



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Estudio del Régimen Lineal y No-lineal en un Plasma
Electrón-Ión No-magnetizado**

Tesis presentada para optar al título profesional de Físico

Por: Hugo Alexis Carril Pardo

Profesor Guía: Dr. Jaime Andrés Araneda Sepúlveda

3 de Noviembre, 2020

Concepción, Chile

Se autoriza la reproducción total o parcial con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.



Índice general

1. Introducción	1
1.1. Hipótesis del trabajo	12
1.1.1. Perturbaciones amortiguadas	12
1.1.2. Perturbaciones no-lineales - caso isotérmico	12
1.2. Objetivos	13
1.2.1. Objetivos generales	13
1.2.2. Objetivos específicos	13
1.3. Metodología	14
1.3.1. Simulaciones	14
1.3.2. Relación de dispersión lineal	15
1.3.3. Alcance y limitaciones	15
1.4. Organización del trabajo	17
2. Teoría Cinética en Física de Plasmas y Ondas Electroestáticas	18
2.1. Ecuación de Vlasov y sistema de ecuaciones	18
2.1.1. Propiedades del sistema de Vlasov-Poisson	21
2.2. Aproximación lineal del sistema de ecuaciones de Vlasov-Poisson	22
2.2.1. Relación de dispersión lineal	22

2.2.2.	Modos lineales en un plasma electrón-ión	25
2.3.	Fenómenos no-lineales	28
2.3.1.	Amortiguamiento no-lineal de Landau	28
2.3.2.	Estados BGK y <i>electron holes</i>	29
2.3.3.	Interacción entre <i>electron holes</i> e iones pesados	31
2.3.4.	Solitones ión-acústicos	33
3.	Fundamentos de la integración numérica e implemtación numérica	36
3.1.	Normalizaciones y escalas de especies	36
3.2.	Integración del sistema de Vlasov-Poisson	39
3.2.1.	Integración del campo eléctrico	39
3.2.2.	Integración de la ecuación de Vlasov	41
3.3.	Resolución de la relación de dispersión lineal	48
4.	Perturbaciones amortiguadas en un plasma de electrones y iones Maxwellianos	49
4.1.	Amplitud del modo excitado del campo eléctrico y espectros	51
4.2.	Comportamiento en el dominio de velocidades	54
4.3.	Contribución de cada especie a las oscilaciones amortiguadas	59
4.4.	Resumen y discusión	65
5.	Evolución no-lineal de un plasma de electrones y iones Maxwellianos	69
5.1.	Dinámica de baja frecuencia en el caso de iones móviles	70
5.1.1.	Espectros del campo eléctrico	70
5.1.2.	Densidad de electrones y espacio de fase	70

5.2. Comparación del régimen no-lineal entre los casos de iones móviles y iones inmóviles	74
5.2.1. Espectro del campo eléctrico	75
5.2.2. Densidad de electrones filtrada en frecuencias	75
5.2.3. Función de distribución de los electrones	76
5.2.4. Efectos en el rango de altas velocidades	78
5.3. Dinámica de baja frecuencia asociada a iones pesados móviles	79
5.3.1. Espectros del campo eléctrico	80
5.3.2. Componente de baja frecuencia del potencial electrostático	82
5.3.3. Evolución de la densidad de electrones	84
5.3.4. Evolución de la densidad de iones pesados	87
5.4. Estructuras no-lineales asociadas a electrones e iones	90
5.4.1. Correlaciones locales	91
5.4.2. Funciones de distribución	92
5.5. Resumen y discusión	103
6. Conclusiones	107
Apéndices	112
A. Cálculo de la relación de dispersión lineal	113
A.1. Relación de dispersión lineal desde ec.(2.2.6) a ec.(2.2.8)	113
A.2. Relación de dispersión lineal desde ec.(2.2.8) a ec.(2.2.10)	114
B. Diccionario	118
B.1. Abreviaciones	118

Índice de figuras

1.1. Variaciones de trayectorias de partículas respecto del equilibrio, $x_{eq,i}(t) = x_{0,i} + v_{0,i}t$, para una partícula ligera, m_1 , y una partícula pesada, m_2 , impulsadas por una LW y una IAW de baja amplitud. La partícula m_2 no se desvía significativamente con respecto de su trayectoria de equilibrio (a). A tiempos más largos (b), las desviaciones no son despreciables.	2
1.2. Evolución del modo excitado del campo eléctrico $ E(m = 1) $ para diferentes amplitudes de perturbación (a) $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-1}$, (b) $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-2}$, (c) $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$ y (d) $\varepsilon_e = 3.0 \times 10^{-3}$, para iones móviles e inmóviles, con $T_i/T_e = 1.0$. Gráficos cortesía de Xu <i>et al.</i> [20]. . . .	6

2.1.	Modos menos amortiguados que resuelven la relación de dispersión lineal en un plasma electrostático, no magnetizado, con electrones y iones Maxwellianos (2.2.10). La razón de masa es $m_i/m_e = 1836.153$ y se muestran diferentes razones de temperatura T_i/T_e . Se muestran la frecuencia (a) y tasa de amortiguamiento (b) del modo de Langmuir, y la frecuencia (c) y tasa de amortiguamiento (d) del modo ión-acústico. La rama de Langmuir permanece invariante para las razones T_i/T_e mostradas.	26
2.2.	Raíces de la relación de dispersión lineal (2.2.10) correspondientes a modos de alto orden de baja frecuencia. Se muestran frecuencia y tasa de amortiguamiento para $T_i/T_e = 5.0$ [(a) y (b)], $T_i/T_e = 1.0$ [(c) y (d)] y $T_i/T_e = 0.025$ [(e) y (f)]. Razón de masa $m_i/m_e = 1836.153$. Se muestran los siete modos de orden superior de baja frecuencia menos amortiguados para cada razón de temperatura.	27
2.3.	Evolución de la amplitud del modo excitado del campo eléctrico, $m = 1$, en un plasma de electrones (iones inmóviles), para los casos lineal, $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-4}$, amortiguado ligeramente no-lineal, $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$, y el caso no-lineal, $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$, siendo ε_e la amplitud de perturbación inicial.	29
2.4.	Evolución de la función de distribución de electrones f_e alrededor de la zona de resonancia para el amortiguamiento no-lineal de Landau de ondas de Langmuir considerando iones inmóviles.	30

2.5.	Esquema de la función de distribución $f_e(E) = f_e(x, v)$ (2.3.1). La solución está centrada en la zona de atrapamiento, en el rango $-\sqrt{v_0^2 + 2\phi} < v < \sqrt{2\phi}$, donde ϕ es el potencial electrostático normalizado. Figura cortesía de Schamel, 1986 [21].	31
2.6.	Esquema de (a) el potencial electrostático de amplitud ψ alrededor del <i>electron hole</i> , y (b) del espacio de fase de los electrones con contornos de energía E constante que representan electrones atrapados (región gris) y no atrapados (región blanca). La posición está medida en longitudes de Debye de electrones, λ_{De} , la velocidad en velocidad ión-acústica, c_S , y el potencial está medido en energía por unidad de carga, T_e/e . Figura cortesía de Zhou y Hutchinson, 2017 [55].	32
2.7.	Solitones ión-acústicos acercándose. La figura muestra la densidad de los iones n_i (línea negra segmentada) y el potencial electrostático ϕ (línea sólida azul). La posición está medida en longitudes de Debye de electrones, λ_{De} , la densidad de iones en la densidad del estado de equilibrio, n_∞ , y el potencial está medido en T_e/e . Figura cortesía de Zhou y Hutchinson, 2018 [36].	34
4.1.	Evolución de la amplitud del primer modo del campo eléctrico $ \bar{E}_1 $ para (a) $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-3}$ y (b) $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$, con iones móviles e inmóviles. Se muestran las tasas de las ondas observadas, para ondas de Langmuir (línea roja segmentada) y ondas ión acústicas (línea azul segmentada).	51

4.2. Espectro del campo eléctrico $ \bar{E}_{k,\omega} $ de $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-3}$ para (a) el rango de tiempo inicial de alta frecuencia y (b) el rango de baja frecuencia posterior. Se muestran raíces de la relación de dispersión lineal (línea sólida blanca), correspondientes al modo de Langmuir (a) y al IA (b).	52
4.3. Espectro del campo eléctrico $ \bar{E}_{k,\omega} $ de $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$ para (a) el rango de tiempo inicial de alta frecuencia, (b) rango de tiempo posterior de alta frecuencia y (c) rango de tiempo posterior de baja frecuencia. Se muestran raíces de la relación de dispersión lineal (línea sólida blanca), correspondientes al modo de Langmuir [(a) y (b)] y al IA (c).	53
4.4. Evolución de las variaciones de la función de distribución de los iones promediadas en posiciones, $\langle \delta \bar{f}_i \rangle_{\bar{x}}$. Como referencias se muestran la velocidad de fase de onda ión acústica (línea blanca punteada) y la velocidad resonante inicial (línea blanca segmentada) para $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$.	55
4.5. Detalles de (a) la etapa inicial y (b) la transición a tiempos largos de las variaciones de la función de distribución de los iones promediadas en posiciones, $\langle \delta \bar{f}_i \rangle_{\bar{x}}$, para $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$. Se indican las mismas velocidades.	56
4.6. Secciones de las variaciones de la función de distribución de los electrones promediadas en posiciones, $\langle \delta \bar{f}_e \rangle_{\bar{x}}$ [(a) a (c)], y de los iones, $\langle \delta \bar{f}_i \rangle_{\bar{x}}$ [(d) a (f)], para $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$. Se muestran la velocidad resonante inicial (línea negra segmentada) y $\bar{v}_{\phi,IA}$ (línea negra punteada).	57
4.7. Variaciones en la densidad de iones $\delta \bar{n}_i$ durante la etapa inicial de la evolución del plasma. Amplitud de perturbación $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$.	58

4.8. Evolución de las variaciones de la función de distribución de los electrones promediadas en posiciones, $\langle \delta \bar{f}_e \rangle_{\bar{x}}$. Se muestran la velocidad resonante inicial (línea negra segmentada) y $\bar{v}_{\phi,IA}$ (línea negra punteada), para $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$	59
4.9. Evolución de las amplitudes promediadas en posiciones de las densidades de partículas $\langle \delta \bar{n}_j^2 \rangle_{\bar{x}}$ para $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-3}$	60
4.10. Evolución de las amplitudes promediadas en posiciones de las densidades de partículas $\langle \delta \bar{n}_j^2 \rangle_{\bar{x}}$ para $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$	61
4.11. Evolución inicial de las correlaciones $\langle C [\langle \delta \bar{f}_{e,i} \rangle_{\bar{x}} \langle \delta \bar{f}_{e,m} \rangle_{\bar{x}}] \rangle_{\bar{v}_r}$ sobre el rango de velocidades $v_r = [0.0, 1.5]$, para $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-3}$ y 8.0×10^{-3}	62
4.12. Evolución de las correlaciones $\langle C [\langle \delta \bar{f}_{e,i} \rangle_{\bar{x}} \langle \delta \bar{f}_{e,m} \rangle_{\bar{x}}] \rangle_{\bar{v}_r}$ sobre el rango $v_r = [2.0, 4.0]$ para $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-3}$ y 8.0×10^{-3}	63
4.13. Espectro del (a) campo eléctrico, $ \bar{E}_{k,\omega} $, (b) variaciones de densidad de electrones, $ \delta \bar{n}_{e,k,\omega} $, y (c) variaciones de densidad de iones, $ \delta \bar{n}_{i,k,\omega} $, del rango de tiempo $0 \leq t\omega_{pe} \leq 200$ para $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-3}$. Se muestran raíces de la relación de dispersión lineal (línea sólida blanca), correspondientes al modo de Langmuir [(a) a (c)].	64
4.14. Espectro del (a) campo eléctrico, $ \bar{E}_{k,\omega} $, (b) variaciones de densidad de electrones, $ \delta \bar{n}_{e,k,\omega} $, y (c) variaciones de densidad de iones, $ \delta \bar{n}_{i,k,\omega} $, del rango de tiempo $200 \leq t\omega_{pe} \leq 1700$ para $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-3}$. Se muestran raíces de la relación de dispersión lineal (línea sólida blanca), correspondientes al modo de Langmuir [(a) a (c)].	65

4.15. Espectros del (a) campo eléctrico, $ \bar{E}_{k,\omega} $, (b) variaciones de la densidad de electrones, $ \delta\bar{n}_{e,k,\omega} $, y (c) variaciones de la densidad de iones, $ \delta\bar{n}_{i,k,\omega} $, del rango $0 \leq t\omega_{pe} \leq 200$ para $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$. Se muestran raíces de la relación de dispersión lineal (línea sólida blanca), correspondientes al modo de Langmuir [(a) a (c)].	66
4.16. Espectros del (a) campo eléctrico, $ \bar{E}_{k,\omega} $, (b) variaciones de la densidad de electrones, $ \delta\bar{n}_{e,k,\omega} $, y (c) variaciones de la densidad de iones, $ \delta\bar{n}_{i,k,\omega} $, del rango $200 \leq t\omega_{pe} \leq 1700$ para $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$. Se muestran raíces de la relación de dispersión lineal (línea sólida blanca), correspondientes al modo de Langmuir [(a) a (c)].	67
5.1. Espectros del campo eléctrico $ \bar{E}_{k,\omega} $ para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$ para el caso de iones inmóviles. Se muestran tres intervalos de tiempo.	71
5.2. Evolución de las variaciones de (a) la densidad de electrones, filtrada en frecuencia, $\delta\bar{n}_{e,fil}$, y (b) su transformada de Fourier espacial, ambas para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$ con iones inmóviles.	72
5.3. Evolución de las variaciones de la función de distribución de los electrones, $\delta\bar{f}_e$, en el rango de velocidades bajas con iones inmóviles con amplitud de perturbación $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$. Se muestra la velocidad de las estructuras encontradas en Fig.5.2 (línea segmentada negra). . . .	73
5.4. Evolución de la energía del campo eléctrico \bar{E}_E para el caso no-lineal, $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$	74

5.5. Espectros del campo eléctrico $ \bar{E}_{k,\omega} $ con $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$ para el caso de iones móviles. Se muestran tres intervalos de tiempo. Además, se muestran raíces de la relación de dispersión lineal (2.2.10), correspondientes al modo IA (línea sólida blanca) y al modo de orden superior de alta frecuencia menos amortiguado (línea segmentada blanca).	76
5.6. Evolución de las variaciones de (a) la densidad de electrones, filtradas en frecuencias, $\delta\bar{n}_{e,\text{fil}}$, y (b) su transformada de Fourier espacial, con $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$ e iones móviles.	77
5.7. Evolución de las variaciones de la función de distribución de los electrones, $\delta\bar{f}_e$, en el rango de bajas velocidades, con iones móviles, para la amplitud de perturbación $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$. Se muestra la velocidad de las estructuras en cada instante (línea segmentada negra).	78
5.8. Correlaciones entre las variaciones de las funciones de distribución promediadas en posiciones de los electrones de los casos con iones móviles, $\langle\delta\bar{f}_{e,m}\rangle_x$, y iones inmóviles, $\langle\delta\bar{f}_{e,i}\rangle_x$, $\langle C [\langle\delta\bar{f}_{e,m}\rangle_x, \langle\delta\bar{f}_{e,i}\rangle_x] \rangle_v$. Las correlaciones se promedian en velocidades en el rango $2.0 \leq \bar{v} \leq 5.0$	79
5.9. Secciones de las correlaciones promediadas en posición entre las variaciones de la función de distribución completa de los electrones del caso con iones móviles, $\delta\bar{f}_{e,m}$, y iones inmóviles, $\delta\bar{f}_{e,i}$, $\langle C [\delta\bar{f}_{e,i}, \delta\bar{f}_{e,m}] \rangle_x$. Amplitud de perturbación inicial $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$	80
5.10. Variaciones de la función de distribución de los electrones, $\delta\bar{f}_e$, para el caso de iones inmóviles [(a) a (d)] y iones móviles [(e) s (h)], para la región de atrapamiento relacionada con el modo de Langmuir. Amplitud de perturbación inicial $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$	81

5.11. Evolución de las variaciones del (a) potencial electrostático, filtrado en frecuencia, $\bar{\Phi}_{\text{fil}}$, y (b) su transformada de Fourier en posiciones para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$, con iones móviles. El intervalo de tiempo corresponde a la localización de estructuras solitarias en el potencial.	82
5.12. Evolución de las variaciones del (a) potencial electrostático, filtrado en frecuencia, $\bar{\Phi}_{\text{fil}}$, y (b) su transformada de Fourier en posiciones para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$, con iones móviles. El intervalo de tiempo mostrado considera la formación y propagación de estructuras solitarias.	84
5.13. Evolución de las variaciones de (a) la densidad de electrones, filtrada en frecuencias, $\delta\bar{n}_{e,\text{fil}}$, y (b) su transformada de Fourier en posiciones, para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$, con iones móviles. El intervalo de tiempo mostrado considera la formación de las cavidades de electrones.	85
5.14. Espectros de las variaciones de la densidad de electrones $ \delta\bar{n}_{e,k,\omega} $ para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$, para el caso de iones móviles. Se muestran tres intervalos de tiempo. Además, se muestran raíces de la relación de dispersión lineal (2.2.10), correspondientes a la rama IA (línea sólida blanca) y el modo de orden superior de baja frecuencia menos amortiguado (línea segmentada blanca).	86
5.15. Evolución de (a) las variaciones de la densidad de iones, $\delta\bar{n}_i$, y (b) su transformada de Fourier en posiciones para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$. El intervalo de tiempo considera la localización de pulsos compresivos.	88
5.16. Evolución de (a) las variaciones de la densidad de iones, $\delta\bar{n}_i$, y (b) su transformada de Fourier en posiciones para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$. El intervalo de tiempo considera la formación de los pulsos compresivos de iones y su posterior propagación.	89

5.17. Espectros de las variaciones de la densidad de los iones $ \delta\bar{n}_{i,k,\omega} $ para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$ para el caso de iones móviles. Se muestran tres intervalos de tiempo. Además, se muestran raíces de la relación de dispersión lineal (2.2.10), correspondientes al modo IA lineal (línea sólida blanca) y al modo de orden superior de baja frecuencia menos amortiguado (línea segmentada blanca).	90
5.18. Evolución de $C[\delta\bar{n}_i, \delta\bar{n}_{e,fl}]$. Se indica el instante de localización τ_{loc} (línea segmentada roja) para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$	91
5.19. Variaciones de la función de distribución de los electrones, $\delta\bar{f}_e$ [(a) a (d)] y iones $\delta\bar{f}_i$ [(e) a (h)] con $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$, antes de la localización de las estructuras no-lineales en ambas densidades. Se indica la velocidad $\bar{v}_{\phi,IA}$ (línea negra punteada).	93
5.20. Evolución de las variaciones de la función de distribución de los iones promediadas en posiciones, $\langle\delta\bar{f}_i\rangle_{\bar{x}}$, alrededor de $\bar{v} = \bar{v}_{\phi,IA}$ for $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$	94
5.21. Evolución de las variaciones de la función de distribución de los electrones promediadas en posiciones, $\langle\delta\bar{f}_e\rangle_{\bar{x}}$, alrededor de $\bar{v} = \bar{v}_{\phi,IA}$ para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$	95
5.22. Variaciones de la función de distribución de los electrones $\delta\bar{f}_e$ [(a) a (d)] y de los iones $\delta\bar{f}_i$ [(e) a (h)] para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$, durante la propagación de cavidades de electrones y de pulsos de iones compresivos. Se muestran las velocidades $\bar{v}_{\phi,IA}$ (línea punteada negra) y del <i>electron hole</i> \bar{v}_H (línea segmentada negra).	96

5.23. Variaciones de la componente de baja frecuencia de la densidad de electrones, $\delta\bar{n}_{e,\text{fl}}$ (negro), y variaciones de la densidad de los iones, $\delta\bar{n}_i$ (rojo), para los instantes mostrados en la Fig.5.22, considerando velocidades positivas y negativas de las funciones de distribución.	97
5.24. Variaciones de la función de distribución de los electrones, $\delta\bar{f}_e$, [(a) a (d)] y de los iones $\delta\bar{f}_i$ [(e) a (h)] para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$, durante la propagación de cavidades de electrones y de los pulsos compresivos de iones. Se muestran las velocidades $\bar{v}_{\phi,IA}$ (línea punteada negra) y del <i>electron hole</i> \bar{v}_H (línea segmentada negra).	99
5.25. Variaciones de la componente de baja frecuencia de la densidad de electrones, $\delta\bar{n}_{e,\text{fl}}$ (negro), y variaciones de la densidad de los iones, $\delta\bar{n}_i$ (rojo), para los instantes mostrados en la Fig.5.24, considerando sólo estructuras que se propagan con velocidad positiva.	100
5.26. Detalles de las variaciones de la distribución de los electrones, $\delta\bar{f}_e$ [(a) a (d)], y de los iones, $\delta\bar{f}_i$ [(e) a (h)]. En esta última se considera un rango de velocidades $\bar{v}_{\phi,IA} \leq \bar{v} \leq \bar{v}_H$ durante el proceso de formación de los <i>holes</i> secundarios. Se muestran las velocidades $\bar{v}_{\phi,IA}$ (línea punteada negra) y del <i>electron hole</i> \bar{v}_H (línea segmentada negra).	102

Agradecimientos

El pregrado ha sido un camino largo de casi diez años, y no menos complicado. Por un lado, quiero agradecer a mi familia, que estuvo apoyándome, en especial a mis padres que trabajaron ardua y esforzadamente para que pudiera ocuparme de realizar no sólo esta tesis sino que también para que pudiera estudiar en todo el tiempo que esto ha durado, pudiendo culminar una carrera universitaria y por enseñarme la importancia de estudiar.

También agradezco a los profesores que me guiaron en la realización de esta tesis. Al profesor Jaime Araneda, por sus ideas, su experiencia, la agudeza de sus análisis y su comprensión. Al profesor Roberto Navarro, por haberme aconsejado y ayudado en innumerables ocasiones.

Agradezco a los funcionarios de la Universidad de Concepción por su inmensa disposición y paciencia cuando necesitaba realizar trámites importantes y largos.

Agradezco al Ministerio de Educación de Chile por financiar las becas de Excelencia Académica, Bicentenario y Gratuidad que recibí, al señor Gonzalo Pincheira, quien financió gran parte de mis estudios en mi primera carrera, y a la Universidad de Concepción por la beca de Articulación pregrado-postgrado. Esto le permitió a mi familia y a mí librarnos de preocupaciones económicas a causa de mis estudios. Así mismo, agradezco a quienes lograron poner en la mesa el problema educacional en

este país. Es cierto que no está resuelto, pero esos pequeños avances han permitido a más personas, entre quienes me incluyo, poder acceder a la educación superior y continuar sus estudios sin que el financiamiento sea un obstáculo.

Agradezco a mis amigos, a los que ya conocía desde antes y a los que se incorporaron en el camino, que han sido un apoyo vital durante esta etapa, y aún lo siguen siendo, por su comprensión, sus consejos y su bondad.

También quiero agradecer a Alexandra Elbakyan, por su loable contribución a hacer el conocimiento más accesible al mundo.

Finalmente, agradezco a ANID, Chile, por la Beca Nacional de Magíster 2018 Nro. 22182152 del presente autor, el proyecto FONDECyT Nro. 1180947 de Roberto Navarro Maldonado, Nro. 116170 de Jaime Araneda Sepúlveda, y CONICYT-PAI Nro. 9170095 de Roberto Navarro Maldonado.



Resumen

Para estudiar cómo se modifica la dinámica de un plasma Maxwelliano de electrones no magnetizado con la presencia de iones positivos pesados, el presente trabajo tiene por objetivo estudiar los regímenes amortiguado y no lineal de perturbaciones en un plasma Maxwelliano electrón-ión sin deriva relativa, considerando una razón de masa $m_i/m_e = 1836.153$ y razón de carga $q_i/|q_e| = 1.0$, específicamente en el rango de bajas frecuencias ($\omega_r \leq 0.2\omega_{pe}$) y velocidades del orden de la velocidad de fase de ondas-ión acústicas $v_{\phi,IA}$ para el número de onda excitado, con la razón de temperatura $T_i/T_e = 1.0$. Todo el estudio se realiza por medio de simulaciones numéricas del sistema de ecuaciones de Vlasov-Poisson usando interpolación espectral en posición y velocidad, e integración simpléctica en la dependencia temporal. En el caso de perturbaciones amortiguadas se espera que las ondas de Langmuir e ión-acústicas se propaguen relativamente independientes una de la otra y las distribuciones de ambas especies exhiban un comportamiento opuesto en el rango de velocidades de interés, mientras que en caso no lineal se espera que surjan ondas electrostáticas solitarias, debido a la presencia de iones móviles, que estén asociadas a solitones ión-acústicos y atrapamiento de electrones.

1 Introducción

En la investigación de ondas en plasmas se hacen aproximaciones según las masas de las especies que los componen, las escalas espacial, temporal y de velocidades de los fenómenos de interés. Mientras que en algunos casos sólo se mueven las especies más ligeras, la adición de una especie pesada móvil en el plasma corresponde a un modelo más realista. Se ha demostrado que la presencia de iones móviles pesados (protones) y con distribución Maxwelliana, modifica la evolución de un plasma no colisional y no magnetizado durante el amortiguamiento lineal de Landau de ondas de Langmuir en plasmas Maxwellianos de electrones inicialmente isotérmicos, explorando la desidad de partículas y la energía del campo eléctrico, pero sin explorar la dependencia de velocidad. En el régimen no-lineal del mismo plasma, la amplitud del modo excitado indica que los efectos de iones móviles se reducen. Sin embargo, esto no descarta alguna dinámica relacionada con las escalas de los iones. Por lo tanto, el presente trabajo aborda cómo la presencia de iones pesados móviles, con carga positiva modifican la dinámica de un plasma Maxwelliano de electrones en el rango de las escalas de iones para los regímenes lineal y no-lineal de perturbaciones, y caracterizar los fenómenos que surgen por la introducción de tal especie.

De las ecuaciones de movimiento de una partícula j cualquiera del plasma, la

escala de tiempo de su dinámica se estima como $\tau_j \propto m_j$, donde m_j es la masa de la partícula de la partícula. Por lo tanto, el movimiento de las especies más pesadas ocurre en una escala de tiempo más larga. La existencia de escalas de tiempo se puede observar en Fig.1.1, donde se muestran las trayectorias de dos partículas de masa $m_1 = m_e$ y $m_2 = 1836m_e$, con m_e la masa del electrón. Ambas están simultáneamente sometidas a una fuerza debido a una onda de Langmuir (LW), de corta escala de tiempo, y una onda ión-acústica (IAW) de baja amplitud, de escala de tiempo más larga, con el mismo número de onda. La partícula ligera es resonante con la onda de Langmuir y la partícula pesada lo es con la IAW. La Fig.1.1(a) muestra que el movimiento de una partícula pesada puede despreciarse durante un corto intervalo de tiempo, así como el forzamiento de baja frecuencia.

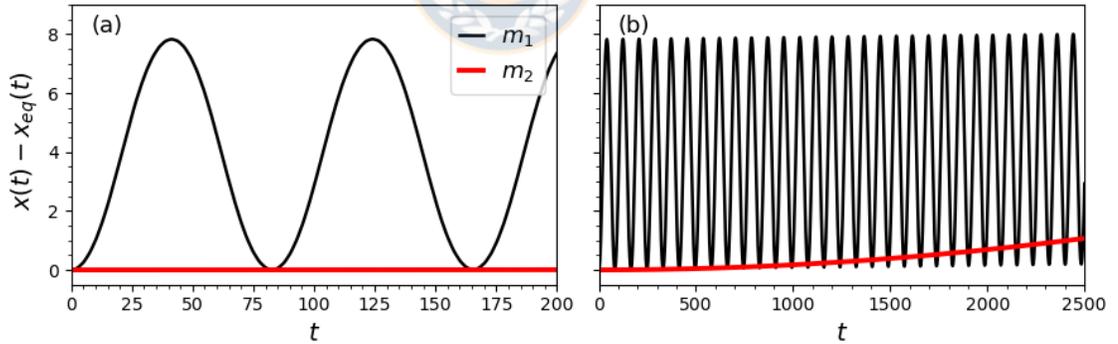


Figura 1.1: Variaciones de trayectorias de partículas respecto del equilibrio, $x_{eq,i}(t) = x_{0,i} + v_{0,i}t$, para una partícula ligera, m_1 , y una partícula pesada, m_2 , impulsadas por una LW y una IAW de baja amplitud. La partícula m_2 no se desvía significativamente con respecto de su trayectoria de equilibrio (a). A tiempos más largos (b), las desviaciones no son despreciables.

La aproximación de especies pesadas móviles considera partículas ligeras como móviles y las especies restantes son supuestas infinitamente pesadas y estáticas,

como el caso típico de un plasma de electrones y iones. Muchos estudios usan esta aproximación con iones uniformes, abordando fenómenos cuya frecuencia y rangos de velocidad son tales que las especies pesadas no contribuyen a la evolución del plasma, coincidiendo con experimentos y observaciones espaciales: trabajos tan fundamentales como aquellos referentes al amortiguamiento no colisional lineal y no-lineal de Landau de LWs en plasmas de electrones [1-7], suponen iones inmóviles, con trabajos experimentales confirmando el comportamiento predicho [8]. En fenómenos críticos en física de plasmas [9], se ha mostrado que la presencia de iones móviles no afecta al comportamiento crítico del amortiguamiento de Landau de LWs [10]. Otros trabajos que consideran iones inmóviles se enfocan en la propagación de estados de espacio de fase no-lineales tales como ondas BGK, soluciones analíticas del sistema de Vlasov-Poisson, que consisten en estructuras cuasi-estacionarias, electrostáticas que involucran atrapamiento de partículas [11], tales como agujeros de electrones (*electron holes*) [12], o el ruido electrostático de banda ancha en magnetósferas terrestres y planetarias, en las que el plasma es modelado como núcleos calientes y fríos de electrones y un haz de electrones, con el fin de excitar modos electrón-acústicos [13].

Sin embargo, ciertos fenómenos pueden tener lugar en escalas de tiempo más largas y la dinámica de las especies pesadas no es despreciable, como se muestra en Fig.1.1(b). En tales casos, la dinámica de las especies pesadas debe incluirse en el sistema de ecuaciones, ya que su presencia puede modificar la dinámica observada, resultando en una descripción más completa del fenómeno o introduciendo fenómenos adicionales, inadvertidos en escalas de tiempo cortas. Por ejemplo, en plasmas astrofísicos, mediciones *in situ* de campos eléctricos y espectros realizados por el satélite Freja y el cohete sonda SCIFER en la región auroral terrestre indican que

la modulación de paquetes de LWs observados allí, correspondientes a emisiones de banda corta se explican por *scattering* de modos *whistler* y *lower hybrid*, relacionados con la dinámica de protones; estas ondas se incluyen para dar cuenta en señales de baja frecuencia encontradas en procesos de modulación [14]. Mediciones *in situ* en la región de aceleración paralela auroral hechas por el satélite FAST en 1997 indican la presencia de *peaks* de frecuencia alrededor de 300[Hz], correspondientes al rango de la frecuencia hidrógeno-ión acústica que modularían la amplitud de paquetes de onda electrón-acústicas [15].

También se encuentran directamente ondas de baja frecuencia en plasmas del viento solar, relacionadas a las llamadas fuentes solares tipo III, descubiertas en 1950, que corresponden a radioemisiones provenientes del viento solar mismo, así como en el sistema solar, proporcionando información sobre las condiciones del medio de fondo, y de la aceleración y transporte de electrones [16]. Observaciones espectrales de la sonda Galileo de 1990 indican la existencia de tres *peaks* intensos, dos de alta frecuencia cercanos a 24[kHz], correspondientes a LWs, y uno de baja frecuencia alrededor de 400[Hz], identificados como IAWs [17].

El mecanismo de generación de radioemisiones tipo III ha sido discutido por Cairns [18], motivado por discrepancias entre observaciones y trabajos teóricos. Se han considerado dos mecanismos, el acoplamiento no-lineal, resonante onda-onda conocido como decaimiento electrostático de Langmuir, consistente en el decaimiento de una LW primaria en una IAW y *scattering* por iones térmicos, en el que iones individuales y la respuesta de su nube de electrones apantallante están fuera de fase debido a la diferencia de masas, produciendo *scattering* de LWs entrantes [19]. Se

argumenta que para que el *scattering* ocurra, la respuesta colectiva de los iones debe inhibirse. Tal inhibición tiene lugar si la escala de tiempo de esta respuesta es corta comparada con la del *scattering* y si la escala de tiempo del *scattering* es mucho más larga que la escala de tiempo del proceso más lento y culmina varios ciclos después [18]. De acuerdo a mediciones, los niveles de energía requeridos para el *scattering* no pueden ocurrir, y en regiones con razón de densidad de energía de campo eléctrico y energía térmica de plasma $W \lesssim 10^{-5}$, se espera que ocurra decaimiento de Langmuir; el *scattering* por iones térmicos sería relevante sólo en regiones con $W \lesssim 10^{-3}$.

Se han estudiado oscilaciones de electrones en la presencia de iones pesados móviles con carga positiva a través de simulaciones cinéticas. Xu *et al.* estudiaron el régimen lineal del amortiguamiento de Landau en un plasma no colisional, no magnetizado, de electrones y iones Maxwellianos, excitando sólo el primer modo. En ese trabajo se encuentra que iones ($m_i/m_e = 1836$), con especies inicialmente isotérmicas $T_i/T_e = 1.0$, razón de carga eléctrica $q_i/|q_e| = 1.0$, notoriamente afectan el amortiguamiento lineal, observado en la amplitud del modo excitado ($|E(m=1)|$) en Fig.1.2. Para amplitudes de perturbación en la distribución de electrones (ε_e) en el régimen amortiguado [Figs.1.2 (c) y (d)], ocurre el amortiguamiento de Landau de LWs usual (comparado con el caso de iones inmóviles) hasta $t \simeq 100$, cuando oscilaciones amortiguadas lentas comienzan a dominar y se observa una importante desviación respecto del caso con iones inmóviles.

Se identifican dos tipos de ondas: LWs, con frecuencia y amortiguamientos estimados con la relación de dispersión lineal del sistema de Vlasov-Poisson, e IAWs, con frecuencia estimada con la aproximación fluida y amortiguamiento estimado por

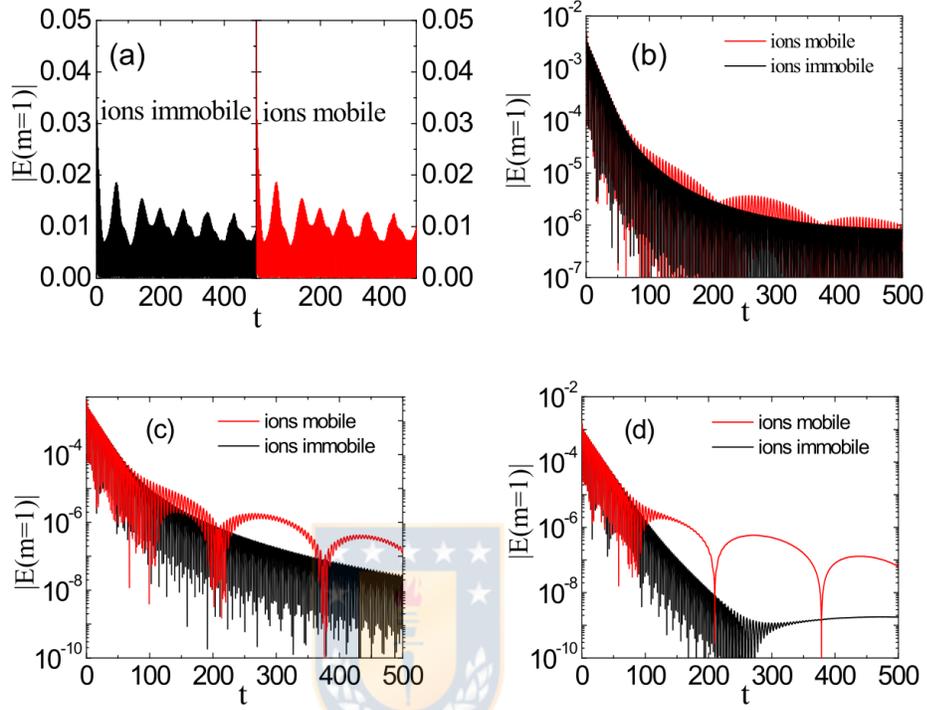


Figura 1.2: Evolución del modo excitado del campo eléctrico $|E(m = 1)|$ para diferentes amplitudes de perturbación (a) $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-1}$, (b) $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-2}$, (c) $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$ y (d) $\varepsilon_e = 3.0 \times 10^{-3}$, para iones móviles e inmóviles, con $T_i/T_e = 1.0$. Gráficos cortesía de Xu *et al.* [20].

medio de la relación de dispersión lineal del sistema de Vlasov-Poisson. Mientras la frecuencia de $|E(m = 1)|$ cambia, las variaciones de la densidad de electrones, δn_e , se reducen al mismo orden que las de la densidad de iones, δn_i , y exhiben la misma dependencia en los dominios de posición y tiempo con oscilaciones de baja frecuencia para $t > 100$, indicando que los electrones siguen el movimiento de los iones. Sin embargo, en el trabajo de Xu *et al.* no se estudian detalles de la dependencia de velocidades alrededor de las zonas de resonancia involucradas en la propagación de estas ondas, ni cómo cada especie del plasma contribuye a su desarrollo.

Con amplitudes de perturbación por encima de la amplitud crítica para excitar el amortiguamiento no-lineal de LWs [ver Fig.1.2 (a)], dominan oscilaciones rápidas y la dinámica de los iones no puede distinguirse a través de la evolución de $|E(m = 1)|$. Aunque en Ref.[20] se afirma que pueden ocurrir perturbaciones iónicas, serían despreciables en comparación con aquellas de los electrones.

Se han observado estructuras coherentes de larga duración en el espacio de posiciones y en el espacio de fases en la presencia de iones móviles con carga positiva en plasmas no colisionales y no magnetizados de electrones y iones Maxwellianos, como agujeros de iones (*ion holes*), así como interacciones de iones con estructuras de la misma naturaleza, tales como *electron holes*.

Un *ion hole* consiste en iones de carga positiva atrapados alrededor de un mínimo local de potencial electrostático [12, 21], repeliendo electrones a su alrededor. En este caso, los electrones tienen una distribución tipo Boltzmann, es decir, responden tan rápidamente que desarrollan configuraciones de equilibrio instantáneo, y se requiere que sean lo suficientemente calientes como para producir presión que mantenga la despoblación de iones en el centro de la estructura [22]. Se han medido con alta resolución en la región auroral terrestre, por medio de la sonda FAST, propagándose con velocidades consistentes con el modo IA [23], y también se han encontrado en simulaciones de Vlasov-Poisson de plasmas no magnetizados de electrones y haz de iones Maxwellianos excitando inicialmente un *electron hole*, después del crecimiento de varios *electron holes* pequeños, considerando una razón de masas baja ($m_i/m_e = 4$) [24]. Otras configuraciones que producen un *ion hole* son colocar este

estado directamente en el instante inicial en la distribución de iones en simulaciones [25], inestabilidad de dos corrientes ión-ión [26], y en general, configuraciones inestables que involucren corrientes contra-propagantes de iones [22].

