Universidad de Concepción
Campus Los Ángeles
Escuela de educación

PROPUESTA DIDÁCTICA UTILIZANDO LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EL APRENDIZAJE DE LAS FUNCIONES PARA ESTUDIANTES DE OCTAVO BÁSICO

Seminario de Título, para optar al grado de Licenciada en educación y al Título Profesional de Profesora de Educación General Básica con mención en Matemática y Ciencias Naturales.

Seminaristas:

Nataly Soledad Fuentes Acuña

Patricia Ivette Roa Puentes

Valeska Andrea Vásquez Larenas

Docente Guía:

Mg. Lilian del Carmen Vargas Villar

Comisión evaluadora:

Mg. Harry Cifuentes Saldaña

Mg. David Robles Illesca

Los Ángeles, Chile.

RESUMEN

Esta investigación tiene como propósito diseñar una propuesta didáctica basada en el modelamiento matemático aplicando el uso de distintos tipos de registros semióticos que contribuya en el aprendizaje de las funciones para estudiantes de octavo año básico. La metodología del estudio se orienta al enfoque cualitativo, ya que permite comprender los fenómenos y explorarlos. Como resultado del análisis histórico, disciplinar y pedagógico se construyó una secuencia didáctica completamente original para el aprendizaje de las funciones en estudiantes de octavo año básico, utilizando la modelación matemática y en ella aplicando el uso de distintos tipos de registros semióticos. Esta investigación se sustenta teóricamente en los registros de representación semiótica de Raymond Duval, la socioepistemología de Ricardo Cantoral y la teoría constructivista del aprendizaje. El estudio va en apoyo directo a la formación inicial docente y a los estudiantes que están comenzando a conocer el área de funciones, por ende este estudio ha permitido involucrarnos en la realidad de la enseñanza de las funciones y así otorgar un diseño de secuencia didáctica original, para que sea implementado en los estudiantes. Se sugiere que los/as docentes conozcan el contexto de sus estudiantes para implementar esta propuesta y así por consiguiente mejoren las prácticas en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Palabras claves: modelamiento de funciones - registros semióticos - socioepistemología-aprendizaje significativo - secuencia didáctica.

Introducción

La educación en el desarrollo de las personas y de la sociedad, enriquece la cultura, el espíritu, los valores y todo aquello que nos caracteriza como seres humanos. De esta forma para el sistema educativo es fundamental formar a los estudiantes en todas sus áreas del conocimiento.

Una de las disciplinas esenciales en la formación de las personas es el estudio de la matemática, ya que desarrolla habilidades y competencias matemáticas las cuales se consideran una base fundamental para el proceso de enseñanza aprendizaje y la aplicación en la vida cotidiana.

El proceso de enseñanza-aprendizaje entrega herramientas para que los estudiantes no solo sean capaces de memorizar un conjunto de definiciones, algoritmos y técnicas, sino que logren desarrollar habilidades que les ayude a desenvolverse en situaciones de la vida cotidiana y que puedan enfrentar desafíos del futuro. En este proceso más allá de disponer de destrezas, conocimientos, estrategias y capacidades, es necesario tener motivación, intención y disposición de querer cumplir con el objetivo de aprender.

El objetivo de esta investigación es diseñar una secuencia didáctica basada en la modelación matemática que contribuya en el aprendizaje de las funciones para estudiantes de octavo año básico. Pretende que el estudiante construya sus propios conocimientos, que sea el principal protagonista de su aprendizaje y logre adquirir conocimientos matemáticos.

Para facilitar la comprensión de este documento se detalla la estructura general de esta investigación, la que consiste en cinco capítulos. En el primer capítulo se presenta el planteamiento del problema, aquí se evidencia algunas de las problemáticas a nivel país que surgen en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, específicamente en el desarrollo de la habilidad de modelamiento matemático en el contenido de funciones en octavo año básico. Luego se incluye la justificación de dicho problema, las preguntas de investigación y los objetivos, tanto el general como los específicos.

El segundo capítulo consta del marco teórico, sección que fundamenta toda nuestra investigación, se presentan las teorías de aprendizaje, específicamente la teoría constructivista de Jean Piaget, la cual explica que los procesos cognitivos de los estudiantes son construcciones mentales. Se detallan las representaciones semióticas de Raymond Duval, en ella se explica que para comprender un objeto matemático son necesarias las representaciones semióticas y la socioepistemología de Ricardo Cantoral, la cual tiene como base el contexto de cada estudiante para construir su conocimiento. Además se presenta el aprendizaje de las matemáticas, de las funciones y los obstáculos que aquí se producen, del mismo modo, se explica en qué consiste el diseño de una secuencia didáctica. Finalmente se analiza la enseñanza de las funciones que propone el currículum nacional, las habilidades que se esperan desarrollar y el modelamiento matemático como habilidad principal de este estudio.

En el tercer capítulo se señala el marco metodológico, el cual nos muestra el mecanismo utilizado en nuestra investigación, en él se incluye el tipo de enfoque, dimensión, diseño de investigación, alcance, población y muestra, variables e instrumentos de recolección.

En el cuarto capítulo se muestran las secuencias didácticas planificadas con sus respectivos materiales a utilizar.

En el quinto capítulo se muestra el análisis de nuestro estudio, las conclusiones respectivas y discusiones.

En el sexto y último capítulo se presentan las referencias bibliográficas con todos los documentos, investigaciones, libros, etc. que fundamentan la investigación respecto al tema estudiado.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por todos los aprendizajes durante mi transcurso universitario y por entregarme las herramientas necesarias para los momentos felices y difíciles. A mi familia por darme la oportunidad de estudiar, por la confianza, paciencia, motivación y amor puesta en mi a pesar de todo. A mi novio por su paciencia, consejos y amor durante esta etapa tan ajetreada. A mis amigas y amigos por apoyarme y motivarme a seguir surgiendo. A mis compañeras de tesis por la disposición, paciencia y por el trabajo realizado.

Nataly Soledad Fuentes Acuña.

Quiero agradecer a mi familia por la fuerza, paciencia y la confianza que me entregaron día a día, específicamente en mi enseñanza superior. De igual forma agradezco a Dios por hacer todo esto posible, a mis a amigos y amigas que fueron un apoyo fundamental en este proceso, a Nataly y Valeska por darme la oportunidad de realizar este seminario junto a ellas y por el apoyo brindado en momentos difíciles.

Patricia Ivette Roa Puentes.

En primer lugar, agradezco a Dios por darme la vida y salud para emprender y finalizar este camino, siendo fiel conmigo. En segundo lugar, doy gracias a mi familia por confiar en mí, apoyarme, alentarme y cuidarme en toda mi educación, en especial agradezco a mi padre Jorge que hasta el último día de su vida, siguió inculcándome sobre los valores, el amor y la perseverancia, agradezco a mi madre Marlen, quien ha desarrollado un rol importante como apoyo en mi educación, siempre preocupada de cada detalle, desempeñando este último año de carrera un rol de madre y padre para mí, a mi hermano por su dulzura y alegría, al igual que a mi tía Violeta por ser mi segunda madre. En tercer lugar, doy gracias a mis amigos/as, por su alegría, jovialidad y aprendizajes, por apoyarme y aceptarme entrar a sus vidas. Por último, pero no menos importante agradezco a mis compañeras tesistas Nataly y Patricia por su confianza y apoyo en este proceso.

Valeska Andrea Vásquez Larenas.

De modo general agradecemos a la docente Lilian Vargas por su apoyo, paciencia y confianza puesta en nosotras durante nuestra formación docente. Además a algunos profesores presentes durante el proceso universitario, como: Alexis Almendras, Nicza Alveal, Marianela Castillo, Alejandra Robles, Cristhian Espinoza, Bolivar Alarcón, y especialmente al docente Harry Cifuentes y David Robles, por sus consejos y motivación constante.

"La educación es el vestido de gala para asistir a la fiesta de la vida" (Miguel Rojas Sánchez)

Índice

CAPÍTULO I

Planteamiento del problema

El aprendizaje de las matemáticas, junto con la lectura y escritura, corresponden a los elementos fundamentales de la educación, otorgándole una ocupación más dedicada sobre las otras asignaturas, las cuales no dejan de ser menos importantes.

Entender las dificultades al resolver problemas, modelar, representar y argumentar y comunicar en el aprendizaje de las matemáticas, forma parte de la preocupación que manifiestan los profesionales dedicados al mundo de la educación, según Fernández (2013) estas dificultades pueden ser una de las causas de fracaso escolar, que en consecuencia lleva a los estudiantes al abandono del sistema educativo. Se considera además, erróneamente que el profesor es el protagonista principal en el proceso de enseñanza-aprendizaje y sus estudiantes solo se limitan a recibir aquello que se le propone, sin participar activamente en su propio aprendizaje.

De acuerdo con Ruiz (2008) los estudiantes presentan dificultades al aprender matemáticas, ya que estas suelen ser enseñadas de modo abstracto y descontextualizado. Una gran cantidad de docentes ven los conceptos matemáticos como realidades elaboradas complejamente y que sólo se deben comunicar a sus estudiantes, olvidando que dichos conceptos deben ser construidos por ellos.

Bajo esta misma perspectiva, los conocimientos que así se adquieren se olvidan rápidamente y no se integran en las estructuras lógicas de los alumnos, ni favorecen al pensamiento matemático-crítico, por ende es una dificultad no desarrollar las habilidades que se interrelacionan y juegan un papel fundamental en la adquisición de nuevas destrezas, conceptos y en la aplicación de conocimientos en contextos diversos. Debido a lo anterior, se han llevado a cabo investigaciones en el área de la didáctica de las matemáticas (MINEDUC, 2016).

Dentro de la Didáctica de las Matemáticas, algunas investigaciones han estado motivadas por la necesidad de comprender lo que hacen los/as profesores en las aulas, esto ha llevado, por un lado, a intentar caracterizar el conocimiento que posee el/la profesor/a, como uno de los elementos que nos pueden ayudar en esa comprensión, y a plantearse qué es lo que lleva implícito el término conocimiento del profesor/a y, por otro, a un reconocimiento cada vez más creciente de su complejidad (Larraín, Preiss, Valenzuela, 2011).

En el mundo educativo se tiende a realizar una crítica a las clases que son de carácter expositivo, ya que en ellas el docente tiene el control del contenido e ideas, y sus estudiantes poco pueden aportar a la construcción de su propio aprendizaje. El discurso en la sala de clases y los resultados sugieren que el docente esté focalizado en procesos de ensayo y recuerdo mecánico: las clases tienden a estar organizadas alrededor de la práctica repetida de problemas matemáticos, los profesores realizan preguntas que generalmente son de respuesta cerrada, ocasionando consigo que las habilidades metacognitivas se desarrollen en un bajo potencial, puesto que las preguntas no promueven el diálogo acerca de los procesos matemáticos (Elgueta y Palma, 2014).

Según Cantoral (2001) el propósito es que el estudiante comprenda y entienda las matemáticas, no sólo adquiriendo, sino elaborando los procesos y estructuras matemáticas, actualmente, se propone, que el/la alumno/a reconstruya los conceptos para que se genere el aprendizaje significativo, que sea él quien descubra las formas de cómo resolver problemas, en este caso el rol del docente es guiar el aprendizaje, incentivar en el/la alumno/a el proceso de pensar para que ellos se puedan enfrentar a situaciones nuevas y proponer soluciones. Esto es, darle al alumno un papel activo, confiriendo mayor responsabilidad en la adquisición de conocimientos, fomentando en él: la reflexión, juicio crítico y un desarrollo metacognitivo superior.

El currículum nacional, es la principal orientación de la labor pedagógica en la escuela, en él se establecen los conocimientos, habilidades y actitudes que se espera desarrollar en los estudiantes en las diferentes asignaturas en todos los niveles educativos. Una de las problemáticas encontradas en el currículum es que no se están desarrollando las habilidades y actitudes en los estudiantes, solo se están transmitiendo contenidos. Zabala y Arnau (2007) exponen que el currículum ha pasado de una visión centrada en contenidos temáticos hacia una visión centrada en los estudiantes. Por lo tanto, se espera que en los establecimientos educacionales no sólo se enseñen contenidos memorísticos, sino más bien se desarrollen habilidades como el modelamiento, resolver problemas, la argumentación, la representación y la comunicación. Dichas habilidades son herramientas para que los estudiantes puedan adquirir competencias que le ayuden a construir el conocimiento matemático (MINEDUC, 2013).

Desde el punto de vista que tienen los planes y programas de estudio de octavo año básico en el contenido de funciones se espera que los estudiantes puedan usar metáforas, es decir, que puedan relacionar un concepto matemático con un concepto de la vida diaria para así interiorizar el concepto de función, encontrar soluciones a situaciones de cambios en diferentes ámbitos y modelar (MINEDUC, 2015), por ende una de las dificultades en la enseñanza del concepto de función según López (2008) se centra en la limitación del registro algebraico, utilizando una simple ejemplificación con otros registros, como el gráfico. Es por esto que se sugiere trabajar con métodos alternativos donde exista interacción entre un registro y otro, que tengan énfasis en la resolución de problemas y modelación de fenómenos.

Para Duval (2004) uno de los desafíos planteados en educación matemática es indagar acerca de los procesos cognitivos vinculados con el aprendizaje, para lograr una conceptualización se debe recurrir a diversos registros de representación semiótica, sean gráficos, símbolos, íconos, tablas, expresiones en lenguaje natural, etc. Según Sastre (2011) la metacognición está estrechamente relacionada con las funciones cognitivas de alto nivel, habitualmente relacionado con el control y la regulación de nuestro funcionamiento cognitivo aplicado al aprendizaje y la resolución de problemas. Procesos como atención, memoria, pensamiento pueden estimularse desde las clases de matemática en la enseñanza primaria, así como funciones metacognitivas: planificación, memoria de trabajo, flexibilidad mental, entre otras. Se considera que es posible establecer una relación bidireccional entre funciones metacognitivas y aprendizaje de la matemática.

Para el Ministerio de Educación, promover las habilidades favorece a los estudiantes en la construcción de su pensamiento matemático, el cual les enseña a pensar y reflexionar, esto es fundamental en el proceso de enseñanza aprendizaje (Bustos, 2017). En el estudio de las funciones, se pretende desarrollar la modelación matemática, como herramienta para una mejor aplicación de este contenido, haciéndolo más concreto y contextualizado a la realidad de nuestros estudiantes.

La Ley de Calidad y Equidad de la Educación, aprobada en enero de 2011, centra su interés en avanzar hacia un mejor y más justo sistema educativo. Por esta razón se proponen iniciativas con relación a la formación inicial de los docentes, ya que depende de la calidad del profesor/a en buena medida la calidad del sistema educativo. Entre estas propuestas destacan la Beca Vocación de Profesor, los Convenios de Desempeño para las instituciones de Educación Superior y la Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente (ENDFID) destinadas a mejorar a los docentes en sus primeros años de formación como profesional, con el objetivo de contar con mejores profesionales, que sean profundos conocedores de las disciplinas y de las estrategias de enseñanza, así también de los aspectos pedagógicos que debe dominar para enfrentar la realidad del aula de manera adecuada (MINEDUC, 2012).

A pesar de que el Ministerio de Educación haya propuesto algunas medidas, no ha sido suficiente, porque según un estudio realizado por la Pontificia Universidad Católica de Chile (PUC) (2016) existen debilidades en la formación inicial docente, como por ejemplo, no unir lo que le corresponde aprender a un docente en formación con lo que debe poner en práctica en sus primeros años de egresado, es por esto que las mallas curriculares de las pedagogías y el diseño general de los procesos formativos actuales se deben revisar desde la perspectiva del desarrollo profesional docente.

Bajo esta problemática surgen las siguientes interrogantes:

- ¿Cómo el diseño de la secuencia didáctica de funciones se transforma en un aporte al desarrollo de las prácticas progresivas y profesional de los estudiantes en formación?
- ¿Cómo fortalecer el aprendizaje de las funciones en estudiantes de octavo básico mediante la incorporación de las secuencias didácticas?
- ¿De qué modo la aplicación de los diferentes modelos de registros semióticos son un aporte en las secuencias didácticas para que permitan un aprendizaje significativo en los estudiantes de octavo año básico?

1.2 Justificación del problema

Las bases curriculares entregadas por el Ministerio de Educación (MINEDUC) en la asignatura de matemática plantean el desarrollo de la habilidad de modelamiento matemático, con el fin de lograr que los/as estudiantes construyan una versión simplificada de un sistema que opera en la realidad, que identifiquen patrones claves y los expresen mediante símbolos matemáticos. En este sentido, es indispensable que se comprendan conceptos matemáticos fundamentales, como los números enteros, las potencias, raíces, porcentaje, funciones, ecuaciones e inecuaciones, entre otros (MINEDUC, 2015).

El concepto de función es uno de los más importantes en matemáticas, ya que es una herramienta fundamental en la modelación de variación y cambio. Debido a esto en las últimas décadas se realizaron una gran variedad de investigaciones para lograr su comprensión y poder desarrollarlo en el currículum escolar (Posada, 2016). En Chile en septiembre del año 2009, se promulga la ley 20.370, Ley General de Educación (LGE), cuerpo legal que introduce grandes cambios en el currículum chileno, una de sus actualizaciones es acortar la enseñanza básica a seis años, 7° y 8° pasarán a pertenecer a la enseñanza media (Manríquez, 2014). En este ajuste, el contenido de funciones se comienza a enseñar desde octavo básico, continuando en el resto de la enseñanza media, con una mayor profundidad.

En el currículum chileno se plasman los conocimientos, habilidades y actitudes que se esperan desarrollar en los/as estudiantes. Para conocer el funcionamiento de estas habilidades y contenidos, a nivel nacional se realiza un Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE) a cargo de la Agencia de la Calidad de la Educación (ACE), la cual consiste en evaluaciones en diversas áreas de conocimiento a estudiantes de 2°, 4°, 6° y 8° año básico y a 2° y 3° año medio. Esta evaluación clasifica los niveles de logro en inicial, intermedio y avanzado. Al realizar un análisis en el año 2017 los resultados SIMCE en la asignatura de matemáticas, arrojaron un resultado de 260 puntos en comparación al puntaje máximo de 320, el cual se encuentra en el nivel intermedio. Esto indica que los/as estudiantes no han desarrollado las competencias necesarias lo que ocasiona una desventaja en comparación con los países desarrollados de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) (Agencia de la calidad de la educación, 2018).

Chile se ha sometido a estudios internacionales desde el año 1997, con el fin de evaluar el desarrollo de los contenidos y habilidades, uno de ellos es la evaluación TIMSS (Tendencias en el Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias) reconocida por evaluar los logros de aprendizaje en el área de las matemáticas y ciencias en educación básica. TIMSS matemática 8° evalúa cuatro dominios de contenido: números, álgebra, geometría y datos y azar, también incluye tres dominios cognitivos: conocimiento, aplicación y razonamiento. Según los resultados en la evaluación del año 2015, evidencian que el nivel más débil en los estudiantes del sistema escolar chileno en el dominio de contenido es el Álgebra, pues el promedio obtenido, es de 427 puntos, lo que es significativamente más bajo que el general de 500 puntos. Con respecto a los dominios cognitivos que evalúa la TIMSS en 8°, el más débil es el de conocimiento (Agencia Calidad de la Educación, 2019).

Con respecto a lo anteriormente señalado, se considera que en la educación matemática es necesario desarrollar en el estudiante competencias que les sirvan para desenvolverse en el ámbito personal y social, lo cual es trascendental para el desarrollo de esta investigación. Según Goñi (2008) las matemáticas son relevantes porque enseñan a razonar, aunque en la práctica no se desarrolla completamente esta capacidad, es importante que el/la estudiante mediante las metodologías del docente aprenda a pensar. Según Espinoza, Espinoza, González, Ramírez y Zumbado (2008) las clases de matemáticas se realizan con estrategias metodológicas de corte magistral o tradicional, dejando de lado la actitud activa de los/as estudiantes, estas clases comienzan cuando el/la docente explica los contenidos, se resuelven ejemplos y se propone una lista de ejercicios para que sean resueltos por los estudiantes. Estos autores proponen que se lleven a cabo actividades que generen la habilidad de análisis por parte de los/as estudiantes, que los lleve más allá de aplicar los algoritmos. Para Gutiérrez (2003) un enfoque curricular centrado en el aprendizaje debe sustentarse en una visión constructivista, para mejorar la calidad de los aprendizajes y las estrategias utilizadas deben ser significativas para el que aprende, esto nos lleva a hablar de aprendizaje significativo.

Como estrategia de enseñanza, el modelamiento matemático, favorece al desarrollo de habilidades y estrategias en los/as estudiantes, ya que por medio del modelamiento matemático, los alumnos aprenden a usar una variedad de representaciones de datos, a seleccionar y aplicar métodos matemáticos apropiados y les ayuda como herramienta para resolver problemas del mundo real. Esto permite a los estudiantes actuar de forma autónoma generando nuevos conocimientos a partir de los previamente adquiridos, por esto su importancia en la educación matemática, ya que va más allá de la simple transmisión de conocimiento (Reid, Gareis, Hernández y Roldán, 2012).

Por consiguiente es imprescindible que desde el primer año de la enseñanza básica, los estudiantes no sólo deben desarrollar la capacidad de argumentar y comunicar, resolver problemas y representar, sino que también deben modelar matemáticamente, concepto que muchos profesores desconocen, pues es aplicado en la actualización del currículum en el año 2012 y se incluye en las pruebas internacionales como en el Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA) desde el 2003 (Araya, 2012).

Esta investigación pretende desarrollar una propuesta didáctica que contribuya en el aprendizaje de los/as estudiantes mediante la modelación matemática, específicamente en el contenido de funciones de octavo año. Para fomentar en los/as alumnos/as las habilidades, se hace necesario invertir en estrategias de enseñanza como por ejemplo ilustraciones, talleres, juegos, debates, mapas conceptuales, representaciones, software, etc., que los habitúen a tener disponibles los conocimientos necesarios para situaciones planteadas, de esta manera los estudiantes se sentirán motivados por ellas, ya que su actuar cobra sentido cuando ésta impulsa a los discentes a buscar constantemente mejores situaciones con el propósito de realizarse personalmente, y así lograr de manera eficaz sus objetivos.

Según Leinhardt, Stein, Zaslavsky (1990) la práctica de modelización y graficación han proporcionado acercamientos innovadores al concepto de función. Siendo esto un beneficio que fomenta en los/as alumnos/as las habilidades, ya que busca que los estudiantes construyan sus propios conocimientos, teniendo disponibles los conocimientos necesarios para las situaciones planteadas.

Esta investigación va en apoyo de los estudiantes y docentes del proceso de enseñanza-aprendizaje en el contenido de funciones, ya que como se menciona anteriormente es donde los estudiantes presentan más dificultad dentro del aprendizaje de las matemáticas. Se espera que a través del desarrollo de habilidades los estudiantes sean capaces de enfrentar los desafíos emergentes de la globalización y participar de forma creativa e innovadora en la solución de los problemas sociales y productivos (Amestoy, 2002).

1.3 Preguntas de investigación

- ¿Cómo el diseño de la secuencia didáctica de funciones se transforma en un aporte al desarrollo de las prácticas progresivas y profesional de los estudiantes en formación?
- ¿Cómo fortalecer el aprendizaje de las funciones en estudiantes de octavo básico mediante la incorporación de las secuencias didácticas?
- ¿De qué modo la aplicación de los diferentes modelos de registros semióticos son un aporte en las secuencias didácticas para que permitan un aprendizaje significativo en los estudiantes de octavo año básico?

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Diseñar una propuesta didáctica basada en el modelamiento matemático aplicando el uso de distintos tipos de registros semióticos que contribuya en el aprendizaje de las funciones para estudiantes de octavo año básico.

1.4.2 Objetivos específicos

- Seleccionar los objetivos, indicadores, conocimientos previos y contenidos de la secuencia didáctica para la enseñanza de las funciones.
- Planificar actividades y estrategias utilizando la habilidad de modelar en el aprendizaje de las funciones incorporando la aplicación de distintas conversiones y transformaciones de registros semióticos.
- Elaborar instrumento de evaluación para medir el logro de aprendizaje adquirido durante el desarrollo de la secuencia didáctica.
- Validar con especialistas en el área de las matemáticas las secuencia didáctica y el instrumento de evaluación diseñado para la enseñanza de las funciones.

CAPÍTULO II

Marco teórico

2.1 Teorías de aprendizaje

Antiguamente el aprendizaje fue un cuestionamiento que intentaron responder los antiguos griegos y filósofos tanto del medioevo como del renacimiento, aportando respuestas basándose en la observación y en la deducción de los procesos que tiene el ser humano al momento de aprender. Este estudio se volvió más científico y avanzado en el siglo XVII y como resultado de esta evolución el aprendizaje ha sido estudiado por diferentes disciplinas, una de ellas es la psicología, la cual ha realizado importantes contribuciones para la comprensión de este concepto al desarrollar diversas teorías que lo explican. Estas teorías son un diverso conjunto de explicaciones que tratan de profundizar un fenómeno tan vital como el aprendizaje, qué ocurre con el desarrollo de habilidades, conocimientos, destrezas y conductas, que reflejan el deseo que tienen las personas por entenderse a sí mismos, a los demás y al mundo que los rodea (Heredia y Sánchez, 2013).

Para Shunk (2012) el aprendizaje desde una perspectiva filosófica, podría analizarse bajo el título de epistemología, que se refiere al estudio del origen, la naturaleza, los límites y los métodos del conocimiento. ¿Cómo adquirimos conocimientos? ¿Cómo podemos aprender algo nuevo? ¿Cuál es la fuente de conocimiento? La complejidad del aprendizaje humano se puede ejemplificar en el siguiente párrafo de la obra Menón de Platón (427-347 a. C.):

"Entiendo, Menón lo que dices... Arguyes que el hombre no puede inquirir acerca de lo que sabe, mas tampoco de lo que ignora, porque si sabe, no tiene razón de inquirir lo que ya sabe ; y si no, no puede hacerlo, puesto que no conoce la propia materia sobre la que ha de investigar" (1965, p. 16).

Existen dos posturas que permiten comprender las teorías de aprendizaje o conocer el origen del conocimiento y su relación con el entorno, ellas son el racionalismo y el empirismo, y ambas están presentes en las teorías actuales del aprendizaje. El *racionalismo* se refiere a la idea de que el conocimiento proviene de la razón, sin la participación de los sentidos. Platón figura de forma destacada en las perspectivas racionalistas del conocimiento humano, distinguió entre el conocimiento adquirido por medio de los sentidos y el adquirido por la razón, creía que las cosas (por ejemplo, las casas, los árboles) se revelan a las personas gracias a los sentidos, aunque los individuos adquieren las ideas mediante el razonamiento o pensando acerca de lo que conocen. Las personas se forman ideas acerca del mundo y aprenden (descubren) esas ideas reflexionando sobre ellas. La razón es la facultad mental más elevada, ya que a través de ella la gente aprende ideas abstractas o teóricas.

En cuanto al *empirismo*, sostiene la idea de que la única fuente del conocimiento es la experiencia. Esta postura proviene de Aristóteles (384-322 a. C.), quien fue discípulo y sucesor de Platón. Aristóteles no estableció una diferencia clara entre la mente y la materia; sino que manifestó que el mundo externo es la base de las impresiones sensoriales de los seres humanos, y estas impresiones, a su vez, son interpretadas como válidas por la mente.

Aunque las posturas filosóficas y las teorías de aprendizaje no coinciden entre sí de forma exacta, existen teorías que responden al desarrollo del aprendizaje.

2.1.1 Teoría Conductista.

La mayoría de las primeras teorías del aprendizaje se orientaron a lo conductual, esta teoría dominó parte de la primera mitad del siglo XX. Los principales exponentes son Iván Petróvich Pavlov (1849-1936), John Watson (1878-1958), Edward Thorndike (1874-1949) y Burrhus Frederic Skinner (1904-1999) (Shunk, 2012).

Según Shunk (2012) la teoría conductista explica que el aprendizaje no necesita incluir eventos internos (por ejemplo, pensamientos, creencias, sentimientos), no porque estos procesos no existan, sino porque las causas del aprendizaje son acontecimientos observables en el ambiente, plantea que aprender consiste en la formación de asociaciones de estímulos y respuestas, que considera innecesario el estudio de los procesos mentales superiores para la comprensión de la conducta humana.

Esta teoría implica que los/las profesores/as deben organizar el ambiente de modo que los/as estudiantes puedan responder de manera apropiada a los estímulos. Además destacan dos variables: el historial de reforzamiento, es decir, el grado al que un individuo ha sido reforzado en el pasado por realizar una misma o similar tarea y el estadio de desarrollo en que se encuentra, o sea, lo que el individuo puede hacer dado su nivel actual de desarrollo (Shunk, 2012).

Desde las múltiples perspectivas de los distintos autores anteriormente mencionados, se desglosan varias percepciones e ideas del conductismo:

Para Pavlov el conductismo o el condicionamiento clásico consiste en conectar un estímulo natural con su respuesta natural y conectarlo con un segundo estímulo para generar una respuesta que no se da naturalmente. El condicionamiento clásico supone el aprendizaje de respuestas involuntarias, sobre las cuales el aprendiz no tiene control. Cuando se dice que un estímulo provoca una respuesta, significa que el estímulo genera automáticamente una respuesta, sin que el individuo ejerza mucho control sobre ella (Rachlin, 1991; Schwartz y Reisberg, 1991).

Posteriormente John Watson introdujo el término conductismo, y fue el principal defensor de esta perspectiva durante la primera parte del siglo XX. Este autor destacaba la necesidad de centrarse en las conductas observables y no en los fenómenos no observables, como el «pensamiento». Watson no sólo se oponía al estudio de los fenómenos mentales internos, sino que incluso ¡negaba la propia existencia de la mente! Según él, el pensamiento no es más que movimientos sutiles de la lengua y la laringe, por lo tanto una conducta como cualquier otra (Ellis, 2005). Estudió la conexión entre el estímulo (E) y la respuesta (R), él y sus seguidores "mantienen que el aprendizaje era el resultado de un acondicionamiento clásico, es decir, formar nuevas conexiones E-R a través del mismo condicionamiento" (Silva y Ávila, 1998, citado en Sarmiento 2004).

Watson se refirió en muchas ocasiones a que la teoría conductista dependía de factores biológicos, ante todo neurofisiológicos en sus trabajos con animales, con niños/as y con adultos, se centró en el papel del ambiente (Ardila, 2013).

Según la perspectiva de Skinner (1953) una respuesta a un estímulo tiene más probabilidades de repetirse en el futuro en función de las consecuencias de las respuestas previas: el reforzamiento aumenta la probabilidad de que se repita la respuesta, mientras que el castigo reduce esa probabilidad.

Según González (2004) en esta teoría se puede evidenciar la carencia de un aprendizaje significativo para el/la alumno/a, presenta un cambio en educación, pero que hoy en día carece de una metodología más didáctica para el aprendizaje del estudiante. La psicología actual enfrenta los retos de hacer aportes a una educación más integrada y personalizada.

2.1.2 Teoría Cognitiva

Según Mena (2009), esta teoría surge como alternativa a la concepción conductista, ya que la forma en que se concibe el conocimiento es de manera diferente; se deja de lado la concepción mecánica y se busca analizar cómo la mente del ser humano manipula, ordena y procesa la información que recibe de los estímulos externos, mediante los sentidos.

La principal escuela que intentó explicar el proceso de aprendizaje cognitivo, es la escuela psicológica de Gestalt, instaurada por Von Wertheimer a fines del siglo XIX. Los estudios más significativos sobre el aprendizaje, realizados en la escuela gestáltica, fueron hechos por Köhler, en Alemania, entre 1913 y 1917, teniendo como punto de interés el fenómeno de la percepción. En tal sentido que asume que las personas perciben la realidad con los sentidos como un todo y se considera al aprendizaje como un proceso de desarrollo de nuevas ideas o una modificación de las antiguas. El fenómeno clave para ellos es el insight (percepción o visión interna), el cual engloba la idea de aprendizaje. Sin embargo se critica a los Gestalt por limitarse a describir los procesos y no a explicar cómo se produce el aprendizaje.

Luego de la escuela gestáltica, uno de los más importantes exponentes de la psicología cognitiva: Jean Piaget, se dedicó a estudiar cuestiones epistemológicas, es decir cómo se produce el conocimiento. Con sus aportes la teoría conductista fue perdiendo importancia a medida que el aprendizaje se entendía como un proceso personal que no dependía de solamente de los cambios de conducta, sino que de la modificación de las estructuras cognitivas.

Las personas perciben la realidad como un todo y se considera al aprendizaje como un proceso de desarrollo de nuevas ideas o modificación de las antiguas. Para que se produzca el aprendizaje, según Piaget, es necesario que las estructuras mentales (esquemas mentales) de la persona que aprende tengan un determinado tipo de organización para que puedan soportar y acoger los estímulos.

2.1.3 Teoría Constructivista

El conocimiento para la teoría constructivista, no es una fiel copia de la realidad, sino una construcción del ser humano. Uno de los principios del constructivismo es construir significados y se refiere según Ordoñez (2006) a la construcción por parte de quien aprende y no a la transmisión por parte de quien enseña.

