

**EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DEL MÉTODO DE NIVELACIÓN  
TRIGONOMÉTRICO POR VISUALES RECÍPROCAS Y SIMULTÁNEAS, EN LA RED  
ALTIMÉTRICA DE LA CIUDAD DE LOS ÁNGELES.**

Andrés López Valdebenito



Proyecto de Título presentado al  
Departamento de Ciencias Geodésicas y Geomática  
Universidad de Concepción, Campus Los Ángeles

En cumplimiento del requisito parcial

Para obtener el título de

**Ingeniero Geomático**

Escrito bajo la orientación del profesor

**Dr. Henry Montecino C.** (Depto. de Cs. Geodésicas y Geomática).

Aprobado por la comisión

**Ing. José Cornejo M.** (Depto. de Cs. Geodésicas y Geomática)

**Ing. Octavio Robles C.** (Depto. de Cs. Geodésicas y Geomática)

Los Ángeles

**Marzo, 2021**

## RESUMEN

En topografía existen diferentes métodos de nivelación entre ellos, la nivelación geométrica, nivelación trigonométrica, nivelación GPS y nivelación expedita o barométrica. El propósito de estos métodos, es asignar altura a un punto respecto de otro, para establecer una referencia entre ellos, permitiendo así, el establecimiento de redes altimétricas del tipo globales regionales o local.

Otro método de nivelación es el trigonométrico por visuales recíprocas y simultáneas (NTVRS), el cual es considerado preciso (Jiménez, Garzón, & Londoño, 2017), debido a que elimina los errores sistemáticos producidos por la curvatura terrestre y la refracción atmosférica, permite alcanzar las precisiones entregadas por la nivelación geométrica. Además, permite realizar visadas de cientos de metros hasta kilómetros en una sola instalación.

En este Proyecto de Título, se evaluó el desempeño de la Nivelación Trigonométrica por Visuales Recíprocas y Simultáneas, frente a los métodos de Nivelación Geométrica y Nivelación GPS, realizados por Flores (2015), en términos de precisión, tiempo, costo e implicancias técnicas durante su ejecución.

Los desniveles obtenidos por el método trigonométrico por visuales recíprocas y simultáneas, fueron ajustados mediante el método de los mínimos cuadrados. Los resultados obtenidos se evaluaron mediante los criterios de precisión establecidos en el Manual de Carreteras (MOP, 2020), donde se establecen las tolerancias para NTVRS.

De acuerdo a los resultados obtenidos, estos servirán como criterio base en la elección de la metodología en futuras labores.

## **DEDICATORIA**

Quiero dedicar este proyecto de título a mi madre y a la memoria de mi padre, quienes me demostraron que la educación es fundamental para lograr mis metas. Dedicarle este esfuerzo a mi hijo, por quien tuve la voluntad y dedicación para continuar esta etapa de mi vida.



## **AGRADECIMIENTOS**

Quiero agradecer por el apoyo y paciencia durante este proceso, a mi profesor guía Henry Montecinos, puesto que, sin sus consejos, su preocupación y la gestión realizada, nada podría haberse concretado.

Quiero agradecer a mis padres por la oportunidad de haber estudiado, ya que, sin su ayuda, no habría logrado esta meta.

Finalmente, gracias a mi familia, amigos, colegas de trabajo y todos quienes me dieron esos consejos y palabras de aliento de seguir en la lucha para obtener mi título profesional.



## Tabla de contenido

1.	Antecedentes Generales .....	1
1.1.	Introducción .....	1
1.2.	Objetivos .....	4
1.2.1.	Objetivo General.....	4
1.2.2.	Objetivos específicos .....	4
2.	Revisión Bibliográfica.....	5
2.1.	Principios de Nivelación .....	5
2.1.1.	Superficie de referencia .....	7
2.2.	Métodos de nivelación .....	8
2.2.1.	Nivelación Geométrica .....	8
2.2.2.	Nivelación por técnicas GPS .....	10
2.2.3.	Nivelación Trigonométrica.....	13
2.2.4.	Nivelación Trigonométrica por estaciones recíprocas.....	16
2.2.5.	Nivelación trigonométrica por visuales recíprocas y simultáneas.....	18
2.3.	Teoría de errores .....	21
2.3.1.	Fuentes de error .....	21
2.3.2.	Tipos de error.....	22
2.3.1.	Valor probable .....	24
2.3.2.	Error absoluto .....	25
2.3.3.	Error relativo.....	26
2.3.4.	Medidas de Precisión.....	26
2.3.1.	Asignación de errores .....	28
2.4.	Correcciones .....	29
2.4.1.	Corrección por curvatura .....	31
2.4.2.	Corrección por refracción .....	32
2.4.3.	Coefficiente de refracción.....	34

2.4.4.	Errores en las mediciones .....	37
2.4.5.	Reducción del ángulo cenital al marco .....	42
2.4.1.	Reducción de la distancia al ángulo cenital observado .....	44
2.5.	Ajuste por Mínimos Cuadrados .....	45
2.5.2.	Test Estadísticos .....	51
3.	Datos y metodología.....	55
3.1.	Área de estudio .....	55
3.2.	Antecedentes .....	55
3.2.1.	Nivelación Geométrica .....	58
3.2.2.	Nivelación por técnicas GPS .....	59
3.2.3.	Desniveles entre los vértices de la red .....	61
3.3.	Nivelación Trigonométrica de Visuales Recíprocas y Simultánea.....	63
3.3.1.	Planificación .....	63
3.3.2.	Control de instrumentos.....	66
3.4.	Mediciones .....	68
3.4.1.	Medición angular .....	68
3.4.1.	Medición de distancia.....	71
3.4.1.	Reducción del ángulo cenital al marco.....	72
3.4.2.	Reducción de la distancia al ángulo cenital observado .....	73
3.5.	Procesamiento de datos.....	73
3.5.1.	Ajuste por Mínimos Cuadrados .....	75
3.5.2.	Test estadísticos .....	79
4.	Resultados y análisis .....	82
5.	Conclusiones .....	89
6.	Referencias .....	92
7.	Anexos.....	96

