



# Estados localizados clásicos y cuánticos en sistemas discretos

Tesis entregada a la  
Universidad de Concepción  
para optar al grado de  
Doctor en Ciencias Físicas  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas



por  
**Santiago Rojas Rojas**

Agosto, 2016

Director de Tesis: **Dr. Aldo Delgado Hidalgo**



## BIOGRAFÍA

Crecí en la ciudad de Santiago, donde cursé mis estudios básicos y secundarios en varios colegios de distintas comunas. Descubrí mi vocación por la física al ingresar al programa de Bachillerato en el campus Juan Gómez Millas de la Universidad de Chile, el año 2004. Aunque obtuve la mención en ciencias sociales y humanidades, la formación integral que busca ofrecer el programa me llevó a descubrir las ciencias exactas, y en particular la física, que desde ese momento focalizó mi interés. Por esta razón, el año 2006 ingresé al Departamento de Física en el mismo campus, obteniendo la licenciatura el año 2010, para posteriormente ingresar al programa de magíster.

Los ocho años que pasé en el campus JGM, me permitieron no sólo acercarme al campo de la Óptica (particularmente a través del Grupo de Óptica de la U. de Chile), sino también vivir todas las experiencias propias de la vida universitaria. La amplia variedad de disciplinas que se desarrollan en JGM (desde artes plásticas a biotecnología) contribuyeron a mantener activo mi interés por diversas áreas del conocimiento. Durante ese periodo conocí a Nathaly, mi pareja y madre de mi hija Magdalena, a quienes dedico el presente trabajo.

En el año 2012, me fui de Santiago para obtener el grado de doctor en la Universidad de Concepción. Los años en el programa de doctorado me han permitido tanto profundizar en el entendimiento de los sistemas discretos no lineales, como conocer nuevas áreas de investigación, lo que ha dado como resultado esta tesis.

## AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer a todos quienes contribuyeron que esta tesis llegara a buen término, especialmente a mi tutor, el Dr. Aldo Delgado, que siempre manifestó interés y entusiasmo por el trabajo que realizamos. A los integrantes del Grupo de Óptica Cuántica de la Universidad de Concepción (UdeC) y del Grupo de Óptica de la Universidad de Chile, cuya colaboración no sólo se manifestó en las publicaciones, sino también en incontables conversaciones, consejos y contribuciones prácticas. A todo el personal académico y administrativo del Departamento de Física de la UdeC (así como del Centro de Óptica y Fótica y del Núcleo Milenio de Óptica Avanzada) que hicieron de mi estancia en él una etapa agradable y fructífera.

Y por supuesto a mi compañera Nathaly Espinoza y nuestra hija Magdalena, quienes me acompañaron (y soportaron) en todos los momentos de tensión que involucra la realización una tesis.

# Tabla de Contenidos

Lista de Figuras	VII
Resumen	IX
Abstract	IX
1. Introducción	1
2. Conceptos fundamentales	8
2.1. Campo electromagnético en una guía de ondas . . . . .	9
2.1.1. Ecuaciones vectoriales para los campos . . . . .	13
2.1.2. Aproximación <i>weakly guiding</i> . . . . .	14
2.2. Teoría de modos acoplados . . . . .	18
2.2.1. Efectos no lineales . . . . .	22
2.2.2. Regimen cuántico . . . . .	24
2.2.3. Solución del dímero cuántico . . . . .	26
2.3. Cuantización del campo electromagnético . . . . .	29
2.3.1. Potenciales e invariancia de <i>gauge</i> . . . . .	30
2.3.2. Espacio recíproco . . . . .	30
2.3.3. Cuantización de la energía electromagnética . . . . .	32

2.4.	Condensados de Bose-Einstein en potenciales ópticos . . . . .	36
2.4.1.	Teoría de campo medio . . . . .	37
2.4.2.	Potencial periódico . . . . .	37
2.4.3.	Interacciones atómicas . . . . .	40
<b>3.</b>	<b>Soluciones localizadas en un condensado dipolar bidimensional</b>	<b>44</b>
3.1.	Modelo . . . . .	45
3.2.	Soluciones estacionarias localizadas . . . . .	47
3.3.	Efectos de tamaño y condiciones de borde . . . . .	54
3.4.	Soluciones intermedias. . . . .	57
3.5.	Dinámica de excitaciones localizadas . . . . .	60
3.6.	Interacción dipolar atractiva . . . . .	61
3.7.	Aproximaciones analíticas . . . . .	63
<b>4.</b>	<b>Bandas planas de energía y autoestados localizados</b>	<b>70</b>
4.1.	Modelo . . . . .	71
4.2.	Estados cuánticos localizados . . . . .	73
4.3.	Estados coherentes . . . . .	77
4.4.	Entrelazamiento de los estados no difractantes en la red romboidal . .	79
4.4.1.	Negatividad y concurrencia . . . . .	80
4.4.2.	Coefficientes de Schmidt y expresiones asintóticas . . . . .	83
4.5.	Entrelazamiento de los autoestados no difractantes de la red <i>stub</i> . . .	85
4.5.1.	Descomposición en base bipartita. . . . .	85
4.5.2.	Entrelazamiento de las matrices reducidas . . . . .	86
4.6.	Implementación experimental de los autoestados no difractantes. . . .	90

<b>5. Efectos de la polarización en los modos de una guía elíptica</b>	<b>94</b>
5.1. Dependencia del perfil transversal espacial de los modos del campo eléctrico con respecto a la polarización . . . . .	95
5.2. Efectos de polarización en el acoplamiento evanescente . . . . .	99
5.3. Resultados . . . . .	102
5.3.1. Arreglo ordenado . . . . .	102
5.3.2. Arreglos desordenados . . . . .	106
5.4. Aplicaciones . . . . .	109
5.4.1. Control del volumen de localización . . . . .	110
5.4.2. Diseño de un <i>polarizing beam splitter</i> . . . . .	111
5.4.3. Consideraciones adicionales . . . . .	113
<b>Conclusiones generales</b>	<b>115</b>
<b>A. Derivación de las ecuaciones vectoriales para los campos en una guía de ondas</b>	<b>120</b>
<b>Referencias</b>	<b>124</b>

# Lista de Figuras

2.1. Guía de ondas . . . . .	12
2.2. Sistema de dos guías . . . . .	20
2.3. Espectro del dímero cuántico . . . . .	28
2.4. Descomposición del campo variable normal . . . . .	34
2.5. Potencial óptico periódico . . . . .	38
2.6. Funciones de Bloch . . . . .	39
2.7. Funciones de Wannier . . . . .	39
2.8. Interacción dipolar . . . . .	42
3.1. Modos discretos no lineales . . . . .	47
3.2. Norma y estabilidad de modos localizados para interacción dipolar baja	49
3.3. Norma y estabilidad de modos localizados para interacción dipolar alta	52
3.4. Cortes de modos para distintos valores de la interacción dipolar . . .	54
3.5. Variación del umbral de norma con el tamaño del arreglo y las condi- ciones de borde . . . . .	56
3.6. Potencial efectivo para norma $N = 8$ . . . . .	57
3.7. Norma y estabilidad de soluciones intermedias . . . . .	59
3.8. Potencial efectivo para norma $N = 16.5$ . . . . .	66
3.9. Dinámica de soluciones localizadas . . . . .	67

3.10. Norma y estabilidad de soluciones localizadas para interacción dipolar atractiva . . . . .	68
3.11. Aproximación analítica para la relación entre norma y frecuencia . . .	69
4.1. Redes romboidal y stub . . . . .	74
4.2. Negatividad y concurrencia de los estados no difractantes en la red romboidal . . . . .	81
4.3. Criterio de entrelazamiento aplicado a los estados reducidos. . . . .	87
4.4. Propuesta experimental para preparar estados no difractantes . . . . .	93
5.1. Teoría general del campo eléctrico en las guías de onda. El marco azul destaca la contribución del presente trabajo . . . . .	100
5.2. Perfiles modales del campo eléctrico con distinta polarización en una guía elíptica . . . . .	101
5.3. Constantes de acoplamiento en función de la separación entre guías .	102
5.4. Montaje experimental . . . . .	104
5.5. Resultados teóricos y experimentales . . . . .	105
5.6. Perfiles de potencia finales para sistemas con distinto grado de desorden	108
5.7. Volumen de localización en función del ángulo de polarización lineal .	109
5.8. Diseño de un polarizing beam splitter . . . . .	111
5.9. Transmitancia de luz con polarización horizontal y vertical . . . . .	112



## RESUMEN

Esta tesis se enmarca en el contexto general de las excitaciones localizadas en sistemas discretos. En primer lugar, aplicamos un modelo discreto al estudio de condensados de Bose-Einstein con interacciones dipolares entre sus átomos, atrapados en redes ópticas. La acción conjunta de las interacciones dipolar y de contacto afecta la estabilidad y las propiedades dinámicas de los modos localizados. En segundo, lugar, abordamos la propagación de estados fotónicos en arreglos de guías de ondas cuya particular disposición transversal permite la existencia de autoestados localizados del hamiltoniano general. Finalmente, estudiamos el efecto de la polarización en el acoplamiento evanescente entre guías cercanas que transportan modos fundamentales del campo eléctrico. Presentamos un nuevo acercamiento analítico, que concuerda con los resultados de un experimento de localización sistemas desordenados.

## ABSTRACT

This thesis is set in the general framework of localized excitations in discrete systems. First, we apply a discrete model to the study of Bose-Einstein Condensates with dipolar interactions between atoms, trapped in optical lattices. The interplay of dipolar and contact interaction affects the stability and dynamical properties of the localized modes. Second, we address the propagation of photonic states in waveguide arrays with specific tranverse configurations, which allow the existence of localized eigenstates of the general Hamiltonian. Finally, we study the effect of polarization on the evanescent coupling between neighboring waveguides carrying fundamental modes of the electric field. A new analytical approach is introduced, which agrees with experimental results regarding localization in disordered systems.

# Capítulo 1

## Introducción



Los sistemas físicos en que se centra esta tesis presentan dos puntos en común. Por una parte, son sistemas que pueden ser estudiados bajo un modelo discreto, es decir, en que las magnitudes relevantes para su descripción pueden asociarse a nodos que conforman una red. A partir de la segunda mitad del siglo XX, la utilización de modelos discretos ha tenido gran influencia en la descripción de fenómenos tanto clásicos como cuánticos [1]. Entre los acercamientos más importantes está la extrapolación del modelo de *enlace fuerte* (*tight-binding*) desde la física de sólidos a otras áreas que permiten una descripción análoga. Bajo este enfoque, que también recibe el nombre de *ecuación discreta de Schroedinger* [2], los sitios puntuales que componen el sistema concentran la distribución de algún campo (por ejemplo la amplitud del campo eléctrico), y pueden interactuar con sitios cercanos mediante el traslape de sus campos respectivos. El primer sistema que estudiaremos es un *condensado de Bose-Einstein* (BEC) en que la discretitud está dada por la periodicidad de la red óptica que lo contiene. Posteriormente, nos centraremos en *arreglos de guías de ondas*, los cuales, bajo un enfoque discreto, constituyen redes donde cada sitio corresponde a una guía.

El segundo punto en común de los sistemas bajo estudio es su capacidad para sustentar excitaciones localizadas. Por excitación localizada entendemos una distribución de la intensidad del campo relevante para el sistema, tal que su amplitud máxima se centra en uno o pocos sitios de la red, mientras que en los restantes decae o es nula. Para entender los mecanismos que permiten la existencia de estas soluciones, introduzcamos con mayor detalle los sistemas que analizaremos.

La característica que define un condensado de Bose-Einstein, en tanto estado de la materia, es la integración de la estadística bosónica con la distribución espacial de un gas diluido, lo que permite tener muchas partículas en un mismo nivel de energía,

con una separación promedio entre ellas mucho mayor que las magnitudes relevantes para su interacción. La condensación de Bose-Einstein es uno de los pocos fenómenos cuánticos observables macroscópicamente. Si bien fue propuesta por Satyendra Bose y Albert Einstein en los años veinte, su realización experimental sólo pudo realizarse décadas más tarde [3]. Tras muchos experimentos realizados durante en los años ochenta [4, 5], finalmente se logró la formación de BECs con átomos de Rubidio y Sodio [6, 7].

Para el estudio de un BEC, es necesario confinarlo mediante un potencial externo (*trampa*). Generalmente se utilizan potenciales magnéticos u ópticos, o una combinación de los dos. En el caso de una trampa óptica generada por haces de luz láser, es posible formar un patrón de interferencia que produce un potencial periódico sobre el condensado, el cual, como dijimos anteriormente, define una red de sitios en que podemos observar fenomenología discreta. Ahora bien, la interacción de contacto o colisional entre los bosones, inherente a los BECs, implica necesariamente efectos no lineales [4, 5]. Estos efectos son los que permiten la existencia de excitaciones colectivas (que involucran todos los sitios de la red) y localizadas, llamadas *solitones* o *breathers* discretos.

En años recientes, un nuevo tipo de BEC ha estado a disposición de los físicos experimentales, gracias a la formación de condensados con átomos de  $^{52}\text{Cr}$  [8]. En este medio, la interacción atómica no es sólo de contacto, sino también de largo alcance, lo que se debe a la gran magnitud del momento dipolar magnético que presenta el  $^{52}\text{Cr}$ . Si bien hay moléculas cuyo momento dipolar eléctrico es mucho más fuerte que el momento magnético del Cromo, hasta ahora no ha sido posible condensarlas, principalmente debido a la pérdida de átomos durante el proceso de enfriamiento [9, 10]. Nuestro estudio abordará las soluciones localizadas discretas

que pueden existir en un BEC dipolar atrapado en una red óptica bidimensional, cuyas propiedades estarán determinadas por la acción conjunta de la interacción dipolar (no local) y la interacción de contacto (local).

El otro sistema físico en nuestro estudio lo constituyen los *arreglos de guías de ondas*. Una *guía de ondas* óptica es cualquier estructura que confina ondas electromagnéticas en el espectro óptico, permitiendo su propagación a lo largo de una dirección específica (la dirección de propagación). Generalmente, las guías de onda consisten en un material dieléctrico conforma cilíndrica (núcleo), rodeado de otro material envolvente (*cladding*) con menor índice de refracción, de modo que la luz se concentra en el núcleo y decae exponencialmente como radiación en la envolvente. Una guía de ondas puede transportar haces de luz con distribuciones transversales de intensidad específicas, que definen sus *modos normales*, y que corresponden a valores característicos de la componente longitudinal del vector de onda, llamada la *constante de propagación*.

Si dos guías paralelas son situadas a corta distancia ( $\sim 20 \mu\text{m}$ ), la luz puede transmitirse entre ellas mediante *acoplamiento evanescente*, equivalente al efecto túnel de los paquetes de onda transportados, el cual es inducido por el solapamiento resonante de los campos evanescentes. La tasa a la que ocurre este acoplamiento (en relación a la distancia de propagación) puede definirse a través de un parámetro, la *constante de acoplamiento*, y depende de (i) la longitud de onda de la luz, (ii) la separación entre las guías, y (iii) el tamaño y forma de la sección transversal de las guías. Múltiples guías paralelas forman un arreglo de guías de ondas, que constituye una herramienta muy versátil en el diseño de circuitos fotónicos. Los arreglos de guías de ondas son usados en muchas aplicaciones, tales como transporte cuántico [11], transposi-

ción de señales [12], deformación de flujo de luz [13], transmisión de imágenes [14], enrutamiento de haces [15], y analogías cuánticas [16].

La técnica más exitosa para la fabricación de arreglos de guías de ondas es la *escritura con láser de femto-segundos* (*femto-second laser writing*). Este método consiste en el enfoque de un láser pulsado de alta potencia en una región precisa de un material (generalmente sílicio fundido). Esto induce un cambio permanente en la estructura molecular del material en la región del foco, lo que a su vez incrementa su índice de refracción [17]. Al desplazar el foco del láser a lo largo de la trayectoria deseada, una guía de ondas es grabada en el material.

En su mayor parte, el estudio de modos colectivos<sup>1</sup> localizados, en arreglos de guías de ondas, ha sido asociado a respuestas no lineales debidas al efecto Kerr, formalmente similares a la interacción atómica en un BEC. La localización debida a este efecto sólo puede observarse cuando la potencia del haz propagado es grande [18]. Ahora bien, en años recientes, otro tipo de modos no difractantes ha generado gran interés, ya que su existencia se basa en el posicionamiento transversal de las guías en el arreglo [14, 19, 20]. Estas excitaciones son soluciones lineales del sistema, por lo que pueden ser observarse con haces de baja potencia, y dentro del espectro de frecuencias lineales forman una banda plana (es decir, son modos degenerados). Esto permite que una combinación de estos modos sea también una solución con la misma frecuencia, que se propaga sin difractar. La relación entre la geometría del arreglo y la ausencia de difracción se debe a que aquella favorece la interferencia destructiva de la luz fuera de los sitios excitados, por lo que las soluciones son *exactamente localizadas*. Como parte de esta tesis evaluaremos si el mismo principio permite la

---

<sup>1</sup>No debemos confundir los modos de oscilación de toda la red (a veces llamados *metamodos*), con los modos individuales de cada guía, mencionados más arriba.

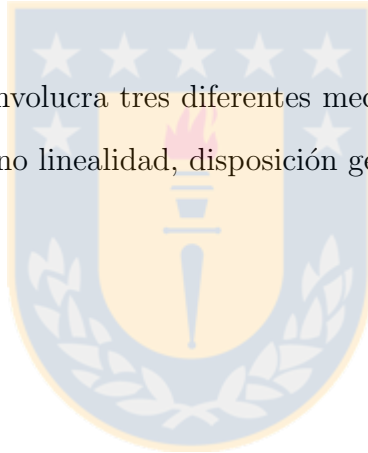
existencia de autoestados localizados cuánticos, en el caso de que un número fijo de fotones se propague a lo largo de las guías.

Pero hay otro tipo de localización relacionada con el ordenamiento de los sitios de la red, o más bien con su desorden. En efecto, el desorden en un medio discreto lleva a que todos sus modos normales sean localizados espacialmente, fenómeno conocido como *localización de Anderson*, ya que su trabajo de 1958 relacionó por primera vez el problema de la localización con la ausencia de difusión, dentro del lenguaje de la mecánica cuántica [21]. Su contribución no se reduce sólo a la formulación del problema, sino que incluye también una estimación cuantitativa de la fuerza del potencial desordenado necesario para cancelar la difusión. Es importante destacar que los dos sistemas físicos más apropiados para la observación directa de este fenómeno son justamente los arreglos de guías de ondas [22–24], y los BECs atrapados en redes ópticas [25, 26]. Ambos medios han permitido observar la localización dinámica de paquetes de onda, así como la excitación de modos de Anderson particulares. En nuestro análisis abordaremos el desorden *no diagonal* en arreglos de guías, que corresponde a un espaciado aleatorio entre éstas, el cual se traduce en una distribución aleatoria de las constantes de acoplamiento a lo largo de la red.

Nuestro trabajo está organizado de la manera siguiente. En el capítulo 2 presentamos los conceptos teóricos fundamentales para nuestro análisis, proporcionando una interpretación formal para todos los elementos que hemos mencionado en los párrafos anteriores. El capítulo 3 trata sobre soluciones localizadas en un BEC dipolar bidimensional. Las diferencias con el caso unidimensional — así como con los condensados sin interacción dipolar — son estudiadas en relación a la localización debida a los efectos no lineales. En el capítulo 4 estudiamos arreglos de guías de ondas que sustentan soluciones *exactamente* localizadas, cuya existencia se debe a la disposición

geométrica de las guías. A diferencia de los otros capítulos, aquí nos centramos en estados cuánticos, es decir, estados con un número reducido de partículas (en este caso fotones), cuya dinámica se aleja de la obtenida con campos clásicos. Finalmente, en el capítulo 5, estudiamos el efecto de la sección transversal de las guías que componen un arreglo, manifestada en un comportamiento distinto según la dirección de polarización de la luz propagada. Para describir este efecto, proponemos una corrección al modelo escalar derivado de las ecuaciones de Maxwell. Además, aplicamos nuestro modelo a la descripción de arreglos desordenados, en que se observa localización de Anderson.

Así, nuestro estudio involucra tres diferentes mecanismos de localización en sistemas discretos, a saber: no linealidad, disposición geométrica, y desorden.





## Capítulo 2

### Conceptos fundamentales



En este capítulo presentaremos los conceptos y derivaciones teóricas que fundamentan nuestro trabajo. En primer lugar, introduciremos la teoría básica para describir los modos normales del campo eléctrico en una guía de ondas. En particular, nos detendremos en el modelo aproximado que permite explicar la existencia de *modos linealmente polarizados* (LP modes) que se utilizan en aplicaciones experimentales. En segundo lugar, presentaremos la derivación del modelo discreto que permite describir la dinámica de excitaciones lumínicas en arreglos de guías de ondas. Utilizaremos aquí la teoría de modos acoplados, enfatizando la posibilidad de describir dinámica clásica o cuántica, según se asocie una amplitud del campo eléctrico o un operador de creación con cada guía. Finalmente, señalaremos los pasos principales de la derivación análoga para condensados de Bose-Einstein en redes ópticas, que nos lleva al mismo modelo discreto. No obstante, veremos que al aplicar este modelo a un condensado cuyos átomos tienen un momento dipolar magnético, las interacciones entre dipolos posibilitan una fenomenología diferente, que no tiene equivalencia en sistemas fotónicos.

## 2.1. Campo electromagnético en una guía de ondas

La base de un análisis del campo electromagnético en un medio, necesariamente debe vincularse a las *ecuaciones de Maxwell*. Este conjunto de ecuaciones diferenciales parciales fundamentan la electrodinámica clásica (y en particular la óptica). En su forma general, que mostramos a continuación, las ecuaciones tienen como variables

tanto las coordenadas espaciales como el tiempo:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.1d)$$

Aquí,  $\mathbf{E}$  designa el campo eléctrico y  $\mathbf{B}$  el campo magnético. Estos se relacionan con la excitación magnética  $\mathbf{H}$  y el campo de desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D}$  según las ecuaciones constitutivas en ausencia de polarización externa, a saber,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 n^2 \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}. \quad (2.2)$$

donde  $\epsilon_0$  ( $\mu_0$ ) es la permitividad (permeabilidad) del vacío. Usualmente las guías de ondas están compuestas de un material no magnético, por lo cual asumimos que en cualquier punto la permeabilidad magnética es igual a  $\mu_0$ . Finalmente,  $\mathbf{J}$  y  $\rho$  corresponden a la corriente de desplazamiento y a la densidad de carga eléctrica, respectivamente.

A lo largo de esta sección seguiremos el planteamiento recogido por Snyder y Love [27], asumiendo que todos los campos tienen una dependencia temporal en la forma general

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)e^{-i\omega t},$$

con una frecuencia  $\omega$  — igual para todos los campos — que se relaciona con el vector de onda en el vacío, de acuerdo a la relación de dispersión

$$\frac{2\pi}{\lambda} = k = \omega c, \quad (2.3)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de los campos. De este modo, las ecuaciones de Maxwell, en conjunto con las relaciones constitutivas y la dependencia temporal pro-

puesta, determinan la dependencia espacial del campo eléctrico y el campo magnético como sigue:

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}k \mathbf{H}, \quad (2.4a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} - i\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}kn^2 \mathbf{E}, \quad (2.4b)$$

$$\nabla \cdot (n^2 \mathbf{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.4c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.4d)$$

En cualquier región, el índice de refracción  $n$  y la constante dieléctrica  $\epsilon$  están relacionados:

$$\epsilon(x, y, z) = \epsilon_0 n^2(x, y, z). \quad (2.5)$$

La dinámica del sistema puede deducirse de las ecuaciones de Maxwell en conjunto con las condiciones de borde en las interfaces, a saber, (i) continuidad del campo magnético y la componente del campo eléctrico tangencial, y (ii) continuidad de la componente normal del vector desplazamiento eléctrico  $\epsilon_0 n^2 \mathbf{E}$ .

En nuestro análisis consideramos guías cuyo eje de simetría corresponde al eje  $z$ . Es decir, el perfil del índice de refracción no varía con  $z$  y puede expresarse como  $n = n(x, y)$ . Luego, el campo eléctrico y el campo magnético en la guía de ondas son expresables en una forma separable, a saber:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{e}(x, y) \exp(i\beta z), \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{h}(x, y) \exp(i\beta z), \quad (2.6b)$$

con los ejes orientados como se muestra en la figura 2.1. El factor  $\beta$  en el exponente define los ciclos de oscilación del campo a lo largo de  $z$  y es llamada la *constante de propagación*. (En algunos casos la geometría del perfil del índice de refracción

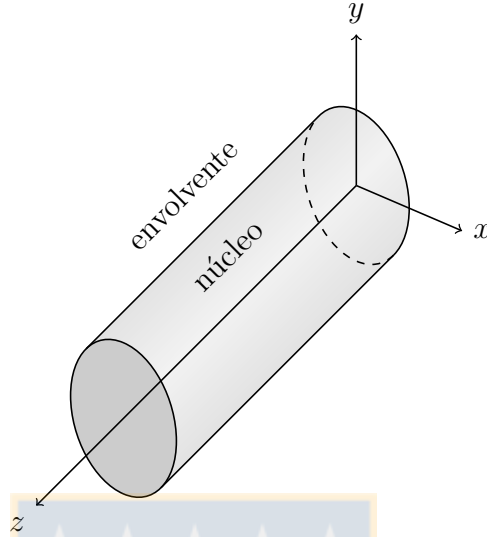


Figura 2.1: Una guía de ondas cuyo eje está orientado en la dirección  $z$ . Consideramos que la polarización horizontal (vertical) corresponde a la dirección  $x$  ( $y$ ). Fuente: Elaboración propia.

favorece el uso de otros sistemas de coordenadas bidimensionales para describir la variación transversal del campo, como por ejemplo las coordenadas polares.) Por la misma invariancia traslacional en  $z$ , es conveniente expresar los vectores  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{h}$  como combinación de una componente transversal y una longitudinal, es decir,

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_t + e_z \hat{\mathbf{z}}, \quad \text{y} \quad \mathbf{h} = \mathbf{h}_t + h_z \hat{\mathbf{z}}. \quad (2.7)$$

Sustituyendo  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{h}$  con las expresiones (2.7) en las ecuaciones de Maxwell (2.4) sin fuente, es decir, considerando  $\mathbf{J} = 0 = \rho = 0$ , podemos relacionar las componentes tangenciales y longitudinales de los campos. Por ejemplo, reemplazando en las ecuaciones (2.4a) y (2.4b) despejamos directamente las componentes transversales del campo magnético en términos del campo eléctrico, y a la inversa:

$$\mathbf{h}_t = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{k} \hat{\mathbf{z}} \times (\beta \mathbf{e}_t + i \nabla_t e_z), \quad (2.8a)$$

$$\mathbf{e}_t = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{kn^2} \hat{\mathbf{z}} \times (\beta \mathbf{h}_t + i \nabla_t h_z). \quad (2.8b)$$

Con ayuda de las ecuaciones restantes, expresamos las componentes longitudinales de los campos en función de las transversales:

$$h_z = -i\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{k} \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla_t \times \mathbf{e}_t = \frac{i}{\beta} \nabla \cdot \mathbf{h}_t, \quad (2.8c)$$

$$e_z = i\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{k} \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla_t \times \mathbf{e}_t = \frac{i}{\beta} [\nabla \cdot \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_t \cdot \nabla_t \log n^2], \quad (2.8d)$$

donde hemos usado la invariancia traslacional del perfil de índice de refracción al evaluar el término  $\nabla \cdot (n^2 \mathbf{E})$  en las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla n^2}{n^2} \cdot \mathbf{E} = -\nabla \log n^2 \cdot \mathbf{E} = -\nabla_t \log n^2 \cdot \mathbf{e}_t.$$

Más aún, de las ecuaciones (2.8) es posible despejar  $\mathbf{e}_t$  y  $\mathbf{h}_t$  en función de las componentes longitudinales  $e_z$  y  $h_z$  para obtener

$$\mathbf{e}_t = \frac{i}{k^2 n^2 - \beta^2} \left\{ \beta \nabla_t e_z - \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} k \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t h_z \right\}, \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{h}_t = \frac{i}{k^2 n^2 - \beta^2} \left\{ \beta \nabla_t h_z + \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} k n^2 \hat{\mathbf{z}} \times \nabla e_z \right\}. \quad (2.9b)$$

### 2.1.1. Ecuaciones vectoriales para los campos

A fin de derivar las ecuaciones que rigen la dinámica de los campos eléctrico y magnético, necesitamos eliminar los términos que contienen uno u otro en las ecuaciones de Maxwell (2.4a,b). Este procedimiento<sup>1</sup> nos lleva a las siguientes ecuaciones vectoriales inhomogéneas:

$$(\nabla^2 + n^2 k^2) \mathbf{E} = -\nabla(\mathbf{E}_t \cdot \nabla_t \log n^2) - i\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left[ k \mathbf{J} + \frac{1}{k} \nabla \left( \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{n^2} \right) \right], \quad (2.10a)$$

$$(\nabla^2 + n^2 k^2) \mathbf{H} = -(\nabla \times \mathbf{H}) \times \nabla_t \log n^2 - \nabla \times \mathbf{J} - \mathbf{J} \times \nabla_t \log n^2. \quad (2.10b)$$

Seguindo a Snyder y Young [28], enfatizamos que el operador laplaciano en estas ecuaciones es un *operador vectorial*, que solamente corresponde al operador laplaciano

<sup>1</sup>Para propósitos de esta tesis, hemos desarrollado explícitamente este paso en el apéndice A.

escalar cuando los campos vectoriales  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  son descompuestos en coordenadas cartesianas, es decir,

$$\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}} + E_z \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{H} = H_x \hat{\mathbf{x}} + H_y \hat{\mathbf{y}} + H_z \hat{\mathbf{z}},$$

donde los vectores unitarios corresponden a las direcciones mostradas en la figura 2.1. En este caso, las ecuaciones (2.10) pueden ser rescritas con la sustitución

$$\nabla^2 \longrightarrow \nabla^2.$$

Si consideramos además el caso sin fuentes (esto es, cuando la corriente  $\mathbf{J}$  es nula), la dependencia espacial de los campos [ecuaciones (2.6) y (2.7)] nos permite obtener las siguientes *ecuaciones de onda vectoriales*:

$$\{\nabla_t^2 + n^2 k^2 - \beta^2\} \mathbf{e}_t = -\nabla_t (\mathbf{e}_t \cdot \nabla_t \log n^2), \quad (2.11a)$$

$$\{\nabla_t^2 + n^2 k^2 - \beta^2\} e_z = -i\beta \mathbf{e}_t \cdot \nabla_t \log n^2, \quad (2.11b)$$

$$\{\nabla_t^2 + n^2 k^2 - \beta^2\} \mathbf{h}_t = (\nabla_t \times \mathbf{h}_t) \times \nabla_t \log n^2, \quad (2.11c)$$

$$\{\nabla_t^2 + n^2 k^2 - \beta^2\} h_z = (\nabla_t h_z - i\beta \mathbf{h}_t) \cdot \nabla_t \log n^2, \quad (2.11d)$$

Las expresiones (2.11) constituyen en conjunto una ecuación de autovalores para el campo electromagnético, donde el autovalor buscado es la constante de propagación  $\beta$ , y que da como resultado los campos vectoriales de los modos normales reales. Generalmente, para guías tipo *step-index* (esto es, en que el índice de refracción es constante en el núcleo de las guías y en la envolvente), las soluciones se obtienen calculando primero la componente longitudinal, y obteniendo luego los campos transversales mediante las relaciones (2.9) en conjunto con las condiciones de borde.

### 2.1.2. Aproximación *weakly guiding*

Si bien las ecuaciones (2.11) permiten encontrar los modos exactos de una guía, no describen directamente los modos normales del campo eléctrico con polarización

lineal (utilizados en la mayoría de las aplicaciones experimentales), que sólo aparecen como combinación lineal de modos vectoriales cuando existe degeneración entre algunos de ellos. Esta degeneración se da cuando la guía de ondas tiene una diferencia muy baja en el índice de refracción del núcleo y el de la envolvente. En este caso, cobra validez una importante simplificación de las ecuaciones diferenciales para los campos, conocida como la aproximación *weakly guiding*, que presentamos en lo que sigue.

En primer lugar, es necesario introducir dos parámetros adimensionales que recogen la información relativa a las propiedades de la guía de ondas, conviene a saber, el *parámetro de guía*

$$\gamma = \frac{2\pi\rho}{\lambda}(n_{\text{core}}^2 - n_{\text{clad}}^2), \quad (2.12)$$

donde  $n_{\text{core}}$  es el máximo valor del índice de refracción en el núcleo de la guía,  $n_{\text{clad}}$  es el valor en el medio envolvente (lejos del núcleo), y  $\rho$  es una longitud característica de la sección transversal de la guía<sup>2</sup>; y el *parámetro de altura del perfil*

$$\Delta = \frac{n_{\text{core}}^2 - n_{\text{clad}}^2}{2n_{\text{core}}^2}. \quad (2.13)$$

Esta definición nos muestra que  $\Delta$  es proporcional a la diferencia relativa entre la constante dieléctrica  $\epsilon \sim n^2$  del centro del núcleo y de la envolvente. Un perfil de índice de refracción arbitrario puede expresarse en función de su altura:

$$n^2(x, y) = n_{\text{core}}^2 [1 - 2\Delta f(x, y)], \quad (2.14)$$

para alguna función  $f \geq 0$ . Notemos que con esta notación  $n(x, y)$  queda definido tanto para el núcleo como para la envolvente.

