



Universidad de Concepción
Dirección de Postgrado
Facultad de Ingeniería - Programa de Ingeniería Civil

Formulación del Método de los Puntos Finitos con Base Polinomial Incompleta de Quinto Orden y Función de Peso Spline para Problemas de Placas Delgadas

Tesis para optar al grado de Magister en Ciencias de la Ingeniería con
mención en Ingeniería Civil

GONZALO ENRIQUE ARCOS JARA
CONCEPCIÓN-CHILE
2015

Profesor Guía: Dr. Patricio Cendoya Hernández
Dpto. de Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería
Universidad de Concepción

RESUMEN

Los métodos sin malla son vistos como la próxima generación de técnicas computacionales, debido a su propiedad de prescindir del mallado inicial. Si bien el método sin malla de los puntos finitos (MPF) ha demostrado excelentes resultados para aplicaciones en el campo de la ingeniería estructural, la eficiencia de este método utilizando bases polinomiales incompletas y/o funciones de pesos *splines* no se conoce en detalle.

El objetivo de esta investigación fue analizar el método de los puntos finitos con una función de peso *spline* cuártica y una base polinomial de quinto orden para la solución de problemas de flexión de placas delgadas. Los resultados numéricos a nivel de esfuerzos y deflexiones se comparan con el MPF tradicional y con la solución analítica disponible en la literatura.

La metodología consistió en caracterizar teórica y matemáticamente el método de los puntos finitos para resolver problemas de flexión de placas delgadas, mediante una función de peso *spline* y una base polinomial incompleta de quinto orden. A continuación, se implementó computacionalmente el método de los puntos finitos propuesto y el tradicional, a los que se les realizó un estudio de convergencia con respecto a la solución analítica.

Los resultados obtenidos permiten concluir que el método de los puntos finitos es confiable y eficiente para la solución de problemas de flexión de placas delgadas mediante la función de peso *spline* cuártica y la base polinomial de quinto orden analizada, puesto que se obtuvieron buenos resultados con respecto a la solución teórica, incluso mejores que los obtenidos a través de la formulación tradicional del MPF.



Este trabajo está dedicado a mi familia y a Dios

AGRADECIMIENTOS

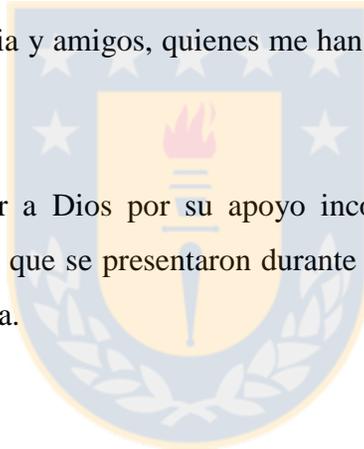
Quisiera agradecer a mi profesor guía el Dr. Patricio Cendoya por introducirme en el área de los métodos sin malla, por la confianza depositada en mí para el desarrollo de esta tesis, por su orientación y por el aporte realizado, sin el cual no habría sido posible llevar a buen término esta labor.

Agradezco al director del programa por sus consejos y motivación para terminar esta tesis.

Agradezco también a los miembros de la comisión evaluadora de la tesis, por el tiempo invertido en la supervisión de este trabajo.

Además, agradezco a mi familia y amigos, quienes me han acompañado y apoyado en esta etapa de mi vida.

Finalmente, quisiera agradecer a Dios por su apoyo incondicional, por darme fortaleza para superar los momentos difíciles que se presentaron durante esta tesis, sin la cual no podría haber culminado esta etapa de mi vida.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN.....	5
1.1 Motivación.....	5
1.2 Objetivos.....	6
1.2.1 Objetivo general	6
1.2.2 Objetivos específicos.....	6
1.3 Hipótesis de trabajo	6
1.4 Metodología de trabajo.....	7
1.5 Principales resultados y conclusiones.....	7
1.6 Organización de la Tesis.....	8
CAPÍTULO 2 TEORÍA CLÁSICA DE PLACAS DE KIRCHHOFF	9
2.1 Introducción.....	9
2.2 Teoría clásica de flexión de placas.....	9
2.3 Estado de desplazamientos	11
2.4 Campo de deformaciones unitarias	11
2.5 Estado de tensiones.....	12
2.6 Esfuerzos internos	13
2.7 Relación fuerza deformación.....	15
2.8 Ecuaciones de equilibrio.....	15
2.9 Condiciones de contorno	18
2.10 Conclusiones.....	20
CAPÍTULO 3 ANTECEDENTES DE LOS MÉTODOS SIN MALLA.....	21
3.1 Introducción.....	21
3.2 Definición.....	21
3.3 Origen y evolución de los métodos sin malla.....	22
3.4 Métodos sin mallas en problemas de placas.....	23
3.5 Categorías.....	24
3.6 Conclusiones.....	24
CAPÍTULO 4 FORMULACIÓN DEL MPF EN PROBLEMAS DE PLACAS	26
4.1 Introducción.....	26

4.2 Historia del método de los puntos finitos	26
4.3 Subdominios de discretización	27
4.4 Mínimos Cuadrados Móviles	28
4.5 Base polinomial propuesta	35
4.6 Función de ponderación	38
4.7 Derivabilidad de la matriz A	43
4.8 Obtención de ecuaciones de la discretización	46
4.9 Conclusiones.....	47
CAPÍTULO 5 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL.....	49
5.1 Introducción.....	49
5.2 Diagrama de flujo	49
5.3 Modelación.....	50
5.4 Conclusiones.....	55
CAPÍTULO 6 RESULTADOS.....	56
6.1 Introducción.....	56
6.2 Ejemplo 1.....	56
6.3 Ejemplo 2.....	60
6.4 Ejemplo 3.....	64
6.5 Ejemplo 4.....	68
6.6 Conclusiones.....	71
CAPÍTULO 7 CONCLUSIONES Y COMENTARIOS	73
REFERENCIAS	76
ANEXO 4.1: INVERTIBILIDAD DE MATRIZ A	82
ANEXO 4.2: INFLUENCIA DEL PARAMETRO ALFA EN SOPORTES.....	88

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 Placa plana a flexión	9
Figura 2.2 Deformaciones en el plano medio $x-z$ e $y-z$ de una placa.....	10
Figura 2.3 Momentos flectores de un elemento de placa	14
Figura 2.4 Momentos torsores de un elemento de placa	14
Figura 2.5 Esfuerzos cortantes de un elemento de placa.....	14
Figura 2.6 Equilibrio de fuerzas de un elemento de placa	16
Figura 2.7 Borde empotrado.....	18
Figura 2.8 Borde apoyado	19
Figura 2.9 Borde libre.....	19
Figura 3.1 Discretizaciones del dominio MSM.....	21
Figura 4.1 Definición de nubes de puntos	27
Figura 4.2 Nube de puntos.....	27
Figura 4.3 Triángulo de Pascal.....	29
Figura 4.4 Subdominio de aproximación	30
Figura 4.5 Triángulo de Pascal de la base polinomial propuesta	36
Figura 4.6 Subdominio de aproximación	37
Figura 4.7 Función de Gauss normalizada	40
Figura 4.8 Función <i>spline</i> cuártica	40
Figura 4.9 Representación de un problema de flexión de placas	46
Figura 5.1 Diagrama de flujo.....	49
Figura 5.2 Ingreso de coordenadas	50
Figura 5.3 Geometría de la placa.....	50
Figura 5.4 Generación de superficies	51
Figura 5.5 Ingreso del número de divisiones.....	51
Figura 5.6 Generación de grilla	51
Figura 5.7 Asignación de condiciones de borde.....	52
Figura 5.8 Asignación de material.....	52
Figura 5.9 Asignación de cargas.....	53
Figura 5.10 Visualización de resultados.....	55

Figura 6.1 Placa cuadrada empotrada en dos borde y simplemente apoyada en dos	56
Figura 6.2 Grillas de 250 y 953 puntos	57
Figura 6.3 Comparación deflexión en el centro	57
Figura 6.4 Comparación M_y máximo en el borde empotrado.....	58
Figura 6.5 Comparación M_x en el borde empotrado.....	58
Figura 6.6 Distribución de momentos flectores con 953 nodos	59
Figura 6.7 Tiempo computacional.....	59
Figura 6.8 Placa cuadrada con un borde libre y tres simplemente apoyados	60
Figura 6.9 Grillas de 248 y 617 puntos	61
Figura 6.10 Convergencia de deflexión máxima en el punto central del borde libre.....	61
Figura 6.11 Comparación M_x en el centro	62
Figura 6.12 Comparación M_x máximo en el punto central del borde libre.....	62
Figura 6.13 Distribución de momento flector en x para 833 puntos	63
Figura 6.14 Tiempo computacional.....	63
Figura 6.15 Placa circular con bordes empotrados.....	64
Figura 6.16 Grillas de 450 y 596 puntos	65
Figura 6.17 Convergencia de deflexión al centro.....	65
Figura 6.18 Comparación momento radial en el centro placa circular.....	66
Figura 6.19 Convergencia momento máximo en el empotramiento de placa circular	66
Figura 6.20 Distribución de momentos flectores para placa circular empotrada	67
Figura 6.21 Tiempo computacional.....	67
Figura 6.22 Placa con orificio empotrada en uno de sus lados.....	68
Figura 6.23 Grillas de 372 y 927 puntos	69
Figura 6.24 Comparación M_y en el punto B	69
Figura 6.25 Comparación deflexión en el punto A	70
Figura 6.26 Distribución de momentos flectores con 927 nodos	70
Figura 6.27 Tiempo computacional.....	71
Figura A.4.2.1 Parámetro alfa ejemplo 1.....	88
Figura A.4.2.2 Parámetro alfa ejemplo 2.....	88
Figura A.4.2.3 Parámetro alfa ejemplo 3.....	89
Figura A.4.2.4 Parámetro alfa ejemplo 4.....	89

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

1.1 Motivación

El desarrollo de métodos numéricos para la solución de problemas físicos definidos por ecuaciones diferenciales ordinarias es de gran ayuda para ingenieros, pues permite abordar aplicaciones ingenieriles de alta complejidad, que no podrían ser resueltas de forma analítica.

Dentro de los métodos numéricos más conocidos y exitosos para resolver problemas de ingeniería, se encuentra el método de los elementos finitos (MEF), el cual requiere de la generación de una malla inicial que discretice el dominio. En las últimas dos décadas diversos autores han propuesto métodos numéricos alternativos al MEF, los cuales no requieren de la generación de una malla inicial, ni de conectividad nodal. Dichas técnicas numéricas se denominan “métodos sin malla”.

En el caso particular del método sin malla de los puntos finitos (MPF), la aproximación local se obtiene mediante la técnica de mínimos cuadrados móviles (MCM). Además, utiliza colocación puntual para obtener el sistema de ecuaciones discretas, es decir, sólo se debe utilizar el conjunto de ecuaciones diferenciales sin necesidad de usar una formulación débil o realizar algún tipo de integración sobre el dominio.

Este método tradicionalmente es abordado mediante el uso de la función exponencial de Gauss como función de peso y bases polinomiales completas como funciones de aproximaciones. Sin embargo, este tipo de función de peso requiere de la calibración de sus parámetros para cada tipo de problema, una mala elección de estos puede afectar significativamente los resultados numéricos (Atluri y Zhu, 1998). El presente trabajo propone utilizar una función de peso tipo *spline*, puesto que sus constantes no deben ser calibradas (Liu y Gu, 2005) y utilizar una base polinomial incompleta de quinto orden, puesto que a diferencia de una de cuarto orden completo, ésta permite mantener la forma polinómica de las derivadas cuartas de las funciones de aproximación, lo cual disminuye el mal condicionamiento de las matrices, permitiendo evitar problemas en su inversión.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Proponer una solución aproximada para los campos de tensiones y desplazamientos en problemas de placas delgadas, a partir de una formulación de puntos finitos que considera una aproximación polinomial de quinto orden incompleto y función de ponderación del tipo *spline*.

1.2.2 Objetivos específicos

- Caracterizar teórica y matemáticamente la formulación del MPF propuesta y la tradicional para la solución de problemas de flexión de placas delgadas.
- Implementar un algoritmo en MATLAB® que permita solucionar los casos de estudios de problemas de flexión de placas delgadas mediante ambas formulaciones analizadas.
- Analizar el efecto en la precisión y convergencia de la formulación propuesta (función *spline* y base de aproximación de quinto orden incompleta) a nivel de esfuerzos y deflexiones de los casos de prueba.

1.3 Hipótesis de trabajo

El uso de una base polinomial incompleta de quinto orden y de una función de peso *spline* cuártica en la formulación del MPF permite mejorar la aproximación numérica en problemas de flexión de placas delgadas.

1.4 Metodología de trabajo

En primer lugar, se realiza una revisión del estado del arte de los MSM, para dar paso al estudio de los principales conceptos del MPF aplicado a problemas de flexión de placas delgadas. Posteriormente, se plantea una mejora de la formulación tradicional mediante la utilización de una base de aproximación polinomial incompleta de quinto orden y una función de peso del tipo *spline* cuártica para la obtención de la aproximación de las deflexiones, lo cual se implementa en un código MATLAB®, para obtener los esfuerzos y deflexiones en una placa delgada. Además, se implementa la formulación tradicional del MPF (aproximación de cuarto orden completa y función de peso exponencial de Gauss) con la finalidad de comparar ambas formulaciones. Una vez concluido lo anterior, se realizan estudios de convergencia con los algoritmos desarrollados para diferentes ejemplos numéricos, los cuales se compararon con respecto a la solución analítica a nivel de esfuerzos y deflexiones.

1.5 Principales resultados y conclusiones

Se propone una formulación de puntos finitos que considera una aproximación polinomial de quinto orden incompleta y función de ponderación del tipo *spline*, en vez de la formulación tradicional (función exponencial de Gauss como función de peso y bases polinomiales completas). La importancia de utilizar una función de peso del tipo *spline* es que no se requiere de la calibración de sus parámetros para cada tipo de problema, puesto que sus constantes son obtenidas de forma teórica. Además, el utilizar una base polinomial incompleta de quinto orden, permite mantener la forma polinómica de las derivadas cuartas de las funciones de aproximación, disminuyendo el mal condicionamiento de las funciones de forma, permitiendo de esta manera evitar problemas en su inversión.

Se analizan diversos problemas de flexión de placas, utilizando la formulación del MPF tradicional y la propuesta en este trabajo para diferentes grillas de puntos, así como también diferentes condiciones de borde y geometría.

Los resultados obtenidos permiten concluir que las modificaciones realizadas sobre la formulación base del MPF mejoran la respuesta numérica. Lo anterior, se debe a que la base incompleta de quinto orden propuesta mantiene la forma polinómica de las derivadas cuartas de las funciones de forma. Además, la función de peso *spline* cuártica se ajusta de mejor manera al problema de flexión de placas que una función de peso del tipo exponencial, dado que dicho problema está gobernado por una ecuación diferencial de cuarto orden. Se observa que los resultados más exactos han sido obtenidos por el incremento del número de puntos, lo cual indica la convergencia del método.

1.6 Organización de la Tesis

La tesis se estructura en siete capítulos. El Capítulo 2 describe la teoría de flexión de placas delgadas. El Capítulo 3 presenta un estado del arte de los métodos sin mallas. En el Capítulo 4 se aborda la formulación matemática del método de los puntos finitos para resolver problemas de flexión de placas delgadas mediante dos bases de aproximaciones y funciones de pesos. En el Capítulo 5 se presenta la rutina implementada en MATLAB® que permite solucionar problemas de flexión de placas delgadas mediante las formulaciones del MPF analizadas en este trabajo. En el Capítulo 6 se realiza un análisis de convergencia de una serie de ejemplos a través de la rutina implementada. Finalmente, en el Capítulo 7 se presentan las conclusiones obtenidas en la investigación, definiendo además, líneas futuras de investigación.

CAPÍTULO 2 TEORÍA CLÁSICA DE PLACAS DE KIRCHHOFF

2.1 Introducción

En este capítulo, se presenta un resumen de la teoría de placas de Kirchhoff y Love (1850). Específicamente, se presenta una revisión de los principales conceptos de la teoría de flexión de placas delgadas, así como también sus ecuaciones gobernantes con sus correspondientes deducciones.

2.2 Teoría clásica de flexión de placas

Una placa se define como un sólido paralelepípedo, en el cual una de sus dimensiones (espesor h) es mucho menor que las dimensiones transversales del dominio (a y b), sobre el cual actúan cargas exteriores perpendiculares al plano medio de la placa, o bien momentos contenidos en dicho plano (Figura 2.1).

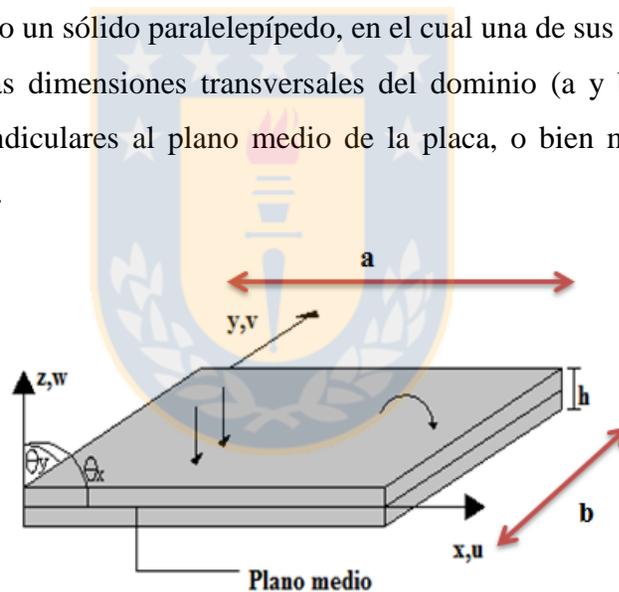


Figura 2.1 Placa plana a flexión

La teoría clásica de Kirchhoff y Love (1850) que corresponde a la de flexión de placas delgadas, introduce las hipótesis que permiten simplificar el problema a dos dimensiones. A continuación, se presentan los principales supuestos de esta teoría.

-Las secciones rectas perpendiculares al plano medio de la placa permanecen rectas y perpendiculares a dicho plano medio durante la deformación de la placa,

- El espesor de placa es pequeño comparado con sus otras dimensiones. El lado menor de la placa es a lo menos diez veces mayor que el espesor h ,
- Los puntos del plano medio sólo se mueven verticalmente. Por lo que se tiene $u=v=0$,
- Todos los puntos contenidos en una normal al plano medio tienen el mismo desplazamiento vertical w
- La tensión normal σ_z es despreciable.

Como consecuencia de los supuestos planteados anteriormente, el giro que sufre una sección recta perpendicular al plano medio de la placa es igual a la pendiente de dicho plano medio (Figura 2.2). Es decir, los giros de la sección recta se pueden considerar iguales a las derivadas de la flecha “ w ” respecto a x e y . Por lo tanto, es posible considerar la flecha $w(x,y)$ como única incógnita de desplazamiento.

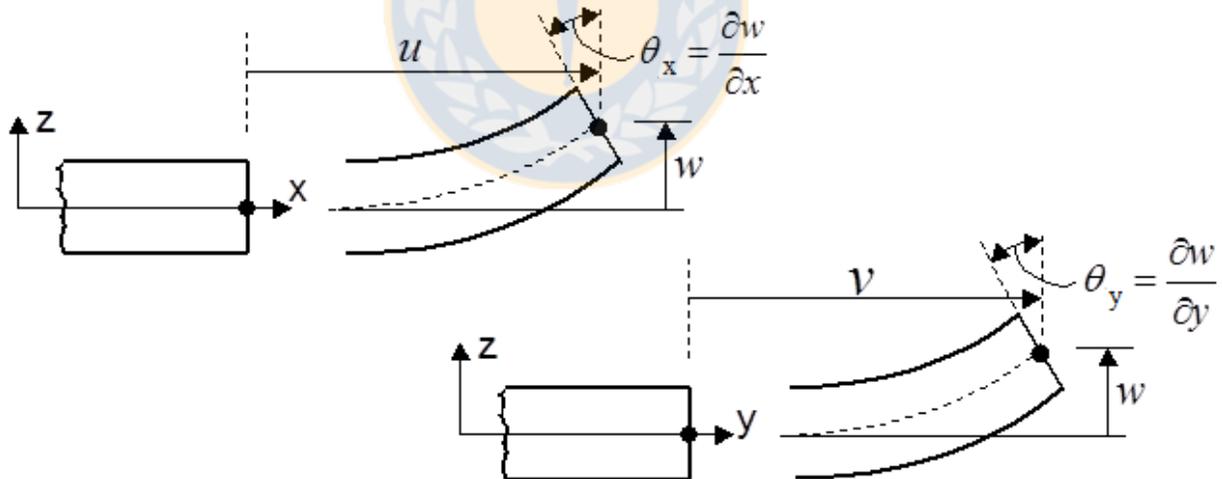


Figura 2. 2 Deformaciones en el plano medio $x-z$ e $y-z$ de una placa

2.3 Estado de desplazamientos

En la Figura 2.2, se observa que un punto situado en el plano medio de la placa, sólo tiene un desplazamiento vertical w en la dirección z . No obstante, los puntos que están fuera del plano medio experimentan además desplazamientos laterales u , v en las direcciones x , y , que son debidas al giro de la normal a la placa.

De esta forma, se deduce que los desplazamientos laterales corresponden a lo siguiente:

$$u = -z \cdot \theta_x \quad y \quad v = -z \cdot \theta_y, \quad (2.1)$$

de acuerdo a las simplificaciones planteadas por Kirchhoff para pequeñas deformaciones, los giros de la sección recta se pueden considerar iguales a las derivadas de la flecha (w) respecto a x e y . De esta forma, los desplazamientos u , v de un punto cualquiera están dados por:

$$u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \quad y \quad v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (2.2)$$

2.4 Campo de deformaciones unitarias

Las deformaciones unitarias en un punto cualquiera de la placa corresponden a:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad y \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad (2.4)$$

Es necesario recalcar que las deformaciones de cortantes verticales (γ_{xz} y γ_{yz}) son nulas, puesto que no contribuyen a la deformación de la placa. Por otro lado, no es necesario considerar la deformación ε_z en el análisis, debido a que el trabajo de deformación realizado por el producto

$\sigma_z \cdot \varepsilon_z$ es nulo, ya que σ_z lo es. Luego, se puede reemplazar la Ecuación 2.2 en las expresiones de las deformaciones unitarias obteniendo lo siguiente:

$$\varepsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \varepsilon_y = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (2.5)$$

$$\gamma_{xy} = -2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (2.6)$$

De esta manera, las deformaciones unitarias no nulas tienen una distribución lineal que está dada por el siguiente vector:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \cdot \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = z \cdot \tilde{\mathbf{b}}, \quad (2.7)$$

donde $\tilde{\mathbf{b}}$ representa el vector de curvaturas de la superficie media.

2.5 Estado de tensiones

El estado de tensiones correspondiente al plano de placa está dado por el vector $\underline{\sigma}$, mientras que el vector $\underline{\tau}$ posee las tensiones cortantes perpendiculares a dicho plano:

$$\underline{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T, \quad (2.8)$$

$$\underline{\tau} = [\tau_{xz}, \tau_{yz}]^T, \quad (2.9)$$

Como se trata de un estado de tensión plana ($\sigma_z=0$) y de un material isótropo se puede relacionar las tensiones con las deformaciones unitarias de la siguiente forma:

$$\underline{\sigma} = \frac{1}{1-\nu^2} \cdot \begin{pmatrix} E & \nu \cdot E & 0 \\ \nu \cdot E & E & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu^2) \cdot G \end{pmatrix} \cdot \underline{\varepsilon} = D \cdot \underline{\varepsilon}, \quad (2.10)$$

donde D es la matriz constitutiva y $\underline{\varepsilon}$ el vector de deformaciones unitarias obtenidas en 2.7.

2.6 Esfuerzos internos

El vector de esfuerzos internos (fuerzas y momentos) se obtiene como la integral de las tensiones a lo largo del espesor t de la placa.

Momentos flectores: Corresponden al momento estático de las tensiones con respecto al plano medio de la placa por unidad de ancho (Figura 2.3).

Momentos torsores: Corresponden al momento estático de las tensiones cortantes situadas en el plano de la placa, respecto al plano medio de la misma por unidad de ancho (Figura 2.4).

