaciones de Navier-Stokes.

5.4. Ley de 4/5 de Kolmogorov

La ley de 4/5 de Kolmogorov es uno de los pocos resultados analíticos exactos que se pueden obtener a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes. Para poder obtenerla debemos expresar la ecuación de Karman-Howarth en términos de las funciones de estructura,

$$S_2(r) = \langle [u_r(r) - u_r(0)]^2 \rangle \quad (5.4.1)$$

$$= \langle u_r^2(r) \rangle - 2\langle u_r(0)u_r(r) \rangle + \langle u_r^2(0) \rangle \quad (5.4.2)$$

$$= 2\langle u_r^2(0) \rangle - 2\langle u_r(0)u_r(r) \rangle \quad (5.4.3)$$

$$= 2(R_{LL}(0) - R_{LL}(r)) \quad (5.4.4)$$

Donde se usó la homogeneidad del campo. Para la función de estructura de tercer orden,

$$S_r(r) = \langle [u_r(r) - u_r(0)]^3 \rangle \quad (5.4.5)$$

$$= \langle u_r^3(r) - 3u_r^2(r)u_r(0) + 3u_r^2(0)u_r(r) - u_r^3(0) \rangle \quad (5.4.6)$$

$$= 3\langle u_r^2(0)u_r(r) - u_r^2(r)u_r(0) \rangle \quad (5.4.7)$$

$$= 6R_{LL,L} \quad (5.4.8)$$

Suponiendo las hipótesis de Kolmogorov, cuando $Re \rightarrow \infty$ existe un rango inercial, si estudiamos solo la pequeña escala consideramos $r \ll L$. En este límite la función de estructura solo depende de la disipación y la viscosidad y su derivada temporal

es cero (consideramos un flujo estacionario). Con estas suposiciones en cuenta,

$$\partial_t S_3 = 2\partial_t R_{LL}(0, t) - 2\partial_t R_{LL}(r, t) = 0 \quad (5.4.9)$$

Para el primer término, sabemos que la correlación está relacionada con la energía cinética por $R_{LL}(0, t) = \frac{2}{3}\partial_t \langle \frac{u^2}{2} \rangle = -\frac{2}{3}\epsilon$. Para la derivada temporal de $R_{LL}(r, t)$ aplicamos la ecuación de Karman-Howarth y llegamos a,

$$-\frac{2}{3}\epsilon = \left(\partial_r + \frac{4}{r} \right) (R_{LL,L}(r, t) + 2\nu\partial_r R_{LL}(r, t)) \quad (5.4.10)$$

Reemplazando $R_{LL,L} = \frac{1}{6}S_3(r)$ y $\partial_r S_2 = -2\partial_r R_{LL}$,

$$-\frac{2}{3}\epsilon = \left(\partial_r + \frac{4}{r} \right) \left(\frac{1}{6}S_3(r) - \nu\partial_r S_2(r, t) \right) \quad (5.4.11)$$

Esta ecuación se puede reescribir como,

$$\frac{1}{3}\partial_r(r^4 S_3) = 2\nu\partial_r(r^4 \partial_r S_2) - \frac{4}{3}r^4 \epsilon \quad (5.4.12)$$

Integrando sobre r llegamos a,

$$\frac{1}{3}r^4 S_3 = 2\nu r^4 \partial_r S_2 - \frac{4}{15}r^5 \epsilon \quad (5.4.13)$$

Y tenemos la siguiente expresión para la función de estructura de tercer orden,

$$S_3 = 6\nu S_2 - \frac{4}{5}\epsilon r \quad (5.4.14)$$

Ahora consideramos un punto crucial en la teoría de la turbulencia: el límite $Re \rightarrow \infty$ es equivalente a $\nu \rightarrow 0$. Si la disipación de energía permanece finita entonces llegamos a,

$$S_3 = -\frac{4}{5}\epsilon r \quad (5.4.15)$$

Esta es la famosa 'ley de 4/5' de Kolmogorov y el hecho de que la disipación se mantenga finita cuando $\nu \rightarrow 0$ es conocido como disipación anómala: la simetría temporal se mantiene rota incluso en el límite en que la causa del rompimiento de la simetría (la viscosidad) tiende a 0.

5.5. Escalamiento anómalo

A pesar del éxito de la teoría de Kolmogorov, se sabe que ésta no es correcta. Los exponentes de las funciones de estructura no aumentan como $n/3$ para $n > 3$. Se ha observado experimentalmente que debe haber una dependencia de las funciones de estructura en las grandes escalas L para tener en cuenta los exponentes anómalos [90],

$$S_n(r) \sim C_n \langle \epsilon \rangle^{n/3} r^{n/3} \left(\frac{r}{L} \right)^{\zeta_a(n)} \quad (5.5.1)$$

Donde $\zeta_a(n)$ representa el exponente anómalo. Como explica Eyink [44], esto significa que la información sobre las grandes escalas no es perdida en el proceso de cascada. Ésto se debe al fenómeno de la intermitencia, que corresponde a *peaks* extremos (negativos o positivos) en diferentes cantidades incluso dentro del rango inercial. Esto genera la no-gaussianidad de las funciones distribuciones de probabilidad, dado que en las pequeñas escalas existe una probabilidad mayor (respecto a una distribución gaussiana) de ocurrencia de eventos extremos.

Si bien es claro que la teoría de Kolmogorov no es gaussiana ⁶, tampoco es intermitente. Podemos ver esto al comparar la siguiente cantidad (conocida como *flatness* o kurtosis),

$$K = \frac{S_4(r)}{S_2(r)^2} = \frac{C_4}{C_2^2} \quad (5.5.2)$$

Vemos que ésta medida de intermitencia es constante en el rango inercial según la teoría K41, sin embargo lo que se ha observado experimentalmente es $K \sim r^{-0.06}$ [2], por lo que la intermitencia crece sin límite cuando $r \rightarrow 0$ incluso en el rango inercial. Además, dado que en el límite $Re \rightarrow \infty$ aumenta la extensión del rango inercial también aumentan los efectos intermitentes dentro de éste. En la figura 5.5.1 se muestra un ejemplo de una cantidad intermitente (una componente del gradiente de velocidad), se ve que el campo está caracterizado por grandes regiones de baja actividad y pequeñas zonas de eventos extremos.

⁶El tercer momento debe ser distinto de cero para que exista un flujo de energía a través de las escalas, las distribuciones gaussianas tienen todos sus momentos impares nulos

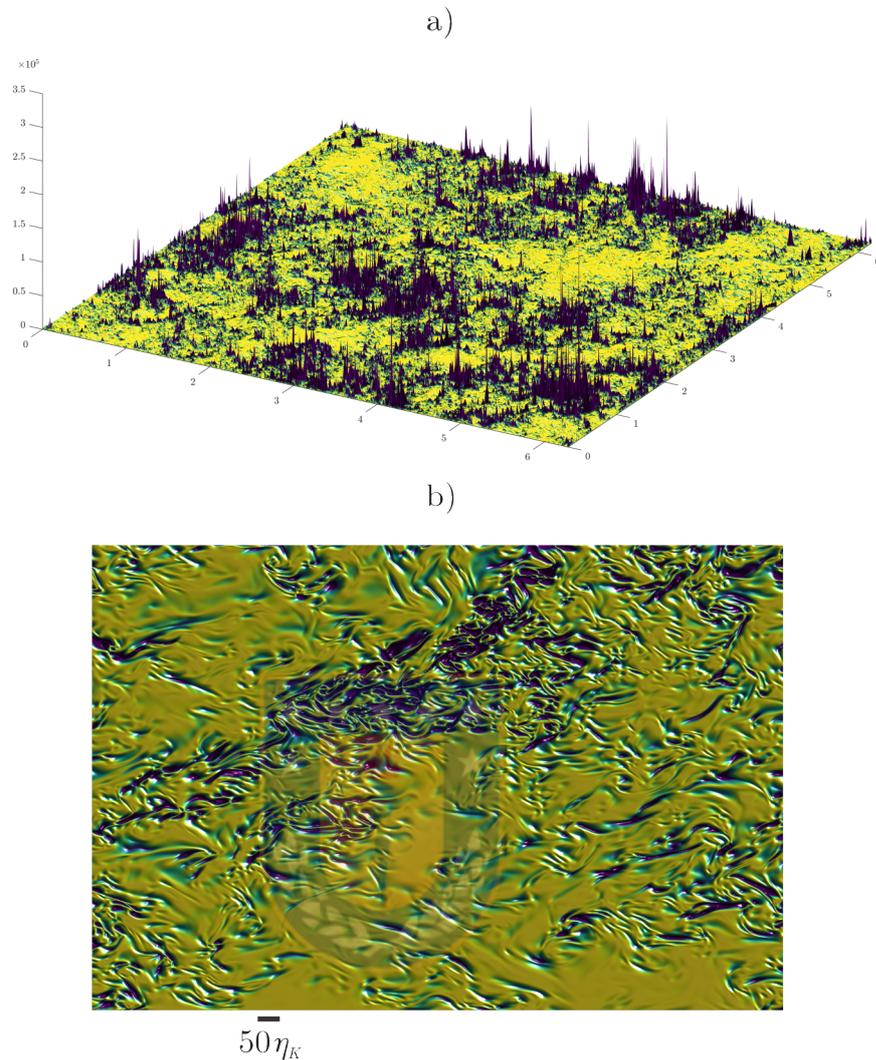


Figura 5.5.1: a) Distribución espacial de la componente del gradiente de velocidad $\partial_1 u_1$. b) Acercamiento de la distribución. Los datos corresponden a una simulación numérica directa de un flujo homogéneo-isótropo con $Re_\lambda = 613$. Datos obtenidos desde la base de datos JHTDB.

Además de los efectos en la kurtosis, se ha observado que a medida que aumentamos el orden n del momento de las funciones de estructura las desviaciones de la teoría K41 son cada vez más grandes: los exponentes siguen una no lineal del orden n , mientras que la teoría K41 predice una recta con pendiente $h = 1/3$. Esto es lo que se observa en la figura 5.5.2, algunos autores han propuesto que estos resultados se deben a efectos de Reynolds finito [108] pero la evidencia experimental actual muestra que incluso para la función de estructura de segundo orden el valor del exponente se satura en un valor menor al predicho por la teoría de Kolmogorov [65].

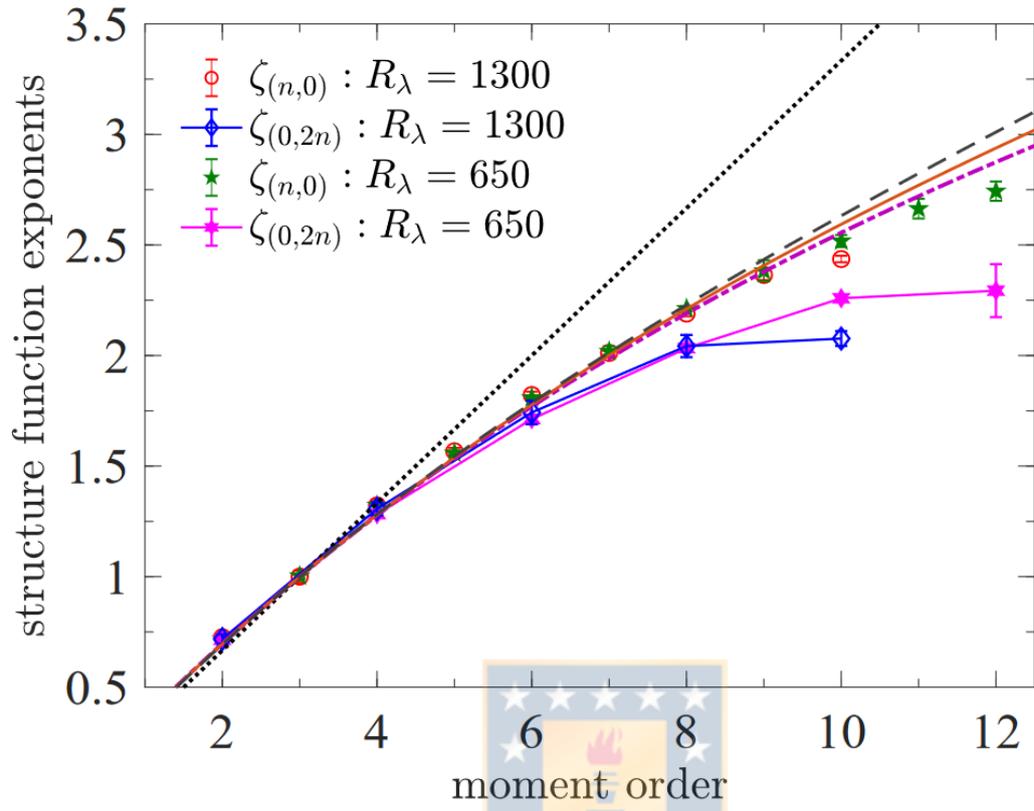


Figura 5.5.2: Exponentes de las funciones de estructura en función del orden del momento considerado. Estos datos son obtenidos a partir de simulaciones numéricas directas por Iyer et al. [65].

Capítulo 6

Estabilidad Hidrodinámica

6.1. Ecuación de Orr-Sommerfeld

Uno de los aspectos más importantes en el estudio de los flujos turbulentos es la transición laminar-turbulenta. Como se transforma un flujo laminar a uno turbulento? Y no es una pregunta trivial, pues aun más enigmático es el hecho de que, al agregar los efectos viscosos un flujo que de otra manera sería estable, se vuelve inestable (contrario a la intuición, dado que uno pensaría que al agregar el efecto de las viscosidad, esta funcionaría como un tipo amortiguamiento y por lo tanto haría el flujo más estable). A continuación presentaremos los aspectos más básicos de la teoría de estabilidad hidrodinámica, existen diversos libros donde se puede consultar la teoría más a fondo [34, 120, 30, 146]. Para comenzar a estudiar éste aspecto primero debemos derivar una ecuación para las perturbaciones. Consideremos un flujo paralelo (puede ser un flujo de corte como un canal) tal que $\vec{u} = \vec{U} + \vec{u}'$, entonces las ecuaciones de Navier-Stokes son,

$$\partial_t U_i + u'_i + [\partial_j (U_j + u'_j)] (U_i + u'_i) = -\partial_i p + \partial_j \partial_j (U_i + u'_i) \quad (6.1.1)$$

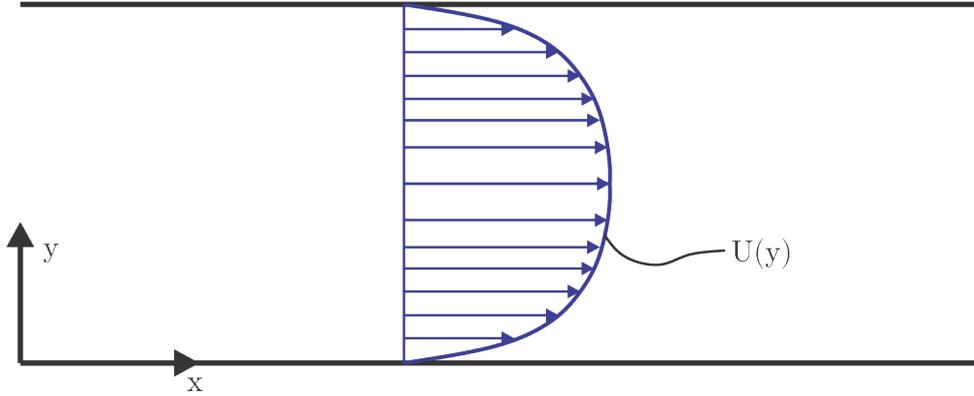


Figura 6.1.1: Perfil de velocidad en un canal laminar, observamos que la velocidad solo tiene componente en x y gradiente en y .

Dado que consideramos un flujo paralelo, podemos orientar convenientemente el flujo medio $\vec{U} = U(y)\hat{i}$ de tal forma que tenga solo componente en x (como es mostrado en la figura), además también agregamos una perturbación a la presión $p = P + p'$. Ahora haremos referencia al teorema de Squire [125], según el cual (como explica Criminale [34]) para cada perturbación tridimensional corresponde una bidimensional más inestable. Por esto basta con analizar un flujo 2D (esto es solo válido en el análisis de estabilidad lineal). Por lo tanto para la ecuación de la componente x (considerando $u_x = U + u'$, $u_y = v$) tenemos,

$$\partial_t U + \partial_t u' + (U + u')\partial_x(U + u') + v'\partial_y u' = -\frac{1}{\rho}\partial_x(P + p') + \nu(\partial_x^2 + \partial_y^2)(U + u') \quad (6.1.2)$$

Ahora, dado que consideramos perturbaciones pequeñas, descartamos los términos de segundo orden en las perturbaciones. Además, el flujo base se considera estacionario, por lo que se anula su derivada temporal,

$$\partial_t u' + U\partial_x u' = -\frac{1}{\rho}\partial_x(P + p') + \nu(\partial_x^2 + \partial_y^2)u' + \nu\partial_y^2 U. \quad (6.1.3)$$

Para la componente y tenemos la siguiente ecuación,

$$\partial_t v' + (U + u')\partial_x v' + v'\partial_y v' = -\frac{1}{\rho}\partial_y(P + p') + \nu(\partial_x^2 + \partial_y^2)v' \quad (6.1.4)$$

También sabemos que el flujo base es una solución a las ecuaciones de Navier-Stokes, por lo tanto satisface las siguientes relaciones,

$$\nu\partial_y^2 - \frac{1}{\rho}\partial_P = 0 \quad -\frac{1}{\rho}\partial_y P = 0 \quad (6.1.5)$$

Y también debe ser incompresible,

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \implies \nabla \cdot \vec{u}' = \partial_x u' + \partial_y v' = 0 \quad (6.1.6)$$

Luego tenemos el siguiente sistema de ecuaciones para la evolución temporal de las perturbaciones lineales sobre el flujo base,

$$\partial_t u' + U \partial_x u' = -\frac{1}{\rho} \partial_x p' + \nu (\partial_x^2 + \partial_y^2) u' \quad (6.1.7)$$

$$\partial_t v' + U \partial_x v' = -\frac{1}{\rho} \partial_y p' + \nu (\partial_x^2 + \partial_y^2) v' \quad (6.1.8)$$

$$\partial_x u' + \partial_y v' = 0 \quad (6.1.9)$$

Es posible desacoplar las ecuaciones para v' . Primero derivamos la ecuación de u' con respecto a y ,

$$\partial_t \partial_y u' + \partial_y (U \partial_x u') + \partial_y (v' \partial_y U) = -\frac{1}{\rho} \partial_y \partial_x p' + \nu \partial_y (\partial_x^2 + \partial_y^2) u' \quad (6.1.10)$$

Ahora derivamos la ecuación de v' con respecto a x ,

$$\partial_t \partial_x v' + \partial_x (U \partial_x v') = -\frac{1}{\rho} \partial_x \partial_y p' + \nu \partial_x (\partial_x^2 + \partial_y^2) v' \quad (6.1.11)$$

Si restamos ambas ecuaciones observamos que (debido a que las derivadas parciales conmutan) se anulan los términos de la presión, por lo que llegamos a,

$$\partial_t (\partial_y u' - \partial_x v') + \partial_y (U \partial_x u') - \partial_x (U \partial_x v') + \partial_y (v' \partial_y U) = \nu (\partial_x^2 + \partial_y^2) (\partial_y u' - \partial_x v') \quad (6.1.12)$$

Manipulando los siguientes términos,

$$\partial_y (U \partial_x u') - \partial_x (U \partial_x v') + \partial_y (v' \partial_y U) \quad (6.1.13)$$

$$= \partial_y U \partial_x u' + U \partial_y \partial_x u' + \partial_y v' \partial_y U + v' \partial_y^2 U - \partial_x U \partial_x v' - U \partial_x^2 v' \quad (6.1.14)$$

$$= \partial_y U (\partial_x u' + \partial_y v') + U \partial_x (\partial_y u' - \partial_x v') + v' \partial_y^2 U - \partial_x U \partial_x v' \quad (6.1.15)$$

$$= U \partial_x (\partial_y u' - \partial_x v') + \partial_y^2 U v' \quad (6.1.16)$$

Donde en la tercera línea se uso el hecho de que $\partial_x U(y) = 0$ y $\partial_x u' + \partial_y v' = 0$.

Luego llegamos a la siguiente ecuación,

$$\partial_t(\partial_y u' - \partial_x v') + U\partial_x(\partial_y u' - \partial_x v') + \partial_y^2 U v' = \nu(\partial_x^2 + \partial_y^2)(\partial_y u' - \partial_x v') \quad (6.1.17)$$

Ahora derivamos con respecto a x ,

$$\partial_t(\partial_y \partial_x u' - \partial_x^2 v') + U\partial_x(\partial_y \partial_x u' - \partial_x^2 v') + \partial_y^2 U \partial_x v' = \nu(\partial_x^2 + \partial_y^2)(\partial_y \partial_x u' - \partial_x^2 v') \quad (6.1.18)$$

Usando la condición de incompresibilidad reemplazamos $\partial_x u' = -\partial_y v'$,

$$\partial_t(\partial_y^2 v' + \partial_x^2 v') + U\partial_x(\partial_y^2 v' + \partial_x^2 v') - \partial_y^2 U \partial_x v' = \nu(\partial_x^2 + \partial_y^2)(\partial_y^2 v' + \partial_x^2 v') \quad (6.1.19)$$

Finalmente llegamos a la ecuación,

$$(\partial_t + U\partial_x)(\partial_y^2 + \partial_x^2)v' + \partial_y^2 U \partial_x v' = \nu(\partial_x^2 + \partial_y^2)(\partial_y^2 + \partial_x^2)v' \quad (6.1.20)$$

O en términos de operadores,

$$(\partial_t + U\partial_x)^2 v' - \partial_y^2 U \partial_x v' = \nu^4 v' \quad (6.1.21)$$

Donde $\Delta = (\partial_x^2 + \partial_y^2)(\partial_y^2 + \partial_x^2)$ es el llamado operador biarmónico. La ecuación 6.1.21 es conocida como ecuación de Orr-Sommerfeld. Más conocida es su formulación en términos de la función de flujo. Para obtener esta última forma consideremos las siguientes relaciones,

$$u' = \partial_y \psi \quad v' = -\partial_x \psi \quad (6.1.22)$$

Luego, reemplazando en la ecuación 6.1.17,

$$\partial_t(\partial_y^2 \psi + \partial_x^2 \psi) + U\partial_x(\partial_y^2 \psi + \partial_x^2 \psi) - \partial_y^2 U \partial_x \psi = \nu(\partial_x^2 + \partial_y^2)(\partial_y^2 \psi + \partial_x^2 \psi) \quad (6.1.23)$$

y llegamos a la ecuación de Orr-Sommerfeld para la función de flujo,

$$(\partial_t + U\partial_x)^2 \psi - \partial_y^2 U \partial_x \psi = \nu^4 \psi \quad (6.1.24)$$

El estudio más usual de esta ecuación se basa en suponer soluciones monocromáticas de la forma,

$$\psi = \phi(y)e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (6.1.25)$$

En esta solución $\beta = \beta_r + i\beta_i$ es un número complejo, por lo tanto es el que dicta la estabilidad temporal de la perturbación (la parte real es la frecuencia del modo). Cuando $\beta_i > 0$ el flujo base será inestable, si $\beta_i < 0$ el flujo base es estable (en el tiempo). Es usual introducir la velocidad de fase,

$$c = \frac{\beta}{\alpha} = c_r + ic_i \quad (6.1.26)$$

Las componentes de la velocidad para este tipo de soluciones son,

$$u' = \partial_y \psi = \partial_y \phi e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad v' = -\partial_x \psi = -i\alpha \phi e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (6.1.27)$$

Luego tenemos,

$$\partial_y^2 \psi = \partial_y^2 \phi e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (6.1.28)$$

$$\partial_x^2 \psi = -\alpha^2 \phi e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (6.1.29)$$

Por lo tanto para el Laplaciano tenemos,

$$\nabla^2 \psi = (\partial_y^2 - \alpha^2) \phi e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (6.1.30)$$

Luego el primer término de la ecuación de Orr-Sommerfeld 6.1.24 tendrá la forma,

$$(\partial_t + U\partial_x)^2 \psi = (-i\beta + iU\alpha) \nabla^2 \psi \quad (6.1.31)$$

$$= (-i\beta + iU\alpha) (\partial_y^2 - \alpha^2) \phi e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (6.1.32)$$

$$= i\alpha(U - c) (\partial_y^2 - \alpha^2) \phi e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (6.1.33)$$

Para el segundo término,

$$\partial_y^2 U \partial_x \psi = i\alpha \partial_y^2 U \phi e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (6.1.34)$$

Y para el término de la derecha,

$$\nu \nabla^2 \psi = \nu (\partial_x^2 + 2\partial_x^2 \partial_y^2 + \partial_y^2) \psi \quad (6.1.35)$$

$$= \nu (\alpha^4 \phi - 2\alpha^2 \partial_y^2 \phi + \partial_y^4 \phi) e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (6.1.36)$$

Finalmente llegamos a la siguiente ecuación para los modos monocromáticos de la ecuación de Orr-Sommerfeld,

$$\alpha(U - c)(\partial_y^2 - \alpha^2)\phi + \alpha \partial_y^2 U \phi = -i\nu(\alpha^4 - 2\alpha^2 \partial_y^2 + \partial_y^4)\phi \quad (6.1.37)$$

En el caso inviscido es conocida como ecuación de Rayleigh,

$$(U - c)(\partial_y^2 - \alpha^2)\phi - \partial_y^2 U \phi = 0 \quad (6.1.38)$$

6.2. Estabilidad en flujos paralelos y ondas de Tollmien-Schlichting

Usualmente la estabilidad de los flujos se describe en términos de las 'curvas de estabilidad neutral'. Estas son las curvas para las cuales $c = 0$, es decir, es la frontera entre las soluciones estables e inestables en el plano $Re - \alpha$. Fueron Tollmien [130] y Schlichting [119] quienes desarrollaron la teoría de estabilidad para el conocido perfil de velocidad de Blasius de una capa límite, éste es un perfil de velocidad que no posee un punto de inflexión y es una solución a la siguiente ecuación diferencial,

$$2 \frac{d^3 f}{dy_d^3} + f \frac{d^2 f}{dy_d^2} = 0 \quad (6.2.1)$$

donde y_d representa una distancia adimensional, $y_d = y \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}$. La velocidad U_0 es la velocidad del flujo libre y el perfil de velocidad está dado por $U = U_0 y_d$. Las condiciones de borde para la ecuación diferencial son $f(0) = f'(0) = 0$ y $f'(\infty) = 1$. Notemos que esto significa que lejos de la pared ($y_d \rightarrow \infty$) el perfil de velocidad toma la velocidad del flujo libre, mientras que en la pared ($y_d = 0$) se cumple la condición de no-deslizamiento.

