



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
CAMPUS LOS ÁNGELES
ESCUELA DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS



IMPACTO DE LA METODOLOGÍA DE ESTUDIO DE CASOS EN
LA FORMACIÓN DE PROFESORES EN LA HABILIDAD DE
MODELAMIENTO MATEMÁTICO

Seminario de título para optar al grado académico de Licenciado en Educación y al
título profesional de Profesor de Matemática y Educación Tecnológica

Seminarista:

Srta. Katherine Jordana Belén Sandoval Rifo
Sr. David Isaac Cea Padilla

Profesor Guía:

Dr. Cristian Pérez Toledo

Comisión Evaluadora:

Mg. Ricardo Alzugaray Henríquez
Mg. Sixto Martínez Hernández

Marzo 2020
Los Ángeles, Chile

©2020 Katherine Jordana Belén Sandoval Rifo & David Isaac Cea Padilla



Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

©2020 Katherine Jordana Belén Sandoval Rifo & David Isaac Cea Padilla



AGRADECIMIENTOS

En primera instancia, agradecemos a Dios por guiarnos conforme a su voluntad, que sabemos que es lo mejor para nosotros, y por darnos el aliento necesario para llevar a cabo toda nuestra carrera universitaria.

Por otro lado, también agradecemos a nuestra querida Universidad de Concepción, campus Los Ángeles, por entregarnos por medio de nuestros profesores los conocimientos necesarios para desarrollarnos como excelentes profesionales.

Agradecemos afectuosamente al profesor Cristian Pérez Toledo por su entrega día a día en esta investigación, dirigiendo, aconsejando, aportando y corrigiendo cada una de las etapas llevadas a cabo; dedicando tiempo fuera de su horario de trabajo, incluso disponiendo sus propios fines de semanas para la corrección de este trabajo. Por lo cual, estamos profundamente agradecidos por su entrega en esta etapa final. Felicitándolo, además, por su nuevo logro profesional de ser jefe de carrera, deseándole un buen desarrollo de su cargo.



Además, dar las gracias a la señora Ernestina Flores, secretaria del departamento de ciencias básicas, por sus consejos, apoyo y ayuda en los procesos administrativos en nuestro paso por esta institución.

Por último, nuestro principal agradecimiento es a nuestras familias, por sobre todo a nuestros padres, quienes nos apoyaron en cada una de las etapas de nuestra carrera universitaria, la cual sin ellos hubiéramos sido incapaces de concluir.



*Bendice, alma mía, a Jehová,
Y bendiga todo mi ser su santo nombre.*

Salmos (103:1)

Katherine Sandoval Rifo

David Cea Padilla

Marzo, 2020



ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS	3
RESUMEN	10
ABSTRACT	12
INTRODUCCIÓN	13
1 CAPÍTULO 1: EL PROBLEMA	16
1.1 Definición del tema	16
1.2 Planteamiento del problema	20
1.3 Justificación de la investigación	22
1.4 Factibilidad de la investigación	24
1.5 Preguntas de investigación	25
1.6 Objetivo de la investigación	27
1.6.1 Objetivo General.....	27
1.6.2 Objetivos Específicos.....	27
1.6.3 Supuestos.....	27
2 CAPÍTULO 2: MARCO TEORICO	30
2.1 Metodología de estudio de casos	30
2.1.1 ¿Qué es la metodología de estudio de casos?.....	30
2.1.2 Antecedentes.....	32
2.1.3 Propósito de la metodología de Estudio de Casos.....	36
2.1.4 Ventajas de la metodología de Estudio de Casos.....	37



2.1.5	Desventajas de la metodología de estudio de casos	38
2.2	Objetivo de la educación matemática.....	39
2.3	Modelación matemática en el aula	45
2.3.1	¿Qué es la modelación matemática?	46
2.3.2	La Modelación matemática focalizada en la enseñanza.....	47
2.3.3	Rol del docente.....	49
2.3.4	Rol del estudiante	53
2.3.5	Ventajas de la implementación de la modelación matemática	54
2.3.6	Ciclos de modelación matemática.....	57
2.3.7	Dificultades de la implementación de la modelación matemática	63
2.3.8	El ciclo de modelización para guiar a los estudiantes.....	64
2.3.9	La elección de una tarea de modelización matemática	66
2.4	La modelación matemática en la formación inicial docente	67
3	CAPITULO 3: MARCO METODOLÓGICO	71
3.1	Enfoque de la investigación	71
3.2	Diseño	72
3.3	Población y muestra	72
3.4	Instrumento de recolección de datos	73
3.4.1	Descripción del taller.	73
4	CAPITULO 4: ANÁLISIS DE DATOS E INFORMACIÓN.....	80
4.1	Análisis en relación al ciclo de modelación matemática.....	80
4.2	Análisis en relación a los contenidos.....	86



4.2.1	Contenidos conceptuales	86
4.2.2	Contenidos procedimentales	89
4.2.3	Contenidos actitudinales	91
4.3	Análisis de la metodología de enseñanza de Estudio de Casos	94
4.4	Análisis de las actividades de modelado matemático.....	96
5	CAPITULO 5: RESULTADOS, DISCUSIONES Y CONCLUSIONES	99
5.1	Resultados.....	99
5.1.1	Percepciones de las dificultades en la identificación de subcompetencias del ciclo de modelación en el caso “Mañanas Matemáticas”	99
5.1.2	Percepciones de las dificultades en la identificación de contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales en el caso “Mañanas Matemáticas”.....	100
5.1.3	Percepciones y opiniones de la articulación matemática escolar con la modelación matemática.	100
5.1.4	Percepciones y opiniones del aporte de herramientas y/o estrategias para la aplicación de tareas de modelado matemático.....	101
5.1.5	Percepciones y opiniones del aporte del caso “Mañanas Matemáticas” para distinguir las habilidades de modelado matemático y de resolución de problemas.	102
5.1.6	Percepciones y opiniones del aporte del caso “Mañanas matemáticas” para motivar y cautivar intelectualmente a los estudiantes.	102
5.1.7	Percepciones y opiniones de la modelación matemática en la función de motivar y cautivar intelectualmente a los estudiantes.	103
5.1.8	Percepciones y opiniones de la metodología de enseñanza de Estudio de Casos en la creación de actividades de modelado matemático	103
5.1.9	Percepciones y opiniones de la metodología de enseñanza de Estudio de Casos en la aplicación de actividades de modelado matemático	104
5.2	Discusión de resultados.....	105



5.3	Conclusión	109
5.4	Sugerencias.....	110
6	<i>ANEXOS</i>.....	<i>113</i>
6.1	Caso “Mañanas Matemáticas”	113
6.2	Bitácora del Taller.....	128
6.3	Transcripción del Taller.....	133
7	<i>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</i>.....	<i>155</i>





ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Figura 1: Ciclo de modelación según Blomhøj	59
Figura 2: Ciclo de modelación según Blum y Niss	59
Figura 3: Ciclo de modelación según OCDE9	60
Figura 4: Ciclo de modelación según Kaiser.....	61
Figura 5: Ciclo de modelación para propósitos de diagnóstico/evaluación	64





RESUMEN

En este estudio se presenta información respecto al impacto de la implementación de la metodología de Estudio de Casos, en la forma de enseñanza, con profesores en formación y mediante la creación de un caso titulado “Mañanas Matemáticas”.

La investigación es del tipo cualitativa, y se enmarcó en la metodología de Estudio de Casos con la realización de un taller de análisis del caso “Mañanas Matemáticas”, que se llevó a cabo con los profesores en formación de una universidad del sur de Chile que han cursado una asignatura de modelación matemática.

Se consideraron en el análisis del taller, los procesos y subcompetencias presentes en el ciclo de modelación para propósitos de diagnóstico/evaluación, además de los contenidos conceptuales, actitudinales y procedimentales presentes en el caso.

Del análisis de la información se puede concluir que el impacto de esta metodología permite a los futuros profesores analizar distintas dificultades que



se pudieran presentar en la sala de clases al momento de aplicar actividades de modelado matemático.

PALABRAS CLAVES

Metodología de Estudio de Casos, Profesores en formación, Modelación matemática.





ABSTRACT

This study presents information regarding the impact of the implementation of the Case Study methodology, in the form of teaching, with teachers in training and through the creation of a case entitled "Mathematical Mornings".

The research is of the qualitative type, and was framed in the Case Study methodology with the realization of an analysis workshop on the "Mathematical Mornings" case, which was carried out with the professors in formation of a university in southern Chile that They have taken a subject of mathematical modeling.

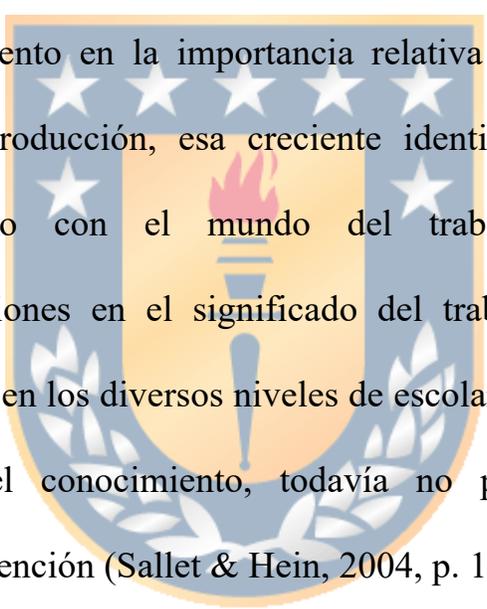
In the workshop analysis, the processes and subcompetencies present in the modeling cycle for diagnostic / evaluation purposes were considered, in addition to the conceptual, attitudinal and procedural contents present in the case.

From the analysis of the information it can be concluded that the impact of this methodology allows future teachers to analyze different difficulties that will arise in the classroom when applying mathematical modeling activities.



INTRODUCCIÓN

Debido a las complejidades que se encuentran en la sociedad actual dependemos de los conocimientos y de la creatividad, lo que incide directamente a la labor del profesor. Cabe destacar, que el trabajo del profesor es variado y flexible, sin embargo, lo que permanece es el conocimiento, así lo menciona Machado (1997):

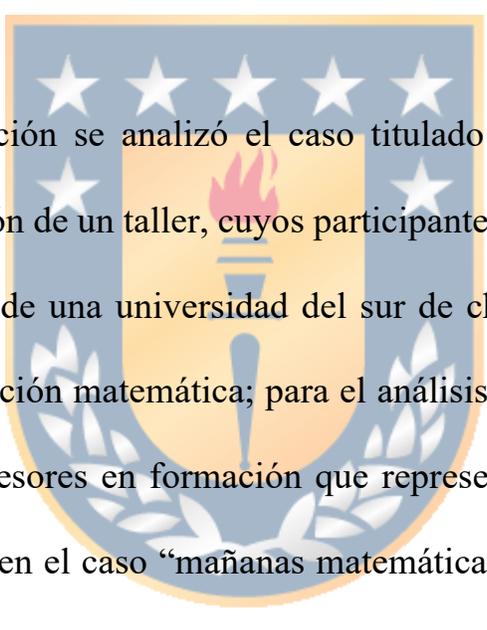


Ese crecimiento en la importancia relativa del conocimiento como factor de producción, esa creciente identificación del mundo del conocimiento con el mundo del trabajo han conducido a transformaciones en el significado del trabajo para las cuales los educadores, en los diversos niveles de escolarización y en los diversos espacios del conocimiento, todavía no parecen haber dedicado suficiente atención (Sallet & Hein, 2004, p. 106).

Además de dedicar atención a los conocimientos necesarios que debe poseer un profesor, se debe dar interés a los requerimientos de la sociedad los cuales son cambiantes en el tiempo, por esa razón es necesario que se vayan adquiriendo nuevos conocimientos y habilidades en la aplicación y en la socialización, lo cual da pie para la modelización matemática como método de enseñanza (Sallet &



Hein, 2004). Por lo anterior, esta investigación tiene el objetivo de aportar al proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática con la implementación de la metodología de estudio de casos en los profesores en formación en la habilidad de modelado matemático mediante la creación de un caso titulado “Mañanas Matemáticas”, en el cual se expone una situación real con los contenidos matemáticos a tratar, como son las funciones lineal y afín.



En esta investigación se analizó el caso titulado “mañanas matemáticas” mediante la realización de un taller, cuyos participantes fueron estudiantes entre tercero y cuarto año de una universidad del sur de Chile que han cursado una asignatura de modelación matemática; para el análisis del taller, primeramente, se solicitó a los profesores en formación que representaran a cada uno de los personajes presentes en el caso “mañanas matemáticas”, por lo que tomaron el rol de estudiantes en el caso, por otro lado, los investigadores tomaron dos roles simultáneamente, el de profesor e interlocutor, siendo los dos quienes realizaban las preguntas que se hacían después de cada clase.

A continuación, se presentan aclaraciones en cuanto al vocabulario de esta investigación: primero, Reyes llama a estudiantes a los profesores en formación.



Segundo, durante el desarrollo de esta investigación se llamará a estudiantes a todos aquellos que se encuentren formándose académicamente en liceos o colegios. Tercero, por otro lado, durante el análisis del caso los profesores en formación serán llamados estudiantes, pues cumplen el papel de estos en el caso.

Cabe mencionar que la metodología de estudio de casos tiene como fin que los profesores en formación puedan prever lo que sucederá en una sala de clases, lo cual permite la discusión y el análisis de las posibles situaciones o errores a cometer por los estudiantes en la sala de clases.

Como primer paso daremos a conocer lo que es la metodología de estudio de casos, desde su definición hasta sus ventajas y desventajas, y la modelación matemática, siendo estos los dos grandes pilares de esta investigación.

Se espera que esta investigación sea un aporte en la formación de los futuros profesores, entregándoles ideas de cómo afrontar y presentar actividades de modelado matemático durante su práctica docente.



1 CAPÍTULO 1: EL PROBLEMA

1.1 Definición del tema

En la presente investigación se implementó la metodología de estudio de casos con profesores en formación, en la forma de enseñanza, mediante la creación de un caso titulado “Mañanas Matemáticas”. Esta metodología consiste en “presentar un problema real – o al menos verosímil – de alguna disciplina en particular, para que los estudiantes discutan acerca del tema, reconozcan dificultades, propongan soluciones y, finalmente, entreguen un informe con el análisis de la situación y sus posibles soluciones” (Reyes, 2011, p.25). En exponer tal caso ficticio se le presenta al profesor en formación, un ejemplo de lo que va a enfrentar al momento de realizar una actividad, específicamente, de modelado matemático, con la finalidad de mejorar la práctica docente.

En este último tiempo, la Didáctica de la Matemática se ha enfocado en diseñar actividades basadas en la modelización, pues como lo define “Aravena (2002), es una vía prometedora tanto para enfrentar las dificultades y deficiencias como para elevar la calidad de los



aprendizajes matemáticos.” (Aravena y Caamaño, 2007, p. 7). Entre los beneficios que otorga el modelado matemático, Aravena y Caamaño (2007), plantean que “entre las que concitan nuestro interés se destaca: organizar e interpretar información, la matematización de situaciones.” (p. 9). Además, Alsina (1998) enfatiza otros aspectos tales como la “creatividad, el interés por el descubrimiento, la capacidad de analizar e interpretar ejemplos actuales a través de la matemática.” (Aravena y Caamaño, 2007, p. 9). Y desde la XIV *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), citado por Sierra, Blanco, Garcia y Gomez (2011, p. 2), se menciona que:

La modelización se ha establecido como una herramienta útil para acercar las matemáticas al ciudadano. De igual manera, a pesar de ser una herramienta de la ciencia y la tecnología, también se ha convertido en una herramienta útil para afianzar la dimensión cultural y antropológica de esta disciplina

Inclusive, al ser la modelación una herramienta didáctica, ofrece la ayuda necesaria para abarcar la diversidad de estilos de aprendizajes en el aula.



En consecuencia, la presente investigación tiene como finalidad determinar el impacto de la metodología de estudio de casos en el desarrollo de la habilidad de modelación matemática en profesores en formación mediante el análisis del caso “Mañanas Matemáticas” con el fin de “contribuir a reducir la brecha que existe entre el conocimiento matemático y la forma de enseñar matemáticas” (Reyes, 2011, p. 26), siendo ésta una forma de simular posibles obstáculos a los que se enfrentarán los futuros profesores en el ejercicio de la docencia.

La metodología de estudio de casos tiene como objetivo exponer a los futuros profesores a situaciones posibles y desafiantes, en donde deben acudir a los recursos teóricos-prácticos adquiridos durante su formación para solucionar un problema real, con el propósito de que el profesor realice un análisis *a priori* de la situaciones que se puedan dar en la sala de clases al momento de entregar cierta actividad a los estudiantes, en donde se plantean posibles soluciones a las inquietudes y errores que puedan presentar en el transcurso de la actividad en el aula.



Por otro lado, las características esenciales para lograr ser un excelente profesor son: una formación seria de su disciplina, experiencia y buen juicio. El primer atributo es obvio, el segundo solo se gana con el tiempo, mientras que el buen juicio es crucial para responder apropiadamente preguntas fundamentales, tales como: ¿Por qué es importante este concepto matemático? ¿Qué material es fundamental para la clase y cuál no? ¿Cómo balanceamos la comprensión conceptual profunda con los detalles para solucionar problemas técnicos? ¿Cómo respondemos en clases si los estudiantes están confundidos y, por lo tanto, son poco permeables? ¿Cómo podemos motivar a nuestros estudiantes y cautivarlos intelectualmente? ¿Qué tareas potencian y ponen en evidencia sus avances? ¿Cómo respondemos a la gran diversidad de niveles de preparación? Las respuestas a todas estas preguntas hacen una diferencia entre docentes, específicamente en la calidad de la docencia.

En consecuencia, es necesario que, durante su formación académica, los profesores en formación se enfrenten al análisis de situaciones ficticias con la finalidad de tener experiencia y se animen a crear y



aplicar actividades de modelado matemático en sus clases, cumpliendo así con la habilidad de modelar presentes en las bases curriculares. De este modo, el motor de esta investigación es mejorar la práctica, dándoles nuevas herramientas a los docentes de la especialidad, y como consecuencia calidad educativa.

La presente investigación tendrá un enfoque cualitativo, y se realizará con estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemática de una universidad del sur de Chile, que hayan cursado una asignatura de modelación matemática.

1.2 Planteamiento del problema

Aravena (2001) y Gómez (2002), citado por Aravena y Caamaño (2007, p. 8), mencionan que uno de los problemas más complejos que enfrenta la educación secundaria chilena en el ámbito de la enseñanza de la matemática tiene relación con la forma de articular los temas con las otras áreas del conocimiento e incluso con la propia matemática. Esto es debido a que, la mayoría de los temas están desconectados del mundo real y de las ciencias, lo que tiene como consecuencia que los estudiantes



no conciben la utilidad que tienen las matemáticas en su formación. Esto claramente es inadecuado para la formación de los estudiantes en un mundo cada vez más matematizado. Es por ello que “Aravena (2002) menciona que en una sociedad en la que los ciudadanos van a ser enfrentados a resolver problemas, hacer estimaciones, tomar decisiones, el modelaje favorece la comprensión de los conceptos y métodos matemáticos y permite una visión global de la matemática” (Aravena y Caamaño, 2007, p.9).

Dadas las nuevas complejidades presentes en la sociedad, se requieren profesores actualizados en este paradigma, es decir, capacitados para enfrentar a los estudiantes a dichos desafíos y realizar una adecuada articulación escolar.

De acuerdo a lo anterior, los futuros docentes tienen que preparar a sus estudiantes, confrontarlos a situaciones de la vida real donde la habilidad de modelar, entre otras, tome un papel importante. Sin embargo, no existe alguna forma de medir el nivel de desarrollo de la habilidad de modelado matemático en la formación de los futuros



profesores, ni la articulación con la matemática escolar. Lo cual también es aludido por Zaldivar, Quiroz y Medina (2017), quienes mencionan que los docentes no tienen la seguridad suficiente para aplicar estrategias didácticas en la sala de clases dado que los programas de formación de profesores no contienen los conocimiento y experiencias necesarias.

1.3 Justificación de la investigación.

La utilización del modelado matemático en el aula, está en la dirección de lo que establecen las bases curriculares cuando se menciona que: “Comprender las matemáticas y ser capaz de aplicar sus conceptos y procedimientos a la resolución de problemas reales es fundamental para los ciudadanos y las ciudadanas en el mundo moderno” (Ministerio de Educación, 2015).

En consecuencia, todos los programas de estudio, en la asignatura de matemática, se han enfocado en la formación y la alfabetización matemática que permitirá comprender el rol que juega la matemática en el desarrollo de todo lo que nos rodea. Por ello, es necesario que todos



los estudiantes adquieran ciertas habilidades, como son: resolver problemas, argumentar y comunicar, representar y modelar.

A raíz de las nuevas exigencias, en relación a habilidades que necesitan los estudiantes para desenvolverse en la sociedad actual, se necesitan profesores actualizados. Es por ello que la carrera de Pedagogía en Matemática en una universidad perteneciente al CRUCH, ubicada al sur de Chile, realizó una adecuación curricular en el año 2016, la cual apunta a la formación de futuros profesores a través del modelo educativo basado en el desarrollo de competencias “el cual es presentado como un cambio de pensamiento en el proceso de enseñanza y aprendizaje” (Asún, Zúñiga y Ayala, 2013).

Para dar sustento al cambio de paradigma, es decir, la inculcación del desarrollo de competencias, esta investigación utilizará la metodología de estudio de casos, mediante la creación del caso: “Mañanas Matemáticas”, ya que mediante el análisis del caso se generará debates, que darán la posibilidad de tener diversas perspectivas y obtener conclusiones que, además de nutrir el recurso en sí, estarán colaborando



al desarrollo de competencias tanto pedagógicas como matemáticas en los profesores en formación. Con el objetivo de aportar información y experiencia al momento de aplicar o crear tales actividades, para que el futuro profesor tenga las herramientas para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje en la habilidad de modelado matemático. Así lo afirma Reyes (2011):

Uno de los elementos más poderosos con respecto a la enseñanza basada en el estudio de casos, es que trata de representaciones verosímiles de eventos que ocurren en las aulas, que nos permitan integrar a la educación superior un evento real que los estudiantes pueden analizar, discutir y observar desde diversas y múltiples perspectivas, para obtener una comprensión más profunda acerca de lo que realmente ocurre. (p. 34)

1.4 Factibilidad de la investigación.

La presente investigación ha sido factible, dado que se contó con los recursos necesarios para poder llevarla a cabo, es decir, se dispuso de la autorización, primeramente, del Jefe de carrera de la carrera de pedagogía en matemática de una universidad del sur de Chile y del



profesor encargado para realizar el taller con los alumnos que cursaron la asignatura de Modelación Matemática. Además, se contó con el tiempo necesario por parte de los investigadores para llevar a cabo, tanto la recopilación de la información, como el análisis de lo recolectado.

1.5 Preguntas de investigación

1. ¿Son los profesores en formación capaces de reconocer las subcompetencias presentes en el ciclo de modelación utilizado en la creación del caso “Mañanas Matemáticas”?
2. ¿Son los profesores en formación capaces de identificar la existencia de conocimientos conceptuales en el caso “Mañanas Matemáticas”?
3. ¿Son los profesores en formación capaces de identificar la existencia de conocimientos procedimentales en el caso “Mañanas Matemáticas”?
4. ¿Son los profesores en formación capaces de identificar la existencia de conocimientos actitudinales en el caso “Mañanas Matemáticas”?



5. ¿Son los profesores en formación capaces de articular la matemática escolar con la modelación matemática?
6. ¿Pueden los profesores en formación aportar herramientas y/o estrategias para la aplicación de tareas de modelado matemático?
7. ¿Valoran los profesores en formación el aporte del caso “Mañanas Matemáticas” para distinguir las habilidades de modelado matemático y de resolución de problemas?
8. ¿Valoran los profesores en formación el aporte del caso “Mañanas Matemáticas” para motivar a los estudiantes y cautivarlos intelectualmente?
9. ¿Destacan los profesores en formación que la modelación matemática motiva y cautiva a los estudiantes intelectualmente?
10. ¿Se consideran los profesores en formación capaces de poder crear y aplicar actividades de modelación matemática?



1.6 Objetivo de la investigación

1.6.1 Objetivo General

Determinar el impacto que tiene la metodología de estudio de casos en la formación de profesores de matemática en la habilidad de modelamiento matemático.

1.6.2 Objetivos Específicos

- Aplicar la metodología de enseñanza de estudio de casos.
- Elaborar un caso referente a un problema de modelado matemático usando los conceptos de función lineal y afín.
- Analizar el caso con profesores de matemática en formación por medio un taller.

1.6.3 Supuestos

1. Los profesores en formación reconocen las subcompetencias presentes en el ciclo de modelación utilizado en la creación del caso “Mañanas Matemáticas”.



2. Los profesores en formación identifican la existencia de conocimientos conceptuales en el caso “Mañanas Matemáticas”.
3. Los profesores en formación identifican la existencia de conocimientos procedimentales en el caso “Mañanas Matemáticas”.
4. Los profesores en formación identifican la existencia de conocimientos actitudinales en el caso “Mañanas Matemáticas”.
5. Los profesores en formación articulan la matemática escolar con la modelación matemática.
6. Los profesores en formación aportan herramientas y/o estrategias para la aplicación de tareas de modelado matemático.
7. Los profesores en formación valoran el aporte del caso “Mañanas Matemáticas” para distinguir las habilidades de modelado matemático y de resolución de problemas.