## Lista de Tablas

Tabla 1: Desnivel entre vértices, usando Nivelación Geométrica. (Flores, 2015).....	58
Tabla 2: Alturas NMM de la Red de Control Vertical. (Flores, 2015). .....	59
Tabla 3: Configuración para procesamiento de datos GPS (Flores, 2015). .....	59
Tabla 4: Alturas elipsoidales y ortométricas de la red de control vertical. (Flores, 2015) .....	60
Tabla 5: Determinación de nuevas líneas de nivelación propuestas. ....	62
Tabla 6: Desniveles de la red, obtenidos a partir de los antecedentes de Flores (2015). .....	62
Tabla 7: Rutas de las líneas de nivelación. ....	64
Tabla 8: Cronograma de actividades. ....	65
Tabla 9: Errores del control de instrumentos: .....	68
Tabla 10: Criterio de rechazo para observaciones cenitales. ....	70
Tabla 11: Criterio de rechazo para medición de distancia. ....	72
Tabla 12: Desniveles por Línea de nivelación. ....	74
Tabla 13: Análisis de cierre de polígonos. ....	75
Tabla 14: Análisis test local. ....	81
Tabla 15: Desniveles ajustados y su precisión. ....	82
Tabla 16: Tolerancias de la NTVRS. ....	83
Tabla 17: Comparación de desniveles obtenidos por los métodos de nivelación. ....	83
Tabla 18: Diferencia de alturas entre los métodos de nivelación. ....	84
Tabla 19: Comparación en tiempos de ejecución de los métodos de nivelación. ....	85
Tabla 20: Comparación de rendimiento. ....	85
Tabla 21: Análisis de costo de ejecución por método. ....	86
Tabla 22: Consideraciones e implicancias técnicas en los métodos de nivelación. ....	88

Tabla 23: Especificaciones Estación Total Trimble M3 de 5"DR .....	97
Tabla 24: Especificaciones ambientales Estación Total Trimble M3.....	97
Tabla 25: Especificaciones Estación Total Spectra Focus 2 de 5".....	99
Tabla 26: Especificaciones ambientales Estación Total Spectra Focus 2.....	99
Tabla 27: Formulario para registro de observaciones.....	100



## Lista de Figuras

Figura 1: Plano horizontal de un punto sobre la superficie de la tierra (Casanova, 2002). .....	5
Figura 2: Principio de nivelación (Jiménez, Garzón, & Londoño, 2017). .....	6
Figura 3: Representación de las superficies del geode y elipsoide (Casanova, 2002). .....	7
Figura 4: Nivelación Geométrica (Jiménez, Garzón, & Londoño, 2017). .....	9
Figura 5: Nivelación trigonométrica (Jiménez, Garzón, & Londoño, 2017). .....	13
Figura 6: Situación de nivelación trigonométrica por estaciones recíprocas. ....	16
Figura 7: Nivelación trigonométrica por visuales recíprocas y simultáneas. (Ceylan & Baykal, 2008) .....	19
Figura 8: Efectos de curvatura y refracción (Casanova, 2002) .....	30
Figura 9: Corrección por refracción (Sánchez & Pereda, 2014). .....	33
Figura 10: Visuales recíprocas y simultáneas (Farjas, 2017). .....	35
Figura 11: Medida del ángulo central (Farjas, 2017). .....	36
Figura 12: Corrección del ángulo cenital al terreno (elaboración propia). ....	43
Figura 13: Corrección de la distancia observada (elaboración propia). .....	44
Figura 14: Área de estudio, Los Ángeles (Google Earth). .....	56
Figura 15: Croquis de la red de nivelación (Flores, 2015). .....	57
Figura 16: Situación actual de la Red altimétrica de Los Ángeles (Google Earth). ....	57
Figura 17: Distribución de los vértices y generación de las líneas bases (Flores, 2015). .....	60
Figura 18: Líneas de nivelación para red altimétrica, Los Ángeles (Google Earth). .....	63

# 1. Antecedentes Generales

## 1.1. Introducción

Dentro de los métodos de nivelación, están la Nivelación Geométrica, Nivelación GPS y la Nivelación Trigonométrica, además de las Nivelaciones Barométrica y Gravimétrica. Estos métodos de nivelación se encuentran estandarizados por el Ministerio de Obras Públicas (2020), quienes determinan las precisiones tolerables en una nivelación, de acuerdo al propósito por el que se requiera.

Para llevar a cabo un trabajo topográfico con altimetría, es necesario disponer de una red de control vertical, que constituya de apoyo en las nivelaciones topográficas. Dicha red deberá disponer de una serie de puntos monumentados que proporcionen elevaciones en un sistema de referencia altimétrica de precisión.

Ante la necesidad de una red altimétrica en la ciudad de los ángeles, Flores (2015) establece una red de control vertical, la cual proporciona elevaciones con alta precisión referidas al nivel medio del mar (NMM), a fin de apoyar en la propagación de alturas, servir de apoyo en levantamientos a la red normal y prestar servicios académicos, trabajos ingenieriles o labores de control vertical.