No existen soluciones analíticas para la ecuación de Blasius, por lo que los

resultados que se poseen son numéricos. En la figura 6.2.1 se muestra la curva neutral para el perfil de Blasius reportada por Schlichting.

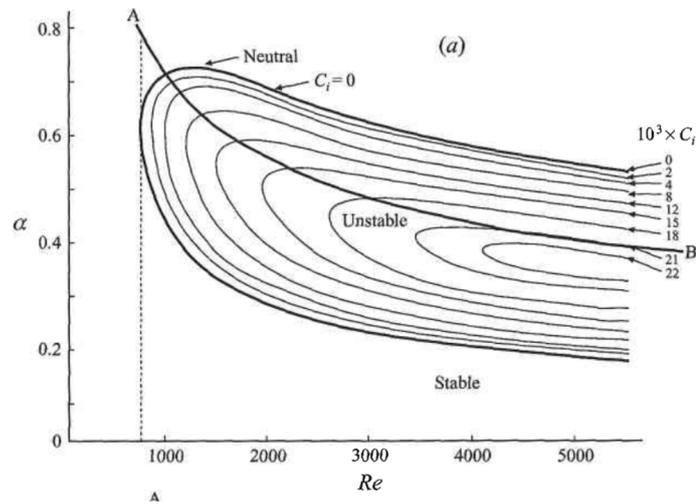


Figura 6.2.1: Estabilidad de perfil de Blasius reportado por Schlichting [120].

Para comprender la información entregada por ésta curva recordemos el significado de cada una de las variables. Según lo explicado en la sección anterior el flujo es inestable cuando c_r (C la figura 6.2.1) es mayor a 0. Por lo tanto la curva neutral separa las soluciones estables de las inestables, para la ecuación de Orr-Sommerfeld. También se observa que existe un mínimo número de Reynolds para el cual existen soluciones inestables (≈ 700). Sin embargo recordemos que éstas soluciones inestables representan perturbaciones infinitesimales: se necesita que estas perturbaciones (ondas de Tollmien-Schlichting) se desarrollen antes de transicionar a la turbulencia. Es por esto que se diferencia entre el Reynolds crítico y el Reynolds mínimo para el cual el flujo es inestable (también denotado por Re_{ind} o 'Reynolds de indiferencia', [120]). Por sobre el Re_{ind} cualquier perturbación con un número de onda α dentro de la región inestable se amplificará hasta eventualmente convertirse en puntos turbulentos y finalmente llegar a un flujo completamente turbulento. El proceso de desarrollo de las ondas de Tollmien-Schlichting es más complicado dado que involucra interacciones no lineales y requiere aproximaciones de mayor orden [34]. Sin embargo podemos mencionar que existen dos tipos principales de transiciones, las conocidas como de 'tipo K' y 'tipo H', según el tipo de interacción [118, 70, 62].

Capítulo 7

Teoría de la Información

Las fundaciones de la teoría matemática de la información fueron establecidas por Claude Shannon en 1948 [121]. Desde entonces la teoría de la información se ha expandido a otras áreas y actualmente es aplicada en diversos campos de estudio (teoría de la computación, física [66], estadística, entre otros). Como ésta no es una introducción a la teoría, en éste capítulo presentaremos algunos conceptos útiles para los fines de nuestro estudio.

7.1. Medidas de información

La información proviene de la probabilidad, pensemos en la ocurrencia de cierto evento, tenemos dos casos opuestos:

- Si sabemos que el evento ocurrirá con total certeza, es decir $p = 1$, entonces no ganamos información con dicho evento, pues sabíamos de antemano que iba a ocurrir y podríamos haber analizado sus efectos antes de que ocurriera.
- Si un evento tiene una probabilidad $p = 0$ de ocurrir tampoco nos entrega información. Sabemos que nunca ocurrirá.

Esto puede ser cuantificado por una función $h(p)$ [11], tal que cumpla estas condiciones. Si tenemos un grupo de posibles eventos con probabilidades p_i (que satisfacen la condición de normalización) entonces la información media que obtenemos de esta secuencia es $\langle h(p) \rangle$, es decir (en el caso discreto),

$$I = \langle h(p) \rangle = \sum_i p_i h(p_i) \quad (7.1.1)$$

O en el caso continuo,

$$I = \langle h(p) \rangle = \int \rho(V) h(\rho) dV \quad (7.1.2)$$

Y la entropía está dada por $S = -I$. La definición más conocida de información es $h(\rho) = \log(\rho)$. A partir de ésta se puede escribir la entropía de Shannon ([121]),

$$S = - \int \rho(V) \log(\rho(V)) dV \quad (7.1.3)$$

Donde la base del logaritmo define las unidades de medida (si es un logaritmo natural se llaman nats, cuando la base es 2 son llamados bits). La entropía de Shannon 7.1.3 es la única que cumple con los llamados axiomas de Khinchin. Estos deben ser satisfechos para considerar una cierta función como una medida de información [68] (el único axioma que se relaja para extender la definición de entropía es el cuarto),

- La información I solo depende de la probabilidad de los eventos.
- La distribución uniforme minimiza la información (o maximiza la entropía).
- Un evento con probabilidad 0 no nos entrega información, $I(p_1, \dots, p_n) = I(p_1, \dots, p_n, 0)$.
- Una medida de información debe satisfacer la siguiente condición cuando consideramos dos sistemas que pueden interactuar, $I(p(i, j)) = I(p(i)) + \sum_i p(i) I(p(i|j))$.

El último axioma representa que la información debe ser independiente de como es recolectada. Es importante notar que cuando los dos sistemas son independientes entonces $p(i, j) = p(i)p(j)$ y el axioma se reduce a $I(p(i, j)) = I(p(i)) + I(p(j))$.

7.2. Entropía de Shannon, entropía relativa e información mutua

Ahora nos enfocaremos en la medida del tipo 7.1.3. Un ejemplo muy simple de cálculo de la entropía es el caso de una moneda (no cargada). Sabemos que hay dos estados accesibles: cara y sello, cada uno con probabilidad $1/2$. La entropía de este sistema es,

$$S = -\log\left(\frac{1}{2}\right) = \log(2) \quad (7.2.1)$$

si el logaritmo es en base 2, la entropía es $1[\text{bit}]$. Un punto importante sobre la medida de información $h(p) = -p \log(p)$ es su concavidad en $[0, 1]$. Debido a esta propiedad existe un máximo absoluto en $[0, 1]$. Esto se puede ver analíticamente derivando la función $S(p)$,

$$\partial_{p_i} S = -\log(p_i) - 1 \implies \partial_{p_i}^2 S = -\frac{1}{p_i} < 0 \quad (7.2.2)$$

La desigualdad es debido a que la probabilidad p_i es siempre positiva, por lo tanto la segunda derivada de S es siempre negativa. Para ver la forma de la entropía $S(p)$ en un sistema con dos estados accesibles (con probabilidades p y $1 - p$) notemos que,

$$S(p) = -p \log(p) - (1 - p) \log(1 - p) \quad (7.2.3)$$

El gráfico de esta función se muestra en la figura 7.2.1. Como podemos ver, tenemos el resultado esperado. La entropía es máxima para $p = 0.5$ (la distribución uniforme) es máxima e igual a $1[\text{bit}]$ o $\approx 0.7[\text{nats}]$.

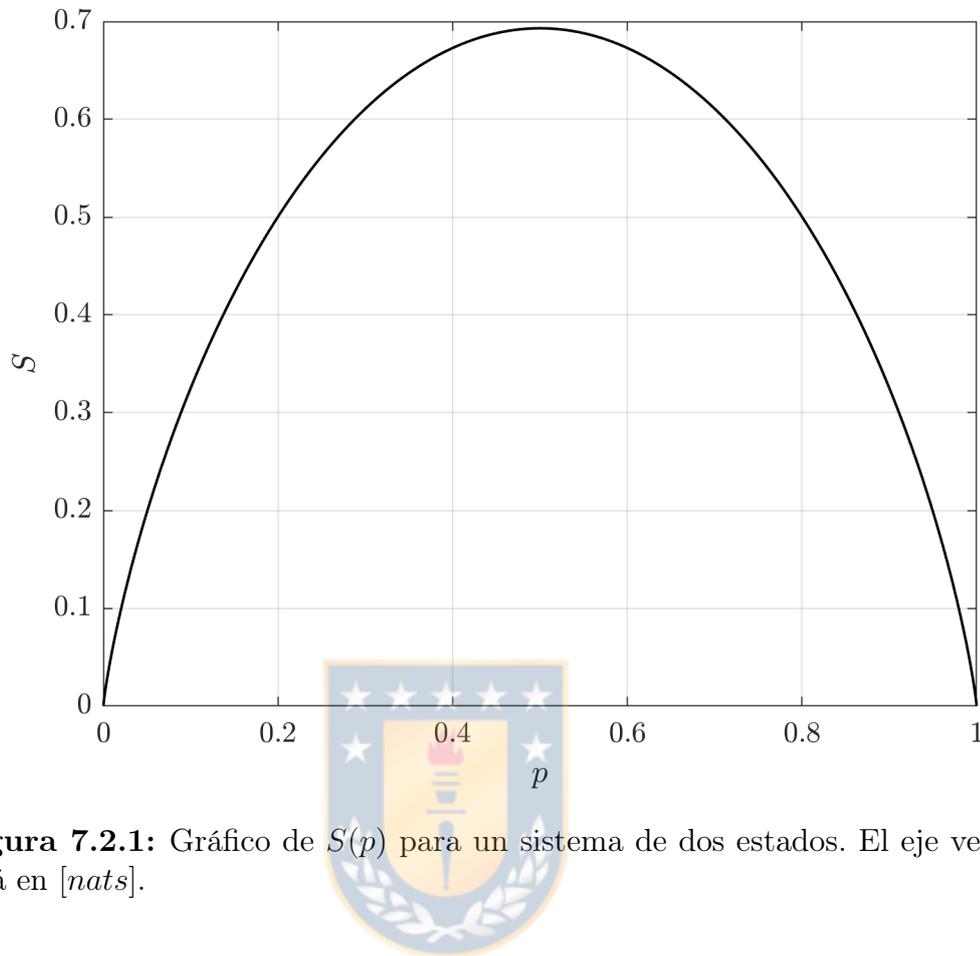


Figura 7.2.1: Gráfico de $S(p)$ para un sistema de dos estados. El eje vertical está en [nats].

Una interpretación de la entropía es la siguiente: $S(V)$ es el número medio de preguntas *binarias*¹ necesarias para poder determinar el valor de la variable. Por ejemplo en el caso del lanzamiento de una moneda el valor de la entropía es 1[bit], debido a que podemos preguntar 'Es cara?', si la respuesta es no, sabremos que es sello. Si la respuesta es si, sabemos que es cara, por lo tanto con una pregunta basta para conocer el estado del sistema.

Otro punto importante es que la entropía no depende directamente de los valores que toma la variable aleatoria V , sino que depende solo de su distribución (es un funcional de la función de densidad), y como vimos anteriormente corresponde al valor medio de la medida de información. De igual forma que para las densidades de probabilidad definimos las densidades conjuntas y condicionales, podemos

¹En el caso de que la base del logaritmo no sea 2, ya no son preguntas binarias, por esto la entropía es una función decreciente en la base.

definir la entropía conjunta y condicional. La primera está dada por,

$$S(V_1, V_2, \dots, V_n) = - \sum_{V_1} \sum_{V_2} \dots \sum_{V_n} p(V_1, V_2, \dots, V_n) \log(p(V_1, V_2, \dots, V_n)) \quad (7.2.4)$$

Donde la suma es sobre los valores de las variables aleatorias. La generalización al caso continuo es simplemente,

$$S(V_1, V_2, \dots, V_n) = - \int_{V_1} \int_{V_2} \dots \int_{V_n} \rho(V_1, V_2, \dots, V_n) \log(\rho(V_1, V_2, \dots, V_n)) dV_1 dV_2 \dots dV_n \quad (7.2.5)$$

Vemos que es simplemente una generalización a varias variables, se reemplaza la función de densidad por la función conjunta y se integra sobre todo el espacio de muestra. Para la entropía conjunta se tiene,

$$S(V_1, \dots, V_s | V_{s+1}, \dots, V_n) = \left\langle \log \left(\frac{1}{p(V_1, \dots, V_s | V_{s+1}, \dots, V_n)} \right) \right\rangle \quad (7.2.6)$$

$$= - \sum_{V_1} \sum_{V_2} \dots \sum_{V_n} p(V_1, V_2, \dots, V_n) \log(p(V_1, \dots, V_s | V_{s+1}, \dots, V_n)) \quad (7.2.7)$$

En el caso continuo,

$$S(V_1, \dots, V_s | V_{s+1}, \dots, V_n) = \int_{V_1} \dots \int_{V_n} \rho(V_1, \dots, V_n) \log(V_1, \dots, V_s | V_{s+1}, \dots, V_n) dV_1 dV_2 \dots dV_n \quad (7.2.8)$$

Notemos que esta según esta definición de entropía condicional $S(V_1, \dots, V_s | V_{s+1}, \dots, V_n)$ depende de las n variables²

Una relación importante entre ambas entropías se obtiene notando que,

$$\log[\rho(V_1)] + \log[\rho(V_2 | V_1)] = \log[\rho(V_1)\rho(V_2 | V_1)] \quad (7.2.9)$$

$$= \log \left[\rho(V_1) \frac{\rho(V_1, V_2)}{\rho(V_1)} \right] \quad (7.2.10)$$

$$= \log[\rho(V_1, V_2)] \quad (7.2.11)$$

²Por ejemplo en el caso de dos variables, es distinto $S(V_1 | V_2)$ que $S(V_1 | V_2 = v_2)$, la segunda solo depende de la variable V_1 , mientras que $S(V_1 | V_2)$ sería el valor medio de ésta sobre todos los valores de v_2 , $S(V_1 | V_2) = \int_{V_2} \rho(v_2) S(V_1 | V_2 = v_2) dv_2$.

Donde en la segunda línea se ocupa el teorema de Bayes. Por lo tanto tenemos,

$$\log [\rho(V_1)] + \log [\rho(V_2|V_1)] = \log [\rho(V_1, V_2)] \quad (7.2.12)$$

Promediando estas cantidades en ambos lados llegamos a,

$$S(V_1, V_2) = S(V_1) + S(V_2|V_1) \quad (7.2.13)$$

Esta propiedad es a veces llamada regla de la cadena de la entropía. Una consecuencia importante se obtiene de la siguiente desigualdad,

$$S(V_2|V_1) \leq S(V_2) \quad (7.2.14)$$

Por lo tanto $S(V_1, V_2) \leq S(V_1) + S(V_2)$. La igualdad solo se cumple cuando las variables son independientes y la densidad se puede descomponer como un producto. Esto nos dice que las interacciones de un sistema compuesto por varias componentes solo pueden reducir la entropía conjunta del sistema.

Ahora vamos a introducir el concepto de entropía relativa, a veces también es llamada *distancia de Kullback-Leibler*. Este nombre no es muy adecuado dado que no cumple todas las propiedades de una distancia (no es simétrica en sus argumentos) por lo que un nombre más adecuado es *divergencia de Kullback-Leibler*³. La definición de la entropía relativa es,

$$D(\rho, \rho') = \sum_{V_1} p(V_1) \log \left[\frac{p(V_1)}{q(V_1)} \right] \quad (7.2.15)$$

Notemos que la entropía relativa es entre distribuciones, no entre variables aleatorias. Básicamente es una medida de que tan equivocados estamos al asumir una distribución q cuando la distribución real es p . En el caso continuo se define como,

$$D(p, q) = \int_{V_1} \rho(V_1) \log \left[\frac{\rho(V_1)}{\rho'(V_1)} \right] dV_1 = \left\langle \log \left[\frac{\rho(V_1)}{\rho'(V_1)} \right] \right\rangle \quad (7.2.16)$$

A partir de la divergencia de Kullback-Leibler podemos definir la información

³Hay un punto de vista de la teoría de la información desde la geometría diferencial, aunque no profundizaremos en esto aquí, se puede investigar más sobre esto en el libro de Amari [4].

mutua, este es uno de los conceptos más importantes para nuestra investigación. Primero vamos a introducir su definición: dadas dos variables aleatorias V_1 y V_2 , la información mutua entre ambas, $I(V_1, V_2)$ está dada por,

$$I(V_1, V_2) = \sum_{V_1} \sum_{V_2} p(V_1, V_2) \log \left[\frac{p(V_1, V_2)}{p(V_1)p(V_2)} \right] = \left\langle \log \left[\frac{p(V_1, V_2)}{p(V_1)p(V_2)} \right] \right\rangle \quad (7.2.17)$$

En el caso continuo,

$$I(V_1, V_2) = \int_{V_1} \int_{V_2} \rho(V_1, V_2) \log \left[\frac{\rho(V_1, V_2)}{\rho(V_1)\rho(V_2)} \right] dV_1 dV_2 \quad (7.2.18)$$

Notemos que es la divergencia de Kullback-Leibler entre la distribución conjunta $\rho(V_1, V_2)$ y la distribución del sistema si sus componentes no interactuaran, $\rho(V_1)\rho(V_2)$. Por esto la información mutua es una medida de la información contenida en las interacciones del sistema (algunos autores la llaman 'correlación total'): es cero cuando las componentes del sistema no interactúan y su densidad de probabilidad conjunta se puede descomponer como un producto de las marginales. Una propiedad útil de la información mutua es la siguiente, consideremos el logaritmo,

$$\log \left[\frac{\rho(V_1, V_2)}{\rho(V_1)\rho(V_2)} \right] = \log [\rho(V_1, V_2)] - (\log [\rho(V_1)] + \log [\rho(V_2)]) \quad (7.2.19)$$

$$= S(V_1) + S(V_2) - S(V_1, V_2) \quad (7.2.20)$$

$$= S(V_2) - S(V_2|V_1) \quad (7.2.21)$$

$$= S(V_1) - S(V_1|V_2) \quad (7.2.22)$$

Donde las últimas dos líneas se obtienen a partir de la regla de la cadena para la entropía. Podemos ver claramente que la información mutua es simétrica en sus argumentos, $I(V_1, V_2) = I(V_2, V_1)$, además se observa que $I(V_1, V_1) = S(V_1)$. Una forma usual de comprender la relación entre las cantidades introducidas es el diagrama mostrado en la figura 7.2.2.

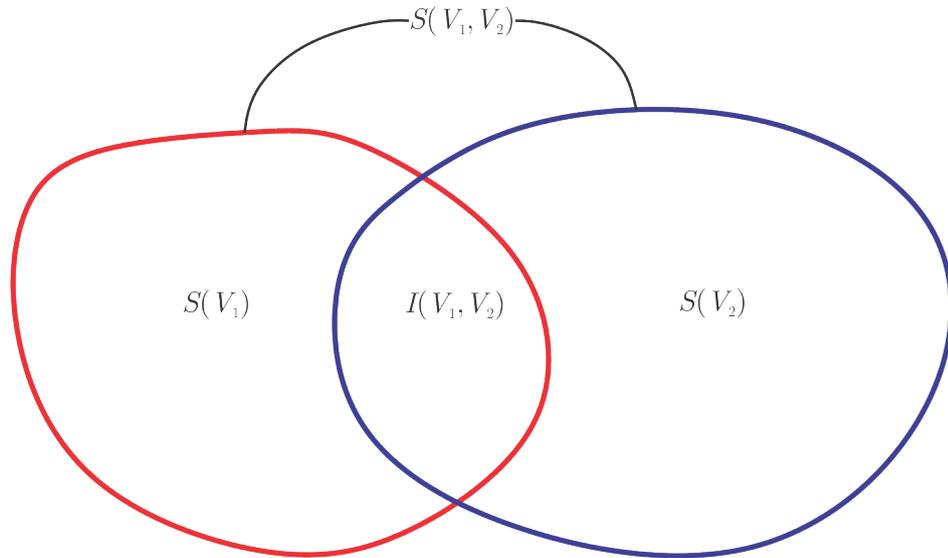


Figura 7.2.2: Diagrama de entropías e información mutua. La información mutua es la información 'en común' de los sistemas. Cada sistema posee una cierta cantidad de información, cuantificada por su entropía. La entropía del sistema conjunto $V_1 - V_2$ es la entropía conjunta.

7.3. Complejidad y teoría de la información.

Que es la complejidad? Esta es definitivamente una pregunta difícil de responder. Cuando consideramos que un objeto es complejo? Intuitivamente, por ejemplo, diríamos que un ser vivo es más complejo que una roca, pero como comparamos la complejidad de ambos?.

Estas preguntas se han hecho muchas veces en distintas áreas de la ciencia, esto ha generado una gran variedad de definiciones de complejidad, aunque la mayoría parece tener ciertos elementos o responder ciertas preguntas en común [85]:

- Que tan difícil es describir un objeto?
- Que tan difícil es generar un objeto?
- Cual es el nivel de organización de un objeto?

En el primer caso, podemos pensar nuevamente en el ejemplo de la roca y un ser vivo. Es claro que necesitamos más detalles para describir un ser vivo que a una estructura sólida inerte. Ahora podemos plantear un punto importante solo a partir del lenguaje usado en la formulación de la pregunta pasada: *un* ser vivo, *una* roca, a que nos referimos cuando hacemos referencia a ambos? Claramente

decimos que existen características comunes de todas las rocas y de todos los seres vivos que nos hacen percibirlos como tal, es decir estamos pensando en la dificultad para describir el ensamble de todos los objetos similares, como el ensamble de todas las rocas con ciertas características. Sin embargo también existen diferencias de complejidad entre los individuos de un ensamble, pero desde un punto de vista físico es más conveniente seguir el ejemplo de la mecánica estadística y pensar en ensambles de objetos. Como lo plantea Grassberger [60]: no decimos que un objeto es complejo, sino que pertenece a una clase o ensamble de objetos, y es esto último a lo que asociamos una complejidad. Volviendo a la pregunta, podemos dar un contra-ejemplo de un sistema difícil de describir pero que no consideraríamos complejo. Observemos las dos secuencias,

$$101101101101101101\dots \quad (7.3.1)$$

$$10011011100010000\dots \quad (7.3.2)$$

La primera puede ser fácilmente descrita, dado que es un ciclo (101), sin embargo la segunda no parece tener un patrón claro. De hecho no lo tiene, dado que fue generada de forma aleatoria (a partir de una distribución uniforme). Entonces los objetos aleatorios son difíciles de describir pero no son complejos.

La segunda pregunta puede que sea más adecuada para una definición de complejidad es, ¿que tan difícil es *construir* un objeto?. Considerando las secuencias binarias anteriores, en este caso diríamos que ambas (tanto la cíclica como la aleatoria) son de baja complejidad. Pensemos en la siguiente situación: nos piden escribir una secuencia binaria con la regla cíclica y otra aleatoria de 20 símbolos, en ninguno de los dos casos tenemos que pensar mucho y es rápido de hacer (claramente estamos describiendo todo de manera informal y poco precisa, más adelante formalizaremos los conceptos). Un ejemplo común es el de cadenas de ADN que codifican la *información* los organismos vivos [95, 60]. Aunque depende de lo que definamos por 'crear', si consideramos esto como los millones de años desde el origen de la vida hasta los tiempos actuales entonces diríamos que las secuencias de ADN (bajo esta definición) son muy complejas.

Finalmente nos preguntamos por el nivel de organización, esto puede verse de

varias formas: Una jerarquía, por ejemplo un gobierno, tiene un alto nivel de organización. En general, los sistemas compuestos de muchas escalas tienen una alta organización siempre que existe algún tipo de interacción entre las distintas partes del sistema, es decir, también debe existir una correlación entre las componentes. Y este es un punto importante, las partes de un sistema que no cumplen ninguna función, aportan a la complejidad? Bajo nuestra intuición, no deberían.

A partir de la discusión anterior podemos llegar a algunas conclusiones generales, como por ejemplo que un sistema complejo no es uno completamente ordenado pero tampoco es uno totalmente aleatorio. Es común ver en las publicaciones de complejidad imágenes como la figura 7.3.1 [59, 60, 137] comparando tres patrones: uno completamente ordenado, uno 'complejo' y uno generado por ruido blanco. En este caso el patrón central corresponde al generado por un flujo turbulento.

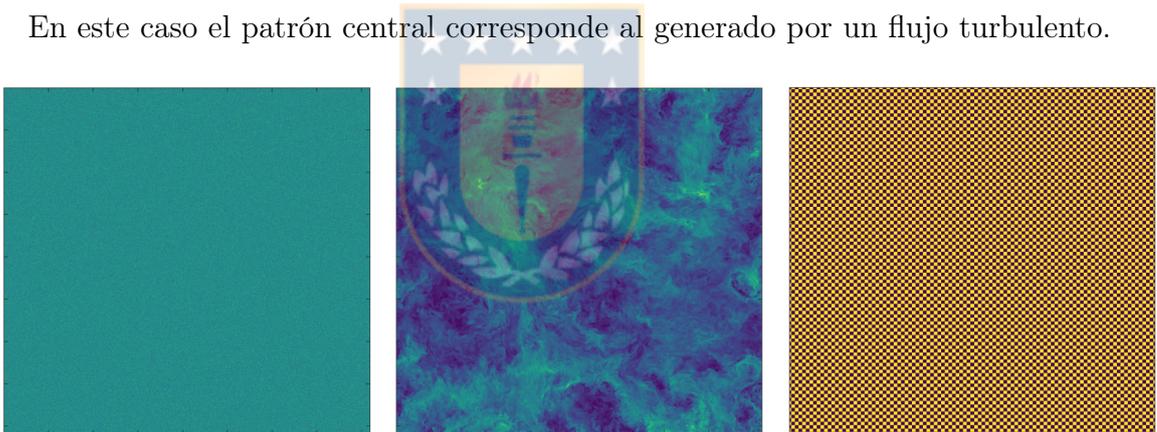


Figura 7.3.1: Tres patrones con distintas complejidades: a la izquierda se puede ver uno completamente aleatorio (ruido blanco gaussiano). La imagen central corresponde al campo de velocidad en una simulación turbulenta. El patrón de la derecha es simplemente uno de dos colores donde cada píxel tiene sus cuatro vecinos directos del otro color.