8. Los profesores en formación valoran el aporte del caso “Mañanas Matemáticas” para motivar a los estudiantes y cautivarlos intelectualmente.
9. Los profesores en formación destacan que la modelación matemática motiva y cautiva a los estudiantes intelectualmente.
10. Los profesores en formación se consideran capaces de poder crear y aplicar actividades de modelación matemática.





2 CAPÍTULO 2: MARCO TEORICO

En el presente capítulo se analizarán los principales aspectos teóricos que dirigen la investigación, dando inicio con la metodología de estudio de casos, propósitos y ventajas, para luego centrar el estudio en la modelación matemática en el aula y, posteriormente, en la formación inicial docente, con el fin de sustentar teóricamente el estudio.

2.1 Metodología de estudio de casos

A continuación, se presenta una descripción de la metodología de estudio de casos, su propósito y ventajas, y de su aplicación como una herramienta de aprendizaje para los profesores en formación.

2.1.1 ¿Qué es la metodología de estudio de casos?

La metodología de estudio de casos, según Reyes (2011), consiste: “en presentar un problema real — o al menos verosímil — de alguna disciplina en particular, para que los estudiantes discutan acerca del tema, reconozcan dificultades, propongan soluciones y, finalmente entreguen un informe con el análisis de la situación y sus posibles soluciones” (p. 25).



Según Reyes (2011), la profesora Katherine Merseth, investigadora de esta metodología en la universidad de Harvard, comenta al respecto:

Un caso es un relato de tres o cinco páginas, que presenta situaciones donde se contraponen dos visiones igualmente válidas, e igualmente ponderadas en el relato. En la búsqueda de soluciones, se reconocen debilidades y fortalezas matemáticas, se comparten diferentes puntos de vista y surge la necesidad de explicar, en lenguaje simple, aspectos profundos de la matemática. (p.35)

Por otro lado, Reyes (2011) menciona que esta metodología pretende promover que el docente:

- Evite la sobre-simplificación y la sobre-regularización.
- Domine y cree múltiples representaciones.
- Reconozca lo central de las diversas situaciones.
- Sitúe la conceptualización. Los profesores expertos unen conocimiento conceptual y aplicación.



- Permita que funcione el esquema flexible.
- Realice múltiples interconexiones.
- Logre la participación activa y proporcione la dirección didáctica.

Así, la metodología de estudio de caso tiene la intención u objetivo de colocarse en un cuadro de la vida real a través de relatos, los cuales deben ser lo más cercanos a lo cotidiano, para luego comentar y analizar las situaciones presentadas, que permitan desarrollar habilidades y capacidades matemáticas. Además, permite el dialogo profundo y respetuoso entre los participantes del estudio.

2.1.2 Antecedentes

La primera aparición de esta metodología se remonta a la mayéutica empleada por Sócrates “técnica que consistía en preguntar al estudiante acerca de algo y luego debatir la respuesta dada, lo que conllevaba a que el estudiante desarrollara nuevos conceptos a partir de sus conocimientos previos” (Pascal &



Vidal, 2013, p. 20). La característica en común que comparte el método socrático y la metodología de estudio de casos es que el docente enfrenta a sus alumnos a situaciones desconocidas, para que estos deban razonar, buscar información, idear estrategias y proponer soluciones.

Posteriormente, en la década de los 40 se conoce de otros profesores que han utilizado esta metodología:

Un profesor de ciencias de la Universidad de Harvard presentó el estudio de casos como una metodología formal de enseñanza, bajo la denominación “Harvard Case Method” (método de casos de Harvard). Esta metodología fue usada desde antes en otras carreras como Leyes, Economía, Medicina y Psicología. La profesora Katherine Merseth, ha continuado en la actualidad con la investigación y uso de esta metodología en la mencionada universidad. (Pascal & Vidal, 2013)



La metodología también se aplicó en el Boston College, en donde el profesor Solomon Friedberg, en coordinación con su equipo de trabajo desarrollaron un programa de estudios de casos, diseñado para la formación de profesores auxiliares, los cuales eran estudiantes de postgrado que deben enseñar a estudiantes que cursan los primeros años de universidad. Sobre esto Reyes (2011) menciona que el profesor Solomon Friedberg comenta que:

“En EE.UU., durante muchos años, enviaban a estudiantes graduados de matemáticas, incluso a algunos que ya habían obtenido sus doctorados en matemáticas, a enseñar la materia sin ninguna reflexión respecto de lo que era necesario para ser un buen profesor. Esto es similar a tomar una persona joven, tirarla a la piscina y esperar que descubra cómo nadar antes de ahogarse, y por supuesto que esa no es la manera correcta de hacer las cosas. Por esta razón, creo que el Estudio de Casos puede contribuir a reducir la brecha que existe entre el conocimiento matemático y la forma de enseñar matemáticas”. (p. 26)



En nuestro país, a partir de marzo del 2007 se inició un proyecto FONDEF (Fondo de Fomento de Desarrollo Científico y Tecnológico), con el objetivo de dar herramientas en la formación de docentes de matemática del Centro de Modelamiento Matemático (CMM) de la Universidad de Chile, entre los años 2007 y 2009, las cuales también se incorporaron en asignaturas de las escuelas de educación en distintas universidades del país, tales como: Universidad de la Serena, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Universidad Católica del Maule, Universidad de Concepción y Universidad de Chile. Con el fin de responder a preguntas tales como ¿para qué se enseña?, ¿cómo se enseña?, variados investigadores y docentes de matemática dieron su apoyo (Pascal & Vidal, 2013).

De acuerdo con Pascal y Vidal (2013), actualmente la metodología de estudio de casos es usada en la formación de futuros profesores de matemáticas, con el objetivo de conocer las



reales dificultades e interrogantes que se producen al interior de una sala de clases al momento de dar a conocer un nuevo conocimiento.

2.1.3 Propósito de la metodología de Estudio de Casos

Respecto del objetivo central y motivación de la elección de esta metodología, Reyes (2011) menciona:

Exponer a los estudiantes a situaciones verosímiles y desafiantes, frente a las cuales deberán acudir a todos los recursos teóricos y prácticos adquiridos durante su formación para solucionar un problema real. Por otro lado, responderle a un estudiante de un colegio que percibe que el resultado que dio a un problema matemático está errado, pero no logra entender por que su modo de resolver le funciona en algunas ocasiones y en otras no. (p. 26)

Por tanto, la utilización de la metodología de estudio de casos permitirá al profesor tener una visión previa de los posibles hechos a ocurrir en la sala de clases al momento de implementar ciertas actividades de matemática, lo que permite un análisis



constante de los probables resultados de los estudiantes y las dificultades presentes. Además, someter a prueba todos los conocimientos adquiridos, o la mayoría de ellos, de modo que cuando se presenten dificultades en la realización de las actividades, el profesor sepa actuar, tomando las decisiones correctas guiadas por el objetivo de la actividad.

2.1.4 Ventajas de la metodología de Estudio de Casos

De acuerdo con Reyes (2011) la metodología de Estudio de Casos tiene la ventaja “... de que concentra un dilema profundo y de solución no trivial ni única.” Es decir, que se presenta una situación compleja como foco de atención, la cual presenta soluciones, que no son vanas ni de una sola alternativa a considerar.

Además, cabe destacar que dentro de la ventaja de la metodología de estudio de casos, según Merseth citado por Reyes (2011, p. 34), se tienen las tres “C” de la formación, las cuales son: complejidad, enfoque de construcción hacia el aprendizaje



y la comunicación. Es decir, se tienen situaciones complejas de educación, se mantiene el dialogo para que en conjunto se adquiera un nuevo entendimiento y, por último, se tiene un trabajo colaborativo.

En conclusión, la metodología de estudio de casos permite a los futuros profesores en formación preveer posibles errores que puedan cometer los estudiantes, que impidan llegar al objetivo de la actividad, promueve el trabajo colaborativo, el desarrollo de habilidades blandas, tales como el respeto, la tolerancia, entre otras. Además, de la autodisciplina y la seguridad de los conocimientos adquiridos. (Reyes, 2011)

2.1.5 Desventajas de la metodología de estudio de casos

En cuanto a las desventajas de la metodología de Estudio de Casos, Reyes (2011) menciona lo siguiente: “Tiene la desventaja de que no hace vivir el conflicto” (p. 35). Se entiende que, lamentablemente, no se tiene la interacción real con los estudiantes en la sala de clases, en donde sí se tiene la variedad



de opiniones y de motivaciones por parte de los alumnos, sino que es solo un planteamiento con supuestos diálogos, que se podrían percibir al momento de trabajar tal actividad. Tratando de abarcar la mayor cantidad posible de errores y dificultades más frecuentes o esperados por los estudiantes.

2.2 Objetivo de la educación matemática

En la búsqueda de óptimas metodologías de enseñanza, de acuerdo con las nuevas dificultades presentes en la sociedad, la elección de la metodología de estudio de casos en profesores en formación después del análisis anteriormente descrito es una de las más pertinentes en relación con la respuesta a la siguiente pregunta: ¿Cuál es el objetivo de enseñar matemáticas en las escuelas y liceos? A continuación, se entregan algunos aspectos teóricos relevantes de la educación matemática.

En la actualidad, en la mayor parte de los establecimientos educacionales se observa que los estudiantes no tienen interés por la matemática debido a su conducta rutinaria, algorítmica, o bien repetitiva.

Lo cual no va acorde con los objetivos de la educación matemática, pues



de acuerdo a “Alsina (2007) la razón principal de la enseñanza de la matemática es lograr que los alumnos se conviertan en seres capaces de aplicar las matemáticas y transferir dichos conocimientos en una variedad de contextos fuera de la escuela” (citado en Zaldívar, Quiroz, Medina, 2017. p. 90). Al respecto, Cantoral y Farfán (2003), afirman que “toda sociedad necesita que el conocimiento que se adquiere en la escuela sea funcional, es decir, que se integre y se resignifique permanentemente en la vida (fuera de la escuela) para transformarla” (Cordero y Suárez, 2005, p. 639).

Además, Niss (1996) citado por García (2005, p. 22-23) afirma que las metas de la enseñanza de las matemáticas se encuentran en dos clasificaciones: exteriores y interiores.

Con respecto a las metas exteriores, se considera que la educación matemática es accesible, presenta amplias oportunidades, potencia el trabajo colaborativo y, posteriormente, cuenta con su respectiva evaluación. A continuación, se presentan las metas exteriores presentadas por Niss (1996) en García (2005):



a. Metas exteriores:

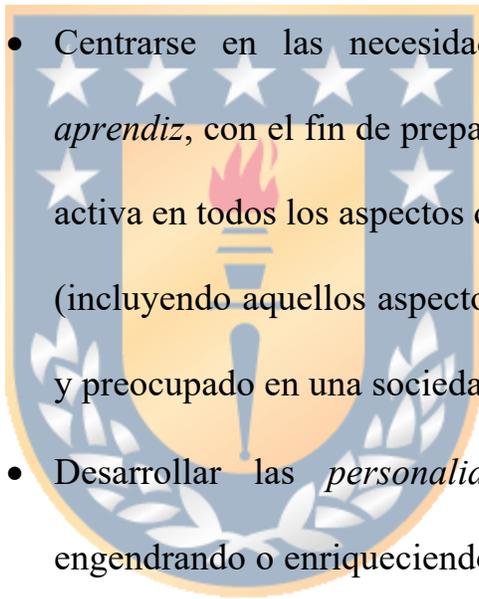
- Proporcionar una sólida educación matemática para todos, enfatizando que la Competencia matemática, de una forma u otra, es accesible a todos.
- Proporcionar oportunidades para una enseñanza y aprendizaje diferenciados.
- Enfatizar la participación y la cooperación entre aprendices cuando se enfrentan con tareas colectivas relacionadas con las matemáticas.
- Evaluar el potencial, los logros y el rendimiento matemático de los alumnos, de maneras conformes con las metas de alto nivel en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Por otro lado, en relación a las metas interiores, la educación matemática permite formar a los estudiantes como agentes de cambio, ciudadanos autocríticos con posturas propias, democráticos, promoviendo el respeto y siendo participantes activos en la sociedad. Además, permite el desarrollo de habilidades, tales como identificar,



plantear, formular y resolver problemas presentes en la vida diaria. Las cuales permiten una comprensión de la matemática en el diario vivir. A continuación, se presentan las metas interiores presentadas por Niss (1996) citado por García (2005):

b. Metas interiores:

- 
- Centrarse en las necesidades y los intereses del *aprendiz*, con el fin de prepararle para la participación activa en todos los aspectos de la *vida privada y social* (incluyendo aquellos aspectos como *ciudadano* activo y preocupado en una sociedad democrática).
 - Desarrollar las *personalidades de los alumnos*, engendrando o enriqueciendo el respeto y la confianza en ellos mismos, el pensamiento independiente y autónomo, el desarrollo de actitudes de exploración e investigación, las capacidades lingüísticas, la experiencia y el placer estético, etc.
 - Enfatizar la *actividad matemática* de los alumnos, más que la adquisición pasiva de conocimientos.



- Enfatizar los *procesos matemáticos* (tales como la exploración, investigación, emisión de conjeturas, planteamiento de problemas/formulación/resolución, representación, demostración, modelización) y no sólo los productos (conceptos, resultados, métodos, técnicas).

- Promover el *pensamiento y la creatividad matemática*, mientras que se enfatiza que las matemáticas son una materia viva resultante de la actividad humana y de los esfuerzos continuos de la humanidad durante cinco milenios.

- Permitir a los alumnos identificar, plantear, formular y resolver *problemas* matemáticos, tanto puros como aplicados, cerrados como abiertos.

- Permitir a los alumnos entender la especial *naturaleza del conocimiento Matemático*.

- Permitir a los alumnos aplicar las matemáticas a situaciones extra-matemáticas, por medio de *modelos y modelización*.



- Permitir a los alumnos *analizar y juzgar* críticamente *los usos de las matemáticas* (los suyos y los de los demás) en contextos extra-matemáticos.
- Proporcionar a los estudiantes una impresión y una comprensión del papel de las *matemáticas en la sociedad y en la cultura*.
- Familiarizar a los estudiantes la *tecnología de la información* actual en relación con las matemáticas.

En consecuencia, es necesario que los estudiantes desarrollen habilidades de contextualizar la matemática a la vida real con el fin de resolver problemas. Como lo menciona “Muller y Buskhardt (2007) la habilidad de identificar y resolver problemas en su ambiente cultural es un objetivo importante en la asignatura de matemáticas, ya que con ello se logrará preparar ciudadanos críticos y buenos profesionistas en cualquier contexto que se les presente” (Zaldivar, *et al*, 2017, p. 90), es decir, que los estudiantes sean capaces de desenvolverse en la vida real por medio de la búsqueda de nuevas soluciones, o creaciones de esta, a problemas contextualizados a su medio social.



Lo anterior, genera y despierta en los estudiantes el interés por el aprendizaje de las matemáticas. Así, para potenciar tal interés, se inicia el estudio de una estrategia: la modelación matemática (Zaldivar, *et al*, 2017, p. 90), que es el fundamento para la realización de esta investigación.

2.3 Modelación matemática en el aula

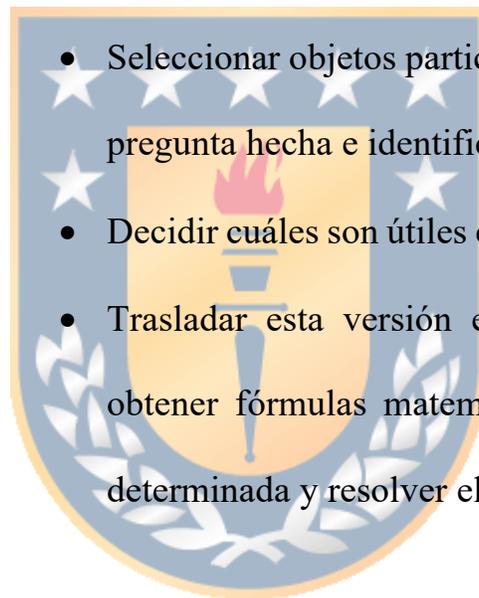
De acuerdo al análisis del objetivo de la educación matemática y las razones de la elección de la metodología de estudio de casos en la formación de profesores, esta investigación se centró en el desarrollo de la habilidad de modelado matemático, debido a la dificultad y la escasa información que se encuentra en la literatura. Es por ello que en las páginas siguientes se entregarán aspectos teóricos fundamentales en relación a la modelación matemática en el aula, detallando el rol del docente y del estudiante, ventajas y dificultades de su implementación, además de los ciclos de modelación matemática y, finalmente, la elección de una actividad de modelado matemático.



2.3.1 ¿Qué es la modelación matemática?

La definición de la modelación matemática se ha ido enriqueciendo desde que Pollak en 1969 puntualizó los pasos o etapas que la conformaban, que según Zaldivar et al. (2017), son:

- Identificar una pregunta del mundo real que se quiere entender.



- Seleccionar objetos particulares importantes para la pregunta hecha e identificar relaciones entre ellos.
- Decidir cuáles son útiles e ignorar los que no lo son.
- Trasladar esta versión en términos matemáticos, obtener fórmulas matemáticas para esta pregunta determinada y resolver el problema. (p. 90)

Además, en relación a la definición propuesta sobre la “alfabetización matemática” encontrada en la base del estudio PISA (Programme for International Students Assessment) elaborado por la OCDE (2003), citado por García (2005), se tiene:



“La alfabetización matemática es la capacidad de un individuo para identificar y comprender el papel que juegan las matemáticas en el mundo, para emitir juicios bien fundados y para usar y relacionarse con las matemáticas de manera que satisfagan las necesidades de la vida de ese individuo como una persona constructiva, preocupada y reflexiva.” (p. 48)

Por otro lado, Trigueros (2006), citado por Zaldívar et al. (2017), la define como: “un proceso cíclico donde se proporciona a los alumnos problemas abiertos y complejos en los que se ponen en juego conocimientos previos y habilidades creativas para sugerir hipótesis y plantear modelos que expliquen el comportamiento del fenómeno en términos matemáticos” (p. 90).

2.3.2 La Modelación matemática focalizada en la enseñanza

Blum y Niss (1991) citado por García (2005, p. 10), proponen 5 razones para la inclusión de la resolución de problemas aplicados en la modelización en la enseñanza de las matemáticas:



- *Formativo*: la “modelización y las aplicaciones” como medio para desarrollar *competencias generales* y *actitudes* orientadas a mantener capacidades exploratorias globales, creativas y de resolución de problemas.
- *Competencia crítica*: preparar a los estudiantes para vivir y actuar con integridad como ciudadanos críticos en una sociedad cada vez más influenciada por las matemáticas.
- *Utilidad*: preparar a los estudiantes para resolver problemas y para describir aspectos de áreas y situaciones extra-matemáticas (asumiendo que el dominio de *matemáticas puras* no es suficiente para desarrollar la capacidad de aplicarlas a situaciones extra-matemáticas).
- *Imagen de las matemáticas*: ofrecer a los alumnos una imagen rica y comprensiva de todas las facetas de las matemáticas, como ciencia, y como *campo de actividad* en la sociedad y en la cultura.



- *Promover el aprendizaje de las matemáticas:* ayudar a los estudiantes a aprender y adquirir conceptos, nociones, métodos y resultados matemáticos, proporcionando motivación y relevancia para el estudio de las matemáticas.

Es decir, de acuerdo a las cinco razones presentadas para incluir la modelación matemática en la enseñanza, podemos enfatizar que permite el desarrollo de habilidades exploratorias, creativas y de resolución de problemas, formando ciudadanos críticos que puedan resolver problemas de la vida diaria utilizando la matemática, sus aplicaciones, incluyendo la motivación en la búsqueda de nuevas soluciones.

2.3.3 Rol del docente

Los resultados de Doerr (2007), citado por Zaldivar, et al, (2017): “Muestran que las actividades del docente en modelación matemática estriban en la elección de la situación que se va a modelar de acuerdo con el contenido que desea tratar, buscando



la situación más apropiada, la proposición de situaciones donde los alumnos puedan interpretar, explicar y justificar modelos matemáticos, así como motivar a compartir su manera de pensar”. Sin embargo, el docente debe fomentar el trabajo colaborativo en la modelación matemática, pues según Alsina, (2007), citado por Zaldívar et al. (2017): “permite interacciones que favorecen un ambiente social y la promoción de discusiones para la solución de problemas más complejos.” (p. 91). Además, Santos (1997), citado por Zaldívar et al. (2017), define el aula de clase en las actividades de modelado como: “espacio creativo donde el aprendizaje se construye por todos los miembros del grupo, se promueve la participación en la discusión de problemas y la propuesta de ejemplos y contraejemplos; es decir, la construcción del conocimiento matemático.” (p.91)

Es decir, el rol del docente en las actividades de modelado matemático radica, antes de realizar una actividad de modelado, en efectuar una búsqueda de situaciones apropiadas y llamativas de acuerdo al nivel cognitivo de los estudiantes, propiciando el



trabajo colaborativo entre ellos para alcanzar la edificación de conocimientos matemáticos.

Por otro lado, Henao & Vanegas (2012), expresan el rol del docente como un principio de orientación, cuando plantean:

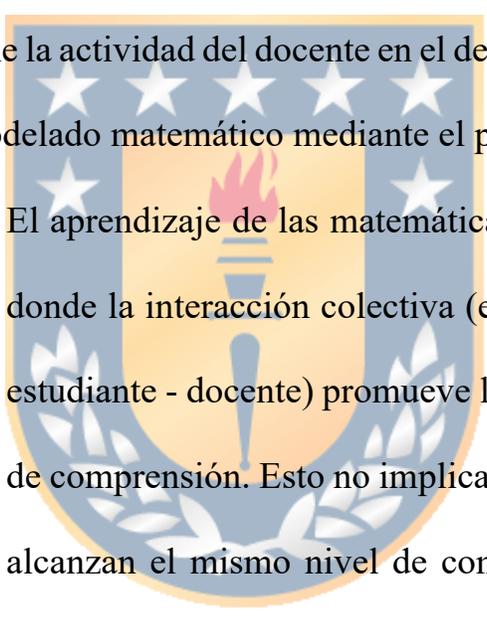
Los docentes desempeñan un papel crucial en la forma como los estudiantes adquieren conocimientos, y es indispensable que estos promuevan espacios a través de los cuales se puedan construir los saberes matemáticos. De ninguna forma el docente debe olvidar que es un mediador entre las producciones informales de sus alumnos y las herramientas formales de la matemática, pues podría caer en el error de mostrar a los estudiantes lo que deben aprender, contradiciendo el principio de actividad. (p. 268)

En otras palabras, el rol del docente en el transcurso de la actividad es de guía y monitor para que cada uno de los estudiantes pueda alcanzar el objetivo de la actividad, y en ningún momento él da respuesta a las interrogantes que se



presentan, sino más bien, tiene a su disposición sugerencias para que el alumno, por sí mismo, se de cuenta de su error, fundamentando sus decisiones. Cabe destacar, que el papel del estudiante es fundamental para el desarrollo de la actividad.

Incluso, Goffree (2000), citado por Henao & Vanegas (2012), expone la actividad del docente en el desarrollo de las actividades de modelado matemático mediante el principio de interacción:



El aprendizaje de las matemáticas es una actividad social donde la interacción colectiva (estudiante - estudiante/s y estudiante - docente) promueve la elevación en los niveles de comprensión. Esto no implica que todos los estudiantes alcanzan el mismo nivel de comprensión, sino que cada estudiante sigue su trayectoria propia de aprendizaje. Además, es esencial que el docente encuentre el momento oportuno para incluir la reflexión en el salón de clases y que anticipe cuando la interacción social puede obstaculizar el proceso de aprendizaje (p. 268).



2.3.4 Rol del estudiante

De acuerdo con Lakoma (2007), citado por Zaldívar, et al. (2017), identifica las tareas esenciales realizadas por los estudiantes en una actividad de modelado matemático:

Existen tres tareas básicas de los alumnos en el proceso de modelación: realizar predicciones y conclusiones, generalizarlas, justificarlas y aplicarlas a la práctica y, por último, presentarlas a otras personas. Durante este proceso los alumnos sugieren situaciones de su realidad y crean modelos para dichos escenarios específicos. (p. 91)

Realizar tales acciones contribuyen a la formación de los estudiantes, como lo plantea Pollak (2007), citado por Zaldívar, et al. (2017), cuando mencionan que estos benefician “el desarrollo de habilidades matemáticas y herramientas que les permitan representar, estimar, llegar a aproximaciones, analizar errores, razonar, revisar la inconsistencia de soluciones y comunicar sus resultados” (p. 91).



El rol del estudiante en las tareas de modelado es esencial para el desarrollo de estas actividades, pues son ellos, mediante la guía del profesor, quienes deben crear los modelos matemáticos, para representar el problema, realizar estimaciones, analizar sus errores, razonar, calcular y analizar las posibles soluciones encontradas, para finalmente comunicar sus conclusiones, las cuales son validas de acuerdo a los parámetros establecidos por ellos.

2.3.5 Ventajas de la implementación de la modelación matemática

En referencia a esto, Blomhøj (2008) menciona tres aspectos ventajosos que se generan por la utilización de la modelación matemática.

Las actividades de modelado matemático poseen múltiples beneficios. De modo que, según, se pueden resumir en solo tres argumentos, los cuales son:

1. La modelización matemática tiende puentes entre la experiencia de vida diaria de los alumnos y la matemática.



Esto motiva el aprendizaje de la matemática, provee de directo apoyo cognitivo a las conceptualizaciones de los alumnos y coloca a la matemática en la cultura, como medio de describir y entender situaciones de la vida diaria.