Dado que la información relevante sobre las propiedades de las guías está contenida en los parámetros  $\gamma$  y  $\Delta$ , los campos modales pueden expandirse en función de estos.

<sup>2</sup>Por ejemplo, para guías circulares se considera el radio de la sección transversal.



Ahora bien, un paso clave para la aproximación *weakly guiding* (ver discusión en las referencias [28] y [27]) es suponer que estos dos parámetros son independientes, lo que posibilita la siguiente expansión del campo eléctrico transversal

$$\mathbf{e}_t(\gamma, \Delta) = \tilde{\mathbf{e}}_t + \Delta \mathbf{e}_t^{(1)} + \Delta^2 \mathbf{e}_t^{(2)} + \dots, \quad (2.15)$$

en que el parámetro de guía  $\gamma$  se mantiene fijo. Asimismo, el *parámetro modal del núcleo*

$$U = \rho \sqrt{k^2 n_{\text{core}}^2 - \beta^2} \quad (2.16)$$

puede expresarse como

$$U(\gamma, \Delta) = \tilde{U} + \Delta U^{(1)} + \dots, \quad (2.17)$$

donde la relación  $\tilde{U} = \rho \sqrt{k^2 n_{\text{core}}^2 - \tilde{\beta}^2}$  se cumple para el valor  $\tilde{\beta}$  de la constante de propagación obtenido en el límite  $\Delta \rightarrow 0$ . En general, la constante de propagación puede expresarse en función de los parámetros  $\gamma$ ,  $\Delta$  y  $U$  — utilizando sus respectivas definiciones (2.12), (2.13) y (2.16) — lo que junto con la ecuación (2.17) posibilita su expansión en potencias de  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\gamma}{\rho} \frac{1}{\sqrt{2\Delta}} \sqrt{1 - 2\Delta \frac{U^2}{\gamma^2}} \\ &= \frac{\gamma}{\rho} \frac{1}{\sqrt{2\Delta}} - \frac{\tilde{U}^2}{\rho\gamma} \sqrt{\frac{\Delta}{2}} - \dots \end{aligned} \quad (2.18)$$

La expresión anterior indica que en el límite  $\Delta \rightarrow 0$  el primer término en la expansión será el más relevante.

Las definiciones de los parámetros  $\gamma$ ,  $U$  y  $\rho$  nos permiten normalizar el operador gradiente transversal como

$$\nabla_t \longrightarrow \rho \nabla_t$$

y así rescribir la ecuación diferencial para el campo transversal, (2.11a) como sigue:

$$\{\rho^2 \nabla_t^2 + U^2 - \gamma^2 f\} \mathbf{e}_t = -\rho \nabla_t (\mathbf{e}_t \cdot \rho \nabla_t \log n^2) . \quad (2.19)$$

donde hemos utilizado la expresión (2.14) para el perfil de índice de refracción, que a su vez permite expandir el factor  $\nabla_t \log n^2$  en la ecuación anterior según

$$\nabla_t \log n^2 = \nabla_t \log(1 - 2\Delta f) = -2\Delta \nabla_t f - 2\Delta^2 \nabla_t f^2 - \dots \quad (2.20)$$

Luego, las ecuaciones diferenciales para cada término en la expansión del campo eléctrico transversal se obtienen introduciendo las expansiones (2.15), (2.17) y (2.20) en la ecuación vectorial (2.19). En una guía con un incremento bajo del índice de refracción en el núcleo, el término del campo predominante corresponderá a  $\tilde{\mathbf{e}}$ , que satisface la ecuación de orden cero en  $\Delta$ :

$$\{\rho^2 \nabla_t^2 + \tilde{U}^2 - \gamma^2 f\} \tilde{\mathbf{e}}_t = 0 . \quad (2.21)$$

Esta es la ecuación escalar para el campo eléctrico transversal  $\tilde{\mathbf{e}}$ . Notamos que en tanto ecuación homogénea, no contiene términos relativos al perfil del índice de refracción en el miembro derecho. En consecuencia, las únicas condiciones de borde que deben satisfacer las componentes del campo son la continuidad y diferenciabilidad en todo el plano  $x, y$ .

La homogeneidad de la ecuación escalar (2.21) permite que tenga como solución un modo polarizado en una sola dirección, es decir, compuesto de un solo término  $e_x \hat{\mathbf{x}}$  o  $e_y \hat{\mathbf{y}}$ , lo que no ocurre con las ecuaciones de orden superior. No obstante, esto tiene una contraparte: la ausencia de operadores vectoriales sobre el perfil del índice de refracción lleva a que la ecuación escalar sea la misma para cualquier dirección de polarización, y por tanto, a que la forma de las soluciones sea la misma en cualquier caso. No obstante, en años recientes, algunos experimentos con guías de ondas han

mostrado una diferencia entre los perfiles modales linealmente polarizados (LP) en la dirección horizontal y vertical. De aquí la necesidad de introducir una corrección a fin de describir adecuadamente la dependencia de los modos LP con respecto a la dirección de polarización.

## 2.2. Teoría de modos acoplados

En esta sección presentamos la descripción para la evolución del campo eléctrico en un sistema de dos guías de onda cercanas, que puede extenderse directamente a un sistema de múltiples guías paralelas, es decir, a un arreglo de guías. Nuevamente nos basamos en las ecuaciones de Maxwell (2.1), que nos permitirán deducir la ecuación de onda para el campo eléctrico, pero incluyendo en la relación constitutiva un término de *fuerza*, correspondiente a la polarización del medio:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (2.22)$$

En este caso, la ecuación de onda para el campo eléctrico en cada guía resulta ser

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}(\mathbf{E})}{\partial t^2}. \quad (2.23)$$

Trataremos primero el caso homogéneo, esto es, en que el miembro derecho de la ecuación anterior es igual a cero:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.24)$$

Al igual que en la sección anterior, consideramos la solución en la forma de una onda plana (en general se puede tener una superposición de ondas, pero nos limitaremos al caso de guías *single-mode*),

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{i\omega t}. \quad (2.25)$$

La sustitución en la ecuación de onda (2.24) nos lleva a que la amplitud  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  obedece la ecuación de Helmholtz, a saber,

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.26)$$

Si identificamos  $z$  con la dirección de propagación — en que el índice de refracción es invariante, podemos expresar nuevamente la dependencia espacial del campo eléctrico como sigue:<sup>3</sup>

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(x, y) \exp(i\beta z), \quad (2.27)$$

donde  $\beta$  es la constante de propagación (real) de la guía de onda y  $\mathbf{u}(x, y)$  es el perfil transversal correspondiente a un modo normal. Para simplificar el desarrollo, en lo que sigue nos restringimos a un sistema unidimensional, es decir, consideramos una sola dirección transversal, digamos  $x$ , que identificamos también como la dirección del campo:  $\mathbf{u} = u(x)\hat{\mathbf{x}}$ .

Examinemos ahora el sistema compuesto de dos guías, considerando que inicialmente están separadas por una distancia infinita. En ese límite, las guías están desacopladas y el campo en cada una de ellas evoluciona según

$$E_1(x, z) = a_1 u_1(x) e^{-i\beta_1 z} \quad (2.28)$$

$$E_2(x, z) = a_2 u_2(x) e^{-i\beta_2 z}, \quad (2.29)$$

donde  $a_i$  es la amplitud con que es excitado el modo  $u_i(x)$  de cada guía. Es importante indicar que en el régimen cuántico, estos coeficientes corresponderán a los operadores de creación  $\hat{a}_i$  de un fotón en la guía  $i$ -ésima. Ahora bien, el efecto de acercar las dos guías se manifiesta en una variación — que suponemos *lenta* en comparación a

---

<sup>3</sup>Cambiamos la notación del modo espacial con respecto a la sección anterior (usamos  $u$  en lugar de  $e$ ) para evitar confusión con los múltiples factores exponenciales que aparecen en el presente desarrollo.

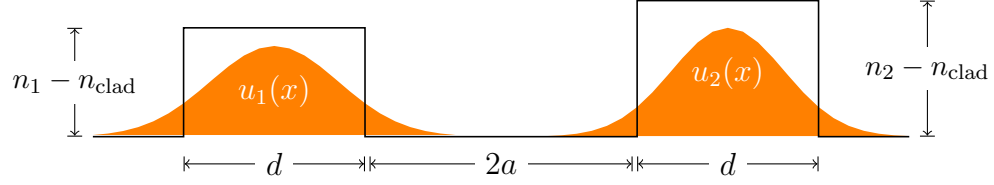


Figura 2.2: Dos guías de onda de ancho  $d$  y separadas por una distancia  $2a$  sustentan sendos modos transversales  $u_1(x)$  y  $u_2(x)$ . Fuente: Elaboración propia.

la distancia  $\beta_i^{-1}$  — de los coeficientes  $a_i$  a lo largo de la dirección de propagación:

$$a_1 \longrightarrow a_1(z), \quad a_2 \longrightarrow a_2(z).$$

Lo anterior se debe a un cambio del índice de refracción en el exterior de la guía, como se muestra en la figura 2.2: a una distancia  $2a$  aparece una sección con índice de refracción adicional  $n_2 - n_{\text{clad}}$  y ancho  $d$ , la cual, junto con el campo  $E_2$  de la segunda guía, implica una modificación en la polarización,  $P = \epsilon_0(n_2^2 - n_{\text{clad}}^2)E_2$ , que a su vez crea una fuente de radiación sobre la primera guía a través del término

$$-\mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \mu_0 \omega^2 P = (n_2^2 - n_{\text{clad}}^2)k^2 E_2 = (k_2^2 - k_{\text{clad}}^2)E_2. \quad (2.30)$$

Luego, la ecuación de Helmholtz para la guía 1 toma la forma

$$\nabla^2 E_1 + k_1^2 E_1 = -(k_2^2 - k_{\text{clad}}^2)E_2. \quad (2.31a)$$

Asimismo, para la segunda guía obtenemos

$$\nabla^2 E_2 + k_2^2 E_2 = -(k_1^2 - k_{\text{clad}}^2)E_1. \quad (2.31b)$$

Entonces, siguiendo nuestro *ansatz*, escribimos

$$E_1(x, z) = a_1(z)u_1(x)e^{-i\beta_1 z}, \quad E_2(x, z) = a_2(z)u_2(x)e^{-i\beta_2 z}. \quad (2.32)$$

Para sustituir en las ecs. (2.31), usamos primero la aproximación de que las amplitudes  $a_j$  varían lentamente con  $z$ , es decir,

$$\frac{d^2 a_j}{dz^2} = 0,$$

de donde se sigue que

$$\frac{\partial^2 E_j}{\partial z^2} = -2i\beta_j \frac{da_j}{dz} u_j e^{-i\beta_j z} - \beta_j^2 a_j u_j e^{-i\beta_j z}. \quad (2.33)$$

Luego, reemplazando con  $a_1(z)u_1(x)e^{-i\beta_1 z}$  en la ec. (2.31a) obtenemos

$$a_1 \left( \frac{d^2}{dx^2} u_1 + [-\beta_1^2 + k_1^2] u_1 \right) e^{-i\beta_1 z} - 2i\beta_1 \frac{da_1}{dz} u_1 e^{-i\beta_1 z} = -(k_2^2 - k_{\text{clad}}^2) E_2. \quad (2.34)$$

Pero notemos que el producto  $u_1 e^{-i\beta_1 z}$  (así como el análogo para la guía 2) resuelve la ec. de Helmholtz,

$$\nabla^2 \{u_1 e^{-i\beta_1 z}\} + k_1^2 \{u_1 e^{-i\beta_1 z}\} = 0,$$

por lo que la ecuación (2.34) resulta equivalente a

$$-i \frac{da_1}{dz} + \frac{1}{2\beta_1} (k_2^2 - k_{\text{clad}}^2) e^{-i(\beta_1 - \beta_2)z} a_2 u_2 = 0. \quad (2.35)$$

Multiplicando esta ecuación por  $u_1(x)$ , integrando con respecto a la dirección transversal  $x$ , y usando la normalización de los modos, obtenemos

$$-i \frac{d}{dz} a_1(z) = -\frac{2}{\beta_1} (k_2^2 - k_{\text{clad}}^2) \int dx u_1(x) u_2(x) e^{i(\beta_1 - \beta_2)z} a_2(z). \quad (2.36)$$

Definiendo la *constante de acoplamiento* entre la guía 2 y la 1,

$$\kappa_{21} = -\frac{2}{\beta_1} (k_2^2 - k_{\text{clad}}^2) \int dx u_1(x) u_2(x), \quad (2.37)$$

obtenemos

$$-i \frac{d}{dz} a_1(z) = \kappa_{21} e^{i(\beta_1 - \beta_2)z} a_2(z). \quad (2.38a)$$

Si procedemos de forma análoga para la segunda guía, se obtiene la ecuación

$$-i \frac{d}{dz} a_2(z) = \kappa_{12} e^{i(\beta_2 - \beta_1)z} a_1(z). \quad (2.38b)$$

Para el caso de dos guías idénticas se cumple que  $\beta_1 = \beta_2$ , de donde  $\kappa_{21} = \kappa_{12} = \kappa$ , y se tiene

$$-i \frac{d}{dz} a_1(z) = \kappa a_2(z) \quad (2.39a)$$

$$-i \frac{d}{dz} a_2(z) = \kappa a_1(z). \quad (2.39b)$$

En conclusión, de acuerdo a la teoría de modos acoplados, la dinámica de una guía de ondas es afectada por la presencia de otra guía vecina a través de un término lineal. Como podemos ver en la definición de la constante  $\kappa$ , ecuación (2.37), este término define la tasa de acoplamiento evanescente entre los campos mediante la integral de la superposición de los campos vecinos. Este concepto es fundamental en la definición de la constante de acoplamiento, aún si se en algunos contextos se la expresa con factores diferentes.

La teoría de modos acoplados puede extenderse directamente a un sistema de múltiples guías, es decir, a un *arreglo de guías de ondas*, en que la propagación de excitaciones es descrita por la generalización de las ecuaciones dinámicas (2.39), a saber,

$$-i \frac{d}{dz} a_i = \kappa (a_{i-1} + a_{i+1}). \quad (2.40)$$

La ecuación (2.40) es válida siempre que podamos considerar que el acoplamiento se da solamente entre guías vecinas, lo que se cumple para la mayoría de los experimentos con arreglos de guías de ondas.

### 2.2.1. Efectos no lineales

Cuando la intensidad del campo eléctrico transportado por las guías es grande — por ejemplo, por tratarse de un láser de alta potencia — es posible excitar respuestas no lineales en el medio que las sustenta. En este caso, debemos considerar un término

de orden superior en la polarización,

$$P(E) = \chi^{(1)}E + \chi^{(3)}|E^2|E,$$

lo que está acompañado de una dependencia del índice de refracción con respecto a la intensidad del campo. Tomando como ejemplo la primera guía,

$$n_1 \longrightarrow n_1(I_1) = n_1 + n_1^{(2)}I_1. \quad (2.41)$$

Aquí hemos llamado  $n_1^{(2)}$  al coeficiente no lineal del índice de refracción en la primera guía. La correspondiente ecuación diferencial para el campo toma la forma:

$$\nabla^2 E_1(\mathbf{r}) + k^2 n_1^2(I_1) E_1(\mathbf{r}) = -(k_2^2 - k_{\text{clad}}^2) E_2(\mathbf{r}),$$

o bien, con el ansatz (2.32) para los campos  $E_i(\mathbf{r})$ ,

$$2a_1(z)k^2 n_1 n_1^{(2)} I_1 u_1(x) e^{-i\beta_1 z} - 2i\beta_1 \frac{da_1}{dz} u_1(x) e^{-i\beta_1 z} = -(k_2^2 - k_{\text{clad}}^2) E_2, \quad (2.42)$$

Dividiendo por  $e^{-i\beta_1 z}$  y sustituyendo  $I_1 = |a_1(z)|^2 u_1^2(x)$  obtenemos

$$-i \frac{da_1}{dz} + \frac{1}{2\beta_1} (k_2^2 - k_{\text{clad}}^2) e^{i(\beta_1 - \beta_2)z} a_2(z) u_2(x) + \frac{n_1 n_1^{(2)} k^2}{\beta_1} |a_1(z)|^2 a_1(z) u_1^3(x) = 0.$$

Como antes, multiplicamos por  $u_1(x)$  e integramos con respecto a  $x$ :

$$-i \frac{d}{dz} a_1(z) = \kappa_{21} e^{i(\beta_1 - \beta_2)z} a_2(z) + \frac{n_1 n_1^{(2)} k^2}{\beta_1} \int dx u_1^4(x) |a_1(z)|^2 a_1(z). \quad (2.43)$$

Definiendo el coeficiente no lineal

$$\gamma_1 = \frac{n_1 n_1^{(2)} k^2}{\beta_1} \int dx u_1^4(x),$$

llegamos a la ecuación diferencial para la amplitud del campo en la guía 1:

$$-i \frac{d}{dz} a_1(z) = \kappa_{21} e^{i(\beta_1 - \beta_2)z} a_2(z) + \gamma_1 |a_1(z)|^2 a_1(z). \quad (2.44)$$



Para la segunda guía se obtiene una ecuación análoga. El sistema de ecuaciones diferenciales para las envolventes del campo en las guías no lineales idénticas (en que  $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$ ) es

$$-i \frac{d}{dz} a_1(z) = \kappa a_2(z) + \gamma |a_1(z)|^2 a_1(z) \quad (2.45a)$$

$$-i \frac{d}{dz} a_2(z) = \kappa a_1(z) + \gamma |a_2(z)|^2 a_2(z). \quad (2.45b)$$

Considerando la dirección de propagación  $z$  como la variable dinámica, las ecs. (2.45) pueden derivarse del Hamiltoniano

$$H = - \left\{ \kappa a_1^* a_2 + a_2^* a_1 + \frac{1}{2} \gamma (|a_1|^4 + |a_2|^4) \right\}. \quad (2.46)$$

Nuevamente, podemos extender la descripción a un arreglo de guías de ondas con la generalización de las ecuaciones (2.45), lo que nos lleva a la célebre *ecuación no lineal de Schrödinger discreta* para la amplitud del campo en la guía  $i$ -ésima:

$$-i \frac{d}{dz} a_i = \kappa (a_{i-1} + a_{i+1}) + \gamma |a_i|^2 a_i. \quad (2.47)$$

### 2.2.2. Regimen cuántico

Cuando se quiere describir la dinámica de pocos fotones en un sistema de dos guías de ondas (esto es, en un *dímero cuántico*), las amplitudes complejas  $a_i$  y  $a_i^*$  introducidas en el desarrollo previo deben reemplazarse por operadores de destrucción y creación de fotones en la guía  $i$ -ésima,  $\hat{a}_i$  y  $\hat{a}_i^\dagger$ . Esta sustitución requiere considerar con cuidado las relaciones de conmutación entre los operadores. Así, para la cuantización de los términos cuárticos  $|a_i|^4$  en el hamiltoniano (2.46) debemos simetrizar

$$|a_i|^4 \longrightarrow \frac{1}{6} \left( \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \right). \quad (2.48)$$

Utilizando las relaciones de conmutación

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{i,j} \quad (2.49)$$

obtenemos

$$|a_i|^4 \longrightarrow \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + 1/2. \quad (2.50)$$

Luego, la cuantización del hamiltoniano (2.46) resulta en

$$\hat{H} = - \left\{ \kappa \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \kappa \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 + \frac{1}{2} \gamma (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_2) \right\} - \gamma (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + 1). \quad (2.51)$$

Los últimos términos sólo añaden una constante al espectro de energías, por lo que pueden ser descartados. Comprobamos esto evaluando el conmutador entre los dos términos del hamiltoniano:

$$\begin{aligned} & [\kappa \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \kappa \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 + \frac{1}{2} \gamma (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_2), \gamma (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + 1)] \\ &= \kappa \gamma \left( -\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \right) = 0. \end{aligned}$$

El hecho de que estos operadores conmuten implica que el número total de fotones

$$\hat{N} = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2$$

es una cantidad conservada del sistema. De este modo, hemos obtenido el hamiltoniano de Bose-Hubbard que describe la evolución de fotones en un arreglo de dos guías de ondas:

$$\hat{H} = - \left\{ \kappa \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \kappa \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 + \frac{1}{2} \gamma (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_2) \right\}. \quad (2.52)$$

No obstante, es necesario aclarar que, generalmente, los términos no lineales en el hamiltoniano no tendrán efecto para un sistema de pocos fotones, ya que la interacción entre ellos, asociada al parámetro  $\gamma$ , requiere haces de luz de potencia alta.

Las ecuaciones diferenciales para los operadores  $\hat{a}_i$ , que rigen su evolución en el cuadro de interacción, resultan ser

$$-i \frac{d}{dz} \hat{a}_1(z) = \kappa \hat{a}_2(z) + \gamma \hat{a}_1^\dagger(z) \hat{a}_1(z) \hat{a}_1(z), \quad (2.53a)$$

$$-i \frac{d}{dz} \hat{a}_2(z) = \kappa \hat{a}_1(z) + \gamma \hat{a}_2^\dagger(z) \hat{a}_2(z) \hat{a}_2(z). \quad (2.53b)$$

El método recién expuesto puede ser extendido para  $M > 2$  guías de onda idénticas (asumiendo que cada guía tiene efecto solamente en sus primeras vecinas), obteniéndose así un conjunto de  $M$  ecuaciones acopladas:

$$-i \frac{d}{dz} \hat{a}_n(z) = \kappa [\hat{a}_{n-1}(z) + \hat{a}_{n+1}(z)] + \gamma \hat{a}_n^\dagger(z) \hat{a}_n(z) \hat{a}_n(z). \quad (2.54)$$

### 2.2.3. Solución del dímero cuántico

En lo que sigue, expresamos el coeficiente de acoplamiento lineal en (2.52) en unidades del parámetro de interacción no lineal, por lo que el hamiltoniano queda expresado como sigue:

$$\hat{H} = -\kappa (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1) + (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_2), \quad (2.55)$$

Introduciendo las definiciones

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2} (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1), \quad (2.56a)$$

$$\hat{J}_y = \frac{i}{2} (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1), \quad (2.56b)$$

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2} (\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1), \quad (2.56c)$$

podemos rescribir el hamiltoniano en la forma siguiente:

$$\hat{H}_d = \hat{H} + \frac{1}{2} N^2 - N. \quad (2.57)$$

con

$$\hat{H} = -2\kappa \hat{J}_x + 2\hat{J}_z^2. \quad (2.58)$$

Los operadores  $\hat{J}_i$  obedecen el álgebra de momento angular. Dado que para cualquier número de bosones  $N$ , los últimos términos en (2.57) son una constante, nos restringimos a las soluciones de  $\hat{H}$ . Podemos ver directamente que éste conmuta con  $\hat{J}^2$ , lo que implica la conservación del momento angular total:

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 = \frac{\hat{N}}{2} \left( \frac{\hat{N}}{2} + 1 \right). \quad (2.59)$$

Luego, nuestro espacio de Hilbert tiene dimensión finita (igual a  $2j + 1 = N + 1$ ), determinado por el número total de bosones, que también se conserva, como se mostró anteriormente.

En primer lugar nos interesa el caso de dos fotones inyectados en las guías, por lo que tenemos un espacio tridimensional. Usaremos la base de autoestados de  $\hat{J}_z$  para expresar el hamiltoniano.

En esa representación (considerando  $\hbar = 1$ ),

$$\hat{H} = -\sqrt{2}\kappa \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}\kappa & 0 \\ -\sqrt{2}\kappa & 0 & -\sqrt{2}\kappa \\ 0 & -\sqrt{2}\kappa & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Los autovalores (autofrecuencias) del hamiltoniano resultan ser

$$E_1 = 1, \quad E_2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 + 16\kappa^2} \right), \quad E_3 = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + 16\kappa^2} \right). \quad (2.61)$$

Notamos que para  $\kappa = 0$ , los niveles  $E_1$  y  $E_2$  son degenerados, ya que en ese caso, las dos guías están desacopladas y por tanto los estados simétricos y antisimétricos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

tienen igual energía.

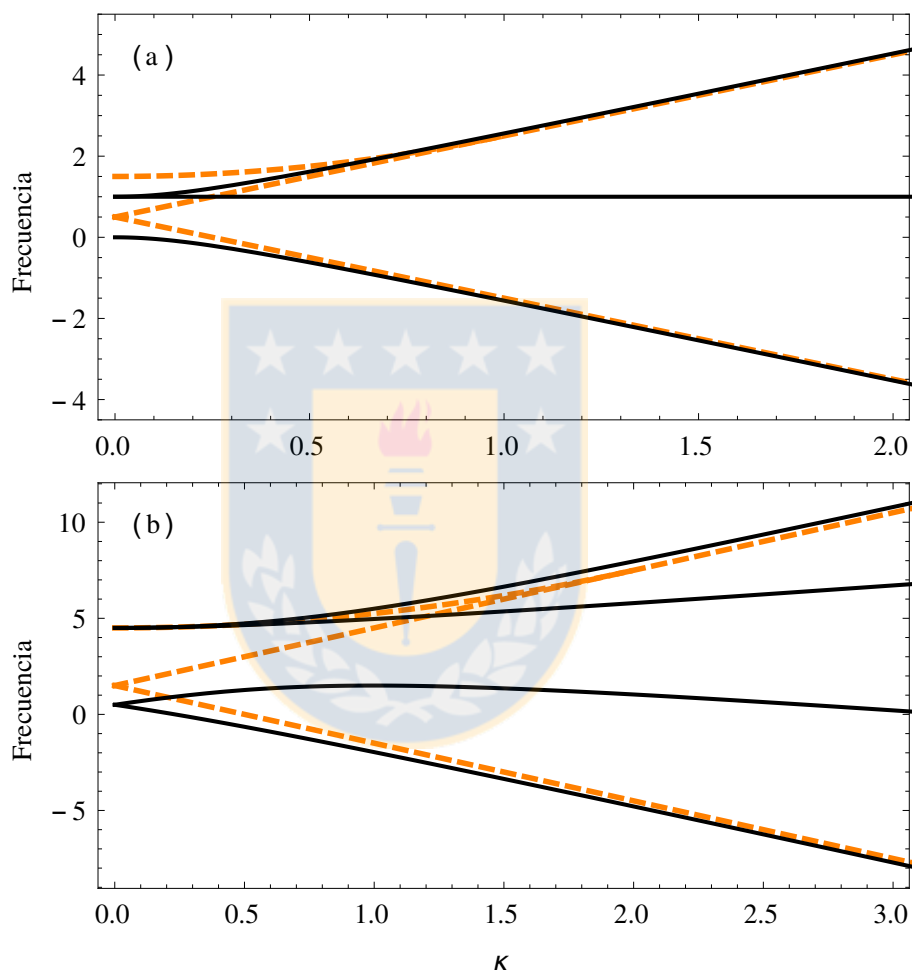


Figura 2.3: Autofrecuencias o autoenergías del dímero cuántico (curva negra) en función del acoplamiento  $\kappa$  para 2 fotones (a) y 3 fotones (b). Las líneas discontinuas de color naranja corresponden a los niveles de energía clásicos. Fuente: Elaboración propia.

Ahora bien, si consideramos el dímero con tres fotones el hamiltoniano normalizado tiene la siguiente representación matricial

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & -\sqrt{3}\kappa & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}\kappa & \frac{1}{2} & -2\kappa & 0 \\ 0 & -2\kappa & \frac{1}{2} & -\sqrt{3}\kappa \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}\kappa & \frac{9}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Presentamos las autoenergías (autofrecuencias) de este sistema en la figura (2.3), donde se muestra también el caso de dos fotones. Vemos que a medida que aumenta  $\kappa$  (respuesta no lineal baja en comparación con la constante de acoplamiento), los extremos del espectro corresponden con los niveles de energía clásicos correspondientes a los estados simétrico y antisimétrico.

## 2.3. Cuantización del campo electromagnético

En la sección anterior se señaló que las amplitudes con que son excitados los modos del campo eléctrico en las guías deben ser reemplazadas con operadores cuando estudiamos el régimen cuántico (dinámica de un número bajo de fotones). Aunque, bajo la aproximación proporcionada por la teoría de modos acoplados, este método de cuantización es completamente heurístico, sigue los lineamientos teóricos fundamentales de la cuantización del campo electromagnético.

En lo que sigue proporcionaremos los elementos teóricos principales para la cuantización. A fin de mantener la concordancia con la literatura<sup>4</sup>, en esta sección consideramos al tiempo como la variable dinámica, si bien los resultados pueden ser aplicados a los sistemas de guías de ondas en que la variable es la dirección de propagación  $z$ .

<sup>4</sup>Véanse por ejemplo las referencias [29, 30].

### 2.3.1. Potenciales e invariancia de *gauge*

Nuevamente, comenzaremos nuestro análisis a partir de las ecuaciones de Maxwell, (2.1). Notamos que, en particular, las ecuaciones (2.1a) y (2.1d) pueden deducirse definiendo el potencial vector  $\mathbf{A}$  y el potencial escalar  $U$ , tales que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.64a)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla U. \quad (2.64b)$$

A partir de estas definiciones podemos ver que los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son invariantes ante una *transformación de gauge* de la forma

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla F, \quad (2.65a)$$

$$U \longrightarrow U' = U - \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (2.65b)$$

donde  $F$  es una función arbitraria de la posición  $\mathbf{r}$  y el tiempo  $t$ . La elección del *gauge* determina el valor de  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ . Escogeremos el *gauge de Coulomb* en ausencia de cargas,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad U = 0. \quad (2.66)$$

por ser el más apropiado para estudios de electrodinámica no relativista cuando el sistema no involucra fuentes.

### 2.3.2. Espacio recíproco

En su trabajo pionero de , Dirac propuso un paso esencial para la cuantización, a saber, expresar los campos en sus componentes de Fourier, para posteriormente imponer las relaciones de conmutación correspondientes sobre los distintos factores que aparecen en los términos. La transformada de Fourier de los campos  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y

$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  se define como

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.67a)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r, \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.67b)$$

mientras que la transformada inversa de cada campo está dada por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k, \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.68a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k, \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (2.68b)$$

Los potenciales  $\mathbf{A}$  y  $U$  introducidos anteriormente transforman de forma análoga,

$$\mathbf{A} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}, \quad y \quad U \longrightarrow \mathcal{U},$$

de modo que su relación con los campos en el espacio recíproco está dada por

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = i\mathbf{k} \times \boldsymbol{\mathcal{A}} \quad (2.69a)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\mathcal{A}} - i\mathbf{k}\mathcal{U}. \quad (2.69b)$$

La transformada de Fourier ofrece múltiples ventajas para el presente análisis. En primer lugar, las ecuaciones de Maxwell — que en su forma original involucran derivadas parciales — pasan a ser estrictamente locales<sup>5</sup>:

$$i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (2.70a)$$

$$i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = 0, \quad (2.70b)$$

$$i\mathbf{k} \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\mathcal{B}}, \quad (2.70c)$$

$$i\mathbf{k} \times \boldsymbol{\mathcal{B}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \boldsymbol{\mathcal{J}}, \quad (2.70d)$$

<sup>5</sup>Al decir que las ecuaciones son *estrictamente locales*, nos referimos a que las derivadas temporales de los campos dependen de los valores de estos en un mismo punto  $\mathbf{k}$ .



siendo  $\mathcal{J}$  la transformada de Fourier de la corriente  $\mathbf{J}$ , y  $\varrho$  la transformada de la distribución de carga  $\rho$ . Más aún, el espacio recíproco pone en evidencia que las dos primeras ecuaciones de Maxwell, (2.70a) y (2.70b), definen las componentes longitudinales (paralelas al vector de onda  $\mathbf{k}$ ) de los campos  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{B}$ . Así, vemos que mientras el campo magnético es puramente transversal, la componente longitudinal  $\mathcal{E}_{\parallel}$  del campo eléctrico se relaciona con la distribución de cargas. Es decir, en el espacio real se tiene

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}', t) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (2.71)$$

Por otra parte, las ecuaciones de Maxwell (2.70) y las relaciones entre los campos y los potenciales [ec. (2.64) o ec. (2.69)], nos permiten ver que se cumple

$$\mathbf{E}_{\perp} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E}_{\parallel} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \nabla U. \quad (2.72)$$

Podemos entender ahora la nomenclatura asociada al *gauge* de Coulomb, también llamado *gauge* transversal: en él, la componente longitudinal del potencial vector,  $\mathbf{A}_{\parallel}$ , es nula, de donde sigue que

$$\mathbf{E}_{\parallel} = -\nabla U, \quad (2.73)$$

y la comparación con la ecuación (2.72) implica que  $U$  es el potencial de Coulomb de la distribución de carga  $\rho$ .

