UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE EDUCACIÓN
PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN

EVIDENCIAS DE RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DE ENSEÑANZA MEDIA EN UN COLEGIO DE LA PROVINCIA DE CONCEPCIÓN

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN

Profesor Guía: Magister Fabián Quiroga Merino
Seminaristas: Juan Eduardo González Canales
Claudio Armando Méndez Arriagada
Paulina Elizabeth Serrano Salas
Víctor Manuel Tapia Guerrero

CONCEPCIÓN, 2018

Agradecimientos

Quisiera agradecer a todos quienes me han apoyado o han influido positivamente en cualquier parte del proceso que me lleva hasta este punto. En primer lugar, a mi familia, que siempre han sido el pilar fundamental que me permite contar día a día con un ambiente de amor. Sobre todo, a mi progenitora María Elba Arriada Vilches, cuya comprensión y apoyo logró impulsarme a través del transcurso de mi carrera, que una vez inició por un escarpado camino por las áreas de la ingeniería, y que hoy culmina con la increíble labor docente.

Gracias también a todos los profesores que me han tenido paciencia y que han impulsado el desarrollo de mi pensamiento crítico, que es a mí parecer lo más útil que me han entregado, y que es aquello que justamente permitió el buen avance de esta investigación.

Claudio Armando Méndez Arriagada

Agradezco a mi familia por siempre haberme apoyado, no solo en esta ocasión, si no durante toda mi vida, sobre todo a mis padres Viviana Elizabeth Salas Álvarez y Víctor Miguel Serrano Salas, mis logros son el fruto del amor y el esfuerzo que realizan día a día para darme lo mejor, esto es una pequeña muestra de lo magníficos padres que son.No quiero dejar fuera a los profesores que me han inspirado durante toda mi carrera, y que, a pesar de los malos momentos vividos durante el proceso, con su paciencia y dedicación, han colaborado tremendamente en formar a la profesional que pronto seré.

Paulina Elizabeth Serrano Salas.

Quisiera agradecer a mis seres queridos y polola, Yeruti Cid Cartagena, por el apoyo y la paciencia diaria, por estar ahí para escuchar las ideas o leer lo que se escribe. Agradezco además a cada uno de los profesores que han sido parte de mi vida y que me han enseñado todo lo que sé.

Juan Eduardo González Canales.

Agradecimientos a pareja y familia, por la paciencia que han tenido, por permitirme realizar todo el trabajo sin mayor dificultad a pesar de las muchas veces que deje de lado compromisos o perder muchas oportunidades de compartir con cada uno.

Agradecer, finalmente, a mis compañeros de tesis, por su apoyo, su dedicación y por todo lo realizado, pues su dedicación es única y muchas veces dieron más de lo necesario por este proceso.

Víctor Manuel Tapia Guerrero.

Finalmente agradecemos a nuestro profesor guía Fabián Quiroga, por su paciencia y tiempo dedicado a la asesoría de esta investigación, por ampliar nuestra visión, ayudándonos a mejorar como futuros profesionales capaces de construir y transmitir conocimiento a nuestros futuros estudiantes, y por supuesto, para nosotros mismos.

Todo el equipo.

Tabla de contenido

Resumen

Esta investigación tiene como objetivo diagnosticar el nivel de razonamiento geométrico en estudiantes de primero medio en un colegio de "alto rendimiento", en base a la teoría de Van Hiele. Para ello se estudió tanto la situación puntual de los alumnos en una determinada fecha, como el progreso de este razonamiento tras el transcurso de la unidad de Homotecia. Para esto se inicia con un test de diagnóstico que permite evidenciar el nivel de razonamiento de los alumnos en base a preguntas de contenido ya conocido. Posteriormente se procede al análisis durante la unidad mencionada, considerando algunas producciones escritas de los estudiantes y transcripciones de audio. El análisis de resultados surge con la teoría de Van Hiele y es complementado aprovechando distintas analogías con la teoría de registros semióticos de Duval, y de paradigmas geométricos. Los resultados obtenidos permiten evidenciar un bajo nivel del razonamiento geométrico del curso según la escala de Van Hiele, y el cumplimiento parcial de los estándares esperados según el programa del MINEDUC tanto en el desarrollo de habilidades como en el cumplimiento de objetivos para la unidad de Homotecia.

Introducción

Al analizar los distintos resultados académicos de los establecimientos, según nuestro contexto estudiantil, nos hemos dado cuenta del déficit existente en la asignatura de matemática, notamos que en los recintos educacionales en los que realizamos nuestras prácticas profesionales han surgido distintas estrategias para intentar remediar estos problemas académicos, como talleres extra curriculares obligatorios u optativos, capacitaciones para los docentes, sistemas de apoyo en el aula, entre otros, sin embargo no han dado resultados esperanzadores.

Es importante notar que dentro de cada uno de los ejes de la disciplina encontramos que geometría es una de las áreas más deficientes en los estudiantes, pues es aquella en donde suelen presentar una mayor cantidad de omisiones y/o errores en sus respuestas en las distintas pruebas estandarizadas, además, dentro de la realidad como estudiantes de pedagogía nos damos cuenta que es una de las asignaturas que presenta un mayor índice de reprobación en el ámbito universitario.

Actualmente en Chile se evidencia que los colegios particulares pagados son aquellos que presentan mejores resultados en las evaluaciones de Simce con una brecha de 60 puntos con respecto a los establecimientos municipales, mientras que en la PSU esta supera los 100 puntos, sin embargo, estos números no manifiestan un patrón diferente al del resto de los establecimientos en el área de la geometría, ya que sus respuestas correctas disminuyen, pero en menor cantidad.

Por esta razón, nuestra primera idea fue diseñar una estrategia didáctica que ayudara a lograr una mejor comprensión en los estudiantes de los axiomas, lemas, postulados, teoremas que dan origen a la geometría, estudiando las causas del problema. Durante el proceso nos preguntamos ¿por qué geometría resulta ser un eje más complicado de comprender para los estudiantes que álgebra o números?, una respuesta que surge de manera inmediata, basada en nuestra propia experiencia como estudiantes, es que en las áreas como álgebra o números en los colegios se suele mecanizar bastante, pues se enseñan técnicas y patrones que ayudan a llegar de manera sencilla a los resultados, sin embargo en geometría para resolver un ejercicio *"se te tienen que ocurrir"* métodos o construcciones para solucionar el problema.

Dado lo anterior, es lógico pensar que la dificultad en esta área va más allá de la comprensión de los contenidos, sino que además tiene que ver con la forma en que los estudiantes razonan y estructuran de manera lógica sus respuestas.

CAPÍTULO I
Formulación del Problema

1.1 Planteamiento del Problema de Investigación

En Chile, el Ministerio de educación de acuerdo a la asignatura de matemáticas, hace énfasis en su propósito, al desarrollo de un pensamiento crítico y autónomo, mencionando que:

> *El propósito de esta asignatura es enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en todos los estudiantes. (MINEDUC, 2018)*

Sin embargo, como se ha mencionado, los resultados de las mediciones en Chile no han sido esperanzadoras estos últimos años, en primer lugar, se ve un claro estancamiento en la evaluación PSU de matemáticas de la última década, pues desde el año 2004 hasta el 2017 el promedio anual de los puntajes oscila entre los 485 y 495 puntos (DEMRE, 2018), lo cual da a conocer un gran déficit en esta asignatura.

En cuanto a los cuatro ejes que determina esta disciplina se puede observar que geometría tiene una baja cantidad de respuestas acertadas (pregunta 37 a 58).

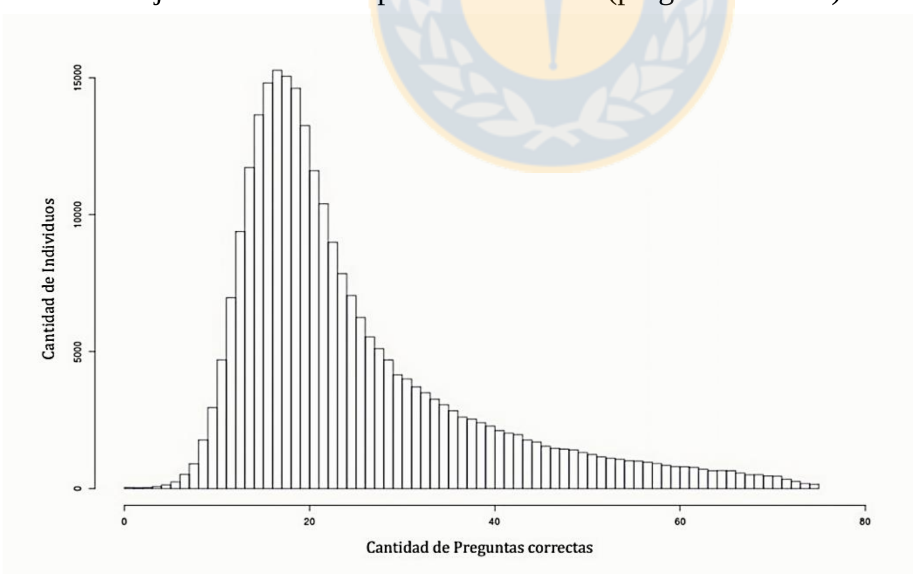


Figura Nº 1.1: Distribución de individuos por cantidad de preguntas correctas en PSU de Matemáticas Admisión 2018.

Otro indicador a considerar es que según un estudio realizado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), se puede apreciar que Chile se encuentra bajo el promedio de la evaluación PISA existiendo una brecha de más de 60 puntos con países de condiciones similares (Figura Nº 1.2).

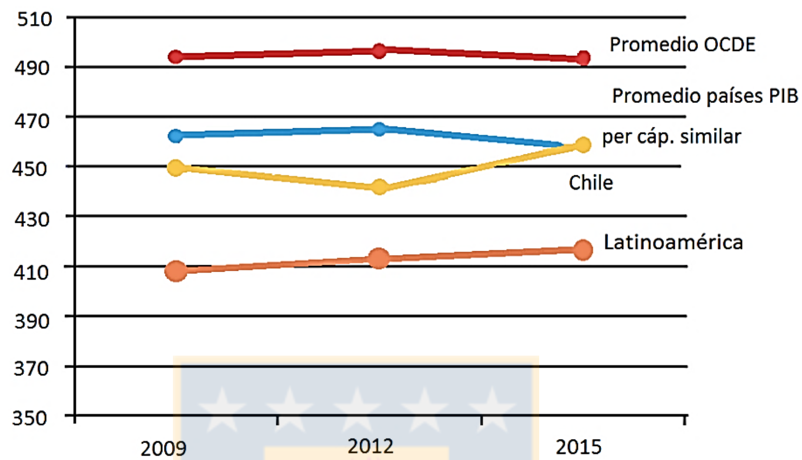


Figura Nº 1.2: Resultados comparativos de Chile con la OCDE y países similares en la evaluación PISA en el área de matemática.

Finalmente es importante considerar la prueba Simce en Matemática, de la cual observaremos los resultados obtenidos por los estudiantes que rindieron la evaluación en octavo año básico del 2017, ya que la muestra escogida para esta investigación corresponde a estudiantes de primer año de enseñanza media.

Según la agencia de calidad de educación en Chile, un nivel adecuado en Simce es alcanzado cuando este supera los 295 puntos, un nivel elemental cuando este supera los 245 puntos y un nivel insuficiente cuando el puntaje alcanzado es inferior 245 puntos. Según lo anterior el promedio a nivel nacional obtenido en el país en la evaluación Simce fue de 260 puntos lo que cae en un nivel elemental, al igual que en la región del Bío Bío la que en promedio llegó 258 puntos[1].

[1] Información obtenida de: http://archivos.agenciaeducacion.cl/PPT_Conferencia_ER_2017_web_3.pdf.

En base a los resultados expuestos de las evaluaciones estandarizadas podemos inferir que los estudiantes no comprenden conceptos, definiciones, propiedades, axiomas, lemas, postulados y teoremas que son elementos que componen a la geometría, lo que nos deja ver claras señales de un existente problema.

Es importante considerar que, si se revisan los fundamentos de las evaluaciones Simce y PSU, se aprecia que se centran sólo en el contenido y las habilidades que los estudiantes deberían utilizar según la taxonomía de Bloom, tratando de manera indirecta, pero no en profundidad, el razonamiento matemático.

Esta implicancia deriva de que los contenidos son uno de los dos elementos que constituyen el razonamiento, dejando de lado a la "forma" o manera de abstraer el contenido que refieren a los objetos matemáticos, por esta razón, para comprender la base de los problemas asociados es necesario el prestar atención también a la forma en que los estudiantes responden a ciertas problemáticas, justificando el porqué de sus procedimientos.

Para ello es necesario comprender que hay etapas por las que escala el estudiante y que inicia con procesos mentales asociados al pensamiento matemático. Esto no solo ocurre de forma individual, sino que también al resolver problemas con la ayuda de alguien “más capaz”, lo que es de gran interés en la educación, en especial si esta persona es el profesor. Con respecto a esto Vygotsky, en su obra “Mind in society: The development of Higher Psicological proceses" (1979), elabora la teoría de la “zona de desarrollo próximo” en donde se detalla la diferencia que tiene el estudiante para resolver problemas individualmente, en comparación de lo que logra con ayuda. Para aprovechar esta teoría es necesario saber cuál es la zona de desarrollo más próxima al estudiante, como llegar a ésta y la zona actual en la que se encuentra el individuo.

Bruner (1976), se basa en Vygotsky y utiliza una metáfora relacionando la metodología de enseñanza con un proceso de “andamiaje”, en donde el profesor diseña los distintos andamios sobre los que los alumnos se apoyan para lograr su desarrollo. Entre las características de esta teoría se destaca el saber recoger información sobre las capacidades de cada estudiante para desarrollar la tarea que se quiera presentar y que la intervención del maestro debe de ser inversamente proporcional a la capacidad del alumno, de manera que a mayor capacidad del alumno menor será la intervención del maestro. Son estas últimas características, las que implican que, para poder desarrollar metodologías de trabajo adecuadas, que puedan aportar a la resolución de los problemas mencionados, es imperante el contar con un diagnóstico del estudiante.

Según lo observado como profesores en práctica, los diagnósticos que se ocupan para medir el aprendizaje del estudiante se suelen centrar en identificar aquellos contenidos en que los estudiantes no logran bien su aplicación, para luego tomarlo como referencia al momento de planear las clases siguientes, buscando por lo general recordarles la forma y/o el mecanismo para resolverlo. Sin embargo, es de común conocimiento que muchos de los estudiantes suelen realizar de manera correcta un ejercicio sin la necesidad de comprender completamente lo que hacen o por qué lo hacen.

Con todo lo anterior, se identifica la necesidad de un diagnóstico que vaya más allá de la medición de un determinado contenido y que se enfoque en comprender el razonamiento que hay detrás de lo que contesta el estudiante, y dados los resultados presentados en el eje de geometría, más importante aún es utilizar un diagnóstico que permita medir adecuadamente el razonamiento geométrico.

Si se desea conseguir un diagnóstico que permita a futuro diseñar mejor los andamios de la enseñanza, conviene utilizar un método que permita escalonar el razonamiento siguiendo una estructura bien desarrollada. Es en este punto donde resulta de interés la Teoría de Niveles de Razonamiento geométrico propuesta por el matrimonio Van Hiele, dado que esta consta de cinco niveles de razonamiento que se identifican mediante el cumplimiento de ciertas características asociadas a cada nivel.

Es por esto que esta investigación buscará diagnosticar el razonamiento geométrico empleado por estudiantes de primero medio, en un colegio de alto rendimiento. Para cumplir con este objetivo, la teoría principal sobre la cual se diseña esta investigación es la Teoría de Niveles de Razonamiento geométrico de Van Hiele. Y para enriquecer aún más el diagnóstico, se utilizará también teoría de paradigmas geométricos, cambios de registros semióticos y pensamiento matemático.

1.2 Pregunta de Investigación

Esta investigación trata de comprender los niveles de razonamiento Geométrico según Van Hiele, de un determinado grupo de estudiantes, que tengan un alto rendimiento en las evaluaciones estandarizadas presentadas, buscando dar respuesta a lo siguiente:

¿Cómo es el razonamiento Geométrico empleado por los estudiantes de primero medio, en un determinado colegio de alto rendimiento de la provincia de Concepción?

1.3 Objetivos

Para poder dar respuesta a la pregunta anterior, es importante plantear los siguientes objetivos que se llevan a cabo en la investigación.

Objetivo general:

Diagnosticar el razonamiento geométrico de una muestra de estudiantes perteneciente a un colegio de alto rendimiento de la provincia de Concepción.

Objetivos específicos:

1. Determinar el nivel de razonamiento geométrico que poseen los estudiantes según el modelo de Van Hiele en la unidad didáctica observada.

2. Describir los niveles de razonamiento presentado por la muestra.

3. Comparar las habilidades involucradas en el razonamiento geométrico presentado por los estudiantes, con los estándares que plantea el ministerio de educación en Chile.

CAPÍTULO II
Marco Teórico

2.1 Pensamiento matemático

La teoría que se describe a continuación está basada en lo propuesto por los autores Masami Isoda y Shigeo Katagiri entregadas en el texto "Pensamiento Matemático" (2016). Esta teoría busca facilitar a los profesores la labor de desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, en base al modelo de clases japonés.

En este libro se cita a Stigler y Hiebert (1999) quienes muestran el enfoque de enseñanza japonés como una situación en donde los profesores presentan a los estudiantes problemas que requieren de principios que ellos aún no tienen adquiridos, para esto los estudiantes trabajan solos o en pequeños grupos para idear una solución. Luego de unos minutos son llamados a presentar sus respuestas; la clase entera trabaja con problemas y soluciones, descubriendo los conceptos y razonamientos matemáticos relacionados. En Japón este método se conoce como el "enfoque de resolución de problemas", que fue reconocido en los años 60, como un modo de enseñanza para desarrollar el pensamiento de alto nivel para la formación del carácter humano.

Para lograr que los estudiantes aprendan por si mismos con este enfoque es importante considerar que es el profesor quien da la tarea, pero no quien encuentra la problemática, si bien un ejercicio puede enfocarse en una situación particular, son los estudiantes quienes lo definen a partir de qué es lo que ellos identifican como un problema, o bien lo que les gustaría hacer, de esta manera este sistema promueve el pensamiento matemático en los niños y jóvenes en edad escolar. En efecto, Katagiri dice que los alumnos deben ser capaces de determinar por si mismos qué deberían hacer, o qué deberían encargarse de hacer.

"El pensamiento matemático es como una actitud, en el sentido de que puede ser expresado como un estado de "tratando de hacer" o "trabajando para hacer" algo. No está limitado

*a resultados presentados por acciones, como en "la habilidad de hacer", o "podría hacer", o "podría no hacer" algo". (*Shigeo Katagiri, 2016).

Katagiri, en su obra, divide el pensamiento matemático en las siguientes categorías:

B) Pensamiento matemático relacionado a métodos matemáticos
C) Pensamiento matemático relacionado a contenido matemático
Además, la categoría que actúa como fuerza impulsora detrás de las categorías anteriores:
A) Actitudes matemáticas

El pensamiento relacionado a los métodos se refiere a macro estructuras que permiten organizar las estrategias al resolver problemas, como por ejemplo lo son el pensamiento deductivo e inductivo. El pensamiento relacionado a contenido se refiere al abordaje más específico de los problemas, por ejemplo, las ideas de conjunto, unidad, representación etc. Por último, las actitudes matemáticas se consideran como la fuerza impulsora de las otras dos, por ejemplo, el "Intentar comprender nuestros propios problemas u objetivos y contenido, claramente, por nosotros mismos".

Es esta mirada que incluye la actitud matemática de los alumnos al trabajo, lo que permite distinguir una mayor amplitud en el concepto de pensamiento matemático, por sobre el de razonamiento matemático, sin embargo, si nos enfocamos directamente en la aplicación frente a una tarea matemática las características no son distintas a las de un razonamiento, por este motivo muchos autores utilizan pensamiento o razonamiento matemático de forma indistinta.

2.2 Razonamiento Matemático y Geométrico

A lo largo de la historia se pueden encontrar distintos acercamientos a lo que es el razonamiento geométrico, algunos autores han intentado dar definiciones formales de esto, Jeannette M. Wing (1985) por ejemplo, se enfoca en el correcto uso de conectores lógicos y la comprensión de los sistemas formales que subyacen en geometría. En cambio, la familia Van Hiele (1957) conceptualiza los fenómenos de comprensión y razonamiento sin dar una definición, para evitar excluir cualquiera de las ideas que informalmente existen respecto a este concepto.

Luís Rico (1995), citado en García y Serrano (1999, pp. 31-32) dice que él identifica al razonamiento como la capacidad de establecer nuevas relaciones entre conceptos; estas relaciones se expresan en argumentos fundamentados. Similar a esta descripción Duval, citado en el texto "Razonamiento en Geometría" (2001, p. 148) define el razonamiento como:

"*Cualquier proceso que permita sacar nueva información de información dada se considera un razonamiento. Está referido a los procesos discursivos internos o externos para nombrar, discurrir o argumentar y a la organización deductiva de proposiciones, definiciones, etc., a partir de una teoría*".

En geometría, como se puede apreciar, las ideas no son distintas a las del razonamiento matemático en general, en el libro "Geometric Reasoning: a new paradigm for processing Geometric information" se puede extraer lo siguiente: *"Informalmente, el razonamiento geométrico es el proceso de definir y deducir las propiedades de una entidad geométrica usando propiedades intrínsecas de ésta, sus relaciones con otras entidades geométricas, y las reglas de inferencia que enlazan dichas propiedades en espacio geométrico (Euclidiano)*"[2] (Wing, 1985, p. 6).

[2] "Informally, geometric reasoning is the process of definig and deducing the properties of a geometric entity using the intrinsic propierties of that entity, its relationships with other geometric entities, and the rules of inference that bind such propierties together on a geometric (Euclidean) space." (Traducción propia).

Un enfoque distinto es el de Gutiérrez y Jaime (1998), para ellos el razonamiento matemático se basa en realizar, según la tarea planteada, algunos de los procesos asociados al razonar, de reconocimiento y descripción, uso o formulación de definiciones, clasificación y demostración.

Considerando estas múltiples formas en que se ha conceptualizado el Razonamiento Geométrico, trabajaremos considerando que involucra las siguientes habilidades:

- Establecer relaciones entre conceptos geométricos o información geométrica conocida.
- Argumentar con razones fundadas acerca de una propiedad, relación o situación geométrica.
- Comprender los distintos elementos que conforman una teoría geométrica.
- Comunicar, en forma convincente, los resultados de indagaciones en geometría.

2.3 Paradigmas geométricos

Durante el periodo escolar, el acercamiento que tiene el estudiante a la geometría inicia a partir de lo tangible y lo concreto, interactuando con cuerpos geométricos, formas, y atribuyendo características simples a cada uno de ellos. A medida que el estudiante avanza por los distintos cursos del sistema escolar, el alumno comienza a relacionar cada vez más el conocimiento matemático con los objetos de estudio, asociándole a estos, características de naturaleza matemática y conjeturando ya no solo a partir de la observación del objeto en sí, sino también de los axiomas, postulados, propiedades, y teoremas asociadas a este.

Este cambio conlleva la necesidad de adaptarse a un ambiente normado por las distintas reglas relacionadas a la matemática. Esta variación que ocurre en la forma de abstraer el conocimiento geométrico, junto con las distintas maneras de enseñarlo, se explica por la diferencia de los distintos tipos paradigmas asociados a la geometría, pero antes de hablar de estos es necesario comprender la noción que representan.

(...) *un paradigma es "realizaciones científicas universalmente reconocidas que, durante cierto tiempo, proporcionan modelos de problemas y soluciones a una comunidad científica", más precisamente el "Conjunto de hipótesis teóricas generales, leyes y técnicas para su aplicación, compartidas por los miembros de una comunidad científica, implicando una cierta coincidencia en sus juicios profesionales*." (Kuhn, 1971, p.13).

Kuzniak (2004) considera dos facetas del concepto de paradigma de Kuhn. La primera la define para un paradigma de manera global, y designa el conjunto de creencias, de técnicas y de valores que comparten un grupo científico. Este fija el camino correcto, es decir, se fija la manera correcta de plantear un problema y de emprender la resolución. Kuhn también dice que es una "matriz disciplinaria que permite reagrupar las teorías y más generalmente los conocimientos de un grupo que trabaja en el mismo sujeto"[3] (Kuzniak, 2004, p.14). En un segundo sentido más local la palabra se refiere a los ejemplos significativos que se dan a los alumnos para enseñarles a reconocer, a aislar y distinguir las diferentes entidades constitutivas del paradigma global.

Kuzniak (2004), afirma que el primer punto enfatiza la constitución y apoyo del paradigma como referencia, el segundo será decisivo para establecer un entorno de enseñanza adecuado para la transmisión de este paradigma.
"Entonces asumimos que, en la enseñanza, diferentes paradigmas se incluyen en el término único de geometría".

El autor observa lo que denomina "periodos de crisis" en matemática, en particular hace mención a la fundación de la geometría griega del siglo VI AC, las discusiones de la naturaleza de los axiomas que comienza en el siglo XII y la aparición de geometría no-euclidiana por el siglo XIX. Esta última crisis permitió distinguir la geometría abstracta o pura de la Geometría física y un avance en la solución del difícil problema de la vinculación entre la geometría y la realidad.

---

[3] "Kuhn parle aussi de matrice disciplinaire qui permet de regrouper les théories et plus généralement les connaissances d'un groupe qui travaille sur le même sujet." (Traducción propia).

La geometría abstracta presupone que uno puede entender un tratado sobre geometría sin conocer la naturaleza de las entidades de las que habla. Este punto de vista lleva un enfoque lógico de la geometría donde el razonamiento se basa en la deducción lógica dentro de un sistema de axiomas y constituye la única base de veracidad y realidad. En contraste con este punto de vista, existe la geometría física que se basa en la experiencia, única fuente de validación legítima de las declaraciones. Su principal fuente de reclamación es su conformidad con las indicaciones proporcionadas por los sentidos y, en particular, la vista. Así aparece otro polo de la legitimación: la intuición. Entre los dos, hay una geometría de transición. Tratando de conciliar la configuración física y el marco lógico.

En base a estas conclusiones Kuzniak (2004) propone que cuando se observa la interacción entre un individuo y el problema geométrico, esto da lugar a tres paradigmas:

a) **La Geometría I. (Geometría natural)**

Este paradigma está caracterizado por la observación visual de las características de los objetos y por la utilización de instrumentos propios en la geometría como lo son la regla, el compás, la escuadra, el transportador, entre otros. La experiencia usual de este paradigma se basa en el dibujo como instrumento para comprender lo que nos rodea, haciendo uso de este como medio de soporte para el objeto, comprobando siempre manera empírica. Los autores De la Torre Fernández y Pérez Blanco (2008)[4], afirman que esto involucra también un razonamiento, especialmente en la facultad de acudir a conocimientos no exigidos para deducir otros nuevos, por lo tanto, sería falso creer que esta geometría está vacía de razonamiento. Este tipo de paradigma, tal como será visto más adelante, tiene elementos comunes con el razonamiento de nivel uno de Van Hiele, como lo es la interpretación física de las figuras observadas.

[4] Extraído desde el artículo "Paradigmas y espacios de trabajo geométricos en los libros de texto de la ESO" publicado en la revista Comunicaciones SEIEM.

b) La Geometría II (Geometría Axiomática Natural)

En la Geometría II se consideran definiciones y axiomas los cuales se apoyan fuertemente de la observación de figuras cotidianas teniendo en consideración objetos ideales, la diferencia principal radica en las definiciones y los teoremas textuales los cuales provienen de un razonamiento hipotético-deductivo. Enriques (1906), citado por Kuzniak, dice que la evidencia de la geometría reside tanto "en la facilidad de evocar antiguas experiencias inconscientemente, repitiéndolos en la intuición de las imágenes y también en la posibilidad de cumplir en forma de postulados las operaciones de asociación y abstracción realizadas en elementos constantes del espacio". Esta descripción implica el uso de propiedades, el trabajo con definiciones y el experimentar no sólo con lo visual, coincidiendo con las características que presenta un razonamiento de nivel 2 o superior en el modelo de Van Hiele.

c) La Geometría III (Geometría Axiomática Formalista)

El razonamiento hipotético-deductivo es el centro en este paradigma, centrándose en la creación de nuevos conocimientos. En este tipo de geometría los axiomas son más complejos saliéndose del empirismo ya que emergen de la geometría no euclidiana. Kuzniak y Houdement (2004) afirman que el tipo de razonamiento es el mismo que en Geometría II, pero el sistema de axiomas es completo e independiente de sus posibles aplicaciones en el mundo. El único criterio de verdad es la consistencia.

2.4 Registros semióticos

En el proceso de aprendizaje de un estudiante, se trabaja constantemente con elementos de la matemática en distintos tipos de representación, por ejemplo, deben saber interpretar un elemento matemático en un lenguaje escrito, simbólico o algebraico, obtener información a partir de un gráfico o dibujo, e incluso transformar elementos desde un tipo de representación a otro. Pero esto resulta complejo si el alumno no comprende cómo trabajar con las distintas representaciones que un objeto posee, y cómo poder obtener información a partir de estas. Lograr comprender esto es importante en matemática, ya que se ve directamente reflejado en la habilidad de representación y de argumentación del estudiante, y estas a su vez están directamente relacionadas a la forma de razonar de este, de hecho, como se verá más adelante, la correcta argumentación matemática tiene una fuerte influencia con el desarrollo del razonamiento de nivel 3 de la escala de Van Hiele.

Según Duval (1999) las representaciones semióticas son aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, etc.) y son el medio que un individuo utiliza para exteriorizar sus representaciones mentales y volverlas accesibles a otros.

Ahora bien, se debe entender que para que exista comprensión en matemáticas es necesario tener claro la distinción entre un objeto matemático y su representación, pues un mismo objeto puede darse a través de representaciones muy diferentes, por ejemplo, una función se puede representar por medio de un gráfico, un diagrama o una ecuación. Sin embargo, como afirma Duval, es el objeto representado el que importa, no sus distintas representaciones semióticas.

En el texto "semiosis y pensamiento humano" (Duval, 1999) se entiende como semiosis a la aprehensión o a la producción de una representación semiótica y noesis a los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia, y se deja en claro que estas dos acciones no son independientes una de otra, por el contrario, no hay noesis sin semiosis.

Para Duval la comprensión y análisis de los problemas de aprendizaje de las matemáticas a los cuales se enfrentan los estudiantes implica una coordinación de sistemas semióticos por parte del sujeto. Respecto a esto, para los estudiantes el paso de un sistema de representación a otro o la movilización simultanea para varios sistemas de representación durante el desarrollo de un problema no es algo en absoluto espontaneo, ya que generalmente estos no reconocen el mismo objeto matemático a través de las representaciones en sistemas semióticos diferentes.

Por lo tanto, para un mejor aprendizaje en matemática es importante que el estudiante sea capaz de comprender en su totalidad un objeto matemático y para ello es necesario que sepa utilizar, comprender y coordinar las representaciones que este pueda tener y a la vez, los elementos que componen dichas representaciones.

Para que el estudiante realice un proceso de razonamiento de manera adecuada, necesita la comprensión de distintos elementos matemáticos: entender la forma correcta las simbologías, el significado de palabras “claves”, dibujos, entre otros y saber cómo utilizarlos para reconocer, definir, clasificar o demostrar nuevos elementos.

Dicha comprensión se logra por medio de la teoría de registros semióticos, puesto que el entender todas las representaciones que posee un objeto matemático permite al alumno evitar las dificultades al momento de enfrentarse a una problemática y puede enfrentar de buena manera algún proceso involucrado en un problema.

2.5 Modelo de razonamiento Van Hiele

Esta es una teoría diseñada por el matrimonio Van Hiele (Dina Van Hiele-Geldof y Pierre Van Hiele) en 1957, que explican el razonamiento geométrico de los estudiantes y los clasifican en cinco niveles consecutivos que no tiene un carácter global en toda la geometría, sino más bien son locales. Cada estudiante, en un tema o contenido específico, comienza en un determinado nivel, y a medida que su razonamiento y su complejidad en las respuestas aumentan, este sube de nivel. Según Jaime y Gutiérrez (1993) este modelo se encuentra formado por dos aspectos básicos y fundamentales:

Descriptivo: Se identifica y valora los distintos razonamientos geométricos evidenciados por los estudiantes.

Instructivo: Establece pautas para determinar el avance de los estudiantes en un determinado nivel de razonamiento.

Según varios autores, entre ellos Jaime y Gutiérrez (1990), el modelo se caracteriza por ser un modelo recursivo y continuo, donde el éxito de los estudiantes depende de la asimilación que tenga del nivel anterior, es por esto que un estudiante de un nivel superior posee los conocimientos explícitos del nivel anterior, esto es evidenciado por Van Hiele (1986), citado por Jaime (1993), afirmando que *"(...) el pensamiento del segundo nivel no es posible sin el del nivel básico; el pensamiento del tercer nivel no es posible sin el pensamiento del segundo nivel" (p. 14).*

Por otro lado, este es un modelo secuenciado pues para superar un determinado nivel es importante haber superado los niveles anteriores de manera ordenada, considerando que según Van Hiele no es un factor determinante la edad para el paso de un nivel a otro, pero si es de gran importancia la forma de expresarse y el significado que el estudiante emplea para resolver un determinado problema.

2.5.1 Niveles de Razonamiento Geométrico

La capacidad de razonamiento geométrico según autores como Jaime y Gutiérrez (1990) Burger, Shaughnessy (1986); Crowley (1987); Fuys, Geddes y Tischler (1988); entre otros, señalan que esta puede evolucionar pasando por diversos niveles, según las siguientes características:

Nivel 1: Se destaca por la habilidad de reconocimiento, donde cada uno de los estudiantes usan propiedades imprecisas de las figuras geométricas, hacen referencia a prototipos visuales, los cuales, muchas veces corresponden a características físicas o visuales del objeto percibido de manera individual, cada comparación que se realiza en este nivel se identifica por ser según la apariencia de la figura.

Nivel 2: Predomina la habilidad de análisis, donde el estudiante es consciente de cada una de las propiedades matemáticas de las figuras, pero las enuncia de manera informal y no las puede relacionar. Al momento de definir una figura los estudiantes suelen recitar propiedades y comparan las figuras según las propiedades que estos cumplen. Los estudiantes en este nivel suelen rechazar definiciones que contradigan a las que ellos ya conocen mediante la observación de las figuras.

Nivel 3: En este nivel podemos encontrar la habilidad de clasificación, ya que los estudiantes desarrollan capacidades de comparar propiedades y comprender cuales se deducen de otras. Comprenden los pasos de un razonamiento formal (pero no la estructura de una demostración rigurosa), ya que utilizan las formas físicas de las figuras para verificar sus deducciones. Pueden clasificar distintas familias de figuras sin embargo estas son apoyadas por la manipulación de las figuras.

Nivel 4: En este nivel de razonamiento geométrico predominan las deducciones formales donde el estudiante realiza deducciones y pueden comprender y desarrollar una demostración de distintas maneras, comprendiendo las condiciones que distinguen una implicancia lógica y su recíproca.

Nivel 5: En este nivel los estudiantes se encuentran en el máximo rigor matemático, comprenden distintos sistemas axiomáticos, los pueden analizar y compararlos.

Es importante agregar que el nivel de razonamiento geométrico de un estudiante depende del contenido que esté trabajando y del progreso que lleve en él, por ejemplo, un estudiante que presenta características de razonamiento de nivel tres en contenidos referidos a cuadriláteros, no necesariamente razona con características del mismo nivel en contenidos que incluyen circunferencias y sus elementos.