Bajo nuestra concepción de complejidad, tanto el patrón de la derecha como el de la izquierda son de baja complejidad mientras que el flujo turbulento es el que llamaríamos 'más complejo'. Existe mucho debate sobre si realmente existe una medida 'correcta' de complejidad o si es una cantidad subjetiva [60] sin embargo hay algunas características que son comunes a los sistemas complejos, a continuación planteamos algunas (propuestas por Grassberger [60]),

- Los sistemas complejos están en medio del orden y la aleatoriedad.

- Involucran jerarquías, por ejemplo el concepto de cascada en flujos turbulentos.
- Existen estructuras de distinto nivel, esto está asociado con el concepto de *coarse graining*. También se puede hacer una analogía con los lenguajes de programación de alto nivel o de bajo nivel. Básicamente en los niveles altos observamos comportamientos distintos al comportamiento de las componentes individuales (bajo nivel) del sistema, por ejemplo una neurona (bajo nivel) por si sola no tiene el mismo comportamiento que el cerebro (alto nivel).
- Existen correlaciones fuertes entre las distintas partes del sistema.
- Existen correlaciones entre el sistema y su ambiente: este es un punto importante que no hemos mencionado, la complejidad depende del contexto. Por ejemplo, sería tan compleja una cadena de ADN si no existe el mecanismo para decodificarla y generar un organismo? Las interacciones con el ambiente aumentan la complejidad.

Como veremos el desarrollo de las medidas de complejidad ha sido en el contexto de las teorías de la computación e información. De hecho una de las personas que comenzó con el estudio de la complejidad, preguntándose sobre la inteligencia y las estructuras naturales, fue Alan Turing [12]. Y este parece un contexto adecuado: pensemos en un sistema vivo, éste puede guardar información (en su ADN), es capaz de decodificar esa información para llevar a cabo acciones que construyen el organismo y es capaz de transmitir esa información (por ejemplo, mediante reproducción). A continuación presentaremos algunas definiciones de medidas de complejidad existentes, comenzamos por la medida de Solomonoff-Kolmogorov-Chaitin.

Complejidad de Solomonoff-Kolmogorov-Chaitin: Como su nombre lo indica, fue propuesta por Kolmogorov [72], Chaitin [28] y Solomonoff [109] como una medida de la complejidad de un objeto. Por objeto consideramos, por ejemplo, una secuencia S . La complejidad es definida como *la longitud del programa más corto, S^* , capaz de generar S* . Para sistemas físicos con auto-organización ésta medida, K , se puede relacionar con la densidad de entropía h , por lo que últimamente es una medida de aleatoriedad. También se puede pensar como la compresibilidad de una secuencia (en general, la complejidad K no es calculable,

pero puede ser aproximada como el tamaño de la secuencia comprimida en muchos casos [29]: si hay correlaciones entre sus componentes entonces la secuencia se podrá comprimir y se reducirá su tamaño, mientras que si es generada al azar no habrán correlaciones, por lo que no se podrá comprimir y la descripción más corta es la secuencia misma. Un ejemplo simple es el mostrado en la figura 7.3.2, observamos una secuencia aleatoria (izquierda) y otra que es un ciclo (10) (derecha). Luego comprimimos ambas secuencias con el algoritmo *Deflate* [102], vemos que la secuencia aleatoria comprimida es más grande (74 [bits]) que la ordenada (28 [bits]).

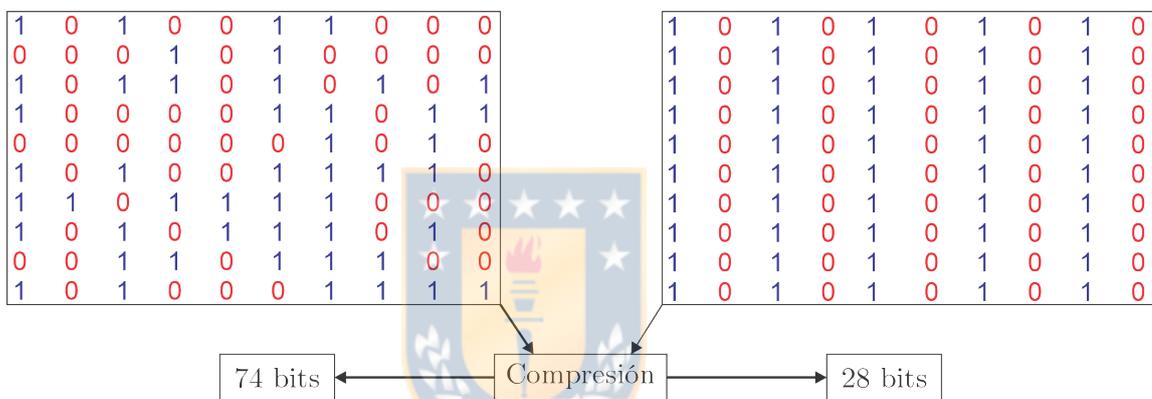


Figura 7.3.2: Ejemplo de compresión de dos secuencias binarias, la secuencia de la izquierda fue generada de forma aleatoria, la de la derecha es un ciclo (10).

Complejidad computacional: Puede ser espacial (memoria requerida) o temporal (tiempo de CPU requerido) [60]. Se define la dificultad asintótica de resolver un problema, en función del tamaño de sus datos de entrada [153, 12]. Por ejemplo, dada una entrada N , si el tiempo que toma a un algoritmo resolver el problema es de orden $\mathcal{O}(N^\alpha)$, con $\alpha > 1$, entonces se dice que el problema es de tiempo polinomial. Hay un problema muy famoso asociado a las clases de complejidad computacional, conocido como *P vs NP*. Muy básicamente explicado: *P* y *NP* se refieren a las clases de complejidad de tiempo polinomial y *non-deterministic polynomial time*, respectivamente. El segundo tipo de problema se refiere a aquellos cuyas soluciones pueden ser verificadas en tiempo polinomial pero no necesariamente calculadas en tiempo polinomial (por ejemplo resolver un juego de Sudoku [149], el modelo de Ising [8] o el problema del plegamiento de proteínas [49]). Son en realidad *P* y *NP* la misma clase? Esta es la pregunta del problema *P vs NP*, si fuera real muchos problemas que creemos

complejos tendrían soluciones mucho más simples, sin embargo el consenso es que muy probablemente P es diferente de NP [48] (aunque no ha sido demostrado).

Profundidad lógica: En inglés *Logical Depth*, introducida por Charles Bennett [12], quien propone una ley de 'crecimiento lento' [13] para la complejidad: es más probable que un objeto aumente su complejidad 'lentamente' que de manera 'rápida'. Es por esto que Bennett define la profundidad lógica (LD) como el tiempo necesario para generar un objeto a partir de un programa, aunque este programa no puede ser cualquiera, debe ser la descripción más corta del objeto. En palabras de Bennett [14]: La causa (origen) más probable de un mensaje (secuencia, objeto) se identifica con su descripción algorítmica mínima (es decir, con una secuencia que produce el objeto cuya longitud es la complejidad de Kolmogorov) y su LD o *contenido de trabajo matemático* es el tiempo que toma recrear el mensaje a partir de esta descripción mínima. La definición anterior proviene de la llamada 'navaja de Occam' (*Occam's Razor*): la explicación más simple es usualmente la más probable, debido a este principio la LD es considerada en términos de la descripción más corta del problema (notar la diferencia con la complejidad computacional, donde se considera el programa más rápido, no el más corto). Un gran problema de la profundidad lógica es que es una herramienta teórica, pero no puede ser calculada [12, 60], aunque de la misma manera que asociamos la complejidad de Kolmogorov a la compresión, se puede considerar como una estimación el tiempo de descompresión de una secuencia [95].

EMC: La *Effective Measure Complexity* fue propuesta como una medida de complejidad por Grassberger [59, 60], el principal cambio de visión es que está formulada completamente dentro de la teoría de la información de Shannon. Esto tiene dos ventajas [60]:

- Es posible calcularla, a diferencia de otras medidas como la LD .
- Al adoptar un punto de vista estadístico no nos referimos a la complejidad de patrones/objetos en específico, sino que a la complejidad del ensamble o familia de objetos con ciertas características.

Hay ciertas restricciones sobre las secuencias que pueden ser analizadas con la EMC : Deben ser estacionarias y se asume ergodicidad [59]. Para definir la EMC

seguimos el camino de Grassberger en su artículo de 1986, primero consideramos un conjunto de símbolos, el cual llamaremos un alfabeto (por ejemplo el conjunto $0,1$ es un alfabeto de 2 símbolos). Ahora, junto a este alfabeto consideramos ciertas reglas a las cuales llamaremos la gramática del lenguaje, este último siendo el conjunto de todas las posibles secuencias generadas por símbolos pertenecientes al alfabeto sujetos a las reglas de la gramática. Una gramática para los llamados lenguajes regulares (los lenguajes son categorizados de forma jerárquica, ésta es conocida como la jerarquía de Chomsky) se puede representar por un gráfico (llamado autómata finito) como el que vemos en la figura 7.3.3.

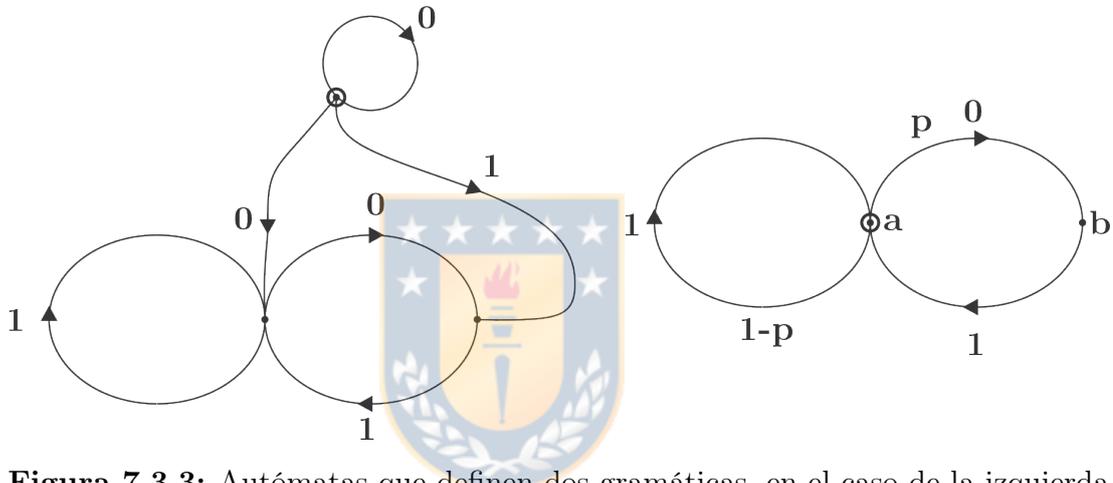


Figura 7.3.3: Autómatas que definen dos gramáticas, en el caso de la izquierda tenemos un autómata con partes transientes. El autómata de la derecha es estacionario y está equipado con una medida de probabilidad, la gramática de la derecha contiene todas las secuencias tales que luego de aparecer un 0 siempre aparece un 1.

En los autómatas de la figura el nodo con un círculo representa el punto de partida, es por esto que el de la izquierda produce secuencias transientes: una vez se sale de la zona de inicio no puede volver (las flechas indican la dirección en que se debe avanzar cada vez que se selecciona un camino). El autómata de la derecha es el mismo de la izquierda sin la parte transiente. Además le adjuntamos una medida de probabilidad, a partir del punto de inicio tenemos una probabilidad p de ir al nodo b y probabilidad $1 - p$ de que el siguiente símbolo sea un 1 y volvamos de inmediato al nodo a . Para ejemplificar el funcionamiento de estos autómatas

consideremos dos secuencias:

$$100110101000101110 \quad (7.3.3)$$

$$101110101010101110 \quad (7.3.4)$$

La primera no pudo haber sido generada por nuestro autómata dado que hay partes en la secuencia donde aparece un 0 pero luego no aparece un 1, mientras que si miramos la figura 7.3.3 vemos que luego de cada 0 debe venir un 1. La segunda secuencia si fue generada por el autómata de la figura. Un punto importante es que varios autómatas pueden describir una misma gramática, Wolfram [144] define la complejidad de un lenguaje como $\log(n)$, donde n es el número de nodos del autómata más pequeño que describe su gramática. Si equipamos al autómata con una medida de probabilidad se puede definir otra medida conocida como la *complejidad de conjunto* (*Set Complexity, SC*) que es análoga a la entropía de Shannon,

$$SC = - \sum_i p_i \log(p_i) \quad (7.3.5)$$

donde la suma es sobre todos los nodos⁴. Volviendo al autómata de la derecha en la figura 7.3.3 notamos que las probabilidades mostradas no son las de los nodos, sino que la probabilidad de tomar cada camino cuando estamos en un nodo. Para obtener las probabilidades de los nodos consideremos lo siguiente: pasamos N veces por el punto inicial, esto quiere decir que (con N lo suficientemente grande) Np veces iremos al nodo b (añadiremos un 0 a la secuencia), y luego del nodo b volveremos al nodo a (dado que después de un 0 debe venir un 1), mientras que de las N veces $N(1-p)$ tomaremos el otro camino (añadiremos un 1 a la secuencia) y volveremos al nodo a de inmediato. Por lo tanto estaremos Np veces en el nodo b y $(1-p)N + Np$ en el nodo a , luego las probabilidades de cada nodo son,

$$p_a = \frac{(1-p)N + Np}{(1-p)N + Np + Np} = \frac{1}{1+p} \quad p_b = 1 - p_a = \frac{p}{1+p} \quad (7.3.6)$$

Por lo tanto la SC está dada por,

⁴Una de las ventajas de ésta definición es que, mientras $\log(n)$ solo tiene valores finitos para autómatas finitos, la SC puede ser finita para gramáticas descritas por autómatas con un infinito número de nodos

$$SC = -p_a \log(p_a) - p_b \log(p_b) = \log(1 + p) - \frac{p}{p + 1} \log(p) \quad (7.3.7)$$

Grassberger [59] describe la SC como la mínima cantidad de información (en promedio) sobre el pasado de una secuencia para verificar si su futuro estará correcto. Por ejemplo consideremos una secuencia $\dots s_{i-2} s_{i-1} s_i s_{i+1} \dots$, entonces SC es la mínima información sobre $\dots s_{i-2} s_{i-1} s_i$ necesaria para verificar que el símbolo s_{i+1} producirá una secuencia $\dots s_{i-2} s_{i-1} s_i s_{i+1}$ permitida por la gramática. Notemos que en cierto sentido es una medida local, dado que la única información que tenemos sobre el pasado es nuestra posición actual en el gráfico [59], es por esto también que nos debemos restringir a casos estacionarios. Si la secuencia tuviera partes transientes entonces la SC no describiría la información media necesaria para predecir el siguiente símbolo en cualquier posición de la secuencia. Ahora consideremos otro problema, no buscamos verificar si la secuencia obtenida de agregar un símbolo extra está correcta o incorrecta, sino que buscamos la información necesaria sobre el pasado para realizar una *predicción óptima* de la probabilidad $p(s_{i+1} | s_i s_{i-1} \dots)$ del siguiente símbolo. Es claro que ahora necesitaremos *al menos* verificar si la secuencia formada es correcta, pero para predecir de forma óptima necesitamos (en general) más que esa información. Esta medida es llamada la TMC (*True Measure Complexity*), sin embargo no es fácilmente calculable, por esta razón Grassberger introduce la EMC como un límite inferior de la TMC .

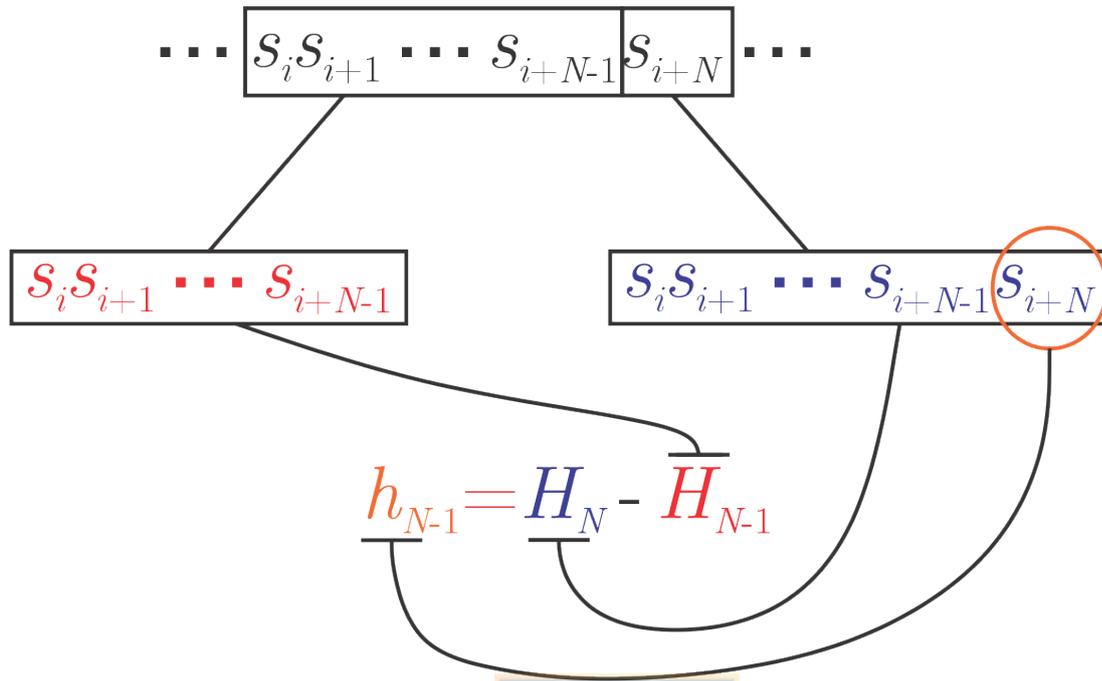


Figura 7.3.4: Esquema de contenido de información y densidad de entropía de una secuencia estacionaria.

Primero, es necesario introducir algunos conceptos relacionados con la entropía de Shannon, mostrados de forma esquemática en la figura 7.3.4. Consideramos una secuencia que inicia en un cierto valor s_i (recordemos que el valor de i no es importante dado que asumimos secuencias estacionarias), consideremos dos subsecuencias: la primera llega hasta s_{i+N-1} y la segunda hasta s_{i+N} de longitud N y $N+1$, respectivamente. Las entropías de bloque H_N y H_{N-1} son el contenido de información de cada secuencia, mientras que la densidad de entropía h_N es la información que nos aporta agregar un símbolo extra s_{i+N} a la secuencia. Grassberger define la *EMC* como la *mínima cantidad de información total en cualquier tiempo para una predicción óptima*,

$$EMC = \sum_N N \delta h_N \quad (7.3.8)$$

Donde $\delta h_N = h_{N-1} - h_N$. Y esta cantidad es menor que la *TMC*, $TMC \geq EMC$. Puede ser reescrita como [60],

$$EMC = \sum_{N=0}^{\infty} (h_N - h) \quad (7.3.9)$$

A modo de ejemplo consideremos nuevamente la figura 7.3.1, en la tabla 7.3.1 detallamos los valores para distintas variables. Vamos a estudiarlas una a una, primero consideramos la entropía (tanto esta como la *EMC* están calculadas utilizando estimadores continuos utilizando el *toolbox* JIDT [84], estos son presentados en la siguiente sección). Vemos que (tal y como esperamos de su definición) la entropía toma su valor máximo para el ruido blanco, mientras que el flujo turbulento esta en medio de el patrón ordenado y el ruido blanco. La razón por la que el patrón ordenado toma un valor $-\infty$ es que en realidad pertenece a la clase de patrones con distribuciones de probabilidad discreta $P = \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x - 1)$ y la entropía continua de distribuciones discretas tiende a $-\infty$. La segunda cantidad estudiada son los bits de compresión (utilizando el algoritmo *Deflate* que usamos en un ejemplo anterior). Vemos que nuevamente nos entrega información similar a la entropía: el patrón más 'desordenado' es el que tiene mayor valor, mientras que el más ordenado es el que tiene menos bits. Esto nos indica que es una medida de orden/desorden y no de complejidad. El tiempo de descompresión (que en cierta forma se puede asociar a la *logical depth*) si nos entrega un valor que esperaríamos de una medida de complejidad, asignando el mayor valor al flujo turbulento, sin embargo vemos que es muy cercano al ruido blanco y de todos modos no es exactamente la *LD*. Mientras que la *EMC* nos da valores que esperaríamos de una medida de complejidad: el caso turbulento tiene un valor claramente mayor al patrón desordenado y al completamente ordenado.

| - | Ruido blanco | Turbulencia | Patrón ordenado |
|-----------------------------------|--------------------|--------------------|-------------------|
| Entropía [<i>nats</i>] | 1.53 | 0.197 | $-\infty$ |
| Bits compresión [<i>bits</i>] | 1.29×10^8 | 1.27×10^8 | 2.7×10^5 |
| Tiempo descompresión [<i>s</i>] | 1.02 | 1.05 | 0.378 |
| <i>EMC</i> | 0.693 | 3.14 | 0 |

Cuadro 7.3.1: Comparación de distintas medidas descritas anteriormente para los 3 casos mostrados en la figura 7.3.1.

7.4. Estimadores continuos de entropía e información mutua.

Es distinto estimar cantidades continuas como la entropía diferencial (que no es una generalización directa de su versión discreta, como si lo es la información

mutua o la divergencia de Kullback-Lleibler [33]). La entropía (diferencial) de Shannon está dada por,

$$S = - \int \rho(x) \log \rho(x) dx \quad (7.4.1)$$

Esta cantidad puede tomar valores negativos y no es invariante bajo cambios de coordenadas [33]. Otra de las cantidades que estudiamos es la información mutua,

$$I(X, Y) = \int \int \rho(x, y) \log \left[\frac{\rho(x, y)}{\rho(x)\rho(y)} \right] dx dy \quad (7.4.2)$$

Estas cantidades ya fueron descritas en secciones anteriores. Sin embargo un tema central es como estimarlas, existe una extensa literatura sobre esto, a continuación describimos algunos de los estimadores más conocidos y los utilizados en el trabajo.

El estimador de entropía más simple en el que podemos pensar es simplemente calcular las cantidades desde un histograma, como se muestra en la figura 7.4.1.

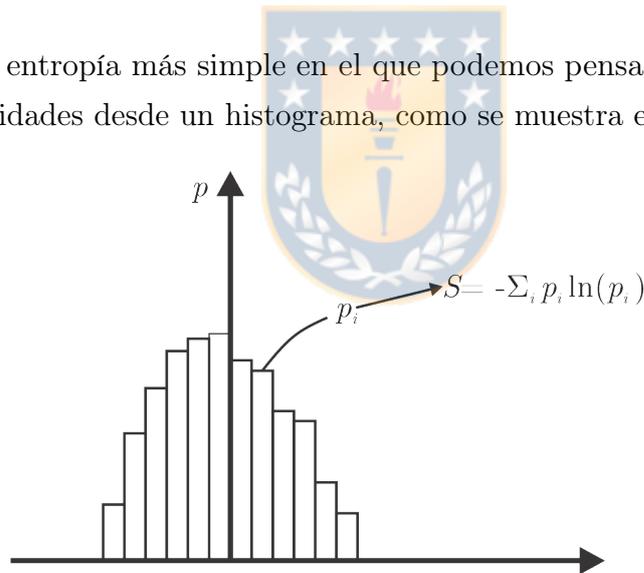


Figura 7.4.1: Estimar la entropía desde un histograma de los datos es el método más simple, también se conoce como *Maximum-likelihood estimator*.

Como todos los estimadores tiene una varianza y un *bias*, es decir, en promedio es menor o mayor que el resultado real. En el caso de este estimador el promedio es menor que el valor real de la entropía, como solución ha esto se han propuesto correcciones. La más utilizada es la de Miller y Madow [103],

$$S_c = S_{bin} + \frac{M - 1}{2N} \quad (7.4.3)$$

Donde H_c y H_{bin} corresponden a las entropía corregida (según Miller y Madow) y la estimada a partir del histograma, respectivamente. La corrección depende de M , el número de *bins* utilizados y N , la cantidad de datos. En la tabla 7.4.1 se detallan algunos de los estimadores más conocidos. En nuestro trabajo usamos el estimador de Kozachenko-Leonenko (de ahora en adelante lo llamaremos KL) [74].

| Estimador | Expresión |
|-------------------------------|--|
| MLE (<i>Max-likelihood</i>) | $S = -\sum p_j \log p_j$ |
| Digamma | $S = \psi(N) - \psi(1) + \frac{1}{N+1} \sum \log(x_{i+1})$ |
| Kozachenko-Leonenko | $S = \psi(N) - \psi(k) + \log c_d + \frac{d}{N} \sum \log(\epsilon_i)$ |

Cuadro 7.4.1: Estimadores de entropía más utilizados. El estimador digamma (ψ es la función digamma) y el de Kozachenko-Leonenko son estimadores continuos.

Detalles sobre la derivación de la aproximación de KL pueden ser encontrados en la literatura [86, 76]. Para nuestros propósitos solo explicaremos que significan los términos en la ecuación,

$$S_{KL} = \psi(N) - \psi(k) + \log c_d + \frac{d}{N} \sum \log(\epsilon_i) \quad (7.4.4)$$

El punto crucial en este estimador es ver a la entropía como un valor medio del logaritmo de la densidad, $H = -\langle \log \rho(x) \rangle$. Entonces la podemos aproximar como,

$$S \approx \frac{1}{N} \sum_i^N \log \left(\frac{1}{\rho(x_i)} \right) \quad (7.4.5)$$

Por lo tanto se cambia el problema de estimar directamente la entropía a estimar los valores de la densidad $\rho(x_i)$. Para esto el método considera los ' k vecinos más cercanos' (k -nn) de un punto x_i según alguna distancia (usualmente se utiliza la norma infinito o la euclideana). La probabilidad de que haya un punto a una distancia $\epsilon/2$ de x_i y al mismo tiempo $k-1$ puntos a una distancia menor es $p_k(\epsilon)d\epsilon$ (ver figura 7.4.2).