### 2.3.3. Cuantización de la energía electromagnética

La ventaja del desarrollo previo es que nos permite identificar la contribución de cada elemento del sistema a su energía total, en el *gauge* de Coulomb. Así, la energía propia de los campos eléctrico y magnético está asociada a sus componentes transversales, mientras que las componentes longitudinales contribuyen a través de su interacción con la distribución de carga. Luego, en ausencia de cargas y fuentes, la

energía total corresponde a la del campo electromagnético transversal:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r [\mathbf{E}_\perp^2(\mathbf{r}) + c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{r})] \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3k [|\boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp(\mathbf{k})|^2 + c^2 |\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{k})|^2] . \end{aligned} \quad (2.74)$$

Como un paso previo a la cuantización, introducimos la *variable normal*

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}, t) = -\frac{i}{2\Lambda(k)} \left[ \boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp(\mathbf{k}, t) - c\hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, t) \right] , \quad (2.75)$$

donde el coeficiente de normalización  $\Lambda$  se considera igual a

$$\Lambda(k) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} , \quad (2.76)$$

a fin de obtener las expresiones para la energía presentadas más abajo. Invertiendo la relación (2.75) podemos expresar los campos en función de la variable normal:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp(\mathbf{k}, t) = i\Lambda(k) [\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}, t) - \boldsymbol{\alpha}^*(-\mathbf{k}, t)] , \quad (2.77a)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, t) = \frac{i\Lambda(k)}{c} \left[ \hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}, t) + \hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\alpha}^*(-\mathbf{k}, t) \right] . \quad (2.77b)$$

Por ser combinación de  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  y  $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ , la variable  $\boldsymbol{\alpha}$  también es un campo transversal y puede ser expresada en componentes ortogonales al vector de onda, a lo largo de dos direcciones  $\boldsymbol{\epsilon}_1$  y  $\boldsymbol{\epsilon}_2$  como se muestra en la figura 2.4. Es decir,

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}, t) = \boldsymbol{\epsilon}_1 \alpha_{\boldsymbol{\epsilon}_1}(\mathbf{k}, t) + \boldsymbol{\epsilon}_2 \alpha_{\boldsymbol{\epsilon}_2}(\mathbf{k}, t) = \sum_{\boldsymbol{\epsilon}} \boldsymbol{\epsilon} \alpha_{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{k}, t) . \quad (2.78)$$

Utilizando estas definiciones, la energía electromagnética toma la forma siguiente [30]

$$H = \int d^3k \sum_{\boldsymbol{\epsilon}} \frac{\hbar\omega}{2} [\alpha_{\boldsymbol{\epsilon}}^*(\mathbf{k}, t) \alpha_{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{k}, t) + \alpha_{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{k}, t) \alpha_{\boldsymbol{\epsilon}}^*(\mathbf{k}, t)] . \quad (2.79)$$

Así, vemos que  $H$  queda expresada como la suma de energías correspondientes a un conjunto de osciladores armónicos con frecuencia  $\omega = ck$ , caracterizados por el

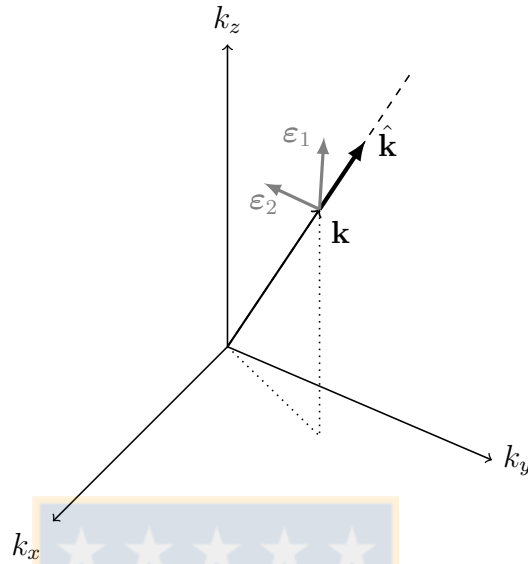


Figura 2.4: El campo  $\alpha$  puede descomponerse a lo largo de dos vectores unitarios  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  perpendiculares al vector de onda  $\mathbf{k}$ . Fuente: Elaboración propia.

vector de onda  $\mathbf{k}$  y el de polarización  $\epsilon$ . Es decir, estos vectores definen los modos de oscilación del campo electromagnético.

Volviendo a la expresión para el campo eléctrico, ec. (2.77a), vemos que la inversa de la transformada de Fourier nos lleva a su expresión en el espacio real es

$$\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t) = i \int d^3k \sum_{\epsilon} \tau_{\omega} [\alpha_{\epsilon}(\mathbf{k}, t) \epsilon \epsilon^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \alpha_{\epsilon}^*(\mathbf{k}, t) \epsilon \epsilon^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}] , \quad (2.80)$$

donde los coeficientes  $\tau_{\omega}$  son incluidos para efectos de normalización, determinados por las condiciones de borde. A este respecto, el acercamiento estándar consiste en suponer que el sistema está contenido en un cubo de arista  $L$ , en cuyos bordes se aplican condiciones periódicas, para al final evaluar el límite  $L \rightarrow \infty$ . La ventaja de este procedimiento es que las integrales en la ecuación (2.80) son reemplazadas por series de Fourier. Es decir, las integrales respecto a  $\mathbf{k}$  son reemplazadas por sumas sobre valores discretos  $k_{x,y,z} = 2\pi n_{x,y,z}/L$ , siendo  $n_{x,y,z}$  enteros. Así, las variables

$\alpha_\varepsilon(\mathbf{k}, t)$  son reemplazadas por variables discretas

$$\alpha_\varepsilon(\mathbf{k}, t) \longrightarrow \alpha_i(t).$$

De este modo, el campo eléctrico transversal queda expresado como la siguiente suma:

$$\mathbf{E}_\perp = i \sum_i \sqrt{\frac{\hbar\omega_i}{2\varepsilon_0 L^3}} [\alpha_i \boldsymbol{\varepsilon}_i e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} - \alpha_i^* \boldsymbol{\varepsilon}_i e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}]. \quad (2.81)$$

La expresión (2.81) tiene los elementos necesarios para aplicar el método de cuantización propuesto por Dirac, a saber: (i) considerar las amplitudes de los modos del campo — es decir, las variables normales  $\alpha_\varepsilon$  y  $\alpha_\varepsilon^*$  correspondientes a cada modo, como operadores de destrucción y creación:

$$\alpha_i \longrightarrow \hat{a}_i, \quad \alpha_i^* \longrightarrow \hat{a}_i^\dagger, \quad (2.82)$$

y (ii) imponer las relaciones de conmutación canónicas:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_i, \hat{a}_j] &= [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0, \\ [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] &= \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

La expresión para el campo eléctrico en la expresión (2.81) nos permite entender la correspondencia entre las amplitudes del campo que hemos identificado aquí y las que encontramos en nuestro análisis anterior del acoplamiento entre guías de ondas cercanas (teniendo en cuenta la equivalencia entre el tiempo y la dirección de propagación en uno y otro contexto). Esto fundamenta el método aplicado en el análisis del régimen cuántico, que presentamos en la sección anterior.

Para terminar queremos destacar que si bien el reemplazo de las variables clásicas por operadores [ec. (2.82)] puede parecer una imposición forzada, es posible una derivación lagrangiana, mucho más rigurosa, cuya extensión impide abordarla en este

trabajo. Para una presentación detallada de este acercamiento, puede consultarse el capítulo 2 de la referencia [30].

## 2.4. Condensados de Bose-Einstein en potenciales ópticos

Cuando un condensado de Bose-Einstein (BEC) está contenido en una red óptica periódica (formada a partir de interferencia de haces), es posible describirlo como un sistema discreto, cuya dinámica se rige por una ecuación discreta no lineal de Schrodinger, que formalmente es igual a la ecuación (2.47) obtenida para la propagación de excitaciones en arreglos de guías de ondas. No obstante, tanto su derivación como el significado físico de los parámetros involucrados es diferente para cada caso.

La condensación de Bose-Einstein es un fenómeno cuántico, por lo que su estudio debe considerar en primer lugar el hamiltoniano de varios cuerpos que describe  $N$  bosones interactuantes sometidos a un potencial externo  $V_{\text{ext}}$ :

$$\begin{aligned} \hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \\ + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t). \end{aligned} \quad (2.84)$$

Aquí  $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$  [ $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ ] es el operador de creación [destrucción] de un bosón en la posición  $\mathbf{r}$ . El potencial  $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  es un potencial interatómico que da cuenta de las colisiones entre las partículas del condensado. Dado que un BEC consiste en un gas diluido de átomos (en que el camino medio entre las partículas es mucho mayor que la longitud de *scattering* que permite su interacción), podemos considerar únicamente interacciones binarias.

### 2.4.1. Teoría de campo medio

Cuando el sistema está compuesto de un número grande de partículas, su descripción cuantitativa puede realizarse en un marco clásico gracias a la *teoría de campo medio*. La idea básica de este enfoque consiste en considerar la parte operatorial de  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$  como una perturbación promedio de su valor de expectación  $\psi = \langle \hat{\Psi} \rangle$ , es decir

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t) + \hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t), \quad (2.85)$$

La función  $\psi(\mathbf{r}, t)$  es un campo clásico con fase bien definida, y recibe el nombre de *función de onda macroscópica*, ya que da cuenta de la amplitud de probabilidad de encontrar una partícula en una posición y tiempo determinados.

Cuando el condensado es suficientemente homogéneo (como es esperable para un número grande de partículas), las fluctuaciones cuánticas pueden descartarse y puede sustituirse el operador  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$  por su promedio  $\psi(\mathbf{r}, t)$  en la ecuación de Heisenberg proveniente del hamiltoniano (2.84). Esto nos lleva a la *ecuación de Gross-Pitaevskii*, que para el caso unidimensional tiene la forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_x(x, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{\text{ext}}(x) + \gamma_{1D} |\psi_x(x, t)|^2 \right] \psi_x(x, t), \quad (2.86)$$

donde el efecto de las interacciones colisionales está dado en el parámetro  $\gamma_{1D}$  (proporcional a la longitud de *scattering* entre los átomos).

### 2.4.2. Potencial periódico

Cuando dos láseres de igual intensidad, polarización y longitud de onda se propagan en sentido opuesto, su superposición da origen a un potencial óptico periódico:

$$V_{\text{ext}}(x) = V_0 \cos^2(\pi x/d), \quad (2.87)$$

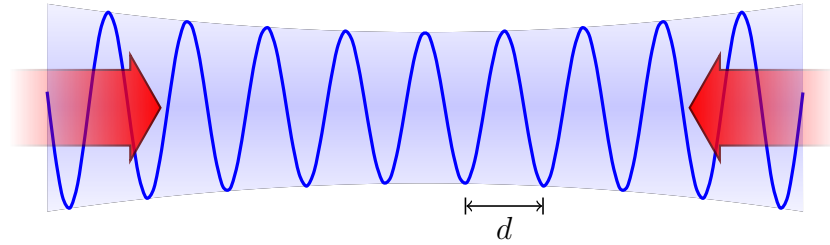


Figura 2.5: Dos láseres propagándose en contra forman una red óptica unidimensional. El patrón de interferencia da origen a un potencial óptico que, en cierta región, puede considerarse periódico con periodo  $d$ . Fuente: Elaboración propia.

donde  $d = \lambda/2$  es el espaciamiento de la red y  $V_0$  es su profundidad, proporcional al cuadrado de la amplitud del campo óptico.  $V_0$  suele medirse en unidades de la *energía de retroceso (recoil energy)* dada por

$$E_r = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2md^2}, \quad (2.88)$$

que corresponde a la energía entregada a un átomo que interactúa con un fotón de los que componen el campo óptico <sup>6</sup>.

Antes de incluir las interacciones atómicas presentes en un BEC — es decir, considerando solamente los términos lineales en la ecuación (2.86), la periodicidad del potencial nos permite deducir algunas propiedades de los autoestados del sistema. En particular, es posible extrapolar un importante resultado de la física de sólidos relacionado con potenciales periódicos, a saber, el *teorema de Bloch*. Este teorema establece que las autofunciones  $\phi(x)$  del sistema, son producto de una función periódica (con el mismo periodo  $d$  del potencial) y de una onda plana cuyo vector de

<sup>6</sup>El ensanchamiento de los haces gaussianos que forman la red, lleva a una pérdida de la periodicidad lejos del ancho mínimo (foco), como se ilustra en la figura 2.5. No obstante, como el espaciamiento  $d$  es proporcional a la longitud de onda del láser y mucho menor que la *longitud de Rayleigh*  $z_R$ , el potencial puede ser considerado periódico y descrito por (2.87) en una región extendida sobre varios cientos de pozos de potencial (sitios de la red) [31].

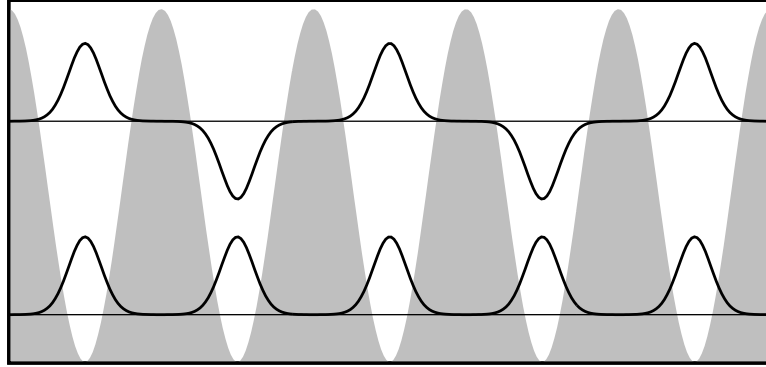


Figura 2.6: Funciones de Bloch para un potencial óptico de profundidad  $\sim 4E_r$ , correspondientes a cuasimomento  $q = 0$  (abajo) y  $q = \pi$  (arriba). Fuente: Elaboración propia.

onda es llamado el *cuasimomento*  $q$ :

$$\phi(x) = e^{iqx} u_q(x) \equiv \phi_q(x). \quad (2.89)$$

El teorema de Bloch, junto a la ecuación (2.86), permite concluir que las autoenergías del sistema están organizadas en bandas, cuyo ancho y separación dependerá de la profundidad del potencial periódico (amplitud  $V_0$  en la definición (2.87) del potencial  $V_{\text{ext}}$ ). Dado que las partículas de un BEC están en el estado de mínima

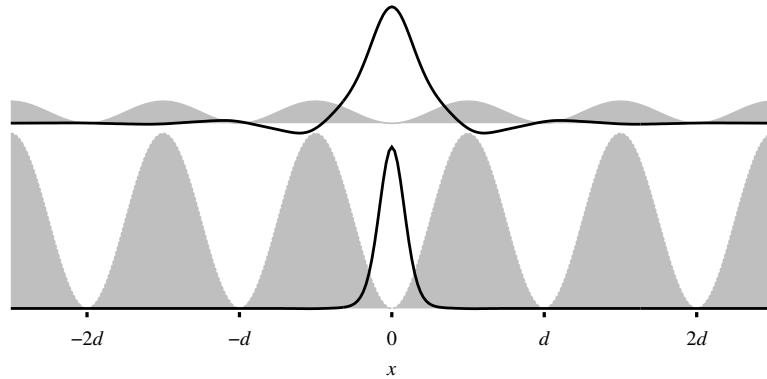


Figura 2.7: Funciones de Wannier de orden cero para un potencial débil ( $\sim 0.5E_r$ , arriba) y uno fuerte ( $\sim 8E_r$ , abajo). Fuente: Elaboración propia.



energía, consideraremos solamente la primera banda. En la figura 2.6 mostramos las autofunciones o *funciones de Bloch* correspondientes a sus bordes, para un potencial profundo.

Podemos ver que las autofunciones en  $q = 0$  y en  $q = \pi/d$ , difieren en la fase relativa de la función de onda entre dos mínimos adyacentes del potencial (para  $q = 0$  la función es no escalonada o *unstaggered*, mientras que para  $\pi/d$  es escalonada o *staggered*), pero comparten una característica importante, a saber: son combinación de funciones localizadas en cada sitio del potencial óptico. Por esta razón, para estudiar la dinámica de un condensado atrapado en un potencial periódico, resulta útil la introducción de las *funciones de Wannier*  $\Phi_m(x)$ , definidas como la transformada de Fourier de las funciones de Bloch, y que se localizan en cada sitio  $m$  de la red (esto es, en cada mínimo del potencial  $V_{\text{ext}}$ ). En la figura 2.7 mostramos ejemplos de funciones de Wannier para dos distintas profundidades del potencial externo.

Luego, la función de onda macroscópica para un condensado de Bose-Einstein en un potencial óptico profundo puede descomponerse como

$$\psi(x, t) = \sum_m^M u_m(t) \Phi_m(x), \quad (2.90)$$

donde  $u_m(t) \in \mathbb{C}$  y el índice  $m$  corre sobre los  $M$  sitios de la red.

### 2.4.3. Interacciones atómicas

Como mostramos anteriormente, la interacción de contacto (colisional) entre pares de átomos está representada por el parámetro  $\gamma_{1D}$  en la ecuación de Gross-Pitaevskii unidimensional (2.86). Si reemplazamos la función de onda  $\psi(x, t)$  en esta ecuación con la descomposición (2.90), multiplicamos por  $\Phi_n(x)$  (para utilizar la ortonormalidad de las funciones de Wannier) e integramos en todo el espacio, obtenemos

nuevamente una ecuación discreta no lineal de Schroedinger, en que la interacción de contacto es incluida a través de un término no lineal cúbico:

$$i\hbar \frac{\partial u_n(t)}{\partial t} = \epsilon_n u_n(t) + \kappa [u_{n-1}(t) + u_{n+1}(t)] + q |u_n(t)|^2 u_n(t). \quad (2.91)$$

Aquí  $\kappa$  es la constante de acoplamiento (o *hopping* atómico) dada por

$$\kappa = - \int d\mathbf{r} \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \Phi_m \cdot \nabla \Phi_{m+1} + \Phi_m V_{\text{ext}} \Phi_{m+1} \right], \quad (2.92)$$

y  $\epsilon_n$  corresponde a la energía de sitio (también llamada constante de autoacoplamiento) definida de forma análoga.

La magnitud del término de interacción no lineal, en tanto, está dado por el parámetro  $q$ :

$$q = \gamma_{1D} N_t \int dx |\Phi_n|^4(x), \quad (2.93)$$

siendo  $N_t$  el número total de átomos. Es decir, el término no lineal en la ecuación (2.91) depende del número total de átomos, tal como el término no lineal que encontramos al estudiar arreglos de guías de ondas depende de la potencia de la luz transmitida.

Ahora bien, en condensados cuyos átomos presentan un momento dipolar magnético considerable, la interacción entre los dipolos actúa en conjunto a la interacción de contacto. Si el medio está polarizado magnéticamente (por ejemplo por la acción de un campo magnético externo), todos los dipolos apuntan en una misma dirección, por lo que la energía de interacción  $U_{\text{dd}}$  entre los dipolos es igual a

$$U_{\text{dd}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mu^2}{4\pi} \left[ \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{r^3} \right], \quad (2.94)$$

donde  $\mu$  es el momento magnético permanente de las partículas, y  $\theta$  denota el ángulo entre la dirección de magnetización y la posición relativa entre las ellas.

Dos propiedades importantes de la interacción dipolo-dipolo se muestran en la ec. (2.94), a saber, (i) su largo alcance (del orden de  $1/r^3$ ), el cual — a diferencia de la interacción colisional — da origen a un acoplamiento no lineal entre partículas situadas entre distintos pozos del potencial periódico; y (ii) su carácter anisotrópico, dado por el factor  $\cos^2 \theta$ . Esto último implica que la magnitud, e incluso el efecto, de la interacción dipolar puede variar de acuerdo a la orientación de los dipolos entre sí: es repulsiva para dipolos alineados lado a lado, y es atractiva para dipolos puestos en fila, teniendo en el segundo caso el doble de fuerza que en el primero (fig. 2.8). A pesar de esta dependencia de la interacción con respecto a la posición relativa entre los dipolos, es posible ajustar globalmente su magnitud e incluso su sentido a través de un campo magnético externo [10]. Aquí simplemente absorbemos ese factor variable en el coeficiente  $\mu$ .

Al incluir el término de interacción dipolar en la ecuación GP unidimensional (2.86) obtenemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_x(x, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{\text{ext}}(x) + \gamma_{1D} |\psi_x(x, t)|^2 + \frac{\mu_0 \mu^2}{4\pi} \int (1 + \cos \theta) \frac{|\psi(x')|^2}{|x - x'|^3} dx' \right] \psi_x(x, t), \quad (2.95)$$

A partir de la ecuación (2.95), podemos incorporar la interacción dipolar a nuestro modelo discreto (2.91) expandiendo la función de onda en las funciones de Wannier  $\Phi_n(x)$  centradas en los mínimos del potencial, es decir  $\psi(x, t) = \sum_n u_n(t) \Phi_n(x)$ . Al

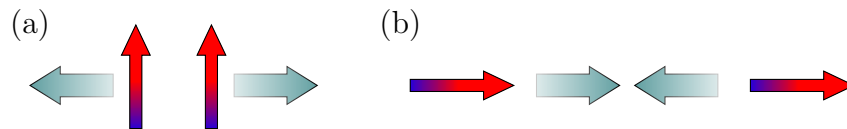


Figura 2.8: (a) Cuando los dipolos están orientados lado a lado ( $\theta = \pi/2$ ), la fuerza de interacción es repulsiva. (b) Cuando están en fila ( $\theta = 0$ ), la interacción es atractiva. Fuente: Elaboración propia.

reemplazar en (2.95), surgen integrales de traslape representando el acoplamiento dipolar entre dos sitios  $n$  y  $m$  de la red:

$$g_{nm} = \frac{\mu_0 \mu^2}{4\pi} \int dx dx' \Phi_n(x) \Phi_m(x') \left[ \frac{1 + \cos \theta}{|x - x'|^3} \right] \Phi_n(x) \Phi_m(x') \quad (2.96)$$

Luego, vemos que la interacción dipolar también contribuye a la no linealidad en sitio a través del coeficiente  $g_{nm}$ , junto a la interacción de contacto. En lo que sigue descartamos la contribución local  $g_{nn}$  y retenemos solamente  $g_{n,n+1} = g$ , el coeficiente de acoplamiento no lineal a primeros vecinos, de donde se sigue que

$$-i \frac{d}{dt} u_n(t) = \kappa(u_{n+1} + u_{n-1}) + q|u_n|^2 u_n + g(|u_{n+1}|^2 + |u_{n-1}|^2) u_n \quad (2.97)$$

es la ecuación que describe la dinámica de la amplitud  $u_n(t)$  de la función de onda.

En conclusión, hemos visto que las interacciones atómicas de contacto se manifiestan en términos no lineales equivalentes a los que induce la potencia de la luz en arreglos de guías de ondas. En tanto, las interacciones atómicas de largo alcance, presentes en un BEC compuesto de átomos dipolares, posibilitan una fenomenología única en el contexto de los sistemas discretos, que afecta particularmente a la existencia de soluciones localizadas en sistemas bidimensionales, como estudiaremos en el capítulo siguiente.

## Capítulo 3

# Soluciones localizadas en un condensado dipolar bidimensional



En años recientes, el estudio de los condensados de Bose-Einstein (BECs) se ha expandido gracias a la realización experimental de condensados *dipolares* cuyos átomos presentan un momento dipolar magnético. En los primeros experimentos de condensación con átomos dipolares se ocuparon átomos de Cromo [8], y posteriormente se ha conseguido la condensación de Disprosio [32, 33].

Aparece como una pregunta natural, entonces, el posible efecto de la interacción atómica dipolar en las propiedades de las soluciones localizadas (solitones o *breathers*) existentes en el BEC. La existencia de éstas en condensados dipolares ha sido predicha tanto para sistemas unidimensionales [34–40] como bidimensionales [41–43]. Recientemente se ha dado incluso una propuesta experimental para su observación [44].

En este capítulo presentamos un estudio de soluciones localizadas discretas en un condensado de Bose-Einstein atrapado en una red óptica periódica bidimensional. Usaremos el acercamiento dado por la *ecuación discreta no lineal de Schroedinger* (DNLS), que presentamos en el capítulo 2. Veremos que en presencia de la interacción dipolar surgen propiedades interesantes, tales como regiones en el espacio de parámetros en que dos soluciones fundamentales son simultáneamente estables, y un cambio en la norma mínima necesaria para la formación de *breathers* discretos bidimensionales.

### 3.1. Modelo

Bajo el enfoque discreto cuya derivación presentamos en 2.4, la función de onda macroscópica que describe el comportamiento de un BEC dipolar en una red óptica periódica es representada por su amplitud en todos los sitios o *nodos* de una red.

Aquí estudiaremos una red isotrópica cuadrada, cuyos sitios son identificados por su posición  $i, j$ . Si llamamos  $u_{i,j}$  a la amplitud de la función de onda en el sitio  $i, j$ , su dinámica es descrita por la ecuación DNLS generalizada en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} -i\dot{u}_{i,j} = & \kappa(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + q|u_{i,j}|^2 u_{i,j} \\ & + g(|u_{i+1,j}|^2 + |u_{i-1,j}|^2 + |u_{i,j+1}|^2 + |u_{i,j-1}|^2) u_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Aquí,  $\kappa$  es el coeficiente de acoplamiento lineal, inducido por el salto (*hopping*) de átomos entre sitios vecinos de la red. La magnitud de la interacción no lineal en sitio (asociada con las colisiones atómicas) es representada por el parámetro  $q$ . El coeficiente de acoplamiento no lineal  $g$ , en tanto, cuantifica la magnitud de la interacción dipolar de largo alcance entre átomos de sitios adyacentes. Consideramos que todas las cantidades en la ecuación (3.1) son adimensionales.

Nuestro objetivo es buscar soluciones estacionarias, correspondientes a oscilaciones colectivas de todas las amplitudes de la red, en la forma

$$u_{i,j}(t) = u_{i,j} e^{i\lambda t},$$

donde  $u_{i,j} \in \mathbb{R}$ , y  $\lambda$  representa la energía de la solución. La sustitución en la ecuación (3.1) lleva al siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} \lambda u_{i,j} = & \kappa(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + q u_{i,j}^3 \\ & + g(u_{i+1,j}^2 + u_{i-1,j}^2 + u_{i,j+1}^2 + u_{i,j-1}^2) u_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

La constante de acoplamiento  $\kappa$  define el espectro lineal de energías o banda lineal para la red cuadrada: fijando  $q = g = 0$  en el sistema (3.2) e introduciendo una onda plana como *ansatz*, obtenemos la banda lineal correspondiente a un sistema infinito,  $\lambda = 2\kappa(\cos k_x + \cos k_y)$ , donde  $k_x$  y  $k_y$  representan el cuasimomento horizontal y vertical, respectivamente. Es decir, las energías lineales están contenidas en el rango  $\lambda \in [-4\kappa, 4\kappa]$ , que constituye el *espectro lineal de autoenergías* para una red infinita.

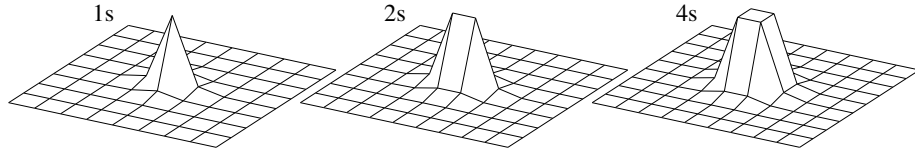


Figura 3.1: Modos fundamentales no lineales centrados en tres posiciones diferentes. Fuente: Elaboración propia.

Para un sistema finito de  $n \times n$  sitios, los bordes de la banda lineal se reducen a  $\pm 4\kappa \cos(\pi/[n + 1])$  (que tiende a  $\pm 4\kappa$  en el límite  $n \rightarrow \infty$ ).

Nuestro estudio del caso general (con los dos términos no lineales) se centra en tres clases de soluciones estacionarias localizadas: la solución *en sitio* (1s), centrada en un sitio particular de la red; la solución *entre dos sitios* (2s), centrada entre dos sitios contiguos a los que corresponde la misma amplitud; y la solución *entre cuatro sitios* (4s), centrada entre cuatro sitios con igual amplitud. En la figura 3.1 presentamos ejemplos de estas tres soluciones.

## 3.2. Soluciones estacionarias localizadas

Desde esta sección, sin pérdida de generalidad, consideramos  $\kappa = 1$  y  $q = 1$  [esto puede conseguirse redefiniendo las variables y parámetros en la ecuación (3.1)]. Para encontrar soluciones estacionarias, resolvemos el sistema (3.2) utilizando el método de Newton-Raphson, que requiere como punto de partida una *semilla*, esto es, valores aproximados para el perfil de la solución y su constante de propagación. En primer lugar, escogemos un valor inicial para la energía de la solución buscada, o bien para su *norma*, dada por

$$N = \sum_{i,j} |u_{i,j}|^2. \quad (3.3)$$

La norma da cuenta del número total de átomos en el condensado, y su relación con la energía es característica de cada familia de soluciones. Una vez hemos fijado



el valor de energía o de norma, utilizamos como semilla uno de los siguientes perfiles centrados alrededor de la posición  $i_0, j_0$ ,

$$u_{i,j} = \sqrt{N} \delta_{i,i_0} \delta_{j,j_0}, \quad (3.4a)$$

$$u_{i,j} = \sqrt{\frac{N}{2}} (\delta_{i,i_0} [\delta_{j,j_0} + \delta_{j,j_0+1}]), \quad (3.4b)$$

$$u_{i,j} = \sqrt{\frac{N}{4}} (\delta_{i,i_0} [\delta_{j,j_0} + \delta_{j,j_0+1}] + \delta_{i,i_0+1} [\delta_{j,j_0} + \delta_{j,j_0+1}]), \quad (3.4c)$$

según busquemos soluciones 1s, 2s, o 4s, respectivamente. La existencia de soluciones localizadas es debida a las interacciones presentes en el sistema a través de los términos no lineales en la ec. (3.1), los que a su vez dependen de la norma. En sistemas modelados por ecuaciones tipo DNLS, el regimen de muy alta norma (equivalente a potencia alta en arreglos de guías de ondas) es conocido como *límite anticontínuo*, donde el acoplamiento entre sitios es despreciable en comparación a la energía de interacción en sitio. En este límite casi cualquier perfil (en particular uno localizado) es solución del sistema. Por esta razón, comenzamos buscando soluciones localizadas para valores grandes de  $N$  y para energías  $\lambda$  muy por encima del borde de la banda lineal. Una vez encontrado un perfil  $\{u_{i,j}\}$  que resuelve el sistema, reducimos levemente la energía y lo utilizamos como semilla. La iteración de este procedimiento hasta que la energía  $\lambda$  llega a la banda lineal nos lleva a contruir toda la familia de soluciones localizadas no lineales, que caracterizamos a través de la respectiva relación entre norma y energía, como las presentadas en la figura 3.2 (a) para un arreglo de  $15 \times 15$  sitios.

Para cada solución estacionaria  $\{u_{i,j}\}$  encontrada, calculamos su estabilidad lineal añadiendo una pequeña perturbación compleja de la forma

$$\phi_{i,j}(t) = X_{i,j}(t) + iY_{i,j}(t). \quad (3.5)$$

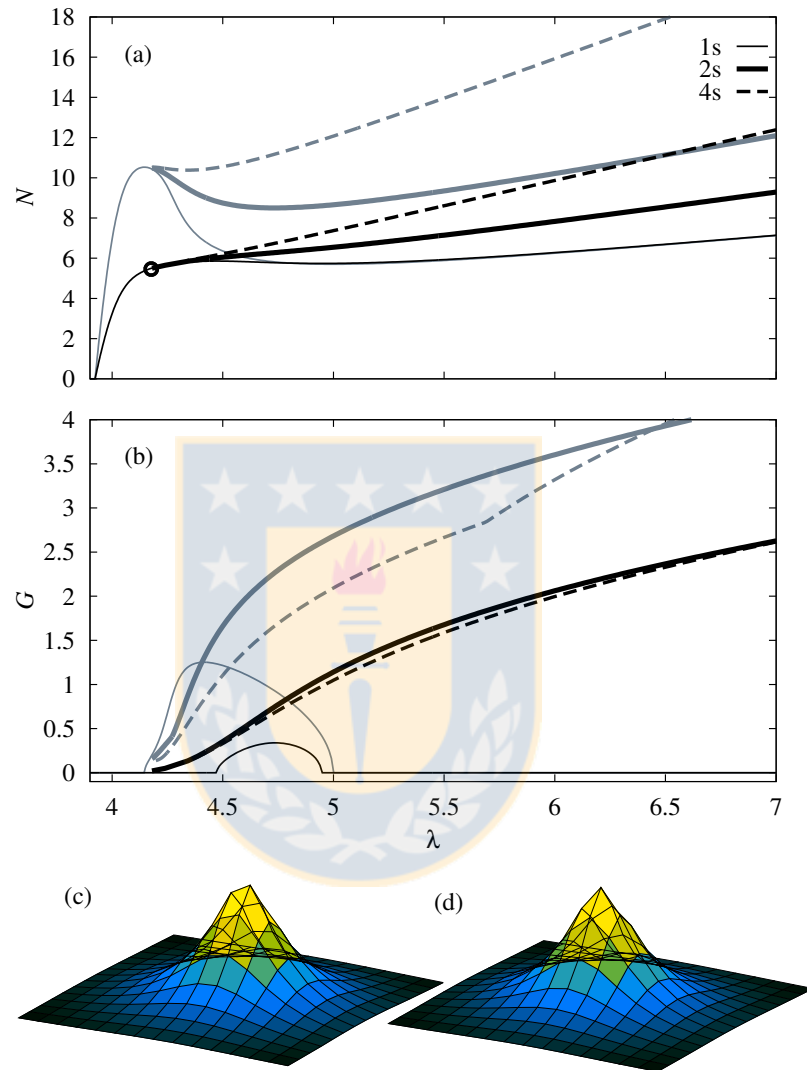


Figura 3.2: (a) Norma o número de átomos  $N$  y (b) parámetro de estabilidad  $G$ , en función de la energía  $\lambda$  para soluciones localizadas 1s (línea delgada), 2s (línea gruesa) y 4s (línea discontinua), en un arreglo de  $15 \times 15$  sitios. Las curvas grises corresponden al caso DNLS estándar sin interacción dipolar ( $g = 0$ ), mientras que las curvas negras son para una interacción de  $g = 0.3$ . (c) y (d) Perfiles transversales de las soluciones 2s y 4s, respectivamente, para  $g = 0.3$  y una energía  $\lambda = 4.177$  [destacada con un círculo en (a)]. Puede notarse cómo la paridad del arreglo (número impar de sitios por lado) modifica la forma de estos perfiles cuando se unen con la familia de soluciones 1s antes de decaer a la banda lineal. Fuente: Elaboración propia.