2.5.2 Fases del modelo Van Hiele

Para poder guiar el aprendizaje del estudiante el matrimonio Van Hiele propuso 5 fases las cuales ayudan al estudiante a adquirir aspectos mecánicos y lingüísticos de la forma de razonar en cada uno de los niveles de aprendizaje, estas son descritas por diversos autores como Crowley (1987), Fuys, Geddes, Tischler (1988) y Jaime, Gutiérrez (1990) los cuales caracterizan y establecen lo siguiente:

Fase 1 (Información):

Aquí el estudiante recibe la información sobre el contenido que será tratado, la utilidad que tendrá este contenido, los materiales que ocuparan, entre otros.

Por otro lado, también es importante considerar, que en esta fase el profesor evidencia el conocimiento sobre el tema del curso, principalmente el nivel de razonamiento en el tema adquirido por ellos.

Fase 2 (Orientación Dirigida):

Los estudiantes exploran en el área de estudio mediante actividades dirigidas por el profesor para lograr los aprendizajes de conceptos, propiedades o definiciones, cada una de estas deben desarrollarse de manera directa motivando la participación activa de cada uno de los estudiantes.

Fase 3 (Explicación):

En esta fase los estudiantes intercambian conocimientos de manera verbal o escrita comentando la manera en que han resuelto alguna actividad o las regularidades observadas en un determinado ejercicio, con el fin de describir con vocabulario adecuado la estructura sobre la que se trabaja, tratando de dejar de lado el vocabulario informal.

Fase 4 (Orientación libre):

En esta fase los estudiantes aplican los conocimientos que han adquiridos con el fin de realizar actividades que no sean una aplicación directa de un algoritmo, sino que sean problemas abiertos (con varias formas de realizarlo), donde el estudiante deba utilizar diversos conceptos y/o propiedades para lograr encontrar la solución más adecuada.

Fase 5 (integración):

En esta fase el estudiante establece visiones globales de los aprendizajes adquiridos comparándolos con aquellos que esta ya poseía con el fin de organizar los aprendizajes adquiridos hasta el momento.

2.5.3 Procesos de razonamiento

Para poder identificar los diferentes niveles adquiridos, según la escala de Van Hiele, se realizaron diversas aproximaciones teóricas respecto a los procesos mentales que subyacen en cada nivel, es por esto que Ángel Gutiérrez y Adela Jaime en "On the Assessment of the Van Hiele Levels of Reasoning" (1998) se basan en los estudios realizados hasta al momento , principalmente por Villiers (1987) y Hoffer (1981), para crear una proposición intermedia en donde identifican diferentes procesos de razonamiento característicos de los niveles de Van Hiele, siendo estos los siguientes:

1. **Reconocimiento** de tipos de familias de figuras geométricas, identificación de componentes y propiedades de las figuras.

2. **Definición** de un concepto geométrico. Este proceso puede ser visto de dos maneras: como los estudiantes formulan definiciones de un concepto que están aprendiendo, y como los estudiantes usan una definición dada leída desde un texto o escuchada desde el profesor u otro estudiante.

3. **Clasificación** de figuras geométricas o conceptos en diferentes familias o clases.

4. **Demostrar** propiedades u oraciones. Esto es, explicar en forma convincente por qué dichas propiedades u oraciones son verdaderas.

2.5.4 Evaluación en base a la teoría de Van Hiele

La evaluación según Fouz y De Dnosti (2005) es el tema central del modelo de Van Hiele, dado que según las respuestas que el estudiante entregue, frente a un determinado problema, lo clasifica en uno u otro nivel de razonamiento, teniendo en cuenta que la mejor manera de extraer información es mediante entrevistas guiadas y test, considerando las siguientes ideas:

Cada respuesta que los alumnos entreguen debe ser evaluada en base al por qué de sus respuestas y no a lo que ellos no contestaron o lo que ellos contestaron de manera incorrecta, es por esto que la evaluación debe ser acorde a esta filosofía.

Cada pregunta determina distintos niveles de razonamiento, sin embargo, es la forma de responder del estudiante la que lo clasifica en un determinado nivel.

Resulta complicado determinar el nivel de razonamiento cuando los estudiantes se encuentran en el paso de un nivel a otro.

2.5.5 Grados de adquisición de niveles de Van Hiele

En "An alternative paradigm to evaluate the adquisition of the Van Hiele levels" Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991), buscan mostrar otro paradigma con respecto a los niveles de Van Hiele. En primer lugar, concluyen que los niveles de Van Hiele no son discretos, y que se necesita estudiar en forma más profunda la transición entre niveles.
Los autores señalan que su propuesta se basa en los siguientes dos argumentos:

(a) Tener una visión más completa del razonamiento geométrico de los estudiantes, deberíamos tomar en consideración la capacidad de usar cada uno de los niveles de Van Hiele, en vez de asignar un solo nivel.

(b) Continuidad en los niveles de Van Hiele significa que la adquisición de un nivel específico no ocurre no instantánea ni rápidamente, sino que puede tomar varios meses o años.

Bajo esta idea es que idean una escala que asigna puntaje a las respuestas de 0 a 100, y posteriormente lo asocian a una escala que permita obtener conclusiones cualitativas. La relación entre puntaje y adquisición viene dada por el siguiente gráfico:

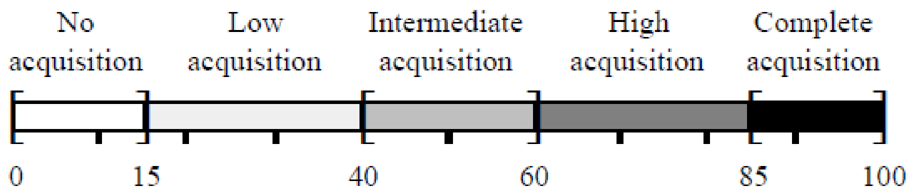


Figura 2.1: Grados de adquisición de los niveles de van Hiele.

"*Comenzamos por asumir que es más importante observar a los tipos de razonamiento de los estudiantes, más que su habilidad para resolver ciertos problemas correctamente en un tiempo dado. Además, una respuesta parcialmente correcta (o incluso totalmente incorrecta) podría también entregarnos información*"[5], mientras que, para el análisis de los niveles consideramos lo mencionado por los autores "*Nosotros hacemos una evaluación de cada respuesta que toma en cuenta el(los) nivel(es) de pensamiento reflejado, así como también la precisión matemática y completitud*"[6]. (Gutiérrez, Jaime y Fortuny ,1991, p. 239)

Para esta investigación se aprovechan las descripciones dadas para definir cómo clasificar aquellas respuestas que presentan características intermedias entre dos niveles consecutivos, de modo que las respuestas que estén claramente incorrectas e incompletas pasaran al nivel inmediatamente menor de los vestigios asociados. Las respuestas que estén correctas, pero muy incompletas, es decir que habiendo contestado lo pedido no fueron capaces de nombrar, identificar, o describir gran parte de lo que era posible en el problema, también son asignados al menor de los niveles identificados. De la misma manera, las respuestas con una amplia descripción en donde la mayor parte de ellas claramente errónea. Si bien esto último indica que el alumno ya está intentado razonar en un cierto nivel, aun no lo ha podido adquirir. Por ende, también será asignado al menor de los dos niveles asociados. Por último, las respuestas

[5] "We start witg the assumption that it ir more important to observe the students type of reasoning than their ability to solve certain problems correctly in a set time. Furthermore, a partially correct (or even a totally incorrect) answer mat also afford us information." (Traducción propia).

[6] "We make an evaluation of each answer that takes into account the thinking level(s) reflected as well as its mathematical accuracy and completeness." (Traducción Propia).

en donde se identifica claramente un cierto nivel, donde este predomina, o donde se da una respuesta correcta y que cumple con la mayor parte de lo que se podía esperar al responder, se consideran con el nivel adquirido, y por ende son clasificadas con el mayor nivel de Van Hiele de entre los identificados.

Respuesta	**Grado adquirido**	**Nivel asociado**
Incompleta y errónea	Baja adquisición	El nivel inferior al vestigio encontrado
Muy incompleta, pero correcta o muy completa, pero incorrecta.	Mediana adquisición	El nivel inferior al vestigio encontrado
Respuesta correcta y total, o parcialmente completa, o respuestas correctas con vestigios claros de dos niveles consecutivos.	Alta adquisición	El mayor nivel del vestigio encontrado.

Tabla 2.1: Tipos de respuestas asociadas a su nivel y grado de adquisición.

En definitiva, el trabajo que se realiza para que un estudiante sea capaz de comprender un concepto o contenido requiere de conocimientos amplios por parte del docente, no basta sólo darle una fórmula y decir que debe hacer con ella bajo ciertas condiciones, sino que también requiere una visión completa de todo lo que ese objeto tiene, de entregar cada elemento que posee y saber cómo utilizarlo en diversas situaciones. Es por esto que consideramos que Kuzniak y su teoría de paradigmas, Duval con los registros semióticos y principalmente Van Hiele y su modelo de razonamiento geométrico, entregan las herramientas necesarias para que un docente pueda ver los contenidos en geometría, no solamente de una forma mecánica enfocándose en los contenidos y estrategias ligadas al algebra o al aspecto numérico, si no que pueda ampliar mucho más la forma de tratar los temas y enfocar sus clases de modo tal que el alumno pueda razonar de una manera más abierta y sepa interpretar la geometría de distintas maneras.

CAPÍTULO III
Marco Metodológico

El presente capítulo da a conocer la metodología bajo la cual se realizó la investigación, presentando principalmente el enfoque que fue llevado a cabo, el tipo de estudio desarrollado, los instrumentos utilizados, cómo estos fueron elaborados, mencionando el propósito de cada uno de ellos, y la manera en que fue seleccionada la muestra. Además, se especificará cómo se analizarán los resultados obtenidos por los estudiantes para poder cumplir os objetivos propuestos.

3.1. Tipo de estudio

El enfoque de esta investigación es de tipo Cualitativo, ya que produce información descriptiva, donde se registra lo mencionado por las personas de manera hablada o escrita, y las conductas observadas (Taylor y Bogdan, 1986 citado en Rodríguez, Gil y García, 1999). Además se busca detallar de manera exacta las actividades, objetos y procesos, al observar grupos y personas en un determinado momento, analizando la forma de responder y expresarse (Van Dalen y Meyer, 1971).

El proceso utilizado para recolectar la evidencia se desarrolló directamente desde el lugar en donde se produce el fenómeno, por lo tanto, se puede afirmar que esta investigación tiene un enfoque naturalista o de campo, y sin influir directamente en las variables asociadas al razonamiento geométrico, por ende es no experimental. Según las características de exploración e interpretación, que permiten ajustes a partir de la comprensión de los datos o situaciones, con el objetivo de conseguir un detallado conocimiento de la muestra, es que este proyecto cabe dentro del tipo de estudio de caso (Investigación en educación matemática, Darío Fiorentini y Sergio Lorenzato, 2010).

Finalmente esta investigación busca describir la situación actual de un grupo de estudiantes en un colegio de la provincia de Concepción, respecto a su grado de adquisición en determinados niveles de razonamiento según la teoría de Van Hiele, permitiendo un primer abordaje sobre el objeto de estudio y catalizar futuras investigaciones.

3.2. Selección de la muestra

La muestra corresponde a 30 alumnos de primer año de enseñanza media de un colegio científico-humanista de alto rendimiento en la provincia de Concepción, región del Biobío. Se seleccionó este establecimiento, dada la disponibilidad de observación del eje de geometría, que se desarrolla a lo largo de todo el año escolar y además, por la afinidad con la profesora del establecimiento. Se escoge el nivel de primero medio, pues se cuenta con los resultados simce de octavo año (2017), que según los estándares de la agencia de calidad de educación en Chile los clasifica dentro de un nivel adecuado de aprendizaje.

3.3. Descripción y Elaboración de instrumentos

Para cumplir con los objetivos de esta investigación se ocuparon tres tipos de instrumentos de recolección de información. El primero, es un test diagnóstico que permitió recabar información acerca del nivel de razonamiento que los alumnos habían adquirido hasta la fecha. El segundo tipo de instrumento corresponde a las producciones escritas de los estudiantes durante el transcurso de la unidad de homotecia, los que corresponden al desarrollo de ejercicios propuestos por la profesora en las guías o test. Y un tercer tipo el cual corresponde a los registros de audios grabados de las actividades realizadas en clases.

A continuación, se detallarán los instrumentos que fueron utilizados para la recolección de información sobre los niveles de razonamiento geométrico en la muestra seleccionada.

3.3.1. Test diagnóstico

Para determinar el nivel de razonamiento geométrico que los estudiantes de la muestra habían adquirido hasta la fecha, según la escala de Van Hiele, se aplicó un test existente, **(Anexo 1),** elaborado por la estudiante de magister Estefanía Caamaño Bello. Dicho test fue elaborado para aplicarse a alumnos desde quinto año básico a tercer año medio, por lo cual resulta adecuado para recabar información en primer año medio.

La estructura del test se basa en los procesos mentales asociados a los razonamientos (Jaime y Gutiérrez, 1998). Incluyendo ítems elaborados según los procesos de reconocimiento, definición, clasificación, y demostración, lo que busca facilitar el análisis posterior de los datos.

El test se había sometido a una validación de expertos, donde se mide el grado de validez en que un instrumento realmente mide la variable que dice medir (Hernández *et al.*, 2014). Para que la evaluación de expertos fuera efectiva, se utilizó una escala de tipo Likert para medir en forma numérica su apreciación por cada ítem con respecto a la pertinencia de los niveles de razonamiento geométrico que permite abarcar. La pregunta planteada fue la siguiente: ¿el ítem permite a los estudiantes de la muestra transitar dentro de los niveles estipulados en cada uno?

Tomando en consideración los comentarios hechos por los expertos en esa validación y lo que el grupo de investigación estima conveniente, a continuación se presentan los cambios que fueron realizados a las distintas preguntas del test original, ya sea en cuanto a su estructura o en cuanto a los procesos asociados a las preguntas.

Ítem	**Edición de ítems o de procesos asociados.**
1.a	Se considera la pregunta únicamente como reconocimiento, se descarta un proceso de clasificación.
1.b	Se especifica este ítem como uno de elaboración de definiciones.
2	Se agrega la oración “escriba una o más definiciones” para que se pueda abarcar hasta el nivel 4.
3	Sin cambios
4	Se ha considerado en esta investigación considerar clasificación como el proceso principal en este ejercicio, pero de todas maneras asociar la respuesta al proceso de definición cuando esto sea posible.
5.a	Se considera la pregunta como ejercicio de reconocimiento y no como uno de demostración.
5.b	Sin cambios.

Tabla N° 3.1: Ediciones para mejorar la evaluación del Test de diagnóstico.

A continuación, se presenta un resumen mediante una tabla de procesos según la matriz sugerida en Gutiérrez y Jaime (1998)

Ítem	**Proceso de razonamiento predominante**	**Niveles de Van Hiele en que transita.**
1.a	Reconocimiento	Niveles 1 y 2.
1.b	Definición	Niveles 1, 2, 3 y 4.
2	Definición	Niveles 1, 2, 3 y 4.
3	Demostración	Niveles 1, 2, 3 y 4.
4	Clasificación	Niveles 1, 2 y 3.
5.a	Reconocimiento	Niveles 1 y 2.
5.b	Demostración	Niveles 1, 2, 3 y 4.

Tabla N° 3.2: Estructura de los ítems para la medición del nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes.

Adicionalmente, se adjunta una tabla que asocia a cada ítem las habilidades del programa de matemática del MINEDUC asociadas a cada ítem, se adjunta además una revisión de estas, que incluye habilidades que a juicio de los investigadores no estaban insertas en la tabla original.

Tabla de habilidades del Test diagnóstico.

Ítem	Contenido.	Habilidades Tabla original	Habilidades identificadas para esta investigación
1.a	- Cuadriláteros.	- Representar.	- Representar. - Argumentar y comunicar
1.b	- Cuadriláteros.	- Representar.	- Representar. - Argumentar y comunicar
2	- Polígonos.	- Argumentar y comunicar.	- Argumentar y comunicar.
3	- Área de figuras planas.	- Argumentar y comunicar.	- Argumentar y comunicar.
4	- Cuadriláteros.	- Resolver problemas. - Argumentar y comunicar.	- Representar - Resolver problemas. - Argumentar y comunicar.
5.a	- Triángulos.	- Resolver problemas. - Argumentar y comunicar.	- Resolver problemas. - Argumentar y comunicar.
5.b	- Triángulos.	- Resolver problemas. - Argumentar y comunicar.	- Resolver problemas. - Argumentar y comunicar.

Tabla N° 3.3: Estructura de las habilidades presentes en cada uno de los ítems.

3.3.2 Guía 1: Homotecia No Vectorial

En la primera clase del proceso de observación, se aplicó a los estudiantes esta guía **(Anexo 2)**, que fue construida en su totalidad por la docente (sin ediciones de los investigadores, con el fin de obtener mejor información), sin embargo, ésta fue descartada para nuestro análisis, debido a que el tipo de pregunta y las respuestas entregadas por los estudiantes no permitían identificar niveles de razonamiento geométrico, situación que se detalla posteriormente en la sección "3.4.2 Proceso Clase 1".

3.3.3 Guía 2: Homotecia Vectorial

Este instrumento se ha elaborado como un guía de ejercicios, que busca complementar los problemas originalmente pensados para ser trabajados durante la clase dos, con algunas preguntas diseñadas para mejorar la recolección de información acerca de razonamiento matemático **(Anexo 3)**. Los tres ejercicios adaptados, pertenecen a la unidad de homotecia vectorial del texto escolar "Se Protagonista", libro utilizado por el establecimiento educacional.

Se diseñaron preguntas adicionales para cada uno de los ítems. Dichas preguntas fueron pensadas para buscar indicios de razonamiento matemático a partir de la argumentación de los estudiantes, es decir, la estructura de las preguntas no fue hecha pensando en procesos definidos, más bien, serán las respuestas mismas las que permitan identificar la forma que tuvieron los alumnos de abordar los problemas.

Ejercicio N°1:

Observa la razón k de los puntos C y D y responde.

a) ¿Qué diferencia o relación puedes identificar entre ellas?

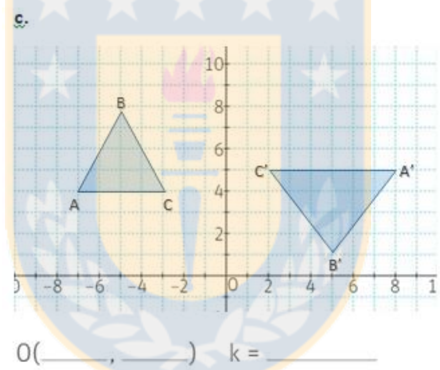
b) Compara los vectores de los puntos homotéticos resultantes ¿Cómo afectan estas razones a aquellos puntos? Argumente.

Ejercicio N°2:

a) ¿Qué diferencias y/o similitudes se encontraron en dichos ejercicios?

b) ¿Cómo afecta la ubicación del centro de homotecia al procedimiento que se debe realizar? Argumente su respuesta.

Ejercicio N°3:



Determina cuál de los siguientes pares de figuras son o no homotéticas, explique su procedimiento.

Imagen Nº 3.4: Ejercicios extras para mejorar la recolección de información, (Anexo 3).

A continuación, se presenta una tabla resumen según la matriz sugerida en Gutiérrez y Jaime (1998) en donde se identifican los procesos predominantes de las preguntas presentadas anteriormente, los cuales, como se dijo anteriormente, son consecuencia tanto de las preguntas, como del tipo de respuestas que dan los alumnos.

Ejercicio	Proceso de razonamiento	Niveles de Van Hiele en que transita.
1.a	Reconocimiento	Niveles 1 y 2.
1.b		
2.a		
2.b		
3.c	Clasificación	Niveles 1, 2 y 3.

Tabla N° 3.5: Estructura de los ítems para la medición del nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes.

3.3.4. Test: Homotecia

En la tercera clase se realizó un test de ejercicios de homotecia **(Anexo 4)**, que consiste en preguntas que abarcan el contenido de homotecia, prescindiendo del enfoque vectorial. La aplicación se desarrollaría al final de una clase que tendría estructura expositiva, con la finalidad de mejorar la comprensión de los alumnos respecto a la unidad, que hasta el momento se trabajó de forma mayormente independiente. A pedido de la profesora, la actividad fue evaluada.

La estructura del test consiste en un ejercicio que contiene cinco afirmaciones que se deben evaluar como verdaderas o falsas, y para la recolección de datos el mayor enfoque sería en los argumentos y explicaciones del alumnado. Es por esto que se incluye en la instrucción que justifiquen tanto las afirmaciones verdaderas como las falsas. Para su aplicación se permite calculadora y regla.

Ejercicio	Proceso de razonamiento predominante	Niveles de Van Hiele en que transita.
a	Reconocimiento	Niveles 1 y 2.
b		
c		
d		
e	Demostración	Niveles 1, 2 y 3.

Tabla N° 3.4: Estructura de los ítems para la medición del nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes.

3.3.5. Ejercicio propuesto de la Prueba

Dada la flexibilidad de trabajo de la profesora, se permitió incorporar un ejercicio (**Anexo 4**) en la evaluación final, con el objetivo de analizar de mejor manera los niveles de los estudiantes. Este ejercicio, debía enfocarse en los contenidos de homotecia vistos de manera geométrica.

El ejercicio diseñado está formado por dos preguntas, las cuales miden hasta el nivel 2 y 3 respectivamente, ya que se enfocan en los procesos de reconocimiento y de demostración.

Es importante mencionar que el ejercicio incorporado a esta evaluación debía ser de aplicación, dada la metodología de trabajo y la orientación de la clase. Además de utilizar el ejercicio propuesto, se observó de manera general la evaluación de la profesora para el análisis de niveles de razonamiento, aunque esta evaluación sólo utilizaba procesos de bajo nivel, ya que se centraba en aplicar un contenido en base a reconocer propiedades y/o conceptos.

3.4. Proceso de investigación en el aula

A continuación, se describe cómo fue desarrollado del proceso de recolección de información en el establecimiento, indicando lo planificado originalmente, el desarrollo de las clases, y la forma en que finalmente se realizó dicho proceso.

Por acuerdo de la profesora de la asignatura y dada la disposición del aula, se permitió tener un máximo de dos investigadores durante la clase, para observar las clases y recopilar información, lo que fue llevado a cabo en cada una de estas. Los tipos de materiales recopilados fueron audios, test y guías, pudiendo observarlos mediante fotos, o el material mismo si se tenía el permiso correspondiente. No se permite la grabación de video, ni tampoco se considera necesaria para este tipo de estudio, en donde la respuesta misma del alumno es la que permite obtener la mayor cantidad de vestigios de razonamiento geométrico. El tiempo de observación efectivo de cada clase oscilaba entre 75 y 90 minutos.

3.4.1. Aplicación de test diagnóstico

Se acordó con la profesora un día para aplicar el test diagnóstico de Van Hiele. Para el día se contó con la totalidad del tiempo de clases, es decir 90 minutos y durante la aplicación de este instrumento se podía usar tanto calculadora como regla. Antes de su aplicación, se les dio una breve explicación del tipo de objetivo que tenía dicho test, recalcando la necesidad de escribir todas las ideas asociadas a la resolución de un problema, aún si no se estaba seguro del método de resolución o del resultado mismo, intentado por ende dejar la menor cantidad de respuestas en blanco posible. El material usado para el análisis de datos, fue el test mismo.

3.4.2. Proceso clase 1

Planificación: En una primera reunión la profesora indica los temas que quedan por ver durante las clases que restan del mes; pero no la estructura de las clases propiamente tal, de todas maneras dice que se avisará con días de anticipación cuando tenga clara la clase que planea desarrollar.

Días previos a la primera clase, uno de los investigadores se reúne con la profesora para hablar en concreto de las actividades a realizar y los temas a tratar, en la que se informa que la primera clase se desarrollaría con el libro de texto que se utiliza en el establecimiento. Posteriormente, se comienza la preparación de una guía de actividades relacionadas a homotecia vectorial (**Anexo 3**), agregando a los ejercicios del libro, que la profesora planeaba proponer a los estudiantes, preguntas de desarrollo, para poder rescatar mejores vestigios de razonamiento geométrico y analizar posteriormente las respuestas en base a la teoría propia de Van Hiele.

Sin embargo, un día antes de este primer trabajo, la profesora informa que hay otros planes para trabajar en esa clase, ya que al parecer no alcanzó a ver los contenidos que había pronosticado, y deja el tema de homotecia vectorial para una clase posterior. A causa de esto, se acuerda dejar la guía preparada para la clase siguiente.

<u>Desarrollo de la clase:</u> En esta clase los estudiantes trabajaron una guía evaluada en parejas **(Anexo 2).** Desde el comienzo de la clase se detectó un problema en cuanto a los conocimientos del estudiante respecto a homotecia, la profesora en este caso, había utilizado una metodología autodidacta, que consistían en que los estudiantes observaran y estudiaran un video explicativo respecto a homotecia, y un documento de resumen días previos a la clase en una plataforma que se utiliza en el establecimiento. Dicha estrategia no funcionó como la profesora esperaba, puesto que pocos estudiantes vieron el video explicativo y muchos comenzaron a aprender del tema sobre la marcha, lo cual provocó dificultades para identificar evidencias de niveles de razonamiento geométrico en las producciones de los estudiantes.

<u>Recopilación de la información</u>: Para la clase se contó con 2 investigadores, cada uno contaba con una grabadora de audio, para obtener información adicional en base a las preguntas que los propios estudiantes hacían y como reflexionaban sobre el tema.

Al finalizar el día se cuenta con un aproximado de 30 trabajos y 2 audios de la clase. Al revisar las guías nos damos cuenta que solo los primeros 2 ejercicios fueron realizados por la mayoría, el resto de los problemas fueron desarrollados por pocos alumnos. Gran parte del material escrito fue descartado para el análisis de información, debido a las pocas respuestas entregadas.

3.4.3. Proceso de la clase 2

Planificación: Aplicar la Guía de homotecia vectorial (pospuesta de la clase anterior) de manera grupal, recopilar información mediante dicho material y audios a través de una grabadora en cada grupo.

Previo a iniciar la clase se nos informó que los alumnos aún no habían visto nada respecto a la parte vectorial de la homotecia, por lo que esa clase se inició el contenido utilizando la sección correspondiente del libro de texto escolar “Se protagonista”.

Desarrollo de la clase: La profesora inicio su clase, en donde se explicó en forma breve lo que es un vector y lo que es la homotecia vectorial. En pizarra se dejó proyectada la explicación de homotecia vectorial que contenía el libro. Posteriormente los estudiantes se reunieron en grupos de 4 o 5 personas, donde de cada grupo se debía obtener una guía resuelta, sin embargo, la mayoría de ellos entregaron dos guías. Durante el transcurso de la clase, la profesora decidió que la guía sería evaluada y posteriormente se lo comunicó a los estudiantes.

Recopilación de información: Para esta clase se disponía de seis grabadoras de audio y las producciones de los estudiantes, las que se analizaron a partir de fotografías, puesto que una vez evaluadas, estas debían regresar a los alumnos.

3.4.4. Proceso de la clase 3

Planificación: Se establece una reunión previa con la docente, ya que esta sería la última clase teórica de los estudiantes. En la reunión la docente comunica que prepararía una clase expositiva resumiendo el tema de homotecia, sin considerar homotecia vectorial, puesto que hasta el momento los estudiantes presentaban dificultad para comprender este contenido. Al finalizar pretendía realizar un test, ya que se esperaría que en esa instancia los estudiantes comprendieran mejor el tema, nos dejó escoger los ejercicios que se evaluarían en dicho test para poder recopilar con él, mejores datos para nuestra investigación.

Desarrollo de la clase: Tal como estaba fijado en la reunión, la mayor parte de la clase la realiza la profesora mediante una presentación de Power point. La clase fue interactiva, ya que comienza a partir de las deducciones de los alumnos a situaciones que ella tenía preparadas en la proyección, a partir de esto elabora el concepto que formaliza en la misma clase. Llegando al final de la clase se aplica el test preparado para la ocasión **(Anexo 4).** Nuevamente se recalca la necesidad de responder todas las preguntas y de describir los procedimientos y/o deducciones.

Recopilación de la información: para la clase se cuenta con un archivo de audio, el cual corresponde a la grabadora que la docente llevaba durante la clase, y otro que recopila las dudas presentadas por los estudiantes al monitor durante la aplicación del test. Además de esto se dispone de las fotografías de dichas producciones.

3.4.5. Proceso de la clase 4

Planificación: Para esta fecha correspondía la evaluación final del trimestre, la que incluyó los contenidos de cilindro, semejanza y homotecia, siendo este último el principal enfoque. Para mejorar la obtención de información relevante se le sugirió a la docente un ejercicio adicional de homotecia (**Anexo 5**), el cual ubicó al final de la evaluación.

Desarrollo de la clase: La evaluación fue escrita e individual. En esta a los estudiantes se les prohibió hacer cualquier pregunta respecto al contenido, solo se respondían dudas en torno a la comprensión de instrucciones o de las figuras presentes en la evaluación.

Recopilación de información: se cuenta con un archivo de audio que corresponde a la grabadora que la profesora tenía, además de fotos de las producciones de los estudiantes en la evaluación.

3.4.6. Metodología de la profesora

En este apartado se describen distintas observaciones en relación a las clases, iniciando con una explicación general de la metodología y finalizando con la identificación de situaciones particular que pueden o no tener relación con el desarrollo del razonamiento geométrico.

Para abordar la unidad de homotecia no se cuenta con una planificación previa, sino que se prepara cada clase con unos días de anticipación. Se inicia el proceso mediante una metodología autodidacta; se pone a disposición de los alumnos distintos materiales audiovisuales en la plataforma virtual proporcionada por el establecimiento, con la finalidad de que puedan comprender el concepto.

Las clases siguientes comienzan con la entrega de instrucciones en forma breve, y se deja el resto del tiempo para que los alumnos trabajen en las guías. Los instrumentos en general presentan ejercicios de aplicación y algunos de comprensión. Durante este proceso se identifica una actitud que es importante analizar, algunos de los alumnos que buscaron dar respuestas a preguntas de comprensión, no estaban seguros de si sus argumentos, a veces informales, eran suficientes para dar respuesta a lo solicitado; a los que la docente respondía "si usted cree que está bien, escríbalo". Esta respuesta puede resultar importante para comprender el porqué de los resultados obtenidos, ya que implica la libertad para utilizar argumentos no matemáticos en las respuestas, y recordando que la argumentación matemática adecuada y el uso correcto de conectores lógicos o estructuras de mayor formalidad son características representativas de razonamientos de alto nivel, esta simple acción puede dificultar la adquisición de niveles 3 y superior.

Para mejorar el aprendizaje del estudiante la tercera clase se realiza de manera expositiva, y con un test al finalizar. Con respecto a esta clase es conveniente mencionar que en la presentación por primera vez la profesora conversa con los alumnos respecto a las aplicaciones del concepto de homotecia, se les muestra además el proceso aplicación de una homotecia. Muchos alumnos en este punto muestran indicios de comenzar a comprender cómo funciona el concepto de homotecia.

Como características generales, se debe agregar que para las clases se cuenta con disposición de regla para todos los estudiantes, esto puede resultar interesante para ciertos efectos (ver sección 6.1). Por otro lado los instrumentos aplicados durante la clase cumplen una función de control, todas las clases son evaluadas de algún modo, y esto influye en la actitud del estudiante en torno al trabajo.

Por último es interesante mencionar que las clases en general siguen una estructura de la forma: instrucción, presentación del problema, aplicación. Lo que difiere de la estructura de la clase japonesa sugerida por Shigeo Katagiri, en donde es el alumno quien identifica el problema. Esto puede tener relación con la actitud que presentan los estudiantes frente a la matemática en general y además permite entender por qué los alumnos necesitaron de la clase expositiva para comprender la noción de homotecia.

3.4.7. Cuadro de resumen del proceso

Clase	Planificación y desarrollo.	Instrumento empleado
0	Aplicación del Test Diagnóstico de Van Hiele. Se aplica de forma individual. Se destaca la instrucción de escribir lo que estimen conveniente a pesar de no estar seguros del camino a seguir o el resultado.	Test Diagnóstico **(Anexo 1)**
1	Aplicación de Guía 1 • Evaluada en parejas • Contenido: Homotecia no vectorial. No hubo modificaciones en esta guía para mejorar la calidad de los datos.	Guía 1: Homotecia **(Anexo 2)**
2	Aplicación de Guía 2 • Evaluada en grupos • Contenido: Homotecia vectorial Guía realizada con ejercicios del libro de texto "ser protagonista" de la asignatura. Se añadieron preguntas de desarrollo para mejorar la calidad de los datos a recopilar.	Guía 2: Homotecia vectorial. **(Anexo 3)**
3	Clase expositiva. Contenido: Homotecia. Tras los resultados de las guías trabajadas en la clase 1 y 2, se optó por un estilo expositivo para afirmar las ideas que construyeron los alumnos de Homotecia. No se considera homotecia vectorial. Durante los últimos 30 minutos se aplicó el test de ejercicios acordado con la profesora.	Test: Homotecia. **(Anexo 4)**
4	Evaluación final (90 minutos). Contenido: Cono-cilindro-semejanza-Homotecia. Esta evaluación cuenta con el ejercicio adicional de homotecia, que sugerimos añadir a la docente para mejorar la calidad de datos a obtener.	Prueba final (Incluye ejercicio adicional) **(Anexo 5)**

Tabla N° 3.6: Resumen de planificación.

3.5. Método de presentación y análisis de información

Esta investigación busca diagnosticar el razonamiento geométrico que actualmente presentan los estudiantes, para ello se debe recordar que los niveles adquiridos de razonamiento pueden diferir entre unidades y aún más entre las distintas etapas en se desarrolla una unidad. Por esto el estudio se ha dividido en dos secciones, una que busca comprender la situación actual del alumno mediante un test diagnóstico que toma en consideración conocimientos previos respecto al eje de geometría; y otra en donde se analiza lo ocurrido durante el transcurso de una unidad, en este caso homotecia. Ambos análisis se complementan entre sí para comprender cómo es el razonamiento geométrico desarrollado hasta el periodo observado.

Antes de poder analizar los datos, es necesario clasificar cada una de las respuestas entregadas por los alumnos dentro de uno de los niveles de Van Hiele. Para realizar este trabajo se utilizaron tablas de datos y posteriormente gráficos de barra asociados a los resultados de cada instrumento, con la finalidad de dilucidar de manera más eficiente la situación del curso, obteniendo para este caso, resultados fácilmente identificables en esas representaciones. Para ordenar la información recopilada durante este proceso, se ha separado el estudio en tres partes distintas.

La primera corresponde a la revisión del test diagnóstico, dado que este fue diseñado para permitir dicho diagnóstico puntual, y además permite obtener una asociación directa entre las respuestas y los procesos de un razonamiento propuestos por Jaime y Gutiérrez (1998). Para revisar este instrumento se identificó en cada pregunta del test diagnóstico el proceso de razonamiento que predominaba, y a cada respuesta entregada por parte de los alumnos se le asignó un proceso, para ello se utilizó una rúbrica elaborada para este fin **(Anexo 7)**, diseñada también en base a los planteamientos de los autores Jaime y Gutiérrez (1998).