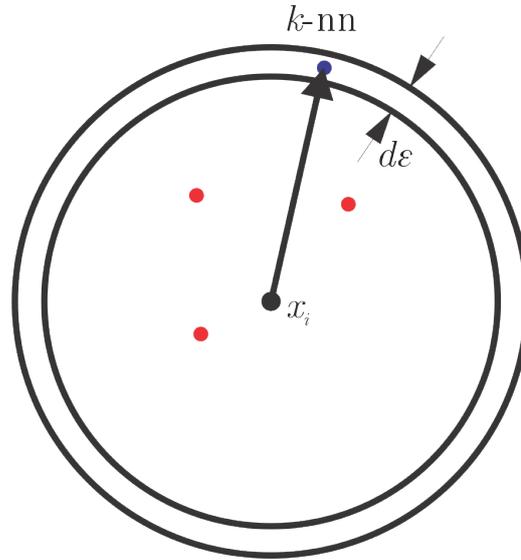


Figura 7.4.2: Esquema de como determinar k -ésimo vecino más cercano. En este caso $k = 4$.

A partir de la probabilidad $p_k(\epsilon)$ se puede calcular la 'masa de probabilidad' $P_i(\epsilon)$ (es decir, la probabilidad integrada sobre una región del espacio) de una esfera de radio $\epsilon/2$ centrada en un punto x_i . Esta probabilidad está relacionada con la densidad si asumimos que la última está distribuida uniformemente sobre la esfera,

$$P_i(\epsilon) = c_d \epsilon^d \rho(x_i) \quad (7.4.6)$$

donde c_d es el volumen de una esfera d -dimensional unitaria (depende de la norma utilizada). Finalmente se puede escribir la aproximación de la densidad $\rho(x_i)$ como,

$$\log \rho(x_i) \approx \psi(k) - \psi_N - d \langle \log \epsilon \rangle - \log c_d \quad (7.4.7)$$

Donde $\langle \log \epsilon \rangle$ es el promedio sobre la densidad $p_k(\epsilon)$, por lo que finalmente, promediando $\log \rho(x_i)$ sobre todos los datos llegamos a la expresión 7.4.4.

La ventaja del estimador KL es que puede ser aplicado en dimensiones más altas, esto permite calcular la información mutua a partir de una metodología similar. Esto es lo que hicieron Kraskov, Stögbauer y Grassberger con su estimador de información mutua (que de ahora en adelante llamaremos estimador KSG).

Consideremos ahora un espacio de 2 variables aleatorias (X, Y) con puntos (x_i, y_i) . Estos propusieron dos métodos basados en k -nn al igual que el estimador de entropía KL. La norma utilizada es la norma infinito,

$$d(z_i, z_j) = \max \{x_i - x_j, y_i - y_j\} \quad (7.4.8)$$

basado en esta norma se define como $\epsilon(i)/2$ la distancia entre el punto estudiado y su k -ésimo vecino más cercano, esto es mostrado en la figura 7.4.3 a). Una vez definida esta distancia (notar que, usando la notación de la figura, $\epsilon = \max \{\epsilon_x, \epsilon_y\}$) contamos los puntos n_x, n_y cuyas coordenadas x_j e y_j , respectivamente, están a una distancia menor que $\epsilon/2$ de x_i e y_i (lo cual también es mostrado en la figura 7.4.3 a).

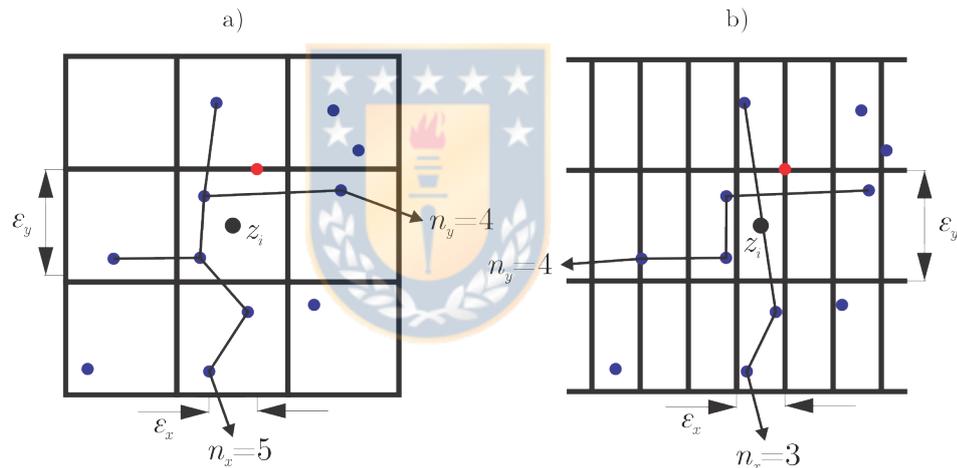


Figura 7.4.3: Esquema de algoritmos KSG. En la figura a) vemos el primer algoritmo para $k = 3$. En la figura b) se muestra esquemáticamente el funcionamiento del segundo algoritmo, en este caso también $k = 3$.

Finalmente, notando que estas cantidades fluctúan con i , por lo tanto se pueden promediar, la aproximación de la información mutua es,

$$I(X, Y) \approx \psi(N) + \psi(k) - \langle \psi(n_x + 1) + \psi(n_y + 1) \rangle \quad (7.4.9)$$

este es el 'primer' algoritmo KSG. En el segundo se sigue un procedimiento similar pero el conteo de n_x y n_y es distinto. Para cada uno se cuentan las coordenadas tales que $x_i - x_j \leq \epsilon_x/2$ y $\epsilon_y/2$, respectivamente, como se muestra en la figura 7.4.3. Es decir, la diferencia es que en el primer algoritmo se utiliza una malla

cuadrada y en el segundo una malla rectangular. En este último caso la información mutua está dada por,

$$I(X, Y) \approx \psi(k) + \psi(N) - \frac{1}{k} - \langle \psi(n_x + 1) + \psi(n_y + 1) \rangle \quad (7.4.10)$$



Capítulo 8

Análisis de Flujos Turbulentos

8.1. Metodología aplicada a flujos turbulentos

Al aplicar las herramientas presentadas en las secciones anteriores al análisis de flujos turbulentos debemos establecer qué cantidades queremos estudiar, como hemos visto, los flujos turbulentos se caracterizan por extenderse a través de un rango de escalas, por lo que es lógico analizar una cantidad que nos permita diferenciar entre las distintas escalas. Es por esto que estudiamos las diferencias de velocidad a una cierta distancia $\delta u_r = u(x+r) - u(x)$ o diferencias de velocidad temporales $\delta u_\tau = u(t+\tau) - u(t)$, dependiendo del caso. En general, el campo de velocidades instantáneo depende de la posición y el tiempo, sin embargo, dependiendo de las simetrías del flujo sus momentos estadísticos pueden perder estas dependencias (aunque si estudiamos estadísticas de más de un punto si existe una dependencia en las diferencias temporales y de posición, como vimos en capítulos anteriores). La entropía (diferencial) de las diferencias de velocidad longitudinales es,

$$S(\delta u_r) = - \int \rho(\delta u_r) \log \rho(\delta u_r) d\delta u_r \quad (8.1.1)$$

mientras que dadas dos distancias r_1 y r_2 (o tiempos, si estudiamos diferencias temporales), la información mutua entre estas diferencias de velocidad es,

$$I(\delta u_{r_1}, \delta u_{r_2}) = \int \rho(\delta u_{r_1}, \delta u_{r_2}) \log \frac{\rho(\delta u_{r_1}, \delta u_{r_2})}{\rho(\delta u_{r_1})\rho(\delta u_{r_2})} d\delta u_{r_1} d\delta u_{r_2} \quad (8.1.2)$$

También estudiaremos el comportamiento de la información mutua en el espacio de Fourier. Para esto consideramos la velocidad filtrada en dos conjuntos disjuntos (en el espacio de Fourier), u_{ω}

y u_{ω}

donde

$$u_{\omega <}(x) = \int_0^{\omega} u(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \quad u_{\omega >}(x) = \int_0^{\infty} u(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \quad (8.1.3)$$

por lo tanto $u_{\omega <}$ representará las escalas 'lentas' y $u_{\omega >}$ las escalas 'rápidas'. Para el cálculo de estas cantidades utilizaremos el *toolbox* JIDT [84]. Un esquema de la información mutua entre escalas es mostrado en la figura 8.1.1. donde n y m representan las distintas escalas. Para una escala dada, podemos calcular su información mutua con todas las escalas sobre y bajo esa escala.

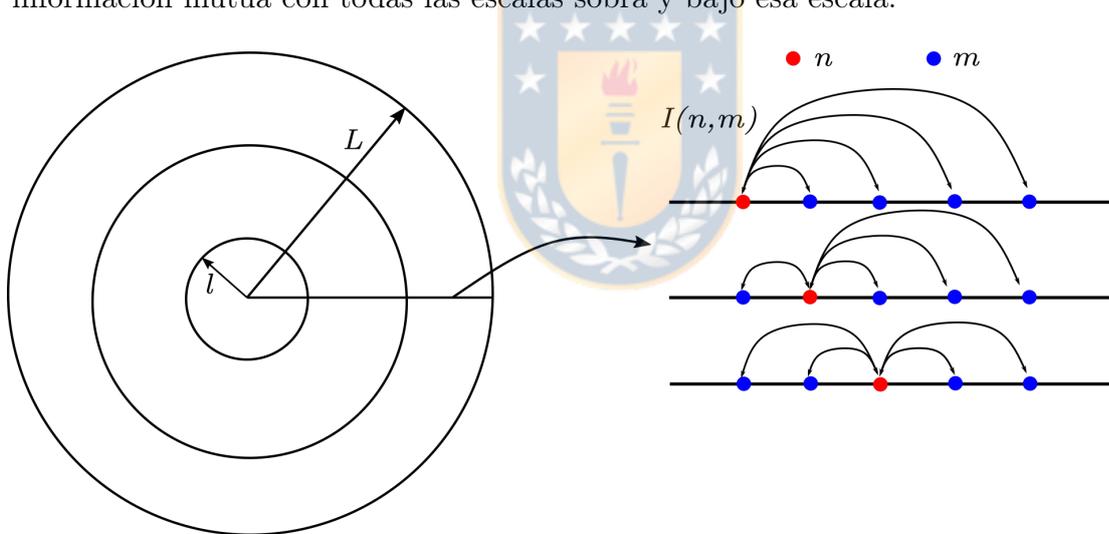


Figura 8.1.1: Esquema de análisis de información mutua entre escalas.

Otra cantidad que deseamos estudiar es la complejidad, para esto se han propuesto diferentes medidas. En este caso estudiaremos una generalización continua de la *EMC* propuesta por Grassberger (presentada en el capítulo anterior) [59], esta también es conocida como información predictiva o exceso de entropía [17]. Según su implementación en el *toolbox* JIDT (Java Information Dynamics Toolkit) [84] está dada en términos de la información mutua por,

$$C_m(x) = I(x_n^{m \leftarrow}, x_n^{m \rightarrow}) \quad (8.1.4)$$

Donde $x_n^{k\leftarrow} = \{x_{n-m+1}, x_{n-m}, \dots, x_n\}$, $x_n^{k\rightarrow} = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}\}$. El valor de k es conocido como la *embedding dimension* [126], además notemos que si el proceso es estacionario entonces la ecuación 8.1.4 es independiente de n . Vemos que la cantidad C es básicamente la información que contiene el pasado sobre el futuro (en una ventana de tamaño m), es de esperar que sea creciente y se sature luego de un valor m_{max} o diverja [17]. Para determinar la mínima *embedding dimension* necesaria en una serie de tiempo se han propuesto diferentes métodos como el de *singular value decomposition* [93] o *false nearest neighbors* [1]. En este caso usamos el método de Cao [24].

Todas las cantidades las calcularemos en su forma continua y estarán medidas en nats (es decir, se utiliza el logaritmo natural). Para la información mutua y la complejidad C utilizaremos el estimador de Kraskov-Stögbauer-Grassberger (KSG) [76], para la entropía el estimador de Kozachenko [74]. Ambos son estimadores *nearest neighbour*, el valor de k (cantidad de vecinos cercanos considerados por el algoritmo) utilizado es 4, como se ha usado anteriormente [58].

8.2. Entropía en teoría K41

Antes de proceder al análisis de los resultados numéricos consideremos la teoría K41, según esta la similaridad estadística en el rango inercial implica la siguiente relación,

$$\rho(\delta u; r) = \frac{1}{(\epsilon r)^{1/3}} \rho\left(\frac{\delta u}{(\epsilon r)^{1/3}}\right) \quad (8.2.1)$$

Esto puede ser modelado como un proceso monofractal con exponente de Hölder $h = 1/3$. En general un proceso monofractal satisface la siguiente relación [58],

$$\rho_r(\delta_r u) = \left(\frac{r_0}{r}\right)^h \rho_{r_0}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^h \delta_r u\right] \quad (8.2.2)$$

Donde ρ_{r_0} representa la distribución en una escala r_0 . Si calculamos la entropía de este proceso obtenemos,

$$S(\delta_r u) = - \int \left(\frac{r_0}{r}\right)^h \rho_{r_0} \left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^h \delta_r u\right] \log \left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^h \rho_{r_0} \left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^h \delta_r u\right]\right] d\delta_r u \quad (8.2.3)$$

$$= - \left(\frac{r_0}{r}\right)^h \int \rho_{r_0} \left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^h \delta_r u\right] \log \left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^h\right] d\delta_r u \quad (8.2.4)$$

$$- \left(\frac{r_0}{r}\right)^h \int \rho_{r_0} \left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^h \delta_r u\right] \log \left[\rho \left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^h \delta_r u\right]\right] d\delta_r u \quad (8.2.5)$$

$$(8.2.6)$$

Para la primera integral realizamos un cambio de variables $x = \left(\frac{r_0}{r}\right)^h \delta_r u$ lo cual elimina el factor $\left(\frac{r_0}{r}\right)^h$ en frente y aplicando la condición de normalización de la función de densidad llegamos al siguiente resultado,

$$S(\delta_r u) = -h \log \left(\frac{r_0}{r}\right) - \left(\frac{r_0}{r}\right)^h \int \rho_{r_0} \left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^h \delta_r u\right] \log \left[\rho \left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^h \delta_r u\right]\right] d\delta_r u \quad (8.2.7)$$

$$= h \log \left(\frac{r_0}{r}\right) + S_0 \quad (8.2.8)$$

Donde S_0 es la entropía de la distribución de probabilidad en una escala r_0 . Una hipótesis aproximada podría ser una distribución gaussiana de la velocidad en las grandes escalas (que es cercano a lo observado experimentalmente). Sin embargo, más que el valor exacto de la entropía lo importante es el valor de la pendiente, dado que es lo que compararemos con los resultados numéricos, en el caso de la teoría K41 tenemos un exponente $h = 1/3$ y por lo tanto la pendiente logarítmica en el rango inercial (si la teoría fuera correcta) debería ser esa.

8.3. Datos utilizados

Los datos utilizados son obtenidos de la base de datos de la *John Hopkins University, JHUTDB (John Hopkins University Turbulence Database)* [83]. Todos los flujos que estudiamos son (estadísticamente) estacionarios. En la tabla 8.3.1 se detallan los principales parámetros de cada simulación y en la figura 8.3.1 se muestran snapshots y características de cada flujo. En cuanto a la cantidad de datos, para las simulaciones HIT [150, 151] se usan secuencias espaciales orientadas en el eje x cuya longitud es el tamaño N_x de cada simulación (ver tabla 8.3.1). Para cada secuencia se determinan las cantidades estudiadas y luego se promedian. El número de secuencias es 2^{17} , 10×2^{12} y 6×2^{13} para los casos HIT1, HIT2 y HIT3, respectivamente.

| Datos | Re | $N_x \times N_y \times N_z$ | Δx^+ | Δy^+ | Δz^+ |
|-------|------|--------------------------------|--------------|--------------|--------------|
| HIT1 | 433 | $1024 \times 1024 \times 1024$ | 2.191 | 2.191 | 2.191 |
| HIT2 | 611 | $4096 \times 4096 \times 4096$ | 1.108 | 1.108 | 1.108 |
| HIT3 | 1300 | $8192 \times 8192 \times 8192$ | 1.539 | 1.539 | 1.539 |
| TBL | - | $4097 \times 257 \times 2049$ | 11.9 | 0.124 | 4.07 |
| CF | 5200 | $1024 \times 1536 \times 7680$ | 12.7 | 0.498 | 6.4 |

Cuadro 8.3.1: Datos de las distintas simulaciones. HIT: Turbulencia homogénea - isótropa, TBL: Capa límite transicional, CF: Flujo de canal. Para cada una de las simulaciones se especifica el número de Reynolds (Re), la discretización del dominio ($N_x \times N_y \times N_z$), y las escalas resueltas de forma adimensional. Respecto al número de Reynolds, no se especifica para la simulación TBL dado que este varía en el dominio, en los casos HIT corresponde a Re_λ (basado en la escala de Taylor) y para el caso CF es Re_τ (basado en las escalas viscosas). Además notamos que las escalas adimensionales señaladas corresponden a unidades de pared, en el caso de los flujos con paredes (TBL y CF). En los casos HIT las escalas se adimensionalizan dividiéndolas por la longitud de Kolmogorov η_K .

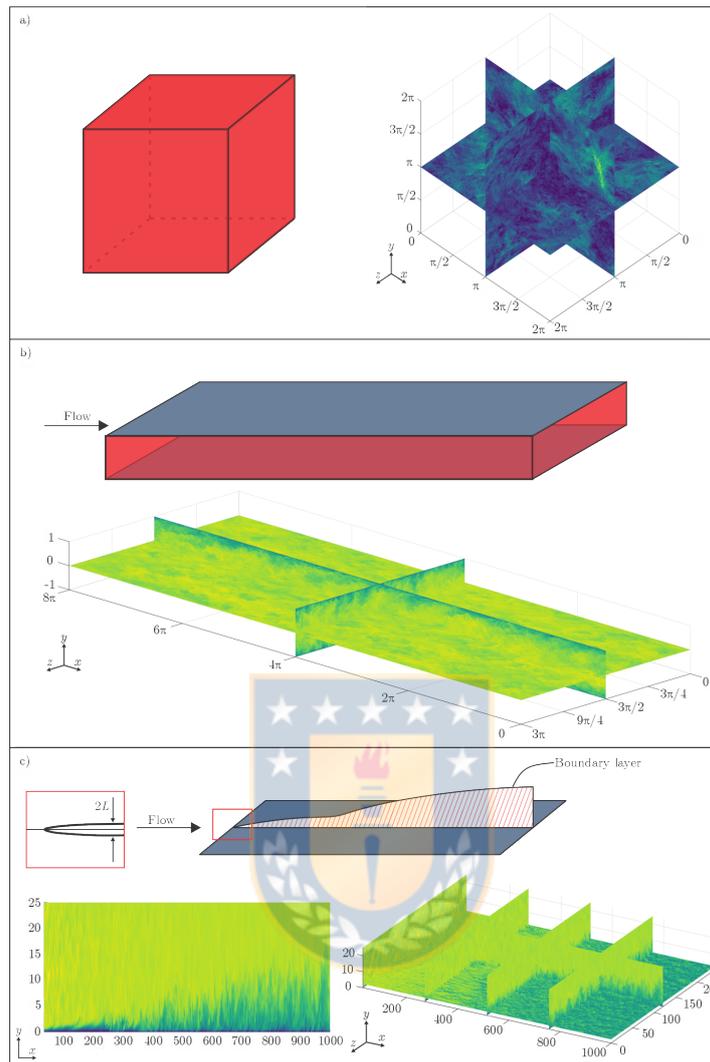


Figura 8.3.1: Esquema de los 3 flujos que se estudian. El color rojo indica una condición de borde periódica, el color plomo indica las zonas donde hay paredes (*no-slip boundary condition*). a) Flujo HIT, esquema del dominio computacional a la izquierda, *snapshots* del flujo en la derecha y dimensiones del dominio. b) Flujo de canal, la flecha indica la dirección del flujo, en la parte superior se muestra el dominio (dos paredes, arriba y abajo), en la figura inferior se muestran *snapshots* del flujo. c) Capa límite transicional, en la parte superior se muestra el dominio, en el cuadro rojo se muestra la geometría del inicio de la placa. La figura inferior izquierda es un corte transversal, donde se puede apreciar la capa límite (zona cercana a la pared) y en la figura inferior derecha se muestran *snapshots* 3D del flujo.

La siguiente simulación estudiada corresponde a una capa límite transicional (TBL, c) en figura 8.3.1). Estudiamos series de tiempo, cada una consiste de 4701 datos con una separación temporal $\Delta t = 0.25L/U_\infty$ (lo suficientemente pequeña para

que la simulación sea considerada bien resuelta [81]). Se estudian 4 distancias de la pared (dentro de la capa límite) detalladas en la figura 8.3.2 y el rango estudiado en el eje x corresponde a $x \in [30.2185, 653.21]L$, sin embargo no analizamos todos los puntos resueltos, consideramos 73 puntos con una separación $\Delta x_s = 3.705L$ (equivalente a 25 puntos en la resolución de la simulación), y para cada una de las posiciones consideramos 400 puntos en el eje z . Las cantidades son determinadas para cada serie de tiempo y promediadas sobre z .

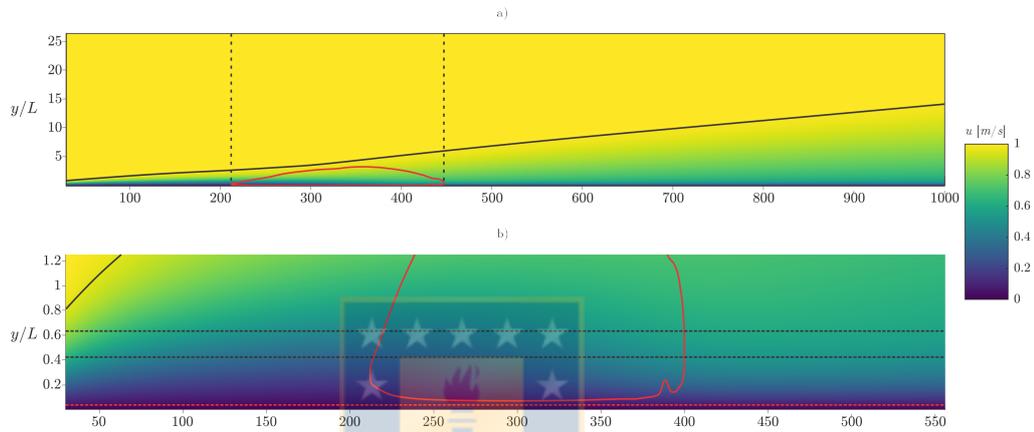


Figura 8.3.2: a) Distribución espacial de la componente x de la velocidad media, $\langle U \rangle$. La línea negra indica el espesor de la capa límite, considerado como la posición vertical donde la velocidad alcanza un 99 % de la velocidad del flujo externo U_∞ . El interior del contorno rojo es la región donde $\langle V \rangle < 0$, esto es un indicador de la zona transicional. b) Acercamiento de la zona estudiada, las líneas horizontales segmentadas representan las alturas en las que se analiza el flujo, La primera no es mostrada dado que corresponde al primer punto de la simulación, en orden ascendente las alturas son $y/L = 0.00360$ (primera altura de la simulación), $y/L = 0.00746$ (línea segmentada roja), $y/L = 0.348$ y $y/L = 0.620$ (líneas segmentadas negras).

El último caso estudiado es un flujo de canal (CF en tabla 8.3.1, b en figura 8.3.1). Estudiamos secuencias espaciales de 4096 puntos orientados en el eje x (dirección del flujo), las cantidades son calculadas para cada una de estas y luego promediadas sobre 2^{12} secuencias en la dirección z del flujo. En la dirección normal a la pared estudiamos los 270 puntos de la simulación más cercanos a la pared, correspondiente a un rango $y^+ \in [0.0711, 835.55]$.

Las tres simulaciones HIT son realizadas con los mismos métodos numéricos, distintos son los flujos en que existen paredes. A continuación entregamos detalles sobre métodos utilizados en las simulaciones.

- Simulación HIT: en los tres casos se utiliza un método pseudo-espectral junto al método Runge-Kutta de segundo orden para la integración temporal [150]. El forzamiento es tal que la energía de los números de onda $\vec{k} \leq 2$ se mantiene constante [40].
- Simulación TBL: en este caso se utiliza el método de Euler implícito para integrar la presión, el método de Adam-Bashforth explícito para el término no-lineal y el método implícito de Crank-Nicholson para el término viscoso [82]. La turbulencia es forzada por el flujo libre, el cual posee una intensidad turbulenta de 3 % en la entrada del dominio.
- Simulación CF: debido a las simetrías del problema se utiliza un método pseudo-espectral en la dirección transversal y en la dirección normal se utiliza el *B-Spline collocation method*. Para la integración temporal se utiliza un método de Runge-Kutta de tercer orden. En este caso se mantiene un flujo medio en la dirección principal aplicando un gradiente de presión uniforme.

8.4. Resultados

Comenzamos presentando los resultados de las simulaciones HIT, en la figura 8.4.1 se muestran las distribuciones de entropía en función de la escala espacial representada por las diferencias de velocidad a una distancia r (en el gráfico normalizada por la escala integral L asociada a cada caso). Se observa un comportamiento de la forma $S = C_S \log(r/L) + b$ en el rango inercial (que en el gráfico se ve lineal, notar que la escala r/L es logarítmica), y una disminución de la entropía en el rango disipativo. Este comportamiento de la entropía está acorde con resultados obtenidos anteriormente a partir de datos experimentales [58].