2. En el desarrollo de sociedades altamente tecnológicas, las competencias para establecer, analizar y criticar modelos

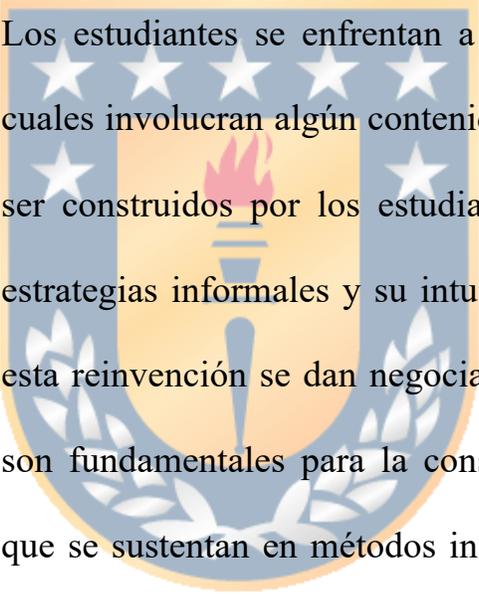
matemáticos son de crucial importancia. Este es el caso tanto desde una perspectiva individual en relación a las oportunidades y desafíos educativos y en el mundo laboral, como desde una perspectiva social en relación a las necesidades de una fuerza laboral adecuadamente educada.

3. Los modelos matemáticos de distinto tipo y complejidad están jugando roles importantes en el funcionamiento y formateado de sociedades basadas en la alta tecnología. Por lo tanto, el desarrollo de competencias expertas y seculares en criticar modelos matemáticos y la forma en que son usados para la toma de decisiones se está



convirtiendo en un imperativo para el mantenimiento y futuro desarrollo democrático. (p. 32)

Además, de acuerdo con Bressan & Gallego, citados por Henao & Vanegas (2012), la ventaja de la modelización radica en que:



Los estudiantes se enfrentan a situaciones realistas, las cuales involucran algún contenido matemático que deben ser construidos por los estudiantes mediante el uso de estrategias informales y su intuición. Además, dentro de esta reinención se dan negociaciones y discusiones que son fundamentales para la construcción del aprendizaje que se sustentan en métodos informales que luego serán utilizados como base para la creación de los conceptos formales.

Por lo tanto, las ventajas de la implementación de modelación matemática en la enseñanza existe en la conexión de la realidad con la matemática, lo que favorece las conceptualizaciones de los



saberes matemáticos, además de ser influenciado por la utilización de TICs. Por otro lado, estas conexiones permiten diseñar nuevas soluciones o modificar los modelos matemáticos existentes

2.3.6 Ciclos de modelación matemática

Un modelo matemático es una relación entre una idea matemática y una situación real. Es por ello que para realizar tal conexión se debe realizar un proceso de modelización o también llamado ciclo de modelación

Según Blomhøj y Højgaard Jensen (2003), citados por Blomhøj (2008), en el proceso de modelización se pueden distinguir seis sub-procesos los cuales son:

- (a) Formulación del problema: formulación de una tarea (más o menos explícita) que guíe la identificación de las características de la realidad percibida que será modelizada.
- (b) Sistematización: selección de los objetos relevantes, relaciones, etc. del dominio de investigación resultante e



idealización de las mismas para hacer posible una representación matemática.

(c) Traducción de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático.

(d) Uso de métodos matemáticos para arribar a resultados matemáticos y conclusiones.

(e) Interpretación de los resultados y conclusiones considerando el dominio de investigación inicial.

(f) Evaluación de la validez del modelo por comparación con datos (observados o predichos) y/o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida. (p. 23)



Estos subprocesos se plasman en el siguiente esquema circular:

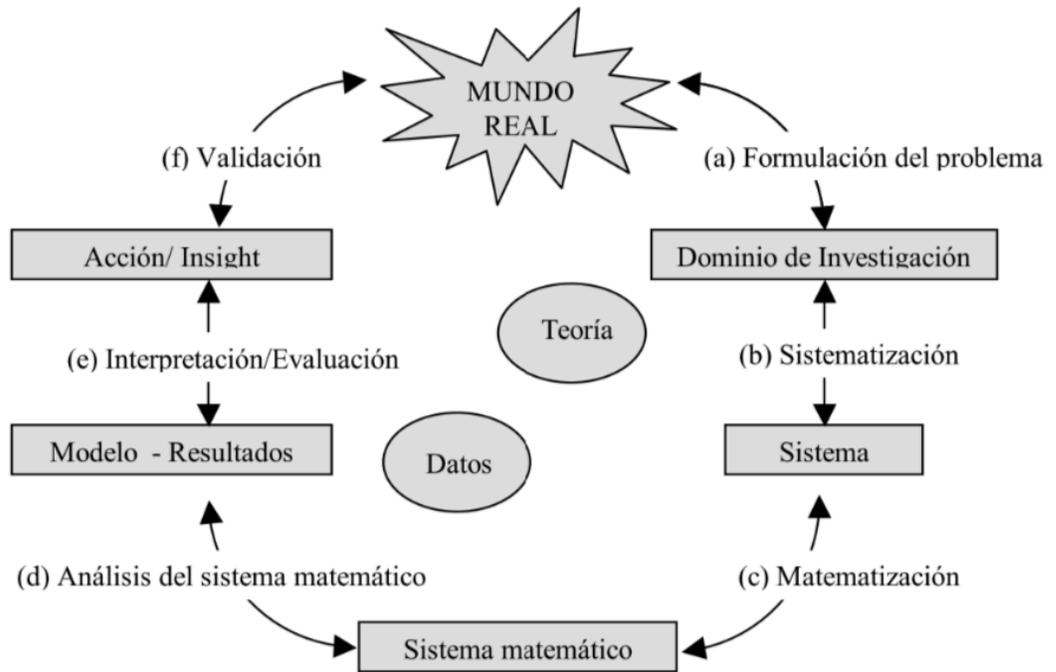


Figura 1: Ciclo de modelación según Blomhøj

Según Blum y Niss (1991), de manera esquemática podemos describir este proceso de resolución de problemas aplicados de la siguiente forma:

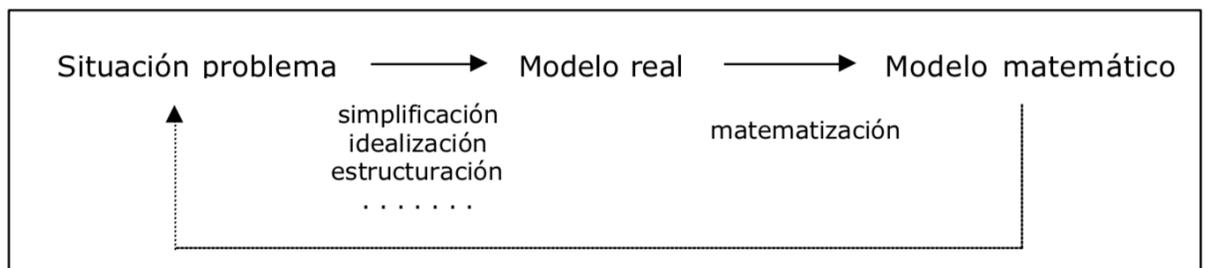


Figura 2: Ciclo de modelación según Blum y Niss



En relación a la definición propuesta sobre la “alfabetización matemática” encontrada en la base del estudio PISA (Programme for International Students Assessment) elaborado por la OCDE9 (2003), citado por García (2005), se tiene el siguiente ciclo de modelación:

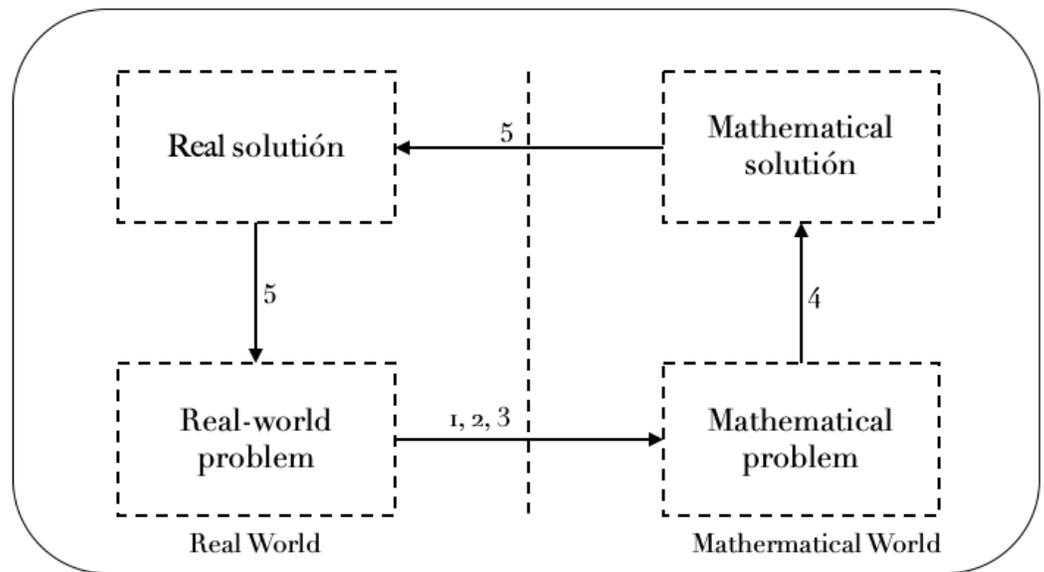


Figura 3: Ciclo de modelación según OCDE9

Los números de la figura 3 significan:

- (1) Comenzar con un problema situado en la realidad;
- (2) Organizarlo de acuerdo con conceptos matemáticos,
- (3) Despegarse progresivamente de la realidad mediante procesos tales como hacer suposiciones sobre los datos del problema, generalizar y formalizar transformando el



problema del mundo real en un problema matemático que representa fielmente la situación;

(4) Resolver el problema.

(5) Proporcionar sentido a la solución matemática, en términos de la situación real inicial, incluyendo las limitaciones de la solución.

De igual forma, Kaiser (2005) establece el siguiente esquema del ciclo de modelación:

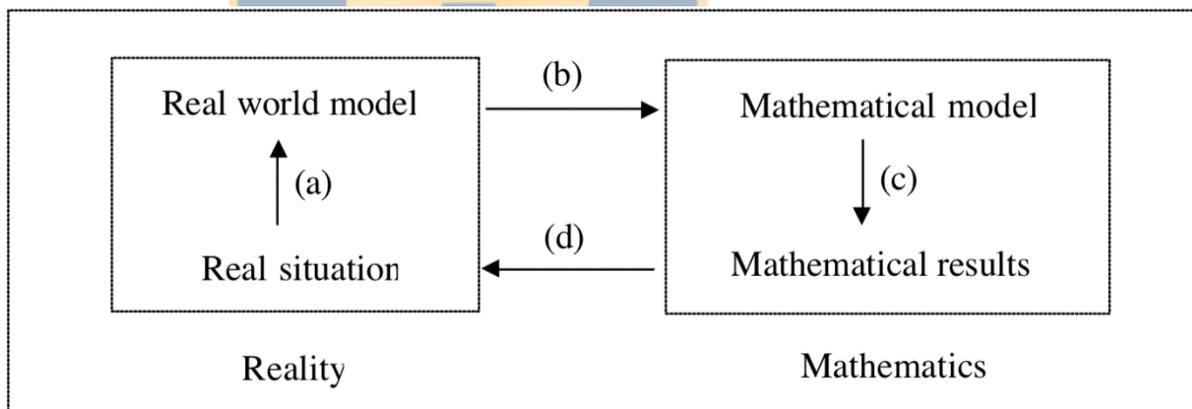


Figura 4: Ciclo de modelación según Kaiser

Los subprocesos (a) Formulación del problema, (b) Sistematización, (c) Matematización y (d) Análisis del sistema matemático están referidas al esquema de la figura 4, al que se



refiere como “figura 1” en el texto original que acabamos de reproducir.

Cada uno de los ciclos de modelación presentados cuenta con cuatro etapas principales, sin embargo, la elección del ciclo a utilizar dependerá de los propósitos que se tengan. En esta investigación se ha utilizado el ciclo de modelización para propósitos de diagnóstico/evaluación, que se expone a continuación.

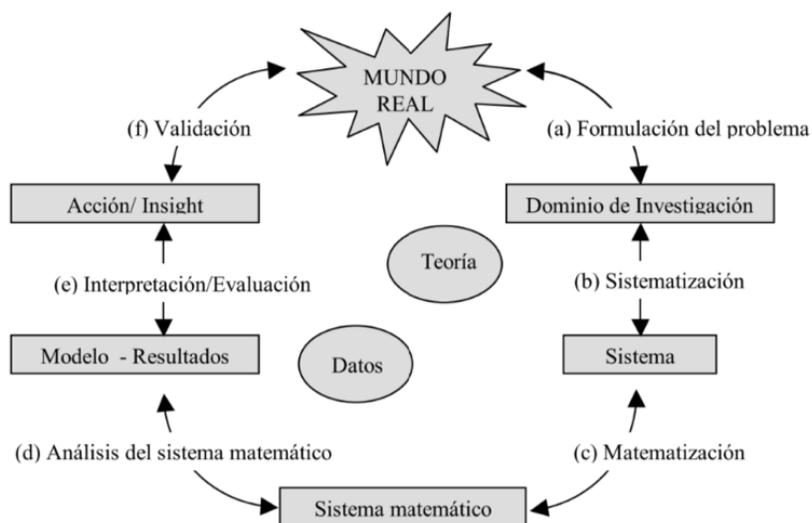
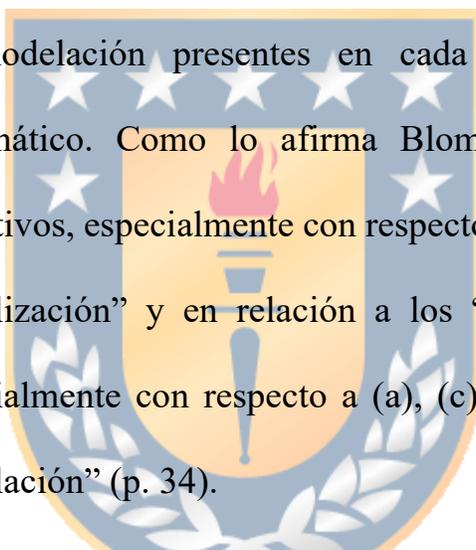




2.3.7 Dificultades de la implementación de la modelación

matemática

Entre los elementos que dificultan la interpretación de modelación matemática, están la falta de dominio de las actividades de modelado por parte del docente y estudiantes en relación a la comprensión de los procesos y subprocessos del ciclo de modelación presentes en cada actividad de modelado matemático. Como lo afirma Blomhøj (2008): “Obstáculos cognitivos, especialmente con respecto a (c) y (d) del proceso de modelización” y en relación a los “Obstáculos sociológicos, especialmente con respecto a (a), (c), (e) y (f) del proceso de modelación” (p. 34).





2.3.8 El ciclo de modelización para guiar a los estudiantes

El ciclo de modelación que nos permite guiar a los estudiantes es el llamado Ciclo de modelación para propósitos de diagnóstico/evaluación.

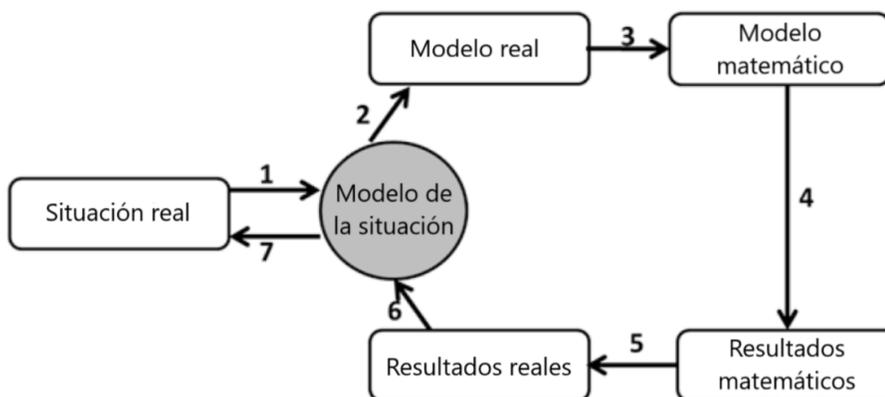


Figura 5: Ciclo de modelación para propósitos de diagnóstico/evaluación

El cual está compuesto por 7 subcompetencias, las cuales son:

1. Construir/Entender.
2. Simplificar/estructurar.
3. Matematizar.
4. Trabajar Matemáticamente.
5. Interpretar
6. Validar.
7. Exponer.



SUBCOMPETENCIAS	
Construir/entender	El estudiante describe verbalmente el problema, identificando qué se considerará relevante para su resolución.
Simplificar/estructurar	El estudiante estructura el modelo de la situación, consiguiendo de esta forma una versión simplificada de la situación (modelo real), la cual le permite definir variables y datos constantes
Matematizar	El estudiante logra generar fórmulas matemáticas, es decir, crea un modelo matemático en función de las variables definidas anteriormente y los datos recolectados.
Trabajar matemáticamente	El estudiante aplica la matemática y usa los valores más adecuado para dar solución al problema.
Interpretar	El resultado matemático obtenido se interpreta como resultado real
Validar	Una vez obtenido el resultado real, se compara con dimensiones físicas reales.
Exponer	Luego de validar el resultado obtenido, el estudiante ya puede exponer la solución al problema.



2.3.9 La elección de una tarea de modelización matemática

Un elemento muy importante que se debe tener en consideración para que la modelación matemática produzca el efecto deseado, debe ser la selección de una tarea apropiada, que se relacione con el conocimiento que se desea fortalecer y que tenga el nivel acorde a la realidad del grupo curso. A este respecto, Greefrath y Vorhölter, citado por Cárcamo (2017) expresan la elección y diseño de una actividad de modelado es esencial e influye en los resultados de aprendizajes.

Además, Galbraith, citado por Cárcamo (2017), propone dos características: “La coherencia con un propósito declarado y la introducción de tareas de modelización del mundo real”. También, Galbraith señala que la elección de las tareas de modelización se debe basar en el contexto cotidiano de los estudiantes, pues así se podrá regular la motivación y compromiso a esta actividad.



Por lo tanto, cabe destacar, que el tipo de actividades a elaborar deben ser acorde al contexto y a los intereses de los estudiantes, donde además deben ser adecuados a su contexto social, sin perder de vista el objetivo matemático.

2.4 La modelación matemática en la formación inicial docente

En las páginas anteriores se han estudiado distintos aspectos de la metodología de estudio de casos, su conexión con el objetivo de educación matemática y los fundamentos de la habilidad de modelado matemático. A continuación, se analizará la presencia de la modelación matemática en la formación inicial docente.

Para mejorar la educación se requiere actualizar programas ya obsoletos y el uso de estrategias de enseñanza tradicionales. En relación con esto, Alsina (2007), citado por Zaldivar, et al. (2017), afirma: “lograr cambios en las aulas de clase de matemáticas será posible a través de cambios en la formación de docentes” (p. 92). Actualmente, el desafío de la educación docente se sostiene, como lo afirma Nyaumwe, (2004), citado por Zaldivar, et al. (2017), en:



... Diseñar una pedagogía que facilite el empleo de métodos constructivistas para la enseñanza de matemáticas en todos los niveles; es decir, preparando a docentes que enseñen matemáticas para su entendimiento y su aplicación y no su memorización. (p. 92)

Sin embargo, según Alsina (2007) y Doerr (2007), citado por Zaldívar, et al. (2017), “Las investigaciones demuestran que la mayoría de los programas educativos de maestros en formación no proveen conocimientos y experiencias que provoquen confianza en los docentes para lidiar con esta estrategia didáctica en el aula de clases” (p. 92), es decir, debido a que los futuros docentes nunca han experimentado actividades de modelado matemático en su formación, es uno de los principales obstáculos para la creación y posterior aplicación de estas. Además, Henao & Vanegas (2012) destacan:

Estas preocupaciones convergen en un problema general de formación docente, relacionado con las dificultades que presentan los profesores para comprender, identificar y diseñar contextos significativos que promuevan la construcción de modelos



matemáticos inventados o reinventados por los mismos estudiantes, con el objeto de favorecer los procesos de modelación matemática. Frente a estas problemáticas, emerge como una respuesta plausible, la consideración de los contextos tal como se utilizan dentro de la educación matemática realista, pues a partir de estos, se promueven los procesos de modelación matemática en las clases, a la vez que se crean puentes para pasarse entre lo abstracto y lo concreto, facilitando diversas conexiones matemáticas y mejores perspectivas de aprendizaje de los contenidos matemáticos.

En consecuencia, al detectar la clara necesidad de incorporar la modelación matemática al currículo de la formación docente, Doerr (2007) citado por Zaldívar, et al, (2017) establece: “que son pocos los estudios que se enfocan en las formas en que se podría realizar esta incorporación. De hecho, Niss, et al. (2007) afirman que “es muy complejo encontrar actividades de modelación genuinas dentro del salón de clases de matemáticas”. Según Ruiz-Higueras y García (2011), citado por Zaldívar, et al. (2017), existe una escasez de investigaciones



centradas en clarificar y aumentar el conocimiento científico sobre las metodologías involucradas en los procesos de modelación por parte de los docentes, así como la ausencia de teorías científicas que permitan describir con precisión y categorizar dichas metodologías. Para dar respuesta a esta problemática, esta investigación pretende ser la motivación necesaria para el inicio de futuras investigaciones en cuanto a la implementación de actividades de modelación matemática en el aula.





3 CAPITULO 3: MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se explica la metodología de investigación utilizada en este estudio, las características de los instrumentos de recolección de datos y detalles del taller de análisis del estudio de caso.

3.1 Enfoque de la investigación

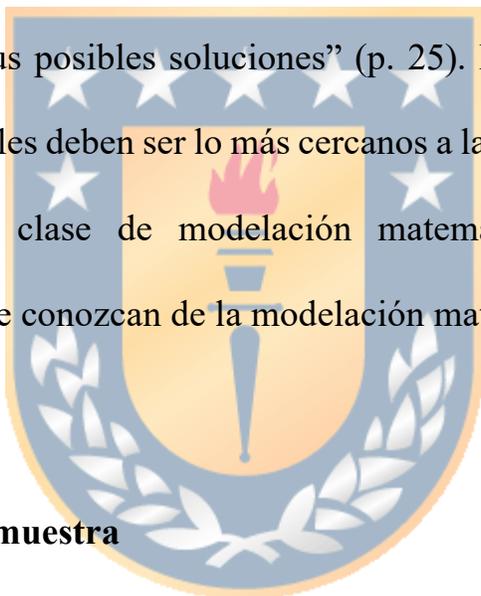
En el transcurso de esta investigación se tendrá un enfoque cualitativo, el cual se encauza a “comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto.” (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 364).

Además, este tipo de enfoque fue seleccionado por sus intenciones de comprender los distintos puntos de vistas que tiene cada uno de los individuos participantes en la investigación (Hernández, et al., 2010).



3.2 Diseño

La investigación se basará en el diseño de estudio de casos, el cual, según Reyes (2011), consiste en “presentar un problema real — o al menos verosímil — de alguna disciplina en particular, para que los estudiantes discutan acerca del tema, reconozcan dificultades, propongan soluciones y, finalmente entreguen un informe con el análisis de la situación y sus posibles soluciones” (p. 25). Es decir, que, a través de casos, los cuales deben ser lo más cercanos a la realidad, se analizará una situación de clase de modelación matemática por profesores en formación que conozcan de la modelación matemática.



3.3 Población y muestra

Población de estudio: Estudiantes de la carrera de pedagogía en matemática de una universidad al sur de Chile.

Muestra: Estudiantes de la carrera de pedagogía en matemática de una universidad al sur de Chile que han cursado una asignatura de Modelación Matemática, de edad entre los 20 a 22 años, quienes tienen



los fundamentos necesarios para contribuir a la investigación a través de un taller de análisis del estudio de caso.

Tipo de muestra: El tipo de muestra a utilizar será de “muestra de expertos” los cuales son seleccionados por que es necesaria la opinión de individuos diestros en el tema de la modelación matemática.

3.4 Instrumento de recolección de datos

Los datos fueron recogidos por medio de un taller, en donde participaron profesores en formación, los cuales analizaron el caso “Mañanas Matemáticas”, a base de preguntas, en el contexto de conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales.

3.4.1 Descripción del taller.

Para la recolección de datos se realizó un taller, en donde se encontraron los profesores en formación, acompañados de los profesores monitores, quienes guiaron la actividad. Además, el lugar en donde se realizó la actividad fue en una sala de clases con sillas ordenadas en forma circular. Por otro lado, los



profesores monitores se apoyaron de un computador y un proyector digital.

El procedimiento a seguir fue, en primer lugar, dar la bienvenida a los profesores en formación, agradeciendo el que puedan estar presentes para cooperar en el desarrollo de nuestro Seminario de Título.