La segunda parte corresponde a la evaluación del proceso de observación de clases, mediante el análisis del material escrito y las fotografías obtenidas en el periodo. Es en este punto en donde la variedad de material recopilado, conlleva la necesidad de contar con una pauta general que permita distinguir los niveles de razonamiento geométrico asociados a las respuestas **(Anexo 8).**

La tercera parte de este proceso corresponde al análisis de los audios asociados a las clases correspondientes, realizando para esta investigación, una transcripción de cada uno de ellos **(Anexos 9 – 16),** posteriormente se separaron todos aquellos diálogos en que se estimaba, podría haber vestigios de razonamiento geométrico, eligiendo como grupo de investigación, cuáles de ellos eran claros. Cabe destacar que para este punto no fue posible crear pautas para la evaluación de los diálogos, dado el carácter informal y espontaneo con que estos se producían.

Hay que aclarar que a pesar de la estructura escalonada de razonamiento que sugiere Van Hiele, se encuentran comúnmente respuestas que presentan características de dos procesos consecutivos. Para poder asignar el nivel asociado en cualquiera de las tres etapas anteriores aprovechamos la teoría presentada en la sección **2.5.5** de Jaime, Gutiérrez y Fortuny (1991) y elaboramos una tabla que permite hacer la elección a partir de su grado de adquisición.

Una vez finalizado el ordenamiento de la información para cada método en que se recopilaron los datos, se indagó de forma transversal entre cada uno de estos, buscando estipular de qué manera razonan los estudiantes de la muestra. La finalidad de esto es lograr una caracterización del pensamiento del estudiante a partir de los resultados presentados, de esta manera se busca responder la pregunta respecto al cómo razonan los estudiantes de la muestra en geometría.

A modo de aclarar de mejor manera la forma de razonar que los alumnos mostraron y aún más de asociar posibles relaciones o causas para este desarrollo, se utiliza la teoría de paradigmas geométricos de Kuzniak para comprender el ambiente local que se tuvo en este periodo, así como también la teoría de registros semióticos de Duval, que permitirá observar la influencia que el manejo de las representaciones tiene en el pensamiento del estudiante, o viceversa.

Parar finalizar, y completar un importante objetivo de esta investigación, se hace una comparación entre el diagnóstico obtenido de los estudiantes y lo esperado; esto último basado principalmente en las habilidades y objetivos propuestos en el programa por el MINEDUC para esta unidad, y adicionalmente en lo que, como grupo de investigación, esperábamos según los resultados de un colegio de alto rendimiento, y también lo observado en los instrumentos aplicados o la estructura de la clase en general. Para este proceso primero se revisan los objetivos relacionados al contenido de homotecia y se crea un cuadro comparativo en donde se muestra el nivel esperado y adquirido por la muestra para cada indicador que sí fue trabajado durante el periodo. Quedan fuera todos aquellos indicadores que no fueron trabajados o donde la información recopilada haya sido insuficiente para poder aseverar la existencia de un nivel adquirido. Posteriormente se revisan las habilidades esperadas a desarrollar durante lo unidad, esto en base a las habilidades explicitas en el programa para la unidad de geometría y considerando también lo que está implícito en la redacción del mismo. El análisis de habilidades se basa en relacionar el tipo de razonamientos y respuestas con respecto a características esperables según dicha habilidad.

CAPÍTULO IV

Presentación de Resultados

En este capítulo se presentarán los resultados obtenidos de los trabajos realizados por los estudiantes, tanto del test diagnóstico, instrumento propuesto directamente por los investigadores, como los que han sido propuestos por la profesora durante las clases de geometría. Estos resultados serán expuestos a través de tablas y gráficos que muestran los niveles alcanzados por los estudiantes en las distintas tareas que han sido estudiadas en base a la teoría de niveles de razonamiento geométrico creada por el matrimonio Van Hiele y complementada con los procesos establecidos por los autores Jaime y Gutiérrez (1998)

Es necesario recordar, que, sin contar el test diagnóstico, los trabajos realizados por los estudiantes fueron cuatro, pero el primero de ellos (Guía 1, Anexo 2) fue eliminado, puesto que no se pudo observar en él vestigios de razonamiento geométrico, ya que esta guía fue solamente de aplicación, y no hubo intervención de parte de los investigadores, es decir, una edición de ésta, para obtener mejores datos.

<u>Observaciones:</u>

- Los números en las casillas representan el nivel en que la respuesta del estudiante fue clasificada.

- Las casillas que contienen las iniciales NO corresponden a respuestas de estudiantes que no permiten observar un determinado nivel de razonamiento geométrico.

- Las casillas en blanco, son por aquellos estudiantes que dejaron las preguntas completamente en blanco.

4.1 Resultados test diagnóstico

Este test fue realizado por 30 estudiantes de los cuales uno no presento respuestas.

Ítems	**1a**	**1b**	**2**	**3**	**4**	**5a**	**5b**
Procesos	Reconocimiento	Definición (Formulación)	Definición (Formulación)	Demostración	Definición (uso) Clasificación.	Reconocimiento	Demostración
Sujeto 1	1	1	1		3		1
Sujeto2	1	3	1	NO	3	2	2
Sujeto 3	1	1	1	NO	3		1
Sujeto 4	1	3	1		1	1	
Sujeto 5	1	1	1	NO	3	1	
Sujeto 6	2	2	1		3	1	1
Sujeto 7	1	1	2	2	3	NO	1
Sujeto 8	1	1	1	3	3	1	NO
Sujeto 9	2	3	1		3		
Sujeto 10	1	1	1	NO	3	NO	
Sujeto 11	1	3	1	1	3	1	1
Sujeto 12	1	3	1	NO	3	2	1
Sujeto 13	1	1	1		3	1	1
Sujeto 14	1	3		1	3	1	1
Sujeto 15	1	1	1	1	3	NO	1
Sujeto 16	1	1	1		3		
Sujeto 17	1	3	1	1	3	1	1
Sujeto 18	1	3	1	NO	2	1	1
Sujeto 19	2	1	3		3	1	1
Sujeto 20							
Sujeto 21	1	1	1		3	1	
Sujeto 22	1	1	1	1	3	1	1
Sujeto 23	1	3	1		3	2	1
Sujeto 24	NO	1	1	1	3	1	1
Sujeto 25	1	1	1	1	1	1	1
Sujeto 26	1		1		1		
Sujeto 27	1	1	1		1		
Sujeto 28	1	1	1	1	3		1
Sujeto 29	1	1	1	2	3		1
Sujeto 30	1	1		3	2	2	2

Tabla 4.1: Resultados test diagnóstico.

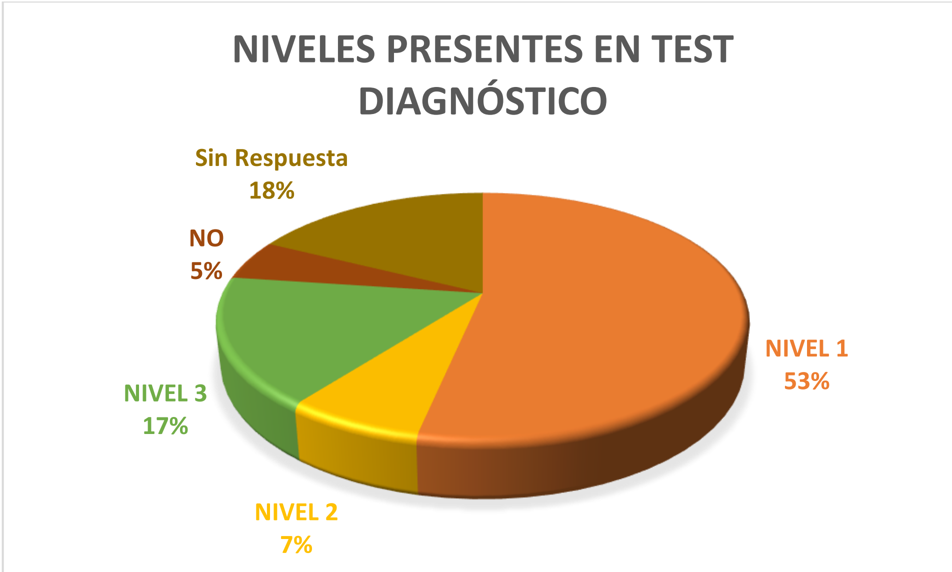


Gráfico 4.1: Porcentaje de niveles presentes en el test diagnóstico.

Niveles	**NIVEL 1**	**NIVEL 2**	**NIVEL 3**	**NO**	**Sin Respuesta**
Cantidad	112	15	35	11	37

Tabla 4.2: Cantidad de vestigios por nivel.

4.2. Resultados Guía 2: Homotecia Vectorial

Esta guía fue realizada, distribuyendo la clase en 8 grupos y cada uno de ellos entrego 2 guías.

Numero de Guía	Pregunta 1A	Pregunta 1B	Pregunta 2A	Pregunta 2B	Pregunta 3A
1	1	1	1	1	
2	1	1			2
3	1				
4	1	1			
5	1				
6					
7	1	NO	1	1	
8					
9	1	1			
10	1				
11	1	NO			
12	1				
13	1	1			
14	1	1			
15	1				
16	1	1			

Tabla 4.3: Resultados en la Guía de Homotecia Vectorial.

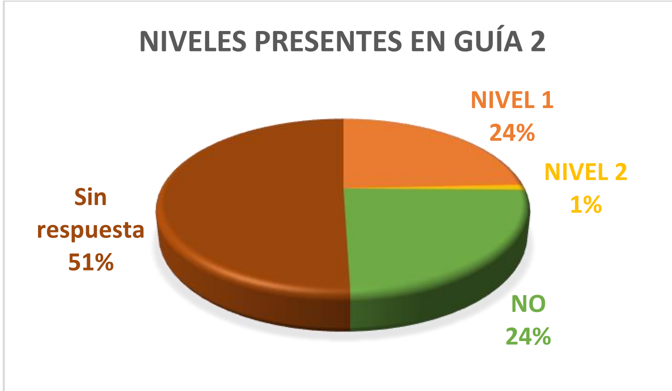


Gráfico 4.2: Porcentaje de niveles presentes en el test diagnóstico.

Niveles	NIVEL 1	NIVEL 2	NO	Sin respuesta
Cantidad	25	1	25	52

Tabla 4.4: Cantidad de vestigios por nivel.

4.3 Test de homotecia

Este trabajo fue un test individual evaluado, realizado al final de una clase de carácter expositivo.

Numero de Test	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Pregunta 5
1	1	NO	NO	2	1
2	1	1	2	2	1
3	NO	1	2	2	1
4	NO	2	2	2	
5	1	2	2	2	1
6	1	NO	1	2	
7	NO	NO	NO	2	1
8	1	2	2	2	1
9	2	1	2	1	1
10	1	2	2	2	1
11	NO	1	2	NO	1
12	1	2	2	2	1
13	1	2	NO	2	1
14	2	2	1	1	1
15	1	2	2	2	1
16	NO	1	2	NO	1
17	NO	1	2	NO	1
18	NO	2	2	2	1
19	NO		NO		NO
20	NO		NO	NO	1
21	NO	NO		1	1
22	2	NO	2	1	1
23	1	NO	2	1	NO
24		NO	1		
25	NO	NO	2	1	NO
26	NO	NO			
27	1	2	2	2	1
28	NO	2	NO	2	1
29	NO	2	1	1	
30	NO	2	NO	2	1

Tabla 4.5: Resultados test de Homotecia.

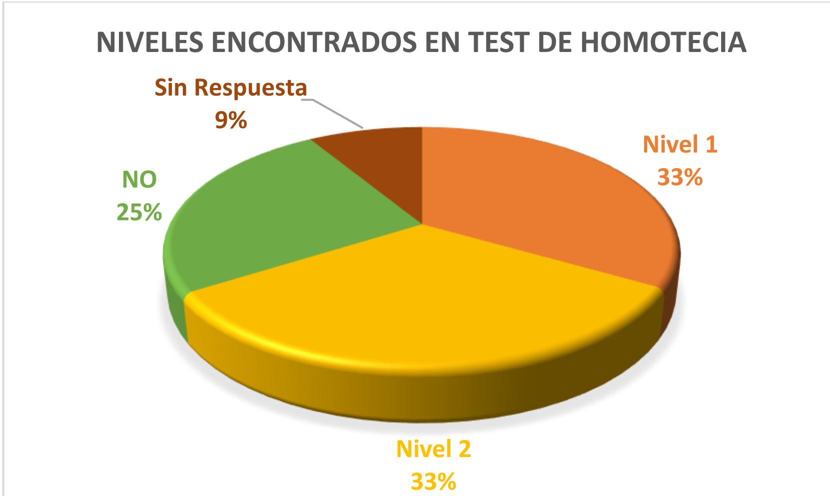


Gráfico 4.3: Porcentaje de niveles presentes en el test diagnóstico.

Niveles	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**NO**	**Sin Respuesta**
Cantidad	50	49	38	13

Tabla 4.6: Cantidad de vestigios por nivel.

4.4 Ejercicio incluido en evaluación final

Este ejercicio fue planteado en una evaluación final realizada para la asignatura.

N° de Evaluación	Pregunta 1	Pregunta 2
1	1	1
2	1	NO
3	2	1
4	NO	NO
5	NO	NO
6	NO	NO
7	NO	NO
8	NO	NO
9		NO
10	1	NO
11		NO
12	2	NO
13	NO	NO
14	2	1
15	NO	1
16	NO	1
17	NO	1
18	1	1
19	NO	NO
20	2	2
21	1	2
22	1	NO

Tabla 4.7: Resultados del Ejercicio final de la evaluación.

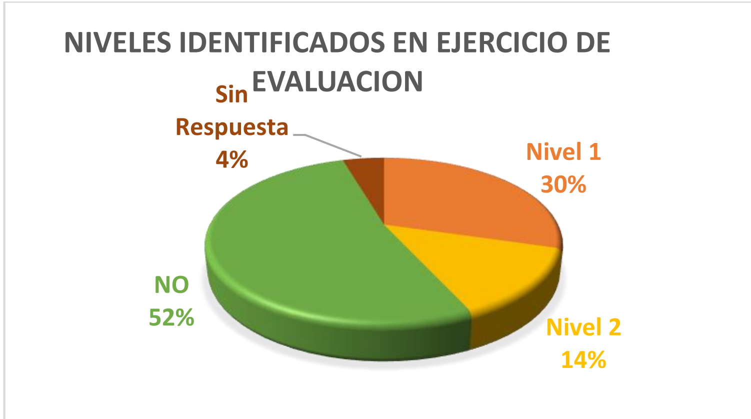


Gráfico 4.4: Porcentaje de niveles presentes en el test diagnóstico.

Niveles	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**NO**	**Sin Respuesta**
Cantidad	13	6	23	2

Tabla 4.8: Cantidad de vestigios por nivel.

4.5 Transcripciones de audio

Esta sección corresponde a la identificación de vestigios de razonamiento encontrados en las transcripciones de audio. De la totalidad de las transcripciones se han identificado 11 vestigios, que se presentan a continuación junto a su justificación.

Vestigio 1
• Profesor: ¿Qué se hace cuando no es negativo? ¿Qué hacen normalmente? (hablando respecto a la constante de homotecia k). • Alumno: Calculamos la distancia desde un punto a O (centro de homotecia), trazamos la línea y después usamos la misma distancia para el otro lado. (Refiriéndose a la constante negativa).
Nivel asociado: 1
Justificación: El alumno entiende que la constante se relaciona con la distancia entre el centro de homotecia y el punto, pero no es capaz de asociar el valor numérico de K al procedimiento. Comprende que la imagen queda en un lado opuesto respecto al centro de homotecia.

Vestigio 2
•Alumno: ¿Qué significa que la razón sea -1? •Profesor: ¿Qué crees tú?, observa el dibujo y expresa lo que ves. •Alumno: que la figura está dada vuelta. Pero ¿cómo se dice entonces? •Profesor: Tal cual como lo mencionaste, la figura se invierte. •Alumno: Se da vuelta. •Profesor: Si "se da vuelta". Eso tiene que poner en esa parte.
Nivel Asociado: 1
Justificación: El alumno puede comprender el significado de la razón -1 a partir del efecto de rotación que causa en la figura dada en el problema.

Vestigio 3
•Alumno: Ya entonces con la razón igual a -1, la figura va a quedar invertida ¿cierto? •Profesor: Si, correcto.
Nivel Asociado: 1
Justificación: El alumno tiene asociada la relación que hay entre la razón -1 y el efecto que esta causa en la figura, pero no entrega mayor evidencia sobre el dominio del tema.

Vestigio 4
• Alumno 1: Lo que yo entendí por lo menos es que hay que tomar el punto B, multiplicarlo por K, pero no sé si está bien porque me queda por acá. •Profesor: Lo que tú estás haciendo era multiplicar sus coordenadas. •Alumno 1: Sí, tomando como referencia este centro y me quedó acá.
Nivel asociado: 1
Justificación: El alumno no comprende la aplicación de los vectores en el contenido de homotecia, cuando el centro estaba en el origen multiplicó las coordenadas de los puntos por la constante de homotecia k. En el ejercicio en donde el centro P no estaba en el origen, quiso repetir el proceso.

Vestigio 5
•Alumno 1: ¿Cómo se supone que sabes si las figuras son o no son homotéticas? •Alumno 2: Porque la división de sus lados tiene que dar lo mismo. •Alumno 2: ¿Qué estás haciendo? ¿Estás dividiendo? •Alumno 3: Sí, para ver la razón, a ver, pongámosle que es 2 y si con otro me da es 2.
Nivel asociado: 2
Justificación: El alumno tiene asociada la relación entre semejanza y homotecia, sabe identificar proporcionalidad de lados.

Vestigio 6
• Alumno3: Observa la razón de k de los puntos C y D y responde… ¿qué relación o diferencia puedes ver entre ellas? •Alumno1: Que están sobre los ejes •Alumno2: pero dice ¿qué diferencia?, a espera ¿qué diferencia o relación? •Alumno1: que los 2 pasan sobre un eje. • Alumno2: Que el punto C pasa por el eje X y el D pasa sobre el eje Y. ya ahí hay una diferencia y la relación de antes. • Alumno1: Compara los vectores de los puntos homotéticos mencionados antes, ¿cómo afecta la razón a estos puntos? •Alumno2: Que todos pasan por el punto 0
Nivel asociado: 1
Justificación: El alumno trabaja en la relación entre la constante de homotecia aplicada a los puntos C y D. El alumno no toma en cuenta las razones mencionadas y se enfoca en la ubicación de ambos puntos. La relación que encuentra entre los dos puntos es visual. Reitera el mismo razonamiento en la parte vectorial.

Vestigio 7
•Alumno2: la k es la que cambia eso, y ¿cuál es el vector?, y ¿cuál es la k? •Alumno1: Es la que multiplicas para trabajar. •Alumno2: Espera, es que aquí habla de vectores ¿por qué vas a poner la k? • Alumno1: Si la k varía su signo, los vectores también varían por lo que pueden estar más lejos o más cerca del punto original. • Alumno2: Si la k varía su signo, y los vectores varían dependiendo si son positivos o negativos pueden quedar arriba o abajo del eje x respectivamente.
Nivel asociado: 1
Justificación: Los alumnos solo ven los cambios en los vectores o en el valor de k a partir de ideas visuales.

Vestigio 8
Contextualización: los alumnos están realizando una homotecia con respecto a un punto que no es el origen del plano. •Alumno2: Los valores deben pasar por el P •Alumno1: Todas las rectas. •Alumno2: ¿O qué onda? •Alumno3: En "volá" el ejercicio es así no más. •Alumno1: Según yo no pasan por el P, pasan por el 0 (haciendo relación al origen del plano) no más. •Alumno1: Profe tengo una duda. ¿Por qué quedo así? •Profesor: Bueno, comience a sacar sus conclusiones ¿Por qué les quedo así la figura? ¿En que influye ese punto P? •Alumno1: si los cálculos nos dieron por aquí. •Profesor: Ya entonces, esos deben ser incluidos en sus conclusiones. •Alumno1: Ahí dice la pregunta que afecta que el centro sea P •Alumno2: Si afecta po'. Entonces no habría otro punto que no fuese el 0 que sirve. •Alumno1: Si con el 0 la figura queda aquí, entonces con el punto P debería quedar por acá po'. Continúan haciendo cálculos para ver qué es lo que ocurre. •Alumno2: Profe, ¿qué más se puede hacer aquí? •Profesor: entonces si creen que esa es la opción deben registrar eso. •Alumno2: Es que no es que creamos, es la opción.
Nivel asociado: 1
Justificación: El grupo no comprende la diferencia que existe cuando el centro de homotecia es distinto del origen. Realizan el ejercicio ocupando lo desarrollando en un ejercicio anterior y solo hacen los cálculos como si el centro fuese el origen, a pesar de que la figura reflejada les da una posición que no es la correcta y se dan cuenta de aquello, no verifican ni asocian ese error. Solo piensan que es un error causado por el punto P y concluyen que no se puede hacer homotecia con otro centro que no sea el origen.

Vestigio 9
•Alumno2: ¿Qué diferencias o semejanzas puedes encontrar? •Alumno1: Que los 2 se mantienen en 0, no, no está malo. •Alumno2: Y si dejamos esto no más, es lo mejor que tenemos hasta ahora. •Alumno1: ¿Qué diferencia o relación existe? •Alumno2: Que ambos tienen como punto de origen el 0. •Alumno1: ¿Ambos se ubican en? •Alumno2: En el punto 0. •Alumno1: Si, sí, sí.
Nivel asociado: 1
Justificación: Identifica una relación entre los vectores, a partir de la gráfica de estos. Observando que todos parten en el origen.

Vestigio 10
• Alumno: Lo que pasa es que homotecia directa es como cuando depende del tamaño, y la inversa es cuando esta dado vuelta, depende del ángulo, pero ¿qué pasa si es menor del tamaño y está dado vuelta?
Nivel asociado: 1
Justificación: El alumno no comprende la diferencia entre homotecia directa e inversa, interrelaciona sólo las variaciones físicas de tamaño, rotación y lo hace de forma incorrecta.

Vestigio 11
•Profesora: ¿Qué pasa por ejemplo con el segmento AB y A'B'? ¿Cómo son? •Alumnos: Paralelas. •Profesora: Paralelas, Y con BC y B'C'. •Alumnos: Paralelas.
Nivel asociado: 2
Justificación: Los alumnos son capaces de reconocer adecuadamente, paralelismos en la figura y la proporcionalidad de segmentos.

Estadísticas de los resultados de las Transcripciones de audio

Niveles	Nivel 1	Nivel 2	Total
Cantidad	9	2	11

Tabla 4.9: Cantidad de vestigios por nivel.

Gráfico 4.5: Porcentaje de niveles presentes en el test diagnóstico.

La tabla que se presenta a continuación considera la totalidad de vestigios y evidencias identificadas, siendo distribuidas por nivel de razonamiento, tanto en los trabajos producidos por los estudiantes, como los registros de audio.

Niveles	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Total
Cantidad	209	73	35	317

Tabla 5.1: Cantidad de vestigios por nivel.

Gráfico 5.1: Porcentaje de niveles presentes en el test diagnóstico.

De un total de 317 vestigios o evidencia encontrada, tanto en los test diagnósticos, guías, producciones de clases y audios, se aprecia que el mayor porcentaje del razonamiento se clasifica dentro del primer nivel de Van Hiele.

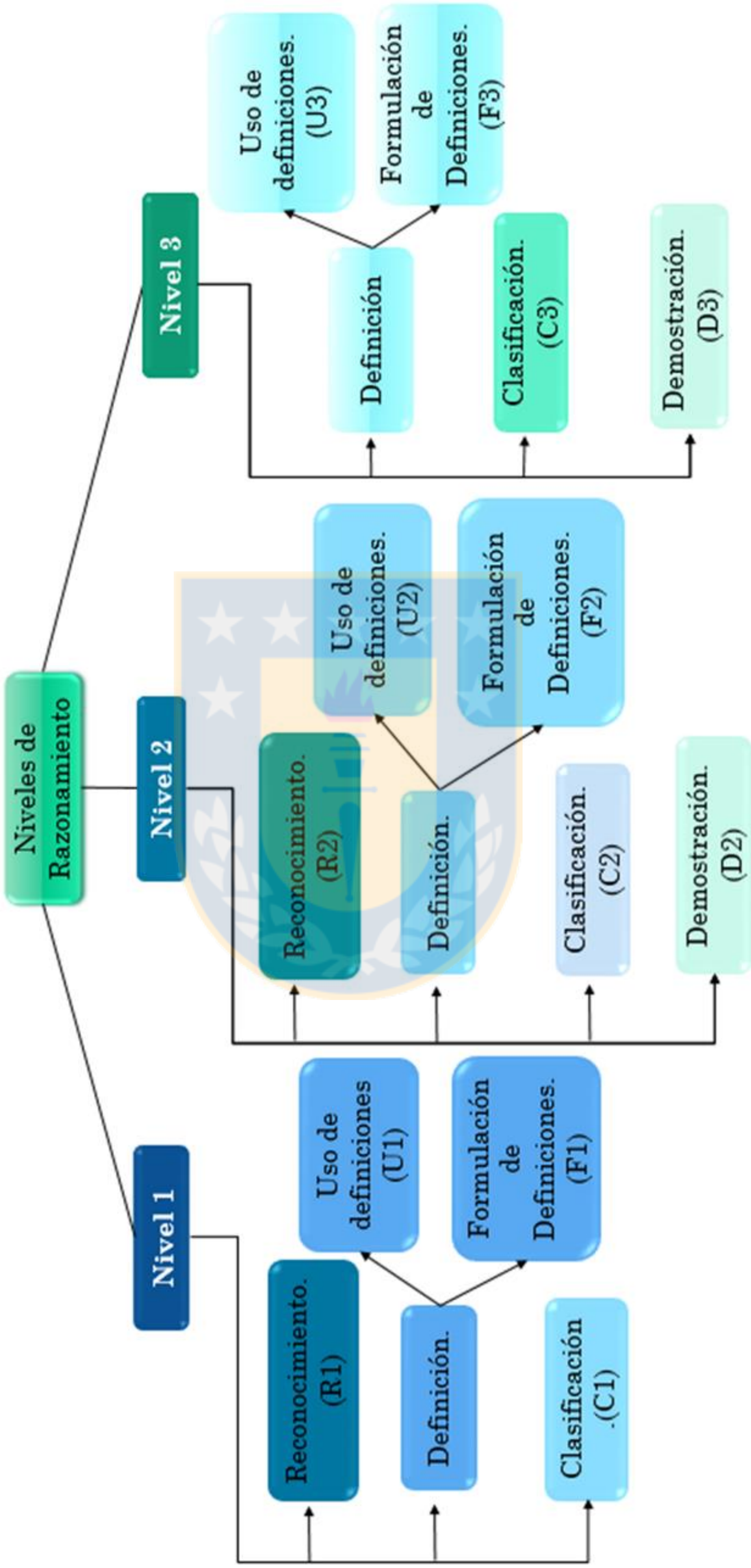
CAPÍTULO V

Análisis de Resultados

En este capítulo se presenta el análisis de los resultados obtenidos a partir del estudio de las producciones de los estudiantes, el que se realiza mediante una caracterización de la muestra según lo observado para cada uno de los niveles encontrados para este caso, estos corresponden a los tres primeros niveles de Van Hiele. Dicho análisis se ordena mediante la asociación entre las características observadas y los procesos asociados a los razonamientos. Posteriormente, se muestran algunos ejemplos de respuestas entregadas por los estudiantes, que respaldan dicha caracterización.

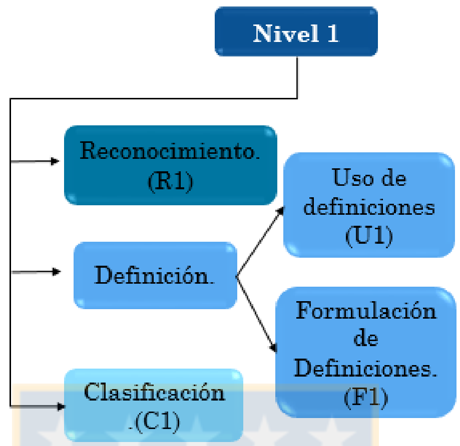
La mayoría de las respuestas con que se ejemplifica, corresponden a las obtenidas del test Diagnóstico, pues fue el único instrumento en el que se pudieron recopilar respuestas en todos los procesos y los niveles identificados. En lo que respecta a las producciones obtenidas de las clases, a pesar de la amplitud de las preguntas, que permiten respuestas en todos los niveles y procesos, en las respuestas de los estudiantes se mostraba una predominancia de su razonamiento en el proceso de reconocimiento.

Para poder comprender de mejor manera el análisis, se ha construido el siguiente esquema, que ordena los procesos de cada nivel según su predominancia, siendo los colores más obscuros, los que tuvieron mayor presencia en las producciones de los estudiantes.


Niveles de Razonamiento
Nivel 1
Reconocimiento. (R1)
Definición.
Uso de definiciones (U1)
Formulación de Definiciones. (F1)
Clasificación .(C1)
Nivel 2
Reconocimiento. (R2)
Definición.
Uso de definiciones. (U2)
Formulación de Definiciones. (F2)
Clasificación. (C2)
Demostración. (D2)
Nivel 3
Definición
Uso de definiciones. (U3)
Formulación de Definiciones. (F3)
Clasificación. (C3)
Demostración. (D3)

5.1 Caracterización De Niveles Por Proceso

Sin ignorar que cada nivel incluye al anterior, a continuación, se describen las características destacadas de cada nivel identificado según los procesos establecidos por Jaime y Gutiérrez (1998) para evaluar los resultados según la escala de Van Hiele.



En este nivel de razonamiento geométrico los estudiantes:

Reconocimiento (R1)

1. Identifican características o componentes de una figura guiándose estrictamente de lo que observan.
2. Aún si emplean un lenguaje matemático, este suele no ser apropiado y tiene un significado visual.
3. Utilizan propiedades imprecisas de las figuras, entendiendo una propiedad imprecisa como una propiedad mal empleada.
4. Al aprender una técnica para resolver un ejercicio o problema no son capaces de aplicarlo a un contexto distinto.

Uso de definiciones (U1):

1. Los estudiantes de primer nivel no comprenden las definiciones.

Formulación de definiciones (F1):

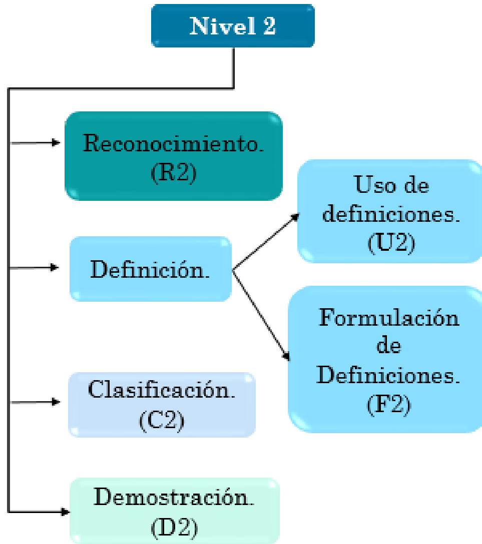
1. No comprenden la estructura de una definición, en el mejor de los casos enlistan características físicas.

Clasificación (C1):

1. Clasifican figuras en base a su apariencia global.
2. No comprenden las definiciones de las figuras por tanto no clasifican de acuerdo a ellas.
3. No generalizan las características que identifican en una figura a otras de su misma clase.

Demostración (D1):

1. No saben demostrar, no siguen instrucciones ni un procedimiento lógico al probar algo. Por esta razón es que este proceso no se contempla en este nivel.



En este nivel de razonamiento geométrico los estudiantes:

Reconocimiento (R2):

1. Saben que las figuras geométricas poseen propiedades y las reconocen como características de ella.
2. Utilizan un vocabulario apropiado para describir los componentes de las propiedades.

Desde este nivel en adelante, según los autores Jaime y Gutiérrez (1998) este proceso presenta iguales características, lo que no quiere decir que los estudiantes que han alcanzado un nivel superior de razonamiento tengan ausencia de este proceso, por el contrario, existe, pero no se distingue del nivel dos.

Uso de definiciones (U2):

1. Rechazan o ignoran las definiciones que contradicen la que ellos tienen adquirida.

Formulación de definiciones (F2):

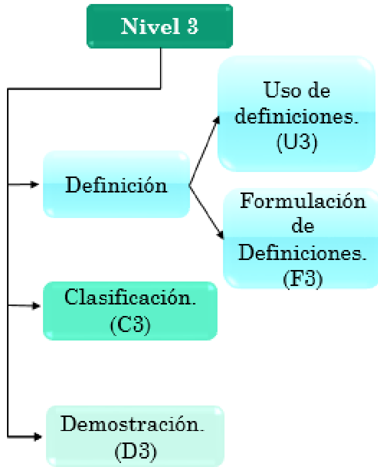
1. Aun no dominan la estructura lógica que lleva una definición, por lo que enlistan o enumeran propiedades y características que suelen ser insuficientes o innecesarias para identificar una figura.

Clasificación (C2):

1. Clasifican en base a las definiciones que ellos previamente tienen adquiridas, las que suelen ser exclusivas, por lo que no admiten inclusión de familias de figuras.

Demostración (D2):

1. Muestran ausencia de comprensión de una demostración.
2. Al comprobar la validez de una afirmación experimentan sin utilizar los ejemplos suficientes, finalmente suelen generalizar.
3. No manejan una estructura lógica en su procedimiento.



En este nivel de razonamiento geométrico los estudiantes:

Uso de definiciones (U3)

1. Comprenden, y son capaces de utilizar definiciones exclusivas e inclusivas.
2. Identifican definiciones distintas de un mismo concepto.

Formulación de definiciones (F3):

1. Son capaces de elaborar una definición siguiendo una estructura lógica.
2. Intentan no ser redundantes, al utilizar solo las propiedades y características suficientes para reconocer a la figura u objeto matemático.

Clasificación (C3):

1. Al comprender definiciones, son capaces de clasificar figuras respecto a ellas. Reconocen que existen familias de figuras que comparten características.

Este proceso no permite distinguir el cuarto nivel, pues es el tercero, donde han alcanzado el máximo logro de este proceso.

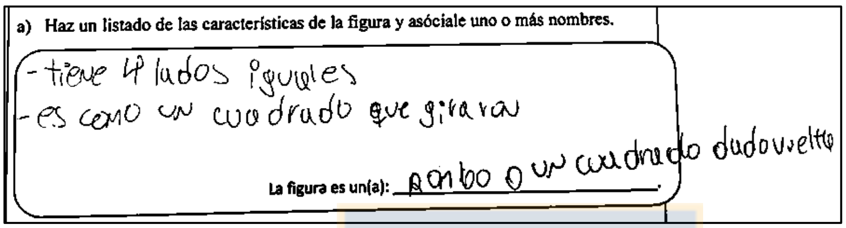
Demostración (D3):

1. A la hora de probar una situación son capaces de seguir una secuencia de deducciones lógicas que es respaldada por sus procedimientos.
2. Son capaces de dar razones informales para probar la veracidad de una propiedad, siendo los casos específicos solo una ayuda y no la demostración misma.

5.2 Ejemplos asociados a la caracterización.

Reconocimiento (R1-R2):

R1. La imagen que sigue muestra la respuesta de un estudiante a una pregunta en que se solicita enlistar las características que conocen de una figura (cuadrado). El estudiante hace referencia solamente a características visuales de la figura, he incluso destaca su orientación en la hoja, siendo este un atributo irrelevante, es por esto que su respuesta corresponde a un ejemplo de primer nivel de razonamiento.


a) Haz un listado de las características de la figura y asóciale uno o más nombres.