El efecto de esta perturbación en la evolución temporal de la solución nos permite determinar si es linealmente estable o inestable. En efecto, la sustitución  $\{u_n\} \rightarrow \{u_n + \phi_n\}$  en (3.1) lleva a dos ecuaciones diferenciales para los vectores  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  que se componen respectivamente de todas las partes reales  $X_{i,j}$  e imaginarias  $Y_{i,j}$  de la perturbación. Las ecuaciones diferenciales son de la forma

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbb{A}\mathbb{B}\mathbf{X} &= 0, \\ \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbb{B}\mathbb{A}\mathbf{Y} &= 0,\end{aligned}\tag{3.6}$$

donde  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{B}$  son matrices cuyo orden para una red de  $n \times n$  sitios es  $n^2 \times n^2$ . Dado que las matrices  $\mathbb{A}\mathbb{B}$  y  $\mathbb{B}\mathbb{A}$  tienen los mismos autovalores  $\{\eta_k\}$ , podemos elegir cualquiera de ellas para estudiar la estabilidad. Si algún autovalor tiene parte imaginaria positiva, la perturbación crecerá en el tiempo, de modo que, en tal caso, la solución estacionaria  $\{u_{i,j}\}$  será inestable. Entonces, definimos la *ganancia*

$$G = \max\{\text{Im}(\eta_k)\}\tag{3.7}$$

como parámetro para medir la inestabilidad de una solución, de modo que las soluciones son estables solamente si  $G = 0$ . La dependencia de la ganancia  $G$  respecto a la energía  $\lambda$  para los casos  $g = 0$  y  $g = 0.3$  es presentada en la figura 3.2 (b).

Es importante notar que las soluciones con energía cercana al borde superior de la banda lineal (que, como dijimos anteriormente, se ubica en  $4 \cos(\pi/[n + 1])$  para un arreglo de tamaño  $n \times n$ ) se vuelven más anchas a medida que se asimilan al modo fundamental lineal. Esto se manifiesta en una fusión de las curvas correspondientes a los tres modos 1s, 2s y 4s en una sola, y en la modificación de estos modos para satisfacer la paridad del número de sitios en la red. Como en nuestro análisis usamos un arreglo de  $15 \times 15$  sitios, los perfiles de las soluciones 2s y 4s se deforman cerca de la banda para converger en el modo lineal extendido [figura 3.2 (c) y (d)].

Junto con la norma  $N$ , el hamiltoniano es otra cantidad conservada en nuestro sistema:

$$H = - \sum_{ij} \left[ (u_{i+1,j} + u_{i,j+1}) u_{ij}^* + \frac{g}{2} (|u_{i+1,j}|^2 + |u_{i,j+1}|^2) |u_{ij}|^2 + c.c. \right] - \frac{1}{2} \sum_{ij} |u_{ij}|^4, \quad (3.8)$$

donde los dos primeros términos representan las interacciones lineal y no lineal entre los sitios vecinos de la red cuadrada. El hamiltoniano es particularmente útil al estudiar las propiedades dinámicas del sistema, es decir, la movilidad de soluciones localizadas a través de la red (esto se estudiará en detalle en la sección 3.5). Con respecto a la posición del centro de las soluciones, un valor mínimo (máximo) del hamiltoniano  $H$  corresponde a una solución estable (inestable).

En las figuras 3.3 mostramos gráficos de la norma y la ganancia (estabilidad) en función de  $\lambda$  para valores más grandes de la interacción dipolar  $g$ . Los resultados obtenidos resaltan otra característica particular del sistema cerca de la banda lineal, a saber, un cambio en la curvatura de los diagramas  $N$  vs  $\lambda$ . Es conocido el hecho de que en ausencia de interacciones dipolares (esto es, en el caso DNLS standard con  $g = 0$ ) existe un umbral de energía [45], sobre el cual las soluciones localizadas pueden existir en sistemas finitos. Generalmente, este umbral está asociado a un mínimo local en las curvas de norma vs energía [46], el cual implica además un cambio en la estabilidad de la solución 1s. Cualitativamente, podemos explicar este mínimo a partir de la extensión de los modos: la familia de soluciones localizadas existentes en el regimen no lineal ocupan solamente unos pocos sitios de la red, mientras que las soluciones que bifurcan desde la banda lineal son extendidas, por lo que su norma se incrementa rápidamente sobre la banda lineal. Por tanto, la conexión entre estas dos ramas no lineales implica un mínimo en la curva  $N$  vs  $\lambda$ . Ahora bien, observamos que al incrementar la interacción dipolar  $g$ , el umbral de norma tiende a desaparecer.

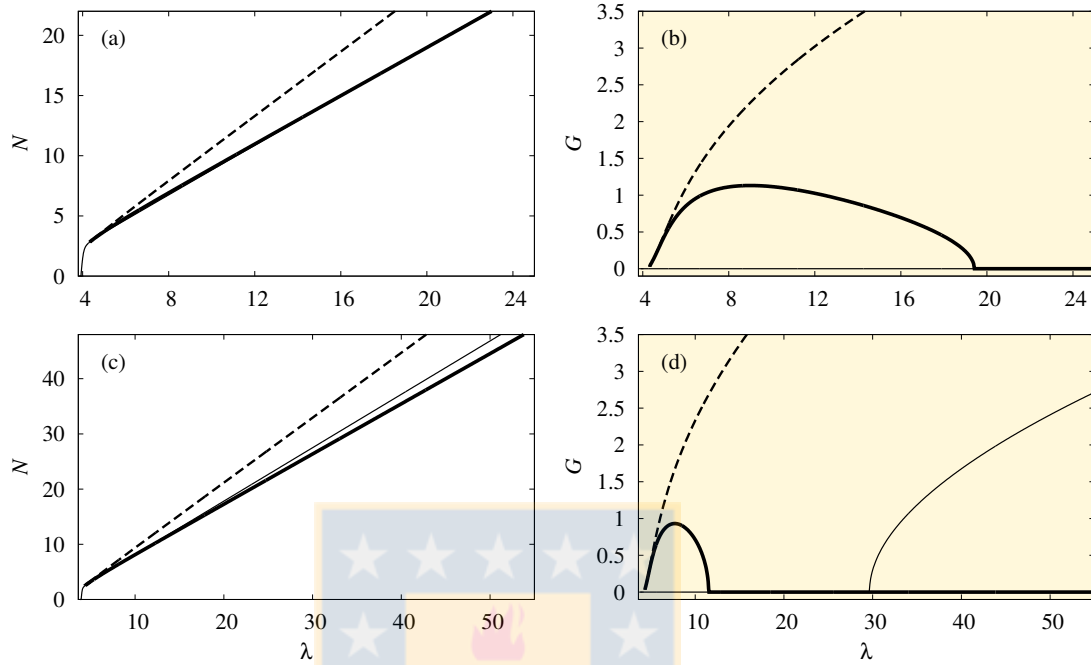


Figura 3.3: Norma  $N$  (izquierda) y parámetro de estabilidad  $G$  (derecha, fondo *beige*) en función de la autoenergía  $\lambda$  para modos 1s (línea delgada), 2s (línea gruesa) y 4s (línea discontinua), en un arreglo de tamaño  $15 \times 15$ . (a) y (b) Interacción dipolar  $g = 1$ . Observamos que las curvas de norma para las soluciones 1s y 2s están superpuestas. (c) y (d) Interacción dipolar  $g = 1.2$ . Fuente: Elaboración propia.

Comparando los resultados en las figuras 3.2 y 3.3 vemos que el mínimo todavía existe para  $g = 0.3$ , pero ha desaparecido para  $g = 1$ . En efecto, al incrementar  $g$  hay una disminución en la pendiente de la curva  $N$  vs  $\lambda$  que bifurca desde la banda, lo que permite una conexión suave con la rama de soluciones localizadas con norma alta.

Para valores más grandes de la norma y la energía — esto es, lejos de la banda lineal, la relación entre estas dos cantidades es aproximadamente lineal. Para las soluciones 2s y 4s, observamos una disminución en la pendiente asintótica de las curvas  $N$  vs  $\lambda$  al incrementar el acoplamiento no lineal  $g$ . En particular, cuando  $g = q = 1$  [figura 3.3 (a)], la curva de modos 2s tiene la misma pendiente que los

modos 1s, de modo que ambas curvas se superponen en el régimen de norma alta. Para  $g > q = 1$ , la curva asintótica 2s está siempre bajo la 1s [figura 3.3 (c)].

Este cambio en la pendiente de las curvas de norma, son reflejo de una variación en los perfiles de las soluciones respectivas. Como ilustración, en la figura 3.4 mostramos un corte de los tres modos en la fila central de la red, para una energía  $\lambda = 12.7$  y distintos valores de  $g$ . Podemos ver una notable reducción en la amplitud del sitio central de la solución 1s, a la vez que se incrementa la amplitud de los sitios próximos, por lo que mantiene aproximadamente el mismo valor de la norma para cada energía  $\lambda$ . En cambio, los modos 2s y 4s presentan una reducción global de su amplitud, consistente con el decrecimiento de la norma para energías lejos del espectro lineal, lo que se manifiesta en la reducción de la pendiente en las respectivas curvas de norma y energía.

La transición descrita anteriormente se manifiesta también en un cambio de la estabilidad de la solución 2s, que se vuelve estable para normas altas, como puede verse en la figura 3.3 (b). Cuando  $g$  es mayor que  $q$ , la solución 1s sigue siendo estable en un rango de  $\lambda$  antes de volverse inestable [fig. 3.3 (d)]. De este modo aparece una región *bi-estable*, es decir, en que dos modos fundamentales son simultáneamente estables. En otros sistemas [46–48] se ha observado que cuando dos soluciones fundamentales comparten la misma condición de estabilidad, existen *soluciones intermedias*, sin una distribución de amplitud simétrica, cuya existencia y propiedades estudiaremos en la sección 3.4. Antes, examinaremos en mayor detalle la variación del umbral de norma con el acoplamiento no lineal.

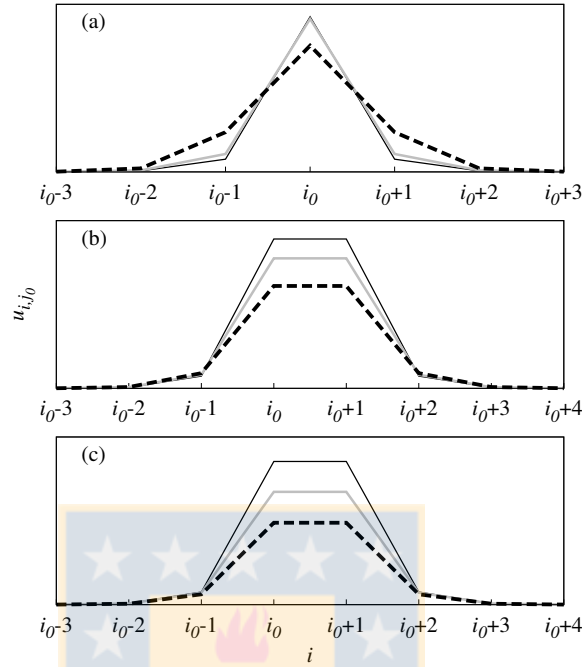


Figura 3.4: Amplitudes en la fila central  $j_0$  de las soluciones 1s (a), 2s (b), y 4s (c) con energía  $\lambda = 12.7$ . Las curvas negra delgada, gris gruesa y discontinua gruesa, corresponden a acoplamiento no lineal dipolar  $g = 0$ ,  $g = 0.3$ , and  $g = 1$ , respectivamente. El cambio en la forma de las soluciones está relacionado a la variación de las curvas en las figuras 3.2 y 3.3. Fuente: Elaboración propia.

### 3.3. Efectos de tamaño y condiciones de borde

Es esperable que el valor crítico de la interacción dipolar  $g$  en que desaparece el mínimo local en la norma de las soluciones 1s tenga una dependencia ya en el tamaño del arreglo, ya en las condiciones de borde. Para lograr una mayor comprensión de esta dependencia, estudiamos la relación entre norma y energía de la solución 1s utilizando arreglos de tres tamaños diferentes, a saber,  $5 \times 5$ ,  $15 \times 15$  y  $25 \times 25$ ; y con dos condiciones de borde distintas: (i) condiciones *fijas*, en que asumimos que no hay sitios fuera del arreglo, por lo que la amplitud decae a cero en los bordes, y (ii) condiciones *periódicas*, que permite acoplamiento entre un borde del arreglo con el opuesto. Fuera de esta sección, nuestro análisis considera solamente condiciones de

borde fijas, ya que son las más adecuadas para describir una realización experimental, y han sido empleadas en múltiples trabajos previos

En la columna izquierda de la figura 3.5, correspondiente a condiciones fijas, podemos ver que mientras más pequeño es el arreglo, más bajo es el valor de  $g$  para el que ocurre la transición: para  $n = 15$  y  $n = 25$ , el mínimo desaparece en  $0.3 < g < 0.4$ , mientras que para  $n = 5$  desaparece en el intervalo  $0.1 < g < 0.2$  (notamos además que al disminuir el tamaño también decrece la pendiente de la rama que bifurca desde la banda lineal). Lo anterior sugiere una explicación cualitativa: el ensanchamiento de las soluciones  $1s$  debido a la interacción dipolar [tal como se mostró en la figura 3.4 (a)] hace que aquellas se asemejen al modo normal fundamental en el borde superior de la banda lineal. Esto permite una transición suave entre el régimen no lineal y la bifurcación lineal cuando  $N \rightarrow 0$ . En concordancia con lo anterior, vemos que para redes pequeñas ( $\sim 5 \times 5$ ), los modos  $1s$  de baja norma son de por sí muy similares al modo fundamental, por lo que incluso un leve ensanchamiento, inducido por la interacción dipolar  $g$ , basta para obtener una correspondencia formal entre sus respectivos perfiles. En la figura 3.5 presentamos algunos perfiles que ilustran nuestras observaciones. Para arreglos de tamaño menor que  $5 \times 5$ , no hay mínimo en la norma para ningún valor de  $g$ .

Los argumentos anteriores se refuerzan al estudiar arreglos con condiciones de borde periódicas [figuras 3.5 (d-f)]. Es razonable suponer que la fenomenología de estos sistemas sea más cercana a la de las redes infinitas, en cuanto a la estructura de los modos normales de onda plana. A diferencia de los sistemas con condiciones de borde fijas, en este caso las familias de soluciones localizadas no lineales no pueden bifurcar directamente de la banda lineal. Físicamente, esto es consistente con la existencia de un número mínimo de átomos en un condensado de Bose-Einstein necesario para



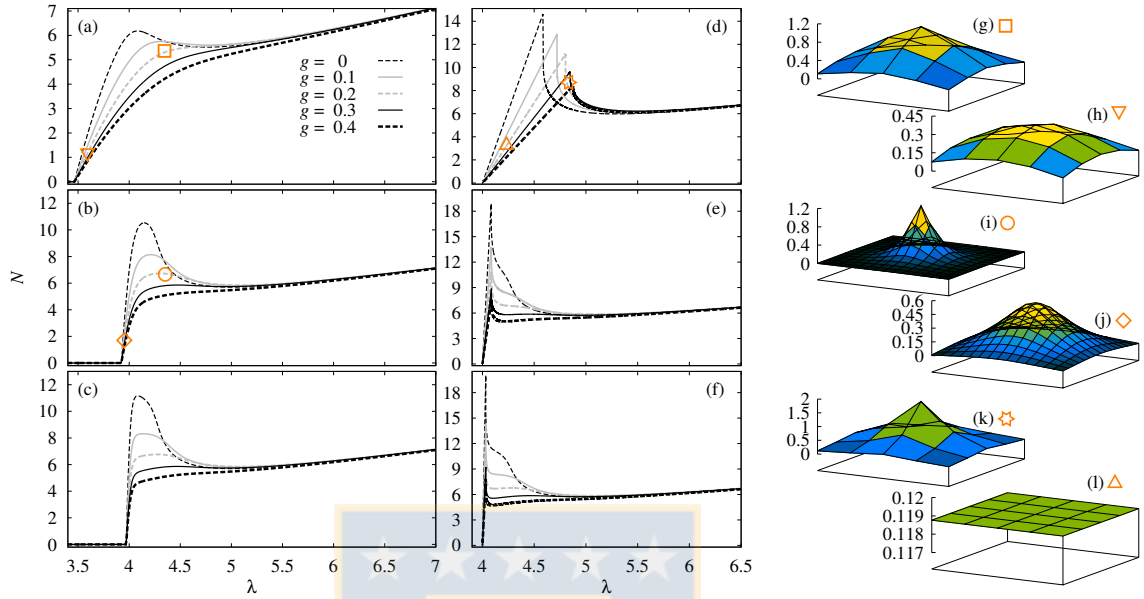


Figura 3.5: Variación en el umbral de norma con respecto al tamaño del arreglo y la interacción dipolar  $g$ , para condiciones de borde fijas (a-c) y periódicas (d-f). Las curvas muestran la dependencia de la norma en la energía de la solución  $1s$ , para arreglos de (a,d)  $5 \times 5$ , (b,e)  $15 \times 15$ , y (c,f)  $25 \times 25$  sitios. Los gráficos (g-l) muestran diferentes perfiles correspondientes a  $g = 0.2$ . Fuente: Elaboración propia.

observar los fenómenos macroscópicos en el rango de validez de la teoría de campo medio [4], entre los que se cuenta la existencia de modos localizados. En efecto, el regimen en que existen estas soluciones difiere del estado lineal cuántico de un BEC en una red periódica, que tiene el mismo número medio de átomos en todos los sitios, a la vez que exhibe completa localización en el espacio de momentum. En consecuencia, las familias de soluciones no lineales están conectadas al modo fundamental mediante una sección de soluciones completamente uniformes, correspondientes a las líneas rectas que bifurcan de la banda en los diagramas de la figura 3.5 (d-f). Dado que las soluciones uniformes tienen la misma amplitud en todos los sitios, la relación entre la norma  $N$  y la energía  $\lambda$  puede calcularse de forma exacta:

$$N = \frac{n^2(\lambda - 4\kappa \cos(\pi/[n + 1]))}{g + 4g}. \quad (3.9)$$

### 3.4. Soluciones intermedias.

Es esperable que como complemento a la estabilidad simultánea de los modos 1s y 2s exista una solución intermedia centrada entre ellas. Para encontrarla, implementamos el *método del constraint* [49, 50], el que nos permite construir el potencial efectivo de energía, es decir, el valor del hamiltoniano definido en (3.8) como función del *centro de masa* de la solución,

$$(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i,j} (i, j) |u_{i,j}|^2, \quad (3.10)$$

para una norma fija  $N$  [47, 48, 51].

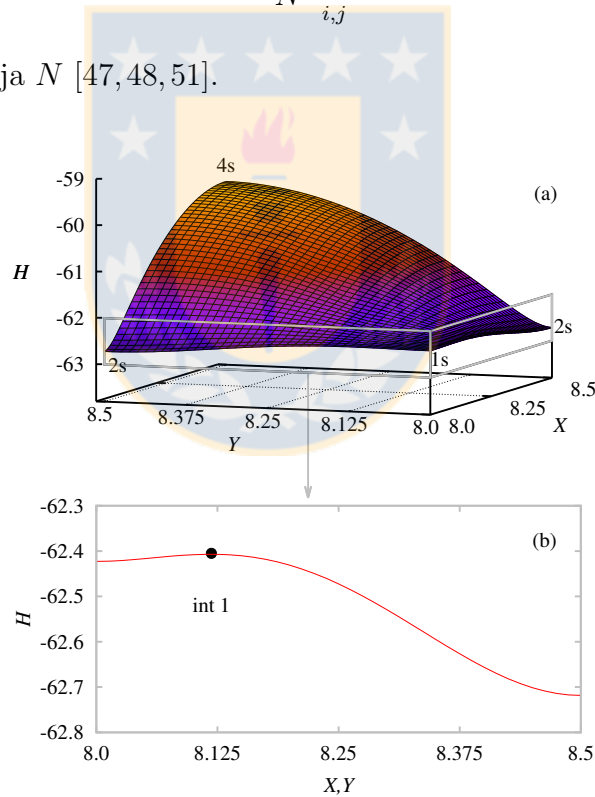


Figura 3.6: Potencial efectivo para interacción dipolar  $g = 2.1$ . (a) Hamiltoniano  $H$  en función de la posición  $X, Y$  del centro de masa de la solución, para soluciones con norma  $N = 8$ . (b)  $H$  en función de  $X$  (o  $Y$ ) variable en el rango desde el centro de la solución 1s al de la solución 2s for  $N = 8$ . Marcamos con un círculo la posición de un máximo local, correspondiente a una solución intermedia inestable int1. Fuente: Elaboración propia.

Extendemos nuestro cálculo sobre un área cuadrada en el plano  $(X, Y)$ , alrededor del centro de una red de  $15 \times 15$  sitios. De este modo, las coordenadas  $(8, 8)$  corresponden a soluciones 1s, la posición  $(8.5, 8)$  [o  $(8, 8.5)$ ] a soluciones 2s, y  $(8.5, 8.5)$  a soluciones 4s. La condición de estabilidad de cada una de estas soluciones se refleja en el valor del seudopotencial en las respectivas posiciones de su centro de masa, como mostramos en la figura 3.6 para norma  $N = 8$  y a una interacción dipolar  $g = 2.1$ . Podemos ver que las soluciones 1s y 2s corresponden a mínimos locales del potencial. Entre ellas un máximo local (marcado con un círculo blanco) muestra la existencia de una solución intermedia inestable, que llamamos int1.

Tal como hicimos en la sección anterior para los otros modos no lineales, podemos usar una solución intermedia encontrada como semilla para construir toda la familia de soluciones intermedias en su rango de existencia, con las correspondientes curvas de norma y estabilidad versus frecuencia. Nuestros resultados se muestran en los gráficos de la figura 3.7, en que puede verse cómo la existencia de la solución intermedia esta restringida exactamente a la región bi-estable. (La estabilidad es graficada en función de la norma para facilitar la interpretación de su efecto en la dinámica de soluciones localizadas, que estudiamos más abajo). Ahora bien, desde el punto en que la solución 1s deja de ser estable (en  $N \sim 11$ ), una segunda solución intermedia aparece. Nuevamente el estudio del potencial efectivo nos permite encontrarla: en la figura 3.8, correspondiente a una norma  $N = 16.5$  y  $g = 2.1$ , podemos ver que la segunda solución intermedia (int2) constituye un punto *saddle* en la superficie del potencial, situado entre la solución 1s y 4s, que son simultáneamente inestables. Ahora bien, ya que al incrementar la norma no ocurren más intercambios de estabilidad entre los modos, la familia de soluciones intermedias int2 no se une con las

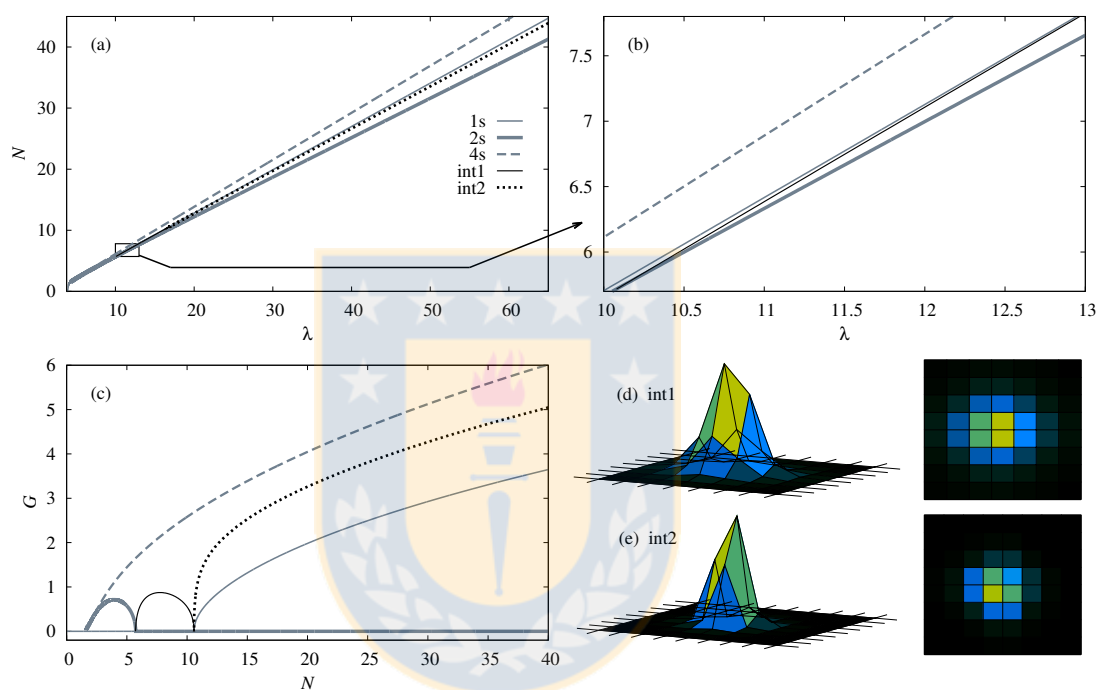


Figura 3.7: (a) y (b) Diagramas de norma y energía para las soluciones fundamentales no lineales con interacción dipolar  $g = 2.1$ . Las líneas grises corresponden a modos 1s (línea delgada), 2s (línea gruesa) y 4s (línea discontinua). La curva negra delgada continua (gruesa punteada) describe la dependencia de la primera (segunda) solución intermedia. (c) Parámetro de estabilidad en función de la norma para las mismas familias de soluciones. (d) Perfil de intensidad para la primera solución intermedia de norma  $N = 6.4$ , gráfico 3D a la izquierda y gráfico de densidad a la derecha. (e) Lo mismo para la segunda solución intermedia de norma  $N = 33.9$ . Fuente: Elaboración propia.

de soluciones 1s o 4s, al contrario de lo que ocurre con la solución int1 en el borde superior del rango bi-estable.

### 3.5. Dinámica de excitaciones localizadas

La movilidad de soluciones localizadas estacionarias puede inducirse al añadir una cierta cantidad de energía cinética o *kick*, mediante una diferencia de fase entre los sitios del perfil  $\{u_{n,m}\}$ . Es decir, multiplicamos la amplitud  $u_{n,m}$  por  $\exp[i(k_x n + k_y m)]$ , y usamos el nuevo perfil como condición inicial para integrar la ecuación de movimiento (3.1). Físicamente, introducir este gradiente de fase entre sitios corresponde a dar un momento transversal a la función de onda del BEC, o bien acelerar la red óptica que lo contiene<sup>1</sup> Tal como en la sección anterior, fijamos el parámetro de interacción dipolar en  $g = 2.1$ , en que la solución 4s es siempre inestable para cualquier valor de  $N$ , con un valor de la ganancia  $G$  mayor que el de las soluciones 1s y 2s. Es esperable que esta condición de inestabilidad favorezca la movilidad de la solución 4s: las soluciones inestables son máximos locales del potencial efectivo (ver la superficie en las figuras 3.6 y 3.8), por lo que la acción de un *kick*, aunque pequeño, puede permitir su movilidad. Si la perturbación inducida en la solución es demasiado fuerte, o la dirección del *kick* no lleva a ninguna otra solución fundamental en la superficie del potencial, la solución puede decaer en otros modos localizados (fijos) y como radiación.

A diferencia del sistema con linealidad cúbica descrito por la ecuación DNLS estándar, el presente modelo permite la movilidad de solución altamente localizadas. Presentamos dos ejemplos en la figura 3.9, que registra la posición del centro de masa de una solución localizada (inicialmente un modo 4s) en función del tiempo.

---

<sup>1</sup>Cfr. sección IV de [5].

Es importante notar que a medida que la solución se desplaza por la red, va tomando la forma de los distintos modos estacionarios correspondientes a cada posición, cuya estabilidad se refleja en la aceleración o desaceleración del centro de masa de la solución móvil.

La existencia de soluciones intermedias, estudiadas en la sección anterior, modifica la *barrera de Peierls-Nabarro*, definida como la diferencia en el valor del hamiltoniano entre las soluciones localizadas, la cual debe ser superada por la energía de la solución móvil, y que por tanto tiene un importante efecto en su evolución. En nuestro caso, la existencia de soluciones inestables intermedias impide la movilidad. A diferencia de trabajos anteriores en redes tipo DNLS-saturable [47], en nuestro caso no encontramos movilidad de soluciones en la vecindad del segundo punto de bifurcación (norma en que la solución intermedia  $int1$  deja de existir). Tanto  $int1$  y  $int2$  son claramente inestables en su rango de existencia, como puede verse en los gráficos de la figura 3.7, lo que indica que la barrera efectiva de energía es demasiado grande para que exista movilidad. En consecuencia, nuestro sistema permite el transporte de excitaciones localizadas solamente en regiones de norma baja, inferior al rango de existencia de las soluciones intermedias, y para una interacción no lineal fuerte (aunque encontramos movilidad desde  $g \sim 1.8$ , nuestros mejores resultados fueron obtenidos con  $g = 2.1$ ). En efecto, el ensanchamiento de los modos, inducido por la interacción dipolar no lineal, contribuye al intercambio de estabilidad entre ellos, y así a la movilidad mostrada en la figura 3.9.

### 3.6. Interacción dipolar atractiva

Hasta aquí hemos considerado que la interacción dipolar entre los átomos es repulsiva. Ahora estudiaremos el caso contrario, que se manifiesta en un valor negativo del

coeficiente  $g$ . Con respecto a los parámetros estudiados anteriormente — la norma y la ganancia o estabilidad — el punto  $g = 0$  no constituye un punto crítico, sino que las tendencias observadas anteriormente continúan para  $g < 0$ . Así, la pendiente asintótica de las curvas de norma vs energía para soluciones 2s y 4s se incrementa al disminuir  $g$ . La familia de soluciones 1s, en tanto, mantiene un mínimo de norma antes de unirse a las otras soluciones en su decaimiento hacia la banda lineal, como puede verse en la figura 3.10 (a) para  $g = -0.05$ .

Sin embargo, a medida que nos aproximamos al valor  $g \rightarrow -0.25$ , observamos que las soluciones cerca de la banda lineal exhiben una particular dependencia de  $N$  en  $\lambda$ : el decaimiento final de la norma, antes de converger a la banda lineal, es ahora muy abrupto y ocurre muy cerca de su límite superior, de modo que las familias de soluciones tienden a llegar a la banda con una norma finita, a la vez que se vuelven inestables [figuras 3.10 (c) y (d)]. En efecto, para el valor  $g = -0.25$  [figuras 3.10 (e) y (f)], una discontinuidad aparece en la curva  $N$  vs  $\lambda$  de la solución 1s, mientras que la norma de los modos fundamentales 2s y 4s ya no decae a cero, sino que diverge al borde del espectro lineal. Para  $g < -0.25$ , todas las curvas tienen continuación en el interior del espectro de autoenergías como familias de soluciones cuya norma se incrementa rápidamente a medida que su energía decrece [ver figura 3.10 (g)]. A partir de este valor, todas las soluciones presentan un umbral de norma, originado en la conexión entre las dos curvas con pendiente opuesta (provenientes desde la banda lineal y desde el gap).

Lo anterior puede ser interpretado a la luz de una observación similar reportada en [48] para un sistema unidimensional, en que el valor crítico del parámetro de interacción no lineal no es  $g = -0.25$ , sino  $g = -0.5$ . En ese artículo, la existencia de soluciones no lineales (de alta norma) con energías dentro de la banda lineal se

explica a partir de la estabilidad de ondas planas no lineales debajo del valor crítico, es decir, a la ausencia de *inestabilidad modulacional* (IM) en el régimen  $g < g_{\text{crit}}$ . Es sabido que la IM facilita la aparición de modos localizados no lineales, por lo que es razonable pensar que su ausencia, por el contrario, favorece la existencia de soluciones extendidas de alta norma dentro de la banda lineal. En concordancia con este resultado, vemos que en nuestro caso, cuando  $g < -0.25$ , las familias de modos localizados no lineales dejan de bifurcar desde la banda lineal: los modos alrededor del borde superior del espectro no exhiben un perfil extendido de baja norma como en el régimen  $g > -0.25$  [para comparación, veanse las figuras 3.10 (i) y (j)], sino que más bien consisten en una superposición de una solución localizada con un fondo de intensidad extendido.