Los solitones se definen como estructuras localizadas que se propagan sin pérdida o dispersión, evolucionando desde ondas de gran amplitud [27], y se observan en el potencial electrostático o como pulsos compresivos en la densidad de la especie que sustenta su propagación, que resulta de acoplamiento no-lineal sucesivo entre las ondas excitadas, limitadas por la dispersión de ondas cuya velocidad de fase difiere importantemente respecto de la de la onda fundamental [28]. Se consideran solitones ión-acústicos (IASs). Estas estructuras se observan en la densidad de los iones y se contruyen sobre la rama IA lineal [29]. Basado en el modelo fluido, se encuentra que se propagan con velocidades v_S en el rango $1 < v_S/c_S \lesssim 1.6$ [28], donde c_S es la velocidad de onda ión acústica del modelo fluido. Se han incluido elementos cinéticos en su modelación, tales como amortiguamiento de Landau por iones y electrones, y atrapamiento de electrones [30]. Estudios de simulación que usan modelos híbridos (iones cinéticos y electrones con distribución de Boltzmann) y modelos puramente cinéticos muestran que los IASs no siempre podrían retener sus propiedades inalteradas: IASs inestables podrían generar varias IAWs [31], o crecer en amplitud para grandes perturbaciones iniciales [32]. Propiedades como la velocidad de propagación pueden modificarse con atrapamiento de electrones. Pueden notarse más diferencias para velocidades de propagación mayores a c_S [33]. Esto implica que los solitones interactúan e incluso pueden acoplarse a *electron holes*, como se ha reportado en varios estudios [34-38], propagándose con velocidades en el rango indicado. Sin embargo, se requiere una cierta perturbación en la densidad de los iones para que puedan exci-

tarse solitones y acoplarse [36]. Otros trabajos que involucran acoplamiento *electron hole*-solitón ión aún identifican al solitón como IASs, aunque se propaguen con velocidades $v_S = 4.06c_S$, fuera del rango predicho [39].

Hutchinson y Zhou han desarrollado una teoría para la propagación de *electron holes* acelerados considerando interacción con especies iónicas pesadas, enfocándose en el intercambio de momentum [40, 41]. En este caso, los iones interactúan con el *hole* intercambiando momentum a través de reflexión, si el potencial de atrapamiento es lo suficientemente intenso o pasando a través de él en el caso opuesto, tendiendo a acumular iones en la región de menor densidad electrónica. Por medio de simulaciones de plasmas no colisionales, no magnetizados y electrostáticos con deriva relativa no nula entre especies, razón de masas $m_i/m_e = 1836$ y una razón de temperatura $T_i/T_e = 2.5 \times 10^{-2}$, los autores observan el mismo acoplamiento entre *electron holes* y solitones de iones discutidos por Saeki y Rasmussen [37] y Saeki y Genma [38]. Ellos también muestran que los *holes* reaccionan rápidamente ante cambios en la distribución de iones. Para *electron holes* más rápidos, el grado de interacción con los iones es relativamente pequeño y puede despreciarse [41].

Trabajos que inclucran plasmas no colisionales, no magnetizados de electrones y iones con deriva relativa, $m_i/m_e = 1836$ y $T_i/T_e = 0.1$, han mostrado que *electron holes* lentos interactúan con la distribución de los iones, tendiendo a producir perturbaciones localizadas en la última, como en el contexto de turbulencia subcrítica en plasmas, donde se ha mostrado que la excitación de un *electron hole* en condiciones de estabilidad linear puede llevar a la excitación de *electron holes* debido a la dependencia de la perturbación inicial [39, 42]. Se observa que el *electron hole*

excitado acelera a velocidades más rápidas que c_S debido a que se excitan IAWs en la densidad de iones, atribuidas a IASs. Se muestra que los *holes* más rápidos en este rango de velocidades se propagan establemente [42], y se indica que el *hole* permite acumulación de iones en el interior de la región de atrapamiento, como discuten Hutchinson y Zhou [40].

Considerando el mismo sistema con una razón de masas baja ($m_i/m_e = 4$) una deriva relativa inicial no nula y especies inicialmente isotérmicas, pero abordando el mecanismo de excitación de IAWs por medio de corriente in plasmas sin colisiones, Lesur *et al.* [24] excitan modos no-lineales relacionados con estructuras del espacio de fase que involucran intercambio de momentum y energía. El desarrollo de *electron holes* primarios eventualmente conduce a la generación de *holes* de menor tamaño, resultando en turbulencia en el espacio de fase con un conjunto de estructuras a medida que el *hole* primario deja un rastro de densidad negativa y es acelerado. Se reporta que los *electron holes* crecen más fácilmente cuando hay un solapamiento entre las distribuciones de ambas especies.

Para razones de masa más altas ($m_i/m_e = 29500$) especies inicialmente isotérmicas con deriva relativa no nula, Eliasson y Shukla [43] estudiaron la interacción de *electron holes* con el plasma a través de simulaciones de Vlasov-Poisson de un plasma con electrones y iones de oxígeno Maxwellianos, inicializando los electrones con un *hole* estático tipo Schamel. El potencial positivo desarrollado por el *hole* repele iones de baja energía, produciendo una cavidad en la densidad de iones, y por lo tanto un potencial negativo que eventualmente repele al *hole*, permaneciendo estática la cavidad de iones.

A la luz de esta exposición, en este trabajo se utiliza la misma configuración usada en el trabajo de Xu *et al.* para estudiar más efectos de iones móviles pesados con carga positiva en plasmas no magnetizados y no colisionales compuestos por electrones y iones Maxwellianos sin deriva relativa, para los casos de perturbaciones amortiguadas y no-lineales. Para el primero, se propone estudiar la dependencia de velocidad de ambas especies alrededor de las zonas de resonancia con énfasis en las velocidades bajas, alrededor de la velocidad de fase de las IAWs excitadas, $v_{\phi,IA}$, y cómo cada una de las especies que componen el plasma es afectada por la propagación de ambas ondas.



En el caso no-lineal, aunque muchos de los trabajos previamente descritos involucran deriva relativa entre las distribuciones de electrones y iones, es interesante determinar si la energía inyectada por una perturbación inicial de gran amplitud en el plasma permite el desarrollo de dinámica no-lineal en la distribución de los iones. Si tal comportamiento no-lineal ocurre, se propone estudiar las estructuras y ondas que pudieran desarrollarse, su interacción con la distribución de los electrones, el efecto de las ondas observadas en las regiones resonantes en el espacio de velocidades, y cómo otras cantidades microscópicas y macroscópicas, además de la energía del campo eléctrico, resultan afectadas por su movimiento.

1.1 Hipótesis del trabajo

De acuerdo a los temas previamente discutidos y el trabajo propuesto, se consideran las siguientes hipótesis. Todas ellas se aplican a plasmas electrostáticos, no colisionales, no magnetizados, sin deriva relativa y compuestos por electrones y iones Maxwellianos con razón de masa $m_i/m_e = 1836.153$ y razón de carga $q_i/|q_e| = 1.0$.

1.1.1. Perturbaciones amortiguadas

Para el caso de amplitudes inferiores a la amplitud crítica requerida para excitar el amortiguamiento no-lineal de Landau de LWs ($\varepsilon_{e,C}$) [44], **(i)** se espera encontrar una zona de resonancia alrededor de $v_{\phi,IA}$ para el número de onda excitado en la función de distribución de cada especie. En tal región de resonancia, **(ii)** ambas especies deberían exhibir un comportamiento opuesto en el espacio de velocidades, según se estima con la teoría lineal. **(iii)** Se espera que las ondas encontradas por Xu *et al.* [20] se desarrollen de forma independiente y que la zona de resonancia de una onda es poco probable que afecte la zona de resonancia de la otra.

1.1.2. Perturbaciones no-lineales - caso isotérmico

Con respecto al caso de perturbaciones por sobre $\varepsilon_{e,C}$, **(i)** debiera haber señales de baja frecuencia debido a la presencia de los iones, detectables en otras cantidades macroscópicas, de amplitudes más bajas debido a su mayor inercia. **(ii)** Se espera que los iones desarrollen un comportamiento no-lineal, específicamente ondas solitarias electrostáticas que involucren *electron holes* y IASs, en lugar de *ion holes*, debido a que el sistema no involucra corrientes. **(iii)** La observación de IASs implica que la dinámica de baja frecuencia está relacionada con que las ondas que se observen

coincidan con la rama IA.

1.2 Objetivos

1.2.1. Objetivos generales

Los objetivos generales de este trabajo, aplicados al plasma objetivo del estudio, son (i) determinar los efectos dinámicos de la presencia de iones móviles pesados con carga positiva en cada una de las especies que componen el plasma y determinar si los modos encontrados por Xu *et al.* [20] se desarrollan uno independiente del otro, el caso de perturbaciones amortiguadas. (ii) Para el caso de perturbaciones no-lineales, se busca caracterizar la respuesta de baja frecuencia de ambas especies, determinar la amplitud de perturbación umbral para la dinámica de baja frecuencia.

1.2.2. Objetivos específicos

Son objetivos específicos comunes para los tres casos estimar las raíces de la relación de dispersión lineal y compararlas con los espectros del campo eléctrico respectivos, seguir las funciones de distribución promediadas en posiciones alrededor de la velocidad $v_{\phi,IA}$ estimada por medio de la relación de dispersión lineal y establecer una comparación con el caso de iones inmóviles con la misma amplitud de perturbación. Objetivos específicos para los casos de perturbaciones amortiguadas y no-lineales inicialmente isotérmicas $T_i/T_e = 1.0$ son usar amplitudes de perturbación que conduzcan cualitativamente al mismo comportamiento encontrado por Xu *et al.*, estimar correlaciones en las funciones de distribución de los electrones con caso respectivo de iones inmóviles. Para los casos no-lineales es seguir las funciones de distribución alrededor de posibles estructuras no-lineales características.

1.3 Metodología

1.3.1. Simulaciones

Para llevar a cabo este trabajo, se realiza un estudio de simulaciones considerando teoría cinética, modelando ambas especies móviles a través del sistema de ecuaciones de Vlasov-Poisson. Se usa un código que resuelve el sistema de ecuaciones a través de integración simpléctica. Tal código está escrito en lenguaje de programación Julia versión 1.3.1, y es parte de una librería llamada `Vlasova.jl`, desarrollada por J. A. Gidi, en el Departamento de Física de la Universidad de Concepción. Julia es un lenguaje con licencia de código abierta MIT y sintaxis de alto nivel, desarrollado para alto rendimiento, apropiado para las simulaciones que se requieren en este trabajo. Las simulaciones, computacionalmente demandantes requeridas para este trabajo, se realizan en un servidor con 504 Gb de RAM, procesador Intel Xeon CPU E5-2699 v4 de 44 núcleos, 2 hilos por núcleo y kernel Linux 4.19.0-6-amd64.

Parámetros de la simulación y dominios

Las simulaciones consideran plasmas unidimensionales, tanto para el régimen lineal ($\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-3}$ y 8.0×10^{-3}) como para el régimen no-lineal de perturbaciones ($\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$). El estado de equilibrio del plasma es inicialmente perturbado con una onda monocromática ($k = 0.4\lambda_{De}^{-1}$). Se permite que los plasmas evolucionen hasta 3000 ciclos de oscilación de plasma de electrones como máximo, con el fin de permitir el desarrollo de dinámica cuasi-estacionaria.

El dominio de velocidades para ambas especies es $[-8v_{Tj}, 8v_{Tj}]$, donde v_{Tj} es la

velocidad térmica inicial de la especie j , y el dominio es lo suficientemente largo como para retener la física importante del problema y para que las distribuciones sean aproximadamente cero en los bordes del dominio. Se usan $N_v = 8192$ nodos en el espacio de velocidades. Se hace notar que el uso de $N_v = 16384$ no cambia significativamente los resultados, según simulaciones de prueba, salvo a tiempos cercanos a 3000, debido a que se desarrollan estructuras finas cuyo ancho en el espacio de velocidades alcanza la grilla de la simulación.

El dominio de posiciones es común a ambas especies, $[0, L_x]$ con $L_x = 5\pi\lambda_{De}$ y considera condiciones de borde periódicas con el mismo número de nodos para todas las simulaciones, $N_x = 512$. Simulaciones de prueba indican que un número mayor, $N_x = 1024$, tiene las mismas características que con la mitad.

1.3.2. Relación de dispersión lineal

La determinación de las raíces de la relación de dispersión lineal también se lleva a cabo con un código principal realizado en lenguaje Julia, que resuelve la relación de dispersión por medio del método de Muller. Este último está escrito en lenguaje Python y fue desarrollado por R. E. Navarro, en el Departamento de Física de la Universidad de Concepción. Estos códigos se hacen correr en un computador portátil Dell modelo Inspiron 14 7472 con 8 Gb de RAM, procesador Intel Core i5-8250U CPU y kernel Linux 4.14.175-1 Manjaro.

1.3.3. Alcance y limitaciones

Este trabajo está enfocado en plasmas no colisionales, sin deriva relativa, no magnetizados compuestos por electrones y iones Maxwellianos con razón de masa y

carga fijas, y con perturbaciones electrostáticas. Aunque la configuración de especies Maxwellianas sin deriva es básica, es ampliamente utilizada en física teórica de plasmas y para modelar plasmas de laboratorio así como en plasmas en ambientes espaciales. Por lo tanto, se espera contribuir al espectro de fenómenos relacionados a esta distribución.

Este trabajo se enfoca en el desarrollo de estructuras no-lineales en el espacio posiciones y de fase a través de la evolución de la función de distribución f_j de cada especie, permitiendo que ocurran fenómenos completamente cinéticos, para el régimen amortiguado y el régimen no-lineal. Se observan otras estructuras no-lineales en la evolución de la densidad de partículas y sus espectros respectivos comparados con la relación de dispersión lineal, y en las funciones de distribución promediadas alrededor de las zonas de resonancia.

Con respecto al dominio de posiciones, se debe notar que debido a su extensión, los modos que se propagan no pueden desarrollar longitudes de onda mayores que $L_x = 15.708\lambda_{De}$, limitando los fenómenos que pueden observarse a tamaños en el orden de una a una decena de longitudes de Debye, las que, aunque restringidas, aún permiten el desarrollo de estructuras colectivas en el espacio de fases de corta longitud de onda, tales como *electron holes*.

Para el análisis, la densidad de electrones y el potencial electrostático se filtran en frecuencia. Dado que se usan transformadas de Fourier para este propósito y como la señal no es periódica en la dependencia temporal, ocurre fenómeno de Gibbs en los instantes iniciales, siendo inaccesibles hasta unos cientos de ciclos de oscilación

de plasma de electrones. Por lo tanto, la evolución de estas cantidades se infiere de otras cantidades que sí son accesibles a esos instantes, como las distribuciones promediadas en posición y la densidad de iones.

1.4 Organización del trabajo

El presente trabajo se organiza de la siguiente manera. En el Capítulo 2, se describe completamente la teoría cinética y se encuentra una relación de dispersión de ondas. También, se da una descripción de estructuras no-lineales en el marco de la teoría de Vlasov. En el Capítulo 3, se muestran los métodos numéricos de integración de las ecuaciones de Vlasov-Poisson. En el Capítulo 4 se estudia el caso de perturbación monocromática con baja amplitud para obtener ondas amortiguadas. Se identifican los modos excitados en el espectro del campo eléctrico y en la función de distribución, se estudia la zona de resonancia relacionada con el modo lento y se compara con el caso de iones inmóviles. En el Capítulo 5, se estudia el caso no-lineal, encontrando la formación y propagación de *electron holes* lentos y ondas solitarias de iones, las que se acoplan y conducen a la formación de estructuras secundarias a tiempos largos. Finalmente, el Capítulo 6 resume los resultados anteriores y provee las conclusiones de este trabajo.

2 Teoría Cinética en Física de Plasmas y Ondas Electroestáticas

En este capítulo se expone el marco teórico de la tesis. Primero, se plantea el sistema de ecuaciones de Vlasov-Poisson, usado para modelar plasmas electrostáticos y no colisionales abordados en este trabajo, seguido por una discusión de las aproximaciones involucradas y las propiedades del sistema de ecuaciones. Luego, se linealiza el sistema de Vlasov-Poisson a primer orden para derivar la relación de dispersión lineal para un plasma electrón-ión Maxwelliano, permitiendo encontrar y describir los modos involucrados en el problema abordado. Finalmente, se presentan fenómenos no-lineales relacionados con la dinámica electrostática lenta de un plasma electrón-ión, tales como *electron-holes* y IASs.

2.1 Ecuación de Vlasov y sistema de ecuaciones

Los plasmas son sistemas físicos compuestos por muchas partículas interactuando por medio de la fuerza de Lorentz y colisiones. El número de estas partículas es del orden del número de Avogadro. Resolver la dinámica individual de cada partícula se vuelve rápidamente demandante, numéricamente. Por lo tanto, se requiere un enfoque estadístico que retenga las características principales del sistema. La teoría

cinética cumple tal requerimiento a través de una densidad escalar para cada especie que compone al plasma, llamada función de distribución de partícula, en lugar de partículas individuales.

La teoría cinética modela un plasma no relativista, no magnetizado, no colisional y electrostático a través de la ecuación de Vlasov (2.1.1), la ley de Gauss (2.1.2) y la ley de Faraday-Lenz (2.1.3),

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_j}{m_j} \mathbf{E} \cdot \nabla_v \right] f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0, \quad (2.1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}, \quad (2.1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.1.3)$$

donde f_j es la función de distribución de la especie j , que depende de la posición \mathbf{r} , velocidad \mathbf{v} y tiempo t , q_j y m_j son la carga y masa por partícula de la especie j y ρ es la densidad de carga, obtenida a partir de las funciones de distribución f_j según

$$\rho = \sum_j q_j \int f_j d^3v. \quad (2.1.4)$$

La ley de Faraday-Lenz (2.1.3) implica que el campo eléctrico puede escribirse en términos de un potencial escalar electrostático Φ como $-\nabla\Phi = \mathbf{E}$. Este sistema de ecuaciones se denomina sistema de Vlasov-Poisson. A lo largo de este trabajo, se usa el sistema de Vlasov-Poisson para modelar los plasmas.

En este plasma no se induce campo magnético. Aunque el campo \mathbf{E} usualmente depende del tiempo, la ecuación (2.1.3) prohíbe la inducción de campo magnético. La

aproximación electrostática también implica que el campo eléctrico inducido se debe sólo a variaciones en la densidad de carga [45]. Por lo tanto, la ley de Ampere-Maxwell se reduce a $\mathbf{J} = -\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$, es decir, las corrientes en el plasma son longitudinales con respecto a \mathbf{E} y no existen corrientes transversales responsables de inducción de campo magnético. Esta condición relaja a la primera restricción en el sentido de que puede existir inducción de campo magnético pero sus efectos son despreciables en comparación con los de la dinámica asociada al campo eléctrico por sí solo [45].

En general, un plasma puede exhibir colisiones o interacciones de corto alcance entre partículas. En tal caso, f_j obedece la ecuación de Boltzmann [28]. Para los plasma que se estudian en este trabajo, la ecuación de Boltzmann es

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_j}{m_j} \mathbf{E} \cdot \nabla_v \right] f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \left. \frac{df_j}{dt} \right|_C, \quad (2.1.5)$$

donde el lado derecho corresponde al término de colisiones, que es proporcional a la frecuencia ν_c a la que ocurrirían colisiones binarias entre partículas. Anatoly Vlasov [46] demostró que, en ciertos plasmas, el término de colisiones es despreciable en comparación con la frecuencia característica de oscilaciones de electrones, la frecuencia de oscilación de plasma de electrones ω_{pe} , concluyendo que el término de colisiones puede despreciarse. La mayoría de los plasmas pueden considerarse como no colisionales. En esta condición, la ecuación de Boltzmann (2.1.5) es la ecuación de Vlasov (2.1.1).

2.1.1. Propiedades del sistema de Vlasov-Poisson

La ecuación de Vlasov tiene cantidades conservadas. La más importante es la función de distribución f_j para cada especie cuando se evalúa a lo largo de sus curvas características, las que corresponden a trayectorias de partículas, que en un plasma electrostático son

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q_j}{m_j} \mathbf{E}.$$

Consecuentemente, la ecuación (2.1.1) se reduce a $df_j/dt = 0$. Así, siguiendo estas curvas en todo momento, la función de distribución se mantiene invariante [47]. Como consecuencia, el número de partículas en cualquier volumen del espacio de fase se mantiene constante en el plasma [28]. En general, cualquier función analítica de f_j se conserva [48], tales como la entropía del plasma. En conjunción con las ecuaciones electrostáticas, la energía total del plasma E_T , dada por

$$E_T = \frac{1}{2} \sum_j m_j \int \int v^2 f_j d^3r d^3v + \frac{1}{2} \int \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 d^3r,$$

donde el primer término es la energía cinética total de partícula y el segundo término es la energía del campo eléctrico, es una cantidad conservada cuando se evalúa el segundo momento de la ecuación de Vlasov, implicando que la energía del plasma se transfiere constantemente entre las partículas y el campo eléctrico.

Debido a su carácter no colisional, la evolución de un sistema modelada por la ecuación de Vlasov es reversible en el tiempo [45].

2.2 Aproximación lineal del sistema de ecuaciones de Vlasov-Poisson

El sistema de Vlasov-Poisson puede resolverse a través de teoría de perturbaciones a primer orden. Para cualquier cantidad G , dado su estado de equilibrio G_0 , la perturbación G_1 verifica $G = G_0 + G_1$, y $|G_1| \ll |G_0|$. A primer orden, las ecuaciones (2.1.4), (2.1.1), (2.1.2) y (2.1.3) se reducen a

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right] f_{1,j} = - \frac{q_j}{m_j} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_v f_{0,j}, \quad (2.2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{\rho_1}{\epsilon_0}, \quad (2.2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{0}, \quad (2.2.3)$$

$$\rho_1 = \sum_j q_j \int f_{1,j} d^3v, \quad (2.2.4)$$

donde (2.2.3) implica que $-\nabla\Phi_1 = \mathbf{E}_1$. El sistema considera condiciones iniciales y condiciones de borde periódicas. El estado de equilibrio se supone cuasi-neutro, es decir, $\rho_0 = 0$. Suponiendo además que $\Phi_0 = 0$ en los bordes, el estado de equilibrio verifica $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

2.2.1. Relación de dispersión lineal

El sistema de ecuaciones de arriba puede resolverse por medio del método de las curvas características, de acuerdo a la Ref.[48], considerando que la perturbación inicial se introduce adiabáticamente, esto es, las perturbaciones son nulas en $t \rightarrow -\infty$ [47] y se mantienen pequeñas en el instante de interés t . La función de distribución

perturbada es entonces

$$f_{1,j}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\frac{q_j}{m_j} \int_{-\infty}^t \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t') \cdot \nabla_v f_{0,j}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) dt'. \quad (2.2.5)$$

En esta solución puede usarse una transformada de Fourier en posiciones y de Laplace en el tiempo, debido a las condiciones iniciales y de borde del problema,

$$f_{1,j,\mathbf{k},\omega} = -\frac{q_j}{m_j} \int_{-\infty}^t \exp [i(\mathbf{k} \cdot [\mathbf{r}'(t') - \mathbf{r}] - \omega[t' - t])] \mathbf{E}_{1,\mathbf{k},\omega} \cdot \nabla_v f_{0,j}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) dt'. \quad (2.2.6)$$

Las condiciones iniciales para las trayectorias no perturbadas en $t' = t$ son $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}$ y $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{v}$, resultando en líneas rectas, $\mathbf{r}'(t') = \mathbf{v}(t' - t) + \mathbf{r}$, $\mathbf{v}'(t') = \mathbf{v}$. El uso de una transformada de Fourier-Laplace implica que ω y \mathbf{k} son constantes en el tiempo. La variable ω se expande como $\omega = \omega_r + i\gamma$, donde ω_r es la frecuencia de oscilación de la onda y γ es su tasa de amortiguamiento o crecimiento. Más aún, todas las cantidades tienen dependencia $a(\mathbf{r}, t) = a_{\mathbf{k}} \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$, siendo $a_{\mathbf{k}}$ la amplitud de a . Reemplazando estos resultados en la densidad de carga, luego en la ley de Gauss (2.2.2), y considerando el potencial electrostático, a través de $\mathbf{E}_{1,\mathbf{k},\omega} = -i\mathbf{k}\Phi_{1,\mathbf{k},\omega}$, el sistema de ecuaciones se reduce a la forma

$$\varepsilon_{\mathbf{k},\omega} \Phi_{1,\mathbf{k},\omega} = 0, \quad (2.2.7)$$

donde $\varepsilon_{\mathbf{k},\omega}$ es la función dieléctrica del plasma, dada por (detalles en Apéndice A.1)

$$\varepsilon_{\mathbf{k},\omega} = 1 + \sum_j \frac{q_j^2}{\epsilon_0 m_j k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_v f_{0,j}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3v. \quad (2.2.8)$$

La relación de dispersión se obtiene fijando $\varepsilon_{\mathbf{k},\omega} = 0$, ya que se requieren soluciones no triviales para $\mathbf{E}_{1,\mathbf{k},\omega}$. Se hace notar que $\varepsilon_{\mathbf{k},\omega}$ no tiene singularidades, debido a que $\gamma \neq 0$.

Ya que la configuración estudiada en este trabajo es la misma que la usada por Xu *et al.* [20], se elige una distribución Maxwelliana como estado de equilibrio

$$f_{0,j}(\mathbf{v}) = \frac{n_{0,j}}{[\sqrt{2\pi}v_{Tj}]^3} \exp\left[-\frac{v^2}{2v_{Tj}^2}\right], \quad (2.2.9)$$

donde $v_{Tj} = \sqrt{k_B T_j / m_j}$ es la velocidad térmica inicial de cada especie, k_B es la constante de Boltzmann y T_j es la temperatura inicial de la especie j . Sin pérdida de generalidad, los ejes del sistema de coordenadas se alinean con \mathbf{k} . La integral en (2.2.8) se reduce entonces a una dimensión y se puede escribir en términos de la función de dispersión de plasma $Z(\zeta_j)$ [49], donde $\zeta_j = \omega / \sqrt{2} k v_{Tj}$, es el parámetro de resonancia (detalles en el Apéndice A.2)

$$1 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{v_{Tj}^2 k^2} [1 + \zeta_j Z(\zeta_j)] = 0, \quad (2.2.10)$$

donde $\omega_{pj} = \sqrt{q_j^2 n_{0,j} / \epsilon_0 m_j}$ es la frecuencia de plasma de la especie j . Esta relación de dispersión entrega un número infinito de modos que pueden propagarse en un plasma cuya función de distribución en estado de equilibrio es de la forma (2.2.9).

2.2.2. Modos lineales en un plasma electrón-ión

Modos de Langmuir e ión-acústico

Las raíces de la relación de dispersión para $m_i = 1836.153m_e$, sin drift relativos y razones de temperatura $T_i/T_e = 2.5 \times 10^{-2}$, 1.0×10^{-2} , 5.0×10^{-1} , 1.0, 2.5 y 5.0 se muestran en Figs.2.1 and 2.2. Los modos menos amortiguados se muestran en Fig.2.1. El modo de Langmuir se muestra en las Figs.2.1(a) y (b). Éste está relacionado con la dinámica de los electrones y se mantiene inalterado para las razones T_i/T_e mostradas. Dado que su velocidad de fase es mayor que la velocidad térmica iónica, no es afectada por los detalles de la distribución de los iones. Este modo se encuentra débilmente amortiguado para $k < 0.4\lambda_{De}^{-1}$ y se vuelve fuertemente amortiguado para longitudes de onda más cortas, realizando pocos ciclos de oscilación antes de que la amplitud de la onda decaiga a cero. El modo ión-acústico se muestra en las Figs.2.1(c) y (d), y está relacionado con la dinámica de los iones pesados, mostrando un aumento en la frecuencia a T_i/T_e más grandes, implicando una propagación más rápida para un k fijo, pero con una mayor tasa de amortiguamiento. Este modo se muestra menos amortiguado para menores T_i/T_e , teniendo una tasa de amortiguamiento cercana a cero para $k \lesssim 2\lambda_{De}^{-1}$. Se debe notar que este modo tiene velocidad de fase aproximadamente constante para longitudes de onda largas, $k < 0.5\lambda_{De}^{-1}$.

Modos tipo-acústicos

La relación de dispersión lineal (2.2.10) también predice infinitos modos de alto orden cuya tasa de amortiguamiento es mayor que la de los modos de Langmuir e ión-acústicos. Si la velocidad de fase de la onda es del orden o mayor a la velocidad térmica electrónica (no mostrados), se denominan ondas electrón-acústicas [50]

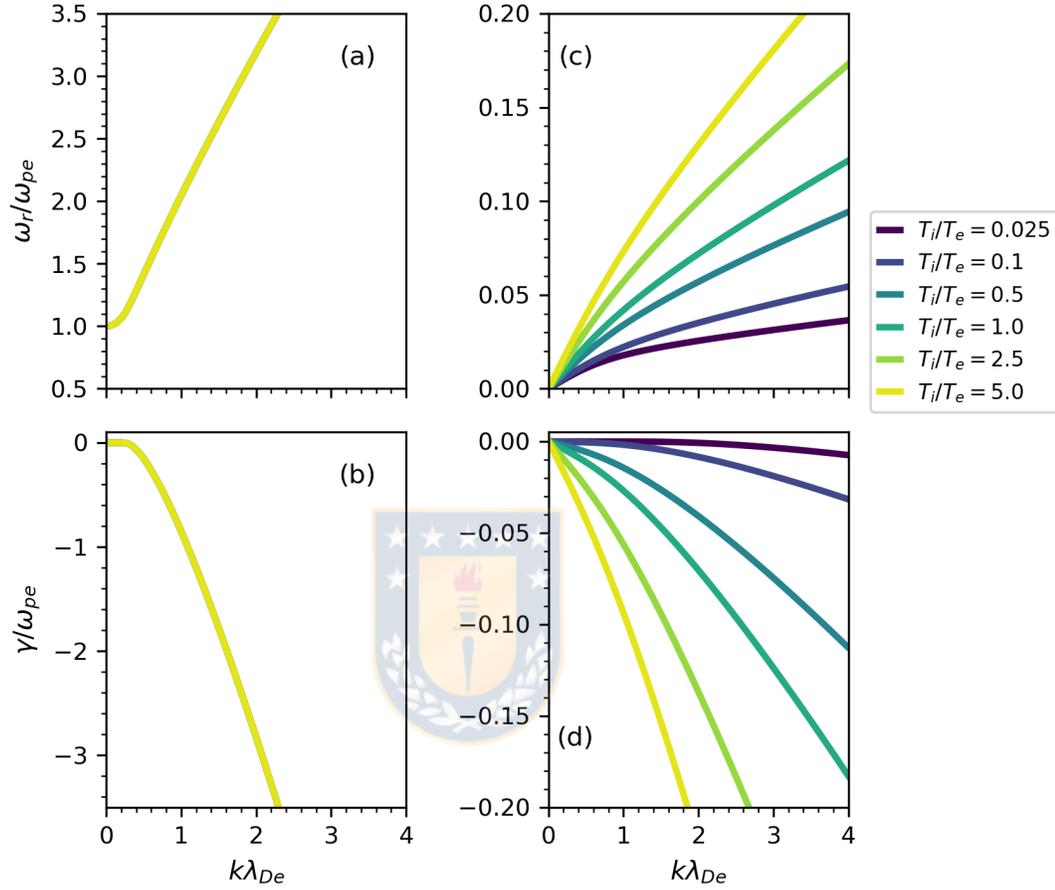


Figura 2.1: Modos menos amortiguados que resuelven la relación de dispersión lineal en un plasma electrostático, no magnetizado, con electrones y iones Maxwellianos (2.2.10). La razón de masa es $m_i/m_e = 1836.153$ y se muestran diferentes razones de temperatura T_i/T_e . Se muestran la frecuencia (a) y tasa de amortiguamiento (b) del modo de Langmuir, y la frecuencia (c) y tasa de amortiguamiento (d) del modo ión-acústico. La rama de Langmuir permanece invariante para las razones T_i/T_e mostradas.

y están relacionadas con la dinámica de los electrones. Para plasmas Maxwellianos, estas ondas tienen una gran tasa de amortiguamiento como para ser observadas en experimentos y simulaciones numéricas [51, 52].

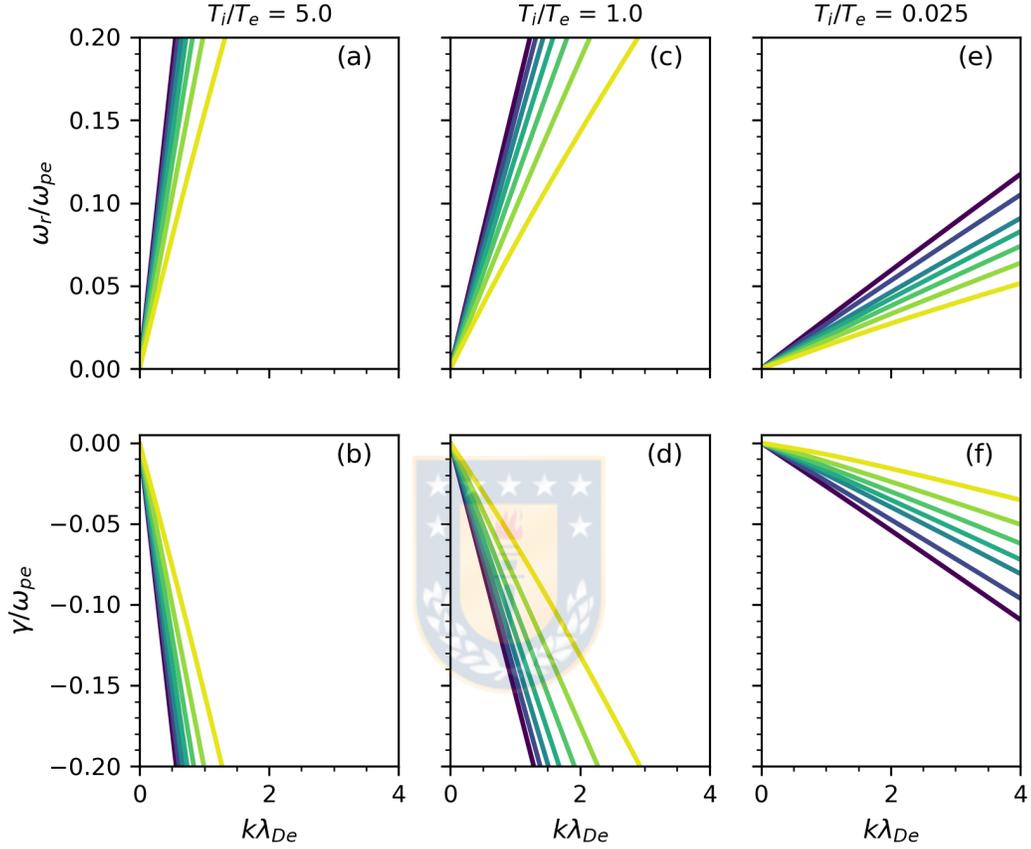


Figura 2.2: Raíces de la relación de dispersión lineal (2.2.10) correspondientes a modos de alto orden de baja frecuencia. Se muestran frecuencia y tasa de amortiguamiento para $T_i/T_e = 5.0$ [(a) y (b)], $T_i/T_e = 1.0$ [(c) y (d)] y $T_i/T_e = 0.025$ [(e) y (f)]. Razón de masa $m_i/m_e = 1836.153$. Se muestran los siete modos de orden superior de baja frecuencia menos amortiguados para cada razón de temperatura.

También hay modos tipo acústicos cuya velocidad de fase es del orden de la velocidad de fase de las ondas ión-acústicas, y su dinámica involucra a la distribución de los iones. En Fig.2.2 se muestran ramas tipo acústicas de baja frecuencia para

$m_i/m_e = 1836.153$ y tres razones de temperatura, $T_i/T_e = 5.0$ [Figs.2.2(a) y (b)], $T_i/T_e = 1.0$ [Figs.2.2(c) y (d)] y $T_i/T_e = 2.5 \times 10^{-2}$ [Figs.2.2(e) y (f)]. Se muestran los siete modos de orden superior menos amortiguados. Se observa que tienen frecuencias más altas que las del modo ión acústico, y por tanto tienen mayor velocidad de fase, pero también tiene mayor tasa de amortiguamiento. Estas características se acentúan a mayores T_i/T_e , como se observa en Fig.2.2.

2.3 Fenómenos no-lineales

2.3.1. Amortiguamiento no-lineal de Landau

El análisis lineal deja de ser válido con perturbaciones de amplitud finita. Trabajos experimentales [8] y teóricos sobre la evolución a tiempos cortos [4] y a tiempos largos [2], muestran que γ varía en el tiempo para amplitudes de perturbación finitas. Una perturbación de amplitud finita produce una etapa de amortiguamiento no-lineal, que se desvía del decaimiento exponencial (ver $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$ en Fig. 2.3). Si la amplitud de perturbación se aumenta por sobre la amplitud crítica $\varepsilon_{e,C}$ [44] (ver $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$ en Fig. 2.3), hay amortiguamiento inicial, pero es detenido y el modo excitado comienza a crecer hasta saturarse, oscilando irregularmente en el tiempo, como se observa en Fig. 2.3.

Para tiempos más largos, hay partículas que quedan atrapadas en el potencial auto-consistente, esto es, un grupo de partículas cuya velocidad es cercana a la velocidad de fase de la onda excitada que oscila irregularmente alrededor de ella, desarrollando un estado tipo BGK, como se muestra en Fig. 2.4.

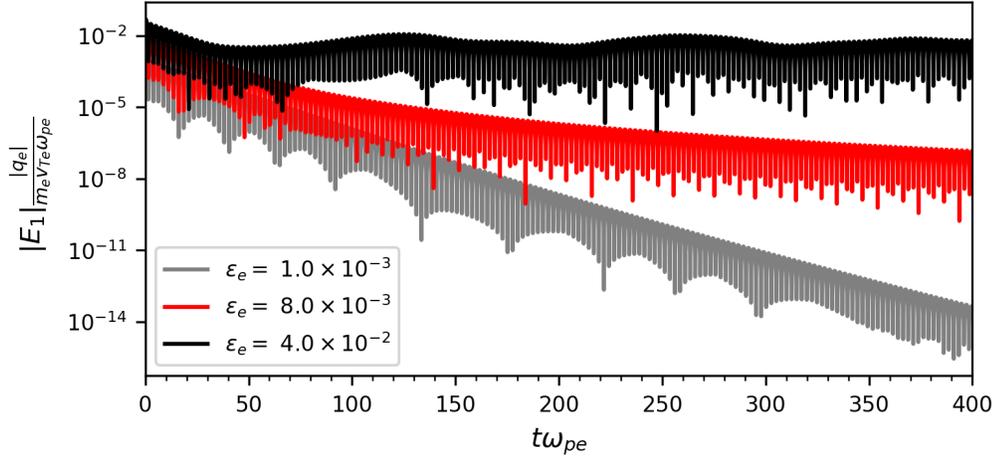


Figura 2.3: Evolución de la amplitud del modo excitado del campo eléctrico, $m = 1$, en un plasma de electrones (iones inmóviles), para los casos lineal, $\epsilon_e = 1.0 \times 10^{-4}$, amortiguado ligeramente no-lineal, $\epsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$, y el caso no-lineal, $\epsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$, siendo ϵ_e la amplitud de perturbación inicial.

2.3.2. Estados BGK y *electron holes*

Estudiando el problema de partículas atrapadas en un plasma electrostático en 1957, Bernstein, Greene y Kruskal (BGK) [11] encontraron soluciones cuasi-estacionarias exactas para el sistema de Vlasov-Poisson. Estas ondas se denominan BGK.