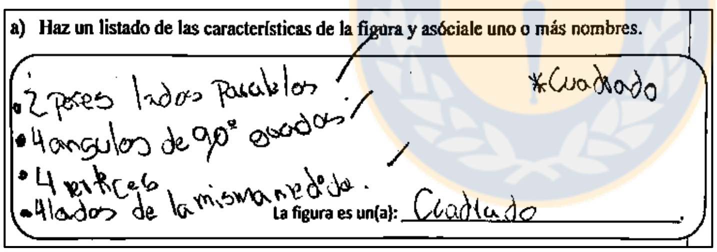
- tiene 4 lados iguales
- es como un cuadrado que giraron

La figura es un(a): rombo o un cuadrado dadovuelta

-Tiene 4 lados iguales
-Es como un cuadrado que giraron
La figura es un(a): *rombo o un cuadrado dado vuelta.*

Imagen 5.1: Test Diagnóstico, ítem 1

R2. Un estudiante cuya respuesta a la misma pregunta se considera de nivel dos, hace las siguientes menciones:


a) Haz un listado de las características de la figura y asóciale uno o más nombres.

- 2 pares lados paralelos
- 4 angulos de 90° o rectos
- 4 vertices
- 4 lados de la misma medida

*Cuadrado

La figura es un(a): Cuadado

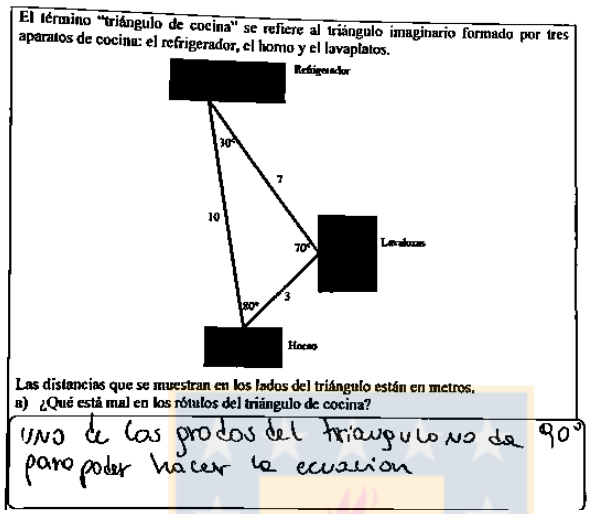
2 pares de lados paralelos
4 ángulos de 90° o rectos
4 vértices
4 lados de la misma medida

La figura es un(a): *cuadrado.*

Imagen 5.2: Test Diagnóstico, ítem 1

La mención de *"2 pares de lados paralelos"* que hace referencia a una propiedad, es la única característica de las mencionadas que determina que esta respuesta se encuentre en nivel dos. Como mencionan los autores Jaime y Gutiérrez (1998) en base a la teoría de niveles de Van Hiele, el estudiante muestra un razonamiento perteneciente a nivel dos, es cuando reconoce las propiedades como características de una figura, sin embargo, no deja de lado otras características de origen visual. En definitiva, sin aquella mención al paralelismo de lados, esta respuesta, habría sido una más correspondiente a nivel uno.

R1. En lo que respecta a la tercera característica de este proceso, entenderemos el uso de una propiedad imprecisa a la utilización incorrecta de una propiedad, es decir cuando el estudiante es consciente de que existe, sin embargo, no la comprende lo suficiente como para saber cuándo y cómo conveniente aplicarla. Por ejemplo:



"Uno de los grados del triángulo no da 90° para poder hacer la ecuación"

Imagen 5.3: Test Diagnóstico, ítem 5.

En la pregunta de la imagen al estudiante se le pide identificar los errores en los rótulos del triángulo, a lo que él responde *"uno de los grados del triángulo no da 90° para poder hacer la ecuación"*, interpretando de ella que el estudiante se ha dejado llevar por la apariencia del triángulo, asumiendo que este debía tener un ángulo recto (porque parecía haber uno) para poder corroborar la medida de los lados con el teorema de Pitágoras.

R2. Respondiendo a la misma pregunta anterior, tenemos la siguiente respuesta:

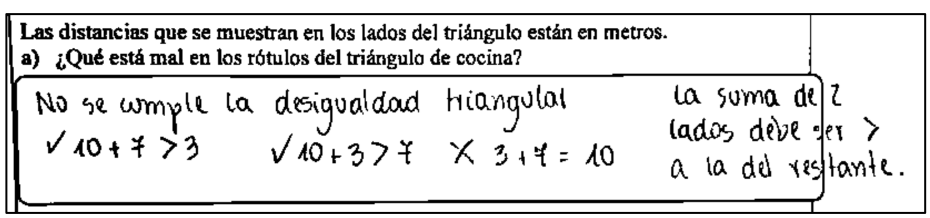


Imagen 5.4: Test Diagnóstico, ítem 5.

Según el proceso predominante en las respuestas esperadas a esta pregunta (reconocimiento) esta respuesta se considera de nivel dos, pues se menciona la propiedad que falla debido a los rótulos (desigualdad triangular). Pero si evaluamos únicamente respecto al proceso de reconocimiento, ignoramos la posibilidad de que su razonamiento sea superior en otro proceso implicado. Jaime y Gutiérrez (1998) mencionan que una pregunta puede implicar que el estudiante aplique más de un proceso en sus resoluciones, de hecho, en esta respuesta también está presente el proceso de demostración, pues además de mencionar y describir la propiedad, el estudiante mostró, cómo es que no se cumple la propiedad mencionada, llegando a un nivel tres (**D3**) pues su procedimiento muestra una deducción lógica y correcta.

R1. La imagen siguiente muestra un ejemplo de respuesta a un ejercicio en donde se debe construir una homotecia, cuyo centro es un punto P distinto del origen.

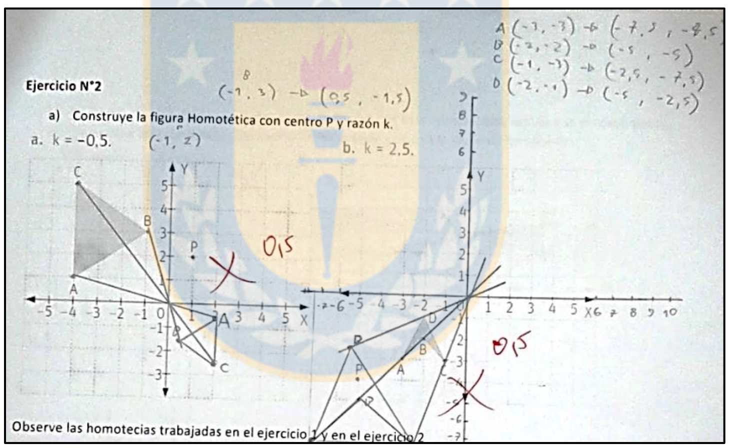
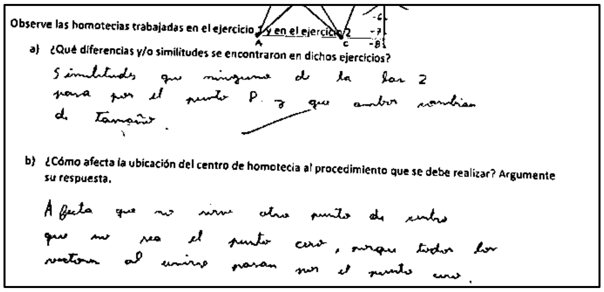


Imagen 5.5: Guía 2, Ejercicio 2.

Como se puede apreciar, los estudiantes replicaron el procedimiento que se realiza al construir una homotecia con centro en el origen, ignorando el punto P, siendo esto una muestra de cómo no son capaces de llevar un "método" de construcción a un contexto distinto.


Observe las homotecias trabajadas en el ejercicio 1 y en el ejercicio 2

a) ¿Qué diferencias y/o similitudes se encontraron en dichos ejercicios?

Similitudes que ninguna de las 2 pasa por el punto P. y que ambas cambian de tamaño.

b) ¿Cómo afecta la ubicación del centro de homotecia al procedimiento que se debe realizar? Argumente su respuesta.

Afecta que no sirve otro punto de centro que no sea el punto cero, porque todos los vectores al unirse pasan por el punto cero.

a) "Similitudes que ninguna de las dos pasa por el punto P y que ambas cambian de tamaño"
b) "Afecta que no sirve otro punto de centro que no sea el punto cero, porque todos los vectores pasan por el punto cero"

Imagen 5.6: Guía 2, ejercicio 2 – preguntas a y b.

R1. Estas respuestas nos dejan claro que su razonamiento corresponde a un primer nivel, puesto que la identificación de características que realizan, son solo respecto a lo que la imagen de la construcción errónea de la homotecia

Esta situación se ve corroborada en el siguiente registro de audio:

•Alumno1: Según yo no pasan por el P, pasan por el 0 (haciendo relación al origen del plano) no más.
(…)
•Alumno1: Ahí dice la pregunta que afecta que el centro sea P
•Alumno2: Si afecta po'. Entonces no habría otro punto que no fuese el 0 que sirve.
•Alumno1: Si con el 0 la figura queda aquí, entonces con el punto P debería quedar por acá po'.
Continúan haciendo cálculos para ver qué es lo que ocurre.
•Alumno2: Profe, ¿qué más se puede hacer aquí?
•Profesor: entonces si creen que esa es la opción deben registrar eso.
•Alumno2: Es que no es que creamos, es la opción.

Transcripción de Audio, Vestigio 8

En la anterior transcripción de audio se puede apreciar cómo es que además los alumnos concluyen que no sirve otro punto como centro de homotecia que no sea el origen.

R2. En el test de homotecia (**Anexo 4**) realizado la tercera clase, destaca que la mayoría de los estudiantes se consideró con un razonamiento de características de segundo nivel, con respuestas como las siguientes:

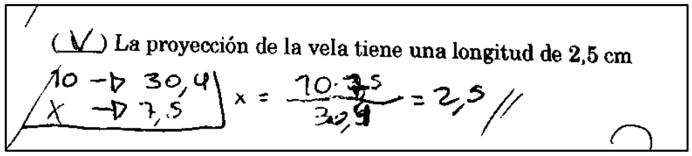
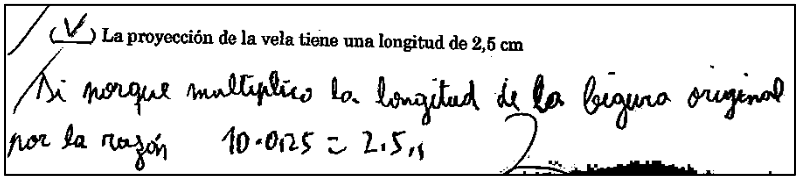


Imagen 5.7: Test de Homotecia, Ejercicio 3.



"Si porque multiplico la longitud de la figura original por la razón $10 \cdot 0{,}25 = 2{,}5$*"*

Imagen 5.8: Test de Homotecia, Ejercicio 3.

Ambas respuestas, corresponden a la misma pregunta y fueron consideradas de segundo nivel, puesto que para llegar a ellas es necesario reconocer que se puede hacer uso de proporciones, siendo esta una propiedad de los trazos en homotecia, y en ambos casos fue aplicado de manera correcta. Estos tipos de respuestas fueron vistas en la mayoría de las producciones de los estudiantes a este test, por ello, se destaca su capacidad de aplicar esta propiedad en diversas situaciones.

R1. En contraparte se encuentra la siguiente respuesta, correspondiente a la misma pregunta mencionada en los anteriores dos ejemplos:

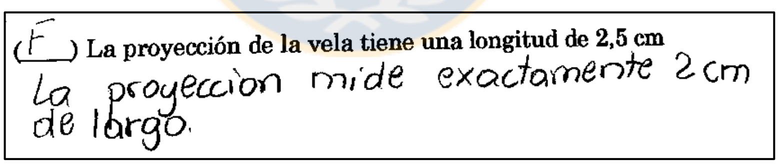
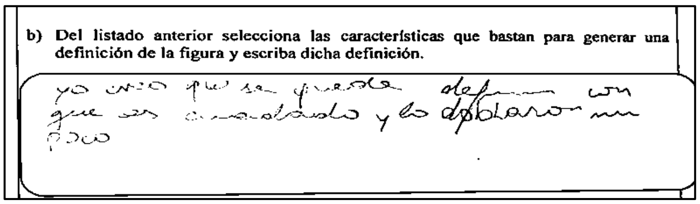


Imagen 5.9: Test de Homotecia, Ejercicio 3.

Esta respuesta corresponde primer nivel, puesto a que se basa estrictamente en lo visual, justificando su respuesta en una medida obtenida con un instrumento (regla) de la imagen insertada en el test de homotecia (**Anexo 4**).

Formulación de definiciones (F1-F2-F3)

F1. Fueron reiterados los casos en donde los estudiantes definían con listados de características visuales de lo solicitado, o bien, respuestas que describen visualmente lo que parece la figura. Por lo anterior es que son consideradas del primer nivel.

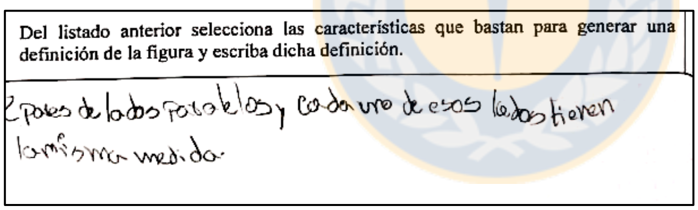

b) Del listado anterior selecciona las características que bastan para generar una definición de la figura y escriba dicha definición.

yo creo que se puede definir con que es cuadrado y lo doblaron un poco

"yo creo que se puede definir con que es cuadrado y lo doblaron un poco"

Imagen 5.10: Test Diagnóstico, ítem 1.

F2. Las definiciones que se consideran de nivel dos y tienen forma de listado, se distinguen del primer nivel cuando se incluyen propiedades, es decir, se discrimina de igual manera que en los dos primeros ejemplos descritos. Sin embargo, cuando el estudiante intenta formular una definición, ésta se distingue de una de nivel tres, cuando las propiedades y características entregadas son más o menos de las necesarias para definir la figura.


Del listado anterior selecciona las características que bastan para generar una definición de la figura y escriba dicha definición.

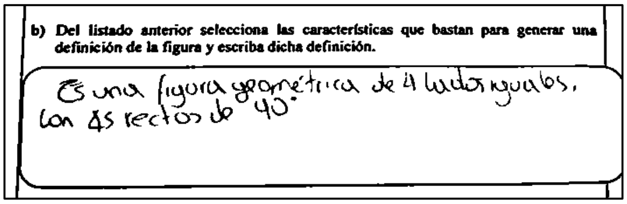
2 pares de lados paralelos y cada uno de esos lados tienen la misma medida

"2 pares de lados paralelos y cada uno de esos lados tienen la misma medida"

Imagen 5.11: Test Diagnóstico, ítem 1.

Además de la falta de formalidad para considerarse una definición, a ésta respuesta le falta al menos una característica para reconocer que se hace referencia a un cuadrado, que es la figura que se les solicita definir.

F3. En cambio, una definición de nivel tres destaca por ser más precisa.



"Es una figura geométrica de 4 lados iguales con ángulos rectos de 90°"

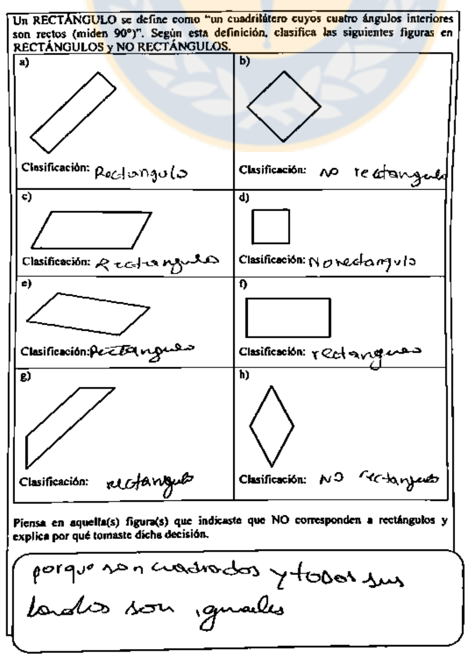
Imagen 5.12: Test Diagnostico, ítem 1.

Como se muestra en la imagen, esta respuesta cae en el tercer nivel puesto que presenta mayor formalidad, aunque redunda ligeramente al mencionar *"ángulos rectos de 90°"* esto es una situación que según los autores Jaime y Gutiérrez se permite hasta este nivel.

Uso de definiciones y Clasificación:

Estos procesos se vieron únicamente en un ejercicio del test diagnostico en el que se vieron implicados de manera conjunta. El ejercicio constaba de una definición de rectángulo respecto a la que los estudiantes debían clasificar una serie de figuras (todos cuadriláteros) en rectángulos o no rectángulos.

U1-C1. Comencemos por mencionar que un estudiante que no comprende definiciones de figuras, no podrá clasificarlas correctamente.

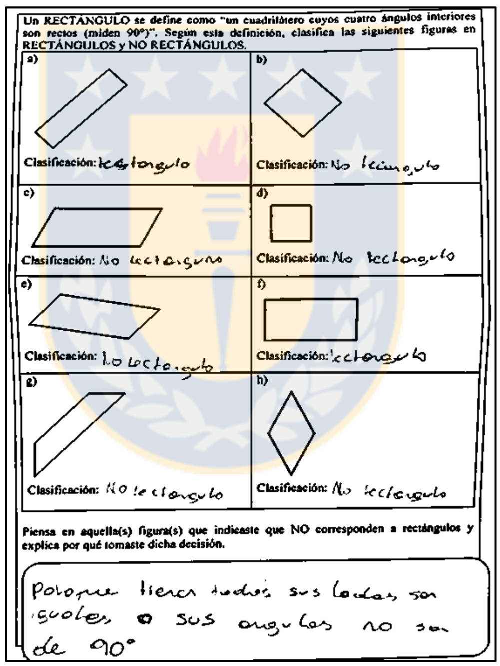


"porque son cuadrados y todos sus lados son iguales"

Imagen 5.13: Test Diagnóstico, ítem 4.

Como muestra la imagen, el estudiante que ha respondido, ha identificado como rectángulo a todos aquellos cuadriláteros que tienen un ancho distinto a su largo, ignorando las dimensiones de sus ángulos, lo que deja ver que no ha comprendido la definición y por tanto clasifico erróneamente las figuras, es por esto que se considera un razonamiento de primer nivel.

U2-C2. Los estudiantes considerados de razonamiento correspondiente a nivel dos han clasificado como rectángulos solo a aquellos cuadriláteros que tienen ángulos rectos, pero descartaron a los cuadrados, por tener lados iguales. Siendo que la definición dice que un rectángulo es *"un cuadrilátero cuyos cuatro ángulos interiores son rectos (miden 90°)"*.

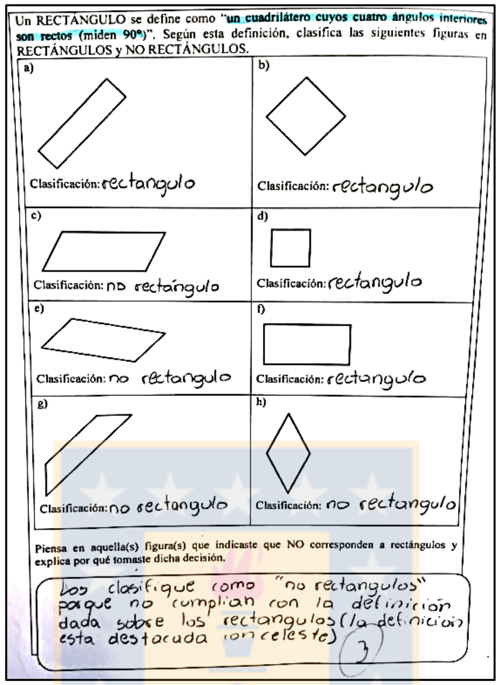


"porque tienen todos sus lados son iguales o sus ángulos no son de 90°"

Imagen 5.14: Test Diagnóstico, ítem 4.

Esto se debe a que cuando han adquirido ya una definición previa de una figura u objeto matemático los estudiantes de razonamiento de nivel dos, no aceptan otras que contradigan las suyas, esto incluye a las definiciones inclusivas, como lo fue la entregada en este diagnóstico.

U3-C3. Como es de esperar del nivel que consigue el mayor logro en clasificación (puesto que no se distingue en los posteriores) los estudiantes de tercer nivel, clasifican las figuras correctamente, por lo que comprenden y aceptan las definiciones, inclusivas o exclusivas.


Un RECTÁNGULO se define como "un cuadrilátero cuyos cuatro ángulos interiores son rectos (miden 90º)". Según esta definición, clasifica las siguientes figuras en RECTÁNGULOS y NO RECTÁNGULOS.

a) Clasificación: rectangulo
b) Clasificación: rectangulo
c) Clasificación: no rectángulo
d) Clasificación: rectangulo
e) Clasificación: no rectangulo
f) Clasificación: rectangulo
g) Clasificación: no rectangulo
h) Clasificación: no rectangulo

Piensa en aquella(s) figura(s) que indicaste que NO corresponden a rectángulos y explica por qué tomaste dicha decisión.

Los clasifique como "no rectangulos" porque no cumplian con la definición dada sobre los rectangulos (la definición esta destacada con celeste)

3

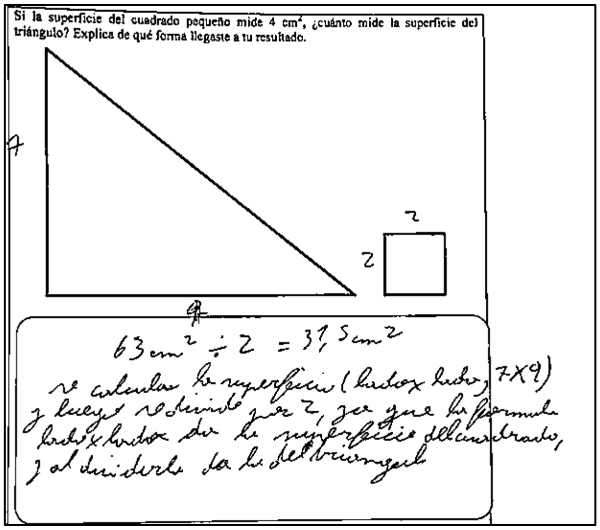
"los clasifique como "no rectángulos" porque no cumplían con la definición dada sobre rectángulos (la definición esta destacada con celeste)"

Imagen 5.15: Test Diagnóstico, ítem 4.

Demostración (D1-D2-D3)

Este proceso también se vio únicamente en el test diagnóstico y los casos hallados fueron bastante puntuales, puesto que la mayoría de los estudiantes no respondían estas preguntas o bien sus respuestas no permitían distinguir algún nivel en particular.

D1. Todos los estudiantes cuyas respuestas se consideraron en este nivel tenían en común errores al interpretar las preguntas en que predominaba este proceso.

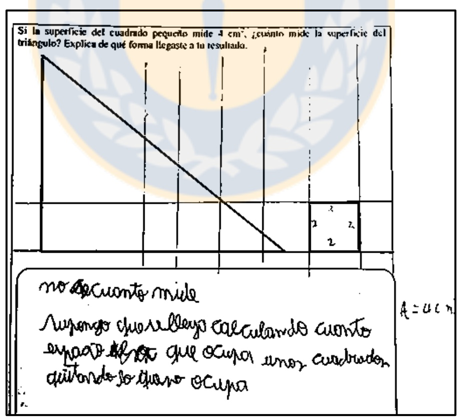


*"$63cm^2 : 2 = 31{,}5cm^2$
Se calcula la superficie (lado x lado, 7x9) y luego se divide por 2, ya que la formula lado x lado da la superficie del cuadrado, y al dividirla da la del triángulo"*

Imagen 5.16: Test Diagnóstico, ítem 3.

En este caso se puede apreciar como el estudiante describe su procedimiento para encontrar la superficie del triángulo, sin embargo, ignora el hacerlo respecto al cuadrado dado, y lo calcula midiendo los lados con regla y aplicando la fórmula de área de un triángulo.

D2. Un caso distinto en la misma pregunta es un estudiante que realiza lo siguiente:



*"no sé cuánto mide
Supongo que se llega calculando cuanto espacio es que ocupa unos cuadrados quitando lo que no ocupa"*
.

Imagen 5.17: Test Diagnóstico, ítem 3.

La intención de hacer una red de cuadrados, tomando en cuenta las dimensiones del entregado, es correcta y lógica para llegar a la respuesta de lo solicitado, sin embargo no concluye, y finaliza estimando como debería seguir el procedimiento, por esta razón se considera un estudiante que manifiesta un razonamiento de segundo nivel.

D3. Un razonamiento de nivel tres se encuentra ya ejemplificado en la imagen 5.4, de la que se habló previamente, pero esta vez mostraremos un caso relacionado con los ejemplos anteriores, respecto al ejercicio del tercer ítem del Diagnóstico.

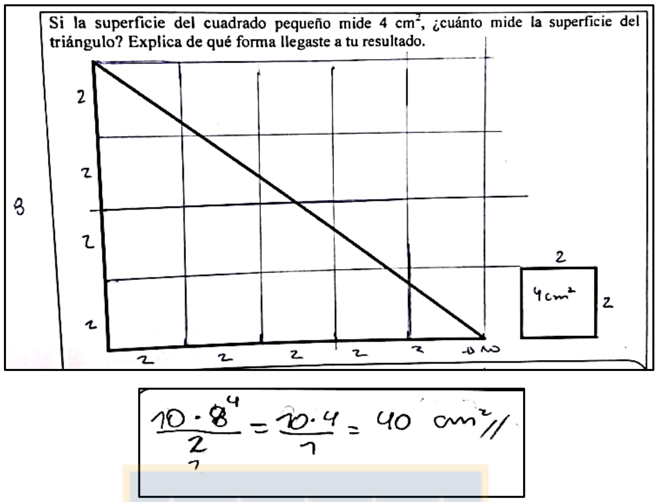


Imagen 5.18: Test Diagnóstico, ítem 3.

Se aprecia en el procedimiento que construye sobre el triángulo una red de cuadrados, considerando las dimensiones del cuadrado entregado, esta vez, completando un rectángulo de igual altura y base que el triángulo, a este le calcula el área, sin ignorar las dimensiones dadas, para finalmente dividir el resultado por dos, llegando a la solución esperada. El procedimiento que sigue es lógico y acertado, en el que además muestra un manejo de propiedades que aplica de manera correcta, por esta razón se considera esta respuesta en un nivel tres de razonamiento.

Para finalizar este análisis destacamos lo siguiente de cada nivel encontrado en la muestra:

- Los estudiantes que presentan un razonamiento de primer nivel de Van Hiele manejan únicamente información visual a la hora de responder es por este motivo que su razonamiento no se puede considerar propiamente matemático.
- Los estudiantes de segundo nivel de razonamiento aún que se siguen basando en la percepción física de los objetos, ya reconocen las propiedades de las figuras como características de éstas.

- Aquellos estudiantes que razonan según el tercer nivel están iniciando el desarrollo de un razonamiento más riguroso, con procedimientos que no carecen de lógica, haciendo el uso correcto de propiedades y definiciones.

CAPÍTULO VI

Discusión y Conclusiones

6.1 Otros factores relacionados a los resultados

6.1.1 Paradigmas geométricos de Kuzniak

Se identifica que hay diferencias entre el paradigma observado en la estructura de las clases realizadas por la profesora y la forma en que enfocan el trabajo los alumnos en el transcurso de la unidad de homotecia.

Esta discordancia se puede apreciar directamente al analizar los instrumentos que fueron aplicados, por ejemplo, en la primera guía de trabajo de homotecia **(Anexo 2)** una de las preguntas busca que el estudiante deduzca la forma en que varía el área al duplicar el valor de la constante de homotecia, a partir de un caso particular donde las imágenes presentes eran sólo una referencia. Sin embargo, el accionar de los estudiantes no se concentró en el razonamiento respecto al área, sino que dieron más importancia a las medidas inexactas que presentaba la figura, a causa de eso, algunos mencionaban que "el ejercicio estaba malo".

Tras no poder resolver el ejercicio, la sugerencia de la Profesora fue proponer una figura más simple, un cuadrado, pero lejos de aprovechar el cálculo directo que se puede hacer con el área de esta figura, los alumnos construían el cuadrado (utilizando regla) para comprobar las áreas, no logrando asociar directamente una deducción axiomática.

Es interesante esta observación dado que la Geometría I, tiene características asociables aln el nivel 1 de Van Hiele, que recordemos, se basa en la observación, manejo tangible del objeto de trabajo e instrumentos que apoyan el desarrollo de las actividades, como regla o compás.

Una posible causa de este contraste entre paradigmas, puede tener fundamentos a partir de la forma de explicar algunos conceptos. Ejemplo de lo anterior se pudo evidenciar en la clase expositiva que la profesora realiza durante nuestro periodo de observación, en la cual los alumnos estaban condicionados a responder en base a lo que se observaba en una presentación. En el extracto de transcripción de audio que se puede apreciar a continuación, se observa una conducta relacionada:

(…)
Profesora: Ahora veamos, ¿qué tenemos ahí? ¿Señor López? (señalando una imagen en la presentación)
Alumno8 (López): Arboles.
Profesora: Arboles. Más que ver árboles. ¿Qué se ve?
Alumno 9: Una ilusión óptica.
Profesora: Porque una ilusión óptica. ¿Dónde está su ilusión óptica?
Alumno 9 (respondiendo): En el tamaño de los árboles.
(…)

Se puede pensar en otra posible causa, si se considera la disposición que tenía la profesora para entregar distintos materiales como reglas y el uso de calculadora, en efecto, los alumnos estaban acostumbrados a tener esa clase de instrumentos.

De cualquier manera, con esta información no es posible asegurar si realmente hay una relación directa entre el paradigma en el cual trabajan y su razonamiento geométrico, dado que ambos pueden variar sus resultados dependiendo de la unidad en específico, y de la actitud que tienen los estudiantes durante el periodo observado. Sin embargo a modo de proyección se ve conveniente el estudiar más a fondo la estructura que sigue el aprendizaje de los estudiantes y el método de docencia, sugiriendo para esto utilizar la teoría de Espacio de trabajo geométrico que permite comprender la circulación entre los planos epistemológico y cognitivo.

6.1.2 Registros semióticos

En el curso observado se pudieron notar dos tipos interesantes de respuestas. La primera es la que presenta dificultad para poder reproducir algún tipo de representación gráfica o geométrica y la segunda, corresponde a la existencia de diversas representaciones bien elaboradas, o a veces incompletas que no tienen ningún razonamiento explicitado o no dan respuestas a las preguntas. Esta podría ser otra de las causas por la que los alumnos no alcanzan un razonamiento geométrico de mayor nivel, ya que en palabras de Duval *"No hay noesis sin semiosis*".

Un ejemplo de lo anterior es el siguiente:

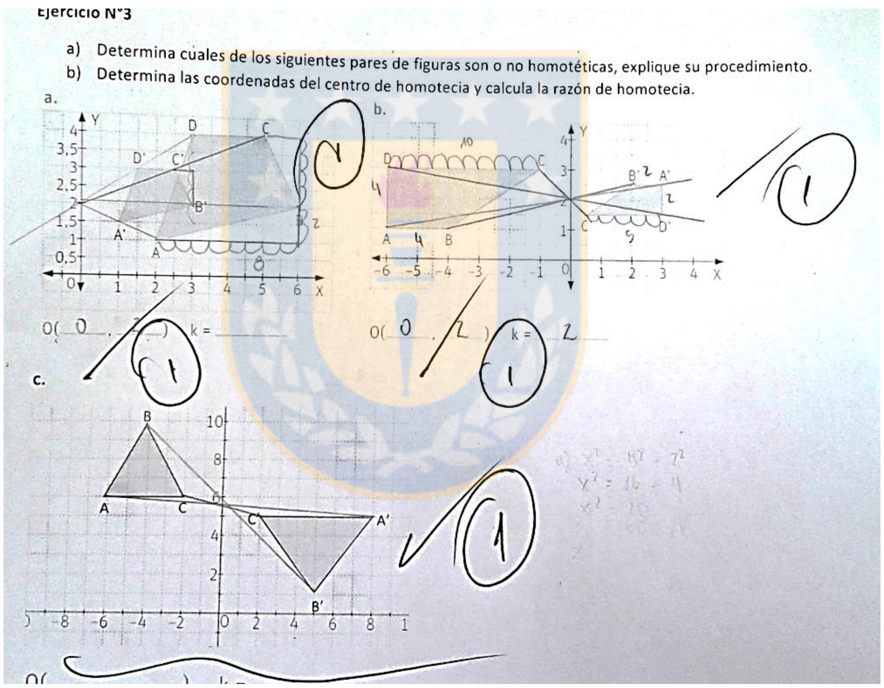


Imagen 6.1: Ejercicio 3 (Guía 2, Homotecia Vectorial)

En este ejercicio los alumnos intentan una representación de la homotecia mediante el método que explicó la docente (este es el de unir los puntos y buscar el centro de homotecia). Los alumnos reproducen este método, a pesar de no ser posible de aplicar en el ejercicio (C), y el alumno no logra obtener las respuestas a las preguntas propuestas. Este ejercicio es aún más interesante si se considera que lo que sí lograron identificar era el valor de la razón k en el ejercicio (b), ya que como se ve en la imagen este valor se calcula a partir de la proporcionalidad de trazos, pero éste solo se comprueba con aquellos en que es posible "contar la cantidad de cuadrados" en cada uno de ellos. Esto último refleja aún más una dependencia de medidas fácilmente cuantificables.

Otro punto interesante de observar, es que los alumnos intentaron reproducir métodos. Esto se refleja en múltiples casos y puede ser una de las causantes de que limiten su razonamiento y se adhieran a un trabajo mecánico.

En el ejemplo que se presenta a continuación, se refleja claramente esta clase de pensamiento:

"Alumno1: ¿Y qué hay que hacer con esto?

Alumno2: ya, pero, mira, ahí dice que A es (1,2) o sea que ya está…

Alumno1: No mira, A lo multiplico por 2 y ahí está el nuevo punto.

Profesora: Y ¿cómo sabe?

Alumno1: Porque eso es igual a lo que hicimos la clase pasada."

6.2 Comparación de lo esperado para el curso y sus resultados

Según el programa de matemática con vigencia al año 2018 del ministerio de educación, el nivel de primero medio para la unidad de geometría debe cumplir con un propósito y lograr el desarrollo de ciertas habilidades.

Propósito (Referido a homotecia)**:**

En esta unidad, se espera que las y los estudiantes sean capaces de:

- Determinar, desde lo concreto, la razón de una homotecia. Para ello, trabajan con representaciones concretas, como fotos, las que han sido ampliadas en una razón k. Se pretende que relacionen la homotecia con procesos naturales, como el funcionamiento del ojo, y con objetos creados por el ser humano, que amplifican o reducen imágenes u objetos a distancia. Como objetivo final, deben lograr hacer dibujos ampliados por un factor determinado, y viceversa, y construir objetos que respondan al concepto de homotecia (…)

Habilidades (Para toda la unidad de geometría):

- **H1**: Describir relaciones y situaciones matemáticas usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos. (Argumentar)
- **H2**: Explicar: - Soluciones propias y los procedimientos utilizados. - Demostraciones de resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas. - Generalizaciones por medio de conectores lógicos y cuantificadores, utilizándolos apropiadamente. (Argumentar)
- **H3:** Realizar demostraciones simples de resultados e identificar en una demostración si hay saltos o errores. (Argumentar)
- **H4**: Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y validez de estas. (Representar)

Se debe observar que el propósito que se refiere a la unidad de homotecia menciona las palabras “determinar”, “relacionar” y la frase “lograr hacer dibujos ampliados por un factor…”, ya que aunque no se mencione directamente esto implica que los alumnos de este nivel deben tener la capacidad de Comprender y Aplicar el concepto de homotecia, por otro lado como se puede apreciar las habilidades principales que se desarrollan en el capítulo de geometría es la correcta argumentación y representación.