### 3.7. Aproximaciones analíticas

Con el fin de caracterizar la dependencia de la norma de las soluciones localizadas con respecto a su energía, usaremos una aproximación similar a la que se presenta en la referencia [48]. Para cualquier valor de la norma  $N$ , la solución 1s se compone de una excitación central de amplitud  $A$  rodeada de cuatro amplitudes menores en los sitios vecinos, es decir,

$$u_{i,j} = A [\delta_{i,i_0} \delta_{j,j_0} + \alpha (\delta_{i,i_0 \pm 1} \delta_{j,j_0} + \delta_{i,i_0} \delta_{j,j_0 \pm 1})],$$

con  $\alpha < 1$ . Sustituyendo con este *ansatz* en la ecuación (3.2) para el sitio central se sigue que

$$A^2 = (\lambda - 4\alpha\kappa)/(q + 4g\alpha^2). \quad (3.11)$$

Ahora bien, a medida que la norma  $N$  se reduce y la energía  $\lambda$  se acerca a las del espectro lineal, la solución se ensancha, por lo que podemos tomar el límite  $\alpha \rightarrow 1$ ,



obteniendo

$$N \sim n^2 A^2 = \frac{n^2(\lambda - 4\kappa)}{(q + 4g)}, \quad (3.12)$$

donde  $n^2$  es el número total de sitios del arreglo. A partir de esta expresión resulta claro que la tasa a la cual  $N$  se incrementa, para energías ligeramente arriba de la banda lineal, es cada vez mayor y se vuelve indeterminada a medida que la interacción dipolar  $g$  tiende a  $-q/4 = -0.25$ , corroborando nuestros resultados numéricos de la sección anterior. La figura 3.11 muestra la bifurcación desde el espectro lineal para cuatro valores distintos de  $g$  alrededor de  $-q/4$ , evidenciando la concordancia entre la aproximación (3.12) y los resultados numéricos anteriores.

Esta estimación también permite un acercamiento a la fenomenología observada en el interior de la banda. Para  $g < -0.25q$ , el denominador en la expresión (3.12) toma un valor negativo. Dado que la norma  $N$  es definida positiva, esto implica que las soluciones cercanas a la banda lineal ( $\alpha \approx 1$ ) poseen una frecuencia menor a  $4\kappa$ , por lo que existen dentro de aquella [ver figura 3.10 (d)].

Por otra parte, si nos situamos lejos (arriba) de la banda lineal, la solución se vuelve más localizada a medida que  $\lambda$  y  $N$  aumentan, por lo que podemos usar la aproximación  $\alpha \rightarrow 0$ , de donde sigue que

$$N_{1s} \simeq A^2 \simeq \frac{\lambda}{q}. \quad (3.13)$$

Repitiendo el análisis anterior para la solución 2s, y considerando el mismo límite de norma y energía altas, obtenemos

$$N_{2s} \simeq 2A^2 \simeq \frac{2(\lambda - \kappa)}{q + g}. \quad (3.14)$$

Ambas expresiones concuerdan con los cálculos numéricos anteriores para alta norma (y energía) cuando  $g \leq q$ . La ecuación (3.14) predice correctamente el decaimiento

en la pendiente de la curva  $N$  vs  $\lambda$  para la solución 2s, incluyendo el hecho de que para  $g = q$ , tanto la solución 1s como la 2s tienen la misma dependencia asintótica de  $N$  en  $\lambda$ , resultado que obtuvimos numéricamente en la sección 3.2, figura 3.3. Para una interacción dipolar  $g > q$ , observamos que esta relación cambia, y la curva de la solución 2s posee una pendiente menor que la de la solución 1s, lo cual, como hemos visto en este capítulo, implica cambios efectivos en la fenomenología, dinámica y estabilidad del sistema.



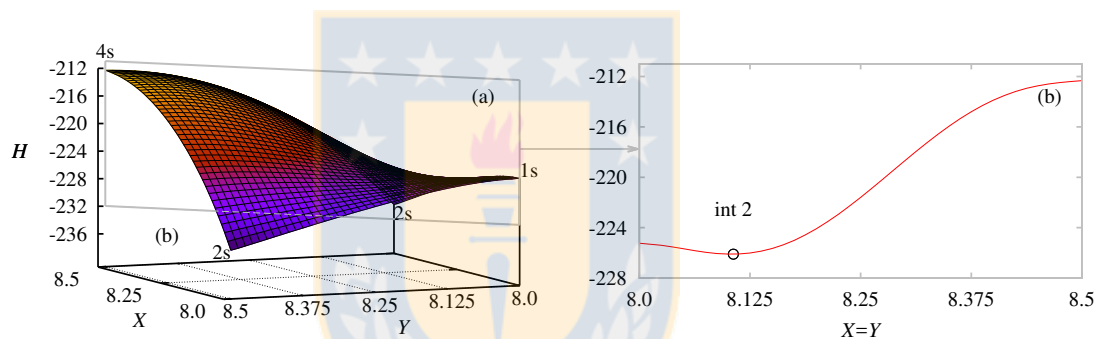


Figura 3.8: Potencial efectivo para interacción dipolar  $g = 2.1$  y norma  $N = 16.5$  (a) Hamiltoniano  $H$  en función de la posición  $X, Y$  del centro de masa de las soluciones (b)  $H$  calculado sobre la diagonal  $X = Y$  que va desde el centro de la solución 1s al de la solución 4s. Marcamos con un círculo la posición de un punto silla (*saddle*), correspondiente a una solución intermedia inestable int2.

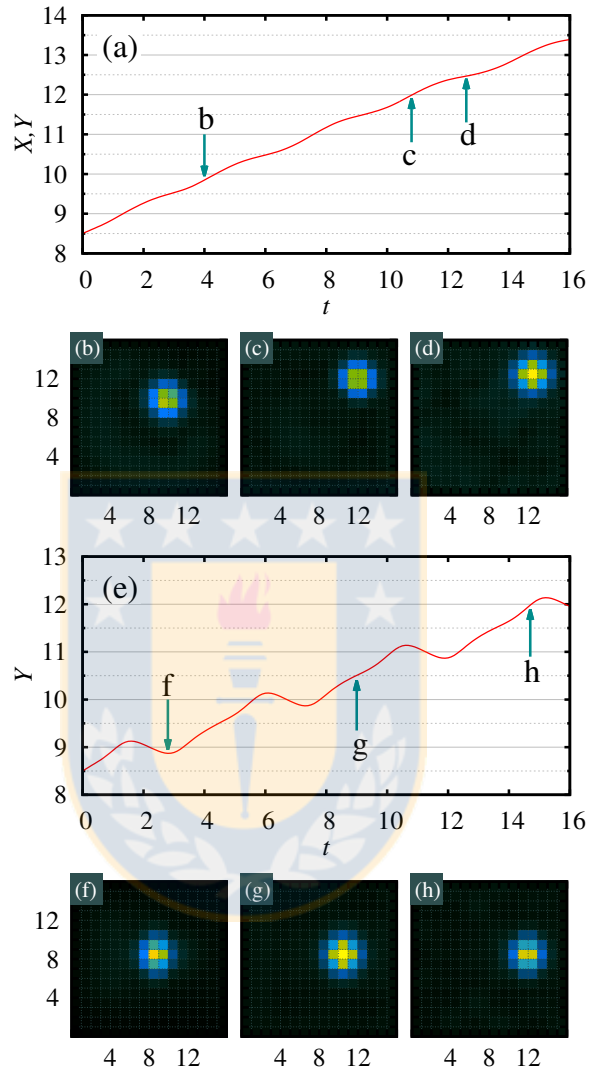


Figura 3.9: Dinámica de soluciones localizadas en un arreglo de tamaño  $15 \times 15$  para acoplamiento no lineal  $g = 2.1$ . (a) Evolución del centro de masa de la excitación cuando un *kick*  $k_x = k_y = 0.35$  es aplicado a una solución 4s de norma  $N = 4.6$ . Los gráficos (b-d) muestran el perfil espacial de la solución móvil para tiempos específicos. (e) Evolución de la componente Y del centro de masa cuando una solución 4s de norma  $N = 5.8$  es puesta en movimiento mediante un *kick*  $k_y = 0.3$ . Los gráficos (f-h) muestran el perfil espacial de la excitación en los tiempos destacados en (e). Tanto en (a) como en (e) podemos notar cómo la velocidad del centro de masa de la solución móvil cambia a medida que su perfil toma la forma de las distintas soluciones estacionarias, cuyo centro de masa es indicado por líneas horizontales. Fuente: Elaboración propia.

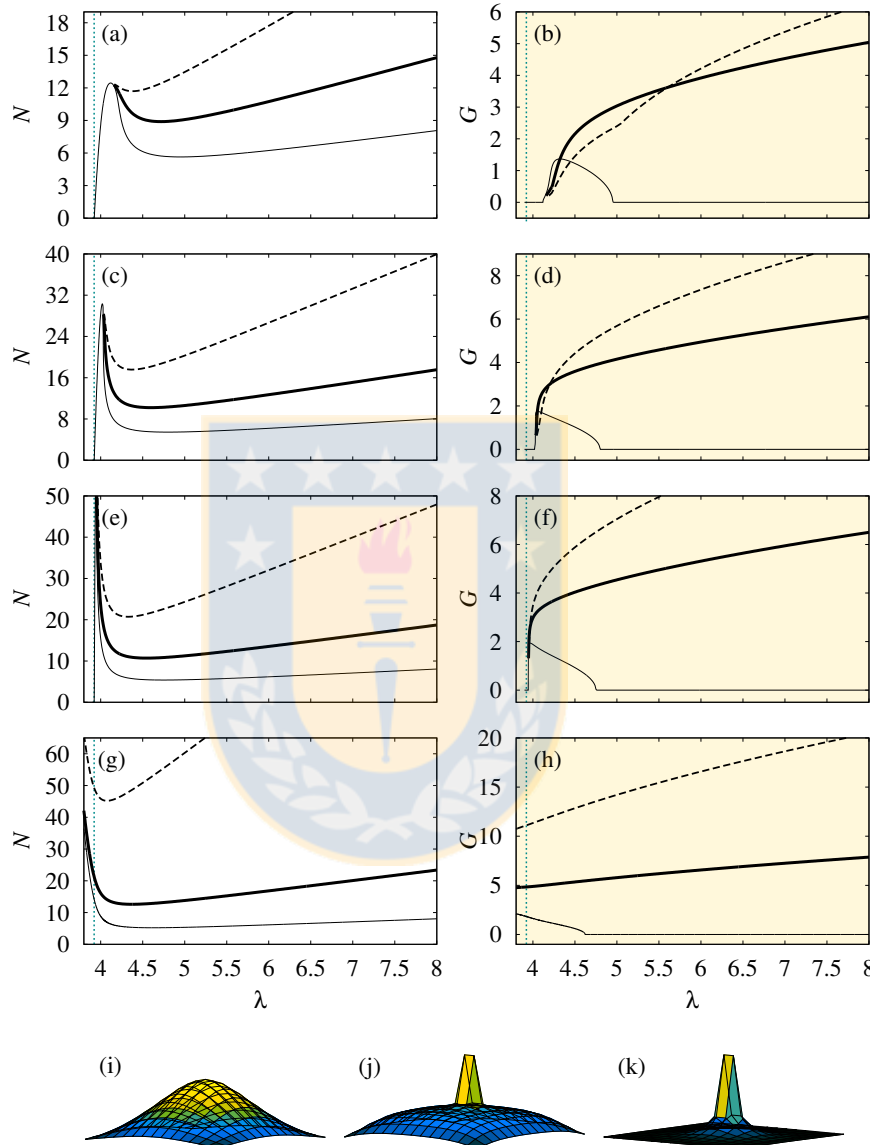


Figura 3.10: Diagramas de norma (columna izquierda) y estabilidad (columna derecha, fondo beige) en función de la energía  $\lambda$  para soluciones localizadas con interacción dipolar atractiva  $g = -0.05, -0.2, -0.25, -0.4$ , respectivamente. En todos los gráficos, la línea punteada vertical indica el borde superior de la banda lineal. (i-k) Perfiles de intensidad de las soluciones en los puntos indicados. Fuente: Elaboración propia.

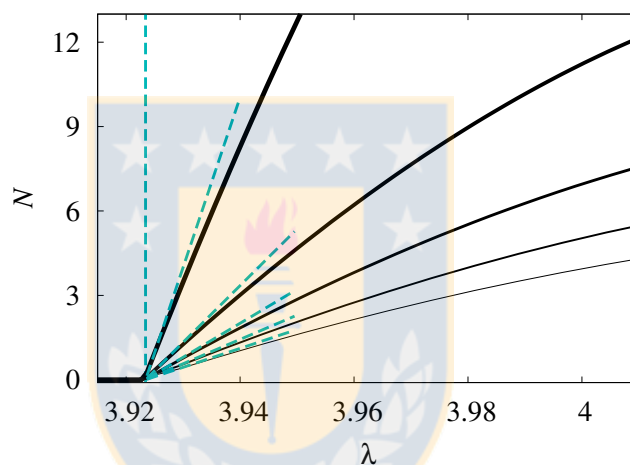


Figura 3.11: Aproximación analítica para la relación  $N$  vs  $\lambda$  de las soluciones cerca del borde superior del espectro lineal de energías. Desde la línea más delgada a la más gruesa, el correspondiente valor de la interacción dipolar  $g$  es 0.2, 0.1, 0,  $-0.1$ , y  $-0.2$ . Las líneas discontinuas muestran el ajuste obtenido usando la expresión (3.12). En particular la línea vertical, correspondiente a  $g = -0.25$ , ilustra la divergencia de la pendiente en la misma expresión; en este caso el número de partículas  $N$  no tiende a cero cuando la energía cae a la banda lineal. Fuente: Elaboración propia.

## Capítulo 4

### Bandas planas de energía y autoestados localizados



La existencia de estados localizados en arreglos de guías de ondas suele asociarse con efectos ópticos no lineales, presentados en la sección 2.2.1, que se observan cuando la potencia de la luz propagada es suficientemente grande. No obstante, en años recientes se han desarrollado muchos estudios en torno a excitaciones no difractantes que existen gracias a la geometría de la red, es decir, a la disposición transversal de las guías que componen el arreglo [14, 19, 20, 52, 53].

En estas redes, los estados localizados son modos normales (autoestados) del sistema lineal, y son degenerados, es decir, forman una banda plana en el espectro de frecuencias. Esto permite que una combinación lineal de ellos sea también un autoestado con la misma autofrecuencia, por lo que puede pensarse en los modos no difractantes como *bloques* para construir excitaciones de complejidad arbitraria [14].

Hasta ahora, los estudios — teóricos y experimentales — de arreglos de guías con bandas planas, han considerado solamente luz clásica, es decir, estados macroscópicos de luz coherente (láser). En este capítulo nos dedicamos a estudiar la existencia y propiedades de estados localizados cuánticos en dichos arreglos, es decir, estados formados por un número definido  $N \geq 1$  de fotones. Nos centramos principalmente en dos redes cuasi-unidimensionales de distinta complejidad, a fin de presentar un análisis comprensivo de su forma general y su relación con los estados clásicos, que puede ser fácilmente extendido a otros arreglos con bandas planas.

## 4.1. Modelo

Estudiaremos la propagación de luz en un arreglo de guías idénticas que permiten acoplamiento evanescente entre los campos transportados por guías vecinas. En el caso clásico, las excitaciones lumínicas que se propagan en el arreglo son producidas mediante el acoplamiento de un haz de luz láser, por lo que su dinámica queda



bien descrita por la teoría de modos acoplados, presentada en el capítulo 2. En este contexto, cada guía de ondas  $i$  es representada por un nodo o sitio en una red, al cual le corresponde una amplitud del campo  $a_i$ . Si la potencia de la luz no es suficientemente alta para la observación de efectos no lineales, la evolución de la amplitud  $a_i$  a lo largo de la dirección de propagación  $z$  está dada por el hamiltoniano clásico

$$H = -\kappa \sum_{\langle i,j \rangle} a_i^* a_j + \text{c.c.} \quad (4.1)$$

donde la sumatoria cubre todos los pares de guías vecinas  $i, j$ . El parámetro  $\kappa$  corresponde a la constante de acoplamiento. Como en este capítulo consideramos un arreglo isotrópico, con igual separación entre todos los pares de guías adyacentes, la constante  $\kappa$  es la misma en toda la red. Del hamiltoniano (4.1) se deriva la ecuación discreta de Schroedinger,

$$i \frac{da_i}{dz} = \kappa \sum_j a_j. \quad (4.2)$$

La suma en esta ecuación cubre todas las guías próximas a la  $i$ -ésima. Esta expresión es más general que el caso unidimensional presentado en la sección 2.2 (el cual será utilizado en el capítulo siguiente).

Para ciertas disposiciones transversales de las guías en el arreglo, es posible obtener una red periódica cuyo espectro de autofrecuencias exhibe una banda plana no dispersiva, esto es, un subconjunto de estados degenerados exactamente localizados. Con localización exacta nos referimos a la excitación de un grupo definido de guías, a diferencia de los solitones comunes, que consisten en una excitación colectiva de todos los sitios, con una amplitud que decae exponencialmente desde la excitación central; los modos exactamente localizados (también llamados compactones [54, 55]) no presentan esa *cola* exponencial. Son muchas las configuraciones geométricas que

dan origen a (al menos) una banda plana. A lo largo de este capítulo, estudiaremos dos geometrías cuasi-unidimensionales: (i) la red *romboidal*, que posiblemente es la red más simple que permite una banda plana; y (ii) la red *stub*, cuya complejidad es suficiente para sugerir el modo de extender nuestros resultados a geometrías más complejas. En la figura 4.1 mostramos la disposición de las guías en las dos redes de interés.

Cuando la luz inyectada en los arreglos consiste de un número fijo de fotones, constituye un estado cuántico, cuya dinámica puede ser descrita con precisión mediante el operador hamiltoniano

$$\hat{H} = \sum_{\langle i,j \rangle} \kappa \left( \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i \right), \quad (4.3)$$

donde  $\hat{a}_i^\dagger$  y  $\hat{a}_i$  son respectivamente el operador de creación y de destrucción de un fotón en el modo correspondiente la guía  $i$ . Los estados fotónicos, en tanto, son representados como combinaciones lineales de productos tensoriales de estados de Fock  $|p\rangle_m$  que describen  $p$  fotones en la guía  $m$ . Notemos que el espacio de Hilbert que contiene a los estados del sistema depende tanto del número de sitios en la red como del número total de fotones.

## 4.2. Estados cuánticos localizados

Nos centraremos primero en la red romboidal, ya que nos permite ilustrar claramente la derivación de los autoestados que nos interesan. En el caso clásico, sus estados base localizados están compuestos de luz coherente que se propaga en dos guías, digamos  $A$  y  $B$ , como se muestra en la figura 4.1 (a). La luz se propaga con la misma intensidad en ambas guías, pero con una diferencia de fase  $\pi$  entre ellas [52]. Esta diferencia de fase relativa tiene un rol esencial, a saber, permite la interferencia

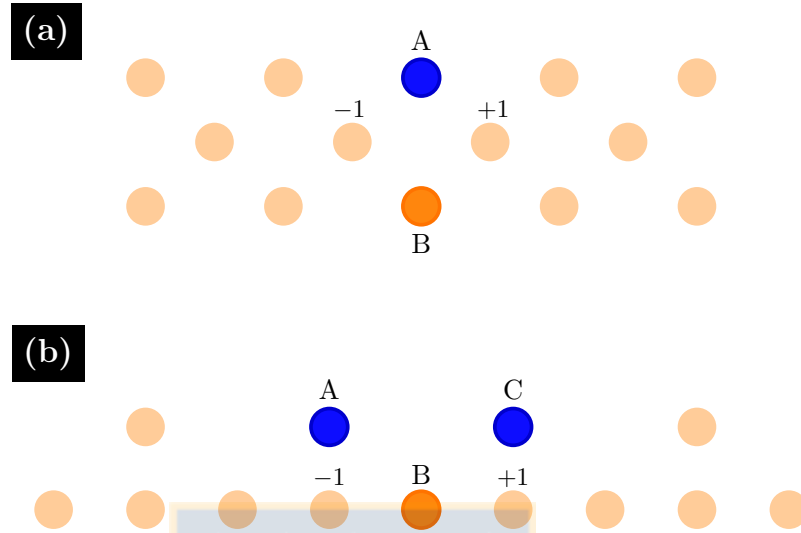


Figura 4.1: Disposición transversal de las guías de ondas en una red romboidal (a), y en una red *stub* (b). Destacamos los sitios que componen un estado no difractante de cada red, y los sitios cercanos  $-1$  y  $+1$  necesarios para nuestro análisis. Fuente: Elaboración propia.

destruccion entre las ondas evanescentes provenientes de las guías  $A$  y  $B$ . De este modo, la luz no puede acoplarse a las guías vecinas (guías  $-1$  y  $+1$  en la figura 4.1) a medida que se propaga, lo que garantiza su localización exacta.

Estos estados localizados son autoestados degenerados del sistema clásico [es decir, soluciones de la ecuación discreta (4.2)], con energía o frecuencia nula. Esto nos sugiere que para encontrar estados cuánticos localizados debemos buscar soluciones del operador hamiltoniano (4.3) con autovalor cero. Consideremos por ejemplo el siguiente estado de un fotón

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle_A|1\rangle_B + \beta|1\rangle_A|0\rangle_B, \quad (4.4)$$

tal que todas las guías fuera de  $A$  y  $B$  están en el estado vacío. La acción del hamiltoniano sobre este estado produce el estado

$$(\alpha + \beta)(|1\rangle_{-1}|0\rangle_{+1} + |0\rangle_{-1}|1\rangle_{+1})|0\rangle_A|0\rangle_B,$$

el cual se anula si  $\alpha$  difiere de  $\beta$  sólo por una fase de  $\pi$ . Vemos que la dinámica de un fotón una vez más emula la dinámica de la luz clásica: en correspondencia con la interferencia destructiva de las ondas clásicas, una diferencia de fase  $\pi$  entre los términos del estado cancela el salto (*hopping*) del fotón desde las guías  $A$  y  $B$  hacia las guía  $-1$  o la  $+1$ , a través de los operadores  $\hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_A + \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_B$  y  $\hat{a}_{+1}^\dagger \hat{a}_A + \hat{a}_{+1}^\dagger \hat{a}_B$ .

Las consideraciones anteriores son de utilidad para deducir la forma de los estados con un número definido  $N$  de fotones. Empezamos con la expresión general

$$|\psi_N\rangle = \sum_{p=0}^N C_p |p\rangle_A |N-p\rangle_B, \quad (4.5)$$

donde las guías restantes no tienen fotones. El estado  $|\psi_N\rangle$  es un autoestado del operador de número total de fotones, con autovalor  $N$ , para cualquier conjunto  $\{C_p\}$  de amplitudes de probabilidad:

$$\hat{N} |\psi_N\rangle = \sum_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j = \left( \hat{a}_A^\dagger \hat{a}_A + \hat{a}_B^\dagger \hat{a}_B \right) |\psi_N\rangle = N |\psi_N\rangle. \quad (4.6)$$

Dado que el estado  $|\psi\rangle_N$  consiste en el estado vacío para todas las guías a excepción de  $A$  y  $B$ , la acción del operador hamiltoniano involucra solamente a las guías  $A$ ,  $B$ ,  $-1$  y  $+1$ . Esto nos permite separar el hamiltoniano en sus dos contribuciones efectivas, a saber,

$$\hat{H}_{\pm 1} = \hat{a}_{\pm 1}^\dagger \hat{a}_A + \hat{a}_{\pm 1}^\dagger \hat{a}_B + \text{h.c.}, \quad (4.7)$$

las que pueden ser consideradas de forma independiente. El término  $\hat{H}_{+1}$  ( $\hat{H}_{-1}$ ) describe el salto de un fotón desde las guías  $A$  o  $B$  hacia la guía  $+1$  ( $-1$ ). Ahora bien, dado que queremos la localización del estado  $|\psi_N\rangle$ , es necesario que el salto fotónico propiciado por las contribuciones  $\hat{H}_{\pm 1}$  se cancele. Luego, imponemos las condiciones

$$\hat{H}_{\pm 1} |\psi_N\rangle = 0, \quad (4.8)$$

es decir la aniquilación del estado  $|\psi_N\rangle$  por los operadores  $\hat{H}_{\pm 1}$  y así por el hamiltoniano  $\hat{H}$ . La acción de  $\hat{H}_{\pm 1}$  sobre  $|\psi_N\rangle$  produce el estado siguiente:

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\pm 1} |\psi_N\rangle &= \sum_{p=0}^N [C_p \sqrt{p} |1\rangle_{\pm 1} |p-1\rangle_A |N-p\rangle_B \\ &\quad + C_p \sqrt{N-p} |1\rangle_{\pm 1} |p\rangle_A |N-p-1\rangle_B] \\ &= \sum_{p=1}^N (C_p \sqrt{p} + C_{p-1} \sqrt{N-p+1}) |1\rangle_{\pm 1} |p\rangle_A |N-p\rangle_B,\end{aligned}\tag{4.9}$$

De (4.9) se sigue la siguiente relación de recurrencia:

$$C_p = -C_{p-1} \frac{\sqrt{N-p+1}}{\sqrt{p}},\tag{4.10}$$

para  $p = 1, \dots, N$ . La solución de esta relación de recursión está dada por

$$C_p = (-1)^p \binom{N}{p}^{1/2} C_0,\tag{4.11}$$

donde  $\binom{N}{p}$  es el coeficiente binomial:

$$\binom{N}{p} = \frac{N!}{p!(N-p)!}.\tag{4.12}$$

La expresión (4.11) para las amplitudes de probabilidad  $C_p$ , en conjunto con la condición de normalización  $\sum_{p=0}^N |C_p|^2 = 1$ , nos lleva a la definición general para un estado localizado de luz cuántica en la red romboidal:

$$\begin{aligned}|\psi_N\rangle^r &= \frac{1}{2^{N/2}} \sum_{p=0}^N \binom{N}{p}^{\frac{1}{2}} (-1)^q |p\rangle_A |N-p\rangle_B \\ &= \frac{1}{2^{N/2}} \sum_{\substack{p,q \geq 0 \\ p+q=N}} \binom{N}{p, q}^{\frac{1}{2}} (-1)^q |p\rangle_A |q\rangle_B.\end{aligned}\tag{4.13}$$

(Desde esta expresión en adelante usaremos el superíndice  $r$  para designar estados de la red romboidal, y  $s$  para estados de la red *stub*; si omitimos el índice nos referimos

a cualquiera de los dos casos.) Dado que hemos deducido la expresión (4.13) a partir de las condiciones  $\hat{H}_{\pm 1} = 0$ , es claro que  $|\psi_N\rangle^r$  es autoestado del hamiltoniano con autovalor cero, por lo cual se propaga a lo largo de las guías  $A$  y  $B$  sin difractarse.

En el caso de la red *stub*, figura 4.1 (b), los estados clásicos no difractantes están dados por luz coherente distribuída con igual intensidad sobre tres guías de ondas, digamos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , con una diferencia de fase  $\pi$  en la guía  $B$  con respecto a las demás. Luego, en analogía con el desarrollo previo para la red romboidal, encontramos la forma general del autoestado cuántico localizado de  $N$  fotones para la red *stub*:

$$|\psi_N\rangle^s = \frac{1}{3^{N/2}} \sum_{\substack{p,q,t \geq 0 \\ p+q+t=N}} \binom{N}{p \ q \ t}^{\frac{1}{2}} (-1)^q |p\rangle_A |q\rangle_B |t\rangle_C . \quad (4.14)$$

### 4.3. Estados coherentes

Consideremos ahora estados localizados coherentes, es decir, estados macroscópicos de luz, que han sido el objeto de estudio en experimentos con luz clásica. A diferencia de los estados  $|\psi_N\rangle$  tratados en la sección anterior, un estado coherente no tiene un número de fotones fijo, sino que consiste en una distribución estadística de ellos definida por su cantidad promedio. De la propia definición de un estado coherente, sabemos que debe ser un autoestado de los operadores de destrucción  $\hat{a}_\sigma$  correspondientes a los sitios  $\sigma = A, B$  (y  $C$ ) en la red romboidal (en la red *stub*). Siguiendo el

procedimiento estándar [56] construimos en primer lugar el estado localizado coherente  $|\alpha\rangle^r$  para la red romboidal:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle^r &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{\alpha^p (-\alpha)^q}{\sqrt{p!q!}} |p\rangle_A |q\rangle_B \\ &= e^{-|\alpha|^2} \exp(\alpha [\hat{a}_A^\dagger - \hat{a}_B^\dagger]) |0\rangle \\ &= |\alpha\rangle_A |-\alpha\rangle_B, \end{aligned} \quad (4.15a)$$

Asimismo, el estado coherente localizado para la red *stub* se define como

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle^s &= e^{-\frac{3}{2}|\alpha|^2} \sum_{p,q,t=0}^{\infty} \frac{\alpha^p (-\alpha)^q \alpha^t}{\sqrt{p!q!t!}} |p\rangle_A |q\rangle_B |t\rangle_C \\ &= e^{-\frac{3}{2}|\alpha|^2} \exp(\alpha [\hat{a}_A^\dagger - \hat{a}_B^\dagger + \hat{a}_C^\dagger]) |0\rangle \\ &= |\alpha\rangle_A |-\alpha\rangle_B |\alpha\rangle_C. \end{aligned} \quad (4.15b)$$

Notamos que tanto  $|\alpha\rangle^r$  como  $|\alpha\rangle^s$  son estados separables. En lo que sigue, queremos expresar ambos estados en términos de los autoestados no-difractantes  $|\psi_N\rangle$ .

Analicemos en primer lugar la posibilidad de tal descomposición. Vemos que de acuerdo a las definiciones (4.13) y (4.14), cada estado  $|\psi_N\rangle$  es combinación lineal de todos los estados de Fock con número total de fotones  $N$  (bipartitos o tripartitos según se trate de la red romboidal o *stub*). Este conjunto de estados define un subespacio de Hilbert que llamamos  $\mathcal{H}_N$ . Por ejemplo, para la red *stub*,

$$\mathcal{H}_N = \{ |p\rangle_A |q\rangle_B |t\rangle_C | p + q + t = N \}. \quad (4.16)$$

Por otro lado, designamos como  $\mathcal{H}'_j$  al subespacio de todos los estados de Fock definidos sobre el sitio  $j$ -ésimo, es decir,

$$\mathcal{H}'_j = \{ |0\rangle_j, |1\rangle_j, |2\rangle_j, \dots \}. \quad (4.17)$$

Luego, podemos ver que el espacio de Hilbert completo  $\mathcal{H}_\alpha$ , en el cual está definido el correspondiente estado  $|\alpha\rangle$ , puede expresarse como dos productos tensoriales

diferentes. Continuando el ejemplo de la red *stub*, lo anterior se traduce en la igualdad siguiente:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\alpha &= \mathcal{H}'_A \otimes \mathcal{H}'_B \otimes \mathcal{H}'_C \\ &= \mathcal{H}_{N=0} \otimes \mathcal{H}_{N=1} \otimes \mathcal{H}_{N=2} \otimes \cdots\end{aligned}\quad (4.18)$$

Gracias a esta equivalencia, es válido describir las sumatorias en las ecuaciones (4.15) usando el número de fotones  $N$  como el índice de suma. En efecto, al compararlas con las definiciones de los autoestados localizados (4.13) y (4.14), podemos expresar los estados coherentes  $|\alpha\rangle^r$  y  $|\alpha\rangle^s$  como

$$|\alpha\rangle^r = e^{-|\alpha|^2} \sum_{N=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2^N}{N!}} \alpha^N |\psi_N\rangle^r, \quad (4.19a)$$

y

$$|\alpha\rangle^s = e^{-\frac{3}{2}|\alpha|^2} \sum_{N=0}^{\infty} \sqrt{\frac{3^N}{N!}} \alpha^N |\psi_N\rangle^s. \quad (4.19b)$$

En conclusión, los estados separables  $|\alpha\rangle^r$  y  $|\alpha\rangle^s$  son combinaciones lineales de los autoestados no difractantes  $|\psi_N\rangle$ , los cuales — como veremos en la sección siguiente — son estados entrelazados.

## 4.4. Entrelazamiento de los estados no difractantes en la red romboidal

El estado localizado de un fotón ( $N = 1$ ) tiene la forma

$$|\psi_1\rangle^r = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_A - |1\rangle_B). \quad (4.20)$$

Esto corresponde a un estado *entrelazado en camino* (*path-entangled field* [57]). Este concepto sin duda es polémico, pues parte de la literatura (ej. [58, 59]) considera que



el fenómeno de entrelazamiento requiere la interacción de dos o más partículas. No obstante, desde el trabajo de van Enk [60], está demostrado que el entrelazamiento en camino de un fotón es de la misma naturaleza física que el entrelazamiento en un sistema de igual dimensión que involucra dos partículas. A continuación apuntaremos a esclarecer el grado de entrelazamiento de los estados  $|\psi_N\rangle^r$ .