Trabajos posteriores [39, 53, 54] obtienen los mismos estados por medio de un método mejorado, descartando soluciones singulares. Estos trabajos consideran una función de distribución f_e como solución para un plasma de electrones Maxwelliano que exhibe atrapamiento que es función de la energía total de un electrón $E =$

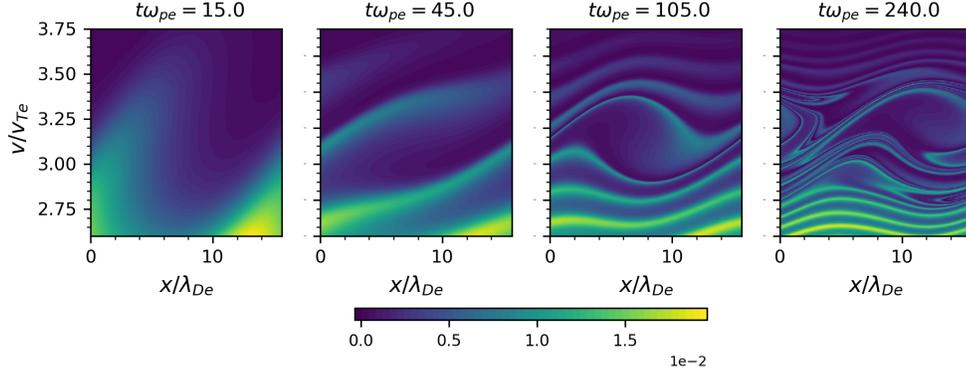


Figura 2.4: Evolución de la función de distribución de electrones f_e alrededor de la zona de resonancia para el amortiguamiento no-lineal de Landau de ondas de Langmuir considerando iones inmóviles.

$m_e v^2/2 + q_e \Phi$ dada por [53]

$$f_e(E) = \frac{1 + k_0^2 \Psi/2}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma \frac{(\sqrt{2E} - [v_D - v_0])^2}{v_{Te}^2} \right], & E > 0, \\ \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(v_D - v_0)^2}{v_{Te}^2} \right] \exp[-\beta E], & E < 0, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

donde k_0 indica la longitud de la estructura de atrapamiento, Ψ es la amplitud de perturbación, v_D es una posible deriva de la distribución de equilibrio, v_0 es la velocidad de la estructura de atrapamiento, $\sigma = \text{sgn}(v)$, y β es un parámetro que controla el grado de atrapamiento, siendo $\beta < 0$ si hay partículas atrapadas. La condición $E > 0$ indica electrones no atrapados, mientras que $E < 0$ corresponde a electrones atrapados. En Fig.2.5 se muestra un perfil esquemático de la función de distribución.

Estos estados se caracterizan como cuasi-estacionarios de naturaleza electrostática que persisten por tiempos largos sin sufrir amortiguamiento de Landau, y están

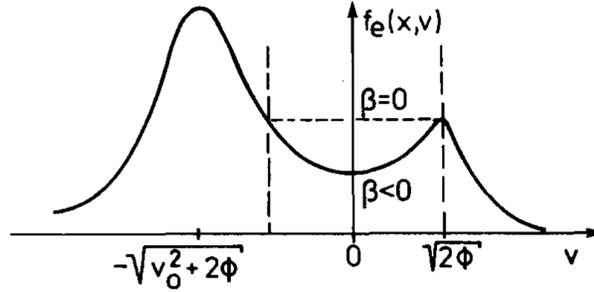


Figura 2.5: Esquema de la función de distribución $f_e(E) = f_e(x, v)$ (2.3.1). La solución está centrada en la zona de atrapamiento, en el rango $-\sqrt{v_0^2 + 2\phi} < v < \sqrt{2\phi}$, donde ϕ es el potencial electrostático normalizado. Figura cortesía de Schamel, 1986 [21].

inherentemente relacionados con atrapamiento de partículas [11, 12].

Electron holes son típicos estados BGK, observados en el espacio de fase de los electrones como vórtices que se mueven con velocidad v_0 y que exhiben un déficit en la densidad de partícula en su interior, rodeado por un exceso de partículas, debido a apantallamiento [41]. La Fig.2.6 muestra el potencial electrostático y el espacio de fase alrededor de una región de atrapamiento de una distribución de electrones. Se pueden distinguir dos regiones en dicha estructura: **(i)** una para estructuras no atrapadas [región blanca en Fig.2.6(b)], correspondiente a partículas que circulan casi libremente y **(ii)** una para partículas atrapadas [región gris en Fig.2.6(b)], correspondiente a partículas que oscilan dentro de la región del potencial.

2.3.3. Interacción entre *electron holes* e iones pesados

Los *electron holes* pueden propagarse en plasmas compuestos por iones y electrones. Si su velocidad de propagación es del orden de la velocidad térmica iónica,

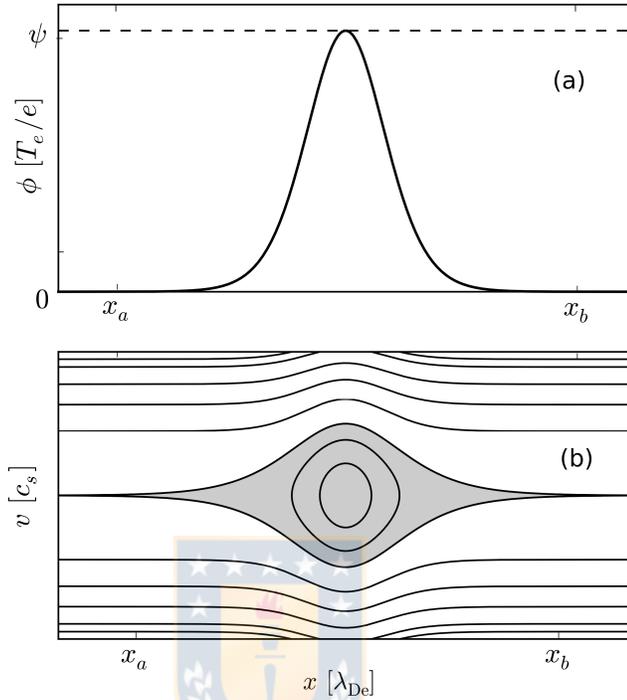


Figura 2.6: Esquema de (a) el potencial electrostático de amplitud ψ alrededor del *electron hole*, y (b) del espacio de fase de los electrones con contornos de energía E constante que representan electrones atrapados (región gris) y no atrapados (región blanca). La posición está medida en longitudes de Debye de electrones, λ_{De} , la velocidad en velocidad ión-acústica, c_s , y el potencial está medido en energía por unidad de carga, T_e/e . Figura cortesía de Zhou y Hutchinson, 2017 [55].

los *electron holes* pueden interactuar con iones pesados [41]. Hutchinson y Zhou desarrollaron una teoría de momentum para *electron holes*, suponiendo que el tiempo de tránsito de los iones a través del *hole* es más pequeño que la escala de tiempo de aceleración del *hole* [40]. Su teoría considera que los iones interactúan con los *electron holes* de cuatro formas: **(i)** por tránsito a través de la región de atrapamiento, **(ii)** acumulación de iones que transitan dentro de la región de atrapamiento, **(iii)** reflexión y **(iv)** crecimiento del potencial de atrapamiento.

En el marco de referencia del *hole*, los iones que transitan a través de él cambian su velocidad incidente debido a la aceleración del *hole*, produciendo una acumulación de iones dentro de la región de atrapamiento. En un sistema de referencia inercial, la diferencia entre la velocidad entrante y saliente de los iones es [40]

$$v'_2 - v'_1 = \frac{dv'_0}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{1}{v} - \frac{2}{v_1 + v_2} \right] dx, \quad (2.3.2)$$

donde las velocidades primadas están medidas en el sistema de referencia inercial, las velocidades no primadas están medidas en el sistema de referencia del *hole*, los índices 1 y 2 indican entrada y salida del *hole*, respectivamente, v'_0 es la velocidad del *hole* y $v = \sqrt{v_1^2 - q_i \Phi(x)/m_i}$ es la velocidad del ión en el interior del *hole*. Estos iones tienen más energía cinética que electrostática. En el caso opuesto, los iones son reflejados por el potencial. No se necesita aceleración para que la reflexión ocurra. El crecimiento en la amplitud del potencial de atrapamiento también afecta al flujo de iones, lo que desprende de la ecuación de conservación de la energía en el marco de referencia del *hole*,

$$v_2 - v_1 = \frac{q_i}{m_i v_1^2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{v_1}{v} \frac{d\Phi}{dt} dx, \quad (2.3.3)$$

y lleva a una mayor acumulación de iones en el *hole*[40].

2.3.4. Solitones ión-acústicos

Los solitones son estructuras no-lineales que se propagan sin dispersión, manteniendo sus propiedades inalteradas. Fueron predichos en 1967 por Washimi y Tanuti [29] a partir de las ecuaciones de fluido de plasmas. Estas estructuras se propagan con velocidad v_s tal que $1 < v_s/c_s \lesssim 1.6$, donde c_s es la velocidad de fase de la

onda ión acústica del modelo fluido. Los solitones pueden observarse como pulsos compresivos en la densidad de partículas, como se muestra en Fig.2.7. Si la carga de la especie es positiva, el solitón produce un potencial positivo.

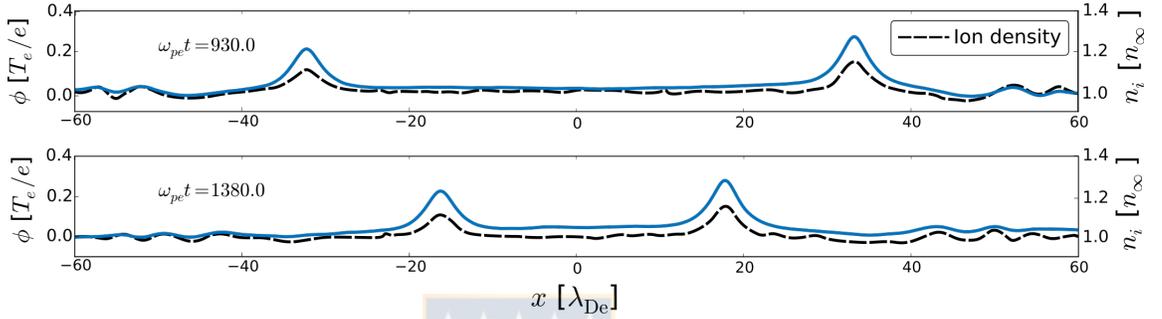


Figura 2.7: Solitones ión-acústicos acercándose. La figura muestra la densidad de los iones n_i (línea negra segmentada) y el potencial electrostático ϕ (línea sólida azul). La posición está medida en longitudes de Debye de electrones, λ_{De} , la densidad de iones en la densidad del estado de equilibrio, n_∞ , y el potencial está medido en T_e/e . Figura cortesía de Zhou y Hutchinson, 2018 [36].

El mecanismo detrás de estas estructuras involucra un acoplamiento resonante entre ondas permitidas por la relación de dispersión. En el caso de IASs, la relación de dispersión es la de IAWs [47], mostrados en Fig.2.1(c), aproximadas para k pequeño, donde la velocidad de fase es aproximadamente constante. La intensidad del acoplamiento depende de la velocidad relativa entre las velocidades de fase de las ondas, siendo máxima cuando se propagan a la misma velocidad [28]. Como la velocidad de fase de las IAWs cambia para k grandes, no se excitan más ondas.

Se ha predicho teóricamente y observado que IASs se acoplan a *electron holes* lentos y se propagan juntos en el espacio de posiciones [34-38], considerando un enfoque cinético. En esta estructura, los electrones lentos están atrapados alrededor

del potencial del solitón. Esta interacción puede modificarse por la razón de temperatura de la distribución de los iones T_i/T_e , como han mostrado Zhou y Hutchinson [36] en un plasma de electrones y iones. Cuando T_i/T_e es comparable o superior a la unidad, los efectos cinéticos deben considerarse en la dinámica y el modo IA detrás del solitón puede amortiguarse fuertemente, ya que hay un número no despreciable de iones resonantes. Entonces, la estructura se rompe, resultando sólo un *electron hole*.



3 Fundamentos de la integración numérica e implementación numérica

El presente capítulo está dedicado a describir la normalización usada y a las consideraciones en las escalas de posición, velocidad y tiempo. Además, se describen la teoría y la implementación numérica de la integración de la ecuación de Poisson y de la integración simpléctica usada para resolver la ecuación de Vlasov.

3.1 Normalizaciones y escalas de especies

Las simulaciones se realizan para el caso unidimensional. Las cantidades involucradas se normalizan de la siguiente manera.

- El tiempo t , el paso de tiempo Δt y las frecuencias ω se normalizan con respecto a la frecuencia de oscilación de plasma de electrones ω_{pe} , $\bar{t} \equiv \omega_{pe} t$, $\Delta \bar{t} \equiv \omega_{pe} \Delta t$, $\bar{\omega} \equiv \omega / \omega_{pe}$.
- La posición \mathbf{r} , longitudes L y vectores de onda \mathbf{k} se normalizan con respecto a la longitud de Debye de electrones λ_{De} , $\bar{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{r} / \lambda_{De}$, $\bar{L}_{x,y,z} \equiv L_{x,y,z} / \lambda_{De}$, $\bar{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{k} \lambda_{De}$.
- Las velocidades se normalizan con respecto a la velocidad térmica electrónica v_{Te} , $\bar{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v} / v_{Te}$. También se normalizan las velocidades con respecto a la velo-

idad térmica de cada especie j , $\bar{\mathbf{v}}_j \equiv \mathbf{v}/v_{Tj}$. También, las velocidades térmicas se normalizan como $\bar{v}_{Tj} \equiv v_{Tj}/v_{Te}$. El vector de onda asociado al espacio de velocidades se normaliza como $\bar{\boldsymbol{\mu}}_j \equiv \boldsymbol{\mu}v_{Tj}$.

- Las cargas eléctricas se normalizan con respecto al módulo de la carga del electrón $|q_e|$, como $\bar{q}_j \equiv q_j/|q_e|$.
- El campo eléctrico se normaliza como $\bar{\mathbf{E}} \equiv \mathbf{E}(|q_e|/m_e\omega_{pe}v_{Te})$. La densidad de carga se normaliza como $\bar{\rho} = \rho(|q_e|\lambda_{De}/m_e\omega_{pe}v_{Te}\epsilon_0)$, y el potencial electrostático se normaliza como $\bar{\Phi} \equiv \Phi(|q_e|/m_e\omega_{pe}v_{Te}\lambda_{De})$.
- Las masas y densidades de las especies se normalizan con respecto a la masa electrónica, m_e , como $\bar{m}_j = m_j/m_e$, y con respecto a la densidad en el estado de equilibrio de los electrones, $n_{0,e}$, como $\bar{n}_j \equiv n_j/n_{0,e}$.
- La función de distribución se normaliza considerando que el sistema es unidimensional, $\bar{f}_j \equiv v_{Te}f_j/n_e$. Como en el caso de la velocidad, la distribución se normaliza también con respecto a la velocidad térmica inicial de su propia especie, $\tilde{f}_j \equiv v_{Tj}f_j/n_e$.

La solución numérica del sistema de ecuaciones involucra la resolución de la dinámica de dos especies, surgiendo diferentes escalas.

- La integración considera la misma escala de tiempo para todas las especies, porque todas ellas se influyen unas a otras a través de cambios en el campo eléctrico en todo momento. El uso de diferentes escalas llevaría a problemas en la resolución de cantidades comunes, como la densidad de carga y el campo eléctrico. Por ejemplo, entre dos instantes sucesivos de la escala de la especie

más pesada del plasma, transcurren varios instantes en la escala de la especie más ligera. Por lo tanto, la contribución de cada especie estaría desbalanceada.

- La integración considera la misma escala de posiciones para todas las especies por un argumento similar. Cuando se calculan la densidad de carga y el campo eléctrico en una cierta región del espacio, no habría contribución de todas las especies en los mismos puntos de la grilla, realizando una estimación desbalanceada de estas cantidades.
- La integración considera escalas de velocidad individuales para cada especie. En el caso de un plasma de electrones y iones con razón de masa $m_i/m_e = 1836$, por ejemplo, la mayor parte de la dinámica de los electrones ocurre en el rango de velocidades $[-8, 8]v_{Te}$, mientras que para iones, en el caso de la razón inicial $T_i/T_e = 1$, se tiene $[-0.17, 0.17]v_{Te}$. Si se usara la misma escala, la grilla debería contener muchos nodos para resolver la dinámica de los electrones, pero tendría considerablemente menos nodos al resolver la dinámica de los iones. El uso de escalas de velocidad individual permite resolver ambas especies con el mismo número de nodos, re-escalando la dependencia de velocidad con la respectiva velocidad térmica. Además, no hay cantidades comunes que requieran un espacio común en velocidades.

Con respecto a las consideraciones anteriores, el sistema de ecuaciones a resolver

numéricamente es el siguiente.

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_{Tj} \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\bar{q}_j}{\bar{m}_j \bar{v}_{Tj}} \bar{E} \frac{\partial}{\partial \bar{v}_j} \right] \tilde{f}_j = 0, \quad (3.1.1)$$

$$-\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{x}} = \bar{E}, \quad (3.1.2)$$

$$-\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \bar{x}^2} = \sum_j \bar{q}_j \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_j d\bar{v}_j. \quad (3.1.3)$$

Los coeficientes $\bar{v}_{Tj} = \sqrt{T_j/\bar{m}_j}$ y $\bar{q}_j/\bar{m}_j \bar{v}_{Tj} = \bar{q}_j/\sqrt{\bar{m}_j T_j}$ en la ecuación de Vlasov permiten realizar la integración en el espacio de velocidades de cada especie y luego re-escalarla a la escala de la velocidad térmica electrónica.

3.2 Integración del sistema de Vlasov-Poisson

3.2.1. Integración del campo eléctrico

EL campo eléctrico en este esquema se calcula a través de las ecuaciones (3.1.2) y (3.1.3), las que requieren las funciones de distribución \tilde{f}_j . Estas ecuaciones pueden resolverse por medio de transformadas de Fourier. Sean $\tilde{f}_{j,\bar{k}} \equiv \mathcal{F}_{\bar{k}} [\tilde{f}_j]$ y $\bar{\Phi}_{\bar{k}} \equiv \mathcal{F}_{\bar{k}} [\bar{\Phi}]$ las transformadas de Fourier en el espacio de posición de la función de distribución y del potencial electrostático, respectivamente. Luego, la transformada de Fourier de (3.1.3) resulta

$$\bar{k}^2 \bar{\Phi}_{\bar{k}} = \sum_j \bar{q}_j \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{j,\bar{k}} d\bar{v}_j.$$

Entonces, el campo eléctrico se determina a través de la transformada de Fourier de la ecuación (3.1.2), $-i\bar{k}\bar{\Phi}_{\bar{k}} = \bar{E}_{\bar{k}}$, de la que se obtiene el campo eléctrico como

$$\bar{E} [\tilde{f}_j] = \mathcal{F}_{\bar{x}}^{-1} \left[-\frac{i}{\bar{k}} \sum_j \bar{q}_j \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{j,\bar{k}}(\bar{v}_j, \bar{t}) d\bar{v}_j \right].$$

La condición de cuasi-neutralidad se implementa fijando $\bar{E}_{k=0} = 0$, es decir, el campo eléctrico promedio en el espacio es nulo en todo momento.

Implementación numérica

El cálculo se realiza numéricamente en el código integrador a través del algoritmo de *Fast Fourier Transform of the West* (FFTW). El uso de condiciones de borde periódicas en posiciones hace que sea adecuado el uso de transformadas de Fourier. El campo eléctrico se obtiene a través de FFTW inversa. Sea N_v el número de modos en la grilla de velocidades sobre la que se define cada función de distribución. El campo eléctrico en cada paso de tiempo se calcula como

$$\bar{E} = \text{IFFT}_{\bar{x}} \left[-\frac{i}{\bar{k}} \sum_j \bar{q}_j \Delta\bar{v}_j \sum_{n=1}^{N_v} \text{FFT}_{\bar{k}} [\tilde{f}_j] \right],$$

donde la integral sobre el espacio de velocidades se ha discretizado en una sumatoria de 1 a N_v , y $\Delta\bar{v}_j = \Delta v/v_{Tj}$ es la resolución de la grilla de velocidad de la especie j .

3.2.2. Integración de la ecuación de Vlasov

Operadores e integradores simplécticos

Los operadores simplécticos están relacionados a sistemas Hamiltonianos, esto es, sistemas físicos que consisten de partículas discretas o de un medio continuo, cuya dinámica puede representarse a través de una función Hamiltoniana y evolucionar de acuerdo a las ecuaciones de Hamilton [56, 57]. Un operador simpléctico es un operador lineal que actúa sobre las coordenadas del espacio de fase del sistema Hamiltoniano o en cantidades que dependen de éstas, que constituye una transformación canónica [58] y verifica el teorema de Liouville, conservando volúmenes en el espacio de fase [59], preservando detalles del espacio de fase del sistema.

Los integradores simplécticos son esquemas de integración numérica construidos con operadores simplécticos. Al definir integradores numéricos, surge un Hamiltoniano aproximado \tilde{H} , vinculado a un mapa de flujo que hace evolucionar al sistema en una forma similar a la que lo hace el Hamiltoniano exacto H [60]. La relación entre el Hamiltoniano exacto y su aproximación se obtiene a través de una expansión en serie [61],

$$\tilde{H} = H + \Delta t^n H_n + \mathcal{O}(\Delta t^{n+1}),$$

donde n es el orden del integrador. La expansión indica que \tilde{H} es cercano al Hamiltoniano original excepto por variaciones de orden n en el paso de tiempo Δt . Por lo tanto, en un sistema Hamiltoniano conservativo, \tilde{H} exhibe variaciones alrededor de H , asegurando que las variaciones en el Hamiltoniano y en la energía total, en el caso

en que ésta sea equivalente a su Hamiltoniano, estén acotadas. Entonces, las principales características de un integrador simpléctico son la preservación de detalles del espacio de fase del sistema, resultando cercano a la dinámica del Hamiltoniano real, y la conservación de la energía total en un sistema conservativo, siendo un algoritmo adecuado para simulaciones a tiempos largos.

Otros métodos, como la familia de integradores de Runge-Kutta, han sido reportados como inestables para la dinámica de tiempos largos, introduciendo disipación numérica y cambiando la evolución del sistema [62, 63]. Estos métodos no están basados en ecuaciones dinámicas, y por consiguiente no conservan ni la estructura del espacio de fase ni la energía del sistema.

Integración simpléctica de la ecuación de Vlasov

La ecuación de Vlasov puede considerarse como la evolución de la función de distribución de las especie j dado el operador Hamiltoniano $\mathbb{H} = \mathbb{T} + \mathbb{V}$,

$$\mathbb{H}f_j = \frac{\partial f_j}{\partial t}, \quad (3.2.1)$$

donde los operadores no conmutantes \mathbb{T} y \mathbb{V} se definen como

$$\mathbb{T} \equiv -\mathbf{v} \cdot \nabla, \quad \mathbb{V} \equiv -\frac{q_j}{m_j} \mathbf{E} \cdot \nabla_v.$$

Así, la ecuación de Vlasov está relacionada con el Hamiltoniano conservativo \mathbb{H} , y el uso de integración simpléctica para estimar la evolución de la función de distribución f_j está justificada. Dado un intervalo de tiempo Δt y todas las cantidades en el

instante t , la distribución en el instante $t + \Delta t$ se obtiene integrando directamente.

$$f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t + \Delta t) = \exp [\Delta t (\mathbb{T} + \mathbb{V})] f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (3.2.2)$$

Esta solución es válida siempre que los operadores \mathbb{T} y \mathbb{V} no dependan explícitamente del tiempo. Se debe notar que aunque \mathbf{E} varía en el tiempo, es un campo formalmente función de f_j , por lo que no depende explícitamente del tiempo t . Así, si el intervalo de tiempo de interés se divide en M particiones cuyo ancho es Δt , la solución general de la ecuación de Vlasov para la especie j está dada por [62]

$$f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = [\exp (\Delta t [\mathbb{T} + \mathbb{V}])]^M f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0),$$

donde el operador \mathbb{V} se actualiza luego de cada aplicación de la exponencial. Para estimar la exponencial se pueden realizar aproximaciones. En la construcción de métodos de integración simpléctica se ha demostrado que el operador exponencial en (3.2.2) puede expandirse como [64]

$$\exp [\Delta t (\mathbb{T} + \mathbb{V})] = \prod_{j=1}^r \exp [\Delta t \tau_j \mathbb{T}] \exp [\Delta t \nu_j \mathbb{V}] + \mathcal{O} (\Delta t^{n+1}), \quad (3.2.3)$$

donde r es el número de pares de operadores, n es el orden del integrador, y τ_j y ν_j son coeficientes reales positivos. Estas condiciones aseguran que al resolver el sistema de ecuaciones, la física evolucione de forma covariante con el tiempo. Coeficientes negativos implicarían que el sistema retrocede en el tiempo [65], lo que produce resultados no físicos en sistemas que no son invariantes ante traslaciones en el tiempo. Cada uno de los operadores exponencial es simpléctico, ya que cada uno de ellos proviene de transformaciones canónicas.

En la solución (3.2.3) los operadores \mathbb{T} y \mathbb{V} se aplican por separado en la condición inicial, truncando el operador hasta términos del orden de Δt^n . Cada operador actúa en variables independientes en f_j , por tanto, cada dependencia se resuelve de forma independiente. Esta solución está basada en el esquema de *splitting* de Strang [66], el que, aunque usa un operador de desplazamiento en el tiempo basado en diferencias finitas (operadores de Lax-Wendroff), separa la ecuación diferencial de la misma manera.

El orden n del integrador se determina comparando la solución obtenida con la expansión de Baker-Campbell-Hausdorff de la exponencial exacta [62], y eligiendo coeficientes τ_j y ν_j tales que los términos hasta orden Δt^n se anulen. Junto con condiciones de descomposición, esto determina los coeficientes del integrador. En algunos casos podrían haber varias elecciones de coeficientes, los que se determinan por medio de un proceso de minimización del coeficiente proporcional a Δt^{n+1} .

Advecciones e integrador utilizado

En analogía con la solución (3.2.2), la resolución de cada una de las exponenciales en (3.2.3) implica resolver las ecuaciones

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \tau_l \mathbf{v} \cdot \nabla \right] f_j = 0, \quad (3.2.4)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \nu_l \frac{q_j}{m_j} \mathbf{E} \cdot \nabla_v \right] f_j = 0, \quad (3.2.5)$$

las que corresponden a ecuaciones de advección relacionadas con el operador \mathbb{T} [ec. (3.2.4)], y el operador \mathbb{V} [ec. 3.2.5]. En este sentido, el problema de la integración de

la ecuación de Vlasov se ha reducido a resolver ecuaciones de advección de la función de distribución f_j en cada una de sus dependencias. Para el problema unidimensional con variables normalizadas, las ecuaciones de advección a resolver son

$$\left[\frac{\partial}{\partial \bar{t}} + (\tau_l \bar{v}_{Tj}) \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right] \tilde{f}_j = 0, \quad (3.2.6)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \left(\frac{\nu_l \bar{q}_j}{\bar{m}_j \bar{v}_{Tj}} \right) \bar{E} \frac{\partial}{\partial \bar{v}_j} \right] \tilde{f}_j = 0, \quad (3.2.7)$$

donde el campo eléctrico \bar{E} debe calcularse antes de cada advección (3.2.7). En este trabajo, estas ecuaciones se resuelven por medio de transformadas de Fourier, esto es, cada advección es transformada en su respectiva variable de integración y luego se evalúa la transformada inversa. Así, las ecuaciones de advección a resolver son

$$\left[\frac{\partial}{\partial \bar{t}} + i (\tau_l \bar{v}_{Tj}) \bar{v}_j \bar{k} \right] \tilde{f}_{j,\bar{k}} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \bar{t}} + i \left(\frac{\nu_l \bar{q}_j}{\bar{m}_j \bar{v}_{Tj}} \right) \bar{E} \bar{\mu}_j \right] \tilde{f}_{j,\bar{\mu}_j} = 0,$$

donde $\tilde{f}_{j,\bar{k}} \equiv \mathcal{F}_{\bar{k}} [\tilde{f}_j]$ y $\tilde{f}_{j,\bar{\mu}_j} \equiv \mathcal{F}_{\bar{\mu}_j} [\tilde{f}_j]$ son las transformadas de Fourier de \tilde{f}_j en posición con variable conjugada \bar{k} , y en velocidades con variable conjugada $\bar{\mu}_j$. Las soluciones de cada advección para un paso de tiempo $\Delta \bar{t}$ son

$$\tilde{f}_{j,\bar{k}}(\bar{v}_j, \bar{t} + \Delta \bar{t}) = \tilde{f}_{j,\bar{k}}(\bar{v}_j, \bar{t}) \exp [-i (\tau_j \bar{v}_{Tj}) \bar{v}_j \bar{k} \Delta \bar{t}],$$

$$\tilde{f}_{j,\bar{\mu}_j}(\bar{x}, \bar{t} + \Delta \bar{t}) = \tilde{f}_{j,\bar{\mu}_j}(\bar{x}, \bar{t}) \exp \left[-i \left(\frac{\nu_j \bar{q}_j}{\bar{m}_j \bar{v}_{Tj}} \right) \bar{E} [\tilde{f}_j] \bar{\mu}_j \Delta \bar{t} \right].$$

Implementación numérica

Las transformadas de Fourier se calculan a través del algoritmo FFTW. Aunque es adecuado para las condiciones de borde periódicas en el espacio de posiciones, su uso no es trivial en el espacio de velocidades. Esta dependencia se fuerza a ser periódica tomando un intervalo de velocidades lo suficientemente grande como para que las funciones de distribución lo más cercanas a cero en los bordes $\bar{v}_{j,\max/\min}$. Así, la condición de periodicidad $\tilde{f}_j(\bar{x}, \bar{v}_{j,\max}, t) = \tilde{f}_j(\bar{x}, \bar{v}_{j,\min}, t)$, se satisface en forma aproximada en todo momento y en todas las posiciones, y el uso del algoritmo FFTW es adecuado para la integración sobre el espacio de velocidades.

En lo que respecta a la dependencia de velocidad, el plasma puede desarrollar filamentación, un proceso relacionado con el movimiento de partícula libre, observado en el espacio de fase de las especies como filamentos cuyo ancho en la dependencia de velocidad se reduce a medida que el plasma evoluciona. En simulaciones, la filamentación limita el tiempo máximo hasta el que se puede avanzar ya que no se pueden resolver de forma adecuada estructuras cuyo ancho es del orden de o inferior a $\Delta\bar{v}_j$. El desarrollo de estas longitudes en el espacio de velocidades se amortigua con la introducción de un filtro pseudo-Gaussiano \mathbb{F} [67], dado por

$$\mathbb{F}(\bar{\mu}_j) = \exp \left[-36 \left(\frac{\bar{\mu}_j}{\max[\bar{\mu}_j]} \right)^{36} \right], \quad (3.2.8)$$

aplicado como una convolución a la función de distribución de la especie j en cada advección de velocidad. Si \tilde{f}_j^0 denota a la distribución antes de una advección y \tilde{f}_j^1

denota a la distribución después de la advección, integrando directamente resulta

$$\begin{aligned}\tilde{f}_j^1 &= \text{IFFT}_{\bar{x}} \left[\text{FFT}_{\bar{k}} \left[\tilde{f}_j^0 \right] \exp \left[-i \left(\tau_l \bar{v}_{Tj} \right) \bar{v}_j \bar{k} \Delta \bar{t} \right] \right], \\ \tilde{f}_j^1 &= \text{IFFT}_{\bar{v}_j} \left[\mathbb{F}(\bar{\mu}_j) \text{FFT}_{\bar{\mu}_j} \left[\tilde{f}_j^0 \right] \exp \left[-i \left(\frac{\nu_l \bar{q}_j}{\bar{m}_j \bar{v}_{Tj}} \right) \bar{E} \bar{\mu}_j \Delta \bar{t} \right] \right].\end{aligned}$$

Los valores de los coeficientes están dados por el integrador específico. En este trabajo, se usa un integrador simpléctico de segundo orden optimizado por McLachlan y Atela [68], con primera advección en velocidad, consistente en cuatro advecciones en el orden $\mathbb{V} - \mathbb{T} - \mathbb{V} - \mathbb{T}$, y cuyos coeficientes, de acuerdo a (3.2.3), son

$$\tau_1 = 0, \quad \nu_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tau_2 = \nu_1, \quad \nu_2 = 1 - \nu_1, \quad \tau_3 = \nu_2, \quad \nu_3 = 0.$$

Como comentario final, se observa que aunque en este esquema la función de distribución, el campo eléctrico y cualquier otra cantidad relacionada, son campos definidos en una grilla Euleriana en posición, velocidad y tiempo, la integración a lo largo de las trayectorias es de naturaleza Lagrangiana. Por esto, el esquema de integración es de tipo semi-Lagrangiano.

Los cálculos numéricos previos requeridos para resolver el sistema de Vlasov-Poisson se implementan en un código en lenguaje Julia (v 1.3.1) a través de la librería `Vlasova.jl`, creada por J. A. Gidi, del Departamento de Física en la Universidad de Concepción.

3.3 Resolución de la relación de dispersión lineal

Las raíces de la relación de dispersión lineal se obtienen resolviendo (2.2.10). Para este fin, se calcula la función de dispersión de plasma a través del complemento de la función error escalada, en la forma

$$Z(\zeta_j) = i\sqrt{\pi} \operatorname{erfcx}(-i\zeta_j), \quad (3.3.1)$$

donde ζ es el parámetro de resonancia $\zeta = \omega/v_{Tj}k$, para un k dado. La librería `SpecialFunctions.jl` del lenguaje Julia (v 1.3.1) calcula esta función a través de la librería estándar `math` del lenguaje C [69].

La resolución de (2.2.10) se realiza a través del método de Muller. Este algoritmo se implementa en un código Python creado por R. E. Navarro, del Departamento de Física de la Universidad de Concepción. El método de Muller usa una aproximación de segundo orden de la derivada usada en el método de Newton-Raphson [70] para estimar los ceros de la función dieléctrica (2.2.8). Primero, se le proveen valores semillas al algoritmo que consisten en puntos de la grilla ζ cercanos a ceros de $\varepsilon_{k,\omega}$ para un primer k . Las ramas correspondientes a modos de la relación de dispersión lineal se obtienen usando cada una de estas raíces como semillas para los siguientes números de onda. El cálculo para los siguientes números de onda usa las raíces inmediatamente anteriores como semillas. Las raíces para los números de onda restantes se estiman a través de una extrapolación polinomial de grado dos con las últimas tres raíces a lo largo de cada rama.

4 Perturbaciones amortiguadas en un plasma de electrones y iones Maxwellianos

A lo largo de este capítulo, los iones tienen distribución Maxwelliana como configuración de equilibrio, cuando son móviles, con razón de masa $\bar{m}_i = 1836.153$, y son inicialmente isotérmicos respecto de los electrones, $\bar{T}_i = 1.0$,

$$\tilde{f}_{0,i}(\bar{v}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\bar{v}_i^2\right],$$

donde la condición de cuasi-neutralidad requiere que $\bar{n}_{0,i} = 1.0$ y $\bar{q}_i = 1.0$. Se excita el primer modo del campo eléctrico, con número de onda $\bar{k}_1 = 0.4$ y amplitud de perturbación ε_e ,

$$\tilde{f}_e(\bar{x}, \bar{v}_e, 0) = [1 + \varepsilon_e \cos(\bar{k}_1 \bar{x})] \tilde{f}_{0,e}(\bar{v}_e), \quad (4.0.1)$$

siendo $\tilde{f}_{0,e}(\bar{v}_e)$ una distribución Maxwelliana de la misma forma que $\tilde{f}_{0,i}(\bar{v}_i)$. En la literatura, en plasmas de electrones y iones cinéticos, es usual perturbar sólo la distribución de los electrones, mientras que los iones pesados se mantienen estáticos, debido a la diferencia de inercia. Sin embargo, cuando el sistema es perturbado, por ejemplo, por un potencial súbito, hay una fuerza impulsiva actuando en todas las

especies.

Con el fin de estimar la amplitud de perturbación en la distribución de los iones, se supone que la dinámica de partícula es no relativista y que se desvía levemente respecto de la posición inicial x_0 , con forzamiento impulsivo $F(x_0, t) = q_j E_0 \sin(k_1 x_0) \delta(t)$, concordante con la perturbación repentina. Las ecuaciones de movimiento conducen a trayectorias

$$v(t) = \frac{q_j}{m_j} E_0 \sin(k_1 x_0) + v_0, \quad x(t) = \left[\frac{q_j}{m_j} E_0 \sin(k_1 x_0) + v_0 \right] t + x_0,$$

donde v_0 es la velocidad inicial de la partícula, correspondiente a la configuración de equilibrio. De acuerdo a esta solución, la desviación de la partícula respecto de su trayectoria de equilibrio es proporcional a q_j/m_j en un dado instante t previo a la evolución del plasma. Así, la razón de amplitudes de perturbación de ambas distribuciones es $\varepsilon_i/\varepsilon_e = \bar{q}_i/(\bar{q}_e \bar{m}_i) = -5.447 \times 10^{-4}$ y la distribución inicial de los iones está dada por

$$\tilde{f}_i(\bar{x}, \bar{v}_i, 0) = \left[1 + \frac{\bar{q}_i}{\bar{q}_e \bar{m}_i} \varepsilon_e \cos(\bar{k}_1 \bar{x}) \right] \tilde{f}_{0,i}(\bar{v}_i). \quad (4.0.2)$$

En las siguientes secciones, se observan cantidades macroscópicas y distribuciones reducidas de ambas especies considerando la excitación del número de onda $\bar{k}_1 = 0.4$ y una longitud en el espacio de posiciones $\bar{L}_x = 5\pi$. Se estudian dos amplitudes de perturbación, una correspondiente al régimen lineal, $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-3}$, y otra por debajo pero cercana a la amplitud crítica, $\varepsilon_{e,C}$, $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$.

4.1 Amplitud del modo excitado del campo eléctrico y espectros

La cantidad macroscópica más notoria que permite identificar los efectos de iones pesados móviles es la amplitud del modo excitado del campo eléctrico $|\bar{E}_1|$. Las presentes simulaciones obtienen cualitativamente los mismos resultados que Xu *et al.* [20] para el régimen de oscilaciones amortiguadas, como se observa en las Figs.4.1(a) y (b).