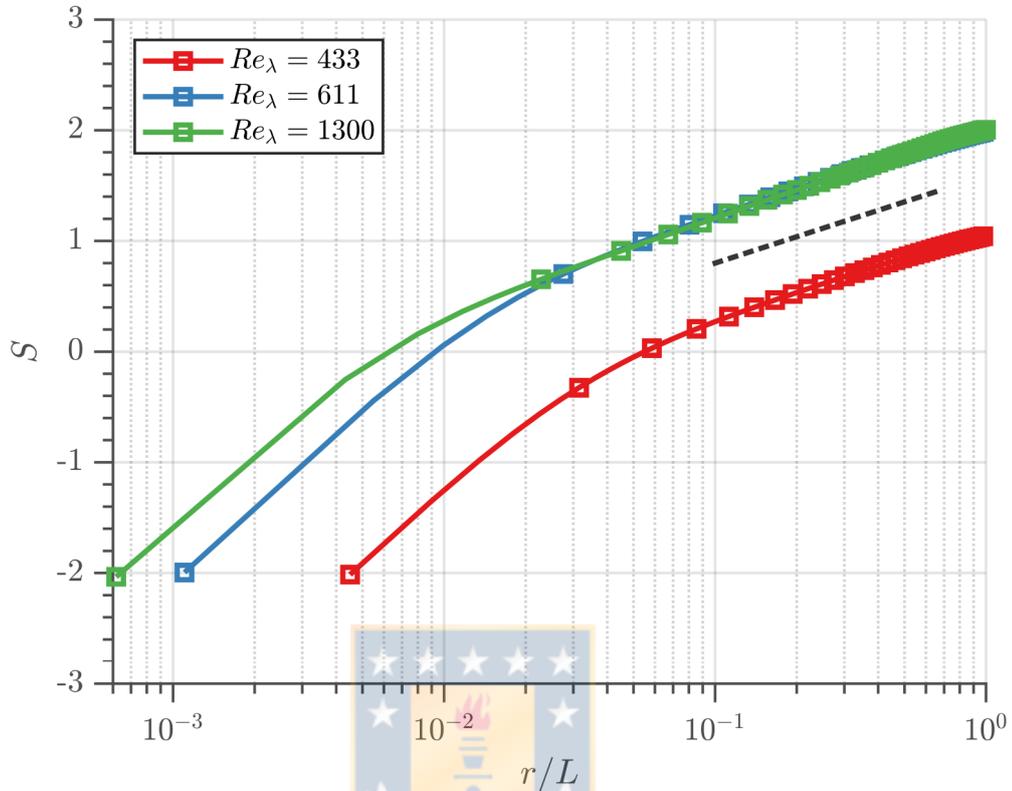


Figura 8.4.1: Entropía de Shannon de las diferencias de velocidad a distancia r/L para los 3 casos detallados en la figura. La línea punteada negra corresponde a la predicción de la teoría de Kolmogorov, $S \sim \frac{1}{3} \log(r/L)$ [58] .

En la figura 8.4.2 se observa la información mutua entre la velocidad u y las diferencias de velocidad δu_r , la cual podemos considerar como una medida de correlación entre las escalas integrales del sistema y la escala r . Otra vez observamos una disminución logarítmica en el rango inercial, hasta alcanzar valores cercanos a 0 en escalas del orden de la escala de Kolmogorov. Las pendientes (aproximaciones logarítmicas en el rango inercial) son mostradas en la tabla 8.4.1 para la entropía, la información mutua y la entropía en el espacio de Fourier.

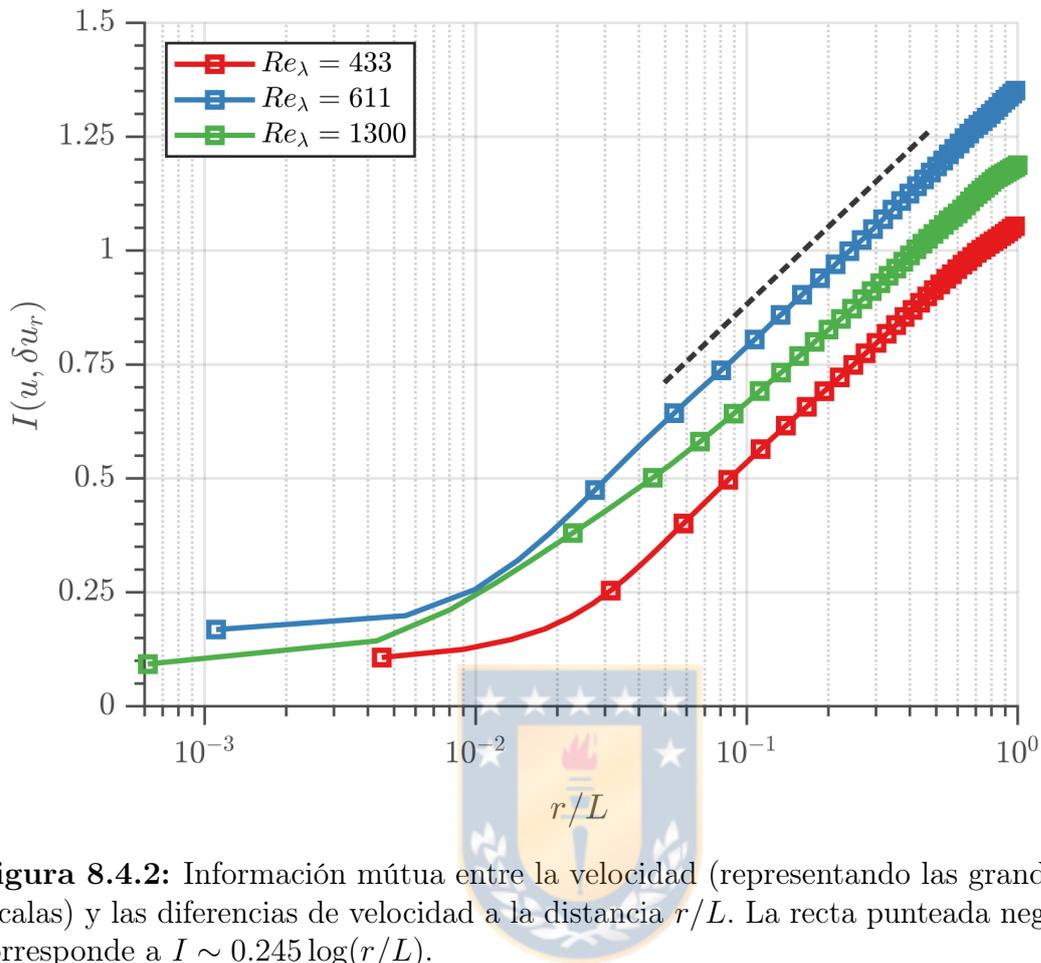


Figura 8.4.2: Información mútua entre la velocidad (representando las grandes escalas) y las diferencias de velocidad a la distancia r/L . La recta punteada negra corresponde a $I \sim 0.245 \log(r/L)$.

En la figura 8.4.3 se muestran las distribuciones de entropía en el espacio de Fourier, en este caso se determinan para dos velocidades filtradas (por sobre y por bajo un cierto número de onda k). Notamos que en el caso de la entropía de las escalas grandes se alcanza rápidamente un valor constante, mientras que en el caso de las escalas pequeñas esta disminuye de forma lineal en el rango inercial (lineal vs el logaritmo de k) y luego disminuye más rápidamente en la zona disipativa, nuevamente el comportamiento está bien marcado entre las diferentes escalas. Además, se observa claramente como se extiende el rango inercial con el aumento del número de Reynolds.

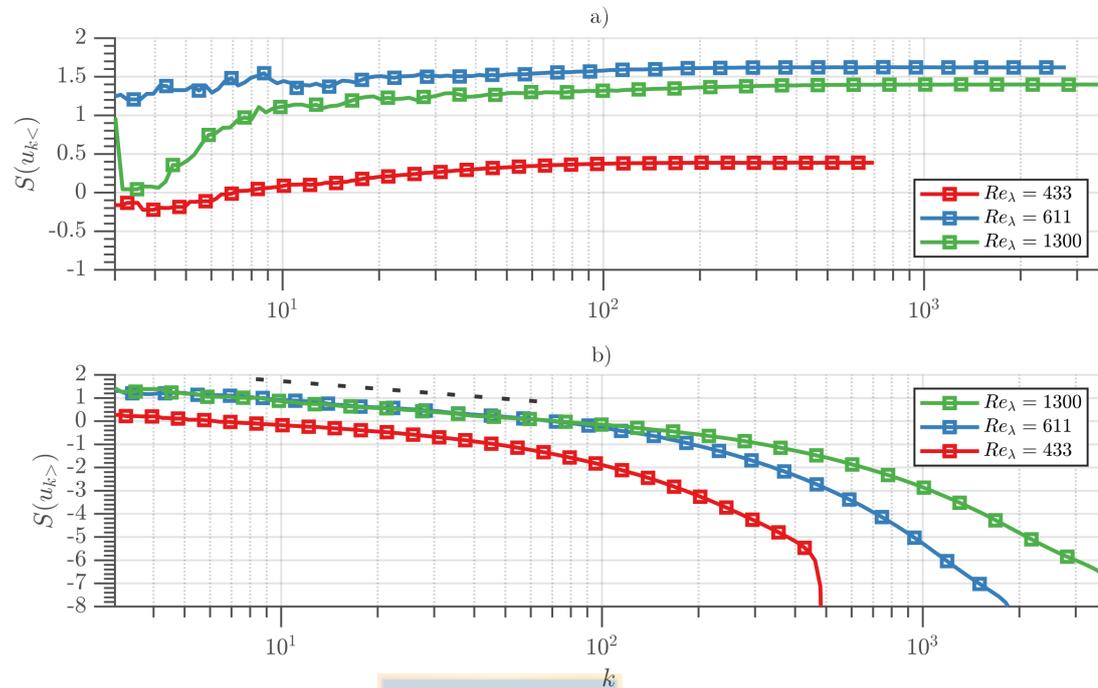


Figura 8.4.3: Entropía de Shannon en el espacio de Fourier. a) Entropía de escalas 'grandes' (velocidad filtrada $u_{k<}$). b) Entropía de escalas 'grandes' (velocidad filtrada $u_{k>}$). La línea segmentada negra en la imagen b) corresponde a una pendiente de -0.45 (notar que el eje k está en escala logarítmica).

En la figura 8.4.4 se muestra la distribución de información mutua entre las escalas filtradas en el espacio de Fourier. El comportamiento es claramente distinto del observado en la figura 8.4.2 (no se observa el comportamiento lineal de forma tan marcada), es interesante notar que no se observa de forma marcada como en las otras figuras el rango inercial. Sin embargo, nuevamente vemos valores mayores para la simulación de $Re_\lambda = 611$ en comparación a la de $Re_\lambda = 1300$.

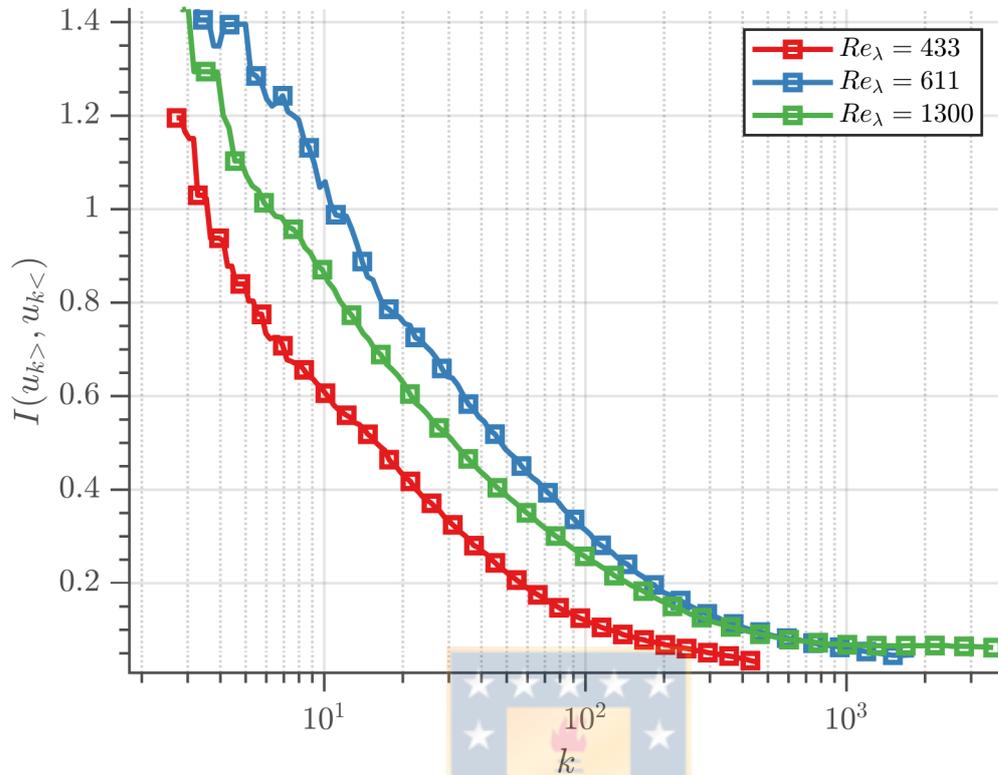


Figura 8.4.4: Información mutua entre la componente de la velocidad u filtrada a una escala k , $u_{k<}$ y $u_{k>}$. Casos HIT.

| - | $Re_\lambda = 433$ | $Re_\lambda = 611$ | $Re_\lambda = 1300$ |
|-----------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| S | 0.342 | 0.343 | 0.361 |
| $I(u, \delta u_\tau)$ | 0.239 | 0.246 | 0.235 |
| $S(u_{k>})$ | -0.444 | -0.462 | -0.451 |

Cuadro 8.4.1: Pendientes de las aproximaciones $S \sim C_S \log(r/L)$ y $I \sim C_I \log(r/L)$ en el rango inercial. Los valores mostrados en la tabla corresponden a C_S y C_I .

Luego de estudiar el caso HIT centramos nuestro interés en la simulación TBL. En este caso estudiamos las estadísticas temporales, por lo que las diferencias de velocidad son tomadas en el tiempo $\delta u_n = u(t + n\tau) - u(t)$ donde τ es el tiempo mínimo de la simulación.

La entropía diferencial en la dirección del flujo es mostrada en la figura 8.4.5, vemos un claro aumento de la entropía durante la zona transicional para todas las distancias de la pared estudiadas, de la misma forma se ve un aumento de la entropía a medida que nos alejamos de la pared.

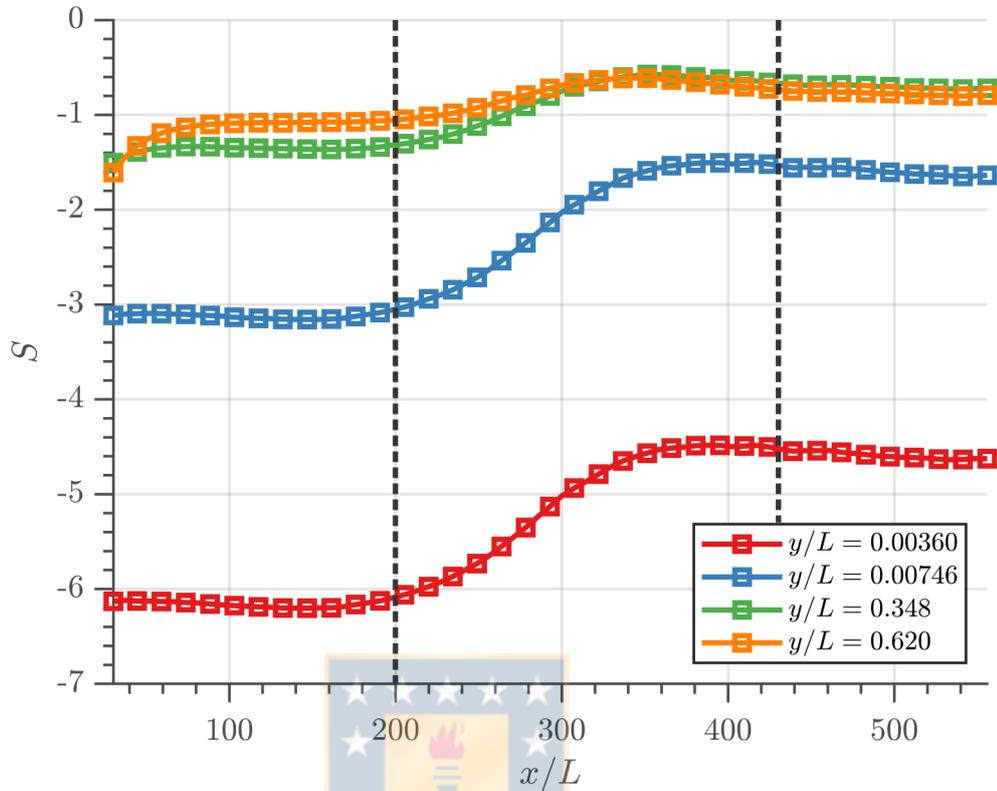


Figura 8.4.5: Distribución de entropía del campo de velocidad en la dirección del flujo para el caso TBL. Las líneas punteadas marcan el inicio y final de la zona de transición. El resultado es presentado para distintas distancias de la pared detalladas en la figura.

El siguiente resultado corresponde a la información mutua entre las escalas pequeñas del flujo (figura 8.4.6), estas son representadas por las diferencias de velocidad $\delta u_1 = u(t + \tau) - u(t)$ y $\delta u_2 = u(t + 2\tau) - u(t)$. Observamos un aumento de la información mutua hasta alcanzar un peak cerca de la transición. Durante la transición disminuye hasta alcanzar un mínimo al inicio de la zona turbulenta.

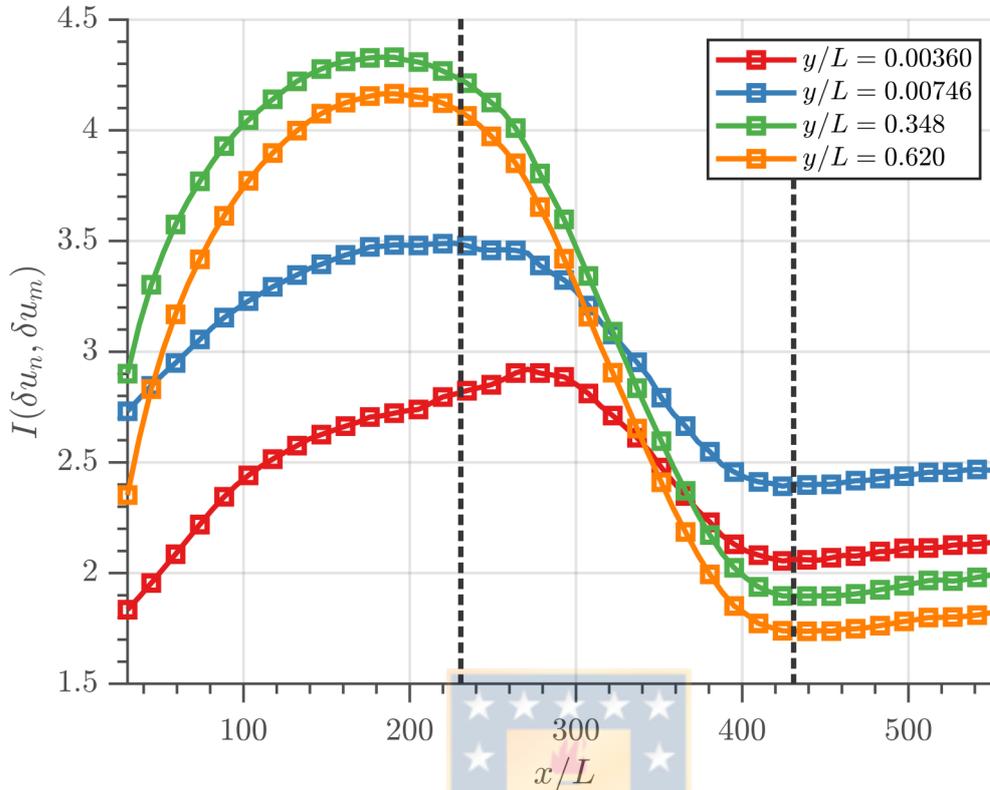


Figura 8.4.6: Distribución de información mutua $I(\delta u_n, \delta u_m)$ a lo largo del eje x entre las pequeñas escalas $n = 1$ y $m = 2$. Las curvas corresponden a distintas distancias de la pared detalladas en la figura. Caso TBL.

Si consideramos la información mutua como una medida de correlación una pregunta lógica es cómo se compara con la correlación lineal. Esto es lo mostrado en la figura 8.4.7 para una distancia de la pared fija $y/L = 0.348$. Las curvas muestran la información mutua (izquierda) entre la velocidad u y la diferencia de velocidad a distintas escalas temporales $n\tau$. La correlación entre la velocidad y las escalas es mostrada en la derecha, notemos que no está normalizada por las desviaciones estándar. También se muestran en las figuras las distribuciones de información mutua y correlación en el plano $x - n$ (posición vs escala $n\tau$). Vemos como la información mutua alcanza un máximo antes de la transición, mientras que la correlación (entre las mismas cantidades) también alcanza un máximo, pero es antes de la zona turbulenta.

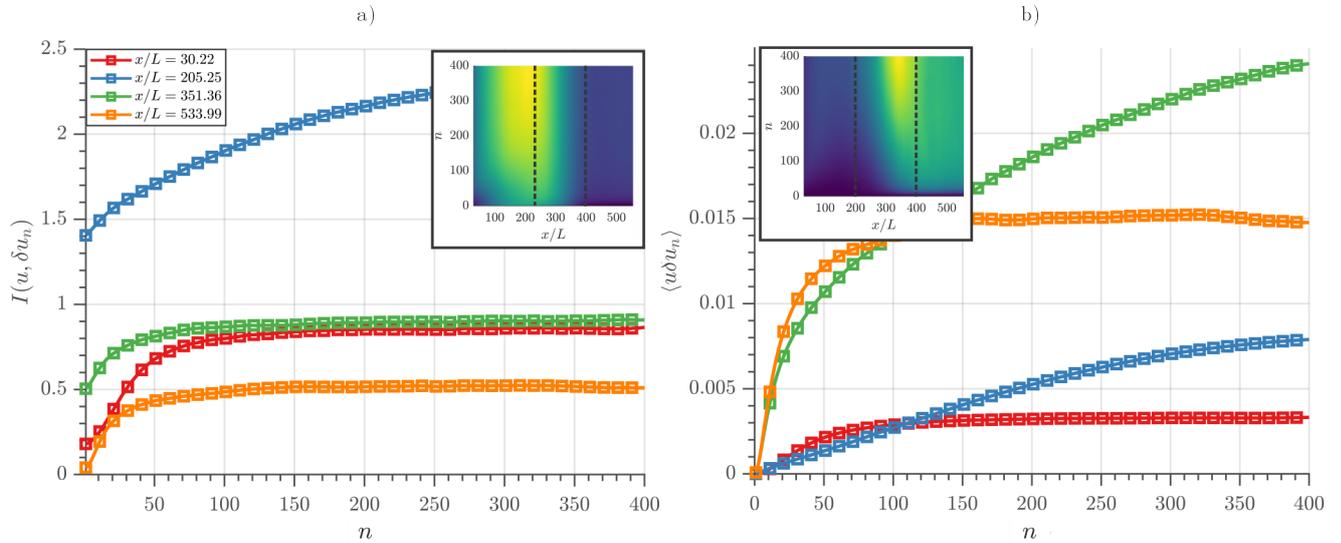


Figura 8.4.7: a) Información mutua entre la componente principal del flujo u y las diferencias de velocidad a diferentes escalas, δu_n . En la esquina superior se muestra la distribución en el plano $x - n$. b) Correlación entra la velocidad en la dirección del flujo u y las diferencias de velocidad, δu_n . En la esquina superior se muestra la distribución en el plano $x - n$. En ambos casos estudiamos una distancia fija desde la pared $y/L = 0.348$.

En la figura 8.4.8 se muestra la información mutua completamente resuelta, con esto queremos decir que la determinamos para todas las diferencias de velocidad en un rango $n, m \in [1, 500]$. Los puntos para los cuales se determinó corresponden a las diferentes zonas del flujo (debido al costo computacional solo la determinamos en 4 puntos): primero en la zona laminar, el segundo punto corresponde a la zona donde observamos que la información mutua $I(u, \delta u_{400})$ era máxima (ver figura 8.4.7), el tercero es dentro de la zona de transición y finalmente el último punto es en la zona de flujo completamente turbulento. Podemos ver (como ya vimos en resultados anteriores) un aumento en la información mutua entre las escalas, sin embargo este aumento es principalmente para las escalas grandes del flujo, esto es seguido de una disminución de la información mutua durante la transición y en la zona turbulenta vemos el pequeño un rápido decaimiento, el cual es similar en todo el rango de escalas).

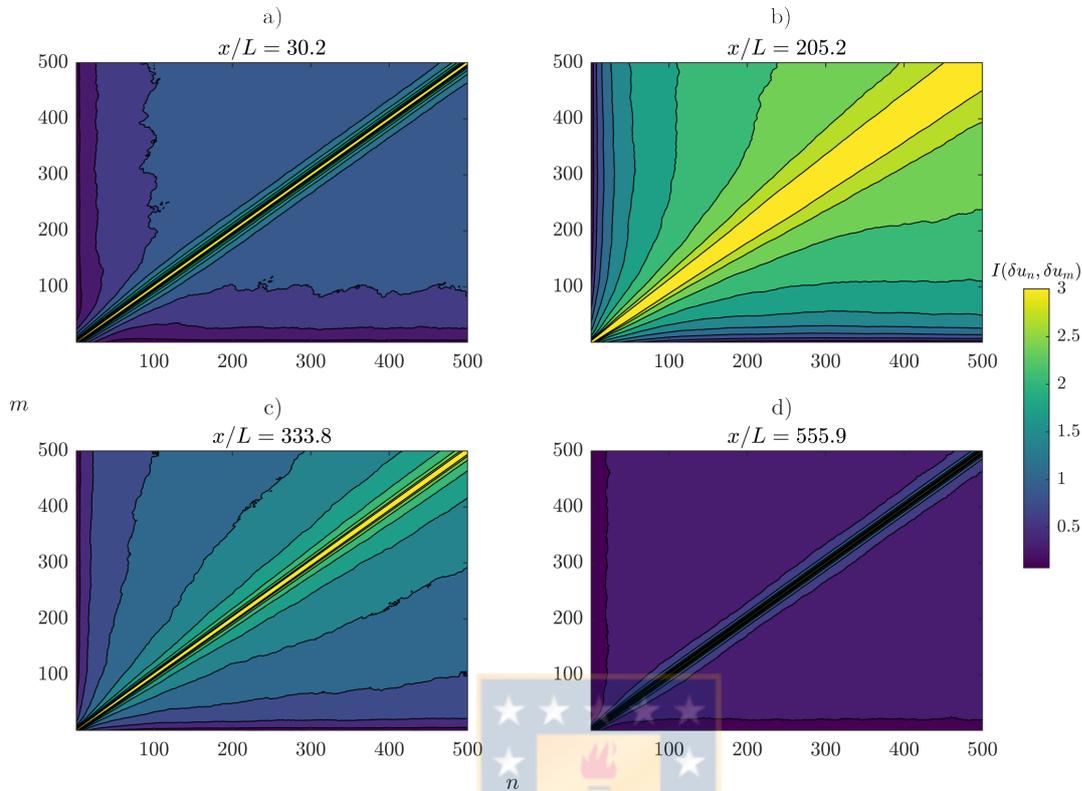


Figura 8.4.8: Información mutua entre todas las escalas en el rango $m, n \in [1, 500]$. a) Zona laminar. b) Comienzo de zona transicional. c) Zona transicional. d) Zona turbulenta. En todos los casos estudiamos una distancia fija desde la pared $y/L = 0.348$.