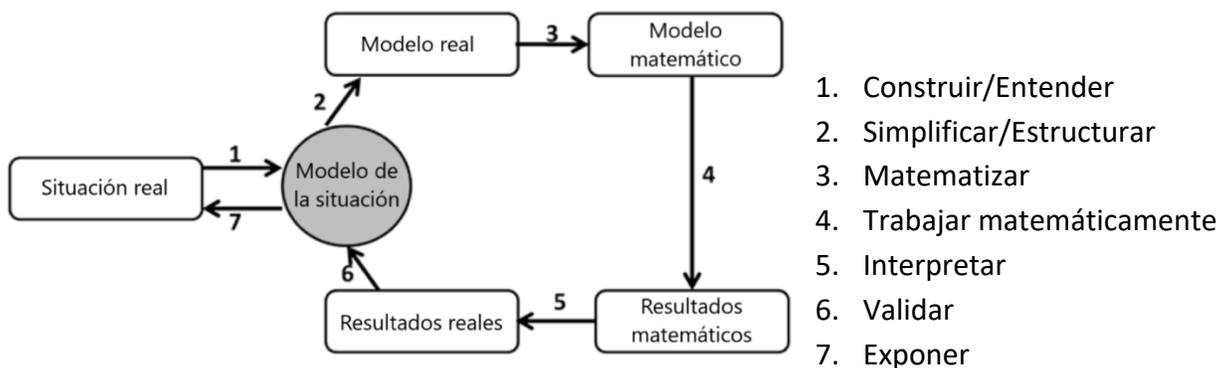
Se dio a conocer el objetivo de la investigación: **“Determinar el impacto que tiene la metodología de Estudio de Casos en el desarrollo de la habilidad de Modelamiento Matemático en Profesores de Matemática en formación.”**

Se comunicó a los participantes que la metodología de Estudio de Casos consiste en *“representaciones verosímiles de eventos que ocurren en las aulas, que nos permitan integrar a la educación superior un evento real que los estudiantes pueden analizar, discutir y observar desde diversas y múltiples perspectivas, para obtener una comprensión más profunda*



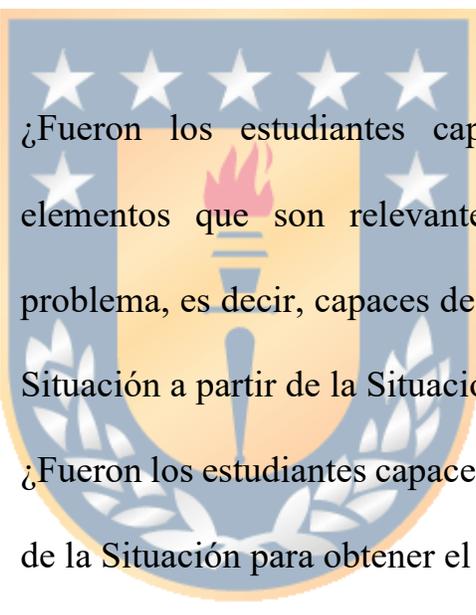
acerca de lo que realmente ocurre” (Reyes, 2011, p.34). Además, esta metodología tiene el objetivo de dar a conocer al profesor en formación el cómo enfrentar una situación escolar en la cual deba “responderle a un estudiante de un colegio que percibe que el resultado que dio a un problema matemático está errado, pero no logra entender por qué su modo de resolver le funciona en algunas ocasiones y en otras no” (Reyes, 2011, p.26). Una de las mayores ventajas que tiene esta metodología es que contiene las tres “C” de la formación, las cuales son: complejidad, enfoque de construcción hacia el aprendizaje y la comunicación.

Se recordó el ciclo de modelación utilizado, específicamente el ciclo para propósitos de diagnóstico/evaluación:





Los moderadores entregan a cada uno de los participantes una copia impresa del caso “Mañanas Matemáticas”. A continuación, se designan los papeles (de los estudiantes Sofía, Benjamín, Alejandra y Andrés presentes en el caso) y, posteriormente, se procede a analizar el caso en cuestión y dar respuesta a las preguntas siguientes:

- 
1. ¿Fueron los estudiantes capaces de identificar los elementos que son relevantes para dar solución al problema, es decir, capaces de construir el Modelo de la Situación a partir de la Situación Real?
 2. ¿Fueron los estudiantes capaces de simplificar el Modelo de la Situación para obtener el Modelo Real?
 3. ¿Fueron los estudiantes capaces de estructurar el Modelo de la Situación para obtener el Modelo Real?
 4. ¿Fueron los estudiantes capaces de matematizar el Modelo Real para obtener el Modelo Matemático?



5. ¿Fueron los estudiantes capaces de trabajar matemáticamente el Modelo Matemático para obtener los Resultados Matemáticos?
6. ¿Fueron los estudiantes capaces de interpretar los Resultados Matemáticos para obtener los Resultados Reales?
7. ¿Fueron los estudiantes capaces de validar los Resultados Reales para contrastarlos con el Modelo de la Situación?
8. ¿Fueron los estudiantes capaces de presentar la solución al problema, es decir, exponer la solución a la Situación Real planteada?

Finalmente, se solicita a los profesores en formación responder las preguntas siguientes:

1. ¿Se guía el Caso de acuerdo con las subcompetencias presentes en el desarrollo de la habilidad de modelamiento matemático?



2. ¿Propicia el Caso que los estudiantes relacionen el flujo de agua con el concepto de pendiente de una recta?
3. ¿Propicia el Caso que los estudiantes reconozcan las características de las funciones lineal y afín?
4. ¿Propicia el Caso en los estudiantes el ejercicio de los contenidos actitudinales de respeto y tolerancia?
5. ¿Propicia el Caso en los estudiantes el ejercicio del contenido actitudinal de cumplir con lo solicitado?
6. ¿Propicia el Caso en los estudiantes el ejercicio del contenido actitudinal de atender, tanto las dudas como los aciertos?
7. ¿Propicia el Caso en los estudiantes el desarrollo del contenido procedimental de utilización de conocimientos previos?
8. ¿Propicia el Caso en los estudiantes el desarrollo del contenido procedimental de recolección de datos?
9. ¿Propicia el Caso en los estudiantes el desarrollo del contenido procedimental de probar el modelo obtenido?



10. ¿Contribuye la metodología de enseñanza de Estudio de Casos a articular la matemática escolar por medio del descubrimiento de la relación existente entre el flujo de agua y el concepto de pendiente de una recta?
11. ¿Cuál sería la mejor estrategia para implementar en la sala de clases lo descrito en el Caso?
12. ¿Ayuda el Caso a distinguir las habilidades de modelamiento matemático y de resolución de problemas?
13. ¿Permiten las actividades de modelación matemática motivar a los estudiantes y cautivarlos intelectualmente?
14. Considerando su formación inicial en modelamiento matemático, ¿están los profesores en formación capacitados para crear y aplicar actividades de modelación matemática?



4 CAPITULO 4: ANÁLISIS DE DATOS E INFORMACIÓN

A continuación, se expone un detallado análisis cualitativo acerca de los datos recabados luego de la intervención realizada, considerando los supuestos de investigación antes expuesto. Para facilitar la lectura de los datos se utilizó la sigla PF para designar a los distintos Profesores en Formación que obtuvieron un papel en el análisis del caso.

4.1 Análisis en relación al ciclo de modelación matemática

El ciclo de modelación matemática permite que los estudiantes puedan ver la matemática más cercana, dentro de su vida diaria, lo cual los motiva a desarrollar el interés por ésta. Además, permite a los mismos estudiantes ser partícipes de su propio aprendizaje, lo cual se forma a través de métodos informales, para concluir en conceptos formales. De esta manera, a continuación, se analizará un caso de modelación matemática.

Respecto a las interrogantes en relación al ciclo de modelación realizadas en el taller, titulado “Mañanas Matemáticas”, concluyen los



profesores en formación que primeramente los alumnos sí fueron capaces de identificar los elementos relevantes para dar solución, es decir, construir un Modelo de la Situación, la cual se expresa en la siguiente afirmación:

“comprendieron el problema primero e identificaron las variables, [por ejemplo] la cantidad de agua, el tiempo para medirlo.”

Luego, para la sub-competencias de simplificar y estructurar el Modelo de la situación para obtener el Modelo real, los profesores en formación concluyen que efectivamente los alumnos fueron capaces de estructurar el modelado de la situación consiguiendo una versión simplificada, incluso al equipo que había cometido un error, el cual gracias a la estrategia de realizar un análisis dimensional se percató del error y lo corrigió como se expresa en las siguientes afirmaciones

“Sí, consideraron el tiempo, tenían que utilizar un cronómetro, vieron que el balde debía ser graduado. Lograron simplificarlo porque vieron la utilidad de cada una de las variables que ellos consideraron”



“Sí, pero les costó un poco, porque un caso no les daba en litros, necesitaron como... un poco de ayuda del profesor”

Posteriormente, en relación a matematizar, es decir, crear un Modelo Matemático en función de las variables definidas anteriormente y los datos recolectados, los participantes concluyen que sí lo lograron, a pesar de que un grupo había cometido un error en el Modelo Matemático planteado. Cabe destacar que la estrategia implementada por el docente, de hacer un análisis dimensional es efectiva para que los estudiantes reconozcan su error, por otro lado, es esencial que el profesor esté monitoreando a los estudiantes para poder cumplir con el objetivo de la actividad de modelado.

En lo que respecta a trabajar matemáticamente los participantes del taller concluyen que sí logran trabajar matemáticamente, dado que crearon tablas del tiempo y agua utilizada en una ducha de cada integrante de su familia.

“Sí, si al final obtuvieron los datos de toda la familia.”



“Yo creo que igual trabajaría con lo mismo, con unidades de medida, porque uno sabe que nos tiene que dar un valor y... quizás orientarlo porque también a los chicos les cuesta mucho trabajar con unidades de medida, entonces en esa parte, quizás orientarlo más de cuanto tiene que dar o cuanto tiene que trabajar esa unidad, pero sí es una buena estrategia... a mi parecer”

En relación a interpretar los resultados matemáticos para obtener Resultados Reales los profesores en formación afirman que los estudiantes sí fueron capaces de realizarlo, aunque asociar el concepto de flujo de agua con la inclinación de una recta sin el ejemplo del viaje en automóvil hubiera sido mucho más difícil que lo descubran por sí solos.

“Sí, igual hay cierto[s] valores o cosas que tuvimos que analizarlo igual con el profesor, pero sí lo dedujeron en conjunto y se nota que hay un aprendizaje de acuerdo al dialogo”.



“No sé, como, por ejemplo, cuando iban conversando del mismo tema de la comparación que hizo el profesor del flujo de agua, sobre la inclinación de la pendiente, quizás ellos al principio no entendieron que la pendiente puede ser mayor o menor y el hizo ahí la comparación, el profesor, y los chicos vieron más claro lo que pretendía el profesor. En ese sentido creo que en conjunto lo lograron, pero así por sí solos creo que les hubiese costado más”

“...y lo otro, es la parte donde tiene que comprobar su ecuación, se dan cuenta que su resultado le debería de haber dado en litros por eso el profesor ahí le sugiere arreglar la fórmula, porque, de hecho, después no podría interpretar el resultado final.”

Con respecto a validar, es decir, comparar el Resultado Real obtenido con las dimensiones físicas reales, los profesores en formación expresan que los estudiantes dudaron en relación a la validación por los datos obtenidos, pero gracias a la estimación o rango dado por el profesor en la clase, se logró cumplir con la subcompetencia.



“O sea, igual dudaron un poco. El profesor les dijo que si estaban entre cierto rango era porque sus resultados estaban bien.”

Por último, la subcompetencia de exponer, los profesores en formación afirman que sí se logró la subcompetencia, pero para que se logre de manera efectiva es necesario que se vaya recordando clase a clase la situación real para que así los estudiantes puedan, realmente, expresar la solución al problema.

“Yo creo que sí, porque entre tanto trabajo y como son tres clases a veces pasa de una semana a la otra, quizás se pierde un poco el objetivo, entonces es importante, al final, volver atrás para dar conclusión al problema y volver a que quedé claro el objetivo.”



4.2 Análisis en relación a los contenidos

4.2.1 Contenidos conceptuales

Respecto a las interrogantes en relación al contenido conceptual, concepto de pendiente de una recta, que propició la creación del caso titulado “Mañanas Matemáticas”, concluyen los profesores en formación que los alumnos al terminar la actividad, es decir, en la tercera clase sí fueron capaces de relacionar el flujo del agua con el concepto de pendiente de una recta sugiriendo que en cada clase se recuerde cual era el problema y el objetivo de la actividad.

“Es que al final, claro, al final sí, pero también me paso que a medida que iba viendo el caso como que incluso se me olvidó cual era el concepto principal, que en este caso era una forma de explicar la pendiente. Entonces, como que... al final, claro, sí se ve, pero a medida que íbamos viendo el caso... no, a mí se me había olvidado”



“Por lo general cuando uno prepara una clase plantea el objetivo y está intentando que ellos recuerden que eso es lo que se quiere lograr, quizás haber dejado el objetivo para ellos tuvieran conciencia de “¡Ah! sí, allá vamos...”.

“O sea, sí, yo igual encuentro que debería de haberse mencionado, el hecho de que ellos van a saber que, por ejemplo, que [...] utilidad tiene ese término de matemática para la vida real, por ejemplo, porque uno si pasa lo que es pendiente de la recta, dice “¡Ya! Pendiente de la recta”, pero para que me sirva o que gano sabiendo esto.”

Finalmente, en lo que respecta si los estudiantes fueron capaces de descubrir las características de las funciones lineal y afín, los futuros profesores en formación concluyeron que sí fueron capaces de relacionar el flujo del agua con el concepto de pendiente de una recta, dado que se realizaron dos situaciones las cuales le dieron paso para analizar las características de ambas funciones y el papel de los gráficos fue esencial para descubrir tales características.



“Ahora lo bueno es que da las situaciones, entonces se aprovecha eso para la función lineal y afín. Si no hubiesen estado las dos situaciones, ahí [hubiera] sido solo una forma “

“Sí, ya en la tercera clase una ya va viendo como introducen el concepto de función, pendiente, porque en un principio era solo como descubrir cosas nuevas, vamos descubriendo, vamos descubriendo, vamos buscando, pillando, y aprendemos cosas, pero en sí el concepto de función afín y lineal, en a la tercera clase ya, al menos, lo ve”

“Porque ellos ahí se dan cuenta de la inclinación de un gráfico con otro, en teoría”

“... cuestionarse el niño “¿Por qué el mío es así, por qué el otro es así? ¿Por qué no pasa por el origen? ¿Por qué parte más arriba?”.

“Claro, ahora, porque los gráficos son distintos en cuanto a las escalas, a lo mejor si hubieran utilizado la misma escala hubiese sido más notorio todavía”



4.2.2 Contenidos procedimentales

En lo que respecta a las preguntas relacionadas al contenido procedimental, *utilización de conocimientos previos*, los profesores en formación concluyen que el caso sí propicia la utilización de conocimientos previos como obtener la ecuación de una recta, crear gráficos y/o tablas de valores.

<i>“Crear gráficos”</i>
<i>“Despejar variables”</i>
<i>“La fórmula de la ecuación de la recta, porque en una parte lo menciona”</i>
<i>“Porque se supone que ellos ya habían visto algo de la ecuación de la recta”</i>
<i>“...porque ellos mismos crean las fórmulas, entonces tiene que haber visto eso”</i>
<i>“Las tablas de valores”</i>

Luego, en relación al contenido procedimental, de *recolección de datos*, los participantes del taller concluyen que



el caso sí propicio a la recolección de los datos debido que fueron ellos los encargados de realizar la correcta recolección de datos para la actividad.

“Por ejemplo, cuando miden, realizan las mediciones en la casa, de los litros de agua”

“El tiempo”

“Cuando solicitan agregar el tiempo que demoran los integrantes de su familia”

Finalmente, en relación si el caso propició el contenido procedimental de *probar el modelo obtenido* los profesores en formación concluyeron que sí se logró, debido a que el profesor en la última clase hace comparaciones de los gráficos y datos obtenidos solicitando su interpretación.

“Comprueban los datos que [ellos mismos habían] registrado en sus casos”

“Y también lo compara con el caso, en el que dice que no puede demorar -2 minutos en ducharse, entonces comprueba que sí o sí debe estar en el primer cuadrante “



4.2.3 Contenidos actitudinales

En lo que respecta si el caso propicio a que los estudiantes *se relacionen con respeto y tolerancia*, los participantes del taller concluyen que sí se logró, debido a que había que tomar decisiones para definir por ejemplo las situaciones y tolerancia cuando realizaban preguntas.

“Es que el hecho de que trabajen en grupo, ya tiene que... no sé, trabajar con tus compañeros”

“[...] tampoco se presenta una situación en donde hubiera un tipo de conflicto, entonces se veía que el curso... los grupos eran pasivos”

“... lo otro es que las realidades son distintas, por ejemplo, algunos tenían calefón, otros que tenían ducha eléctrica, por lo menos en ese caso se ve la tolerancia ...”

“En la otra parte que se ve como respeto entre ellos, fue cuando una niña le pregunta ‘¿Qué más tenemos que hacer?’, o sea, nadie la cuestionó diciéndole ‘¡Oh! Ella no entendió’ algo así, sino que otro compañero, incluso, la apoyó en que tenía la misma duda, entonces se ve como que todos querían aprender lo mismo”



En relación si el caso propició el contenido actitudinal de *cumplir con lo solicitado*, los profesores en formación concluyen que sí se consiguió, debido que era accesible lo solicitado y existía claridad de lo pedido.

“Yo creo que, si porque es algo que es accesible, medir el agua de una ducha, uno lo puede hacer en la casa, entonces, no hay una tarea tan compleja en que el estudiante tenga que salir de su casa para poder lograrlo”

“Y los materiales son, materiales, que ellos mismos tienen, incluso ese niño dice ‘con un cronometro’, pero podemos utilizar el teléfono”

Finalmente, lo que respecta al contenido actitudinal de *atender tanto las dudas como los aciertos*, los participantes del taller concluyen que efectivamente el caso propicia tal contenido, pues el docente cuando los estudiantes estaban errados en algún concepto y/o calculo en ninguna instancia le recriminó su error,



sino que mediante ejemplos lo instaba a reflexionar y descubrir cuál era el error.

“... el profesor... nunca le dijo ‘está mal’, sino que iba como buscando la respuesta, recalcando las cosas positivas, no menospreciando las negativas, sino que reforzándolo y que ellos se dieran cuenta solitos y destacando lo bueno”

“En la última parte, cuando Sofía dice 111 litros y Andrés dice 104, entonces el profesor nunca le dijo a la niña ‘¡oh! No está mal, te equivocaste’, sino que habló de lo bueno y dio como un cierre. Ese es como un ejemplo no tan bueno, pero hay que...”

“Actuó de buena forma, no dijo ‘No, está malo’, sino que le dijo que se fijara en la unidad de medida, no eran como lo que estaba buscando.”

“Le dio otro camino a seguir para que se diera cuenta de que estaba equivocado”



4.3 Análisis de la metodología de enseñanza de Estudio de Casos

Al abordar la metodología de enseñanza de Estudio de Casos para articular la matemática escolar, por medio del descubrimiento de la relación que existe entre el flujo del agua y el concepto de pendiente de una recta, los profesores en formación concluyen que efectivamente esta metodología sí contribuye dado que utiliza algo cotidiano de los estudiantes, que realizan todos los días, para comprender un concepto matemático.

“Porque es un caso cotidiano, porque es bien cercano a ellos”

“...Como su título es Mañanas ...Matemáticas. Lo que hacen en la mañana, tiene que bañarse”

“Esta bueno, lo que está bien el problema, incluyeron la velocidad, yo creo que ahí se aclaró más, yo creo que si hubieran usado solo el flujo de agua los chicos también les hubieran costado como internalizar el concepto, porque el flujo de agua uno por lo menos a esa edad los chiquillos no manejan el termino flujo, a veces, entonces al relacionarlo con velocidad, creo que fue una buena estrategia”



En relación a implementar una estrategia óptima para aplicar lo descrito en el caso, concluyen los participantes del taller que los grupos sean heterogéneos con número impar, además que se agrupen de acuerdo si tienen calefón o termo eléctrico y por otro lado que en el momento de realizar tal actividad se cuente con más de un docente en el aula.

“Yo creo que con codocencia es lo ideal”

“Lo principal, los grupos separarlos con respecto a sus personalidades, como uno ya sabe más o menos como se comportan, entonces, por ejemplo, el grupo de los desordenados si hay que separarlos, los que son más tímidos colocarlos con los que son más extrovertidos. Entonces, en ese sentido, siempre hay que tener un grupo heterogéneo para que trabaje, porque a veces muchos muy callados tampoco trabajan...”

“En cantidades, yo creo dependería de cuantos son en total los alumnos, y lo otro que también, ojalá sean números impares porque si ellos deciden tomar decisión y va por votación, así se evitan empates”



“Yo creo que es una forma igual, siguiendo el caso, con las situaciones, o sea, que tipo de duchas tiene en su casa, utilizan calefón o ducha eléctrica, porque los resultados son distintos”

“en un grupo tiene que haber personas que usan calefón no más y, a lo mejor, no hacer dos grupos, pero si compararlo con los otros y de esa forma generar la discusión que tuvieron ellos de porque una recta es más inclinada que la otra”

4.4 Análisis de las actividades de modelado matemático

En relación si el caso ayuda a distinguir las habilidades de modelado matemático y de resolución de problemas, los profesores en formación, con un poco de dificultad, concluyen que sí, ayuda a distinguir esta habilidades, dado que inmediatamente cuando se presenta el problema los alumnos preguntan cuales son los datos, algo inusual pues están acostumbrados a resolución de problemas.



“Incluso, implícitamente está la resolución de problemas dentro de la actividad, cuando ya define las variables reales, donde los chiquillos ven que es una situación súper cotidiana, donde no hay matemática, ellos la descubren. Entonces, en ese sentido es súper bueno distinguir entre modelamiento y resolución de problemas, porque, de hechos, en el programa aparece las dos”

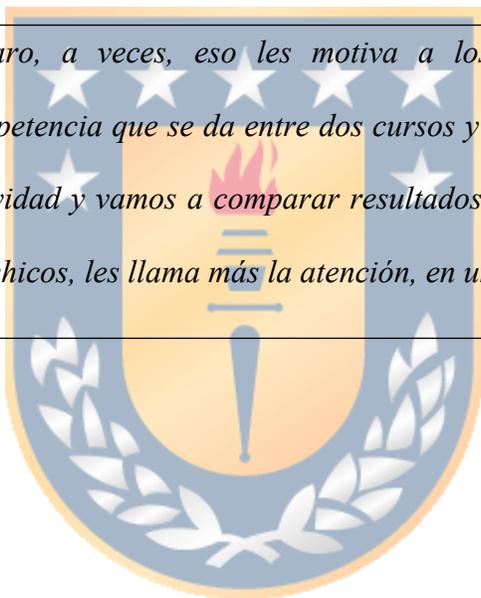
Con respecto a la motivación que permite las actividades de modelado matemático, los participantes del taller concluyen que efectivamente esta actividad cautiva intelectualmente a los estudiantes y los motiva dado que es diferente a las rutinarias clases que están acostumbrados los alumnos.

“Yo creo que les llama la atención porque por ejemplo, típico que “esto no me sirve para comprar pan”, entonces el llevarles a que la matemática se pueda aplicar, que ellos puedan ver una realidad en una formula y que ellos lo vayan descubriendo, no es como “esta es la fórmula, este es el problema, para esto me sirve”, entonces, la actividad en si es súper buena para que ellos lo descubran en conjunto, entonces en ese sentido les llama mucho más la atención a que le entreguen la formula, pero hay caso en los que no les gusta eso...”



“Por supuesto, hay que ver también con qué curso, porque yo, por ejemplo, sé que tengo cursos con los cuales yo no puedo aplicar esta... una tarea así, no llegarían con los datos, no se podrían poner de acuerdo. Entonces, quizás trabajar con los cursos y ver cuál es el más idóneo, porque esto tampoco funciona en todos estos tipos de actividades e idealmente, que haya otro docente en el aula.”

“Claro, a veces, eso les motiva a los chicos un poco como la competencia que se da entre dos cursos y decir “ya, vamos a hacer tal actividad y vamos a comparar resultados...” y a veces eso también, a los chicos, les llama más la atención, en una sana competencia.”





5 CAPITULO 5: RESULTADOS, DISCUSIONES Y CONCLUSIONES

5.1 Resultados

5.1.1 Percepciones de las dificultades en la identificación de subcompetencias del ciclo de modelación en el caso “Mañanas Matemáticas”

Se puede observar que en relación a la identificación de las subcompetencias presentes del ciclo de modelación utilizado, los profesores en formación reconocieron e identificaron correctamente todas ellas. No obstante, a pesar de realizar un resumen del ciclo de modelación antes de comenzar a analizar el caso, cuando se preguntaba específicamente por alguna subcompetencia, se tenía que volver a aclarar lo que se entiende por tal subcompetencia, pues dudaban en dar una respuesta clara y, continuamente, observaban el esquema del ciclo entregado para orientarse en la etapa que nos encontrábamos y luego daban una respuesta con mayor seguridad y confianza.



5.1.2 Percepciones de las dificultades en la identificación de contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales en el caso “Mañanas Matemáticas”

Posteriormente al análisis del caso “Mañanas Matemáticas”, la identificación de los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales no se percibió grandes dificultades, dado que, incluso, citando extractos del caso justificaban su respuesta, valorando los beneficios que otorga al estudiante realizar tales actividades y la elección del contenido matemático que fue el motor de la creación de tal actividad.

5.1.3 Percepciones y opiniones de la articulación matemática escolar con la modelación matemática.

Después del análisis del caso “Mañanas Matemáticas”, se observó la articulación de la matemática escolar con la modelación matemática en la creación del caso donde se efectuó la relación entre el flujo de agua y el concepto de pendiente de una recta, en el cual no se percibieron grandes dificultades, ya que valoraron el uso de algo tan cotidiano que realizan



diariamente los estudiantes para comprender un concepto matemático que presenta dificultades en su aprendizaje. Incluso, al grupo que había cometido un error, se le sugirió utilizar la velocidad para relacionar el concepto de flujo, lo cual fue una buena estrategia.

5.1.4 Percepciones y opiniones del aporte de herramientas y/o estrategias para la aplicación de tareas de modelado matemático.