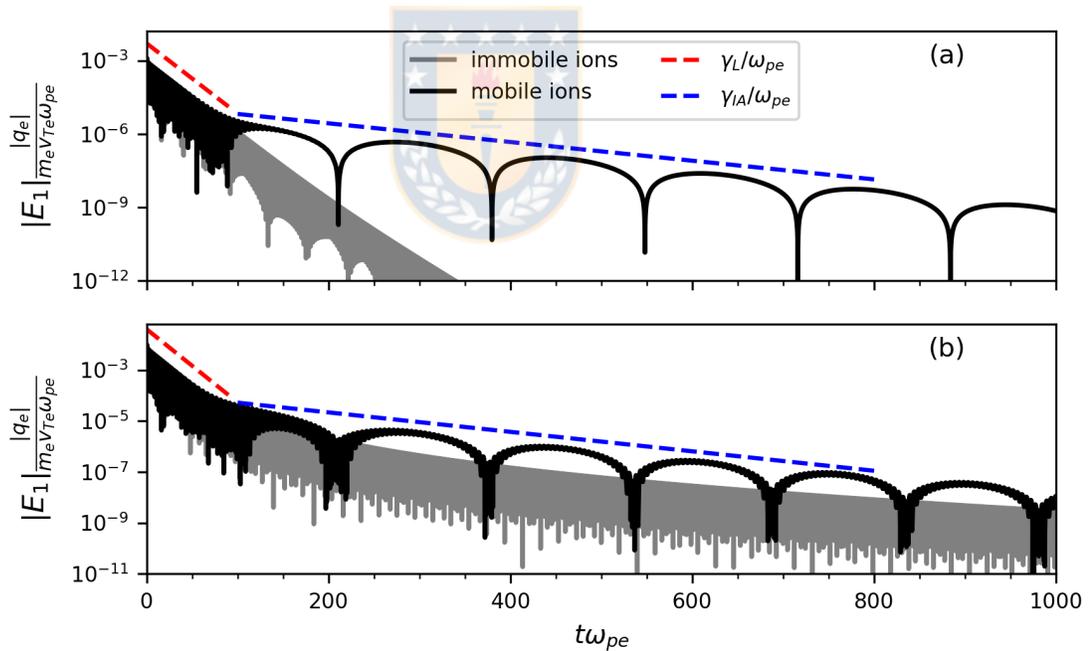


Figura 4.1: Evolución de la amplitud del primer modo del campo eléctrico $|\bar{E}_1|$ para (a) $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-3}$ y (b) $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$, con iones móviles e inmóviles. Se muestran las tasas de las ondas observadas, para ondas de Langmuir (línea roja segmentada) y ondas ión acústicas (línea azul segmentada).

En el modo excitado, se observa que los efectos de la dinámica de los iones son

dominantes para ambas amplitudes, pero un incremento en ε_e permite que oscilaciones rápidas de baja amplitud persistan. Con ambas amplitudes se observan dos frecuencias de oscilación en $|\bar{E}_1|$, una relacionada con la dinámica de los electrones durante $t\omega_{pe} < 60$, cuya tasa de amortiguamiento coincide con la de las LWs para el modo perturbado, $\bar{\gamma}_L = -6.6079 \times 10^{-2}$, y la otra corresponde a frecuencias de oscilación bajas para $t\omega_{pe} > 100$, con tasa de amortiguamiento coincidente con la de IAWs para el modo perturbado, $\bar{\gamma}_{IA} = -8.7939 \times 10^{-3}$.

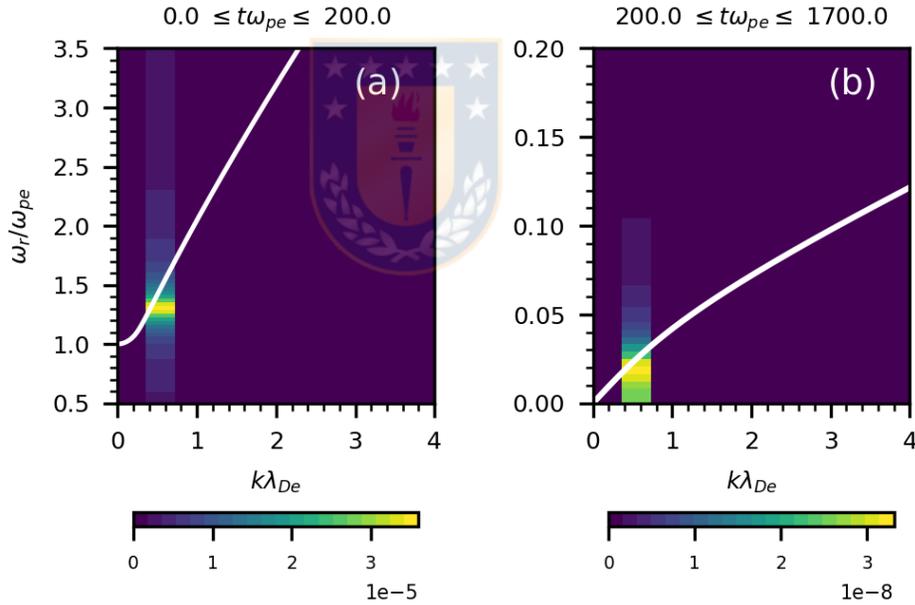


Figura 4.2: Espectro del campo eléctrico $|\bar{E}_{k,\omega}|$ de $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-3}$ para (a) el rango de tiempo inicial de alta frecuencia y (b) el rango de baja frecuencia posterior. Se muestran raíces de la relación de dispersión lineal (línea sólida blanca), correspondientes al modo de Langmuir (a) y al IA (b).

Una comparación entre las raíces de la relación de dispersión lineal (2.2.10)

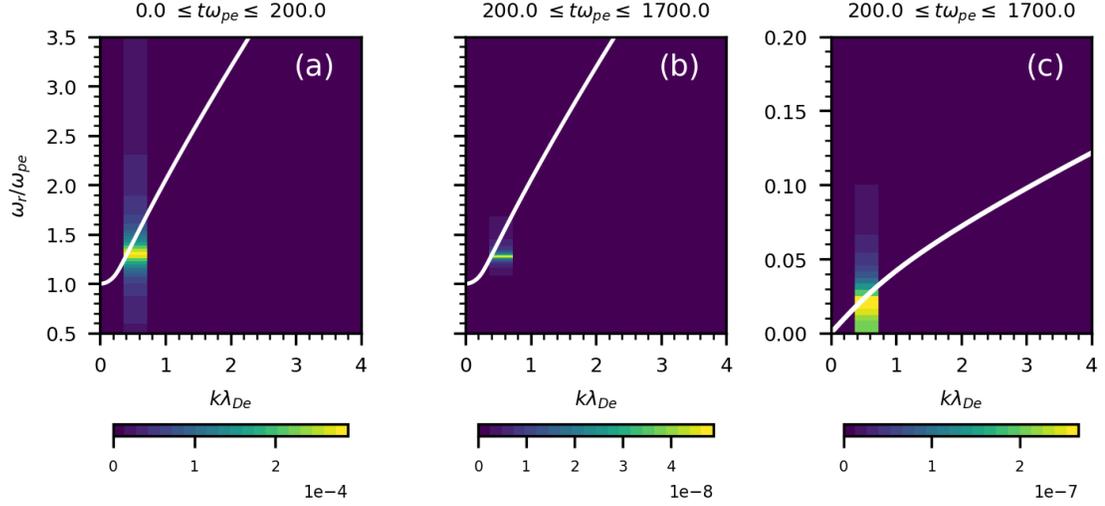


Figura 4.3: Espectro del campo eléctrico $|\bar{E}_{k,\omega}|$ de $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$ para (a) el rango de tiempo inicial de alta frecuencia, (b) rango de tiempo posterior de alta frecuencia y (c) rango de tiempo posterior de baja frecuencia. Se muestran raíces de la relación de dispersión lineal (línea sólida blanca), correspondientes al modo de Langmuir [(a) y (b)] y al IA (c).

y el espectro del campo eléctrico $|\bar{E}_{k,\omega}|$ de ambas amplitudes de perturbación ε_e (Figs.4.2 y 4.3, respectivamente) confirma la excitación de LWs e IAWs, con frecuencias $\bar{\omega}_L = 1.2852$ y $\bar{\omega}_{IA} = 1.8265 \times 10^{-2}$, respectivamente, como fue notado por Xu *et al.*[20]. Ambos son los modos menos amortiguados de la relación de dispersión (2.2.10).

Para $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$, aún es posible observar oscilaciones de alta frecuencia correspondientes a LWs en $|\bar{E}_1|$ [Fig.4.1(b)] y en $|\bar{E}_{k,\omega}|$ [Fig.4.3(b)], pero con amplitudes un orden de magnitud inferior a la de las IAWs. Estos resultados confirman los modos encontrados por Xu *et al.* para este plasma.

4.2 Comportamiento en el dominio de velocidades

Las bajas amplitudes permiten el uso de la teoría lineal para estimar el comportamiento general de las funciones de distribución (2.2.5). Ya que la distribución de equilibrio de ambas especies es Maxwelliana, la carga eléctrica indica que el efecto perturbativo de ambas especies alrededor de la velocidad de fase de las IAWs excitadas, $\bar{v}_{\phi,IA}$, debería ser opuesto en las distribuciones de electrones e iones pesados, y que la amplitud de las variaciones en esta última debería ser menor.

Se siguen las variaciones de la función de distribución promediada en posiciones $\langle \delta \bar{f}_j \rangle_{\bar{x}}(\bar{v})$ de ambas especies. Esta cantidad está dada por

$$\langle \delta \bar{f}_j \rangle_{\bar{x}}(\bar{v}) = \frac{1}{\bar{L}_x} \int_0^{\bar{L}_x} [\bar{f}_j(\bar{x}, \bar{v}, \bar{t}) - \bar{f}_{0,j}(\bar{v})] d\bar{x}, \quad (4.2.1)$$

donde f_j y v han sido normalizadas con respecto a cantidades de electrones. De acuerdo a la normalización, la relación entre \bar{f}_j y \tilde{f}_j , obtenida de las simulaciones, es $\bar{f}_j = \bar{n}_j / \bar{v}_{Tj} \tilde{f}_j$. Se hace notar que como el sistema es simétrico en el espacio de velocidades, se observa la misma dinámica en $\bar{v} < 0$ y en $\bar{v} > 0$, por lo que se estudia sólo un rango. Además, el comportamiento general con ambas amplitudes de perturbación es cualitativamente el mismo, excepto por el nivel de las amplitudes, por lo que se muestra sólo un caso ($\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$). Se sigue la zona de resonancia alrededor de la velocidad de fase de ondas ión acústicas $\bar{v}_{\phi,IA} = \bar{\omega} / \bar{k} = 4.662 \times 10^{-2}$.

En las Figs.4.4, 4.5 y 4.6 (d) a (f), se muestra $\langle \delta \bar{f}_i \rangle_{\bar{x}}$. La perturbación inicial produce una zona de resonancia alrededor de $\bar{v} \simeq 2.5 \times 10^{-2}$ [Fig.4.5(a)]. Después de

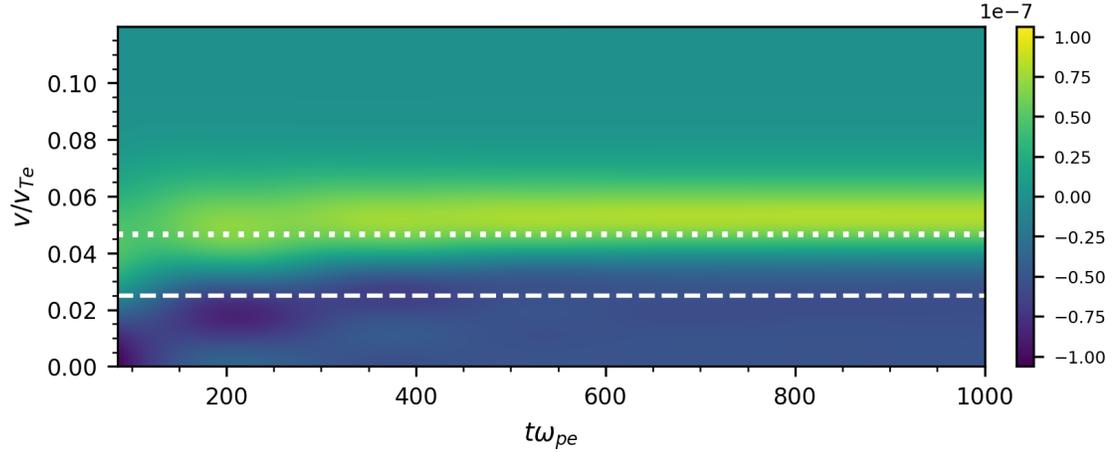


Figura 4.4: Evolución de las variaciones de la función de distribución de los iones promediadas en posiciones, $\langle \delta \bar{f}_i \rangle_{\bar{x}}$. Como referencias se muestran la velocidad de fase de onda ión acústica (línea blanca punteada) y la velocidad resonante inicial (línea blanca segmentada) para $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$.

$t\omega_{pe} = 100$ se observa que se mantiene la misma tendencia en el dominio de velocidades, pero alrededor de $\bar{v} \simeq 4.0 \times 10^{-2}$ [Figs.4.5(b)], con variaciones despreciables en instantes posteriores (Fig.4.4).

La evolución de $\langle \delta \bar{f}_i \rangle_{\bar{x}}$ muestra que las oscilaciones rápidas en la distribución de partículas ocurre alrededor de $\bar{v} = 2.5 \times 10^{-2}$, lo que coincide con el dominio de las LWs [Fig.4.5(a)], con una gran reducción en el número de iones más lentos que $\bar{v} = 2.5 \times 10^{-2}$ [Fig.4.6(d)] desde el instante inicial. Esta componente decae en el tiempo, como se observa en las Figs.4.4 y 4.5(b). El decaimiento se corresponde con una reversión en la aceleración inicial que ocurre a medida que los iones se acumulan en los bordes del dominio de posiciones durante $0 \leq t\omega_{pe} \leq 100$ (Fig.4.7), indicando la presencia de un potencial positivo de baja frecuencia que los frena [Fig.4.6(d)] y detiene la acumulación. Posteriormente, los iones son repelidos, reduciendo las va-

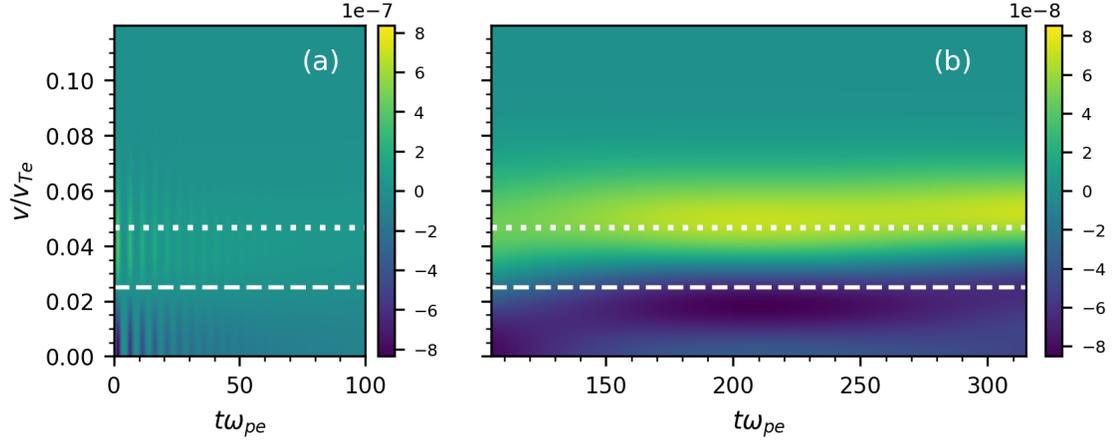


Figura 4.5: Detalles de (a) la etapa inicial y (b) la transición a tiempos largos de las variaciones de la función de distribución de los iones promediadas en posiciones, $\langle \delta \bar{f}_i \rangle_{\bar{x}}$, para $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$. Se indican las mismas velocidades.

riaciones en la densidad $\delta \bar{n}_i = \bar{n}_i - \bar{n}_{0,i}$ ($100 \leq t\omega_{pe} \leq 200$, Fig.4.7) y acelerados, produciendo una acumulación de iones con velocidades cercanas a $\bar{v}_{\phi,IA}$ [Fig.4.6(e)] al mismo tiempo que las oscilaciones se amortiguan. El amortiguamiento causa un forzamiento débil en las partículas, produciendo variaciones de baja amplitud en la densidad para tiempos posteriores ($t\omega_{pe} > 200$, Fig.4.7). Consecuentemente, las variaciones temporales en $\langle \delta \bar{f}_i \rangle_{\bar{x}}$ se vuelven más pequeñas, manteniendo la misma forma a tiempos más largos [Figs.4.4 and 4.6(f)].

Las variaciones en $\langle \delta \bar{f}_e \rangle_{\bar{x}}$ se muestran en las Figs.4.6(a) a (c) y 4.8. Se observa que los electrones resultan afectados resonantemente por la propagación de las IAWs. La región resonante exhibe un patrón inverso alrededor de $\bar{v} \simeq 4.0 \times 10^{-2}$ durante la mayor parte de la evolución del plasma, en comparación con la distribución de los iones. Esto significa que los electrones son frenados en este rango de velocidades.

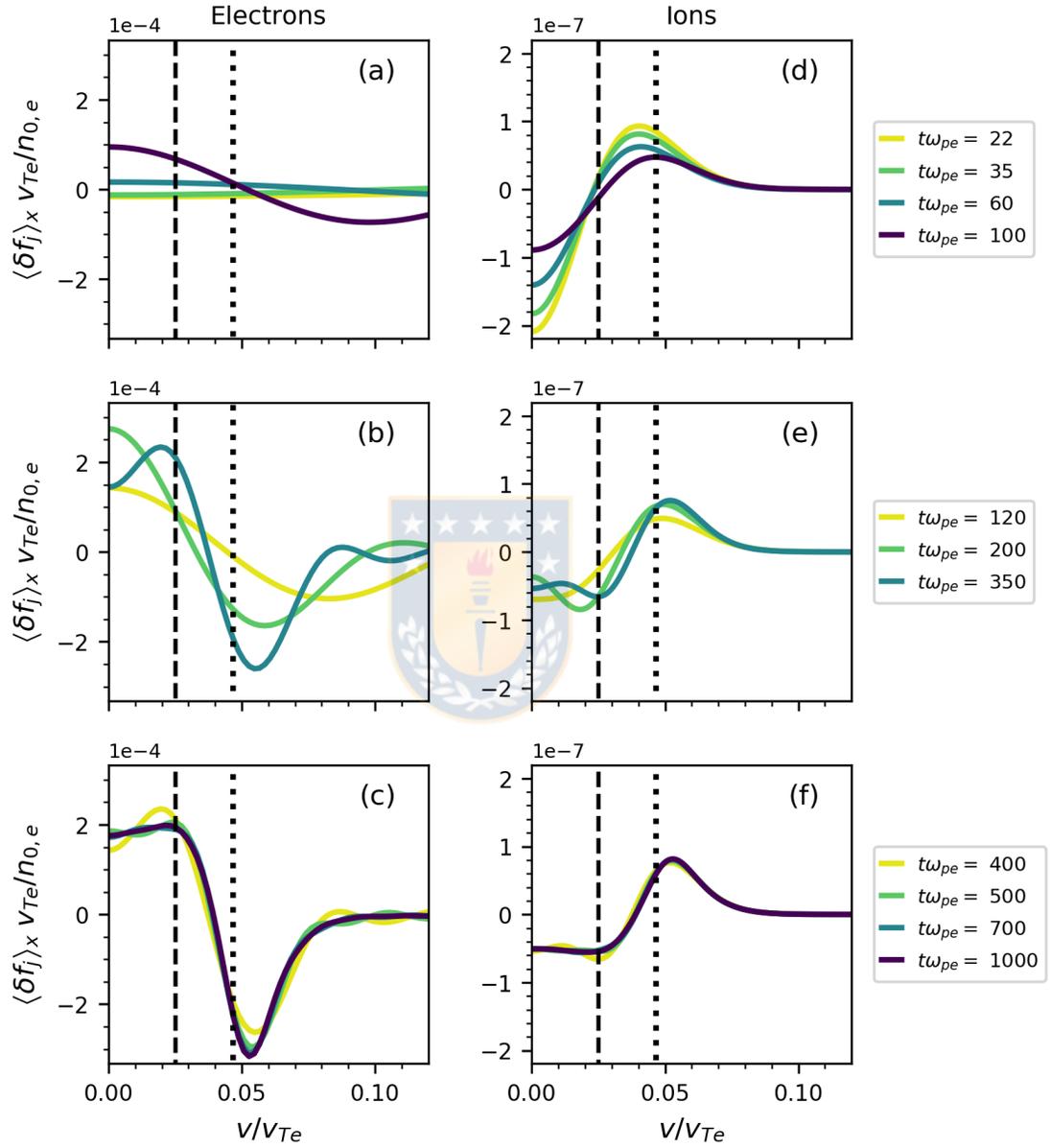


Figura 4.6: Secciones de las variaciones de la función de distribución de los electrones promediadas en posiciones, $\langle \delta \bar{f}_e \rangle_{\bar{x}}$ [(a) a (c)], y de los iones, $\langle \delta \bar{f}_i \rangle_{\bar{x}}$ [(d) a (f)], para $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$. Se muestran la velocidad resonante inicial (línea negra segmentada) y $\bar{v}_{\phi,IA}$ (línea negra punteada).

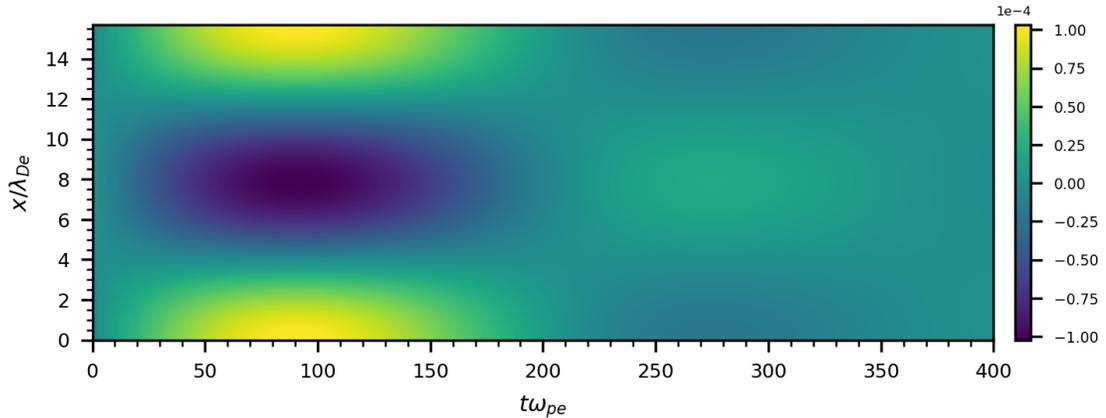


Figura 4.7: Variaciones en la densidad de iones $\delta\bar{n}_i$ durante la etapa inicial de la evolución del plasma. Amplitud de perturbación $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$.

Inicialmente, se observan oscilaciones rápidas de baja amplitud sin señales de interacción resonante, hasta $t\omega_{pe} \simeq 100$ [Fig.4.6(a)], cuando hay una repentina acumulación de electrones con velocidades $\bar{v} < 4.0 \times 10^{-2}$ a expensas de electrones rápidos, alcanzando un *peak* en $t\omega_{pe} = 200$ [Fig.4.6(b)]. Se observa que el despoblamiento de electrones rápidos inicialmente ocurre en un amplio rango de velocidades y se localiza alrededor de $4.0 \times 10^{-2} \leq \bar{v} \leq 7.5 \times 10^{-2}$ cerca de $t\omega_{pe} = 250$. Simultáneamente, se aceleran electrones con velocidades $\bar{v} \simeq 0$ y se siguen frenando electrones rápidos, acumulando electrones lentos alrededor de $\bar{v} \simeq 2.5 \times 10^{-2}$, a medida que los iones pesados son acelerados desde la misma velocidad, despoblando el centro de la distribución en un rango acotado de velocidades alrededor de $\bar{v}_{\phi,IA}$ [Fig.4.6(b)]. A tiempos largos, las variaciones se vuelven aproximadamente estacionarias y los electrones con velocidades alrededor de $\bar{v} \simeq 2.5 \times 10^{-2}$ son frenados, aplanando la distribución para $0 \leq \bar{v} < 2.5 \times 10^{-2}$ [Figs.4.8 y 4.6(c)].

La diferencia observada entre ambas especies puede atribuirse al efecto dinámico

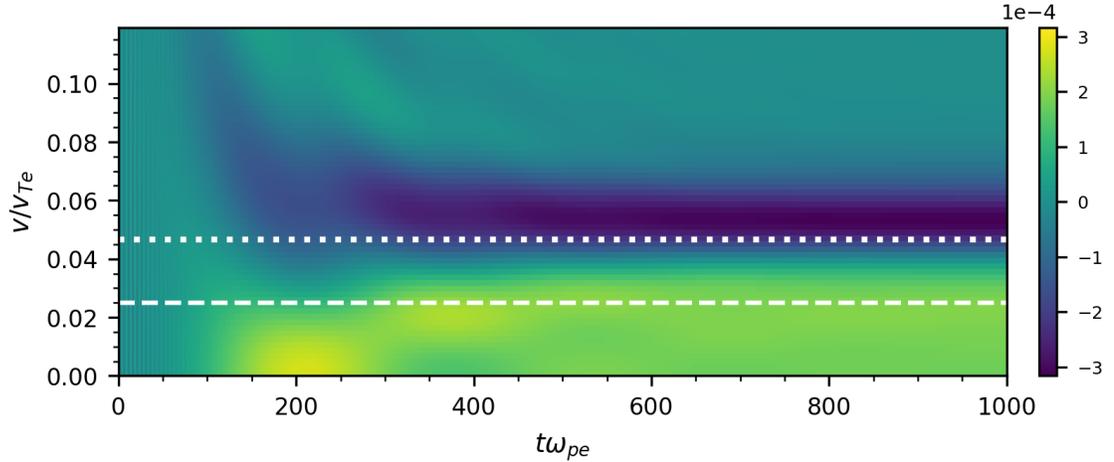


Figura 4.8: Evolución de las variaciones de la función de distribución de los electrones promediadas en posiciones, $\langle \delta \bar{f}_e \rangle_{\bar{x}}$. Se muestran la velocidad resonante inicial (línea negra segmentada) y $\bar{v}_{\phi,IA}$ (línea negra punteada), para $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$.

opuesto del campo eléctrico sobre cada una de las especies debido a su diferencia de carga eléctrica. Como los iones conducen la dinámica en este rango de velocidades, de la misma forma que lo hacen los electrones con las LWs, la interacción con el campo eléctrico acumula iones en velocidades ligeramente mayores a $\bar{v}_{\phi,IA}$, ya sea aumentando o reduciendo la velocidad de los iones cercanos según su velocidad relativa. Por otro lado, los electrones tiene carga opuesta, y el campo eléctrico principalmente los frena en este rango de velocidades.

4.3 Contribución de cada especie a las oscilaciones amortiguadas

La evolución de la envolvente de las densidades de partículas puede encontrarse a través del cuadrado de las variaciones de densidad promediadas en el espacio, $\langle \delta \bar{n}_j^2 \rangle_{\bar{x}}$,

definidas como

$$\langle \delta \bar{n}_j^2 \rangle_{\bar{x}} = \frac{1}{\bar{L}_x} \int_0^{\bar{L}_x} [\bar{n}_j - \bar{n}_{0,j}]^2 d\bar{x}. \quad (4.3.1)$$

Esta cantidad se muestra en la Fig.4.9 para ambas especies, con $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-3}$ y en Fig.4.10 con $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$. Se observa que inicialmente ambas especies evolucionan en diferentes escalas de tiempo con los iones sosteniendo oscilaciones de baja frecuencia, correspondientes a las IAWs, y los electrones sosteniendo simultáneamente la propagación de las LWs, hasta $t\omega_{pe} = 100$, y de las IAWs. El cambio en la frecuencia de $\langle \delta \bar{n}_e^2 \rangle_{\bar{x}}$ ocurre cuando la amplitud de las variaciones de ambas especies alcanzan los mismos niveles, como mostraron Xu *et al.* [20], indicando que las oscilaciones dominantes en la distribución de los electrones se deben a la propagación de IAWs una vez las LWs han decaído. Sin embargo, permanece una componente de alta frecuencia para el caso de $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$.

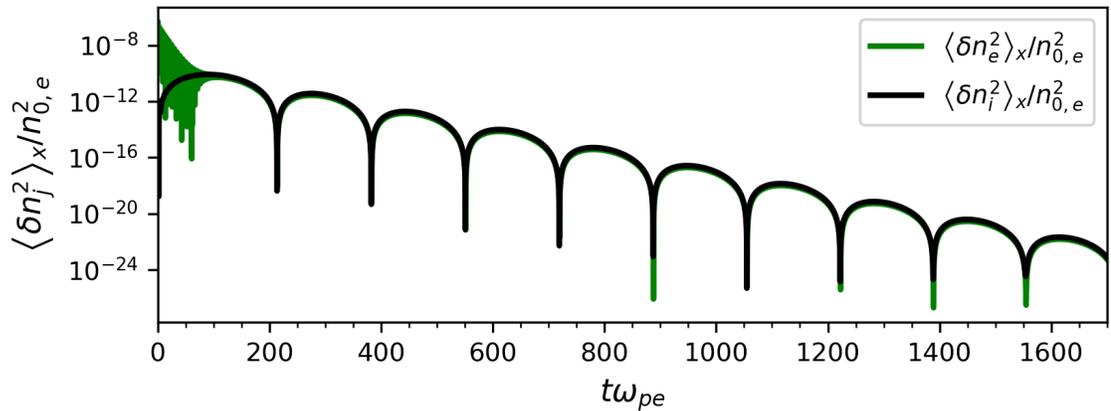


Figura 4.9: Evolución de las amplitudes promediadas en posiciones de las densidades de partículas $\langle \delta \bar{n}_j^2 \rangle_{\bar{x}}$ para $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-3}$.

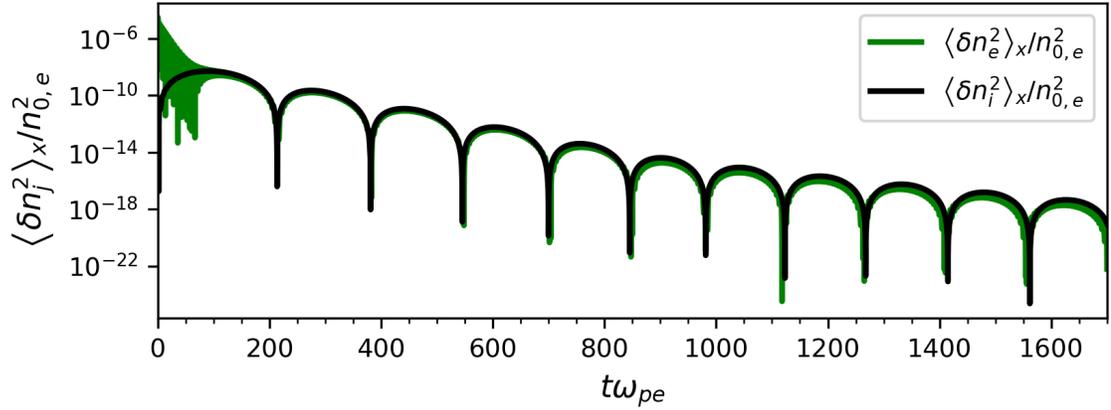


Figura 4.10: Evolución de las amplitudes promediadas en posiciones de las densidades de partículas $\langle \delta \bar{n}_j^2 \rangle_{\bar{x}}$ para $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$.

Ambas zonas resonantes resultan eventualmente afectadas por el mismo campo eléctrico en todo momento. Con el fin de determinar la extensión en la que ambas zonas asociadas a una onda son afectadas por la propagación de la otra, se siguen dos enfoques. Para el caso de la zona resonante con las LWs, se hace una comparación entre el caso con iones móviles e inmóviles a través de correlaciones entre las variaciones de las funciones de distribución $\langle \delta \bar{f}_e \rangle_{\bar{x}}$ de cada caso, $C [\langle \delta \bar{f}_{e,i} \rangle_{\bar{x}}, \langle \delta \bar{f}_{e,m} \rangle_{\bar{x}}]$, dadas por

$$C [\langle \delta \bar{f}_{e,i} \rangle_{\bar{x}}, \langle \delta \bar{f}_{e,m} \rangle_{\bar{x}}] (\bar{v}, \bar{t}) = \frac{[\langle \delta \bar{f}_{e,i} \rangle_{\bar{x}} - \langle \delta \bar{f}_{e,i} \rangle_{\bar{x}, \bar{v}_r}] [\langle \delta \bar{f}_{e,m} \rangle_{\bar{x}} - \langle \delta \bar{f}_{e,m} \rangle_{\bar{x}, \bar{v}_r}]}{\sigma_{i, \bar{v}_r} \sigma_{m, \bar{v}_r}}, \quad (4.3.2)$$

donde $\langle \delta \bar{f}_{e,j} \rangle_{\bar{x}}$ son las variaciones de la función de distribución promediada en posiciones para iones inmóviles ($j = i$) y para iones móviles ($j = m$), los corchetes $\langle \cdot \rangle_{\bar{v}_r}$ representan el promedio en velocidades sobre un rango $\bar{v}_r = [\bar{v}_{\min}, \bar{v}_{\max}]$, y σ_{j, \bar{v}_r} es la desviación estándar de la función de distribución de las especies j sobre el rango \bar{v}_r .

Si las distribuciones son las mismas, estarán maximalmente correlacionadas en todo momento, $\left(\langle C [\langle \delta \bar{f}_{e,i} \rangle_{\bar{x}} \langle \delta \bar{f}_{e,m} \rangle_{\bar{x}}] \rangle_{\bar{v}_r} \simeq 1\right)$, pero si esta región resulta afectada por las ondas ión acústicas, habrá una desviación con respecto a la unidad. El segundo enfoque, para la distribución de los iones, es observar los espectros de las variaciones en la densidad de iones $\delta \bar{n}_i$ y encontrar señales de LWs.

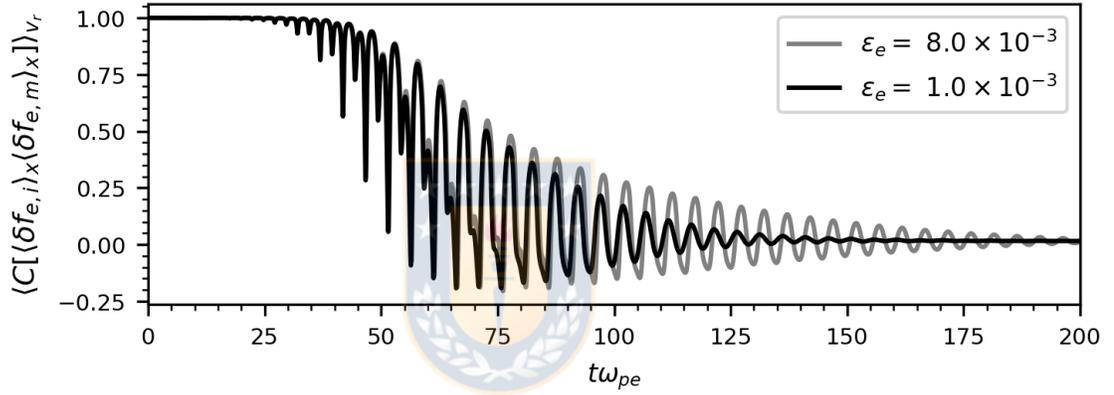


Figura 4.11: Evolución inicial de las correlaciones $\langle C [\langle \delta \bar{f}_{e,i} \rangle_{\bar{x}} \langle \delta \bar{f}_{e,m} \rangle_{\bar{x}}] \rangle_{\bar{v}_r}$ sobre el rango de velocidades $v_r = [0.0, 1.5]$, para $\epsilon_e = 1.0 \times 10^{-3}$ y 8.0×10^{-3} .

En el rango de velocidades $0 \leq \bar{v} \leq 1.5$, los electrones son afectados de forma no resonante por las LWs. Éstos responden a la dinámica de los iones desde $t\omega_{pe} \simeq 25$, como se observa en las correlaciones de la Fig.4.11 con pequeñas desviaciones de la unidad. Esta respuesta es potenciada después de $t\omega_{pe} = 40$ cuando las correlaciones comienzan a decaer en magnitud y la dinámica de ambos casos se muestra mayormente sin correlación.

Debido a que los electrones rápidos son no resonantes con las IAWs, se espera que el campo eléctrico predominante en la etapa de baja frecuencia los afecte débil-

mente. Este hecho se observa en la Fig.4.12, la que muestra una reducción en las correlaciones de las distribuciones en el rango $2.0 \leq \bar{v} \leq 4.0$, con variaciones de baja frecuencia del orden de 10^{-5} , de forma que no hay una desviación significativa respecto de la dinámica con iones inmóviles. No obstante, estos electrones son afectados por las IAWs desde el inicio de la evolución del plasma. La desviación más grande de la unidad se observa alrededor de $t\omega_{pe} = 110$, y es posible asociarla con el inicio de las oscilaciones lentas. A medida que las perturbaciones decaen, los electrones que resuenan con las LWs resultan menos afectados por la dinámica lenta y en última instancia permanecen casi inalterados, debido a que las correlaciones tienden a la unidad.

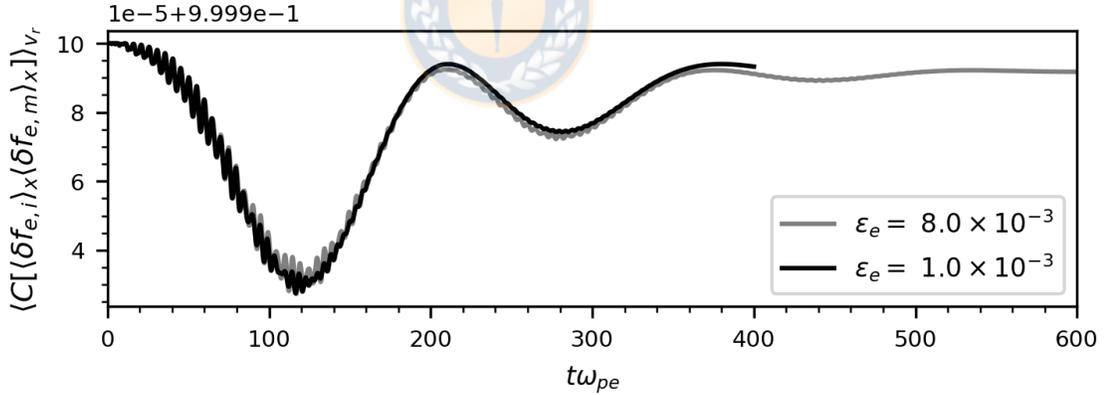


Figura 4.12: Evolución de las correlaciones $\langle C[\langle \delta \bar{f}_{e,i} \rangle_{\bar{x}} \langle \delta \bar{f}_{e,m} \rangle_{\bar{x}}] \rangle_{\bar{v}_r}$ sobre el rango $v_r = [2.0, 4.0]$ para $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-3}$ y 8.0×10^{-3} .