#### 4.4.1. Negatividad y concurrencia

El grado de entrelazamiento de un estado  $|\psi_N\rangle^r$  puede cuantificarse mediante la *negatividad* [61,62], definida para sistemas bipartitos de qudits  $\rho = |\psi_1\rangle^r \langle\psi_1|^r$  como

$$\mathcal{N} = (\|\rho^{TA}\| - 1)/(d - 1). \quad (4.21)$$

En esta expresión,  $d$  es la dimensión de cada subsistema (en nuestro caso,  $d = N + 1$ ), y  $\rho^{TA}$  es la transpuesta parcial de la matriz densidad  $\rho$  con respecto al sitio  $A$ . Explícitamente, si expresamos la matriz  $\rho$  en la forma

$$\rho = \sum_{ijkl} p_{j\ell}^{ik} |i\rangle_A |j\rangle_B \langle k|_A \langle \ell|_B = \sum_{ijkl} p_{j\ell}^{ik} |i\rangle \langle k| \otimes |j\rangle \langle \ell|, \quad (4.22)$$

entonces la transpuesta parcial con respecto al subsistema (sitio)  $A$  está dada por

$$\rho^{TA} = \sum_{ijkl} p_{j\ell}^{ik} (|i\rangle \langle k|)^T \otimes |j\rangle \langle \ell| = \sum_{ijkl} p_{j\ell}^{ik} |k\rangle \langle i| \otimes |j\rangle \langle \ell|. \quad (4.23)$$

La negatividad puede interpretarse considerando su valor en dos casos límite, a saber: un estado separable, que tiene negatividad nula, y un estado bidimensional máximamente entrelazado [como el estado  $|\psi_1\rangle^r$  en (4.20)] cuya negatividad es igual a uno. La definición de la negatividad presentada en (4.21) está normalizada (por el denominador  $d - 1$ ) de modo que el máximo valor que puede tomar en cualquier dimensión es uno. En la figura 4.2 presentamos la negatividad de los estados  $|\psi_N\rangle^r$

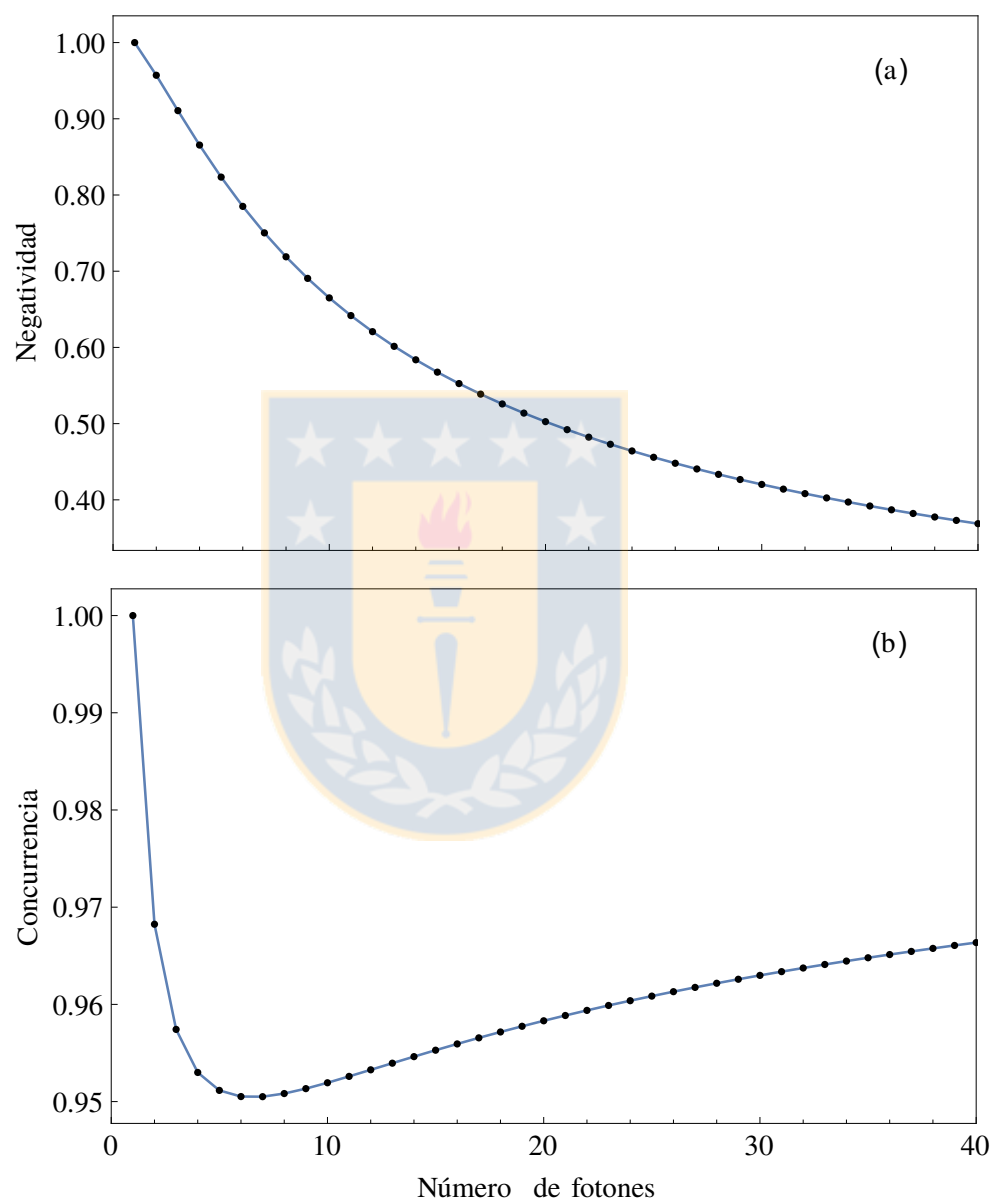


Figura 4.2: (a) Negatividad y (b) concurrencia normalizada de los autoestados fotónicos no difractantes en la red romboidal, en función de su número de fotones. Fuente: Elaboración propia.

en función del número de fotones  $N$ . Nuestros resultados sugieren que para cualquier número finito de fotones la negatividad es mayor que cero, pero decrece lentamente y de forma monótona (en la sección siguiente precisaremos esta observación preliminar).

Otra medida de entrelazamiento de un estado bipartito  $\rho$  es la *conurrencia*, dada por

$$\mathcal{C} = \sqrt{2(1 - \text{Tr}\rho_A^2)}, \quad (4.24)$$

donde  $\rho_A$  es la matriz densidad reducida obtenida al trazar la matriz  $\rho$  con respecto a la base del sitio  $B$ , es decir,

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho.$$

Sin pérdida de generalidad, en nuestro análisis consideramos solamente la matriz densidad reducida del sitio  $A$ . Para el estado de un fotón  $|\psi_1\rangle^r$  el valor de la concurrencia es igual a uno, al igual que la negatividad, por tratarse de un estado máximamente entrelazado. La definición de concurrencia puede extenderse a sistemas de más de dos dimensiones, es decir, a sistemas de qudits. Y al igual que con la negatividad, podemos normalizar la concurrencia con respecto al valor máximo que puede tomar en cada dimensión, a saber,  $\sqrt{2[1 - 1/(N + 1)]}$ . En general, un estado con concurrencia mayor que cero es entrelazado. En la figura graficamos la concurrencia normalizada de los estados  $|\psi_N\rangle^r$  en función de su correspondiente número de fotones. En un primer acercamiento, observamos que la concurrencia de estos estados tiene un valor cercano al máximo para todo  $N$ . En efecto, a medida que aumentamos el número de fotones, encontramos que la concurrencia normalizada del correspondiente estado no difractante es cada vez más cercana a la unidad (para  $N = 10^3$ , difiere de 1 en menos que  $10^{-3}$ ).

#### 4.4.2. Coeficientes de Schmidt y expresiones asintóticas

Como los estados no difractantes de la red romboidal  $|\psi_N\rangle^r$  son puros, es posible discernir si son o no entrelazados a partir de su descomposición en la *forma de Schmidt*. Para un estado puro  $|\phi\rangle$  de dos qudits de dimensión  $d$ , su expresión en la forma de Schmidt está dada por

$$|\phi\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} k_i |v_i\rangle_A |w_i\rangle_B, \quad (4.25)$$

donde los coeficientes de Schmidt  $k_i$  son reales y positivos, además de cumplir la normalización

$$\sum k_i^2 = 1$$

. Un estado separable tiene solamente un estado en su forma de Schmidt por lo que sólo uno de sus coeficientes de Schmidt es no nulo.

De la definición (4.13) podemos deducir que el  $i$ -ésimo coeficiente del estado  $|\psi_N\rangle^r$  está dado por

$$k_{i,N} = \frac{1}{2^{N/2}} \binom{N}{i, N-i}^{1/2}, \quad (4.26)$$

donde el índice  $i = 0, 1, \dots, N$ . En tanto, los estados base  $|v_i\rangle$  y  $|w_i\rangle$  se relacionan con los estados de Fock en los sitios  $A$  y  $B$  como sigue:

$$|v_i\rangle = |i\rangle, \quad |w_i\rangle = (-1)^{N-i} |N-i\rangle. \quad (4.27)$$

Entonces, para cada estado  $|\psi_N\rangle^r$  hay  $N + 1$  coeficientes de Schmidt no nulos, una cantidad igual a la dimensión de cada qudit (y a la del sistema compuesto bajo la restricción de un número fijo de fotones), lo que evidencia su entrelazamiento. Ahora bien, las medidas de entrelazamiento introducidas en la sección anterior, pueden expresarse en función de los coeficientes de Schmidt. La negatividad, en primer lugar,

cumple la identidad

$$\mathcal{N}(|\psi\rangle) = \frac{2}{N} \sum_{i<j} k_{i,N} k_{j,N} = \frac{1}{N2^N} \left[ \left( \sum_{i=0}^N \binom{N}{i}^{1/2} \right)^2 - \frac{1}{N} \right]. \quad (4.28)$$

Podemos confirmar entonces que la negatividad es positiva para cualquier número finito de fotones, si bien decae a medida que  $N$  grows. En efecto, si evaluamos el límite  $N \rightarrow \infty$  en la ecuación (4.28), y usamos el hecho de que para  $N$  muy grande el término central  $i = N/2$  en la sumatoria contribuye mucho más que los otros, vemos que la negatividad decae a cero como  $\sqrt{2/\pi} N^{-3/2} - 1/N$ .

Asimismo, la concurrencia puede expresarse como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(|\psi\rangle) &= 2 \left( \sum_{i<j} k_{i,N}^2 k_{j,N}^2 \right)^{1/2} \\ &= 2^{1/2-N} \left( \left[ \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} \right]^2 - \sum_{i=0}^N \binom{N}{i}^2 \right)^{1/2} \\ &= 2^{1/2-N} \sqrt{2^{2N} - \binom{2N}{N}}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Para una gran cantidad de fotones,  $N \rightarrow \infty$ , la expresión anterior permite aplicar inmediatamente la fórmula de Stirling para valores grandes de  $N$ , conviene a saber,

$$\binom{2N}{N} \sim \sqrt{\frac{1}{\pi N}} 2^{2N}, \quad (4.30)$$

lo que nos permite comprobar que nuestros estados  $|\psi_N\rangle$  tienden a un valor de concurrencia máximo,  $\sqrt{2}$ , cuando el número de fotones es grande, y son, por tanto, máximamente entrelazados.

## 4.5. Entrelazamiento de los autoestados no difractantes de la red *stub*.

Los autoestados localizados de la red *stub*,  $|\psi_N\rangle^s$ , se extienden sobre tres sitios, por lo que determinar (y cuantificar) su entrelazamiento es difícil. Aunque tanto la negatividad como la concurrencia pueden definirse para este caso, su evaluación no entrega información conclusiva, ya que se ha reportado la existencia de estados entrelazados en sistemas tripartitos con valor nulo para la concurrencia y negatividad tripartita [63]. Además, recurrir a la descomposición de Schmidt no es una opción simple en este caso, ya que hay múltiples modos de extender su definición para sistemas multipartitos [64–67], cada una de las cuales presenta dificultades. Por ejemplo, si intentamos expresar un estado  $|\psi_N\rangle^s$  en la forma general para la descomposición introducida por Carteret *et. al.* [66], encontramos que no es posible hacerlo solamente a través de transformaciones locales, lo que es un requisito básico en el procedimiento de la descomposición de Schmidt. Asimismo, la forma de Schmidt más intuitiva (aunque más restrictiva) propuesta por Sokoli *et. al.* no puede aplicarse sobre los estados  $|\psi_N\rangle^s$ , ya que no cumplen las condiciones para ser considerados *descomponibles de Schmidt* [67].

### 4.5.1. Descomposición en base bipartita.

Incluso si las condiciones que definen la descomposición de Schmidt no pueden satisfacerse para los estados  $|\psi_N\rangle^s$ , podemos demostrar que son superposiciones no separables de más de un término. Para este propósito, introducimos los siguientes estados base definidos sobre los sitios  $B$  y  $C$  (la elección de estos sitios es arbitraria

y no quita generalidad al desarrollo):

$$|i'_N\rangle_{BC} = \sum_{\mu\nu} A_{i\mu\nu}^{(N)} |\mu\rangle_B |\nu\rangle_C, \quad (4.31)$$

donde  $A_{pqt}^{(N)}$  es el coeficiente que acompaña al respectivo estado  $|p\rangle_A |q\rangle_B |t\rangle_C$  en la definición del estado  $|\psi_N\rangle^s$  [ecuación (4.14)] <sup>1</sup>

Luego, el estado  $|\psi_N\rangle$  puede ser expresado en la forma

$$|\psi_N\rangle^s = \sum_i K_{i,N} |i\rangle_A |i'_N\rangle_{BC}, \quad (4.32)$$

con los coeficientes  $K_{i,N}$  definidos según

$$K_{i,N} = \frac{1}{3^{N/2}} \binom{N}{i, N-i}^{1/2} \left[ \sum_{\substack{p,q,t \geq 0 \\ p+q+t=N-i}} \binom{N}{p, q, t} \right]^{1/2}, \quad (4.33)$$

para  $i = 0, 1, \dots, N$ . Queremos remarcar que, en general, no es posible obtener una descomposición de Schmidt tripartita en la forma de la ecuación (4.32) [68]. En efecto, la definición de los estados  $|i'_N\rangle_{BC}$  nos muestra que para su construcción necesitamos operar sobre los estados de Fock en los sitios  $B$  y  $C$  conjuntamente. Es decir, la descomposición propuesta necesita una operación no local, a diferencia de la descomposición de Schmidt. No obstante, el hecho de que los coeficientes dados por (4.33) son no nulos para  $i = 0, 1, \dots, N$ , implica que al descomponer cualquier estado  $|\psi_N\rangle^s$  en la forma (4.32) se tendrán  $N + 1$  términos no factorizables, lo que manifiesta el entrelazamiento de los autoestados no difractantes en la red *stub*.

#### 4.5.2. Entrelazamiento de las matrices reducidas

A fin de profundizar la descripción del entrelazamiento en la red *stub*, estudiaremos los estados bipartitos obtenidos al eliminar (trazar) una de las partes, es decir, una

<sup>1</sup>Nótese que los estados  $|i'_N\rangle_{BC}$  satisfacen la relación de recurrencia  $|i'_N\rangle_{BC} = |(i-1)'_{N-1}\rangle_{BC}$ .

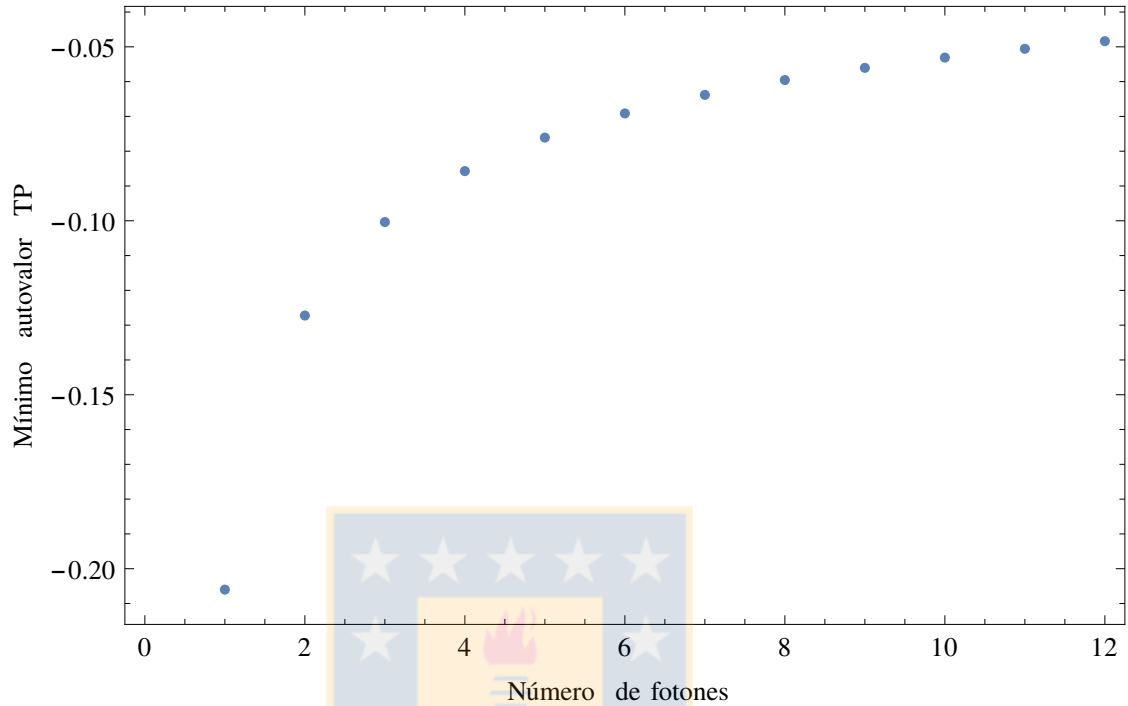


Figura 4.3: Criterio de Peres-Horodecki aplicado a los estados reducidos obtenidos al trazar un sitio de los autoestados  $|\psi_N\rangle^s$ . Graficamos el mínimo autovalor de la matriz densidad reducida transpuesta parcialmente. El hecho de que (al menos) un autovalor de esta matriz sea negativo implica el entrelazamiento del estado correspondiente. Fuente: Elaboración propia.

de las guías que componen el estado completo  $|\psi_N\rangle$ . Consideremos como ilustración el estado de un fotón

$$|\psi_1\rangle^s = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle_A - |1\rangle_B + |1\rangle_C).$$

La matriz densidad que describe este estado es la siguiente

$$\rho_1^s = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} |100\rangle & |010\rangle & |001\rangle \\ \langle 100| & \langle 010| & \langle 001| \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Consideremos también el estado que se obtiene al trazar la matriz con respecto a la primera guía del sistema, es decir, al suprimir el sitio  $A$  en el estado total



(físicamente, esto puede darse por una medición en la guía  $A$ ):

$$\begin{aligned} \text{Tr}_A(\rho_1^s) &= \langle 0|_A \rho_1^s |0\rangle_A + \langle 1|_A \rho_1^s |1\rangle_A \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} |00\rangle & |10\rangle & |01\rangle & |11\rangle \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \langle 00| \\ \langle 10| \\ \langle 01| \\ \langle 11| \end{matrix} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Llamamos  $M_1$  a transpuesta parcial de esta matriz, definida anteriormente, ec. (4.23), que en este caso es igual a

$$M_1 = \{\text{Tr}_A(\rho_1^s)\}^{T_B} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} |00\rangle & |10\rangle & |01\rangle & |11\rangle \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \langle 00| \\ \langle 10| \\ \langle 01| \\ \langle 11| \end{matrix} \quad (4.36)$$

Ahora bien, de acuerdo al *criterio de Peres-Horodecki* (P-H) [68] si esta matriz tiene al menos un autovalor negativo, el estado definido por la matriz reducida  $|\psi_N\rangle^s$  es entrelazado. En efecto, vemos que en nuestro ejemplo, uno de los autovalores de  $M_1$  es negativo,  $(1 - \sqrt{5})/6$ , mientras que los restantes son positivos. Se cumple luego el criterio de P-H, confirmando el entrelazamiento del estado reducido  $\rho_1^s$ . Este criterio es válido también para dimensiones mayores, por lo cual, continuando el proceso anterior para  $N > 1$ , podemos obtener el entrelazamiento de los estados reducidos para cada número de fotones. La razón de que elijamos este método para determinar el entrelazamiento, en vez de seguir el camino usado en el análisis de la red romboidal, es que carecemos de una expresión general para la descomposición de Schmidt del estado reducido, por lo que en algún punto debemos abordar el caso general numéricamente.

Y dentro del análisis numérico hay una razón de eficiencia en esta elección sobre la negatividad y la concurrencia, ya que nos permite encontrar solamente la menor

raíz de la matriz  $M_N$ , usando un algoritmo mucho más rápido que la diagonalización completa. Notemos que la matriz densidad reducida es de orden mayor que la del estado completo, ya que incluye todos los posibles estados de Fock en las dos guías preservadas, no solamente los que tienen un número total de fotones  $N$ . En efecto, para cualquier valor de  $N$ , la matriz densidad total  $\rho_N^s$  será de tamaño

$$\binom{3+N-1}{N} \times \binom{3+N-1}{N},$$

lo que para un número muy grande de fotones se aproxima a  $(N^2/2) \times (N^2/2)$ , mientras que la matriz densidad reducida es de tamaño  $(N+1)^2 \times (N+1)^2$ , es decir, tiene aproximadamente cuatro veces más elementos que aquella, si bien la mayoría de esos elementos son nulos. Este último dato es relevante a la hora de implementar la solución, ya que permite almacenar las matrices de forma más eficiente<sup>2</sup>. Pero por otra parte, para programar la transposición parcial de matrices se requiere un ordenamiento en la base de autoestados, por lo que el tiempo de cómputo se incrementa enormemente.

En nuestros resultados, encontramos que cualquiera sea la guía a suprimir, el autovalor mínimo obtenido es el mismo. Esto es razonable, ya que la única distinción formal entre los sitios está dada por la diferencia de fase  $\pi$ , lo que no debería afectar el entrelazamiento en camino de los estados  $|\psi_N\rangle$ . En la figura 4.3 mostramos el mínimo autovalor de la matriz reducida obtenida para cada número de fotones  $N$ . Podemos ver que hay un autovalor menor que cero para todos los valores de  $N$  estudiados, que al ser independiente de la elección de las guías nos indica que el entrelazamiento del estado está distribuido igualmente en los pares de caminos. Pero más aún, el análisis anterior nos permite precisar la naturaleza del entrelazamiento de los estados  $|\psi_N\rangle^s$ : si los estados reducidos fueran separables nos hallaríamos ante

<sup>2</sup>Por ejemplo en Mathematica se las puede definir como arreglos dispersos (`SparseArray`).

una variedad de los estados GHZ (por Greenberger, Horne y Zeilinger [69]) una clase de estados tripartitos con propiedades muy alejadas de la fenomenología clásica, una de cuyas características es la pérdida de entrelazamiento cuando se realizan mediciones sobre una de las partes; en cambio, como en nuestro caso los estados reducidos son entrelazados, podemos entender a los estados  $|\psi_N\rangle^s$  como una generalización de los estados  $W$  definidos para qubits [70] (el estado  $|\psi_1\rangle^s$  tiene la forma de un estado  $W$ ), cuyo entrelazamiento persiste incluso tras la remoción de una de las partes, lo cual los distingue como una rama independiente de los estados GHZ, dentro de los estados entrelazados tripartitos. En otras palabras, el entrelazamiento de nuestros estados es *de a pares* (*pairwise*), en oposición al entrelazamiento *en tres direcciones* (*three-way*), propio de los estados GHZ [71].

Los resultados previos entregan evidencia conclusiva del entrelazamiento de los estados no difractantes  $|\psi_N\rangle$ . Ahora bien, como vimos en la sección anterior, ecs. (4.19), la representación cuántica de los estados clásicos (coherentes)  $|\alpha\rangle$  es combinación lineal de los estados  $|\psi_N\rangle$ . En consecuencia, los estados macroscópicos separables son una superposición estadística de infinitos estados entrelazados.

## 4.6. Implementación experimental de los autoestados no difractantes.

Desde un punto de vista formal, los autoestados no difractantes  $|\psi_N\rangle$  pueden ser generados por operaciones unitarias sobre un estado de Fock de  $N$  fotones  $|N\rangle$ . No obstante, en la práctica es difícil realizar esas operaciones con instrumentos ópticos convencionales, dado que requiere controlar las fases de varios estados multifotónicos (los distintos términos que componen el estado) distribuidos sobre diferentes caminos ópticos. Afortunadamente, es posible aprovechar los principios que rigen el acopla-

miento en arreglos de guías de ondas para preparar los estados con cualquier número de fotones, como mostramos a continuación.

En la figura 4.4 presentamos dos configuraciones factibles para guías de ondas, que pueden ser realizadas mediante el método de escritura con laser fs (descrito en la Introducción y en la referencia [17]), y que permiten la preparación de los estados localizados  $|\psi_N\rangle^r$  y  $|\psi_N\rangle^s$  en sitios específicos de las redes respectivas. En ambos casos, un estado de Fock  $|N\rangle$  es acoplado a una guía *input* en el punto 1 y se propaga hasta el punto 2.

Desde el punto 2, los fotones pueden saltar desde la guía *input* a guías adyacentes mediante el acoplamiento evanescente de los modos del campo. La propagación del estado en esta sección es descrita por un hamiltoniano de la misma forma que  $\hat{H}$  en (4.3). Si las guías están equiespaciadas, después de cierta distancia (punto 3), la probabilidad de encontrar fotones en la guía *input* es nula. En experimentos con arreglos de guías de ondas, el valor de las constantes de acoplamiento es aproximadamente  $0.5 \text{ mm}^{-1}$  cuando las guías están separadas por  $8 \mu\text{m}$  [72], lo que implica que la longitud entre las etapas 2 y 3 debe ser  $\sim 5 \text{ mm}$ , y puede ser variada en un amplio rango cambiando la separación entre las guías<sup>3</sup>.

Los autoestados  $|\psi_N\rangle$  que queremos construir requieren una diferencia de fase  $\pi$  en los términos con una cantidad impar de fotones en la guía *B*. Para conseguir esta diferencia, introducimos una modificación en el índice de refracción de la guía correspondiente a lo largo de la sección entre los puntos 3 y 4 [marcada con rojo en la figura 4.4], a la vez que suprimimos la guía *input* para prevenir el acoplamiento. Esta diferencia en el índice de refracción puede conseguirse ya cambiando la velocidad de escritura del láser en el proceso de fabricación, ya aplicando un campo eléctrico

<sup>3</sup>Esto debido al decaimiento exponencial de la constante de acoplamiento con la separación entre guías, como se muestra en el capítulo siguiente, figura 5.3.

externo . A su vez, este incremento produce un incremento  $\Delta\beta$  en la constante de propagación de la guía escogida  $B$  (un efecto que ya se ha utilizado en experimentos que requieren un cambio de fase controlado [73]). Luego, el hamiltoniano en esta sección es

$$H_{34} = \Delta\beta\hat{a}_B^\dagger\hat{a}_B \quad (4.37)$$

De este modo, todas las componentes de un estado expresado en la base de Fock adquieren una fase que depende solamente en el número de fotones en la guía  $B$ . Luego, para la preparación del estado solamente requerimos encontrar la longitud de la sección entre los puntos 3 y 4 que *acumula* una fase  $\pi$  a cada estado con un número impar de fotones en la guía  $B$ . Esto garantiza que todos los términos con un número impar de fotones en esta guía adquirirán la misma fase, lo que cubre todos los casos posibles, como podemos ver en la definición general para las dos redes, (4.13) y (4.14). La distancia requerida para obtener el cambio de fase deseado es  $\sim 1$  cm [73]. Finalmente, en el punto 4, el estado está preparado y es acoplado como condición inicial en el arreglo correspondiente. Es importante destacar que si bien la posición de entrada del estado queda fija en el proceso de fabricación, es posible incluir varios puertos en un mismo arreglo, lo que permite la construcción de perfiles compuestos por múltiples estados  $|\psi_N\rangle$ .

La configuración propuesta permite la preparación de autoestados no difractantes con cualquier número de fotones, definido en la entrada por el estado  $|N\rangle$  acoplado a la guía *input*. La principal ventaja de este método es que no requiere instrumentos ópticos externos al vidrio que contiene los arreglos. La excitación de los autoestados de la banda plana no sólo permite mantener la localización espacial de la luz propagada, sino también, como hemos visto en este capítulo, la propagación de su entrelazamiento.

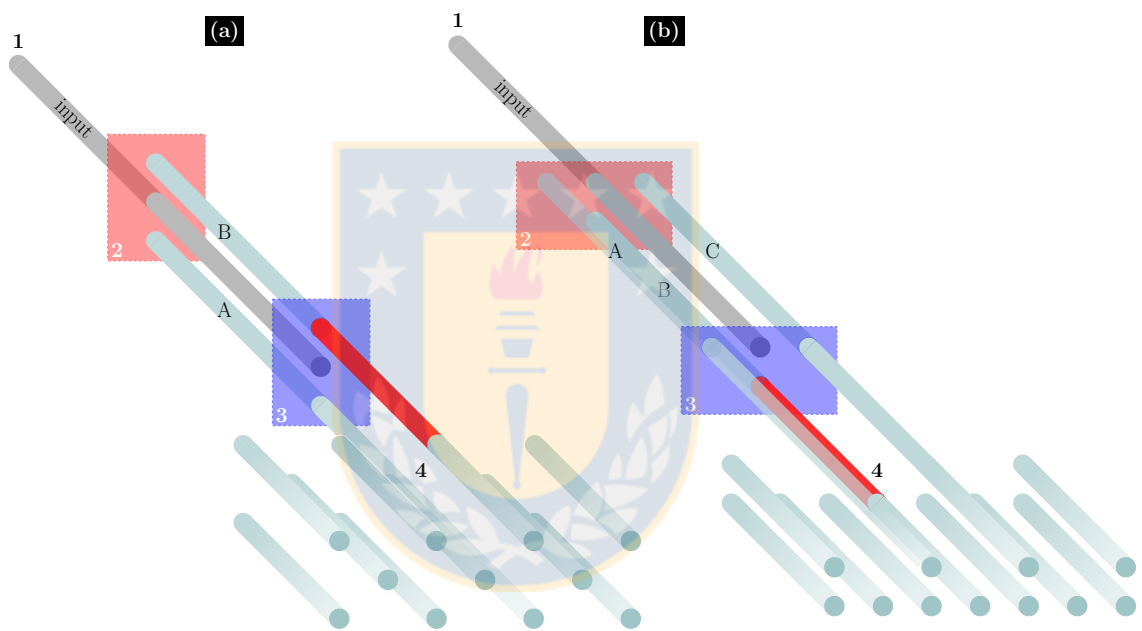


Figura 4.4: Diseño para la preparación de los autoestados localizados  $|\psi_N\rangle$  en la red romboidal (a) y en la red *stub* (b). En ambos casos, un estado de Fock  $|N\rangle$  acoplado a una guía de entrada (*input*) en el punto 1, es convertido en un autoestado localizado para luego ser introducido como condición inicial en una posición específica del arreglo en (punto 4) Fuente: Elaboración propia.

## Capítulo 5

### Efectos de la polarización en los modos de una guía elíptica



El estudio de modos *linealmente polarizados* (LP) del campo eléctrico en una guía de ondas ha sido descrito con gran éxito por el enfoque *weakly guiding* [28, 74] (sección ). La ventaja descriptiva de este enfoque tiene como contraparte la pérdida de información relativa al efecto de la polarización de la luz transportada por la guía. Aunque puede parecer que los modos son afectados por la polarización de forma muy leve, es sabido que incluso una pequeña variación de su perfil transversal tiene un efecto importante en la constante de acoplamiento entre guías cercanas, el que ha sido observado en experimentos recientes [75, 76] con guías cuya sección transversal tiene un grado de excentricidad o elipticidad.

En este capítulo presentamos un nuevo acercamiento teórico para modelar la dependencia de los perfiles modales del campo eléctrico en guías de ondas, que aplicamos en conjunto con métodos numéricos para describir guías elípticas. A través de un experimento con un arreglo unidimensional de guías elípticas equiespaciadas, podemos estimar el contraste del índice de refracción entre el núcleo de las guías y el material envolvente. Además, aplicamos nuestro modelo a la descripción de arreglos de guías de onda desordenados — en que la separación entre guías adyacentes varía a través del arreglo — que también estudiamos experimentalmente. Finalmente, presentamos algunas extensiones y aplicaciones de nuestro trabajo.