Estos puntos mencionados fueron medidos mediante nivelación geométrica, logrando precisiones que bordean los 8mm. Además, se realizó una nivelación GPS, alcanzando precisiones que bordean los 7mm, debido al uso de un Modelo geopotencial global (MGG) para la reducción de los errores. Por lo tanto, la red se definió como una red de control vertical precisa según el Ministerio de Obras Públicas (2020).

Otro método que permitiría obtener alturas para la red, es el método de nivelación trigonométrica. Aunque este método no asegura una precisión como la nivelación geométrica, el método sigue siendo adecuado para muchos proyectos, permitiendo realizar un trabajo con un menor costo de ejecución y menor tiempo, debido a la posibilidad de realizar largas visadas. (Valbuena, Soriano, Vara, & Rodríguez, 1996)

Si bien la nivelación trigonométrica no representa una nivelación moderna en su totalidad, existe una técnica derivada de su metodología, la cual permite obtener precisiones similares a la nivelación geométrica. Esta es la Nivelación Trigonométrica por Visuales Recíprocas y Simultáneas (NTVRS), la cual consiste principalmente, en realizar observaciones de manera recíproca entre dos estaciones y de manera simultánea. Además, se destaca por permitir medir largas líneas de nivelación, minimizando el efecto de esfericidad y eliminando el efecto de refracción (Johnson, 2008).

En este proyecto se desea evaluar el desempeño del método de nivelación trigonométrica por visuales recíprocas y simultáneas (NTVRS), en la nivelación de la red vertical de Los Ángeles, con un entorno urbano utilizando largas líneas de visual y comparar los resultados obtenidos con los de Flores (2015), en su trabajo.

Cabe señalar que el método de NTVRS posee la ventaja de realizar menor cantidad de instalaciones en terrenos accidentados, y tramos largos, permitiendo visadas por sobre 200m (Ceylan & Baykal, 2008).

Los desniveles calculados por el método trigonométrico con visuales recíprocas y simultáneas, serán ajustadas mediante el método de los mínimos cuadrados (Da Silva & Silva, 2006), utilizando un modelo paramétrico, con el propósito de obtener mejores resultados.

Finalmente, se evaluará el desempeño de la NTVRS en términos de precisión, tiempo, costo e implicancias prácticas en la ejecución del método.



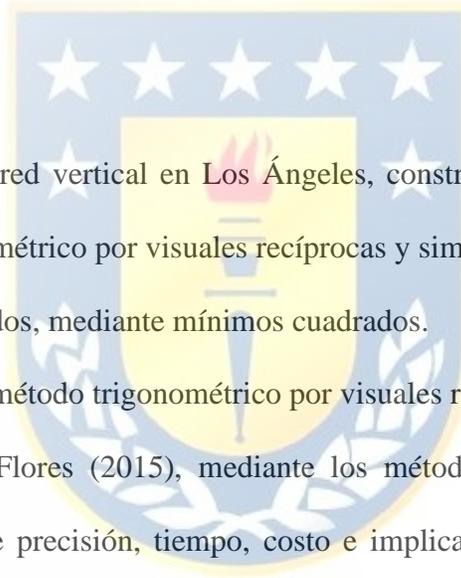
## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. Objetivo General

Evaluar el desempeño del método de nivelación trigonométrico por visuales recíprocas y simultáneas, en la red altimétrica de la ciudad de Los Ángeles.

### 1.2.2. Objetivos específicos

1. Realizar la nivelación de la red vertical en Los Ángeles, construida por Flores (2015), mediante el Método Trigonométrico por visuales recíprocas y simultáneas (NTVRS).
2. Ajustar los resultados obtenidos, mediante mínimos cuadrados.
3. Comparar los resultados del método trigonométrico por visuales recíprocas y simultáneas, frente a los obtenidos por Flores (2015), mediante los métodos Geométrico y GPS, considerando en términos de precisión, tiempo, costo e implicancias prácticas de cada metodología.



## 2. Revisión Bibliográfica

### 2.1. Principios de Nivelación

Casanova (2002) define la nivelación como el proceso de medición de elevaciones sobre la superficie de la tierra, a través de un conjunto de operaciones que permiten determinar la altitud de uno o más puntos, con respecto a un plano de referencia.

Jimenes (2017) define la altitud como la distancia perpendicular entre un punto y una superficie de referencia, pero en el contexto topográfico esta superficie no es recta sino curva, esto debido a la superficie equipotencial gravitacional del campo de gravedad terrestre.