En la distribución de los iones, los efectos de las LWs son débiles en ambos casos, $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-3}$ y 8.0×10^{-3} . Esto puede observarse en los espectros de Fig.4.13 para $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-3}$, y Fig.4.15 para $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$ durante la etapa inicial, $0 \leq t\omega_{pe} \leq 200$, en la que las LWs son dominantes, y durante el rango de tiempo

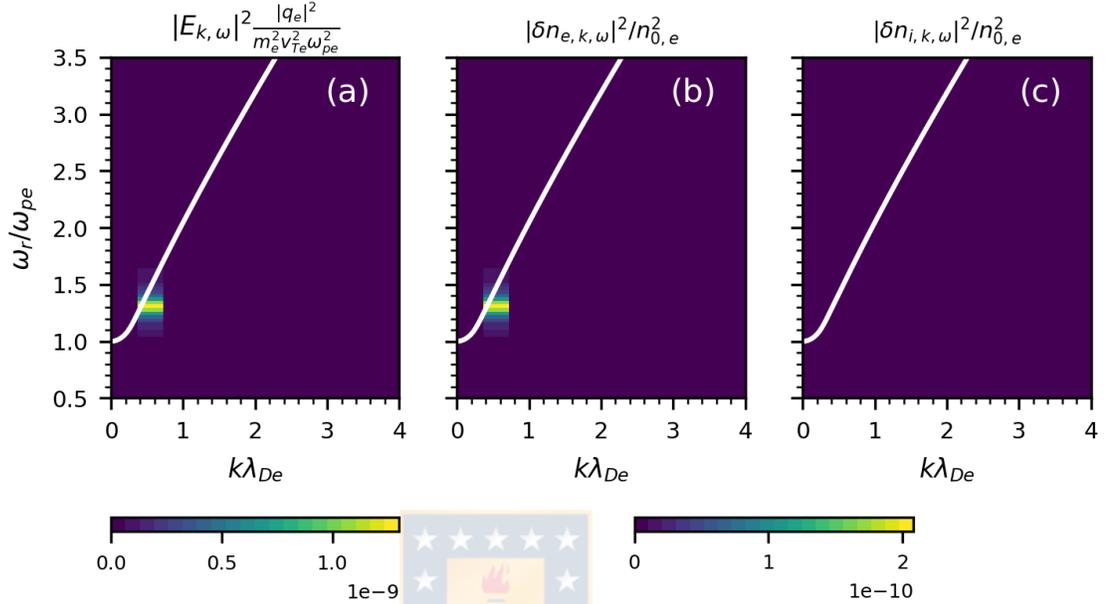


Figura 4.13: Espectro del (a) campo eléctrico, $|\bar{E}_{k,\omega}|$, (b) variaciones de densidad de electrones, $|\delta\bar{n}_{e,k,\omega}|$, y (c) variaciones de densidad de iones, $|\delta\bar{n}_{i,k,\omega}|$, del rango de tiempo $0 \leq t\omega_{pe} \leq 200$ para $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-3}$. Se muestran raíces de la relación de dispersión lineal (línea sólida blanca), correspondientes al modo de Langmuir [(a) a (c)].

posterior, $200 \leq t\omega_{pe} \leq 1700$, en que las IAWs son dominantes. No se encuentran señales apreciables de LWs en $|\delta\bar{n}_{i,k,\omega}|$ en la primera etapa [Figs.4.13(c) y 4.15(c)] o en la etapa subsiguiente [Figs.4.14(c) y 4.16(c)], aunque existe un *peak* de baja amplitud en el campo eléctrico [4.16(a)] y en las variaciones de la densidad de los electrones [4.16(b)].

El caso $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-3}$ difiere a tiempo largos (Fig.4.14), ya que el *peak* en $\bar{\omega}_L$ no se observa en el campo eléctrico ni en la densidad de electrones, indicando que las variaciones debido a la propagación de las LWs están por debajo de las

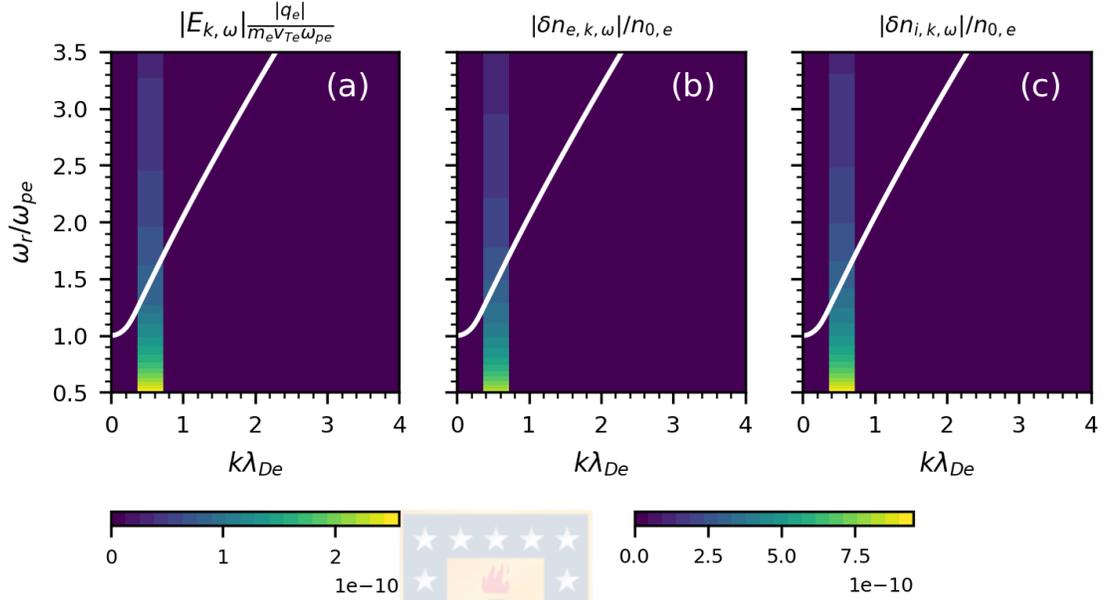


Figura 4.14: Espectro del (a) campo eléctrico, $|\bar{E}_{k,\omega}|$, (b) variaciones de densidad de electrones, $|\delta\bar{n}_{e,k,\omega}|$, y (c) variaciones de densidad de iones, $|\delta\bar{n}_{i,k,\omega}|$, del rango de tiempo $200 \leq t\omega_{pe} \leq 1700$ para $\varepsilon_e = 1.0 \times 10^{-3}$. Se muestran raíces de la relación de dispersión lineal (línea sólida blanca), correspondientes al modo de Langmuir [(a) a (c)].

producidas por la propagación de las IAWs. Considerando que el comportamiento de la zona resonante en $\langle \delta\bar{f}_i \rangle_{\bar{x}}$ se produce inmediatamente después de que se aplica la perturbación inicial y se mantiene así a pesar de la componente inicial de alta frecuencia, se concluye que las LWs no afectan la zona de resonancia relacionada con las IAWs.

4.4 Resumen y discusión

Este capítulo aborda la evolución de un plasma electrostático de electrones y iones con razón de masa $\bar{m}_i = 1836.153$, especies inicialmente isotérmicas, $\bar{T}_i = 1.0$,

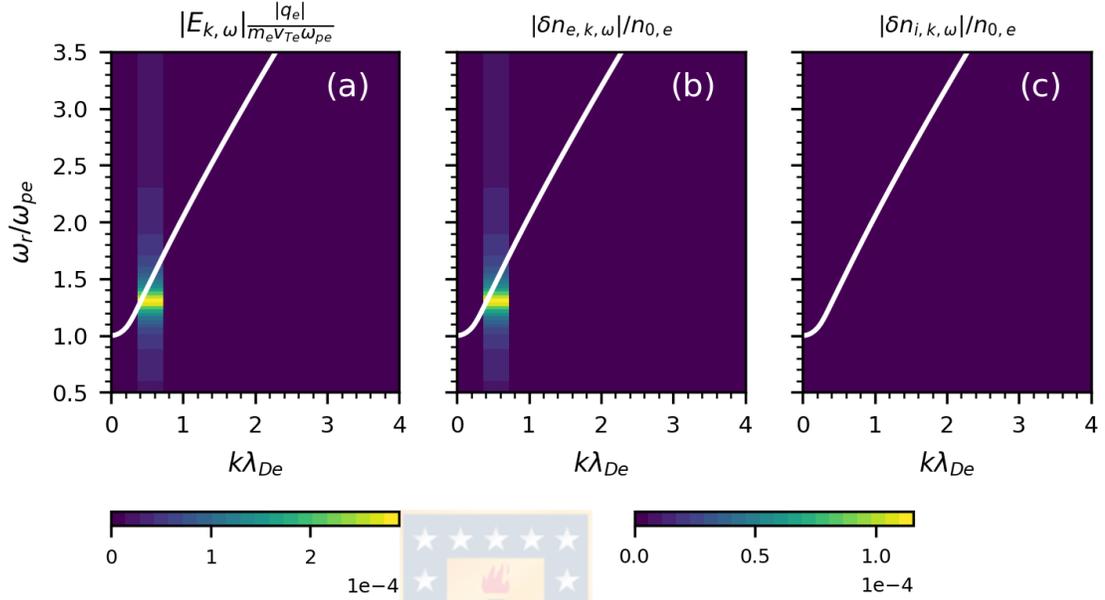


Figura 4.15: Espectros del (a) campo eléctrico, $|\bar{E}_{k,\omega}|$, (b) variaciones de la densidad de electrones, $|\delta\bar{n}_{e,k,\omega}|$, y (c) variaciones de la densidad de iones, $|\delta\bar{n}_{i,k,\omega}|$, del rango $0 \leq t\omega_{pe} \leq 200$ para $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$. Se muestran raíces de la relación de dispersión lineal (línea sólida blanca), correspondientes al modo de Langmuir [(a) a (c)].

ambas inicializadas con distribuciones Maxwellianas sin deriva relativa. Los iones móviles permiten el desarrollo de IAWs amortiguadas, además de LWs amortiguadas, como fue determinado por Xu *et al.* [20]. Debido a la diferencia de inercia, la propagación de estas ondas produce dos escalas de tiempo diferentes. Las LWs, que interactúan con electrones con velocidades $\sim \bar{v}_{\phi,L}$, decaen más rápido que las IAWs, las que interactúan tanto con electrones como con iones con velocidades en el orden de $\bar{v}_{\phi,IA}$, siendo dominantes las oscilaciones de baja frecuencia a tiempos largos. En este proceso, los iones en esta zona de resonancia son acelerados hacia $\bar{v}_{\phi,IA}$, mientras que los electrones lentos tienden a ser frenados hacia velocidades $0 \leq \bar{v} \leq 2.5 \times 10^{-2}$, despojando una región acotada alrededor de $\bar{v}_{\phi,IA}$, debido a que el forzamiento del

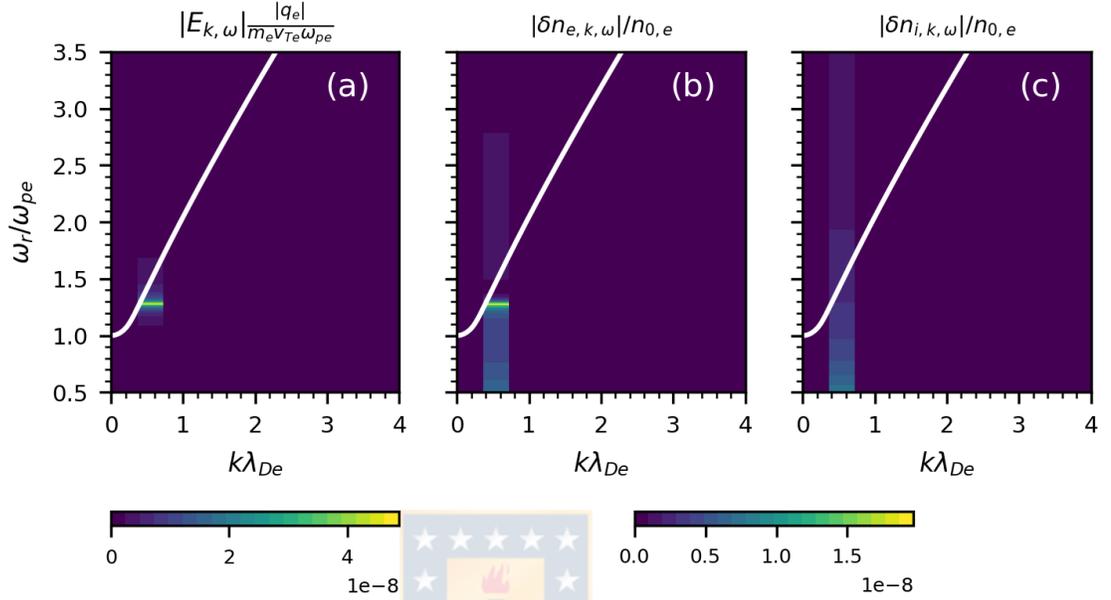


Figura 4.16: Espectros del (a) campo eléctrico, $|\bar{E}_{k,\omega}|$, (b) variaciones de la densidad de electrones, $|\delta \bar{n}_{e,k,\omega}|$, y (c) variaciones de la densidad de iones, $|\delta \bar{n}_{i,k,\omega}|$, del rango $200 \leq t\omega_{pe} \leq 1700$ para $\varepsilon_e = 8.0 \times 10^{-3}$. Se muestran raíces de la relación de dispersión lineal (línea sólida blanca), correspondientes al modo de Langmuir [(a) a (c)].

campo eléctrico en cada especie depende del signo de su carga eléctrica.

Las ondas observadas se desarrollan con un gran grado de independencia. La evolución de las correlaciones de la distribución de los electrones alrededor de la zona de resonancia de las LWs muestra indicios de la propagación de IAWs. A medida que el campo eléctrico experimenta amortiguamiento, estas correlaciones tienden a la unidad, indicando que la zona de resonancia se comporta como en el caso de iones inmóviles. Sin embargo, se hace notar que la desviación de las correlaciones respecto de la unidad es del orden de 10^{-5} , por lo que la dinámica de la zona de resonancia relacionada con LWs se mantiene mayormente inafectada por las IAWs. En la dis-

tribución de los iones, el patrón observado en la zona de resonancia se excita desde el principio y se mantiene inalterado posteriormente, y por lo tanto parece no estar relacionado con la dinámica de las LWs, y aunque hay una componente inicial de alta frecuencia en $\langle \delta \bar{f}_i \rangle_{\bar{x}}$, ésta decae a medida que las LWs se amortiguan, produciendo señales débiles o ninguna señal alrededor de $\bar{\omega}_L$ en el espectro de $\delta \bar{n}_i$. Por consiguiente, la zona de resonancia relacionada a las IAWs tampoco es mayormente afectada por las ondas rápidas. Como consecuencia, las oscilaciones en la envolvente de la densidad de electrones $\langle \delta \bar{n}_e^2 \rangle_{\bar{x}}$ se producen inicialmente por electrones que resuenan con las LWs, y posteriormente por electrones que resuenan con las IAWs. Se sigue la misma conclusión para la amplitud del modo excitado $|E_1|$.

La dominancia de las IAWs a tiempos largos puede entenderse por la inercia de los iones. Se introduce una escala de tiempo más larga que la de los electrones, lo que se observa en las magnitudes de las tasas de amortiguamiento, $|\bar{\gamma}_L| > |\bar{\gamma}_{IA}|$. Ambas ondas están presentes desde la perturbación inicial, siendo las LWs las de mayor amplitud y con un decaimiento rápido, y las IAWs de menor amplitud, pero con un decaimiento más lento. Una vez la amplitud de las oscilaciones de las LWs alcanza la de las IAWs, ya que electrones alrededor de $\bar{v}_{\phi,L}$ continúan amortiguando a las ondas rápidas, las IAWs se tornan dominantes y sus oscilaciones siguen desarrollandose mientras son lentamente amortiguadas.

5 Evolución no-lineal de un plasma de electrones y iones Maxwellianos

Este capítulo está enfocado en el estudio de la evolución no-lineal del sistema analizado en el Capítulo 4. La razón de masa iónica es $\bar{m}_i = 1836.153$, se consideran distribuciones Maxwellianas sin deriva relativa y razón de temperatura inicial $\bar{T}_i = 1.0$ y se excita sólo el primer modo del plasma. La amplitud de perturbación ε_e es lo suficientemente grande como para excitar el régimen no-lineal del modo rápido. Además del atrapamiento asociado al modo rápido, se observan estructuras no-lineales en el rango de velocidades bajas cercanas $\bar{v}_{\phi,IA}$ y dinámica asociada a la dinámica de iones pesados con carga positiva.

Para las siguientes secciones se hace notar que debido a la simetría en el espacio de velocidades de este plasma, los espectros son simétricos con respecto a \bar{k} y $\bar{\omega}_r$, por lo que sólo se muestra un cuadrante en el plano $\bar{k} - \bar{\omega}_r$. Similarmente, se muestran las funciones de distribución sólo para $\bar{v} \geq 0$, ya que el comportamiento de cualquier estructura encontrada en este rango también se encuentra en $\bar{v} < 0$, pero desplazándose con velocidad opuesta.

5.1 Dinámica de baja frecuencia en el caso de iones móviles

Por propósitos de comparación, se describe la dinámica de baja frecuencia de un plasma de electrones con iones inmóviles en el régimen no-lineal, con amplitud de perturbación $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$. Esta dinámica se desarrolla a tiempos largos comparados con la saturación del campo eléctrico e involucra ondas de amplitud y frecuencias bajas.

5.1.1. Espectros del campo eléctrico

Los espectros del campo eléctrico se muestran en la Fig.5.1. Se observa que hay excitación de ondas de baja frecuencia. En particular, se excita una región cercana a $\bar{\omega}_r \sim 0$ para $0.4 < \bar{k} < 2.0$ en Figs.5.1(b) y (c). Posteriormente, durante $1100 \leq t\omega_{pe} \leq 1800$ se excitan dos regiones de ondas, una tipo-acústica y otra con frecuencias inferiores a $\bar{\omega}_r = 6.0 \times 10^{-2}$ [Fig.5.1(c)]. Sus niveles, sin embargo, están dos órdenes de magnitud por debajo del de las ondas asociadas al modo de Langmuir no-lineal. La velocidad de fase de las ondas en la región tipo-acústica están en el rango $4.488 \times 10^{-2} \leq \bar{v}_\phi \leq 8.976 \times 10^{-2}$ con la mayoría de las ondas verificando $5.236 \times 10^{-2} \leq \bar{v}_\phi \leq 7.854 \times 10^{-2}$. La segunda región de excitación tiene ondas con velocidades de fase $8.976 \times 10^{-3} \leq \bar{v}_\phi \leq 2.244 \times 10^{-2}$.

5.1.2. Densidad de electrones y espacio de fase

Con el fin de distinguir la dinámica de baja frecuencia en las variaciones de la densidad de los electrones, se aplica un filtro en frecuencias y números de onda,

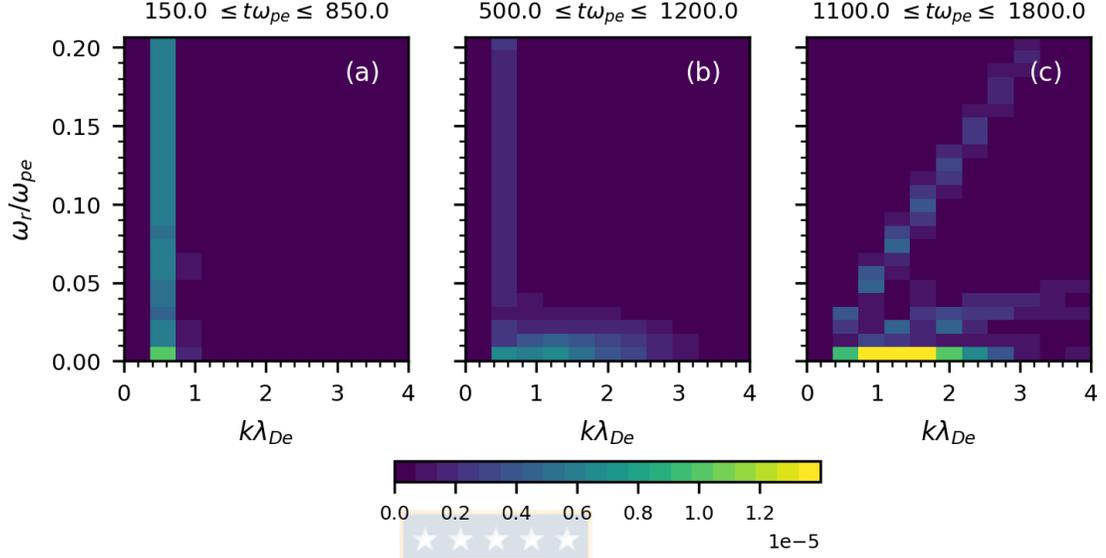


Figura 5.1: Espectros del campo eléctrico $|\bar{E}_{k,\omega}|$ para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$ para el caso de iones inmóviles. Se muestran tres intervalos de tiempo.

obteniendo una densidad de electrones filtrada $\delta\bar{n}_{e,\text{fil}}(\bar{x}, \bar{t})$, dada por

$$\delta\bar{n}_{e,\text{fil}}(\bar{x}, \bar{t}) = \mathcal{F}_{\bar{x}, \bar{t}}^{-1} \left[\mathcal{F}_{\bar{k}, \bar{\omega}_r} [\delta\bar{n}_e(\bar{x}, \bar{t})] \Omega(\bar{k}, \bar{\omega}_r) \right], \quad (5.1.1)$$

donde $\delta\bar{n}_e = \bar{n}_e - \bar{n}_{0,e}$ y $\Omega(\bar{k}, \bar{\omega}_r)$ es una función filtro, dada por

$$\Omega(\bar{k}, \bar{\omega}_r) = \exp \left[- \left(\frac{\bar{\omega}_r - \bar{\omega}_{\text{shift}}}{\bar{\omega}_{\text{width}}/2} \right)^{36} \right] \mathcal{K}(\bar{k}), \quad (5.1.2)$$

siendo $\bar{\omega}_{\text{width}}$ el ancho de frecuencias del filtro, $\bar{\omega}_{\text{shift}}$ la frecuencia central del filtro y \mathcal{K} una función de \bar{k} . Para el caso en que se filtran sólo bajas frecuencias, $\bar{\omega}_{\text{shift}} = 0$, $\bar{\omega}_{\text{width}} = 1.2$, excluyendo frecuencias relacionadas con el modo rápido y reteniendo las frecuencias más relevantes de los modos lentos, y $\mathcal{K}(\bar{k}) = 1$. Para el caso de una única estructura propagante, se considera $\bar{\omega}_{\text{shift}} = \pm 0.3$ con $\mathcal{K}(\pm\bar{k}) = \Theta(\bar{k})$, y

$\bar{\omega}_{\text{shift}} = \mp 0.3$ con $\mathcal{K}(\bar{k}) = \Theta(\mp \bar{k})$, ambos con $\bar{\omega}_{\text{width}} = 0.6$, donde el signo superior es para ondas que se propagan con velocidad positiva, el signo inferior es para ondas que se propagan con velocidad negativa, y Θ es la función de Heaviside.

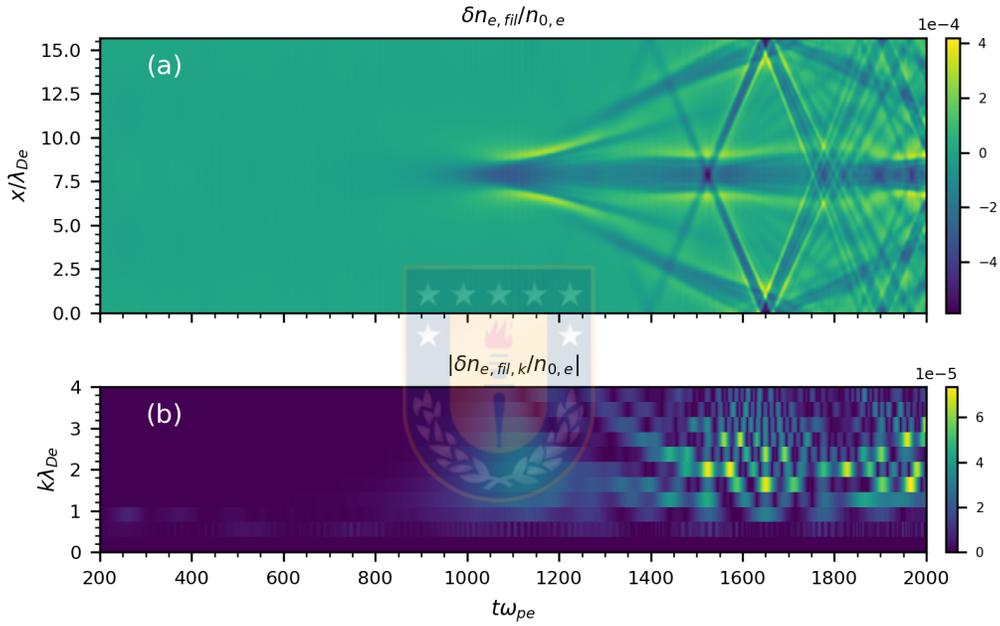


Figura 5.2: Evolución de las variaciones de (a) la densidad de electrones, filtrada en frecuencia, $\delta \bar{n}_{e, \text{fil}}$, y (b) su transformada de Fourier espacial, ambas para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$ con iones inmóviles.

La Fig.5.2 muestra la evolución de las variaciones de la densidad de electrones filtrada en frecuencia [(a)] y su representación en el espacio de números de onda [(b)], reteniendo frecuencias tales que $|\bar{\omega}_r| \leq 0.6$. Se observa que las estructuras localizadas, correspondientes a cavidades de electrones, se excitan alrededor de $t\omega_{pe} \simeq 900$ al centro del dominio de posiciones, y evoluciona en varias cavidades de electrones contra-propagantes de corta longitud de onda. En Fig.5.2(b), esto se observa como

el desarrollo de diversos números de onda \bar{k} en el mismo rango de la región con frecuencias cercanas a cero en el espectro del campo eléctrico [Fig.5.1(c)]. Las cavidades iniciales, $1200 \leq t\omega_{pe} \leq 1650$, se propagan con velocidad $|\bar{v}| \simeq 1.5 \times 10^{-2}$. Las siguientes cavidades aparecen durante $1400 \leq t\omega_{pe} \leq 1650$ y se propagan con velocidad $|\bar{v}| = 6.2831 \times 10^{-2}$ y producen varias cavidades angostas después de que éstas se cruzan con la cavidad central, en $t\omega_{pe} = 1775$. La velocidad de estas estructuras se encuentra dentro del rango de la velocidad de fase de las ondas excitadas en el espectro del campo eléctrico correspondiente [Fig.5.1(c)].

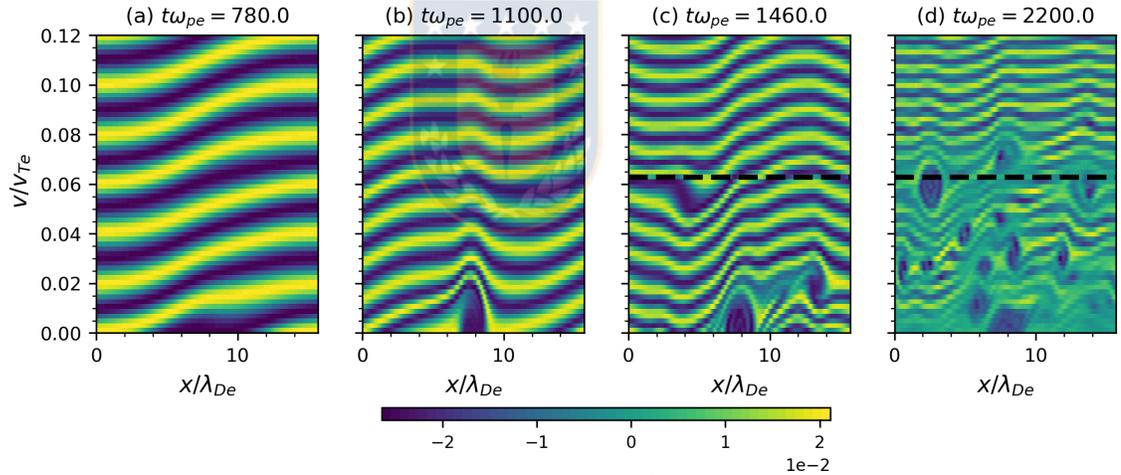


Figura 5.3: Evolución de las variaciones de la función de distribución de los electrones, $\delta\bar{f}_e$, en el rango de velocidades bajas con iones inmóviles con amplitud de perturbación $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$. Se muestra la velocidad de las estructuras encontradas en Fig.5.2 (línea segmentada negra).

En las variaciones de la distribución de los electrones, $\delta\bar{f}_e = \bar{f}_e - \bar{f}_{0,e}$, de Fig.5.3 se desarrolla una región de atrapamiento con $\bar{v} = 0$ [Figs.5.3(a) y (b)] la que se sigue observando en instantes posteriores [Fig.5.3(d)]. Esta estructura daría cuenta de la cavidad de electrones inicial en $\delta\bar{n}_{e,fl}$ de las ondas de alta intensidad en la Fig.5.1.

Se forman otros *holes* en $t\omega_{pe} = 1460$ [Fig.5.3(c)] cuyas velocidades son similares comparado con la de las cavidades en $\delta\bar{n}_{e,\text{fl}}$ durante $1200 \leq t\omega_{pe} \leq 1600$. Se forman varios *electron holes* en $t\omega_{pe} = 2200$ [Fig.5.3(d)], lo que daría cuenta de la formación de cavidades angostas en $\delta\bar{n}_{e,\text{fl}}$ después de $t\omega_{pe} = 1800$ [Fig.5.2(a)].

5.2 Comparación del régimen no-lineal entre los casos de iones móviles y iones inmóviles

Como fue mostrado por Xu *et al.* [20], no hay señales de baja frecuencia en $|E_1|$ en el régimen no-lineal. Debido a que se excitan varios modos después de la saturación, la energía del campo eléctrico \bar{E}_E es una cantidad más representativa para observar. De acuerdo a la Fig.5.4, la energía del campo se comporta de la misma forma que en el caso de iones inmóviles.

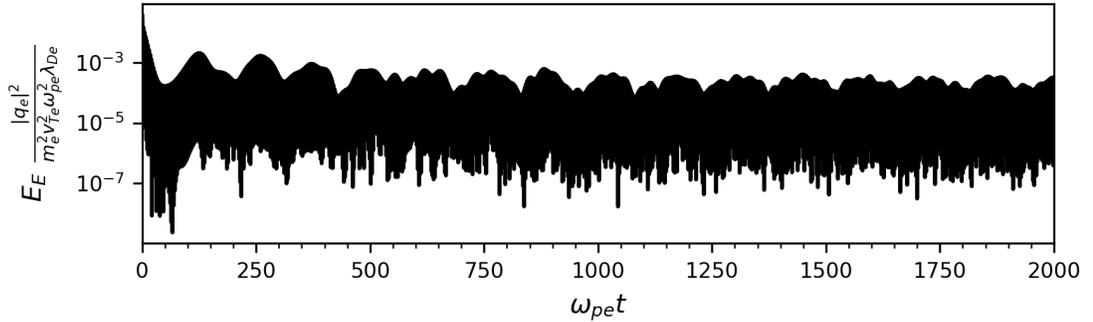


Figura 5.4: Evolución de la energía del campo eléctrico \bar{E}_E para el caso no-lineal, $\epsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$.

5.2.1. Espectro del campo eléctrico

Al observar los espectros del campo eléctrico, la densidad de electrones filtrada en frecuencia y la función de distribución de los electrones, pueden observarse diferencias con el caso de iones inmóviles. La evolución del espectro del campo eléctrico en Fig.5.5 muestra una estructura similar comparado con la mostrada en la Fig.5.1 para iones inmóviles, sin embargo, con mayores amplitudes. Las ondas con frecuencias cercanas a cero, que se observan en Fig.5.1, aún pueden observarse cuando se le permite a los iones moverse, pero sus amplitudes son aproximadamente un orden de magnitud más bajo que las encontradas en las ramas tipo-acústicas, las más excitadas en este rango de frecuencias.

Se observa que las ramas tipo-acústicas yacen sobre una región que coincide con una rama de la relación de dispersión lineal para $T_i/T_e = 1.0$ que corresponde al modo de orden superior de baja frecuencia menos amortiguado. Estas ondas se excitan antes, durante $300 \leq t\omega_{pe} \leq 1000$ [Fig.5.5(a)], mientras que en el caso de iones inmóviles se observan durante $1000 \leq t\omega_{pe} \leq 1700$ [Fig.5.1(b)].

5.2.2. Densidad de electrones filtrada en frecuencias

En las variaciones de la densidad de los electrones filtrada en frecuencias en la Fig.5.6 hay notorias diferencias con la obtenida en el caso de iones inmóviles de la Fig.5.2. En primer lugar, la amplitud de las variaciones de baja frecuencia aumentan hasta casi el doble en la densidad filtrada [Fig.5.6(a)] y en su transformada de Fourier en posiciones [Fig.5.6(b)]. En segundo lugar, la estructura fina de cavidades de electrones desarrollada en ambos casos es diferente: para el caso de iones móviles,

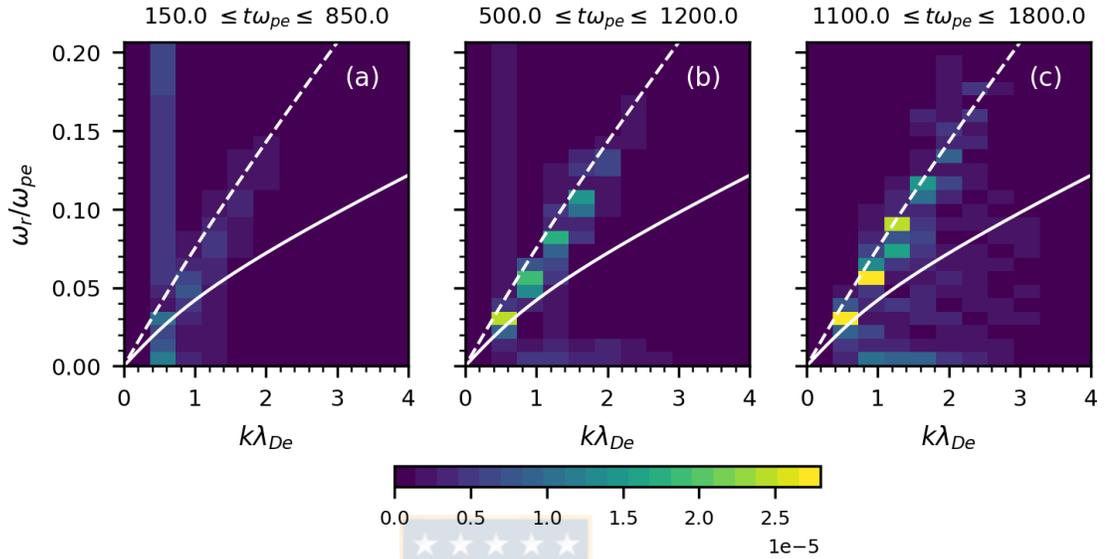


Figura 5.5: Espectros del campo eléctrico $|\bar{E}_{k,\omega}|$ con $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$ para el caso de iones móviles. Se muestran tres intervalos de tiempo. Además, se muestran raíces de la relación de dispersión lineal (2.2.10), correspondientes al modo IA (línea sólida blanca) y al modo de orden superior de alta frecuencia menos amortiguado (línea segmentada blanca).

ésta se desarrolla desde $t\omega_{pe} \simeq 500$, como se observa en $\delta\bar{n}_{e,\text{fil}}$ y $|\delta\bar{n}_{k,e,\text{fil}}|$, siendo las cavidades que se propagan con velocidad $|\bar{v}_c| = 6.2831 \times 10^{-2}$ las estructuras predominantes. La cavidad central formada en el caso de iones inmóviles [Fig.5.6(a)] aún se forma. Después de $t\omega_{pe} = 1000$, estas cavidades dan lugar a cavidades más pequeñas a tiempos más largos, desarrollando una estructura rica en longitudes de onda cortas.

5.2.3. Función de distribución de los electrones

La evolución de las variaciones de la función de distribución difiere de la observada en el caso con iones inmóviles. La Fig.5.7 muestra que hay un *electron hole* cerrándose

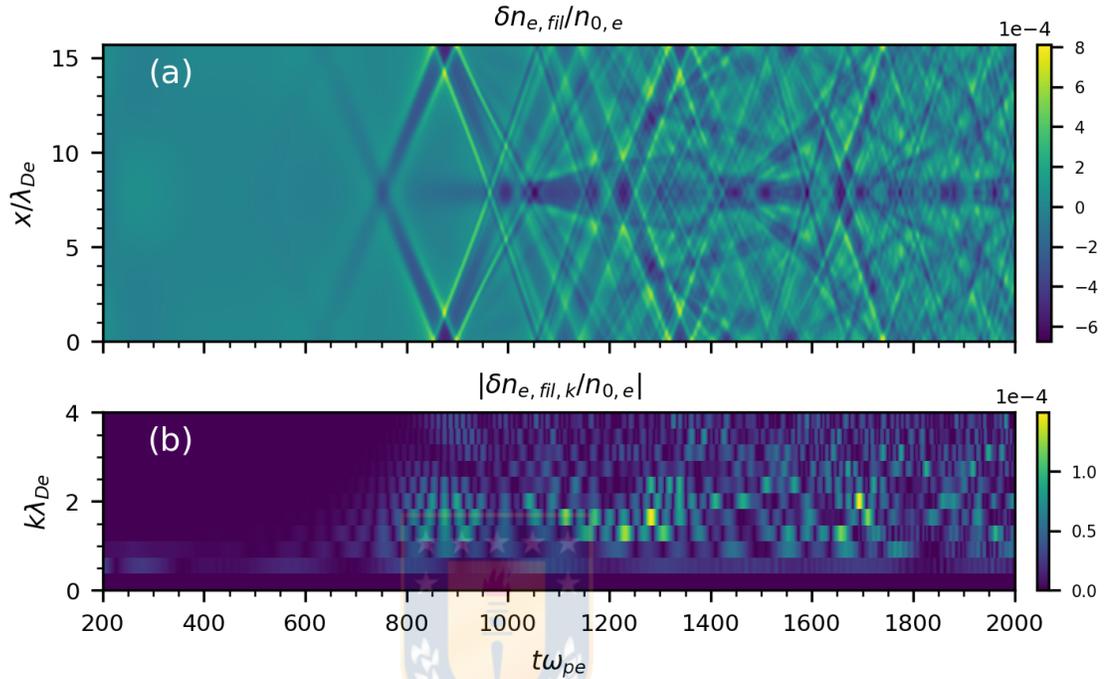


Figura 5.6: Evolución de las variaciones de (a) la densidad de electrones, filtradas en frecuencias, $\delta \bar{n}_{e,fil}$, y (b) su transformada de Fourier espacial, con $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$ e iones móviles.

en $t\omega_{pe} = 780$ alrededor de \bar{v}_c [Fig.5.7(a)], mientras que en el caso de iones inmóviles no hay señales de atrapamiento a velocidades cercanas hasta $t\omega_{pe} = 1460$ [Fig.5.3(a) y (c)]. Este *hole* es más ancho en posiciones y velocidades, indicando la presencia un potencial de atrapamiento más intenso que en el caso de iones inmóviles. También se observa que el *hole* tiene movimiento acelerado [Figs.5.7(b) a (d)].