## 5.1. Dependencia del perfil transversal espacial de los modos del campo eléctrico con respecto a la polarización

Como estudiamos en la sección 2.1.2, en la aproximación más simple provista por el acercamiento *weakly guiding*, los modos linealmente polarizados satisfacen la ecuación



escalar

$$\{\nabla_t^2 + [k^2 n^2(x, y) - \beta^2]\} e(x, y) = 0, \quad (5.1)$$

donde  $e(x, y)$  es un campo escalar correspondiente a un modo del campo eléctrico polarizado linealmente, con su correspondiente constante de propagación  $\beta$ ,  $\nabla_t$  es el operador laplaciano transversal (es decir, involucra solamente las coordenadas  $x$  e  $y$ ), y  $k = 2\pi/\lambda$  es el número de onda. El perfil del índice de refracción varía transversalmente como  $n(x, y)$  y es invariante a lo largo de la dirección de propagación  $z$ . Consideramos que se trata de una guía *step-index*, es decir, con un valor uniforme  $n_{\text{clad}}$  en la región envolvente o *cladding* y otro  $n_{\text{core}}$  en el núcleo, de modo que la discontinuidad entre estas regiones define una interfaz núcleo-envolvente, la que debe ser tenida en cuenta al aplicar las condiciones de borde.

La ecuación (5.1) es una ecuación diferencial parcial, que podemos representar en distintos sistemas coordenadas. Como estamos interesados en una guía con sección transversal elíptica, una elección natural son las *coordenadas elípticas*. No obstante, incluso en este sistema de coordenadas, la solución analítica presenta dificultades para una descripción realista de los modos, al menos con la precisión que buscamos. Por esta razón, usaremos una solución numérica, a saber, el *método de elementos finitos*. En los apéndices explicamos los pasos de la solución analítica y el método de elementos finitos, respectivamente. Mediante la implementación de éste, resolvemos la ecuación (5.1) para obtener una aproximación al modo fundamental de orden cero con respecto al parámetro  $\Delta$ , presentado en la sección 2.1.2, proporcional a la diferencia relativa entre las constantes dieléctricas del núcleo y de la envolvente. La solución de orden cero, que designamos como  $\tilde{e}$ , es independiente de la dirección de polarización, pues las condiciones de borde que satisface son únicamente la continui-

dad y diferenciabilidad en la interfaz entre el núcleo y la envolvente. Luego,  $\tilde{e}$  puede corresponder a un campo con polarización horizontal  $H$  o vertical  $V$ , indistintamente.

Hasta aquí nos hemos apegado a los lineamientos fundamentales del método *weakly guiding*, de forma similar a su exposición por Snyder y Love en su libro de 1983 [27]. Ahora bien, para introducir una dependencia del modo fundamental con respecto a la polarización asumiremos que (al menos hasta orden  $\Delta$ ) se trata de un modo transversal eléctrico, esto es, el campo eléctrico tiene solamente una componente transversal, cuyo término principal,  $\tilde{e}$ , induce una componente del campo magnético longitudinal. En efecto, la ecuación de Maxwell-Faraday (2.4a) y la dependencia espacial de los campos,

$$\mathbf{E} = e_x e^{i\beta z} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{H} = (\mathbf{h}_t + h_z \hat{\mathbf{z}}) e^{i\beta z}, \quad (5.2)$$

nos permiten deducir la existencia de la componente  $h_z$  del campo magnético asociada al campo eléctrico polarizado en la dirección  $x$  (escogemos esta dirección sin pérdida de generalidad), a saber:

$$h_z = -i \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{k} \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla_t \times \mathbf{e}_t \simeq i \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{k} \frac{\partial \tilde{e}_x}{\partial y}. \quad (5.3)$$

Ahora bien, el número de onda  $k$  puede expresarse en función de los parámetros  $\gamma$  y  $\Delta$  introducidos anteriormente:

$$k = \frac{\gamma}{\rho n_{\text{core}} \sqrt{2\Delta}},$$

lo que evidencia el orden en  $\Delta$  de la componente  $h_z$ :

$$h_z \simeq i \Delta^{1/2} \sqrt{\frac{2\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\rho n_{\text{core}}}{V} \frac{\partial e_x}{\partial y} \equiv \Delta^{1/2} h_z^{(1/2)}. \quad (5.4)$$

Nuestra definición de  $h_z^{(1/2)}$  coincide con la presentada en la referencia [27], donde términos de orden superior para  $h_z$  y los demás campos son obtenidos a través

de las ecuaciones diferenciales correspondientes. Aquí proponemos una corrección alternativa, obtenida al utilizar nuevamente las ecuaciones de Maxwell para expresar el término de orden  $\Delta$  en la expansión del campo eléctrico transversal, originado a partir de la componente  $h_z$ :

$$\Delta \mathbf{e}_t^{(1)} = -\frac{i}{kn^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t h_z. \quad (5.5)$$

Antes de mostrar que el miembro derecho en esta expresión es efectivamente de orden  $\Delta$ , es conveniente mostrar cómo los términos en nuestra aproximación se relacionan con los de la ecuación de Maxwell-Faraday (2.4a):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_t &= -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{kn^2} \hat{\mathbf{z}} \times [\beta \mathbf{h}_t + i \nabla_t h_z] \\ &\simeq \tilde{\mathbf{e}}_t - \frac{i}{kn^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t h_z \\ &\simeq \tilde{\mathbf{e}}_t - \Delta^{(1/2)} \frac{i}{kn^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t h_z^{(1/2)} \\ \mathbf{e}_t &\equiv \tilde{\mathbf{e}}_t + \Delta \mathbf{e}_t^{(1)}. \end{aligned}$$

Entonces introduciendo la expresión (5.4) para  $h_z$  en la definición (5.5) para  $\Delta \mathbf{e}_t^{(1)}$ , reconocemos un factor  $k^2$  en el denominador, el que da origen a una potencia de primer orden en  $\Delta$ . Para el campo polarizado en la dirección  $x$ , la forma explícita del término  $\Delta \mathbf{e}_t^{(1)}$  es

$$\begin{aligned} \Delta e_x^{(1)} &= -\frac{i}{kn^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} [\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t h_z]_x \\ &= \frac{1}{k^2 n^2} \frac{\partial^2 \tilde{e}_x}{\partial y^2} \\ &= \Delta \frac{2\rho}{V n^2 / n_{\text{core}}^2} \frac{\partial^2 \tilde{e}_x}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (5.6a)$$

La corrección para el campo polarizado en la dirección  $y$ , en tanto, puede ser obtenida de forma análoga:

$$e_y^{(1)} = \frac{2\rho}{V n^2 / n_{\text{core}}^2} \frac{\partial^2 \tilde{e}_y}{\partial x^2}. \quad (5.6b)$$

Para clarificar el contexto en que se enmarca nuestra corrección, presentamos en la figura 5.1 un esquema con los elementos de la teoría general que describe los campos electromagnéticos en guías de ondas.

## 5.2. Efectos de polarización en el acoplamiento evanescente

Las derivadas en las correcciones (5.6) tienen un efecto diferente para cada polarización, lo que implica una diferencia en las expansiones de los campos  $e_H$  y  $e_V$ . Los perfiles transversales de los campos para estos modos LP se muestra en la figura 5.2, donde consideramos  $x$  ( $y$ ) como la dirección de polarización horizontal  $H$  (vertical  $V$ ). En la figura, hemos escogido los valores de los parámetros en concordancia con la realización experimental que presentamos más abajo. Puede verse que el modo de cada polarización tiene un perfil característico.

Nos interesa estudiar la propagación de la luz en arreglos de guías de onda elípticas. Situamos nuestro análisis en el marco de la teoría de modos acoplados (explicado en la sección 2.2), según el cual el campo en cada guía está dado por  $u_n(z) \cdot e(x - x_n, y)$  — donde  $x_n$  corresponde a la posición central de la  $n$ -ésima guía — y la luz entre sitios vecinas se acopla a una razón o tasa dada por la constante de acoplamiento [27]:

$$C = -\frac{k}{2n_{\text{core}}} \frac{\int dx dy [n(x, y) - n_{\text{core}}] e(x, y) e(x - s, y)}{\int dx dy e(x, y)^2}, \quad (5.7)$$

donde  $e$  es el campo eléctrico transversal correspondiente a un modo (ya  $e_H$ , ya  $e_V$ ),  $n(x, y)$  representa el perfil transversal del índice de refracción, y  $s$  designa la separación entre guías vecinas. A partir de esta definición y utilizando los perfiles de los modos LP obtenidos anteriormente, podemos calcular las constantes de acoplamiento  $C_H$  and  $C_V$  para cada dirección de polarización lineal. En la figura 5.3 graficamos el



Figura 5.1: Teoría general del campo eléctrico en las guías de onda. El marco azul destaca la contribución del presente trabajo. Fuente: Elaboración propia.

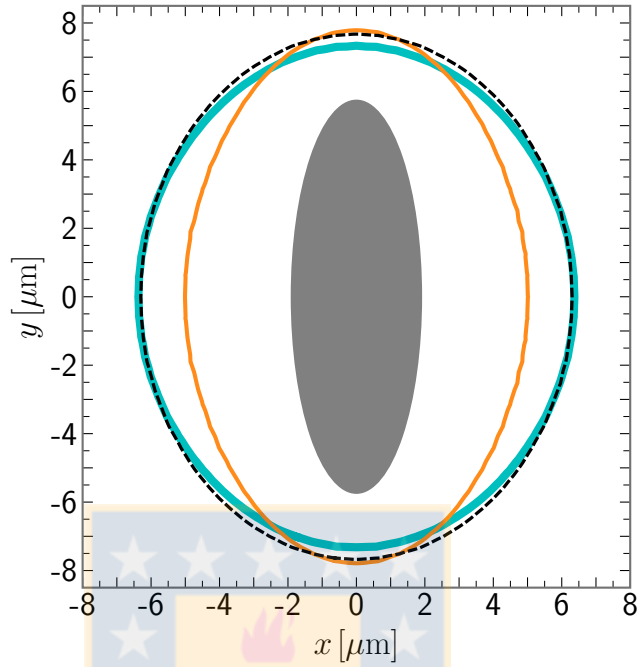


Figura 5.2: Contornos de los perfiles de amplitud del campo eléctrico (correspondientes a su decaimiento  $e^{-2}$ ) para los modos con polarización horizontal (línea azul) y vertical (línea naranja). La línea punteada negra representa el contorno de la solución de orden cero  $\tilde{e}$  de la ecuación escalar. El área gris indica la sección transversal del núcleo de la guía de ondas. Fuente: Elaboración propia.

valor de las constantes en función de la separación entre guías vecinas. En esta figura podemos observar la considerable diferencia entre las constantes de acoplamiento correspondientes a los modos  $H$  y  $V$ , que disminuye al aumentar la separación.

Extendiendo el modelo a un arreglo de guías de ondas, obtenemos el conjunto de ecuaciones que describen la dinámica de las amplitudes  $u_n(z)$  a lo largo de la dirección de propagación  $z$  (variable dinámica)

$$-i \frac{d}{dz} u_n^\sigma(z) = C_{n,n+1}^\sigma u_{n+1}(z) + C_{n,n-1}^\sigma u_{n-1}(z), \quad (5.8)$$

donde  $\sigma = H, V$  define la polarización lineal, y  $C_{n,n'}$  es la respectiva constante de acoplamiento entre los sitios  $n$  and  $n'$ .

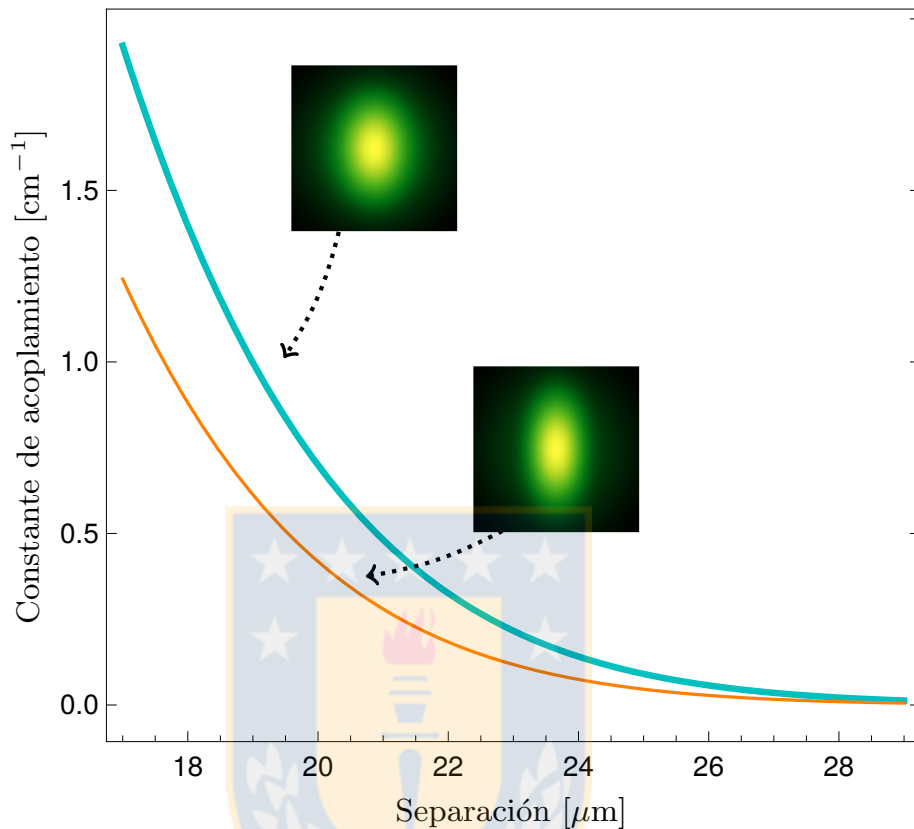


Figura 5.3: Constantes de acoplamiento entre dos guías vecinas que transportan luz con polarización  $H$  (línea azul) y  $V$  (línea naranja), en función de la separación entre ellas. Los gráficos insertos muestran la amplitud del campo eléctrico correspondiente a cada modo. Fuente: Elaboración propia.

## 5.3. Resultados

### 5.3.1. Arreglo ordenado

En primer lugar, estudiaremos la propagación de luz en un arreglo *ordenado* de guías de onda elípticas, esto es, en que la separación entre las guías adyacentes es la misma a través de todo el arreglo. Para nuestro experimento, usamos un arreglo fabricado en sílicio fundido (*fused silica*) mediante la técnica de escritura por láser pulsado. El arreglo consta de 71 guías separadas por  $23 \mu\text{m}$ , y una longitud de propagación de 10 cm. Las guías tienen un perfil de índice de refracción elíptico,

con ejes de  $12 \mu\text{m}$  y  $4 \text{ mm}$ , respectivamente. El acoplamiento de luz en el arreglo se consigue enfocando un haz láser con longitud de onda de  $637 \text{ nm}$  en una sola guía de onda, por lo que inicialmente se tiene una excitación *single-site*. En la salida del vidrio que contiene las guías, registramos el perfil de intensidad final o *output* mediante una cámara CCD. El montaje experimental se muestra en la figura 5.4.

Las distribuciones de intensidad obtenidas para ambas polarizaciones  $H$  y  $V$  corresponden a los perfiles esperados característicos de la difracción discreta, como mostramos en la figura 5.5 (a). Si la guía de entrada corresponde al sitio  $n = 0$ , la amplitud del campo en cada guía, después de propagarse una distancia  $z$ , está dada por

$$u_n^\sigma(z) \propto i^n J_n(2C^\sigma z),$$

donde  $J_n$  es la función de Bessel de  $n$ -ésimo orden. Este resultado es obtenido al resolver la ecuación (5.8) con un solo sitio excitado como condición inicial.

Luego, nuestro experimento nos permite medir el perfil de salida a la distancia  $z_f = 10 \text{ cm}$ , y, comparando con el perfil teórico, determinar  $C^\sigma$ . Para realizar esta comparación, requerimos que la solución analítica corresponda a una distribución continua, por lo cual asociamos un perfil gaussiano del campo en cada guía, cuyo ancho entrega aproximadamente la misma potencia que los modos reales (esta aproximación es plausible, ya que los perfiles del modo fundamental obtenidos en la sección anterior exhiben un decaimiento exponencial, que implica una distribución de potencia semejante al de una función gaussiana). Así obtenemos una expresión continua para el campo transversal  $U^\sigma(x, z_f)$ , la cual, como puede verse en la figura 5.5 (a), permite una buena correspondencia con los resultados experimentales.

Optimizando el ajuste, obtenemos una constante de acoplamiento igual a  $(0.223 \pm 0.001) \text{ cm}^{-1}$  para luz con polarización  $H$ , y  $(0.112 \pm 0.001) \text{ cm}^{-1}$  para polarización



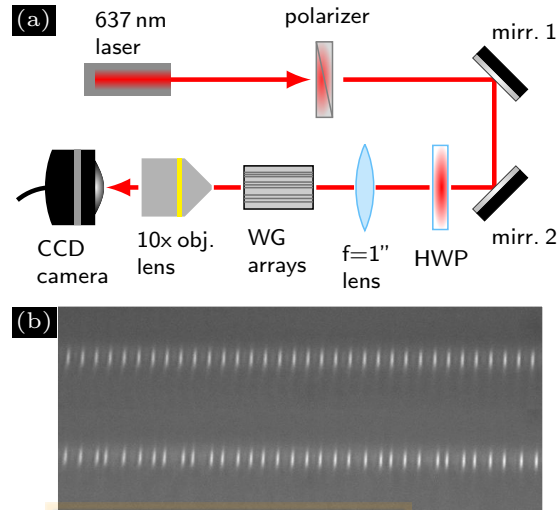


Figura 5.4: Montaje experimental (a) Un láser de 637 nm con polarización definida es enfocado en uno de los arreglos de guías de ondas contenido en una muestra de silicio fundido. El perfil final a la salida del vidrio es amplificado con un lente objetivo de  $10\times$  para ser proyectado posteriormente en una cámara CCD. (b) Imagen de microscopio de la cara frontal de dos arreglos de guías de ondas, uno ordenado (arriba) y otro desordenado (abajo). Fuente: Elaboración propia.

V. Los errores en estos valores se obtuvieron minimizando la *norma-2 cuadrada de los residuos*, implementada en Matlab. Así, encontramos un cociente cercano a 2 entre las constantes de acoplamiento obtenidas con luz horizontal y vertical, lo que se manifiesta en el ensanchamiento de los perfiles de intensidad correspondientes. Una vez conocidas las constantes de acoplamiento, podemos estimar el contraste de índice de refracción  $\Delta n$  entre la envolvente y el núcleo que permite reproducirlas [a través de la expresión (5.7)]. Es decir,  $\Delta n$  es el parámetro de ajuste en nuestro modelo, que en nuestro caso resulta ser igual a

$$\Delta n = 9.37 \times 10^{-4}, \quad (5.9)$$

un valor que se encuentra dentro del rango de valores anteriormente reportados en la literatura. Con este valor, obtenemos concordancia entre las constantes teóricas

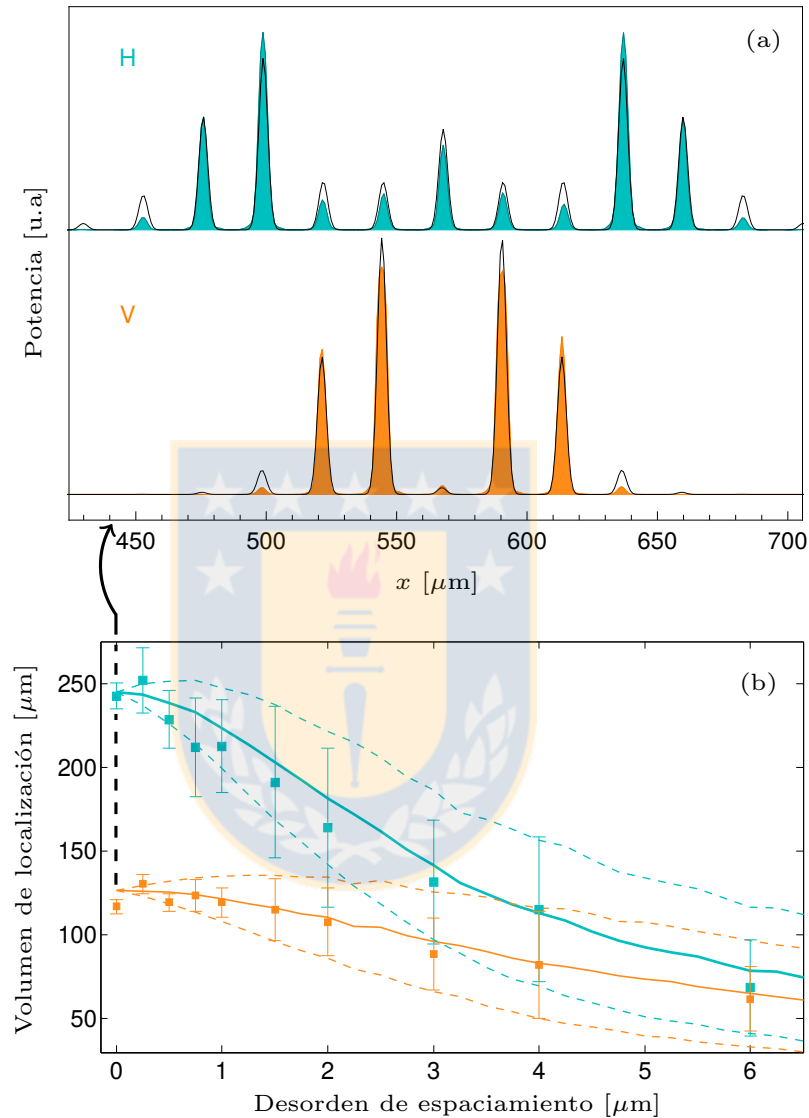


Figura 5.5: (a) Perfiles finales obtenidos para un arreglo ordenado. Las regiones coloreadas corresponden a los datos experimentales, mientras que las líneas negras son los resultados teóricos correspondientes a la ecuación (5.8). (b) Volumen de localización final promediado, en función del grado de desorden: las líneas continuas corresponden a la teoría y los cuadrados a los datos experimentales. Las líneas discontinuas y las barras muestran la desviación estándar de los resultados teóricos y los experimentales, respectivamente. En todos los gráficos el color azul (naranja) corresponde a polarización  $H$  ( $V$ ). Fuente: Elaboración propia.

y experimentales (ver los puntos en las curvas de la figura 5.3 correspondientes a la separación  $23 \mu\text{m}$ ). Como indicamos anteriormente, nuestros resultados teóricos han sido obtenidos bajo el supuesto de que las guías son *step-index*. Las guías de ondas reales tienen un perfil continuo — aunque abrupto, por lo que nuestro valor  $\Delta n$  es una buena aproximación para el contraste entre el valor central del núcleo y el de la envolvente.

### 5.3.2. Arreglos desordenados

Ahora consideramos el caso en que la constante de acoplamiento depende tanto de la polarización  $\sigma$  como del par de sitios acoplados,  $n$  y  $n'$ . Si la separación entre los sitios vecinos (y asimismo el valor de la constante de acoplamiento) varía aleatoriamente a través del arreglo, éste constituye un sistema desordenado. Experimentalmente, esto se consigue durante el proceso de fabricación, variando la separación en un rango  $\bar{s} \pm \epsilon$ , donde  $\bar{s}$  es la separación media, y llamamos *desorden de espaciamiento* al parámetro  $\epsilon$ . Estudiamos el efecto del desorden en la propagación de una excitación que inicialmente es *single-site* y tiene la forma  $u_n^\sigma(0) = \delta_{n,n_0}$ , donde  $n_0$  define la posición *input*. En primer lugar, resolvemos numéricamente el conjunto de ecuaciones (5.8) hasta una distancia final  $z_f = 10$  cm. Para cada grado de desorden, promediamos los perfiles resultantes usando 1000 realizaciones diferentes, esto es, 1000 distribuciones de separaciones diferentes.

El parámetro que utilizamos para caracterizar la extensión de los perfiles finales es el *volumen de localización* definido como

$$V_c \equiv \sqrt{12m_2} + 1, \quad (5.10)$$

donde  $m_2$  es el *segundo momento* del perfil, dado por

$$m_2 \equiv \frac{\int (x - \bar{x})^2 |U^\sigma(x, z_f)|^2 dx}{\int |U^\sigma(x, z_f)|^2 dx}, \quad (5.11)$$

con  $\bar{x} \equiv \int x |U(x)|^2 dx$ . El parámetro  $V_c$  cuantifica la distancia entre las *colas* exponenciales del perfil, y puede ser calculado directamente a partir de los datos numéricos y experimentales. El resultado teórico, representado por líneas continuas en la figura 5.5 (b), muestra un decaimiento del volumen de localización al incrementar el grado de desorden, para ambas polarizaciones. Independientemente, estos resultados concuerdan con el comportamiento conocido para redes desordenadas, a saber, una atenuación de la difusión al incrementar la variación de las separaciones entre guías, manifestación de la *localización de Anderson*, que domina la dinámica cuando el grado de desorden es alto [23, 77, 78]. En consecuencia, la diferenciación de ambas polarizaciones lineales es más notable en la cadena ordenada, debido a la tasa de dispersión de los lóbulos en el perfil de difracción discreta.

Como señalamos anteriormente, el desorden es introducido en las realizaciones experimentales mediante la variación del espaciamiento entre guías de ondas vecinas. utilizamos un conjunto de nueve tipos de arreglos, en que el espaciamiento varía en el rango  $23 \pm \epsilon \mu\text{m}$ , con  $\epsilon = (0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.5, 2, 3, 4, 6) \mu\text{m}$  [por ejemplo, ver la figura 5.4(b)]. Esto nos permite estudiar el efecto de desorden débil, intermedio y fuerte, los que son claramente distinguibles en el contexto de la óptica no lineal [79, 80]. Siguiendo el método estándar (cfr. [23]), usamos 40 guías distintas de cada arreglo como entrada, con el fin de realizar un análisis estadístico conclusivo. Los símbolos en la figura 5.5 (b) muestran el volumen de localización promedio correspondientes a los perfiles de salida experimentales. Observamos cómo la diferencia en el volumen de localización de los pulsos  $H$  y  $V$  disminuye al incrementar el grado de desorden,

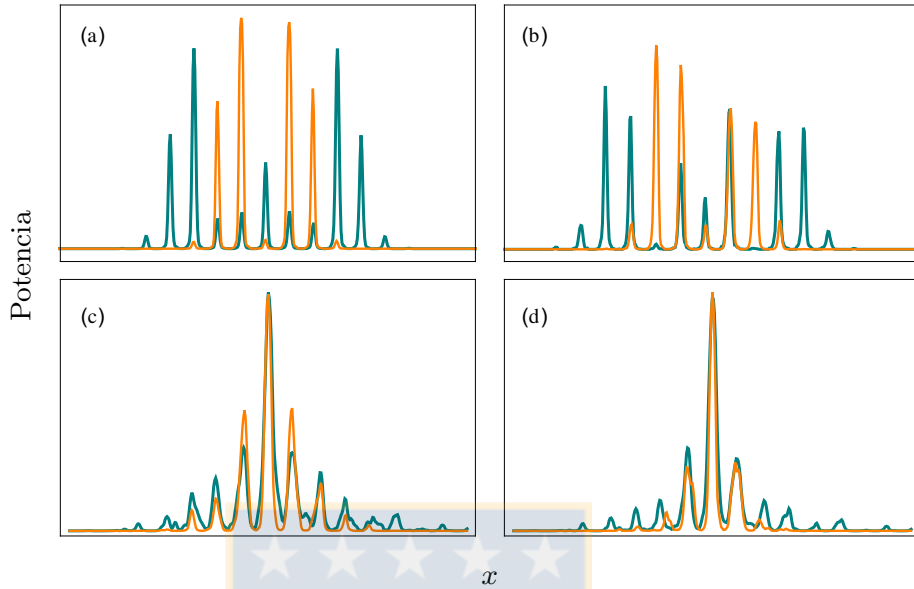


Figura 5.6: Promedio de la potencia final medida a la salida de los arreglos, para luz con polarización  $H$  (línea azul) y  $V$  (línea naranja). (a) Caso ordenado. (b) Desorden de espaciamiento  $\epsilon = 0.75 \mu\text{m}$ . (c)  $\epsilon = 3 \mu\text{m}$ . Nótese el decaimiento exponencial a ambos lados de los perfiles. (d)  $\epsilon = 6 \mu\text{m}$ . En estos casos, el decaimiento es más marcado y similar para ambas polarizaciones. Fuente: Elaboración propia.

poniendo de manifiesto la localización de Anderson. Este fenómeno se manifiesta claramente en el decaimiento exponencial de los perfiles de intensidad finales, que podemos apreciar en la figura 5.6. Los diagramas de  $V_c$  vs. grado de desorden indican que nuestra descripción analítica es correcta, pues se tiene una clara correspondencia entre los resultados teóricos y experimentales. Cuantificamos la calidad del ajuste mediante el cuadrado de la distancia euclidiana normalizada que resulta ser 0.006 and 0.009 para las curvas  $H$  y  $V$  respectivamente (una distancia nula corresponde a un ajuste perfecto, mientras que el valor 1 implica que no existe correlación).

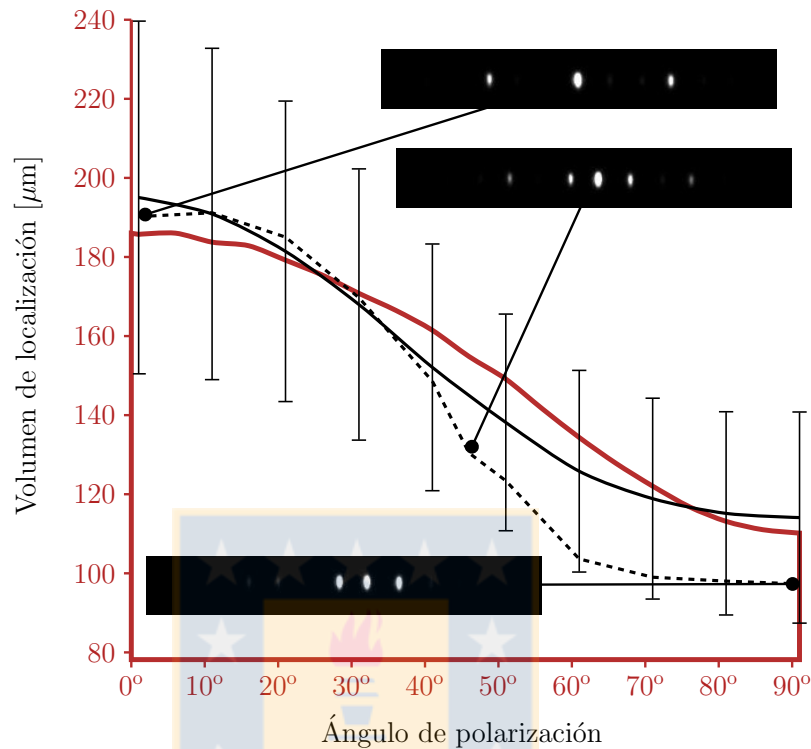


Figura 5.7: Volumen de localización en función del ángulo de polarización para un grado de desorden  $\epsilon = 2 \mu\text{m}$ . La línea negra continua describe los resultados experimentales promediados. La línea discontinua y los insertos muestran datos experimentales correspondientes a una realización particular. La línea gruesa en rojo muestra los resultados teóricos promediados sobre 1000 realizaciones. Fuente: Elaboración propia.

## 5.4. Aplicaciones

A continuación presentamos dos posibles aplicaciones de los resultados obtenidos anteriormente. La primera es una consecuencia directa de las diferencias observadas en el volumen de localización para las polarizaciones  $H$  y  $V$ , que puede aplicarse a cualquier implementación experimental que requiera control del régimen de propagación *sobre la marcha*. La segunda, en tanto, consiste en la implementación de un *polarizing beam splitter* mediante un arreglo de dos guías solamente, el que puede ser

de utilidad en muchos circuitos fotónicos integrados, para protocolos de comunicación tanto clásica como cuántica.

### 5.4.1. Control del volumen de localización

En la sección anterior observamos una clara diferencia en la propagación de pulsos con polarización horizontal y vertical. Esto sugiere la posibilidad de controlar el volumen de localización a la salida del arreglo mediante el ajuste del vector de polarización del haz incidente. A fin de caracterizar este efecto, iluminamos una guía en diferentes muestras (es decir, con distintos grados de desorden y en distintas posiciones para cada arreglo), y variamos el ángulo de polarización desde  $0^\circ(H)$  a  $90^\circ(V)$ . Al promediar, observamos una transición suave del volumen de localización para desorden débil e intermedio. Un ejemplo ilustrativo se presenta en la figura 5.7. Vemos ahí que con polarización horizontal ( $0^\circ$ ), el perfil final se compone de excitaciones en tres sitios separados, donde el central corresponde a la guía de entrada y los dos laterales están situados a 3 sitios de aquél (ver inserto superior en la figura 5.7). A medida que la polarización rota, la amplitud de las excitaciones laterales se atenúa suavemente, y la luz comienza a mantenerse enfocada más cerca del centro. Por ejemplo, para  $\theta = 45^\circ$ , observamos una distribución más uniforme debido a la excitación de dos sitios próximos a la guía central (ver inserto en el medio de la figura 5.7). Este perfil corresponde a una combinación lineal de estados con polarización  $H$  y  $V$ . Finalmente, para polarización  $V$  ( $\theta = 90^\circ$ ), el estado se compone de tres guías contiguas excitadas con aproximadamente la misma amplitud, donde la guía central sigue correspondiendo a la guía de entrada (inserto en el fondo de la figura 5.7). Así, en este caso particular fue posible variar el volumen de localización hasta

aproximadamente la mitad del que se tenía con la distribución inicial polarizada horizontalmente.