Otra forma de estudiar las diferentes escalas del flujo es realizando un filtro en el espacio de Fourier. En la figura 8.4.9 se muestra la información mutua entre la velocidad filtrada a una frecuencia ω (filtrada según ecuación 8.1.3). De forma similar a los análisis anteriores vemos que se alcanza un máximo en la zona cercana al comienzo de la transición, donde las escalas lentas (bajo ω) poseen una mayor información mutua en comparación a la zona turbulenta y la laminar. Además observamos que en la zona turbulenta se alcanza un mínimo, donde los valores son menores incluso que en la zona laminar.

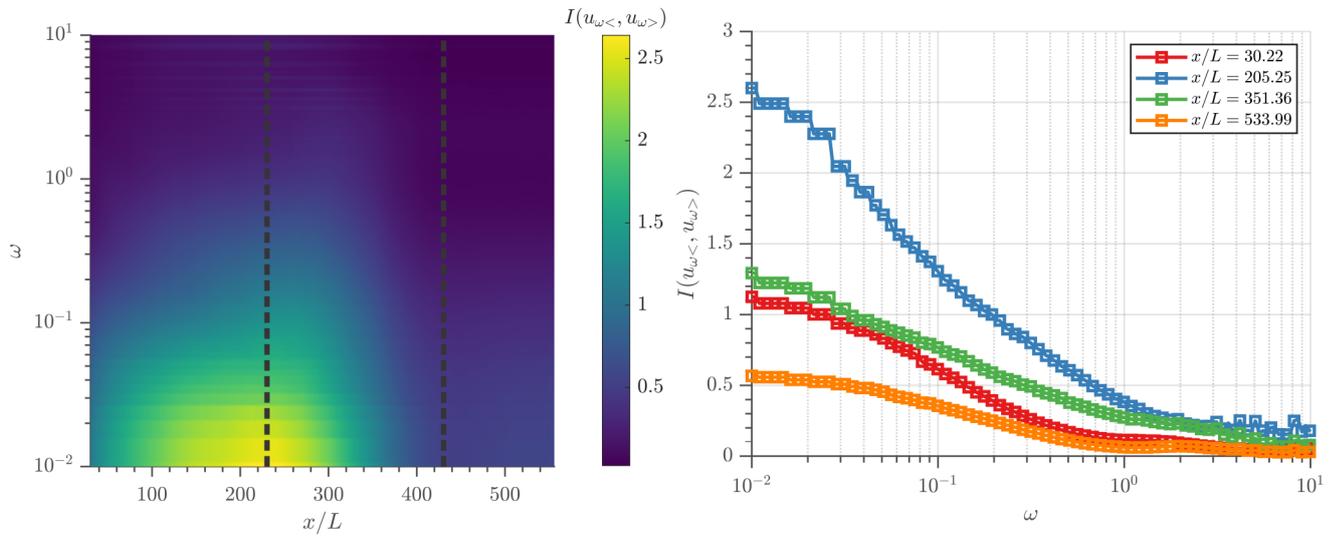


Figura 8.4.9: Información mutua para el caso TBL en el espacio de Fourier. a) Información mutua como una función de la posición x/L y la frecuencia ω . b) Información mutua como una función de la frecuencia para las posiciones indicadas.

Ahora estudiamos la complejidad C definida según la ecuación 8.1.4. Como se ve en la figura 8.4.10, la complejidad alcanza un máximo en la zona cercana al comienzo de la transición, y su comportamiento es similar al de la información mutua entre las escalas sin embargo su variación entre las diferentes distancias de la pared es menor, al comparar la zona turbulenta en distintas distancias de la pared.

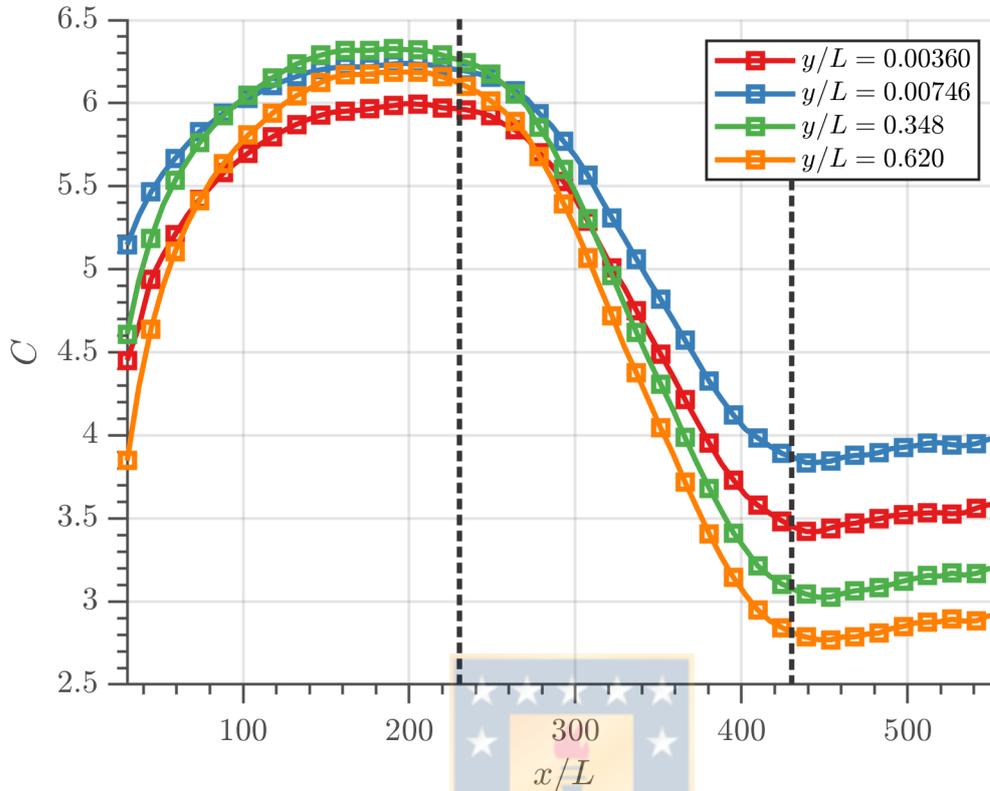


Figura 8.4.10: Medida de complejidad en el eje x a distintas distancias de la pared. La *embedding dimension* es $m = 12$, obtenida a partir del análisis de Cao.

Para comprender mejor el comportamiento con la distancia de la pared en la zona turbulenta analizamos el flujo de canal (CF en tabla 8.3.1), este es completamente turbulento y sus cantidades dependen solo de la distancia de la pared. Como observamos en la figura 8.4.11, la entropía alcanza un máximo en $y^+ \approx 10$, mientras que la información mutua y C alcanzan un máximo en $y^+ \approx 3$, seguido de un mínimo en $y^+ \approx 80$ para la información mutua y $y^+ \approx 40$ para la complejidad. Las distintas capas mostradas en la figura fueron identificadas a partir del perfil de velocidad de la simulación: viscous sublayer $y^+ \in [0.1, 5]$, buffer layer $y^+ \in [5, 200]$ y la *log-law region* corresponde a valores de y^+ mayores a 200 (hasta $y^+ \approx 830$).

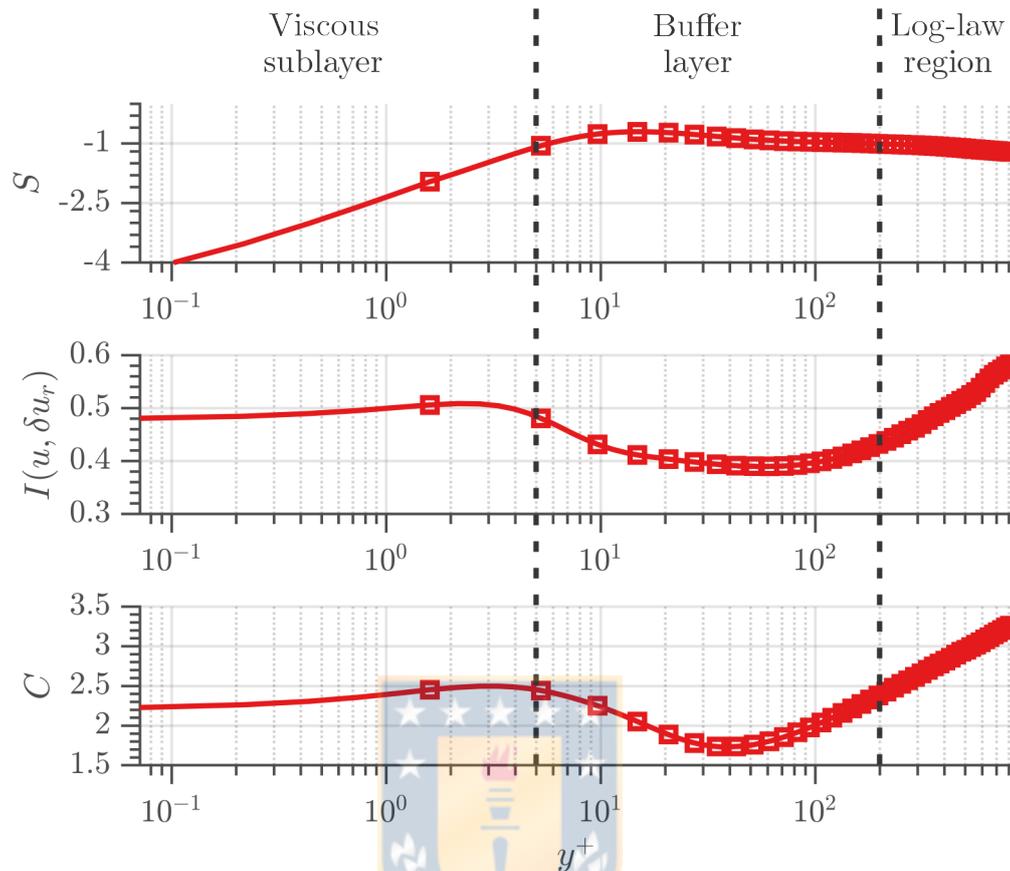


Figura 8.4.11: Perfiles verticales de las cantidades estudiadas. a) Entropía del campo de velocidad. b) Información mutua, el perfil mostrado corresponde a $r = 400\Delta x^+$. c) Complejidad, la *Embedding dimension* utilizada en el caso de la complejidad es de $m = 15$, obtenida a partir del análisis de Cao. El gráfico se divide en tres capas, éstas se identifican según el perfil de velocidad de la simulación [82].

Capítulo 9

Análisis de Resultados

9.1. Análisis de resultados

Comenzamos por el estudio de los casos HIT, nuestros resultados para la entropía (figura 8.4.1) coinciden con estudios previos por Granero-Belinchón [58]. La entropía en el rango inercial está caracterizada por una región logarítmica ($S = C_S \log(r/L) + b$). Las pendientes obtenidas en nuestros resultados son mostradas en la tabla 8.4.1. Se observan pequeñas desviaciones del resultado esperado por la teoría de Kolmogorov [58], $a = p = 1/3$. En la tabla 8.4.1 también se muestran los resultados para la información mutua de la figura 8.4.2. Observamos nuevamente un comportamiento logarítmico en el rango inercial, sin embargo a diferencia de la entropía, notamos una disminución de la información mutua entre $Re_\lambda = 611$ y $Re_\lambda = 1300$. También se observa que la información mutua disminuye a través de las escalas, es decir, se pierde información sobre la gran escala del flujo. Esto es esperable debido a que existe una separación de escalas, sin embargo la pregunta es si las escalas más pequeñas del sistema siguen conteniendo información sobre las escalas grandes. Para intentar responder esta pregunta es más útil estudiar la figura 8.4.4 dado que analizamos conjuntos disjuntos en el espacio de Fourier, y al observarla parece que luego de alcanzado el rango disipativo la información mutua se estabiliza en un valor cercano a cero. Consideramos instructivo tener una discusión sobre la universalidad de las pequeñas escalas en vista de estos resultados. Para esto debemos tener en cuenta que la universalidad se produce debido a que a medida que avanzamos hacia las escalas más pequeñas, el sistema olvida información sobre las características

del forzamiento a gran escala. La investigación de Tanogami y Araki [127] pareciera, a primera vista, ser contradictoria con la universalidad debido a que el *learning rate* exhibe una cascada de información directa: cómo puede haber un flujo de información hacia las escalas pequeñas y al mismo tiempo existir universalidad? Según Ryo Araki (comunicación personal) no son fenómenos contradictorios, explicando que esta transmisión de información puede traducirse en la pequeña escala en fenómenos que han sido observados en flujos turbulentos como la sincronización caótica [77]. Creemos que para que se cumpla lo anterior es necesaria una componente extra: la transmisión de información debe ser local. Si la transmisión de información es local entonces las escalas pequeñas pueden contener información sobre las escalas más grandes, pero solo sobre las escalas adyacentes. Por esto consideramos importante realizar más estudios en esta dirección e investigar la localidad de la transmisión de información en la cascada turbulenta, poniendo especial énfasis en las interacciones triádicas, que pueden ser una fuente de no-localidad.

En la figura 8.4.3 descomponemos el sistema en el espacio de Fourier y calculamos las respectivas entropías. Notamos dos comportamientos interesantes: primero, en 8.4.3 b) vemos como la entropía de las escalas pequeñas disminuye en el rango inercial con una forma $S(u_{k>}) \sim c \log(k)$ y luego disminuye más rápido en las escalas disipativas. Esto apunta nuevamente en la misma dirección de la figura 8.4.1: las escalas más pequeñas son las más 'organizadas' del sistema y por lo tanto las más predecibles a la hora de modelarlas. Otro resultado interesante en la figura 8.4.3 a) corresponde a cuánto le toma alcanzar un valor constante a la entropía a medida que le agregamos escalas más y más pequeñas al sistema. Para poder ver de mejor forma esto graficamos los datos de la entropía de una manera distinta en la figura 9.1.1. Lo interesante de éste resultado es lo siguiente: al aumentar las escalas del sistema (agregándole escalas más pequeñas) la entropía aumentar su valor y el gráfico de la figura 9.1.1 se acerca a cero, sin embargo este valor se satura en las escalas más pequeñas pero luego del rango inercial. Es decir, agregar escalas al sistema aumenta su información (incertidumbre) pero solo hasta cierto valor, las escalas del rango inercial también aumentan la información del sistema. Este comportamiento es similar a la medida de intermitencia basada en la divergencia de Kullback-Leibler propuesta por Granero-Belinchon [58], sin

embargo su interpretación es distinta (la medida de granero Belinchón corresponde a una distancia de la gaussianidad que se acerca a cero en las escalas más grandes) y no debemos recurrir a una cantidad externa al sistema para medir estos efectos, sin embargo también parece ser un indicador de la intermitencia del rango inercial.

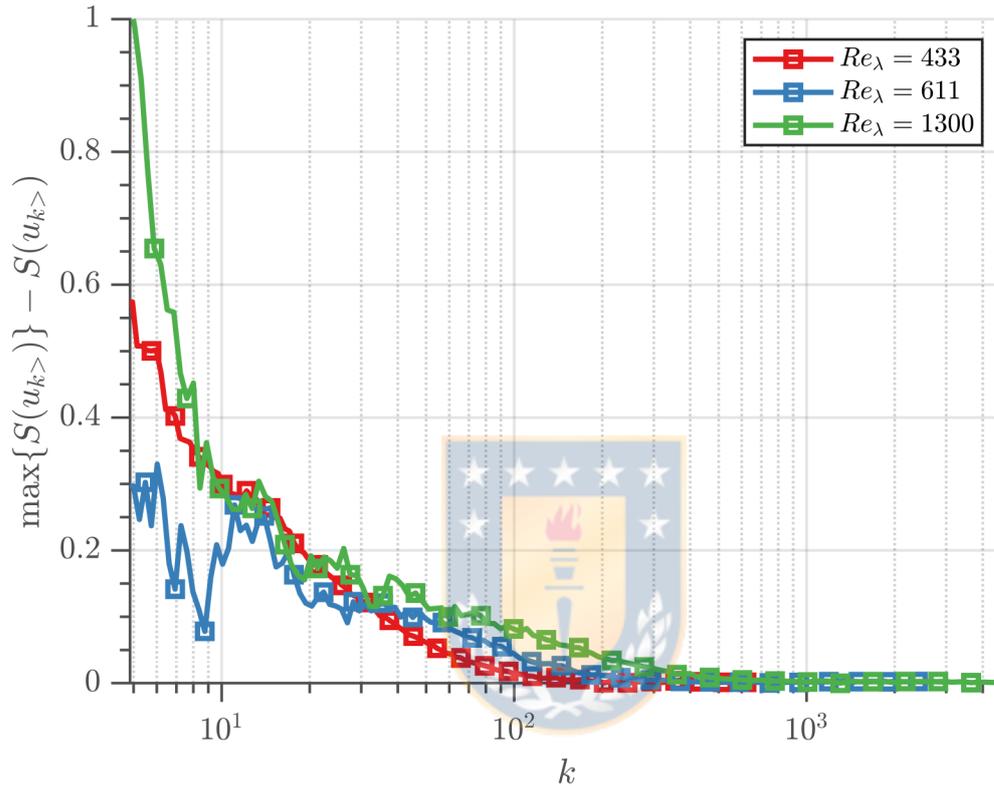


Figura 9.1.1: Diferencia entre el valor máximo de la entropía $S(u_{k<})$ y su distribución.

Luego de estudiar el caso HIT nos preguntamos cómo varían estas cantidades en la transición, comenzando por la entropía mostrada en la figura 8.4.5. Notamos que independiente de la distancia de la pared, se produce un aumento de la entropía en la zona de transición (región entre las líneas segmentadas negras en la figura), este resultado es de esperar si consideramos a la entropía como una medida del desorden del sistema [60, 16]. Tiene sentido que cerca de la pared sea menor: debido a la condición de borde esperamos que las escalas más pequeñas del sistema, donde la mayor parte de la disipación ocurre, estén cerca de la pared y de la misma forma que en el caso HIT vemos que están asociadas a una entropía menor.

En la figura 8.4.6 estudiamos la información mutua entre las diferencias de velocidad temporales. Notamos el siguiente comportamiento: en todas las distancias

de la pared se alcanza un máximo cerca de la zona de transición. Este comportamiento de la información mutua ha sido observado en otros sistemas como el modelo de Ising o el de Vikseck [141, 140]. Este es un comportamiento similar al observado en autómatas celulares en el estudio de Langton 'Computation at the edge of chaos' [79]. Existen algunas similitudes y diferencias con el comportamiento observado por Langton:

- En los autómatas se observa que la información mutua alcanza un máximo para valores intermedios de la entropía. En la capa límite transicional la información mutua máxima es alcanzada al comienzo de la zona de transición, donde la entropía alcanza un mínimo, al observar las figuras 8.4.5 y 8.4.6.
- De forma similar a los autómatas celulares, observamos que la aparición de puntos turbulentos disminuye la información mutua y aumenta la entropía durante la transición a la turbulencia. En el trabajo de Langton esto corresponde a la aparición de transientes muy largos cerca y luego de la transición.

También estudiamos la información mutua entre las escalas en el espacio de Fourier, esto se muestra en la figura 8.4.9. Nuevamente observamos un máximo en la información mutua cercano al inicio de la zona de transición, estos resultados son obtenidos para una distancia de la pared $y/L = 0.348$ y confirman lo observado en la figura 8.4.6. Otro aspecto interesante de estos resultados es que el aumento en la información mutua durante la transición se produce principalmente en las escalas grandes o 'lentas' del sistema. Este comportamiento se puede observar en más detalle en la figura 8.4.8, donde se muestra la información mutua entre todas las escalas para ciertos puntos característicos. Vemos que entre la zona laminar y la zona transicional se produce un aumento de la información mutua entre las escalas: existe un mayor contenido de información en las correlaciones del sistema antes de la transición, sin embargo este aumento es principalmente en las escalas más grandes. La zona de transición (8.4.8c) está caracterizada por una disminución de la información mutua con el aumento de la fracción turbulenta del sistema, hasta alcanzar la zona completamente turbulenta (8.4.8d). Vemos que el flujo completamente turbulento posee una información mutua que decae más rápido que en la zona laminar, esto es un indicador de la localidad de las interacciones en la zona turbulenta. Además, notamos como esta disminución de la información mutua es similar en todas las escalas, comportamiento diferente

al que se observa en la zona transicional (como mencionamos en ese caso el aumento es principalmente en las escalas grandes). Esto se puede interpretar en el contexto propuesto por Shavit y Falkovich [122]: la dirección en que aumenta la información mutua es un indicador de la dirección en que crecen las interacciones del sistema y finalmente del desarrollo de la cascada. En la capa límite transicional observamos un aumento de la información mutua en las grandes escalas. Esto puede indicar que las interacciones que producen la transición son entre estructuras de gran escala, esto no es en contradicción con la transición explicada por la interacción de las ondas de Tollmien-Slichting [34]. En términos de la teoría de estabilidad hidrodinámica, la zona que podemos analizar en la capa límite turbulenta corresponde a la zona donde se amplifican las perturbaciones. Podemos notar que esta zona de amplificación está caracterizada por un aumento de la información mutua, mientras que la entropía del sistema permanece aproximadamente constante hasta el inicio de la zona de transición. Un trabajo pendiente es investigar la información mutua entre modos específicos durante la transición y ver se relaciona esto con las inestabilidades que generan la transición (modos inestables mostrados en la figura 6.2.1).

Hemos estudiado la entropía y la información mutua, ambas cantidades han sido propuestas en algún momento como medidas de complejidad [13, 60]. Como hemos explicado en capítulos anteriores, la entropía es una medida del desorden del sistema y la información mutua es una medida de la correlación, aunque es de esperar que esta última esté asociada con la complejidad. De hecho la medida de complejidad que utilizamos (ecuación 8.1.4) está basada en la información mutua. En la figura 8.4.10 se muestra la distribución de esta cantidad. Esperamos que alcance un máximo en la transición: la complejidad debería alcanzar un máximo entre el estado ordenado y el desordenado [12] (tal como ocurre con la *EMC* en el punto de Feigenbaum [59]). Esto es justamente lo que observamos, si bien el resultado es muy parecido al de la información mutua entre escalas. Notamos que el comportamiento de la complejidad C es similar en todas las distancias de la pared estudiadas en el caso de la capa límite (a diferencia del resultado obtenido en la figura 8.4.6). Para estudiar mejor el comportamiento de estas cantidades en un flujo completamente turbulento las aplicamos a la simulación de un flujo de canal. Los resultados son mostrados en la figura 8.4.11.

Se observa que los perfiles están caracterizado por una serie de mínimos y máximos, que en el caso de la complejidad y la información mutua son alcanzados en aproximadamente las mismas distancias de la pared. La figura está dividida en tres regiones según el comportamiento del perfil de velocidad, en particular notamos que el primer máximo para las tres cantidades es alcanzado cerca del fin de la zona lineal del perfil de velocidad (viscous sublayer), también vemos que el la complejidad muestra un comportamiento logarítmico en la *log-law region* de la forma $C(y^+) = 0.619 \log(y^+) - 0.891$.

Es interesante comparar los resultados de la medida de complejidad con los obtenidos por Tao y Wu [128]. En su investigación notan que la disminución de la complejidad está asociada a una disminución de los esfuerzos de Reynolds en un flujo turbulento tras un cilindro. Un comportamiento distinto es el que ocurre en la capa límite transicional y el flujo de canal: en ambos casos el valor absoluto del esfuerzo de Reynolds aumenta con la complejidad. En el caso del flujo de canal en la zona logarítmica esto puede estar asociado a la presencia de estructuras conocidas como *detached eddies*: vórtices de una escala que alcanza la pared, según la *dettached eddie hypothesis* propuesta por Townsend [131].

Finalmente, algunos comentarios extra sobre el enfoque hacia el futuro de nuestro trabajo y las dudas que siguen presentes según los resultados y análisis anteriores. Es sabido que en el espacio de Fourier la no-linealidad de las ecuaciones de Navier-Stokes se traduce en interacciones entre triadas de modos [75]. Estas interacciones han sido ampliamente estudiadas y se ha observado que la transferencia de energía es principalmente local en el rango inercial, sin embargo existen interacciones de largo rango [3, 22]. Por lo tanto, si pensamos el problema en términos de la teoría de la información nos surgen dos preguntas. Primero, como se comporta la información mutua de dos modos y 3 modos entre las triadas, dependiendo del rango en que se encuentra cada uno de los modos?. La segunda pregunta es cómo aumenta la información mutua entre triadas de modos en la transición a la turbulencia (o en turbulencia en decaimiento). Esto ha sido estudiado en modelos de turbulencia de onda [122] pero no en turbulencia hidrodinámica, y si bien nuestros resultados indican interacciones locales en la información mutua entre escalas aún queda la pregunta si las interacciones no-locales entre las triadas

tienen algún efecto en la información mutua. Podemos plantear otra pregunta sobre la transición a la turbulencia a partir de la figura 8.4.9. Notamos que la información mutua es entre la velocidad filtrada en el espacio de frecuencias pero no corresponde a la información mutua entre modos individuales, sino que es entre todos los modos por sobre y bajo una frecuencia dada. Baines [7] propuso una visión acerca de la transición laminar turbulenta basada en la formación de ondas de Tollmien Schlichting a partir de la interacción mutua entre dos modos lineales que en sí mismos representan dos idealizaciones opuestas del sistema (modo viscoso y modo inviscido). Los resultados reportados en el presente trabajo motivan indagar acerca de la existencia de comunicación mutua entre los modos propuestos por Baines [7] y si es posible identificar esta interacción mediante cantidades provenientes de la teoría de la información. Otro trabajo pendiente es el estudio de la transición a la turbulencia en sistemas HIT forzados. Recientemente se ha propuesto [147] y observado [69] que ciertas características de la turbulencia como la no-gaussianidad de los gradientes de velocidad pueden aparecer en Reynolds tan bajos como $Re_\lambda \sim 10$, antes del desarrollo de un rango inercial. Esto es observado en el aumento de los momentos de los gradientes de velocidad. Dado que lo que en el fondo cambia es la función de densidad de probabilidad, esto hace la transición a la turbulencia en flujos HIT un escenario idóneo para la aplicación de la teoría de la información y la descripción de la desviación de estadísticas gaussianas en términos de las herramientas mencionadas en este estudio.