Se mantienen aspectos similares: **(i)** aún se excita la región de atrapamiento en el centro del dominio de posiciones con velocidad nula. Esto da cuenta de los modos de baja energía alrededor de frecuencias cercanas a cero en Fig.5.5, y **(ii)** se excitan *holes* más pequeños, los que pueden dar cuenta de la estructura más fina que se

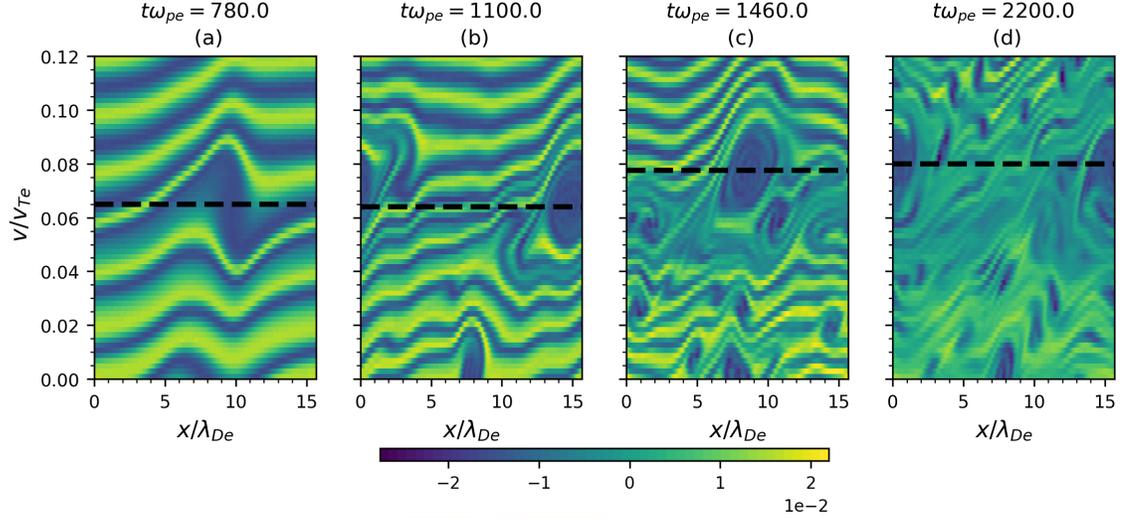


Figura 5.7: Evolución de las variaciones de la función de distribución de los electrones, $\delta \bar{f}_e$, en el rango de bajas velocidades, con iones móviles, para la amplitud de perturbación $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$. Se muestra la velocidad de las estructuras en cada instante (línea segmentada negra).

desarrolla en la densidad de los electrones.

5.2.4. Efectos en el rango de altas velocidades

La introducción de iones móviles también afecta a la distribución de partículas a altas velocidades. Este hecho se muestra en las correlaciones [ec. (4.3.2)] promediadas en velocidades entre las variaciones de las distribuciones $\langle \delta \bar{f}_{e,i} \rangle_x$ y $\langle \delta \bar{f}_{e,m} \rangle_x$ en Fig.5.8, evaluadas en el rango de velocidades $2.0 \leq \bar{v} \leq 5.0$. Las correlaciones se desvían de la unidad a tiempo $t\omega_{pe} = 500$ y exhiben mayores desviaciones hacia $t\omega_{pe} = 1100$.

Las correlaciones promediadas en posición de las variaciones de la distribución completa en instantes fijos, $\delta \bar{f}_{e,j}$, muestran que las desviaciones respecto del caso de

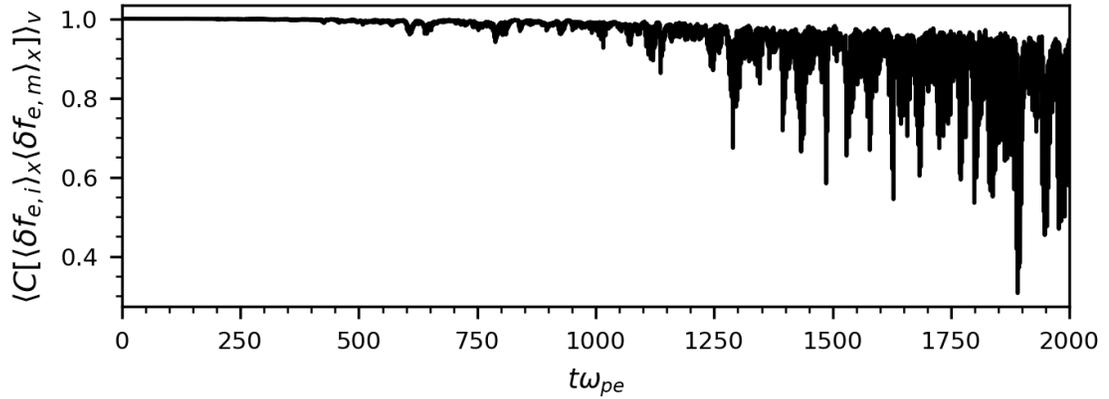


Figura 5.8: Correlaciones entre las variaciones de las funciones de distribución promediadas en posiciones de los electrones de los casos con iones móviles, $\langle \delta \bar{f}_{e,m} \rangle_x$, y iones inmóviles, $\langle \delta \bar{f}_{e,i} \rangle_x$, $\langle C[\langle \delta \bar{f}_{e,m} \rangle_x, \langle \delta \bar{f}_{e,i} \rangle_x] \rangle_v$. Las correlaciones se promedian en velocidades en el rango $2.0 \leq \bar{v} \leq 5.0$.

iones inmóviles se observan en un amplio rango de velocidades, comenzando en la región de atrapamiento, como se observa en la Fig.5.9.

Se muestra el espacio de fase correspondiente de la distribución de los electrones en los mismos instantes de la Fig.5.9. Aunque hay diferencias en la posición de algunos de los *holes* y en detalles específicos en la región de atrapamiento, la estructura del espacio de fase se mantiene aproximadamente igual, como se muestra en Fig.5.10.

5.3 Dinámica de baja frecuencia asociada a iones pesados móviles

En esta sección se estudian los efectos de la dinámica de iones pesados en plasma de electrones, con enfoque en los rangos de baja frecuencia y baja velocidad. Se discuten resultados mostrados en la sección anterior.

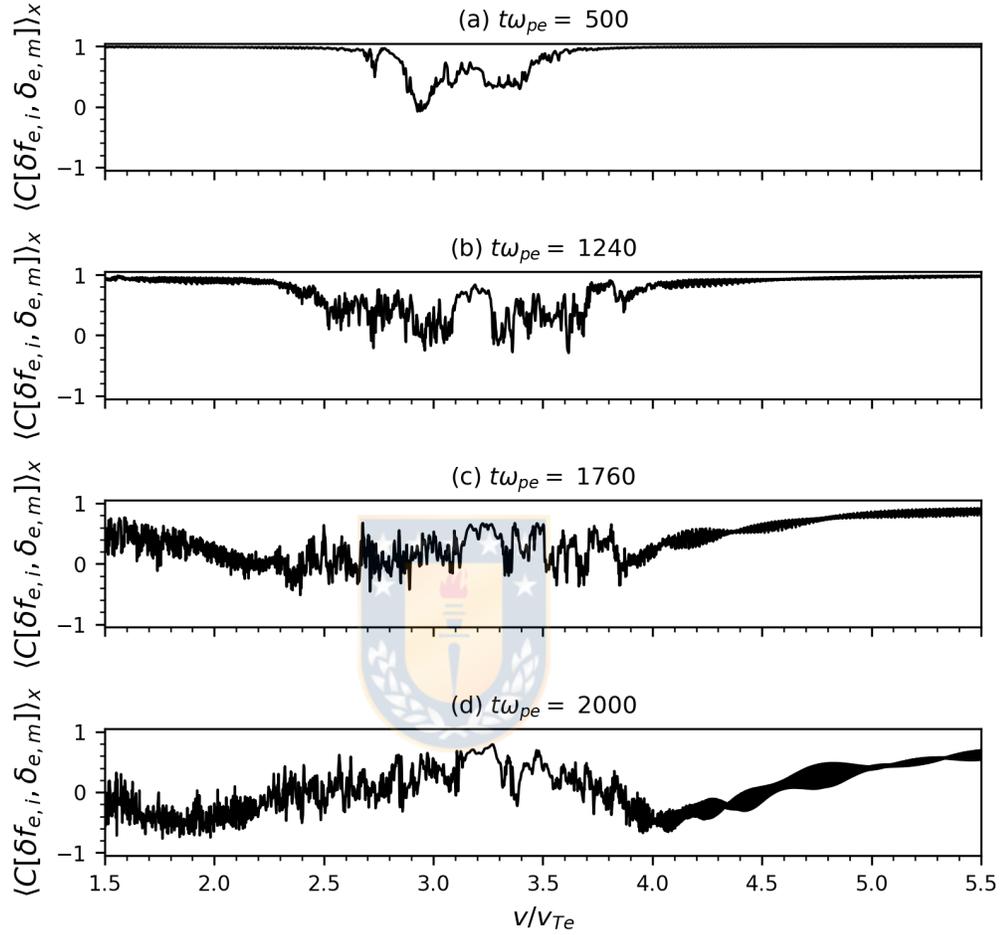


Figura 5.9: Secciones de las correlaciones promediadas en posición entre las variaciones de la función de distribución completa de los electrones del caso con iones móviles, $\delta \bar{f}_{e,m}$, y iones inmóviles, $\delta \bar{f}_{e,i}$, $\langle C[\delta \bar{f}_{e,i}, \delta \bar{f}_{e,m}] \rangle_x$. Amplitud de perturbación inicial $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$.

5.3.1. Espectros del campo eléctrico

Se describen los espectros de baja frecuencia del campo eléctrico mostrado en la Fig.5.5. Como se hizo notar previamente, los modos excitados yacen sobre una región que corresponde al modo de orden superior de baja frecuencia menos amortiguado

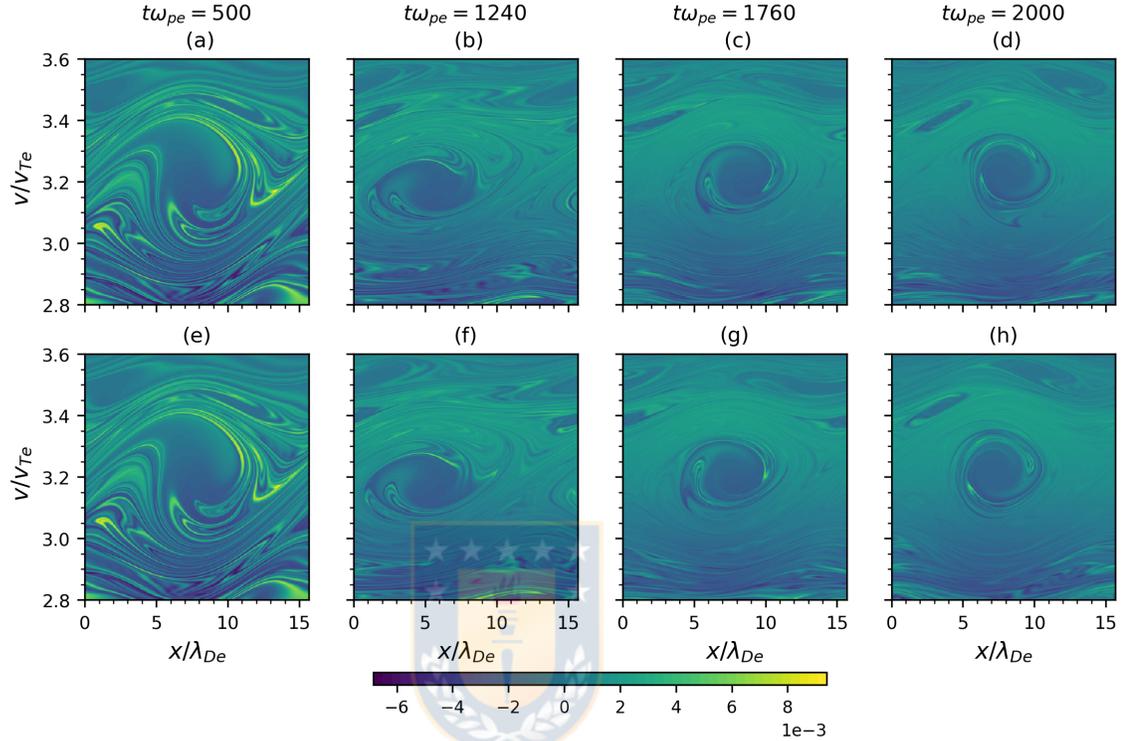


Figura 5.10: Variaciones de la función de distribución de los electrones, $\delta \bar{f}_e$, para el caso de iones inmóviles [(a) a (d)] y iones móviles [(e) s (h)], para la región de atrapamiento relacionada con el modo de Langmuir. Amplitud de perturbación inicial $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$.

predicho por la relación de dispersión lineal (2.2.10). Se encuentran ondas de baja amplitud sobre la rama del modo ión acústico lineal, para $\bar{k} = 0.4$, sugiriendo un rol secundario de estas ondas en esta configuración. Las velocidades de fase de las ondas más intensas se encuentran en el rango $5.610 \times 10^{-2} \leq \bar{v} \leq 8.976 \times 10^{-2}$ para todos los intervalos de tiempo. Se observa que las ondas crecen en amplitud en el tiempo y alcanzan longitudes de onda más cortas a medida que el sistema evoluciona: inicialmente, las ondas más intensas se observan para $\bar{k} < 0.8$ [Fig.5.5(a)], luego, surgen ondas sobre la rama lineal de orden superior con $\bar{k} < 2.4$ y la mayor amplitud con

$\bar{k} = 0.4$ [Fig.5.5(b)]. Por último, las ondas alcanzan $\bar{k} = 3.2$, y hay tres ondas de gran amplitud a lo largo de la misma rama, con $\bar{k} = 0.4, 0.8$ y 1.2 [Fig.5.5(c)].

5.3.2. Componente de baja frecuencia del potencial electrostático

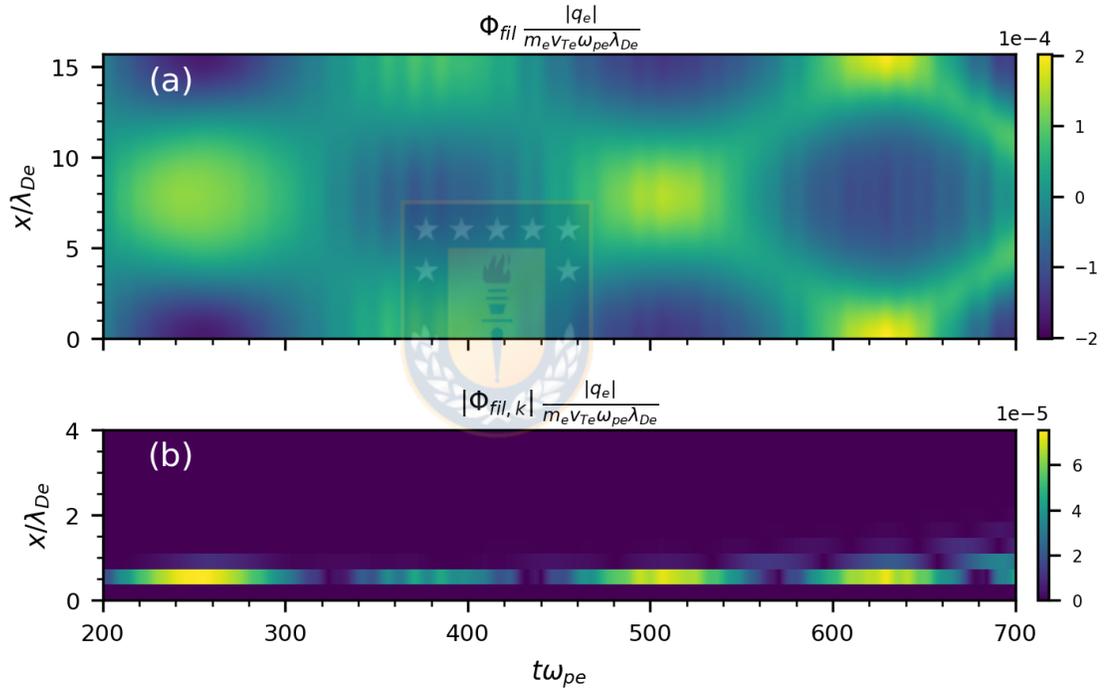


Figura 5.11: Evolución de las variaciones del (a) potencial electrostático, filtrado en frecuencia, $\bar{\Phi}_{fil}$, y (b) su transformada de Fourier en posiciones para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$, con iones móviles. El intervalo de tiempo corresponde a la localización de estructuras solitarias en el potencial.

El potencial electrostático está directamente relacionado con el campo eléctrico y su estructura. Por lo tanto, se describe la evolución del potencial electrostático filtrado en frecuencia, estimado de la misma forma que la densidad de electrones filtrada (5.1.1) y considerando el filtro (5.1.2). Este filtro retiene la componente del

potencial que interactúa con los iones pesados y los electrones lentos correspondientes. Se mantienen frecuencias $|\bar{\omega}_r| \leq 0.6$.

La dependencia de posición del potencial electrostático para el intervalo de tiempo $150 \leq t\omega_{pe} \leq 700$ se muestra en la Fig.5.11. El potencial exhibe principalmente dependencia de un solo número de onda ($\bar{k} = 0.4$), hasta el instante $t\omega_{pe} = 500$, cuando se forma un potencial localizado en el centro del dominio de posiciones, $\bar{x} = \bar{L}_x/2$ [Fig.5.11(a)], con números de onda hasta $\bar{k} = 0.8$ [Fig.5.11(b)]. Luego, se excitan variaciones con $\bar{k} = 1.2$ y el potencial se torna localizado durante $500 \leq t\omega_{pe} \leq 600$, cuando se forman las cavidades en la densidad de los electrones [Fig.5.13(a)].

En la Fig.5.12, durante $400 \leq t\omega_{pe} \leq 1000$, se observa que el potencial se vuelve más localizado y que crece en amplitud, a medida que las cavidades de electrones se profundizan [ver Fig.5.6(a)], hasta el instante $t\omega_{pe} = 1000$, formando dos ondas solitarias contra-propagantes que se propagan con velocidades $|\bar{v}_{s,\Phi}| = 6.283 \times 10^{-2}$, igual a las de las estructuras observadas en $\delta\bar{n}_{e,\text{fil}}$. Dado que el sistema es periódico, los bordes del dominio de posiciones, así como $\bar{x} = \bar{L}_x/2$, son puntos de cruce en el que el potencial se intensifica localmente. Después del cruce en $t\omega_{pe} = 1000$, la estructura solitaria se dispersa y se excitan varias longitudes de onda de baja amplitud [ver Fig.5.12(b)]. Esto coincide con el cruce de las cavidades principales y el crecimiento de la cavidad en el centro del dominio de posiciones, y la posterior generación de cavidades angostas en la densidad de electrones. Las cavidades principales persisten en instantes posteriores.

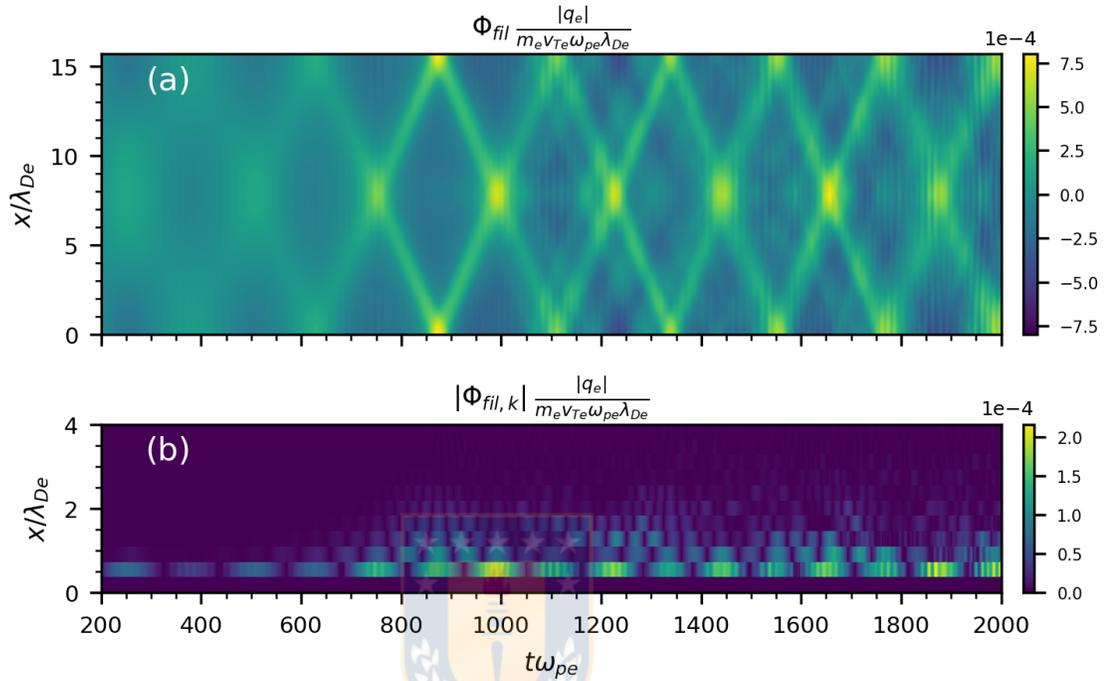


Figura 5.12: Evolución de las variaciones del (a) potencial electrostático, filtrado en frecuencia, $\bar{\Phi}_{fil}$, y (b) su transformada de Fourier en posiciones para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$, con iones móviles. El intervalo de tiempo mostrado considera la formación y propagación de estructuras solitarias.

5.3.3. Evolución de la densidad de electrones

En la componente de baja frecuencia de las variaciones de la densidad de electrones las Figs.(5.6) se forman cavidades en $t\omega_{pe} \simeq 500$, cuando el potencial electrostático filtrado en frecuencias se localiza en el espacio de posiciones. La Fig.5.13 muestra un detalle de las variaciones de la densidad de electrones filtradas en frecuencia entre $200 \leq t\omega_{pe} \leq 700$. Inicialmente, la mayoría de las variaciones ocurre en el número de onda excitado, $\bar{k} = 0.4$. La carga se homogeneiza a medida que la polaridad del potencial filtrado en frecuencia se revierte [$320 \leq t\omega_{pe} \leq 440$, Fig.5.11(a)]. Durante

$400 \leq t\omega_{pe} \leq 500$, se observa una reducción localizada de electrones alrededor de $\bar{x} = \bar{L}_x/2$, alcanzando esa posición en el instante $t\omega_{pe} = 500$. Luego comienzan a propagarse cavidades de electrones de baja profundidad.

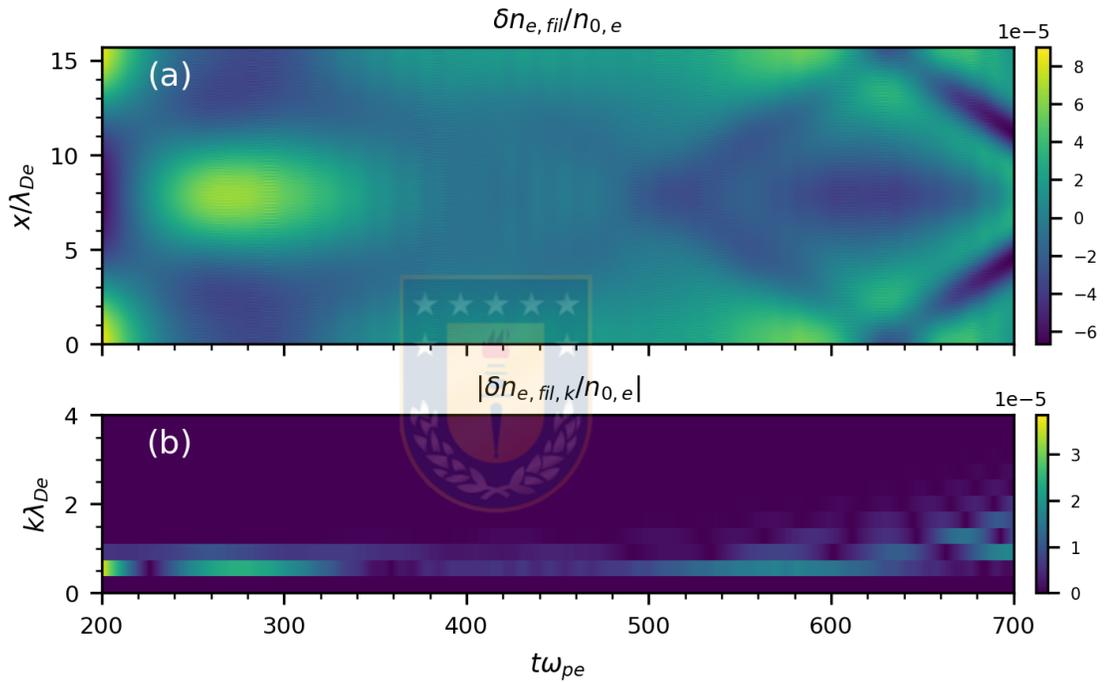


Figura 5.13: Evolución de las variaciones de (a) la densidad de electrones, filtrada en frecuencias, $\delta\bar{n}_{e,fil}$, y (b) su transformada de Fourier en posiciones, para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$, con iones móviles. El intervalo de tiempo mostrado considera la formación de las cavidades de electrones.

Las cavidades se propagan en el espacio de posiciones, produciendo cavidades más profundas en los puntos de cruce [Fig.5.6(a)]. Las cavidades se enanchan y se propagan acompañadas por un exceso de electrones en sus bordes, desde $t\omega_{pe} = 800$. En el instante $t\omega_{pe} = 900$ se excita la cavidad central. Las tres cavidades se cruzan hacia $t\omega_{pe} = 1000$, llevando a la generación de variaciones de longitudes de onda

cortas [Fig.5.6(b)] y varias cavidades angostas [Fig.5.6(a)].

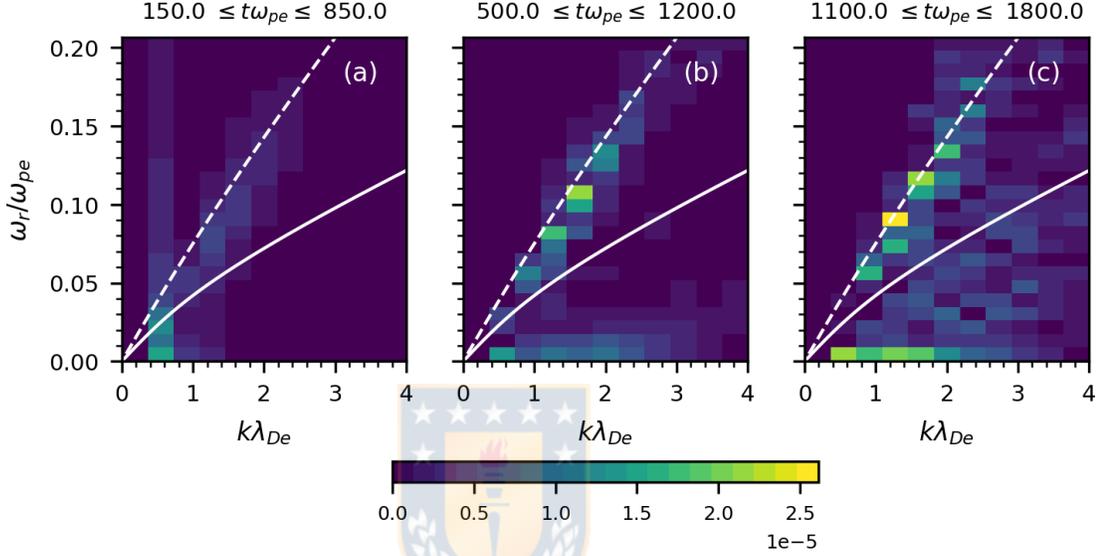


Figura 5.14: Espectros de las variaciones de la densidad de electrones $|\delta\bar{n}_{e,k,\omega}|$ para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$, para el caso de iones móviles. Se muestran tres intervalos de tiempo. Además, se muestran raíces de la relación de dispersión lineal (2.2.10), correspondientes a la rama IA (línea sólida blanca) y el modo de orden superior de baja frecuencia menos amortiguado (línea segmentada blanca).

Se discute la evolución del espectro de las variaciones de la densidad de electrones $\delta\bar{n}_e$. La Fig.5.14 muestra que la estructura de baja frecuencia de la densidad de electrones involucra la excitación de diversas ondas en la misma región que las encontradas en el campo eléctrico (Fig.5.5). La amplitud de estas ondas aumenta a medida que se forman las cavidades [Fig.5.14(a) y (b)], excitando mayormente ondas de longitud de onda corta, $1.2 < \bar{k} < 2.4$. Las amplitudes de estas ondas continúa creciendo a tiempos más largos, excitando variaciones con longitudes de onda más cortas, $\bar{k} > 2.4$ [Fig.5.14(c)]. Por lo tanto, la mayor parte de la dinámica de baja

frecuencia de $\delta\bar{n}_e$ está asociada a ondas que yacen sobre la rama de orden superior menos amortiguada, particularmente con $\bar{k} = 1.2$ y $\bar{k} = 1.6$. Se excitan ondas por debajo de la rama IA lineal [línea sólida blanca en Fig.5.14(c)], manteniendo bajas amplitudes en comparación con las de la rama tipo-acústica.

Se hace notar que las ondas más intensas que se excitan en este caso se propagan con velocidades de fase en el mismo rango o cercanas a la velocidad $|\bar{v}_c|$ de las cavidades de electrones en Fig.5.6(a). En el intervalo de tiempo inicial, los rangos son $4.488 \times 10^{-2} \leq \bar{v} \leq 8.976 \times 10^{-2}$ y un rango de bajas velocidades $0.0 \leq \bar{v}_\phi \leq 2.244 \times 10^{-2}$ [Fig.5.14(a)], $6.732 \times 10^{-2} \leq \bar{v}_\phi \leq 8.334 \times 10^{-2}$ [Fig.5.14(b)], $5.984 \times 10^{-2} \leq \bar{v}_\phi \leq 8.228 \times 10^{-2}$ [Fig.5.14(c)]. Además, se excitan ondas más lentas [Fig.5.14(b) and (c)], que coinciden con la formación de la cavidad central [Fig.5.6(a)].

5.3.4. Evolución de la densidad de iones pesados

Las variaciones de la densidad de iones, $\delta\bar{n}_i$, se muestran en las Figs.5.15 y 5.16. Inicialmente, las variaciones temporales en la densidad de los iones ocurren en su mayoría con número de onda $\bar{k} = 0.4$ [Figs.5.15(b) y 5.16(b)] con amplitud decreciente. Durante $200 \leq t\omega_{pe} \leq 300$ el potencial tiene un máximo local que expelle iones hacia los bordes del dominio de posiciones, como se observa durante $300 \leq t\omega_{pe} \leq 450$ [Fig.5.15(a)]. Entonces, el potencial aumenta en esas regiones y los iones nuevamente se acumulan en la posición $\bar{x} = \bar{L}_x/2$. Esta acumulación de carga está acompañada por la formación de cavidades en la densidad de los electrones [Fig.5.13(a)] y producen un potencial localizado en el instante $t\omega_{pe} = 500$ [Fig.5.11(a)]. Ya que el potencial involucra longitudes de onda cortas, la fuerza sobre las especies aumenta, acumulando una gran cantidad de iones en los bordes alrededor del instante

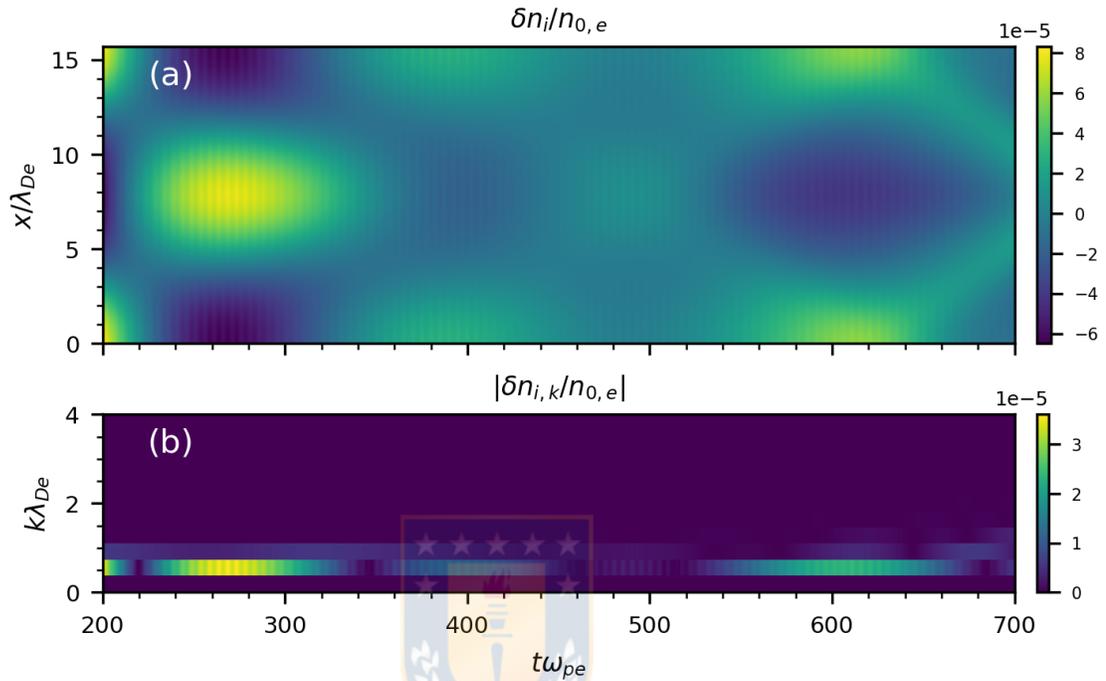


Figura 5.15: Evolución de (a) las variaciones de la densidad de iones, $\delta\bar{n}_i$, y (b) su transformada de Fourier en posiciones para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$. El intervalo de tiempo considera la localización de pulsos compresivos.

$t\omega_{pe} = 600$ [Fig.5.15(a)].

La Fig.5.16 muestra la evolución de $\delta\bar{n}_i$ a tiempos largos. Después del proceso de localización, dos estructuras solitarias contra-propagantes correspondientes a pulsos compresivos comienzan a propagarse con velocidades $|\bar{v}_s| \simeq 6.283 \times 10^{-2}$. Su propagación coincide con la de las cavidades de electrones [Fig.5.6(a)], sugiriendo que ambas estructuras se acoplan en el espacio de posiciones, y dando cuenta del potencial solitario en la componente de baja frecuencia [Fig.5.12(a)]. Las estructuras solitarias pierden coherencia después de $t\omega_{pe} = 1000$ a medida que se desarrollan estructuras de longitud de onda corta ($\bar{k} > 2.1$) de baja amplitud [see Fig.5.16(b)].

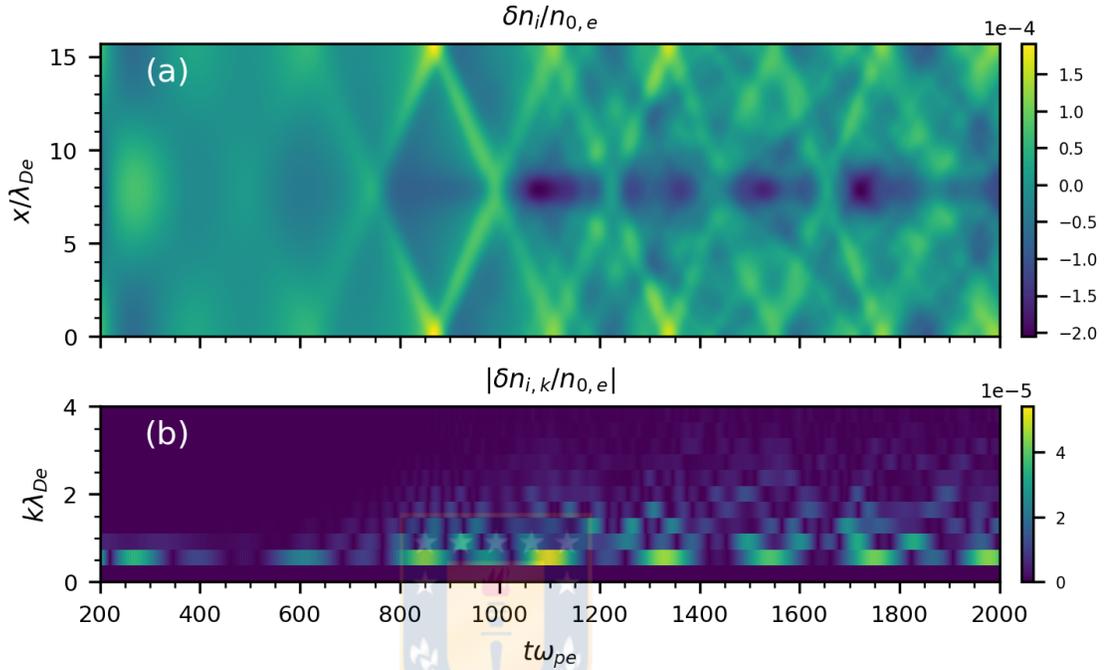


Figura 5.16: Evolución de (a) las variaciones de la densidad de iones, $\delta\bar{n}_i$, y (b) su transformada de Fourier en posiciones para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$. El intervalo de tiempo considera la formación de los pulsos compresivos de iones y su posterior propagación.

Este evento coincide con la formación de estructuras de longitud de onda corta en la densidad de los electrones y la dispersión de las estructuras de la componente de baja frecuencia del potencial electrostático.

La evolución del espectro de baja frecuencia de las variaciones de la densidad de iones en Fig.5.17 exhibe variaciones de baja amplitud, teniendo mayor intensidad ondas de longitud de onda larga, $\bar{k} < 1.2$. Se observan ondas a lo largo de la rama tipo-acústica, teniendo mayor amplitud las ondas con $\bar{k} \leq 0.8$. La velocidad de fase de estas ondas está dentro del rango $4.488 \times 10^{-2} \leq \bar{v}_\phi \leq 8.976 \times 10^{-2}$, que coincide con la estructura de las ondas en $|\bar{E}_{k,\omega}|$ y $|\delta\bar{n}_e|$. Se observan otras ondas intensas

con frecuencia cercana a cero en el rango $0.4 \leq \bar{k} \leq 1.2$ [Figs.5.17(b) y (c)]. Como en el caso de la densidad de los electrones, también se observan ondas ubicadas en o debajo de la rama IA lineal, durante $1100 \leq t\omega_{pe} \leq 1800$ con números de onda bajos, $\bar{k} \leq 2.4$ [Figs.5.17(c)].

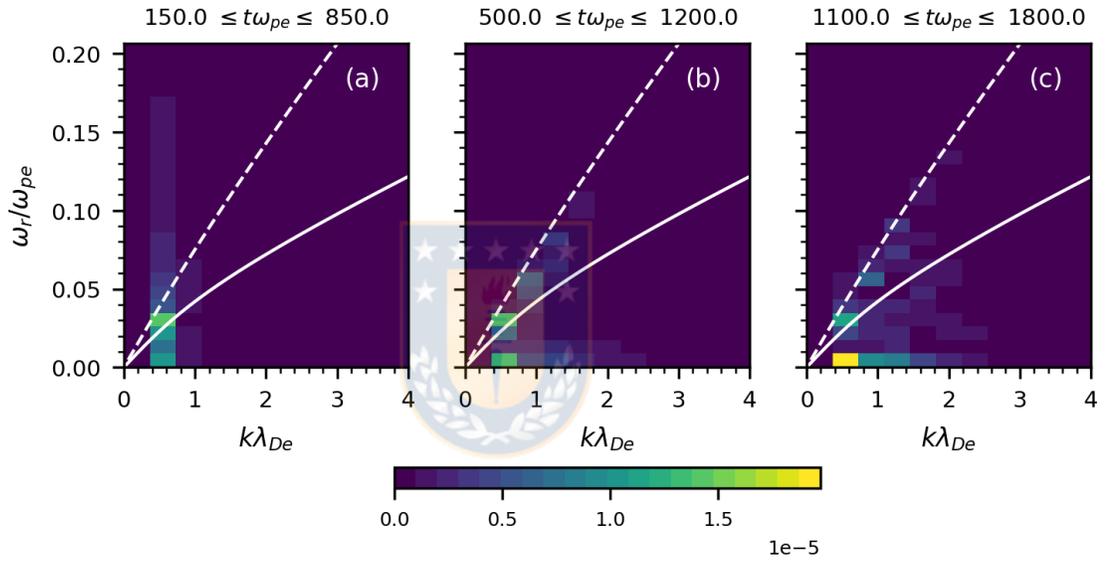


Figura 5.17: Espectros de las variaciones de la densidad de los iones $|\delta\bar{n}_{i,k,\omega}|$ para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$ para el caso de iones móviles. Se muestran tres intervalos de tiempo. Además, se muestran raíces de la relación de dispersión lineal (2.2.10), correspondientes al modo IA lineal (línea sólida blanca) y al modo de orden superior de baja frecuencia menos amortiguado (línea segmentada blanca).