En cuanto a lo que respecta a las herramientas y/o estrategias para la aplicación de actividades de modelado matemático se sugirió, durante el análisis del caso, que se trabajara con grupos de estudiantes heterogeneos y agrupados de acuerdo a las situaciones planteadas en el caso. Además, contar con más de un docente en el aula para guiar el trabajo en grupo.



5.1.5 Percepciones y opiniones del aporte del caso “Mañanas Matemáticas” para distinguir las habilidades de modelado matemático y de resolución de problemas.

Posteriormente al análisis del caso “Mañanas Matemáticas” se percibió que el caso permitió distinguir entre las habilidades de modelado matemático y la resolución de problemas, no obstante, se aclaró que luego de que los estudiantes recababan los datos y creaban el modelo, la actividad se convertía en la resolución de un problema, en donde bastaba que los datos obtenidos fueran reemplazados.

5.1.6 Percepciones y opiniones del aporte del caso “Mañanas matemáticas” para motivar y cautivar intelectualmente a los estudiantes.

Luego de llevar a cabo el análisis del caso “Mañanas Matemáticas” se expresó que sería un gran aporte haber estudiado casos similares al analizado, en una asignatura de modelación matemática, pues se tenía la percepción de que la actividad se llevaba a cabo solo en una clase y no durante más de



una. Además, tampoco se tenía en consideración como enfrentar las dificultades y errores que podían llegar a cometer los estudiantes

5.1.7 Percepciones y opiniones de la modelación matemática en la función de motivar y cautivar intelectualmente a los estudiantes.

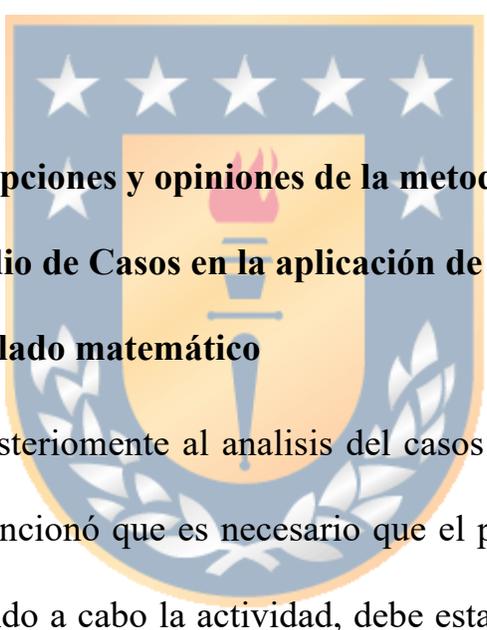
Luego del análisis del caso “Mañanas Matemáticas” se mencionó que las actividades de modelación sí lograrían motivar y cautivar intelectualmente a los estudiantes dada su relación con la vida diaria, además del contexto de la tarea, el cual está directamente relacionado con el quehacer de los estudiantes. También, la forma en que ellos mismos descubren una fórmula matemática estimula a los estudiantes intelectualmente.

5.1.8 Percepciones y opiniones de la metodología de enseñanza de Estudio de Casos en la creación de actividades de modelado matemático

Luego del análisis del caso “Mañanas Matemáticas”, al cuestionar la capacidad de poder crear situaciones de modelación



matemática, los profesores en formación no tuvieron mayor dificultad en mencionar que la metodología de enseñanza de estudio de casos les permitía prepararse de mejor manera para llegar a la sala de clases y abarcar esta temática, pues le da acceso al profesor a colocarse previamente en las dudas que pudieran plantear los estudiantes.



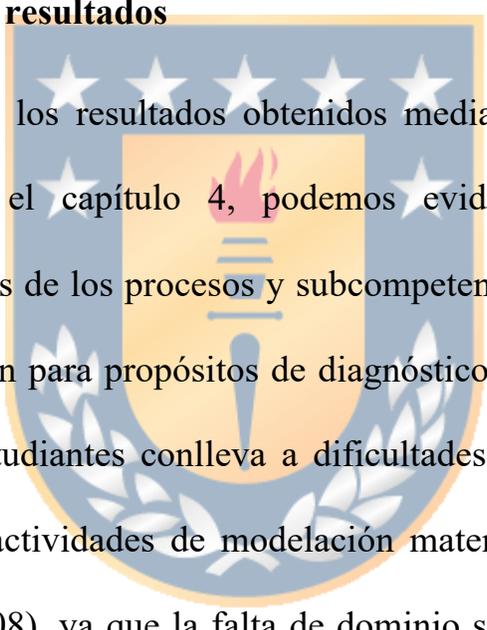
5.1.9 Percepciones y opiniones de la metodología de enseñanza de Estudio de Casos en la aplicación de actividades de modelado matemático

Posteriormente al análisis del casos “Mañanas Matemáticas” se mencionó que es necesario que el profesor que se encuentre llevando a cabo la actividad, debe estar en constante monitoreo de los equipos de trabajo, pues, así como lo manifestaron los profesores en formación, los cursos que normalmente se tienen en una sala de clases son bastante variados, por lo que se debe de dar correcciones y guías a cada instante a los estudiantes, además de contar con otro docente en el aula para apoyar ante cualquier cuestión de los alumnos. Por otro lado, el profesor que se



encuentra realizando la actividad debe tener una actitud positiva y motivadora, para que así los estudiantes no se frustren a la hora de cometer algún error, con mayor hincapié en el subproceso de matematizar.

5.2 Discusión de resultados



En base a los resultados obtenidos mediante el análisis del taller presente en el capítulo 4, podemos evidenciar que la falta de conocimientos de los procesos y subcompetencias presentes en el ciclo de modelación para propósitos de diagnóstico/evaluación por parte del docente y estudiantes conlleva a dificultades en la implementación y creación de actividades de modelación matemática, concordando con Blomboj (2008), ya que la falta de dominio se debe específicamente a obstáculos cognitivos y sociológicos; cognitivos en relación a la comprensión de los subprocesos de Matematización, crear un Modelo Matemático en función de las variables definidas anteriormente además de los datos recolectados, y Análisis del Sistema Matemático o Trabajar Matemáticamente, es decir, que el estudiante aplique la matemática y use los valores más adecuados para dar solución al problema. En relación a



las dificultades sociológicas, se encuentra el Proceso de Formulación del Problema, es decir, que el estudiante sea capaz de describir verbalmente el problema identificando qué se considerará relevante para su resolución, la Sistematización (simplificar/estructurar) que consiste en que el alumno estructura el modelo de la situación consiguiendo una versión simplificada del modelo real el cual le permite definir las variables y datos que él ha de considerar posteriormente se encuentra el Proceso de Interpretación/Evaluación, el cual pretende que sea capaz de que el resultado matemático obtenido se interprete como resultado real para luego compararlo con dimensiones físicas reales. Finalmente, la Validación del proceso de modelización se realiza exponiendo la solución del problema.

En cuanto a los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales presentes en el caso “Mañanas Matemáticas” propone una actividad cotidiana para los estudiantes como es el momento de ducharse, lo que concuerda con Bressan & Gallego, citados por Henao & Vanegas (2012), en realizar actividades de modelado con situaciones realistas cuyo contenido matemático debe ser construido por los



estudiantes mediante el uso de estrategias informales y su intuición lo que produce análisis, discusiones y toma de decisiones esenciales para posteriormente ser la base para la formalización de conceptos formales.

Respecto a la articulación de la matemática escolar con la modelación matemática es una buena estrategia para la enseñanza de las matemáticas, pues de acuerdo a Blomhoj (2008) la modelación matemática tiende puentes, es decir, concreta la conexión entre la experiencia de la vida diaria y la matemática, lo que provoca una motivación al aprendizaje proveyendo un apoyo cognitivo en las conceptualizaciones matemáticas y así entender situaciones de la vida diaria.

Por otro lado, la modelación matemática permite distintos tipos de habilidades, específicamente, la distinción entre las habilidades de modelado matemático y resolución de problemas la cual se ve claramente, debido a que la modelización es un medio para desarrollar competencias generales y actitudinales, según Blum y Niss (1991), citado por García (2005). Cabe destacar que el estudiante se ve cautivado



y motivado intelectualmente por la elección de la tarea, como lo afirma Greefrath y Vorhölter, citado por Carcamo (2017).

La metodología de enseñanza de Estudio de Casos propone un relato ficticio de lo que sucedería al momento de realizar una actividad de modelado matemático con el objetivo de preparar a los profesores en formación en cuanto a primeramente la elección de la tarea de modelación, el papel que juegan tanto el docente como los estudiantes. Además, de cómo guiar a los grupos que no han logrado superar tal etapa de la tarea, es decir, anticipándose a posibles dificultades, identificar las distintas subcompetencias presentes para la resolución del problema.

Lo anterior, permite a los profesores motivar y cautivar a los estudiantes intelectualmente en el inicio de la clase, pues el hecho de que se prevea la mayor cantidad de situaciones posibles permite guiar al estudiante aún en el error y regular su motivación durante la actividad. Destacando que la comunicación es necesaria para motivar y cautivar, siendo esta una de las ventajas de la misma metodología de estudio de casos (Reyes, 2011).



5.3 Conclusión

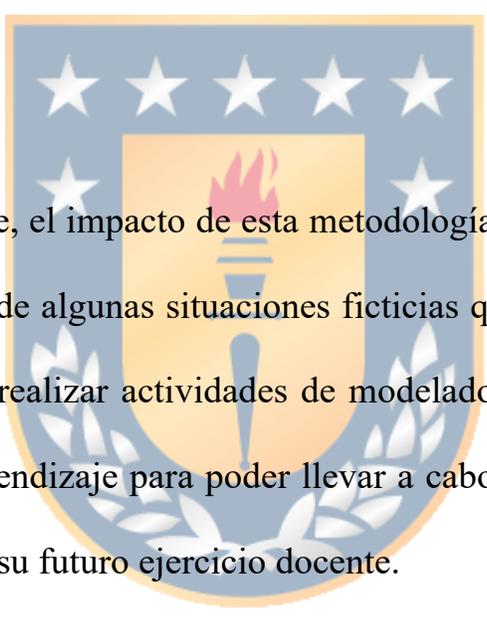
A partir del análisis de taller se puede concluir que:

La incidencia de la metodología de estudio de casos en los profesores en formación, enfocada en la enseñanza depende principalmente del dominio en relación a la correcta identificación de las subcompetencias presentes en el ciclo de modelación utilizado, en esta ocasión el de diagnóstico/evaluación. Efectivamente, durante el análisis del taller la identificación de las subcompetencias fue facilitada gracias al esquema entregado a los participantes, además de la explicación de estas al presentar dudas.

En relación a la presencia de los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales en el caso “Mañanas Matemáticas”, se obtuvo un impacto positivo debido a la elección del objetivo matemático, que cumplía con los contenidos conceptuales y procedimentales, además la forma de trabajo empleada en el caso permitió el desarrollo de los contenidos actitudinales. Cabe destacar que la correcta elección de la tarea de modelización es esencial para el cumplimiento de tales contenidos y/u objetivos, además de ser esta quien motive al estudiante



al comenzar la actividad, pero es necesario que se regule la motivación durante la misma, otorgando nuevas problemáticas; cuyo rol del docente es esencial para el desarrollo efectivo de estas actividades. Asimismo, es una estrategia didáctica para articular la matemática escolar con la modelación matemática, cumpliendo así con las habilidades requeridas para desenvolverse en la sociedad, siendo los principales agentes de cambio.



Finalmente, el impacto de esta metodología fue positivo, debido a la presentación de algunas situaciones ficticias que se podrían producir al momento de realizar actividades de modelado matemático, siendo una fuente de aprendizaje para poder llevar a cabo actividades similares de modelado en su futuro ejercicio docente.

5.4 Sugerencias

Al concluir esta investigación, existen varias ideas que se deben considerar. Primeramente, es necesario motivar e incentivar a los docentes de la Universidad a incorporar la metodología de estudio de casos en asignaturas del eje de enseñanza de la matemática, dado que es



una herramienta para que futuros profesores conozcan las dificultades, que se presentan en el transcurso de una clase, mucho antes que la experimenten por ellos mismos al momento de realizar las practicas profesionales, además de fomentar el uso de metodologías constructivas en su desarrollo como futuro docente.

Debido al impacto positivo que produjo la realización del taller para el análisis del caso “Mañanas Matemáticas” con los profesores en formación que habían cursado una asignatura de Modelación Matemática, resultaría una situación de importancia si se pudiera realizar la actividad de modelado propuesta en el caso en liceos de distintas realidades sociales, por los participantes del taller para analizar distintas dificultades, mejoras o sugerencias a tal actividad.

En relación a la construcción del caso “Mañanas Matemáticas”, que significó esfuerzo y tiempo considerable, sería un gran aporte incentivar a los docentes especializados a crear actividades de modelación matemática para tener acceso a ellas con los contenidos curriculares pertinentes y sugerencias para su posterior aplicación como una forma



de ayuda en el proceso de enseñanza y aprendizaje de nuestros estudiantes.





6 ANEXOS

6.1 Caso “Mañanas Matemáticas”





Estudio de Caso: Mañanas Matemáticas

A las 5 de la tarde, como todos los miércoles, se reúne el Departamento de Matemática de un colegio particular subvencionado ubicado en la ciudad de Los Ángeles, bajo la consigna de “Prácticas Pedagógicas”, la cual consiste en una mesa redonda que tiene por finalidad el que cada profesor exponga el avance de su curso y se analicen las estrategias o metodologías óptimas dependiendo de las características de cada curso.



En esta ocasión, el profesor Javier, un joven docente que desea motivar a sus estudiantes y hacer que experimenten por sí mismos que las matemáticas son entretenidas, le asignaron este año un curso nuevo de primero medio, el cual durante las primeras clases se ha mostrado con un alto grado de rechazo hacia las matemáticas, acompañado de una desmotivación constante.

En este contexto, ha expuesto su problemática al Departamento de Matemática de la manera siguiente:

Javier: ¿Cómo puedo presentar de una manera distinta a la habitual el concepto de pendiente de una recta?

En relación con esta situación, la profesora Andrea, la cual cuenta con mayor experiencia en el departamento, propone lo siguiente:

Andrea: Si quieres captar la atención de tus alumnos, debe ser con algo cotidiano, pero a la vez novedoso, y sin olvidar el objetivo de la actividad.

Creación de la situación real

Mientras el profesor Javier pensaba, se percató de un mensaje escrito en el fichero ubicado en el centro de la sala de profesores, donde se anotan los avisos e informaciones importantes por parte de los directivos del colegio, que decía: “FELICITACIONES AL DEPARTAMENTO DE BIOLOGÍA POR LAS ACTIVIDADES DE EFICIENCIA EN EL USO DE LOS RECURSOS NATURALES EN CONMEMORACIÓN DEL DÍA DE LA TIERRA”.



Javier: ¡El agua!... Eso es.

Andrea: ¿El agua?

Javier: Sí, debemos cuidar el agua..., es decir, utilizarla eficientemente.

Andrea: Sí, eso es verdad... pero ¿qué tiene que ver con lo que estábamos hablando?

Javier: ¿En qué ocasión los chicos gastan más agua o, mejor dicho, desperdician mayor cantidad de agua?

Andrea: En la ducha... especialmente las chicas.

Javier: ¡Exacto!

Andrea: ¡Perfecto!

La próxima semana el profesor Javier presenta la siguiente imagen y el objetivo de la actividad a los estudiantes.

CLASE 1:

Mañanas Matemáticas

Objetivo: Conocer cuánta agua utilizo en una ducha.



El profesor Javier solicita a los estudiantes que formen equipos.

Situación real: Comprender

Los estudiantes, luego de ver el problema, comenzaron a hacer muchas preguntas. Uno de los alumnos, Benjamín, quien es muy curioso, preguntó sobre el problema.



Benjamín: Profesor, ¿el problema no tiene ningún dato?

P. Javier: No. Lo primero que tienes que identificar es el problema, qué es lo que se quiere conocer.

Benjamín: El problema es saber cuánta agua utilizo realmente en una ducha, considerando también el tiempo cuando no estoy bajo la ducha.

P. Javier: Muy bien. Es importante saber cuánto tiempo usamos el agua de la ducha durante la mañana.

Andrés: Pero profesor eso depende de muchas cosas.

P. Javier: ¿Cómo que cosas?

Andrés: Si mis hermanas están atrasadas en la mañana, son capaces de apagar el calefón y con suerte alcanzo a bañarme 2 minutos.

Dado este comentario, toda la clase comenzó a reír, por lo que el profesor Javier intervino.

P. Javier: Lo importante, como dijo Benjamín, es saber cuánta agua utilizo en la ducha durante la mañana.

Alejandra: ¿Pero con qué la podemos medir?

Andrés: Con una jeringa.

Todo el curso se comienza a reír, pues no es posible utilizar solamente una jeringa para ducharse. Luego, una alumna sugirió que debía ser con algo más grande.

Sofía: ¡Con una botella!

Andrés: Pero tampoco alcanzaría, porque se rebalsaría.

Benjamín: ¡No!, con un balde, de esos que se usan en la cocina.

Andrés: Y ¿por qué?

Benjamín: Porque está graduado.

P. Javier: Entonces vamos a utilizar un balde para medir el agua utilizada. Ahora, imaginemos que nos vamos a duchar. ¿Qué es lo primero que hacemos?

Sofía: Echarme champú en el pelo.

P. Javier: Sí, pero ¿qué hacemos primero?

Benjamín: Abrir la llave del agua.

P. Javier: Luego, ¿qué sucede?

Andrés: ¡Sale agua helada!

Benjamín: ¡Sí! y después se calienta.

P. Javier: ¡Así es! Por esta razón vamos a considerar dos situaciones.

Modelo de la situación: Simplificar/estructurar el modelo real

El profesor comunica a sus estudiantes tales situaciones y, luego, las escribe en la pizarra.



SITUACIÓN 1: AL ABRIR LA LLAVE DEL AGUA, ENSEGUIDA SALE AGUA CALIENTE.

SITUACIÓN 2: AL ABRIR LA LLAVE DEL AGUA, PASARAN ALGUNOS MINUTOS PARA QUE EL AGUA ESTÉ EN CONDICIONES PARA DUCHARSE.

Andrés: Profesor, para la Situación 2, ¿cómo vamos a medir el agua que no se ocupa?

P. Javier: Midiendo con un balde graduado los litros de agua mientras ésta se calienta.

A continuación, el profesor comunica la tarea para la próxima clase y luego la escribe en la pizarra.

P. Javier: La tarea para la próxima clase consistirá en tres partes:

Primera parte: Medir los litros de agua que se pierden mientras ésta se calienta.

Segunda parte: Medir el tiempo que demora en llenarse el balde.

Tercera parte: Medir el tiempo que demora cada integrante de la familia en ducharse.

Además, deben traer la foto del balde que utilizaron. Y no olviden que en la imagen debe aparecer la graduación o capacidad del balde.

Para asegurarse que todos los alumnos entiendan cómo hacer el registro de los datos, el profesor realiza las siguientes preguntas:

P. Javier: Para registrar tales mediciones, ¿qué necesito usar?

Sofía: ¡El cuaderno!

P. Javier: Sí, ¿qué más?

Andrés: El balde.

Benjamín: Un cronómetro, pero podemos utilizar el celular.

P. Javier: ¡Genial! Ahora, ¿desde qué momento inicio el cronómetro?

Sofía: ¡Desde que se abre la llave del agua!

P. Javier: Muy bien. Y después ¿qué hay que hacer?

Andrés: Anotar los datos, luego ducharse y lo demás.

Modelo matemático: *Matematizar y trabajar matemáticamente*

CLASE 2:

El profesor les pide a los equipos que compartan con el curso sus imágenes. Algunas de estas imágenes son las siguientes:



El profesor Javier se dirige a los estudiantes y pregunta:

P. Javier: ¿Cuáles fueron los datos obtenidos?

Sofía: Mi balde de 18 litros demoró 6 minutos en llenarse.

Andrés: El mío, también de 18 litros, demoró 5 minutos.

Benjamín: Profesor, mi balde demoró en llenarse el mismo tiempo que el de Andrés, pero era de 15 litros, 3 litros menos de agua que Andrés. ¿Cómo es posible?

Sofía: Creo que depende de la velocidad con que sale el agua de la llave.

P. Javier: ¡Muy bien! A eso le llamaremos *flujo de agua*, el cual es uno de los factores que influye en la resolución del problema, además del tipo de calefón que se utilice.

Después de la conversación realizada entre el profesor Javier y sus alumnos, se llega al acuerdo que en la Situación 1 (equipo de Sofía y Benjamín), mencionada anteriormente, se considerará un calefactor eléctrico (cuya agua caliente se obtiene de forma inmediata dado que consta con un tanque de reserva de agua), y en la Situación 2 (equipo de Alejandra y Andrés), un calefón automático que ocupa en promedio 7 litros de agua para que ésta se caliente.

Cabe destacar que el profesor en este proceso no intervino directamente, sino que su papel fue de guía y moderador de las actividades.

Luego de pasados 20 minutos, comenzaron a bosquejar el problema a través de representaciones matemáticas y, al pasar por los lugares de cada uno de los equipos, el profesor observó lo siguiente:

Equipo de Sofía y Benjamín:

$A =$ Agua usada en la ducha.
 $f =$ Flujo del agua.
 $t =$ Tiempo en la ducha.

$$A = \frac{f}{t}$$

El profesor Javier hace la siguiente aclaración:



P. Javier: Para comprobar la ecuación que propusieron, hagan un análisis dimensional, es decir, hagan un análisis usando las medidas y unidades de cada variable que definieron.

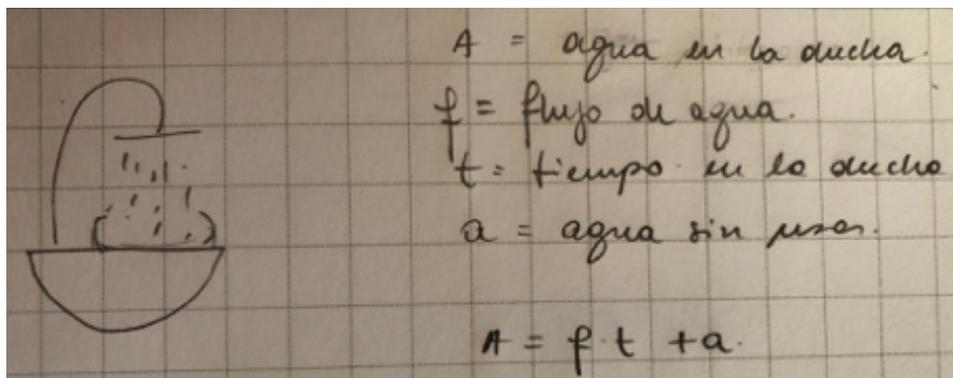
Benjamín: No me queda en litros el agua.

P. Javier: Entonces tienes que arreglar la fórmula.

Benjamín: Está bien.

Luego de la aclaración, el profesor vuelve a pasar por los puestos de los estudiantes y ve lo siguiente:

Equipo de Alejandra y Andrés:



Al pasar el tiempo, los estudiantes comenzaron a preguntar al profesor.

Benjamín: Ahora, ¿qué tenemos que hacer?

P. Javier: Dar solución a la problemática planteada: Conocer cuánta agua utilizo en una ducha.

Alejandra: Pero ¿cómo lo hacemos?

P. Javier: Ya definieron las variables y las constantes, entonces ahora...

Sofía: ¡Debemos calcular el flujo de agua!

Andrés: ¡Tenemos que reemplazar los datos de ambas situaciones!

P. Javier: Sí. Para eso debemos saber cuánta agua se utiliza en un tiempo determinado.

Luego de pasados unos 10 minutos aproximadamente, el profesor Javier comienza a supervisar el desarrollo de los equipos y observa lo siguiente:



Equipo de Sofía y Benjamín:

$A =$ agua en la ducha (litros)
 $f =$ flujo del agua
 $t =$ tiempo en la ducha (minutos)

Situación 1: Al abrir el agua de la llave enseguida sale agua caliente.

litros de agua	tiempo (minutos)
18	6

$f = \frac{\text{litros de agua}}{\text{tiempo (min)}}$ $f = \frac{18 \text{ L}}{6 \text{ min}} = 3 \text{ L/min.}$

$A = f \cdot t$

$A = 3 \cdot t$





Equipo de Alejandra y Andrés:

Situación 2: Al abrir el agua pasan algunos minutos para que el agua esté caliente.

$$f = \frac{\text{litros de agua}}{\text{tiempo}} = \frac{18 \text{ L}}{5 \text{ min}} = 3,6 \text{ L/min.}$$

Datos

$$f = 3,6 \text{ L/min.}$$
$$a = 7 \text{ L.}$$
$$A = f \cdot t + a$$
$$A = 3,6 \cdot t + 7.$$

son 7 litros de agua en 2 minutos para que el agua esté caliente.

Los estudiantes comienzan a preguntar:

Alejandra: ¿Qué más tenemos que hacer?

Andrés: Sí. Tengo la misma duda.

P. Javier: Ahora, vean cuánta agua utiliza cada integrante de su familia, porque ya conocen cuánto tiempo toma cada uno para ducharse.

Sofía: Y ¿en dónde lo hacemos?