Esta teoría deriva de Jean Piaget, donde explica que los procesos cognitivos son construcciones mentales. Según Sarmiento (2007) para Piaget y sus discípulos el aprendizaje es una construcción a medida que organiza la información que proviene del medio cuando interacciona con él, que tiene su origen en la acción conducida con base en una organización mental previa, la cual está constituida por estructuras y las estructuras por esquemas debidamente relacionados. La estructura cognitiva determina la capacidad mental de la persona, quien activamente participa en su proceso de aprendizaje mientras que el docente trata de crear un contexto favorable para el aprendizaje.

La idea fundamental de los trabajos de Piaget son las estructuras mentales, que básicamente se refieren a la construcción de una organización intelectual que guía la conducta del individuo, aunque Piaget prefiere el concepto de esquema debido a lo rígido, estático y automático del primer concepto (Gallego y Badillo, 1997).

Desde la perspectiva constructivista, todo conocimiento nuevo que adquiere un estudiante es producto de un proceso constructivo, esto quiere decir que se basa en los conocimientos que ya posee y supone una actividad (Marchant y Mena, 2015).

Otros seguidores de este enfoque, aportan sus interpretaciones y nos ayudan a involucrarnos dentro del mismo, entre ellos tenemos a Ríos (1999), para quien el constructivismo es: "Una explicación acerca de cómo llegamos a conocer en la cual se concibe al sujeto como un participante activo que, con el apoyo de agentes mediadores, establece relaciones entre su bagaje cultural y la nueva información para lograr reestructuraciones cognitivas que le permitan atribuirle significado a las situaciones que se le presentan".

Aquí podemos apreciar el énfasis que se le da al desarrollo personal del sujeto, quien participa activamente al interpretar la realidad que lo rodea para luego mostrar sobre ella los significados que logró construir, esto lo permiten los mediadores y facilitadores de la socialización, por ejemplo la propia institución o un agente mediador.

Considerando los aspectos del constructivismo, en la pedagogía los objetivos de la enseñanza es que los/as estudiantes sean capaces de construir un conocimiento significativo, alcanzar la comprensión cognitiva para favorecer el cambio conceptual, no dejar de lado los aspectos emocionales, tanto del docente como del estudiante, y de esta manera lograr niveles satisfactorios de adaptación al contexto y un bienestar adecuado (Ortiz, 2015).

2.1.4 Diferencias entre teoría constructivista y conductista.

Las principales diferencias según Ñeco (2005) entre ambas teorías se presentan en cuanto al rol del docente y el estudiante en el proceso de aprendizaje.

- En la teoría constructivista el currículum parte de la realidad o lo que entiende el estudiante, por el contrario en la teoría conductista los objetivos están predefinidos, la estructura es formal.
- En la teoría constructivista el docente proporciona el entorno y actividades; por lo cual dependerá del alumno como utiliza los recursos; en cambio en la teoría tradicional el docente define anticipadamente las actividades en la planificación.
- En la teoría constructivista la secuencia dependerá del proceso de aprendizaje de cada estudiante, por el contrario en la teoría conductista la secuencia está determinada en las instrucciones al igual que las destrezas.
- En la teoría constructivista el estudiante organiza los datos proporcionados, en cambio en la teoría tradicional los datos entregados responden a información externa.
- En la teoría constructivista el estudiante a medida que se enfrenta a los problemas los resuelve, por el contrario en la teoría tradicional los problemas los entrega el texto y/o el docente.
- En la teoría constructivista los resultados son diversos e impredecibles, en cambio en la teoría tradicional los resultados son estandarizados y predecibles.
- En la teoría constructivista el alumno es responsable de su propio aprendizaje, no el docente únicamente, por el contrario en la teoría tradicional el docente es el responsable del aprendizaje.

En síntesis la teoría constructivista es aquella que permite que el/la alumno/a descubra su aprendizaje dando solución a problemas de diversas índoles, utilizando los recursos que tiene en el entorno y haciéndose responsable de ello, a diferencia de la teoría conductista donde el docente es quien tiene el control de este proceso.

2.2 Aprendizaje

A lo largo de la historia la sobrevivencia de las sociedades ha estado basada en aprender y enseñar. Los adultos siempre se han encargado de transmitir todos los conocimientos, habilidades y creencias desarrollados por ellos a sus sucesores para que la sociedad continúe existiendo y pueda desarrollarse. Estos dos conceptos claves; aprender y enseñar, constituyen el corazón de todo proceso educativo. De estos se originan las metodologías y actividades que propone el docente en el aula (Marchant & Mena, 2015).

Las personas coinciden en que el aprendizaje es importante, pero presenta distintos puntos de vista, de acuerdo con Shuell (1986) no existe una definición de aprendizaje aceptada por todos los teóricos, investigadores y profesionales. Aunque no se coincida sobre la naturaleza precisa del aprendizaje, la siguiente es una definición general de ese proceso que reúne los criterios centrales que consideran la mayoría de los profesionales de la educación. Schunk (2012) indica en su texto que "el aprendizaje es un cambio perdurable en la conducta o en la capacidad de comportarse de cierta manera, el cual es resultado de la práctica o de otras formas de experiencia" (p. 17).

Es necesario analizar esta definición, por lo que Schunk (2012) identifica tres criterios del aprendizaje:

- El aprendizaje implica un cambio.
- El aprendizaje perdura a lo largo del tiempo.
- El aprendizaje ocurre por medio de la experiencia.

Es necesario conocer diversas posturas sobre este concepto, Feldman (2005) define aprendizaje como un proceso de cambio relativamente permanente en el comportamiento de una persona generado por la experiencia. Schunk (2011) define que aprender involucra construir y modificar nuestros conocimientos, habilidades, creencias, actitudes y conductas. Se aprenden habilidades cognitivas, lingüísticas, motoras y sociales, las cuales pueden adoptar muchas formas según se adquieran.

Para Piaget el aprendizaje es un proceso mediante el cual el sujeto, a través de la experiencia, la manipulación de objetos, la interacción con las personas, genera o construye conocimiento, modificando, en forma activa sus esquemas cognoscitivos del mundo que lo rodea, mediante el proceso de asimilación y acomodación.

Si bien los procesos de enseñanza y aprendizaje han estado presentes desde el inicio de la humanidad, la investigación científica sobre cómo se produce el aprendizaje y su correspondiente relación con cómo se debe enseñar, son recientes.

Los conceptos de aprender y enseñar están profundamente relacionados, metodológicamente el aprender está relacionado con los alumnos para conocer por medio de la psicología cómo se llega a dominar los conocimientos científicos, las actitudes y los procedimientos. Mientras tanto el enseñar está relacionado con los adultos, por medio de la pedagogía que investiga para qué, cómo y qué deben hacer los/as profesores/as para que los/as estudiantes logren aprendizajes duraderos y significativos (Marchant & Mena, 2015).

Es fundamental comprender cómo los/as estudiantes aprenden los conocimientos científicos, las actitudes y los procedimientos necesarios para entender y actuar positivamente sobre el mundo en sus dimensiones científica, artística, social, tecnológica y filosófica, pues de ellos depende la selección de los contenidos, estrategias y actividades que se aplican en el aula.

En conclusión los puntos en común de estas definiciones reflejan el aprendizaje como una construcción del conocimiento que implica un cambio, dicho cambio es duradero a lo largo del tiempo. Una buena enseñanza según Moreira (1997) debe ser constructivista, promover el cambio conceptual y facilitar el aprendizaje significativo.

2.2.1 Aprendizaje significativo

El concepto de aprendizaje significativo fue propuesto por el psicólogo estadounidense David Ausubel (1963 a 1968) en su teoría sobre el Aprendizaje Significativo por Recepción, en ella afirma que el aprendizaje ocurre cuando el contenido se presenta en su forma final y se relaciona con los conocimientos que los/as estudiantes ya poseen. El proceso mediante el cual se produce el aprendizaje significativo requiere una intensa actividad por parte del alumno/a. Esta actividad consiste en establecer relaciones entre el nuevo contenido y sus esquemas de conocimiento (Romero, 2009).

Para que se logre el aprendizaje significativo según Romero (2009) se deben seguir tres condiciones:

1. Por una parte el alumno debe tener conocimientos previos adecuados y por otra parte se deben utilizar estrategias metodológicas que activen los conceptos

previos, como los organizadores previos (estos proporcionan la base para que el contenido a aprender se pueda relacionar).

2. El contenido debe ser potencialmente significativo para que el alumno pueda construir sus significados, ya que es difícil que el alumno pueda construir significados si el contenido es vago, poco estructurado o arbitrario.
3. El alumno/a ha de tener una actitud favorable para aprender significativamente. También va a depender de la motivación de cada estudiante y de la habilidad que el docente tenga para incrementar o despertar esta motivación.

Para Ausubel (1983) el aprendizaje significativo se realiza cuando los contenidos son relacionados con el conocimiento que el/la alumno/a ya posee; es decir las ideas del contenido se relacionan con algún aspecto específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, ya sea como imagen, un símbolo, un concepto o una proposición.

A raíz de lo anterior es importante considerar en el proceso educativo los conocimientos previos que posee el/la alumno/a para que establezca una relación con lo que debe aprender. Esto se puede lograr si el/la alumno/a tiene en su estructura cognitiva conceptos, ideas, proposiciones, estables y definidas con los cuales la nueva información puede interactuar.

Actualmente se ha propuesto que el alumno debe reconstruir los conceptos para que su aprendizaje sea significativo, que sea él quien descubra y proponga formas de resolver los problemas. Para Romero (2009) el/la alumno/a aprende un contenido cuando es capaz de atribuirle un significado. Por eso lo ideal es intentar que los aprendizajes que se lleven a cabo sean lo más significativo posible dentro de toda la escolaridad.

La teoría que desarrolla Ausubel se contrapone al aprendizaje memorístico e indica que sólo se producirá aprendizaje significativo cuando lo que se trata de aprender se logra relacionar de forma sustantiva con aspectos relevantes y preexistentes en su estructura cognitiva. Rivera (2004) señala que se conoce el aprendizaje significativo como toda experiencia que parte de los conocimientos y vivencias previas del sujeto. En tal sentido, un aprendizaje es significativo cuando el aprendiz atribuye una utilidad al nuevo contenido.

Las actividades resultan significativas cuando el aprendiz, entre otros aspectos, disfruta con lo que hace, participa con interés, se muestra seguro y confiado, pone atención a lo que hace, trabaja en grupo con agrado, trabaja con autonomía, desafía a sus propias habilidades, propicia la creatividad y la imaginación (Rivera, 2004).

2.3 Aprendizaje de las matemáticas

Como se menciona anteriormente el aprendizaje es una construcción del conocimiento que implica un cambio, dicho cambio perdura a lo largo del tiempo. En educación matemática, los/as docentes tienen la labor de incrementar el conocimiento y la comprensión de la matemática que los/as estudiantes poseen y para ello se realiza detallados planes de trabajo, que indican aquello que los/las estudiantes son capaces de aprender. Los/as estudiantes aprenden mejor cuando están motivados, por lo tanto una de nuestras responsabilidades como docentes es encontrar los medios para que las matemáticas sean más atrayentes, interesantes, relevantes y útiles (Farias & Pérez, 2010).

De acuerdo con Flores (s.f.) el aprendizaje matemático se realiza a través de experiencias concretas, es decir, que los alumnos manipulan material, descubren principios y dan soluciones a problemas matemáticos, que el aprendizaje vaya de lo concreto a lo abstracto. Por lo tanto, que el aprendizaje de conceptos matemáticos se desarrolla a partir de actividades sencillas y concretas.

Según Alsina (1998) es necesario partir de lo concreto para lograr el aprendizaje de los conceptos matemáticos, es decir, iniciar con material didáctico, contextos reales, juegos, etc. Gagné y Briggs (1999) determinan esto como aprendizaje concreto, el cual es necesario para aprender ideas abstractas, ya que permite a los estudiantes enunciar conjeturas, razonar inductivamente y establecer propiedades. Como docentes se deben facilitar estas actividades, donde se les permita a los estudiantes relacionar los nuevos conceptos con los que ya tienen adquiridos, que ellos descubran y construyan su conocimiento. En el aprendizaje por descubrimiento, el estudiante es quien construye sus conocimientos, Shulman & Keislar (1974) señaló que el aprendizaje de las matemáticas se genera mediante el aprendizaje por descubrimiento.

La matemática para Arteaga y Macías (2016) es mucho más que la aritmética, el álgebra, la geometría, la estadística, etc.; es una manera de pensar que se utiliza para dar solución a diversos problemas que existen en la vida cotidiana, en otras palabras una forma de razonar, de explorar, donde se descubren nuevas ideas, por ejemplo calcular el tiempo para ir desde la casa al trabajo, observar figuras geométricas, relaciones numéricas y resolución de problemas en diversos contextos.

Desde siempre hemos estado en contacto con las formas, los números, contamos y nos ubicamos en el espacio, desarrollamos destrezas y capacidades en relación a la matemática a través de las ansias innatas que tiene el ser humano por descubrir. El ser humano necesita una cultura matemática básica a lo largo de la vida, principalmente en la etapa escolar.

La educación matemática centra su atención en todos aquellos aspectos que forman parte del proceso de enseñanza-aprendizaje (metodologías y teorías de aprendizaje, estudio de dificultades, recursos y materiales para el aprendizaje, etc.) de esta área del conocimiento, facilitando a los/as profesores/as herramientas necesarias para impartir la docencia sobre bases consistentes, orientando y guiando el ejercicio docente en beneficio del aprendizaje de los/as estudiantes.

Es de gran importancia que se genere un aprendizaje significativo para que los estudiantes puedan descubrir y construir sus propios conocimientos. Se considera las representaciones semióticas de Raymond Duval y la socioepistemología de Ricardo Cantoral como herramientas relevantes para lograr un aprendizaje eficaz de las matemáticas. Además, el modelamiento es una excelente estrategia utilizada para la enseñanza de las funciones de forma constructivista, ya que al presentar distintos registros semióticos permite la construcción de diversos modelos para adquirir el concepto (Maldonado, 2013).

2.3.1 Registros de representación semiótica de Raymond Duval

El estudio de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas siempre ha sido un campo de mucho análisis, ya que los conceptos matemáticos no son tangibles, sino más bien entendidas como actividades cognitivas, entre ellas la resolución de problemas, la conceptualización, el razonamiento, etc. (Duval, 1995; citado por Macías Sánchez, 2014).

Al ser los registros semióticos importantes en la creación de modelos matemáticos, Oviedo y Kanashiro (2012) mencionan que “enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión (p. 30).

Duval (1998) desarrolla algunas ideas fundamentales sobre sistemas semióticos de representación:

- Considera necesario tener representaciones de los objetos matemáticos, aludiendo a que estos no son accesibles a la percepción humana.
- El conocimiento matemático se puede representar bajo diferentes formas semióticas.
- No confundir al objeto matemático con su representación.
- Distinguir entre la imagen mental (preceptos interiorizados), la representación semiótica (constituida mediante signos) y la representación mental (interiorizar las representaciones semióticas).
- Las representaciones semióticas están asociadas a sistemas semióticos.

Para Duval (2004) al lograr la conceptualización matemática, el estudiante debe recurrir a varios registros de representación semiótica, que hacen referencia a todas aquellas construcciones de sistemas de expresión y representación que pueden incluir diferentes sistemas de escritura, como números, notaciones simbólicas, representaciones tridimensionales, gráficas, redes, diagramas, esquemas, etc.

Duval (citado en Iori, 2014) define un registro semiótico como:

> Un sistema específico de producción de representaciones semióticas, precisamente como un sistema semiótico, el cual es un conjunto de elementos y reglas organizativas para combinar o reagrupar los elementos en unidades significativas, que responde no solo a una función de comunicación o de objetivación, sino también a una función de tratamiento, es decir de transformación de una representación de un objeto en otra (del mismo objeto) al interior del mismo sistema semiótico. Por ejemplo, cuando se pasa de $x - y + 3 = 0$ a $y = x + 3$, la representación cambia, pero el registro semiótico (el registro de la escritura algebraica) no.

Iori (2014) afirma que ocurre una conversión cuando:

> Se pasa de una representación de un objeto en un registro semiótico determinado, es decir, una representación del mismo objeto en otro registro semiótico; por ejemplo, cuando se pasa de $y = x + 3$ (en el registro de la escritura algebraica) a la representación sobre el plano cartesiano (en el registro gráfico) se trata de una transformación de representación que determina un cambio de registro sin modificar el objeto denotado (p.37).

Diversos son los registros semióticos que se pueden establecer propuestos por Raymond Duval. Dentro de los diferentes registros de representaciones podemos mencionar:

numérica, simbólica, gráfica y verbal, entre otros. Una función comúnmente está representada por medio de diferentes registros que ayudan a tener una mejor comprensión de los diversos términos antes mencionados (Coronel, 2013):

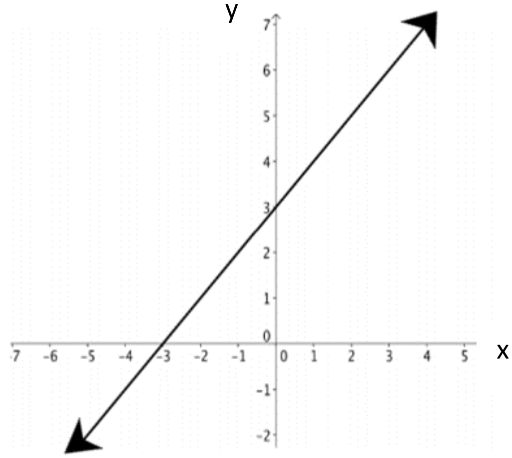
- **Registro algebraico:** en este registro se puede representar una función mediante una expresión algebraica o fórmula (que se asocia signos, letras y números). En general las variables se asocian a los símbolos x y f (x) o y, donde x representa la variable independiente y f(x) o y la dependiente. Esto permite calcular la imagen f(x) para toda x perteneciente al dominio de la función. Es decir, a través de símbolos numéricos o algebraicos, se generaliza el comportamiento de la función. Ejemplo:

$$\mathbf{y = x + 3}$$

- **Registro de tabla:** en este registro, una función se representa con una tabla de valores observando la relación de correspondencia. Es decir, mediante la elaboración de una tabla se organiza la información, datos o valores de las variables a trabajar en la función correspondiente.

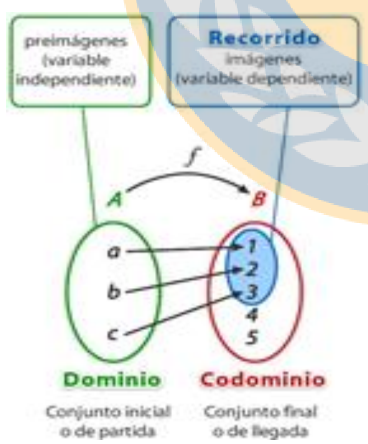
x	y
0	3
-3	0

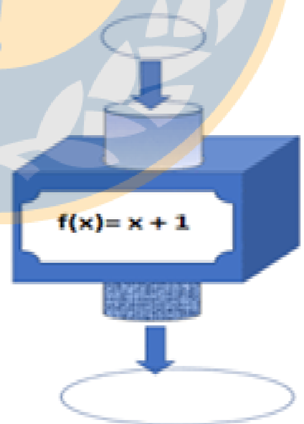
- **Registro gráfico:** en este registro, una función se representa en el plano cartesiano. La gráfica de una función es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y), esto permite obtener una representación visual y entrega información que a partir de descripciones verbales o algebraicas no es evidente observar. Para representar la función mediante un gráfico la variable independiente x se representa en el eje horizontal o eje de las abscisas y la variable dependiente y en el eje vertical o eje de las ordenadas. Ejemplo: El estudiante representa la ecuación y = x + 3 en un gráfico, para ello reemplaza x para obtener los valores de y.



- **Registro algorítmico:** se representa la función mediante un programa o procedimiento, como los utilizados en computadoras o calculadoras. Eso representa el proceso para calcular la imagen a partir de los valores del dominio.

- **Registro figural:** las funciones se representan mediante un diagrama donde se muestran los conjuntos dominio y codominio, presentando la relación de correspondencia de las variables mediante el uso de flechas o también se puede representar funciones mediante el uso de metáforas de máquinas.





- **Registro verbal:** en este registro la función admite como representación una descripción en lenguaje natural, describiendo cómo se relacionan dos variables. Es decir, cuando representamos situaciones del mundo real a través del lenguaje común, por tanto se utiliza la sintaxis y el vocabulario del lenguaje natural.

- **Registro simbólico:** cuando se da la definición de un concepto mediante expresiones simbólicas sustentadas por las reglas de la lógica formal.
- **Registro numérico:** cuando se realizan todas las evaluaciones que conllevan y que están involucradas en el método de cálculo.

El aprendizaje de las funciones según Gajardo y Venegas (2018) es óptimo y significativo, cuando el estudiante logra articular las funciones con otras áreas del conocimiento, por ende es necesario promover el uso de distintos tipos de representaciones semióticas que la noción de función ofrece.

Los sistemas semióticos de acuerdo a Duval (2004) deben acceder a tres actividades cognitivas que son propias de toda representación: formación, tratamiento y conversión.

- Formación: construir marcas que sean identificables como una representación de un sistema determinado. Al formar una representación se deben seleccionar los rasgos del contenido a representar. Por ejemplo, enunciar una frase, diseñar una figura geométrica, hacer una gráfica, etc.
- Tratamiento: transformar las representaciones de acuerdo con las propias reglas del sistema, obteniendo otras representaciones y enriqueciendo el conocimiento al compararlo con las representaciones iniciales. En otras palabras se debe transformar una representación en otra del mismo sistema. Ejemplo de la expresión $2x + 3x$ un tratamiento sería obtener una nueva expresión, $5x$.
- Conversión: la conversión de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro sistema, conservando la totalidad o sólo una parte del contenido de la representación inicial. Por ejemplo, la representación gráfica de la ecuación $3x + 5 = y$, es una conversión.

Hoy en día se considera que no es posible estudiar fenómenos relacionados con el conocimiento sin recurrir a la noción de representación. Se admite, además, que la pluralidad de sistemas semióticos permite diversificar las representaciones de un mismo objeto, y, de esta forma, amplia las capacidades cognitivas de los sujetos y, por tanto, sus representaciones mentales (Tamayo, 2006).

Para que ocurra un buen aprendizaje de las matemáticas según Castro y Castro (1997) es necesario el uso de registros de representación y que los/as estudiantes realicen conversiones entre distintos registros, estableciendo una correcta coordinación entre los mismos.

En resumen, lo que Duval y otros investigadores integran acerca de la representación semiótica, es que, para adquirir un mejor concepto matemático, es necesario que se comprenda de una o muchas formas para describirlo, de lo contrario, no existe una apropiación de dicho objeto matemático, es decir, no se produce el desarrollo del concepto.

Además, consideramos que en la sala de clases, la semiótica, está siempre presente en las horas de matemáticas, pero muchas veces pasa desapercibida, ignorada o simplemente es olvidada. En ciertas ocasiones los estudiantes encuentran dificultad al aprender matemáticas, pues la gestión que el docente o institución realizan sobre las representaciones semióticas, es compleja y problemática.

2.3.2 Socioepistemología de Ricardo Cantoral

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática se dedica al estudio de los fenómenos didácticos del conocimiento matemático asumiendo toda forma del saber, sea este popular, técnico o culto, pues considera que ellas, en su conjunto, constituyen la sabiduría humana.

El principio de la socioepistemología se encuentra en la tesis "Un estudio de la formación social de la analiticidad" (Cantoral, 1990), obra considerada el fundamento de esta corriente de pensamiento (Cantoral, 2013). Las investigaciones desarrolladas por Farfán (1993) y Cordero (1994) siguieron esta problemática para dar lugar al nacimiento de un sólido programa de investigación.

En base a las investigaciones, se logró abordar problemas que no estaban de manera explícita en el proceso de enseñanza- aprendizaje de las matemáticas al establecer un método de acercamiento a tales problemas en los que se estudiaban fenómenos de construcción social del conocimiento matemático y de su difusión institucional, en los cuales se parte siempre de una problematización del saber.

En las investigaciones se estudian los contextos sociales y culturas vigentes en el momento que fue estudiado, también los diferentes métodos para la construcción del conocimiento delineando así una gama de diversidades y posibilidades que la aproximación socioepistemológica provee al campo de la matemática.

La Teoría Socioepistemológica indica que para comprender los procesos didácticos ligados con las matemáticas, es imprescindible estudiar más allá de las relaciones entre profesores, alumnos y el conocimiento en las dimensiones del saber, de las restricciones institucionales de tipo pedagógico general, ligadas específicamente al saber matemático. La socioepistemología tiene un aporte fundamental: modelar la construcción del conocimiento matemático (Cantoral, 2013).

La Teoría Socioepistemológica asume que para estudiar fenómenos didácticos ligados a las matemáticas se precisa acudir, y esto lo diferencia de otros enfoques teóricos, a un examen minucioso del saber, a su problematización. Por lo tanto es necesario introducir la noción de uso, en contraste con la noción psicológica de adquisición por aprendizaje; se pasó del conocimiento estático al estudio del conocimiento en uso, es decir, al estudio del saber (Cantoral 2014).

La socioepistemología según Cantoral (2011) descansa en cuatro principios fundamentales:

- En la Racionalidad contextualizada: este principio alude a que la relación del sujeto al saber es una función del contexto. Los estudios empíricos de la psicología experimental insisten en que debemos entender los principios normativos del razonamiento dentro de los contextos específicos bajo los que se realiza una inferencia. El principio de la racionalidad contextualizada enuncia que la racionalidad con la que se actúa depende del contexto en el que el individuo se encuentre en un momento y lugar determinado (Espinoza, 2009); la esencia de esta idea radica en entender que la construcción del conocimiento es un producto sociocultural, es decir, "representativo de la sociedad en la que se gesta" (Crespo, 2007).
- En el Relativismo epistemológico: el relativismo es el concepto que sostiene que los puntos de vista no tienen verdad ni validez universal, sino que, en todo caso, sólo poseen una validez subjetiva y relativa a los diferentes marcos de referencia. En los temas relativos a la naturaleza de la sociedad, se ha considerado que existen dos posiciones antagónicas: el objetivismo y el relativismo. Para el objetivismo el sentido de la verdad, es independiente del sujeto individual o sujeto colectivo; para la otra

postura, la verdad o más propiamente el valor de verdad está en relación a quién y dónde lo experimente; es decir la teoría Socioepistemológica concibe que el saber es, de hecho, una multitud de saberes con verdades relativas.

- La Resignificación progresiva o de la apropiación situada: para la epistemología, la acción es la base del desarrollo del conocimiento, así derivan los significados construidos. De modo que el significado dependerá en gran medida del contexto donde se produce la acción, de cómo se usa y personalizan los símbolos, ocurriendo así la significación del objeto. Para Piaget el símbolo es una imagen que tiene una significación a la vez distinta de su contenido simbólico inmediato. Lo que realmente le da sentido a los símbolos es la significación que hacemos de ellos, es decir un enlace recíproco (Inhelder & Piaget, 1972). Este primer significado, es puesto en funcionamiento en situaciones nuevas y, bajo el mismo esquema constructivo, se resignifica, produciendo conocimientos. Esta dinámica de los significados es a la que hoy en día se conoce por nombre de resignificación progresiva. La construcción de este conocimiento no aísla al estudiante del medio sino que le da una forma de establecer lazos de interacción, pues al momento de ponerlos en uso se precisa además del usuario, de las herramientas, los argumentos, los discursos, los entornos socioculturales que permitirán la emergencia del saber, un saber que por su naturaleza es compartido, es un emergente de un proceso social.
- Normativo de la práctica social: para articular la construcción social del conocimiento, es decir, la construcción del saber, se articulan los siguientes principios: se pasa de la acción directa del sujeto (individual, colectivo o histórico) ante el medio en tres acepciones: material (entorno), organizacional (contexto), social (normativo), esto se organiza como una actividad humana situada socioculturalmente, para perfilar una práctica (iteración deliberada del sujeto y regulada por el contexto); dicha práctica cae bajo la regulación de una práctica de referencia que es la expresión material e ideológica de un paradigma (ideológico, disciplinar y cultural), la que a la vez es normada mediante cuatro funciones por la práctica social (normativa, identitaria, pragmática y discursiva–reflexiva). Esta secuencia permite explicar empíricamente y teóricamente el proceso de construcción del sujeto individual, el sujeto colectivo y el sujeto histórico. A la vez que permite intervenir prácticamente y

transformar los procesos didácticos a fin de favorecer la construcción social del conocimiento matemático. En síntesis alude a que las prácticas sociales son fundamentales para guiar y generar la construcción del conocimiento.

El planteamiento fue entonces, desde su inicio, el asumir que el pensamiento humano posee una herencia de orden cultural; el niño al caminar reproduce a su manera el andar del abuelo, la historia de la matemática debe algo a la herencia educativa de su periodo. Cada época en la historia de la enseñanza produce, mediante sus prácticas sociales compartidas, la construcción del conocimiento.

La socioepistemología considera a las prácticas sociales como la base del conocimiento, en la medida en que son el sustento y la orientación para llevar a cabo una construcción social del conocimiento matemático. Asumiremos a la práctica social como normativa de la actividad humana, más que como una actividad humana reflexiva o la reflexión sobre una práctica (Cantoral, Farfán, Lezama & Martínez, 2006).

En síntesis, la teoría socioepistemológica afirma que las prácticas sociales son la base fundamental para la construcción del conocimiento, y que el contexto influye considerablemente en el tipo de racionalidad con que el individuo o grupo construye su conocimiento. Una vez que el conocimiento es puesto en uso, su validez será relativa a un entorno, ya que de ellos surgió su construcción y argumentaciones. Así, al tener evolución e interacción en distintos contextos, se resignifican los saberes enriqueciéndose con variantes significativas.

Esta teoría contribuye positivamente a la investigación, ya que privilegia desde su punto de vista la relación entre el saber, la mente y la cultura, en general, se caracteriza por explicar la construcción social del conocimiento matemático. Así cada estudiante enriqueciendo su cultura y compartiendo sus saberes con los otros estudiantes construirá su conocimiento para generar un aprendizaje significativo.

Es importante tener en cuenta que para construir y desarrollar un aprendizaje significativo debe haber una organización de las actividades de aprendizaje, un instrumento llamado *secuencia didáctica* que demanda el conocimiento de la asignatura, la comprensión del programa de estudio y la experiencia y visión pedagógica del docente (Díaz-Barriga, 2013).

2.4 Secuencia didáctica

Las secuencias didácticas se definen como secuencias de enseñanzas potencialmente facilitadoras de aprendizaje significativo, de temas específicos, conocimientos conceptuales o procedimentales, las que estimulan la investigación aplicada en la enseñanza diaria de las clases (Moreira, 2012).

Para Barriga y Díaz (2013) las secuencias constituyen una organización de las actividades de aprendizaje que se realizarán con los/as alumnos/as y para los/las alumnos/as con la finalidad de crear situaciones que les permitan desarrollar un aprendizaje significativo. Según Dolz (2000) las secuencias didácticas son un ejercicio y un posible modelo que se propone al docente interesado en explorar nuevas formas de enseñar las matemáticas. Las cuales consisten en pequeños ciclos de enseñanza y aprendizaje formados por un conjunto de actividades articuladas y orientadas a una finalidad. Pretenden articular de forma explícita los objetivos, los contenidos y las actividades en un proyecto de trabajo o de producción verbal; están minuciosamente planificadas y adaptadas a cada situación educativa.

La secuencia didáctica también es entendida como una estructura de acciones e interacciones relacionadas entre sí, intencionales, que se organizan para alcanzar un aprendizaje. Las secuencias didácticas específicas consisten en una serie de actividades diseñadas con la finalidad de que los/as alumnos/as entiendan los temas de reflexión que les resulten particularmente difíciles (Buitrago, Torres, Hernández, 2009).

Para poder elaborar una secuencia didáctica debemos tener en cuenta qué es lo que el docente busca lograr en sus estudiantes (“¿Qué es una secuencia didáctica?”, s.f.):

- Promover la disposición para defender los puntos de vista propios, considerar ideas y opiniones de otros, debatirlas y elaborar conclusiones, aceptando que los errores son propios de todo proceso de aprendizaje.
- Promover la producción y validación de conjeturas sobre relaciones y propiedades matemáticas, avanzando de las argumentaciones empíricas a otras más generales.
- Promover la confianza en las propias posibilidades para resolver problemas y formularse interrogantes, reconociendo que con dedicación, trabajo y estudio la matemática es accesible para todos.
- Promover la interpretación y producción de textos con información matemática, avanzando en el uso del lenguaje apropiado.

- Ofrecer variedad de experiencias de aprendizaje (variedad en la oferta de enseñanza) en cuanto a organización de la tarea -grupal e individual- formas de estudio, ritmo, tipo de tarea, formas de acceso, materiales utilizados, etc.
- Facilitar que, en forma creciente, los alumnos realicen opciones con respecto a formas de trabajo, administración del tiempo, actividades a realizar y áreas de conocimiento a profundizar.
- Realizar con los alumnos instancias de evaluación de su tarea, de la tarea de los demás y de su proceso de aprendizaje.
- Programar y estimular instancias de debate, deliberación, toma de decisiones y asunción progresiva de responsabilidades por parte de los alumnos.