En Resumen, un alumno de Primero medio que completa la unidad de homotecia debe:

1) Comprender el concepto de homotecia.
2) Aplicar el concepto de homotecia.
3) Argumentar adecuadamente sus conclusiones.
4) Representar o utilizar representaciones utilizando el concepto de homotecia.

Aunque no se mencione en la unidad, el programa indica que en forma transversal son cuatro las habilidades que se desarrollan, sin embargo, la resolución de problemas y la modelación se incluyen de forma implícita en la habilidad de aplicar el concepto.

6.2.1 Desarrollo de habilidades en geometría

Para comenzar este análisis, primero se buscará comprender como se han desarrollado las habilidades en los estudiantes según el test de diagnóstico aplicado. Posteriormente se revisará si existe una diferencia al comparar los resultados con los que muestran tras terminar la unidad de homotecia.

A continuación, se presenta una tabla, que ya ha sido expuesta en el marco metodológico, en donde se presentan las habilidades necesarias para el desarrollo del test diagnóstico aplicado.

Tabla de habilidades del Test diagnóstico.

Ítem	Contenido.	Habilidades Tabla original	Habilidades identificadas para esta investigación
1.a	- Cuadriláteros.	- Representar.	- Representar. - Argumentar y comunicar
1.b	- Cuadriláteros.	- Representar.	- Representar. - Argumentar y comunicar
2	- Polígonos.	- Argumentar y comunicar.	- Argumentar y comunicar.
3	- Área de figuras planas.	- Argumentar y comunicar.	- Argumentar y comunicar.
4	- Cuadriláteros.	- Resolver problemas. - Argumentar y comunicar.	- Representar - Resolver problemas. - Argumentar y comunicar.
5.a	- Triángulos.	- Resolver problemas. - Argumentar y comunicar.	- Resolver problemas. - Argumentar y comunicar.
5.b	- Triángulos.	- Resolver problemas. - Argumentar y comunicar.	- Resolver problemas. - Argumentar y comunicar.

Argumentación y comunicación

Según la tabla con la que se construye el instrumento la habilidad de argumentar y comunicar destaca en el instrumento lo que resulta de interés siendo que **H1 H2** y **H3** se enfocan en esta, sin embargo, como se ha hecho notar en múltiples ocasiones anteriormente, los argumentos tienden a corresponder a características visuales, y si bien a veces presentaban lenguaje matemático este igual tenía un enfoque físico. Esto es importante si se considera que los alumnos de nivel 3 son capaces de utilizar conectores lógicos, y de elaborar párrafos, no de forma completa, pero con una mayor rigurosidad matemática que es justamente lo que se busca en la argumentación en matemática, sin embargo los casos hallados en este nivel fueron puntuales y escasos.

Por todo lo anterior el test de diagnóstico refleja que los alumnos aún no han adquirido una correcta habilidad para argumentar y comunicar en matemática.

Representación

Los alumnos si presentan un adecuado uso de esta habilidad **H4**. Para comprender el nivel de manejo destacamos las descripciones de Duval, quien muestra como cada cambio de registro influye en esta habilidad, si bien, la mayor parte de lo que debieron hacer fue utilizar lenguaje escrito, en la pregunta 4 del test diagnóstico destaca la capacidad de comprender una definición, de aplicarla en los cuadriláteros presentados y luego nuevamente llegar a una argumentación, esto es un importante ejemplo acerca de cómo entienden distintas representaciones los alumnos, por lo anterior se intuye que los alumnos utilizan adecuadamente esta habilidad.

6.2.2 Habilidades adquiridas tras terminar la unidad de homotecia

Argumentación y comunicación

Análogo a las conclusiones del test de diagnóstico, los resultados en cuanto a la medición en la escala de Van Hiele fueron muy similares. La gran mayoría de los alumnos estuvo en los niveles uno y dos de esta escala, concentrándose principalmente en el primero, por ende, los alumnos aún no saben utilizar correctamente los conectores lógicos, sus definiciones suelen atribuirse a un listado de propiedades, muchas veces incompleto, y sus argumentos tienden a enfocarse en lo físico o visual.

Se debe notar que **H2** y **H3** se refieren a la habilidad de argumentar ligado a demostrar, y una de las cosas que se observó es que los alumnos no comprenden lo que implica demostrar, es quizá este uno de los motivos por los que no hayan adquirido la rigurosidad para dar argumentos matemáticos**.** Otra situación de interés que sucedió en clases, fue que cuando los estudiantes respondían a una pregunta utilizando un argumento no matemático, la docente a cargo no les exigía formalidad matemática, y respondía a las dudas con frases como: “Si usted cree que es así, escriba eso”; es posible que estas acciones también hayan influido en la capacidad del alumno para argumentar y comunicar matemáticamente.

Representación

Para desarrollar esta habilidad se espera que los alumnos necesiten utilizar la representación como un recurso para comunicar, expresar o facilitar sus ideas, sin embargo, en esta unidad, construir adecuadamente una homotecia es el contenido en sí; es por esto que la habilidad no es solo la capacidad del alumno para representar figuras en un plano, o en un plano cartesiano, sino también está ligada a la comprensión del concepto de homotecia. En efecto, los alumnos conocen el lenguaje escrito, conocen los elementos del plano, saben cómo ubicar puntos, leen bien las coordenadas, lo que fue comprobado tras la aplicación de la guía de homotecia vectorial. Según la teoría de registros semióticos de Duval el conocer los elementos de los registros es esencial para saber representar, sin embargo, la habilidad del alumno se vio opacada por las constantes dudas respecto al concepto de homotecia y por el intento de imitar el procedimiento que se les mostró. Por todo lo anterior, se infiere que a pesar de que los alumnos si manifiestan la habilidad de representación, esta no pudo ser bien desarrollada en la unidad de homotecia.

Comprensión y Aplicación de la homotecia

El propósito señalado en el programa implica lograr ambas cosas, sin embargo, como ya se mencionó, los alumnos no fueron capaces de construir las homotecias solicitadas, ni de comprender bien las relaciones de la razón de homotecia y la homotecia resultante. Esto ha quedado evidenciado en todos los instrumentos medidos (guías, test de proceso, evaluación final, etc…) pues se ve que los alumnos entendieron que hay una relación que tiene que ver con ampliar o reducir una figura, y que esta puede quedar invertida si la razón es negativa. Si limitamos el análisis sólo a lo propuesto en el programa, los alumnos sí logran relacionar homotecia y la razón, al menos en forma general, entendiendo que ésta afecta la proporción de la figura resultante, pero no logran comprender todas las relaciones asociadas a su magnitud. Además, se da una clase expositiva en donde se les muestran ejemplos de homotecia en la vida cotidiana, y los alumnos que enunciaron frases relacionadas al concepto usualmente lo relacionaban a semejanza o proporción. Por esto se puede decir que, según lo esperado en el propósito de la unidad planteada en el programa, sí comprendieron lo que es una homotecia.

Pese a esto, no fueron capaces de aplicarla correctamente. De hecho, los estudiantes sólo pudieron construir homotecias si lograban seguir un proceso metódico simple, sin embargo, por ejemplo, al momento de graficar con centros que no corresponden al origen no lograron obtener los resultados. Esto se debe a que los estudiantes solían replicar los procedimientos de la profesora, en el caso mencionado imitaron el procedimiento que se debe realizar cuando el centro es el origen. Tal como se les mostró en pizarra, los alumnos manifestaron ideas de que una homotecia tiene rectas que se cruzan en un punto, que este punto es el centro de homotecia, e intentaban trazar dichas rectas; por otra parte, algunos alumnos las obviaban e inmediatamente ubicaban una figura más grande o más pequeña en algún lugar del plano y luego intentaban unir los vértices con regla. Esto demuestra que los alumnos no comprendieron como construir una homotecia ni cómo funciona realmente la razón, pero sí tienen la idea de lo que debería resultar de una homotecia.

6.2.3 Objetivos de la unidad de homotecia y resultados de la muestra

Objetivos asociados a homotecia:

- **OA 8:** Mostrar que comprenden el concepto de homotecia.
- **OA 11:** Representar el concepto de homotecia de forma vectorial, relacionándolo con el producto de un vector por un escalar, de manera manual y/o con software educativo.

Para cada objetivo el programa incluye una serie de indicadores que permiten la evaluación de la adquisición de este, para aprovechar esta información, se ha elaborado una tabla en la que se presenta el máximo nivel de razonamiento esperado, tomando en consideración la descripción del indicador y las habilidades o procesos de razonamiento asociados a este, y comparándolo al demostrado por los alumnos tras terminar la unidad de homotecia. Como criterio para la comparación se han dejado sólo aquellos indicadores que sí se han trabajado de alguna manera en el aula de clases y de los que además, se dispone de la suficiente evidencia para justificar la clasificación del razonamiento del curso en la escala de Van Hiele.

Indicadores de evaluación	Habilidades y procesos	Nivel esperado	Nivel alcanzado
•Reconocen las propiedades de la homotecia, como paralelismo, conservación del ángulo y conservación de razones.	Reconocimiento	2	2
•Conjeturan sobre el factor de la homotecia	Argumentación. Reconocimiento. Formulación de definiciones.	3	2
•Realizan homotecias mediante el centro y el factor dado.	Representar Uso de definiciones.	3	1 y 2
•Aplican la homotecia en modelos ópticos, como la "cámara oscura", el ojo humano y fenómenos de la Tierra y el universo.	Resolución de problemas Representación Argumentación Modelación Reconocimiento	3	2

Como se puede apreciar, en general el tipo de razonamiento que se espera alcanzar es de nivel 3, puede ser superior pero se considera 4 como un nivel sobresaliente, es decir aunque es posible en casos muy particulares no es esperable para un grupo de curso. Con respecto a estos indicadores se puede ver que los alumnos se encuentran desarrollando el pensamiento de nivel 2, es decir son capaces de contestar de forma incompleta o no bien estructurada respecto a las preguntas solicitadas, ya que estos alumnos pueden reconocer y comprender las propiedades relacionadas al concepto, pero no son capaces de utilizar o expresar bien las secuencias lógicas que las unen. Este razonamiento tiene como consecuencia el no lograr utilizar bien las definiciones salvo que el alumno entienda claramente cada elemento de esta, motivo que permite explicar por qué los alumnos mostraron grandes dificultades al momento de construir una homotecia. (Notar que en ese indicador los alumnos oscilan entre el nivel 1 y 2).

Es de interés el destacar que la estructura de los diagnósticos usuales presenta preguntas que priorizan el proceso de reconocimiento, y suelen contener ejercicios de aplicación de estructura simple; ya que usualmente se piensa que basta para ver si los alumnos recuerdan o no algún contenido. Si se aplicara un diagnóstico usual a los alumnos de esta muestra los resultados serían muy favorables dado que el razonamiento de nivel 2 es suficiente para aprobar este tipo de diagnósticos. Sin embargo, un diagnóstico enfocado en el razonamiento mostraría claramente como los alumnos solo han logrado una comprensión de propiedades o conceptos aislados y no han sido capaces de comprender como se relacionan unas con otras.

Conclusiones

El objetivo general de esta investigación se relaciona con la realización de un diagnóstico basado en el razonamiento geométrico de los estudiantes de un primero medio y la comparación de sus resultados con lo esperado por el ministerio de educación para dicho nivel, con respecto a esto se han podido obtener las siguientes conclusiones:

1. En base en los resultados obtenidos durante el proceso de investigación, se puede apreciar que más de la mitad de los estudiantes, en la unidad de Homotecia, razonan según las características del primer nivel del modelo de Van Hiele, lo que se ve reflejado tanto en el test diagnóstico aplicado como en el transcurso de la unidad observada. Los alumnos que manifiestan un razonamiento de este primer nivel, responden principalmente con argumentos basados en lo visual, aun si utilizan lenguaje matemático, el sentido de sus respuestas es describir características físicas de los objetos o indicaciones como posiciones, orientación, etc. También se hace presente un mal uso de propiedades matemáticas o el uso impreciso de estas.

2. Los alumnos que superaron el primer nivel se encuentran en un proceso de adquisición del nivel dos de Van Hiele, siendo el nivel tres un razonamiento logrado sólo en casos específicos durante el proceso. Se habla de proceso de adquisición porque los alumnos no presentaron un cumplimiento de todas las características de este. A pesar de ya poder reconocer y utilizar las propiedades matemáticas, sus respuestas se caracterizaron por la falta de completitud y por descripciones informales que no limitan bien la interpretación de algunas respuestas. Es importante notar que en términos de procesos asociados al razonamiento, independiente de las posibilidades que otorga la redacción de algunas preguntas, los alumnos responden a estas como si fueran preguntas de reconocimiento, precisamente este tipo de preguntas sólo permiten hacer diferenciación entre el nivel 1 y nivel 2 de Van Hiele y esta forma de abordarlas podría estar influyendo en su desarrollo.
3. Con respecto a estos resultados destacan algunas situaciones de su contexto. Una es la disposición de instrumentos de medición para todos los alumnos, los alumnos evidencian la necesidad de medir y de contar con medidas exactas de las figuras

propuestas, situación que demuestra el apego instrumental y físico que caracteriza los razonamientos de bajo nivel. Otra situación de interés es el permiso que tienen los alumnos para responder con argumentos no matemáticos; en caso de hacerlo la indicación que se les da no es la de mejorar la forma de responder, sino más bien la de escribir lo que se estime correcto, esta situación no permite adquirir la rigurosidad de la argumentación en matemática y podría ser por tanto un factor influyente en la falta de desarrollo de dicha habilidad, esto es aún más importante si se sabe que la correcta argumentación matemática está muy ligada a los razonamientos de tercer nivel o superior. Por último se debe mencionar que el tipo de problemas que enfrentan no suele incluir ni la habilidad de elaborar definiciones ni la necesidad de demostrar, que son aquellas que propician el desarrollo de razonamiento de nivel 3 y mayor; y aquellas cuya redacción sí permite una amplia gama de respuestas, las responden propiciando el proceso de reconocimiento.

4. Los alumnos no han superado los estándares del ministerio, en primer lugar se observó que los alumnos no logran cumplir con todos los indicadores asociados a los objetivos de la unidad de homotecia que trabajaron, aquellos que cumplen con lo esperado deberían razonar según las características de un nivel 3 o superior, pero como ya se mencionó los alumnos aún se encuentran desarrollando el segundo nivel. Aún más , al revisar las habilidades involucradas en este trayecto es posible notar que los alumnos solo consiguen un desarrollo parcial en estas, ya que no lograron ni comprender ni aplicar el concepto de homotecia en su totalidad, ni tampoco lograron cumplir con una argumentación matemática adecuada.

Esta última conclusión lleva directamente a plantear una serie de interrogantes: ¿Cómo es posible que estudiantes que obtienen resultados sobresalientes en las pruebas estandarizadas, no puedan razonar adecuadamente en geometría? ¿Por qué es posible conseguir buenos resultados sin lograr un desarrollo correcto de las habilidades? ¿Puede ser que la estructura de dichos instrumentos permita prescindir de estas capacidades? Podría ser interesante realizar un análisis que permita identificar por qué se dio esta situación.

Tras terminar esta investigación es clara la relación que existe entre la forma de razonar matemáticamente y el desarrollo de las habilidades matemáticas, es importante por lo tanto considerar que la forma en que los alumnos estructuran o emplean sus ideas no debe ser ignorada, para lograr esto es conveniente desarrollar en los estudiantes la capacidad de argumentar matemáticamente , pues es en ese momento en donde el alumno debe decidir cómo hilar todas las propiedades, términos y conceptos que él conoce , y por lo tanto no excluir de la enseñanza los ejercicios relacionados a definir y demostrar. Sin embargo para poder diseñar un proceso adecuado que permita este tipo de desarrollo es necesario conocer en primer lugar de qué forma esta razonando el estudiante, y por ende existe la necesidad de utilizar diagnósticos que no dejen fuera este tipo de enfoque.

Referencias

1. Beltrametti, M., Esquivel, M. y Ferrarri, E. (2005). Evolución de los niveles de pensamiento geométrico de estudiantes de profesorado en Matemática
2. Bruner, J. (1978). The role of dialogue in language acquisition' In A. Sinclair, R., J. Jarvelle, and W. J. M. Levelt (eds.) The Child's Concept of Language. New York: Springer-Verlag.
3. Burger, W.F.; Shaughnessy, J.M. (1986): Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 17 n° 1, pp. 31-48.
4. Crowley, M. (1987). El Modelo de Van Hiele.
5. de la Torre Fernández E., Pérez Blanco M. (2008): Paradigmas y espacios de trabajo geométricos en los libros de texto de la ESO E Radio Comunicaciones SEIEM, 2008
6. Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (eds.). Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) Study [Chapter 2.2]. The Netherlands: Dordrecht, Kluwer, pp. 37-52.
7. Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view? En C. Mammana y V.
8. Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basis Issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (eds.). Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME. Cuernavaca, México. Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications-The Ohio State University, pp. 3-26.
9. FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. (2010). Investigación en educación matemática. Recorridos históricos y metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados.
10. Fouz, F. y De Donosti, B. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría. Un paseo por la geometría.
11. Fuys, D., Geddes, D. y Tischler, R. (1988). The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents (Journal for Research in Mathematics Education monograph 3). Reston, EE. UU.: NCTM.

12. García, G. y Serrano, C. (1999). La comprensión de la proporcionalidad, una perspectiva social y cultural. Bogotá: Grupo Editorial Gaia.
13. Gutiérrez, A., Jaime, A. y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. Journal for Research in Mathematics Education, 22(3), pp. 237-251.
14. Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. Focus on Learning Problems in Mathematics. Special Issue Elements of Geometry in the Learning of Mathematics 20(2-3), 27-46
15. Gutiérrez, Angel & Jaime, Adela. (1998). On the Assessment of the Van Hiele Levels of Reasoning. Focus on Learning Problems in Mathematics. 20. 27-46
16. Hoffer, A. (1981): Geometry is more than proof, *The Mathematics Teacher* vol. 74, pp. 11—18.
17. Isoda M. y Katagari S. (2017). Pensamiento matemático: cómo desarrollarlo en la sala de clases. Singapore. Worl Scientific Publishing. coord. de Roberto Araya; traducción de Alexis Jéldrez. LB 1501 I83P
18. Jaime, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías en el plano. La Evaluación del nivel de razonamiento (Tesis Doctoral). Universidad de Valencia, España.
19. Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares; M. Sánchez, (Eds.), Teoría y práctica en educación matemática. Colección Ciencias de la Educación, 4, 295-384. Sevilla, España: Alfar
20. Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels [Un modelo para evaluar los niveles de Van Hiele]. En J. da Ponte & J. Matos (Eds.), Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME-18th) [Actas de la Conferencia Internacional para la Psicología de la Educación Matemática (PME-18th)], 41- 48. Lisboa, Portugal.
21. Jaime, A y Gutiérrez A. (1998). On the Assessment of the Van Hiele Levels of Reasoning. Focus on Learning Problems in Mathematics. 20. 27-46.
22. KUHN, T. S. (1971): La Estructura de las Revoluciones Científicas, México, FCE.

23. Kuzniak, A. (2004). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Note pour l'habilitation à diriger des recherches. Institute de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Université de Paris VII – Diderot.
24. Kuzniak, A (2006) Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie, Canadian Journal of Math, Science & Technology Education, 6:2, 167-187, DOI:
25. Steen, L. A. (1988). *Mathematics:The Science of Patterns (Scientific American Library, 1994)* Science, 240: 611-616.
26. Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* New York, NY: The Free Press.
27. Van Hiele, P.M. (1986). Structure and insight. A theory of mathematics education. London: Accademic Press.
28. Van Hiele, P.M. (1986). Structure and insight. Orlando: Academic Press.
29. Van Hiele-Geldof (1957): *De didaktik van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.* (Tesis doctoral no publicada, Univ. of Utrecht).
30. Villani (Eds.), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
31. Vygotsky, L.M; Cole, M. (1979) Mind in society: The development of Higher Psicological proceses.
32. Wing, J.M.; Arbab, F. (1985). Geometric Reasoning: A New Paradigm for Processing Geometric Information.Wing, Jeannette & Arbab, Farhad. (1985). Geometric Reasoning: A New Paradigm for Processing Geometric Information.pectiva social y cultural. Bogotá: Grupo Editorial Gaia.
33. Wood, D., Bruner, J. S. y Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving.Journal of Child Psychology and Psychiatry, 17, 89-100

Anexos

Anexo 1: Test Diagnóstico

TEST DE DIAGNÓSTICO

NIVEL DE RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO

Objetivo: Determinar el grado de adquisición de habilidades de razonamiento geométrico al término del año de Primero Medio.

Instrucciones: Lea las preguntas ahí presentadas y responda en el espacio dado. Tenga en cuenta que no existen respuestas erradas para efectos de esta medición. Si considera que tiene una idea de un desarrollo y que esta no cuenta con una descripción formal en matemática, escríbala de todas maneras.

- Ítem 1:

Responde las preguntas presentadas de acuerdo a la siguiente figura:

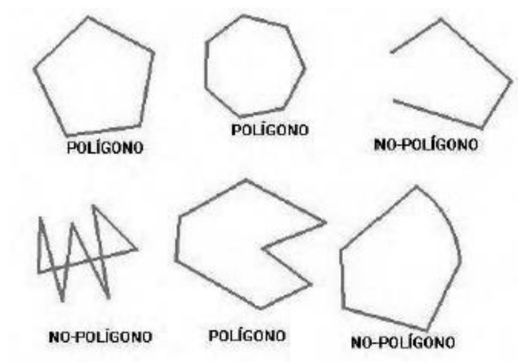
a) Haz un listado de las características de la figura y asóciale uno o más nombres.

La figura es un(a): ________________________________.

b) Del listado anterior selecciona las características que bastan para generar una definición de la figura y escriba dicha definición.

- Ítem 2:

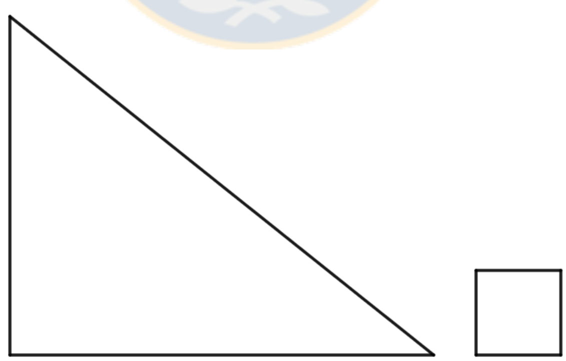
En el conjunto de imágenes que se presentan, hay POLÍGONOS y NO POLÍGONOS.



De acuerdo a lo anterior, ¿qué es un polígono? Escribe una o más definiciones.

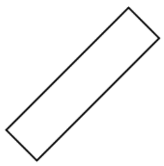
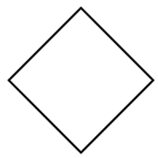
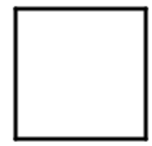
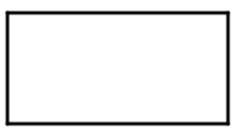
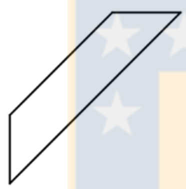
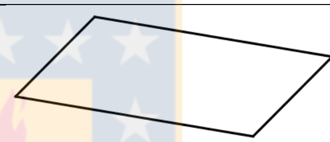
- Ítem 3:

Si la superficie del cuadrado pequeño mide 4 cm^2, ¿cuánto mide la superficie del triángulo? Explica de qué forma llegaste a tu resultado.



- <u>Ítem 4:</u>

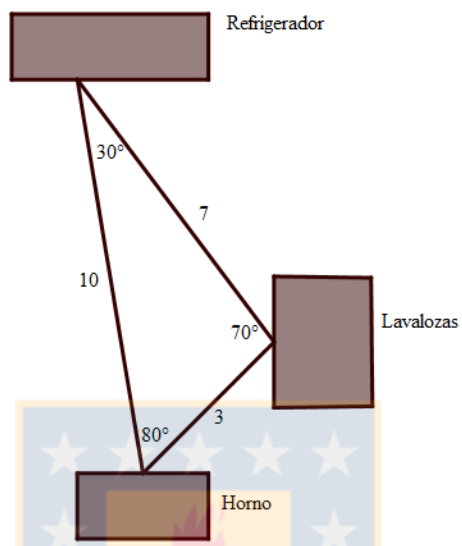
Un RECTÁNGULO se define como "un cuadrilátero cuyos cuatro ángulos interiores son rectos (miden 90°)". Según esta definición, clasifica las siguientes figuras en **RECTÁNGULOS** y **NO RECTÁNGULOS**.

 Clasificación: ________________	 Clasificación: ________________	 Clasificación: ________________	 Clasificación: ________________
 Clasificación: ________________	 Clasificación: ________________	 Clasificación: ________________	 Clasificación: ________________

Piensa en aquella(s) figura(s) que indicaste que NO corresponden a rectángulos y explica por qué tomaste dicha decisión

➢ <u>Ítems 5:</u>

El término “triángulo de cocina” se refiere al triángulo imaginario formado por tres aparatos de cocina: el refrigerador, el horno y el lavalozas.



Las distancias que se muestran en los lados del triángulo están en metros.

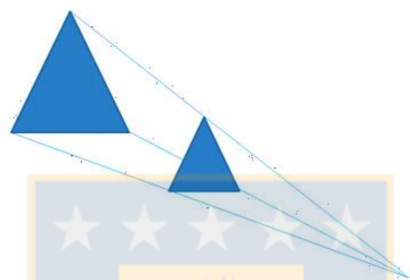
a) ¿Qué está mal en los rótulos o datos del triángulo de cocina? Argumenta o explica tu respuesta.

b) ¿Pueden los lados del triángulo de cocina tener las siguientes medidas: 9 metros, 3 metros y 5 metros? Explica por qué sí o por qué no desarrollando al menos una explicación.

Anexo 2: Guía De Aprendizaje Homotecia

DEFINICIÓN DE HOMOTECIA

La homotecia consiste en la transformación de figuras geométricas en un plano o espacio vectorial. Esto sucede tomando como referencia un punto y proyectando desde éste rectas que pasen por los vértices de las figuras.



Al unir las resultantes rectas proyectadas desde los vértices en un solo punto, este punto se conoce como centro de homotecia. En la homotecia existe una figura y su “sombra” o figura homotética, la cual dependiendo de la distancia que queden una de otra sus relaciones de tamaños pueden ser distintas, esta relación de tamaños depende del factor de homotecia (o razón de homotecia). Dentro de las representaciones gráficas el Centro de Homotecia es identificado con la letra “C”, mientras que en el caso del factor de homotecia es usualmente simbolizado con la letra “k”.

PROPIEDADES DE LA HOMOTECIA: Las principales propiedades de la homotecia son cinco, en resumen:

1. Homólogo. Una figura es homóloga a otra siempre y cuando la figura homotética no varíe su tamaño independiente de la distancia en que se configure una y otra.

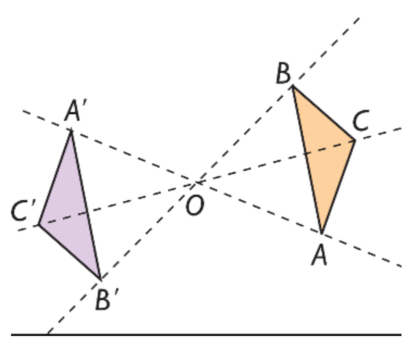
2. Factor $0<k<1$. Si el Factor Homotético está entre cero y uno, entonces la figura homotecia se sitúa entre el centro y la figura original. En este caso la figura homotética es de inferior aspecto a la figura original.

3. Factor $k>1$. Si el factor Homotético es mayor que uno, entonces la figura homotética se sitúa a mayor distancia del centro homotético que la figura original. En este caso, la figura homotética se suele ver en los diagramas con un aspecto superior o más grande que la figura original.

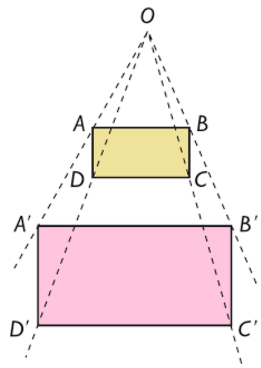
4. Factor $k<0$. Si el factor Homotético es menor que cero, o sea, si es negativo, entonces la figura homotética será una proyección de una imagen de la figura original (esto es, la visualización de la figura como si se invirtiera en relación a la figura original).

5. Paralelismo. Dentro del plano en que se configuran las figuras, siempre se da que de existir figuras en dos dimensiones con lados (ejemplo: triángulos, trapecios, rectángulos, cuadrado, etc); entre ambas figuras (la figura original y la figura de homotecia) se dan paralelismos entre los lados entre una figura y otra.

Homotecia inversa: La homotecia inversa es aquella en la que la razón de homotecia es negativa, o dicho de otra forma aquella en la que los puntos iniciales y sus homotéticos quedan en lados distintos del centro de homotecia.



Homotecia directa: En una homotecia de centro el punto O y razón k



Si $k > 0$, A y A′ están al mismo lado de O, y se dice que la homotecia es directa.

Si $k < 0$, A y A′ están a distinto lado de O, y se dice que la homotecia es inversa.

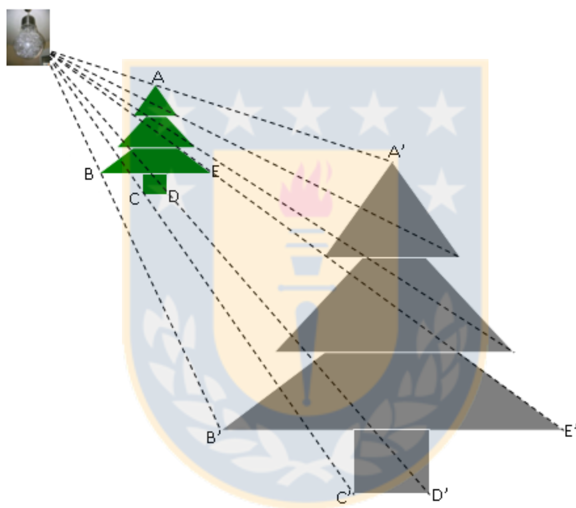
A la figura ABCD le hemos aplicado una homotecia de centro O y razón k, con $k > 0$; homotecia directa.

A la figura ABC le hemos aplicado una homotecia de centro O y razón k, con $k < 0$; homotecia inversa.

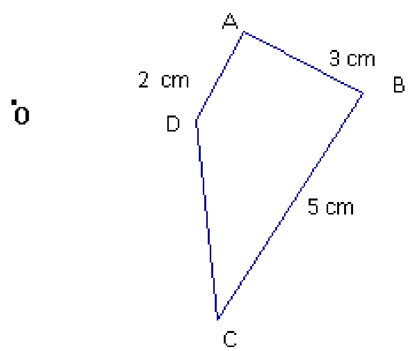
Actividades evaluadas

1) El foco alumbra un pino y éste proyecta una sombra de mayor tamaño sobre la pared. Los segmentos de recta unen todos los vértices del arbolito con los de su sombra y la prolongación de éstos hacia la izquierda coincide en un punto O.

a) ¿Cuál es la razón entre OA’ y OA?
b) Elijan otro par de segmentos, sobre una misma recta, y verifiquen que guardan la misma razón que OA’ y OA.
c) Comparen la altura de la sombra con la del pino y anoten la relación entre ambas medidas



2.- Tomen el punto O como centro de homotecia y únanlo con el punto A, prolónguenlo una distancia igual a OA para ubicar el punto A’; hagan lo mismo con los puntos: B, C, y D para encontrar los puntos B’, C’ y D’, Después, unan los cuatro puntos obtenidos para formar el polígono A’B’C’D’ y contesten las preguntas.



¿Qué relación existe entre la medida de los lados de ambos polígonos?

¿Cómo son los ángulos de las dos figuras?

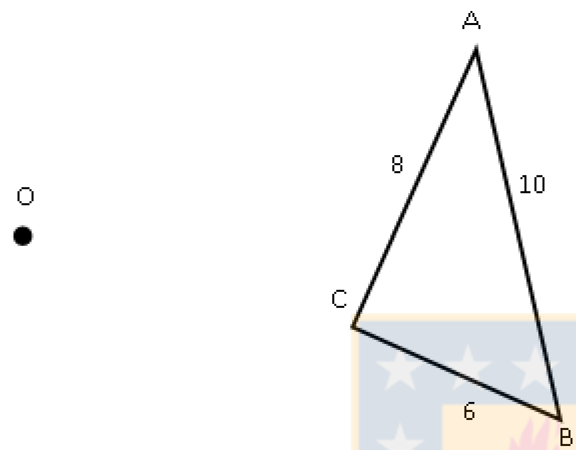
¿Qué relación existe entre los perímetros de ambas figuras?

¿Qué relación existe entre las áreas de ambas figuras?

¿Cuál es la razón de homotecia?

3.- Construyan una figura homotética con razón igual a -1 e identifiquen las características que permanecen y las que cambian.

Tomen como centro de homotecia el punto O, tracen los segmentos AO, BO, CO y prolónguenlos hacia la izquierda la misma distancia. Ubiquen los puntos A’, B’, C’ y únanlos para formar un nuevo triángulo.



a) ¿En qué posición está el nuevo triángulo con respecto al original?

b) ¿Dónde quedó el punto de homotecia con respecto de las dos figuras?

c) ¿Cuál es la distancia OA?

d) ¿Y cuál la de OA’?

e) Si consideran el punto de homotecia O, como origen en una recta numérica, ¿cuál es el sentido que tiene la distancia OA? ¿Y el sentido de OA’?

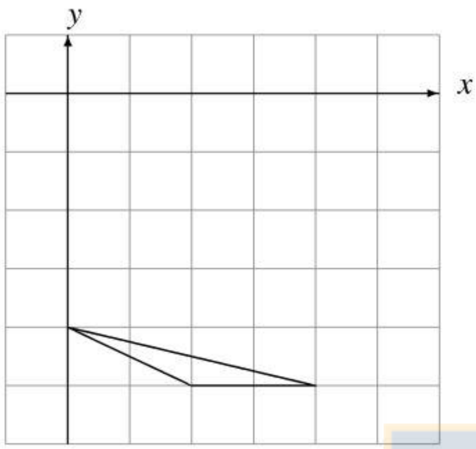
f) ¿Cuál es la razón de homotecia?

g) ¿Cuál es el perímetro de ambas figuras? ¿Cuál es su área?

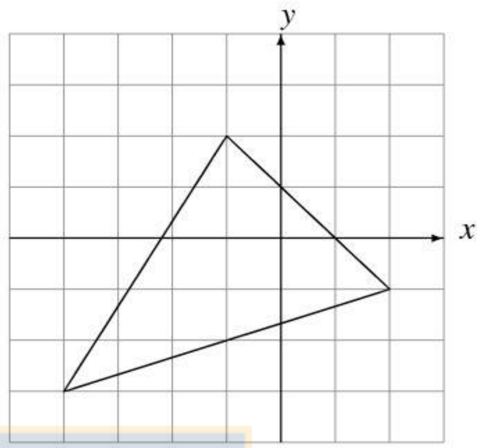
Homotecias (A)

Dibuje cada figura escalada.