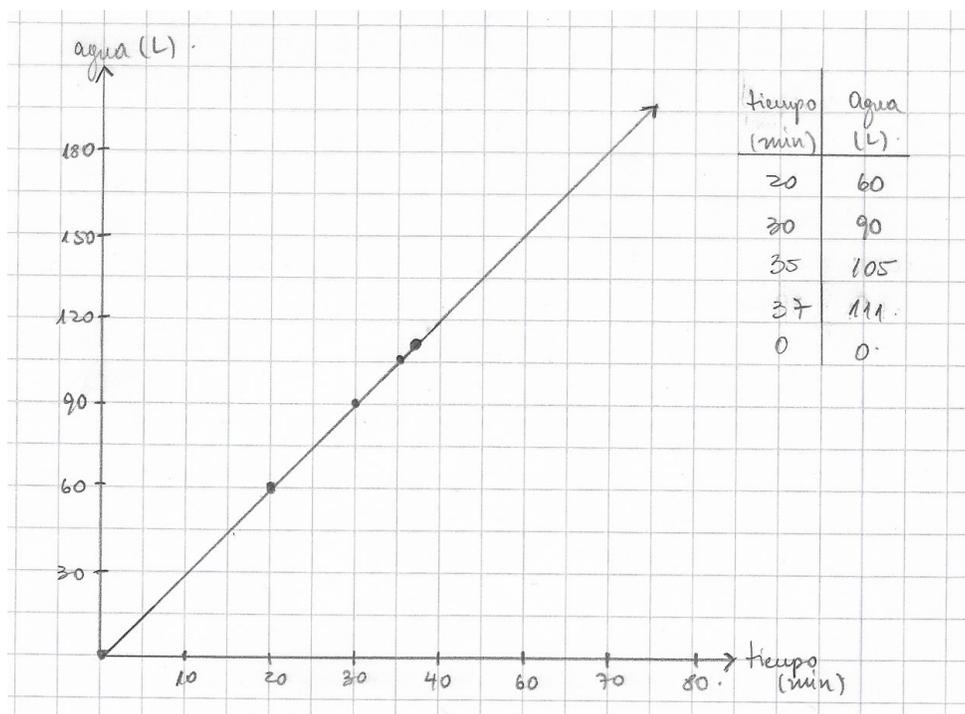
P. Javier: Lo pueden hacer en una tabla con los nombres de cada uno de los integrantes de la familia y la cantidad de agua que utilizan para ducharse.

Después de completar las tablas, el profesor solicita a cada equipo representar sus resultados en un gráfico. Luego de unos 15 minutos, aproximadamente, observa lo siguiente:



Equipo de Sofía y Benjamín:

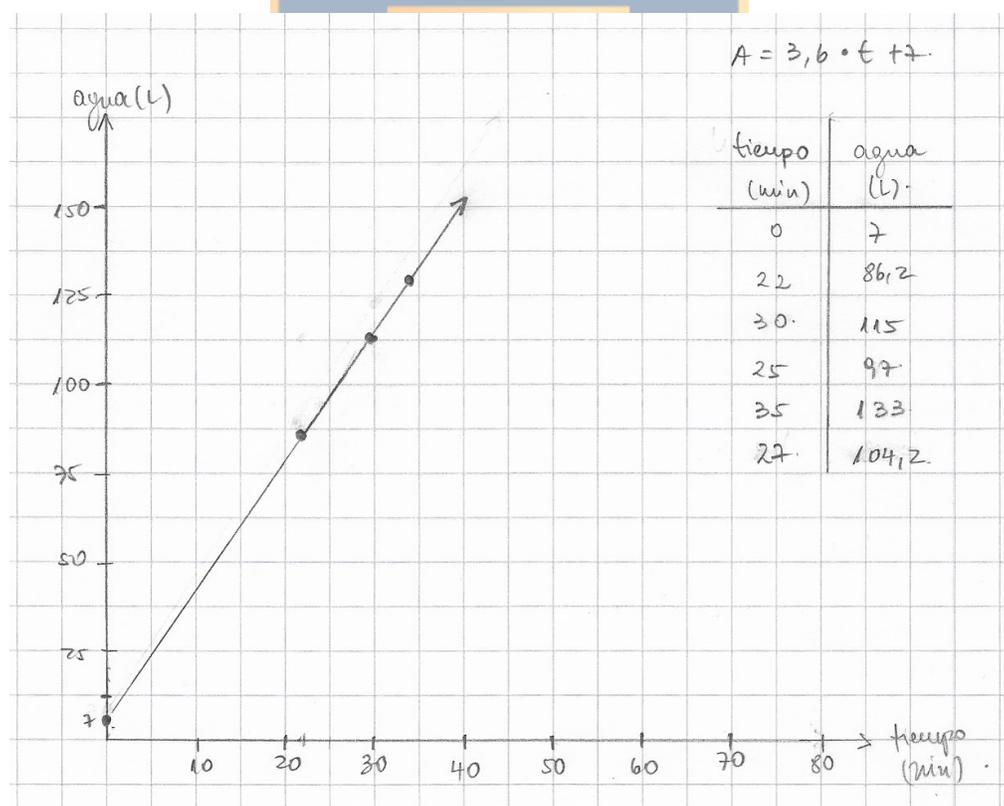
Familia	Tiempo (min)	Agua (L)
Papá	20	60
Mamá	30	90
Jaucia	35	105
Sofía	37	111





Equipo de Alejandra y Andrés:

Familia	Tiempo (min)	Agua (L)
Papa	22	86,2
Roma	30	115
Jeremías	25	97
Lucía	35	133
Andrés	27	104,2





Resultados reales: Interpretar y validar

Andrés: Profesor, mi papá ocupa solamente 86,2 litros de agua al ducharse. Ni mi hermano menor utiliza tan poca agua.

Sofía: Profesor, ¿cómo podemos asegurar que los valores que obtenemos son correctos?

P. Javier: Como se han dado cuenta, todos han obtenidos valores distintos, pero muy parecidos. Si los resultados obtenidos se encuentran en el rango de 50 a 140 litros, entonces están en relación con la realidad.

Al finalizar la clase, el profesor solicita a los alumnos traer para la próxima clase cartulinas y plumones para la creación de pósteres.

Resultados reales: Presentar la situación real y el modelo de la situación

CLASE 3

El profesor pide a cada equipo que realice un póster (cuyo tamaño no exceda la mitad de un pliego de cartulina) de los resultados y conclusiones para dar respuesta al problema planteado.

Posteriormente, cada equipo expone ante sus compañeros como resolvieron el problema.

Al finalizar cada exposición, el profesor pide que dejen puestos en la pizarra los pósteres. Luego, realiza las siguientes preguntas:

P. Javier: En relación con los gráficos que se encuentran en la pizarra, ¿qué se formó al unir todos los puntos?

Estudiantes: ¡UNA RECTA!

P. Javier: ¡Exacto! Ahora, ¿cómo se representa el *flujo de agua* en cada gráfico?

Los estudiantes de cada equipo empezaron a conversar entre ellos, y presentaron la siguiente interrogante:

Benjamín: ¿Por qué la recta de mi gráfico, en comparación con la del equipo de Andrés, es diferente?

P. Javier: ¿Cuáles son las diferencias que notas Benjamín?

Benjamín: Mi recta está menos inclinada que la de Andrés.

A consecuencia de lo anterior, el profesor presenta el ejemplo de la velocidad (km/h) de un automóvil con el objetivo de asociar el flujo de agua con el concepto de pendiente de una recta.



P. Javier: Consideremos la situación siguiente: *El fin de semana que viene realizaré un viaje en automóvil con mi familia, aún no decido el destino, pero tengo dos opciones. Por problemas de presupuesto, debo gastar la menor cantidad de combustible posible y, según el gasto de combustible, tomaré la decisión de qué lugar visitar.*

Andrés: ¿Cuáles son sus opciones profesor?

P. Javier: Unas de las opciones es visitar el campo de mis abuelos que se encuentra a 45 km de Los Ángeles y me demoro 30 minutos en llegar.

Sofía: Entonces profesor viajará a 90 km/h.

P. Javier: ¿Cómo obtuviste ese resultado?

Sofía: Realizando una división entre la distancia que hay al campo de sus abuelos y el tiempo que demora en llegar.

Benjamín: Profesor, ¿cuál es la otra opción?

P. Javier: Ir a la comuna de Quilleco, a una feria costumbrista, que se encuentra a 40 km de Los Ángeles y me demoro 40 minutos en llegar.

Sofía: En esta ocasión viajará a 60 km/h.

P. Javier: Entonces jóvenes, ¿cuál destino elijo?

Andrés: Ir al campo de sus abuelos.

P. Javier: ¿Por qué?

Andrés: Porque en la primera opción recorre 30 km más en una hora en comparación a la segunda opción.

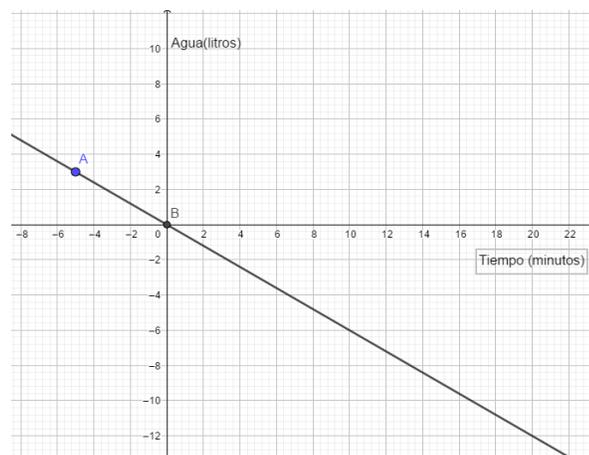
P. Javier: Si volvemos al problema, ¿cuál es la explicación de las diferentes inclinaciones de las rectas presentes en los gráficos?

Benjamín: Debe ser por el distinto flujo de agua. En mi caso el flujo es menor en comparación al flujo del equipo de Andrés.

Sofía: Entonces ¿la inclinación de la recta depende del flujo de agua?

P. Javier: ¡Eso es! A esta inclinación la llamaremos **pendiente de una recta**. Ahora, analicen el siguiente gráfico.

El profesor presenta el siguiente gráfico a los estudiantes:





Posteriormente, el profesor se dirige a los estudiantes y realiza la siguiente pregunta:

P. Javier: ¿Cómo es el flujo en este gráfico?

Benjamín: Está mal el gráfico profesor, porque todas nuestras rectas están ubicadas en el primer cuadrante.

Sofía: Tampoco existe que alguien tome una ducha y se demore -2 minutos.

P. Javier: ¡Muy bien!

Luego, el profesor expone la siguiente interrogante:

P. Javier: ¿Por qué en todos los gráficos de la Situación 1 la recta pasa por el origen?

Debido a las expresiones de duda por parte de los estudiantes, el profesor expresa:

P. Javier: Recuerden qué datos utilizaron en la Situación 1.

Benjamín: Se consideró un calefactor eléctrico en el que el agua caliente es inmediata.

Andrés: Entonces no hay que esperar que el agua se caliente y no se desperdicia agua.

Luego, intervino el profesor:

P. Javier: Y en la Situación 2, ¿por qué no pasa por el origen?

Sofía: Pues se tomó como referencia un calefón automático, en el que se necesita esperar unos minutos para que el agua se caliente y, en ese tiempo, hay agua que no se utiliza, pero que se debe considerar para obtener cuántos litros de agua en total se utilizaron para ducharse.

Estudiantes: ¡Sí! Eso es.

P. Javier: En esta situación, ¿cómo puedo ahorrar agua?

Andrés: Utilizando un calefón que demore menos en calentar el agua.

P. Javier: Y ¿de qué depende?

Benjamín: De la marca y la tecnología que utilice.

Sofía: Y cuántos años tenga.

P. Javier: Está bien, entonces los litros de agua fría que no se utilizan, debido a que se están calentando, representan el **coeficiente de posición** de la recta.

Andrés: Entonces en el gráfico el coeficiente de posición, ¿es donde la recta corta al eje y?

P. Javier: ¡Muy bien! Ahora Andrés, ¿cómo se puede interpretar el coeficiente de posición?

Andrés: Es la cantidad de agua fría que no se utiliza hasta que se calienta y empieza a contar el tiempo de la ducha.

P. Javier: ¡Eso es!

Posteriormente el profesor preguntó:



P. Javier: De las dos situaciones, ¿en cuál de ellas se puede dar un uso más eficiente del agua?

Estudiantes: En la Situación 1.

P. Javier: ¿Por qué?

Sofía: No se desperdicia agua esperando que se caliente.

Andrés: Pero si en nuestra casa tenemos un calefactor eléctrico, para ahorrar agua hay que hacer una ducha corta. Así también cuidamos el agua, independiente de si se tiene o no un calefactor eléctrico.

P. Javier: Ahora, respondan la pregunta: ¿cuánta agua utilizan para ducharse?

Sofía: 111 litros.

Andrés: 104 litros aproximadamente.

P. Javier: Como dijo Andrés, independiente del aparato que se utilice para calentar el agua, la clave es la duración de una ducha.

Al cierre de la clase, el profesor formaliza los conceptos de función lineal y función afín, explicando que una función lineal tiene la forma $f(x) = mx$, donde $m \in \mathbb{R}$, siendo ésta la **pendiente**, la cual da la inclinación a la recta. Además, da a conocer la forma de la función afín $f(x) = mx + n$, donde $m, n \in \mathbb{R}$, siendo n el **coeficiente de posición**, el cual permite conocer la intersección de la recta con el eje y .

Por último, el profesor señala que la función lineal siempre pasará por el origen del plano cartesiano, mientras que la función afín no pasará por el origen. De la misma manera, menciona que las funciones que modelan ambas situaciones, siempre se representan como rectas con inclinación ascendente, pues a medida que pasa el tiempo, aumenta el consumo de agua.



6.2 Bitácora del Taller





Taller para el análisis del Estudio de Caso:

Mañanas Matemáticas

Lugar: Sala de Recursos Didácticos.

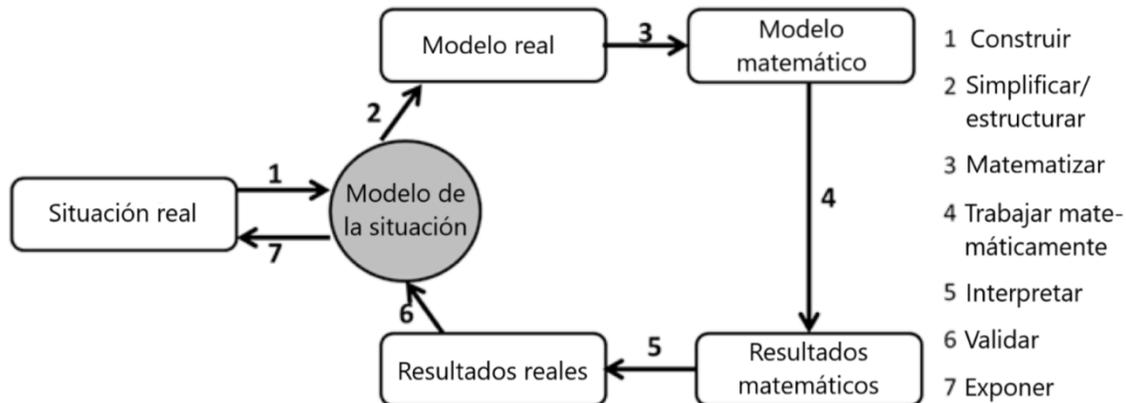
En primer lugar, se da la bienvenida a los profesores en formación, agradeciendo el que puedan estar presentes para cooperar en el desarrollo de nuestro Seminario de Título.

Se da a conocer el objetivo de la investigación: **“Determinar el impacto que tiene la metodología de Estudio de Casos en el desarrollo de la habilidad de Modelamiento Matemático en Profesores de Matemática en formación.”**

Se comunica a los participantes que la metodología de Estudio de Casos consiste en *“representaciones verosímiles de eventos que ocurren en las aulas, que nos permitan integrar a la educación superior un evento real que los estudiantes pueden analizar, discutir y observar desde diversas y múltiples perspectivas, para obtener una comprensión más profunda acerca de lo que realmente ocurre”* (Reyes, 2011, p.34). Además, esta metodología tiene el objetivo de dar a conocer al profesor en formación el cómo enfrentar una situación escolar en la cual deba *“responderle a un estudiante de un colegio que percibe que el resultado que dio a un problema matemático está errado, pero no logra entender por qué su modo de resolver le funciona en algunas ocasiones y en otras no”* (Reyes, 2011, p.26). Una de las mayores ventajas que tiene esta metodología es que contiene las tres “C” de la formación, las cuales son: *complejidad*, enfoque de *construcción* hacia el aprendizaje y la *comunicación*.



Se recuerda el ciclo de modelación utilizado, específicamente el ciclo para propósitos de diagnóstico/evaluación:



Los moderadores entregan a cada uno de los participantes una copia impresa del caso “Mañanas Matemáticas”. A continuación, se designan los papeles (de los estudiantes Sofía, Benjamín, Alejandra y Andrés presentes en el caso) y, posteriormente, se procede a analizar el caso en cuestión y dar respuesta a las preguntas siguientes:

1. ¿Fueron los estudiantes capaces de identificar los elementos que son relevantes para dar solución al problema, es decir, capaces de construir el Modelo de la Situación a partir de la Situación Real?
2. ¿Fueron los estudiantes capaces de simplificar el Modelo de la Situación para obtener el Modelo Real?
3. ¿Fueron los estudiantes capaces de estructurar el Modelo de la Situación para obtener el Modelo Real?



4. ¿Fueron los estudiantes capaces de matematizar el Modelo Real para obtener el Modelo Matemático?
5. ¿Fueron los estudiantes capaces de trabajar matemáticamente el Modelo Matemático para obtener los Resultados Matemáticos?
6. ¿Fueron los estudiantes capaces de interpretar los Resultados Matemáticos para obtener los Resultados Reales?
7. ¿Fueron los estudiantes capaces de validar los Resultados Reales para contrastarlos con el Modelo de la Situación?
8. ¿Fueron los estudiantes capaces de presentar la solución al problema, es decir, exponer la solución a la Situación Real planteada?

Finalmente, se solicita a los profesores en formación responder las preguntas siguientes:

1. ¿Se guía el Caso de acuerdo con las subcompetencias presentes en el desarrollo de la habilidad de modelamiento matemático?
2. ¿Propicia el Caso que los estudiantes relacionen el flujo de agua con el concepto de pendiente de una recta?
3. ¿Propicia el Caso que los estudiantes reconozcan las características de las funciones lineal y afín?
4. ¿Propicia el Caso en los estudiantes el ejercicio de los contenidos actitudinales de respeto y tolerancia?
5. ¿Propicia el Caso en los estudiantes el ejercicio del contenido actitudinal de cumplir con lo solicitado?



6. ¿Propicia el Caso en los estudiantes el ejercicio del contenido actitudinal de atender, tanto las dudas como los aciertos?
7. ¿Propicia el Caso en los estudiantes el desarrollo del contenido procedimental de utilización de conocimientos previos?
8. ¿Propicia el Caso en los estudiantes el desarrollo del contenido procedimental de recolección de datos?
9. ¿Propicia el Caso en los estudiantes el desarrollo del contenido procedimental de probar el modelo obtenido?
10. ¿Contribuye la metodología de enseñanza de Estudio de Casos a articular la matemática escolar por medio del descubrimiento de la relación existente entre el flujo de agua y el concepto de pendiente de una recta?
11. ¿Cuál sería la mejor estrategia para implementar en la sala de clases lo descrito en el Caso?
12. ¿Ayuda el Caso a distinguir las habilidades de modelamiento matemático y de resolución de problemas?
13. ¿Permiten las actividades de modelación matemática motivar a los estudiantes y cautivarlos intelectualmente?
14. Considerando su formación inicial en modelamiento matemático, ¿están los profesores en formación capacitados para crear y aplicar actividades de modelación matemática?



6.3 Transcripción del Taller





Transcripción Focus Group

Moderador 1: Buenas tardes. Les damos la bienvenida a cada uno. Tenemos por nombre la actividad “Mañanas Matemáticas”. El objetivo de la investigación es el siguiente:

“Determinar el impacto que tiene la metodología de Estudio de Casos en el desarrollo de la habilidad de Modelamiento Matemático en Profesores de Matemática en formación.”

¿Qué es el estudio de casos? Bueno, consiste en:

“representaciones verosímiles de eventos que ocurren en las aulas, que nos permitan integrar a la educación superior un evento real que los estudiantes pueden analizar, discutir y observar desde diversas y múltiples perspectivas, para obtener una comprensión más profunda acerca de lo que realmente ocurre” (Reyes, 2011, p.34).

En conclusión lo que nos quiere dar el estudio de casos es un análisis a priori de lo que va a ocurrir en la sala de clases y nosotros como profesores nos debemos de preparar para llegar a la sala y solucionar los problemas que los estudiantes pueda ir teniendo. Eso es lo que nos da a entender

“responderle a un estudiante de un colegio que percibe que el resultado que dio a un problema matemático está errado, pero no logra entender por qué su modo de resolver le funciona en algunas ocasiones y en otras no” (Reyes, 2011, p.26).

Una de las ventajas que tiene la metodología de estudio de caso es que contiene las tres C ¿Cuáles son esas? Tiene complejidad, tiene un enfoque de construcción hacia el aprendizaje y, por ultimo, la comunicación, que sería en el caso de nosotros.

Moderador 2: Bueno, para recordar un poco, vamos a ver, vamos a recordar el ciclo de modelación que está presente, enfocado, exclusivamente, en la subcompetencias, que fue el que usamos para construir el caso, el que tienen ustedes. Para poder el alumno pasar de la situación real tiene que el profesor, le expone al alumno a modelar la situación, su competencia está en construir, se pretende que el alumno describa verbalmente el problema, identificando que considerar relevante para su resolución, ahí tiene que ver que datos necesita, que materiales va a ocupar. Posteriormente, el alumno para poder formular el modelo real el debe estructurar el modelo de la situación considerando una versión simplificada que sería nuestro modelo matemático. Entonces, lo que quiere ahí es definir variables, parámetros o constantes que él va a ocupar para resolver el problema. Posteriormente, para poder matematizar su modelo el estudiante debe lograr crear formulas, es decir, crea un modelo matemático en función de las variables que definió anteriormente y los datos que ha recolectado y que va a ocupar. Posteriormente, el debe trabajar matemáticamente para usar los valores más adecuados para dar solución al problema y, después, debe interpretar esos resultados a un resultado real para, posteriormente, validarlo y se compara con las dimensiones físicas, reales que él va a tener. Y, posteriormente, el estudiante expone cual es su resultado, como ya lo validó, ya puede dar solución al problema.

Este esquema que ya lo vimos en clases es el que es para diagnóstico y evaluación, fue el que hicimos y utilizamos como guía para hacer el caso que tiene ustedes. Ahora vamos a analizarlo, es por ello que cada uno tiene su personaje y la idea es que cuando le salga en el dialogo su nombre, su personaje tiene que decir, más o menos, que pasa. Solamente lo que está en el análisis del caso.

Bueno, el estudio de caso se llama “Mañanas matemáticas” y todo lo que no está fuera de los recuadros son acotaciones que nosotros hacemos. Eso lo voy a leer yo. Moderador 1 va a ser el



Profesor Javier, Ángela (PF4) será Andrea (luego, Alejandra), Sofía va a ser Constanza (PF3) y Benjamín va a ser Matías (PF2), y Luis (PF1) va a ser Andrés.

Vamos a hacer pausas porque si se dan cuenta, cada una dice “clase 1”, “clase 2”, vamos a ir haciendo pausas y hacer algunas preguntas.

Comienzo del Análisis

Clase 1:

Moderador 2: A las 5 de la tarde, como todos los miércoles, se reúne el Departamento de Matemática de un colegio particular subvencionado ubicado en la ciudad de Los Ángeles, bajo la consigna de “Prácticas Pedagógicas”, la cual consiste en una mesa redonda que tiene por finalidad el que cada profesor exponga el avance de su curso y se analicen las estrategias o metodologías óptimas dependiendo de las características de cada curso.

En esta ocasión, el profesor Javier, un joven docente que desea motivar a sus estudiantes y hacer que experimenten por sí mismos que las matemáticas son entretenidas, le asignaron este año un curso nuevo de primero medio, el cual durante las primeras clases se ha mostrado con un alto grado de rechazo hacia las matemáticas, acompañado de una desmotivación constante.

En este contexto, ha expuesto su problemática al Departamento de Matemática de la manera siguiente:

Moderador 1: ¿Cómo puedo presentar de una manera distinta a la habitual el concepto de pendiente de una recta?

Moderador 2: En relación con esta situación, la profesora Andrea, la cual cuenta con mayor experiencia en el departamento, propone lo siguiente:

PF4: Si quieres captar la atención de tus alumnos, debe ser con algo cotidiano, pero a la vez novedoso, y sin olvidar el objetivo de la actividad.

Creación de la situación real

Moderador 2: Mientras el profesor Javier pensaba, se percató de un mensaje escrito en el fichero ubicado en el centro de la sala de profesores, donde se anotan los avisos e informaciones importantes por parte de los directivos del colegio, que decía: “FELICITACIONES AL DEPARTAMENTO DE BIOLOGÍA POR LAS ACTIVIDADES DE EFICIENCIA EN EL USO DE LOS RECURSOS NATURALES EN CONMEMORACIÓN DEL DÍA DE LA TIERRA”.



Moderador 1: ¡El agua!... Eso es.

PF4: ¿El agua?

Moderador 1: Sí, debemos cuidar el agua..., es decir, utilizarla eficientemente.

PF4: Sí, eso es verdad... pero ¿qué tiene que ver con lo que estábamos hablando?

Moderador 1: ¿En qué ocasión los chicos gastan más agua o, mejor dicho, desperdician mayor cantidad de agua?

PF4: En la ducha... especialmente las chicas.

Moderador 1: ¡Exacto!

PF4: ¡Perfecto!

Moderador 2: La próxima semana el profesor Javier presenta la siguiente imagen y el objetivo de la actividad a los estudiantes.