Teniendo en cuenta lo que el docente quiere promover en sus estudiantes, también se debe considerar los elementos principales que debe tener la estructura de una secuencia didáctica:

- **Propósitos:** los propósitos son los enunciados que presentan los rasgos centrales de una propuesta; definen lo que pretendemos del curso como docentes, orientan y dirigen la selección de los contenidos ("¿Qué es una secuencia didáctica?, s.f).
- **Objetivo de aprendizaje:** los objetivos de aprendizaje definen para cada asignatura los aprendizajes terminales esperables para cada año escolar. Se refieren a conocimientos, habilidades o actitudes que entregan a los estudiantes las herramientas cognitivas y no cognitivas necesarias para su desarrollo integral, para la comprensión de su entorno y para despertar en ellos el interés por continuar aprendiendo. En la formulación de los objetivos de aprendizaje se relacionan habilidades, conocimientos y actitudes. Por medio de ellos, se pretende plasmar, de manera clara y precisa, cuáles son los aprendizajes que el estudiante debe lograr. Se conforma, así, un currículum centrado en el aprendizaje, que declara explícitamente cuál es el foco del quehacer educativo. Se busca que los/as alumnos/as pongan en juego estos conocimientos, habilidades y actitudes para enfrentar diversos desafíos, tanto en el contexto de la asignatura como al desenvolverse en su vida cotidiana (MINEDUC, 2016).
- **Habilidades que se pretenden desarrollar:** las habilidades son capacidades para realizar tareas y para solucionar problemas con precisión y adaptabilidad. Pueden desarrollarse en los ámbitos intelectual, psicomotriz o psicosocial. En el plano educativo, las habilidades son cruciales, porque el aprendizaje involucra no solo el

saber, sino también el saber hacer y la capacidad de integrar, transferir y complementar los diversos aprendizajes en nuevos contextos. La continua expansión y la creciente complejidad del conocimiento demandan capacidades de pensamiento transferibles a distintas situaciones, desafíos, contextos y problemas. En este sentido, las habilidades son fundamentales para desarrollar un pensamiento flexible, adaptativo y crítico (MINEDUC, 2016)

- **Conocimientos previos:** son ideas o saberes previos. Forman parte del conjunto de conocimientos que posee el alumno y pueden obstaculizar o facilitar la integración de nuevos conocimientos a los ya existentes. Los conocimientos previos es la información que el individuo tiene almacenada en su memoria, debido a sus experiencias pasadas. Es un concepto que viene desde la teoría de aprendizaje significativo postulada por David Ausubel, por ende también se relaciona con la psicología cognitiva (Glosario de pedagogía, 2018).
- **Contenido a tratar:** los contenidos escolares son el qué de la enseñanza y se definen como el conjunto de saberes o formas culturales acumuladas por la humanidad, cuya asimilación y apropiación por parte de los/as alumnos/as, se considera valiosa y esencial para su desarrollo y socialización. Dada su importancia no puede dejarse a que por azar se adquieran sino que precisan del diseño y aplicación de actividades educativas sistematizadas y propositivas para asegurar su plena consecución. Los contenidos a aprender de un programa educativo son organizados y estructurados en la planeación de la enseñanza que es el conjunto de actividades realizadas por el docente antes de impartir la clase. Por este procedimiento se agrupan y combinan los temas y subtemas del contenido en un todo coherente y significativo. La finalidad del proceso es acomodar los contenidos y habilidades por aprender de acuerdo con un orden lógico, psicológico y pedagógico. De esta manera se resaltan los distintos niveles y jerarquías de los conocimientos, destacando los tipos de relación que guardan entre sí. El propósito de estas actividades es ayudar al alumno/a a clarificar la interrelación que tiene el conocimiento a dominar, ya que al señalar sus conexiones se aprende mejor facilitando su comprensión significativa y el recuerdo de la información (Colima, 2000).

- **Momentos de la clase:** según Márquez (2009) debemos tener presente que toda clase posee una estructura básica constituida por tres momentos didácticos: inicio, desarrollo y cierre, los cuales contribuyen al logro de los aprendizajes esperados para nuestros estudiantes.
  - El **inicio de la clase** es el momento clave para motivar y lograr que los alumnos y alumnas se involucren y le otorguen sentido al aprendizaje de los nuevos contenidos que se abordarán. En este momento el docente aplica estrategias para comunicar los propósitos de la clase y los aprendizajes a lograr (el qué y para qué de la clase) y para recuperar los conocimientos previos de los estudiantes con la finalidad de que éstos puedan establecer vínculos con los nuevos aprendizajes.
  - Durante el **desarrollo** de una clase es importante que las estrategias de enseñanza implementadas por el profesor o profesora constituyan un desafío y sean coherentes y significativas para los estudiantes. Que las situaciones de aprendizaje que se les ofrecen los lleven a recurrir a sus conocimientos previos, intereses y experiencias, a interactuar entre ellos colaborativamente, de modo que aprendan unos de otros y estimulen el desarrollo del pensamiento. Así podrán vincular los contenidos nuevos a situaciones reales. Una manera en que el docente contribuirá a desarrollar el pensamiento es a través de la formulación de preguntas y problemas abiertos que inviten a los alumnos y alumnas a elaborar sus propias respuestas.
  - El momento de **cierre** de la clase se caracteriza por ser una instancia en que se invita a los alumnos y alumnas a efectuar una metacognición de lo vivido en el aula, es decir, que tomen conciencia de sus progresos, de sus nuevos aprendizajes y puedan extraer sus propias conclusiones. Este es el momento en que el profesor o profesora y/o los estudiantes sintetizan los contenidos, planteando nuevos desafíos o tareas para realizar y también evaluar el logro de los objetivos de la clase. La retroalimentación oportuna y constructiva por parte del docente y entre compañeros favorece la comprensión y constituye un aporte en sus procesos de aprendizaje.

- **Indicadores de logros:** son estructuras pedagógicas que nos permiten estimar los momentos del proceso de aprendizaje por el educando (AGC, 2018)
- **Tipos de registros semióticos:** un sistema de representación semiótica es entendido como un sistema de signos que tiene como función principal la de comunicación, además específicamente en matemática, ya que es parte de la mediación con objetos matemáticos y la de favorecer el entendimiento (Cervantes, Hernández, 2017).
- **Evaluación:** la evaluación es un proceso que tiene por objeto determinar en qué medida se han logrado los objetivos previamente establecidos, que supone un juicio de valor sobre la programación establecida, y que se emite al contrastar esa información con dichos objetivos (MINEDUC, 2016).

La elaboración de una secuencia didáctica es una tarea importante para organizar situaciones de aprendizaje que se desarrollarán en el trabajo de los estudiantes. El debate didáctico contemporáneo enfatiza que la responsabilidad del docente para proponer a sus alumnos actividades secuenciadas que permitan establecer un clima de aprendizaje, ese es el sentido de la expresión actualmente de boga en el debate didáctico: centrado en el aprendizaje (Barriga y Díaz).

Para Chamorro (2006) una secuencia didáctica se diseña desde la estructura de la producción de un texto de uso social y real dentro del contexto de los estudiantes, con la necesidad de responder a propósitos referidos a la enseñanza de un contenido en particular y al aprendizaje de dicho contenido dentro de una necesidad de uso social.

Barriga y Díaz (2013) señalan que una secuencia didáctica es el resultado de una serie de actividades de aprendizaje que tengan un orden interno entre sí, se parte de la intención de recuperar aquellas nociones previas que tienen los estudiantes sobre un hecho específico, vincularlo a situaciones problemáticas y de contextos reales con el fin de que la información que a la que va acceder el estudiante en el desarrollo de la secuencia sea significativa y pueda abrir un proceso de aprendizaje, la secuencia demanda que el estudiante realice cosas, no ejercicios rutinarios o monótonos, sino acciones que vinculen sus conocimientos y experiencias previas, con algún interrogante que provenga de lo real y con información sobre un objeto de conocimiento.

Es así como las secuencias didácticas de matemáticas colocan las competencias comunicativas como un componente trasversal necesario para la construcción y perfeccionamiento de las competencias matemáticas. Todas estas realidades son posibles si se organizan y si facilitan diálogos en el aula, estimulando el compartir y validar conocimientos para lograr comprensiones (Oicata, Castro, 2013).

Se requiere de habilidades de enseñanza que modifiquen las relaciones de aula para que los estudiantes se conviertan en aprendices más independientes, que desarrollan sus propios conocimientos y comprensiones, mientras el docente asume un rol menos protagónico que el que usualmente ha tenido.

Desde esta mirada las secuencias de matemáticas están construidas bajo dos pilares: una situación problema que orienta cada una de las preguntas y el contenido matemático que se desarrolla. La situación problema es explicita en la primera semana para que no solo los estudiantes se contextualice con ella, sino para que el/la docente pueda determinar los conocimientos que cree que usaría y las preguntas que tendrá que contestar (Oicata, Castro, 2013).

En el desarrollo de cada una de las clases, los/las estudiantes van explorando e incorporando herramientas que les permiten dar una respuesta a la situación. Igualmente, en el proceso de cada clase se colocan otras situaciones que se relacionan con el contenido matemático a desarrollar y con el contexto de la situación para que los/las estudiantes, a la vez también adquieran la habilidad de aplicar ese saber en otros contextos.

Al conocer la estructura de una secuencia didáctica, se puede comprender el proceso de enseñanza de las funciones, conociendo las formas en la que se enseña este contenido.

2.5 Aprendizaje de las funciones

El aprendizaje de las funciones es importante en las matemáticas, ya que están presentes en el currículum nacional y tienen un grado de dificultad considerable, pues se pueden presentar en una gran variedad de sistemas de representación. Históricamente, según Bangi (2004) su importancia es notable, ya que para Newton como Leibniz, en sus apartados originales del cálculo, no hacen referencia explícita a funciones, pero sí se empezó a hablar de curvas y variables.

En general, el concepto de función es complejo, no es fácil de enseñar y aprender, las diversas investigaciones relacionadas con las funciones, muestran la existencia de concepciones erróneas y las inconsistencias en el pensamiento funcional de los alumnos, así como las dificultades por las que atraviesan durante el aprendizaje de este concepto. Pero no todo es negativo, también muestran los estadios a través de los cuales pasan los/las alumnos/as en la comprensión del concepto, la determinación de los componentes básicos y los aspectos cruciales para su comprensión (Díaz, 2013).

El concepto de función es un elemento fundamental dentro del currículo de matemáticas como en otras asignaturas, así también su estudio cobra importancia en la realidad, ya que las funciones las encontramos en nuestro entorno y sobre todo en las situaciones cotidianas de la vida que se relacionan con dos magnitudes, como estudio de crecimiento de poblaciones, de fenómenos naturales, estudios económicos, etc (Bellester, 2009).

Una función afín tiene la expresión analítica $y = f(x) = mx + b$, Donde m y b son números reales y m distinto de 0. La pendiente es m o razón de cambio de y con respecto a x, b es la intersección de la gráfica con el eje vertical (Roldán, 2013).

La gráfica de una función afín se considera como la representación geométrica de la misma, es importante debido a la posibilidad de análisis y la observación de atributos de la función como son la pendiente (inclinación) e intersecciones con los ejes. Para el aprendizaje de las funciones es necesario conocer los distintos conceptos ligados a ellas (Coronel, 2013):

- **Expresión algebraica:** una función se puede representar mediante una expresión algebraica, esta es una combinación de letras, números y signos de operaciones. Las expresiones algebraicas permiten traducir al lenguaje matemático expresiones del lenguaje habitual.
- **Relación:** es una correspondencia entre elementos de dos conjuntos, uno de partida que podemos denominarlo A y un conjunto de llegada denominado B. Una relación se representa con la letra R. Por ejemplo: Al hablar del costo de energía eléctrica que se debe cancelar al mes, se sabe que esta cantidad dependerá de la energía consumida. Esto nos presenta una relación entre el consumo de energía y la cantidad que se debe cancelar por dicho consumo. El conjunto A corresponde al consumo de energía y el conjunto B el dinero a cancelar.
- **Dominio de una relación:** está constituido por los elementos del conjunto de partida (conjunto A) que establece correspondencia con los elementos de un conjunto de llegada (conjunto B).

- **El rango de una relación:** conocido también como recorrido, está constituido por los elementos del conjunto B (conjunto de llegada) que se relacionan con elementos del dominio de la relación R. El rango de una relación es un subconjunto del conjunto de llegada.
- **Imagen:** se llama imagen a cada uno de los elementos que forman el rango de una relación, es decir, solamente los elementos del conjunto de llegada que están asociados con algún elemento del dominio.
- **Pre-imagen:** son los elementos que forman el dominio de una relación.
- **Variable:** el concepto de variable tiene muchas definiciones, en matemáticas una variable ocupa el lugar de una cantidad o número indeterminado. Una variable se refiere a algo que varía o que toma múltiples valores. Las variables se comportan como dependiente e independiente.
- **Variable independiente:** se le asignan arbitrariamente valores. Estas determinan cambios en los valores de otras variables llamadas dependiente. Generalmente se representa con la letra x.
- **Variable dependiente:** está determinada por el valor que se le asigna a la variable independiente. Generalmente se representa con la letra y.
- **Variación:** en matemática, se conoce como variación al cambio que sufre una variable. Se representa usualmente con la letra griega Δ (delta). En el caso de que la variable sea x, se representa: Δx, por tanto este valor se obtiene restando el nuevo valor de x de su valor inicial, que se conoce también como cambio o incremento.

$$\Delta x = x2 - x1$$

- **Proporcionalidad:** se dice que existe una proporción cuando una razón (cociente entre dos cantidades) es igual a otra.
- **Par ordenado:** conjunto formado por dos elementos que tienen un orden. Si los representamos por a y b los elementos, entonces el par ordenado se representa (a, b). En el caso de las funciones, los componentes del par ordenado están formados por cada elemento del Dominio con su Imagen respectiva (D, I). Si relacionamos con la variable el primer elemento corresponde a la variable independiente y el segundo a la variable dependiente. Gráficamente, dentro de un plano cartesiano, el par ordenado representa un punto que pertenece a la gráfica de la función.

- **Sistema de ejes cartesiano:** este sistema está formado por dos ejes perpendiculares que se cortan entre sí, tiene como finalidad describir la posición de puntos representados por pares ordenados. El eje horizontal se llama eje X o eje de abscisas en el cual se representan los valores de la variable independiente y el eje vertical se llama eje y o eje de las ordenadas, donde se grafican los valores de la variable dependiente. El punto de coordenadas (0,0) donde se cortan los dos ejes, se denomina origen. Las coordenadas de un punto cualquiera P se representan por (x, y).
- **Función:** una función es una relación entre variables tal que dadas dos variables, para cada valor asignado a una de ellas se determinan uno o más valores a la otra.
- **Dominio de una función:** es la serie de valores de la variable independiente, x para los cuales función está definida, es decir, el conjunto formada por los elementos que tienen imagen.
- **Rango o recorrido de una función:** al conjunto de todos los valores que toma f(x) (variable dependiente, y) a medida que x varía se denomina rango de la función; es decir, es el conjunto formado por las imágenes.
- **Imagen de una función:** se llama imagen de una función a cada uno de los elementos del rango o recorrido que están asociados con un elemento del dominio. Al conjunto de llegada se conoce también como codominio y es el conjunto de valores que podrían ser imagen, mientras que el rango es el conjunto de valores que realmente son imágenes, de ahí que el rango es un subconjunto del dominio.

Las definiciones de función se refieren a esta como una relación entre dos cantidades. Callahan y Hoffman (1995) señalan que una función describe como una cantidad depende de otra. En sus estudios Planchart (s.f) señala la importancia de estudiar el concepto de función, ya que se refiere a las funciones como uno de los conceptos matemáticos más cercano al contexto físico. Esta concepción sobre las funciones y del manejo de ellas, con distintas representaciones, señalan el potencial didáctico que se pueden utilizar cuando se aborda la realidad con determinados esquemas mentales o modelos matemáticos o simulando un problema real.

A lo largo del tiempo el concepto de función se ha ido simplificando, la historia de ella contextualiza la realidad actual de la enseñanza de las funciones.

2.5.1 Historia de las funciones

El concepto de función es uno de los más importantes dentro de las matemáticas. Es difícil tener una definición específica, ya que existieron muchos matemáticos que contribuyeron a establecer un concepto claro de las funciones.

Kleiner en un artículo (1989) opina que el concepto de función se remonta 4000 años atrás, y que la noción de función no surgió en forma explícita sino hasta principios del siglo XVIII y en el transcurso de casi 200 años (1450-1650 d.C.).

Desde el siglo XVII a.C. los matemáticos de Mesopotamia y de Babilonia ya sabían resolver ecuaciones de primero y segundo grado. Además, resolvían algunos sistemas con dos ecuaciones y dos incógnitas. En el siglo XVI a.C. los egipcios desarrollaron un álgebra muy elemental que usaron para resolver problemas cotidianos que tenían que ver con la repartición de víveres, de cosechas y de materiales.

Según Perdersen los babilónicos tenían un auténtico instinto de funcionalidad, ya que una función aparte de ser una fórmula es una relación más general que une elementos de dos conjuntos, lo cual está presente en las tablas de cálculos babilónicos (Díaz, 2013).

En el siglo III el matemático griego Diofanto de Alejandría publicó su aritmética en la cual, por primera vez en la historia de las matemáticas griegas, se trataron de una forma rigurosa no solo las ecuaciones de primer grado, sino también las de segundo. Introdujo un simbolismo algebraico muy elemental al designar la incógnita con un signo que es la primera sílaba de la palabra griega arithmos, que significa número.

En los elementos de Euclides los objetos matemáticos y las relaciones son estáticos. Esto condujo a las proporciones y ecuaciones, pero no a las funciones, se consideran a los números enteros y discretos, y a las magnitudes continuas. Esto hace difícil construir la noción de función, puesto que los números, así considerados, solo permitían construir una ilustración discretizada de los fenómenos de la naturaleza (Ortiz, 2011).

Leibniz fue el primero en utilizar la palabra función, sin embargo, se debía nombrar los componentes de la función, es por eso que Euler continúa el camino para precisar la noción de función comenzando a definir nociones iniciales como son: constante y cantidad variable (Sastre, Rey y Boubée. 2008).

Euler definió una función siguiendo la definición dada por su maestro Bernoulli como: “Por función de una cantidad variable denotamos aquí una expresión analítica construida de un modo u otro con esta cantidad variable y números o constantes" (Rüthing, 1984).

Según Ortiz (2011) en la historia de las matemáticas se le dan créditos al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) por precisar el concepto de función, así como por realizar un estudio sistemático de todas las funciones elementales, incluyendo sus derivadas e integrales.

En 1822 Fourier dio un paso revolucionario en la evolución del concepto de función, al dar una definición de función en la que hacía notar que lo principal era la asignación de valores para la función; que ésta asignación fuera llevada a cabo por una o varias fórmulas no era de importancia. La definición de Fourier es: "En general, la función f(x) representa una sucesión de valores u ordenadas cada una de las cuales es arbitraria. Para una infinidad de valores dados a la abscisa x, hay un número igual de ordenadas f(x). Todas tienen verdaderos valores numéricos, ya sean positivos o negativos o nulos. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen una a la otra, de cualquier manera, como sea, y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad única" (Rüting, 1984).

En 1829 Dirichlet llega a formular por primera vez el concepto moderno de función f(x) = (x) de una variable independiente en un intervalo $a < x < b$. Esta definición fue extremadamente general, no decía ninguna palabra sobre la necesidad de dar a la función por medio de una fórmula, sobre todo el dominio de definición. Definió función de la siguiente forma: "y es una función de una variable x, definida en el intervalo $a < x < b$, si a todo valor de la variable x en este intervalo le corresponde un valor definido de la variable y. Además, es irrelevante en qué forma se establezca esta correspondencia" (Kleiner, 1989).

Más tarde esta definición recibió un importante razonamiento, pues, con la introducción de los espacios métricos y la topología, se deduce que las propiedades de una función dependen de la estructura del conjunto sobre la cual se define y las variables que toma. Esto nos lleva a los conceptos de dominio y rango de una función.

El proceso de ajustes a la definición de función continúa por varias décadas hasta que a finales del siglo XIX y principios del XX surge un nuevo concepto llamado "conjunto", que influyó en las posteriores definiciones de función.

Existieron debates entre muchos matemáticos famosos incluyendo a Fourier, Dirichlet, Cauchy, Riemann, Weirstrass, Lebesgue y Borel dieron ímpetu al continuo desarrollo histórico del concepto de función.

La más importante fue realizada por un grupo de matemáticos, que se hacían llamar Nicolás Bourbaki, quienes en 1939 le otorgaron mayor formalidad a la definición de función. Definieron el concepto de la siguiente manera:

- "Una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto."
- "Al primer conjunto (el conjunto D) se le da el nombre de dominio. Al segundo conjunto (el conjunto C) se le da el nombre de contra dominio o imagen."

2.5.2 Concepto de Función

El punto de partida del concepto de función es la variabilidad, ya que es el medio de percibir cómo cambia una variable y constatar la variación que se produce en la otra. Coronel (2013) menciona que los principales elementos que integran la noción de función son la variación, la dependencia, la correspondencia, la simbolización y sus distintas formas de representación.

La palabra función dependiendo del contexto tiene un significado distinto. Según la Real Academia Española (RAE) significa "tarea que corresponde realizar a una institución o entidad, o a sus órganos o personas", pero en el área de las matemáticas tiene una definición totalmente distinta, se define como un conjunto de pares ordenado en lo que cada primer componente corresponde con exactamente un segundo componente" (Olfos, Soto y Silva, 2007).

Desde el punto de vista histórico, el concepto de función se construyó hace varios siglos, lo cual nos permite comprender que las problemáticas del aprendizaje de este concepto en el área de las matemáticas, son importantes de estudiar (Zúñiga, 2009).

El concepto de función tiene nociones hace más de 2000 años con la cultura griega y babilónica. A través de los años fueron surgiendo algunas definiciones de función que dieron sentido a esta área de la matemática. Shílov (2004), plantea algunas definiciones que se fueron dando a lo largo de la historia:

Una función de una magnitud variable es una expresión analítica, compuesta por esta magnitud y por constantes (Bernoulli, 1718).

Cuando unas cantidades dependen de otras de tal forma que al variar las últimas también varían las primeras, entonces las primeras se llaman funciones de las segundas (Euler, 1755).

A las funciones se les puede definir, por ejemplo, "como un conjunto de pares ordenados tal que no contiene dos pares distintos con la misma componente". Sin embargo, Theodore Eisenberg considera que es la menos intuitiva y apropiada desde el punto de vista pedagógico (ver Eisenberg en Tall, 1991, Ch.9).

Sin embargo cabe preguntarse, ¿De dónde se ha extraído el concepto de función más moderno? Goursat, en el año 1923, dio la definición que aparece hoy en día en la mayoría de los textos de matemática "Se dice que ***y*** es una función de ***x*** si cada valor de ***x*** le corresponde un valor de ***y***. Esta correspondencia se indica mediante la ecuación ***y = f (x)***" (Zúñiga, 2009).

Bocco (2013) define una función como una relación que asocia cada elemento de un conjunto con otro elemento y sólo un elemento de otro conjunto; es decir, una función de A en B es una relación que asocia a cada elemento x del conjunto A uno y sólo uno elemento y del conjunto B, llamado su imagen.

En símbolos: la relación $f: A \rightarrow B$ es una función si y solo para todo $x \in A$ existe un único $y \in B$ que es su imagen, esto es $y = f(x)$.

Por ende podemos entender una función como una relación de dependencia que asigna a cada valor de la variable x un único valor de la variable y.

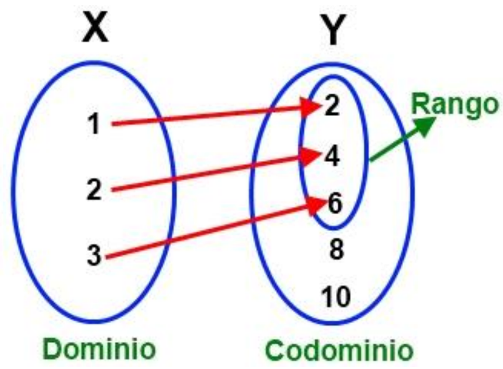
Dónde "x" es la variable independiente e "y" es la variable dependiente.

Hay nombres especiales para los diferentes elementos de una función:

- **Dominio:** conjunto de valores que toma la variable independiente X.
- **Codominio:** conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente Y.
- **Rango o imagen:** conjunto de valores que efectivamente toma la variable dependiente Y.

Entonces, en el diagrama el conjunto **"X"** es el **dominio**, el conjunto **"Y"** es el **codominio** y los elementos de **Y** a los que llegan flechas (los valores producidos realmente por la función) son el **rango**.

En el siguiente diagrama sagital se indican los elementos que lo caracterizan:



También en el sistema educativo chileno, específicamente en el libro del estudiante de octavo básico del año 2018, el concepto de función es definido como regla de correspondencia entre dos conjuntos llamados dominio y recorrido: asigna a cada elemento del dominio un único elemento del recorrido (MINEDUC, 2018).

Lo anteriormente descrito, permite decir que el concepto de función ha sido modificado a lo largo de los años, donde su significado fue cambiando y definido con mayor precisión, concluyendo que existe una relación de correspondencia entre dos términos, sucesos, variables, conjuntos, etc.

2.5.2.1 Función lineal y afín

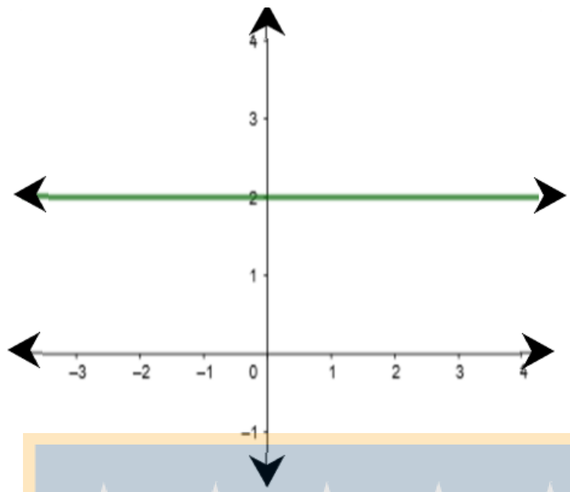
Formalmente, una función es una relación entre dos variables de manera que a cada valor de la primera, le corresponde un único valor en la segunda. A estas variables se les denomina independiente (es la primera variable y se le asigna la letra x) y dependiente (es la que se obtiene de la variable independiente y se le asigna la letra y, o f(x)) (MINEDUC, 2016).

Una función lineal se puede representar de la siguiente manera: f (x) = mx, donde m es un número real distinto de cero y la función Afín es aquella que se representa de la siguiente manera: f(x)= mx + n, donde m y n son números reales distintos de cero.

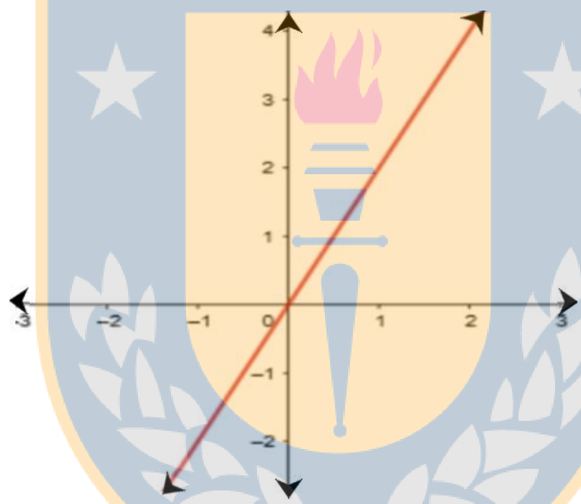
- **m:** pendiente, es la inclinación que la recta tiene respecto del eje de abscisas.
- **n:** coeficiente de posición, es el valor en el cual la recta corta al eje de las ordenadas.

La pendiente es la inclinación de una recta respecto al eje horizontal o x. Si los puntos P1 (x1, y1) y P2 (x2, y2) pertenecen a una recta, se define la pendiente de la recta en el cociente entre la diferencia de coordenadas ***y***, y la diferencia de coordenadas ***x***. Podemos encontrar diferentes situaciones (funciones: Representación y tipo, 2013):

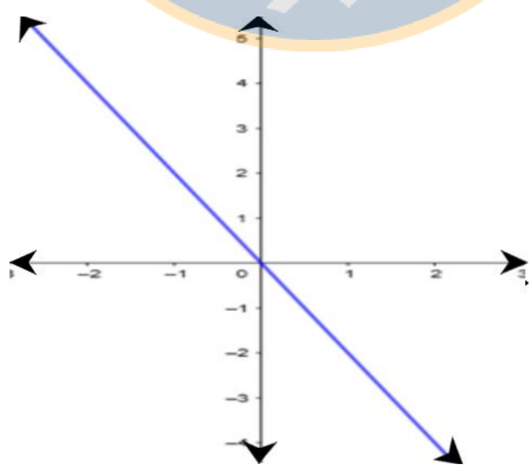
- Cuando la pendiente es nula, significa que la recta no tiene inclinación y será paralela al eje x.



- Cuando la pendiente es positiva la función es creciente (m > 0).



- Cuando la pendiente es negativa la función es decreciente (m < 0).



El coeficiente de posición es el punto de intersección de una recta con respecto al eje de las ordenadas o eje y.

Con la gráfica podemos saber el valor del coeficiente de posición. Esto nos indica si una función es lineal o afín. Si n = 0 se trata de una función lineal (Mineduc, 2016). La gráfica de una función lineal se considera como la representación geométrica de la misma, es importante debido a la posibilidad de análisis y la observación de atributos de la función como son la pendiente (inclinación) e intersección con los ejes (Roldán, 2013). Gráficamente una función lineal es una recta que pasa por el origen del plano cartesiano, es decir su coeficiente de posición (n) es 0.

En una función lineal la relación entre la variable independiente y dependiente es de proporcionalidad directa, en la relación de la función afín esta condición cambia por la condición inicial de la función.

El aprendizaje de las funciones ha mostrado ciertas complicaciones a través del tiempo, lo que no deja de ser preocupante, ya que una mala concepción de este concepto podría redundar en un bajo rendimiento en el aprendizaje de futuros contenidos, como por ejemplo, el cálculo.

2.6 Obstáculos en la enseñanza de las funciones

¿Cuáles son las principales dificultades en el aprendizaje de las funciones?

Para responder esta interrogante es necesario analizar distintas investigaciones relacionadas con el aprendizaje de las funciones que determine si existen o no dificultades. A pesar de las diversas investigaciones que existen a lo largo del tiempo, aún se cree que el alumno sólo recibe y graba durante la exposición de conocimientos del docente, pudiendo haber alguna pérdida de información. Pero lo que no se suele tener en cuenta, es que a veces los alumnos construyen conocimientos erróneos (Vrancken, Gregorini, Engler, Müller y Hecklein, 2007).

En el estudio de las funciones López y Sosa (2008), Sarmiento y Manzanilla (2011) y Córdoba, Díaz, Haye y Montenegro (2013) distinguen, en los estudiantes, la falta de capacidad para definir de forma correcta el concepto de función, interpretar el lenguaje matemático, diferenciar entre la variable y la incógnita, los/as estudiantes no saben enunciar situaciones que relacionan variables, no representan las funciones, también les hace falta analizar e interpretar el comportamiento de la gráfica de una función.

De acuerdo con Giorgio Bagni (2009) esta dificultad se aprecia más cuando se comienza desde la representación gráfica, ya que los alumnos/as relacionan en primer lugar sólo con esta representación, sin saber las otras formas de representar una función.

Según Hitt (2014) otra dificultad para comprender las funciones, son las equivalencias de notaciones, generalmente no se explica cuando se cambia de una notación a otra dejando afuera la relación existente entre las notaciones. En concordancia con esto se encuentra la confusión entre la variable dependiente e independiente, los cuales se ven reflejados al momento de dibujar la gráfica de la función.

A estas dificultades le podemos agregar que los estudiantes no pueden entender conceptos relacionados a las funciones: dominio, tangente, infinito, diferencia entre variables. También se encuentran dificultades para pasar de un registro a otro y su relación (González, 2015).

Los aportes de los obstáculos anteriormente descritos son:

- En primera instancia un aporte negativo, ya que los estudiantes no están comprendiendo el concepto de función, de forma algebraica, gráfica e incluso analítica.
- En segunda instancia es un aporte positivo, ya que abre la oportunidad para desarrollar en los estudiantes las competencias y comprensión de las funciones a través de sus diversas representaciones.

Aquí cobra gran importancia la aplicación de la teoría de Duval que permitirá que los estudiantes transiten de un registro a otro para lograr una mejor comprensión de lo que es el concepto de función.

2.7 Enseñanza de las funciones en el currículum nacional

La enseñanza y aprendizaje de las funciones insertas en el currículum nacional tiene como objetivo que los/las estudiantes comprendan que el lenguaje algebraico tiene un papel importante para expresar y desenvolverse en las matemáticas y todo lo que esta ofrece (MINEDUC, 2012).

Por otra parte los planes y programas, especifican que los objetivos que los estudiantes deben cumplir son: escribir, representar y usar expresiones algebraicas para designar números; establecer relaciones entre ellos mediante ecuaciones, inecuaciones o funciones, siempre en el contexto de resolver problemas; identificar regularidades que le permitan construir modelos y expresar dichas regularidades en lenguaje algebraico. El eje de álgebra y funciones pone especial énfasis en que las alumnas y los alumnos sean capaces de reconocer modelos y ampliarlos, y en que desarrollen la habilidad de comunicarse por medio de expresiones algebraicas (MINEDUC, 2012).