Luego, el vector de momentos se define de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \cdot \underline{\sigma} dz, \quad (2.11)$$

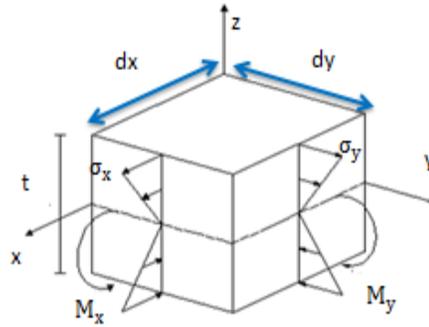


Figura 2. 3 Momentos flectores de un elemento de placa

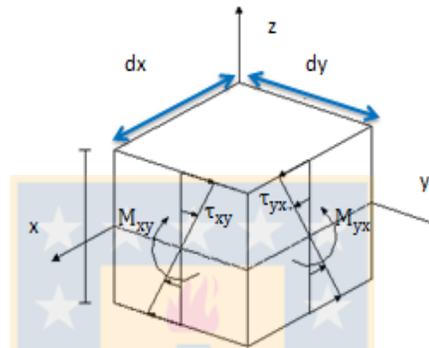


Figura 2. 4 Momentos torsores de un elemento de placa

Esfuerzos cortantes: Corresponden a la resultante de las tensiones cortantes transversales a la placa (Figura 2.5).

$$\begin{Bmatrix} Q_{zx} \\ Q_{zy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau dz, \tag{2.12}$$

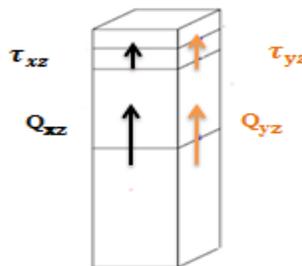


Figura 2. 5 Esfuerzos cortantes de un elemento de placa

2.7 Relación fuerza deformación

Reemplazando la expresión de $\underline{\sigma}$ en la Ecuación 2.11 se obtiene el siguiente vector:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -D \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (2.13)$$

Por otro lado, los esfuerzos cortantes se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} Q_{zx} \\ Q_{zy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau dz = -D \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \end{Bmatrix}, \quad (2.14)$$

2.8 Ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio de una placa se obtienen mediante el equilibrio estático de un elemento infinitesimal de placa sobre el que actúan los esfuerzos internos (fuerzas de corte y momentos), así como también una carga uniformemente distribuida $q(x,y)$ (Figura 2.6).

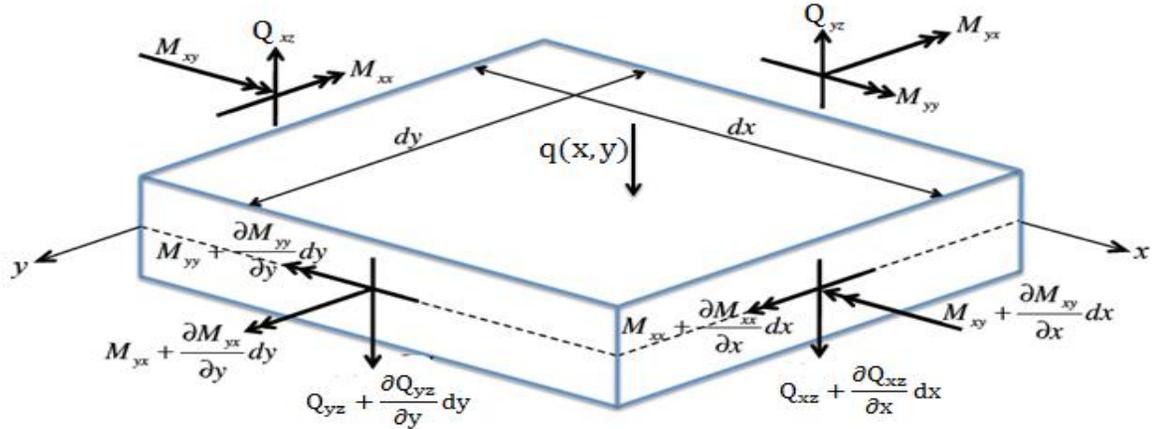


Figura 2. 6 Equilibrio de fuerzas de un elemento de placa

Al realizar equilibrio de fuerzas en el eje z se obtiene:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(\frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx + q dx dy = 0, \quad (2.15)$$

Si se simplifican los términos diferenciales se obtiene:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0, \quad (2.16)$$

Al realizar equilibrio de momentos de un elemento de placa (Figura 2.6), se obtiene:

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dx dy - \left(\frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} + q dx dy \frac{dx}{2} = 0 \quad (2.17)$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx dy - \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dy}{2} + q dx dy \frac{dy}{2} = 0 \quad (2.18)$$

Despreciando los términos de segundo orden se obtiene:

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad (2.20)$$

Derivando 2.19 y 2.20 para x e y, respectivamente se obtiene:

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Q_x}{\partial x} = 0, \quad (2.22)$$

Las dos ecuaciones anteriores se reemplazan en la Ecuación 2.16 obteniendo:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q, \quad (2.23)$$

Sustituyendo los momentos en función de la flecha dados por la Ecuación 2.14 se obtiene la ecuación diferencial que gobierna un problema de placas:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{q}{D} \quad \text{con} \quad D = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}, \quad (2.24)$$

donde t es el espesor, E es el módulo de elasticidad, y ν corresponde al módulo de Poisson.

2.9 Condiciones de contorno

Adicionalmente a la generación de la ecuación gobernante de un problema de flexión placas, es necesario imponer las condiciones en los bordes. Las condiciones de contorno se diferencian de acuerdo al tipo de apoyo.

a) Borde empotrado

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{y} \quad w = 0, \quad (2.25)$$

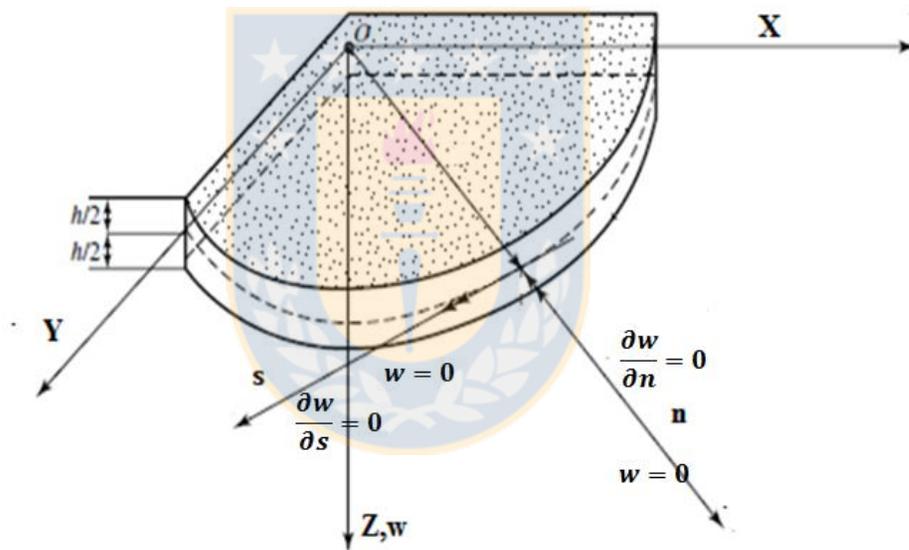


Figura 2. 7 Borde empotrado

b) Contorno apoyado

$$M_n = \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right) = 0 \quad \text{y} \quad w = 0, \quad (2.26)$$

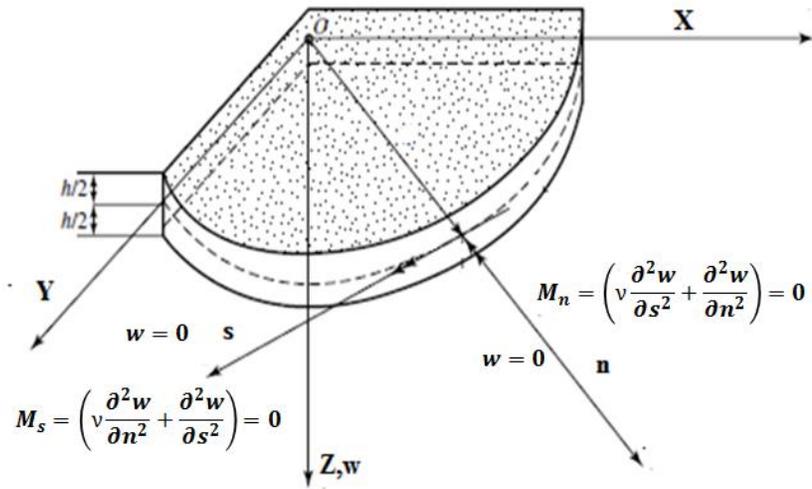


Figura 2. 8 Borde apoyado

c) Borde libre

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n^3} \right) = 0 \quad \text{y} \quad M_n = \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right) = 0, \quad (2.27)$$

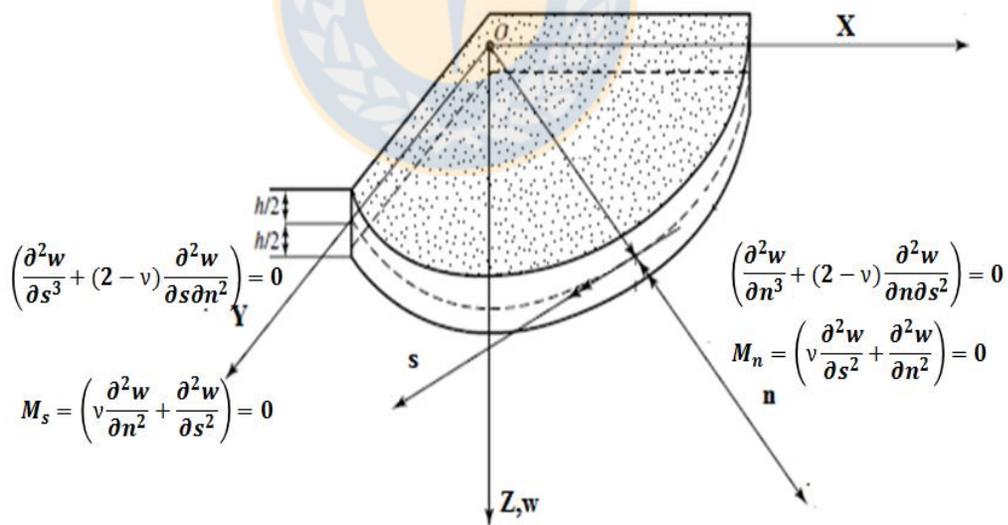


Figura 2. 9 Borde libre

2.10 Conclusiones

Durante este capítulo se expusieron los principales conceptos de la teoría de flexión de placas delgadas y se presentaron sus ecuaciones gobernantes. Las hipótesis de la teoría de placas de Kirchhoff plantean que el giro que sufre una sección recta perpendicular al plano medio de la placa es igual a la pendiente de dicho plano medio. Por lo que los giros se pueden considerar iguales a las derivadas de la flecha respecto a x e y . Lo anterior, permite considerar la flecha como única incógnita de desplazamiento. Además, los supuestos planteados permiten simplificar el problema a dos dimensiones, tratándose como un problema de tensión plana.



CAPÍTULO 3 ANTECEDENTES DE LOS MÉTODOS SIN MALLA

3.1 Introducción

En este capítulo se expone el estado del arte de los MSM, el que comienza con la definición y principales características de estas técnicas numéricas. Se describe los inicios y evolución de los métodos sin malla. Además, se presenta su categorización de acuerdo al tipo de formulación.

3.2 Definición

Un método sin malla (MSM) se define según Liu (2010) como un método numérico utilizado para establecer un sistema a de ecuaciones de un problema que considera un dominio completo sin el uso de una malla predefinida para el dominio de discretización.

La base de los MSM es la representación del dominio de discretización mediante un conjunto finito de nodos repartidos arbitrariamente tanto en sus contornos como en su dominio interior (Figura 3.1). Este conjunto de puntos son denominados nodos de estado, los cuales no requieren de la definición de conectividad nodal para la obtención de la aproximación local de la función incógnita.

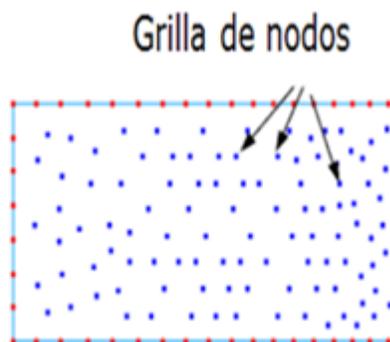


Figura 3.1 Discretizaciones del dominio MSM (Liu y Gu, 2005)

3.3 Origen y evolución de los métodos sin malla

Los primeros antecedentes de los métodos sin malla se remontan a los años 70, mediante el trabajo desarrollado por Lucy (1977) para modelar problemas de astrofísica a través del método partículas suavizadas (MPS). Luego, Liszka y Orkisz (1980) propuso el método de las diferencias finitas generalizadas (DFG), el cual utiliza una formulación fuerte (no realiza integración, utiliza directamente las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema) y el método de los mínimos cuadrados móviles (MCM) para obtener la aproximación de la función incógnita.

Nayroles *et al.* (1992) desarrollaron el método de los elementos difusos (MED), el cual utiliza una formulación débil (realiza integración sobre las ecuaciones del problema) y el MCM para obtener la aproximación de la función incógnita, siendo este método una generalización del método de los elementos finitos (MEF). Belystchko *et al.* (1994) refinaron las características del MED y desarrollaron el método de los elementos libres de Galerkin (MELG), el cual es el método sin malla más popular. Además, este método se basa en una formulación débil que utiliza el MCM para aproximar las funciones de formas y multiplicadores de Lagrange para imponer las condiciones de borde.

Duarte y Oden (1996) desarrollaron el método de los elementos de partición de la unidad (MEPU), el cual se basa en una formulación débil y en considerar las funciones de forma generadas mediante MCM como un caso particular de la partición de la unidad.

Por otro lado, se desarrollaron de manera continuada dos métodos basados en formulación fuerte, que corresponden a el método de los puntos finitos (MPF) y el método de las partículas de reproducción kernel (MPRK) que fueron desarrollados por Oñate *et al.* (1996) y Liu *et al.* (1995), respectivamente.

Atluri y Zhu (1998) propusieron el método sin malla local Petrov-Galerkin (MLPG), el cual utiliza una formulación débil a nivel local enés de una global. Además, Atluri y Zhu (2000) desarrollaron el método de las ecuaciones integrales de borde locales (MEIBL), el cual permitía

evaluar integrales de manera más sencilla, debido a que éstas son evaluadas en círculos en 2D y esferas en 3D.

Posteriormente, Wang y Liu (2002) propusieron el método de interpolación puntual radial (MIPR), que utiliza bases radiales en vez de bases polinomiales, como lo hacen la mayoría de los demás métodos. Lam *et al.* (2004) desarrollaron el método local Kriging (LK) que permitió obtener la propiedad de Kronecker mediante una interpolación basada en el método de kriging.

A continuación, Wang *et al.* (2005) desarrollaron el método de los puntos mínimos cuadrados ponderados (MPMCP) para aplicarlo en problemas de mecánica en dos dimensiones. Afshar y Lashckarbolok (2008) desarrollaron el método de los mínimos cuadrados discretos (MCD) para resolver problemas de mecánica de fluidos. Posteriormente, se han desarrollado nuevos métodos, los cuales consisten en variaciones sobre las funciones de aproximación, como por ejemplo las cuatro nuevas variantes que propusieron Abdollahifar *et al.* (2012) para el método Sin Malla Local Petrov-Galerkin (MLPG), denominados MLPG1, MLPG2, MLPG5 y MLPG6. Finalmente, Cao *et al.* (2014) desarrollaron el método de interpolación puntual nodal-radial ponderado (MIPNRP) para resolver problemas de mecánica de sólidos.

3.4 Métodos sin mallas en problemas de placas

Krysl y Belytschko (1995) desarrollaron por primera vez el método de los elementos libres de Galerkin (MELG) para resolver problemas de placas delgadas. A continuación, Gu y Liu (2001) y Long y Alturi (2002) extendieron el método sin malla local Petrov-Galerkin para la solución de problemas de flexión de placas delgadas. Además, este método fue utilizado por Chen *et al.* (2003) para análisis de placas compuestas por más de un material. Posteriormente, Liu *et al.* (2006) propusieron un método sin malla basado en funciones de interpolaciones radiales del tipo Hermite para resolver problemas de placas de Kirchhoff. Además, Cui *et al.* (2011) realizaron mejoras en dicho tipo de interpolación para resolver el mismo problema de análisis de estructuras. Por otro lado, Bui y Nguyen (2009) utilizaron interpolaciones basadas en kriging móvil, el cual a diferencia de la mayoría de los métodos sin malla posee la propiedad de delta de

Kronecker. Luego, Bitaraf y Mohammadi (2010) utilizaron el método de los puntos finitos para solucionar problemas de placas de grandes deformaciones. Finalmente, Oh *et al.* (2012) utilizaron el método de las partículas para la modelación de placas delgadas obteniendo resultados satisfactorios para diferentes condiciones de borde y carga.

3.5 Categorías

Los métodos sin malla pueden ser clasificados en dos grandes categorías (Li y Liu ,2002): Métodos sin malla basados en formulación fuerte y débil.

Métodos sin malla basados en formulación fuerte: Este tipo de método utiliza directamente las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema y las condiciones de borde sin realizar ningún tipo de integración. Para ello se utiliza la técnica de colocación puntual para la obtención del sistema de ecuaciones. Dentro de este tipo de método se encuentran: MPF (Oñate *et al.*, 1996), DFG (Liszka, 1980), etc.

Métodos sin malla basados en formulación débil: Este tipo de método transforma las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema a un conjunto de integrales mediante diferentes técnicas dependiendo del método usado. La solución al sistema se realiza a través de la obtención de un conjunto de ecuaciones mediante integración numérica, éste sistema puede ser construido ya sea a nivel local como global. Dentro de este tipo de método se encuentran: MED (Nayroles *et al.*, 1992), MELG (Belystchko *et al.*, 1994), MIPR (Wang y Liu ,2002), MLPG (Atluri *et al.*, 1998), MEPU (Duarte *et al.*, 1996), etc.

3.6 Conclusiones

En este capítulo, se presentaron las características, clasificación, inicios y evolución de los métodos sin mallas.

Estas técnicas numéricas comprenden una serie de métodos utilizados para resolver ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de contorno, a partir de distribuciones de nodos regulares o irregulares. Este conjunto de nodos no requiere de la definición de conectividad nodal para la obtención de la aproximación de la función incógnita.

Los métodos sin malla se clasifican en dos grandes categorías: métodos sin malla de formulación débil y fuerte. El método de los puntos finitos se categoriza como un método sin malla de formulación fuerte, puesto que utiliza directamente las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema y las condiciones de borde para obtener el sistema de ecuaciones sin realizar ningún tipo de integración.

Una vez expuesto lo anterior, se procede a plantear en el siguiente capítulo las bases teóricas del método analizado en esta investigación que corresponde al método de los puntos finitos.



CAPÍTULO 4 FORMULACIÓN DEL MPF EN PROBLEMAS DE PLACAS

4.1 Introducción

En este capítulo se describe la formulación del método de puntos finitos (MPF) propuesta en este trabajo (base de aproximación de quinto orden incompleta y función de peso *spline*) para la aplicación de problemas de flexión de placas delgadas. En primer lugar, se realiza un análisis del estado del arte del MPF, para luego pasar a una descripción de la formulación matemática del MPF. Los conceptos involucrados en este capítulo se sustentan en la teoría de los métodos sin malla y en la teoría clásica de placas delgadas presentada en capítulos anteriores.

4.2 Historia del método de los puntos finitos

El método de los puntos finitos fue propuesto por Oñate *et al.* (1996) para la solución de problemas de mecánica de fluidos y transporte convectivo. A continuación, Oñate y Idelsohn (1998) utilizaron el método para el análisis de transporte difusivo advectivo y Oñate *et al.* (2000) lo aplicaron para problemas de flujo incompresible.

En el ámbito de la ingeniería estructural Oñate *et al.* (2001) desarrollaron el método para resolver problemas de elasticidad y Perazzo *et al.* (2004) para problemas de dinámica de sólidos. A continuación, Bitaraf y Mohammadi (2005) utilizaron el MPF para resolver problemas de flexión de placas para geometrías y condiciones de borde sencillas. Por otro lado, Bitaraf y Mohammadi (2008) utilizaron el método para predecir el tiempo de inicio de la corrosión de estructuras de hormigón armado. Posteriormente, Bitaraf y Mohammadi (2010) desarrollaron el método para placas con grandes desplazamientos. A continuación, Pérez *et al.* (2011) simulaban el comportamiento no-lineal de materiales utilizando el método sin malla de puntos finitos. Finalmente, Pérez *et al.* (2012) desarrollaron una metodología basada en un algoritmo genético, que utiliza metaheurísticas poblacionales para la corrección de subdominios de interpolación.

4.3 Subdominios de discretización

El dominio del problema se discretiza mediante un conjunto finito de puntos, tanto en sus bordes como el dominio interior. Es de vital importancia definirlos adecuadamente, puesto que el método no obtiene más información que la entregada en dichos nodos. A continuación, sobre cada uno de estos nodos se construye una nube de puntos o subdominio Ω_i , tal como se aprecia en figuras 4.1 y 4.2, nube que puede adoptar distintas formas y tamaños. Sin embargo, la forma más simple consiste en construirlas como un dominio circular centrada en un punto denominado nodo estrella, mientras que el resto de los puntos se denominan nodos vecinos (ver Figura 4.2). De Figura 4.1, se aprecia que un mismo nodo puede ser estrella o vecino dependiendo de la nube en que se encuentre.

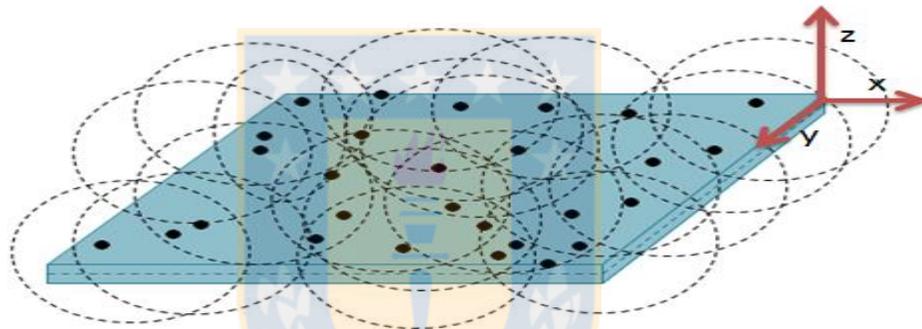


Figura 4.1 Definición de nubes de puntos

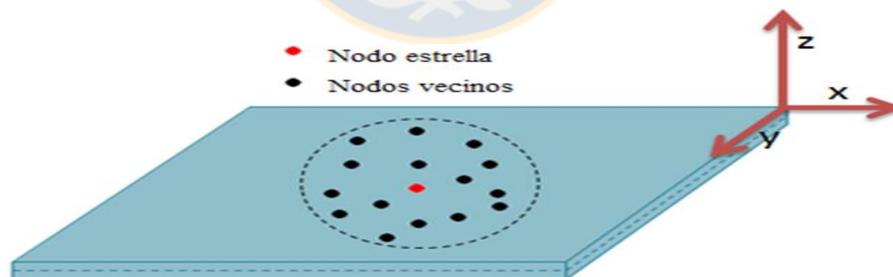


Figura 4.2 Nube de puntos

El número de nodos que contiene cada nube de puntos debe ser al menos igual al número de elementos de la base de aproximación, en caso contrario, el sistema tendrá infinitas soluciones.

Las nubes de puntos son esenciales en los métodos sin mallas y existen diversas formas de definirlos. No obstante, la forma más sencilla de determinarlas es mediante la técnica de la mínima distancia, en la que los puntos están contenido en un subdominio circular, el cual está centrado en el nodo estrella. El radio de la nube debe ser al menos de un tamaño que asegure la inclusión de tantos puntos como elementos tenga la base polinomial que se elija. Otra forma de construir los subdominios es exigiendo que contengan exactamente una cierta cantidad de nodos, lo cual se efectúa incluyendo los nodos más cercanos hasta que la nube contenga la cantidad deseada. Una tercera técnica de construcción de nubes de puntos corresponde a la triangulación de Delaunay, la cual permite obtener los mejores nodos cercanos de manera de obtener nubes óptimas. Más detalles de esta técnica se pueden encontrar en el trabajo que realizaron Löhner *et al.*(2002).

4.4 Mínimos Cuadrados Móviles

En el MPF la aproximación local se obtiene mediante la técnica de los mínimos cuadrados móviles (MCM), la cual fue propuesta por Lancaster y Salkauskas (1981). No obstante, Nayroles *et al.* (1992) fueron los primeros en utilizarlos como técnica de aproximación en métodos sin malla.

Considérese un subdominio Ω_i de interpolación para la variable de estado $w(x,y)$ (flecha) en un conjuntos de n puntos cuyas coordenadas $\in \Omega_i$. El subíndice “ i ” indica el nodo en torno al cual se realiza la aproximación de la nube. La función incógnita $w(x,y)$ puede ser aproximada en el subdominio Ω_i de la siguiente forma:

$$w(x, y) \cong \hat{w}(x, y) = \sum_{k=1}^m p_k(x, y) \cdot \alpha_k(x, y), \quad (4.1)$$

donde $\alpha_k(x, y)$ ($k=1,2,\dots,m$) son los coeficientes a determinar y $p_k(x, y)$ es la base de interpolación.