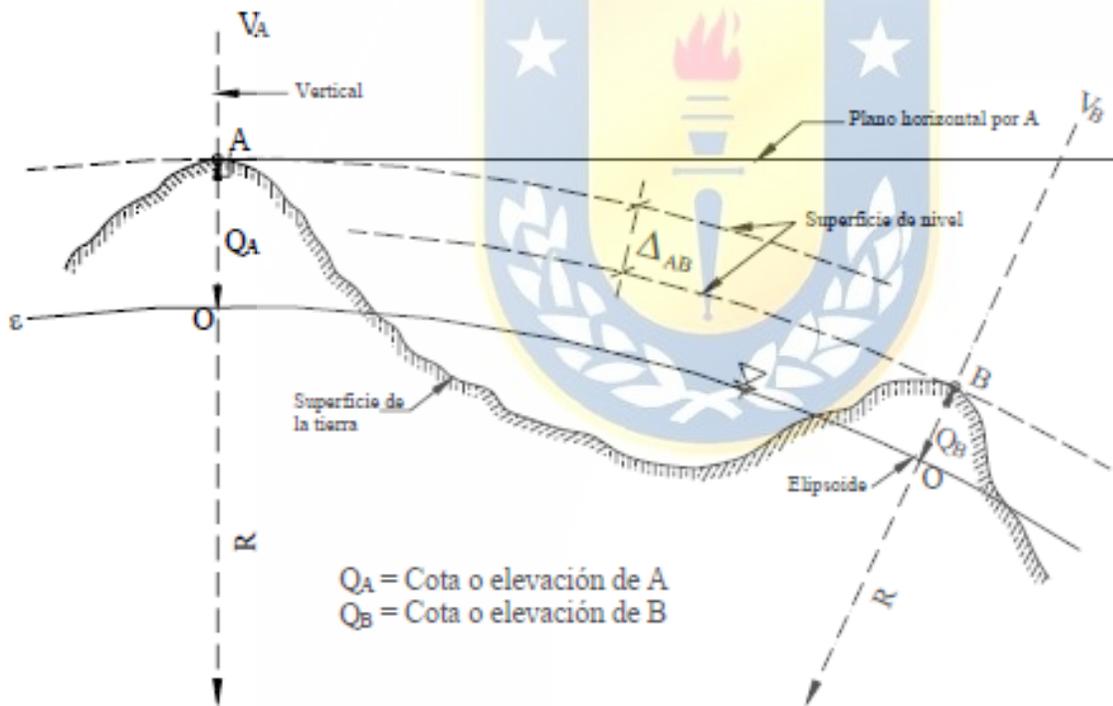


Figura 1: Plano horizontal de un punto sobre la superficie de la tierra (Casanova, 2002).

Por consiguiente, el objetivo de la nivelación es referir una serie de puntos a un mismo plano de comparación para poder deducir los desniveles entre los puntos observados, esta se mide a lo

largo de una línea vertical que sigue la dirección de la gravedad o plomada, entre las superficies que pasan por dichos puntos.

La nivelación permite determinar la diferencia de alturas ( $\Delta H_B^A$ ) entre dos puntos  $A$  y  $B$  (ver figura 1), a partir de la visual horizontal lanzada desde el nivel óptico hacia las miras verticales colocados en dichos puntos. Dado que la superficie equipotencial gravitacional es aproximadamente esférica, el efecto de la curvatura es una función de la distancia entre el instrumento y la mira vertical, cuando las distancias atrás y adelante son iguales, este efecto se cancela.

$$\Delta H_B^A = ((l_A) - \delta_A) - ((l_B) - \delta_B) = l_A - l_B \quad (1)$$

Donde  $\delta_A = \delta_B$  (aproximación esférica, en el caso en que las distancias entre  $A$  y  $B$  sean iguales).

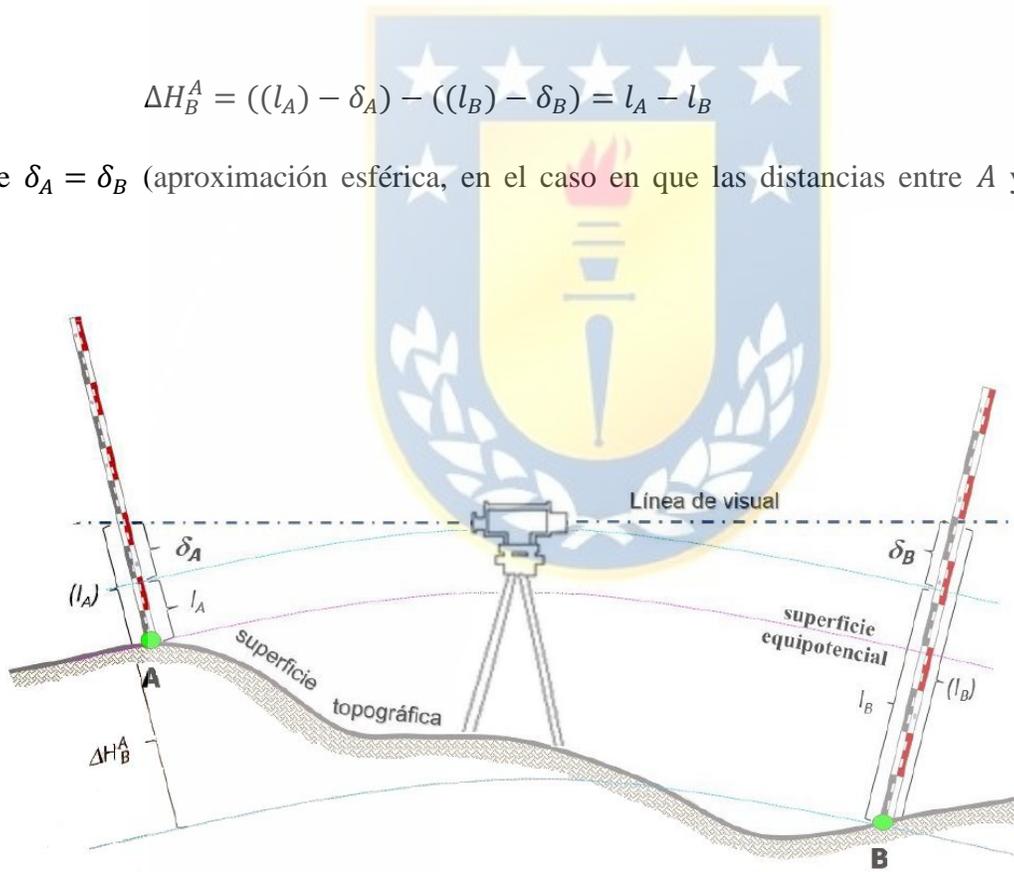


Figura 2: Principio de nivelación (Jiménez, Garzón, & Londoño, 2017).