Los aprendizajes en funciones se relacionan fuertemente con el eje de Números; un trabajo adecuado en ambos ejes permitirá a los alumnos y las alumnas desarrollar conceptos nuevos cuando cursan niveles superiores y fortalecer los adquiridos en el ciclo anterior. Especialmente, pretende que puedan usar metáforas para interiorizar el concepto de función y sepan cómo utilizarla para manipular, modelar y encontrar soluciones a situaciones de cambios en diferentes ámbitos, como el aumento de ventas en un tiempo determinado. Además se espera que transformen expresiones algebraicas en otras equivalentes para resolver problemas y que sean capaces de justificar su proceder; que expresen igualdades y desigualdades mediante ecuaciones e inecuaciones y que las apliquen para resolver problemas; que comprendan las funciones lineales, las funciones cuadráticas y sus respectivas representaciones, y que resuelvan problemas con ellas (MINEDUC, 2012).

De acuerdo al programa de estudio, los conocimientos previos que el estudiante debe poseer son los siguientes:

- Operaciones de números enteros.
- Operaciones de números decimales y fracciones.
- Variaciones porcentuales.
- Reducción de expresiones algebraicas.
- Concepto de proporción directa.
- Ecuaciones e inecuaciones con números enteros.

Los objetivos de aprendizaje ligados al concepto de función son los siguientes:

- OA7: mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas. Usando metáforas de máquinas. Estableciendo reglas entre x e y. Representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de venn), de manera manual y/o con software educativo.
- OA10: mostrar que comprenden la función afín: generalizándola como la suma de una constante con una función lineal. Trasladando funciones lineales en el plano

cartesiano. Determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo. Relacionándola con el interés simple. Utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

2.8 Habilidades

Una habilidad es considerada según la RAE como *"Cada una de las cosas que una persona ejecuta con gracia y destreza"*.

El sistema educativo en Chile pretende que los/as estudiantes desarrollen habilidades, estas se especifican en los programas de estudio de cada área, en el caso de la asignatura de matemática se espera que los/as estudiantes logren resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar.

2.8.1 Resolver problemas

Los programas de estudio del Ministerio de Educación, busca que los estudiantes desarrollen habilidades con la finalidad de potenciar principalmente el desarrollo del razonamiento lógico.

"Al poner el énfasis en la resolución de problemas, se busca, por un lado, que los estudiantes descubran la utilidad de las matemáticas en la vida real y, por otro, abrir espacios para conectar esta disciplina con otras asignaturas" (MINEDUC, 2012. p. 36). Según el MINEDUC (2012), lo importante es el proceso de búsqueda para encontrar la solución de diversos problemas, no es sólo encontrar la solución al problema, sino que en cualquier área del conocimiento.

Según el MINEDUC (2012) resolver problemas es una de las habilidades más firmes e importantes propuestas en los Programas de estudio, puesto que se le considera tanto un medio, como un fin en la adquisición de una buena educación matemática, ya que los estudiantes al momento de resolver problemas aplican distintas estrategias para hacer una serie de acciones, de esta manera se promueve el pensamiento reflexivo, crítico y creativo. Sepúlveda, Vargas y Escalante (2013) aseguran lo anterior, planteando que el proceso de resolver problemas implica el planteamiento de preguntas y la búsqueda de estrategias para responderlas. Plantearse y responder preguntas va apoyando el desarrollo de la comprensión tanto del problema como del contenido matemático inmerso" (p. 66).

Debido a esto es que "a la resolución de problemas se reconoce como el centro de la actividad matemática" (Camacho y Santos, 2004. p. 46) o como lo plantea Godino (2004), "no es sólo uno de los fines de la enseñanza de las matemáticas, sino el medio esencial para lograr el aprendizaje" (p. 39). George Polya (1887 - 1985), afirma que el nivel baja si se limita la didáctica al desarrollo de operaciones rutinarias de forma mecánica, además de no usar su imaginación ni juicio. No obstante, la práctica cotidiana del aula, en un intento por fomentar esta resolución, se ha limitado a la ejercitación repetitiva de procedimientos o a la aplicación de fórmulas al finalizar los contenidos desarrollados por el docente (Leal y Bong, 2015. p. 76).

Guzmán (1993) citado en Salinas y Sgreccia, (2016) reafirma esta información, ya que reconoce que los textos escolares solo contienen ejercicios y no tienen problemas verdaderos que resolver (p, 24). En el intento de describir la manera de actuar de un resolutor ideal, Polya citado en Godino (2004) plantea una especie de guía para el accionar de éste frente a un problema, la cual "consiste, a grandes rasgos, en cuatro fases: 1) Comprender el problema, 2) Concebir un plan, 3) Ejecutar el plan y 4) Examinar la solución obtenida." (p. 38). Por lo tanto, la resolución de problemas se convierte en un foco importante en la enseñanza y aprendizaje de la matemáticas por ser "un proceso cognitivo, retador, asociado al desarrollo del pensamiento lógico" (Leal y Bong, 2015. p. 77).

2.8.2 Representar

De acuerdo a lo que plantea el currículum escolar la habilidad de representar tiene una importante función ya que posee grandes ventajas en la adquisición del aprendizaje, esto permite una explicación formal de las situaciones sobre el conocimiento intuitivo, ligando distintos niveles de representación, ya sea concreto, pictórico y simbólico, también promueve la comprensión, memorización y explicación de las operaciones, relaciones y conceptos matemáticos, además ofrece un significado cercano a las expresiones matemáticas.

El trabajo con distintos registros semióticos y diferentes representaciones es indispensable para el aprendizaje de la matemática pero no es una tarea natural para los alumnos (Oviedo y Kanashiro, 2012. p. 36). Sin embargo, el trabajo de esta habilidad en los alumnos hace que estos adquieran los conocimientos por medio del “aprender haciendo”, usando situaciones concretas, traduciéndolas a un nivel gráfico y utilizando símbolos matemáticos. De esta manera los estudiantes adquieren un aprendizaje significativo y desarrolla la capacidad de pensar matemáticamente. Esta habilidad también favorece que los alumnos recorran por los distintos registros de representación semiótica, ya sean tablas, gráficos, diagramas, etc. Otorgando la importancia que merece la matemática en distintos contextos y áreas del conocimiento.

2.8.3 Argumentar y comunicar

Según las bases curriculares (2012) menciona que esta habilidad se aplica al tratar de convencer a otros de la validez de los resultados obtenidos. La argumentación y la discusión colectiva sobre la solución de problemas, escuchar y corregirse mutuamente, la estimulación a utilizar un amplio abanico de formas de comunicación de ideas, metáforas y representaciones, favorece el aprendizaje matemático. En la enseñanza básica, se apunta principalmente a que los alumnos establezcan progresivamente deducciones que les permitirán hacer predicciones eficaces en variadas situaciones concretas. Se espera, además, que desarrollen la capacidad de verbalizar sus intuiciones y concluir correctamente, y también de detectar afirmaciones erróneas.

2.8.4 Modelar

Modelar es el proceso de utilizar y aplicar modelos, seleccionarlos, modificarlos y construir modelos matemáticos, identificando patrones característicos de situaciones, objetos o fenómenos que se desea estudiar o resolver, para finalmente evaluarlos. El objetivo de esta habilidad es lograr que el estudiante construya una versión simplificada y abstracta de un sistema, usualmente más complejo, pero que capture los patrones claves y lo exprese mediante lenguaje matemático. A partir del modelamiento matemático, los estudiantes aprenden a usar una variedad de representaciones de datos y a seleccionar y aplicar métodos matemáticos apropiados y herramientas para resolver problemas del mundo real.

Nuestra investigación, pretende desarrollar todas estas habilidades y para ello el principal foco, es el modelamiento matemático.

2.9 Modelamiento matemático

En la asignatura de matemáticas una de sus habilidades se enfoca en modelar, cuyo objetivo es lograr que los/as estudiantes construyan una versión simplificada y abstracta de un sistema que opera en la realidad, que capturen los patrones clave, que los expresen mediante símbolos matemáticos y que puedan expresar sus ideas con claridad, ya que esto les permite comprender el razonamiento que existe detrás de cada problema. Entre los diferentes tipos de modelos se pueden mencionar los analógicos, físicos, gráficos, esquemáticos y matemáticos.

Para reconocer el vínculo entre algunos procesos relevantes en la historia de las matemáticas y la educación matemática se hace referencia Biembengut y Hein (2007, p. 12) quienes conciben la modelación matemática como: un proceso que se implica en la obtención de un modelo.

El modelamiento matemático es un intento de describir alguna parte del mundo real en términos matemáticos. Este modelo ha sido construido en todas las ciencias tanto físicas, como biológicas y sociales. Los elementos que lo componen son tomados del cálculo, el álgebra, la geometría y otros campos afines (Bases curriculares, 2016).

Según Blum (2012) es una habilidad que implica "traducir" una situación del mundo real a la matemática, es decir, expresar acciones o situaciones cotidianas con lenguaje matemático involucrando una operatoria para poder identificar regularidades en expresiones numéricas y geométricas, para finalmente traducir expresiones del lenguaje cotidiano a lenguaje matemático y viceversa.

Para PISA construir modelos matemáticos es tener la capacidad y habilidad para reflexionar, analizar, estructurar, criticar y comunicar un modelo y sus resultados (OCDE, 2006).

La modelación matemática en la escuela ayuda a responder los cuestionamientos de los estudiantes sobre la utilidad de las matemáticas y permite la incorporación de un ambiente de aprendizaje enriquecido. También resulta útil al promover el interés de nuestros estudiantes por las matemáticas en situaciones cotidianas y de gusto de la comunidad juvenil, como el deporte y diversas tecnologías, pues al valorar sus conocimientos previos los podrán aplicar a dichas actividades a la par del desarrollo de nuevas habilidades.

Al modelar situaciones reales que ayudan a la adquisición del concepto de función, se provoca en los estudiantes la aproximación a fenómenos reales, que sean capaces de analizar y describir elementos matemáticos como: objetos simbólicos, verbales, gráficos, algebraicos y numéricos. En el proceso de la modelación se produce la distinción entre variables y esta da origen a otros registros de representación (Planchart, s.f.).

Monk (1992) menciona que las estrategias que se utilizan para aprender matemáticas a partir de situaciones y fenómenos del mundo físico que incluye interpretar la realidad a partir de la identificación de las variables participantes, la recolección de datos que se generan en las situaciones reales o simuladas y modelar las situaciones.

Modelar y simular son representaciones de un objeto matemático que se vinculan con alguna situación física o real. Planchart (s.f.) menciona que al simular fenómenos el concepto de función se presenta en forma más atractiva y ágil a los/as estudiantes. Una simulación es imitar o aproximarse a algo. En cuanto a la modelación, significa representar algo, la cual comprende signos y figuras que logran actuar como expresiones del concepto con los cuales se logra interpretar y predecir los fenómenos del mundo físico, que ejemplifican conceptos matemáticos.

CAPÍTULO III

Marco metodológico

3.1 Enfoque

El enfoque es de tipo cualitativo, ya que permite comprender los fenómenos y explorarlos desde la perspectiva que tienen los participantes en un ambiente natural y dentro de su contexto (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Lo anteriormente definido se refiere a que este tipo de investigación sirve para comprender la realidad de la enseñanza de las funciones en octavo básico y así describir la elaboración de una propuesta didáctica basada en el modelamiento matemático para mejorar la labor docente y estudiantil.

3.2 Dimensión temporal

La dimensión temporal de nuestra investigación es transversal, pues se centra en los análisis del estado de una o varias variables en un momento dado, y analiza la relación de las variables. En este tipo de diseño se recolectan datos en un solo momento, en un tiempo único (Hernández et al., 2014).

3.3 Diseño de investigación

El diseño de esta investigación corresponde a una investigación didáctica, ya que estas investigaciones se utilizan para obtener datos relevantes en estudios educativos. De acuerdo con Oviedo, Soteldo, De Sá y Rodríguez (2016) la investigación didáctica permite aproximarse al conocimiento y a la comprensión del aula, previo a su intervención. Además, consiste en identificar situaciones problemáticas que se desean abordar, por lo que se focalizan las situaciones, se orienta al estudiante y se recopila información.

El objetivo de las investigaciones didácticas según Miró (1944) es conocer las situaciones, costumbres y actitudes predominantes a través de la descripción exacta de las actividades, procesos y personas. Su meta no se limita a la recolección de datos, sino a la predicción e identificación de las relaciones que existen entre dos o más variables. Los investigadores no son meros tabuladores, sino que recogen los datos sobre la base de una hipótesis o teoría, exponen y resumen la información de manera cuidadosa.

3.4 Alcance de la investigación

El alcance de nuestra investigación corresponde a un estudio descriptivo, ya que busca especificar propiedades o características ya sea de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis (Hernández et al., 2014). A través del análisis de un problema en la enseñanza de las funciones se describen sus cualidades y se lleva a cabo la elaboración de secuencias didácticas para octavo básico basada en la habilidad de modelar con el fin de aportar en la formación docente y prácticas tanto progresivas como profesionales.

3.5 Población

La población de este estudio se encuentra conformada por estudiantes de octavo año básico específicamente de la asignatura de matemática.

Una población es un conjunto de casos o individuos que concuerdan con una serie de características que el investigador establece con la finalidad de delimitar los parámetros muestrales (Hernández et al., 2014).

.

3.6 Variables

En esta investigación, las variables en estudio corresponden a la enseñanza utilizando los diversos registros semióticos, el uso de una secuencia didáctica y el aprendizaje significativo de los estudiantes.

Variable es una propiedad que al variar puede ser susceptible de medirse u observarse; de modo que cualquier característica, propiedad o cualidad que presenta un fenómeno que varía puede ser medido o evaluado (Hernández et al., 2014).

3.6.1 Variables en estudio definición conceptual y operacional.

Variable	Definición conceptual	Definición operacional
Enseñanza utilizando diversos registros semióticos	Según Testa (2008) se puede entender por un sistema de representación semiótica como un sistema de signos que tiene como función principal la de comunicar y específicamente en matemáticas, las representaciones cumplen la función de favorecer el entendimiento.	Mediante un test de contenido se podrá conocer la incidencia del modelamiento y las representaciones semióticas de Duval en las funciones, de tipo algebraica, gráfica y de tabla en estudiantes de octavo básico.
Aprendizaje significativo de los estudiantes	David Ausubel, Joseph Novak y Helen Hanesian, especialistas en psicología de la educación en la Universidad de Cornell, han diseñado la teoría del aprendizaje significativo, el primer modelo sistemático de aprendizaje cognitivo, según la cual para aprender es necesario relacionar los nuevos aprendizajes a partir de las ideas previas del alumno (Aznar, Giménez, Fanlo, Escanero, s.f).	Se medirá en el test de contenido, evidenciando si el estudiante resultó beneficiado con esta propuesta generando aprendizaje significativo.
Secuencias didácticas	Moreira (2012) define secuencia didáctica como secuencias de enseñanzas potencialmente facilitadoras de aprendizaje significativo, de temas específicos, conocimientos conceptuales o procedimentales, las que estimulan la investigación aplicada en la enseñanza diaria de las clases.	Se elabora las secuencias didácticas basadas en la modelación matemática utilizando diversos tipos de registros semióticos en el contenido de funciones.

3.7 Instrumentos de validación

En el marco de un enfoque cualitativo, se elaboran instrumentos de validación que permiten realizar la secuencia didáctica, junto a ella se crea un test de contenidos para conocer el aprendizaje logrado por los estudiantes al final de la aplicación de esta secuencia. Las preguntas serán en base a los objetivos de aprendizajes propuestos por el MINEDUC para el nivel de octavo año en la unidad de álgebra y funciones. Por lo que se realiza la tabla de especificación con un ítem donde se agregan los contenidos e indicadores que se evaluará, los que se van a dividir entre las categorías de: conocimiento, aplicación y razonamiento.

Además, se ha validado una de las secuencias didácticas con expertos en el extranjero, que se detalla en unos puntos más adelante.

3.7.1 Tabla de validación para la evaluación

Contenido		**Conocimiento**	**Aplicación**	**Razonamiento**	**%**
Proporcionalidad directa	Relacionan variables que representan una proporcionalidad.		1		16,7%
	Identifican en tabla de valores la constante de proporcionalidad.	2a	2b	2c	
Plano cartesiano	Ubican pares de puntos en el plano cartesiano		4		8,2%
Concepto de función	Representan funciones a través de metáforas de máquinas.			6	41,7%
	Representan funciones a través de diagrama sagital.		3		
	Determinan dominio, recorrido y codominio de una función a través de diagrama sagital.	5			
Función lineal y afín	Elaboran tablas y gráficos correspondientes a funciones lineales y afines.		11a		16,7%
	Diferencian funciones lineales de las funciones afines.	11b			
	Resuelven problemas de la vida cotidiana utilizando funciones.		8		
Pendiente y coeficiente de posición	Determinan la pendiente y el coeficiente de posición de una función a través del gráfico.	12			16,7%
	Identifican en gráficos el tipo de pendiente (creciente y decreciente).		9		

3.7.2 Instrumentos de evaluación

Evaluación diagnóstica

Nombre	
Curso	
Fecha	

Exigencias	**60%**	**Nota**
Puntaje ideal	62	
Puntaje de aprobación	37	
Puntaje obtenido		
Tiempo	80min	

Objetivos
Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: - Utilizando tablas. - Usando metáforas de máquinas. - Estableciendo reglas entre x e y. - Representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn). Mostrar que comprenden la función afín: - Generalizándola como la suma de una constante con una función lineal. - Utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.
Instrucciones
- Lea atentamente cada enunciado y responda. - Deje registrado el desarrollo de los cálculos correspondientes.

1. Identifica cuál de las siguientes tablas representan una relación de proporcionalidad directa. (4 pts)

x	y
2	6
3	9
4	12
5	15

x	y
1	4
2	3
3	2
4	1

x	y
1	18
2	9
3	6
6	3

x	y
6	3
5	6
4	9
3	12

Justifique su respuesta:

____

____

2. En una construcción un trabajador pinta una superficie de 42 m^2 con 4 litros de pintura. (4 pts)

Superficie (m^2)	**Pintura (lts)**
	1
21	2
	3,5
42	4
57,75	

a) ¿Qué tipo de relación de proporcionalidad es? Fundamenta

____

b) Completa la tabla con otros pares de valores.

c) ¿Qué sucede con la cantidad de pintura al aumentar la superficie a pintar?

____

3. Representa en un diagrama sagital las siguientes funciones. (4 pts)

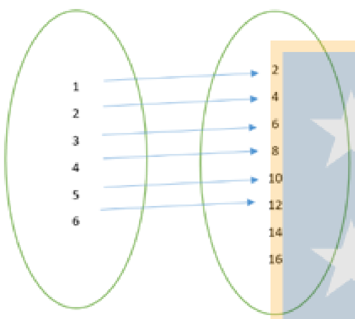
a) La función que relaciona el nombre de cada miembro de tu familia con su edad.

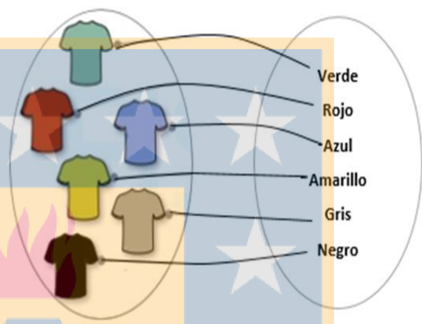
b) La función que asigna a cada número natural menor que 6 su doble.

4. Realiza un plano cartesiano en la hoja de cuadernillo y ubica los siguientes pares ordenados. (5 pts)

A (2,3), B (-1,2), C (4,1), D (1,7), E (3,-2), F (9,0), G (-6,3), H (2,-8), I (0,10), J (-3,-7)

5. Observa cada diagrama e indica su dominio, codominio y recorrido. (6 pts)





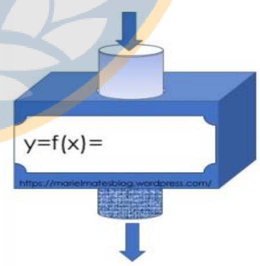
Dominio: ____________________________ Dominio: ____________________________

Codominio: ___________________________ Codominio: __________________________

Recorrido: ____________________________ Recorrido: ___________________________

6. Resuelva la siguiente situación utilizando la metáfora de la máquina y completa la tabla de valores que le corresponde: (6 pts)

La madre de Camila pronto estará de cumpleaños y junto a su hermana le realizarán una fiesta sorpresa. Su padre se hará cargo de la cena y ellas de las gaseosas, para ello necesitan 6 litros de bebida y cada litro tiene un valor de $890, además el costo por envase es de $250.



x	y

- ¿Cuál es la función que representa la situación planteada?

- ¿Cuánto gastará en comprar 3 litros de bebida?, ¿cuánto gastará en total?

7. Construya la tabla de valores de la siguiente situación y realiza una gráfica con los datos obtenidos. (6 pts)

a) Si el kilo de naranjas cuesta $350, ¿Cuánto costarán 5 kg.? ¿Cuánto costarán 8 kg.? ¿Cuánto costarán 9 kg.? ¿Cuánto costarán 12 kg.?

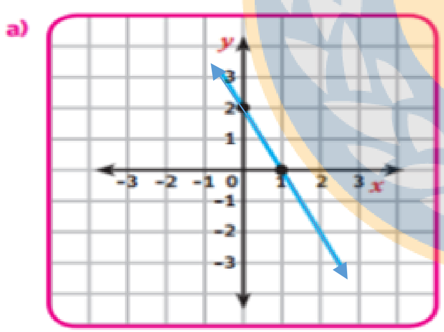
8. Resuelve el siguiente problema: (7 pts)

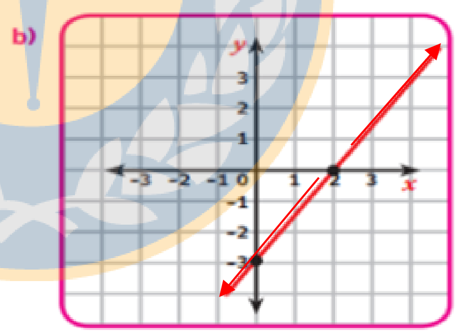
Una ducha de 10 minutos consume 200 litros de agua, según datos de la OMS, organización que recomienda gastar 150% menos.

La cantidad de agua que se gasta en una ducha está dada por la función f(x) = 20x donde x es el tiempo que dura la ducha y f(x) es la cantidad de litros gastados.

a) Si Pedro se demora 6 minutos ¿Cuánta agua gasta?
b) Si Catalina se baña todos los días 8 minutos ¿Cuánto gasta en un mes?
c) Alfredo gastó 350 litros ¿Cuánto tiempo se bañó?
d) Si Flash se baña en 90 segundos ¿Cuál es su consumo de agua?
e) Encontrar f (2), f (7) y f (12)

9. ¿Cuál es la pendiente de las siguientes rectas? Escribe el tipo de pendiente (creciente o decreciente) (6 pts)





10. Analiza cada situación de proporcionalidad directa y escríbela como una función lineal. (3 pts)

a) Imprimir una cantidad x de libros tiene un costo de $7500 por unidad.	b) Un maestro pone 48 ladrillos en una hora y siempre trabaja al mismo ritmo.	c) Camila trabaja de mesera y cobra $5000 la hora.

11. Completa las tablas para: (8 pts)

$f(x) = 3x$

X	Y
1	3
2	
3	9
4	

$f(x) = 3x + 2$

X	Y
1	
2	8
3	11
4	

a) Representa en un plano cartesiano ambas funciones.

b) ¿Qué nombre recibe cada función? Fundamenta

____

____

12. Determine la pendiente y el coeficiente de posición del techo de la casa y guíese por el plano cartesiano. (3 pts)

Evaluación de contenido

Nombre	
Curso	
Fecha	

Exigencias	60%	Nota
Puntaje ideal	62	
Puntaje de aprobación	37	
Puntaje obtenido		
Tiempo	80min	

Objetivos
Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: - Utilizando tablas. - Usando metáforas de máquinas. - Estableciendo reglas entre x e y. - Representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn). Mostrar que comprenden la función afín: - Generalizándola como la suma de una constante con una función lineal. - Utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.
Instrucciones:
- Lea atentamente cada enunciado y responda. - Deje registrado el desarrollo de los cálculos correspondientes.

1. Identifica cuál de las siguientes tablas representan una relación de proporcionalidad directa. (4 pts)

x	y
1	25
2	50
3	75
4	100

x	y
2	4
3	5
4	7
5	9

x	y
1	5
2	10
3	15
4	20

x	y
1	12
2	9
3	6
4	3

Justifique su respuesta:

___

___

2. En una construcción un trabajador pinta una superficie de 42 m2 con 4 litros de pintura. (4 pts)

Superficie (m2)	**Pintura (lts)**
	1
21	2
	3,5
42	4
57,75	

d) ¿Qué tipo de relación de proporcionalidad es? Fundamenta

____

e) Completa la tabla con otros pares de valores.

f) ¿Qué sucede con la cantidad de pintura al aumentar la superficie a pintar?

____

3. Representa en un diagrama sagital las siguientes funciones. (4 pts)

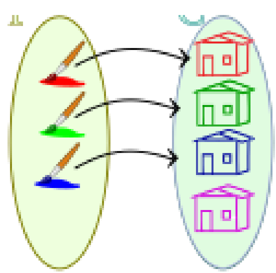
a) La función que asigna a cada número natural menor que 6 su doble.

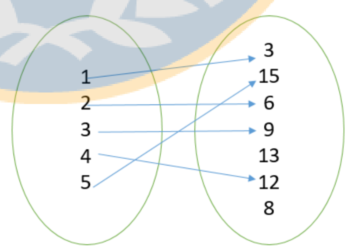
b) La función que asigna a cada figura geométrica () con el número de lados superiores a 5.

4. Realiza un plano cartesiano en la hoja de cuadernillo y ubica los siguientes pares ordenados. (5 pts)

A (2,3), B (-1,2), C (4,1), D (1,7), E (3,-2), F (9,0), G (-6,3), H (2,-8), I (0,10), J (-3,-7)

5. Observa cada diagrama e indica su dominio, codominio y recorrido. (6 pts)





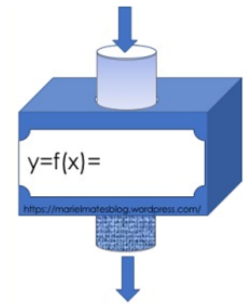
Dominio: ______________________________ Dominio: ______________________________

Codominio: ______________________________ Codominio: ______________________________

Recorrido: ______________________________ Recorrido: ______________________________

6. Resuelva la siguiente situación utilizando la metáfora de la máquina y completa la tabla de valores que le corresponde: (6 pts)

Javier pronto saldrá de octavo básico y junto a su familia realizarán una fiesta. Su padre se hará cargo de la cena y ellas de las gaseosas, para ello necesitan 8 litros de bebida y cada litro tiene un valor de $995, además el costo por envase es de $290.



x	y

- ¿Cuál es la función que representa la situación planteada?

- ¿Cuánto gastará en comprar 3 litros de bebida?, ¿cuánto gastará en total?

7. Construya la tabla de valores de la siguiente situación y realiza una gráfica con los datos obtenidos.

b) Si el kilo de naranjas cuesta $450, ¿Cuánto costarán 6 kg? ¿Cuánto costarán 9 kg? ¿Cuánto costarán 11 kg? ¿Cuánto costarán 15 kg? (6 pts)

8. Resuelve el siguiente problema: (7 pts)

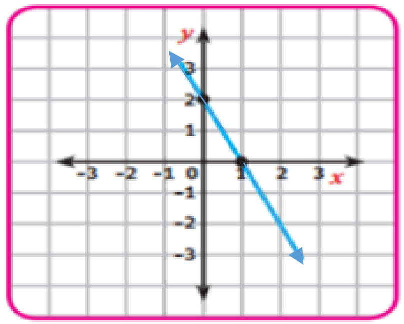
Una ducha de 30 minutos consume 600 litros de agua, según datos de la OMS, organización que recomienda gastar 150% menos.

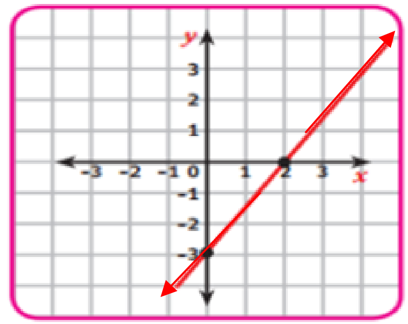
La cantidad de agua que se gasta en una ducha está dada por la función f(x) = 20x donde x es el tiempo que dura la ducha y f(x) es la cantidad de litros gastados.

a) Si Pedro se demora 8 minutos ¿Cuánta agua gasta?
b) Si Catalina se baña todos los días 10 minutos ¿Cuánto gasta en un mes?
c) Alfredo gastó 270 litros ¿Cuánto tiempo se bañó?

d) Si Flash se baña en 90 segundos ¿Cuál es su consumo de agua?
e) Encontrar f (2), f (7) y f (12)

9. ¿Cuál es la pendiente de las siguientes rectas? Escribe el tipo de pendiente (creciente o decreciente) (6 pts)

a)


b)


10. Analiza cada situación de proporcionalidad directa y escríbela como una función lineal. (3 pts)

a) Imprimir una cantidad x de libros tiene un costo de $6200 por unidad.	b) Un maestro pone 38 ladrillos en una hora y siempre trabaja al mismo ritmo.	c) Camila trabaja de mesera y cobra $5300 la hora.

11. Completa las tablas para: (8 pts)

f(x) = 8x

X	Y
1	
2	
3	
4	

f(x) = 8x + 4

X	Y
1	
2	
3	
4	

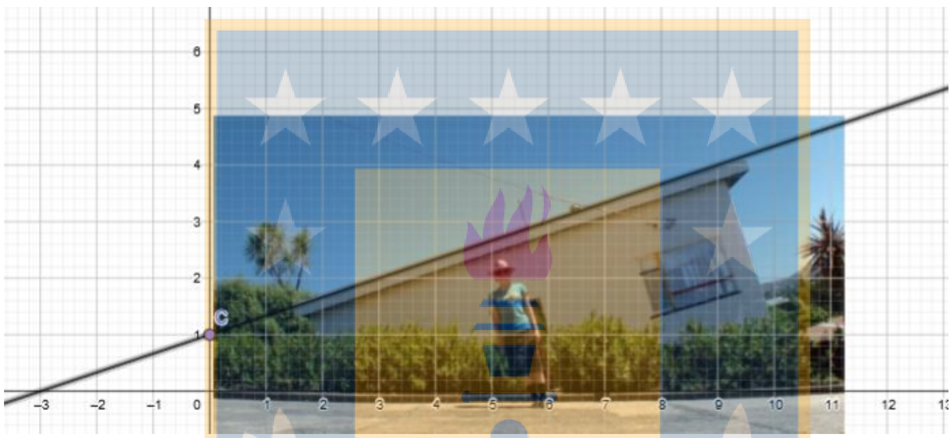
a) Representa en un plano cartesiano ambas funciones.

b) ¿Qué nombre recibe cada función? Fundamenta

____

____

12. Determine la pendiente y el coeficiente de posición del techo de la casa y guíese por el plano cartesiano. (3 pts)



3.7.3 Recolección de información

3.7.3.1 Intervenciones en Cuba

En el año 2019 la Universidad de las Ciencias Informáticas (UCI) ubicada en La Habana, Cuba, fue sede de la versión número 33 de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), cuya reunión es un encuentro anual de investigadores, profesores y estudiantes de licenciatura o posgrado interesados en la matemática educativa, convocado por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame).

El propósito del taller es la integración de conceptos y procedimientos matemáticos, dando énfasis a la modelación matemática. Las actividades permiten el análisis del comportamiento de las funciones, no como correspondencia entre dos valores sino como la visualización de una situación de cambio, esto permite desarrollar el pensamiento matemático mediante actividades prácticas. Las secuencias didácticas tienen relación con el modelamiento matemático y la antropometría, los asistentes extraen información midiendo partes de su cuerpo con compás áureo y cinta de medir para analizar el comportamiento de las relaciones y variables en estudio.

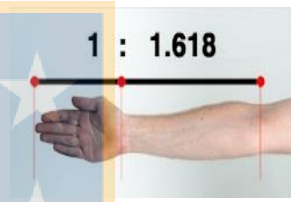
A continuación se muestran fotografías tomadas en el transcurso del taller y el detalle de las actividades que se llevaron a cabo.

Las proporciones de nuestro cuerpo

Marcus Vitruvius Pollio, arquitecto romano (Siglo I a.C.), destacaba la similitud entre el cuerpo humano y un edificio perfecto: "La Naturaleza ha diseñado el cuerpo humano de forma que sus miembros estén proporcionados a su estructura como un todo". Está ampliamente aceptado que las proporciones del cuerpo humano siguen la razón áurea.
Este taller tiene como objetivo la integración de conceptos y procedimientos matemáticos, dando énfasis a la modelación matemática, que es uno de los propósitos del pensamiento variacional.

Actividad 1: largo de la mano y el largo del antebrazo. ¿Existirá alguna relación?
Para realizar la actividad necesitamos los siguientes materiales:

- Compás áureo
- Regla
- Lápiz
- Papel milimetrado
- Cinta de medir



A continuación se presentan las instrucciones que debes seguir para realizar la actividad:

- Ponte de pie para facilitar el paso siguiente.
- Se han tomado las siguientes muestras, con la ayuda de una cinta mide la mano y el antebrazo (por fuera) a 6 personas que tengas a tu alrededor.
- Completa el recuadro con las medidas obtenidas.