Es común utilizar bases polinómicas como base de aproximación debido a su sencillez para derivarlas. Las bases completas o convencionales de orden k para un caso bidimensional están definidas de acuerdo a la Ecuación 4.2, para más claridad de este concepto considérese el triángulo de Pascal de la Figura 4.3:

$$p^T(\mathbf{x}) = p^T(x, y) = [1, x, y, xy, x^2, y^2, \dots, x^k, y^k], \tag{4.2}$$

Es necesario recalcar que la inclusión del término constante dentro de la base es obligatoria, debido a que éste término es el que asegurará que las funciones de forma generadas mediante MCM sean particiones de la unidad (Duarte *et al.*, 1996).

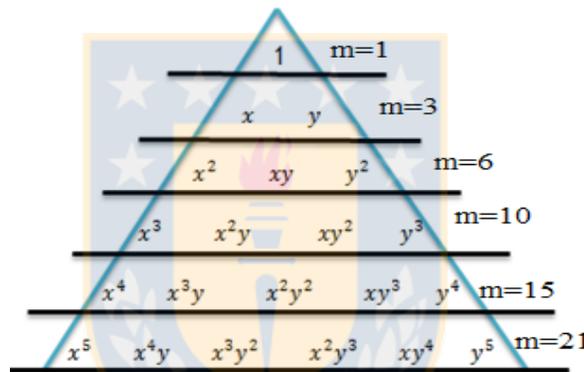


Figura 4.3 Triángulo de Pascal

Para el caso de un problema de flexión de placas, la base de aproximación debe ser como mínimo de cuarto orden, dado que el problema está gobernado por una ecuación diferencial de cuarto orden.

En la Ecuación 4.3, se presenta la base completa de cuarto orden, utilizada por Bitaraf y Mohammadi (2010) y Arcos (2014) para problemas de flexión de placas.

$$p^T(\mathbf{x}) = p^T(x, y) = [1, x, y, xy, x^2, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4], \tag{4.3}$$

Es necesario recalcar que para evitar el mal condicionamiento de las matrices que se requieren invertir, es conveniente expresar la base polinómica de interpolación en coordenadas adimensionales y en forma local, es decir, centrada en el nodo estrella “i” (Perazzo *et al.* 2006).

De esta manera, la base polinomial se expresa de la siguiente forma:

$$p^T(\bar{x}) = [1, Dx, Dy, Dx Dy, Dx^2, Dy^2, Dx^3, Dx^2 Dy, Dx Dy^2, Dy^3, Dx^4, Dx^3 Dy, Dx^2 Dy^2, Dx Dy^3, Dy^4], \tag{4.4}$$

con

$$Dx = \left(\frac{x_i - x_j}{dx_{max}}\right), \quad Dy = \left(\frac{y_i - y_j}{dy_{max}}\right), \quad \bar{x} = (x, y),$$

donde $\bar{x}_i = (x_i, y_i)$ son las coordenadas del nodo estrella i, mientras que $\bar{x}_j = (x_j, y_j)$ son las coordenadas de un nodo j. Las distancias dx_{max} y dy_{max} corresponden a las componentes de la distancia máxima $d_i^{m\acute{a}x}$ de cada subdominio Ω_i , es decir, la distancia entre el nodo estrella y nodo vecino más alejado de la nube.

Para mayor claridad de este concepto se presenta la siguiente Figura:

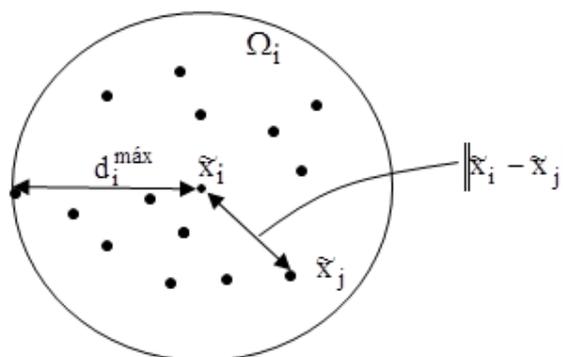


Figura 4.4 Subdominio de aproximación

La función $w(x,y)$ puede ser evaluada en los “n” puntos del subdominio Ω_i , obteniendo:

$$\begin{bmatrix} w(\mathbf{x}_1) \\ w(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ w(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \hat{w}(\mathbf{x}_1) \\ \hat{w}(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ \hat{w}(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1(\mathbf{x}) \\ \alpha_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \alpha_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

donde $w(\mathbf{x}_j)$ son desplazamientos incógnitos, los cuales se aproximan por $\hat{w}(\mathbf{x}_j)$.

En el MPF, si el número de puntos en el subdominio Ω_i es mayor que el número de elementos de la base interpolación, la aproximación no se puede ajustar a todos los valores de $w(\mathbf{x}_j)$. Este problema puede ser resuelto determinando los valores de $\hat{w}(\mathbf{x}_j)$ que minimicen la suma de las distancias al cuadrado o error en cada punto ponderado por una función de peso. Los coeficientes incógnitos $\alpha(x,y)$ son determinados mediante la técnica de los mínimos cuadrados móviles. Para ello, se minimiza el error cometido en el subdominio, el cual está dado por:

$$e = \|\hat{w}(\mathbf{x}) - w(\mathbf{x})\|, \quad (4.6)$$

donde “ $\|\cdot\|$ ” corresponde a la norma de funciones en el subdominio de aproximación Ω_i .

Análogamente el error se puede definir como el siguiente producto interior:

$$e = \sqrt{\langle \hat{w}(\mathbf{x}) - w(\mathbf{x}) | W(\mathbf{x}) | \hat{w}(\mathbf{x}) - w(\mathbf{x}) \rangle}, \quad (4.7)$$

$$e = \left[\int_{\Omega_i} W(\mathbf{x}) \cdot (\hat{w}(\mathbf{x}) - w(\mathbf{x}))^2 d\Omega \right]^{1/2}, \quad (4.8)$$

donde $W(\mathbf{x})$ es una función de ponderación definida positiva.

La expresión anterior se puede transformar en una discreta. Para ello sólo se requiere de la transformación de la integral en una sumatoria:

$$e = \left[\sum_{j=1}^n W(\mathbf{x}_j) \cdot (\hat{w}(\mathbf{x}_j) - w(\mathbf{x}_j))^2 \right]^{1/2}, \quad (4.9)$$

La minimización del error se obtiene al minimizar el siguiente funcional:

$$e^2 \equiv J = \sum_{j=1}^n W(\mathbf{x}_j) \cdot (\hat{w}(\mathbf{x}_j) - w(\mathbf{x}_j))^2, \quad (4.10)$$

$$J = \sum_{j=1}^n W(\mathbf{x}_j) \cdot (p(\mathbf{x}_j)^T \cdot \alpha(\mathbf{x}_j) - w(\mathbf{x}_j))^2, \quad (4.11)$$

La Ecuación 4.11 puede ser reescrita en forma matricial como:

$$J = (w(\mathbf{x}) - P(\mathbf{x}) \cdot \alpha(\mathbf{x}))^T \cdot \varphi(\mathbf{x}) \cdot (w(\mathbf{x}) - P(\mathbf{x}) \cdot \alpha(\mathbf{x})), \quad (4.12)$$

donde $\varphi(\mathbf{x})$ corresponde a la función de peso, la cual escrita en forma matricial se presenta como:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} W(\mathbf{x}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W(\mathbf{x}_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & W(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

Para la obtención de los coeficientes α se debe minimizar el funcional J, es decir, se debe igualar a cero las derivadas parciales de J con respecto a los coeficientes α :

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = 0, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \sum_{j=1}^n W(\mathbf{x}_j) \cdot \frac{(w(\mathbf{x}_j) - p(\mathbf{x}_j)^T \cdot \alpha(\mathbf{x}_j))^2}{\partial \alpha} = 0, \quad (4.15)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial J}{\partial \alpha} = 2 \cdot \sum_{j=1}^n W(\mathbf{x}_j) \cdot (w(\mathbf{x}_j) - p(\mathbf{x}_j)^T \cdot \alpha(\mathbf{x}_j)) \cdot p(\mathbf{x}_j)^T = 0, \quad (4.16)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n W(\mathbf{x}_j) \cdot (w(\mathbf{x}_j) - p(\mathbf{x}_j)^T \cdot \alpha(\mathbf{x}_j)) \cdot p(\mathbf{x}_j)^T = 0, \quad (4.17)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n W(\mathbf{x}_j) \cdot w(\mathbf{x}_j) \cdot p(\mathbf{x}_j)^T - \sum_{j=1}^n W(\mathbf{x}_j) \cdot p(\mathbf{x}_j) \cdot \alpha(\mathbf{x}_j) \cdot p(\mathbf{x}_j)^T = 0, \quad (4.18)$$

La ecuación anterior se puede reescribir de manera matricial como:

$$P(\mathbf{x})^T \cdot \varphi(\mathbf{x}) \cdot w(\mathbf{x}) - P(\mathbf{x})^T \cdot \varphi(\mathbf{x}) \cdot P(\mathbf{x}) \cdot \alpha(\mathbf{x}) = 0, \quad (4.19)$$

Luego, α se obtiene como:

$$\alpha(\mathbf{x}) = [A(\mathbf{x})]^{-1} \cdot [B(\mathbf{x})] \cdot w(\mathbf{x}), \quad (4.20)$$

siendo

$$A(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x})^T \cdot \varphi(\mathbf{x}) \cdot P(\mathbf{x}), \quad (4.21)$$

$$B(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x})^T \cdot \varphi(\mathbf{x}), \quad (4.22)$$



De esta manera, α se puede expresar como:

$$A(\mathbf{x}) \cdot \alpha(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}) \cdot w(\mathbf{x}), \quad (4.23)$$

$$\alpha(\mathbf{x}) = [A(\mathbf{x})]^{-1} \cdot B(\mathbf{x}) \cdot w(\mathbf{x}), \quad (4.24)$$

Finalmente, si se sustituye la Ecuación 4.24 en la Ecuación 4.1 se obtiene la aproximación de la siguiente forma:

$$\hat{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) , \quad (4.25)$$

$$\hat{w}(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) , \quad (4.26)$$

donde la función de forma $\phi(\mathbf{x})$, la cual se define por:

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) , \quad (4.27)$$

$$\phi(\mathbf{x}) = [\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})], \quad (4.28)$$

La aproximación $\hat{w}(\mathbf{x})$ se define para cada subdominio de interpolación Ω_i de acuerdo con la Ecuación 4.26. Por lo tanto, un punto I que pertenece a dos nubes Ω_i y Ω_j respectivamente, tiene asociadas diferentes funciones de forma dependiendo de la nube en que se encuentre, es decir, $\phi_i^I(\mathbf{x}) \neq \phi_j^I(\mathbf{x})$ (Perazzo *et al.* 2006). Las funciones de forma obtenidas mediante el MCM deben cumplir con las siguientes propiedades (Liu y Gu, 2005):

1. La función de forma es la partición de la unidad, es decir:

$$\sum_{j=1}^n \phi_j = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega , \quad (4.29)$$

2. La función de forma deben cumplir con reproductividad lineal, es decir:

$$\sum_{j=1}^n \phi(\mathbf{x}) \mathbf{x}_j = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega , \quad (4.30)$$

3. Ausencia de la propiedad de la función delta de Kronecker: La aproximación obtenida mediante MCM es una curva suavizada y no debe pasar a través de los valores nodales. Por lo que, dicha aproximación no debe satisfacer la propiedad delta de Kronecker, es decir:

$$\phi(\mathbf{x}) \neq \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \quad (4.31)$$

4. Continuidad: La continuidad tanto en el dominio local como global debe ser asegurada cuando se utiliza las propiedades de las funciones de peso.

Las matrices A y B se pueden expresar de manera discreta de la siguiente manera:

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n W(\mathbf{x}_j) p(\mathbf{x}_j) \cdot p(\mathbf{x}_j)^T, \quad (4.32)$$

Por otro lado, la matriz B se define como:

$$B(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n W(\mathbf{x}_j) p(\mathbf{x}_j), \quad (4.33)$$

4.5 Base polinomial propuesta

Este trabajo propone utilizar una base polinomial extendida, la cual consta de 17 términos y que corresponde a un desarrollo incompleto de quinto orden dado por la Ecuación 4.34. Para mejor comprensión de este concepto, considérese la Figura 4.4.

$$p^T(\mathbf{x}) = p^T(x, y) = [1, x, y, xy, x^2, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4, x^4y, xy^4], \quad (4.34)$$

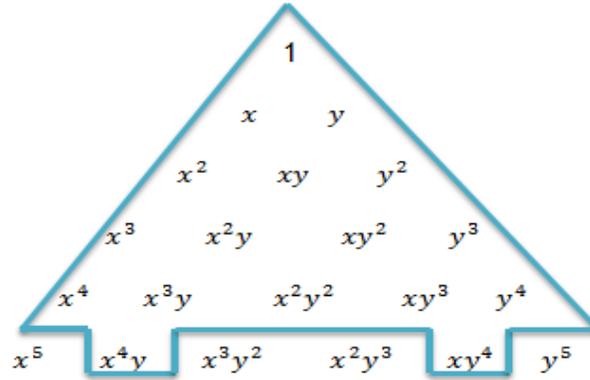


Figura 4.5 Triángulo de Pascal de la base polinomial propuesta

La selección de estos términos de quinto orden no es al azar. Se debe a que permiten la obtención de las funciones de forma del subdominio Ω_i de puntos por inversión matricial de la matriz $A(\mathbf{x})$ (Anexo 4.1). Además, es necesario recalcar que la derivada cuarta de la base polinomial completa está dada solo por una constante (Ecuación 4.35). En cambio, con la base polinomial propuesta dichas derivadas quedan en función de las coordenadas x e y , tal como se observa en las ecuaciones 4.36 y 4.37. Lo anterior, permite mantener la forma polinómica de las derivadas de las funciones de forma, lo cual disminuye el mal condicionamiento de las matrices, permitiendo evitar problemas en su inversión.

$$\frac{\partial^4 p}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 p}{\partial y^4} = 24, \tag{4.35}$$

$$\frac{\partial^4 p}{\partial x^4} = 24 \cdot y + 24, \tag{4.36}$$

$$\frac{\partial^4 p}{\partial y^4} = 24 \cdot x + 24, \tag{4.37}$$

Físicamente con las ecuaciones 4.36 y 4.37 se logra aproximar de mejor forma la curva que representa la función de aproximación que la Ecuación 4.35, puesto que al generar una aproximación de mayor orden la curva de mínimos cuadrados pasa por un número mayor de puntos. Como se mencionó en el capítulo anterior es conveniente expresar la base polinómica en

coordenadas adimensionales y en forma local, es decir, centrada en el nodo estrella. De esta manera, la base polinomial propuesta se expresa de la siguiente forma:

$$p^T(\mathfrak{x}) = [1, Dx, Dy, Dx Dy, Dx^2, Dy^2, Dx^3, Dx^2 Dy, Dx Dy^2, Dy^3, Dx^4, Dx^3 Dy, Dx^2 Dy^2, Dx Dy^3, Dy^4, Dx^4 Dy, Dx Dy^4], \quad (4.38)$$

con

$$Dx = \left(\frac{x_i - x_j}{dx_{\max}} \right), \quad Dy = \left(\frac{y_i - y_j}{dy_{\max}} \right), \quad \mathfrak{x} = (x, y),$$

donde $\mathfrak{x}_i = (x_i, y_i)$ son las coordenadas del nodo estrella i , mientras que $\mathfrak{x}_j = (x_j, y_j)$ son las coordenadas de un nodo j . Las distancias dx_{\max} y dy_{\max} corresponden a las componentes de la distancia máxima d_i^{\max} de cada subdominio Ω_i , es decir, la distancia entre el nodo estrella y nodo vecino más alejado de la nube.

Para mayor claridad de este concepto se presenta la siguiente Figura:

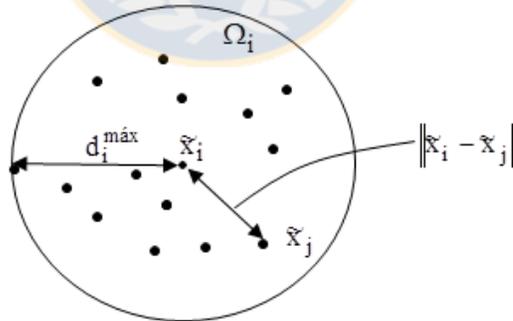


Figura 4.6 Subdominio de aproximación

4.6 Función de ponderación

La elección de la función de ponderación es fundamental en los métodos sin malla, puesto que provee ponderaciones a los nodos contenidos en el subdominio, con la finalidad de que los nodos vecinos más cercanos al nodo estrella tengan más importancia en el valor de las variables de estado, que la de otros nodos que se encuentren más alejados. Para ello es habitual construir una función de ponderación que adopte valores máximos en el nodo estrella y se anule fuera del subdominio Ω_i . Además, algunas de las propiedades del método de los mínimos cuadrados móviles (MCM) son inherentes a las propiedades de la función de ponderación, destacando las siguientes (Gu, 2005):

La función debe ser positiva, continua y diferenciable en el dominio de influencia.

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) > 0, \mathbf{x}_j \in \Omega_i, \quad (4.39)$$

La función debe ser cero fuera del subdominio de influencia.

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) = 0, \mathbf{x}_j \notin \Omega_i, \quad (4.40)$$

El valor de $w(\mathbf{x})$ está dado en su totalidad por sus vecinos cercanos incluido él mismo.

$$\int_{\Omega_i} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) d\Omega = 1, \quad (4.41)$$

La función debe ser monótonamente decreciente en el punto de interés \mathbf{x} .

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \quad (4.42)$$

Cualquier función que satisfaga los requerimientos anteriormente descritos puede ser utilizada como función de ponderación en el MCM. Sin embargo, es deseable que adopten un valor

máximo en el nodo estrella y sean simples de evaluar. Usualmente, los soportes de las funciones de peso poseen formas simples, tales como círculos o rectángulos para casos bidimensionales. Dichos soportes deben contener a las nubes de puntos en su totalidad, es decir, deben asignar un valor diferente de cero a cada uno de los nodos contenidos en una nube de puntos. Además, los soportes no necesitan abarcar el dominio completo, sino que sólo deben contener los puntos que se desean aproximar.

Es común utilizar funciones exponenciales y funciones de la familia de los polinomios *spline* como funciones de peso en los métodos sin malla, puesto que cumplen con las condiciones anteriormente descritas. No obstante, la función de ponderación utilizada en el MPF corresponde a la función de Gauss normalizada (Ipinza *et al.* 2007), razón por la cual es interesante analizar otros tipos de funciones de peso tales como los polinomios del tipo *splines* que son ampliamente utilizados en otros métodos sin mallas. A continuación, se define la función exponencial de Gauss normalizada:

$$W(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\exp(-(k_r d / d_{\max}))^2 - \exp(-(k_r))^2)}{1 - \exp(-(k_r))^2} & d \leq d_{\max} \\ 0 & d > d_{\max} \end{cases} \quad (4.43)$$

donde k_r es un parámetro que le da la forma a la función exponencial de Gauss normalizada, d es la distancia entre el nodo estrella y un punto vecino cualquiera en la nube, es decir, $d = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|$

La función de peso *spline* de cuarto orden (Krysl y Belytschko, 1995) está dada por:

$$W(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6s^2 + 8s^3 - 3s^4 & s \leq 1 \\ 0 & s > 1 \end{cases}, \quad (4.44)$$

en que $s = \frac{\|\bar{x} - \bar{x}_j\|}{d_{\max}}$, siendo d_{\max} la distancia entre el nodo estrella y el nodo más alejado del interior del subdominio. En las siguientes figuras se presentan las funciones de pesos anteriormente descritas.

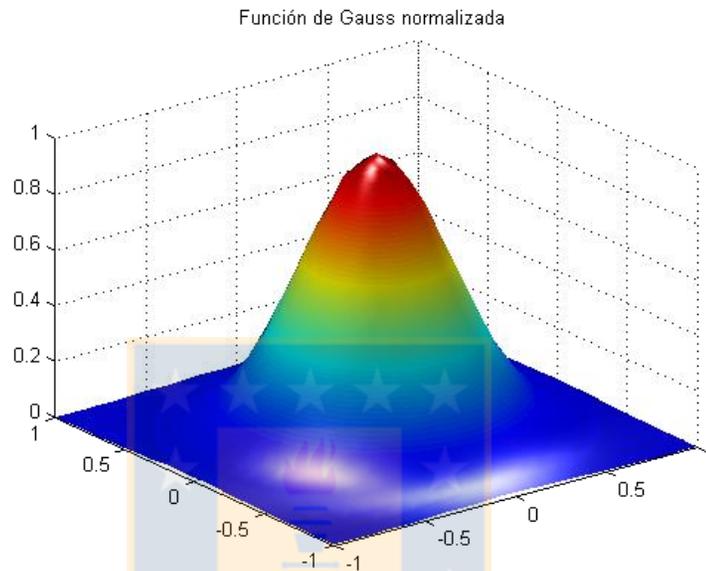


Figura 4.7 Función de Gauss normalizada

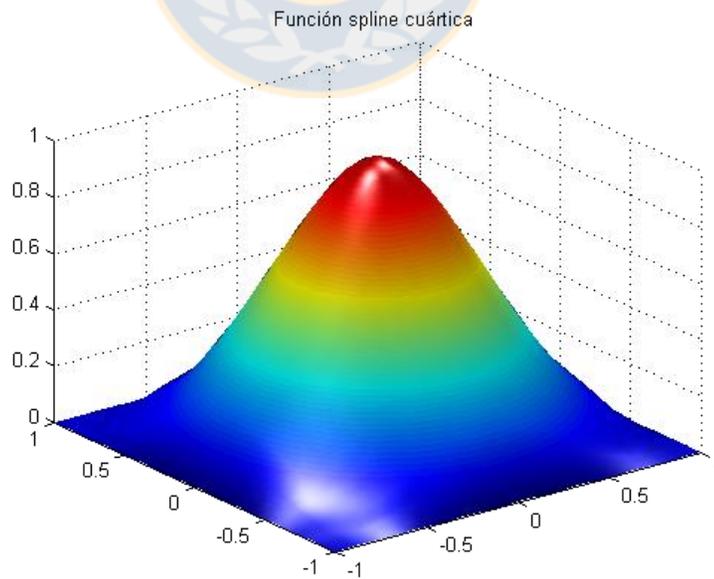


Figura 4.8 Función *spline* cuártica

Este trabajo utiliza una función de ponderación de soporte circular correspondiente a la función polinomial *spline* de cuarto orden, la cual fue propuesta por Krysl y Belytschko (1995) en el método de los elementos libres de Galerkin (MELG). Se escoge dicha función, puesto que el problema a solucionar es de cuarto orden y el error será menor cuanto más se asemeje el polinomio de la solución numérica al correspondiente de la solución analítica. Además, satisface todos los requerimientos que debe tener una función de peso.

Es común construir una función de ponderación en base a polinomios *spline* mediante la siguiente formulación:

$$W(s_i) = \begin{cases} \sum_{j=0}^l b_j s_i^j & s_i \leq 1 \\ 0 & s_i > 1 \end{cases}, \quad (4.45)$$

donde l es el orden de la función *spline*, y b_j son los coeficientes a ser determinados.

De esta forma, una función *spline* de cuarto orden puede ser escrita en forma general como:

$$W(s_i) = \begin{cases} b_0 + b_1 s_i + b_2 s_i^2 + b_3 s_i^3 + b_4 s_i^4 & s_i \leq 1 \\ 0 & s_i > 1 \end{cases}, \quad (4.46)$$

La selección de los términos del polinomio *spline* de cuarto orden no es al azar, debiendo satisfacer las siguientes condiciones (Liu y Gu, 2005).

- Valor unitario en el nodo estrella donde $s_i = 0$,

$$W|_{s_i=0} = 1, \quad (4.47)$$

Condición de soporte compacto, es decir, la primera y segunda derivada de la función de peso son nulas en los bordes del soporte del dominio donde $s_i = 1$. Lo anterior, se puede expresar de la siguiente manera:

$$W|_{s_i=1} = 0, \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial W}{\partial s} \Big|_{s_i=1} = 0, \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial s^2} \Big|_{s_i=1} = 0, \quad (4.50)$$

-Condición de simetría, es decir, la primera derivada de la función de peso es cero en el centro del soporte del subdominio donde $s_i = 0$. Lo anterior, está dado por la siguiente expresión.

$$\frac{\partial W}{\partial s} \Big|_{s_i=0} = 0, \quad (4.51)$$

Utilizando las ecuaciones 4.47, 4.48, 4.49, 4.50 y 4.51, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$b_0 = 1, \quad (4.52)$$

$$b_1 = 0, \quad (4.53)$$

$$b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0, \quad (4.54)$$

$$b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 = 0, \quad (4.55)$$

$$2b_2 + 6b_3 + 12b_4 = 0, \quad (4.56)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los siguientes coeficientes:

$$b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = -6, b_3 = 8, b_4 = -3, \quad (4.57)$$

Luego, se sustituyen estos coeficientes en la Ecuación 4.46 y se obtiene la función *spline* cuarta de la Ecuación 4.44.