CLASE 1:

Mañanas Matemáticas

Objetivo: Conocer cuánta agua utilizo en una ducha.



El profesor Javier solicita a los estudiantes que formen equipos.

Situación real: Comprender

Moderador 2: Los estudiantes, luego de ver el problema, comenzaron a hacer muchas preguntas. Uno de los alumnos, Benjamín, quien es muy curioso, preguntó sobre el problema.



PF2: Profesor, ¿el problema no tiene ningún dato?

Moderador 1: No. Lo primero que tienes que identificar es el problema, qué es lo que se quiere conocer.

PF2: El problema es saber cuánta agua utilizo realmente en una ducha, considerando también el tiempo cuando no estoy bajo la ducha.

Moderador 1: Muy bien. Es importante saber cuánto tiempo usamos el agua de la ducha durante la mañana.

PF1: Pero profesor eso depende de muchas cosas.

Moderador 1: ¿Cómo que cosas?

PF1: Si mis hermanas están atrasadas en la mañana, son capaces de apagar el calefón y con suerte alcanzo a bañarme 2 minutos.

Moderador 2: Dado este comentario, toda la clase comenzó a reír, por lo que el profesor Javier intervino.

Moderador 1: Lo importante, como dijo Benjamín, es saber cuánta agua utilizo en la ducha durante la mañana.

PF4: ¿Pero con qué la podemos medir?

PF1: Con una jeringa.

Moderador 2: Todo el curso se comienza a reír, pues no es posible utilizar solamente una jeringa para ducharse. Luego, una alumna sugirió que debía ser con algo más grande.

PF3: ¡Con una botella!

PF1: Pero tampoco alcanzaría, porque se rebalsaría.

PF2: ¡No!, con un balde, de esos que se usan en la cocina.

PF1: Y ¿por qué?

PF2: Porque está graduado.

Moderador 1: Entonces vamos a utilizar un balde para medir el agua utilizada. Ahora, imaginemos que nos vamos a duchar. ¿Qué es lo primero que hacemos?

PF3: Echarme champú en el pelo.

Moderador 1: Sí, pero ¿qué hacemos primero?

PF2: Abrir la llave del agua.

Moderador 1: Luego, ¿qué sucede?

PF1: ¡Sale agua helada!

PF2: ¡Sí! y después se calienta.

Moderador 1: ¡Así es! Por esta razón vamos a considerar dos situaciones.

Modelo de la situación: *Simplificar/estructurar el modelo real*

Moderador 2: El profesor comunica a sus estudiantes tales situaciones y, luego, las escribe en la pizarra.



SITUACIÓN 1: AL ABRIR LA LLAVE DEL AGUA, ENSEGUIDA SALE AGUA CALIENTE.

SITUACIÓN 2: AL ABRIR LA LLAVE DEL AGUA, PASARAN ALGUNOS MINUTOS PARA QUE EL AGUA ESTÉ EN CONDICIONES PARA DUCHARSE.

PF1: Profesor, para la Situación 2, ¿cómo vamos a medir el agua que no se ocupa?

Moderador 1: Midiendo con un balde graduado los litros de agua mientras ésta se calienta.

Moderador 2: A continuación, el profesor comunica la tarea para la próxima clase y luego la escribe en la pizarra.

Moderador 1: La tarea para la próxima clase consistirá en tres partes:

Primera parte: Medir los litros de agua que se pierden mientras ésta se calienta.

Segunda parte: Medir el tiempo que demora en llenarse el balde.

Tercera parte: Medir el tiempo que demora cada integrante de la familia en ducharse.

Además, deben traer la foto del balde que utilizaron. Y no olviden que en la imagen debe aparecer la graduación o capacidad del balde.

Moderador 2: Para asegurarse que todos los alumnos entiendan cómo hacer el registro de los datos, el profesor realiza las siguientes preguntas:

Moderador 1: Para registrar tales mediciones, ¿qué necesito usar?

PF3: ¡El cuaderno!

Moderador 1: Sí, ¿qué más?

PF1: El balde.

PF2: Un cronómetro, pero podemos utilizar el celular.

Moderador 1: ¡Genial! Ahora, ¿desde qué momento inicio el cronómetro?

PF3: ¡Desde que se abre la llave del agua!

Moderador 1: Muy bien. Y después ¿qué hay que hacer?

PF1: Anotar los datos, luego ducharse y lo demás.

1. **Moderador 2:** Eso es en consideración, la primera clase. Entonces, ustedes creen que: ¿Fueron los estudiantes capaces de identificar los elementos que son relevantes para dar solución al problema, es decir, capaces de construir el Modelo de la Situación a partir de la Situación Real?

O sea, la primera parte del gráfico, situación real al modelo de la situación, pudieron construir de la situación real al modelo de la situación. Por ejemplo, recuerden que la primera parte se pretende que el alumno describa el problema, identificando variables que va a ocupar, que no, que necesita. ¿Creen que fue capaz o no?

PF1: Sí.

PF2: Sí, eso sí.



Moderador 2: Pero ¿Por qué fue así?

PF1: Porque comprendieron el problema primero y identificaron las variables, eso como la cantidad de agua, el tiempo para medirlo.

Moderador 2: Sí.

2. **Moderador 1:** ¿Fueron los estudiantes capaces de simplificar el Modelo de la Situación para obtener el Modelo Real?

PF3: Sí, consideraron el tiempo, tenían que utilizar un cronometro, vieron que el balde debía ser graduado. Lograron simplificarlo porque vieron la utilidad de cada una de las variables que ellos consideraron.

Moderador 2: ¿Y esas dos situaciones influyen en algo, en que se hayan separado en dos situaciones o hubiera sido mejor una y no las dos?

PF3: ¿Cómo? No entiendo.

Moderador 2: Por ejemplo, usaron dos situaciones, una donde el agua al abrir la llave salía caliente y la otra que debía esperar un tiempo para que se calentara ¿estuvo bien hacer esa distinción, o hubiera sido mejor una solamente?

PF3: Porque al final del problema dijeron que largara la llave hasta que terminara la ducha, entonces como que no se consideró, finalmente, en la tarea el agua caliente y el agua fría, por lo que entendí.

Moderador 2: ¿Todos están de acuerdo o...?

PF2: Es que sí, porque al final dice que, o sea, el niño busca, quiere desde el momento que comenzamos a cronometrar cuando abrimos la llave, entonces no, creo que no considera las dos situaciones, al final.

Moderador 2: Sigamos. Eso fue la clase 1.

Clase 2:

Modelo matemático: *Matematizar y trabajar matemáticamente*

CLASE 2:

Moderador 2: El profesor les pide a los equipos que compartan con el curso sus imágenes. Algunas de estas imágenes son las siguientes:

El profesor Javier se dirige a los estudiantes y pregunta:

Moderador 1: ¿Cuáles fueron los datos obtenidos?

PF3: Mi balde de 18 litros demoró 6 minutos en llenarse.

PF1: El mío, también de 18 litros, demoró 5 minutos.

PF2: Profesor, mi balde demoró en llenarse el mismo tiempo que el de Andrés, pero era de 15 litros, 3 litros menos de agua que Andrés. ¿Cómo es posible?

PF3: Creo que depende de la velocidad con que sale el agua de la llave.

Moderador 1: ¡Muy bien! A eso le llamaremos *flujo de agua*, el cual es uno de los factores que influye en la resolución del problema, además del tipo de calefón que se utilice.



Moderador 2: Después de la conversación realizada entre el profesor Javier y sus alumnos, se llega al acuerdo que en la Situación 1 (equipo de Sofía y Benjamín), mencionada anteriormente, se considerará un calefactor eléctrico (cuya agua caliente se obtiene de forma inmediata dado que consta con un tanque de reserva de agua), y en la Situación 2 (equipo de Alejandra y Andrés), un calefón automático que ocupa en promedio 7 litros de agua para que ésta se caliente.

Cabe destacar que el profesor en este proceso no intervino directamente, sino que su papel fue de guía y moderador de las actividades.

Luego de pasados 20 minutos, comenzaron a bosquejar el problema a través de representaciones matemáticas y, al pasar por los lugares de cada uno de los equipos, el profesor observó lo siguiente:

El profesor Javier hace la siguiente aclaración:

Moderador 1: Para comprobar la ecuación que propusieron, hagan un análisis dimensional, es decir, hagan un análisis usando las medidas y unidades de cada variable que definieron.

PF2: No me queda en litros el agua.

Moderador 1: Entonces tienes que arreglar la fórmula.

PF2: Está bien.

Moderador 2: Luego de la aclaración, el profesor vuelve a pasar por los puestos de los estudiantes y ve lo siguiente:

Al pasar el tiempo, los estudiantes comenzaron a preguntar al profesor.

PF2: Ahora, ¿qué tenemos que hacer?

Moderador 1: Dar solución a la problemática planteada: Conocer cuánta agua utilizo en una ducha.

PF4: Pero ¿cómo lo hacemos?

Moderador 1: Ya definieron las variables y las constantes, entonces ahora...

PF3: ¡Debemos calcular el flujo de agua!

PF1: ¡Tenemos que reemplazar los datos de ambas situaciones!

Moderador 1: Sí. Para eso debemos saber cuánta agua se utiliza en un tiempo determinado.

Moderador 2: Luego de pasados unos 10 minutos aproximadamente, el profesor Javier comienza a supervisar el desarrollo de los equipos y observa lo siguiente:

Los estudiantes comienzan a preguntar:



Alejandra: ¿Qué más tenemos que hacer?

PF1: Sí. Tengo la misma duda.

Moderador 1: Ahora, vean cuánta agua utiliza cada integrante de su familia, porque ya conocen cuánto tiempo toma cada uno para ducharse.

PF3: Y ¿en dónde lo hacemos?

Moderador 1: Lo pueden hacer en una tabla con los nombres de cada uno de los integrantes de la familia y la cantidad de agua que utilizan para ducharse.

Moderador 2: Después de completar las tablas, el profesor solicita a cada equipo representar sus resultados en un gráfico. Luego de unos 15 minutos, aproximadamente, observa lo siguiente:

Resultados reales: Interpretar y validar

Moderador 2: Al finalizar la clase, el profesor solicita a los alumnos traer para la próxima clase

PF1: Profesor, mi papá ocupa solamente 86,2 litros de agua al ducharse. Ni mi hermano menor utiliza tan poca agua.

PF3: Profesor, ¿cómo podemos asegurar que los valores que obtenemos son correctos?

Moderador 1: Como se han dado cuenta, todos han obtenidos valores distintos, pero muy parecidos. Si los resultados obtenidos se encuentran en el rango de 50 a 140 litros, entonces están en relación con la realidad.

cartulinas y plumones para la creación de pósteres.

3. **Moderador 2:** ¿Ustedes creen que fueron los estudiantes capaces de estructurar el Modelo de la Situación para obtener el Modelo Real?

PF1: Sí, pero les costó un poco, porque un caso no les daba en litros, necesitaron como... un poco de ayuda del profesor.

Moderador 2: Claro. Por eso cuando dice que el papel del profesor es de guía y moderador, el profesor tiene que hacer un sacrificio de equipo por equipo viendo como están trabajando porque, realmente, dejar solo a los chicos no es una opción.

PF1: Claro.

Moderador 2: ¿Alguna otra opinión?

4. **Moderador 1:** ¿Fueron los estudiantes capaces de matematizar el Modelo Real para obtener el Modelo Matemático?

PF1: Sí.

PF2: Sí.

Moderador 2: Recuerden que matematizar es lograr formular con los datos que ellos obtuvieron.

PF1: Sí, si al final obtuvieron los datos de toda la familia.

Moderador 2: Por ejemplo, el equipo que está equivocado, ¿Ustedes creen que es una buena técnica el haber usado el análisis dimensional? ¿Cómo ustedes lo hubiesen enfrentado? Cuando el equipo se confundió al definir las variables.

PF3: Yo creo que igual trabajaría con lo mismo, con unidades de medida, porque uno sabe que nos tiene que dar un valor y... quizás orientarlo por que también a los chicos les cuesta mucho trabajar con unidades de medida, entonces en esa parte, quizás orientarlo más de cuanto tiene que dar o cuanto tiene que trabajar esa unidad, pero sí es una buena estrategia... a mi parecer.



Moderador 2: ¿Existiría otra? ¿Usarían otra ustedes?

PF2: No yo... eh, bueno, en lo general, por lo menos uno no siempre se acuerda de la fórmula en física yo recuerdo que usaba mucho el análisis dimensional, trabajar con las unidades de medida.

5. **Moderador 2:** ¿Fueron los estudiantes capaces de trabajar matemáticamente el Modelo Matemático para obtener los Resultados Matemáticos?

PF4: Sí.

PF2: Sí.

PF3: Sí.

PF1: Sí.

Moderador 2: ¿Sí? ¿Alguna otra acotación?

PF3: No.

Clase 3:

Moderador 2: El profesor pide a cada equipo que realice un póster (cuyo tamaño no exceda la mitad de un pliego de cartulina) de los resultados y conclusiones para dar respuesta al problema planteado.

Posteriormente, cada equipo expone ante sus compañeros como resolvieron el problema.

Al finalizar cada exposición, el profesor pide que dejen puestos en la pizarra los pósteres. Luego, realiza las siguientes preguntas:

Moderador 1: En relación con los gráficos que se encuentran en la pizarra, ¿qué se formó al unir todos los puntos?

Estudiantes: ¡UNA RECTA!

Moderador 1: ¡Exacto! Ahora, ¿cómo se representa el *flujo de agua* en cada gráfico?

Moderador 2: Los estudiantes de cada equipo empezaron a conversar entre ellos, y presentaron la siguiente interrogante:

PF2: ¿Por qué la recta de mi gráfico, en comparación con la del equipo de Andrés, es diferente?

Moderador 1: ¿Cuáles son las diferencias que notas Benjamín?

PF2: Mi recta está menos inclinada que la de Andrés.

Moderador 2: A consecuencia de lo anterior, el profesor presenta el ejemplo de la velocidad (km/h) de un automóvil con el objetivo de asociar el flujo de agua con el concepto de pendiente de una recta.



Moderador 1: Consideremos la situación siguiente: *El fin de semana que viene realizaré un viaje en automóvil con mi familia, aún no decido el destino, pero tengo dos opciones. Por problemas de presupuesto, debo gastar la menor cantidad de combustible posible y, según el gasto de combustible, tomaré la decisión de qué lugar visitar.*

PF1: ¿Cuáles son sus opciones profesor?

Moderador 1: Unas de las opciones es visitar el campo de mis abuelos que se encuentra a 45 km de Los Ángeles y me demoro 30 minutos en llegar.

PF3: Entonces profesor viajará a 90 km/h.

Moderador 1: ¿Cómo obtuviste ese resultado?

PF3: Realizando una división entre la distancia que hay al campo de sus abuelos y el tiempo que demora en llegar.

PF2: Profesor, ¿cuál es la otra opción?

Moderador 1: Ir a la comuna de Quilleco, a una feria costumbrista, que se encuentra a 40 km de Los Ángeles y me demoro 40 minutos en llegar.

PF3: En esta ocasión viajará a 60 km/h.

Moderador 1: Entonces jóvenes, ¿cuál destino elijo?

PF1: Ir al campo de sus abuelos.

Moderador 1: ¿Por qué?

PF1: Porque en la primera opción recorre 30 km más en una hora en comparación a la segunda opción.

Moderador 1: Si volvemos al problema, ¿cuál es la explicación de las diferentes inclinaciones de las rectas presentes en los gráficos?

PF2: Debe ser por el distinto flujo de agua. En mi caso el flujo es menor en comparación al flujo del equipo de PF1.

PF3: Entonces ¿la inclinación de la recta depende del flujo de agua?

Moderador 1: ¡Eso es! A esta inclinación la llamaremos **pendiente de una recta**. Ahora, analicen el siguiente gráfico.

Moderador 2: El profesor presenta el siguiente gráfico a los estudiantes:

Moderador 2: Posteriormente, el profesor se dirige a los estudiantes y realiza la siguiente pregunta:

Moderador 1: ¿Cómo es el flujo en este gráfico?

PF2: Está mal el gráfico profesor, porque todas nuestras rectas están ubicadas en el primer cuadrante.

PF3: Tampoco existe que alguien tome una ducha y se demore -2 minutos.

Moderador 1: ¡Muy bien!

Moderador 2: Luego, el profesor expone la siguiente interrogante:

Moderador 1: ¿Por qué en todos los gráficos de la Situación 1 la recta pasa por el origen?



Moderador 2: Debido a las expresiones de duda por parte de los estudiantes, el profesor expresa:

Moderador 1: Recuerden qué datos utilizaron en la Situación 1.

PF2: Se consideró un calefactor eléctrico en el que el agua caliente es inmediata.

PF1: Entonces no hay que esperar que el agua se caliente y no se desperdicia agua.

Moderador 2: Luego, intervino el profesor:

Moderador 1: Y en la Situación 2, ¿por qué no pasa por el origen?

PF3: Pues se tomó como referencia un calefón automático, en el que se necesita esperar unos minutos para que el agua se caliente y, en ese tiempo, hay agua que no se utiliza, pero que se debe considerar para obtener cuántos litros de agua en total se utilizaron para ducharse.

Estudiantes: ¡Sí! Eso es.

Moderador 1: En esta situación, ¿cómo puedo ahorrar agua?

PF1: Utilizando un calefón que demore menos en calentar el agua.

Moderador 1: Y ¿de qué depende?

Moderador 1: De la marca y la tecnología que utilice.

PF3: Y cuántos años tenga.

Moderador 1: Está bien, entonces los litros de agua fría que no se utilizan, debido a que se están calentando, representan el **coeficiente de posición** de la recta.

PF1: Entonces en el gráfico el coeficiente de posición, ¿es donde la recta corta al eje y?

Moderador 1: ¡Muy bien! Ahora PF1, ¿cómo se puede interpretar el coeficiente de posición?

PF1: Es la cantidad de agua fría que no se utiliza hasta que se calienta y empieza a contar el tiempo de la ducha.

Moderador 1: ¡Eso es!

Moderador 2: Posteriormente el profesor preguntó:

PF3: De las dos situaciones, ¿en cuál de ellas se puede dar un uso más eficiente del agua?

Estudiantes: En la Situación 1.

PF3: ¿Por qué?

PF3: No se desperdicia agua esperando que se caliente.

PF1: Pero si en nuestra casa tenemos un calefactor eléctrico, para ahorrar agua hay que hacer una ducha corta. Así también cuidamos el agua, independiente de si se tiene o no un calefactor eléctrico.

PF3: Ahora, respondan la pregunta: ¿cuánta agua utilizan para ducharse?

PF3: 111 litros.

PF1: 104 litros aproximadamente.

PF3: Como dijo PF1, independiente del aparato que se utilice para calentar el agua, la clave es la duración de una ducha.



Moderador 2: Al cierre de la clase, el profesor formaliza los conceptos de función lineal y función afín, explicando que una función lineal tiene la forma $f(x) = mx$, donde $m \in \mathbb{R}$, siendo ésta la **pendiente**, la cual da la inclinación a la recta. Además, da a conocer la forma de la función afín $f(x) = mx + n$, donde $m, n \in \mathbb{R}$, siendo n el **coeficiente de posición**, el cual permite conocer la intersección de la recta con el eje y .

Por último, el profesor señala que la función lineal siempre pasará por el origen del plano cartesiano, mientras que la función afín no pasará por el origen. De la misma manera, menciona que las funciones que modelan ambas situaciones, siempre se representan como rectas con inclinación ascendente, pues a medida que pasa el tiempo, aumenta el consumo de agua.

6. Moderador 2: Bueno esta actividad, ¿Cuál creen que fuese el objetivo que quería lograr el profesor?

PF1: Enseñar lo que es pendiente.

Moderador 2: Claro, ese era su foco. Por ejemplo, en el caso cuando el utilizó Km/h ¿Creen que fue, en cierta forma, un ejemplo que los chicos pudieran ver cotidianamente? Para poder buscar el flujo del agua.

PF3: Sí.

Moderador 2: ¿Usarían otro ejemplo? O ¿De que forma asociarían el flujo de agua con algún ejemplo que sea amigable a los estudiantes?

PF2: ¿Asociar el flujo del agua?

Moderador 2: Sí, porque para eso se creó el ejemplo de km/h, o ¿está bien?

Moderador 1: Solo si es que encuentran la forma más cercana a ellos que Km/h.

PF1: Sí, yo lo encuentro la forma más cercana, lo ven bastante en física.

PF2: Claro, y es bien cotidiano igual.

Moderador 1: Entonces consideran que es lo más cercano a ellos.

PF3: Sí.

Moderador 1: ... y lo más utilizable.

PF3: ... sale en todos lados, en las noticias, aun que no tengan auto igual van a entender el concepto de...

PF1: Km/h.

PF3: sí.

Moderador 1: ¿Fueron los estudiantes capaces de interpretar los Resultados Matemáticos para obtener los Resultados Reales?

PF3: Sí, igual hay ciertos valores o cosas que tuvimos que analizarlo igual con el profesor, pero sí lo dedujeron en conjunto y se nota que hay un aprendizaje de acuerdo al dialogo.

Moderador 1: ¿Cómo por ejemplo?

PF3: No sé, como, por ejemplo, cuando iban conversando del mismo tema de la comparación que hizo el profesor del flujo de agua, sobre la inclinación de la pendiente, quizás ellos al principio no entendieron que la pendiente puede ser mayor o menor y el hizo ahí la comparación, el profesor, y los chicos vieron más claro lo que pretendía el profesor. En ese sentido creo que en conjunto lo lograron, pero así por sí solos creo que les hubiese costado más.



PF4: No, y lo otro, es la parte donde tiene que comprobar su ecuación, se dan cuenta que su resultado le debería de haber dado en litros por eso el profesor ahí le sugiere arreglar la formula, porque, de hecho, después no podría interpretar el resultado final.

Moderador 2: O sea, si el profesor no hubiese sido moderador de cada grupo no llegarían al objetivo ese grupo.

PF4: No.

PF2: No.

PF3: No.

PF1: No.

Moderador 1: O sea, es necesario que haya un profesor guía.

PF4: Sí.

PF2: Sí.

PF3: Sí.

PF1: Sí.

7. **Moderador 2:** Siguiendo pregunta. ¿Fueron los estudiantes capaces de validar los Resultados Reales para contrastarlos con el Modelo de la Situación? O sea, recuerden que cuando uno habla de validar, es comparar los datos que yo obtengo en el modelo con datos reales ¿fueron capaces de validarlo eso?

PF1: O sea, igual dudaron un poco. El profesor les dijo que si estaban entre cierto rango era porque sus resultados estaban bien.

Moderador 2: O sea, faltaba la confirmación.

PF1: Sí.

PF2: Sí, en que en realidad no es validación porque, claro, el niño que dice que el papá ocupa tanta agua, pero ni su hermano ocupa tan poca agua. Entonces, como que duda un poco de los resultados del modelo.

8. **Moderador 1:** Siguiendo pregunta: ¿Fueron los estudiantes capaces de presentar la solución al problema, es decir, exponer la solución a la Situación Real planteada?

Moderador 2: Vayan a la página 2. Fue eso solamente lo que entregó el profesor, ese cuadrito. Después, ¿el profesor pasa de exponer a dar solución al problema?

PF1: Cuantos litros ocupaba al ducharse.

Moderador 1: Después, en el dialogo, alguien da a entender cuál es el problema ¿cierto?

PF3: Sí.

Moderador 2: Incluso ¿Ustedes consideran que fue pertinente volver a...? porque recuerdan que el ciclo vuelve a la situación real ¿cierto?, entonces, tenemos el problema de la situación, pero el profesor quería dar una conclusión. Cuando el alumno dice en el dialogo que independiente que calefón o artefacto use, siempre lo que va a valer es la duración del agua, mientras menos duración de agua se va a gastar menos cantidad de agua, por ende, se va a ayudar a un ahorro del agua, como el que el profesor usó para plantear la situación. ¿Ustedes creen que fue pertinente volver a la situación real?

PF1: Yo creo que sí, porque entre tanto trabajo y como son tres clases a veces pasa de una semana a la otra, quizás se pierde un poco el objetivo, entonces es importante, al final, volver atrás para dar conclusión al problema y volver a que quedé claro el objetivo.

Moderador 2: Bueno, las preguntas que vamos a hacer ahora son de tema de la articulación, son de tema general, de un análisis completo de este caso. No es más del ciclo.



1. ¿Se guía el Caso de acuerdo con las subcompetencias presentes en el desarrollo de la habilidad de modelamiento matemático?

O sea, ustedes ¿pueden apreciar las siete subcompetencias que están en el caso?

PF3: Sí, creo que la 7 podría... Bueno, depende en como se haya hecho en sí la clase, pero se ven todas.

Moderador 2: Bueno, la 7 cuando los alumnos hicieron el poster, bueno ahí no se vio el dialogo de como exponen los chicos.

Moderador 1: Se colocaron los posters en la pizarra.

PF3: Yo lo veo todo bien.

PF1: Yo igual.

Moderador 1: ¿Algún otro punto que no se ve dentro del dialogo?

Moderador 2: Por ejemplo, cuando ustedes decían que construir, simplificar y estructurar, de repente tiende a hacerse todo en uno, esas tres subcompetencias, pero la idea es que estén siempre presentes.

Moderador 1: ¿Algún aporte? ¿no? Siguiete pregunta:

2. ¿Propicia el Caso que los estudiantes relacionen el flujo de agua con el concepto de pendiente de una recta?