Largo (cm) mano (x)	11,7	10,6	12	14	6	9							
Largo (cm) antebrazo (y)	19	17	19	22	9,7	14,4							

- Con los datos obtenidos dibuja en el papel milimetrado el grafico de dispersión.
  Sugerencia: los valores de cada eje debe ser de 2 en 2.

Conjeturas:

____

____

- Traza la recta que mejor se ajusta a la dispersión de puntos en el gráfico.
- Observa tu gráfico y escribe de manera intuitiva la ecuación de la recta que dibujaste. (Recuerda que la pendiente **(m)** se obtiene dividiendo ***y*** por ***x*** **(m= y/x)** y que el coeficiente de posición es el punto donde corta el eje Y).

Ahora a buscar el modelo perfecto

- Completa la siguiente tabla con los valores que obtuviste al medir la mano y el antebrazo, es decir x e y respectivamente.

	X	Y	XY	X^2
	11,7	19	222,3	136,89
	10,6	17	180,2	112,36
	12	19	228	144
	14	22	308	196
	6	9,7	58,2	36
	9	14,4	129,6	81
$\sum$				

n : Cantidad de datos

$\sum xy$: Suma de datos de la columna **xy.**

$\sum x$: Suma de datos de la columna **x.**

$\sum y$: Suma de datos columna **y.**

$\sum x^2$ **: Suma de datos columna x^2**

$(\sum x)^2$: Suma de datos de la columna **x** elevado al cuadrado.

- A partir de los resultados encuentra la ecuación lineal de regresión entre x e y:

$$y = ax + b$$

- Para esto debemos encontrar primero el valor de **a** mediante la siguiente fórmula:

- Desarrolla aquí tus cálculos para determinar **a**.

$$a = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

- Luego debemos encontrar el valor de **b** a través de la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{b = \frac{\sum y - a\sum x}{n}}$$

- Desarrolla aquí tus cálculos para determinar **b.**

- Escribe aquí la ecuación de predicción

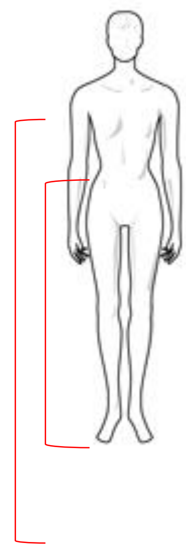
- Al finalizar responde la pregunta propuesta al comienzo de la actividad.

Largo de la mano y el largo del antebrazo. ¿Existirá alguna relación?

Las proporciones de nuestro cuerpo

Marcus Vitruvius Pollio, arquitecto romano (Siglo I a.C.), destacaba la similitud entre el cuerpo humano y un edificio perfecto: "La Naturaleza ha diseñado el cuerpo humano de forma que sus miembros estén proporcionados a su estructura como un todo". Está ampliamente aceptado que las proporciones del cuerpo humano siguen la razón áurea.
Este taller tiene como objetivo la integración de conceptos y procedimientos matemáticos, dando énfasis a la modelación matemática, que es uno de los propósitos del pensamiento variacional.

Actividad 2: altura desde el ombligo al suelo y estatura. ¿Existirá alguna relación?
Para realizar la actividad necesitamos los siguientes materiales:



- Compás áureo
- Regla
- Lápiz
- Papel milimetrado
- Cinta de medir

A continuación se presentan las instrucciones que debes seguir para realizar la actividad:

- Ponte de pie para facilitar el paso siguiente.
- Se han tomado las siguientes medidas a diferentes niños y adolescentes, midiendo la altura desde el ombligo al suelo y su estatura.
- Completa el siguiente recuadro con los datos de 6 personas más que tengas a tu alrededor.

Altura (cm) ombligo al suelo (x)	108	10 1	90	89	82	88						
Estatura (cm) (y)	177	16 4	15 0	14 9	13 9	14 8						

- Con los datos obtenidos dibuja en el papel milimetrado el grafico de dispersión. *Sugerencia: los valores de cada eje debe ser de 2 en 2.*

Conjeturas:

____

____

- Traza la recta que mejor se ajusta a la dispersión de puntos en el gráfico.
- Observa tu gráfico y escribe de manera intuitiva la ecuación de la recta que dibujaste. (Recuerda que la pendiente **(m)** se obtiene dividiendo ***y*** por ***x*** **(m= y/x)** y que el coeficiente de posición es el punto donde corta el eje Y).

Ahora a buscar el modelo perfecto

- Completa la siguiente tabla con los valores que obtuviste al medir desde el ombligo al suelo y la estatura, es decir x e y respectivamente.

	X	Y	XY	X^2
	108	177	19116	11664
	101	164	16564	10201
	90	150	13500	8100
	89	149	13261	7921
	82	139	11398	6724
	88	148	13024	7744
$\sum$				

n : Cantidad de datos

$\sum xy$: Suma de datos de la columna **xy.**

$\sum x$: Suma de datos de la columna **x.**

$\sum y$: Suma de datos columna **y.**

$\sum x^2$ **: Suma de datos columna x^2**

$(\sum x)^2$: Suma de datos de la columna **x** elevado al cuadrado.

- A partir de los resultados encuentra la ecuación lineal de regresión entre x e y:

$$y = ax + b$$

- Para esto debemos encontrar primero el valor de **a** mediante la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{n \sum xy - \sum x \sum y}}{\boldsymbol{n \sum x^2 - (\sum x)^2}}$$

- Desarrolla aquí tus cálculos para determinar **a**.

- Luego debemos encontrar el valor de **b** a través de la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{\sum y - a \sum x}}{\boldsymbol{n}}$$

- Desarrolla aquí tus cálculos para determinar **b.**

- Escribe aquí la ecuación de predicción

- Al finalizar responde la pregunta propuesta al comienzo de la actividad.

Altura desde el ombligo al suelo y estatura. ¿Existirá alguna relación?

3.7.3.2 Diseño secuencias didácticas

Para la construcción de esta secuencia se utilizan actividades ligadas a situaciones cotidianas y al uso de las TICs (Tecnologías de Información y Comunicación). Se emplean softwares educativos para facilitar la comprensión de las funciones. Hacer uso de los recursos tecnológicos tiene un papel importante en la actualidad, ya que la tecnología ha avanzado bastante estas últimas décadas. En el estudio de la funciones, según Roldán (2013) para la elaboración de las secuencias didácticas se debe tener en consideración los objetivos de aprendizaje, indicadores de logro, conocimientos previos, habilidades, contenido y tipos de registros. Estos fueron revisados desde el programa de estudio de matemáticas en octavo año básico. Posteriormente se organizaron las clases, que son en total seis intervenciones.

Los siguientes objetivos de aprendizaje correspondientes al contenido de funciones se encuentran en la unidad dos del programa de estudio de octavo básico son los utilizados en el diseño de las secuencias didácticas: hacer uso de calculadoras graficadoras, software como hojas de cálculo y trazadores gráficos que ayudan a desarrollar una comprensión más profunda del concepto, a la vez que facilitan la elaboración de conjeturas, la verificación de generalizaciones y la resolución de problemas de aplicación en otros campos como los ya mencionados.

Objetivos	Indicadores
OA7: Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: - Utilizando tablas. - Usando metáforas de máquinas. - Estableciendo reglas entre x e y. - Representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de venn), de manera manual y/o con software educativo.	- Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente ("constante de proporcionalidad"). - Descubren el concepto de función mediante la relación de proporcionalidad directa. - Descubren que la inclinación (pendiente) de la gráfica depende de la constante de la proporcionalidad.

	- Representan la noción de función de manera concreta (utilizando metáforas de máquinas), pictórica o simbólica. - Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales $f(x) = a \bullet x$ ($y = a \cdot x$). - Representan la linealidad $f(kx) = kf(x)$ y $f(x1 + x2) = f(x1) + f(x2)$ en tablas y gráficos. - Identifican la pendiente del gráfico $\Delta y / \Delta x$ de la función $f(x) = a \bullet x$ con el factor a. - Verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación $f(x) = a \bullet x$. - Modelan situaciones de la vida cotidiana o de ciencias con funciones lineales.
OA10: Mostrar que comprenden la función afín: - Generalizándola como la suma de una constante con una función lineal. - Trasladando funciones lineales en el plano cartesiano. - Determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera	- Representan, completan y corrigen tablas y gráficos pertenecientes a cambios con una base fija y tasa de cambio constante. - Elaboran, basados en los gráficos, la ecuación de la función afín: $f(x) = a \bullet x + b$. - Determinan las regiones en el plano cartesiano cuyos puntos p(x,y)

gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo. - Relacionándola con el interés simple. - Utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.	representan soluciones (x,y) de las inecuaciones: $y < a \bullet x + b$ o $y > a \bullet x + b$. - Diferencian modelos afines, lineales y de proporcionalidad inversa. - Modelan situaciones de la vida diaria o de ciencias con funciones afines. - Identifican, en la ecuación funcional, el factor a con la pendiente $\Delta y/\Delta x$ de la recta y el sumando b con el segmento entre el punto de intersección del gráfico con el eje vertical y el origen o (0,0). - Elaboran gráficos de funciones afines a y b dadas o con dos puntos dados y verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación: $f(x) = a \bullet x + b$. - Resuelven problemas de la vida diaria o de ciencias que involucran el cambio constante expresado mediante ecuaciones recursivas de la forma $f(x + 1) - f(x) = c$.

En el siguiente cuadro se muestran los objetivos, indicadores y contenidos correspondientes a cada una de las secuencias didácticas:

Clase	Objetivo de aprendizaje	Indicadores	Contenidos
Clase 1	Relacionar proporcionalidad con el concepto de función.	-Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente (“constante de proporcionalidad”). - Descubren el concepto de función mediante la relación de proporcionalidad directa.	Proporcionalidad y concepto de Función.
Clase 2	Representar la noción de función lineal de manera concreta, pictórica o simbólica.	- Representan la noción de función de manera concreta (utilizando metáforas de máquinas), pictórica o simbólica. -Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales $f(x)= a \bullet x$ $(y = a \bullet x)$.	Concepto de función lineal.
Clase 3	Representar función lineal a través de la recta y determinar pendiente.	- Representan la linealidad $f(kx) = kf(x)$ y $f(x1 + x2) = f(x1) + f(x2)$ en tablas y gráficos. - Identifican la pendiente del gráfico Δy de la función $f(x) = a \bullet x$ con Δx el factor a. -Modelan situaciones de la vida cotidiana o de ciencias con funciones lineales.	Pendiente (creciente y decreciente).
Clase 4	Modelar situaciones de la vida cotidiana con función afín.	-Identifican la pendiente del gráfico Δy de la función $f(x) = a \bullet x$ con Δx el factor a. - Modelan situaciones de la vida cotidiana o de ciencias con funciones lineales y afines.	Función afín, Pendiente y Coeficiente de posición.

Clase 5	Modelar situaciones de la vida cotidiana con función afín.	-Identifican la pendiente del gráfico Δy de la función f(x) = a • x con Δx el factor a. --Modelan situaciones de la vida cotidiana o de ciencias con funciones lineales y afines.	Función lineal, Función afín, Pendiente y Coeficiente de posición.
Clase 6	Desarrollar evaluación de función lineal y afín.	-Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente ("constante de proporcionalidad"). - Descubren el concepto de función mediante la relación de proporcionalidad directa. - Representan la noción de función de manera concreta (utilizando metáforas de máquinas), pictórica o simbólica. -Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales f(x)= a • x (y = a • x). -Representan la linealidad f (kx) = kf(x) y f(x1 + x2) = f(x1) + f(x2) en tablas y gráficos. - Identifican la pendiente del gráfico Δy de la función f(x) = a • x con Δx el factor a. -Modelan situaciones de la vida cotidiana o de ciencias con funciones lineales.	Función lineal y afín.

CAPÍTULO IV

Secuencias didácticas y materiales

<table>
<tr><th colspan="4">Planificación de la clase 1</th></tr>
<tr><td>Asignatura: Matemáticas</td><td colspan="2">Curso: Octavo</td><td>Tiempo: 90 minutos</td></tr>
<tr><td>Objetivo de Aprendizaje:
Relacionar proporcionalidad directa con el concepto de función lineal.</td><td colspan="2">Habilidades:
Utilizar sus propias palabras, gráficos y símbolos matemáticos para presentar sus ideas o soluciones.</td><td>Conocimientos previos:
• Operaciones de números enteros, decimales y fracciones.
• Variaciones porcentuales.
• Reducción de expresiones algebraicas.
• Concepto de proporción directa.
• Ecuaciones e inecuaciones con números enteros.</td></tr>
<tr><td>Contenido</td><td>Momentos de la clase</td><td>Indicadores</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td>Proporcionalidad.

Proporcionalidad directa.

Constante de proporcionalidad.

Concepto de Función lineal.</td><td>Inicio:
- Actividad 1: Desarrollan evaluación diagnóstica para conocer la noción intuitiva que los/as estudiantes tienen acerca de las funciones.
Posteriormente se da a conocer el objetivo de la clase: Relacionar la proporcionalidad directa con el concepto de función lineal.

Desarrollo:

Actividad 2: Los estudiantes observan un video sobre la contaminación del agua: https://www.youtube.com/watch?v=S_SaCPa1Zkg.
En base al video los estudiantes identifican situaciones que representen una relación de proporcionalidad,</td><td>• Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente (“constante de proporcionalidad”).

• Descubren el concepto de función mediante la relación de proporcionalidad directa.</td><td>20 min

¿Los estudiantes reconocen distintas relaciones de variables a partir del video observado?</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>para ello el/la docente les da un ejemplo: “A mayor contaminación, mayor muerte de animales”. Se comenta y registran situaciones en el pizarrón que representen este tipo de relación.

<table>
<tr><th>Posibles respuestas</th><th>Errores</th></tr>
<tr><td>- A mayor plástico en el mar, mayor muerte de peces.
- A mayor petróleo derramado en el mar, mayor muerte de fauna y flora marina.
- A mayor limpieza, menor contaminación.
- Hay muchas muertes.</td><td>- Los estudiantes identifican solo una variable, ejemplo: hay muchas muertes. No relacionan cual es la causa.</td></tr>
</table>
</td>
<td>Tipos de registros
• Medios visuales
• Lenguaje algebraico
• Tablas
• Gráficos</td>
<td>15 min</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Al terminar de comentar el video se clasifican las respuestas de los estudiantes, entre dos tipos de proporción.
<table>
<tr><th>Directa</th><th>Inversa</th></tr>
<tr>
<td>- A mayor plástico en el mar, mayor muerte de peces.
- A mayor petróleo derramado en el mar, mayor muerte de fauna y flora marina.</td>
<td>- A mayor limpieza, menor contaminación.</td>
</tr>
</table>
El/la docente explica la diferencia entre cada relación descrita anteriormente, detallando que las variables pueden aumentar o disminuir (directa) y que en otras situaciones se presenta un aumento en una de las variables y en la otra una disminución (inversa).

Se da a conocer formalmente el concepto de variable (tipos de variables, como se relacionan y ejemplos)

- Actividad 3: se muestra una tabla en el pizarrón elaborada con material concreto (jugadores, camisetas, botellas y vasos de goma eva; tablas y gráficos en cartulina) en la cual se relacionan dos variables, en la primera tabla el número de jugadores y camisetas oficiales con cambio y en la otra tabla se relacionan las botellas de agua con los vasos que se pueden llenar.
</td>
<td></td>
<td>
¿Los/as estudiantes tienen conocimiento de que es una proporcionalidad?

¿Los/as estudiantes conocen los tipos de proporcionalidad?

¿Los/as estudiantes comprenden qué sucede en una proporcionalidad directa?

¿Los/as estudiantes comprenden qué sucede en una proporcionalidad inversa?

¿Los estudiantes logran diferenciar entre la proporcionalidad directa y la proporcionalidad inversa?
</td>
</tr>
</table>

El/la docente especifica cómo se relacionan las variables que le corresponden a cada situación.
Los/as estudiantes identifican el tipo de proporcionalidad de cada situación.

Relación de las variables	**Situación 1**	**Situación 2**
Dependiente	Número de jugadores	Botellas
Independiente	Camisetas oficiales y de cambio	Vasos

A continuación se detallan las situaciones mediante tablas de proporcionalidad:

1. El número de jugadores y la cantidad de camisetas oficiales y de cambio.

Tabla de proporcionalidad				
Número de Jugadores (x)				
Camisetas oficiales y de recambio (y)				

2. Una botella de agua con respecto a la cantidad de vasos que esta puede ser llenada.

35 min

¿Señalan adecuadamente el tipo proporcionalidad en cada situación planteada?

Tabla de proporcionalidad				
Botellas de agua (x)				
Vasos (y)				

- Los/as estudiantes identifican que las situaciones anteriormente nombradas corresponden a una proporcionalidad directa. A partir de esto deben completar ambas tablas de datos, como se muestra a continuación:

Tabla de proporcionalidad				
Número de Jugadores (x)	1	2	3	4
Camisetas oficiales y de cambio (y)	2	4	6	8

¿Los/as estudiantes completan adecuadamente tablas?

¿Los/as estudiantes realizan adecuadamente los gráficos?

Tabla de proporcionalidad				
Botellas de agua (x)	1	2	3	4
Vasos (y)	6	12	18	24

Por ejemplo:

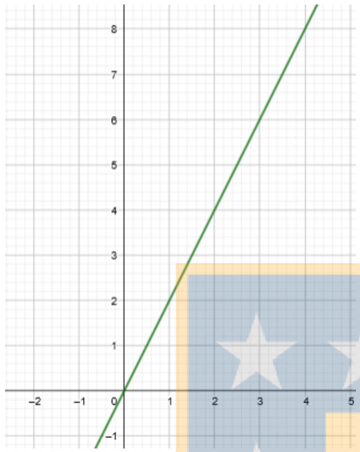
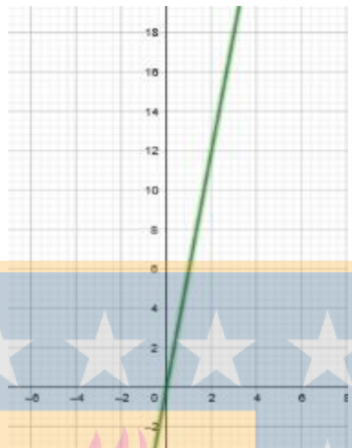
Se explica que al estar en una situación de proporcionalidad directa, existe una *constante de proporcionalidad*, la cual se obtiene dividiendo la variable dependiente por la variable independiente (m=y/x). Con las situaciones anteriormente vistas analizan y encuentran la constante de proporcionalidad.

En la situación uno, la constante de proporcionalidad es : 2

En la situación dos, la constante de proporcionalidad es: 6

- Actividad 4: A partir de los datos de la tabla los/as estudiantes ordenan los valores en un gráfico. El/la docente explica cómo ubicar los datos de la tabla en el

¿Determinan la constante de proporcionalidad para cada situación?

	plano cartesiano. En el eje de las abscisas (horizontal) van ubicados los valores de x, y en el eje de las ordenadas (vertical) van ubicados los valores de y. Al terminar de ubicar los puntos, deben unirlos mediante una recta.  Primera situación  Segunda situación		

En conjunto con los estudiantes se retoma el concepto de constante de proporcionalidad relacionándolo con el concepto de función.

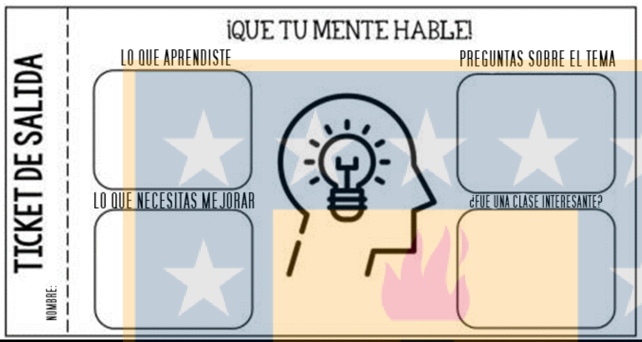
La constante de proporcionalidad se puede describir con la ecuación y = mx, donde x e y representan las variables relacionadas y *m* es la constante de proporcionalidad. A una relación que se puede escribir de esta forma se le llama *función lineal*. Algebraicamente se escribe de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{f(x) = y = mx.}$$

- En la siguiente tabla se muestra la constante y la función que le corresponde a cada situación.

	Primera situación	Segunda situación
Constante de proporcionalidad m= y/x	y/x=2	y/x=6
Función f(x) =mx	y= 2x	y=6x

¿Comprenden la relación de la constante de proporcionalidad con el concepto de función?

	Cierre: • El/la docente realiza el cierre cognitivo de la clase, sintetizando los conceptos trabajados, a través de un Power Point. • Se les entrega una guía de trabajo con los conceptos formales de proporcionalidad directa y función lineal. • Responden ticket de salida con los contenidos vistos en clase. 		20 min ¿Responden ticket de salida?

Guía de trabajo clase 1

"Relación de proporcionalidad directa y función"

Nombre:		Fecha:	

Objetivo: Relacionar proporcionalidad directa con el concepto de función.

Dos variables tienen una relación de proporcionalidad directa cuando el cociente entre cada par de sus valores es constante. A esta constante se le llama constante de proporcionalidad.

Esta relación puede ser descrita por la ecuación

$$y = mx$$

Donde x e y representan las variables relacionadas y el valor m es la constante de proporcionalidad.

A una relación que se puede escribir de esta forma se le llama función lineal, que puede ser escrita como:

$$f(x) = y = mx$$

Variable: representa a aquello que varía o que está sujeto a algún tipo de cambio.
Variable independiente: es un valor que no depende de ninguna otra variable.
Variable dependiente: sus valores dependen de la variable independiente.

Recuerda que en la proporcionalidad directa:

- Si una variable aumenta, la otra también aumenta.
- Si una variable disminuye, la otra también disminuye

Actividades

Resuelve en tu cuaderno los problemas que aparecen a continuación:

1. Realiza una tabla de datos, escribe la función que le corresponde y luego grafica las siguientes situaciones:
   - Si 1 kg de peras cuesta \$600. ¿Cuánto me cuestan 3 kg?
   - Dos video juegos tienen un valor de \$46.990, ¿cuál será el valor de 5 video juegos?

2. Completa la tabla de datos, determina la constante de proporcionalidad y la función correspondiente de cada una de las situaciones representadas.

Lado cuadrado	Perímetro
1	4
2	
3	12
	16

Función:

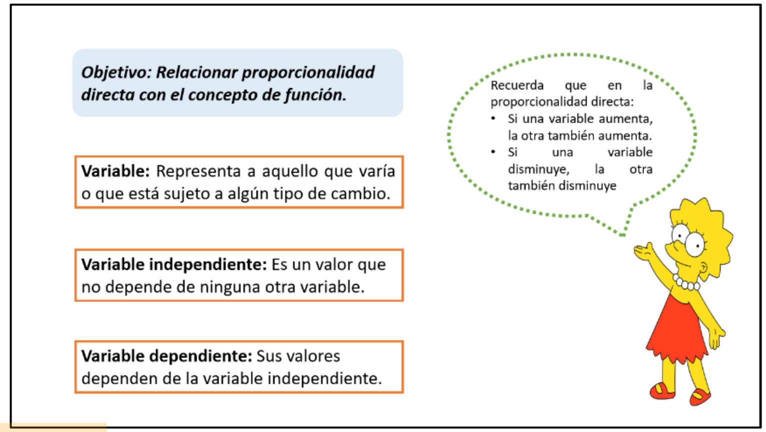
Paletas	Dinero ($)
1	350
2	
3	
4	1400

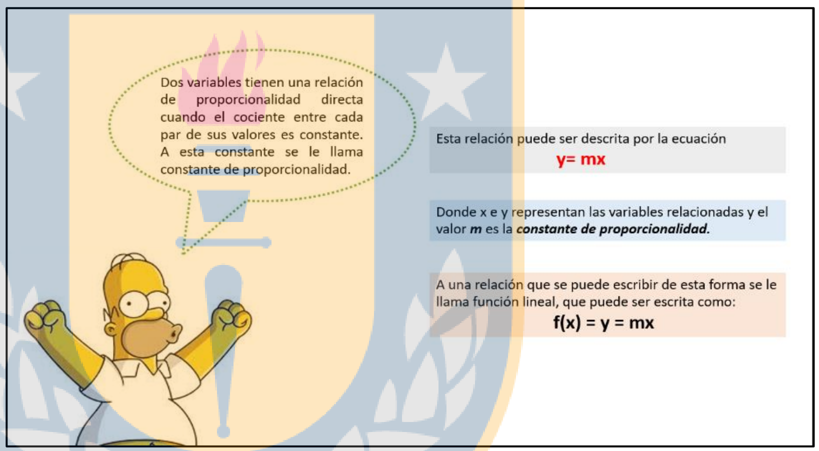
Función:

Bencina (lt)	Km
	13
2	26
3	
4	52

Función:

Power Point cierre clase 1





<table>
<tr><th colspan="4">Planificación de la clase 2</th></tr>
<tr><td colspan="2">Asignatura: Matemáticas</td><td>Curso: Octavo</td><td>Tiempo: 90 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo de Aprendizaje:
Representar la noción de función lineal de manera concreta, pictórica o simbólica.</td><td>Habilidades:
Utilizar sus propias palabras, gráficos y símbolos matemáticos para presentar sus ideas o soluciones.</td><td>Conocimientos previos:
• Operaciones de números enteros, decimales y fracciones.
• Variaciones porcentuales.
• Reducción de expresiones algebraicas.
• Concepto de proporción directa.
• Ecuaciones e inecuaciones con números enteros.</td></tr>
<tr><th>Contenido</th><th>Momentos de la clase</th><th>Indicadores</th><th>Evaluación</th></tr>
<tr><td>Proporcionalidad
Concepto de Función</td><td>Inicio:
Se da a conocer el objetivo de la clase: Representar la noción de función lineal de manera concreta, pictórica o simbólica.
- Actividad 1: Se realizan preguntas a los/as estudiantes para activar sus conocimientos previos sobre proporcionalidad.
1. ¿Qué sucede en una proporcionalidad directa?
2. ¿Qué es una variable?
3. ¿Qué tipo de variables hay?, descríbelas
4. ¿Qué es una constante de proporcionalidad?
5. ¿Cómo se obtiene la constante de proporcionalidad?
6. ¿Cómo se relaciona la constante de proporcionalidad con la función lineal?</td><td>• Representan la noción de función de manera concreta (utilizando metáforas de máquinas), pictórica o simbólica.
• Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales f(x)= a • x (y = a • x)</td><td>10 min
¿Los/as estudiantes responden adecuadamente cada una de las preguntas?</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Posibles respuestas y errores:

<table>
<tr><th>Posibles respuestas</th><th>Errores</th></tr>
<tr><td>1. Si una variable aumenta, la otra también aumenta. Si una variable disminuye, la otra también disminuye.
2. Es algo que varía o que está sujeta a un tipo de cambio.
3. Variable independiente y variable dependiente. La variable dependiente va a depender de la variable independiente. La variable independiente no depende de ninguna otra variable.
4. Un valor que se mantiene siempre constante.
5. Se obtiene dividiendo el valor de y por el valor de x.
6. Tenemos la relación y=mx, donde m es la constante de proporcionalidad, x e y son variables. Esta relación se puede escribir como f(x)= y= mx, la cual corresponde a una función lineal.</td>
<td>En la pregunta 3 la respuesta debe ser: cualitativa y cuantitativa.

En la pregunta 4 la respuesta debe ser: El cociente entre cada par de sus valores es constante, esta se llama constante de proporcionalidad.</td></tr>
</table>
</td>
<td>Tipos de registros
• Medios visuales
• Lenguaje algebraico
• Tablas
• Gráficos
• Diagrama sagital
• Metáfora de maquina</td>
<td>10 min

¿Los/as estudiantes observan la representación de la metáfora de la máquina?</td>
</tr>
</table>

A través de un Power Point se presentan las preguntas con las respuestas correctas.

- Actividad 2:

Los/as estudiantes observan una situación de la vida cotidiana representada por el/la docente a través de la metáfora de la máquina. Esta representación consiste en recrear la situación de un supermercado, se explica que a mayor compra de artículos, mayor cantidad de dinero se debe pagar. El ejemplo utilizado es la compra de jugos, los cuales tienen un precio de $200 c/u. Al pasar un jugo por la caja registradora, marcará el precio de cuyo jugo. Al pasar dos, aumentará el valor que se debe cancelar. Durante la recreación el/la docente pregunta qué es lo que está sucediendo al momento de ir pasando un mismo producto tras otro, los estudiantes deben reconocer qué ocurre y explicar por qué.

Posibles respuestas	Errores
-Ocurre una proporcionalidad -Entre más jugos más debo cancelar. -Mientras más jugos menos dinero. -Debo cancelar más dinero. -Hay una constante.	En la afirmación “mientras más jugos menos dinero”, se debe aclarar que mientras compro más jugos, más dinero se debe cancelar.

15 min

-Entre más dinero más jugos y viceversa.	

Desarrollo:

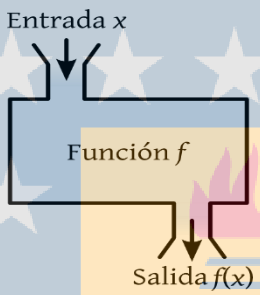
- Actividad 3:

Se explica el uso de la metáfora de la máquina la cual es una de las diversas representaciones de las funciones. En este tipo de representación se puede observar la transformación de un producto al entrar a la máquina.

-La entrada (x) es el valor que ingresa a la máquina

-La máquina representa la función (f)

-La salida es el valor final (f(x)).



La representación de la máquina se relaciona con la situación planteada anteriormente sobre la compra de productos en el supermercado, se les pregunta a los estudiantes cuál sería la función, por lo que deben obtener la constante de proporcionalidad. Para ello se les recuerda cómo obtener dicha constante: m=y/x, posterior a ello calculan y obtienen

¿Los/as estudiantes obtienen la función correspondiente a la compra?

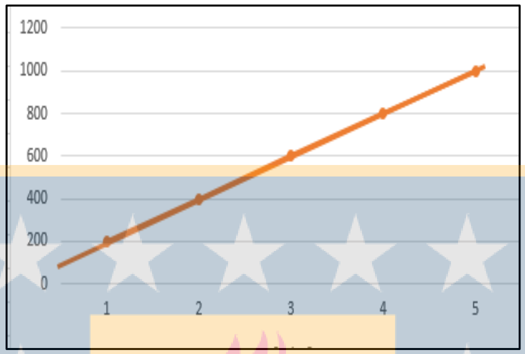
¿Los/as estudiantes calculan correctamente el valor de los productos?

¿Los/as estudiantes completan correctamente la tabla?

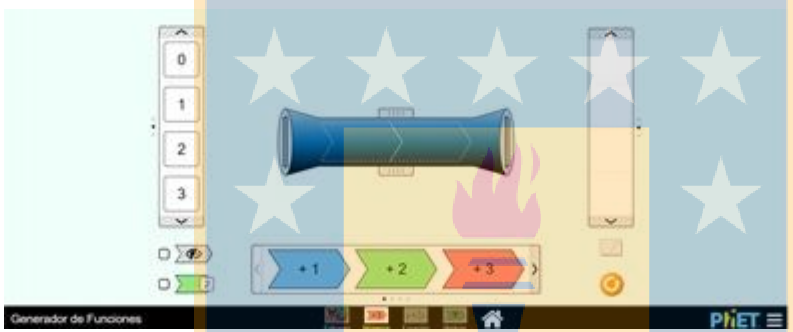
<table>
<tr>
<td></td>
<td>una constante de 200. Esto indica que la función que representa la situación es f(x)=200x

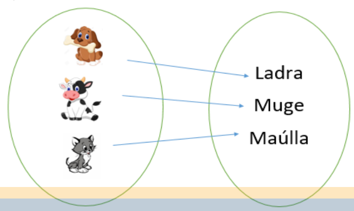
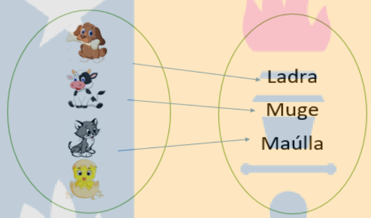
Al determinar la función los estudiantes calculan cuánto gastarán al comprar 3, 4 y 5 jugos, aquí se introduce el valor de entrada de cada situación (3, 4 y 5 respectivamente) en la máquina, la cual tiene una función de f(x)= 200x, obteniendo el valor final en cada situación ($600, $800 y $1000, respectivamente). Los estudiantes pasan a completar con los resultados la tabla que estará en el pizarrón.