### 2.1.1. Superficie de referencia

Para comprender el concepto de nivelación, es necesario definir o determinar la forma de la tierra. Esta posee una forma irregular, achatada en las zonas polares, siendo imposible una representación exacta, por lo que se caracteriza mediante un geode o superficie de nivel que coincide con la superficie del agua en reposo de los océanos, conocido como el nivel medio del mar (NMM) (Casanova, 2002).

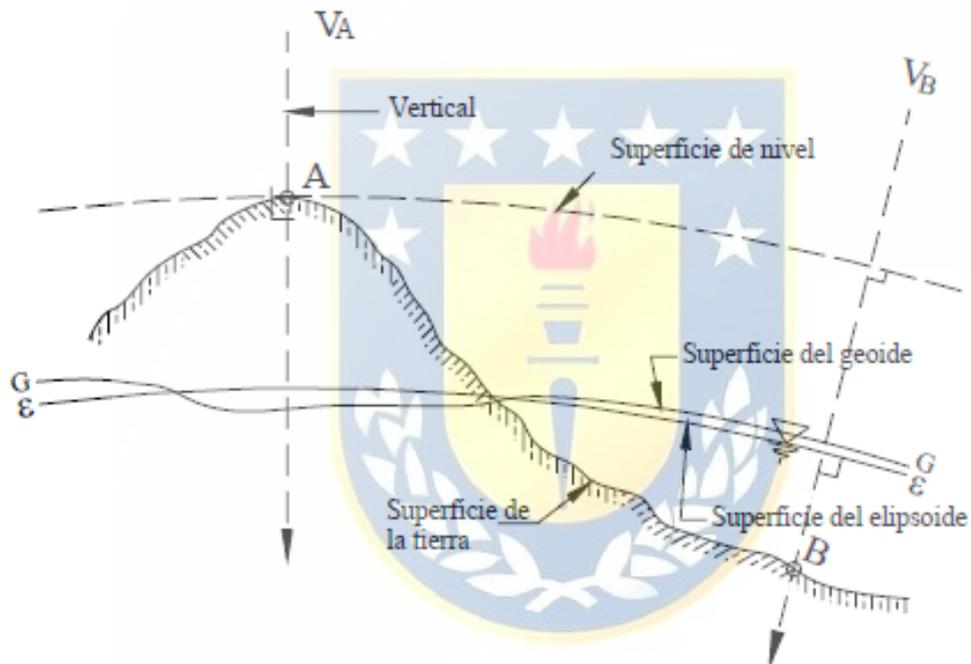


Figura 3: Representación de las superficies del geoide y elipsoide (Casanova, 2002).

El geoide corresponde a una superficie de nivel, normal a la dirección de gravedad y asegura que el plano tangente a cualquiera de sus puntos es normal a la dirección de la gravedad o plomada (Villa, 2016).

Debido a que el geoide no es una superficie regular, ni siquiera simétrica, se hace difícil de expresar mediante una fórmula matemática, por lo que se utiliza una superficie hipotética que mejor se aproxime, siendo esta un elipsoide de revolución.

El sistema elipsoidal de superficie, se extiende al espacio mediante la inclusión de la altura  $h$  (elipsoidal o geométrica) de un punto  $P$  sobre el elipsoide, la altura elipsoidal ( $h$ ) es la altura calculada desde un punto en la superficie terrestre al elipsoide que pasa por la normal al elipsoide en dicho punto (IDE, 2018).

## **2.2. Métodos de nivelación**

### **2.2.1. Nivelación Geométrica**

La nivelación geométrica, también llamada nivelación diferencial, es un método de medición utilizado para determinar el desnivel entre dos puntos, que utiliza visuales horizontales desde el nivel hacia las miras verticales colocadas en los dichos puntos (Jiménez, Garzón, & Londoño, 2017). Los instrumentos empleados en este proceso son los niveles o equaltímetros, actualmente basados en la electrónica como son el nivele automático o nivel electrónico digital.

Si la distancia que separa dos puntos supera la permitida por el límite máximo de utilización de la mira, en función del aumento del telescopio, la diferencia de altura entre los mismos se determina nivelando varios tramos. Luego, sumando algebraicamente las diferencias de alturas parciales, se deduce el desnivel entre puntos situados a cualquier distancia requerida.