Es necesario recalcar que si los nodos se ubican en la frontera del soporte de la función de peso se les asignan ponderaciones cero. Lo anterior, genera matrices A (Ecuación 4.21) que contienen ceros en algún elemento de su diagonal, lo cual genera una matriz singular. Con la finalidad de evitar este problema es recomendable utilizar un soporte que posea un tamaño de 1.3 veces mayor a la nube de puntos (Bitaraf y Mohammadi, 2010), de manera que todos los puntos de la nube adopten valores diferentes de cero. Dado que se simplifican los parámetros a calcular en la función de ponderación es posible ajustar el soporte a un tamaño de 1.2 veces el tamaño de la nube, lo cual se demuestran en los resultados del Anexo 4.2. Se denomina alfa al coeficiente que relaciona el tamaño del soporte con el de la nube.

4.7 Derivabilidad de la matriz A

Es necesario recalcar que las aproximaciones están compuestas por la inversa de la matriz A, por lo que se presenta la dificultad de derivar esta matriz. No obstante, Riquelme (2003) logró plantear una expresión más simple como la que se muestra en la Ecuación 4.58, en la cual no es necesario derivar la inversa de A(x).

$$\frac{\partial[A(x)]^{-1}}{\partial x} = -[A(x)]^{-1} \cdot \frac{\partial[A(x)]}{\partial x} \cdot [A(x)]^{-1}, \quad (4.58)$$

La Ecuación 4.58 se puede demostrar, si se deriva la ecuación 4.21 con respecto a x:

$$\frac{\partial[A(x)]}{\partial x} \cdot \alpha(x) + A(x) \cdot \frac{\partial[\alpha(x)]}{\partial x} = \frac{[B(x)]}{\partial x} \cdot \hat{w}(x), \quad (4.59)$$

Luego, se despeja $\frac{\partial[\alpha(x)]}{\partial x}$ de la Ecuación 4.59 obteniendo:

$$A(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial[\alpha(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial[B(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} \cdot w(\mathbf{x}) - \frac{\partial[A(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} \cdot \alpha(\mathbf{x}), \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial[\alpha(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} = [A(\mathbf{x})]^{-1} \cdot \frac{\partial[B(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} \cdot w(\mathbf{x}) - [A(\mathbf{x})]^{-1} \frac{\partial[A(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} \cdot \alpha(\mathbf{x}), \quad (4.61)$$

Reemplazando la expresión 4.22 en la Ecuación 4.61 se obtiene:

$$\frac{\partial[\alpha(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} = [A(\mathbf{x})]^{-1} \cdot \frac{\partial[B(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} \cdot w(\mathbf{x}) - [A(\mathbf{x})]^{-1} \frac{\partial[A(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} \cdot [A(\mathbf{x})]^{-1} \cdot B(\mathbf{x}) \cdot w(\mathbf{x}), \quad (4.62)$$

Derivando la Ecuación 4.22 se obtiene:

$$\frac{\partial[\alpha(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} = [A(\mathbf{x})]^{-1} \cdot \frac{\partial[B(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} \cdot w(\mathbf{x}) + \frac{\partial[A(\mathbf{x})]^{-1}}{\partial \mathbf{x}} \cdot B(\mathbf{x}) \cdot w(\mathbf{x}), \quad (4.63)$$

Finalmente, si se compara las ecuaciones 4.62 y 4.63 se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial[A(\mathbf{x})]^{-1}}{\partial \mathbf{x}} = -[A(\mathbf{x})]^{-1} \cdot \frac{\partial[A(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} \cdot [A(\mathbf{x})]^{-1}, \quad (4.64)$$

Las derivadas de las funciones de forma están dadas por:

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial p^T}{\partial \mathbf{x}} A^{-1} B + p^T A^{-1} B - p^T G B \right], \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} = \left[\frac{\partial^2 p^T}{\partial \mathbf{x}^2} A^{-1} B - \frac{\partial p^T}{\partial \mathbf{x}} G B + \frac{\partial p^T}{\partial \mathbf{x}} A^{-1} \frac{\partial B}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial p^T}{\partial \mathbf{x}} A^{-1} B - p^T G B - p^T G \frac{\partial B}{\partial \mathbf{x}} - p^T H B \right], \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^3} = & \left[\frac{\partial^3 p^T}{\partial \mathbf{x}^3} A^{-1} B - 3 \frac{\partial^2 p^T}{\partial \mathbf{x}^2} G B + 2 \frac{\partial^2 p^T}{\partial \mathbf{x}^2} A^{-1} \frac{\partial B}{\partial \mathbf{x}} - 3 \frac{\partial p^T}{\partial \mathbf{x}} H B - 3 \frac{\partial p^T}{\partial \mathbf{x}} G \frac{\partial B}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial p^T}{\partial \mathbf{x}^2} A^{-1} \frac{\partial^2 B}{\partial \mathbf{x}^2} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 p^T}{\partial \mathbf{x}^2} A^{-1} B - 2 \frac{\partial p^T}{\partial \mathbf{x}} G B + 2 \frac{\partial p^T}{\partial \mathbf{x}} A^{-1} \frac{\partial B}{\partial \mathbf{x}} + p^T H B - 2 \frac{\partial p^T}{\partial \mathbf{x}} G \frac{\partial B}{\partial \mathbf{x}} - 2 p^T G \frac{\partial B}{\partial \mathbf{x}} + p^T A^{-1} \frac{\partial^2 B}{\partial \mathbf{x}^2} + p^T J B \right] \end{aligned}$$

$$-p^T G \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}] , \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \phi(\tilde{x})}{\partial x^4} = & \left[\frac{\partial^4 p^T}{\partial x^4} A^{-1} B - 4 \frac{\partial^3 p^T}{\partial x^3} G B + 3 \frac{\partial^3 p^T}{\partial x^3} A^{-1} \frac{\partial B}{\partial x} - 6 \frac{\partial p^T}{\partial x^2} H B - 11 \frac{\partial p^T}{\partial x^2} G \frac{\partial B}{\partial x} + 6 \frac{\partial p^T}{\partial x^2} A^{-1} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \right. \\ & + 4 \frac{\partial p^T}{\partial x} \cdot J B + 4 \frac{\partial p^T}{\partial x} J \frac{\partial B}{\partial x} - 5 \frac{\partial p^T}{\partial x} G \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial p^T}{\partial x} A^{-1} \frac{\partial^3 B}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 p^T}{\partial x^3} A^{-1} B + 3 \frac{\partial p^T}{\partial x^2} G B + 2 \frac{\partial p^T}{\partial x} H B \\ & - 4 \frac{\partial p^T}{\partial x} G \frac{\partial B}{\partial x} + 3 \frac{\partial p^T}{\partial x} A^{-1} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^T}{\partial x^2} H B + p^T J B - p^T H \frac{\partial B}{\partial x} - p^T J \frac{\partial B}{\partial x} - 3 \frac{\partial p^T}{\partial x^2} G \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial p^T}{\partial x} A^{-1} \frac{\partial^3 B}{\partial x^3} \\ & \left. + p^T K B - \frac{\partial p^T}{\partial x} G \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + p^T H \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - p^T G \frac{\partial^3 B}{\partial x^3} \right], \quad (4.68) \end{aligned}$$

donde G, H, J y K están definidas por:

$$G = A^{-1} \frac{\partial A}{\partial x} A^{-1}, H = A^{-1} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} A^{-1}, J = A^{-1} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} A^{-1} \text{ y } K = A^{-1} \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} A^{-1} , \quad (4.69)$$

De lo anterior, se observa la dificultad en la obtención de las derivadas de las aproximaciones, puesto que están compuestas por una gran cantidad de matrices. Sin embargo, como el tensor de deformaciones solo contiene términos de primer orden y además las derivadas de segundo orden y superior de $A(\tilde{x})$ son despreciables, las derivadas de las funciones de forma se expresan como sigue:

$$\frac{\partial \phi(\tilde{x})}{\partial x} = \left[\frac{\partial p^T(\tilde{x})}{\partial x} \cdot A^{-1} B \right], \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial \phi(\tilde{x})}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial p^T(\tilde{x})}{\partial x^2} \cdot A^{-1} B \right], \quad (4.71)$$

$$\frac{\partial \phi(\tilde{x})}{\partial x^3} = \left[\frac{\partial p^T(\tilde{x})}{\partial x^3} \cdot A^{-1} B \right], \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial \phi(\tilde{x})}{\partial x^4} = \left[\frac{\partial p^T(\tilde{x})}{\partial x^4} \cdot A^{-1} B \right], \quad (4.73)$$

4.8 Obtención de ecuaciones de la discretización

Para la obtención de las ecuaciones se considera un problema de contorno (Figura 4.9), gobernando por una ecuación diferencial de cuarto orden sobre un dominio Ω y sus respectivas condiciones de borde sobre Γ . La solución está dada por $w(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma$ (Oñate *et al.*, 2001), se representa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E[w(\mathbf{x})] - f(\mathbf{x}) &= 0 && \text{en } \Omega, \\ G[w(\mathbf{x})] - s(\mathbf{x}) &= 0 && \text{en } \Gamma_t \text{ y} \\ w(\mathbf{x}) - w_p &= 0 && \text{en } \Gamma_w, \end{aligned} \tag{4.74}$$

donde $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_w$, y E representa el operador diferencial, el cual define las condiciones de equilibrio interno. G las condiciones de equilibrio en la superficie, $w(\mathbf{x})$ es la función incógnita, $f(\mathbf{x})$ y $s(\mathbf{x})$ representan fuerzas externas o fuentes actuando sobre el dominio Ω y sobre el contorno Γ_t . Finalmente, w_p representa las condiciones de desplazamientos prescritos en un problema de placas.

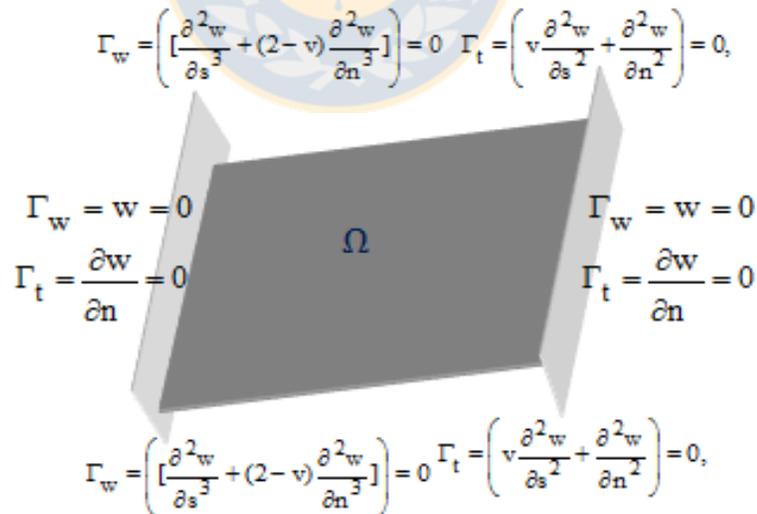


Figura 4.9 Representación de un problema de flexión de placas

Para resolver el sistema de ecuaciones mediante el MPF no se requiere definir subdominios de integración, ya que se utiliza un esquema de colocación puntual (Perazzo *et al.*, 2004). Esta técnica consiste en reemplazar la función incógnita $w(\mathbf{x})$ por la aproximación $\hat{w}(\mathbf{x})$, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} E[\hat{w}(\mathbf{x})] - f(\mathbf{x}) &= 0 && \text{en } \Omega, \\ G[\hat{w}(\mathbf{x})] - s(\mathbf{x}) &= 0 && \text{en } \Gamma_t, \\ \hat{w}(\mathbf{x}) - w_p &= 0 && \text{en } \Gamma_w, \end{aligned} \quad (4.75)$$

En donde la función $\hat{w}(\mathbf{x})$ se aproxima de acuerdo a la Ecuación 4.26, lo cual conduce a un sistema de ecuaciones que poseen solución única y que está dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{w}^h = \mathbf{f}, \quad (4.76)$$

donde \mathbf{w}^h es el vector incógnitas (deflexiones), \mathbf{K} es la matriz de rigidez y \mathbf{f} es el vector de contribuciones externas.

4.9 Conclusiones

En este capítulo, se ha realizado una descripción de la formulación del MPF propuesta en este trabajo y la tradicional para la resolución de problemas de flexión de placas. Se describieron las principales etapas del método tales como la generación de subdominios de discretización, la aproximación mediante la técnica de los mínimos cuadrados móviles, las bases de polinomiales y funciones de pesos utilizadas, la derivabilidad de la aproximación y resolución del sistema de ecuaciones.

En el método de los puntos finitos (MPF), la aproximación local se obtiene mediante la técnica de mínimos cuadrados móviles. Además, utiliza colocación puntual para obtener el sistema de ecuaciones discretas, es decir, sólo se debe utilizar el conjunto de ecuaciones diferenciales sin necesidad de realizar algún tipo de integración sobre el dominio.

Habitualmente el método de los puntos finitos es analizado mediante el uso de la función exponencial de Gauss normalizada como función de peso y bases polinomiales completas como funciones de aproximaciones. No obstante, este tipo de función de ponderación requiere de la calibración de sus parámetros para cada tipo de problema, por lo que una mala elección de estos puede perjudicar la calidad de la respuesta numérica. Alternativamente, se propuso utilizar una función de peso tipo *spline*, puesto que sus constantes no deben ser calibradas y utilizar una base polinomial incompleta de quinto orden que permite aproximar de mejor forma la curva que representa la función de aproximación que una base de cuarto orden completo, puesto que al generar una aproximación de mayor orden la curva de mínimos cuadrados pasa por un número mayor de puntos.

Finalmente, los conceptos y ecuaciones aquí presentadas son esenciales en la implementación de las rutinas que se presentan en el próximo capítulo.



CAPÍTULO 5 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

5.1 Introducción

En este capítulo se describe la implementación computacional en ambiente Matlab®, la cual se basa en los conceptos teóricos presentados en el capítulo anterior. Se comienza dando a conocer el diagrama de flujo del programa, explicando a grandes rasgos las etapas principales. Lo anterior, incluye la etapa de preproceso y post-proceso realizada en GiD (CIMNE, 2011).

5.2 Diagrama de flujo

A continuación se presenta el diagrama de flujo que resume las etapas generales del programa implementado.

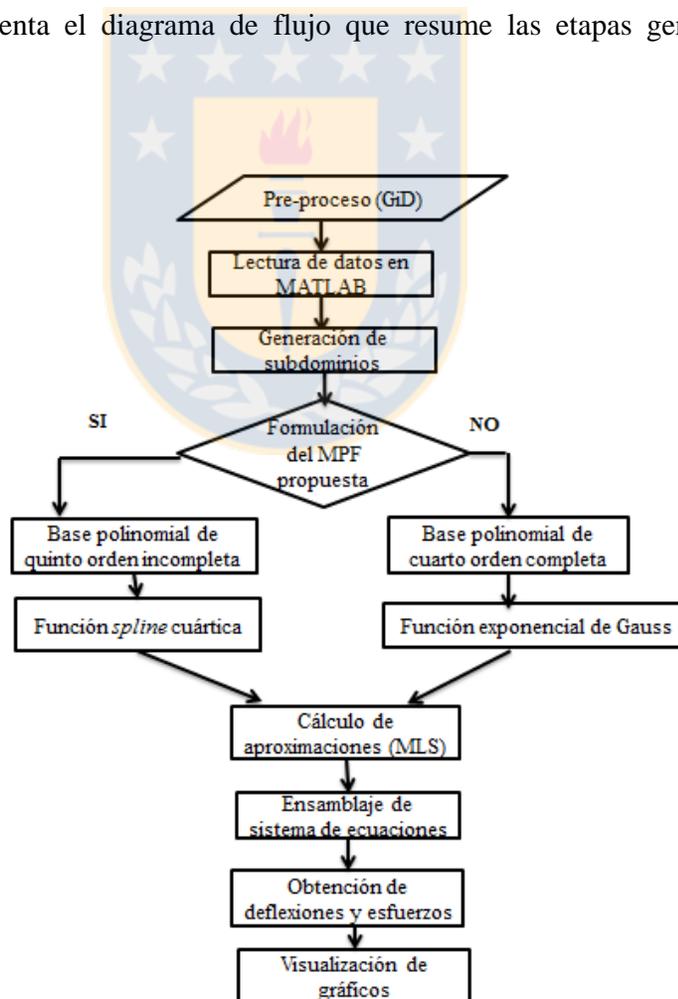


Figura 5.1 Diagrama de flujo

5.3 Modelación

5.3.1 Generación de coordenadas

La primera etapa se realiza en el *software* GiD (CIMNE, 2011), la cual consiste en introducir las coordenadas de los vértices de la placa. Para ello se selecciona la opción “utilidades-herramientas-ventana de coordenadas” e introducir las coordenadas (Figura 5.2).

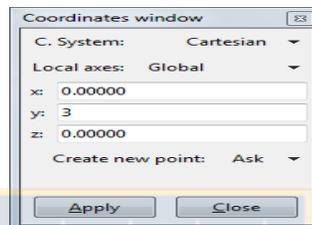


Figura 5.2 Ingreso de coordenadas en GiD (CIMNE, 2011)

5.3.2 Generación de geometría y superficie

La generación de los bordes de la placa se realiza al seleccionar la opción “geometría-crear –línea recta” y luego se selecciona gráficamente los pares de puntos donde se traza la línea (Figura 5.3).

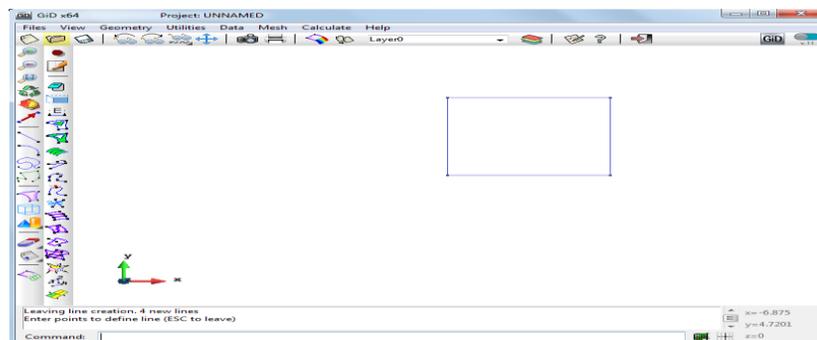


Figura 5.3 Geometría de la placa en GiD (CIMNE, 2011)

La generación de la superficie dentro del contorno se realiza al seleccionar la opción “geometría-crear-superficie-por contorno”. Luego, se seleccionan las líneas que forman el contorno

obteniendo una superficie como la que se presenta en la Figura 5.4, en la cual las líneas de color magenta representan la superficie creada.

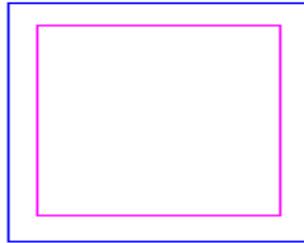


Figura 5.4 Generación de superficies en GiD (CIMNE, 2011)

5.3.3 Generación de geometría y superficie

La generación de la grilla de puntos se realiza al seleccionar el elemento a usar mediante la opción “discretización estructurada–superficie–asignar número de celdas”. A continuación, aparece una ventana (Figura 5.5.), en la cual se ingresa el número de divisiones por cada línea de contorno, generando una grilla (Figura 5.6).

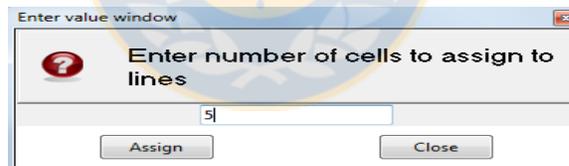


Figura 5.5 Ingreso del número de divisiones en GiD (CIMNE, 2011)

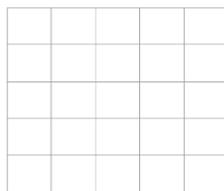


Figura 5.6 Generación de grilla en GiD (CIMNE, 2011)

5.3.4 Condiciones de borde

Las condiciones de bordes se realizan al seleccionar las líneas de borde e introducir el valor de los desplazamientos asociados a cada uno de los nodos prescritos tal como se muestra en la Figura 5.7.

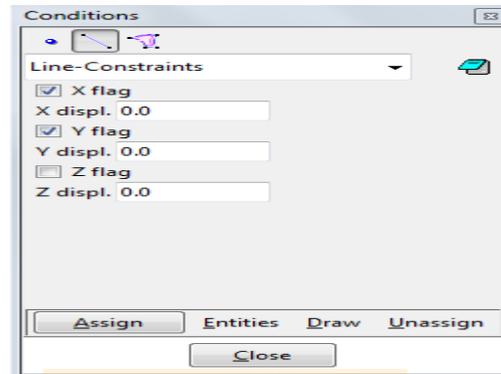


Figura 5.7 Asignación de condiciones de borde en GiD (CIMNE, 2011)

5.3.5 Propiedades del material

Las propiedades del material (coeficiente de Poisson, densidad, espesor y módulo de elasticidad) se asignan a las áreas que definen el dominio de la placa mediante el ingreso de los datos en la tabla de la Figura 5.8.

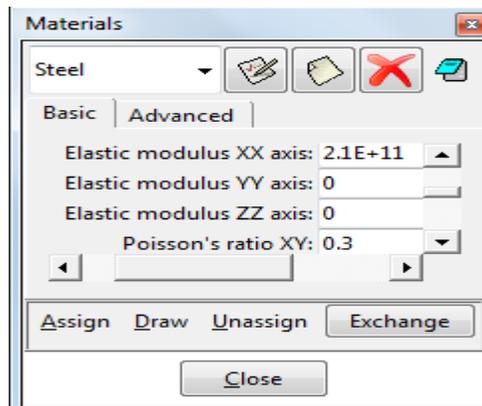


Figura 5.8 Asignación de material en GiD (CIMNE,2011)

5.3.6 Cargas

A continuación, se utiliza una interfaz implementada dentro del *software* GiD (CIMNE,2011) conocida como MAT-fem (CIMNE,2005), la cual tiene como principal ventaja que permite generar un archivo.m de datos, el cual puede ser leído fácilmente en la rutina de puntos finitos implementada en Matlab. En esta interfaz se asigna el valor de las cargas uniformemente distribuidas como se muestra en la Figura 5.9.

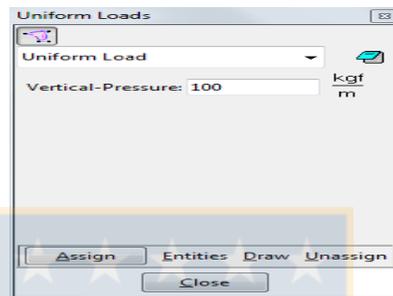


Figura 5.9 Asignación de cargas en MAT-fem (CIMNE, 2005)

5.3.7 Proceso

Se implementó la rutina *principal.m* que considera todo lo involucrado con la etapa de proceso, la cual contiene y ejecuta todas las demás rutinas. A continuación, se describen las principales etapas:

1. En primer lugar, se leen los datos de entrada de un *archivo.m*, el cual fue creado a partir del preprocesador gráfico anteriormente descrito. A continuación, se escoge la formulación a utilizar, es decir, el MPF tradicional formulación tradicional (aproximación de cuarto orden completa y función de peso exponencial de Gauss) o la formulación propuesta (aproximación de quinto orden incompleta y función de peso *spline*).
2. Luego, se generan las nubes de puntos circulares en torno de cada uno de los nodos estrellas y nodos vecinos, mediante la función *findsort.m*

3. A continuación, se obtienen las matrices A y B tal como se muestra en el Capítulo 4, y de esta manera se logra obtener las funciones de formas y sus respectivas derivadas. Para el caso de la formulación del MPF propuesta, se utiliza una función de peso *spline* cuártica (Ecuación 4.44) y una base polinomial de quinto orden incompleta (Ecuación 4.34), mientras que para la formulación tradicional del MPF se utiliza la función de peso exponencial de Gauss y una base polinomial de cuarto orden completa.
4. Se generan las matrices de nodos de frontera y del dominio interior, en donde por cada punto de colocación se genera una ecuación, conformada por el valor de la variable de estado del nodo estrella.
5. Se obtiene el vector de fuerzas nodales de cada nube considerando las cargas a las que está sometida la placa. Al igual que en el caso de las matrices de rigidez, el cálculo del vector de fuerzas se hace en forma separada para los nodos del dominio interior y los de frontera.
6. Se desarrolla el proceso de ensamblaje de las matrices de rigidez y de los vectores de fuerzas nodales.
7. Se resuelve la Ecuación 4.76 de equilibrio global, donde w^h es el vector de deflexiones incógnitas, K es la matriz de rigidez global y f es el vector de contribuciones externas.
8. Se calculan los esfuerzos en los puntos de colocación por medio de las expresiones obtenidas en las ecuaciones 2.15 y 2.16, utilizando las deflexiones obtenidas en la etapa anterior.