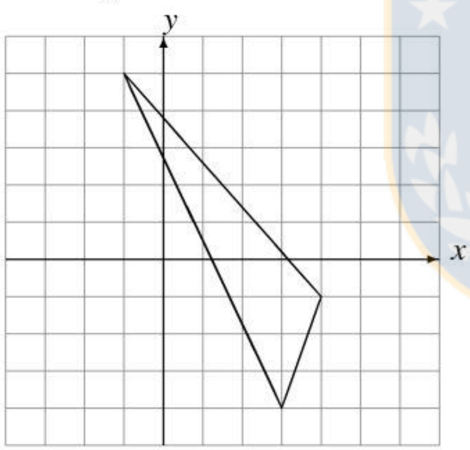
Escale en $\frac{1}{2}$ usando como centro(0, 0).



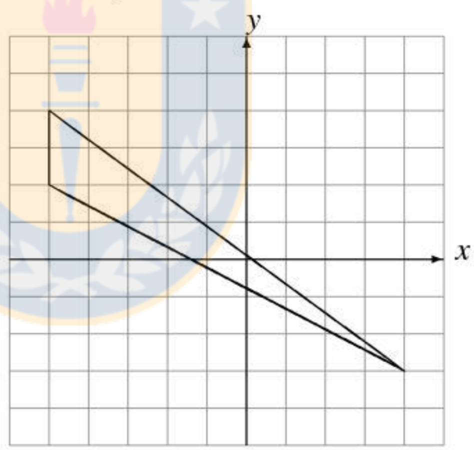
Escale en $\frac{1}{2}$ usando como centro(0, 0).



Escale en $\frac{1}{3}$ usando como centro(0, 0).



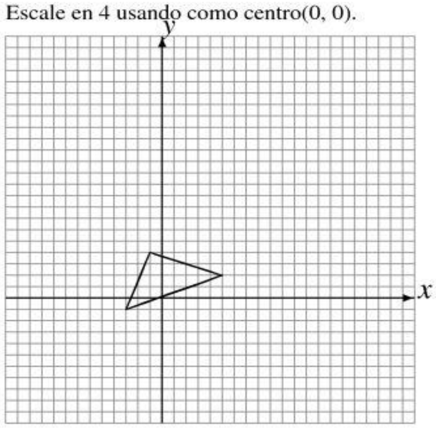
Escale en $\frac{1}{3}$ usando como centro(0, 0).



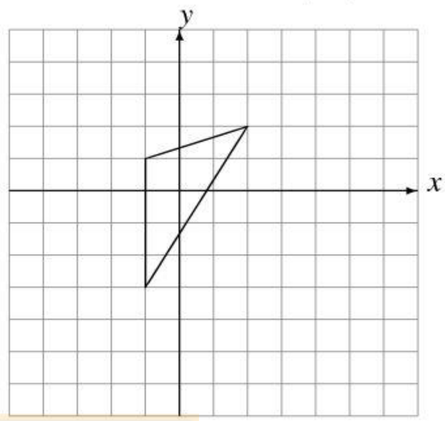
Homotecias (B)

Dibuje cada figura escalada.

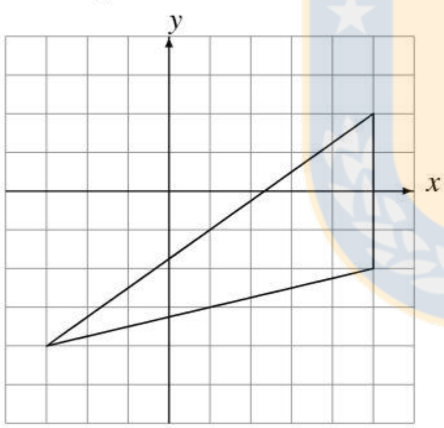
Escale en 4 usando como centro(0, 0).



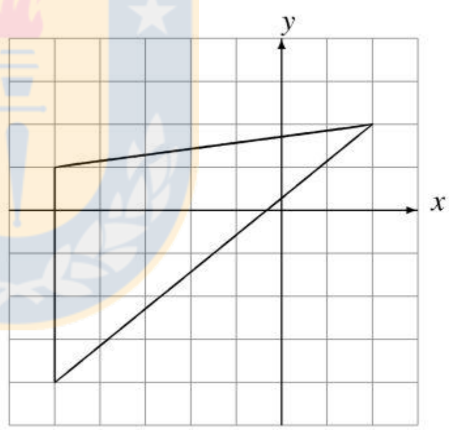
Escale en 2 usando como centro(0, 0).



Escale en $\frac{1}{3}$ usando como centro(0, 0).



Escale en $\frac{1}{2}$ usando como centro(0, 0).



MatesLibres.Com

Anexo 3: Guía De Homotecia Vectorial.

Instrucciones: Responder cada uno de los ejercicios anotando ordenadamente el desarrollo en esta hoja, a falta de espacio solicitar una hoja adicional.

Ejercicio N°1

Calcula el punto homotético de cada punto dado, con respecto al origen, y con razón de homotecia k. Luego, represéntalo de forma vectorial en el gráfico.

a. $A(1, 2)$, $k = 2$. A'(______, ______)

b. $B(-4, -4)$, $k = -0,25$. B'(______, ______)

c. $C(-1, 0)$, $k = 3$. C'(______, ______)

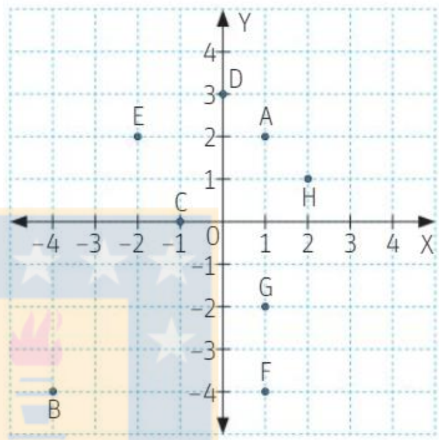
d. $D(0, 3)$, $k = 0,\overline{3}$. D'(______, ______)

e. $E(-2, 2)$, $k = -2$. E'(______, ______)

f. $F(1, -4)$, $k = -1$. F'(______, ______)

g. $G(1, -2)$, $k = -2$. G'(______, ______)

h. $H(2, 1)$, $k = -1,5$. H'(______, ______)



Observa la razón k de los puntos C y D y responde.

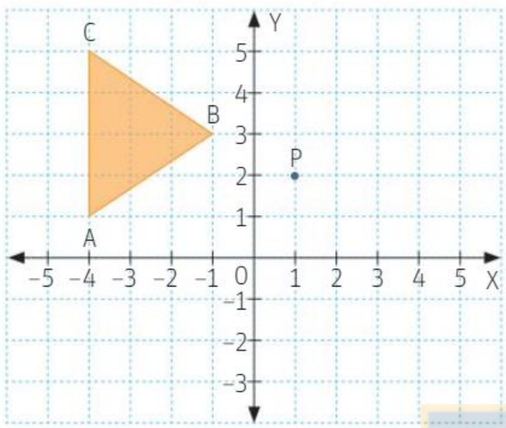
c) ¿Qué diferencia o relación puedes identificar entre ellas?

d) Compara los vectores de los puntos homotéticos resultantes ¿Cómo afectan estas razones a aquellos puntos? Argumente.

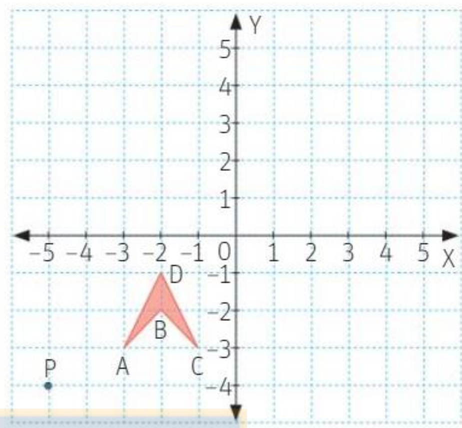
Ejercicio N°2

a) Construye la figura Homotética con centro P y razón k.

a. k = −0,5.



b. k = 2,5.



Observe las homotecias trabajadas en el ejercicio 1 y en el ejercicio 2

a) ¿Qué diferencias y/o similitudes se encontraron en dichos ejercicios?

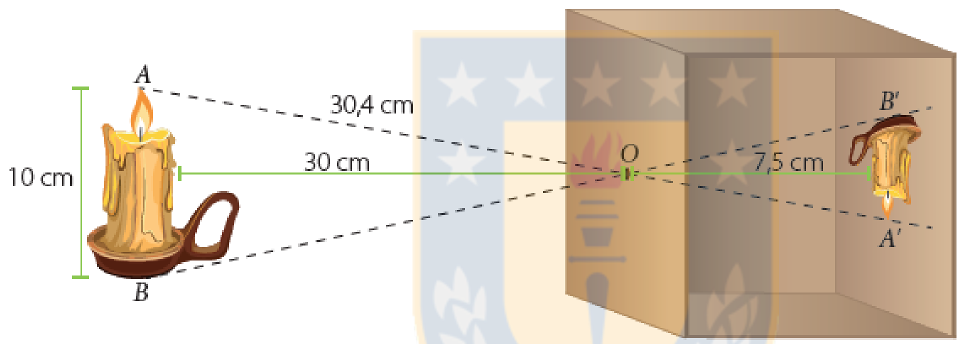
b) ¿Cómo afecta la ubicación del centro de homotecia al procedimiento que se debe realizar?

Anexo 4: Test De Homotecia.

<u>Verdadero o falso</u>

Una Cámara oscura es un instrumento que permite obtener una imagen plana proyectada a partir de una imagen real, utilizando principios de la óptima.

Analiza cada afirmación con respecto a la homotecia de la figura, registra el procedimiento utilizado para determinar tu respuesta, justifica tanto las verdaderas como las falsas escribiendo en el espacio (____) una V si la afirmación es verdadera o una F si es falsa



a) (____) La imagen corresponde a una homotecia directa.

b) (____) La recta $\overline{OA'}$ mide 7,6 cm

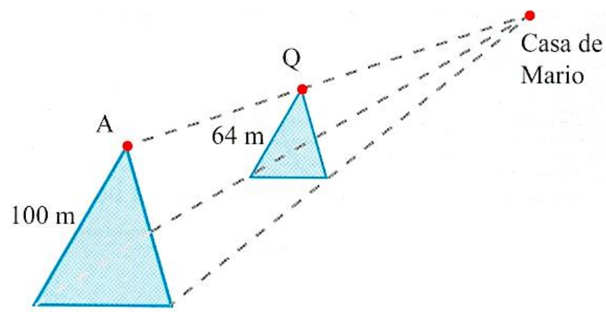
c) (____) La razón de homotecia es k= 4

d) (____) La proyección de la vela tiene una longitud de 2,5 cm

e) (____) El perímetro del triángulo OA´B´ es 17,7 cm.

Anexo 5: Ejercicio Propuesto En La Prueba.

Dos parques con la misma forma triangular se ubican como se muestra en la figura.



Mario va a uno de los parques e ingresa por A y su hermano va al otro parque e ingresa por Q. Si la distancia entre la casa de Mario y el ingreso A es 400 m:

¿Cuál es la distancia **entre los parques**?

¿Se podría calcular la **relación entre los perímetros** del parque? Y de ser así ¿cuál sería? Y ¿Cómo se realizaría?

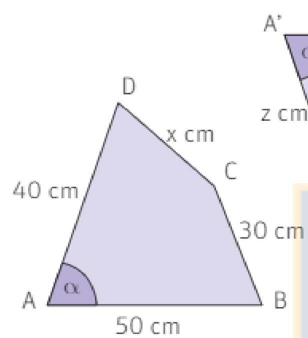
Anexo 6: Evaluación Final Geometría

ACTIVIDAD DE TÉRMINO DE CONTENIDO

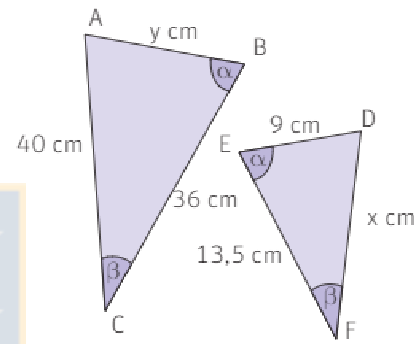
NOMBRE:

1.- Analiza las parejas de polígonos semejantes. Luego, calcula el valor de cada incógnita y el de la razón de semejanza.

a.

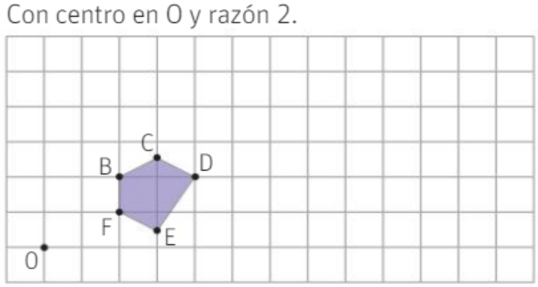


b.

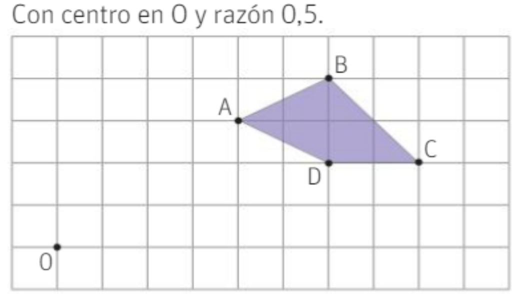


Construye las homotecias.

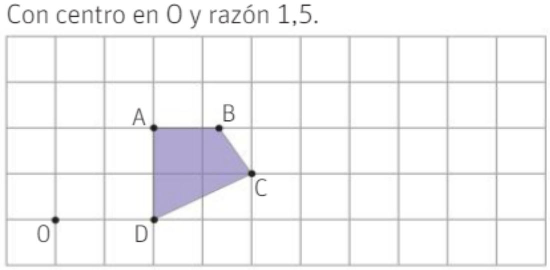
a. Con centro en O y razón 2.



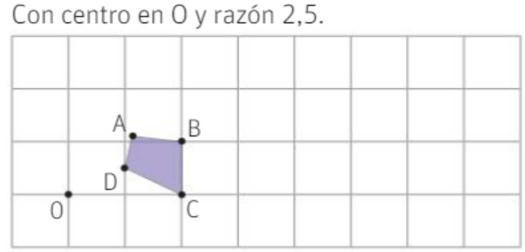
c. Con centro en O y razón 0,5.



b. Con centro en O y razón 1,5.

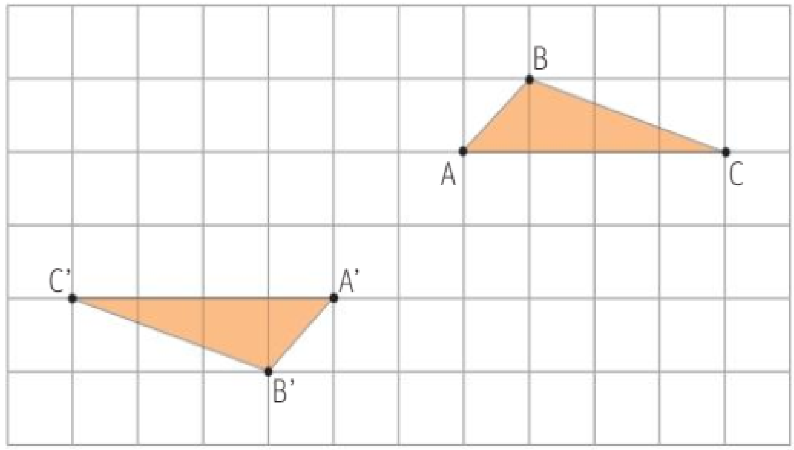


d. Con centro en O y razón 2,5.

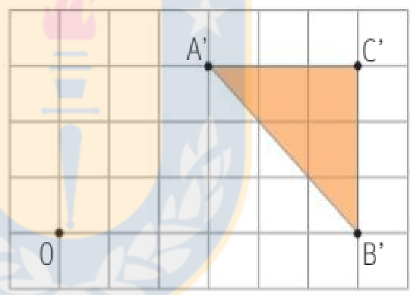


2.- Encuentra los elementos de cada homotecia, según corresponda.

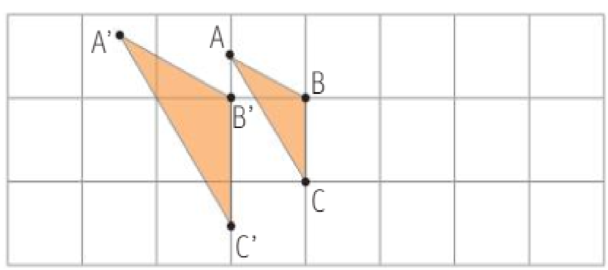
a. El centro de la homotecia, si la razón es –1 y la imagen de ABC es A'B'C'.



b. El triángulo ABC, de manera tal que su imagen sea el triángulo A'B'C' bajo la homotecia de centro O y razón 3.

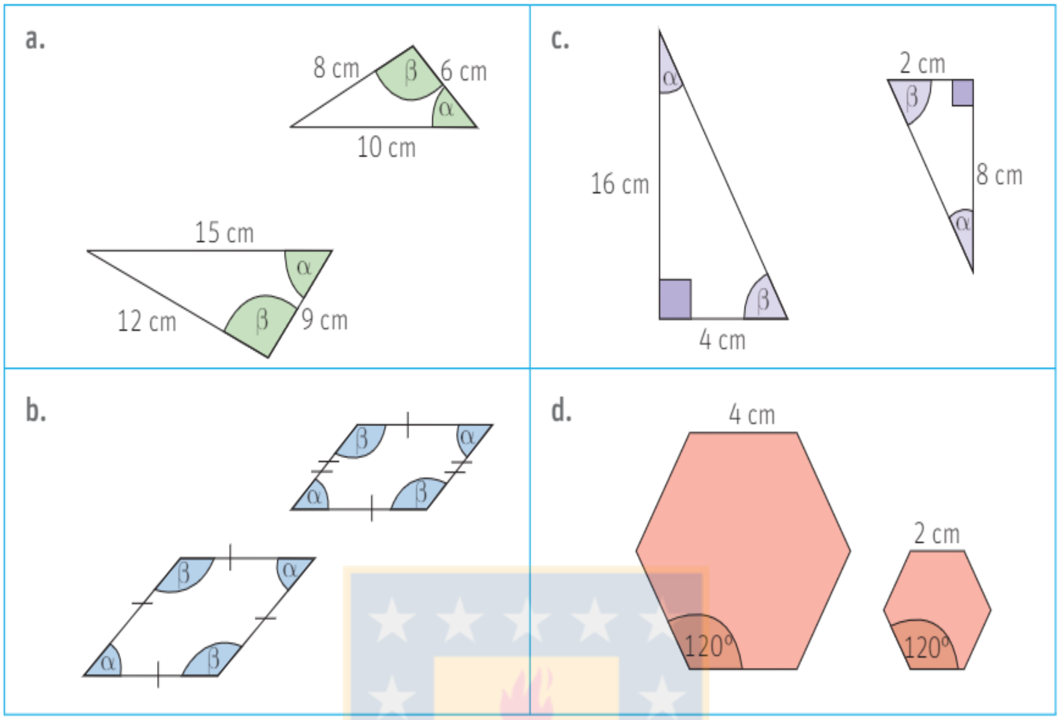


c. El centro y la razón utilizada, si al triángulo ABC se le realizó una homotecia y resultó el triángulo A'B'C'.



3.-

Analiza las parejas de polígonos. Luego, señala si son o no semejantes.

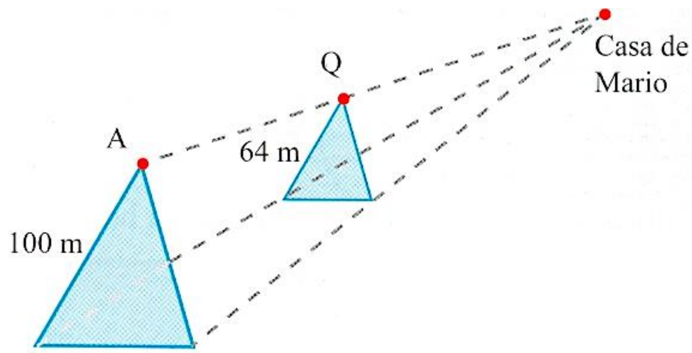


Un cilindro tiene un radio basal de 4 cm y una altura de 18 cm.

- ¿Qué sucede con su área lateral si el radio basal se duplica?

- ¿Qué sucede con su volumen si la altura se reduce a la mitad?

4.- Dos parques con la misma forma triangular se ubican como se muestra en la figura.



Mario va a uno de los parques e ingresa por A y su hermano va al otro parque e ingresa por Q. Si la distancia entre la casa de Mario y el ingreso A es 400 m:

¿Cuál es la distancia **entre los parques**?

¿Se podría calcular la **relación entre los perímetros** del parque? Y de ser así ¿cuál sería? Y ¿Cómo se realizaría?

Anexo 7: Rubrica De Test Diagnóstico

Ítem	**Respuesta de nivel 1.**	**Respuesta de nivel 2.**	**Respuesta de nivel 3.**	**Respuesta de nivel 4.**
1.a	El estudiante señala una serie de características físicas para la figura presentada, haciendo referencia a prototipos visuales. Determina el nombre de la figura presentada basándose en estas características físicas.	El estudiante señala una serie de partes y características matemáticas de la figura presentada, tales como lados iguales, ángulos iguales y lados opuestos paralelos. Determina el nombre de la figura presentada basándose en estas propiedades matemáticas.		
1.b	El alumno presenta como definición, un listado de descripciones o propiedades, que aunque utilice lenguaje geométrico, estas son imprecisas sobre las características físicas de la figura.	El alumno presenta la definición en un listado de propiedades y características, que puede incluir más de las que son suficientes para que se identifique Realiza una definición basada en un listado de las propiedades geométricas de la figura.	El alumno presenta una definición articulada lógicamente que intenta incluir sólo las características (o propiedades geométricas) suficientes para que se identifique a la figura.	

2	El alumno reconoce lo que es un polígono a través de propiedades físicas y formula una definición en base a ellas.	El alumno reconoce lo que es un polígono a través de propiedades geométricas y formula una definición que consiste un listado de ellas. (más de las necesarias)	El alumno reconoce lo que es un polígono a través de propiedades geométricas y formula una definición con las propiedades necesarias y suficientes.	El alumno reconoce lo que es un polígono a través de propiedades geométricas y formula dos definiciones equivalentes de manera formal con las propiedades necesarias y suficientes.
3	El estudiante realiza una comparación de superficies de manera visual, estimando el número de veces que la figura cuadrada se puede reiterar en la figura triangular. No asocia el número de veces que se reitera la figura cuadrada con la superficie de ésta para estimar el área de la figura triangular.	El estudiante mide la figura cuadrada y la triangular, estimando el número de veces que se reitera la figura cuadrada en forma completa, pero sin estimar en forma correcta en los sectores de la forma triangular en que no se reitera de forma completa (sólo una parte de la superficie cuadrada). Para esto, puede utilizar una malla cuadrada. A continuación, asocia el número de veces que se reitera la figura cuadrada con la superficie de ésta y	El estudiante mide la figura cuadrada y la figura triangular, estimando el número de veces que se reitera la figura cuadrada tanto en forma completa como en forma parcial, asociando los trozos parciales a formas enteras de la figura cuadrada. Para esto, puede utilizar una malla cuadrada. A continuación, asocia el número de veces que se reitera la figura cuadrada con la superficie de ésta y estima el área de la figura triangular.	El estudiante mide la figura cuadrada y la figura triangular. Calcula el área de la figura triangular utilizando la fórmula de área asociando la medida del cuadrado.

		estima el área de la figura triangular.		
4	El alumno clasifica los cuadriláteros de acuerdo a sus propiedades físicas, y determina que algunas figuras no son rectángulos porque “no lo parecen” (como que no se parecen a una puerta o están “chuecos”).	El alumno clasifica los cuadriláteros de acuerdo a sus propiedades geométricas. Sin embargo, no acepta ciertas figuras como rectángulos, aunque lo sean de acuerdo a la definición dada, ya que no cumplen con otras propiedades añadidas en base a experiencias anteriores (como el hecho de que un lado debe ser más largo que el otro).	El alumno clasifica los cuadriláteros de acuerdo a sus propiedades geométricas, reconociendo todas las figuras que son rectángulos en base a la definición dada, pese a que también las conozca por otros nombres.	

5.a	El estudiante no reconoce error alguno. El estudiante reconoce un error ya sea en los ángulos o medidas, sin embargo, no fundamenta, o lo hace con referencia a prototipos visuales.	El estudiante identifica errores en la rotulación y menciona la propiedad que no se cumple dado el triángulo. El estudiante construye el triángulo con los datos de rotulación y concluye que no es posible construir un triángulo con tales medidas	El estudiante identifica errores en la rotulación y menciona la propiedad que no se cumple en el triángulo dado, además utiliza las representaciones físicas de la figura para verificarlo, ya sea tratando de construir el triángulo a escala, o bien realizando los cálculos asociados a la propiedad mencionada.	El estudiante señala los errores en la rotulación del triángulo basándose en deducciones, como la correspondencia entre lados y el ángulo interior opuesto, donde se verifica que, a mayor lado, mayor ángulo y viceversa.
5.b	Es estudiante plantea que es o no posible la construcción del triángulo basándose en propiedades imprecisas o argumentos basados en prototipos visuales.	El estudiante verifica si es posible o no construir un triángulo con las medidas dadas intentando dibujarlo a escala. Comprueba con más ejemplos de similar índole. Menciona la propiedad que no se cumple y no lo muestra, o si es que lo hace, prueba de manera insuficiente la propiedad.	El estudiante determina si es posible o no construir un triángulo con las medidas entregadas intentando dibujarlo a escala, posteriormente, deduce qué sucede con la suma de los lados del mismo. Generaliza estableciendo la desigualdad	El estudiante determina si es posible o no construir un triángulo con las características dadas en base a deducciones formales basadas en la suma de los lados del triángulo. Generaliza estableciendo la desigualdad triangular.

		triangular con palabras.	

Anexo 8: Rubrica General.

Procesos de razonamiento	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Reconocimient o y descripción	Dan características físicas o globales. Aún si se emplea un término matemático este tiene un significado visual.	Son capaces de reconocer propiedades de conceptos geométricos. Esto no permite diferenciar los niveles 2, 3 y 4.	La habilidad de reconocimiento no permite distinguir 2 - 3 y 4	La habilidad de reconocimiento no permite distinguir 2 - 3 y 4
Uso de definiciones	Los alumnos de Nivel 1 no comprenden las propiedades y o implicancias de estas, por lo tanto, no comprenden las definiciones.	Si conocen cada propiedad contenida en una definición, pueden usarla. Cuando a los estudiantes de este nivel de razonamiento se les provee una definición diferente de aquella que han aprendido previamente, los	Comprenden definiciones con cualquier estructura. Pueden establecer relaciones lógicas entre conceptos matemáticos, son capaces de usar y formular definiciones matemáticas.	Se acepta la equivalencia de definiciones. Los alumnos tienen un mejor entendimiento de la estructura lógica de las matemáticas, por ende, ellos admiten la existencia de diferentes definiciones de un mismo

		estudiantes no aceptan esta nueva definición y continúan usando su propia definición.	Son capaces de utilizar definiciones Inclusivas o exclusivas de acuerdo con las definiciones aprendidas.	concepto y pueden probar su equivalencia.
Formulación de definiciones	Los alumnos no son capaces de dar definiciones matemáticas. En el mejor caso pueden listar propiedades físicas.	En este nivel no comprenden la estructura lógica de las definiciones por ejemplo la cantidad necesaria y suficiente de propiedades para definir un concepto. Usualmente las definiciones de este tipo corresponden a un listado de propiedades geométricas. Pueden experimentar	Al elaborar una definición hacen el intento de no ser redundante. Sin embargo sí pueden darse redundancias cuando existen implicancias de más de un paso involucradas en la definición	Se demuestra la equivalencia de definiciones.

		dificultades con diversas expresiones lógicas como "y", "o", "al menos", "a lo más".		
Clasificación	Exclusiva basada en atributos físicos, solo pueden entender clasificaciones exclusivas, dado que ellos no aceptan ni reconocen ningún tipo de relación lógica entre clases o, muchas veces, entre elementos de la misma clase que tienen una apariencia física bastante diferente.	Se observa dificultad estableciendo conexiones lógicas entre propiedades. Por lo tanto, la clasificación producida por estudiantes en este nivel es usualmente exclusiva.	Una forma más precisa de discriminar estudiantes de nivel 2 del 3 es basada en la habilidad de aceptar e identificar definiciones no-equivalentes del mismo concepto, y convencerse de las definiciones exclusivas o inclusivas cuando las definiciones cambian.	_ Los estudiantes de nivel 3 ya han adquirido el máximo grado de habilidad de clasificación por ende no se puede discriminar entre el nivel 3 y 4 de Van Hiele.

Demostración	No pueden entender el concepto de demostración en este nivel.	Una prueba consiste en algunas verificaciones experimentales de la verdad de una propiedad o enunciado en uno o pocos casos. El problema, no es demostrado, pero si se hace parte del procedimiento, ya sea encontrando la lógica tras de la demostración, pero no utilizando ejemplos necesarios para completarla. o construyendo el ejemplo, sin elaborar la estructura lógica de la demostración.	Son capaces de hacer deducciones y demostraciones lógicas. Los estudiantes de este nivel son capaces de dar razones informales para la veracidad de propiedades. Siendo los casos específicos solo una ayuda y no la demostración misma.	Pueden entender y escribir demostraciones formales estándar. Las figuras específicas son utilizadas solo a veces, para ayudar a seleccionar las propiedades adecuadas para la demostración, pero los estudiantes están pendientes de que la figura es sólo un caso y que para probar una proposición es necesario desarrollar una secuencia de implicancias basadas en

				propiedades ya establecidas.

Anexo 9: Transcripción Audio 1 (Clase 08/11)

Clase 1:

En este audio, el profesor recorre la sala durante la realización de una guía aplicada en la clase. La transcripción corresponde a todo lo mencionado en varios grupos de trabajo.

Profesor: ¿Qué viene siendo la homotecia?, ¿qué les dice el texto?

Alumno: Transformación de una figura en un plano vectorial.

Profesora: Ya, pero sin tanto formalismo, es una transformación de una figura en otra. ¿Más grande o más pequeña?

Alumno: O sea, depende, porque hay como tres tipos.

Profesora: Perfecto, depende. ¿De qué depende entonces?

Alumno: Del punto O…

Profesora: ya, hay una cosa llamada razón de homotecia, esa razón es lo que manda que va a pasar. Si es mayor a 1, la figura crece. Si es menor a 1 la figura decrece y si el valor es 1, se mantiene. ¿Cómo se calcula esa razón? Se toma la distancia del centro a la figura nueva, y la distancia del centro a la figura original. El cociente de esas medidas es la razón de homotecia.

Alumno: ¿Solamente en una línea?

Profesora: O sea, se toma una para hacer los cálculos, pero se cumple en todas.

Alumno: Pero es que aquí me da 3,33 y en la otra me da 3,26.

Profesora: Entonces hay que hacer una revisión a las medidas, por cualquier cosa.

Alumno: ¿Se acepta entonces?

Profesora: Sí, con un pequeño desface se acepta, aunque la idea es que dé el mismo valor todo el tiempo.

Alumno: Tenemos la duda si es esto dividido prima o prima dividido esto.

Profesora: es centro prima dividido centro original.

Alumno: “Prima dividido original” entonces.

OTRO GRUPO:

Alumno: ¿Qué es la razón?

Profesora: Vamos con el concepto, ¿qué es una razón, sin importar el contexto?

Alumno: Es una división.

Profesora: Ya, es una división, entre esas medidas.

Alumno: Y ¿qué se hace con este?

Profesora: ¿Qué dice? compare las medidas de los pinos ¿cierto?

Alumno: Sí

Profesora: Entonces tienen que medir las alturas y ver qué ocurre con eso.

Alumno: ¿Con la razón?

Profesora: Sí, algo va a pasar entonces. Eso tienen que descubrir.

OTRO GRUPO:

Alumno: ¿Qué significa que la razón sea -1?

Profesora: ¿Qué crees tú?, observa el dibujo y expresa lo que ves.

Alumno: que la figura está dada vuelta. Pero ¿cómo se dice entonces?

Profesora: Tal cual como lo mencionaste, la figura se invierte.

Alumno: Se da vuelta.

Profesora: Sí, se da vuelta. Eso tienen que poner en esa parte.

OTRO GRUPO:

Alumno: ¿Cómo se hace este ejercicio?

Profesora: Ya, partamos, ¿qué es una razón?

Alumno1: Una división.

Profesora: Ya una división.

Alumno1: Pero ¿entre qué?

Profesora: Ya, pero volvamos a leer entonces la pregunta.

Alumno2: ¿Cuál es la división entre…?

Profesora: Perfecto, entonces así se hace, calculan las medidas y hacen la división en ese orden.

Alumno: se hace con todos los lados entonces.

Profesora: Bueno, se hace con uno primero y con el resto comparas, pero sí se debe cumplir con todos.

Segundos en los cuales se hacen las medidas de los lados de la primera figura de la guía.

Muchas consultas sobre la pequeña diferencia que había entre los cálculos de la razón en el primer ejercicio. 3.2 y 3.3

OTRO GRUPO:

Alumno: ¿Qué se tiene que escribir en esta?

Profesora: ¿Cómo las figuras son semejantes?, ¿qué se puede concluir al respecto? ¿Qué pasa con los ángulos?

Alumno (otro): Pregunta sobre el ejercicio de los pilares (pero no se entiende la pregunta)

Profesora: Calcular la medida de cada uno y hacer la razón entonces

Alumno: El trazo completo y el otro trazo completo. Cierto, y ¿cómo calculo la razón?

Profesora: De la misma forma que lo hiciste antes.

OTRO GRUPO:

Alumno: En la c) nos preguntan cuál es la distancia entre OA, entonces está preguntando por esto.

Profesora: Tal cual.

Alumno: No entiendo esto, dice prolónguelo, entonces ¿si esto dice 2cm, debo hacer 2cm más?

Profesora: Ya, y ¿a qué lado?

Alumno: Hacia donde me dicen.

Profesora: Ya entonces, ¿a qué lado?

Alumno: Pasando, la figura. Como dice 3cm, entonces debo hacer 3cm más.

Profesora: Si, y eso con el resto de los lados. Y estableces la relación como te indica el problema.

Alumno: Profesora, ¿qué se hace aquí?

Profesora: Establecer alguna relación entre las figuras, y en el tema se usan mucho las divisiones.

Alumno: Profesora, ¿qué se hace cuando no son iguales?

Profesora: Depende. Si es solo por un decimal que falla, se considera igual porque puede ser que la medición no fue tan precisa. Cuidado con el orden, ahí están …

Alumno: Al revés

Profesora: Si, al revés.

Alumno: Si me piden la razón, ¿debo dejarla como 7 es a 2.2 o lo tengo que expresar como 3.18?

Profesora: Conviene dejarlo como el valor de la razón que es el resultado.

Alumno: Ya entonces con la razón igual a -1, la figura va a quedar invertida ¿cierto?

Profesora: Sí, correcto.