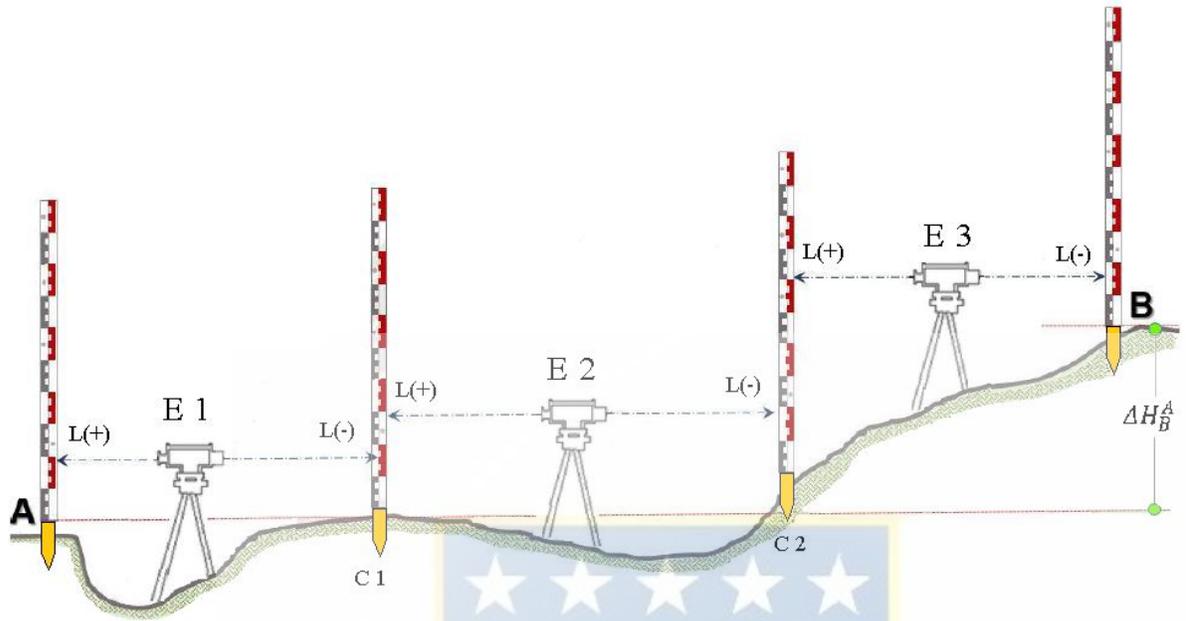


Figura 4: Nivelación Geométrica (Jiménez, Garzón, & Londoño, 2017).

Es importante señalar que las distancias entre el instrumento y las dos miras sean aproximadamente iguales, con el propósito de eliminar el error en las lecturas, debido a la curvatura terrestre y la refracción atmosférica (Johnson, 2008).

El procedimiento de nivelación con varias instalaciones (Figura 4) se realiza de la siguiente manera:

1. Se posiciona el instrumento en el punto *E 1*.
2. Se ubica la mira en posición vertical en el punto *A* y se registra la lectura atrás  $L(+)$ .
3. Se gira el instrumento y se posiciona la mira en *C 1* sobre un “sapo” metálico, estaca o marca en el terreno, que permita conservar la posición vertical. Se toma la lectura y se registra la lectura adelante  $L(-)$  en la libreta de campo.

4. Se cambia la instalación del instrumento hacia el punto E2 (la mira deberá permanecer sobre el C1).
5. Se gira con cuidado la mira sobre el punto C1, de manera que se visualice hacia el instrumento.
6. Se toma la lectura de la mira C1 y repite el procedimiento anterior, tantas veces sea necesario para llegar a la lectura sobre el punto B.

La diferencia de altura entre los puntos A y B es igual a la sumatoria de la lectura atrás  $\Sigma L(+)$ , menos la sumatoria de la lectura adelante  $\Sigma L(-)$ .

Este procedimiento es repetible en la nivelación trigonométrica, en donde la distancia que separa dos puntos supera la permitida por el límite máximo del aumento del telescopio, la diferencia de altura entre los mismos se determina nivelando varios tramos.

### **2.2.2. Nivelación por técnicas GPS**

La nivelación GPS permite determinar alturas referidas al nivel medio del mar con precisión utilizando un método de posicionamiento estático, utilizando un Elipsoide y Geoide como superficies de referencia.

Podemos definir el geoide como la superficie equipotencial del campo de gravedad de la tierra que más se aproxima al nivel medio del mar. Al considerar una superficie como esta, podemos considerar diferentes superficies equipotenciales como modelos de geoide. Y debido a múltiples fenómenos físicos, el geoide no puede definirse como una superficie matemática simple, como es el caso del elipsoide de revolución empleado en la nivelación con GPS.

La combinación óptima de la altura elipsoidal, obtenida partir de observaciones GPS, con la ondulación geoidal derivada de un MGG, determinará las alturas ortométricas referidas a un datum vertical o al NMM. Este proceso es basado en una relación geométrica dada por la siguiente ecuación (Hofmann-Wellenhof, Lichtenegger, & Collins, 2001):

$$H \cong h - N$$

Donde  $h$  es la altura elipsoidal;  $H$  es la altura ortométrica sobre el geoide; y  $N$  es la ondulación geoidal obtenida, entre otras formas, desde los MGG.

Las alturas elipsoidales con las alturas ortométricas no son compatibles, por lo tanto, se debe recurrir a valores de  $N$  para relacionar ambas altitudes. El valor  $N$  variará de un punto a otro debido a que ambas superficies no son paralelas y debe ser conocido en cada estación GPS que forme parte del transporte de coordenadas altimétricas. El desnivel entre dos puntos está dado por (Roman, 2004):

$$\Delta H = H_B - H_A = (h_B - N_B) - (h_A - N_A) \quad (2)$$

Con:

$H_A$ : Altura de A respecto al geoide.

$H_B$ : Altura de B respecto al geoide.