5.3.8 Post-proceso

Luego de terminada la ejecución del programa de puntos finitos, se puede visualizar la distribución de esfuerzos en MATLAB® o regresar a GiD (CIMNE, 2011). Para ello se debe abrir el fichero generado que contiene la extensión archivo.res. Una vez abierto el archivo a analizar, se debe seleccionar del menú “ver resultados- contorno relleno” ó simplemente

seleccionando el icono que se muestra en la Figura 5.10, en el cual se puede escoger la distribución de esfuerzos a visualizar. Finalmente, al presionar la distribución de esfuerzos aparece en pantalla un puntero. Al indicar con la flecha del mouse en un punto dado de la placa se despliega la información relativa a los esfuerzos que contiene a dicho nodo.

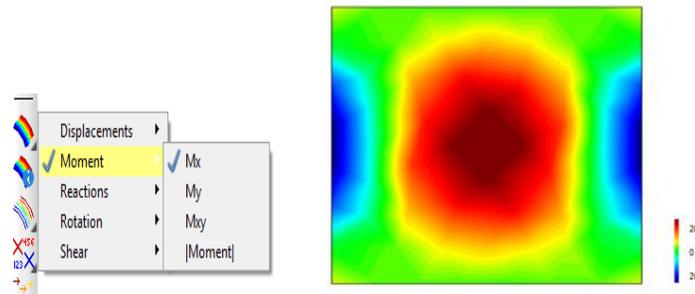


Figura 5.10 Visualización de resultados en GiD (CIMNE, 2011)

5.4 Conclusiones

En este capítulo se han presentado las principales rutinas involucradas en la aplicación del MPF a problemas de flexión de placas delgadas. Por otra parte, se describió su organización y modo de funcionamiento.

El *software* de preproceso GiD es una interfaz adecuada para la preparación de los datos del problema y discretización de grillas de nodos, que tiene como principal ventaja la generación de archivos de datos que pueden ser leídos fácilmente en la rutina de puntos finitos implementada en Matlab®. Dicha rutina permite elegir entre la formulación propuesta y la tradicional para resolver problemas de flexión de placas delgadas.

Las rutinas aquí descritas sirven de herramienta para estudiar el comportamiento del método desarrollado frente a problemas de flexión de placas delgadas en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO 6 RESULTADOS

6.1 Introducción

En el presente capítulo se analizan una serie de ejemplos con la finalidad de validar el funcionamiento del programa descrito en el capítulo anterior. Para ello se comparan los esfuerzos obtenidos mediante la formulación del MPF propuesta en este trabajo para problemas de flexión de placas, dichos resultados son comparados con los obtenidos de la solución analítica, así como también con la formulación tradicional del MPF. Además, se aplica la formulación propuesta en una placa con un orificio empotrada en uno de sus lados.

6.2 Ejemplo 1

La Figura 6.1 representa una placa cuadrada de lado $L_x=L_y=5\text{m}$, la cual se analiza con dos bordes empotrados y dos simplemente apoyados. Los datos del problema son:

$$t = 0,1\text{m}, \quad \mu = 0,3, \quad E = 2 \times 10^9 \left(\frac{\text{Kgf}}{\text{m}^2} \right), \quad q = -100 \left(1 - \sin \frac{\pi}{5} \right) \frac{\text{Kgf}}{\text{m}^2} \quad \text{y} \quad L_x = L_y = 5\text{m},$$

donde μ es el coeficiente de poisson, E el módulo de elasticidad, t el espesor, q el valor de la carga uniformemente repartida y $L_x=L_y$ son las longitudes de la placa en ambas direcciones.

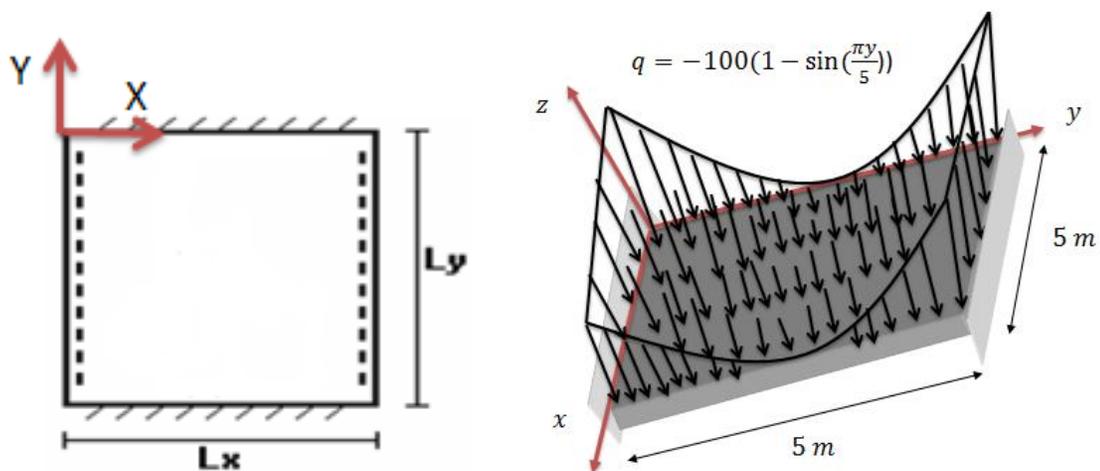


Figura 6.1 Placa cuadrada empotrada en dos borde y simplemente apoyada en dos

En la Figura 6.2, se presentan dos grillas de 250 y 953 puntos utilizadas en la modelación mediante el MPF. Es necesario recalcar que por cada nodo existe un grado de libertad.

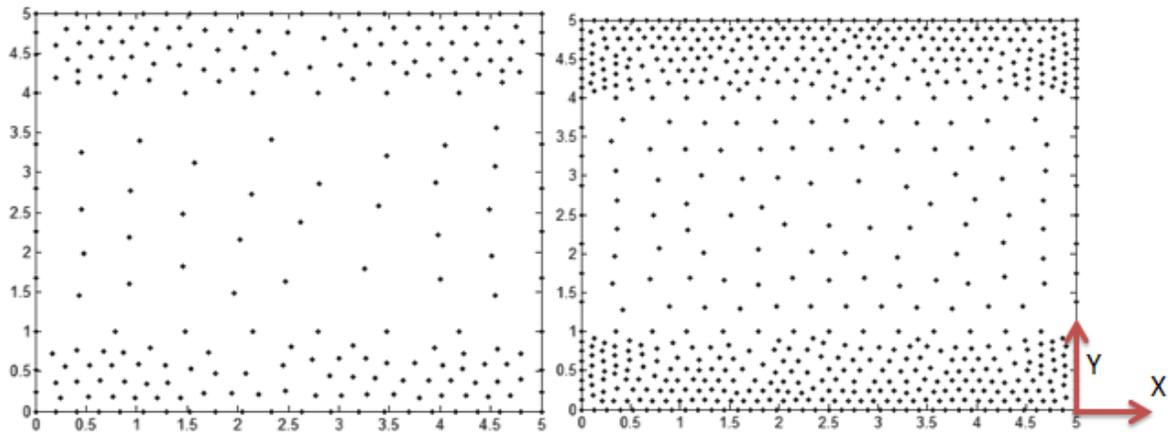


Figura 6.2 Grillas de 250 y 953 puntos

En las figuras 6.3, 6.4 y 6.5 se muestran una comparación del error porcentual con respecto a la solución analítica de las formulaciones de MPF analizadas en este trabajo para la convergencia de deflexiones y esfuerzos de diferentes grados de libertad. Además, en la Figura 6.6 se presenta la distribución de esfuerzos 953 puntos.

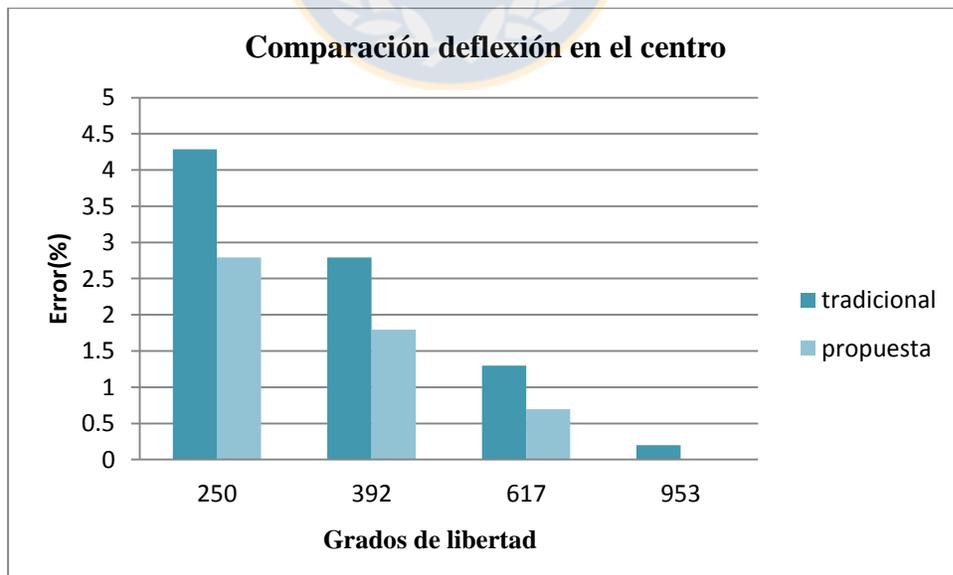


Figura 6.3 Comparación deflexión en el centro

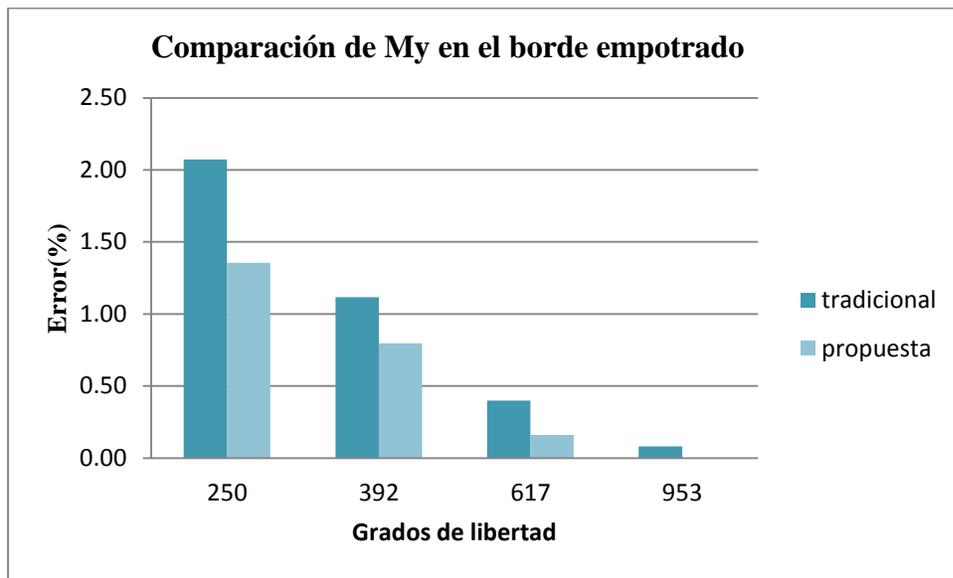


Figura 6.4 Comparación My máximo en el borde empotrado

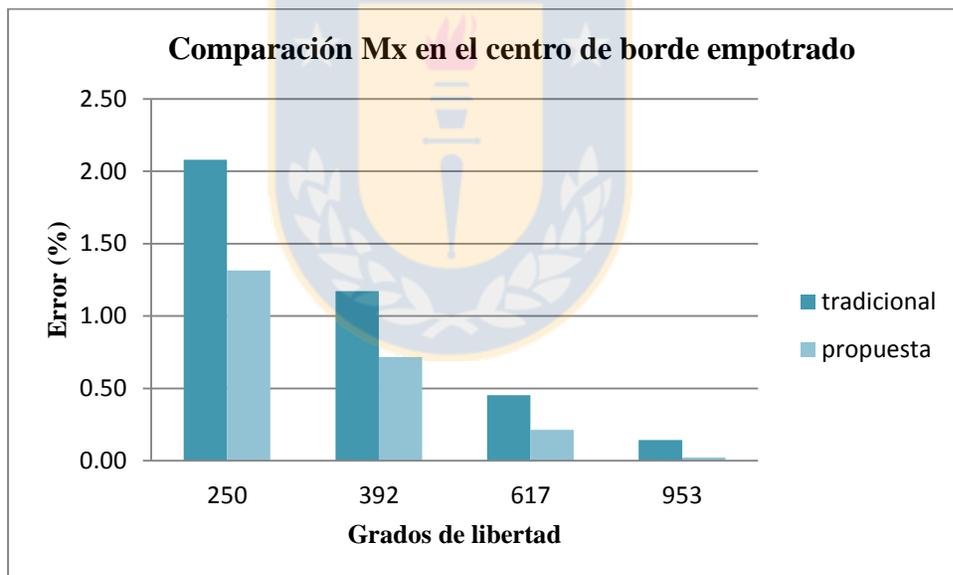


Figura 6.5 Comparación Mx en el borde empotrado

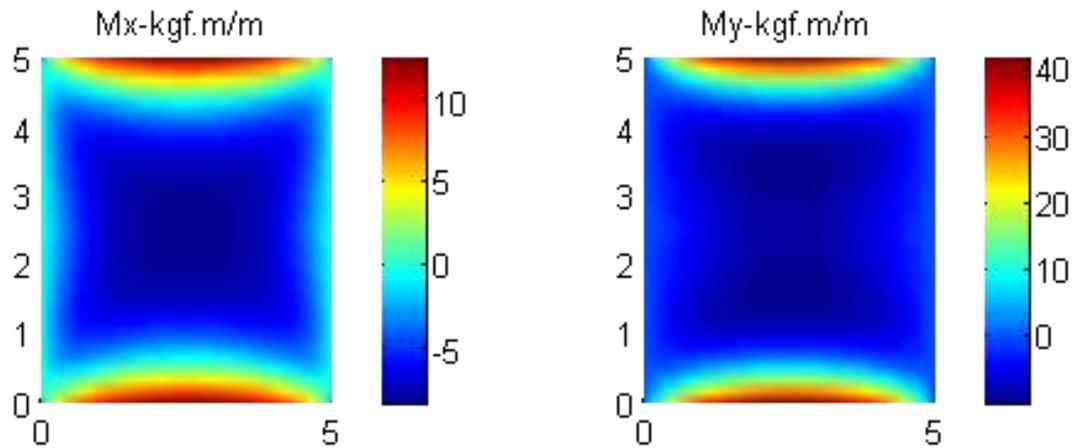


Figura 6.6 Distribución de momentos flectores con 953 nodos

A continuación, se presenta el tiempo computacional para los diferentes grados de libertad mediante ambas formulaciones analizadas.

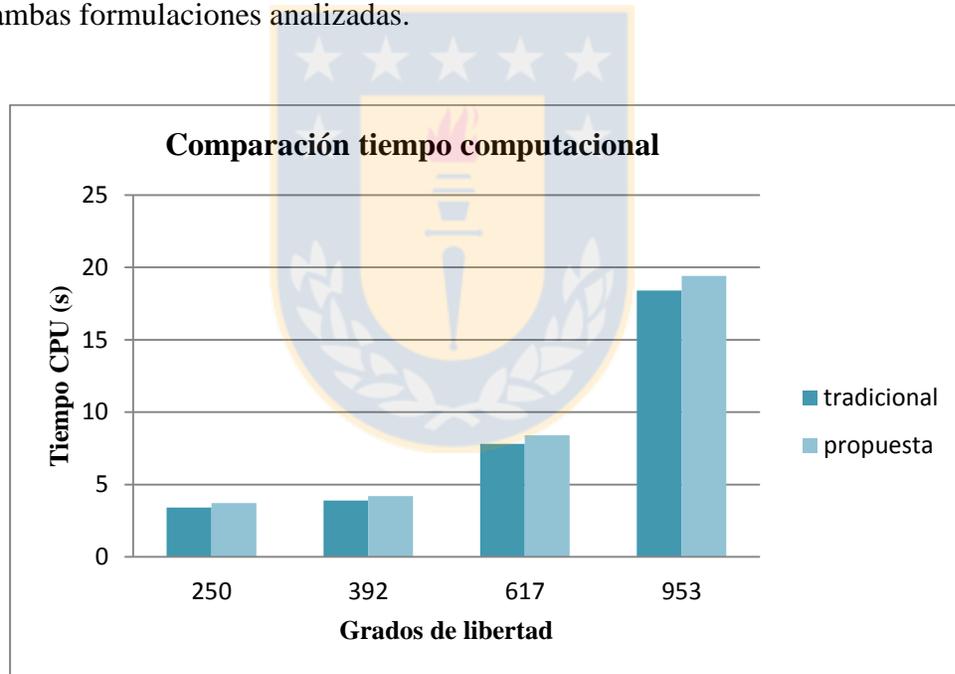


Figura 6.7 Tiempo computacional

De los resultados se observa que el error porcentual de la formulación tradicional para la convergencia de la deflexión en el centro disminuye en promedio en un 38,91 % al utilizar la formulación propuesta, mientras que el error porcentual de la formulación tradicional para la convergencia del momento flector en x e y en el borde empotrado disminuye en un 42,73% y un

41,1 % respectivamente. El tiempo computacional para los grados de libertad analizados aumentan en promedio en un 7,46%.

6.3 Ejemplo 2

La Figura 6.8 representa una placa cuadrada de lado $L_y=L_x=5m$, la cual se analiza con un borde libre y los restantes simplemente apoyados. Los datos del problema son:

$$t = 0,1m, \quad \mu = 0,3, \quad E = 180000 \left(\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}\right), \quad q = -50 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2} \text{ y } L_x = L_y = 5m,$$

donde μ es el coeficiente de poisson, E el módulo de elasticidad, t el espesor, q el valor de la carga uniformemente repartida y $L_x=L_y$ son las longitudes de la placa en ambas direcciones.

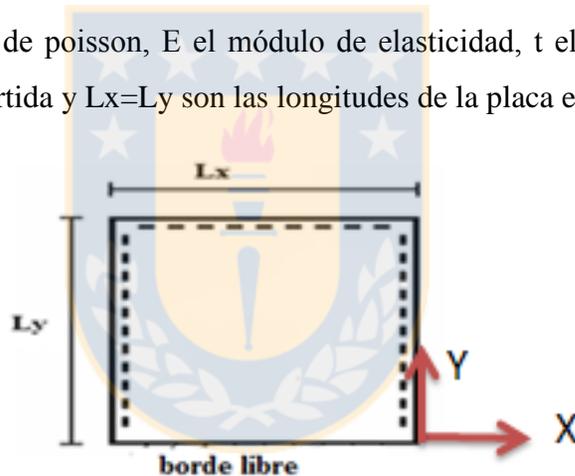


Figura 6.8 Placa cuadrada con un borde libre y tres simplemente apoyados

En la Figura 6.9, se presentan dos grillas de 248 y 617 puntos utilizadas en la modelación mediante el MPF.

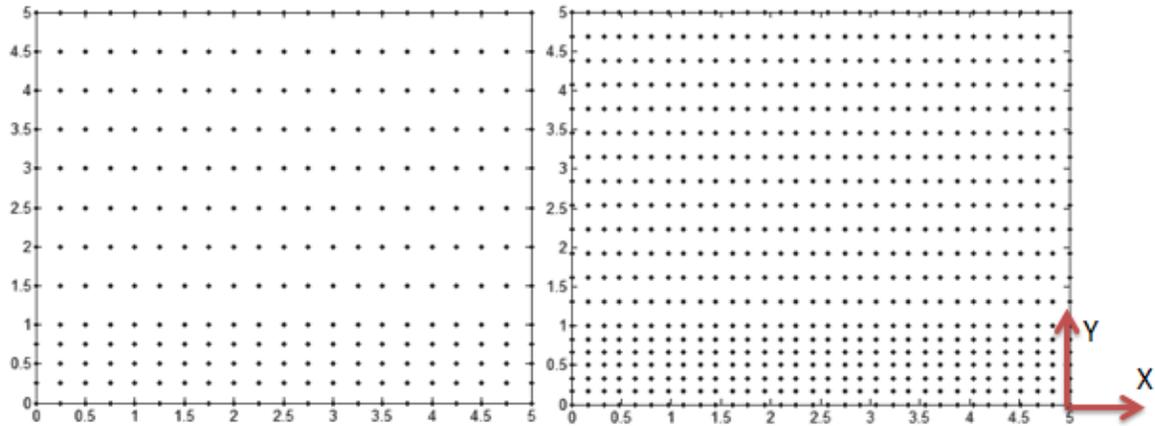


Figura 6.9 Grillas de 248 y 617 puntos

En las figuras 6.10, 6.11 y 6.12 se muestran una comparación del error porcentual con respecto a la solución analítica mediante ambas formulaciones analizadas del MPF para la convergencia de deflexiones y esfuerzos de diferentes grados de libertad. Además, en la Figura 6.13 se presenta la distribución de esfuerzos para la discretización de 833 puntos.