<table>
<tr><th>Entrada</th><th>Máquina</th><th>Salida</th></tr>
<tr><td>1</td><td>200x</td><td>200</td></tr>
<tr><td>2</td><td>200x</td><td>400</td></tr>
<tr><td>3</td><td>200x</td><td>600</td></tr>
<tr><td>4</td><td>200x</td><td>800</td></tr>
<tr><td>5</td><td>200x</td><td>1000</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
<td>¿Los/as estudiantes grafican los datos adecuadamente?</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Al terminar esta actividad los/as estudiantes construyen en el pizarrón una tabla de datos con los valores de entrada (x) y salida (y). Al tener la tabla completa realizan un gráfico en su cuaderno que representa la función, como el que aparece a continuación:
<table>
<tr><th>X</th><th>Y</th></tr>
<tr><td>1</td><td>200</td></tr>
<tr><td>2</td><td>400</td></tr>
<tr><td>3</td><td>600</td></tr>
<tr><td>4</td><td>800</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1000</td></tr>
</table>


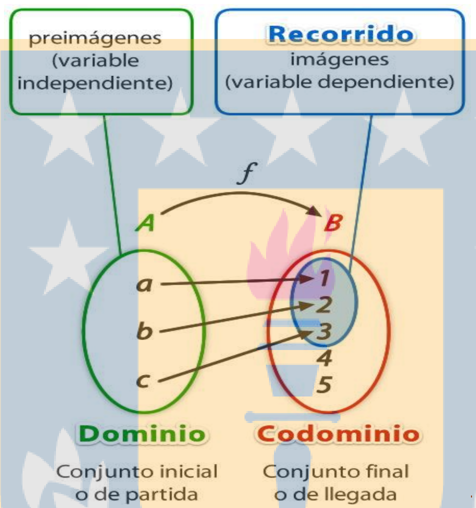
El/ la docente construye en el programa Excel la gráfica, para que los/as estudiantes vean el comportamiento que la recta debe tener a partir de la tabla de datos.
Para que los estudiantes visualicen de otra manera la metáfora de la máquina, se utiliza un software educativo.
https://phet.colorado.edu/sims/html/function-builder/latest/function-builder_es.html
</td>
<td></td>
<td>15 min</td>
</tr>
</table>

	Para empezar a utilizarlo, deben seleccionar la opción 2 que corresponde a “Números”, como se muestra a continuación:  Posterior a ellos se ingresa la ecuación a la máquina o las opciones que el docente estime conveniente.  Para finalizar, puede utilizar las otras herramientas presentes en el software. - Actividad 4: El/la docente explica que existen diversas formas de representar una función lineal. Los/as estudiantes han evidenciado anteriormente algunas		

	representaciones como la tabla de datos, el gráfico, la metáfora de máquina, el lenguaje algebraico. A este listado se incorpora otra representación que es el diagrama sagital. El diagrama sagital corresponde a una relación donde a cada elemento del conjunto inicial A le corresponde un único elemento del conjunto B, de lo contrario no sería función.  • El/la docente da a conocer la diferencia entre una relación que sí es función y una relación que no cumple una función, como se muestra en el ejemplo  		20 min ¿Los/as estudiantes trabajan adecuadamente en equipo?

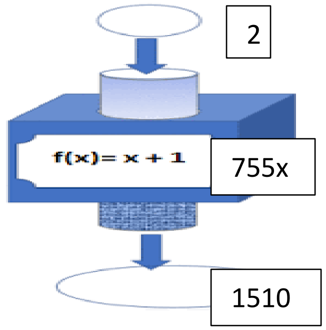
- En el diagrama sagital se explica los elementos que componen una relación representada en un diagrama sagital: dominio, codominio, recorrido, preimagen e imagen.

Elementos	**Definición**
Dominio	Conjunto inicial o de partida
Codominio	Conjunto final o de llegada
Recorrido	Conjunto de valores que toma la función con respecto a los elementos del dominio.



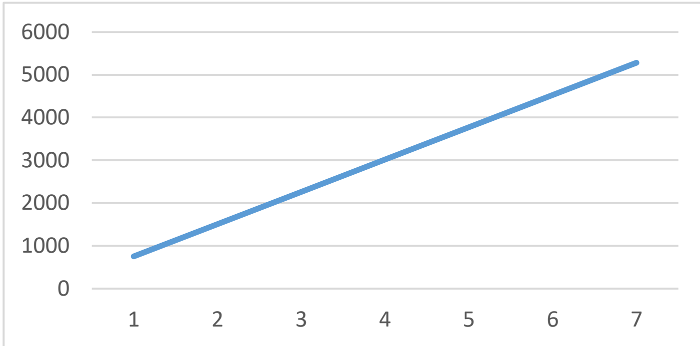
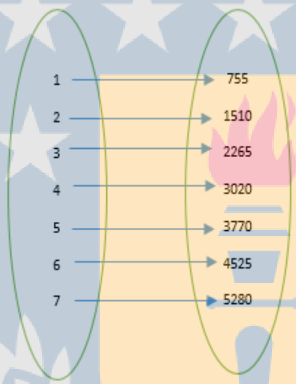
- Actividad 5: En grupos de 3 a 4 estudiantes desarrollan al azar un problema como el que se realizó en la representación anterior, estos ejercicios están

	escritos en papeles dentro de un cofre. Estos problemas contienen los siguientes productos: • Cuaderno $755 • Lápices $159 • Fideos $ 450 • Mermelada $680 • Aceite $999 • Sal $520 • Atún $835 • Azúcar $825 • Leche $689 • Arroz $949 • Galletas donuts $599 • Lechuga $755 • Salsa de tomates $350 • Lentejas $930 • Porotos verdes $990 • Deben realizar cada representación a su producto. • Para ello realizan primero la metáfora de la maquina (utilizaremos el ejemplo del primer producto de la lista):		



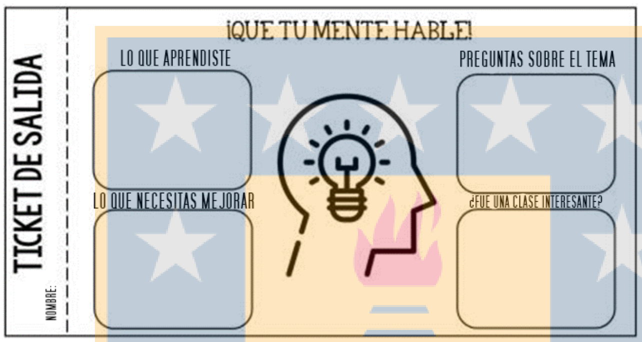
- Al tener los valores de la maquina resuelven la tabla, calculando con 2, 3, 4, 5, 6 y 7 productos su valor final:

Cantidad de productos	Valor
1	755
2	1510
3	2265
4	3020
5	3770
6	4525
7	5280

	• Realizan el grafico.  • Realizan el diagrama sagital (indicando el dominio, codominio y recorrido).  • Los estudiantes tendrán cartulinas para registrar sus resultados.		

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Cierre:

Los estudiantes comunican verbalmente al grupo curso las representaciones que han utilizado durante su trabajo.
El/la docente retroalimenta los contenidos de la clase a través de un Power point.
Se les entrega una guía con los conceptos formales de los contenidos vistos en clases.
Se entrega ticket de salida para que respondan de acuerdo a los contenidos vistos en clase.



</td>
<td></td>
<td>
20 min
¿Los/as estudiantes comunican oralmente sus resultados?
¿Los/as estudiantes utilizan todas las representaciones pedidas?
¿Los/as estudiantes resuelven correctamente sus ejercicios?
¿Los/as estudiantes resuelven el ticket de salida?
</td>
</tr>
</table>

Guía de contenidos formales clase 2

"Representaciones de una función lineal"

Nombre:		**Fecha:**	

Objetivo: Representar la noción de función lineal de manera concreta, pictórica o simbólica.

REPRESENTACIONES DE LA FUNCIÓN LINEAL

Ejemplo: Para la función f(x) = 3x tenemos las siguientes representaciones:

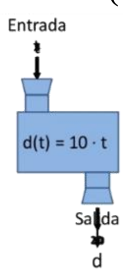
Algebraica: Relacionada con la proporcionalidad directa vista anteriormente de la forma **f(x) = y = mx**

$$f(x) = 3x$$

Tabla de datos: Se organizan los datos de una determinada situación, luego se reemplazan en x y se obtiene y.

X	Y
1	3
2	6
3	9
4	12

Metáfora de la máquina: es imaginarse que la función es una máquina, en donde ingresan valores de entrada (valores iniciales) y salen transformados en otros valores de salida (valores finales).



Entrada "t" (hrs)	Salida "d" (km)
1	10
2	20
3	30
4	40
5	50

Diagrama sagital: corresponde a una relación numérica donde a cada elemento (número) del conjunto inicial A le corresponde un único valor del conjunto B, de lo contrario no sería función.

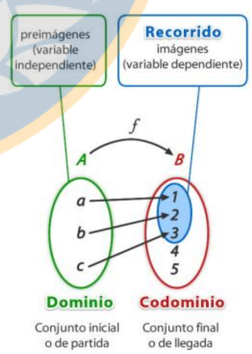
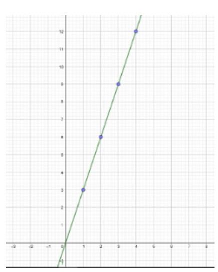


Gráfico: Al tener la tabla de datos se puede plasmar mediante plano cartesiano dicha situación y se ubican los pares ordenados en los ejes x e y, según corresponda.



Power Point clase 2

- **¿Qué sucede en una proporcionalidad directa?**

Si una variable aumenta, la otra también aumenta. Si una variable disminuye, la otra también disminuye.

- **¿Qué es una variable?**

Característica o cualidad de algo determinado

- **¿Qué tipo de variables hay?, descríbelas**

- **¿Qué es una constante de proporcionalidad?**

Cociente entre cada par de sus valores es constante.

- **¿Cómo se obtiene la constante de proporcionalidad?**

$$m: \frac{y}{x}$$

- **¿Cómo se relaciona la constante de proporcionalidad con la función lineal?**

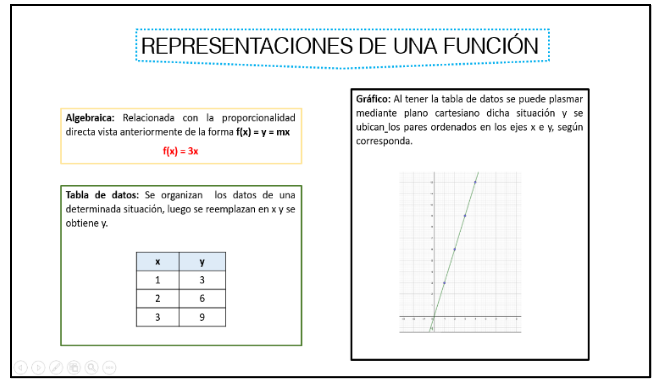
Dos variables tienen una relación de proporcionalidad directa cuando el cociente entre cada par de sus valores es constante.

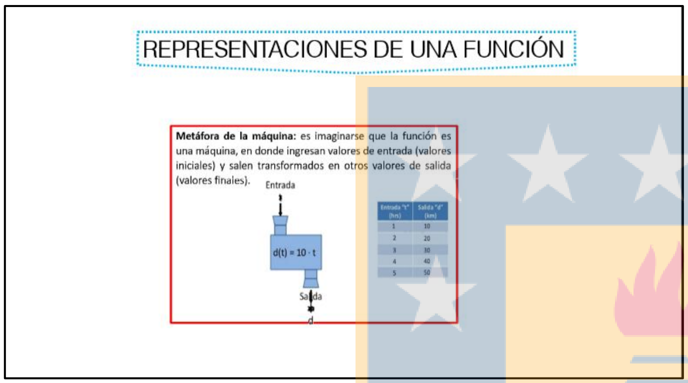
y=mx

A una relación que se puede describir de esta forma, se le llama función lineal y puede ser escrita como

f(x) = mx


IMPORTANCIA DE LAS FUNCIONES
ROJO
AZUL
BLANCO
MANZANA
CIELO
NUBE
A
B


REPRESENTACIONES DE UNA FUNCIÓN
Algebraica: Relacionada con la proporcionalidad directa vista anteriormente de la forma **f(x) = y = mx**
f(x) = 3x
Tabla de datos: Se organizan los datos de una determinada situación, luego se reemplazan en x y se obtiene y.
x | y
1 | 3
2 | 6
3 | 9
Gráfico: Al tener la tabla de datos se puede plasmar mediante plano cartesiano dicha situación y se ubican_los pares ordenados en los ejes x e y, según corresponda.


REPRESENTACIONES DE UNA FUNCIÓN
Metáfora de la máquina: es imaginarse que la función es una máquina, en donde ingresan valores de entrada (valores iniciales) y salen transformados en otros valores de salida (valores finales).
Entrada
d(t) = 10 · t
Salida
d

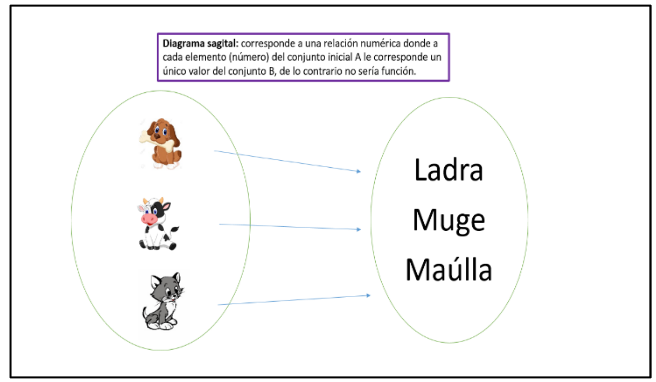
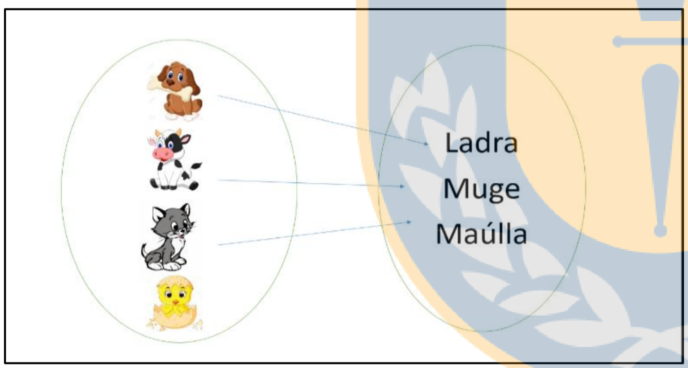
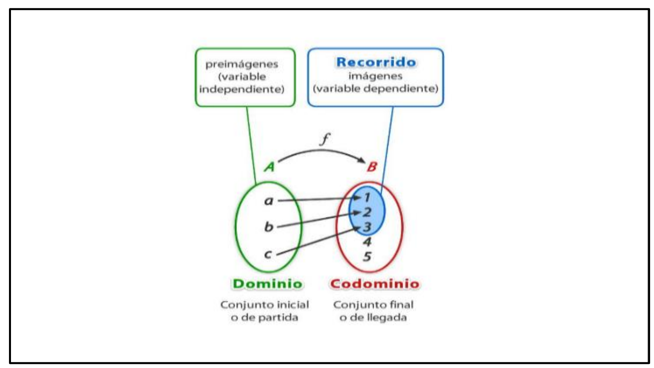
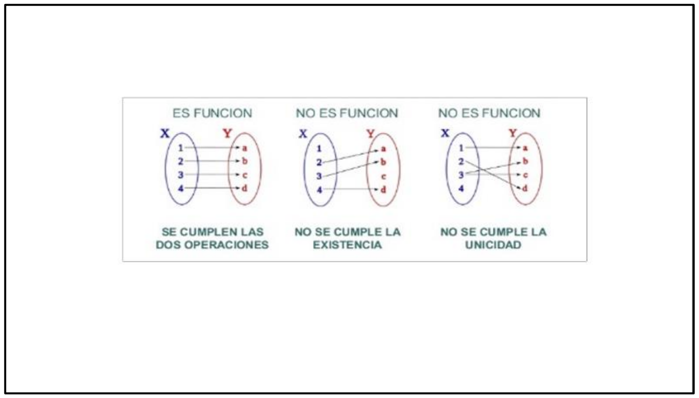


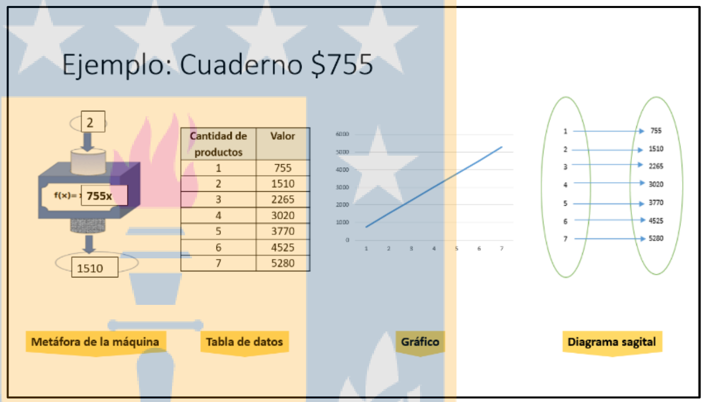
Diagrama sagital: corresponde a una relación numérica donde a cada elemento (número) del conjunto inicial A le corresponde un único valor del conjunto B, de lo contrario no sería función.
Ladra
Muge
Maúlla


Ladra
Muge
Maúlla

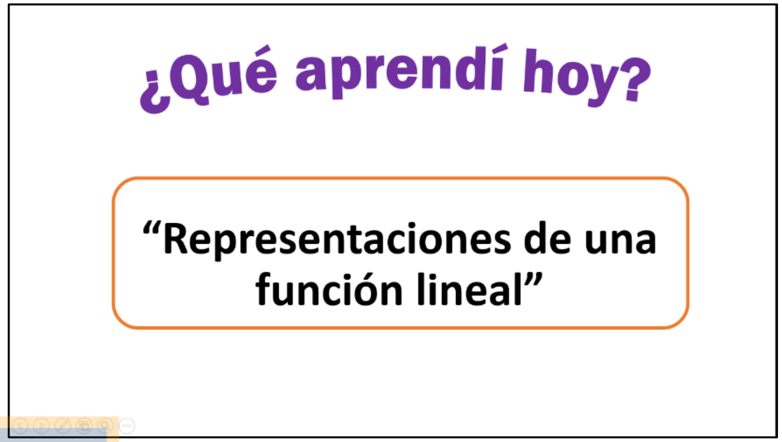

preimágenes (variable independiente)
Recorrido
imágenes (variable dependiente)
f
A
B
a
b
c
1
2
3
4
5
Dominio
Conjunto inicial o de partida
Codominio
Conjunto final o de llegada

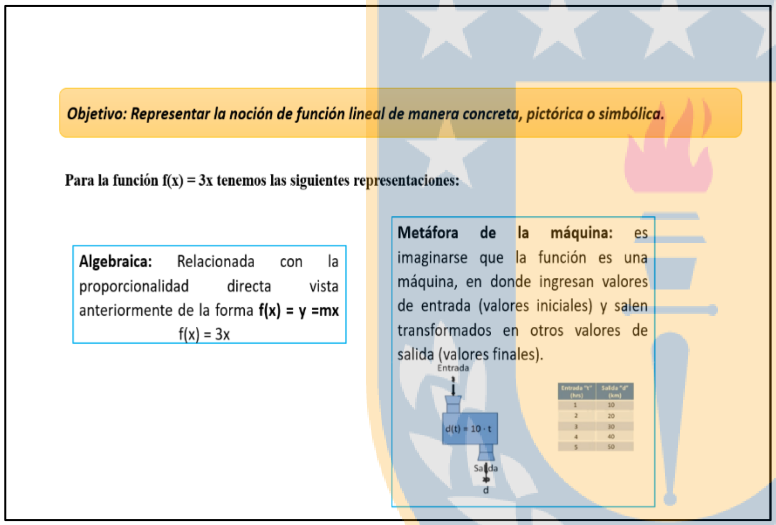

ES FUNCION
NO ES FUNCION
NO ES FUNCION
SE CUMPLEN LAS DOS OPERACIONES
NO SE CUMPLE LA EXISTENCIA
NO SE CUMPLE LA UNICIDAD

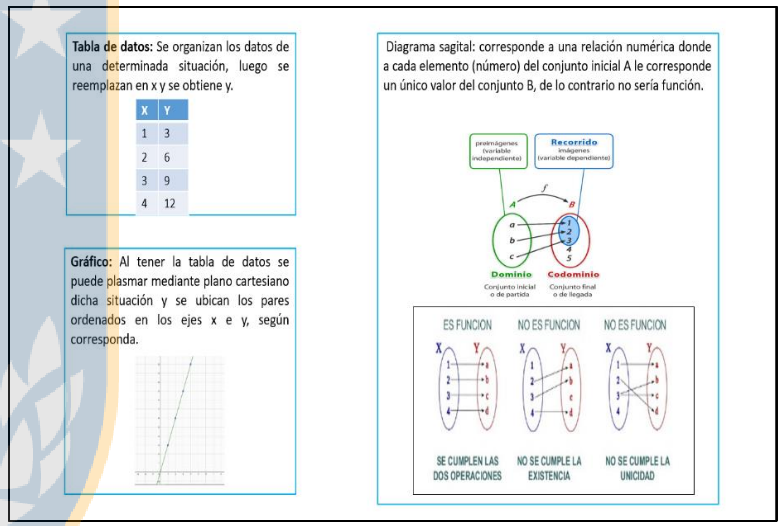

TRABAJO
EN EQUIPO


Ejemplo: Cuaderno $755
2
f(x)= 755x
1510
Cantidad de productos | Valor
1 | 755
2 | 1510
3 | 2265
4 | 3020
5 | 3770
6 | 4525
7 | 5280
Metáfora de la máquina
Tabla de datos
Gráfico
Diagrama sagital

Power Point cierre clase 2







<table>
<tr><th colspan="5">Planificación de la clase 3</th></tr>
<tr><td colspan="2">Asignatura: Matemáticas</td><td>Curso: Octavo</td><td colspan="2">Tiempo: 90 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo de Aprendizaje:
Representar función lineal a través de la recta y determinar pendiente.</td><td>Habilidades:
Usar modelos, realizando cálculos, estimaciones y simulaciones, tanto manualmente como con ayuda de instrumentos para resolver problemas de otras asignaturas y de la vida diaria.</td><td colspan="2">Conocimientos previos:
Operaciones de números enteros, decimales y fracciones.
Variaciones porcentuales.
Reducción de expresiones algebraicas.
Concepto de proporción directa.
Ecuaciones e inecuaciones con números enteros.</td></tr>
<tr><td>Contenido</td><td colspan="2">Momentos de la clase</td><td>Indicadores</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td>Pendiente (creciente y decreciente)</td><td colspan="2">Inicio:

Se da a conocer el objetivo de la clase el cual es: Representar función lineal a través de la recta y determinar pendiente.
Actividad 1: Los estudiantes observan un video que muestra a un acróbata en el péndulo de la muerte. https://www.youtube.com/watch?v=4-4uMieOMlI
Los/as estudiantes analizan la situación planteada identificando que el péndulo tiene distintas inclinaciones a medida que va girando sobre su eje.
Actividad 2: Los/as estudiantes observan una imagen capturada del video anterior donde se observan sus dimensiones en un plano cartesiano. Se les explica a los/as alumnos/as que el péndulo tiene una particularidad, cada vez que va dando vueltas tiene diversas inclinaciones, la recta que se muestra de color rojo representa esa inclinación y a esa inclinación se le conoce como pendiente.</td><td>Representan la linealidad $f(kx) = kf(x)$ y $f(x1 + x2) = f(x1) + f(x2)$ en tablas y gráficos.
Identifican la pendiente del gráfico $\Delta y/\Delta x$ de la función $f(x) = a \cdot x$ con el factor a
Modelan situaciones de la vida cotidiana o de ciencias con funciones lineales.</td><td>¿Observan el video presentado?

¿Identifican que el péndulo tiene distintas inclinaciones?

¿Los/as estudiantes tienen conocimientos previos respecto a la determinación de la pendiente?

10 min</td></tr>
</table>

El/la docente menciona que al trazar la recta, se dibujan los ejes del plano cartesiano (eje de las ordenadas y de las abscisas).

El/la docente pregunta a los/as estudiantes si tienen algún conocimiento de cómo obtener el valor de la pendiente del péndulo.

Posibles respuestas
- Sí - No - No sé

Desarrollo:

Se explica a los/as estudiantes cómo deben calcular la pendiente y cuál es su definición matemática, mediante una Power point:

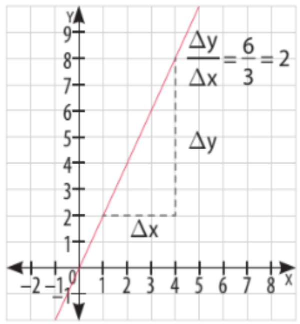
El valor de la pendiente de una recta es el cociente entre: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

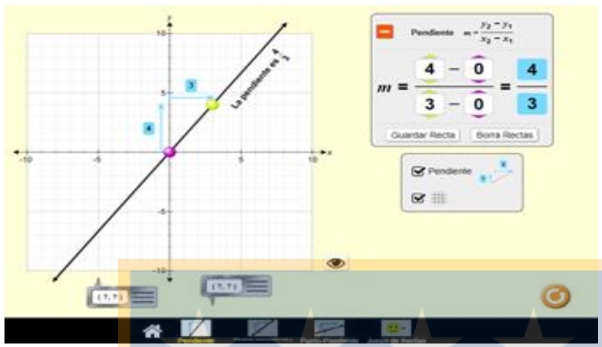
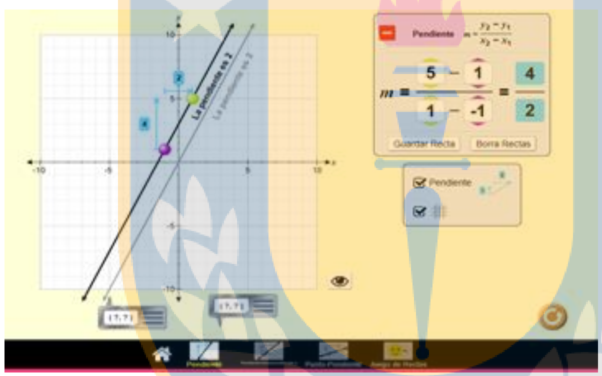
Tipos de registros

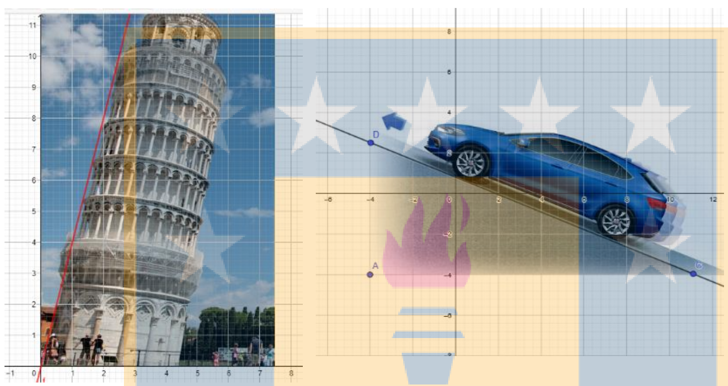
- Medios visuales
- Lenguaje algebraico
- Tablas
- Gráficos

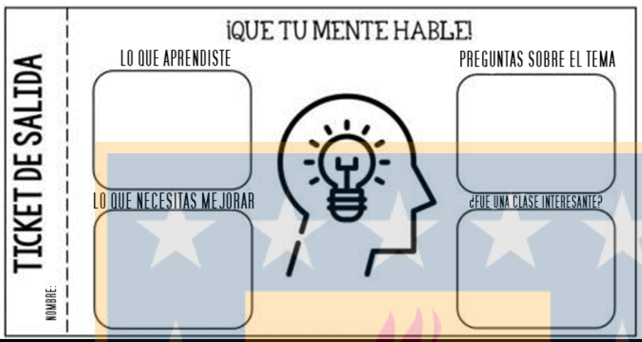
¿Los/as estudiantes tienen conocimientos previos respecto a la determinación de la pendiente?

15 min

	Para que los estudiantes observen la variación se agrega una gráfica, como la que se muestra a continuación:  Los/as estudiantes se dirigen al laboratorio de computación a desarrollar actividades del software educativo geogebra https://www.geogebra.org/graphing?lang=es y de curriculum nacional https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-89427_recurso_html.html . - **Actividad 3**: Ingresan al software educativo de curriculum en línea, **“graficando rectas”** y seleccionan la primera opción que lleva por nombre “pendiente”. El trabajo está detallado en la guía de actividades clase 3, en ella se explica paso a paso lo que deben realizar los estudiantes. Esta actividad tiene como objetivo: - Trasladar la recta. - Modificar las pendientes. - Visualizar las diferencias entre una recta de otra, la que pasa por el origen y la trasladada. - Descubrir el coeficiente de posición.		¿Los/as estudiantes utilizan correctamente los software? ¿Los/as estudiantes acceden a las imágenes correspondientes? ¿Los/as estudiantes determinan la pendiente correctamente? ¿Encuentran la función a partir de la recta? 25 min

	- Analizar la traslación. - Determinar la función que le corresponde. A continuación se muestra un ejemplo para realizar la actividad:  		

	- Actividad 4: Los/as estudiantes ingresan al siguiente link: https://drive.google.com/drive/folders/16AI6d5zLCw7SVs4rXJ47tn4PqBI_4Diy?usp=sharing, donde se encuentran imágenes que representan inclinaciones en la ida cotidiana, las deben copiar y luego pegar en geogebra. Deben determinar: - Pendiente. - Coeficiente de posición. - Función. A continuación se muestra un ejemplo de la actividad.  En la guía de actividades clase 3 se encuentra detallado el paso a paso de la actividad. Los estudiantes comentan la actividad y relacionan La pendiente con la función lineal y la función afín, en esta última reconocen también el coeficiente de posición.		25 min ¿Participan activamente en los comentarios? ¿Relacionan la función lineal y afín? ¿Reconocen el coeficiente de posición?

	Cierre: - Actividad 5: Los/as estudiantes completan un mapa conceptual para sintetizar los contenidos sobre función lineal y afín. • Responden el ticket de salida correspondiente a lo visto en la clase. 		¿Responden el ticket de salida? 15 min

<u>Guía de actividades clase 3</u>

"Pendiente de una función"

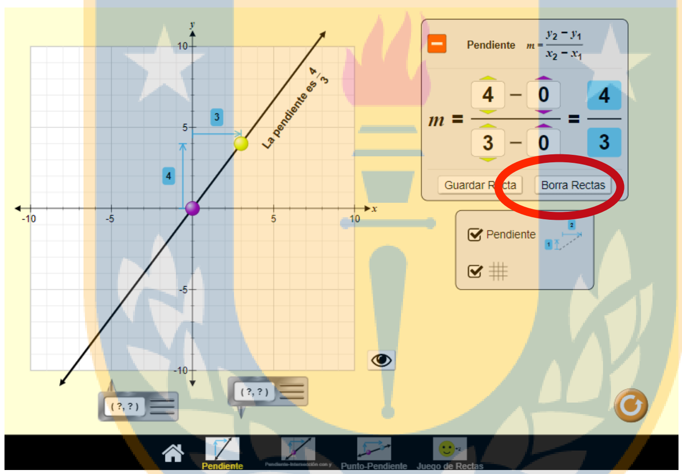
Nombre		Fecha:	

Objetivo: Representar función lineal y a través de la recta y determinar pendiente de funciones lineales y afines.

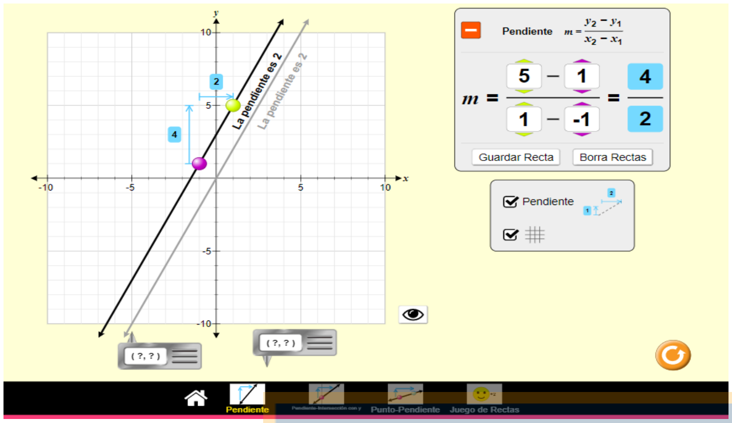
Instrucciones para trabajar en software educativo:

Software educativo de curriculum en línea.

1. Ingresa al siguiente link: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-89427_recurso_html.html
2. Elige la opción de "Pendiente".
3. Mueve la recta que aparece, para que pase por el origen y observa su pendiente. Luego selecciona la opción de "guardar recta".



4. A continuación, mueve la recta hasta que intersecte al eje y, manteniendo su pendiente e indica la función correspondiente a dicha recta.

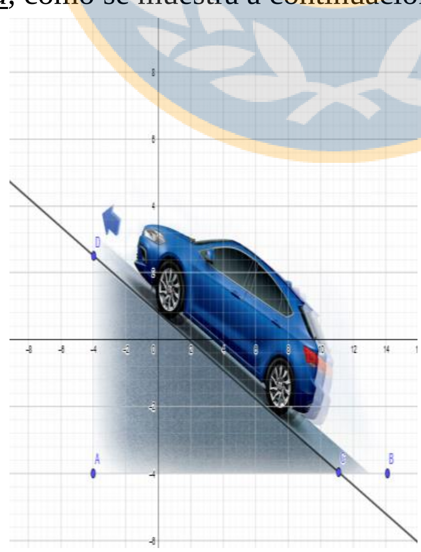


Para aprender más: una función afín es la traslación de una función lineal, y se escribe: f(x) = mx + n

5. Notaras que intersecta el eje y, esto es nuestro **coeficiente de posición.**
6. Analiza lo que ocurre con las rectas.