PF2: Es que al final, claro, al final sí, pero también me paso que a medida que iba viendo el caso como que incluso se me olvidó cual era el concepto principal, que en este caso era una forma de explicar la pendiente. Entonces, como que... al final, claro, sí se ve, pero a medida que íbamos viendo el caso... no, a mi se me había olvidado.

Moderador 2: Por ejemplo, si nosotros le hiciéramos una actividad a los jóvenes, ellos no deberían conocer cual es la intención de hacer la actividad, como estudiantes.

PF2: Yo creo que deberían conocer la intención de la actividad. Ahora igual es concepto es nuevo, igual es complicado.

PF3: Por lo general cuando uno prepara una clase plantea el objetivo y está intentando que ellos recuerden que eso es lo que se quiere lograr, quizás haber dejado el objetivo para ellos tuvieran conciencia de “¡Ah! sí, allá vamos...”.

PF1: Claro.

PF2: Claro, porque fue, si no me equivoco, la tercera clase cuando... ¿o en la segunda?, cuando aparece el concepto de pendiente, entonces son dos clases en las que... o sea, ahora uno lo ve como un todo, pero hay que pensar que son dos clases, entonces a mi se me había olvidado que era la pendiente el concepto principal.

PF4: O sea, sí, yo igual encuentro que debería de haberse mencionado, el hecho de que ellos van saber que, por ejemplo, que es utilidad tiene ese termino de matemática para la vida real, por ejemplo, por que uno si pasa lo que es pendiente de la recta, dice “¡Ya! Pendiente de la recta”, pero para que me sirve o que gano sabiendo esto.

Moderador 2: O sea, tu sugerencia es que sea formalmente que es la pendiente de una recta y usaste como una aplicación.

PF4: Claro, porque así ellos se darían cuenta que para que le sirve o no se preguntarían tanto porque aprendo esto, para qué.

Moderador 1: Pero el caso en sí, el que tienen en sus manos, ¿Les permite llegar desde flujo de agua a lo que es concepto de pendiente de una recta?

PF4: Sí.

PF2: Sí.



PF3: Sí.

PF1: Sí.

Moderador 2: Siguiendo pregunta:

3. ¿Propicia el Caso que los estudiantes reconozcan las características de las funciones lineal y afín?

PF2: Sí.

Moderador 2: ¿En qué clase más o menos?

PF2: Es que igual, como en las últimas clases. Ahora lo bueno es que da las situaciones, entonces se aprovecha eso para la función lineal y afín. Si no hubiesen estado las dos situaciones, ahí sido solo una forma.

PF3: Sí, ya en la tercera clase una ya va viendo como introducen el concepto de función, pendiente, por que en un principio era solo como descubrir cosas nuevas, vamos descubriendo, vamos descubriendo, vamos buscando, pillando, y aprendemos cosas, pero en sí el concepto de función afín y lineal, en a la tercera clase ya, al menos, lo ve.

Moderador 2: Por ejemplo, ¿Cuál sería el papel que juegan los gráficos? ¿Serían esenciales o no?

PF4: Sí.

PF2: Sí, son esenciales.

PF3: Sí.

PF1: Sí.

PF2: Porque ellos ahí se dan cuenta de la inclinación de un gráfico con otro, en teoría.

Moderador 2: O sea, por ejemplo, la actividad del profesor de colocar en la pizarra los posters ¿sirve para que los chicos se den cuenta de distintos casos de la función?

PF1: Sí, cuestionarse el niño “¿Por qué el mío es así, por qué el otro es así? ¿Por qué no pasa por el origen? ¿Por qué parte más arriba?”.

PF2: Claro, ahora, porque los gráficos son distintos en cuanto a las escalas, a lo mejor si hubieran utilizado la misma escala hubiese sido más notorio todavía.

Moderador 1: Y en este caso, ¿Qué hubiese pasado si no hubieran existido dos casos, que hubiese sido uno?

PF2: Es que en ese caso no se habría, no sé, el profesor hubiese tenido que de alguna forma guiar a que los estudiantes lleguen... o que me indica que la recta esté así o no, inclinada o menos inclinada, no existiría la comparación de las pendientes. Entonces, el hecho de que hayan dos gráficos y sean distintos, claro, hace que los estudiantes se pregunten “¿Por qué mi recta está más inclinada que la otra?”. Entonces, ahí si se está viendo el tema de la pendiente y, en cuanto a los gráficos, no sé si se les pasará por la D mente.

Moderador 1: ¿Cuestionarse?

PF2: Claro.

Moderador 1: Siguiendo pregunta:

4. ¿Propicia el Caso en los estudiantes el ejercicio de los contenidos actitudinales de respeto y tolerancia?

Moderador 2: Recuerden que estas actividades no se hacen individuales, son en grupo. No especifica la cantidad de grupo porque es un curso general, porque siempre como salían entren parejas estaban resolviendo.

Moderador 2: ¿Por qué sí, porque no?

PF1: Claro.



Moderador 1: ¿Cómo en que caso, por ejemplo, en que parte?

PF1: Es que el hecho de que trabajen en grupo, ya tiene que... no sé, trabajar con tus compañeros.

PF3: También, tampoco se presenta una situación en donde hubiera un tipo de conflicto, entonces se veía que el curso... los grupos eran pasivos.

PF2: Claro, lo otro es que las realidades son distintas, por ejemplo, algunos tenían calefón, otros que tenían ducha eléctrica, por lo menos en se caso se ve la tolerancia y no de...

PF4: En la otra parte que se ve como respeto entre ellos, fue cuando una niña le pregunta “¿Qué más tenemos que hacer?”, o sea, nadie la cuestionó diciéndole “¡Oh! Ella no entendió” algo así, sino que otro compañero, incluso, la apoyo en que tenía la misma duda, entonces se ve como que todos querían aprender lo mismo.

Moderador 1: Y ¿En caso de las respuestas unánimes que hay?

Moderador 2: ¿Qué información ustedes le entregarían, por ejemplo, estando en una clase y todos responden “tenemos la misma duda” o “eso es”? ¿Qué ustedes le transmiten? Como en el compromiso actitudinal, más que nada.

PF3: Es que también depende del contexto, porque, por ejemplo, si fuera... ya, todos tenemos la misma duda y, por ejemplo, en el caso del tema del flujo del agua, él ocupó otro ejemplo para que ellos hicieran la comparación. Ese puede ser un caso, pero por ejemplo hay contextos en los cuales tu, nadie entiende y tampoco es muy difícil realizar una comparación que para ellos sea fácil, entonces ahí quizás es ya darle pie a plantearle lo que viene más explícito. Entonces, tiene dos caminos.

Moderador 2: Bueno, la siguiente pregunta:

5. ¿Propicia el Caso en los estudiantes el ejercicio del contenido actitudinal de cumplir con lo solicitado?

Recuerden que el profesor, en cada clase daba una tarea para la siguiente, por ejemplo para pasar a la segunda pidió que trajeran fotos de los baldes graduados que iban a usar, como simulando la situación real. O sea, si ustedes quieren en sus planificaciones de clases tienen que evaluar la actitud de cumplir con lo solicitado ¿estaría pertinente en esta actividad?

PF2: Yo creo que, si porque es algo que es accesible, medir el agua de una ducha, uno lo puede hacer en la casa, entonces, no hay una tarea tan compleja en que el estudiante tenga que salir de su casa para poder lograrlo.

Moderador 2: Y que el docente le recalcará que necesitara para hacer esa medición.

PF2: Y los materiales son, materiales, que ellos mismos tienen, incluso es niño dice “con un cronometro”, pero podemos utilizar el teléfono.

PF3: Sí.

Moderador 1: Pero, en cuanto a lo que el profesor les pidió ¿cómo ven la actitud de los estudiantes ante lo solicitado?

PF3: Positivo.

PF2: Sí.

PF3: Extrañamente positivo.

Moderador 1: Siguiendo pregunta:

6. ¿Propicia el Caso en los estudiantes el ejercicio del contenido actitudinal de atender, tanto las dudas como los aciertos?

Moderador 2: Bueno, acá está lo que dijo la PF4. Que cuando alguien preguntaba algo no se burlaban de él, sino que incluso tenían la misma duda, o sea, como que había compromiso de los estudiantes.



Moderador 1: Y ¿en cuanto al profesor?

PF3: También, nunca le dijo “está mal”, sino que iba como buscando la respuesta, recalcando las cosas positivas, no menospreciando las negativas, sino que reforzándolo y que ellos se dieran cuenta solitos y destacando lo bueno.

Moderador 1: ¿Cómo, por ejemplo, en qué parte? ¿Cuándo habló sobre algún error?

Moderador 2: Bueno, el error...

PF3: En la última parte, cuando Sofía dice 111 litros y Andrés dice 104, entonces el profesor nunca le dijo a la niña “¡oh! No está mal, te equivocaste”, sino que habló de lo bueno y dio como un cierre. Ese es como un ejemplo no tan bueno, pero hay que...

Moderador 2: Cuando el chico usó mal la fórmula matemática, formuló mal.

Moderador 1: ¿Cómo actuó el profesor?

PF1: Actuó de buena forma, no dijo “No, está malo”, sino que le dijo que se fijara en la unidad de medida, no eran como lo que estaba buscando.

Moderador 2: ¿Qué hizo el profesor, que se equivocara, que viera su error o les dijo “saben que están mal”?

PF1: Les dijo que vieran su error, que no le iba a calzar.

PF3: Le dio otro camino a seguir para que se diera cuenta de que estaba equivocado.

Moderador 2: O sea, el profesor nunca va a decir “está bien” o “está mal”, sino que va a ayudar a decidir a el mismo si está bien o está mal.

PF3: Claro.

Moderador 2: Siguiendo pregunta:

7. ¿Propicia el Caso en los estudiantes el desarrollo del contenido procedimental de utilización de conocimientos previos?

Por ejemplo, acá que conocimientos previos deberían tener los estudiantes.

PF3: Despejar variables.

Moderador 2: Claro.

PF3: Crear gráficos.

PF1: Sí.

PF4: La fórmula de la ecuación de la recta, por que en una parte lo menciona.

Moderador 2: Porque se supone que ellos ya habían visto algo de la ecuación de la recta.

PF2: Claro, porque ellos mismos crean las fórmulas, entonces tiene que haber visto eso.

Moderador 1: Las tablas de valores.

PF3: Sí.

PF2: Graficar.

Moderador 2: Porque se supone que los estudiantes por sí solos no saben graficar, con las variables dependientes, independientes, se supone que ellos deberían tener todo eso.

Moderador 1: Siguiendo pregunta:

8. ¿Propicia el Caso en los estudiantes el desarrollo del contenido procedimental de recolección de datos?

PF2: Sí.

Moderador 1: ¿En qué parte?

PF2: Casi en todo.

Moderador 1: Pero así puntual.

PF2: Por ejemplo, cuando miden, realizan las mediciones en la casa, de los litros de agua.

PF1: El tiempo.



PF4: Cuando solicitan agregar el tiempo que demoran los integrantes de su familia, también.

Moderador 2: Pero si se dan cuenta, las tablas dicen “mamá”, “papá”, “hermano”.

Moderador 2: Bueno, siguiente pregunta:

9. ¿Propicia el Caso en los estudiantes el desarrollo del contenido procedimental de probar el modelo obtenido?

Bueno, esto no está muy relacionado al ciclo, pero de acuerdo a la actitud, probar si el caso es válido o no, o obtiene el modelo y lo dejan ahí y no hacen nada con él.

PF3: Comprueban los datos que habían ellos mismos registrado en sus casos.

Moderador 2: Y también el rango que dio el profesor, también debe ser esencial porque según los alumnos, decían que les daba menos o más, porque ninguno le dio igual por que esa es la... no había como respuestas iguales, pero si había rango.

PF4: Y también lo compara con el caso, en el que dice que no puede demorar -2 minutos en ducharse, entonces comprueba que sí o sí debe estar en el primer cuadrante de la recta que le...

Moderador 1: Por los valores.

PF4: Claro.

Moderador 1: Siguiente pregunta:

10. ¿Contribuye la metodología de enseñanza de Estudio de Casos a articular la matemática escolar por medio del descubrimiento de la relación existente entre el flujo de agua y el concepto de pendiente de una recta?

PF3: Sí.

Moderador 2: ¿Por qué sí?

PF1: Porque es un caso cotidiano, porque es bien cercano a ellos.

Moderador 2: Si van al título “Mañanas Matemáticas” ¿Qué les dirá a los chicos el nombre?

PF3: Lo que hacen en la mañana, tiene que bañarse.

Moderador 2: Tiene que bañarse, tienen que lavarse los dientes, incluso podría usarse con el agua que utilizan al lavarse los dientes, pero ustedes consideran que cuando dice articulación es más que nada, es conectar algo cotidiano con un concepto matemático que uno quiera seguir. ¿Ustedes creen que hace esa conexión, entre el concepto de pendiente de una recta con el flujo del agua? O ¿Qué le falta? ¿Qué podría ser?

PF3: Esta bueno, lo que está bien el problema, incluyeron la velocidad, yo creo que ahí se aclaró más, yo creo que, si hubieran usado solo el flujo de agua, los chicos también les hubiese costado como internalizar el concepto, porque el flujo de agua uno por lo menos a esa edad los chiquillos no manejan el termino flujo, a veces, entonces al relacionarlo con velocidad, creo que fue una buena estrategia.

Moderador 2: Siguiente pregunta:

11. ¿Cuál sería la mejor estrategia para implementar en la sala de clases lo descrito en el Caso? ¿Bastaría con un profesor solamente?

PF3: Yo creo que con codocencia es lo ideal.

Moderador 2: Sí. ¿De grupo de cuantas personas lo harían? O ¿Cómo lo harían? ¿Cuál sería su estrategia si ustedes llegaran y lo tuvieran que hacer? ¿Qué harían ustedes?

PF3: Lo principal, los grupos separarlos con respecto a sus personalidades, como uno ya sabe más o menos como se comportan, entonces, por ejemplo, el grupo de los desordenados si hay que separarlos, los que son más tímidos colocarlos con los que son más extrovertidos. Entonces, en ese sentido, siempre hay que tener un grupo heterogéneo para que trabaje, por que a veces muchos



muy callados tampoco trabajan, entonces, yo creo que en esa parte sí. Aparte, en cantidades, todavía me cuesta dimensionarlo.

PF4: En cantidades, yo creo dependería de cuantos son en total los alumnos, y lo otro que también, ojalá sean números impares porque si ellos deciden tomar decisión y va por votación, así se evitan empates.

PF2: Yo creo que es una forma igual, siguiendo el caso, con las situaciones, o sea, que tipo de duchas tiene en su casa, utilizan calefón o ducha eléctrica, porque los resultados son distintos.

Moderador 1: Entonces, el grupo debe seguir su variabilidad de su vida cotidiana.

PF2: Claro, pero, por ejemplo, los que usan... en un grupo tiene que haber personas que usan calefón no más y, a lo mejor, no hacer dos grupos, pero si compararlo con los otros y de esa forma generar la discusión que tuvieron ellos de porque una recta es más inclinada que la otra.

Moderador 1: Bien, siguiente pregunta:

12. ¿Ayuda el Caso a distinguir las habilidades de modelamiento matemático y de resolución de problemas?

Moderador 2: Por ejemplo, la resolución de problemas, ¿Qué ustedes tienen? ¿Qué tiene el problema?

PF3: Están todas las variables en el problema.

PF4: Están los datos.

PF1: Es una situación que ven cotidianamente, pero que nunca se habían planteado como un problema.

PF2: O sea, ellos resuelven la pregunta de cuánta agua utilizó en una ducha y, claro, es algo cotidiano, que lo más probable es que uno nunca lo haya hecho, ni sepa, ni se haya preguntado cuanta agua utilizo.

PF1: Entonces cumple con la condición de ser problema, que es algo desconocido.

PF2: Sí.

Moderador 2: Pero, por ejemplo, al principio, cuando los chicos le muestran la actividad y ellos dicen “no tiene datos”. ¿Qué pasaría, sería un problema de modelado matemático o la resolución de un problema?

PF4: Modelado matemático.

PF3: Modelado matemático. Incluso, implícitamente está la resolución de problemas dentro de la actividad, cuando ya define las variables reales, donde los chiquillos ven que es una situación súper cotidiana, donde no hay matemática, ellos la descubren. Entonces, en ese sentido es súper bueno distinguir entre modelamiento y resolución de problemas, por que, de hechos, en el programa aparece las dos.

Moderador 2: Sí. Siguiente pregunta:

13. ¿Permiten las actividades de modelación matemática motivar a los estudiantes y cautivarlos intelectualmente?

PF1: Sí.

Moderador 2: ¿Son un desafío para los estudiantes?

PF3: Sí.

Moderador 1: ¿En qué sentido los podría cautivar?

PF3: Yo creo que les llama la atención porque por ejemplo, típico que “esto no me sirve para comprar pan”, entonces el llevarles a que la matemática se pueda aplicar, que ellos puedan ver una realidad en una formula y que los lo vayan descubriendo, no es como “esta es la formula, este es el problema, para esto me sirve”, entonces, la actividad en si es súper buena para que ellos lo



descubran en conjunto, entonces en ese sentido les llama mucho más la atención a que le entreguen la formula, pero hay caso en los que no les gusta eso...

Moderador 2: O sea, están diciendo que, por ejemplo, de acuerdo a lo que le exige el docente que va a pasar poco contenido, a lo mejor, estas actividades repasan un poco, pero tradicional, como antes.

PF3: Por supuesto, hay que ver también con qué curso, porque yo, por ejemplo, se que tengo cursos con los cuales yo no puedo aplicar esta... una tarea así, no llegarían con los datos, no se podrían poner de acuerdo. Entonces, quizás trabajar con los cursos y ver cual es el más idóneo, porque esto tampoco funciona en todos estos tipos de actividades e idealmente, que haya otro docente en el aula.

Moderador 2: Claro. O sea, que podría, no se, juntarse cursos y decir... ya vamos a hacer con varios cursos, dos cursos, con varios profesores...

PF1: Claro, a veces, eso les motiva a los chicos un poco como la competencia que se da entre dos cursos y decir “ya, vamos a hacer tal actividad y vamos a comparar resultados...” y a veces eso también, a los chicos, les llama más la atención, en una sana competencia.

Moderador 1: Bien, última pregunta:

14. Considerando su formación inicial en modelamiento matemático, ¿están los profesores en formación capacitados para crear y aplicar actividades de modelación matemática?

Moderador 2: ¿Cuál es la opinión de cada uno?

Moderador 1: Ángela primero.

PF4: Ya, por ejemplo, yo, lo más cercano serian en el colegio que estoy realizando la practica y, por ejemplo en el colegio ya estuve preguntando de, por el hecho, de incluso aplicar nuestro instrumento y, por ejemplo, cuando hablan de modelación se guían, mas que nada, por el programa y, el programa trae solo como resolver el problema pero en realidad no es modelación modelación, y en los colegios tampoco se ha visto eso por el hecho de que los estudiantes, por ejemplo, se asustan de no tener datos, para ellos están acostumbrados a tener un problema y le entregan todo y como que solo es aplicar formulas o algo así, pero no le ven el sentido, entonces tampoco es como que se pueda trabajar con ellos.

PF1: Es que ellos dicen igual, “oye es complejo llegar ahí”, porque quizás ellos están acostumbrados a resolver ejercicios, pero no problemas. Entonces, ahí va la diferencia.

Moderador 2: Pero PF4, en tu opinión, si tuvieras un curso, por ejemplo, ideal, tu estás capacitada para crear la actividad y aplicarla... como que todos colóquense en el supuesto del mejor curso, se puede hacer cualquier actividad, pero uno, porque se supone que este cuadrito uno lo crea, no hay... hasta el momento es poca la imaginación de antes que hacen modelo matemático, entonces actividades no hay, uno se las crea, de acuerdo al contexto de los chicos y a las características, pero personalmente ¿ustedes estarían capacitados de hacer y aplicar una actividad de modelado? Con todo el trabajo que eso conlleva.

PF2: Yo creo que sí, pero no sé como argumentar... o sea, yo creo que sí puedo, con todo lo que vimos en el curso, claro.

PF1: Como hemos tenido un curso de modelación, curso de resolución de problemas, lo hemos visto, quizás lo teórico, pero quizás no lo llevamos mucho a la practica, entonces podemos pensar que sí podemos, pero...

PF4: Así como decía PF1, yo creo que sí, de poder, quizás los conocimientos de como funciona el ciclo las tenemos, pero de ahí a aplicarlo o ver como reaccionan los estudiantes al presentarles eso...



PF3: En la realidad, si lo ves así, ya, considerando el curso ideal, o ya... la verdad es que se podría aplicar a todos los cursos, pero es más complejo, si por ejemplo, son nueve grupos, pero están constantemente con consultas, entonces... a mi parecer, y de acuerdo a todo lo que he investigado, está visto en una realidad de cursos de 20, la realidad que acá en Chile, son de 45, entonces, lo ideal es que sea con otro docente en el aula... ideal, o sea, sería perfecto aplicarlo, pero como te digo, el ideal sería con menos alumnos o dos docentes en el aula.

PF4: O quizás, la opción que tendríamos sería, también, comenzar de apoco, por ejemplo, identificar a los estudiantes que más les interesa matemática y hacerlo como en talleres, e incluso, si ellos ya van a aprender, ellos mismos ayudan, empiezan motivando a los que no se incluyen.

PF3: Por ejemplo, algunos alumnos que tengan esa característica de docencia, que uno ve que les cuesta menos explicar y cosas así, capacitarlos a ellos y aplicarlo en el curso, coordinar con el PIE, de poder se puede. Por ejemplo, yo podría, porque mi profes guía es como yo le digo “hagamos esto” y vamos, pero en un contexto, un profe trabajando se ve complejo, aparte que los profesores, ya egresados, ni siquiera manejan bien el concepto de modelación matemática, como el algebra se ve en los textos de estudio pero los textos están mal, no distinguen entre modelar la matemática y modelación matemática, entonces la habilidad de modelado no se ve, entonces es difícil que se vea aplicar por otro tipo de docentes que no tengan la capacitación que por suerte tenemos nosotros.

Moderador 2: Por ejemplo, si en el ramo que todos cursamos, por ejemplo, se nos hubieran presentado... porque este es un relato ficticio de una situación, ¿para ustedes les sería útil, haber visto unos casos parecidos a estos, en el ramo que cursamos?

PF1: Sí.

PF2: Sí.

Moderador 2: ¿Ustedes se imaginaban que se podía ser así una... que se podían ver estas cosas en una clase?

PF1: Yo creo que no, si yo viera una actividad de modelación, yo creo que un profesor lo hace en una clase, y acá se ve que se hace en tres clases porque es algo complejo.

PF2: Bueno, no sé, si en todos los casos pasará, pero yo siento que los profes, claro, cuando escuchan la palabra modelación, crearían la formula no más, nada más, o sea, eso...entonces, pienso que es como erróneo el concepto de ellos, el de modelación, por eso siento que nosotros... sí, estamos capacitados para hacer una actividad de modelación y de resolución de problemas.

Moderador 2: Bueno chicos, damos gracias por la participación y cuando tengamos los resultados les vamos a comunicar.



7 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aravena M., & Caamaño C. (2007). Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, 33(2), 7-25. Recuperado de <https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052007000200001>

Asún, R., Zúñiga C. & Ayala M. (2013). La formación por competencias y los estudiantes: confluencias y divergencias en la construcción del docente ideal. *Calidad en la educación*, (38), 277-304. Recuperado de <https://dx.doi.org/10.4067/S0718-45652013000100008>

Blomhøj, M. (2004). Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica. *Revista De Educación Matemática*, 23(2). Recuperado de <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10419>

Carcamo A. (2017). *Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática para conjunto generador y espacio generado*. (Tesis doctoral, Universitat autònoma de Barcelona). Recuperado de: https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2017/hdl_10803_458629/acb1de1.pdf

Cordero, F. & Suárez, L. (2005). Modelación en matemática educativa. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (V. 18) (pp. 639-644). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.



Recuperado de

<http://funes.uniandes.edu.co/6126/1/CorderoModelacionAlme2005.pdf>

García, F. (2005) La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar: de la proporcionalidad a las relaciones funcionales.

(Tesis doctoral). Universidad de Jaén, Jaén.

Henao S. & Venegas, J. (2012). *La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción y uso de modelos cuadráticos* (Tesis de Pregrado). Universidad del Valle, Santiago de Cali.

Recuperado de:

funes.uniandes.edu.co/2518/1/LamodelaciónHenaoAsocolme2012.pdf

Hernandez, R., Fernández C. & Baptista, M. (2010). Metodología de la investigación. 5ª ed. Mexico: McGraw-Hill.

Ministerio de Educación (2015) Bases Curriculares Matemática 2015. Gobierno de Chile.

Pascal, E. & Vidal, G. (2013). *Implementación de algunos aspectos de la metodología de estudio de casos en la enseñanza de las matemáticas* (Tesis de pregrado). Universidad de Concepción, Los Ángeles.

Reyes, C. (2011). Estudio de casos en la formación de profesores de matemática: Integrando matemática y pedagogía. Santiago, Chile: J. C. Sáez Editor



Salett, M. & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16(2), 105-125. Recuperado de: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516206>

Sierra, L., Blanco, J., García, L. y Gómez, J. (2011). Estrategias de aprendizaje basadas en la modelización matemática en Educación Secundaria Obligatoria. A: *Jornadas de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. "XV JAEM"*. Gijón: 2011, p. 1-20. Recuperado de https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/12689/Ponencia_XVJAEM_v2.pdf

Zaldívar, R., Quiroz, S., & Medina, G. (2017). La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes. *IE Revista de investigación educativa de la REDIECH*, 8(15), 87-110. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2448-85502017000200087&lng=es&tlng=es