Alumno: Ya pero aparte de eso, sé que tiene que estar invertida. Y la figura debe ser igual cierto

Alumno (otro): Profe ¿a qué se refiere con las características de los ángulos, si son agudos rectos u obtusos cierto?

Profesora: es más amplio que eso

Alumno: Pero no tiene sentido si es la misma figura. Siempre va a ser igual todo.

Profesora: Ya, cuidado con eso, en la homotecia en general no siempre va a ocurrir que todo sea igual. Pero sí va a ocurrir algo muy particular con los ángulos.

Alumno: Se mantienen.

Profesora: correcto, los ángulos se van a mantener. Y ¿Cómo se llaman las figuras que tienen ángulos iguales?

Alumnos: Parecidos.

Profesora: Ya, ¿y cómo se llaman a las figuras parecidas en matemática?

Alumno: Semejantes.

Profesora: Correcto, con eso saquen las conclusiones.

Alumno: Entonces, las figuras no serían iguales.

Profesora: No, no serían iguales, si no que pasaría algo un poquito más…

Alumno: Entonces, ¿cómo se hace?

Profesora: Para el otro lado las líneas.

Alumno: Pero, entonces ¿cuánto mide?

Profesora: Lo que corresponde no más, por ejemplo, en este ejercicio te dice que extiendas 3 más y donde quede la figura queda no más.

OTRO GRUPO:

Alumno: Por ejemplo, si aquí dice ¿qué relación existe entre las medidas?, está bien decir que son distintas las medidas.

Profesora: a ver veamos cuanto miden los lados

Alumno: 3,3 y este 3 no más.

Profesora: ¿Y éste cuánto?

Alumno: 4,8.

Profesora: ¿y el otro cuánto?

Alumno: No dice.

Profesora: Se calcula entonces. ¿Estás seguro que eso es 2.6?

Alumno: Sí.

Profesora: Ya, entonces la idea más menos cual era, si estaba todo correcto, las divisiones deberían ser todas iguales

Alumno: ¿Cómo?

Profesora: que, al hacer las divisiones entre los lados, deberían dar iguales los resultados. Entonces hay que revisar bien las medidas no más.

Lo que pasa es que es que no eran 2 cm exactos, era un poco más de uno, entonces como la figura no está con medidas reales.

Entonces te recomiendo que hagas todo con las medidas originales de la figura y ahí se va a cumplir la homotecia.

OTRO GRUPO:

Alumno: ¿Cómo se decían cuando los ángulos eran de igual medida?

Alumno2: Paralelos eran.

Profesora: NO paralelo no, así no más llámalo como de igual medida.

Alumno: ¿Cómo son los ángulos de las figuras?

Profesora: ¿Cómo ves tú que son esos ángulos?, ¿cómo crees que son?, en relación a que si son iguales o distintos.

Alumno: Son iguales, pero las figuras son distintas.

Profesora: Ya, ¿y cómo se llaman esas figuras?

Alumno: Mmm… semejantes.

Profesora: Bien, ahora siga trabajando.

OTRO GRUPO:

Alumno: Acá me confundí porque aquí me sale 2,1 o 2,2 y no entiendo.

Profesora: eso está bien si, ahora debes trabajar con eso. Si te molesta el decimal trabájalo como 2, tampoco causara tanto problema.

Alumno: Ya y aquí me salió 6.9.

Profesora: bueno si, lo puedes dejar como 7. La cosa después es hacer la división.

Alumno: Ya la profe antes me dijo que tenía que hacer otra cosa después, algo así.

Profesora: Ya, pero eso se hace a medida que avances con las preguntas. Vas bien.

OTRO GRUPO:

Alumno: Es que esta línea no mide 3cm.

Profesora: Ya usa la medida real no más, cámbialo si quieres. Para que se den cuenta de lo que pasa, usen la medida con regla. No se compliquen tanto.

OTRO GRUPO:

Alumno: Aquí la medida me dio 8m5 y aquí me dio 16,8, es casi el doble, entonces si lo aproximo me da la razón.

Profesora: Justamente, y eso es lo que debe pasar siempre, con lo perímetros y la razón.

Alumno: ¿Y aquí qué preguntan?

Profesora: Caso son iguales o distintos.

OTRO GRUPO:

Alumno: ¿Me ayuda a hacer este?

Profesora: Cuénteme ¿qué duda tienes?

Alumno: Es que esto es como la razón y tengo que…

Profesora: Sí, pero con el origen.

Alumno: Ya, ¿y cómo lo hago?

No se entiende bien que ocurre en esta parte del audio no se entiende.

OTRO GRUPO:

Alumno: Profe. ¿Cómo se hace esto?

Profesora: Ya eso se hace igual que todos los demás, sólo que ahora te dan una figura y la razón y tú tienes que hacer la otra. Por ejemplo, si en esa figura te dice escale a un medio y originalmente había una distancia de 10 al origen, la figura nueva tiene distancia 5. Te dan la original y tú haces la "copia".

Alumno: Bien.

OTRO GRUPO:

Alumno: ¿Profe, el perímetro es la suma de los lados cierto?

Profesora: Sí, así es.

Alumno: ¿Y qué pasa cuando calculamos los perímetros, y al calcular la razón da 2,01, y la razón de homotecia es 2? ¿Igual sirve cierto?

Profesora: Igual es válido.

Alumno: Aquí la relación de las alturas no es la misma.

Profesora: Pero si es similar igual sirve, a veces cambia solo por un par de decimales y eso no es significativo.

Alumno: Y con respecto al área, ¿cómo lo escribo? ¿el área prima es el cuádruple del área original?

Profesora: Si esa es la relación, pero no lo llamemos el área prima, ¿cuál sería el nombre de la figura que resulta?

Alumno: Figura homotética.

Profesora: Sí, eso mismo.

Alumno: ¿Y la razón de homotecia cual era?

Profesora: La división que han calculado todo el tiempo.

Alumno: Ah, ¿el valor de O con A prima dividido por OA?

Profesora: Exactamente.

Alumno: Entonces, sólo hay que poner que K= 2 que es mayor que 1.

Profesora: Claro, lo del mayor que 1 sirve para saber cómo se comporta la nueva figura si, por ahora solo nos piden el valor exacto no más.

Varios alumnos preguntando cual es la fórmula del área de un trapecio. Por lo que se decide escribirla en pizarra.

OTRO GRUPO:

Alumno: ¿A qué se refiere con la relación entre los ángulos de las figuras?

Profesora: En toda figura homotética, ocurre algo particular con los ángulos. En este caso se refiere a que si son iguales o distintos.

OTRO GRUPO:

Alumno: Profe, tengo un problema en la pregunta de las áreas, la primera me dio 2,35 y 4,7

Profesora: Esta bien pues. A no espera.

Alumno: Es que se había dicho que debería dar el cuádruple.

Profesora: A ver, veamos.

Se dan unos minutos para hacer los cálculos y buscar cual fue el error.

Conclusión estaba mal aplicado en la calculadora.

En otro grupo se da una explicación de cómo hacer los dibujos del último problema

Alumno1: Para hacer el dibujo se debe hacer las líneas al centro.

Alumno2: si, y con eso después se hacen las medidas a la mitad.

Alumno3: ¿Esto está bien?

Profesora: Sí, eso es correcto, pero tiene que hacer el trazado de las líneas.

Alumno: Profe, ¿4.75 se puede aproximar a 5?

Profesora: No es necesario, a lo mucho déjalo en 4.8.

Alumno: ¿Cuál es la razón de homotecia?, entonces debo dividir todas las medias que me salen.

Profesora: No con una sola basta, si se cumple la homotecia todos deben ser lo mismo.

Anexo 10: Transcripción Audio 2 (Clase 08/11)

Se trabaja guía elaborada por la profesora, mediante trabajo en parejas, cada uno con su guía. Recopilación de audio durante la atención de dudas de los alumnos durante la aplicación.

Alumno: Profe no entiendo… que es relación.

Profesora: La relación es establecer cualquier tipo de comparación.

Profesora: Eso es lo que yo le dije, que ves tú, semejante, son iguales, es el doble, a la mitad, es un concepto.

Alumno 2: No sé cómo sacar (-1) … aquí.

Profesora: A ver, espera… tercero. Construye una figura homotética con razón igual a (-1), ya… ¿qué significaba el negativo?, antes que nada.

Alumno 3: Que era inverso.

Profesora: La figura, va a quedarte para el otro lado, entonces ¿qué es lo que uno tenía que hacer?, ¿qué se hace cuando el número no es negativo entonces el caso normal? ¿Qué hacen normalmente?... (Se observan expresiones de duda), o tampoco saben hacer el normal.

Alumno 2: No.

Profesora: Eh… no estoy seguro del método que usaron, ustedes trazan primero esto ¿o no?... trazan las rectas o calculan las distancias primero.

Alumno 3: Calculamos la distancia desde un punto a O, y después lo… trazamos la línea y después usamos la misma distancia para el otro lado.

Profesora: Ya, entonces qué tienes que hacer, tomas la distancia dese A hasta O, eso te va a dar un valor. El número (indicando k) te va a decir por cuanto tienes que multiplicar esta distancia. Si esta distancia midiera 5cm, tienes que multiplicar 1 por 5cm; si dijera 2 tienes que multiplicar 2 por 5cm. Eso te a va a decir a cuanta distancia estas de aquí hasta acá, va a estar tu nuevo punto, según el valor puede estar aquí acá, acá… puede ser más grande o más pequeño si ese multiplicador (en referencia a k) es más grande o más pequeño. Que sea negativo significa que esa distancia que te dio tienes que contarla ya no entre ese punto y ese, no sobre esta línea, sino que tienes que contarlo sobre esta recta que va para el otro lado. Entonces, por ejemplo: supongamos que eso es 5, 1 por 5…5, como es positivo hay que contarlo para este lado; si fuera un 2, ¿2 por 5?

Alumno: 10.

Profesora: ¡Súper bien!, entonces hay que contar 10 en esta dirección si es positivo, y 10 en esta dirección si es negativo. Por eso la figura te queda para este lado.

Alumno 4: Las medidas de este están malas no es 3, me da 2,5 o 2,4.

Profesora: Esto lo prolongaste para acá.

Alumno 4: Y ahora nos piden la relación entre los lados, pero no es 3, es como 1,5.

Profesora: Es 1,7 por lo que veo.

Alumno 5: Pero las medidas que nos dan las ignoramos no más porque acá me dan la medida de 3 centímetros, entonces acá hay que ver la diferencia entre CD acá y…

Profesora: Pero la pregunta que te hacen es menos especifica que eso, porque no te dice réstalos, la relación que van a encontrar es otra… ¿cuánto mide ese lado?

Alumno 3: 3,1 aproximadamente y el otro 1,6.

Profesora: ¿Cuál sería la relación entonces?

Alumno 4: Hay que dividirla o…

Alumno 3: No, porque la prolongación es el doble de esta (relación entre el lado de la figura homotética vs original).

Alumno 4: Profe reste esto con esto y me dio un resultado.

Profesora: Recuerda que una relación se refiere a que encuentres en que se parece, en que se diferencia. Pero si tú restas otros dos lados no te va a dar lo mismo, entonces, como dice el compañero, es mejor dividirlos. Prueba aquí, prueba aquí, prueba con otro y ve si puedes deducir algo.

Alumno 3: Profe tengo que poner un puro valor porque…

Alumno 4: Sí, porque se supone que una relación da lo mismo en todas partes.

Profesora: Al dividirlo cuanto te da.

Alumno 4: No sé, pero la medida es el doble.

Alumno 3: Me da 2,16… esa sería la relación.

Profesora: Ya, pero eso te dio la división, es prácticamente el doble.

Alumno 3: Pero… ¿eso daría en todos los lados?

Profesora: Eso lo tienes que comprobar.

Profesora (a alumno 5): ¿Qué paso, en que están?, ¿La figura te dio la misma en el dos cierto?, ¿es la misma figura?

Alumno 5: Sí.

Profesora: Pero, ¿cuál es la diferencia?

Alumno 5: La medida de los ángu… las medidas de los lados.

Profesora: Entonces, la pregunta… por ejemplo la de abajo, ¿Qué relación existe entre la medida de los lados de ambos polígonos? ¿Que se encuentra en una relación?, una característica, algo que se cumpla, algo que tú puedas decir.

Alumno 5: Si son semejan... no, no sé, es que no son semejantes.

Alumno 6: Hay que dividirlos.

Profesora: A ver, divídelos.

Alumno 5: Esto es 3,4.

Profesora: Ah sí, esto creo que mide 1,7 con regla. De hecho, fíjate este lado es harto más grande, no puede ser que este mida 3,4 y el otro 3,3.

Alumno 5: Ahora no sé por qué me da 7.

Alumno 6: Es que tu lápiz es muy gordo.

Profesora: Ahora que tienes las medidas, ¿Qué se te ocurre hacer?

Alumno 5: 1,7 dividido 3,4.

Profesora: Yo siempre recomiendo dividir el lado más grande por el chico, da números más bonitos.

Alumno 5: Se puede poner 1,9.

Profesora: Si estas alejado por poco decimal puedes redondearlo ¿Qué puedes concluir entonces?

Alumno 5: Que son semejantes.

Profesora: Más que eso, ¿qué puedes decir de los lados?

Alumno: Que son el doble.

Profesora: Exacto, esa es una relación entre los lados.

Alumno 3: Profe en la D… ¿cómo se saca el área de eso?

Profesora: ¿El área?, Ese polígono es irregular no puedes sacar el área con fórmulas normales. Quizá puedas sacar otro tipo de conclusión de otra manera.

Alumno 3: Yo creo que el área es el doble.

Profesora: Si tienes razón podrías probar con una figura más simple, y ver si da.

Alumno 4: Con un cuadrado.

Profesora: Por ejemplo, y ver si al duplicar los lados igual se duplica el área.

Alumno 4: ¿Cuál es la razón de homotecia k… cómo sería el factor?

Profesora: Factor k, ¿para que servían los factores, para qué sirve eso?

Alumno 4: Era saber si la figura es más grande, más pequeña…

Profesora: ¿Y cómo se hacía? ¿Multiplicando la distancia o no?

Alumno 4: ¿Desde qué punto a qué punto?

Profesora: Desde el foco… no sabemos.

Alumno 4: La relación entre estos dos me debería dar k, y desde ahí debería sacar uno…

Profesora: Justamente, pero ¿cuál es la gracia?, tú ya comparaste los dos lados, ya sabes cuánto es esa razón, cuando tú dividías los lados ¿qué te daba?

Alumno 4: Dos.

Profesora: Viste, ya tienes el factor k. Y ¿por qué k es positivo y no negativo?

Alumno 4: Porque va para acá y no para allá.

Profesora (a otro alumno): ¿Cómo van?

Alumno 7: Mal… ¿hay que dividir esto cierto?

Profesora: ¿Qué pregunta están haciendo? … esa es la primera… la primera, primera. Veamos, ¿cuál era su pregunta?

Alumno 7: La razón, la medida esta…

Profesora: ¿No sabes lo que es una razón?

Alumno7: Sí, división.

Profesora: Entonces ¿qué deberías hacer?... dividir.

Alumno 7: Es que no me sale…

Profesora: ¿Qué estas dividiendo con qué? Esos 6,9 ¿a qué corresponden?

Alumno 7: Dos A'.

Profesora: ¿Desde aquí hasta acá?

Alumno 7: Sí.

Profesora: ¿Y este 2,1?

Alumno 7: Desde acá hasta acá.

Profesora: Primero que nada, eso es un foco que tiene una imagen más o menos grande. Cuando tú mides con regla te puedes pasar un milímetro, dos, así que es normal que quede con decimal. Pero ese número ¿a qué se parece?

Alumno 7: 3,28.

Profesora: A qué número bonito se parece… más a un 3 ¿cierto? Entonces puede ser que, si tomaras la medida de otra manera, con la regla más acá te cuadre un poco. A mí me da un 3,18, por ejemplo; con menos decimal. Pero puede que el número que están buscando sea un 3,2.

Alumno 7: Esto me da 5.

Profesora: Te cambió harto la medida, y ¿cuánto te da le grande?

Alumno 7: 7,3.

Profesora: Con lo que te dio ahora comprueba la razón… Y en la parte (b) te van a pedir lo mismo, con otros vértices.

Alumno 8: Profe, se supone que los lados son el doble… el perímetro, el área igual debería serlo ¿cierto?

Profesora: Tienes que comprobarlo. La mejor forma, diría yo, es imaginarte otra figura súper simple para calcular el área. ¿Cuál sería por ejemplo?

Alumno 9: Un cuadrado.

Profesora: Entonces si invento un cuadrado, por ejemplo, con la medida de un lado y otro que tenga el doble. Entonces eso te va a servir para comparar las áreas.

Profesora (atendiendo a otro alumno): Qué significa escalar una figura… cuando algo está a escala.

Alumno 10: Lo mismo, pero… más chico.

Profesora: Sí, en la vida real siempre hablamos de algo más chico, pero tiene que ver con achicar o agrandar una misma imagen. Tiene que ver con semejanza… eh, así que la misma figura debe resultar con un tamaño mayor o menor. ¿Y qué otra cosa dice?, que lo hagas respecto a un centro (0,0), ¿cuál es el centro (0,0)?... (El alumno indica el centro). En términos de homotecia, eso es un centro de homotecia o foco. Ya, tienes la figura, tienes el centro y te piden aplicar básicamente una homotecia con razón un medio. ¿Cómo aplicas una homotecia cuando la razón es un medio?, ¿Saben hacer una homotecia con otro número, o sea, homotecia con razón 2, 3, 4?... el un medio es la razón que dice cuál es la diferencia al dividir un lado con el otro, entonces, ¿qué significa eso?, si el lado grande, mejor dicho, si el vector grande que va de ese punto a ese vértice tú lo divides por ese que va de ese punto al vértice resultante, tiene que dar un medio. Dicho de otra manera, esta distancia que tienes desde aquí a la figura inicial debes multiplicarla por un medio… multiplica.

Alumno 11: Profe, ¿cómo se hace esto?

Profesora: Escalar es hacer homotecia, escalar es agrandar o achicar algo manteniendo la forma, por ejemplo, un mapa a escala. Entonces es una homotecia, con centro (0,0).

Alumno 12: La pregunta era… ¿el área va al cuadrado y el volumen va al cubo y el perímetro va sin nada?

Profesora: Ya entiendo solo se multiplica por la razón y en otra va al cuadrado y al cubo. Sí está bien.

Alumno 4: Profe ¿esto se puede aproximar?

Profesora: ¿Cuánto te da?

Alumno 4: 0,5.

Profesora: No es conveniente, porque el coma cinco es un número que esta entre medio, el número es demasiado perfecto.

Alumno 4: Y la otra pregunta es donde tendría que ubicarlo…

Profesora: Ocupa las reglas de homotecia, ocupa los vectores, si eso es un centro y eso un vértice deberías tener una línea.

Alumno 4: A entonces eso se da vuelta acá.

Profesora: No exactamente, cuando tú multiplicas por un medio, lo que haces es medir la distancia del centro hasta el vértice y la distancia de ese centro se aplica desde el centro hacia acá.

Alumno: Pero la mitad ¿de este hacia ese?

Profesora: Exactamente, y te debería quedar la misma figura.

Profesora (a otro alumno): sólo tengo un pero, si dice O deberían pasar por el centro cada uno de los vectores.

Alumno 13: ¿Qué significa escale por un medio?

Profesora: Escalar, ¿qué es una figura escalada?

Alumno 14: Es por ejemplo lo que hicimos en tecnología, que dos centímetros correspondían a un metro de la cancha.

Alumno 13: Entonces eso tengo que dividirlo a la mitad y hacer una figura igual pero más pequeña.

Profesora: Pero ¿por qué hay un centro?, ¿qué significa que haya un entro (0,0)?

Alumno 13: No sé.

Profesora: Cuando tú escalas unas figuras puedes usar dos contenidos, semejanza u homotecia.

Alumno 13: Ya pero como hago esto, si no me alcanza el espacio.

Profesora: Si te alcanza, porque la homotecia es eso, que significa eso, es un centro por lo tanto salen vectores de ahí, si ese es tu centro desde aquí sale una línea hacia cada uno de tus vértices. Traza un vector para que tengamos un ejemplo… (El alumno lo traza) sobre ese debe quedar el punto, ¿cuánto medirá?

Alumno 13: 5,8.

Profesora: Ahora esa distancia hay que multiplicarla por el factor.

Alumno 13: Da 2,9

Profesora: Entonces qué significa eso, si tu mides acá…2,9.

Alumno 13: Ah, pero lo tengo que hacer para allá o para acá.

Profesora: Para acá, ahí tienes que ver como resulta… si te queda bien la figura ¿cómo debería quedarte?

Alumno 13: semejante.

Anexo 11: Transcripción Audio 3 (Clase 15/11)

Grabación clase 15-11

Comentario inicial: El grupo tiene 3 alumnos, de los cuales 2 aportan mucho y el tercero trabaja, pero lo que dice es más bien poco importante porque solo hace burlas y chistes.

Alumno1: 0,3 periódico.

Alumno2: 0.9.

Alumno1: ¿Periódico?

Alumno 2: supongo, aunque da lo mismo si es periódico ¿o no? si lo vamos a poner en la tabla.

Alumno 1: pero si da 0,999

Alumno2: más por menos, menos, entonces -4, y 1,5 por 1, 1,5 cierto, ¿y ahora?

Alumno1: qué diferencia o relación se encuentra en … pero, hay que marcarlo ¿o qué?

Alumno2: supongo.

Alumno1: Yo creo

Alumno2: Mira, dice representa en forma vectorial en el gráfico. Hay que unir los puntos entonces.

Alumno1: hay que unir los puntos.

Alumno2: de cualquier forma, no más hay que unirlos no más.

Alumno1: ¿Seguro?

Alumno2: Parece que solo hay que ubicar los puntos.

Momentos de distracción, pero, uno de los alumnos estaba graficando.

Alumno1: mira ahí está el punto A, el B y el otro punto B.

Alumno2: ¿Qué es lo que estás haciendo?

Alumno1: Ubicando los puntos.

Se dedican unos minutos más a ubicar los puntos.

Alumno1: -3, 1,5 eh, profe una consulta, qué se hace ahora.

Profesora: Ahora se unen los puntos y tienen que pasar por el centro.

Alumno1: y ¿todas pasan por el mismo punto?

Profe: Claro, si están bien hechas las rectas todas pasan por el centro.

Alumno2: Ahora hay que tirar las líneas y todas pasan por ahí.

Alumno1: Mira, ahí tiré una y queda bien.

Alumno2: ah y hacia abajo hay que pasarla. Que parece que parte del punto 0 no más.

Alumno2: si los puntos están en otras partes, como que pasan no más.

Alumno1: Claro, pero debe pasar por el centro no más.

Alumno:2 Chuta me faltan, amigo ¿cuáles me faltan?

Alumno1: La G y la F.

Alumno2: Y ¿dónde va la G?

Alumno1: Ahí abajo.

Alumno2: Falta la H igual.

Alumno3: Observa la razón de k de los puntos C y D y responde…¿qué relación o diferencia puedes ver entre ellas?

Alumno1: Que están sobre los ejes.

Alumno2: pero, dice qué diferencia, ah espera qué diferencia o relación.

Alumno1: que los 2 pasan sobre un eje.

Alumno2: Que el punto C pasa por el eje X y el D pasa sobre el eje Y. Ya, ahí hay una diferencia y la relación de antes.

Alumno1: Compara los vectores de los puntos homotéticos mencionados antes, como afecta la razón a estos puntos

Alumno2: Que todos pasan por el punto 0.

Alumnos del grupo: No cacho.

Burlas y comentarios innecesarios.

Alumno1: Si k es más grande queda más alejado del punto original.

Alumno2: Si el k es así queda por ahí y si es negativo queda como por abajo.

Alumno1: Ahhh

Alumno2: Si el punto original está en una parte y el k es positivo está totalmente alejado.

Alumno3: Te acuerdas que estos tenían número.

Alumno1: ¿de qué depende entonces?

Alumno2: depende de los signos entonces.

Alumno1: Si el vector varía en su signo, también varía en el punto del plano cartesiano. No poh.

Alumno2: la k es la que cambia eso. Y ¿cuál es el vector?, ¿cuál es la k?

Alumno1: es la que multiplicas para trabajar.

Alumno2: espera es que aquí habla de vectores, ¿por qué vas a poner la k?

Alumno1: si la k varía su signo, los vectores también varían por lo que pueden estar más lejos o más cerca del punto original.

Alumno2: Si la k varía su signo y los vectores varían dependiendo si son positivos o negativos pueden quedar arriba o abajo del eje x respectivamente.

Alumno1: ¿A qué se refiere con el punto P?

Alumno2: profe ¿qué significa que sea centro P?

Profe: El P es el punto centro donde tiene que dirigirse el vector. Te lo da el punto P.

Alumno1: No

Alumno2: Pero, ahí está.

Alumno1: ¿cómo hacemos la figura?

Profesora: tienen que construir la figura homotética a partir de ese punto P.

Alumno1: Entonces ¿cómo pasamos las líneas por ahí?

Profesora: Claro y se van a cruzar todas las líneas por ahí. Y se va a crear una figura nueva por acá como un reflejo. Esta figura se va a ver en sentido contrario. Tienes que ver el valor de k.

Alumno1: Tengo que multiplicar K por cada uno de los lados.

Alumno2: Tenemos que multiplicar todos los puntos y si se cruzan está bueno.

Alumno1: Ya, tú haces el B y yo el A y el Juaco hace el C.

Alumno2: Ya tengo el C

Discuten como hacer los cálculos, pero la mayoría del audio no es útil para el trabajo. Se retoma cuando vuelve a existir vestigios sobre geometría.

Alumno3: El mío estaba malo porque puse el Y primero, después el X, me confundí.

Alumno2: El mío también tenía un error de cálculo con los signos.

Vuelven a revisar los cálculos.

Alumno2: Los valores deben pasar por el P.

Alumno1: Todas las rectas.

Alumno2: O ¿qué onda?

Alumno3: En vola' el ejercicio es así no más.

Alumno1: Según yo, no pasan por el P, pasan por el 0 no más.

Alumno1: Profe tengo una duda. ¿Por qué quedo así?

Profesora: Bueno entonces comience a sacar sus conclusiones, ¿por qué les quedo así la figura? ¿en qué influye ese punto P?

Alumno1: Si los cálculos nos dieron por aquí.

Profesora: Ya entonces, eso debe ser incluidos en sus conclusiones.

Alumno1: Ahí dice la pregunta, ¿qué afecta que el centro sea P?

Alumno2: Si afecta po'. Entonces no habría otro punto que no fuese el 0 que sirve.

Alumno1: Si con el 0 la figura queda aquí, entonces con el punto P debería quedar por acá po'.

Continúan haciendo cálculos para ver qué es lo que ocurre.

Alumno2: Profe, ¿qué más se puede hacer aquí?

Profesora: Entonces si creen que esa es la opción, deben registrar eso.

Alumno2: Es que no es que creamos, es la opción.

Alumno3: ¿Cuál es la que hay que entregar? La mía no porque voy atrasado.

Alumno1: Hay que entregar todas profe.

Profesora: Una por grupo.

Alumno2: ¿Cuándo una figura es homotética?

Alumno:1 Cuando las líneas pasan por el centro.

Alumno2: Loco, ésta pasa por otro lado.

Alumno1: La conclusión es que no, porque ninguna pasa por el punto P.

Alumno2: ¿En qué afecta entonces que el punto sea otro punto?

Alumno 1: Afecta de que no sirve otro punto que no sea el punto 0.

Anexo 12: Transcripción Audio 4 (15/11)

El grupo cuenta con 4 alumnos, la grabación corresponde a su conversación registrada para el trabajo con la guía de homotecia vectorial (Anexo 3)

Alumno 2: ¿Cuál es el centro?

Alumno 3: Debe ser el punto (0,0) supongo.

Alumno 1: El origen según yo debe ser el (0,0) al centro, o sea, O.

Alumno 2: Acá hay que multiplicarlo por el punto cierto.

Alumno 1: Por lo que sé, k es lo que tiene que medir el vector.

Alumno 3: Pero es que k es la constante.

Alumno 1: Es k por A y k por D, o sea, 2 por 1 y 2 por 2 y ahí se buscaría… Y que tiene que ver acá el origen... Ya… Te dan la ubicación A.

Alumno 2: Entonces quedaría por acá.

Alumno 1: Este es el vector, y el vector trazado debería ser de acá a acá.

Alumno 2: Así debería ser supongo.

Alumno 1: Sí, pero no entiendo qué relación tiene el punto 0… Pero si llega a ser así sería... Primero la X y después Y.

Alumno 2: Y… Sí.

Alumno 1: Fíjate en la imagen de allá abajo está en el punto 0, o sea, el punto de la homotecia, al punto A se multiplica por 2, es que como que duplica la distancia según yo.

Alumno 2: Sí, pero él se duplica, pero acá no.

Alumno 1: ¿Qué tiene que ver el punto de homotecia?... Homotético, o sea, (0,0) ¿qué tiene que ver acá?

Alumno 4: Por 0,5 da 1.

Alumno 3: Pero ¿qué están multiplicando?

Alumno 2: Eso multiplica lo de adentro.

Alumno 1: K por lo de adentro, esa es la fórmula que está allá (Proyectado en pizarra).

Alumno 1: (-4) por (-0,25).

Alumno 2: Es 1.

Alumno 1: Yo tengo entendido que multiplicar esto por esto y buscarlo.

Alumno 3: (-0,25) por (-4).

Alumno 2: Es 1

Alumno 1: No, (-0,25) por (-4) te da un número y después lo repites esa operación, pero con la Y griega.

Alumno 2: Es 1.

Alumno 1: O sea, que si fuera acá sería 3 por 0 y 3 por (- 1), dos operaciones a parte… Por si acaso allá en la pizarra está la fórmula. O sea, quedaría (1 ,1).

Alumno 2: La C daría (-3,0).

Alumno 1: Y ¿Qué tiene que ver el punto que no sea el centro?... Ahí tienes que empezar el vector.

Profesora: Exactamente, básicamente tú desde el centro hasta acá formas una línea; el punto nuevo es la misma línea, pero multiplicado por 2, el doble… Entonces ¿Qué es lo que pasa al final? Tú ubicas fuera el punto final acá, ¿Cómo se logra el punto final? El resultado se multiplica simplemente entre el punto y el doble.

Alumno 1: (-1) por 3 y 3 por 0 acá (al compañero 2) ... (-1) por 3?

Alumno 2: Menos 3.

Alumno 1: Número multiplicado por nada.

Alumno 2: Nada.

Alumno 1: ¿Cómo se llamaba como que cuando la línea se duplica la distancia?

Alumno 4: ¿Tengo que medir los lados del triángulo y multiplicarlos por (-0,5)?

Alumno 1: No, creo que no… Creo que esa hay que hacer lo mismo con los puntos y luego dibujar la figura. (Ejercicio 2.a) ... Lo que yo entendí, por lo menos, es que hay que tomar el punto B, multiplicarlo por K , pero no sé si está bien porque me queda por acá.

Profesora: Lo que tú estás haciendo era multiplicar sus coordenadas.

Alumno 1: Sí, tomando como referencia este centro y me quedo acá.

Profesora: No es exactamente lo mismo, ¿Por qué no es lo mismo? Cuando tú haces una homotecia tú lo que haces es generar una figura semejante a esta, o sea, tiene que quedar igual pero más grande o más pequeña. Si recuerdas la guía anterior lo que uno tenía que hacer era tomar el centro de homotecia y uno tenía que trazar una recta que siempre pasaba por el punto y el vértice, pero esa recta es infinita. Es decir, sigue para acá y para allá (Alumno 1: para acá para allá) ... El punto resultante de una homotecia tiene que estar en esta recta.

Alumno 1: Sí, tiene que estar en esta línea.

Profesora: Entonces qué es lo que multiplicas tú cuando encuentras una homotecia, si ves allá en la pizarra dice que multiplicas k por el vector OA, ese vector es lo que tienes que multiplicar.

Alumno 1: O sea, multiplico k, o sea, (-0,5) por el vector de las distancias de acá a acá.

Profesora: Exacto, por el vector C.

Profesora: ¿Cómo se multiplica un vector?

Alumno 1: No sé.

Profesora: Te puedo dar dos formas de hacerlo, una... Primero es saber que vector es ese, el vector parte en el punto P y llega al B, llega acá, así que yo voy a hacer esto... Por qué un vector tiene que tener la dirección asociada, si ese vector lo colocara acá abajo se vería así (lo dibujo en el origen). Esta es la forma correcta en que se ve un vector, un vector se ve desde el origen hasta dónde llega. ¿Qué coordenadas tiene este punto? (se le muestra el punto final del vector).

Alumno 1: (-2,1).

Profesora: ese es el vector (-2,1), no importa donde lo dibujes.

Alumno 1: O sea, para saber que vector es se tomaría del centro para ver el vector.

Profesora: Desde el origen justamente, entonces lo que tú... lo que uno hace es multiplicar las coordenadas del vector. Si tú multiplicas ese (-2,1) por ese k te va a dar cual es el vector resultante, ese vector va ir para otra parte.

Alumno 1: Va a ser un vector más grande o más pequeño y ese lo tengo que dibujar acá.

Profesora: Exactamente, y eso lo tienes que dibujar partiendo desde P, y ahí te va a quedar el B` también sobre la recta.

Alumno 1: También con B y A.

Profesora: Nótese bien que hay que multiplicar por (-0,5), tiene un menos.

Alumno 3: no entiendo esto… La diferencia entre la constate… Es que…

Profesora: Mira los números porque esa es la constante una es 3 y la otra es (-0,3) periódico. Cuando pregunta similitud o diferencia, tú puedes ver algo visual, llegar y mirarlo, pero también puede... Tiene algunas diferencias que son más específica No importa lo que tu observes, si no logras ver nada matemático anota cualquier diferencia o similitud que veas

Alumno 1: Multipliqué el (0,5) por este vector.

Profesora: Lo que pasa es que apretaste el igual dos veces.

Alumno 1: Pero debería ser (0,5) no (-0,5).

Alumno 3: Pipe, es (0,5), 1 es +1, más por menos, menos.

Alumno 4: ¿Pipe esto se hace con respecto a P o (0,0)?...

Alumno 1: Tengo que calcular el vector de acá a acá (p al punto) y colocarlo acá (el origen).

Profesora: Eso es una manera, es que en realidad uno lo coloca acá para saber qué coordenadas tiene el vector, pero si tú lo puedes ver acá mismo (saliendo de P) ver que se mueve tanto hacia allá y hacia acá, igual puedes encontrar la coordenada.

Alumno 1: O sea, que sería uno, dos, tres, cuatro, cinco (cuenta hacia la izquierda) y uno abajo.

Profesora: Exacto entonces sería (-5,-1).

Alumno 3: Si yo digo que la razón de homotecia 3 aleja el punto del origen.

Profesora: En ese caso te diría que estás respondiendo a B, porque en la A preguntan por el k, la B pregunta por el resto, qué pasó con el punto y eso. Acá sólo dice: mira ese 3 y ese 0,3 periódico, ¿qué pasó?

Alumno1: (-1) por (-0,5), sería 0,5.

Alumno2: La razón k es un número entero en la otra es decimal…

Alumno1: Tengo una duda, acá cuando se toman las coordenadas del vector, que punto tomo como centro acá en el vector de P a C.

Profesora: Sigue siendo el centro de homotecia.

Alumno 1: Pero para sacar las coordenadas del vector.

Profesora: A ver, ¿qué hiciste con los otros 2?

Alumno 1: Con el A lo tomé acá como centro, o sea, menos 1.