9.2. Conclusiones

En esta tesis analizamos flujos turbulentos aplicando tres cantidades provenientes de la teoría de la información: entropía, información mutua y complejidad (basada en la información mutua, ecuación 8.1.4). Proponemos una metodología para el estudio de los flujos turbulentos utilizando las herramientas de la teoría de la información mencionadas. Esta metodología es aplicada a simulaciones numéricas directas obtenidas de la base de datos de la Johns Hopkins University, JHTDB. Verificamos los métodos y herramientas utilizados comparando nuestros resultados para la distribución de entropía entre escalas en flujos homogéneos isotrópicos con los reportados previamente por Granero-Belinchón [58]. Observamos un comportamiento similar en el rango inercial de la $S = C_S \log(r/L) + b$. Además identificamos que la entropía $S(u_{k<})$ se satura luego del rango inercial.

Proponemos que esta puede ser una medida de la intermitencia similar a la propuesta por Granero-Belinchón [58] pero con una interpretación diferente: la información que aportan las escalas pequeñas del sistema se satura. Si no existiera intermitencia esta saturación ocurriría antes del rango inercial, sin embargo, esto último es una hipótesis no demostrada y requiere más estudios. Otro resultado que consideramos central es el de la información mutua: observamos una disminución en la información mutua entre las escalas hasta que se hace prácticamente cero en el rango disipativo. Una pregunta que surge a partir de estos resultados es como se puede relacionar esto con la universalidad del rango inercial y si la universalidad está relacionada con la localidad o no-localidad de la cascada de información propuesta por Tanogami [127].

Los principales resultados de nuestra investigación son los obtenidos para la capa límite transicional: observamos comportamientos marcados en la información mutua entre las escalas del sistema (la complejidad sigue el mismo patrón de la información mutua). Primero, en la zona previa a la transición, se produce un aumento en la información mutua entre las escalas del sistema (la entropía del flujo en esta zona es aproximadamente constante). Luego, la información mutua alcanza un máximo que es seguido de una disminución (la entropía aumenta en este rango) debido al aumento de la fracción turbulenta del flujo. Este comportamiento es similar al observado por Langton [79] en la transición de la dinámica de autómatas celulares, sin embargo existen diferencias fundamentales: en la transición turbulenta la entropía es mínima cuando la información mutua es máxima.

Luego de la transición la información mutua alcanza un mínimo en la zona turbulenta, donde vemos que su distribución entre las escalas exhibe un comportamiento asociado a interacciones locales del sistema.

Finalmente, para estudiar el comportamiento de estas cantidades con la distancia de la pared analizamos el flujo de canal turbulento ($Re_\tau = 5200$), vemos un comportamiento logarítmico del perfil de complejidad en la *log-law region* de la forma $C(y^+) = 0.619 \log(y^+) - 0.891$, asociado a una disminución de la entropía del campo de velocidades y aumento de la información mutua. Los resultados obtenidos para la complejidad en ambos casos son diferentes a los reportados por Tao y Wu [128]: en nuestros resultados la complejidad disminuye cuando

aumentan los esfuerzos de Reynolds. Asociamos esto a la existencia de distintos tipos de estructuras en flujos limitados por paredes como *attached eddies*.



Bibliografía

- [1] Abarbanel, H. D. and Kennel, M. B. (1993). Local false nearest neighbors and dynamical dimensions from observed chaotic data. *Physical Review E*, 47(5):3057.
- [2] Alexakis, A. and Biferale, L. (2018). Cascades and transitions in turbulent flows. *Physics Reports*, 767:1–101.
- [3] Alexakis, A., Mininni, P., and Pouquet, A. (2005). Imprint of large-scale flows on turbulence. *Physical review letters*, 95(26):264503.
- [4] Amari, S.-i. (2016). *Information geometry and its applications*, volume 194. Springer.
- [5] Argyris, J. H., Faust, G., Haase, M., and Friedrich, R. (2015). *An exploration of dynamical systems and chaos: completely revised and enlarged second edition*. Springer.
- [6] Avila, K., Moxey, D., de Lozar, A., Avila, M., Barkley, D., and Hof, B. (2011). The onset of turbulence in pipe flow. *Science*, 333(6039):192–196.
- [7] Baines, P. G., Majumdar, S. J., and Mitsudera, H. (1996). The mechanics of the tollmien-schlichting wave. *Journal of fluid mechanics*, 312:107–124.
- [8] Barahona, F. (1982). On the computational complexity of ising spin glass models. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 15(10):3241.
- [9] Batchelor, G. K. (1953). *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge university press.
- [10] Bec, J., Krstulovic, G., Matsumoto, T., Ray, S. S., and Vincenzi, D. (2022). Scaling the turbulence edifice.
- [11] Beck, C. (2009). Generalised information and entropy measures in physics. *Contemporary Physics*, 50(4):495–510.
- [12] Bennett, C. H. (1988). *Logical depth and physical complexity*. Citeseer.
- [13] Bennett, C. H. (1990). *How to define complexity in physics, and why*. na.
- [14] Bennett, C. H. (2018). Dissipation, information, computational complexity and the definition of organization. pages 215–233.

- [15] Benzi, R., Paladin, G., Parisi, G., and Vulpiani, A. (1984). On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 17(18):3521.
- [16] Betchov, R. (1964). Measure of the intricacy of turbulence. *The Physics of Fluids*, 7(8):1160–1162.
- [17] Bialek, W., Nemenman, I., and Tishby, N. (2001). Complexity through nonextensivity. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 302(1-4):89–99.
- [18] Biferale, L. (2003). Shell models of energy cascade in turbulence. *Annual review of fluid mechanics*, 35(1):441–468.
- [19] Biferale, L., Lanotte, A. S., Scatamacchia, R., and Toschi, F. (2014). Intermittency in the relative separations of tracers and of heavy particles in turbulent flows. *Journal of fluid mechanics*, 757:550–572.
- [20] Billingsley, P. (2008). *Probability and measure*. John Wiley & Sons.
- [21] Bourgoin, M., Kervil, R., Cottin-Bizonne, C., Raynal, F., Volk, R., and Ybert, C. (2020). Kolmogorovian active turbulence of a sparse assembly of interacting marangoni surfers. *Physical Review X*, 10(2):021065.
- [22] Brasseur, J. G. and Wei, C.-H. (1994). Interscale dynamics and local isotropy in high reynolds number turbulence within triadic interactions. *Physics of Fluids*, 6(2):842–870.
- [23] Buchanan, M. (2012). Instructions for assembly. *Nature Physics*, 8(8):577–577.
- [24] Cao, L. (1997). Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 110(1-2):43–50.
- [25] Carbone, M. and Bragg, A. D. (2020). Is vortex stretching the main cause of the turbulent energy cascade? *Journal of Fluid Mechanics*, 883.
- [26] Cardy, J., Falkovich, G., and Gawędzki, K. (2008). *Non-equilibrium statistical mechanics and turbulence*. Number 355. Cambridge University Press.
- [27] Cerbus, R. and Goldburg, W. (2013). Information content of turbulence. *Physical Review E*, 88(5):053012.
- [28] Chaitin, G. J. (1966). On the length of programs for computing finite binary sequences. *Journal of the ACM (JACM)*, 13(4):547–569.
- [29] Chaitin, G. J. (1977). Algorithmic information theory. *IBM journal of research and development*, 21(4):350–359.
- [30] Chandrasekhar, S. (2013). *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Courier Corporation.

- [31] Chen, D., Wang, Y., Wu, G., Kang, M., Sun, Y., and Yu, W. (2019). Inferring causal relationship in coordinated flight of pigeon flocks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 29(11):113118.
- [32] Cichowlas, C., Bonaïti, P., Debbasch, F., and Brachet, M. (2005). Effective dissipation and turbulence in spectrally truncated euler flows. *Physical review letters*, 95(26):264502.
- [33] Cover, T. M. (1999). *Elements of information theory*. John Wiley & Sons.
- [34] Criminale, W. O., Jackson, T. L., and Joslin, R. D. (2018). *Theory and computation in hydrodynamic stability*. Cambridge University Press.
- [35] Cvitanović, P. (2013). Recurrent flows: the clockwork behind turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 726:1–4.
- [36] Cvitanovic, P., Artuso, R., Mainieri, R., Tanner, G., Vattay, G., Whelan, N., and Wirzba, A. (2005). Chaos: classical and quantum. *ChaosBook.org (Niels Bohr Institute, Copenhagen 2005)*, 69:25.
- [37] Dabelow, L., Bo, S., and Eichhorn, R. (2019). Irreversibility in active matter systems: Fluctuation theorem and mutual information. *Physical Review X*, 9(2):021009.
- [38] Davidson, P. A., Kaneda, Y., Moffatt, K., and Sreenivasan, K. R. (2011). *A voyage through turbulence*. Cambridge University Press.
- [39] De Karman, T. and Howarth, L. (1938). On the statistical theory of isotropic turbulence. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 164(917):192–215.
- [40] Donzis, D. and Yeung, P. (2010). Resolution effects and scaling in numerical simulations of passive scalar mixing in turbulence. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 239(14):1278–1287.
- [41] Dorfman, J. R., van Beijeren, H., and Kirkpatrick, T. R. (2021). *Contemporary kinetic theory of matter*. Cambridge University Press.
- [42] Drazin, P. G. and Reid, W. H. (2004). *Hydrodynamic stability*. Cambridge university press.
- [43] Ecke, R. (2005). The turbulence problem. *Los Alamos Science*, 29:124–141.
- [44] Eyink, G. L. (2007-2008). Turbulence theory. *The Johns Hopkins University*.
- [45] Eyink, G. L. and Sreenivasan, K. R. (2006). Onsager and the theory of hydrodynamic turbulence. *Reviews of modern physics*, 78(1):87.
- [46] Farmer, J. D. (1982). Information dimension and the probabilistic structure of chaos. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 37(11):1304–1326.
- [47] Feynman, R. P., Leighton, R. B., and Sands, M. (2011). *The Feynman lectures*

- on physics, Vol. I: The new millennium edition: mainly mechanics, radiation, and heat*, volume 1. Basic books.
- [48] Fortnow, L. (2009). The status of the p versus np problem. *Communications of the ACM*, 52(9):78–86.
- [49] Fraenkel, A. S. (1993). Complexity of protein folding. *Bulletin of mathematical biology*, 55(6):1199–1210.
- [50] Friedrich, J. (2020). Non-perturbative methods in statistical descriptions of turbulence.
- [51] Frisch, U. and Kolmogorov, A. N. (1995). *Turbulence: the legacy of AN Kolmogorov*. Cambridge university press.
- [52] Galanti, B. and Tsinober, A. (2004). Is turbulence ergodic? *Physics Letters A*, 330(3-4):173–180.
- [53] Germano, M. (1987). On the non-reynolds averages in turbulence. In *19th AIAA, Fluid Dynamics, Plasma Dynamics, and Lasers Conference*, page 1297.
- [54] Germano, M. (1992). Turbulence: the filtering approach. *Journal of Fluid Mechanics*, 238:325–336.
- [55] Goff, J. E. (2010). Power and spin in the beautiful game. *Physics today*, 63(7):62–63.
- [56] Goldenfeld, N. and Kadanoff, L. P. (1999). Simple lessons from complexity. *science*, 284(5411):87–89.
- [57] Goto, S. (2008). A physical mechanism of the energy cascade in homogeneous isotropic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 605:355–366.
- [58] Granero-Belinchon, C., Roux, S. G., and Garnier, N. B. (2018). Kullback-leibler divergence measure of intermittency: Application to turbulence. *Physical Review E*, 97(1):013107.
- [59] Grassberger, P. (1986). Toward a quantitative theory of self-generated complexity. *International Journal of Theoretical Physics*, 25(9):907–938.
- [60] Grassberger, P. (2012). Randomness, information, and complexity. *arXiv preprint arXiv:1208.3459*.
- [61] Hentschel, H. G. E. and Procaccia, I. (1983). The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 8(3):435–444.
- [62] Herbert, T. (1988). Secondary instability of boundary layers. *Annual review of fluid mechanics*, 20(1):487–526.
- [63] Ikeda, K. and Matsumoto, K. (1989). Information theoretical characterization of turbulence. *Physical review letters*, 62(19):2265.

- [64] Isett, P. (2018). A proof of onsager’s conjecture. *Annals of Mathematics*, 188(3):871–963.
- [65] Iyer, K. P., Sreenivasan, K. R., and Yeung, P. (2020). Scaling exponents saturate in three-dimensional isotropic turbulence. *Physical Review Fluids*, 5(5):054605.
- [66] Jaynes, E. T. (1957). Information theory and statistical mechanics. *Physical review*, 106(4):620.
- [67] Johnson, P. L. (2021). On the role of vorticity stretching and strain self-amplification in the turbulence energy cascade. *Journal of Fluid Mechanics*, 922.
- [68] Khinchin, A. Y. (2013). *Mathematical foundations of information theory*. Courier Corporation.
- [69] Khurshid, S., Donzis, D., and Sreenivasan, K. R. (2022). Emergence of universal scaling in isotropic turbulence. *arXiv preprint arXiv:2211.06307*.
- [70] Klebanoff, P. S., Tidstrom, K., and Sargent, L. (1962). The three-dimensional nature of boundary-layer instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 12(1):1–34.
- [71] Kolmogorov, A. N. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Cr Acad. Sci. URSS*, 30:301–305.
- [72] Kolmogorov, A. N. (1965). Three approaches to the quantitative definition of information’. *Problems of information transmission*, 1(1):1–7.
- [73] Kolmogorov, A. N. (1991). Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 434(1890):15–17.
- [74] Kozachenko, L. F. and Leonenko, N. N. (1987). Sample estimate of the entropy of a random vector. *Problemy Peredachi Informatsii*, 23(2):9–16.
- [75] Kraichnan, R. H. (1959). The structure of isotropic turbulence at very high reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 5(4):497–543.
- [76] Kraskov, A., Stögbauer, H., and Grassberger, P. (2004). Estimating mutual information. *Physical review E*, 69(6):066138.
- [77] Lalescu, C. C., Meneveau, C., and Eyink, G. L. (2013). Synchronization of chaos in fully developed turbulence. *Physical Review Letters*, 110(8):084102.
- [78] Landau, L. (1959). Em lifshitz, fluid mechanics. *Course of theoretical physics*, 6.
- [79] Langton, C. G. (1990). Computation at the edge of chaos: Phase transitions and emergent computation. *Physica D: nonlinear phenomena*, 42(1-3):12–37.
- [80] Lasota, A. and Mackey, M. C. (2013). *Chaos, fractals, and noise: stochastic aspects of dynamics*, volume 97. Springer Science & Business Media.

- [81] Lee, J., Sung, H. J., and Zaki, T. A. (2017). Signature of large-scale motions on turbulent/non-turbulent interface in boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 819:165–187.
- [82] Lee, M. and Moser, R. D. (2015). Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to. *Journal of Fluid Mechanics*, 774:395–415.
- [83] Li, Y., Perlman, E., Wan, M., Yang, Y., Meneveau, C., Burns, R., Chen, S., Szalay, A., and Eyink, G. (2008). A public turbulence database cluster and applications to study lagrangian evolution of velocity increments in turbulence. *Journal of Turbulence*, (9):N31.
- [84] Lizier, J. T. (2014). Jidt: An information-theoretic toolkit for studying the dynamics of complex systems. *Frontiers in Robotics and AI*, 1:11.
- [85] Lloyd, S. (2001). Measures of complexity: a nonexhaustive list. *IEEE Control Systems Magazine*, 21(4):7–8.
- [86] Lombardi, D. and Pant, S. (2016). Nonparametric k-nearest-neighbor entropy estimator. *Physical Review E*, 93(1):013310.
- [87] Lozano-Durán, A. and Arranz, G. (2022). Information-theoretic formulation of dynamical systems: causality, modeling, and control. *Physical Review Research*, 4(2):023195.
- [88] Lumley, J. L. (2007). *Stochastic tools in turbulence*. Courier Corporation.
- [89] L’vov, V. and Procaccia, I. (1995). Exact resummations in the theory of hydrodynamic turbulence: 0. line-resummed diagrammatic perturbation approach. *arXiv preprint chao-dyn/9502010*.
- [90] L’vov, V. and Procaccia, I. (1996). Turbulence: a universal problem. *Physics World*, 9(8):35.
- [91] McComb, W. D. (1990). The physics of fluid turbulence. *cp*.
- [92] McComb, W. D. (2014). *Homogeneous, Isotropic Turbulence: Phenomenology, Renormalization and Statistical Closures*, volume 162. OUP Oxford.
- [93] Mees, A. I., Rapp, P., and Jennings, L. (1987). Singular-value decomposition and embedding dimension. *Physical Review A*, 36(1):340.
- [94] Meneveau, C. and Sreenivasan, K. (1991). The multifractal nature of turbulent energy dissipation. *Journal of Fluid Mechanics*, 224:429–484.
- [95] Mitchell, M. (2009). *Complexity: A guided tour*. Oxford University Press.
- [96] Moffatt, H. (2014). Note on the triad interactions of homogeneous turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 741.
- [97] Moin, P. and Mahesh, K. (1998). Direct numerical simulation: a tool in turbulence research. *Annual review of fluid mechanics*, 30(1):539–578.

- [98] Monin, A., Yaglom, A. M., and Lundgren, T. (1976). Statistical fluid mechanics, vol. ii.
- [99] Nazarenko, S. (2011). *Wave turbulence*, volume 825. Springer Science & Business Media.
- [100] Nicolis, G. and Nicolis, C. (2012). *Foundations of complex systems: emergence, information and prediction*. World Scientific.
- [101] Onsager, L. (1949). Statistical hydrodynamics. *Il Nuovo Cimento (1943-1954)*, 6(2):279–287.
- [102] Oswal, S., Singh, A., and Kumari, K. (2016). Deflate compression algorithm. *International Journal of Engineering Research and General Science*, 4(1):430–436.
- [103] Paninski, L. (2003). Estimation of entropy and mutual information. *Neural computation*, 15(6):1191–1253.
- [104] Parisi, G. and Frisch, U. (1985). A multifractal model of intermittency. *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics*, pages 84–88.
- [105] Peinke, J., Barth, S., Böttcher, F., Heinemann, D., and Lange, B. (2004). Turbulence, a challenging problem for wind energy. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 338(1-2):187–193.
- [106] Pierrehumbert, R. T. (2022). Fluid mechanics: the quintessential complex system. *Journal of Fluid Mechanics*, 938.
- [107] Pope, S. B. (2001). Turbulent flows.
- [108] Qian, J. (1998). Normal and anomalous scaling of turbulence. *Physical review E*, 58(6):7325.
- [109] Ray, J. S. (1964). A formal theory of inductive inference, part 1 and part 2. *Inform. and Control*, 7:1–22.
- [110] Reeves, M. T., Billam, T. P., Anderson, B. P., and Bradley, A. S. (2013). Inverse energy cascade in forced two-dimensional quantum turbulence. *Physical review letters*, 110(10):104501.
- [111] Reynolds, O. (1883). Xxix. an experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Philosophical Transactions of the Royal society of London*, (174):935–982.
- [112] Reynolds, O. (1895). Iv. on the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical transactions of the royal society of london. (a.)*, (186):123–164.
- [113] Richardson, L. F. (1922). *Weather prediction by numerical process*. University Press.

- [114] Roberts, P. J. and Webster, D. R. (2002). Turbulent diffusion.
- [115] Rubinstein, S., McKeown, R., Ostilla Monico, R., Pumir, A., and Brenner, M. (2018). The emergence of small scales in vortex ring collisions. *APS*, 2018:C48–013.
- [116] Ruelle, D. and Takens, F. (1971). On the nature of turbulence. *Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg-RCP25*, 12:1–44.
- [117] Sagaut, P. and Cambon, C. (2008). *Homogeneous turbulence dynamics*, volume 10. Springer.
- [118] Sayadi, T., Hamman, C., and Moin, P. (2011). Direct numerical simulation of h-type and k-type transition to turbulence. *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*, pages 109–121.
- [119] Schlichting, H. (1933). Zur entstehung der turbulenz bei der plattenströmung. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1933:181–208.
- [120] Schlichting, H. and Kestin, J. (1961). *Boundary layer theory*, volume 121. Springer.
- [121] Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *The Bell system technical journal*, 27(3):379–423.
- [122] Shavit, M. and Falkovich, G. (2020). Singular measures and information capacity of turbulent cascades. *Physical Review Letters*, 125(10):104501.
- [123] Shavit, M., Vladimirova, N., and Falkovich, G. (2022). Emerging scale invariance in a model of turbulence of vortices and waves. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 380(2218):20210080.
- [124] She, Z.-S. and Leveque, E. (1994). Universal scaling laws in fully developed turbulence. *Physical review letters*, 72(3):336.
- [125] Squire, H. B. (1933). On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 142(847):621–628.
- [126] Takens, F. (1981). Detecting strange attractors in turbulence. In *Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980*, pages 366–381. Springer.
- [127] Tanogami, T. and Araki, R. (2022). Information-thermodynamic bound on information flow in turbulent cascade. *arXiv preprint arXiv:2206.11163*.
- [128] Tao, X. and Wu, H. (2019). Quantification of the complexity and unpredictability of a turbulent cylinder wake using excess entropy. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 523:211–221.
- [129] Thalabard, S., Bec, J., and Mailybaev, A. A. (2020). From the butterfly

- effect to spontaneous stochasticity in singular shear flows. *Communications Physics*, 3(1):1–8.
- [130] Tollmien, W. (1930). Über die entstehung der turbulenz. pages 18–21.
- [131] Townsend, A. (1980). *The structure of turbulent shear flow*. Cambridge university press.
- [132] Tsinober, A. (2009). *An informal conceptual introduction to turbulence*, volume 483. Springer.
- [133] Tsinober, A., Tsinober, and Jacobs (2019). *Essence of Turbulence as a Physical Phenomenon*. Springer.
- [134] Tsuji, Y., Lindgren, B., and Johansson, A. V. (2005). Self-similar profile of probability density functions in zero-pressure gradient turbulent boundary layers. *Fluid dynamics research*, 37(5):293.
- [135] Van Dyke, M. and Van Dyke, M. (1982). *An album of fluid motion*, volume 176. Parabolic Press Stanford.
- [136] Vela-Martín, A. and Jiménez, J. (2021). Entropy, irreversibility and cascades in the inertial range of isotropic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 915.
- [137] Wackerbauer, R., Witt, A., Atmanspacher, H., Kurths, J., and Scheingraber, H. (1994). A comparative classification of complexity measures. *Chaos, Solitons & Fractals*, 4(1):133–173.
- [138] Waleffe, F. (1992). The nature of triad interactions in homogeneous turbulence. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 4(2):350–363.
- [139] Weinan, E. and Vanden Eijnden, E. (2000). Generalized flows, intrinsic stochasticity, and turbulent transport. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 97(15):8200–8205.
- [140] Wicks, R. T., Chapman, S., and Dendy, R. (2007). Mutual information as a tool for identifying phase transitions in dynamical complex systems with limited data. *Physical Review E*, 75(5):051125.
- [141] Wilms, J., Troyer, M., and Verstraete, F. (2011). Mutual information in classical spin models. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2011(10):P10011.
- [142] Wilson, K. G. (1979). Problems in physics with many scales of length. *Scientific American*, 241(2):158–179.
- [143] Wilson, K. G. (1983). The renormalization group and critical phenomena. *Reviews of Modern Physics*, 55(3):583.
- [144] Wolfram, S. (1984). Computation theory of cellular automata. *Communications in mathematical physics*, 96(1):15–57.

- [145] Wyngaard, J. C. (1992). Atmospheric turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 24:205–233.
- [146] Yaglom, A. M. (2012). *Hydrodynamic instability and transition to turbulence*, volume 100. Springer Science & Business Media.
- [147] Yakhot, V. and Donzis, D. (2017). Emergence of multiscaling in a random-force stirred fluid. *Physical review letters*, 119(4):044501.
- [148] Yao, J. and Hussain, F. (2020). A physical model of turbulence cascade via vortex reconnection sequence and avalanche. *Journal of Fluid Mechanics*, 883.
- [149] Yato, T. and Seta, T. (2003). Complexity and completeness of finding another solution and its application to puzzles. *IEICE transactions on fundamentals of electronics, communications and computer sciences*, 86(5):1052–1060.
- [150] Yeung, P., Donzis, D., and Sreenivasan, K. (2012). Dissipation, enstrophy and pressure statistics in turbulence simulations at high reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 700:5–15.
- [151] Yeung, P., Zhai, X., and Sreenivasan, K. R. (2015). Extreme events in computational turbulence. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112(41):12633–12638.
- [152] Zakharov, V. E., L’vov, V. S., and Falkovich, G. (2012). *Kolmogorov spectra of turbulence I: Wave turbulence*. Springer Science & Business Media.
- [153] Zurek, W. H. (2018). *Complexity, entropy and the physics of information*. CRC Press.

A1. Ecuaciones de Navier-Stokes en forma Solenoidal

Lo primero que busquemos es expresar las ecuaciones de N-S solo en términos de la velocidad. Para esto primero recordamos que en el caso de un fluido incompresible tenemos,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

Entonces, tomando la divergencia de la ecuación 2.0.1 para el lado izquierdo tenemos (ahora trabajamos en notación indicial, donde índices repetidos implican una suma),

$$\begin{aligned} \partial_i [\partial_t v_i + (v_j \partial_j) v_i] &= 0 \partial_i \partial_i v_i + \partial_i [(v_j \partial_j) v_i] \\ &= \partial_i (v_j \partial_j) v_i + 0 (v_j \partial_j) (\partial_i v_i) \\ &= (\partial_i v_j) (\partial_j v_i) + v_j \partial_i \partial_j v_i \\ &= (\partial_i v_j) (\partial_j v_i) + 0 v_j \partial_j \partial_i v_i \\ &= (\partial_i v_j) (\partial_j v_i) \end{aligned}$$

Donde se utiliza la condición de incompresibilidad para anular los términos, entre la tercera y cuarta línea se usa la conmutatividad de las derivadas parciales. Ahora consideremos el término $\partial_i \partial_j (v_i v_j)$, si lo desarrollamos tenemos,

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_j (v_i v_j) &= \partial_i [(\partial_j v_i) v_j + v_i (\partial_j v_j)] \\ &= \partial_i (v_j \partial_j v_i) \\ &= \partial_i v_j \partial_j v_i + v_j \partial_j \partial_i v_i \\ &= (\partial_i v_j) (\partial_j v_i) \end{aligned}$$

Por lo tanto, al tomar la divergencia de la ecuación de N-S el lado izquierdo se puede escribir como,

$$\partial_i [\partial_t v_i + (v_j \partial_j) v_i] = \partial_i \partial_j (v_i v_j)$$

En el lado derecho se anula el término asociado a la disipación por la conmutatividad de las derivadas parciales. Entonces llegamos a la siguiente

ecuación para la presión en términos de la velocidad,

$$\frac{1}{\rho} \partial_i \partial_i p = -\partial_i \partial_j (v_i v_j) \quad (\text{A1.1})$$

Ahora introduciremos el concepto de función de Green, éstas son funciones $G(\vec{x}, \vec{x}')$ tales que, dado un operador diferencial $\hat{L}_{\vec{x}}$ cumplen la relación,

$$\hat{L}_{\vec{x}} G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Ésta ecuación se resuelve sujeta a las mismas condiciones de borde del problema que queremos solucionar, el cual está dado por,

$$\hat{L}_{\vec{x}} p = f(\vec{x})$$

Entonces, la solución estará dada por,

$$p(\vec{x}) = \int G(\vec{x}, \vec{x}') f(\vec{x}') d\vec{x}'$$

Es simple ver que, de hecho, ésta solución satisface la ecuación original. Simplemente operamos el operador $\hat{L}_{\vec{x}}$ en ambos lados,

$$\begin{aligned} \hat{L}_{\vec{x}} p &= \hat{L}_{\vec{x}} \left(\int G(\vec{x}, \vec{x}') f(\vec{x}') d\vec{x}' \right) \\ &= \int \hat{L}_{\vec{x}} G(\vec{x}, \vec{x}') f(\vec{x}') d\vec{x}' \\ &= \int \delta(\vec{x} - \vec{x}') f(\vec{x}') d\vec{x}' \\ &= f(\vec{x}) \end{aligned}$$

Donde entre la tercera y cuarta línea utilizamos la definición de función de Green y entre la cuarta y quinta línea utilizamos la propiedad principal de la función Delta de Dirac.