Software educativo geogebra.

7. Ingresa al siguiente link: https://drive.google.com/drive/folders/16AI6d5zLCw7SVs4rXJ47tn4PqBI_4Diy?usp=sharing, en él se encuentran 4 imágenes las cuales debes copiar y luego pegar una a una en *geogebra*, como se muestra a continuación:



Paso 1: Abrir el software educativo.

Paso 2: Inserta la imagen.

Paso 3: Presiona la herramienta 3 y selecciona la opción “recta”.

Paso 4: Ubica la recta por donde se observa la inclinación.

Paso 5: Determina la pendiente.

Paso 6: Determina el coeficiente de posición.

Paso 7: Determina la función que corresponde a la imagen.

Nota: Realiza los mismos pasos para cada una de las imágenes.

<u>Guía de trabajo clase 3</u>

"Pendiente de una función"

Nombre:		**Fecha:**	

Objetivo: Representar función lineal a través de la recta y determinar pendiente.

<u>Coeficiente de posición y pendiente de una recta</u>

En una función que representa una recta tenemos:

m: pendiente, es la inclinación que la recta tiene respecto del eje de abscisas

n: coeficiente de posición, es el valor en el cual la recta corta al eje de las ordenadas.

$$F(x) = mx + n$$

Pendiente

Coeficiente de posición

Si los puntos P1(x1, y1) y P2(x2, y2) pertenecen a una recta, se define la pendiente m de esa recta como el cociente entre la diferencia de coordenadas y, y la diferencia de coordenadas x. Es decir:

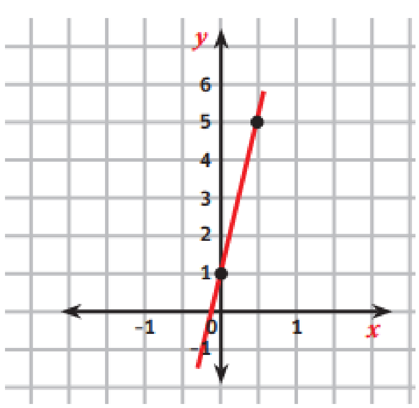
$$m: \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente nos indica si la función es creciente o decreciente:

- Si la pendiente es **positiva** ($m > 0$) entonces la función es **creciente.**
- Si al pendiente es **negativa** ($m < 0$) entonces la función es **decreciente.**

Ejercicios:

1. ¿Cuál es la pendiente de la recta de la gráfica?



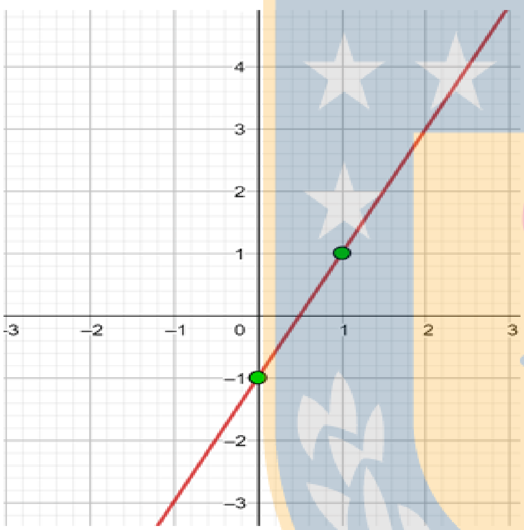
2. Calcule la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

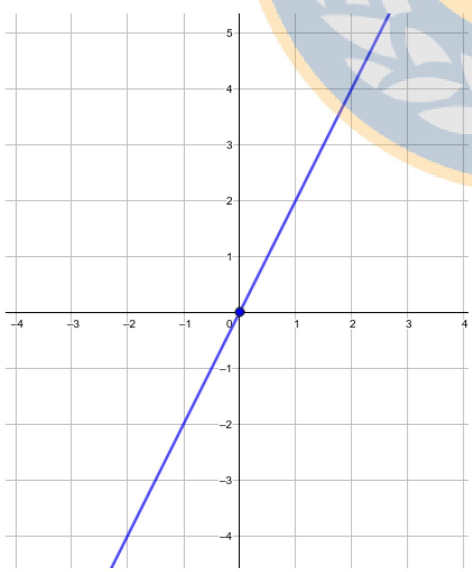
a) (7, 29) y (12,30)

b) (21, 5) y (11, 45)

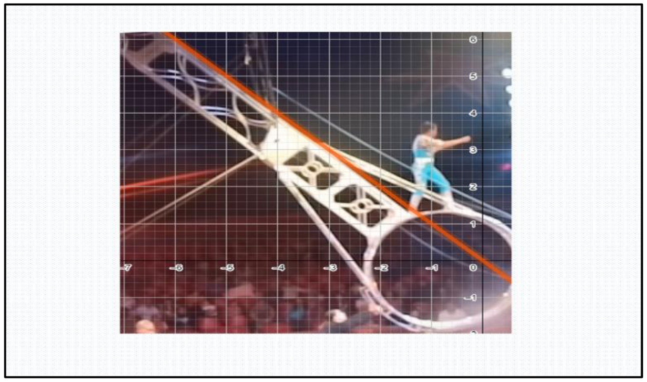
3. Calcula la pendiente de cada recta.

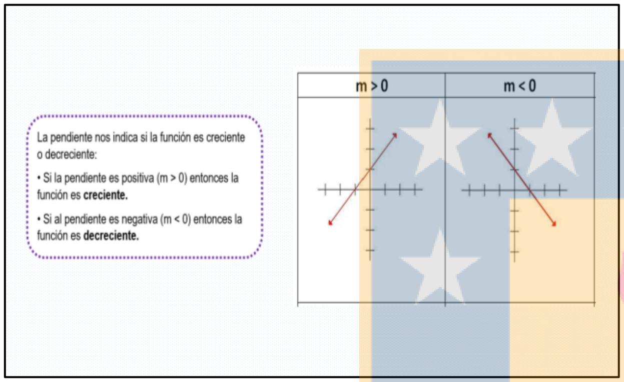
a)

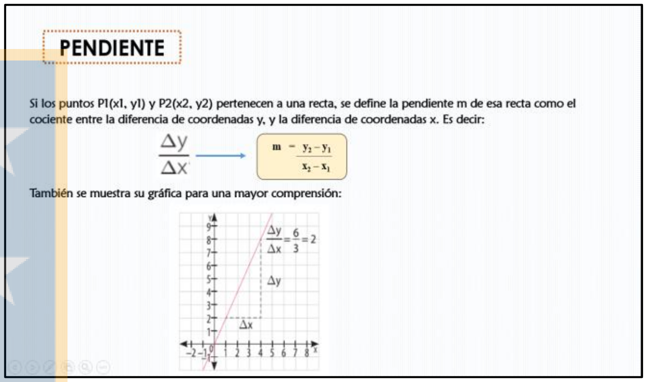


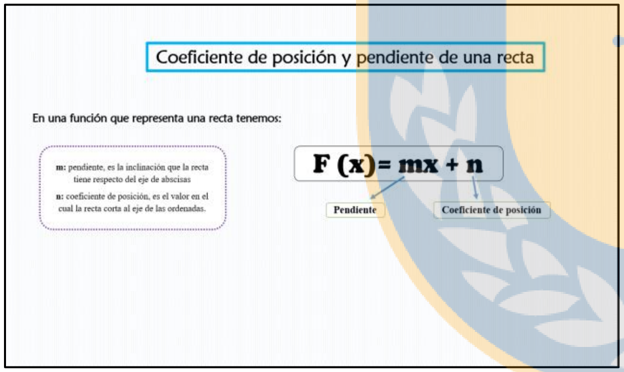


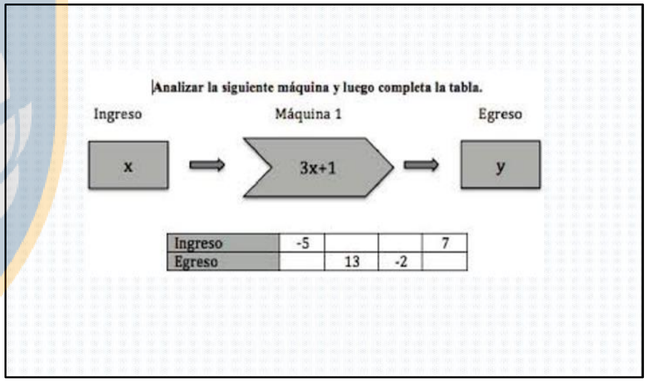
Power point clase 3











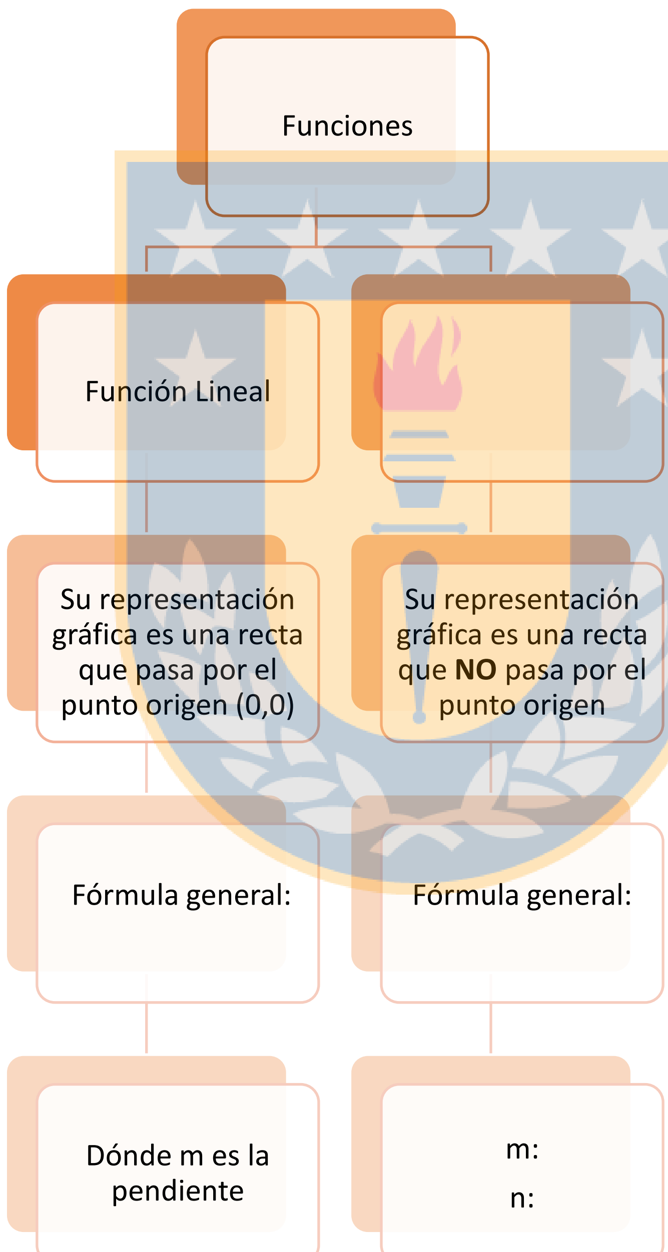
Guía de sintesis clase 3

“Pendiente de una función”

Nombre		Fecha:	

Objetivo: Representar función lineal y a través de la recta y determinar pendiente de funciones lineales y afines.

Completa el siguiente mapa conceptual con lo aprendido en clases:

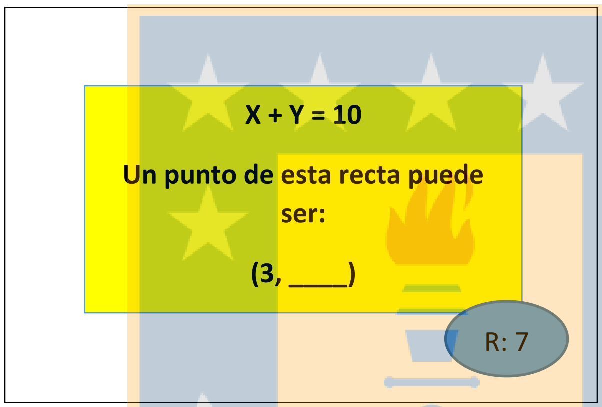


<table>
<tr><th colspan="5">Planificación de la clase 4</th></tr>
<tr><td colspan="2">Asignatura: Matemáticas</td><td>Curso: Octavo</td><td colspan="2">Tiempo: 90 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo de Aprendizaje:
Modelar situaciones de la vida cotidiana con función afín.</td><td>Habilidades:
Usar modelos, realizando cálculos, estimaciones y simulaciones, tanto manualmente como con ayuda de instrumentos para resolver problemas de otras asignaturas y de la vida diaria.</td><td colspan="2">Conocimientos previos:
• Operaciones de números enteros, decimales y fracciones.
• Variaciones porcentuales.
• Reducción de expresiones algebraicas.
• Concepto de proporción directa.
• Ecuaciones e inecuaciones con números enteros.</td></tr>
<tr><td>Contenido</td><td colspan="2">Momentos de la clase</td><td>Indicadores</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td>Función afín.
Pendiente.
Coeficiente de posición.</td><td colspan="2">Inicio:
• Se da a conocer el objetivo de la clase: Modelar situaciones de la vida cotidiana con función afín.
• El/la docente invita a los/as estudiantes a jugar Bingo.
- Actividad 1: Los/as estudiantes deben rellenar primero el tablero antes de comenzar el juego con números del 1 al 24, sin que se repitan. Dentro de estos números se encuentran las respuestas del juego. El docente lee las tarjetas una a una para que los/as estudiantes vayan completando su tablero de forma adecuada. (sugerencia: proyectar las tarjetas sin las respuestas)</td><td>• Identifican la pendiente del gráfico $\Delta y/\Delta x$ de la función $f(x) = a \cdot x$ con el factor a.
• Modelan situaciones de la vida cotidiana o de ciencias con funciones lineales y afines.</td><td>30 min

¿Los/as estudiantes tienen disposición frente al juego?

¿Los/as estudiantes completan correctamente su tabla de juego?</td></tr>
</table>

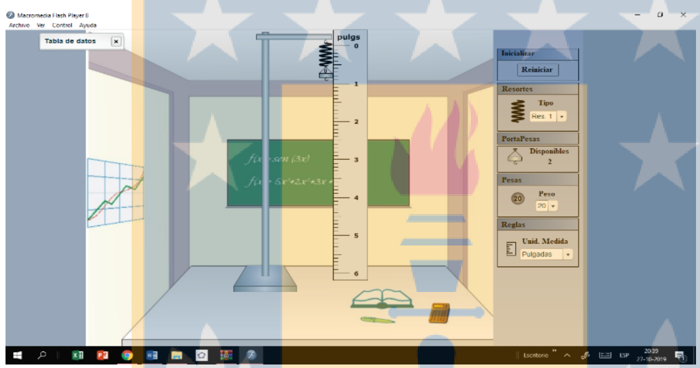
Hay 24 tarjetas de bingo a disposición de los/as estudiantes, todas ellas son distintas. Ejemplo de una tarjeta de bingo:

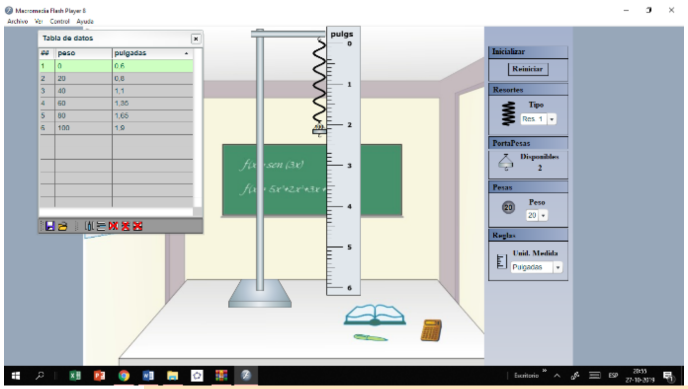


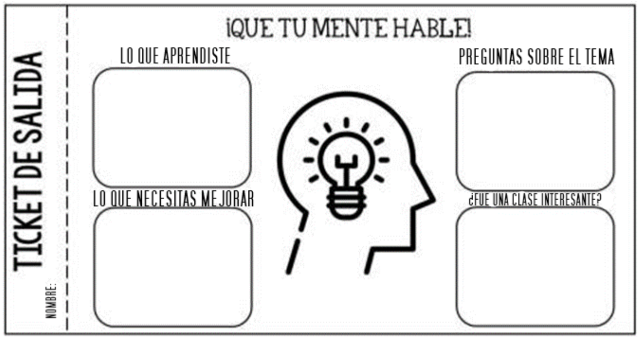
Se da por terminado el juego cuando uno de los estudiantes tiene la respuesta de su tarjeta y diga en voz alta ¡Bingo!.

Tipos de registros

- Medios visuales
- Lenguaje algebraico
- Tablas
- Gráficos

	Desarrollo: Los estudiantes se dirigen al laboratorio de computación a desarrollar actividades del software educativo. - Actividad 2: Los/as estudiantes deben trabajar el software educativo “Elasticidad de resorte” que consiste en trabajar con un resorte construyendo la tabla de valores de modo que las pesas vayan de 20 en 20. Deben arrastrar el resorte y una pesa, llevar la regla al lado del resorte de modo que el cero no coincida con el inicio del resorte. Luego medir el largo del resorte en milímetros cuando se van introduciendo pesas, como se muestra en el la imagen: 		45 min ¿Los/as estudiantes siguen las instrucciones correctamente? ¿Los/as estudiantes construyen la tabla de valores en el software educativo?

	- Por último se llevan los datos a una tabla que tiene dos variables, peso y largo del resorte.  - Los/as estudiantes registran en una hoja de cuadernillo los datos de la tabla y el gráfico correspondiente. - Los/as estudiantes calculan la pendiente y determinan la función correspondiente de la situación. - A cada actividad le toman una captura de pantalla, la copian en un Word y la envían al correo de la docente. **Cierre:** • El/la docente revisa que todos hayan enviado el documento a su correo. • El/la docente demuestra a sus estudiantes cómo calcular la pendiente, obtener la función y el gráfico, a través de Excel.		¿Los/as estudiantes registran los datos en la tabla? ¿Los/as estudiantes realizan el gráfico correctamente? ¿Los/as estudiantes identifican correctamente el coeficiente de posición? ¿Los/as estudiantes calculan correctamente la pendiente? ¿Los/as estudiantes determinan la función correspondiente a la situación? 15 min ¿Los/as estudiantes envían el archivo?

	• Responden el ticket de salida correspondiente a lo visto en la clase. 		¿Los estudiantes responden el ticket de salida?

<u>Tabla previa al Bingo clase 4.</u>

Nombre:		**Fecha:**	

Antes de comenzar el juego completa la siguiente tabla con números del 1 al 24, sin que se repitan.

Tarjetas de bingo clase 4

Y= 3x – 1

Un punto de esta recta puede ser:

(8, ___)

R: 23

(4,12)

Este punto pertenece a la recta

Y= ___x

R: 3

Y= x-3

Un punto de esta recta puede ser:

(_____,7)

R: 10

(14,1)

Este punto pertenece a la recta

Y=x - ___

R: 13

Y= 2x + 5

Un punto de esta recta puede ser:

(3, ___)

R: 11

(___, 16)

Este punto pertenece a la recta:

Y= x+ 2

R: 14

(3,24)

Este punto pertenece a la recta

Y= __ x

R: 8

(___, 28)

Este punto pertenece a la recta:

Y= 2x-2

R: 15

(4, ___)

Este punto pertenece a la recta

Y= 2x + 1

R: 9

Y= 2x – 1

Un punto de esta recta puede ser:

(10, ___)

R: 19

Y= 3x+ 4

Un punto de esta recta puede ser:

(4, ___)

R: 16

(___, 16)

Este punto pertenece a la recta

Y= x - 5

R: 21

Y= 2x+3

Un punto de esta recta puede ser:

(7, ___)

R: 17

(11, ___)

Este punto pertenece a la recta

Y= 2x

R: 22

(____, 16)

Este punto pertenece a la recta

Y= x – 4

R: 20

(3, ___)

Este punto pertenece a la recta

Y = 8x

R: 24

Y= 2x

Un punto de esta recta puede ser:

(3, ___)

R: 6

(4, 16)

Este punto pertenece a la recta

Y= ___ x

R: 4

Y= 2x – 1

Un punto de esta recta puede ser:

(3, ___)

R: 5

(4,10)

Este punto pertenece a la recta

Y= 2x + ___

R: 2

X + Y = 10

Un punto de esta recta puede ser:

(3, ____)

R: 7

(___, 24)

Este punto pertenece a la recta

Y= 2x

R: 12

(17, 35)

Este punto pertenece a la recta

Y= x + ___

R: 18

2y = x

Un punto de esta recta puede ser:

(___, ½)

R: 1

<u>Guía de actividades clase 4</u>

"Función afín"

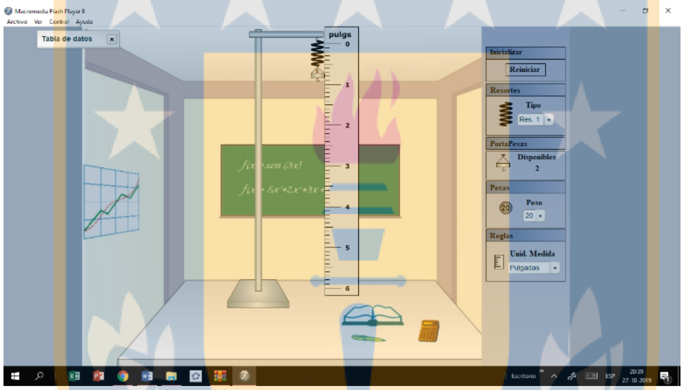
Nombre:		Fecha:	

Objetivo: Modelar situaciones de la vida cotidiana con función afín.

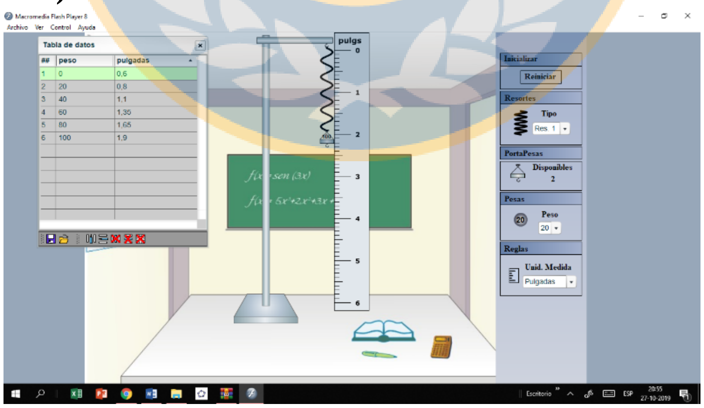
El docente a cargo debe tener el software educativo instalado en los computadores del laboratorio.

Instrucciones para trabajar en software educativo:

1. Ingresa a la carpeta "Software taller" que está en el computador.
2. Busca y abre donde dice Elasticidad de resorte.
3. Arrastra el resorte y una pesa, llevar la regla al lado del resorte de modo que el cero no coincida con el inicio del resorte. Luego medir el largo del resorte en milímetros cuando se van introduciendo pesas.



4. Por último se llevan los datos a una tabla que tiene dos variables, **peso y largo del resorte (milímetros).**



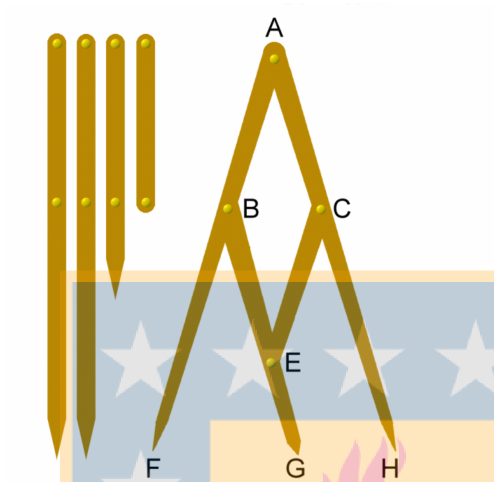
5. Registra en la hoja de cuadernillo los datos de la tabla y el gráfico correspondiente.
6. Calcula la pendiente y determina la función de la situación.
7. Al terminar entregue su actividad al docente y envíe al correo de el/ella lo realizado en el computador.

<table>
<tr><th colspan="5">Planificación de la clase 5</th></tr>
<tr><td colspan="2">Asignatura: Matemáticas</td><td>Curso: Octavo</td><td colspan="2">Tiempo: 90 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo de Aprendizaje:
Modelar situaciones de la vida cotidiana con función afín.</td><td>Habilidades:
Usar modelos, realizando cálculos, estimaciones y simulaciones, tanto manualmente como con ayuda de instrumentos para resolver problemas de otras asignaturas y de la vida diaria.</td><td colspan="2">Conocimientos previos:
• Operaciones de números enteros, decimales y fracciones.
• Variaciones porcentuales.
• Reducción de expresiones algebraicas.
• Concepto de proporción directa.
• Ecuaciones e inecuaciones con números enteros.</td></tr>
<tr><td>Contenido</td><td colspan="2">Momentos de la clase</td><td>Indicadores</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td>Función afín.
Pendiente.
Coeficiente de posición.</td><td colspan="2">Inicio:
Se da a conocer el objetivo de la clase: Modelar situaciones de la vida cotidiana con función afín.
- Actividad 1: Los/as estudiantes observan y luego comentan un video sobre el número áureo, la cual se relaciona con la proporcionalidad de nuestro cuerpo:
https://www.youtube.com/watch?v=ClXX7ItWstQ
Desarrollo:
- Actividad 2: En conjunto con los estudiantes deben realizar un compás áureo, para ello necesitan los siguientes materiales: cartulina, chinches mariposa, tijera, regla, lápiz.
Deben seguir las instrucciones que le da la profesora:
• En la cartulina midan 340 mm (34 cm), este es el largo de uno de los lados (AF), de ancho 20 mm (2 cm). Realiza lo mismo para el otro lado (AH) del compás.</td><td>• Identifican la pendiente del gráfico $\Delta y/\Delta x$ de la función $f(x) = a \cdot x$ con el factor a.
• Modelan situaciones de la vida cotidiana o de ciencias con funciones lineales y afines.</td><td>10 min
¿Los/as estudiantes observan el video detenidamente?
¿Los estudiantes comentan el video?
15 min
¿Los/as estudiantes siguen las instrucciones indicadas por el/la profesora?</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

- Para el lado BG, mida 210 mm (21 cm).
- Para los lados AB, AC, BE, CE, mida 130 mm (13 cm).
- Para el lado EG, mida 80 mm (8 cm).

Lo ideal es que quede de la siguiente manera:



- Actividad 3: a cada uno se le entrega la guía de trabajo correspondiente a la clase, en ella se especifican los materiales (cinta métrica) e instrucciones que deben seguir.
Deben modelar 2 situaciones distintas:
- Primero deben medir la palma de la mano y antebrazo de alguno de sus compañeros/as.
- Segundo, medir la altura desde el ombligo al suelo y estatura.

Todos los datos deben quedar registrados en una tabla, luego tienen que construir un gráfico y a partir de este escribir la
</td>
<td>

Tipos de registros

- Medios visuales
- Lenguaje algebraico
- Tablas
- Gráficos
</td>
<td>

¿Los/as estudiantes construyen el compás áureo con los materiales indicados?

40 min

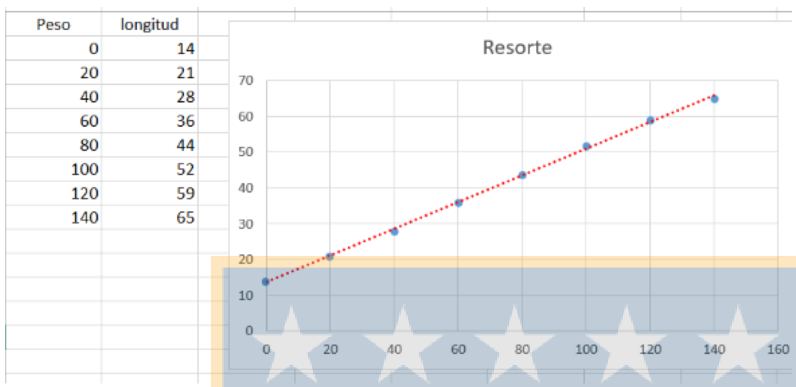
¿Los/as estudiantes miden con la cinta métrica a sus compañeros?

¿Los/as estudiantes registran los datos en la tabla?
</td>
</tr>
</table>

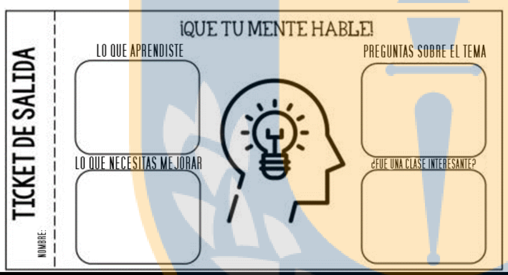
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
función que intuyen que es, identificando la pendiente y coeficiente de posición.

Cierre:

La profesora demuestra en Excel la función y gráfico que los alumnos deberían haber obtenido.


<table>
<tr><th>Peso</th><th>longitud</th></tr>
<tr><td>0</td><td>14</td></tr>
<tr><td>20</td><td>21</td></tr>
<tr><td>40</td><td>28</td></tr>
<tr><td>60</td><td>36</td></tr>
<tr><td>80</td><td>44</td></tr>
<tr><td>100</td><td>52</td></tr>
<tr><td>120</td><td>59</td></tr>
<tr><td>140</td><td>65</td></tr>
</table>

El/la docente explica la relación que existe entre el video y las actividades realizadas.
Responden el ticket de salida correspondiente a lo visto en la clase.



</td>
<td></td>
<td>
¿Los/as estudiantes construyen los gráficos?

¿Los/as estudiantes obtienen la pendiente a partir del gráfico?

¿Los/as estudiantes identifican correctamente el coeficiente de posición?

¿Los/as estudiantes descubren la función correspondiente?

¿Los/as estudiantes relacionan el largo del antebrazo con el largo de la mano?

¿Los/as estudiantes relacionan la altura desde el ombligo al suelo con la altura?

¿Los/as estudiantes responden el ticket de salida?
</td>
</tr>
</table>

<u>Guía de trabajo clase 5</u>

"Las proporciones de nuestro cuerpo"

Nombre:		Fecha:	

Objetivo: Modelar situaciones de la vida cotidiana con función afín.

Marcus Vitruvius Pollio, arquitecto romano (Siglo I a.C.), destacaba la similitud entre el cuerpo humano y un edificio perfecto: "La Naturaleza ha diseñado el cuerpo humano de forma que sus miembros estén proporcionados a su estructura como un todo". Está ampliamente aceptado que las proporciones del cuerpo humano siguen la razón áurea.
Este taller tiene como objetivo la integración de conceptos y procedimientos matemáticos, dando énfasis a la modelación matemática, que es uno de los propósitos del pensamiento variacional.

Actividad 1: construir compás áureo.
Para realizar la actividad debes poner atención a las instrucciones que dará tu profesora, para la confección del compás necesitamos los siguientes materiales:

- Regla
- Lápiz
- Compás
- Tijeras
- Chinches mariposa

Actividad 2: largo de la mano y el largo del antebrazo. ¿Existirá alguna relación?
Para realizar la actividad necesitamos los siguientes materiales:

- Regla
- Lápiz
- Papel milimetrado
- Huincha de medir

A continuación se presentan las instrucciones que debes seguir para realizar la actividad:

- Ponte de pie para facilitar el paso siguiente.
- Se han tomado las siguientes muestras, con la ayuda de una huincha mide la mano y el antebrazo (por fuera) a 6 compañeros(as) que tengas a tu alrededor.
- Completa el recuadro con las medidas obtenidas.

Largo (cm) mano (x)	11,7	10,6	12	14	6	9						
Largo (cm) antebrazo (y)	19	17	19	22	9,7	14,4						

- Con los datos obtenidos dibuja en el papel milimetrado el grafico. *Sugerencia: los valores de cada eje debe ser de 2 en 2.*

Analiza y escribe lo que observas del gráfico:

____

____

- Traza la recta que pase por al menos dos puntos.
- Observa tu gráfico y escribe de manera intuitiva la ecuación de la recta que dibujaste. (Recuerda que la pendiente **(m)** se obtiene dividiendo ***y*** por ***x*** **(m= y/x)** y que el coeficiente de posición es el punto donde corta el eje Y).

- Al finalizar responde la pregunta propuesta al comienzo de la actividad.

Largo de la mano y el largo del antebrazo. ¿Existirá alguna relación?

____

____

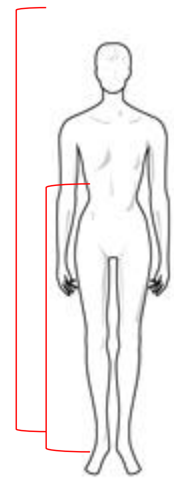
____

____

____

Actividad 3: altura desde el ombligo al suelo y estatura. ¿Existirá alguna relación?