Profesora: (-5,-1) ¿cierto?, ya pos es lo mismo partiendo desde acá.

Alumno 1: De acá a acá y de acá a acá, me dio (-5,3), ah, pero es negativo.

Profesora: Exacto, es negativo. Si te resulta todo bien ¿cómo debe quedarte la figura aquí?, semejante, ¿cierto?

Alumno2 ¿Cómo se saca la constante?

Alumno 4: No sé creo había que dividirlas entre todas.

Alumno1: ¿Qué hacemos si nos queda afuera?

Alumno 3: Según yo esta malo.

Alumno1: No si esta bueno… Según yo ni necesitamos el gráfico (refiriéndose al plano cartesiano).

Parte 2: Continuación del audio.

Alumno 4: Para calcular, o sea, ¿la k tenía que dividirlo esto por eso o no?

Profesora 2: Tienes que, primero ver donde hacer las líneas y ver donde se cruzan todas eso se llama centro de homotecia. O también medir esto con esto, esto con esto y hacer la división.

Alumno 1: a donde te quedó A’, a mí me quedo en -5 y 2,5.

Alumno4: La homotecia me quedo acá, A’ ah, no sé.

Alumno 1: Si la A` me quedo por acá.

Alumno 4: ¿Qué hiciste ahí?

Alumno 2: Hay que sacar O que está por aquí.

Alumno 1: Ya pos y ¿por qué pusiste 0,5 y 5,5?

Alumno 2: Porque no se juntan en la línea se juntan acá al lado.

Alumno 4: como sacaste las coordenadas ahí, porque hay que sacar las coordenadas

Alumno 1: Mira tú haces el vector… Pero me estoy confundiendo, no sé si hay que sacar directamente las coordenadas del vector, o sea, (-1) por esto, sí porque así te salieron los dos puntos porque lo que necesitamos son dos puntos no solamente uno. Acá está el vector PB, mira lo que hago yo, es ubicar como encerrarlo en un cuadrado y lo tomo a una esquina, y lo tomo 2 de altura, menos 3 y ahí saco las coordenadas del vector y eso lo multiplico por el k.

Anexo 13: Transcripción Audio 5

El grupo cuenta con 4 alumnos, la grabación corresponde a su conversación registrada para el trabajo con la guía de homotecia vectorial (Anexo 3)

Alumno 1: Oigan, acá tienen que multiplicar el 2 por el 1.
Alumno 2: No, hay que multiplicarlo por el vector.
Alumno 1: No po`, la constante es k.
Alumno 1: ¡Profe!
Alumno 3: Hay que multiplicar cada número por la constante.
Alumno 2: Sí.
Alumno 3: No, es que si multiplicai' 2 por 1 y 2 por 2 te da exactamente lo mismo que si multiplicai' todo junto.
Alumno 4: ¿Multiplicaron cada número?
Alumno 2: Sí, o sea, la x y después la y.
Alumno 3: ¿Hiciste la (b)?
Alumno 1: Da 1 y 1.
Alumno 2: ¿Cuánto te da?
Alumno 1: Creo que da como 1 partido 9, ¿o no?
Alumno 2: Hay que escribir todo el número y luego restar por lo que está antes de la coma y…
Alumno 3: La D es 1.
Alumno 4: 1,5 por 1 es 1,5.
Alumno 1: Pero es que no creo que dé porque si te ponen ese y ese, y los dos da número entero…
Alumno 2: Qué diferencia o relación, a ver…
Alumno 1: Esta bien lo que decía yo, 1,5 acá, pero a la altura da 3.
Alumno 2: pero esta es la X y esta es la Y.

Alumno 2: ...Hay varias que cruzan por el (0,0) … Mira la E, la B, la G, la F pasan por la… por el (0,0).

Alumno 4: ¿Porque tiene una línea así?

Alumno 2: No, es que se equivocó… la H yo no la crucé justo por acá… Ah espérate.

Alumno 4: Es (1,5).

Alumno 2: Ah, yo la pase por el (0,5).

Alumno 1: ¿Qué diferencia se encuentra entre c y d?, ¿Una está en el eje Y, y la otra en el eje X?

Alumno 2: ¿Le ponemos eso?

Alumno 1: No sé. Según yo pondría eso, una está en la recta X y la otra en la recta Y.

Alumno 4: Diferencia o relación.

Alumno 2: Te están preguntando por la C no la C`... que la C está sobre el eje X y la otra sobre el eje Y.

Alumno 3: ...esta es la mitad...

Alumno 4: ¿Cómo se supone que sabes...si las figuras son o no son homotéticas?

Alumno 1: Porque la diferencia, o sea, la división de sus lados tiene que dar lo mismo. No, no son homotéticas...

(Silencio por algunos minutos)

Alumno 4: ¿Esto queda positivo? Es que es la mitad po`.

Alumno 1: ¿Que estás haciendo? ¿Estás dividiendo?

Alumno 2: Sí, para ver la razón, a ver, pongámosle que es 2 y si con otro me da es 2.

Alumno 3: ¿Cómo se supone que se ve esto?

Alumno 2: elegí… en qué punto y luego el prima de ese y lo dividí. Y después haces lo mismo con varios, aunque… dice vectores.

Alumno 3: ¿Cómo afectan estas razones a…?

Alumno 2: Sí, pero es que si son vectores se refiere desde el punto a… creo. Dejémosla pal` final.

Alumno 1: ¿Cuánto te da?

Alumno 2: A mí me dio 2, o sea, 0 y 2.

(Minuto de silencio)

Alumno 2: Este no se me junto… pero no sé cómo lo hiciste.

(Explicación de alumno 1, no se escucha bien)

Alumno 2: Y qué pasa con el punto P.

Alumno 1: Lo tení que sacar desde ese centro pa` acá.

Alumno 2: Crucé la D con la D`, la C con la C`, a A con la A`, y todas se me juntaron ahí, o sea, y este se llama… Algo de homotecia, punto de homotecia o algo así… Y acá igual hice lo mismo y me da (0,2) pero, aquí no se me cruzaron todas.

Alumno 4: ¿No pasa justo cierto?

Alumno 2: La C es la que no cruza.

Alumno 2: Este según yo es el punto y la k es cuando vayamos a dividir los lados.

Alumno 1: No es que acá teni' que usar esa cuestión del... Pitágoras para ese lado (Ejercicio 3.a).

Alumno 2: ¿Qué estai' haciendo?... ah, ya me acordé.

Alumno 2: Mejor usamos los cuadraditos porque mira acá tenemos justo cuatro y ahí justo dos, así que es más fácil.

Alumno 4: Mira es que dos cuadritos miden como un centímetro, más o menos.

Alumno 2: Pero la diagonal no da exacto, por eso hay que hacer lo que tú dijiste (Pitágoras)

Alumno 3: Espérate es que...

Alumno 2: Hay que dividir los lados no más.

Alumno 3: No, es que en esto hay que construir una figura

Alumno 2: El Nico anotó las coordenadas de todos los puntos y después lo multiplico por la k, y.… lo hiciste hacia el punto P.

Alumno 3: No, es que tiene que pasar por el centro P ¿o no?

Alumno 1: 1,4 y así…

Alumno 2: ¡No!, da decimal… Este tampoco.

Alumno 3: Es que si lo hago de la forma que me han explicado no me da nada, nada.

(Algunos minutos de silencio).

Alumno 4: Y ahora si divides los lados para ver si te da la constante.

Alumno 3: ¿Cómo los lados?

Alumno 4: Esto po', AB por A`B

Alumno 1: Creo que eso es una homotecia, en figuras semejantes se dividen los lados.

Alumno 3: ¿Cómo se supone que hago una línea si me da un resultado negativo?

Monitor: Los vectores negativos tienen asociada una dirección. Primero ese ejercicio se está haciendo con la definición que está allá adelante. se puede ver la de abajo y la de arriba, ¿Miraron las definiciones o no? Tú tienes un vector que nace en este punto P y que llega hasta B. este vector tienes que multiplicarlo por k.

Alumno 4: Eso hice.

Monitor: ¿Cuánto te dio?

Alumno 4: No me acuerdo es que… no sé.

Monitor: Entonces vuelve a hacerlo.

Alumno 4: 0,8... Me dio 0,8

Monitor: ¿Cómo hiciste eso? ¿Lo mediste con regla?

Alumno 3: Sí.

Alumno 1: En vez de hacerlo para allá lo haces para acá.

Alumno 4: Ah, ya entendí.

Monitor: un vector es un vector porque tiene asociada una dirección y un sentido, cuando lo multiplicas por un número negativo invierte el vector, invierte la dirección.

Alumno 4: ¿Que hay que hacer?

Alumno 1: Medir eso hasta aquí, de la P hasta el punto, y si te da no sé 3,4 lo multiplicai y si te da un resultado eso lo proyectas para acá.

Alumno 2: Ya, me da 2,5 acá de la p hasta un punto, después lo multiplico por…

Alumno 1: 2,5

Alumno 2: Ya… y ahí lo proyectó para acá. O sea, nada que ver esta cuestión.

Alumno 1: Pensaba que sí… pero no.

Alumno 3: ¿Hicieron el tres al final?

Alumno 2: La (a) no la hice.

Anexo 14: Transcripción Audio 6 (15/11)

Grupo constituidos por 3 alumnos, de los cuales solo dos hablan en la mayoría de las intervenciones y uno de ellos, la mayoría de las veces solo escribía o hacia alguna pregunta fuera de lugar.

Obs: los dos alumnos que hablan mucho, son pareja.

Alumno1: ¿Y qué hay que hacer con esto?

Alumno2: Ya, pero, mira, ahí dice que A es (1,2) o sea que ya está…

Alumno1: No mira, A lo multiplico por 2 y ahí está el nuevo punto.

Profesora: Y ¿cómo sabe?

Alumno1: Porque eso fue lo que hicimos la clase pasada.

Alumno1: El punto es (2,4) entonces.

Alumno2: A' no te olvides de la comita… Pero, ¿por qué ahí?

Alumno1: Porque es el doble.

Profesora: Está bien que sea el doble, pero, ¿por qué se multiplica por 2?

Alumno1: Porque es el doble.

Profesora: Bien, ¿pero ahora qué significa eso? ¿Qué significa una homotecia con respecto al origen? ¿Cuál es el origen?

Alumno1: Este.

Profesora: Ese no es el origen. El origen del plano cartesiano es un punto específico.

Alumno1: Porque dura como 5 minutos máximo.

Alumno2: Enserio dura como 5 minutos.

Alumno1. Para el otro es lo mismo. ¿Cachaste como es ya?

Alumno2: Si, o sea yo creo que sí, necesito el otro para ver bien.

Alumno1: El otro es 0.9, … ya lo tengo, lo tengo.

Alumno1: 4 + 0,25

Alumno3: Por

Alumno1: 4 por 0.25, da 1

Alumno2: 1, pero cómo 1, ¿cuánto?

Alumno1: El otro da 1 también

Alumno2: 1 también, guau

Alumno1: Entonces multiplicamos cada valor por el k.

Alumno3: Pero sería -1

Alumno1: No, porque menos por menos, es más.

Alumno2: Todo bien calculado.

Alumno1: el que sigue -1 por… dímelo pos niña.

Alumno2: 0,3 ah, no espera es la D. Es 3.

Alumno1: -1 por 3 sería, -3, el otro es 0, obvio.

Alumno2: -3 sería, ¿seguro?

Alumno1: Pero multiplícalo.

Alumno2: Si, siii. Ahhh chuta era menos 3.

Alumno3: ¿Te dio (0,1) o no? (no se entiende bien el primer número, creo que es 0).

Alumno1: ¿En cuál?

Alumno2: Da 0,9.

Alumno1: Si lo aproximamos sería 1.

Alumno2: 0,999999.

Alumno1: 1 pues.

Alumno2: Ya, ¿terminamos? ¿Ubicaste h?

Alumno1: Si, ahí está la h.

Alumno2: ¿Y lo pudiste graficar? No, no lo pudiste hacer.

Alumno1: 3,0

Alumno2: Y la D ¿dónde está?

Alumno1: La E.

Alumno2: La D.

Alumno1: Ahh, ahí está la D.

Tiempo en buscar un corrector para la compañera.

Alumno1: La diferencia me dio -9,01.

Alumno2: ¿Cuánto?

Alumno1: -9,000001.

Alumno2: O sea 9 pos, -9.

(Murmullos)

Consultas sobre el celular a la Profesora sobre el celular que se cortaba.

Profesora: ¿Cómo les va por aquí? Recuerden que el tiempo de los ejercicios es una clase, no más.

Alumno2: Corre, corre, corre.

Alumno1: Imposible eso.

Alumno2: Ya Nacho, este lo haces tú.

Profesora: Tienen que mirar C y D luego, responder éstas 2. La primera de ellas es que pueden decir que estas constantes, ¿qué relación hay?

Alumnos 1 y 2: Que son números.

Profesora: Y después en la siguiente, qué relación hay en lo que forman.

Alumno1: Diferencia es una resta, es como decir a cuantos cm de diferencia estamos ella y yo.

Un poco de bromas relacionados a otras cosas.

Alumno2: ¿Qué diferencias o semejanzas puedes encontrar?

Alumno1: Que los 2 se mantienen en 0, no, no está malo.

Alumno2: Y si dejamos esto no más, es lo mejor que tenemos hasta ahora.

Alumno1: ¿Qué diferencia o relación existe?

Alumno2: Que ambos tienen como punto de origen el 0.

Alumno1: ¿Ambos se ubican en…?

Alumno2: En el punto 0.

Alumno1: Sí, sí, sí.

Alumno: Ya, ambos se ubican en el punto.

Alumno1: ubicar es sin H.

Más bromas relacionadas a ese error.

Alumno1: Ya ahora chamullemos.

Siguen hablando de otros temas, ahora es de un lápiz.

Alumno1: Compara los vectores de los puntos… (ruido que no se entiende) … (Está leyendo un enunciado)

Risas y comentarios externos

Se agregan minutos en conversaciones varias que comenzaron a partir de un dulce.

Alumno2: El punto P es el centro de la homotecia.

Alumno1: Ya, entonces P es el centro.

Alumno3: Este es el centro y tenemos que reflectarlo, aaah, no, nada que ver.

Alumno1: Ya sabemos que P es el centro.

Alumno2: Ya mira, tenemos que medir esto, multiplicarlo por 2.

Alumno1: Por 0,5.

Alumno2: Que chu…

Profesora: Ya, pero, qué hay que hacer ahí, se ven flechitas se ven vectores, qué se hace con eso. Según la definición hay que multiplicar.

Alumno2: Ah ya, creo que ya entendí. Ya hazlo, pero, creo que ya se lo que hay que hacer.

Alumno1: Por fin.

Alumno2: Ya, entonces el punto C está en -4,5.

Anexo 15: Transcripción Audio 7 (22/11)

Dudas presentadas durante la aplicación del test (Anexo 4)

Alumno 1: ¿Tengo que suponer que estas líneas son iguales?

Profesora: Eso lo tienes que deducir tú. No puedo responder eso.

Alumno 2: Lo que pasa es que homotecia directa es como cuando depende del tamaño, y la inversa es cuando está dado vuelta, depende del ángulo, pero ¿qué pasa si es menor del tamaño y está dado vuelta?

Monitor: Vieron relaciones adelante que tenían que ver con las razones, ¿te acuerdas que viste cuando era mayor, menor que 1, igual que uno?, tiene que ver con eso.

Profesora (En voz alta para el curso): En el ejercicio, el 7,5 cm está sobre la línea de al medio, no de la de al arriba ni de la de abajo.

Alumno 3: ¿Qué tiene que ver la longitud… cuánto mide el área de abajo?

Profesora: Longitud es medida, largo, lo que tú mides con regla.

Alumno 3: Tengo que poner eh…

Profesora: Explicaciones, sí.

Alumno 3: Es que yo sé que es falso porque…

Profesora: Bueno, ahora estás pensando en por qué, eso colócalo aquí.

Alumno 4: ¿Cuál es la proyección de la vela?

Profesora: Esta, ¿nunca han hecho una cámara así? Mira, tienen un objeto real, deja pasar un poco de luz aquí (señalando el orificio en el dibujo), y eso genera una vela invertida, de hecho, es una forma de ver cómo funciona el ojo.

Alumno 5: Profesora… esto se mide hasta acá, ¿hasta la letra?

Profesora: No, solamente hasta el punto… Para los que no han leído instrucciones hay que justificar tanto las verdaderas como las falsas, las falsas son usualmente más fáciles de justificar; si pueden decir por qué lo que creyeron era verdadero sería mejor. Ojalá sea la menor cantidad de respuestas sólo con una V o F.

Alumno 6: Profe, ¿10 dividido 0,25 puede dar 40?

Alumno 7: Ah, pero cuántas veces cabe el 0,25 en el 10, o sea, puede caber más.

Profesora: Tiene sentido por la división, ahora la pregunta es si te puede dar más grande que el lado original.

Profesora (a otro alumno): Fíjate que estás dividiendo la medida de un lado de la izquierda con uno de la derecha, pero cuando tomaste estos otros lo hiciste al revés.

Alumno 8: Profesora es que esto no mide 30.4 con la regla, ¿cómo puedo trabajar si son referenciales?

Profesora: Eso lo tienes que deducir tú.

Anexo 16: Transcripción Audio 8 (22/11)

Profesora: Vamos a ver, aquí tengo un repaso de homotecia, está en Edmodo por si acaso, quien no lo tenga le puedo enviar un correo con el archivo, pero es un resumen general, de lo que es y de lo que tiene que saber sobre homotecia.

La primera clase yo les envié un video, que pocos vieron porque de lo contrario hubiera sido mucho más fácil la clase práctica. Les mandé un video, la clase siguiente les pasé una actividad guiada donde estaba el resumen y tampoco, hubo que soplarle las respuestas, decirles lo que hay que hacer, todo fue demasiado, demasiado… que se notaba que no habían estudiado nada.

El tema es que la idea era ver si éramos capaces de estudiar solos, si éramos capaces de aprender solos, si éramos capaces de prever que si algo no lo entendíamos podíamos buscarlo, averiguarlo, consultarlo a otra parte, otra página o en otro vídeo con tal de aclarar lo que no entendí. Y eso no pasó. Por lo tanto, hoy corresponde aclarar los conceptos porque no fue aprendido, donde hubo varias clases prácticas y no hubo aprendizaje.

Este es un resumen súper compacto, relacionado al contenido de homotecia, en lo que es y en lo que les sirve. El libro tiene mucho texto, mucha demostración y es difícil de comprender.

No vamos a demorar mucho en la explicación y posteriormente, como esto es un proyecto de los profes, vamos a terminar con un ejercicio para ver si se aprendió o no. El tema es ver el efecto que cuando ustedes estudian solo que es lo que pasa y cuando fue guiado por la Profesora que es lo que pasa, ya ese es el tema.

Entonces prepare esta presentación con mucho cariño y aquí va entonces el repaso de homotecia.

Inicia la clase en el minuto 15,54 de la grabación (de manera oficial)

Profesora: ¿Qué es lo que ven ahí?, me levantan la mano y me dicen que ven ahí.

Alumno1: Un túnel

Profesora: Un túnel, ¿alguien más ve un túnel?, ¿usted ve lo mismo que él? (no se entiende en el audio, pero se asume que dijo un túnel también).

Alumno2: Fierros.

Alumno 3: Una figura que se ve más pequeña al alejarse.

Profesora: Ella ve una figura que se ve más pequeña al alejarse, y fíjense que importante es lo que dice ella, porque en verdad cuando uno va caminando por ahí, cuando una persona camina, no se tiene que ir agachando para pasar por ese sendero, porque no ha tenido que agacharse, porque no ha tenido que agacharse, o tener que hacer ejercicios de guerra para pasar por ahí, ¿por qué no?, ¿cómo?. Rabanal.

Alumno (Rabanal): Porque es del mismo alto.

Profesora: Porque es del mismo alto, ese arco que se ve es del mismo alto, que hace que yo lo vea así de pequeño.

Alumno 5: La perspectiva.

Profesora: ¿Mi perspectiva visual, o la perspectiva de esa figura?

Alumnos en masa: La visual.

Profesora: La visual, ella hace que yo lo vea así, que vea algo que tiene una medida original, de unos no sé, unos 7 metros de altura, y al final se ve que no midiera más de 5 cm.

¿En qué otras cosas que sean cotidianas podemos ver ese efecto?, en que algo que primero ve el tamaño original y luego lo puede reducir, en forma pequeña.

Alumno 6: … algo que no se entiende.

Profesora: ¿En qué? (tampoco lo entendió).

Alumno 6(otra vez y más claro) las sombras.

Alumno 7: Cuando uno se aleja de un edificio.

Profesora: Cuando uno se aleja de un edificio, ¿cuál es el efecto de eso?

Alumno 7: Se va alejando.

Profesora: Sí, se va alejando. ¿A veces han escuchado el decir, no puedes tapar el sol con un dedo?

Alumnos: Siiii (en masa).

Profesora: Y efectivamente, uno si lo puede "tapar", siendo tan gigante, uno lo puede tapar y eso tiene que ver con la homotecia que tiene mi estructura ocular. Es por eso que yo puedo ver pequeño.

Es por eso que puedo ver, a lo mejor, un edificio de 21 de 22 pisos, mi visión hace que lo vea completo, yo puedo ver ese edificio completo, y por eso al alejarse uno lo ve y el edificio reducirlo a un tamaño pequeño.

La fotografía, por ejemplo, si bien es cierto es un super ejemplo de figuras a escalas, figuras semejantes, polígonos semejantes, pasa exactamente lo mismo, no sale la foto en tamaño normal. Si no imagínate donde lo guardas, la media billetera para guardar una foto en tamaño normal. Lo mismo pasa con un mapa, uno no compra kilómetros de papel para hacer un mapa, sino que lo reduces a escala y eso que uno dibujo es exactamente igual a la realidad, como los planos de una casa, etc. Todos esos son unos ejemplos de figuras semejantes homólogas y si uno los ve también tienen una perspectiva homotética.

Ahora veamos, ¿qué tenemos ahí?

Señor López.

Alumno8 (López): Árboles.

Profesora: Arboles. Más que ver árboles. ¿Qué se ve?

Alumno 9: Una ilusión óptica.

Profesora: ¿Por qué una ilusión óptica? ¿Dónde está si ilusión óptica?

Alumno 9 (respondiendo): En el tamaño de los árboles.

Profesora: Se ve como si fuera cerrando, achicando al final del paraje. Lo más probable es que este árbol de aquí que debe medir unos 10 metros, debe ser exactamente de la misma medida o similar a este último árbol que yo veo, como lo tendría que hacer para saber.

Alumno: Caminar.

Profesora: Y si camina y ahora mira hacia atrás ¿qué va a pasar?, va a ver lo mismo exactamente lo mismo. Porque tu visión hace que tu veas homotéticamente.

¿Qué es una homotecia entonces? Es una transformación de figuras, pero de qué forma. De una cuadricular a una triangular

Alumno 11: No, de su tamaño

Profesora: Se transforman sus dimensiones. ¿Y esas dimensiones son cualquiera?

Alumno 12: Iguales.

Profesora: Deben ser proporcionales, si son iguales estaríamos hablando de la misma figura. Simplemente sería una rotación o una traslación o una reflexión, pero ya no sería una homotecia.

Entonces corresponde a una transformación de figuras, que es lo que pasa cierto cuando alguien toma una fotografía o está filmando, en este caso el globo aerostático que su tamaño es mayor de lo que se ve reflejado en la cámara y más aun de lo que se ve reflejado en tu ojo. Esta forma que tiene el ojo de mirar es exactamente igual a como están construidos los lentes. Cuando 2 figuras son homotéticas. ¿Lo puede leer?

Alumno 12(escogido para leer): "Si al unir mediante rectas sus vértices correspondientes, estas rectas concurren en un único punto llamado centro de homotecia"

Profesora: entonces yo tengo una figura que puede ser la primitiva y otra más que puede ser la homotética pero que tienen muchas características. Ese punto que está ahí, es el centro de homotecia, que es el punto de encuentro de unión de las rectas que pasan por cada uno de los vértices. Observar, por ejemplo, el punto A. y vemos la recta que pasa por A y también pasa por A'.

¿Qué pasa, por ejemplo, con el segmento AB y A'B'? ¿Cómo son?

Alumnos: Paralelas.

Profesora: Paralelas, ¿Y con BC y B'C'?

Alumnos: Paralelas.

Profesora: ¿y qué pasará con el otro segmento?

Alumnos: Paralelas.

Profesora: Paralelas, y no son iguales. ¿Y qué pasará con sus lados?

Alumno 13: Proporcionales.

Profesora: Sí, deben ser proporcionales porque si no lo son no serían paralelas. No habría homotecia. Y que sean proporcionales ¿qué significa?

Interviene unos minutos el inspector general para hacer revisión de los uniformes.

Profesora: Continuamos, retomamos. Por lo tanto, mi centro de homotecia estará ubicado en ese punto.

Supongamos que de “C” a “O” mide 3cm, pasa Agustín a hacerlo, ubique ese valor en la pizarra.

De “B” a “O” mide 2 cm. Y de “A” a “O” mide 1 cm.

Vamos con el segmento C’O.

Alumno: 6.

Profesora: ¿Ese pedazo mide 6?

Alumno: No, todo el segmento

Profesora: Ya, si de B’ hasta O mide 4 cm, y de A’ a O es 2 cm

Calcule por separado las medidas que están ahí.

(minutos de cálculo)

Profesora: Escriba las proporciones que corresponden.

Ahora dividamos cada uno de esos valores.

Alumno: Todos dan 2.

Profesora: Todos los cocientes tienen valor 2, ¿qué significa eso?, que la constante de proporcionalidad es 2, que las figuras son semejantes y tienen un efecto homotético.

¿Qué no sabemos? si es homotecia negativa o positiva.

¿Qué sabemos?, que es 2, que es positivo, que es mayor que 0.

momento libre

Profesora: ¿Qué es la razón de homotecia? Es el cociente entre la distancia del centro a el vértice de la figura homotética y la distancia entre el centro y el mismo vértice de la figura primitiva. Ese es el valor de k.

O sea, divido los segmentos y eso me da el valor de la razón.

Solo se puede ver si cuando las figuras son homólogas.

Las medidas de los ángulos deben ser iguales.

Alumno: ¿Siempre las medidas deben ser proporcionales?

Profesora: Siempre, ya, siempre.

Ejercicio proyectado en pizarra sobre homotecia.

Alumno. La razón es 2.

Profesora. Vamos a ver entonces. Ahora le preguntan por cual segmento. Ponga la “x”

¿Cómo debería escribir la razón de homotecia?

Alumno: 6 divido 3.

Profesora: Ya muy bien ¿6 divido 3 es igual a…? Ya, pero escribamos la ecuación.

Observar que arriba pusieron la suma del segmento, hay que hacer lo mismo.

Eso es lo que hay abajo 1,5 +x. y en el denominador ¿qué debe escribir?

Alumno: mayor dividido el menor.

Profesora: ¿Cómo resuelvo la ecuación? Cruzado bien

Rápido 6 por 1.5,

Alumnos: 9.

Profesora: Ya 3 por 1,5 y 3 por x.

Ya no empecemos, madura. (un alumno interviene, pero no se entiende).

Profesora: 9-4,5 ¿cuánto es?

Alumnos: 4,5

Profesora: Muy bien.

Alumnos: (Gritos de festejo)

Profesora: ¿y eso dividido 3?, ahí quedamos jaja. 1.5

Profesora: ¿Cuál es el valor de homotecia?

Alumno: 2.

Profesora: porque 6/3 es 2 y 3/1,5 es 2.

Alumno: ¿se puede hacer más corto?

Profesora: sí, pero la formalidad es esa. Sus trayectos cortos hágalo cuando corresponde.

Ya está facilito esto, hasta ahora. Ya sigamos entonces. Tipos de homotecia

Las 2 que ven ahí.

1 es la homotecia directa.

2 es la homotecia inversa.

¿Cuál es la diferencia?

Alumno: Una es positiva y la otra negativa.

Profesora: No sé dónde ve lo positivo y negativo, sé que tiene por ahí la definición, pero ahí no lo veo.

Agustín una diferencia.

Alumno (Agustín): La directa la figura está al frente de la normal, y la inversa como opuesto.

Profesora: ¿Alguna otra diferencia que vean?

Alumno: el centro de la homotecia.

Profesora: Ya, ¿qué pasa con el centro de la homotecia?

Alumno: que uno está al frente de las 2 figuras y en la otra esta al medio.

Profesora: ¿Alguna otra igualdad o diferencia?

Alumno: que unos son triángulos y otros son cuadrados (risas)

Profesora: ¿Alguna otra igualdad o diferencia?

Alumno: Los tamaños de las figuras una es más pequeña que la otra (directa) y la otra son iguales (inversa) (haciendo alusión a las imágenes proyectadas)

Profesora: ahí hay una diferencia no menor.

Alumno: Una es por tamaño y otra es por ángulo.

Profesora: Uno está en escala y el otro no.

(timbre cambio de bloque) momento de distracción pequeño.

Profesora: Correctamente han evidenciado lo que tienen de diferentes y lo que tienen de igual. Eso es lo importante que puedan diferenciar y ver las semejanzas de estos tipos de homotecias.

El problema es ¿cómo las construyo?

Si se fijan en la directa es como aplicar una traslación, pero con tamaños distintos. Las figuras no han rotado, los segmentos son paralelos y eso es una característica de la homotecia directa y sabemos la proporcionalidad de los lados.

Y en la inversa algo sucede con la figura.

Alumno: Rota.

Profesora: Rota y en 180°, fíjense que es como el reflejo del espejo cuando uno se levanta o cuando le cortan el pelo y tiene que mirarse en sentido contrario. Ese efecto ocurre con la homotecia inversa, hay un punto de encuentro, un punto donde se cruzan las figuras, los segmentos perdón. Ha sufrido un giro, una rotación.

Vamos a ver lo que ocurre con la homotecia directa e inversa.

¿Qué es el valor de K?

Alumno: Una razón.

Profesora: es el cociente cierto entre el segmento mayor y el segmento menor. Ese valor, si es mayor que 0, va a ver una homotecia directa. ¿Cómo es la proporción en este caso?

Alumnos: es el doble.

Profesora: ¿Qué valor toma la homotecia?, 2, que es mayor que 0, y vemos la relación que hay entre las figuras. En el otro caso trabajado ocurrió lo mismo. Corresponde a una homotecia directa.

Por lo tanto, si k es mayor a 0 vemos una homotecia directa.

Pero hay 3 casos.

Si la razón está entre 0 y 1. Por ejemplo 0,2 0,5 o 0,9 o cualquier valor antes del 1. Casi llegando a 1 pero sin tocarlo, esta homotecia es una reducción y ¿qué significa eso?

Alumno: Que el tamaño se reduce.

Profesora: bien se reduce y fíjense de algo muy importante, ¿dónde están las primas de la figura obtenida?

Alumno: cerca del centro.

Profesora: Perfecto, las primas se encuentran muy cerca del centro de homotecia. Eso es lo que sucede cuando hay una reducción de la figura, no cambia nada mas solo el valor de la constante.

En el caso que la razón valga exactamente 1 ¿qué va a pasar?

Alumno: Son iguales.

Profesora: Exactamente, son coincidentes esas figuras.

¿Qué pasa si la razón es mayor a 1?

Alumno: La figura se va a ampliar.

Profesora: La figura se va a ampliar, las primas se alejan del centro de homotecia. Muy bien.

Veamos en el caso de la homotecia inversa.

Fíjense que la razón es menos que 0. Entonces, ¿qué valores puede tomar?

Alumno: Negativo.

Profesora: Bien, cualquier valor entonces negativo nos da una homotecia inversa.

Entonces, si la razón está entre -1 y 0 o sea es, que número, por ejemplo -0,2, -0.4, etc. La homotecia es una reducción, pero, ¿qué pasa con la figura?

Alumno: Los puntos se dan vuelta.

Profesora: Entonces ¿qué pasa con la figura?, recordando lo que se dijo antes.

Alumnos: Se rota.

Profesora, Hubo una rotación en 180°, la figura queda invertida. Al unir las primas con la original el centro queda al medio de las figuras. Y hay una relación super importante que tienen estos segmentos, porque estos segmentos tienen una constante de proporcionalidad.

Si la razón es -1 ¿qué sucede?

Alumno: No cambia y rota

Profesora: Se dice que la razón es congruente porque queda del mismo tamaño y ¿cuál es la única diferencia?

Alumno: Queda invertida

Profesora, bien y ahora si la razón es menor que 1, menor que -1 perdón ¿qué pasa?, la homotecia es una ampliación, ¿qué significa que la figura aumenta su tamaño?

Entonces solo varían los valores de K.

¿Qué hubiera pasado si hubiéramos partido la clase con esta explicación? Antes de hacer los ejercicios antes de todo lo que vimos antes.

Alumnos: Abríamos entendido mejor

Profesora: ¿Cuál es el centro de homotecia? (viendo un dibujo de un ojo) la pupila sería el centro de homotecia.

¿Qué característica tiene la figura?

Alumnos: la mente lo pone al revés y el ojo lo endereza

Profesora: ¿Cómo quedaría entonces, con una homotecia inversa? Con valor de la constante negativa.

Dan otros ejemplos, pero la profesora solo habla***

Minuto 57, comienza el trabajo en sala (ejercicio vela)

Se entrega el material correspondiente a los alumnos.

La profesora, da las instrucciones correspondientes de la actividad.

Alumnos comienzan a trabajar.

Minuto 62.

Alumno: ¿Que mide 7?5 cm?, ¿la recta de ahí?

Profesora: Las medidas hechas no están medidas con regla, es solo referencial.

Alumno: Profe una pregunta, para saber la longitud de este, ¿debo multiplicar ese 10 por la razón cierto?

Profesora: Usted tiene que saber ya, tiene que deducirlo ya.

Murmullos que no tienen relación a la clase.

Profesora: Recuerden que es un test, es individual y no hay consultas.

Se entrega un poco de ayuda en relación a donde están ubicadas las medidas en el dibujo.

"La finalidad del test es ver cómo piensan y reaccionan en base a como se entendió la clase."

Se escucha como unos alumnos discuten sobre el por qué uno puso una medida, y el compañero le explica que se calcula a partir de la razón de homotecia. (no se transcribe textual porque fue bastante pesada la forma)

Alumno A: entonces la 3 es 4

Alumno B: OA' dividido OA. A, pero donde va. ¿Profe cuál era el orden?

Profesora: Para obtener K, debe ser la prima primero.

Alumno: ¿cómo encontrar el prima?, si no nos dan la medida de todo.

Profesora: pero ahí tiene el prima, tiene que tomar esos datos para trabajar.

Profesora: Deben justificar todo lo que hagan, las verdaderas o falsas.

Alumno: me da 228

Profesora: ¿Qué queda? ¿está seguro es posible?

Alumno: es que estaba calculando la razón y me dio eso.

Profesora: pero ¿dónde…?

Se infiere que están revisando los cálculos.

Alumno: Es lo mismo, pero al revés.

Profesora. Si pues está invertido.

Muchos murmullos debido al audio ambiente.

Profesora hablando a un alumno especifico: ¿qué te dio la primera? ¿cómo vas?

Falsa, verdadera, falsa, verdad, verdad. Te falta la última. Y comprobar.

Tienes que comprobarlo con las razones.

Alumna: Ahora es harto más fácil .

Varios alumnos comparan con la profesora las respuestas. Y se termina el bloque de clases.

Revisar los test. Ahora para rescatar algo de información.