#### 5.4.2. Diseño de un *polarizing beam splitter*

Ahora aplicamos nuestro modelo a un sistema compuesto únicamente por dos guías de ondas cercanas, esto es, un dímero o acoplador direccional. En este caso, cuando se introduce luz en una guía, la potencia se transfiere periódicamente de una guía a la otra, a una tasa dada por la correspondiente constante de acoplamiento. Es decir, la transmitancia depende directamente de la constante de acoplamiento. De este modo, si contamos con un valor apropiado de las constantes  $C^H$  y  $C^V$ , es posible que después de cierta longitud de propagación, la luz con una de las dos polarizaciones se concentre solamente en una guía de ondas; y la luz con polarización opuesta, en la otra. Esta idea se ha usado anteriormente para construir *polarizing beam splitters* (PBS) [75,81]. Ahora queremos mostrar que con el análisis de la sección 5.1, es posible encontrar una configuración geométrica adecuada para fabricar un PBS con alta tasa

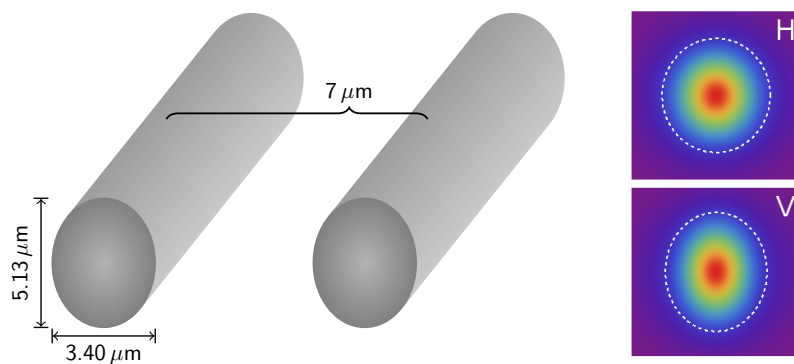


Figura 5.8: Configuración de dos guías de ondas para producir un PBS compacto, balanceado y determinista. Mostramos en gráficos de densidad los respectivos perfiles transversales del campo eléctrico con polarización  $H$  y  $V$ . Fuente: Elaboración propia.



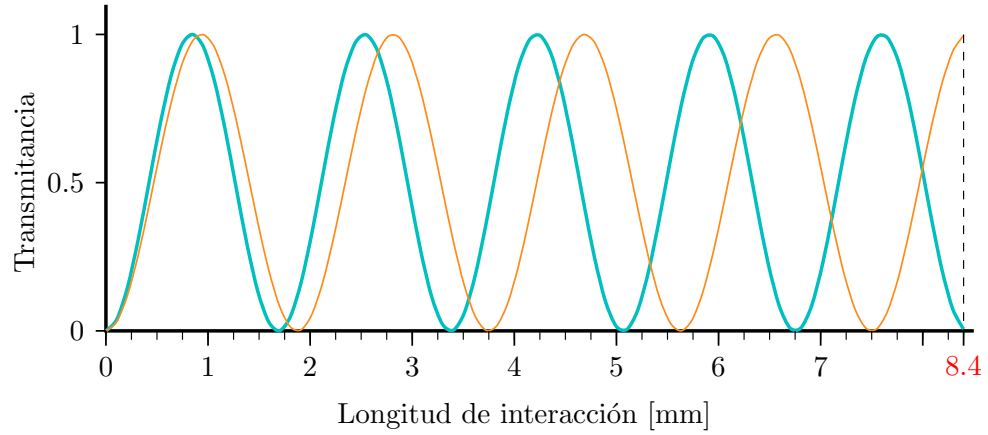


Figura 5.9: Transmitancia de luz con polarización  $H$  (línea azul gruesa) y  $V$  (línea naranja delgada) a lo largo del sistema de guías propuesto como PBS. Fuente: Elaboración propia.

de separación y una longitud de interacción (en que puede producirse acoplamiento evanescente) del orden de milímetros.

Para diseñar un PBS estudiamos la transmitancia  $T_\sigma$  de una guía a la otra. Ésta es función de la constante de acoplamiento  $C_\sigma$  y de la longitud de interacción  $L$ :

$$T_\sigma = \sin^2(C_\sigma L), \quad (5.12)$$

donde  $\sigma = H, V$ . (Para describir algunos sistemas en que las guías, inicialmente distantes, son acercadas adiabáticamente mediante una sección curva, debe añadirse un término en el argumento de la función seno en la expresión anterior.) Con el fin de obtener separación completa de las componentes  $H$  y  $V$  del haz propagado, debe cumplirse la condición siguiente:

$$\frac{C_V}{C_H} = \frac{m}{2n}, \quad (5.13)$$

donde  $m$  es impar y  $n$  es entero. Luego, la longitud de interacción correspondiente es dada por  $L_{\text{split}} = \pi n / C_H$ , y nuestro propósito es buscar valores de las constantes que la minimicen. En un caso real, el cociente  $C_V / C_H$  difiere de la expresión racional

en la ecuación (5.13) por un término de error  $\delta$ . De la ecuación (5.12), podemos ver que hasta primer orden, el término de error se propagará linealmente al evaluar la transmitancia. Entonces, obtenemos la configuración óptima fijando el error en un valor máximo  $\delta = 5 \times 10^{-4}$  y variando la separación y elipticidad de las guías que componen el dímero. Encontramos que si utilizamos guías con sección transversal de semiejes  $1.70 \mu\text{m}$  y  $2.56 \mu\text{m}$  separadas transversalmente por  $7 \mu\text{m}$  (ver figura 5.8), obtenemos constantes de acoplamiento  $C_H = 1.8609 \text{ mm}^{-1}$  y  $C_V = 1.6754 \text{ mm}^{-1}$ , lo que permite separar los haces con polarización  $H$  y  $V$  usando una longitud de interacción de sólo  $8.4 \text{ mm}$ . Esto es consistente con los resultados reportados anteriormente en las referencias [75, 81].

### 5.4.3. Consideraciones adicionales

La idea de fabricar un PBS haciendo uso de las diferencia en las constantes de acoplamiento para luz con polarización ha sido propuesta anteriormente por Crespi *et. al.* en su trabajo de 2011 [75], aunque con diferencias importantes en su planteamiento. En primer lugar, su propuesta considera una concatenación de tres acopladores direccionales con una longitud de interacción entre  $5.6$  y  $8.2 \text{ mm}$ , cada uno de los cuales actúa como un divisor de haz parcial (*partial beam splitter*). En conjunto, el montaje actúa como un PBS para estados fotónicos, aunque a costa de volverse probabilístico. Es decir, los fotones pueden emerger por uno de cuatro puertos de salida. Además, dado que se requieren secciones curvas para acercar las guías a las distintas regiones de interacción, la longitud total del montaje se incrementa, lo que no es deseable para su integración en circuitos fotónicos. Ahora bien, a partir de la información disponible en su artículo, deducimos que las constantes de acoplamiento en su sistema son  $C_H = 1.17 \text{ cm}^{-1}$  y  $C_V = 1.06 \text{ cm}^{-1}$ , de modo que un *polarizing*

*beam splitter* determinista como el que propusimos en la sección anterior requeriría una longitud de interacción de alrededor de 1.04 m.

Pero más importante es destacar que la interpretación de la diferencia en las transmitancias es diferente a la nuestra. Los autores asumen que las constantes difieren debido a una birrefringencia residual en las guías de ondas, esto es, una diferencia  $\Delta\beta$  entre las constantes de propagación correspondiente a cada polarización. Sin embargo, las guías que se utilizan en su experimento, escritas en vidrio de borosilicato, no tienen birrefringencia apreciable debido al material, como se señala en el mismo artículo. De modo que la única posibilidad sería que existiera una birrefringencia geométrica importante debido a la distinta elipticidad de los perfiles  $H$  y  $V$ , que hemos descrito en este capítulo. Para nuestras guías, hemos calculado la birrefringencia geométrica  $\Delta\beta$  siguiendo dos métodos diferentes, presentados en las referencias [82, 83], obteniendo en ambos casos un valor  $\Delta\beta \sim \times 10^{-6} \mu\text{m}^{-1}$ , esto es, siete órdenes de magnitud menos que la aproximación de orden cero  $\tilde{\beta} \sim 10 \mu^{-1}$ . Luego, cualquier efecto proveniente de esta diferencia no podría ser observado con la longitud de interacción usada en nuestro experimento, por lo que consideramos que la birrefringencia residual puede ser ignorada, en comparación al fuerte efecto que tiene la diferencia en los perfiles.

# Conclusiones generales

El trabajo precedente da una muestra de los muchos conceptos y posibilidades que ofrece el estudio de excitaciones localizadas en sistemas discretos. Esta diversidad se manifiesta tanto en los diferentes mecanismos que las producen, como en las características que adquieren en cada contexto.

Examinamos en primer lugar un condensado de Bose-Einstein atrapado en un potencial óptico periódico — que permite su descripción como un sistema discreto, y cuyos átomos tienen un momento dipolar magnético. Al añadir un campo magnético externo, es posible excitar una interacción dipolar entre los átomos, de un alcance mucho mayor que su interacción de contacto. La libertad para variar la orientación e intensidad del campo se traduce en una amplia gama de regímenes para la interacción atómica dipolar, pudiendo esta última pasar de ser repulsiva a atractiva, lo que afecta la existencia y propiedades de los modos de oscilación localizados. En particular, el número de átomos requerido para la generación de una solución localizada estable, varía con la magnitud de la interacción dipolar. Asimismo, hemos visto que para interacciones repulsivas (representadas por términos no lineales positivos en la ecuación diferencial) existe una región en el espacio de parámetros donde dos modos fundamentales son simultáneamente estables. Esto marca una diferencia notable respecto al caso unidimensional [48], en que dos soluciones pueden ser simultáneamente inestables. La correcta predicción de la estabilidad de las soluciones entregada por

el potencial efectivo (hamiltoniano en función de la posición) confirma la validez de este método incluso en presencia de interacciones no lineales de largo alcance.

Si bien los BECs dipolares constituyen un campo de estudio por sí mismo, también sirven como herramientas para múltiples aplicaciones. La movilidad de soluciones colectivas localizadas, observada en nuestro análisis, tiene aplicaciones para el estudio de los efectos macroscópicos de la coherencia propia de un BEC<sup>1</sup>. Además, los átomos neutros atrapados en redes ópticas han sido propuestos anteriormente como candidatos para la realización de un computador cuántico [84, 85]; es esperable que el amplio rango de ajuste ofrecido por las interacciones dipolares sea de utilidad en este contexto.

En segundo lugar nos centramos en ciertos arreglos de guías de ondas con una geometría particular (en la disposición transversal de sus guías). La reinterpretación de la amplitud del campo eléctrico en cada guía como un operador cuántico nos permitió interpretar correctamente el efecto de la geometría en la localización de los estados, y deducir así la forma general de los autoestados cuánticos en una de las redes estudiadas (red romboidal). Comprobamos que estos autoestados forman una banda plana con el mismo autovalor que el caso clásico. Este y los demás resultados del capítulo 4 pueden ser generalizados para otros sistemas con bandas planas, como hicimos para el ejemplo particular de la red *stub*.

Al analizar el entrelazamiento de los autoestados no difractantes, la principal dificultad está dada por las generalizaciones de múltiples conceptos necesarios para su estudio. Por una parte, en la red romboidal estudiamos estados con más de un fotón, lo que requirió extender las medidas de entrelazamiento definidas para qubits a sistemas de mayor dimensión. En este caso, sin embargo, la descomposición

---

<sup>1</sup>Cfr. [5], pp. 209-211 y sus referencias.

de Schmidt está definida sin ambigüedad, permitiéndonos establecer claramente que los estados  $|\psi\rangle_N$  son entrelazados. Con respecto a la cuantificación de este entrelazamiento, sin embargo, obtuvimos resultados interesantes, ya que tanto los valores de la concurrencia como la descomposición de Schmidt apuntan a que se trata de estados máximamente entrelazados. Por otra parte, la negatividad, si bien es siempre mayor que cero y exhibe un decaimiento lento, se aleja de su valor máximo a medida que aumentamos el número de fotones. Se sigue, entonces, que la concurrencia y el número de Schmidt son medidas más conclusivas para medir el entrelazamiento — en concordancia con la literatura [62, 86] — aunque su definición nos parece un poco menos intuitiva que la negatividad, que se relaciona estrechamente con el criterio de Peres-Horodecki [68]. Otras medidas de entrelazamiento para sistemas bipartitos podrían ser generalizadas para el estudio de nuestros autoestados localizados (como la entropía de entrelazamiento) si bien su relación con la concurrencia o la negatividad nos lleva a esperar resultados similares. Con respecto a la clasificación de los autoestados entrelazados de la red *stub*, una extensión de este trabajo sería la aplicación del concepto de *tangles* [71] para precisar el entrelazamiento *de a pares* que encontramos al estudiar los estados reducidos. Como última consideración sobre el entrelazamiento, quisieramos destacar que los estados coherentes separables — representación de los haces de luz clásica utilizados en experimentos — son superposición de infinitos autoestados no difractantes entrelazados. Este resultado nos parece interesante por sí mismo, y porque podría entregar un criterio para distinguir el régimen cuántico del clásico en propagación de estados de luz.

Como una contribución práctica al estudio de los autoestados no difractantes, hemos diseñado un método factible para su preparación experimental (sección 4.6). La versatilidad del procedimiento actual para la construcción de arreglos de guías

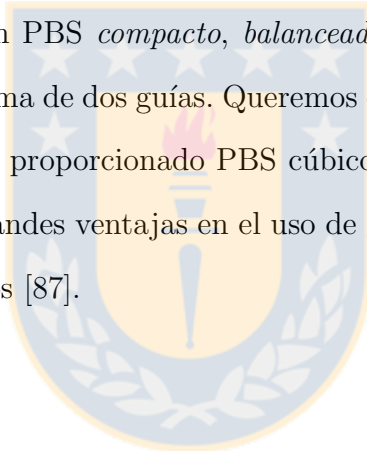
de ondas se extiende a la propuesta particular que hemos presentado aquí. En efecto, dado que el método de preparación que proponemos es completamente *on chip*, puede mejorar la estabilidad en todas las aplicaciones que requieran combinaciones precisas de los modos localizados (como por ejemplo la transmisión de imágenes y su aplicación en llaves ópticas [14]), a la vez que permite su integración en montajes experimentales más complejos. Aunque las posibilidades ofrecidas por los correspondientes estados cuánticos no han sido exploradas todavía, es esperable que en el futuro cercano la capacidad de propagar estados cuánticos compuestos por múltiples excitaciones, preservando su entrelazamiento y localización espacial, encuentre aplicaciones en diversos protocolos de información cuántica. Además, la propuesta experimental presentada en la sección 4.6 puede ser extendida de forma directa a las demás geometrías que han sido estudiadas experimentalmente hasta ahora.

Finalmente, buscamos caracterizar el efecto que la dirección de polarización lineal tiene sobre el perfil transversal de los modos normales en una guía de ondas elíptica. Reinterpretando los términos en la aproximación *weakly guiding* (que constituye el marco teórico fundamental para el estudio de modos linealmente polarizados) pudimos introducir una corrección al campo eléctrico transversal que da cuenta de la diferencia entre los modos fundamentales con polarización horizontal y vertical. Con los resultados obtenidos para las formas modales, pudimos calcular la constante de acoplamiento, que en nuestro caso es dos veces mayor para luz con polarización horizontal. En el futuro queremos extender este método para encontrar los modos dependientes en polarización de orden superior.

La plausibilidad de nuestras correcciones se mostró al utilizar los resultados anteriores para simular la dinámica de excitaciones (inicialmente localizadas) a lo largo de arreglos de guías de ondas desordenados, que estudiamos también experimen-

talmente. Encontramos que la tendencia descrita por la teoría exhibía una clara correspondencia con los resultados experimentales. Para grados de desorden en que la localización de Anderson no es tan fuerte, mostramos la posibilidad de modificar la extensión transversal del perfil de salida, cambiando la dirección de polarización. Esto entrega una herramienta de ajuste que modifica *sobre la marcha* la propagación de excitaciones en arreglos de guías de ondas.

Con las estimaciones proporcionadas por nuestro modelo, encontramos una configuración geométrica razonable (en cuanto a las dimensiones y separación entre las guías) para construir un PBS *compacto, balanceado, y determinista* a partir de un dímero, esto es, un sistema de dos guías. Queremos destacar que aunque actualmente la óptica *del bulk* ya ha proporcionado PBS cúbicos cuyo volumen es de aproximadamente  $5 \text{ mm}^3$ , hay grandes ventajas en el uso de guías de ondas para implementar estos y otros dispositivos [87].





# Apéndice A

Derivación de las ecuaciones vectoriales para los campos en una guía de ondas.



A continuación presentamos la derivación detallada de las ecuaciones vectoriales que rigen la dinámica del campo eléctrico y magnético en guías de onda con un perfil de índice de refracción arbitrario. Nos basamos en dos ecuaciones de Maxwell, asumiendo la misma dependencia temporal  $e^{i\omega t}$  para todos los campos:

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}k \mathbf{H}, \quad (\text{A.1a})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} - i\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}kn^2 \mathbf{E}, \quad (\text{A.1b})$$

Además, es necesario tener en cuenta las siguientes identidades, válidas para cualquier campo vectorial  $\mathbf{A}$  y cualquier campo escalar  $\phi$ :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (\text{A.2a})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0, \quad (\text{A.2b})$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \phi(\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla \phi \times \mathbf{A}. \quad (\text{A.2c})$$

Nuestro objetivo es eliminar la dependencia ya en  $\mathbf{E}$ , ya en  $\mathbf{H}$  de las correspondientes ecuaciones de Maxwell. En primer lugar, calculamos el rotor de ambos miembros en la ecuación de Faraday (A.1a), con lo que se obtiene

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = i\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}k \nabla \times \mathbf{H}. \quad (\text{A.3})$$

Sustituyendo el rotor de la excitación magnética con la ecuación de Maxwell-Ampère (A.1b), y utilizando la identidad (A.2a), describimos la expresión anterior para obtener

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = i\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}k \left( \mathbf{J} - i\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}kn^2 \mathbf{E} \right),$$

de donde se sigue que

$$(\nabla^2 + k^2 n^2) \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - i\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}k \mathbf{J}. \quad (\text{A.4})$$

Sólo resta evaluar el término  $\nabla \cdot \mathbf{E}$ . Para esto, operamos con la divergencia sobre la ecuación (A.1b), lo que junto a la identidad vectorial (A.2b) implica la igualdad siguiente:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} - i\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}k(n^2\nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla n^2) = 0,$$

de donde podemos despejar

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -i\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{kn^2} - \mathbf{E} \cdot \nabla \log n^2.$$

Sustituyendo en la ecuación (A.4) obtenemos finalmente

$$(\nabla^2 + k^2n^2)\mathbf{E} = -\nabla(\mathbf{E} \cdot \nabla \log n^2) - i\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\left[k\mathbf{J} + \frac{1}{k}\nabla\left(\frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{n^2}\right)\right]. \quad (\text{A.5})$$

Ahora bien, para derivar la ecuación vectorial para el campo magnético comenzamos aplicando el rotor a la ecuación de Maxwell-Ampère (A.1b):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} - i\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}k\nabla \times (n^2\mathbf{E}). \quad (\text{A.6})$$

De esta ecuación y las igualdades (A.2) se sigue que

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} - i\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}k(n^2\nabla \times \mathbf{E} + \nabla n^2 \times \mathbf{E}).$$

Utilizando la expresión para  $\nabla \times \mathbf{E}$  dada por la ley de Faraday (A.1a) obtenemos

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} + k^2n^2\mathbf{H} - i\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}k\nabla n^2 \times \mathbf{E}. \quad (\text{A.7})$$

Luego, como  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ , se cumple que

$$(\nabla^2 + k^2n^2)\mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J} + i\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}k\nabla n^2 \times \mathbf{E}. \quad (\text{A.8})$$

Despejando  $\mathbf{E}$  de la ecuación (A.1b) y reemplazando en la ecuación anterior llegamos a la igualdad siguiente:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2n^2)\mathbf{H} &= -\nabla \times \mathbf{J} + \frac{\nabla n^2}{n^2} \times (\mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{H}) \\ &= -\nabla \times \mathbf{J} + \nabla \log n^2 \times (\mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{H}). \end{aligned}$$

Invirtiendo el orden del producto vectorial en el último término de la ecuación anterior, se obtiene la ecuación vectorial para el campo  $\mathbf{H}$ :

$$(\nabla^2 + k^2 n^2)\mathbf{H} = (\nabla \times \mathbf{H}) \times \nabla \log n^2 - \nabla \times \mathbf{J} - \mathbf{J} \times \nabla \log n^2. \quad (\text{A.9})$$

Es importante notar que para el caso de un índice de refracción invariante en la dirección de propagación, los factores  $\nabla \log n^2$  en las ecuaciones vectoriales (A.5) y (A.9) pueden reemplazarse directamente por  $\nabla_t \log n^2$ , con lo que recuperamos la forma exacta de las ecuaciones presentadas en el capítulo 2.



# Referencias

- [1] S. Ghosh y G. Kar, editores, *Recent Developments in Theoretical Physics* (World Scientific Publishing, 2010).
- [2] P. G. Kevrekidis, *The Discrete Nonlinear Schrödinger Equation: Mathematical Analysis, Numerical Computations and Physical Perspectives* (Springer-Verlag, 2009).
- [3] H. J. Metcalf y P. van der Straten, *Laser cooling and trapping* (Springer-Verlag, 1999).
- [4] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii y S. Stringari, *Reviews of Modern Physics* **71**, 463 (1999).
- [5] O. Morsh y M. Oberthaler, *Reviews of Modern Physics* **78**, 179 (2006).
- [6] K. B. Davis, M. O. Mewes, N. J. Andrews, M. R. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn y W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [7] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman y E. A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
- [8] A. Griesmaier, J. Werner, S. Hensler, J. Stuhler y T. Pfau, *Physical Review Letters*. **94**, 160401 (2005).

- [9] B. Fröhlich, *Strong Dipolar Effects in a Chromium Bose-Einstein Condensate*, Tesis Doctoral, Universität Stuttgart (2007).
- [10] T. Lahaye, C. Menotti, L. Santos, M. Lewenstein y T. Pfau, Report on Progress in Physics **72**, 12 (2009).
- [11] A. Perez-Lejía, R. Keil, A. Kay, H. Moya-Cessa, S. Nolte, L. C. Kwek, B. M. Rodríguez-Lara, A. Szameit y D. N. Christodoulides, Physical Review A **87**, 012309 (2013).
- [12] W. Krolikowski y Y. S. Kivshar, Journal of the Optical Society of America B **13**, 876 (1996).
- [13] D. N. Christodoulides, F. Lederer y Y. Silberberg, Nature **424**, 817 (2003).
- [14] R. A. Vicencio y C. Mejía-Cortés, Journal of Optics **16**, 015706 (2014).
- [15] J. Meier, G. I. Stegeman, D. N. Christodoulides, R. Morandotti, G. Salamo, H. Yang, M. Sorel, Y. Silberberg y J. S. Aitchinson, Optics Letters **30**, 3174 (2005).
- [16] S. Longhi, Laser & Photon Rev. **3**, 243 (2009).
- [17] A. Szameit y S. Nolte, Journal of Physics B **43**, 163001 (2010).
- [18] F. Lederer, G. I. Stegeman, D. N. Christodoulides, G. Assanto, M. Segev y Y. Silberberg, Physics Reports **463**, 1 (2008).
- [19] R. A. Vicencio, C. Cantillano, L. Morales-Inostroza, B. Real, C. Mejía-Cortés, S. Weinmann y M. I. Molina, Physical Review Letters. **114**, 245503 (2015).

- [20] S. Mukherjee, A. Spracklen, D. Choudhury, N. Goldman, P. Öhnberg, E. Anderson y R. R. Thomson, *Physical Review Letters*. **114**, 245504 (2015).
- [21] P. W. Anderson, *Physical Review* **109**, 5 (1958).
- [22] T. Pertsch, U. Peschel, J. Kobelke, K. Schuster, H. Bartelt, S. Nolte, A. Tünnermann y F. Lederer, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 5 (jul. 2004).
- [23] Y. Lahini, A. Avidan, F. Pozzi, M. Sorel, R. Morandotti, D. N. Christodoulides y Y. Silberberg, *Physical Review Letters* **100**, 013906 (2008).
- [24] Y. Lahini, R. Pugatch, F. Pozzi, M. Sorel, R. Morandotti, N. Davidson y Y. Silberberg, *Physical Review Letters* **103**, 013901 (jun. 2009).
- [25] L. Guidoni, C. Triché, P. Verkerk y G. Grynberg, *Physical Review Letters* **79**, 3363 (nov. 1997).
- [26] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer y A. Aspect, *Nature* **453**, 891 (jun. 2008).
- [27] A. W. Snyder y J. Love, *Optical Waveguide Theory* (Springer-Verlag, 1983).
- [28] A. W. Snyder y W. R. Young, *Journal of the Optical Society of America* **68**, 297 (1978).
- [29] J. D. Jackson (1975).
- [30] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc y G. Grynberg, *Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics* (John Wiley & Sons, 1989).
- [31] I. Bloch, *Nature* **1**, 23 (2005).

- [32] M. Lu, S. H. Youn y B. L. Lev, *Physical Review Letters*. **104**, 063001 (2010).
- [33] M. Lu, N. Q. Burdick, S. H. Youn y B. L. Lev, *Physical Review Letters*. **107**, 190401 (2011).
- [34] G.-P. Zheng, *Journal of Physics B* **40**, 4493 (2007).
- [35] G. Gligorić, A. Maluckov, L. Hadzievski y B. A. Malomed, *Physical Review A* **78**, 063615 (2008).
- [36] G. Gligorić, A. Maluckov, L. Hadzievski y B. A. Malomed, *Physical Review A* **79**, 053609 (2009).
- [37] G. Gligorić, A. Maluckov, L. Hadzievski y B. A. Malomed, *Journal of Physics B* **42**, 145302 (2009).
- [38] J. Cuevas, B. A. Malomed, P. G. Kevrekidis y D. J. Frantzeskakis, *Physical Review A* **79**, 053608 (2009).
- [39] B. B. Baizakov, F. K. Abdullaev, B. A. Malomed y M. Salerno, *Journal of Physics B* **42**, 175302 (2009).
- [40] L. E. Young, P. Muruganandam y S. K. Adhikari, *Journal of Physics B* **44**, 101001 (2011).
- [41] P. Pedri y L. Santos, *Physical Review Letters*. **95**, 200404 (2005).
- [42] I. Tikhonenkov, B. Malomed y A. Vardi, *Physical Review Letters*. **100**, 090406 (2008).
- [43] G. Gligorić, A. Maluckov, M. Stepić, L. Hadzievski y B. A. Malomed, *Physical Review A* **81**, 013633 (2010).



- [44] P. Köberle, D. Zajec, G. Wunner y B. A. Malomed, *Physical Review A* **85**, 023630 (2012).
- [45] S. Flach, K. Kladko y R. S. MacKay, *Physical Review Letters*. **78**, 1207 (1997).
- [46] R. A. Vicencio y M. Johansson, *Physical Review E* **73**, 046602 (2006).
- [47] U. Naether, R. A. Vicencio y M. Johansson, *Physical Review E* **83**, 036601 (2011).
- [48] S. Rojas-Rojas, R. A. Vicencio, M. I. Molina y F. K. Abdullaev, *Physical Review A* **84**, 033621 (2011).
- [49] M. I. Molina, R. A. Vicencio y Y. S. Kivshar, *Optics Letters* **31**, 1693 (2006).
- [50] C. R. Rosberg, D. N. Neshev, W. Krolikowski, A. Mitchell, R. A. Vicencio, M. I. Molina y Y. S. Kivshar, *Physical Review Letters*. **97**, 083901 (2006).
- [51] U. Naether, R. A. Vicencio y M. Stepić, *Optics Letters* **36**, 1467 (2011).
- [52] S. Mukherjee y R. R. Thomson, *Optics Letters* **40**, 5443 (2015).
- [53] D. Guzmán-Silva, C. Mejía-Cortés, M. A. Bandres, M. C. Rechtsman, S. Nolte, M. Segev, A. Szameit y R. A. Vicencio, *New Journal of Physics* **16**, 063061 (2014).
- [54] P. G. Kevrekidis y V. V. Konotop, *Physical Review E* **65**, 066614 (2002).
- [55] P. G. Kevrekidis, V. V. Konotop, A. R. Bishop y S. Takeno, *Journal of Physics A* **35**, L641 (2002).
- [56] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloe, *Quantum Mechanics* (John Wiley & Sons, 1991).

- [57] S. J. Jones y H. M. Wiseman, *Physical Review A* **84**, 012110 (2011).
- [58] M. Pawłowski y M. Czachor, [quant-ph/0507151](#) .
- [59] H. M. Wiseman y J. A. Vaccaro, [quant-ph/0210002](#) .
- [60] S. J. v. Enk, *Physical Review A* **92**, 064306 (2005).
- [61] G. Vidal y R. F. Werner, *Physical Review A* **65**, 032314 (2002).
- [62] S. Rai y J. R. Luthra, [arXiv:quant-ph/0508045](#) (2005).
- [63] Y. Weinstein, *Physical Review A* **79**, 012318 (2009).
- [64] A. Acín, A. Andrianov, L. Costa, E. Jané, J. I. Latorre y R. Tarrach, *Physical Review Letters*. **85**, 1560 (2000).
- [65] J. Eisert y H. J. Briegel, *Physical Review A* **64**, 022306 (2001).
- [66] C. H. A., A. Higuchi y A. Sudbery, *Journal of Mathematical Physics* **41**, 7932 (2000).
- [67] F. Sokoli y G. Alber, *Journal of Physics A* **47**, 325301 (2014).
- [68] A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods* (Kluwer Academic PublishersKluwer Academic Publishers, 1995).
- [69] D. M. Greenberger, M. Horne y A. Zeilinger (Kluwer Academic PublishersKluwer Academic Publishers, 1989).
- [70] W. Dür, G. Vidal y J. I. Cirac, *Physical Review A* **62**, 062314 (2000).

- [71] P. F. G. Rodríguez y J. R. Luthra, en *American Institute of Physics Conference Series*, editado por S. M. Barnett, E. Andersson, J. Jeffers, P. Öhberg y O. Hirota (2004), Vol. 734 de *American Institute of Physics Conference Series*, pág. 238.
- [72] S. Rojas-Rojas, L. Morales-Inostroza, U. Naether, G. B. Xavier, S. Nolte, A. Szameit, R. A. Vicencio, G. Lima y A. Delgado, *Physical Review A* **90**, 063823 (2014).
- [73] R. Keil, B. Pressl, R. Heilmann, M. Gräfe, G. Weihs y A. Szameit, *Applied Physics Letters* **107**, 241104 (2015).
- [74] D. Gloge, *Applied Optics* **10**, 2252 (1971).
- [75] A. Crespi, R. Ramponi, R. Osellame, L. Sansoni, I. Bongioanni, F. Sciarrino, G. Vallone y P. Mataloni, *Nature Communications* **1570**, 566 (2011).
- [76] L. Sansoni, F. Sciarrino, G. Vallone, P. Mataloni, A. Crespi, R. Ramponi y R. Osellame, *Physical Review Letters*. **108**, 010502 (2012).
- [77] T. Schwartz, G. Bartal, S. Fishman y M. Segev, *Nature* **446**, 52 (2007).
- [78] U. Naether, S. Rojas-Rojas, Martínez, S. Stützer, A. Tünnermann, S. Nolte, M. I. Molina, R. A. Vicencio y A. Szameit, *Optics Express* **21**, 927 (2013).
- [79] R. A. Vicencio y S. Flach, *Physical Review E* **79**, 016217 (2009).
- [80] S. Flach, D. O. Krimer y C. Skokos, *Physical Review Letters* **102**, 024101 (2009).
- [81] L. A. Fernandes, J. R. Grenier, P. R. Herman, J. S. Aitchinson y P. V. S. Marques, *Optics Express* **19**, 11992 (2011).

- [82] W. P. Huang, *Optics Letters* **15**, 1052 (1990).
- [83] A. Kumar y R. K. Varshney, *Optical and Quantum Electronics* **16**, 349 (1984).
- [84] I. H. Deutsch, G. K. Brennen y P. S. Jessen, *Fortschritte der Physik* **48**, 925 (2000).
- [85] D. Jaksch y P. Zoller, *Annals of Physics (New York)* **315**, 52 (2005).
- [86] L. Jiao-Jiao y W. Zhi-Xi, *Chinese Physics B* **19**, 100310 (2010).
- [87] A. Peruzzo, M. Lobino, J. C. F. Matthews, N. Matsuda, A. Politi, K. Poulios, X.-Q. Zhou, Y. Lahini, N. Ismail, K. Wörhoff, Y. Bromberg, Y. Silberberg, M. G. Thomson y J. L. O'Brien, *Science* **329**, 1500 (2010).