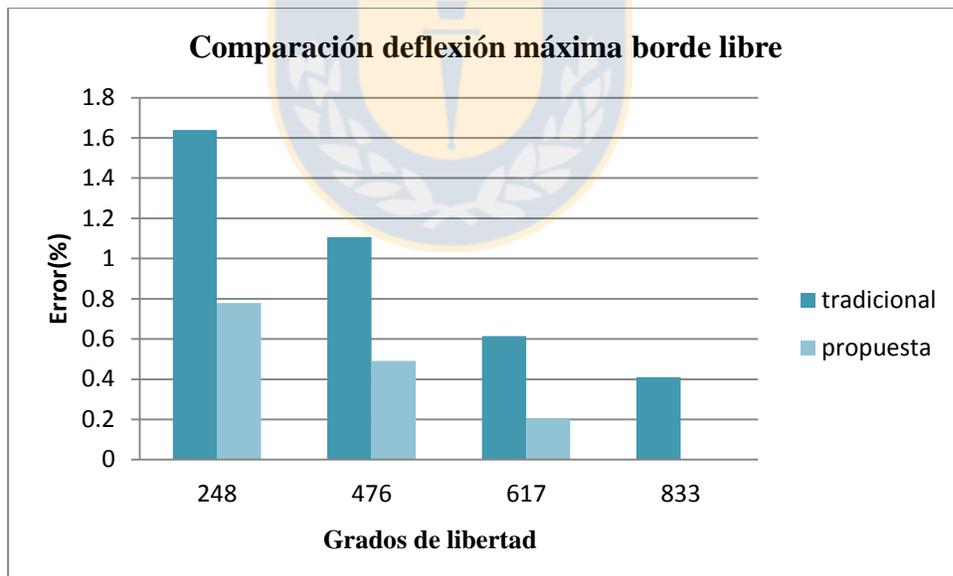


Figura 6.10 Convergencia de deflexión máxima en el punto central del borde libre

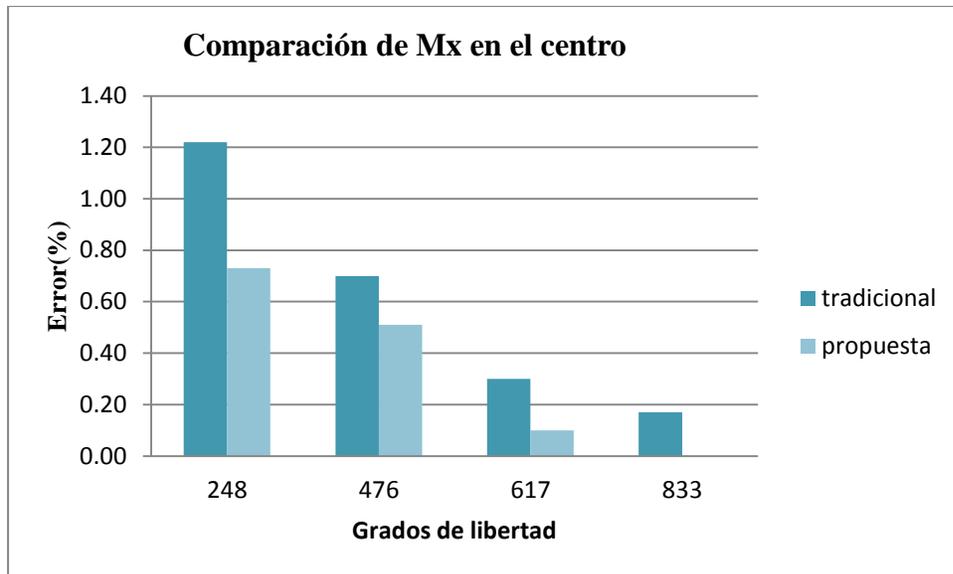


Figura 6.11 Comparación Mx en el centro

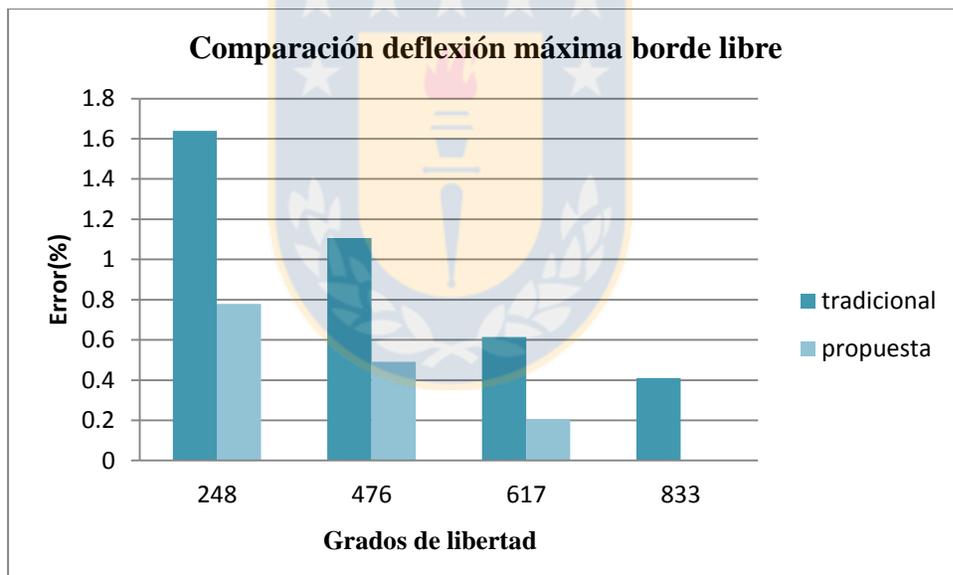


Figura 6.12 Comparación Mx máximo en el punto central del borde libre

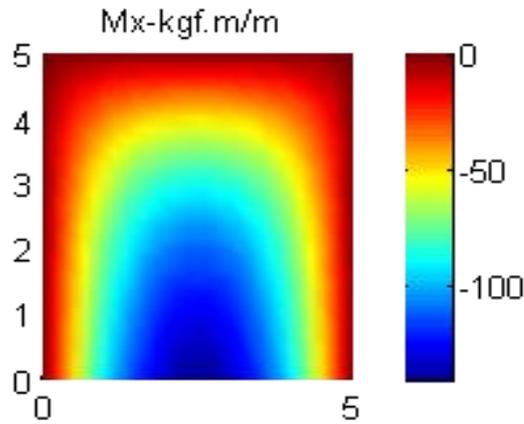


Figura 6.13 Distribución de momento flector en x para 833 puntos

A continuación, se presenta el tiempo computacional para los diferentes grados de libertad mediante ambas formulaciones analizadas.

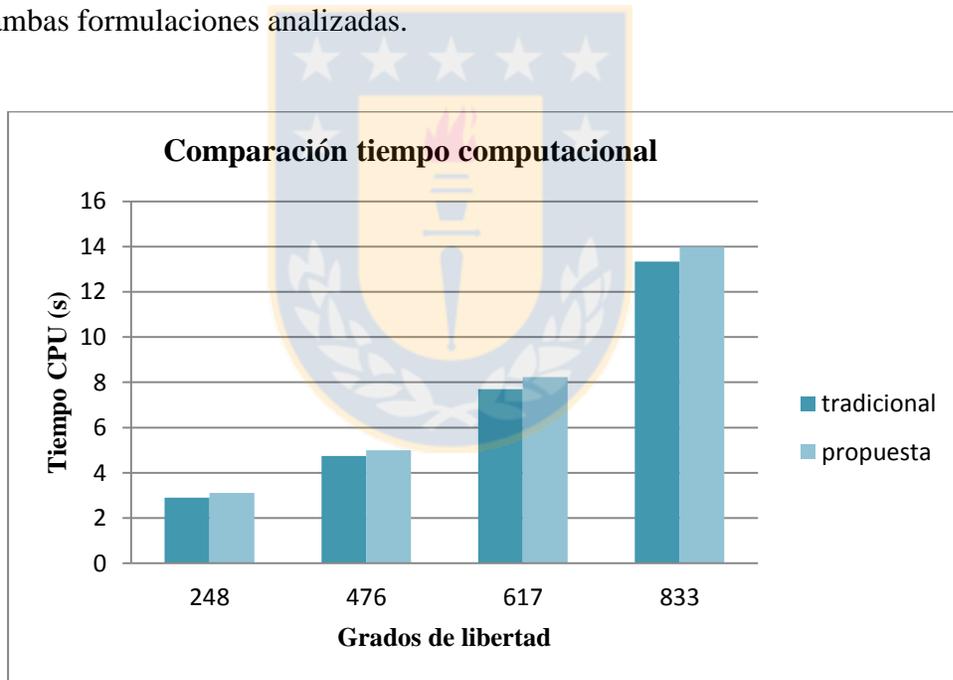


Figura 6.14 Tiempo computacional

De los resultados se observa que el error porcentual de la formulación tradicional para la convergencia de la deflexión en el borde libre disminuye en promedio en un 58,24% al utilizar la formulación propuesta, mientras que el error porcentual de la formulación tradicional para la convergencia del momento flector en x en el borde libre y en el centro disminuye en un 55,3% y

un 44,6 % respectivamente. El tiempo computacional para los grados de libertad analizados aumentan en promedio en un 6,2%.

6.4 Ejemplo 3

Como tercer ejemplo se analiza una placa circular empotrada en todo su contorno, de radio $R=3\text{m}$ (Figura 6.15). Además, se analiza sólo un cuarto de la placa debido a la simetría del problema.

Los datos del problema son los siguientes:

$$t = 0,1\text{m}, \quad \mu = 0,3, \quad E = 180000 \left(\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \right), \quad q = -50 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2} \text{ y } R = 3\text{m},$$

donde μ es el coeficiente de poisson, E el módulo de elasticidad, t el espesor, q el valor de la carga uniformemente repartida R es el radio de la placa.

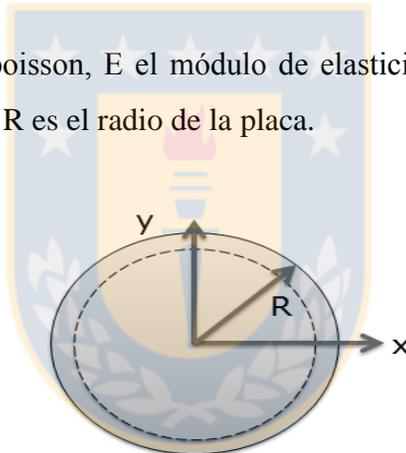


Figura 6.15 Placa circular con bordes empotrados

En la Figura 6.16, se presentan dos grillas de 450 y 596 puntos utilizadas en la modelación mediante el MPF.

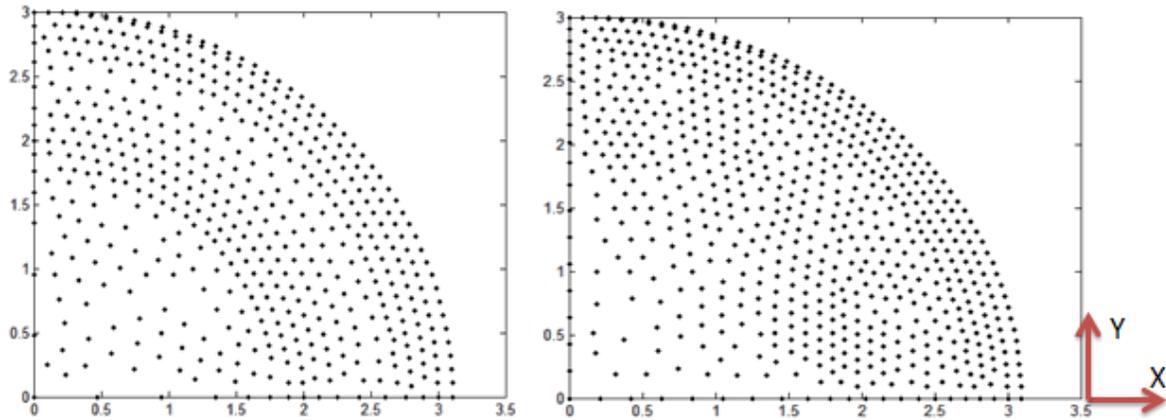


Figura 6.16 Grillas de 450 y 596 puntos

En las figuras 6.17, 6.18 y 6.19 se muestran una comparación de las formulaciones analizadas para la convergencia de deflexiones y esfuerzos de diferentes grados de libertad. Además, en la Figura 6.20 se presenta la distribución de esfuerzos para la discretización de 1007 puntos.

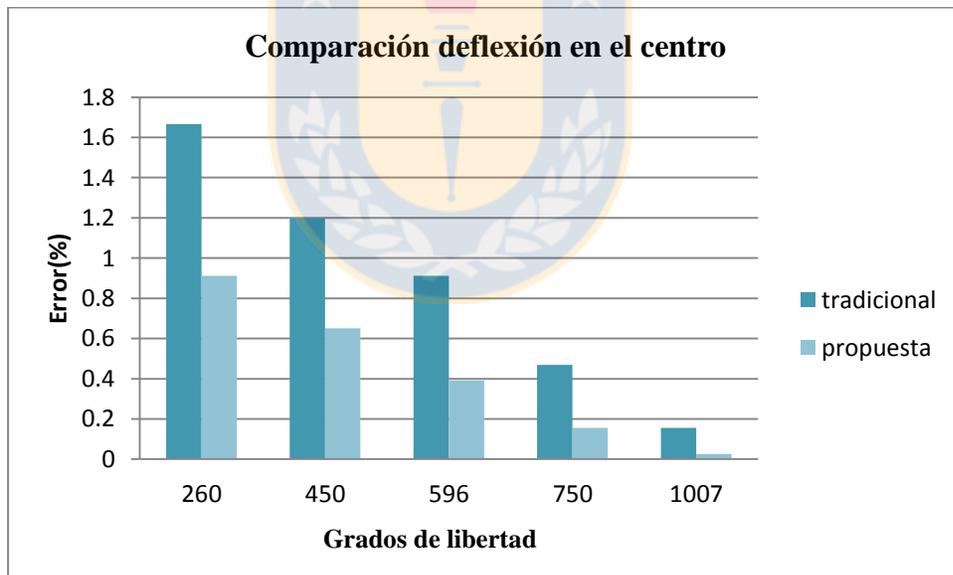


Figura 6.17 Convergencia de deflexión al centro

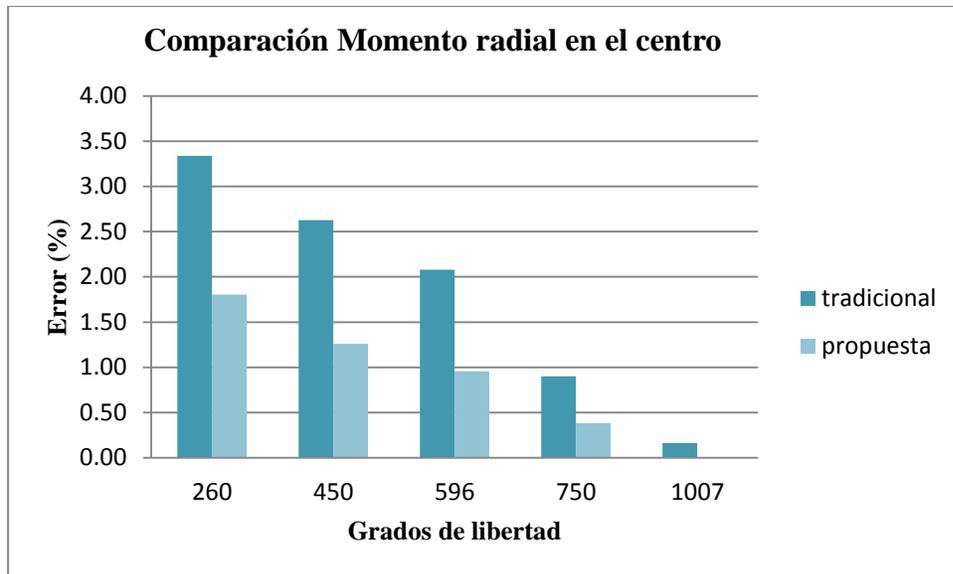


Figura 6.18 Comparación momento radial en el centro placa circular

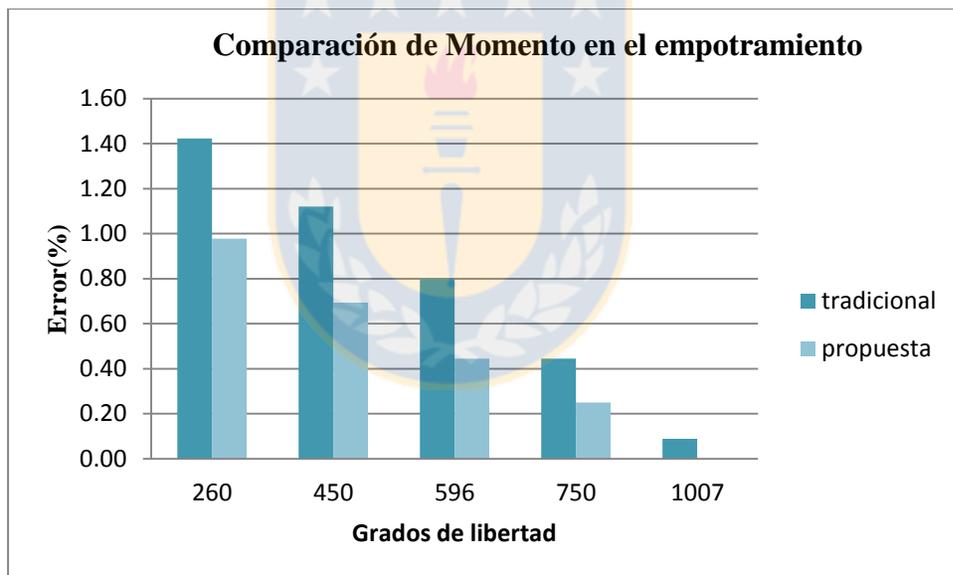


Figura 6.19 Convergencia momento máximo en el empotramiento de placa circular

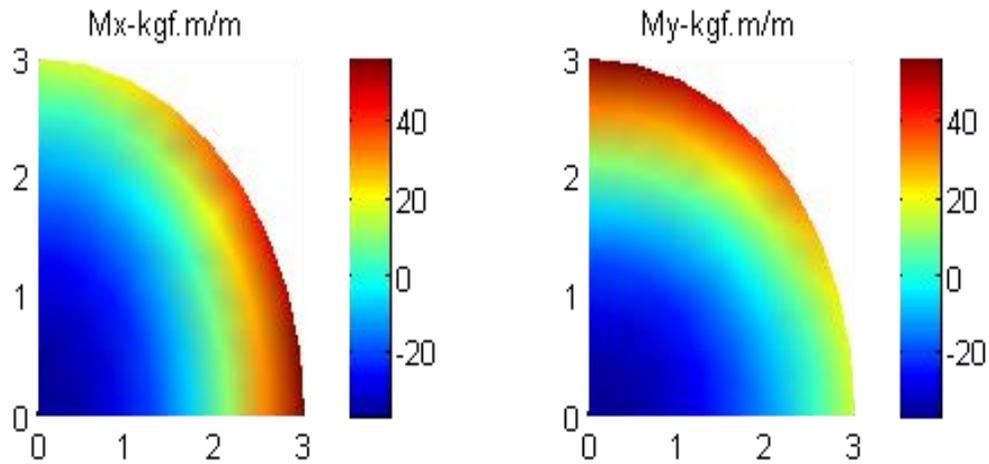


Figura 6.20 Distribución de momentos flectores para placa circular empotrada

A continuación, se presenta el tiempo computacional para los diferentes grados de libertad mediante ambas formulaciones analizadas.

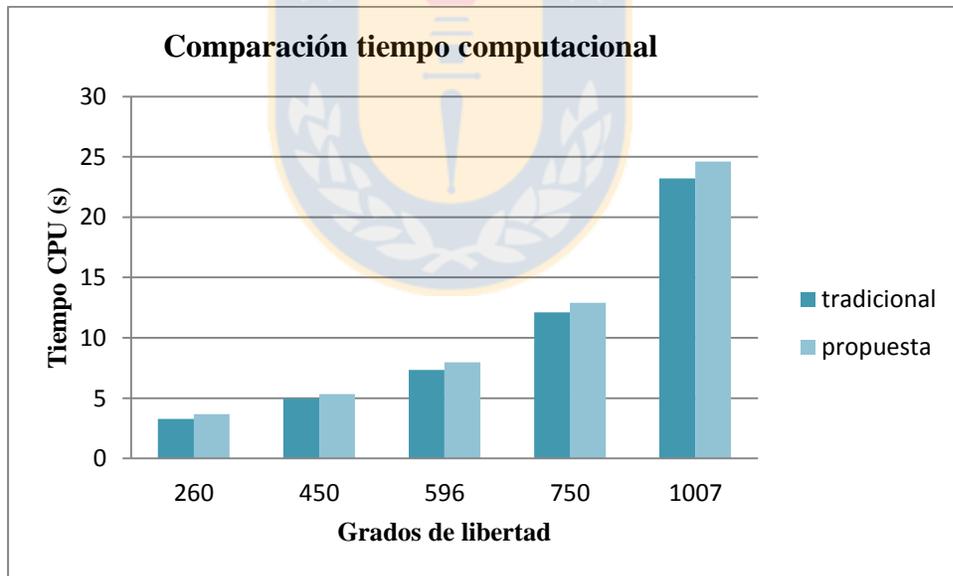


Figura 6.21 Tiempo computacional

De los resultados se observa que el error porcentual de la formulación tradicional para la convergencia de la deflexión en el centro disminuye en promedio en un 53,7 % al utilizar la formulación propuesta, mientras que el error porcentual de la formulación tradicional para la convergencia del momento radial en el centro y en el empotramiento disminuyen en un 52,4% y

un 47,9 % respectivamente. El tiempo computacional para los grados de libertad analizados aumentan en promedio en un 8,1%.

6.5 Ejemplo 4

A continuación, se presenta un ejemplo de aplicación numérica de una placa con un orificio empotrado en uno de sus lados (ver Figura 6.22). Los datos del problema son:

$$t = 0,1\text{m}, \quad \mu = 0,15, \quad E = 230000 \left(\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}\right), \quad q = -150 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2},$$

donde μ es el coeficiente de poisson, E el módulo de elasticidad, t el espesor, q el valor de la carga uniformemente repartida y a es la longitud de la placa en ambas direcciones.

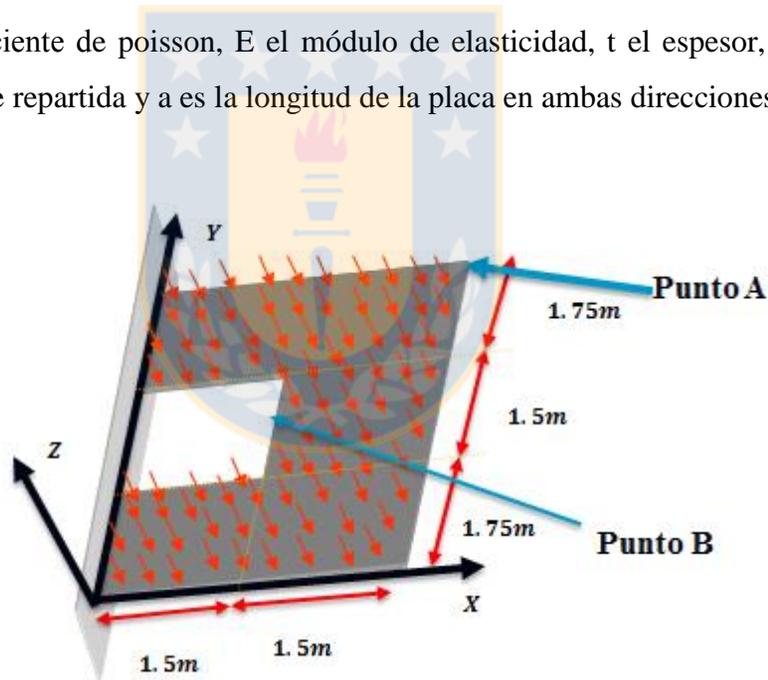


Figura 6.22 Placa con orificio empotrada en uno de sus lados

En la Figura 6.23, se presentan dos grillas de 372 y 927 puntos utilizadas en la modelación mediante el MPF.

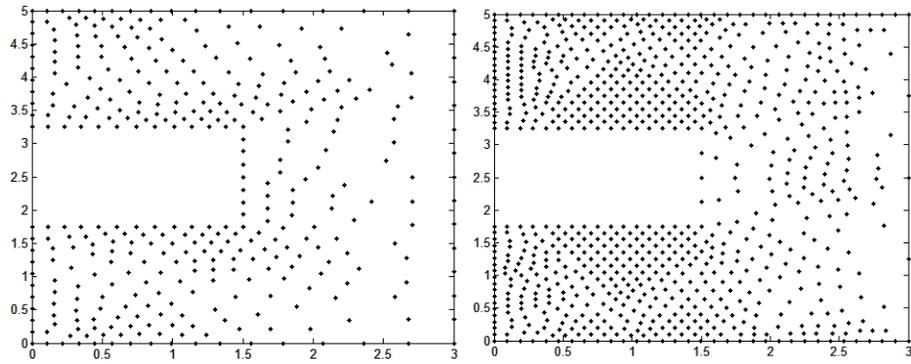


Figura 6.23 Grillas de 372 y 927 puntos

En las figuras 6.24 y 6.25 se muestran una comparación de las formulaciones analizadas para la convergencia de esfuerzos y deflexiones para diferentes grados de libertad. Además, en la Figura 6.26 se presenta la distribución de esfuerzos para la discretización de 927 puntos.