$h_A$ : Altura de A respecto al elipsoide (obtenido con GPS)

$h_B$ : Altura de B respecto al elipsoide (obtenido con GPS)

$N_A$ : Ondulación geoidal en el punto A (obtenido de un MGG)

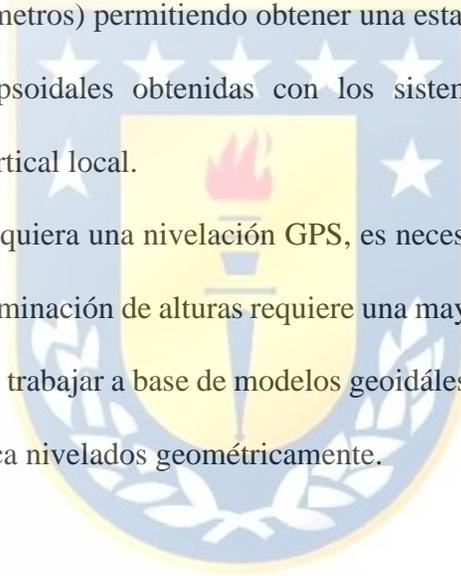
$N_B$ : Ondulación geoidal en el punto B (obtenido de un MGG)

En la práctica, la realización de la ecuación anterior no representa en su totalidad la definición de altura ortométrica, debido a que los modelos geopotenciales globales poseen una precisión

superior a los 0,5 m con respecto al geoide, por lo tanto, la superficie es referida a una superficie cercana al geoide (NMM). De esta forma se producen errores en las precisiones, distorsiones sistemáticas e inconsistencias de referencias en cada una de las variables utilizadas. Por lo tanto, el resultado obtenido es tan solo una aproximación a las alturas ortométricas. Como solución rigurosa se plantea la inserción de modelos de superficies correctores (Fotopoulos, Kotsakis, & Sideris, 2003).

La función de estos modelos, es resolver las inconsistencias de los datos y algunas distorsiones sistemáticas (en el orden de los decímetros) permitiendo obtener una estabilidad y precisión en la transformación entre las alturas elipsoidales obtenidas con los sistemas GPS y las alturas ortométricas referidas a un datum vertical local.

En conclusión, cada vez que se requiera una nivelación GPS, es necesario conocer el objetivo del estudio. De esta forma, si la determinación de alturas requiere una mayor precisión se aconseja la inserción de modelos correctores o trabajar a base de modelos geoidales locales, basados en una red de puntos de referencia altimétrica nivelados geoméricamente.



### 2.2.3. Nivelación Trigonométrica

La nivelación trigonométrica es un método de medición altimétrico que utiliza la medición de distancias y ángulos para calcular el desnivel de un punto respecto de otro, mediante las funciones trigonométricas, teniendo en cuenta el ángulo vertical y la distancia entre los puntos (Jiménez, Garzón, & Londoño, 2017).

Para calcular el desnivel entre los puntos  $A$  y  $B$  se utilizan las funciones trigonométricas del triángulo rectángulo formado entre los puntos observados, utilizando las observaciones desde la estación en  $A$ , hacia el prisma reflector en  $B$  (figura 5).

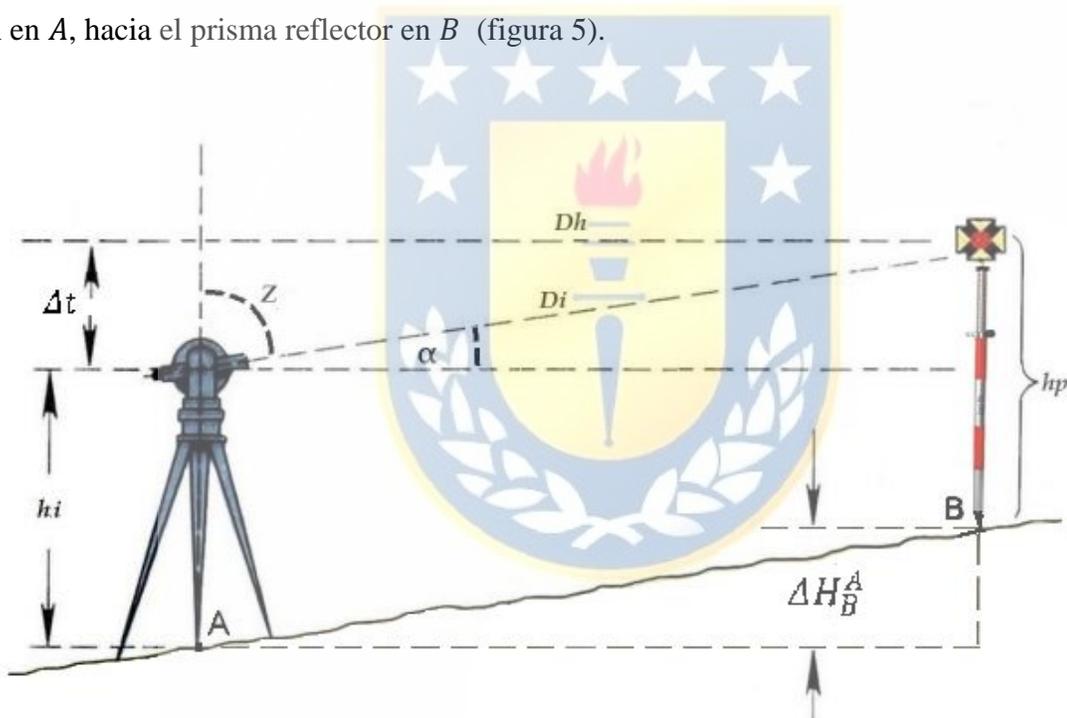


Figura 5: Nivelación trigonométrica (Jiménez, Garzón, & Londoño, 2017).

De la figura 5, se tiene:

$Z$ : ángulo cenital

$\alpha$ : ángulo vertical

$Di$ : distancia inclinada

$Dh$ : distancia horizontal

$hi$ : altura instrumental

$hp$ : altura del prisma

$\Delta t$ : desnivel del triángulo

$\Delta H_B^A$ : desnivel entre  $A$  y  $B$ .