En este caso, se utiliza la siguiente condición de borde para las ecuaciones de N-S [91],

$$v_i(\vec{x}) = 0 \quad \text{si } \vec{x} \in S$$

Donde S es el contorno del volumen en el cual solucionamos las ecuaciones. Por lo

tanto, al considerar las ecuaciones sobre este contorno, se anulan los términos $\partial_t v_i$ (debido a que la condición de borde es válida para cualquier tiempo t) y $(v_i \partial_i)$, entonces quedamos con,

$$\frac{1}{\rho} \partial_i p = \nu \partial_j \partial_j v_i \quad (\text{A1.2})$$

Donde el término del Laplaciano no se anula, dado que las derivadas de la velocidad no necesariamente se anulan. Ahora podemos expresar ésta condición en términos de las derivadas normales a la superficie,

$$\partial_n^2 = n_m n_n \partial_n \partial_m$$

Si tomamos el producto escalar de la condición A1.2 con la normal n_i se tiene,

$$\frac{1}{\rho} \partial_n p = \nu n_i \partial_j \partial_j v_i \quad (\text{A1.3})$$

Y si ahora tomamos el producto punto 2 veces con n_j , considerando que $n_j n_j = 1$ dado que es un vector unitario,

$$\frac{1}{\rho} \partial_n p = \nu n_i (n_j \partial_j) (n_j \partial_j) v_i$$

Entonces podemos escribir la condición de borde en términos de derivadas normales a S como,

$$\frac{1}{\rho} \partial_n p = n_i \nu \partial_n^2 v_i$$

Y para la función de Green,

$$\partial_n G(\vec{x}, \vec{x}') = 0 \quad \text{si } \vec{x} \in S$$

Y la solución para la presión se puede expresar entonces como,

$$P(\vec{x}) = \rho \partial_i \partial_j \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') v_i(\vec{x}') v_j(\vec{x}') d\vec{x}' + \nu \rho \int_S G(\vec{x}, \vec{x}') n_i \partial_n^2 v_i(\vec{x}') d\vec{x}'$$

Notar que la primera integral es sobre el volumen, mientras que la segunda sobre la superficie S (éste término proviene de la condición de borde). Si ahora definimos

los siguientes operadores,

$$\begin{aligned}\hat{D}_{mn}(\cdot) &= \delta_{mn}(\cdot) - \partial_m \partial_n \int_V G(\vec{x}, \vec{x}')(\cdot) d\vec{x}' \\ \hat{L}_{mn}(\cdot) &= \nu \partial_m \int_S G(\vec{x}, \vec{x}') n_n \partial_n^2(\cdot) d\vec{x}'\end{aligned}$$

Ahora, si definimos el operador $\hat{M}_{mnl}(\cdot)$ como,

$$\hat{M}_{mnl}(\cdot) = -\frac{1}{2} \left[\partial_n \hat{D}_{ml}(\cdot) + \partial_l \hat{D}_{mn}(\cdot) \right]$$

Finalmente podemos escribir las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma solenoidal,

$$(\partial_t - \nu) v_i(\vec{x}, t) = \hat{M}_{imn} (v_m(\vec{x}, t) v_n(\vec{x}, t)) - \hat{L}_{im}(u_m(\vec{x}, t)) \quad (\text{A1.4})$$

A2. Ecuaciones de Navier-Stokes en espacio de Fourier

A continuación presentamos una derivación de las ecuaciones de Navier-Stokes en el espacio de Fourier. Comenzamos por el primer término (omitimos las constantes provenientes de la transformada), $\partial_t v_i$,

$$\partial_t v_i = \partial_t \int v_{i,k} e^{ik \cdot x} dk = \int \partial_t v_{i,k} e^{ik \cdot x} dk$$

El segundo término es el no-lineal, $v_j \partial_j v_i$. Notemos que gracias a la condición de incompresibilidad lo podemos escribir como $v_j \partial_j v_i = \partial_j (v_j v_i)$. Reemplazando las transformadas de Fourier,

$$\begin{aligned}\partial_j (v_j v_i) &= \partial_j \int v_{j,q} e^{iq \cdot x} dq \int v_{i,p} e^{ip \cdot x} dp \\ &= \partial_j \int \int v_{j,q} e^{i(q+p) \cdot x} v_{i,p} dp dq\end{aligned}$$

ahora debemos realizar el cambio $k = q + p$,

$$\begin{aligned}\partial_j \int \int v_{j,q} e^{i(q+p)\cdot x} v_{i,p} dp dq &= \partial_j \int \int v_{j,k-p} v_{i,p} dp e^{ik\cdot x} dk \\ &= i \int k_j \int v_{j,k-p} v_{i,p} dp e^{ik\cdot x} dk\end{aligned}$$

Vemos entonces como las interacciones triádicas provienen del término no lineal. Ahora centramos nuestra atención al término de la presión,

$$\partial_i p = \partial_i \int p_k e^{ik\cdot x} dk = i \int k_i p_k e^{ik\cdot x} dk$$

Ahora, recordando la ecuación para la presión A1.1 (e ignorando la densidad constante),

$$-\partial_m \partial_m p = \partial_m \partial_n (u_m u_n)$$

Notamos que nuevamente tenemos un término cuadrático al lado derecho (ya obtuvimos una expresión para esto anteriormente),

$$\partial_m \partial_n (u_m u_n) = - \int k_m k_n \int v_{m,k-p} v_{n,p} dp e^{ik\cdot x} dk$$

Luego obtenemos,

$$-\partial_m \partial_m p = \int k^2 p_k e^{ik\cdot x} dk = - \int k_m k_n \int v_{m,k-p} v_{n,p} dp e^{ik\cdot x} dk$$

De lo cual obtenemos la expresión para p_k ,

$$p_k = - \frac{k_m k_n}{k^2} \int v_{m,k-p} v_{n,p} dp$$

y para el término de la ecuación,

$$-\partial_i p = -i \int k_i p_k e^{ik\cdot x} dk = i \int k_i \frac{k_m k_n}{k^2} \int v_{m,k-p} v_{n,p} dp e^{ik\cdot x} dk$$

Con la misma restricción sobre los números de onda, $k = p + q$. El último término

corresponde al viscoso, $\nu \partial_j \partial_j u_i$, es simple ver que

$$\nu \partial_j \partial_j u_i = -\nu \int k^2 v_{i,k} e^{ik \cdot x} dk$$

reemplazando todos los términos en la ecuación llegamos a,

$$\int \partial_t v_{i,k} e^{ik \cdot x} dk + i \int k_j \int v_{j,k-p} v_{i,p} dp e^{ik \cdot x} dk = i \int k_i \frac{k_m k_n}{k^2} \int v_{m,k-p} v_{n,p} dp e^{ik \cdot x} dk - \nu \int k^2 v_{i,k} e^{ik \cdot x} dk$$

Por lo que la evolución de los coeficientes de Fourier $v_{i,k}$ obedece la ecuación,

$$\partial_t v_{i,k} + ik_j \int v_{j,k-p} v_{i,p} dp = ik_i \frac{k_m k_n}{k^2} \int v_{m,k-p} v_{n,p} dp - \nu k^2 v_{i,k}$$

Podemos manipular la ecuación para obtener una forma más simplificada,

$$(\partial_t + \nu k^2) v_{i,k} = ik_i \frac{k_m k_n}{k^2} \int v_{m,k-p} v_{n,p} dp - ik_j \int v_{j,k-p} v_{i,p} dp$$

Ahora trabajamos un poco más el lado derecho,

$$\begin{aligned} & ik_i \frac{k_m k_n}{k^2} \int v_{m,k-p} v_{n,p} dp - ik_j \int v_{j,k-p} v_{i,p} dp \\ &= -i \left(k_m \delta_{in} \int v_{m,k-p} v_{n,p} dp - k_i \frac{k_m k_n}{k^2} \int v_{m,k-p} v_{n,p} dp \right) \\ &= -ik_m \left(\delta_{in} - \frac{k_i k_n}{k^2} \right) \int v_{m,k-p} v_{n,p} dp \\ &= -ik_m P_{in} \int v_{m,k-p} v_{n,p} dp \end{aligned}$$

y obtenemos la forma usualmente encontrada en la literatura [107, 91] en términos del operador de proyección P_{in} ,

$$(\partial_t + \nu k^2) v_{i,k} = -ik_m P_{in} \int v_{m,k-p} v_{n,p} dp$$

A3. Ecuación de vorticidad

Comenzamos por las ecuaciones de Navier-Stokes (en notación indicial),

$$\partial_t v_i + (v_j \partial_j) v_i = -\frac{1}{\rho} \partial_i p + \nu \partial_j \partial_j v_i$$

Ahora consideremos el gradiente de velocidad, el cual está dado por $\partial_i v_j$. Esta cantidad puede ser descompuesto en una parte simétrica y una antisimétrica,

$$\partial_i v_j = \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_i v_j + \partial_j v_i)}_{\text{Simétrica}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_i v_j - \partial_j v_i)}_{\text{antisimétrica}}$$

Ésta descomposición es importante dado que separa la parte simétrica conocida como tensor de deformaciones,

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i v_j + \partial_j v_i) \quad (\text{A3.1})$$

Mientras que la parte antisimétrica está relacionada con la vorticidad. Notemos que $W_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i v_j - \partial_j v_i)$, multiplicando esto por el símbolo de Levi-Civita ϵ_{ijk} (recordemos que $\vec{\nabla} \times \vec{v} \iff \epsilon_{ijk} \partial_j v_k$) se tiene,

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} W_{jk} &= \frac{1}{2} (\epsilon_{ijk} \partial_j v_k - \epsilon_{ijk} \partial_k v_j) \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon_{ijk} \partial_j v_k + \epsilon_{ikj} \partial_k v_j) \\ &= \omega_i \end{aligned}$$

Donde en la segunda línea se utiliza la propiedad de antisimetría del símbolo de Levi-Civita. Ahora nos centramos en obtener la ecuación de evolución para la parte antisimétrica del tensor de gradiente de velocidades, consideremos la ecuación de Navier-Stokes y operemos ∂_j ,

$$\partial_j \partial_t v_i + \partial_j (v_k \partial_k) v_i = -\frac{1}{\rho} \partial_j \partial_i p + \partial_j \partial_k \partial_k v_i$$

Ahora consideremos la transpuesta de ésta ecuación (permutando los índices i, j).

Restando ambas tenemos,

$$\partial_j \partial_t v_i - \partial_i \partial_t v_j + \partial_j (v_k \partial_k) v_i - \partial_i (v_k \partial_k) v_j = -\frac{1}{\rho} \partial_j \partial_i p + \frac{1}{\rho} \partial_i \partial_j p + \nu \partial_j \partial_k \partial_k v_i - \nu \partial_i \partial_k \partial_k v_j$$

De inmediato podemos ver que el término asociado a la presión se cancela (dado que las derivadas parciales conmutan). Tenemos entonces,

$$\partial_t [\partial_j v_i - \partial_i v_j] + \partial_j (v_k \partial_k) v_i - \partial_i (v_k \partial_k) v_j = \nu \partial_j \partial_k \partial_k v_i - \nu \partial_i \partial_k \partial_k v_j \quad (\text{A3.2})$$

Para la parte derecha de la ecuación,

$$\nu \partial_j \partial_k \partial_k v_i - \nu \partial_i \partial_k \partial_k v_j = \nu \partial_k \partial_k (\partial_j v_i - \partial_i v_j) = 2\nu \partial_k \partial_k W_{ji}$$

De la misma forma para la parte temporal,

$$\partial_t [\partial_j v_i - \partial_i v_j] = 2\partial_t W_{ji}$$

Y para la parte no-lineal,

$$\begin{aligned} \partial_j (v_k \partial_k) v_i &= \partial_j v_k \partial_k v_i + v_k \partial_j \partial_k v_i \\ &= \partial_j v_k \partial_k v_i + v_k \partial_k \partial_j v_i \end{aligned}$$

Luego tenemos,

$$\begin{aligned} \partial_j (v_k \partial_k) v_i - \partial_i (v_k \partial_k) v_j &= \partial_j v_k \partial_k v_i + v_k \partial_k \partial_j v_i - \partial_i v_k \partial_k v_j - v_k \partial_k \partial_i v_j \\ &= (v_k \partial_k) (\partial_j v_i - \partial_i v_j) + \partial_j v_k \partial_k v_i - \partial_i v_k \partial_k v_j \\ &= 2v_k \partial_k W_{ji} + \partial_j v_k \partial_k v_i - \partial_i v_k \partial_k v_j \end{aligned}$$

Vemos que la segunda parte de este término involucra el tensor de gradiente de velocidades $A_{ij} = \partial_i v_j$,

$$\partial_j v_k \partial_k v_i - \partial_i v_k \partial_k v_j = A_{jk} A_{ki} - A_{ik} A_{kj}$$

Abandonando la notación indicial temporalmente y descomponiendo el gradiente

en partes antisimétrica y simétrica,

$$\begin{aligned}
AA - A^t A^t &= (S + W)(S + W) - (S^t + W^t)(S^t + W^t) \\
&= (S + W)(S + W) - (S - W)(S - W) \\
&= S^2 + SW + WS + W^2 - (S^2 - SW - WS + W^2) \\
&= 2(SW + WS)
\end{aligned}$$

Este resultado es muy importante dado que genera un acoplamiento entre la parte simétrica del tensor con la parte antisimétrica, además notamos que este acoplamiento proviene de la no-linealidad de las ecuaciones. Reemplazando estos resultados llegamos a la ecuación para la parte antisimétrica del gradiente de velocidades,

$$\partial_t W_{ji} + v_k \partial_k W_{ji} + (S_{jk} W_{ki} + W_{jk} S_{ki}) = \nu \partial_k \partial_k W_{ji}$$

Por lo tanto tenemos,

$$\partial_t W_{ij} + v_k \partial_k W_{ij} = -(S_{ik} W_{kj} + W_{ik} S_{kj}) + \nu \partial_k \partial_k W_{ij} \quad (\text{A3.3})$$

Multiplicando A3.3 por ϵ_{mij} podemos obtener la siguiente ecuación para la vorticidad,

$$\partial_t \vec{\omega} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}$$

A4. Balance parcial de energía

Consideremos las ecuaciones de Navier-Stokes,

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{f}$$

Si aplicamos el filtro paso bajo definido en el capítulo 4 tenemos,

$$\partial_t \vec{u}_{k_0, <} + \hat{P}_{k_0, <} \left[(\vec{u}_{k_0, <} + \vec{u}_{k_0, >}) \cdot \vec{\nabla} \right] (\vec{u}_{k_0, <} + \vec{u}_{k_0, >}) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p_{k_0, <} + \nu \nabla^2 \vec{u}_{k_0, <} + \vec{f}_{k_0, <}$$

Al tomar el producto escalar con $\vec{u}_{k_0,<}$ y promediar tenemos,

$$\begin{aligned} & \langle \vec{u}_{k_0,<} \cdot \partial_t \vec{u}_{k_0,<} \rangle + \langle \vec{u}_{k_0,<} \cdot \hat{P}_{k_0,<} \left[(\vec{u}_{k_0,<} + \vec{u}_{k_0,>}) \cdot \vec{\nabla} \right] (\vec{u}_{k_0,<} + \vec{u}_{k_0,>}) \rangle \\ &= -\frac{1}{\rho} \langle \vec{u}_{k_0,<} \cdot \vec{\nabla} p_{k_0,<} \rangle + \nu \langle \vec{u}_{k_0,<} \cdot \nabla^2 \vec{u}_{k_0,<} \rangle + \langle \vec{u}_{k_0,<} \cdot \vec{f}_{k_0,<} \rangle \end{aligned}$$

Para el primer término tenemos,

$$\vec{u}_{k_0,<} \cdot \partial_t \vec{u}_{k_0,<} = \partial_t \left(\frac{1}{2} \vec{u}_{k_0,<}^2 \right)$$

Para el segundo término podemos aplicar la propiedad autoadjunta del operador y además es claro que $\hat{P}_{k_0,<} \vec{u}_{k_0,<} = \vec{u}_{k_0,<}$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \langle \vec{u}_{k_0,<} \cdot \hat{P}_{k_0,<} \left[(\vec{u}_{k_0,<} + \vec{u}_{k_0,>}) \cdot \vec{\nabla} \right] (\vec{u}_{k_0,<} + \vec{u}_{k_0,>}) \rangle \\ &= \langle \hat{P}_{k_0,<} \vec{u}_{k_0,<} \cdot \left[(\vec{u}_{k_0,<} + \vec{u}_{k_0,>}) \cdot \vec{\nabla} \right] (\vec{u}_{k_0,<} + \vec{u}_{k_0,>}) \rangle \\ &= \langle \vec{u}_{k_0,<} \cdot \left[(\vec{u}_{k_0,<} + \vec{u}_{k_0,>}) \cdot \vec{\nabla} \right] (\vec{u}_{k_0,<} + \vec{u}_{k_0,>}) \rangle \end{aligned}$$

y este producto se puede expandir como,

$$\begin{aligned} & \langle \vec{u}_{k_0,<} \cdot \left[(\vec{u}_{k_0,<} + \vec{u}_{k_0,>}) \cdot \vec{\nabla} \right] (\vec{u}_{k_0,<} + \vec{u}_{k_0,>}) \rangle \\ &= \langle \vec{u}_{k_0,<} \cdot \left[\vec{u}_{k_0,<} \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{u}_{k_0,<} \rangle + \langle \vec{u}_{k_0,<} \cdot \left[\vec{u}_{k_0,<} \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{u}_{k_0,>} \rangle \\ &+ \langle \vec{u}_{k_0,<} \cdot \left[\vec{u}_{k_0,>} \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{u}_{k_0,<} \rangle + \langle \vec{u}_{k_0,<} \cdot \left[\vec{u}_{k_0,>} \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{u}_{k_0,>} \rangle \end{aligned}$$

Ahora, para simplificar la notación denotamos las componentes de $\vec{u}_{k_0,<}$ como f_i y las de $\vec{u}_{k_0,>}$ como g_i , entonces tenemos para el primer término,

$$\begin{aligned} \langle f_i f_j \partial_j f_i \rangle &= \langle \partial (f_i f_j f_i) \rangle - \langle f_i \partial_j (f_i f_j) \rangle \\ &= -\langle f_i f_j \partial_j f_i \rangle - \langle f_i f_i \partial_j f_j \rangle \\ &= -\langle f_i f_j \partial_j f_i \rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto llegamos a $2\langle f_i f_j \partial_j f_i \rangle = 0 \implies \langle f_i f_j \partial_j f_i \rangle = 0$. En la segunda línea se utiliza la propiedad del promedio para funciones periódicas $\langle \partial_i f \rangle = 0$ ([51]) y en la tercera línea se utiliza la condición de incompresibilidad. Lo mismo se puede

realizar para el tercer término y llegamos a,

$$\langle \vec{u}_{k_0, <} \cdot [(\vec{u}_{k_0, <} + \vec{u}_{k_0, >}) \cdot \vec{\nabla}] (\vec{u}_{k_0, <} + \vec{u}_{k_0, >}) \rangle = \langle \vec{u}_{k_0, <} \cdot [\vec{u}_{k_0, <} \cdot \vec{\nabla}] \vec{u}_{k_0, >} \rangle + \langle \vec{u}_{k_0, <} \cdot [\vec{u}_{k_0, >} \cdot \vec{\nabla}] \vec{u}_{k_0, >} \rangle$$

Otras propiedades útiles son,

$$\langle (\partial_i f) g \rangle = -\langle f \partial_i g \rangle \quad \langle \vec{u} \cdot \nabla^2 \vec{u} \rangle = -\langle (\nabla \times \vec{u}) \cdot (\nabla \times \vec{u}) \rangle$$

Donde la segunda identidad es solo válida en el caso incompresible. De estas tenemos que, para el término de la presión (donde nuevamente f_i representa las componentes de la velocidad filtrada),

$$\langle f_i \partial_i p_{k_0, <} \rangle = -\langle p_{k_0, <} \partial_i f_i \rangle = 0$$

Donde en la última igualdad se utiliza la condición de incompresibilidad. Para el término que acompaña la viscosidad se tiene,

$$\nu \langle \vec{u}_{k_0, <} \cdot \nabla^2 \vec{u}_{k_0, <} \rangle = -\nu \langle \vec{\omega}_{k_0, <}^2 \rangle$$

Donde se utilizó una de las propiedades mencionadas anteriormente. Luego de esto, podemos escribir la ecuación de balance como,

$$\partial_t E_{k_0} + \Pi_{k_0} = -2\nu \Omega_{k_0} + W_{k_0} \quad (\text{A4.1})$$

Donde todas las cantidades son acumuladas desde $k = 0$ hasta k_0 , observamos que tenemos términos que corresponden a la disipación y al trabajo realizado por la fuerza externa, tal como en el balance global, pero ahora además tenemos el término Π_{k_0} ,

$$\Pi_{k_0} = \langle \vec{u}_{k_0, <} \cdot [\vec{u}_{k_0, <} \cdot \vec{\nabla}] \vec{u}_{k_0, >} \rangle + \langle \vec{u}_{k_0, <} \cdot [\vec{u}_{k_0, >} \cdot \vec{\nabla}] \vec{u}_{k_0, >} \rangle$$

A5. Ecuación de Karman-Howarth

Con el fin de obtener ésta ecuación consideremos la velocidad en dos puntos \vec{x} y $\vec{y} = \vec{x} + \vec{r}$. Denotando las componentes de la velocidad en estos puntos por v_i y v'_i , respectivamente (y las derivadas por ∂_i y ∂'_i), y multiplicando la ecuación de

Navier-Stokes por v'_j ,

$$v'_j \partial_t v_i + v'_j v_k \partial_k v_i = -\frac{1}{\rho} v'_j \partial_i p + \nu v'_j \partial_k \partial_k v_i$$

Ahora tomamos el promedio de la expresión anterior y la sumamos con la ecuación para las variables en \bar{x}' multiplicadas por v_i ,

$$\langle v'_j \partial_t v_i \rangle + \langle v_i \partial_t v'_j \rangle + \langle v'_j v_k \partial_k v_i \rangle + \langle v_i v'_k \partial'_k v'_j \rangle = -\frac{1}{\rho} \langle v'_j \partial_i p \rangle - \frac{1}{\rho} \langle v_i \partial'_j p \rangle + \nu \langle v'_j \partial_k \partial_k v_i \rangle + \nu \langle v_i \partial'_k \partial'_k v'_j \rangle$$

Esto se puede reescribir como,

$$\partial_t \langle v_i v'_j \rangle + \underbrace{\langle v_k \partial_k v_i v'_j \rangle + \langle v'_k \partial'_k v'_j v_i \rangle}_I = -\frac{1}{\rho} (\langle v'_j \partial_i p \rangle + \langle v_i \partial'_j p \rangle) + \nu (\langle \partial_k \partial_k v_i v'_j \rangle + \langle \partial'_k \partial'_k v'_j v_i \rangle)$$

Ahora, consideremos el término I ,

$$\begin{aligned} \langle v_k \partial_k v_i v'_j \rangle &= \partial_k \langle v_k v_i v'_j \rangle - \langle v_i v'_j \partial_k v_k \rangle \\ &= \partial_k \langle v_k v_i v'_j \rangle \end{aligned}$$

Donde se utiliza la condición de incompresibilidad. Lo mismo ocurre para el otro término denotado por I y reescribimos la ecuación como,

$$\partial_t \langle v_i v'_j \rangle + \partial_k \langle v_k v_i v'_j \rangle + \partial'_k \langle v'_k v'_j v_i \rangle = -\frac{1}{\rho} (\langle v'_j \partial_i p \rangle + \langle v_i \partial'_j p \rangle) + \nu (\partial_k \partial_k \langle v_i v'_j \rangle + \partial'_k \partial'_k \langle v'_j v_i \rangle)$$

El siguiente paso es aplicar las condiciones de isotropía y homogeneidad. Por la isotropía las correlaciones de la presión se anulan [98, 5]. Ahora, observamos que solo nos quedan correlaciones de 2 puntos, y para el caso homogéneo sabemos que éstas solo dependen de la distancia entre los puntos. Por lo tanto podemos hacer el reemplazo $(\partial_i, \partial'_i) \rightarrow (-\partial_{r_i}, \partial_{r_i})$. Entonces tenemos,

$$\partial_t \langle v_i v'_j \rangle + \partial_{r_i} \langle v'_k v'_j v_i \rangle - \partial_{r_i} \langle v_k v_i v'_j \rangle = 2\nu \partial_{r_i} \partial_{r_i} \langle v'_j v_i \rangle$$

O utilizando la notación de los tensores de correlación,

$$\partial_t R_{ij} + \partial_{r_i} R_{i,jk} - \partial_{r_i} R_{ik,j} = 2\nu \partial_{r_i} \partial_{r_i} R_{ij} \quad (\text{A5.1})$$