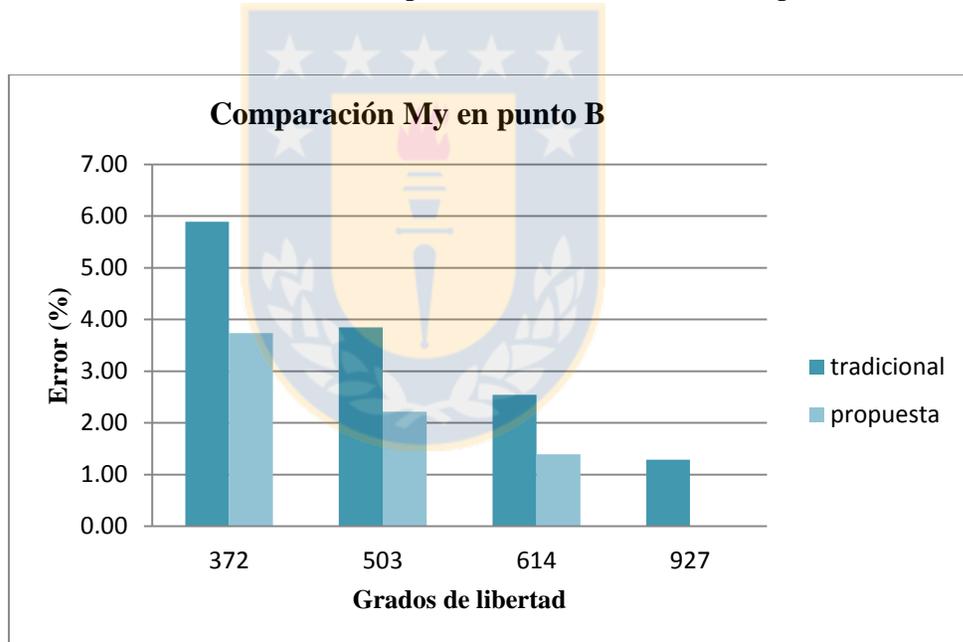


Figura 6.24 Comparación My en el punto B

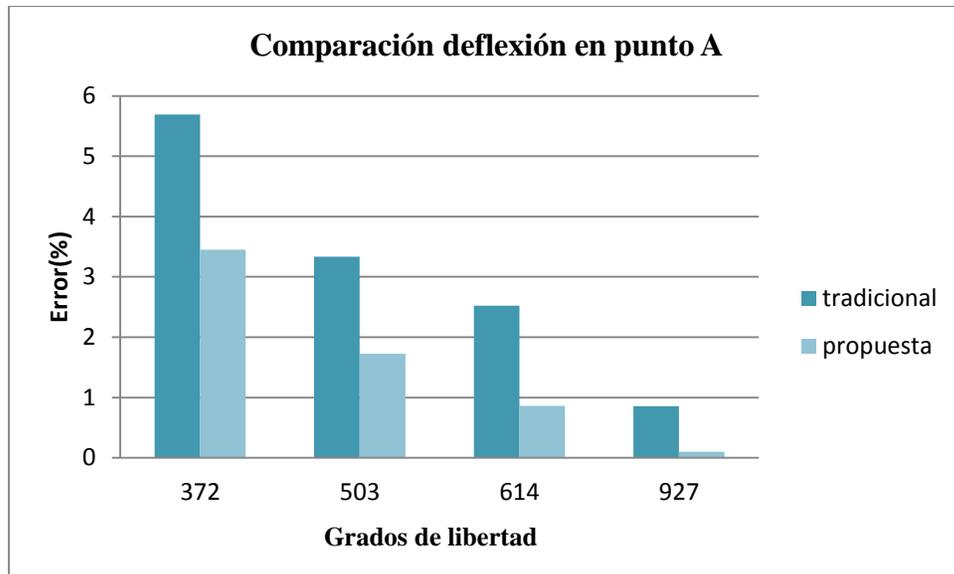


Figura 6.25 Comparación deflexión en el punto A

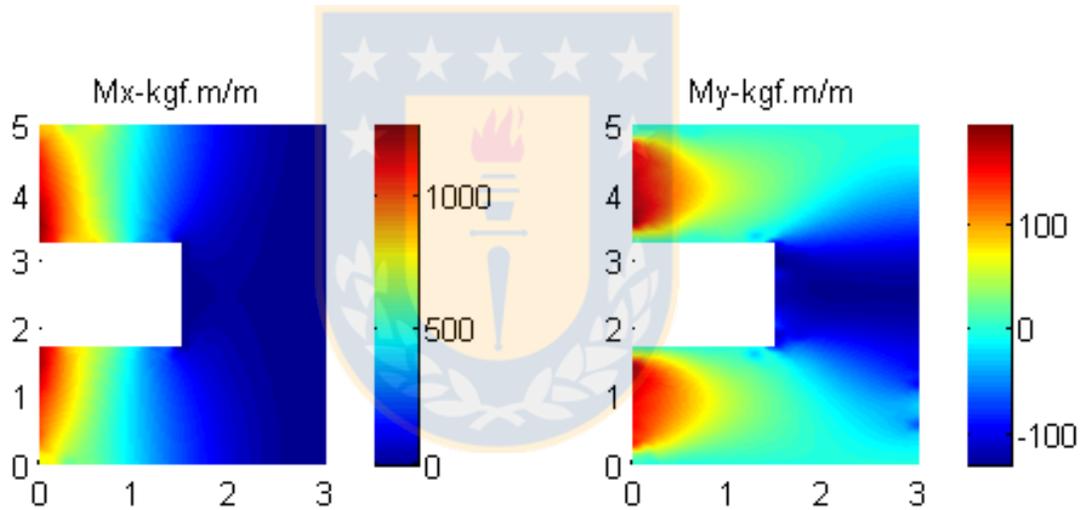


Figura 6.26 Distribución de momentos flectores con 927 nodos

A continuación, se presenta el tiempo computacional para los diferentes grados de libertad mediante ambas formulaciones analizadas.

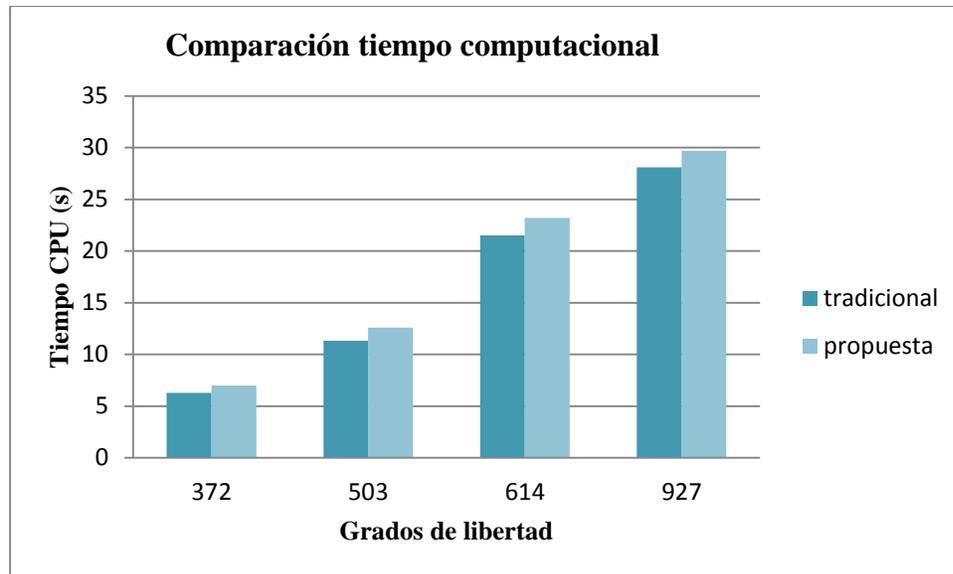


Figura 6.27 Tiempo computacional

De los resultados se observa que el error porcentual de la formulación tradicional para la convergencia de la deflexión en el punto A disminuye en promedio en un 51,2 % al utilizar la formulación propuesta, mientras que el error porcentual de la formulación tradicional para la convergencia M_y en el punto B disminuye en un 41,38 %. El tiempo computacional para los grados de libertad analizados aumentan en promedio en un 9,1%.

6.6 Conclusiones

A lo largo de este capítulo se analizaron diferentes problemas de flexión de placas delgadas, con la finalidad de demostrar que las modificaciones realizadas en este trabajo al MPF permiten obtener una solución numérica de mejor calidad que de forma tradicional.

Los resultados muestran que los mayores errores se producen en el ejemplo de la placa en voladizo con un orificio en uno de sus lados, lo cual se debe a que en dicho problema se imponen ecuaciones diferenciales de tercer orden en los bordes libres, en cambio en los demás ejemplos se imponen ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden. Dichas ecuaciones diferenciales son en función de las deflexiones, por lo que si se presentan errores en las deflexiones, estos se

incrementan en las ecuaciones de mayor orden (bordes libres). Además, dicha placa posee geometría más compleja, en la cual se deben imponer ecuaciones en ocho bordes diferentes, lo cual conlleva mayor error con respecto a la solución analítica, así como también mayor tiempo computacional.

Los resultados obtenidos fueron lo suficientemente satisfactorios como para validar el código implementado, puesto que se logró converger a la solución analítica en todos los ejemplos analizados.

Para los casos de estudio se observa que el error porcentual de la formulación tradicional con respecto a la solución analítica de la deflexión disminuye en promedio en un 50,6 % al utilizar la formulación propuesta, mientras que el error porcentual de la formulación tradicional con respecto a la solución analítica de los esfuerzos disminuyen en promedio en un 46,5%. Por otro lado, los tiempos computacionales de los casos de estudios aumentaron en promedio en un 7,7% con la formulación. El aumento del tiempo computacional con la formulación propuesta es bastante menor en comparación con el aumento de la exactitud numérica, por lo que se logra una mejora numérica con la formulación desarrollada.

CAPÍTULO 7 CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

Los resultados muestran que el uso de una base polinomial incompleta de quinto orden y de una función de peso *spline* cuártica en la formulación del MPF permite mejorar la calidad de la respuesta numérica en problemas de flexión de placas delgadas con respecto a la formulación tradicional, por lo que se valida la hipótesis planteada.

Se desarrolla e implementa numéricamente un método sin malla basado en el método de los puntos finitos (MPF) para la resolución de problemas de flexión de placas delgadas, utilizando tanto la metodología tradicional del MPF como la implementada en éste trabajo.

La relevancia del presente trabajo radica en que se demuestra la conveniencia utilizar una función de peso del tipo *spline* en vez de una de Gauss, puesto que no se requiere de la calibración de sus parámetros para cada tipo de problema, ya que sus constantes son obtenidas de forma teórica. Lo anterior, junto con la utilización de una base polinomial incompleta de quinto orden conllevan mejoras en la respuesta numérica a nivel de esfuerzos y deflexiones. Dado que se simplifican los parámetros a calcular en la función de ponderación es posible ajustar el soporte de la función de peso a un tamaño de 1.2 veces el tamaño de la nube, lo cual se demuestra numéricamente.

Para la obtención de las deflexiones y esfuerzos se utilizó la teoría clásica de Kirchhoff y Love. Dicha teoría considera que el giro que sufre una sección recta perpendicular al plano medio de la placa es igual a la pendiente de dicho plano, por lo que los giros se pueden aproximar por las derivadas de la deflexión. Lo anterior, permite considerar la deflexión como única incógnita de desplazamiento. Además, los supuestos planteados permiten simplificar el problema a dos dimensiones, puesto que se trata de un problema de tensión plana.

Distintos problemas de flexión de placas delgadas se analizaron mediante la comparación de la solución numérica con respecto a las soluciones analíticas, utilizando la formulación tradicional del MPF (aproximación de cuarto orden completa y función de peso exponencial de Gauss) y la propuesta en éste trabajo.

Para ello se realizó un análisis de convergencia de las deflexiones y esfuerzos obtenidos mediante ambas formulaciones analizadas con respecto a la solución teórica. De los resultados se concluyó que la utilización de una base polinomial incompleta de quinto orden y de una función de peso *spline* cuártica en el MPF presentan mejores resultados numéricos para problemas de flexión de placas que una formulación basada en una función de peso exponencial de Gauss y una base polinomial completa de cuarto orden.

Lo anterior, se debe a que la base incompleta de quinta orden propuesta permite mantener la forma polinómica de las derivadas cuartas de las funciones de forma. Por otro lado, la función de peso *spline* cuártica se ajusta de mejor manera al problema de flexión de placas que una función de peso exponencial, puesto que dicho problema está gobernado por una ecuación diferencial de cuarto orden.

Los peores resultados fueron obtenidos en la placa con un orificio empotrada en uno de sus lados, lo cual se debe a que en dicho problema posee seis bordes libres en los que se deben imponer ecuaciones diferenciales que son función de las deflexiones al cubo, en cambio en los bordes empotrados o simplemente apoyados se imponen ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, respectivamente. De lo anterior, se deduce que si se presentan errores en las deflexiones, estos se incrementan en mayor medida en los bordes libres que en los empotrados y simplemente apoyados.

Se observó que el MPF requiere de un reducido número de puntos para obtener una exactitud razonable de la respuesta, puesto que para más de 300 grados de libertad se obtuvo un error inferior al 5 % para los casos de estudios.

Se observó que en una placa circular uniformemente cargada existe simetría polar; en cambio, en una placa cuadrada la simetría es con respecto a ambos ejes.

El MPF se presenta como un método numérico que destaca por su sencillez en la etapa de preproceso de la modelación, puesto que es capaz de obtener aproximaciones sin ser necesaria la construcción de una malla, ni realizar integración alguna. Los buenos resultados obtenidos,

incluso con densidades bajas de puntos lo transforman en un método eficiente para la solución de problemas de flexión de placas delgadas.

El desarrollo de futuras investigaciones estará orientado a estudiar la formulación propuesta en problemas de mayor complejidad tales como pandeo de placas y flexión de placas de grandes desplazamientos.



REFERENCIAS

Abdollahifar, A., M. Nami y A.Shafiei (2012) A new MLPG method for elastostatic problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**. **36(3)** . 451–457.

Afshar, M., y M. Lashckarbolok (2008) Collocated discrete least-squares (CDLS) meshless method: error estimate and adaptive refinement. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**. **56(6)**. 1909–1928.

Arcos, G. (2014) **El método de los puntos finitos en problemas de flexión de placas delgadas**. Memoria de Título Ingeniero Civil. Departamento de Ingeniería Civil. Universidad de Concepción. Concepción.

Atluri, S., y T. Zhu (1998) A new meshless local Petrov- Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. **Computational Mechanics**. **22(2)**. 117–127.

Atluri, S., y T. Zhu (2000) New concepts in meshless methods. **International Journal for Numerical Methods inEngineering**. **47(1-3)**. 537-556.

J. T. Batina (1993) A gridless Euler/Navier-Stokes solution algorithm for complex-aircraft applications. AIAA Paper 93-0333, 1993.

Belytschko, T., Y. Lu y L. Gu.(1994) Element free galerkin methods. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. **37(2)**. 229-256.

Bitaraf, M., y S. Mohammadi (2005) Solving partial differential equations for plate bending problems using finite point method. **Proceedings of Ecomas Thematic conference on meshless method**. Lisboa. Portugal. Julio 2005.

Bitaraf, M., y S. Mohammadi (2008) Analysis of Chloride Diffusion in Concrete Structures for Prediction of Initiation Time of Corrosion Using A New Meshless Approach. **Construction and Building Materials**. **22(4)**. 546–556.

Bitaraf, M., y S. Mohammadi (2010) Large Deflection Analysis of Flexible Plates by the Finite Point Method. **Thin-Walled Structures Journal**. **48(3)**. 200-214.

Bui, T., y T. Nguyen (2009) A moving Kriging interpolation-based meshless method for numerical simulation of Kirchhoff plate problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. **77(10)**. 1371–1395.

Cao, Y., L. Yaob y S. Yic (2014) A weighted nodal-radial point interpolation meshless method for 2D solid problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**. **39**. 88–100.

Chen, X., G. Liu, y S. Lim (2003) An element free Galerkin method for the free vibration analysis of composite laminates of complicated shape. **Composite Structures**. **59(2)**. 279–289.

CIMNE (2005) **MAT-fem. Versión 1.0**. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Barcelona.

CIMNE (2011) **GiD. Versión 11.0.6**. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Barcelona.

Cui, X., G. Liu y G. Li (2011) A smoothed Hermite radial point interpolation method for thin plate analysis. **Archive of Applied Mechanics**. **81(1)**. 1-18.

Duarte C., y J. Oden (1996) *Anh*-adaptive method using clouds. **Computers Methods Applications for Mechanic Engineering**. **139(1-4)**. 237-262.

Gu, Y. y G. Liu (2001) A meshless local Petrov- Galerkin (MLPG) formulation for static and free vibration analysis of thin plates. **Computer Modeling in Engineering & Sciences**. **2(4)** .463-476.

Gu, Y. (2005) Meshfree methods and their comparisons. **International Journal of Computational Methods**. **2(4)**. 477–515.

Ipinza, N., Perazzo, F., Aranda, J. y L. Pérez (2007) Generación de sub-dominios locales de interpolación en un método sin malla. **Ingeniare Revista chilena de ingeniería**, 15(2). 204-215, 2007.

Krysl, P., y T. Belytschko (1995) Analysis of thin plates by the element-free Galerkin method. **Computational Mechanics**. **17(1-2)**. 26–35.

Lam, K., Q. Wang y H. Li (2004) A novel meshless approach – local Kriging (LoKriging) method with two-dimensional structural analysis. **Computational Mechanics**. **33(3)**. 235–44.

Lancaster, P. y K. Salkauskas (1981) Surfaces generated by moving least squares methods. **Mathematics of Computation**. **37(155)**.141-158.

Li, S., y W.Liu (2002) Meshfree and particle methods and their applications. **Applied Mechanics Review**. **55(1)**. 1–34.

Liszka, T., y J. Orkisz (1980) The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics. **Computers & Structures**. **11**. 83-95.

Liu, W., S. Jun e Y.Zhang (1995) Reproducing kernel particle methods. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**. **20(8-9)**. 1081–1106.

Liu, G.R. e Y.T. Gu (2005) **An introduction to meshfree methods and their programming**. Springer. Dordrecht.

Liu, Y., Y. Hon y K.Liew (2006) A meshfree Hermite-type radial point interpolation method for Kirchhoff plate problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. **66 (7)**. 1153–1178.

Liu, G., (2010) **Meshfree Methods: Moving beyond the Finite Element Method**. Segunda edición. CRC Press. Boca Ratón.

Löhner R., C. Sacco, E. Oñate y S. Idelsohn (2002) A finite point method for compressible flow. **International Journal for Numerical Method for Engineering**. **53(8)**. 1765-1779.

Long, S. y S. Atluri (2002) A meshless local Petrov- Galerkin method for solving the bending problem of a thin plate. **Computer Modeling in Engineering & Sciences**. **3(1)**. 53-63.

Lucy, L., (1977). A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. **Astronomical Journal**. **82**. 1013–1024.

Nayroles, B., G. Touzot y P. Villon (1992) Generalizing the fem: Diffuse approximation and diffuse elements. **Computational Mechanics**. **10(5)**. 307-318.

Nguyen, V., T. Rabczuk, S. Bordas y M. Duflot (2008) Meshless methods: a review and computer implementation aspects. **Mathematics and Computers in Simulation**. **79(3)**. 763–813.

Oh, H., C. Davis y J. Jeong (2012) Meshfree particle methods for thin plates. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. **209–212**. 156-171.

Oñate, E., S. Idelsohn, O. Zienkiewicz y C. Sacco (1996) A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. **Computers Methods Applications for Mechanic Engineering**. **139 (1-4)**. 315-346.

Oñate, E., y S. Idelsohn (1998) A mesh free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems. **Computational Mechanics**. **21(4-5)**. 283-292.

Oñate, E., C. Sacco y S. Idelsohn (2000) A finite point method for incompressible flow problems. **Computer Visual Science. 3(1-2).** 67-75.

Oñate, E., F. Perazzo y J. Miquel (2001) A finite point method for elasticity problems. **Computer and Structures. 79 (22-25).** 2151-2163.

Perazzo, F., J. Miquel y E. Oñate (2004) El método de puntos finitos para problemas de dinámica de sólidos. **Revista Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. 20(3).** 235-246.

Perazzo, F., S. Oller, J. Miquel, E. Oñate (2006) Avances en el método de puntos finitos para la mecánica de sólidos. **Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería. 22(2).** 153-167

Pérez, L., F. Perazzo y C. Spa (2011) Simulación numérica del comportamiento no-lineal de materiales utilizando el método sin malla de puntos finitos. **Ingeniare. Revista chilena de ingeniería. 19(3).** 336-350.

Pérez, L., F. Pérez y O. Duran (2012). Correction of meshless FPM interpolation sub-domains using genetic algorithms. **Studies in informatics and control. 21(2).** 191-200.

Riquelme, F. (2003) **El Método de los Puntos Finitos en Problemas de Elastodinámica.** Memoria de Título Ingeniero Civil. Departamento de Ingeniería Civil. Universidad de Concepción. Concepción.

Timoshenko, S., y S. Woinowsky-Krieger (1995) **Theory of plates and shells.** Segunda edición. McGraw-Hill Book Company. Singapur.

Wang, J., y G. Liu (2002) A point interpolation meshless method based on radial basis functions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering. 54(11).** 1623-1648.

Wang, Q., H. Li y K. Lam (2005) Development of a new meshless point weighted least-squares (PWLS) method for computational mechanics. **Computational Mechanics**. **35(3)**. 170-181.



ANEXO 4.1: INVERTIBILIDAD DE MATRIZ A

La matriz de momento o A esta dada por la siguiente expresión:

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{W}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{P} \quad (\text{A.4.1})$$

La matriz A es invertible si y sólo si su determinante es distinto de cero, puesto que la inversa de una matriz satisface la siguiente igualdad:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A), \quad (\text{A.4.2})$$

donde $|A|$ es el determinante de A y $\text{adj}(A)$ es la matriz de adjuntos de A.

De acuerdo a las propiedades de los determinantes se obtiene lo siguiente:

$$|\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{P}| = |(\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{W}) \cdot \mathbf{P}| = |(\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{W})| \cdot |\mathbf{P}| = |\mathbf{P}^T| \cdot |\mathbf{W}| \cdot |\mathbf{P}| \quad (\text{A.4.3})$$

La matriz de la función de peso es diagonal, por lo que su determinante se obtiene como la multiplicación de los elementos de la diagonal. Además, ningún nodo se ubica en la frontera del soporte de la función de peso, por lo que estos se les asignan ponderaciones diferentes de cero. De lo anterior, se deduce que el determinante de la matriz W (función de peso) es diferente de cero.

Por otro lado, la matriz P correspondiente a la base polinomial de quinto orden propuesta en este trabajo está dada por:

$$P = \begin{bmatrix}
 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & y_1^3 & x_1^4 & x_1^3 y_1 & x_1^2 y_1^2 & x_1 y_1^3 & y_1^4 & x_1^4 y_1 & x_1 y_1^4 \\
 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2 y_2 & x_2 y_2^2 & y_2^3 & x_2^4 & x_2^3 y_2 & x_2^2 y_2^2 & x_2 y_2^3 & y_2^4 & x_2^4 y_2 & x_2 y_2^4 \\
 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2 y_3 & x_3 y_3^2 & y_3^3 & x_3^4 & x_3^3 y_3 & x_3^2 y_3^2 & x_3 y_3^3 & y_3^4 & x_3^4 y_3 & x_3 y_3^4 \\
 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4^3 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 & y_4^3 & x_4^4 & x_4^3 y_4 & x_4^2 y_4^2 & x_4 y_4^3 & y_4^4 & x_4^4 y_4 & x_4 y_4^4 \\
 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 & x_5^3 & x_5^2 y_5 & x_5 y_5^2 & y_5^3 & x_5^4 & x_5^3 y_5 & x_5^2 y_5^2 & x_5 y_5^3 & y_5^4 & x_5^4 y_5 & x_5 y_5^4 \\
 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6 y_6 & y_6^2 & x_6^3 & x_6^2 y_6 & x_6 y_6^2 & y_6^3 & x_6^4 & x_6^3 y_6 & x_6^2 y_6^2 & x_6 y_6^3 & y_6^4 & x_6^4 y_6 & x_6 y_6^4 \\
 1 & x_7 & y_7 & x_7^2 & x_7 y_7 & y_7^2 & x_7^3 & x_7^2 y_7 & x_7 y_7^2 & y_7^3 & x_7^4 & x_7^3 y_7 & x_7^2 y_7^2 & x_7 y_7^3 & y_7^4 & x_7^4 y_7 & x_7 y_7^4 \\
 1 & x_8 & y_8 & x_8^2 & x_8 y_8 & y_8^2 & x_8^3 & x_8^2 y_8 & x_8 y_8^2 & y_8^3 & x_8^4 & x_8^3 y_8 & x_8^2 y_8^2 & x_8 y_8^3 & y_8^4 & x_8^4 y_8 & x_8 y_8^4 \\
 1 & x_9 & y_9 & x_9^2 & x_9 y_9 & y_9^2 & x_9^3 & x_9^2 y_9 & x_9 y_9^2 & y_9^3 & x_9^4 & x_9^3 y_9 & x_9^2 y_9^2 & x_9 y_9^3 & y_9^4 & x_9^4 y_9 & x_9 y_9^4 \\
 1 & x_{10} & y_{10} & x_{10}^2 & x_{10} y_{10} & y_{10}^2 & x_{10}^3 & x_{10}^2 y_{10} & x_{10} y_{10}^2 & y_{10}^3 & x_{10}^4 & x_{10}^3 y_{10} & x_{10}^2 y_{10}^2 & x_{10} y_{10}^3 & y_{10}^4 & x_{10}^4 y_{10} & x_{10} y_{10}^4 \\
 1 & x_{11} & y_{11} & x_{11}^2 & x_{11} y_{11} & y_{11}^2 & x_{11}^3 & x_{11}^2 y_{11} & x_{11} y_{11}^2 & y_{11}^3 & x_{11}^4 & x_{11}^3 y_{11} & x_{11}^2 y_{11}^2 & x_{11} y_{11}^3 & y_{11}^4 & x_{11}^4 y_{11} & x_{11} y_{11}^4 \\
 1 & x_{12} & y_{12} & x_{12}^2 & x_{12} y_{12} & y_{12}^2 & x_{12}^3 & x_{12}^2 y_{12} & x_{12} y_{12}^2 & y_{12}^3 & x_{12}^4 & x_{12}^3 y_{12} & x_{12}^2 y_{12}^2 & x_{12} y_{12}^3 & y_{12}^4 & x_{12}^4 y_{12} & x_{12} y_{12}^4 \\
 1 & x_{13} & y_{13} & x_{13}^2 & x_{13} y_{13} & y_{13}^2 & x_{13}^3 & x_{13}^2 y_{13} & x_{13} y_{13}^2 & y_{13}^3 & x_{13}^4 & x_{13}^3 y_{13} & x_{13}^2 y_{13}^2 & x_{13} y_{13}^3 & y_{13}^4 & x_{13}^4 y_{13} & x_{13} y_{13}^4 \\
 1 & x_{14} & y_{14} & x_{14}^2 & x_{14} y_{14} & y_{14}^2 & x_{14}^3 & x_{14}^2 y_{14} & x_{14} y_{14}^2 & y_{14}^3 & x_{14}^4 & x_{14}^3 y_{14} & x_{14}^2 y_{14}^2 & x_{14} y_{14}^3 & y_{14}^4 & x_{14}^4 y_{14} & x_{14} y_{14}^4 \\
 1 & x_{15} & y_{15} & x_{15}^2 & x_{15} y_{15} & y_{15}^2 & x_{15}^3 & x_{15}^2 y_{15} & x_{15} y_{15}^2 & y_{15}^3 & x_{15}^4 & x_{15}^3 y_{15} & x_{15}^2 y_{15}^2 & x_{15} y_{15}^3 & y_{15}^4 & x_{15}^4 y_{15} & x_{15} y_{15}^4 \\
 1 & x_{16} & y_{16} & x_{16}^2 & x_{16} y_{16} & y_{16}^2 & x_{16}^3 & x_{16}^2 y_{16} & x_{16} y_{16}^2 & y_{16}^3 & x_{16}^4 & x_{16}^3 y_{16} & x_{16}^2 y_{16}^2 & x_{16} y_{16}^3 & y_{16}^4 & x_{16}^4 y_{16} & x_{16} y_{16}^4 \\
 1 & x_{17} & y_{17} & x_{17}^2 & x_{17} y_{17} & y_{17}^2 & x_{17}^3 & x_{17}^2 y_{17} & x_{17} y_{17}^2 & y_{17}^3 & x_{17}^4 & x_{17}^3 y_{17} & x_{17}^2 y_{17}^2 & x_{17} y_{17}^3 & y_{17}^4 & x_{17}^4 y_{17} & x_{17} y_{17}^4
 \end{bmatrix}$$

(A.4.4)

El determinante de la matriz P se obtiene mediante el método del pivote. Para ello se utiliza una propiedad que permite sumar a los elementos de una columna del determinante con los correspondientes de otras paralelas multiplicados por un número o elemento, sin variar el valor del determinante.