5.4 Estructuras no-lineales asociadas a electrones e iones

Las estructuras observadas en la densidad de los iones y en la componente de baja frecuencia de la densidad de los electrones están localizadas en las mismas posiciones y se propagan con las mismas velocidades, como se puede notar de las Figs.5.6(a)

y 5.16(a). Se discute sobre el instante en que tal acoplamiento ocurriría, τ_{loc} , y las funciones de distribución completas.

5.4.1. Correlaciones locales

Como las estructuras de baja frecuencia de la densidad de los electrones y de los iones exhiben tendencias opuestas, sus correlaciones locales, $C[\delta\bar{n}_i, \delta\bar{n}_{e,\text{fil}}]$, estimadas como

$$C[\delta\bar{n}_i, \delta\bar{n}_{e,\text{fil}}](\bar{x}, \bar{t}) = \frac{\delta\bar{n}_i(\bar{x}, \bar{t})\delta\bar{n}_{e,\text{fil}}(\bar{x}, \bar{t})}{\sigma_i(\bar{t})\sigma_{e,\text{fil}}(\bar{t})},$$

donde $\sigma_j(\bar{t})$ es la desviación estándar de la densidad de partícula de la especie j en el tiempo, deberían exhibir anti-correlación en las posiciones en que se encuentran las cavidades de electrones y los pulsos compresivos de iones. La evolución de las correlaciones locales de las densidades se muestra en la Fig.5.18.

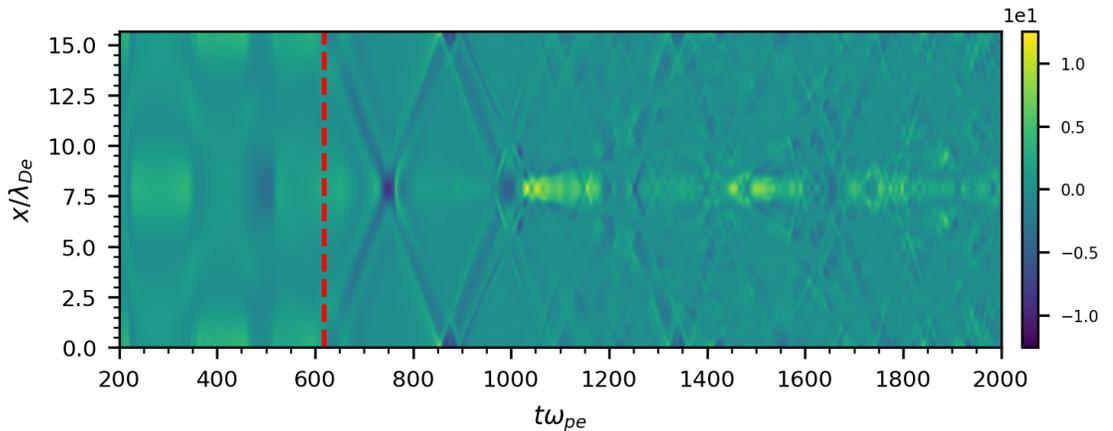


Figura 5.18: Evolución de $C[\delta\bar{n}_i, \delta\bar{n}_{e,\text{fil}}]$. Se indica el instante de localización τ_{loc} (línea segmentada roja) para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$.

Las correlaciones locales permiten determinar el instante τ_{loc} encontrando el instante en el que las correlaciones comienzan a ser negativas en las posiciones de estas estructuras. En este caso, $\tau_{loc} = 618.75$. Antes de este instante, las correlaciones son principalmente positivas. Después, se observa anti-correlación en las zonas donde están las estructuras. Para $t\omega_{pe} > 1000$, el comportamiento anti-correlativo se pierde en una gran extensión aunque en ciertas regiones puede observarse forma intermitente (por ejemplo, ver Fig.5.18 durante $1200 \leq t\omega_{pe} \leq 1400$ and $1700 \leq t\omega_{pe} \leq 1800$). La mayor parte del tiempo, ambas densidades se encuentran no-correlacionadas ($C \sim 0$) debido a la diferencia en el rango de las longitudes de onda de cada especie.

5.4.2. Funciones de distribución

Se observan las variaciones de la función de distribución, $\delta \bar{f}_j = \bar{f}_j - \bar{f}_{0,j}$, en tres etapas: **(i)** al inicio de la formación de las estructuras no-lineales ($t\omega_{pe} < \tau_{loc}$), **(ii)** durante la propagación de las estructuras ($\tau_{loc} \leq t\omega_{pe} \leq 1000$) y **(iii)** en la formación de estructuras de longitudes de onda cortas ($t\omega_{pe} > 1000$).

Inicio de la formación de las estructuras

La Fig.5.19 muestra las variaciones de las funciones de distribución de los electrones [Figs.5.19(a) a (d)], y de los iones [Figs.5.19(e) a (h)], en cuatro instantes previos a la propagación de las estructuras no-lineales de baja frecuencia en las densidades. Las variaciones en la distribución de los electrones muestra la formación de una reducción localizada de partículas justo por sobre la velocidad de fase $\bar{v}_{\phi,IA}$, y que continúa localizándose a medida que la filamentación progresa [Fig.5.19(d)]. Esta región está centrada alrededor de $|\bar{v}| \simeq 6.0 \times 10^{-2}$, cercana a $|\bar{v}_c|$ y daría cuenta de la formación de las cavidades de baja profundidad durante $400 \leq t\omega_{pe} \leq 500$

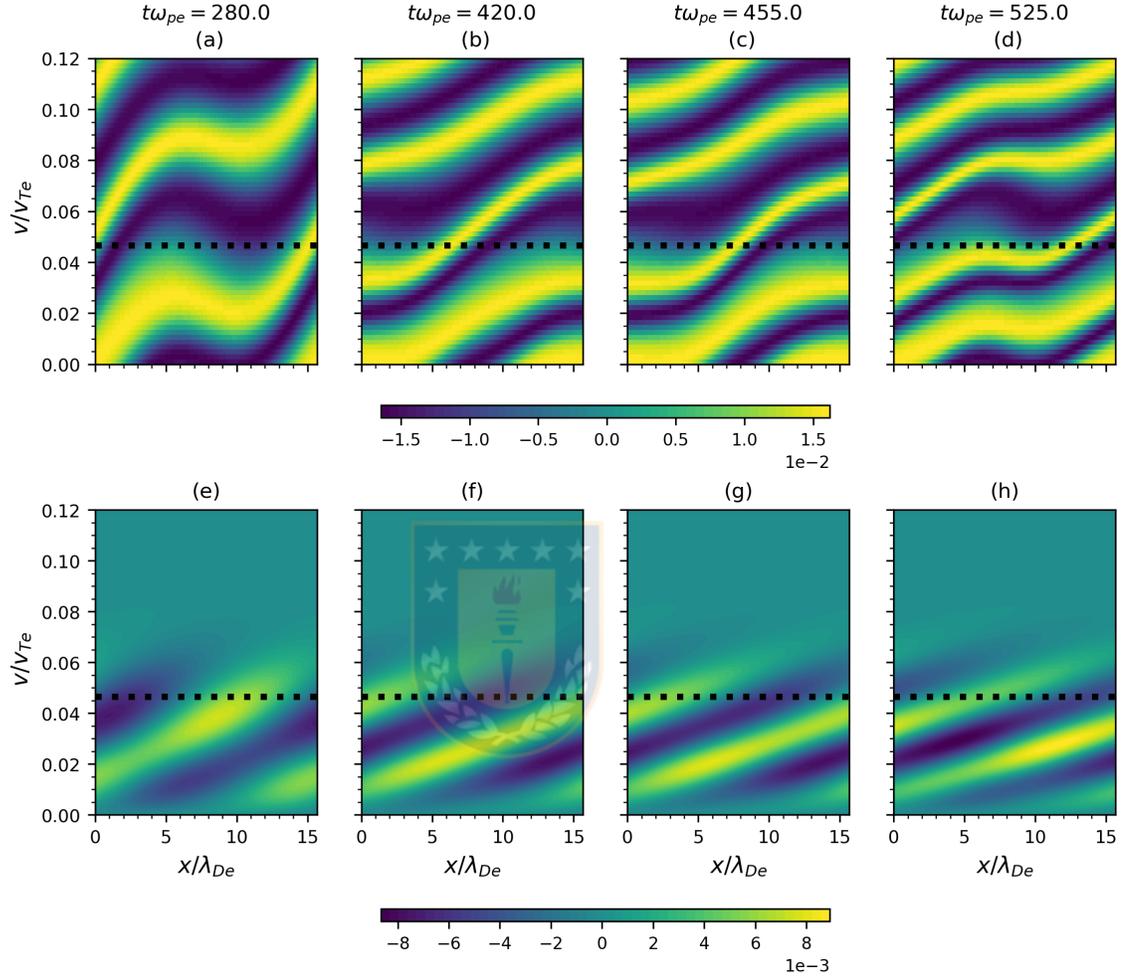


Figura 5.19: Variaciones de la función de distribución de los electrones, $\delta \bar{f}_e$ [(a) a (d)] y iones $\delta \bar{f}_i$ [(e) a (h)] con $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$, antes de la localización de las estructuras no-lineales en ambas densidades. Se indica la velocidad $\bar{v}_{\phi, IA}$ (línea negra punteada).

en la componente de baja frecuencia de las variaciones de la densidad de electrones (Fig.5.13).

En las variaciones de la distribución de los iones ocurren variaciones de gran amplitud para el rango de velocidades $|\bar{v}| \leq \bar{v}_{\phi, IA}$. Esta distribución exhibe un lento

proceso de filamentación. Se hace notar que a medida que la reducción localizada de electrones se mueve en el espacio de posiciones, la densidad de iones a lo largo de las estructuras filamentarias exhibe una acumulación localizada de partículas en las mismas posiciones, la que se observa acelerar desde $\bar{v} = 2.0 \times 10^{-2}$ [Fig.5.19(g)] hacia $\bar{v} = 4.0 \times 10^{-2}$ [Fig.5.19(h)]. Esta acumulación daría cuenta de la formación de pulsos compresivos en la densidad de los iones en el instante $t\omega_{pe} \leq 600$ [Fig.5.15(a)].

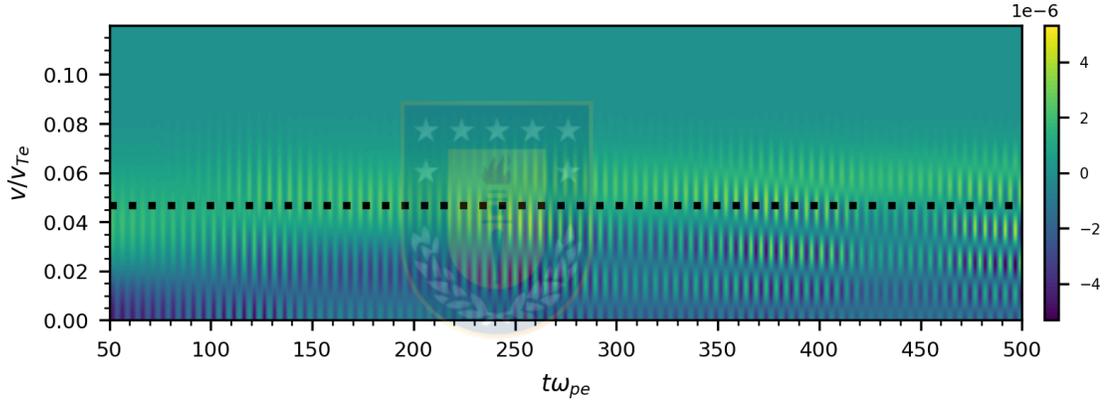


Figura 5.20: Evolución de las variaciones de la función de distribución de los iones promediadas en posiciones, $\langle \delta \bar{f}_i \rangle_{\bar{x}}$, alrededor de $\bar{v} = \bar{v}_{\phi,IA}$ for $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$.

La reducción en la población de los electrones puede entenderse observando las variaciones de la función de distribución de ambas especies promediadas en posiciones, $\langle \delta \bar{f}_j \rangle_{\bar{x}}$ [ec. (4.2.1)]. Aunque puede observarse una componente de alta frecuencia, se puede notar que el comportamiento de ambas distribuciones tiene similitudes con el caso de perturbaciones amortiguadas, a saber, hay una población de iones que es acelerada hacia velocidades alrededor de $\bar{v}_{\phi,IA}$ (Fig.5.20), mientras que los electrones con velocidad ligeramente superior a $\bar{v}_{\phi,IA}$, en un rango acotado de velocidades, son frenados (Fig.5.21), produciendo un despoblamiento localizado. Como los iones in-

teractúan naturalmente con ondas cuya velocidad de fase se encuentra en este rango de velocidades, los electrones experimentan los efectos dinámicos opuestos asociado al campo eléctrico de baja frecuencia. A medida que la filamentación ocurre, esta información se traslada hacia la dependencia de posiciones, siendo observada como cavidades en la densidad de electrones $\delta\bar{n}_{e,\text{fl}}$. Del presente análisis no queda claro si los *electron holes* relacionados con las ondas de Langmuir contribuyen a la formación de esta reducción localizada.

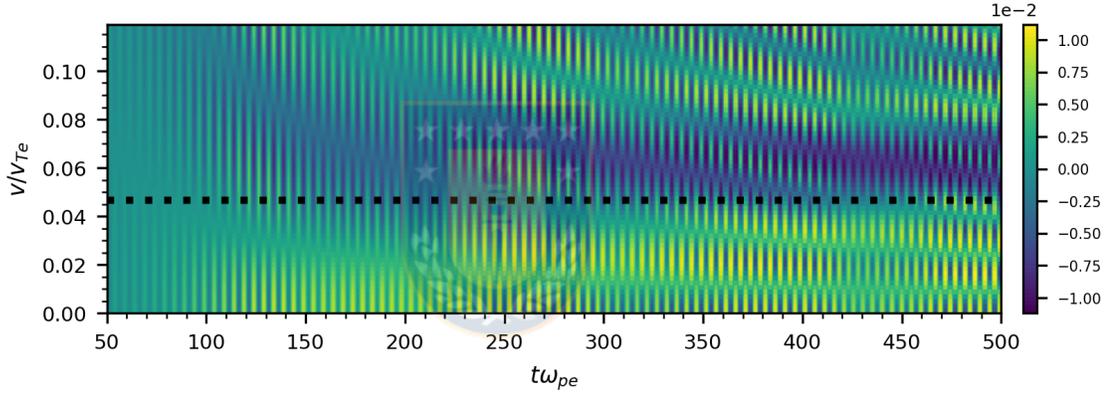


Figura 5.21: Evolución de las variaciones de la función de distribución de los electrones promediadas en posiciones, $\langle \delta \bar{f}_e \rangle_{\bar{x}}$, alrededor de $\bar{v} = \bar{v}_{\phi,IA}$ para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$.

Propagación de estructuras no-lineales

La Fig.5.22 muestra la función de distribución de los electrones [Figs.5.22(a) a (d)], y de los iones [Figs.5.22(e) a (h)], en cuatro instantes correspondientes a la propagación de las estructuras localizadas. En las variaciones de la función de distribución de los electrones se observa que la reducción localizada de partículas evoluciona en un *electron hole*, denominado primario, que se propaga con velocidad $\bar{v}_H = 6.25 \times 10^{-2}$. Esta velocidad se encuentra en el rango de las velocidades de

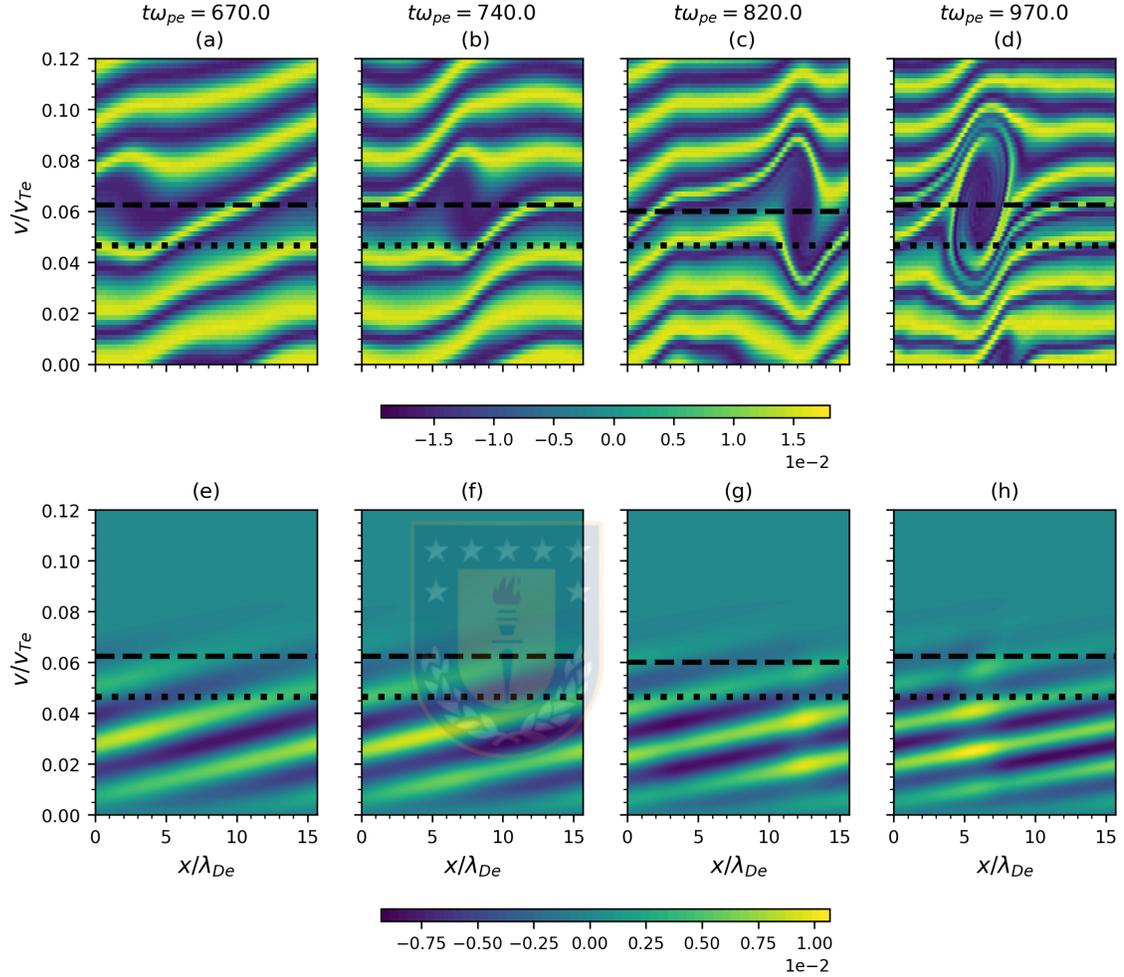


Figura 5.22: Variaciones de la función de distribución de los electrones $\delta \bar{f}_e$ [(a) a (d)] y de los iones $\delta \bar{f}_i$ [(e) a (h)] para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$, durante la propagación de cavidades de electrones y de pulsos de iones compresivos. Se muestran las velocidades $\bar{v}_{\phi, IA}$ (línea punteada negra) y del *electron hole* \bar{v}_H (línea segmentada negra).

fase de las ondas encontradas en el espectro del campo eléctrico [Fig.5.5(a)] y de las variaciones de la densidad de los electrones [Fig.5.14(a)]. A medida que el *hole* se propaga, su ancho en el espacio de velocidades aumenta, indicando que hay una intensificación del potencial de atrapamiento asociado a él [ver Fig.5.12(a)], y que la

población de electrones alrededor del *hole* produce el apantallamiento observado en Ref.[41], el que lleva a un decaimiento abrupto del potencial en los bordes del *hole*. Tal exceso de electrones se observa en las Figs.5.23(b) a (d) en $\delta\bar{n}_{e,\text{fil}}$.

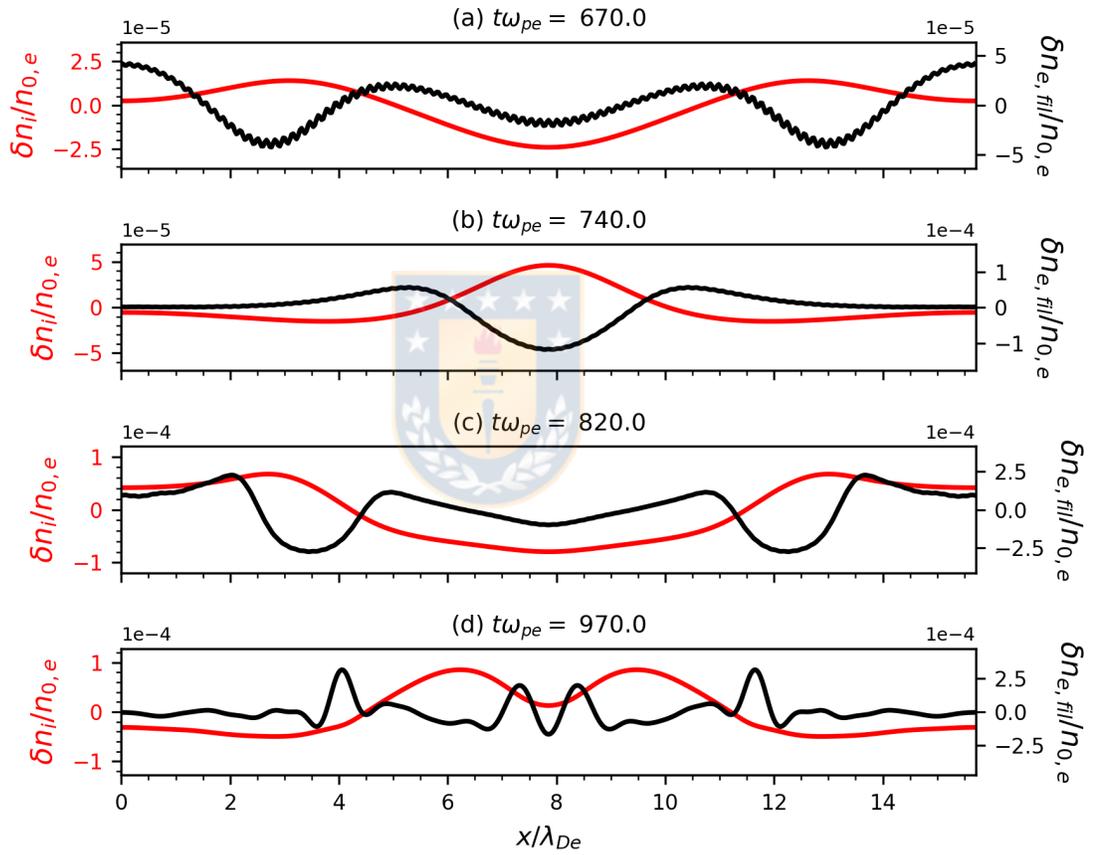


Figura 5.23: Variaciones de la componente de baja frecuencia de la densidad de electrones, $\delta\bar{n}_{e,\text{fil}}$ (negro), y variaciones de la densidad de los iones, $\delta\bar{n}_i$ (rojo), para los instantes mostrados en la Fig.5.22, considerando velocidades positivas y negativas de las funciones de distribución.

En la distribución de los iones [Figs.5.22(e) a (g)], se observa que la acumulación localizada de iones se intensifica, así como también se observa en las variaciones

de la densidad de los iones en Fig.5.23, y que ésta es desplazada hacia $\bar{v}_{\phi,IA}$. Esta intensificación puede ser explicada por el hecho de que el aumento de la intensidad del potencial del *electron hole* lleva a una acumulación de iones pesados en el interior de la región de atrapamiento [40]: un potencial positivo localizado con amplitud creciente frena a los iones entrantes con una fuerza creciente, alargando su tiempo de tránsito. Debido a que los iones aumentan el potencial positivo localizado, este proceso lleva a un aumento auto-consistente del potencial en la región de atrapamiento, la profundidad de las cavidades en la densidad de los electrones y de la amplitud de los pulsos compresivos en la densidad de los iones, observados durante $600 \leq t\omega_{pe} \leq 1000$ en las Figs.5.6(a) y 5.16(a). Estas estructuras dan cuenta de las ondas solitarias encontradas en el potencial electrostático en Fig.5.12(a).

Una vez que el *hole* se ha formado [Fig.5.22(c)], iones con diferentes velocidades contribuyen a la formación de los pulsos. Esto se observa en la acumulación local de iones a lo largo de los filamentos cerca de $\bar{x} = \bar{L}_x$ [Fig.5.22(g)], con velocidad más baja. Además, a medida que el potencial de estas estructuras crece en amplitud, éste es capaz de limitar el tránsito de iones más rápidos, como puede observarse alrededor de \bar{v}_H en $t\omega_{pe} = 970$ [Fig.5.22(h)].

Formación de estructuras de longitudes de onda cortas

La Fig.5.24 muestra las variaciones de la función de la distribución de los electrones [Figs.5.24(a) a (d)] y de los iones [Fig.5.24(e) a (h)], en cuatro instantes correspondientes a la formación de estructuras de longitudes de onda cortas, después de $t\omega_{pe} = 1000$, encontradas en Figs.5.6 y 5.16. Las secciones de las variaciones de las densidades en la Fig.5.25 muestran sólo las estructuras que se propagan con ve-

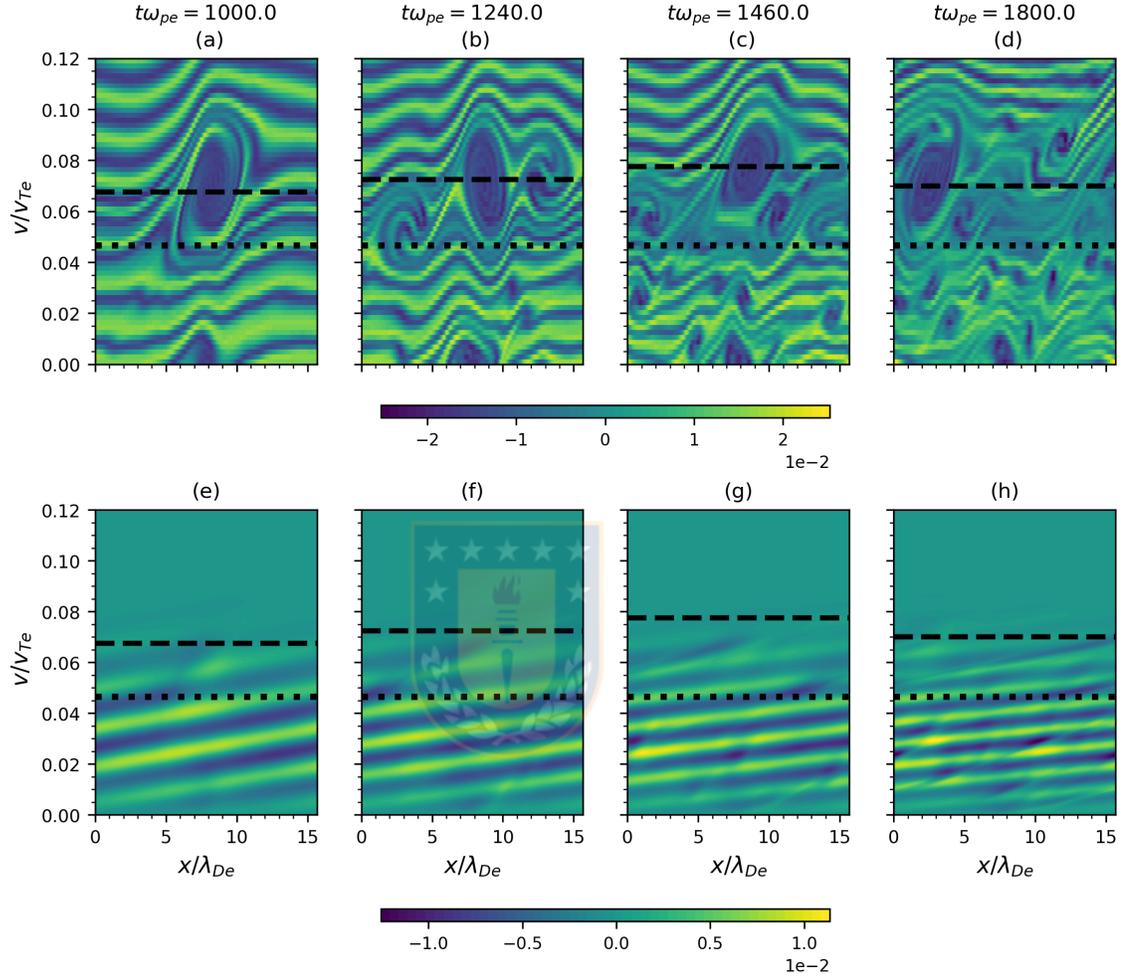


Figura 5.24: Variaciones de la función de distribución de los electrones, $\delta \bar{f}_e$, [(a) a (d)] y de los iones $\delta \bar{f}_i$ [(e) a (h)] para $\varepsilon_e = 4.0 \times 10^{-2}$, durante la propagación de cavidades de electrones y de los pulsos compresivos de iones. Se muestran las velocidades $\bar{v}_{\phi, IA}$ (línea punteada negra) y del *electron hole* \bar{v}_H (línea segmentada negra).

locidad positiva.

Las variaciones de la distribución de los electrones muestran la formación de *electron holes* más pequeños, los que darían cuenta de la propagación de cavidades de

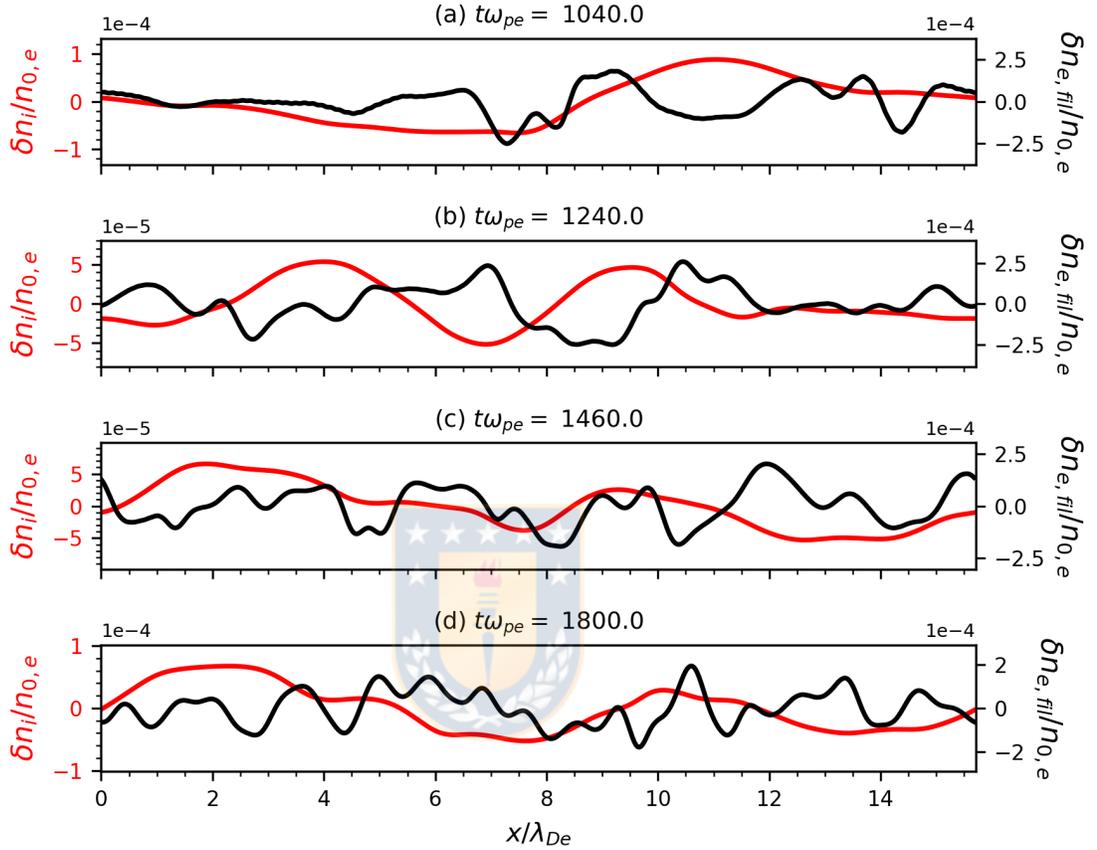


Figura 5.25: Variaciones de la componente de baja frecuencia de la densidad de electrones, $\delta\bar{n}_{e,\text{fil}}$ (negro), y variaciones de la densidad de los iones, $\delta\bar{n}_i$ (rojo), para los instantes mostrados en la Fig.5.24, considerando sólo estructuras que se propagan con velocidad positiva.

electrones más pequeñas que se observan en $\delta\bar{n}_{e,\text{fil}}$ [Figs.5.6(a) y 5.25]. En el instante $t\omega_{pe} = 1000$, las variaciones de la distribución de los electrones muestran distorsiones en los bordes del espacio de posiciones de los *electron holes* primarios [Fig.5.24(a)] a partir de los que crecen *holes* secundarios, uno alrededor de \bar{v}_H y otro alrededor de $\bar{v}_{\phi,IA}$, como se observa en $t\omega_{pe} = 1240$ [Fig.5.24(c)]. El proceso se detalla en las Figs.5.26(a) a (d). En instantes posteriores, se excitan *holes* más pequeños y len-

tos, por debajo de $\bar{v} = \bar{v}_{\phi,IA}$, los que se observan en $\delta\bar{n}_{e,fil}$ como cavidades angostas [Fig.5.6(a)]. Estos *holes* crecen a partir de pequeñas perturbaciones en la función de distribución, observadas desde $t\omega_{pe} = 970$ [Fig.5.22(d)] y se establecen una vez se forman los *holes* secundarios. Comparando con el caso de iones inmóviles, se sugiere que el crecimiento de estos pequeños *holes* se debe a estructuras relacionadas con los *holes* de las LWs no-lineales.

Las variaciones de la distribución de los iones exhiben acumulaciones locales dentro de la región primaria de atrapamiento de electrones, en $t\omega_{pe} = 1000$ [Fig.5.24(e)]. Una vez que los *holes* secundarios y los más pequeños se han formado, la distribución de los iones ha experimentado perturbaciones que culminan con la formación de varias zonas de acumulación local de iones a lo largo de las estructuras filamentosas [Fig.5.24(f) y más notoriamente en la Fig.5.24(h)]. En este proceso se observa la deformación del filamento en el rango de velocidades $\bar{v}_{\phi,IA} \leq \bar{v} \leq \bar{v}_H$ a medida que se forman los *holes* secundarios [Fig.5.26(e) a (h)]. En instantes posteriores, tales deformaciones también ocurren por debajo de $\bar{v}_{\phi,IA}$ cuando se forman los *holes* pequeños [Fig.5.24(h)]. Este proceso parece producir la pérdida de coherencia tanto en los pulsos compresivos de los iones como en la componente de baja frecuencia del potencial electrostático desde el instante $t\omega_{pe} = 1000$. Sin embargo, la Fig.5.25 sugiere que las estructuras primarias de iones y electrones se mantienen acopladas [Figs.5.25(a) y (b)].

La Fig.5.26 muestra la formación de *electron holes* secundarios entre $t\omega_{pe} = 970$ y $t\omega_{pe} = 1200$, y de la estructura de la distribución de los iones alrededor de \bar{v}_H . Antes de que se formen los *holes* secundarios, los iones se acumulan localmente en el

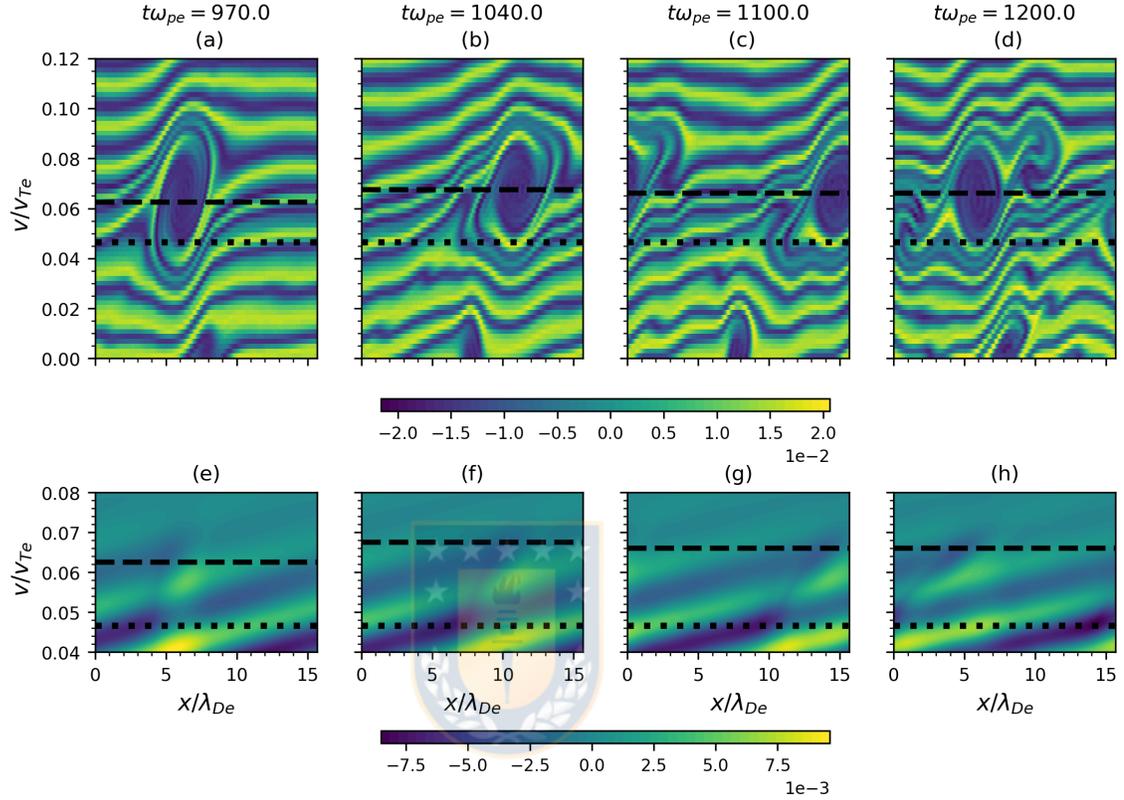


Figura 5.26: Detalles de las variaciones de la distribución de los electrones, $\delta \bar{f}_e$ [(a) a (d)], y de los iones, $\delta \bar{f}_i$ [(e) a (h)]. En esta última se considera un rango de velocidades $\bar{v}_{\phi,IA} \leq \bar{v} \leq \bar{v}_H$ durante el proceso de formación de los *holes* secundarios. Se muestran las velocidades $\bar{v}_{\phi,IA}$ (línea punteada negra) y del *electron hole* \bar{v}_H (línea segmentada negra).

centro del *electron hole* primario [Fig.5.26(a) y (e)] alrededor de la velocidad del *hole* \bar{v}_H , compartiendo bordes en el espacio de posiciones con el *electron hole* en cuestión. Esta región se estira con un borde siendo arrastrado hacia la velocidad $\bar{v}_{\phi,IA}$ y el otro hacia \bar{v}_H [Figs.5.24(f) a (h)], indicando que una porción de estos iones ha sido acelerado a velocidades más rápidas y otros a velocidades más lentas con respecto a la velocidad del *hole* primario. Esta deformación ocurre después de que los tres *holes*

se cruzan en $t\omega_{pe} = 1000$, cuando la componente de baja frecuencia del potencial es localmente intensificada. Estas deformaciones son más notorias a tiempos más largos [ver Fig.5.24(e)], y pueden interpretarse como pulsos compresivos de iones [38, 71] localizados en los bordes del *hole*, capaces de atrapar electrones aledaños [Fig.5.24(c) y (d)]. En estas referencias, tales pulsos llevan al rompimiento del *hole* primario en dos *holes* secundarios contra-propagantes. Sin embargo, en este caso el *hole* primario persiste. La razón de esto podría ser que una pequeña parte de la población de los iones contribuye a estos pulsos, mientras que hay un mayor número de iones dentro del *hole* primario que sustenta el potencial de atrapamiento.