Para realizar la actividad necesitamos los siguientes materiales:



- Regla
- Lápiz
- Papel milimetrado
- Huincha de medir

A continuación se presentan las instrucciones que debes seguir para realizar la actividad:

- Ponte de pie para facilitar el paso siguiente.
- Se han tomado las siguientes medidas a diferentes niños y adolescentes, midiendo la altura desde el ombligo al suelo y su estatura.
- Completa el siguiente recuadro con los datos de 6 compañeros (as) más que tengas a tu alrededor.

Altura (cm) ombligo al suelo (x)	108	101	90	89	82	88						
Estatura (cm) (y)	177	164	150	149	139	148						

- Con los datos obtenidos dibuja en el papel milimetrado el grafico. *Sugerencia: los valores de cada eje debe ser de 2 en 2.*

Analiza y escribe lo que observas del gráfico:

____

____

- Traza la recta que mejor se ajusta a la dispersión de puntos en el gráfico.
- Observa tu gráfico y escribe de manera intuitiva la ecuación de la recta que dibujaste. (Recuerda que la pendiente **(m)** se obtiene dividiendo ***y*** por ***x*** **(m= y/x)** y que el coeficiente de posición es el punto donde corta el eje Y).

- Al finalizar responde la pregunta propuesta al comienzo de la actividad.

Altura desde el ombligo al suelo y estatura. ¿Existirá alguna relación?

<table>
<tr><th colspan="5">Planificación de la clase 6</th></tr>
<tr><td colspan="2">Asignatura: Matemáticas</td><td colspan="1">Curso: Octavo</td><td colspan="2">Tiempo: 90 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo de Aprendizaje:
Realizan evaluación de contenidos.</td><td>Habilidades:
Usar modelos, realizando cálculos, estimaciones y simulaciones, tanto manualmente como con ayuda de instrumentos para resolver problemas de otras asignaturas y de la vida diaria.</td><td colspan="2">Conocimientos previos:
• Proporcionalidad directa.
• Pendiente
• Coeficiente de posición
• Representaciones (lenguaje cotidiano, lenguaje algebraico, tabla, gráfico, metáfora de la máquina y diagrama sagital)</td></tr>
<tr><td>Contenido</td><td colspan="2">Momentos de la clase</td><td>Indicadores</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td>Función lineal y afín.</td><td colspan="2">Inicio:
Se da a conocer el objetivo de la clase: Realizar evaluación de contenidos.
A modo de retroalimentación el/la docente explica un juego que los/as estudiantes deben realizar, consiste en que cada alumno debe tener una tarjeta, por un lado la tarjeta tiene la opción de “¿Quién tiene?” y por el otro “Yo tengo”, con la finalidad de el “Yo tengo” responder al “¿Quién tiene?”. Ejemplo:
Alumno 1:<table><tr><th>¿QUIÉN TIENE?</th><th>YO TENGO</th></tr><tr><td>Una recta de pendiente 6 que corta al eje Y en (0,4)</td><td>4</td></tr></table>Alumno 2:<table><tr><th>¿QUIÉN TIENE?</th><th>YO TENGO</th></tr><tr><td>Una recta que corta al eje Y en (0,7) y al eje X en (1,0)</td><td>y= 6x + 4</td></tr></table></td><td>• Identifican la pendiente del gráfico $\Delta y/\Delta x$ de la función $f(x) = a \cdot x$ con el factor a.
• Modelan situaciones de la vida cotidiana o de ciencias con funciones lineales y afines.</td><td>15 min

¿Los/as estudiantes participan activamente del juego?

¿Los/as estudiantes resuelven correctamente las preguntas del juego?</td></tr>
</table>

	Respuesta: **¿QUIÉN TIENE?** **Una recta de pendiente 6 que corta al eje Y en (0,4)** **YO TENGO** **y= 6x + 4** El alumno 2 al tener la respuesta lee su pregunta que está al reverso de su tarjeta. En este caso es: **¿QUIÉN TIENE?** **Una recta de pendiente 6 que corta al eje Y en (0,4)** El alumno 3 debe responder con su tarjeta de "Yo tengo", y así sucesivamente hasta terminar el juego. **Desarrollo:** El/ docente entrega las evaluaciones a los/as estudiantes y la resuelven en silencio. Si se encuentra a algún/a estudiante copiando, se retira su evaluación, con nota mínima. Los/as estudiantes pueden realizar preguntas durante el desarrollo de la evaluación. **Cierre:** El/la docente retira las evaluaciones y revisan algunos ejercicios de la evaluación a modo de retroalimentación. Luego entrega el ticket de salida.	**Tipos de registros** • Lenguaje algebraico • Lenguaje cotidiano • Tablas • Gráficos • Metáfora • Diagrama	¿Terminan el juego? 75 min ¿Resuelven la evaluación? ¿Resuelven el ticket de salida?

Tarjetas juego “¿Quién tiene? Y Yo tengo” clase 6.

¿QUIÉN TIENE? Una recta de pendiente 2 y coeficiente de posición 1	**YO TENGO** $y = -7x + 7$
¿QUIÉN TIENE? Una recta paralela a $y=-2x+8$ y coeficiente de posición -1	**YO TENGO** $y = 2x + 1$
¿QUIÉN TIENE? Una recta de pendiente 2 y que pasa por el punto (1,5)	**YO TENGO** $y=-2x-1$
¿QUIÉN TIENE? La pendiente de la recta $-6x + 2y=4$	**YO TENGO** $y= 2x + 3$
¿QUIÉN TIENE? La ecuación en forma explícita de la recta $2x + 4y = 8$	**YO TENGO** 3
¿QUIÉN TIENE? La ecuación en forma general de $y = 2x – 4$	**YO TENGO** $y = -x/2 + 2$
¿QUIÉN TIENE? Una recta de pendiente 3 y coeficiente de posición 5	**YO TENGO** $2x - y - 4 = 0$
¿QUIÉN TIENE? Una recta paralela a $-2x+y+1=0$ y que pasa por el origen	**YO TENGO** $y = 3x + 5$
¿QUIÉN TIENE? Una recta de pendiente 3 y que pasa por el punto (3,-1)	**YO TENGO** $y = 2x$
¿QUIÉN TIENE? Una recta que pasa por los puntos P(0,0) y Q(1,3)	**YO TENGO** $y= 3x -10$

¿QUIÉN TIENE? **La pendiente de la recta 18x-3y=8**	**YO TENGO** **y = 3x**
¿QUIÉN TIENE? **El coeficiente de posición de la recta de ecuación -6x+2y-3=0**	**YO TENGO** **6**
¿QUIÉN TIENE? **Una recta de pendiente -2 y el mismo coeficiente de posición que la recta 5x+2y-4=0**	**YO TENGO** **3/2**
¿QUIÉN TIENE? **Una recta paralela a y= 3x-7 y coeficiente de posición -1**	**YO TENGO** **y = -2x+2**
¿QUIÉN TIENE? **Una recta que pasa por el punto (0,0) y el punto (1,-2)**	**YO TENGO** **y = 3x -1**
¿QUIÉN TIENE? **El coeficiente de posición de la recta de ecuación 2x+4y=8**	**YO TENGO** **y=-2x**
¿QUIÉN TIENE? **La ecuación en forma explícita de la recta -6x + 2y = 4**	**YO TENGO** **2**
¿QUIÉN TIENE? **Una recta que corta al eje x en (1,0) y al eje y en (0,3)**	**YO TENGO** **y=3x+2**
¿QUIÉN TIENE? **Una recta paralela a la recta y=-x+3 y que pasa por A(1,1)**	**YO TENGO** **y= -3x+ 3**
¿QUIÉN TIENE? **Una recta paralela a y = 3x, que pasa por el punto (2, -2)**	**YO TENGO** **y=-x + 2**

¿QUIÉN TIENE? **Una recta que pasa por el punto (1,3) y el punto (2,1)**	**YO TENGO** **y= 3x -8**
¿QUIÉN TIENE? **El coeficiente de posición de la recta de ecuación 8x-7y+7=0**	**YO TENGO** **y=-2x + 5**
¿QUIÉN TIENE? **La ecuación en forma general de** **y = 3x -15**	**YO TENGO** **1**
¿QUIÉN TIENE? **Una recta paralela a 4x+y-7=0, que corta al eje Y en (0,2)**	**YO TENGO** **6x -2y-30=0**
¿QUIÉN TIENE? **Una recta paralela a y = -2x+2, que pasa por el punto (1,1)**	**YO TENGO** **y = -4 x +2**
¿QUIÉN TIENE? **Una recta de pendiente 2 y coeficiente de posición 2**	**YO TENGO** **y= -2x + 3**
¿QUIÉN TIENE? **Una recta que pasa por los puntos A(2,7) y B(1,3)**	**YO TENGO** **y= 2x + 2**
¿QUIÉN TIENE? **La pendiente de la recta 8x -2y=15**	**YO TENGO** **y= 4x -1**
¿QUIÉN TIENE? **Una recta de pendiente 6 que corta al eje Y en (0,4)**	**YO TENGO** **4**
¿QUIÉN TIENE? **Una recta que corta al eje Y en (0,7) y al eje X en (1,0)**	**YO TENGO** **y= 6x + 4**

CAPÍTULO V

Conclusiones y discusiones

Las matemáticas son una herramienta fundamental para la vida de las personas, ya que desarrolla distintos tipos de pensamientos, como el matemático, el lógico, el crítico, el variacional, entre otros. Tradicionalmente, el aprendizaje de esta disciplina se ha asociado solo con asimilar fórmulas, procedimientos y símbolos; sin embargo, la matemática es dinámica, creativa, utiliza un lenguaje universal y se debe desarrollar como medio para aprender a pensar y para resolver problemas.

Tanto el aprendizaje como la enseñanza de la matemática se deben encaminar hacia el desarrollo de destrezas relevantes que puedan los estudiantes aplicar día a día en situaciones de la vida cotidiana, tales como el razonamiento, el pensamiento lógico, el pensamiento crítico, la argumentación y la resolución de problemas. Es necesario diseñar propuestas didácticas y lúdicas que sean esenciales para que los/as estudiantes logren desarrollar la capacidad de argumentar y explicar los procesos utilizados en la resolución de un problema, de demostrar su pensamiento lógico matemático, que sean capaces para interpretar situaciones cotidianas.

Uno de las grandes dificultades que existen en el ámbito educativo, son las clases de tipo expositivo, lo que no lleva al desarrollo de las habilidades, por eso esta investigación hace hincapié en el desarrollo de las habilidades propuestas por el programa de octavo año básico, como lo son resolver problemas, representar, modelar, argumentar y comunicar. El modelamiento matemático es una habilidad que enriquece la construcción del aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes, es por ello que el Ministerio de educación en Chile ha incorporado esta habilidad, pues beneficia a los estudiantes a representar las situaciones problemáticas reales mediante modelos matemáticos.

Las teorías de aprendizaje son una base fundamental para la pedagogía, en esta investigación se busca que el alumno sea capaz de relacionar tanto sus conocimientos cotidianos como los conocimientos académicos ya adquiridos, aplicándolos en situaciones de su contexto para que sea un aprendizaje significativo.

La formación matemática ofrece también la posibilidad de trabajar con entes abstractos y con las relaciones entre ellos, preparando a los estudiantes para comprender el medio en que se desenvuelven. El concepto de función surge como herramienta matemática para describir completamente diferentes fenómenos, aun así, es un concepto que a través de la historia ha sufrido constantes cambios, por lo cual, se debe estar constantemente actualizando conceptos.

Una función permite modelizar las múltiples situaciones del mundo real en las que aparecen valores que varían a partir de una regla fija como, por ejemplo: la variación de la temperatura, el crecimiento de la tasa de desempleo, el pago de impuestos, etc. Al hablar de modelizar se refiere a hallar la función que describe la variación o dependencia entre dos variables.

La función lineal se considera una excelente herramienta para estudiar y modelar problemas de variación. Para que los estudiantes comprendan este concepto no solo deben memorizar la definición formal expuesta en clases y textos escolares, sino que se deben crear modelos utilizando los distintos registros para lograr la conceptualización y resolver situaciones de la vida diaria. Al igual que la función lineal, la función afín permite modelar muchas situaciones cotidianas y, por lo tanto, es útil conocer su definición y la estrecha relación con la que se une con la función lineal.

Las funciones son asignaciones entre dos variables, que se pueden presentar de muchas maneras y estudiar con una variedad de herramientas. Todas esas maneras nos ayudan en su análisis y aportan desde distintas perspectivas.

Respondiendo a nuestras interrogantes el diseño de la secuencia didáctica favorece al aprendizaje de los estudiantes y es un aporte al desarrollo de las prácticas progresivas y profesional de los estudiantes en formación, pues es algo novedoso que refuerza la habilidad de modelar y mejora el contenido de funciones para sus estudiantes.

Los/as estudiantes que dibujen o construyan por sí mismo un diagrama en la elaboración de un concepto, recuerdan dicho concepto con mayor facilidad que cuando se le proporciona la idea abstracta, por ende, se produce un aprendizaje que perdura en el tiempo. Representar funciones mediante diagramas no es muy útil, solo se puede hacer cuando el número de entradas es pequeño. Sin embargo, nos ayuda a comprender los elementos esenciales que definen una función.

Esta propuesta facilita la comprensión de las funciones porque a través de las representaciones semióticas y utilizando la didáctica se logra que los y las estudiantes aprendan ese concepto. Al aplicar los registros de representación semióticos el alumno/a logra la conceptualización matemática y comprender de diversas formas las funciones. Al presentar situaciones de la vida cotidiana les resulta más fácil comprender este concepto y se adaptan a las distintas representaciones, permitiendo un aprendizaje significativo. La socioepistemología nos plantea que el contexto del estudiante es importante para la resignificación del concepto, es por esto que para la modelación matemática es prescindible el uso de los conocimientos previos del estudiante y el contexto en donde está inserto. Mediante una función se puede estudiar el cambio que ocurre cuando dos variables están relacionadas, porque se puede observar el cambio de una de ellas con respecto a la otra, aquí radica la importancia del estudio de las funciones.

En conclusión, este estudio ha permitido involucrarnos en la realidad de la enseñanza de las funciones y así otorgar un diseño de secuencia didáctica original, para que sea implementado en los estudiantes. Se sugiere que los/as docentes conozcan el contexto de sus estudiantes para implementar esta propuesta y así por consiguiente mejoren las prácticas en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Las matemáticas deben ser enseñadas dentro de contextos, ya que cuando se contextualizan los problemas matemáticos y se logra la simulación se rescatan las ideas intuitivas que la matemática formal deja de lado en la abstracción que se provoca en esta área del conocimiento.

El estudio de las funciones nos puede ayudar a ganar comprensión acerca del mundo que nos rodea y a predecir nuevos fenómenos.

CAPÍTULO VI

Referencias bibliográficas

Agencia Calidad de la Educación (2019). Resultados TIMSS Chile: Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias 2015. Santiago de Chile. Recuperado de https://www.agenciaeducacion.cl/estudios/estudios-internacionales/timss/

Agencia de la calidad de la educación (2018). Resultados educativos 2018, Gobierno de Chile. Recuperado de https://www.mineduc.cl/2019/05/16/resultados-simce-2018/

Ajello, A. M. (2003). La motivación para aprender. En C. Pontecorvo (Coord.), Manual de psicología de la educación (pp. 251-271). España: Popular.

Alsina, C., 1998, Contar bien para vivir mejor. Ed. Rubes, Barcelona.

Amestoy, M. (2002). La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades de pensamiento. *Revista electrónica de investigación educativa, vol. 4 (1).* Recuperado de https://redie.uabc.mx/redie/article/view/55/1379

Arancibia, Herrera & Strasser (2013) Manual de Psicología Educacional Sexta edición ampliada, EDICIONES UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE Casilla 114-D Santiago, Chile.

Araya, R. (2012). Cómo aplicar el modelamiento matemático en la sala de clases. Recuperado de http://www.ciae.uchile.cl/index.php?page=view_noticias&id=281

Ardila, R. (2013). El mundo de la psicología. Revista Latinoamericana de psicología, Vol. 45. (No. 2). Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/805/80518311.pdf

Arratia, J., Manríquez, P., y Valdebenito, D. (2016) *Visualización: Una herramienta para el desarrollo del conocimiento de razones, proporciones y proporcionalidad* (Tesis de pregrado). Universidad de Concepción, Los ángeles.

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1983) *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo.* México, Editorial Trillas. Traducción al español, de Mario Sandoval P., de la segunda edición de *Educational psychology: a cognitive view*.

Bangi, G. (marzo, 2004). Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria, *Relime. Vol* 7. pp. 5 – 23.

Bangi, G. (2009). Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria, *Relime, 7*(1), 5-23.

Barberá, E., y Badia, A. (2005). Hacia el aula virtual: actividades de enseñanza y aprendizaje en la red. Revista Iberoamericana De Educación, 36(9), 1-22. Recuperado de https://rieoei.org/RIE/article/view/2769

Bellester Sampedro S. (2009) Aplicaciones de las funciones matemáticas en la vida real y otras áreas. Recuperado de https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_23/SERGIO_BALLESTER_SAMPEDRO01.pdf

Bernoulli, J. (1718). Remarques sur ce qu' on a donn´e jusqu´ıci des solutions des probl´emes sur les isop´erim´etres, M´emoires de l' Acad´emie Royale des Sciences de Paris, pp. 100-139.

Bocco, M. (2013). Funciones elementales para construir modelos matemáticos. Buenos aires, Argentina: artes gráficas rioplatense.

Bustos Arriagada G. (2017). *Habilidades matemáticas: estudio de la correspondencia entre las bases curriculares, la planificación estandarizada y la gestión de la planificación declarada por los docentes.* Tesis de magister. Universidad Católica de la Santísima Concepción, Concepción, Chile.

Callahan J. & Hoffman K. (1995), Calculus in context: The five college calculus. Project W.H. Freeman and Company, New York 1995, USA.

Cantoral R., Farfán R., Lezama J., & Martínez–Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking, 83-102.

Cantoral, R. (2011). Fundamentos y Métodos de la Socioepistemología. 1 er Simposio en Matemática Educativa, CICATA del IPN, Ciudad de México, D.F., México.

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento. Barcelona: Gedisa.

Camacho, M., Santos, L. M., (2004). La relevancia de los problemas en el aprendizaje d las matemáticas a través de la resolución de problemas. Revista Números, Vol. 58. pp. 45-60.

Castro, E., Castro, E. (1997). *La educación matemática en la secundaria*. Coordinador: Luis Rico. Editorial Horsori.

Córdoba, L., Díaz, M., Haye, E. y Montenegro, F. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. En Y, Morales y A, Ramírez (Eds.) I CEMACYC Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe. (pp. 1-13). Santo Domingo, República Dominicana: CEMACYC. Recuperado de http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/373-401-2-DR-C.pdf

Coronel, R. (2013). Propuesta para mejorar la comprensión del lenguaje matemático de funciones lineales mediante el manejo de terminología especializada con perspectiva semántica (tesis de magíster, Universidad de Cuenca, Cuenca) Recuperado de http://dspace.ucuenca.edu.ec/bitstream/123456789/4912/1/TESIS.pdf

Díaz, A. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica, universidad nacional. Recuperado de http://www.setse.org.mx/ReformaEducativa/Rumbo%20a%20la%20Primera%20Evaluaci%C3%B3n/Factores%20de%20Evaluaci%C3%B3n/Pr%C3%A1ctica%20Profesional/Gu%C3%ADa-secuencias-didacticas_Angel%20D%C3%ADaz.pdf

Díaz, J. (2013) El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. Universidad de Sonora. México. Recuperado de https://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Diaz.a535a5fbaf7a54a6250cf5a0bf132fda.pdf

Duval, R. (1998) *Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2004). Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. Universidad del Valle, Colombia.

Elgueta, M., Palma, E. (2014) Una propuesta de clasificación de la clase magistral impartida en la facultad de derecho. *Rev. chil. derecho* vol.41, n.3, pp.907-924 Recuperado de https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S0718-34372014000300006&lng=es&nrm=iso

Espinoza Gonzalez, J. (2017) Resolución y planteamiento de problemas como estrategia metodológica en clases de matemáticas. *Atenas revista científico pedagógica.* Vol.3 Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/318196943_La_resolucion_y_planteamiento_de_problemas_como_estrategia_metodologica_en_clases_de_matematica

Espinoza, J., Espinoza, J., González, M., Zumbado, M. & Ramírez, C. (2008). La resolución de problemas en la Enseñanza de las Matemáticas: una experiencia con la función exponencial, polígonos y estadística. Tesis en opción al Grado de licenciatura. Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica.

Euler L. Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum, 1755. [E 212].

Farias, D., Pérez, J. (2010). Motivación en la Enseñanza de las Matemáticas y la Administración. *Revista Scielo, Vol*. 3(6), 33-40(2010). Recuperado de https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-50062010000600005

Feldman, R.S. (2005) “Psicología: con aplicaciones en países de habla hispana”. (Sexta Edición) México, McGrawHill.

Fernández Carreira, C. (2013). *Principales dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. Pautas para maestros de Educación Primaria.* Barcelona, Argentina.

Flores, P. (s.f.). Aprendizaje en Matemáticas. Recuperado de https://www.ugr.es/~pflores/textos/cLASES/CAP/APRENDI.pdf

Funciones: Representación y Tipos (2013). *Educación permanente de adultos “mar menor”*. Recuperado de https://cepamarm.es/documentos/CFGS-Matematicas/101-Funciones-Representacion-y-Tipos.pdf

Gagné R. y Biggs L. (1999): La planificación de la enseñanza. Sus principios. México, Trillas.

Gajardo, L., Venegas, P. (2018). Modelamiento matemático y usos de representaciones semióticas en la enseñanza de funciones en 8° año básico (Tesis de Pregrado, Universidad de Concepción, Los Ángeles, Chile). Recuperado de http://152.74.17.92/jspui/bitstream/11594/2644/3/Gajardo%20-%20Venegas.pdf

García Huidobro, B.C., Gutiérrez G.M. y Condemarín G.E.; “A estudiar se aprende”, Chile, 1999.

Gil, N., Guerrero, E. y Blanco, L. (enero-abril, 2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa, 4(1), 47-72. Recuperado de http://www.investigacion-psicopedagogica.org/revista/articulos/8/espannol/Art_8_96

Godino, J.; Batanero, C.; Font, V. (2004). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Universidad de Granada. España

Gonzáles, Z. A. (2004). Aportaciones de la psicología conductual a la educación. Revista electrónica Sinéctica. (No 25), pp. 15-22

González Burón, P. (2015). *Dificultades en el aprendizaje de las funciones de las matemáticas* (tesis de maestría, Universidad de Cantabria, Santander, España). Recuperado de https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/6893/Gonz%c3%a1lezBuronPaula.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Goñi. J. Ma. (2008). El desarrollo de la competencia matemática. Barcelona: Graó.

Gutiérrez, F. (2005) Teorías del desarrollo cognitivo. Nueva york, Estados unidos: Editorial McGraw-Hill.

Heredia, Y. & Sánchez, A. (2013). *Teorías del aprendizaje en el contexto educativo.* Recuperado de http://prod77ms.itesm.mx/podcast/EDTM/P231.pdf

Hernández, R. Fernández, C. Baptista, P. (2014). Metodología de la investigación (6a.ed.).México: McGRAW-HILL

Hitt, F. (2014). Nuevas tendencias en la enseñanza del cálculo: la derivada en ambientes TICE. *Departamento de matemáticas, Universidad de Quebec.*

Iori, M. (2014). Matemática y semiótica en el aula: un punto de vista necesario. In C. J. Mosquera Suárez (Ed.), *Miradas contemporáneas en educación: Algunos puntos clave para el debate* (pp. 27-44). Chia (Colombia): Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1972). El equilibrio de la balanza. En B. Inhelder, & J. Piaget (Eds.), De la lógica del niño a la lógica del adolescente. Ensayo sobre la construcción de las estructuras operatorias formales (pp. 142–155). Buenos Aires: Paidós.

Kleiner, I. (1989). Evolución del concepto de función: una breve encuesta. The college Mathematics Journal. 20(4), 282-300.

Leal, S., Bong, S. (2015) La resolución de problemas matemáticos en el contexto de los proyectos de aprendizaje Revista de Investigación, Vol. 39. (Nº 84) pp. 71-93.

Leinhardt, G., Stein, M. & Zaslavsky, O. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research, 60(1),* 1-64

López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. En P, Lestón (Ed.). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21 (pp. 308-318). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/4946/1/L%C3%B3pezDificultadesALME2008.pdf

Macías Sánchez, J. (2014) Los registros semióticos en Matemáticas como elemento personalizado en el aprendizaje. Revista de Investigación Educativa. Conect@2, 4(9): 2757.

Maldonado L. (2013). *El modelamiento matemático en la formación del Ingeniero*. Ministerio de Educación Nacional de Bogotá, Colombia. Recuperado de http://iconk.org/docs/modelamiento.pdf

Manríquez, L. (2014). Algunos códigos curriculares de la actual enseñanza básica chilena. *Estudios pedagógicos,* vol. (40). Recuperado de https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-07052014000300025

Marchant, V. Mena, S. (2015). *Procesos y habilidades cognitivas para la potenciación de aprendizajes escolares (Tesis pregrado).* Universidad Academia de humanismo cristiano, Santiago de Chile.

Martinez, B & Macías, J. (2016). *Didáctica de las matemáticas en Educación Infantil.* Recuperado de https://www.unir.net/wp-content/uploads/2016/04/Didactica_matematicas_cap_1.pdf

Mena, M. (2009). *¿Qué es enseñar y qué es aprender?*. Guayaquil, Ecuador: Santillana S.A.

MINEDUC. (2012). Bases curriculares de Educación Básica: consulta pública. Santiago de Chile: Ministerio de Educación.

MINEDUC, (2013). Bases curriculares 7° Básico a 2° Medio. Santiago de Chile. Recuperado de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-34961_Bases.pdf

MINEDUC, (2015). Bases curriculares 7° Básico a 2° Medio.

MINEDUC, (2016). Programa de Estudio Octavo Básico. Santiago de Chile. Recuperado de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18983_programa.pdf

MINEDUC, (2016). Bases curriculares de 7° a II° medio de la asignatura de matemática. Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-37136_bases.pdf

Miró, Joan (1944). Estrategias de la investigación descriptivas. Recuperado de http://invetigacioncualitativaycuantitativa.blogspot.com/2017/06/investigacion-cuantitativa.html

Moreira, M. (1997). Aprendizaje significativo: un concepto subyacente. Instituto de física, Porto Alegre, Brasil.

Naranjo, M. (2009) Motivación: perspectivas teóricas y algunas consideraciones de su importancia en el ámbito educativo. *Revista educación* 33(2), 153-170.

Ñeco, M. (2005). El rol del maestro en un esquema pedagógico constructivista, México.

Olfos, R., Soto, D., & Silva, H. (2007). Renovación de la enseñanza del algebra elemental: un aporte desde la didáctica. *Revista Scielo. Vol (33).* Recuperado de https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-07052007000200005

Ordóñez, C. (2016). Pensar pedagógicamente, de nuevo, desde el constructivismo. *Revista Ciencias de la Salud*, [S.l.], v. 4, mayo. ISSN 2145-4507 Recuperado de https://revistas.urosario.edu.co/index.php/revsalud/article/viewFile/780/701

Oviedo, L., Kanashiro, A. (2012). Los registros semióticos de representación matemática. *Revista Aula Universitaria*, núm. 13. pp. 29- 36.

Palomino, J (2011). Comprensión lectora y rendimiento escolar: una ruta para mejorar la comunicación. *Revista de Investigación en Comunicación y Desarrollo, vol. 2,* núm 2. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/4498/449845038003.pdf

Pascal D. & Vidal G., 2013) .*Implementación de algunos aspectos de la metodología de estudio de casos en la enseñanza de las matemáticas.* (Tesis de pregrado). Universidad de Concepción, Los Ángeles.

Pellón, R. (2013). Watson, Skinner y algunas disputas dentro del conductismo. Revista Colombiana de Psicología, 22(2), 389-399.

Preiss D., Larraín A., Susana V. (2011) Discurso y Pensamiento en el Aula Matemática Chileno. PSYKHE 2011, Vol. 20, N˚ 2, 131-146

Reeve, J. (2009). Motivación y Emoción. México: McGrawHill.

Reid, M., Gareis, M., Hernández, A., Roldán, M. (2012). Funciones con modelización matemática. Revista Didáctica de las Matemáticas, vol. 81, pp. 91- 101

Rey, G., Boubée, C., Sastre, P., Cañibano, A. (2009). Ideas para Enseñar. Aportes didácticos para abordar el concepto de función. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, núm. 20, pp. 153- 162.

Rivera, M. J. (2004). El aprendizaje significativo y la evaluación de los aprendizajes. *Revista de investigación educativa* año 8 n° 14. Recuperado de http://online.aliat.edu.mx/adistancia/dinamica/lecturas/El_aprendizaje_significativo.pdf

Romero, F. (2009, 3 de Julio). Aprendizaje significativo y constructivismo. *Revista digital para profesionales de la enseñanza.* Recuperado de https://www.feandalucia.ccoo.es/docu/p5sd4981.pdf

Roldán, E. (2013). El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grados de educación básica (Memoria de Magister, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia). Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/12943/1/1186875.2013.pdf

Rüting, D. (1984). Some definitions of the Concept of Function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki. The Mathematical Intelligencer. Vol. 6, No. 4.

Ruíz, J.M. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática. Revista Iberoamericana de Educación 47(3).

Salas, E. (2013). Diseños Preexperimentales en Psicología y Educación: una revisión conceptual. Instituto de Investigación de la Escuela de Psicología de la Facultad de Ciencias de la Comunicación, Turismo y Psicología. Universidad de San Martín de Porres. Perú. pp. 132-141.

Salinas, N. y Sgreccia, N. (2016). Concepciones docentes acerca de la resolución de problemas en la escuela secundaria. Revista números Vol. 94. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/94/Articulos_02.pdf

Sampieri, R. H. (2014). *Metodologia de la Investigacion.* Peru: McGRAW-HILL

Sanz, M. T., Menéndez, F. J., Rivero, M. D., & Conde, M. (2009). Psicología de la motivación. Madrid: Sanz y Torres.

Santrock, J. (2002). Psicología de la educación. México: Mc Graw-Hill

Sastre, P., Rey, G. y Boubée, C. (Diciembre, 2008). El concepto de función a través de la historia. *Revista iberoamericana de educación matemática.* Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2008/16/Union_016_014.pdf

Sarmiento, M. (2004). *La Enseñanza de las Matemáticas y las Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación* (tesis doctoral, UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI, Tarragona). Recuperado de http://nportal0.urv.cat:18080/fourrepo/rest/digitalobjects/DS?objectId=TDX:705&datastreamId=Memoria&mime=application/pdf

Sarmiento, M. (2007). La enseñanza de las matemáticas y las tic. Una estrategia de formación permanente. Universitat Rovira i virgili. España. Recuperado de https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/8927/D-TESIS_CAPITULO_2.pdf

Sarmiento, M. (2004). *La enseñanza de las matemáticas y las nuevas tecnologías de la información y comunicación. (Tesis doctoral).* Universitat Rovira I Virgili, Tarragona, España.

Sarmiento, M. y Manzanilla, J. (2011). Unidad didáctica para enseñar y aprender funciones matemáticas con Maple. Revista de Evaluación e investigación, 6 (1), 121-134. Recuperado de http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/35335/1/articulo8.pdf

Schunk, H. (2011). *Teorías del aprendizaje, una perspectiva educativa.* Estado de México, México: editorial Pearson.

Schunk, D. (2012). *Teorías del aprendizaje. Una perspectiva educativa*, México. Recuperado de http://www.visam.edu.mx/archivos/_LIBRO%206xta_Edicion_TEORIAS_DEL_APRENDIZAJE%20-%20DALE%20H%20SCHUNK.pd

Sepúlveda, A., Vargas, V., Escalante, C (2013). Problemas geométricos de variación y el uso de software dinámico. Revista Números, Vol. 82. pp. 65-87Shuell, T. J. (1986). *The role of the student in learning from instruction*. Contemporary Educational Psychology, 13, 276-295.

Shílov, G. E. (2004). ¿Qué es una función? Revista rusa Matematika v Shkole, 137-147.

Shulman, L. y Keislar, E. (1974). Aprendizaje por Descubrimiento. Evaluación crítica. México: Trillas.

Tall, D. (editor), (1991). Advanced Mathematical thinking. Kluwer.vadenumeros.es. (5 de marzo de 2015). Recuperado de https://www.vadenumeros.es/primero/dominio-y-recorrido-de-funciones.htm

Tamayo, O. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza delas ciencias y las matemáticas. Revista educación y pedagogía, 18 (45), 39-49.

Taylor, S. y Bogdan R. (1989). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona, España: Paidós.

Valdés (2011) Una aproximación a la relación entre el rendimiento académico y la dinámica y estructura familiar en estudiantes de primaria Revista Intercontinental de Psicología y Educación, vol. 13, núm. 2. pp. 177-196

Zúñiga López M. (2009) Estudio acerca de la construcción del concepto de función, visualización. En alumnos de un curso de cálculo I (Tesis postgrado, Universidad pedagógica nacional Francisco Morazán, Honduras). Recuperado de http://www.cervantesvirtual.com/descargaPdf/un-estudio-acerca-de-la-construccion-del-concepto-de-funcion-visualizacion-en-alumnos-de-un-curso-de-calculo-i/

Zabala y Arnau (2007), ¿Cómo aprender y enseñar competencias?.