Basándose en esta propiedad, se realiza la siguiente operación elemental sobre cada columna $C_i = C_i - (b \cdot C_1)$, donde b es el primer elemento de la columna C_i . Esta operación no afecta al determinante, por lo que se obtiene lo siguiente:

$$|P| = \begin{vmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 1 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2 y_2 - x_1 y_1 & y_2^2 - y_1^2 & \dots & \dots & \dots & y_2^4 - y_1^4 & x_2^4 y_2 - x_1^4 y_1 & x_2 y_2^4 - x_2 y_1^4 \\
 1 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & x_3^2 - x_1^2 & x_3 y_3 - x_1 y_1 & y_3^2 - y_1^2 & \dots & \dots & \dots & y_3^4 - y_1^4 & x_3^4 y_3 - x_1^4 y_1 & x_3 y_3^4 - x_2 y_1^4 \\
 1 & x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & x_4^2 - x_1^2 & x_4 y_4 - x_1 y_1 & y_4^2 - y_1^2 & \dots & \dots & \dots & y_4^4 - y_1^4 & x_4^4 y_4 - x_1^4 y_1 & x_4 y_4^4 - x_2 y_1^4 \\
 1 & x_5 - x_1 & y_5 - y_1 & x_5^2 - x_1^2 & x_5 y_5 - x_1 y_1 & y_5^2 - y_1^2 & \dots & \dots & \dots & y_5^4 - y_1^4 & x_5^4 y_5 - x_1^4 y_1 & x_5 y_5^4 - x_2 y_1^4 \\
 1 & x_6 - x_1 & y_6 - y_1 & x_6^2 - x_1^2 & x_6 y_6 - x_1 y_1 & y_6^2 - y_1^2 & \dots & \dots & \dots & y_6^4 - y_1^4 & x_6^4 y_6 - x_1^4 y_1 & x_6 y_6^4 - x_2 y_1^4 \\
 1 & x_7 - x_1 & y_7 - y_1 & x_7^2 - x_1^2 & x_7 y_7 - x_1 y_1 & y_7^2 - y_1^2 & \dots & \dots & \dots & y_7^4 - y_1^4 & x_7^4 y_7 - x_1^4 y_1 & x_7 y_7^4 - x_2 y_1^4 \\
 1 & x_8 - x_1 & y_8 - y_1 & x_8^2 - x_1^2 & x_8 y_8 - x_1 y_1 & y_8^2 - y_1^2 & \dots & \dots & \dots & y_8^4 - y_1^4 & x_8^4 y_8 - x_1^4 y_1 & x_8 y_8^4 - x_2 y_1^4 \\
 1 & x_9 - x_1 & y_9 - y_1 & x_9^2 - x_1^2 & x_9 y_9 - x_1 y_1 & y_9^2 - y_1^2 & \dots & \dots & \dots & y_9^4 - y_1^4 & x_9^4 y_9 - x_1^4 y_1 & x_9 y_9^4 - x_2 y_1^4 \\
 1 & x_{10} - x_1 & y_{10} - y_1 & x_{10}^2 - x_1^2 & x_{10} y_{10} - x_1 y_1 & y_{10}^2 - y_1^2 & \dots & \dots & \dots & y_{10}^4 - y_1^4 & x_{10}^4 y_{10} - x_1^4 y_1 & x_{10} y_{10}^4 - x_2 y_1^4 \\
 1 & x_{11} - x_1 & y_{11} - y_1 & x_{11}^2 - x_1^2 & x_{11} y_{11} - x_1 y_1 & y_{11}^2 - y_1^2 & \dots & \dots & \dots & y_{11}^4 - y_1^4 & x_{11}^4 y_{11} - x_1^4 y_1 & x_{11} y_{11}^4 - x_2 y_1^4 \\
 1 & x_{12} - x_1 & y_{12} - y_1 & x_{12}^2 - x_1^2 & x_{12} y_{12} - x_1 y_1 & y_{12}^2 - y_1^2 & \dots & \dots & \dots & y_{12}^4 - y_1^4 & x_{12}^4 y_{12} - x_1^4 y_1 & x_{12} y_{12}^4 - x_2 y_1^4 \\
 1 & x_{13} - x_1 & y_{13} - y_1 & x_{13}^2 - x_1^2 & x_{13} y_{13} - x_1 y_1 & y_{13}^2 - y_1^2 & \dots & \dots & \dots & y_{13}^4 - y_1^4 & x_{13}^4 y_{13} - x_1^4 y_1 & x_{13} y_{13}^4 - x_2 y_1^4 \\
 1 & x_{14} - x_1 & y_{14} - y_1 & x_{14}^2 - x_1^2 & x_{14} y_{14} - x_1 y_1 & y_{14}^2 - y_1^2 & \dots & \dots & \dots & y_{14}^4 - y_1^4 & x_{14}^4 y_{14} - x_1^4 y_1 & x_{14} y_{14}^4 - x_2 y_1^4 \\
 1 & x_{15} - x_1 & y_{15} - y_1 & x_{15}^2 - x_1^2 & x_{15} y_{15} - x_1 y_1 & y_{15}^2 - y_1^2 & \dots & \dots & \dots & y_{15}^4 - y_1^4 & x_{15}^4 y_{15} - x_1^4 y_1 & x_{15} y_{15}^4 - x_2 y_1^4 \\
 1 & x_{16} - x_1 & y_{16} - y_1 & x_{16}^2 - x_1^2 & x_{16} y_{16} - x_1 y_1 & y_{16}^2 - y_1^2 & \dots & \dots & \dots & y_{16}^4 - y_1^4 & x_{16}^4 y_{16} - x_1^4 y_1 & x_{16} y_{16}^4 - x_2 y_1^4 \\
 1 & x_{17} - x_1 & y_{17} - y_1 & x_{17}^2 - x_1^2 & x_{17} y_{17} - x_1 y_1 & y_{17}^2 - y_1^2 & \dots & \dots & \dots & y_{17}^4 - y_1^4 & x_{17}^4 y_{17} - x_1^4 y_1 & x_{17} y_{17}^4 - x_2 y_1^4
 \end{vmatrix}$$

(A.4.5)

Calculando el determinante, se elimina la primera fila de ceros y la primera columna de unos, reduciendo a un determinante de orden menor (matriz 16x16):

$$|P| = \begin{vmatrix}
 x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2 y_2 - x_1 y_1 & y_2^2 - y_1^2 & \cdots & \cdots & y_2^4 - y_1^4 & x_2^4 y_2 - x_1^4 y_1 & x_2 y_2^4 - x_2 y_1^4 \\
 x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & x_3^2 - x_1^2 & x_3 y_3 - x_1 y_1 & y_3^2 - y_1^2 & \cdots & \cdots & y_3^4 - y_1^4 & x_3^4 y_3 - x_1^4 y_1 & x_3 y_3^4 - x_2 y_1^4 \\
 x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & x_4^2 - x_1^2 & x_4 y_4 - x_1 y_1 & y_4^2 - y_1^2 & \cdots & \cdots & y_4^4 - y_1^4 & x_4^4 y_4 - x_1^4 y_1 & x_4 y_4^4 - x_2 y_1^4 \\
 x_5 - x_1 & y_5 - y_1 & x_5^2 - x_1^2 & x_5 y_5 - x_1 y_1 & y_5^2 - y_1^2 & \cdots & \cdots & y_5^4 - y_1^4 & x_5^4 y_5 - x_1^4 y_1 & x_5 y_5^4 - x_2 y_1^4 \\
 x_6 - x_1 & y_6 - y_1 & x_6^2 - x_1^2 & x_6 y_6 - x_1 y_1 & y_6^2 - y_1^2 & \cdots & \cdots & y_6^4 - y_1^4 & x_6^4 y_6 - x_1^4 y_1 & x_6 y_6^4 - x_2 y_1^4 \\
 x_7 - x_1 & y_7 - y_6 & x_7^2 - x_1^2 & x_7 y_7 - x_1 y_1 & y_7^2 - y_1^2 & \cdots & \cdots & y_7^4 - y_1^4 & x_7^4 y_7 - x_1^4 y_1 & x_7 y_7^4 - x_2 y_1^4 \\
 x_8 - x_1 & y_8 - y_1 & x_8^2 - x_1^2 & x_8 y_8 - x_1 y_1 & y_8^2 - y_1^2 & \cdots & \cdots & y_8^4 - y_1^4 & x_8^4 y_8 - x_1^4 y_1 & x_8 y_8^4 - x_2 y_1^4 \\
 x_9 - x_1 & y_9 - y_1 & x_9^2 - x_1^2 & x_9 y_9 - x_1 y_1 & y_9^2 - y_1^2 & \cdots & \cdots & y_9^4 - y_1^4 & x_9^4 y_9 - x_1^4 y_1 & x_9 y_9^4 - x_2 y_1^4 \\
 x_{10} - x_1 & y_{10} - y_1 & x_{10}^2 - x_1^2 & x_{10} y_{10} - x_1 y_1 & y_{10}^2 - y_1^2 & \cdots & \cdots & y_{10}^4 - y_1^4 & x_{10}^4 y_{10} - x_1^4 y_1 & x_{10} y_{10}^4 - x_2 y_1^4 \\
 x_{11} - x_1 & y_{11} - y_1 & x_{11}^2 - x_1^2 & x_{11} y_{11} - x_1 y_1 & y_{11}^2 - y_1^2 & \cdots & \cdots & y_{11}^4 - y_1^4 & x_{11}^4 y_{11} - x_1^4 y_1 & x_{11} y_{11}^4 - x_2 y_1^4 \\
 x_{12} - x_1 & y_{12} - y_1 & x_{12}^2 - x_1^2 & x_{12} y_{12} - x_1 y_1 & y_{12}^2 - y_1^2 & \cdots & \cdots & y_{12}^4 - y_1^4 & x_{12}^4 y_{12} - x_1^4 y_1 & x_{12} y_{12}^4 - x_2 y_1^4 \\
 x_{13} - x_1 & y_{13} - y_1 & \cdots x_{13}^2 - x_1^2 & x_{13} y_{13} - x_1 y_1 & y_{13}^2 - y_1^2 & \cdots & \cdots & y_{13}^4 - y_1^4 & x_{13}^4 y_{13} - x_1^4 y_1 & x_{13} y_{13}^4 - x_2 y_1^4 \\
 x_{14} - x_1 & y_{14} - y_1 & x_{14}^2 - x_1^2 & x_{14} y_{14} - x_1 y_1 & y_{14}^2 - y_1^2 & \cdots & \cdots & y_{14}^4 - y_1^4 & x_{14}^4 y_{14} - x_1^4 y_1 & x_{14} y_{14}^4 - x_2 y_1^4 \\
 x_{15} - x_1 & y_{15} - y_1 & x_{15}^2 - x_1^2 & x_{15} y_{15} - x_1 y_1 & y_{15}^2 - y_1^2 & \cdots & \cdots & y_{15}^4 - y_1^4 & x_{15}^4 y_{15} - x_1^4 y_1 & x_{15} y_{15}^4 - x_2 y_1^4 \\
 x_{16} - x_1 & y_{16} - y_1 & x_{16}^2 - x_1^2 & x_{16} y_{16} - x_1 y_1 & y_{16}^2 - y_1^2 & \cdots & \cdots & y_{16}^4 - y_1^4 & x_{16}^4 y_{16} - x_1^4 y_1 & x_{16} y_{16}^4 - x_2 y_1^4 \\
 x_{17} - x_1 & y_{17} - y_1 & x_{17}^2 - x_1^2 & x_{17} y_{17} - x_1 y_1 & y_{17}^2 - y_1^2 & \cdots & \cdots & y_{17}^4 - y_1^4 & x_{17}^4 y_{17} - x_1^4 y_1 & x_{17} y_{17}^4 - x_2 y_1^4
 \end{vmatrix}$$

(A.4.6)

Por otro lado, si los elementos de una columna se le suman o restan los correspondientes a otra columna paralela multiplicados por un número el determinante no varía, dicha propiedad se presenta a continuación:

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} + \alpha a_{12} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} + \alpha a_{22} & a_{22} & a_{23} \\
 a_{31} + \alpha a_{32} & a_{32} & a_{33}
 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33}
 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix}
 a_{12} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{22} & a_{22} & a_{23} \\
 a_{32} & a_{32} & a_{33}
 \end{vmatrix} = |B| - \alpha \cdot 0 = |B|$$

(A.4.7)

Aplicando esta propiedad al determinante de P se obtiene:

$$|P| = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & \cdots & \cdots & y_2^4 & x_2^4y_2 & x_2y_2^4 \\ x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & \cdots & \cdots & y_3^4 & x_3^4y_3 & x_3y_3^4 \\ x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & \cdots & \cdots & y_4^4 & x_4^4y_4 & x_4y_4^4 \\ x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & \cdots & \cdots & y_5^4 & x_5^4y_5 & x_5y_5^4 \\ x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6y_6 & y_6^2 & \cdots & \cdots & y_6^4 & x_6^4y_6 & x_6y_6^4 \\ x_7 & y_7 & x_7^2 & x_7y_7 & y_7^2 & \cdots & \cdots & y_7^4 & x_7^4y_7 & x_7y_7^4 \\ x_8 & y_8 & x_8^2 & x_8y_8 & y_8^2 & \cdots & \cdots & y_8^4 & x_8^4y_8 & x_8y_8^4 \\ x_9 & y_9 & x_9^2 & x_9y_9 & y_9^2 & \cdots & \cdots & y_9^4 & x_9^4y_9 & x_9y_9^4 \\ x_{10} & y_{10} & x_{10}^2 & x_{10}y_{10} & y_{10}^2 & \cdots & \cdots & y_{10}^4 & x_{10}^4y_{10} & x_{10}y_{10}^4 \\ x_{11} & y_{11} & x_{11}^2 & x_{11}y_{11} & y_{11}^2 & \cdots & \cdots & y_{11}^4 & x_{11}^4y_{11} & x_{11}y_{11}^4 \\ x_{12} & y_{12} & x_{12}^2 & x_{12}y_{12} & y_{12}^2 & \cdots & \cdots & y_{12}^4 & x_{12}^4y_{12} & x_{12}y_{12}^4 \\ x_{13} & y_{13} & x_{13}^2 & x_{13}y_{13} & y_{13}^2 & \cdots & \cdots & y_{13}^4 & x_{13}^4y_{13} & x_{13}y_{13}^4 \\ x_{14} & y_{14} & x_{14}^2 & x_{14}y_{14} & y_{14}^2 & \cdots & \cdots & y_{14}^4 & x_{14}^4y_{14} & x_{14}y_{14}^4 \\ x_{15} & y_{15} & x_{15}^2 & x_{15}y_{15} & y_{15}^2 & \cdots & \cdots & y_{15}^4 & x_{15}^4y_{15} & x_{15}y_{15}^4 \\ x_{16} & y_{16} & x_{16}^2 & x_{16}y_{16} & y_{16}^2 & \cdots & \cdots & y_{16}^4 & x_{16}^4y_{16} & x_{16}y_{16}^4 \\ x_{17} & y_{17} & x_{17}^2 & x_{17}y_{17} & y_{17}^2 & \cdots & \cdots & y_{17}^4 & x_{17}^4y_{17} & x_{17}y_{17}^4 \end{vmatrix}$$

(A 4.8)

Luego, se repite el procedimiento continuamente hasta obtener la siguiente matriz de 2x2.

$$|P| = \begin{vmatrix} x_{16}^4y_{16} & x_{16}y_{16}^4 \\ x_{17}^4y_{17} & x_{17}y_{17}^4 \end{vmatrix} = x_{16}^4y_{16} \cdot x_{17}y_{17}^4 - x_{16}y_{16}^4 \cdot x_{17}^4y_{17}$$

(A.4.9)

Simplificando términos se llega a:

$$|P| = x_{16}^3 - y_{16}^3 \neq 0 \quad (\text{A.4.10})$$

Como sólo existe un nodo estrella ningún nodo puede tener una distancia nula al nodo central en la dirección x e y simultáneamente, por lo que el determinante P es diferente de cero.

Por otro lado, el determinante de la matriz P^T es diferente de cero, puesto que se utiliza la siguiente propiedad del determinante.

$$|P| = |P^T| \quad (\text{A.4.11})$$



ANEXO 4.2: INFLUENCIA DEL PARAMETRO ALFA EN SOPORTES

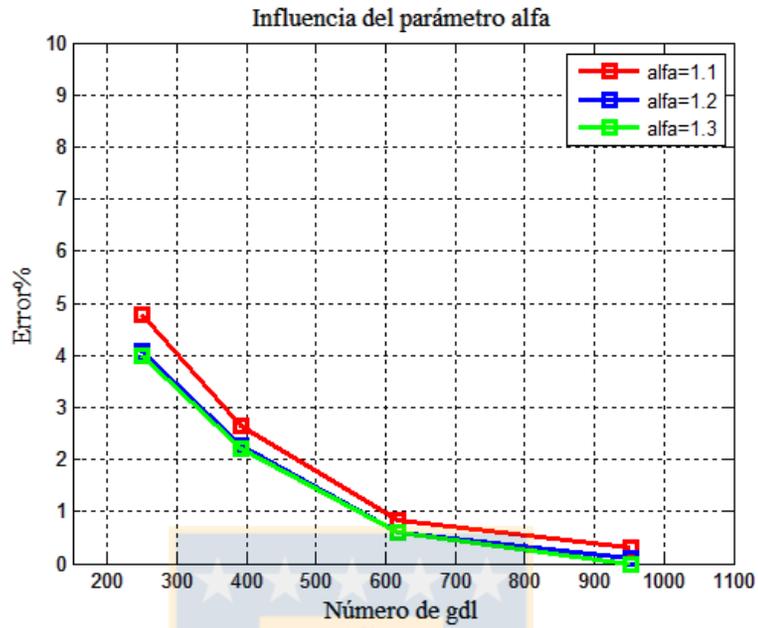


Figura A.4.2. 1 Parámetro alfa ejemplo 1

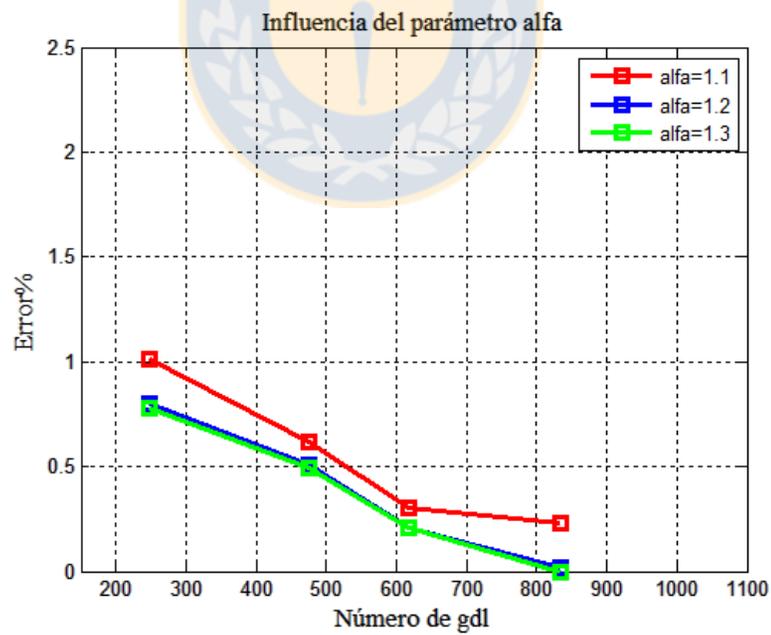


Figura A.4.2.2 Parámetro alfa ejemplo 2

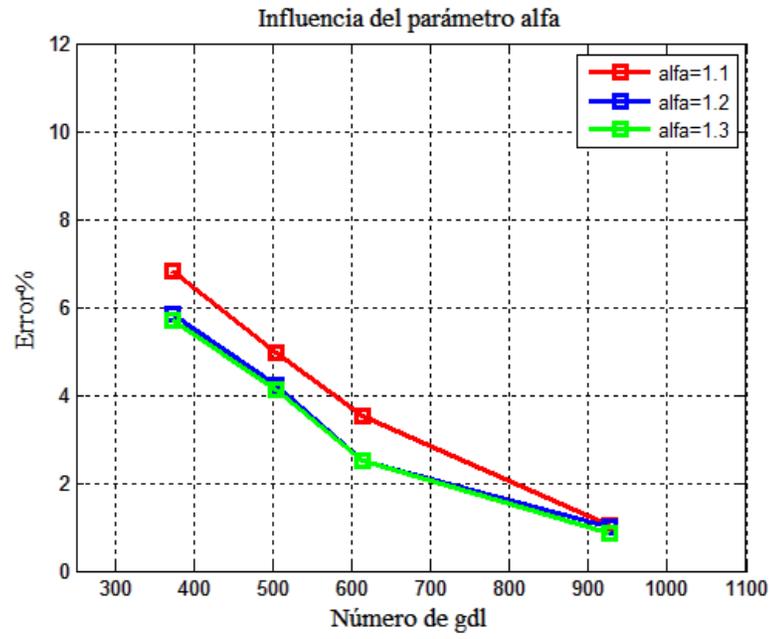


Figura A.4.2.3 Parámetro alfa ejemplo 3

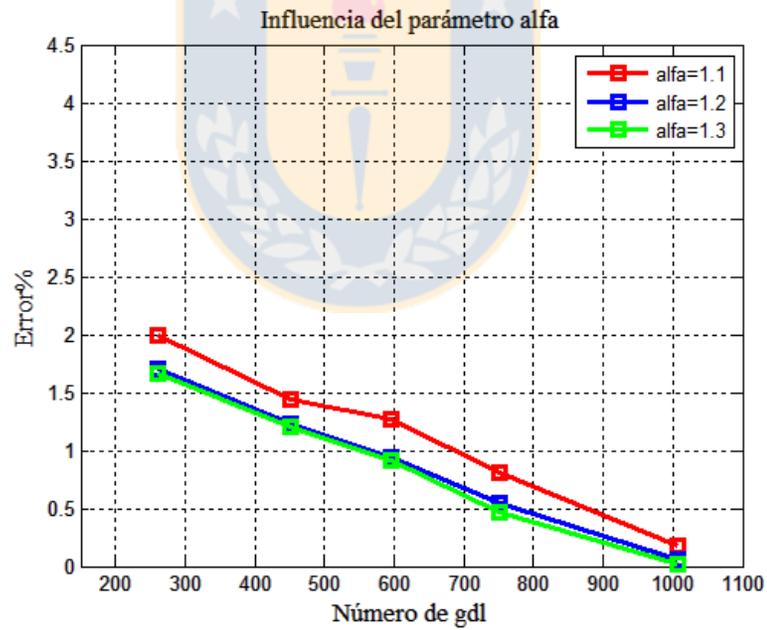


Figura A.4.2.4 Parámetro alfa ejemplo 4