En todos los instantes mostrados, los *electron holes* se propagan de forma acelerada ($\bar{v}_H = 6.25 \times 10^{-2}$ a 7.75×10^{-2}) comparados con los que se muestra en Fig.5.24. Tal aceleración podría estar relacionada con la generación de los *holes* secundarios, debido a que inicialmente los *holes* primarios se propagan con velocidad aproximadamente constante [ver Figs.5.22(a) a (d)].

5.5 Resumen y discusión

Este capítulo se enfoca en la evolución no-lineal de un plasma electrostático compuesto por electrones y iones con razón de masa $\bar{m}_i = 1836.153$, inicialmente isotérmicos, $\bar{T}_i = 1.0$, ambos inicializados con distribuciones Maxwellianas sin deriva relativa. Una comparación entre los casos de iones móviles e inmóviles indica que hay una dinámica de baja frecuencia que ocurre con ondas localizadas, desarrollando regiones de atrapamiento en la función de distribución de los electrones alrededor de

$\bar{v}_H = 6.0 \times 10^{-2}$, observadas como cavidades en la componente de baja frecuencia de la densidad de los electrones. Cuando se dota de movimiento a los iones, se excita una región similar de ondas en el plano $\bar{\omega}_r - \bar{k}$, correspondiente a la rama de orden superior de baja frecuencia menos amortiguada de la relación de dispersión lineal, y las cantidades observadas exhiben amplitudes mayores. En este caso, se excitan *electron holes* de mayor tamaño y exhiben una mayor dinámica. Por lo tanto, la presencia de iones pesados con $\bar{T}_i = 1.0$ potencia la dinámica de baja frecuencia.

A velocidades más altas, las estructuras del espacio de fase relacionadas con las LWs no-lineales también resultan modificadas, como se observa en las correlaciones promediadas en posiciones de las variaciones de las funciones de distribución en instantes fijos entre los casos con iones móviles e inmóviles. Sin embargo, la dinámica en general es similar, como se observa en las variaciones de las funciones de distribución de los electrones de ambos casos.

La dinámica de baja frecuencia observada indica que la presencia de iones móviles excita ondas solitarias electrostáticas relacionadas con la formación de *electron holes* lentos contra-propagantes que inicialmente crecen en amplitud, acumulando iones en el interior del *holee* intensificando el potencial asociado a la estructura. Esto conduce a la formación de pulsos iónicos compresivos y a ondas electrostáticas solitarias en el potencial. Esto sin introducir una deriva relativa y formándose a partir de la perturbación inicial, a diferencia de lo mostrado en las Refs.[39, 41, 42]. En esos trabajos ambas especies tienen deriva relativa y/o el plasma se inicializa con un *electron hole*. Estas estructuras se acoplan y se propagan a la misma velocidad. Esta velocidad es del orden de las velocidades de fase sobre la rama excitada que se observa en

el espectro del campo eléctrico. Los espectros de las densidades muestran que los electrones contribuyen mayormente con la formación de estructuras de longitudes de onda cortas, mientras que los iones lo hacen con longitudes de onda largas. No queda claro si los *electron holes* vinculados al régimen no-lineal de las LWs contribuyen a la formación de estos *holes*

Notablemente, los espectros muestran baja actividad alrededor de la región correspondiente a la rama IA lineal, el modo de baja frecuencia menos amortiguado de la relación de dispersión lineal, en la propagación de estas estructuras, sugiriendo un rol menor en la dinámica del plasma. Sin embargo, información de las funciones de distribución indica que hay interacción resonante alrededor de la velocidad de fase de las IAWs $\bar{v}_{\phi,IA}$ para el número de onda excitado, desde los primeros instantes de la simulación. Los electrones con velocidades similares experimentan el efecto dinámico opuesto debido a la diferencia de carga eléctrica, siendo mayormente frenados y despoblando un intervalo de velocidades acotado por sobre la velocidad $\bar{v}_{\phi,IA}$. A medida que el sistema evoluciona, este despoblamiento se traduce en un despoblamiento en el espacio de posiciones, llevando a la formación de las estructuras no-lineales.

Los pulsos compresivos en la densidad de los iones se propagan con velocidad $|\bar{v}_s| = 2.6919\bar{c}_s$, donde $\bar{c}_s = \sqrt{T_e/\bar{m}_i} = 2.334 \times 10^{-2}$, fuera del rango predicho por el modelo de fluidos para IASs [28]. Además, las ondas relacionados con su propagación no se encuentran en la región de la rama IA lineal, como se requiere en el caso de la solución analítica de baja amplitud [29, 72] y como se ha observado en simulaciones [32, 33]. Por lo tanto, los presentes resultados sugieren que las estructuras excitadas no corresponden a IASs.

A medida que el potencial de atrapamiento crece, el *hole* primario crece en extensión e interactúa con iones con velocidades más rápidas. Estos iones, que son co-móviles con el *electron hole*, pueden resultar eventualmente repelidos desde su centro si el potencial es lo suficientemente intenso. Esto se observa cuando los *holes* contra-propagantes y el *hole* central se cruzan en el centro del dominio de posiciones. Al intensificar el potencial localizado, su gradiente en los bordes se vuelve mayor, acelerando iones hacia velocidades más altas o más bajas, dependiendo de su ubicación en el interior del *hole*. Este proceso introduce estructuras de longitudes de onda cortas en la densidad de los iones. A medida que los iones son forzados hacia los bordes de la región de atrapamiento, se forman pulsos compresivos con potencial localizado positivo capaz de atrapar electrones de los bordes del *hole*, generando *electron holes* secundarios. A diferencia de otros trabajos en los que el *hole* primario se rompe [38, 71], esta estructura persiste, posiblemente por la mayor cantidad de iones pesados acumulados en su interior. Aún queda por estudiar la aceleración del *electron hole* primario así como la formación del *hole* central y los pequeños *holes* con velocidades inferiores a $\bar{v}_{\phi,IA}$. Se hipotetiza que estos *holes* pequeños debieran ser causados por estructuras finas asociadas al modo rápido en ambos lados de la función de distribución de los electrones, cuyo efecto neto es un campo eléctrico de baja frecuencia, considerando que también se observan en el caso de iones inmóviles.

6 Conclusiones

A lo largo de este trabajo se han estudiado plasmas electrostáticos, no colisionales, no magnetizados, sin deriva relativa compuestos por electrones y iones Maxwellianos con razón de masa $\bar{m}_i = 1836.153$ y razón de carga $q_i/|q_e| = 1.0$, excitando sólo un número de onda, $\bar{k} = 0.4$, con amplitudes de perturbación ε_e bajo la amplitud crítica $\varepsilon_{e,C}$ necesaria para excitar el amortiguamiento no lineal de Landau de LWs, obteniéndose oscilaciones amortiguadas, y por sobre $\varepsilon_{e,C}$, produciendo oscilaciones no lineales, ambas para el caso de especies inicialmente isotérmicas, $\bar{T}_i = 1.0$.

En el caso de oscilaciones amortiguadas, se propagan dos tipos de ondas en el plasma, las LWs, conducidas por la dinámica de los electrones, y las IAWs, conducidas por la dinámica de los iones pesados, como fue concluido por Xu *et al.* [20], identificados por la comparación entre los espectros del campo eléctrico y las frecuencias y tasas de amortiguamiento predichas por la relación de dispersión lineal cinética. Como $\bar{T}_i = 1.0$, la diferencia entre las frecuencias y tasas de amortiguamiento se deben a la diferencia de inercia, produciendo un amortiguamiento débil y frecuencias más bajas en las IAWs que en las LWs. La distribución de los electrones participa en la propagación de ambas ondas.

Se encuentra una zona de resonancia en las distribuciones de ambas especies, involucrando la velocidad de fase de las IAWs, $\bar{v}_{\phi,IA}$, en las que los iones dominan la dinámica y electrones con velocidades en el orden de $\bar{v}_{\phi,IA}$ experimentan los efectos dinámicos opuestos debido a la diferencia de carga eléctrica, como se esperaba de la estimación de la función de distribución de la teoría lineal. También se encuentra que ambos tipos de ondas se propagan de forma relativamente independiente una de la otra, ya que la zona de resonancia relacionada con una de ellas, o toda la especie, no son afectadas de forma importante por la propagación de la otra onda, sugiriendo que toda la dinámica corresponde a una superposición de ambos tipos de ondas. Por lo tanto, inicialmente, predominarían las LWs de gran amplitud, sostenida por electrones con velocidades cercanas a $\bar{v}_{\phi,L}$. Dado que la tasa de amortiguamiento es mayor, las oscilaciones de Langmuir decaen rápidamente por debajo de los niveles de las IAWs, sostenidas por partículas con velocidades cercanas a $\bar{v}_{\phi,IA}$, y la dinámica es gobernada por estas ondas.

En el caso de oscilaciones no lineales, se encuentra que el caso de iones inmóviles exhibe una dinámica de baja frecuencia de varios ciclos de oscilaciones de plasma de electrones después de la formación de la zona de atrapamiento asociada al amortiguamiento no lineal de Landau de las LWs. Las variaciones en la distribución de los electrones muestran el desarrollo de un *electron hole* con velocidad $\bar{v} = 0$ seguido por *electron holes* contra-propagantes con velocidades $|\bar{v}| \simeq 6.0 \times 10^{-2}$, con señales tipo-acústicas en el espectro del campo eléctrico $|\bar{E}_{\omega,k}|$. Posteriormente, la distribución de los electrones se pobla densamente por *electron holes* pequeños dentro del rango $|\bar{v}| \leq 0.1$. Se muestra que la introducción de iones móviles inicialmente isotérmicos potencia la dinámica de baja frecuencia, permitiendo la propagación de *electron ho-*

les con velocidades $|\bar{v}| = 6.283 \times 10^{-2}$ de gran extensión en los espacios de posición y velocidad, en instantes anteriores a los del caso de iones inmóviles. Una comparación en más detalle de las variaciones de la función de distribución promediada en posiciones y la función de distribución en ambos casos indica que hay una modificación en la estructura del espacio de fase, incluso en el *electron hole* relacionado a las LWs. El espectro $|\bar{E}_{k,\omega}|$ muestra la excitación de ondas en la misma región que en el caso de iones móviles, pero la rama tipo-acústica involucra ondas de mayor amplitud. Aunque se detecta actividad de baja frecuencia, las IAWs no son las más excitadas en el sistema, al contrario del caso de oscilaciones amortiguadas, y la mayor actividad se encuentra más bien sobre una rama correspondiente al modo de orden superior de baja frecuencia menos amortiguado después del modo IA predicho por la relación de dispersión lineal.

Al enfocarse en la dinámica de baja frecuencia, se observa que el potencial electrostático filtrado en frecuencias exhibe estructuras solitarias contra-propagantes que persisten por largos tiempos con velocidades aproximadamente constantes, $|\bar{v}_{s,\Phi}| = 6.283 \times 10^{-2}$, las que pueden identificarse como ondas solitarias electrostáticas. Las variaciones filtradas en frecuencias de la densidad de electrones y las variaciones de la densidad de iones exhiben estructuras complementarias que se propagan con la misma velocidad, correspondientes a cavidades en la densidad de electrones y pulsos compresivos en la densidad de iones. Es destacable que estas estructuras se excitan sin haber una deriva relativa entre ambas especies, y que se desarrollan naturalmente desde la perturbación inicial sin requerir una excitación inicial para el *electron hole* o el solitón de iones [39, 41, 42]. El espectro de cada cantidad indica que los electrones contribuyen al desarrollo de estructuras de longitud de onda corta mientras que

los iones pesados sostienen las de longitud de onda larga. Ambas dan cuenta de la generación de un potencial electrostático positivo localizado de baja frecuencia $\bar{\Phi}_{\text{fil}}$. Estas estructuras también dan cuenta de la estructura de dispersión encontrada en $|\bar{E}_{\omega,k}|$.

Secciones del espacio de fase indican que la estructura de cavidades en la densidad de electrones se debe al desarrollo de *electron holes*. Particularmente, los *holes* que inicialmente se mueven con velocidad $|\bar{v}| = 6.283 \times 10^{-2}$, aquí denominados como primarios, estarían relacionados con la dinámica de los iones, ya que se originan por un despoblamiento de electrones con velocidades ligeramente superiores a $\bar{v}_{\phi,IA}$ en un rango acotado de velocidades. Las funciones de distribución promediadas de ambas especies sugieren que este despoblamiento se debe a los efectos dinámicos opuestos del campo eléctrico en ambas especies alrededor $\bar{v}_{\phi,IA}$ debido a una diferencia de carga. A medida que el potencial asociado crece en el tiempo, los iones se acumulan en el interior de los *holes* primarios. Este proceso da cuenta de la formación de pulsos compresivos en la densidad de iones, intensificando el potencial local. Debido a que las ondas relacionadas a estas estructuras no yacen sobre la rama IA lineal, como sí se ha observado en trabajos relacionados a IASs [32, 33], y su velocidad de propagación está fuera del rango predicho analíticamente para IASs [28], estas estructuras no pueden asociarse a IASs.

Los iones que se mueven junto con el *hole* primario son particularmente afectados por el atrapamiento, produciendo dos pulsos compresivos en los bordes del *hole* primario en el espacio de posiciones y llevan a la formación de *electron holes* secundarios. A diferencia de otros trabajos en los que el *hole* primario se rompe en dos

holes secundarios [38, 71], este *electron hole* primario continúa propagándose, posiblemente por la comparativamente mayor población de iones que aún se encuentran acumulados en el *hole* primario en comparación con la de aquellos que producen los secundarios.

Con el fin de completar la imagen de la dinámica de baja frecuencia del plasma, aún es necesario estudiar cualquier posible efecto de las estructuras predominantes en el plasma, a saber, *electron holes* relacionados con LWs no lineales, las que aunque involucran frecuencias altas ($\bar{\omega}_r \gtrsim 1$) y velocidades altas ($\bar{v} \sim \bar{v}_{\phi,L}$), aún es posible que se acoplen y produzcan estructuras de baja frecuencia que podrían afectar e desarrollo de las estructuras producidas en presencia de iones móviles, así como la aceleración del hole primario. Es también de interés estudiar el comportamiento de la función de distribución de los electrones en otros rangos de velocidades, ya que las correlaciones promediadas en posiciones de las funciones de distribución de electrones de los casos de iones inmóviles y móviles con $\bar{T}_i = 1.0$ se tornan no correlacionadas en una gran extensión del dominio de velocidades, indicando la presencia de más estructuras no lineales que también fueron excluidas del presente análisis. También se deben estudiar los efectos que se produce con la variación de la razón de temperatura iónica.

Apéndices



A Cálculo de la relación de dispersión lineal

A.1 Relación de dispersión lineal desde ec.(2.2.6) a ec.(2.2.8)

Considerando las trayectorias no perturbadas, la exponencial resulta

$$\exp [i (\mathbf{k} \cdot [\mathbf{r}'(t') - \mathbf{r}] - \omega [t' - t])] = \exp [i ([\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega] t' + \omega t)].$$

Al integrar directamente (2.2.6) y al usar el potencial electrostático en el espacio de Fourier, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t \exp [i (\mathbf{k} \cdot [\mathbf{r}'(t') - \mathbf{r}] - \omega [t' - t])] \times \\ \mathbf{E}_{1,\mathbf{k},\omega} \cdot \nabla_v f_{0,j} dt' &= i \frac{\mathbf{E}_{1,\mathbf{k},\omega} \cdot \nabla_v f_{0,j}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \\ &= \Phi_{1,\mathbf{k},\omega} \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_v f_{0,j}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}. \end{aligned}$$

Entonces, la transformada de Laplace-Fourier de la distribución perturbada está dada por

$$f_{1,j,\mathbf{k},\omega} = -\Phi_{1,\mathbf{k},\omega} \frac{q_j}{m_j} \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_v f_{0,j}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}.$$

Al introducir este resultado y el potencial electrostático en la ley de Gauss, y al usar la transformada de Fouier en el espacio de posiciones, resultan

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{1,\mathbf{k},\omega} = \frac{\rho_{1,\mathbf{k},\omega}}{\epsilon_0}$$

$$k^2\Phi_{1,\mathbf{k},\omega} = -\Phi_{1,\mathbf{k},\omega} \sum_j \frac{q_j^2}{\epsilon_0 m_j} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{j0}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3v,$$

de donde se obtiene la ecuación

$$\left[1 + \sum_j \frac{q_j^2}{\epsilon_0 m_j k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{j0}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3v \right] \Phi_{1,\mathbf{k},\omega} = 0,$$

que está escrita en la forma $\epsilon_{\mathbf{k},\omega} \Phi_{1,\mathbf{k},\omega} = 0$, donde $\epsilon_{\mathbf{k},\omega}$ se identifica como el término en paréntesis cuadrados, correspondiendo a la función de dispersión en (2.2.8).

A.2 Relación de dispersión lineal desde ec.(2.2.8) a ec.(2.2.10)

Para los siguientes cálculos, las funciones de distribución para todas las especies son distribuciones Maxwellianas sin deriva relativa.

$$f_{0,j}(\mathbf{v}) = \frac{n_{0,j}}{[\sqrt{2\pi}v_{Tj}]^3} \exp\left[-\frac{v^2}{2v_{Tj}^2}\right].$$

Su gradiente está dado por

$$\nabla_{\mathbf{v}} f_{0,j} = -\frac{\mathbf{v}}{v_{Tj}^2} \frac{n_{0,j}}{[\sqrt{2\pi}v_{Tj}]^3} \exp\left[-\frac{v^2}{2v_{Tj}^2}\right].$$

Al introducir este resultado y la definición de la frecuencia de plasma de la especie j , $\omega_{pj}^2 \equiv q_j^2 n_j / \epsilon_0 m_j$, en $\epsilon_{\mathbf{k},\omega}$, la función de dispersión resulta

$$\epsilon_{\mathbf{k},\omega} = 1 - \frac{1}{[\sqrt{2\pi}]^3 v_{Tj}^5} \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \exp\left[\frac{-v^2}{2v_{Tj}^2}\right] d^3v.$$

Para resolver la integral, se alinean los ejes de velocidad con respecto a \mathbf{k} , así

$$\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{e}_{\parallel} + v_{\perp} \mathbf{e}_{\perp},$$

donde \mathbf{e}_{\parallel} y \mathbf{e}_{\perp} son vectores unitarios paralelos y perpendicular a \mathbf{k} , respectivamente, por lo que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = kv_{\parallel}$. Luego, se resuelve la integral.

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \exp\left[-\frac{v^2}{2v_{Tj}^2}\right] d^3v &= \int \frac{kv_{\parallel}}{\omega - kv_{\parallel}} \exp\left[-\frac{v_{\parallel}^2}{2v_{Tj}^2}\right] \exp\left[-\frac{\mathbf{v}_{\perp}^2}{2v_{Tj}^2}\right] d^3v \\ &= k \int \exp\left[-\frac{v_{\perp}^2}{2v_{Tj}^2}\right] d^2v_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_{\parallel}}{\omega - kv_{\parallel}} \exp\left[-\frac{v_{\parallel}^2}{2v_{Tj}^2}\right] dv_{\parallel}. \end{aligned}$$

La integral sobre \mathbf{v}_{\perp} consiste en dos integrales de funciones Gaussianas, una para cada dirección perpendicular.

$$\begin{aligned} \int \exp\left[-\frac{v^2}{2v_{Tj}^2}\right] d^2v_{\perp} &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{v_{\perp,1}^2}{2v_{Tj}^2}\right] dv_{\perp,1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{v_{\perp,2}^2}{2v_{Tj}^2}\right] dv_{\perp,2} \\ &= 2\pi v_{Tj}^2. \end{aligned} \tag{A.2.1}$$

Para la integral sobre v_{\parallel} , se considera que

$$\frac{kv_{\parallel}}{\omega - kv_{\parallel}} = -1 + \frac{\omega}{\omega - kv_{\parallel}},$$

thus,

$$k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_{\parallel}}{\omega - kv_{\parallel}} \exp \left[-\frac{v_{\parallel}^2}{2v_{Tj}^2} \right] dv_{\parallel} = -\sqrt{2\pi}v_{Tj} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega - kv_{\parallel}} \exp \left[-\frac{v_{\parallel}^2}{2v_{Tj}^2} \right] dv_{\parallel},$$

donde el primer término en el lado derecho se ha obtenido de la misma forma que en (A.2.1). La integral en el segundo término del lado derecho se resuelve introduciendo un cambio de variables, $\xi = v_{\parallel}/\sqrt{2}v_{Tj}$ y $\zeta_j = \omega/\sqrt{2}kv_{Tj}$, resultando

$$k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_{\parallel}}{\omega - kv_{\parallel}} \exp \left[-\frac{v_{\parallel}^2}{2v_{Tj}^2} \right] dv_{\parallel} = -\sqrt{2\pi}v_{Tj} \left[1 + \frac{\zeta_j}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-\xi^2]}{\xi - \zeta_j} d\xi \right].$$

La integral en el lado derecho no tiene una expresión analítica y ha sido estudiada ampliamente por matemáticos. Depende de la variable ζ_j , que es conocida como factor de resonancia [73] y su módulo indica la ubicación de la zona de resonancia en la función de distribución con respecto a la velocidad térmica inicial de la especie j . Esta función es la función de dispersión de plasma [49] y se define como

$$Z(\zeta_j) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-\xi^2]}{\xi - \zeta_j} d\xi.$$

Por lo tanto,

$$k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_{\parallel}}{\omega - kv_{\parallel}} \exp \left[-\frac{v_{\parallel}^2}{2v_{Tj}^2} \right] dv_{\parallel} = -\sqrt{2\pi}kv_{Tj} [1 + \zeta_j Z(\zeta_j)]. \quad (\text{A.2.2})$$

Finalmente, reuniendo los resultados de (A.2.1) y (A.2.2), la función de dispersión es

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathbf{k},\omega} &= 1 + \sum_j \frac{q_j^2}{\epsilon_0 m_j k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{j0}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3v \\ &= 1 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{v_{Tj}^2 k^2} [1 + \zeta_j Z(\zeta_j)].\end{aligned}$$



B Diccionario

B.1 Abreviaciones

- **BGK** : Bernstein-Greene-Kruskal (referido a estados BGK).
- **LW/s** : Onda/s de Langmuir (Langmuir wave/s).
- **IA** : Ión-acústico/a (Ion acoustic).
- **IAS/s** : Solitón/es ión-acústico/s (Ion acoustic soliton/s).
- **IAW/s** : Onda/s ión-acústica/s (Ion acoustic wave/s).

Bibliografía

- [1] L. D. Landau. “On the vibrations of the electronic plasma”. En: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 16,574 10 (1946), págs. 25-34 (vid. pág. 3).
- [2] Thomas O’neil. “Collisionless damping of nonlinear plasma oscillations”. En: *The Physics of Fluids* 8.12 (1965), págs. 2255-2262 (vid. págs. 3, 28).
- [3] Tsutomu Imamura, Ryo Sugihara y Tosiya Taniuti. “An asymptotic method for the Vlasov equation”. En: *Journal of the Physical Society of Japan* 27.6 (1969), págs. 1623-1630 (vid. pág. 3).
- [4] R Sugihara y col. “Initial damping of large amplitude waves”. En: *The Physics of Fluids* 24.3 (1981), págs. 434-441 (vid. págs. 3, 28).
- [5] Ryo Sugihara y Kaoru Yamanaka. “Enhancement of damping of a large amplitude wave”. En: *The Physics of Fluids* 18.1 (1975), págs. 114-116 (vid. pág. 3).
- [6] Ryo Sugihara y Jun-ichi Sakai. “Correction Term of Landau Damping Due to Trapped Particles”. En: *Journal of the Physical Society of Japan* 29.2 (1970), págs. 447-449 (vid. pág. 3).
- [7] G Brodin. “Nonlinear landau damping”. En: *Physical Review Letters* 78.7 (1997), pág. 1263 (vid. pág. 3).

- [8] JR Danielson, F Anderegg y CF Driscoll. “Measurement of Landau damping and the evolution to a BGK equilibrium”. En: *Physical Review Letters* 92.24 (2004), pág. 245003 (vid. págs. 3, 28).
- [9] A. V. Ivanov, Iver H. Cairns y P. A. Robinson. “Wave damping as a critical phenomenon”. En: *Physics of Plasmas* (2004). ISSN: 1070664X. DOI: 10.1063/1.1785789 (vid. pág. 3).
- [10] AV Ivanov e Iver H Cairns. “Nontrapping arrest of Langmuir wave damping near the threshold amplitude”. En: *Physical Review Letters* 96.17 (2006), pág. 175001 (vid. pág. 3).
- [11] Ira B. Bernstein, John M. Greene y Martin D. Kruskal. “Exact nonlinear plasma oscillations”. En: *Physical Review* 108.3 (1957), págs. 546-550. ISSN: 0031899X. DOI: 10.1103/PhysRev.108.546 (vid. págs. 3, 29, 31).
- [12] IH Hutchinson. “Electron holes in phase space: What they are and why they matter”. En: *Physics of Plasmas* 24.5 (2017), pág. 055601 (vid. págs. 3, 7, 31).
- [13] Abid Ali Abid y col. “Effects of electron trapping on nonlinear electron-acoustic waves excited by an electron beam via particle-in-cell simulations”. En: *Plasma Science and Technology* (2019) (vid. pág. 3).
- [14] J Bonnell y col. “Modulated langmuir waves: observations from freja and SCIFER”. En: *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 102.A8 (1997), págs. 17233-17240 (vid. pág. 4).
- [15] R Pottelette y col. “Modulated electron-acoustic waves in auroral density cavities: FAST observations”. En: *Geophysical Research Letters* 26.16 (1999), págs. 2629-2632 (vid. pág. 4).

- [16] Hamish Andrew Sinclair Reid y Heather Ratcliffe. “A review of solar type III radio bursts”. En: *Research in Astronomy and Astrophysics* 14.7 (2014), pág. 773 (vid. pág. 4).
- [17] George Blair Hospodarsky y Donald A Gurnett. “Beat-type Langmuir wave emissions associated with a type III solar radio burst: Evidence of parametric decay”. En: *Geophysical Research Letters* 22.10 (1995), págs. 1161-1164 (vid. pág. 4).
- [18] Iver H Cairns. “Role of collective effects in dominance of scattering off thermal ions over Langmuir wave decay: Analysis, simulations, and space applications”. En: *Physics of Plasmas* 7.12 (2000), págs. 4901-4915 (vid. págs. 4, 5).
- [19] B Layden, Iver H Cairns y PA Robinson. “Exact evaluation of the rates of electrostatic decay and scattering off thermal ions for an unmagnetized Maxwellian plasma”. En: *Physics of Plasmas* 20.8 (2013), pág. 082310 (vid. pág. 4).
- [20] Hui Xu y col. “Effects of ion motion on linear Landau damping”. En: *Physics of Plasmas* 24.2 (2017), pág. 022101 (vid. págs. 6, 7, 12, 13, 24, 51, 53, 60, 66, 74, 107).
- [21] Hans Schamel. “Electron holes, ion holes and double layers: Electrostatic phase space structures in theory and experiment”. En: *Physics Reports* 140.3 (1986), págs. 161-191 (vid. págs. 7, 31).
- [22] Bengt Eliasson y Padma K Shukla. “Formation and dynamics of coherent structures involving phase-space vortices in plasmas”. En: *Physics Reports* 422.6 (2006), págs. 225-290 (vid. págs. 7, 8).
- [23] JP McFadden y col. “FAST observations of ion solitary waves”. En: *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 108.A4 (2003) (vid. pág. 7).

- [24] Maxime Lesur, PH Diamond y Yusuke Kosuga. “Nonlinear current-driven ion-acoustic instability driven by phase-space structures”. En: *Plasma Physics and Controlled Fusion* 56.7 (2014), pág. 075005 (vid. págs. 7, 10).
- [25] B Eliasson y PK Shukla. “The dynamics of electron and ion holes in a collisionless plasma”. En: (2005) (vid. pág. 8).
- [26] P Guio y col. “Phase space vortices in collisionless plasmas”. En: *Nonlinear Processes in Geophysics* 10.1/2 (2003), págs. 75-86 (vid. pág. 8).
- [27] TE Sheridan, S Yi y KE Lonngren. “On the origin of the ion acoustic soliton”. En: *Physics of Plasmas* 5.9 (1998), págs. 3165-3170 (vid. pág. 8).
- [28] N.A. Krall y A.W. Trivelpiece. *Principles of plasma physics*. International series in pure and applied physics v. 0-911351. McGraw-Hill, 1973. ISBN: 9780070353466. URL: <https://books.google.cl/books?id=b0BRAAAAMAAJ> (vid. págs. 8, 20, 21, 34, 105, 110).
- [29] Haruichi Washimi y Tosiya Taniuti. “Propagation of ion-acoustic solitary waves of small amplitude”. En: *Physical Review Letters* 17.19 (1966), pág. 996 (vid. págs. 8, 33, 105).
- [30] MQ Tran. “Ion acoustic solitons in a plasma: a review of their experimental properties and related theories”. En: *Physica Scripta* 20.3-4 (1979), pág. 317 (vid. pág. 8).
- [31] TE Sheridan. “Evolution of unstable ion acoustic solitons”. En: *IEEE Transactions on Plasma Science* 27.1 (1999), págs. 140-141 (vid. pág. 8).

- [32] Sarveshwar Sharma, Sudip Sengupta y Abhijit Sen. “Particle-in-cell simulation of large amplitude ion-acoustic solitons”. En: *Physics of Plasmas* 22.2 (2015), pág. 022115 (vid. págs. 8, 105, 110).
- [33] Bharati Kakad, Amar Kakad y Yoshiharu Omura. “Nonlinear evolution of ion acoustic solitary waves in space plasmas: Fluid and particle-in-cell simulations”. En: *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 119.7 (2014), págs. 5589-5599 (vid. págs. 8, 105, 110).
- [34] SM Hosseini Jenab y F Spanier. “Study of trapping effect on ion-acoustic solitary waves based on a fully kinetic simulation approach”. En: *Physics of Plasmas* 23.10 (2016), pág. 102306 (vid. págs. 8, 34).
- [35] SM Hosseini Jenab y F Spanier. “Simulation study of overtaking of ion-acoustic solitons in the fully kinetic regime”. En: *Physics of Plasmas* 24.3 (2017), pág. 032305 (vid. págs. 8, 34).
- [36] Chuteng Zhou y Ian H Hutchinson. “Dynamics of a slow electron hole coupled to an ion-acoustic soliton”. En: *Physics of Plasmas* 25.8 (2018), pág. 082303 (vid. págs. 8, 9, 34, 35).
- [37] Koichi Saeki y J Juul Rasmussen. “Stationary solution of coupled electron hole and ion soliton in a collisionless plasma”. En: *Journal of the Physical Society of Japan* 60.3 (1991), págs. 735-738 (vid. págs. 8, 9, 34).
- [38] Koichi Saeki e Hitoshi Genma. “Electron-hole disruption due to ion motion and formation of coupled electron hole and ion-acoustic soliton in a plasma”. En: *Physical Review Letters* 80.6 (1998), pág. 1224 (vid. págs. 8, 9, 34, 103, 106, 111).

- [39] Hans Schamel, Debraj Mandal y Devendra Sharma. “On the nonlinear trapping nature of undamped, coherent structures in collisionless plasmas and its impact on stability”. En: *Physics of Plasmas* 24.3 (2017), pág. 032109 (vid. págs. 9, 29, 104, 109).
- [40] Ian Horner Hutchinson y Chuteng Zhou. “Plasma electron hole kinematics. I. Momentum conservation”. En: *Physics of Plasmas* 23.8 (2016), pág. 082101 (vid. págs. 9, 10, 32, 33, 98).
- [41] C Zhou e IH Hutchinson. “Plasma electron hole kinematics. II. Hole tracking Particle-In-Cell simulation”. En: *Physics of Plasmas* 23.8 (2016), pág. 082102 (vid. págs. 9, 31, 32, 97, 104, 109).
- [42] Debraj Mandal, Devendra Sharma y Hans Schamel. “Electron hole instability as a primordial step towards sustained intermittent turbulence in linearly sub-critical plasmas”. En: *New Journal of Physics* 20.7 (2018), pág. 073004 (vid. págs. 9, 10, 104, 109).
- [43] Bengt Eliasson y PK Shukla. “Dynamics of electron holes in an electron–oxygen-ion plasma”. En: *Physical Review Letters* 93.4 (2004), pág. 045001 (vid. pág. 10).
- [44] Constantin F Rupp, Rodrigo A Lopez y Jaime A Araneda. “Critical density for Landau damping in a two-electron-component plasma”. En: *Physics of Plasmas* 22.10 (2015), pág. 102306 (vid. págs. 12, 28).
- [45] Gérard Belmont y col. *Collisionless plasmas in astrophysics*. John Wiley & Sons, 2013 (vid. págs. 20, 21).

- [46] A. A. Vlasov. “The vibrational properties of an electron gas”. En: *Soviet Physics Uspekhi* (1968). ISSN: 0038-5670. DOI: 10.1070/PU1968v010n06ABEH003709 (vid. pág. 20).
- [47] D Gary Swanson. *Plasma Waves*. 2nd Edition Institute of Physics Publishing. Series in Plasma Physics Plasma Waves, 2003. ISBN: 0 7503 0927 X (vid. págs. 21, 22, 34).
- [48] R. C. Davidson. *Kinetic Waves and Instabilities in a Uniform Plasma*. MIT Plasma Science y Fusion Center, 1981 (vid. págs. 21, 22).
- [49] B.D. Fried y S.D. Conte. *The Plasma Dispersion Function: The Hilbert Transform of the Gaussian*. Academic Press, 1961. ISBN: 9781483261737. URL: <https://www.elsevier.com/books/the-plasma-dispersion-function/fried/978-1-4832-2929-4> (vid. págs. 24, 116).
- [50] Francesco Valentini, Thomas M O’Neil y Daniel HE Dubin. “Excitation of non-linear electron acoustic waves”. En: *Physics of Plasmas* 13.5 (2006), pág. 052303 (vid. pág. 25).
- [51] David Campbell Montgomery. *Theory of the unmagnetized plasma*. CRC Press, 1971 (vid. pág. 26).
- [52] Burton D Fried y Roy W Gould. “Longitudinal ion oscillations in a hot plasma”. En: *The Physics of Fluids* 4.1 (1961), págs. 139-147 (vid. pág. 26).
- [53] Hans Schamel. “Analytic BGK modes and their modulational instability”. En: *Journal of Plasma Physics* 13.1 (1975), págs. 139-145 (vid. págs. 29, 30).
- [54] Hans Schamel. “Stationary solitary, snoidal and sinusoidal ion acoustic waves”. En: *Plasma Physics* 14.10 (1972), pág. 905 (vid. pág. 29).

- [55] Chuteng Zhou y Ian H Hutchinson. “Plasma electron hole oscillatory velocity instability”. En: *Journal of Plasma Physics* 83.5 (2017) (vid. pág. 32).
- [56] TJ Stuchi. “Symplectic integrators revisited”. En: *Brazilian Journal of Physics* 32.4 (2002), págs. 958-979 (vid. pág. 41).
- [57] Herbert Goldstein, Charles Poole y John Safko. *Classical mechanics*. 2002 (vid. pág. 41).
- [58] Haruo Yoshida. “Construction of higher order symplectic integrators”. En: *Physics letters A* 150.5-7 (1990), págs. 262-268 (vid. pág. 41).
- [59] Vladimir Igorevich Arnol’d. *Mathematical methods of classical mechanics*. Vol. 60. Springer Science & Business Media, 2013 (vid. pág. 41).
- [60] Jesus M Sanz-Serna. “Symplectic integrators for Hamiltonian problems: an overview”. En: *Acta numerica* 1 (1992), págs. 243-286 (vid. pág. 41).
- [61] Haruo Yoshida. “Recent progress in the theory and application of symplectic integrators”. En: *Qualitative and Quantitative Behaviour of Planetary Systems*. Springer, 1993, págs. 27-43 (vid. pág. 41).
- [62] IP Omelyan, IM Mryglod y R Folk. “Symplectic analytically integrable decomposition algorithms: classification, derivation, and application to molecular dynamics, quantum and celestial mechanics simulations”. En: *Computer Physics Communications* 151.3 (2003), págs. 272-314 (vid. págs. 42-44).
- [63] Brett Gladman, Martin Duncan y Jeff Candy. “Symplectic integrators for long-term integrations in celestial mechanics”. En: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 52.3 (1991), págs. 221-240 (vid. pág. 42).

- [64] Masuo Suzuki. “Fractal decomposition of exponential operators with applications to many-body theories and Monte Carlo simulations”. En: *Physics Letters A* 146.6 (1990), págs. 319-323 (vid. pág. 43).
- [65] Siu A. Chin. “Symplectic integrators from composite operator factorizations”. En: *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics* 226.6 (1997), págs. 344-348. ISSN: 03759601. DOI: 10.1016/S0375-9601(97)00003-0 (vid. pág. 43).
- [66] Gilbert Strang. “On the construction and comparison of difference schemes”. En: *SIAM journal on numerical analysis* 5.3 (1968), págs. 506-517 (vid. pág. 44).
- [67] Chio-Zong Cheng y Georg Knorr. “The integration of the Vlasov equation in configuration space”. En: *Journal of Computational Physics* 22.3 (1976), págs. 330-351 (vid. pág. 46).
- [68] Robert I McLachlan y Pau Atela. “The accuracy of symplectic integrators”. En: *Nonlinearity* 5.2 (1992), pág. 541 (vid. pág. 47).
- [69] *Julia Language SpecialFunctions, Functions*. URL: https://juliamath.github.io/SpecialFunctions.jl/dev/functions_list/ (vid. pág. 48).
- [70] Kendall E Atkinson. *An introduction to numerical analysis*. John wiley & sons, 2008 (vid. pág. 48).
- [71] SM Hosseini Jenab, F Spanier y Gert Brodin. “A study of the stability properties of Sagdeev solutions in the ion-acoustic regime using kinetic simulations”. En: *Physics of Plasmas* 25.7 (2018), pág. 072304 (vid. págs. 103, 106, 111).
- [72] Hans L Pécseli. “Solitons and weakly nonlinear waves in plasmas”. En: *IEEE Transactions on Plasma Science* 13.2 (1985), págs. 53-86 (vid. pág. 105).

- [73] S. Peter Gary. *Theory of Space Plasma Microinstabilities*. Cambridge Atmospheric and Space Science Series. Cambridge University Press, 1993. DOI: 10.1017/CB09780511551512 (vid. pág. 116).