Para el cálculo del desnivel, entre  $A$  y  $B$ , habiendo medido la distancia horizontal ( $Dh$ ) y el ángulo vertical ( $\alpha$ ), se utiliza la función trigonométrica tangente:

$$\tan \alpha = \frac{Co}{Ca} \quad (3)$$

Donde  $Co \approx \Delta t$  y  $Ca \approx Dh$ , luego reemplazando la notación en la función anterior:

$$\tan \alpha = \frac{\Delta t}{Dh}$$

Y despejando  $\Delta t$  se obtiene:

$$\Delta t = Dh \cdot \tan \alpha$$

Se deberá tener en cuenta, además, la altura instrumental ( $i$ ) y la altura del prisma ( $o$ ) para hallar el desnivel entre los puntos  $A$  y  $B$ . De esta manera se obtiene la forma general para el cálculo del desnivel.

$$\Delta H_B^A = \Delta t + (i - o) \quad (4)$$

Donde,

$\Delta t$ : Adquiere los supuestos

- $\Delta t = Dh \cdot \tan \alpha$
- $\Delta t = Di \cdot \sin \alpha$

- $\Delta t = Dh \cdot \frac{1}{\tan Z} \approx Dh \cdot \cot Z$
- $\Delta t = Di \cdot \cos Z$

Dependiendo de las observaciones que se realicen, se obtiene la ecuación de la nivelación trigonométrica, para obtención del desnivel entre  $A$  y  $B$ .



#### 2.2.4. Nivelación Trigonométrica por estaciones reciprocas

La Nivelación Trigonométrica por estaciones reciprocas es un método de medición alimétrico para calcular el desnivel de un punto respecto a otro, utilizando visuales reciprocas en diferentes épocas.

Para calcular el desnivel mediante método de nivelación por estaciones reciprocas entre dos puntos  $A$  y  $B$ , se estaciona en  $A$  y se mide hacia  $B$  (Situación A); a continuación, se invierten las posiciones relativas (Situación B) y se realizan nuevas medidas desde  $B$  hacia  $A$  (figura 10). Como resultado de las observaciones se podrá calcular el desnivel desde ambas posiciones (Farjas, 2017).

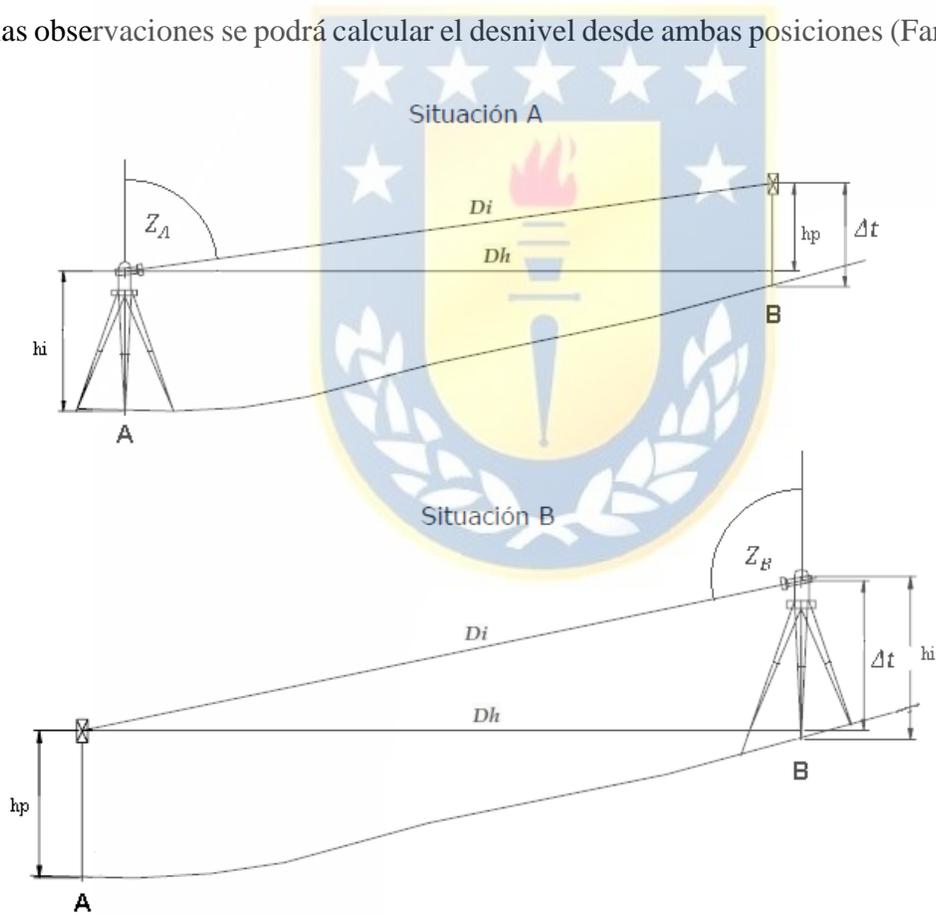


Figura 6: Situación de nivelación trigonométrica por estaciones reciprocas.

Las diferencias de altura de ambas situaciones, se formulan por separado, siguiendo la forma general para el cálculo del desnivel en la nivelación trigonométrica, considerando, además, el error de curvatura más refracción.

$$\Delta H_A^B = \Delta t + C \quad (5)$$

Siendo:

$$\Delta H_A^B = \Delta t_A^B + (1 - k_A) \frac{Dh^2}{2R} + h_i - h_p \quad (6)$$

$$\Delta H_B^A = \Delta t_B^A + (1 - k_B) \frac{Dh^2}{2R} + h_i - h_p \quad (7)$$

Donde,

$\Delta t$ : Diferencia de altura entre el objeto y el objetivo.

$C$ : Corresponde a los efectos de curvatura y refracción en conjunto.

$k_A$  y  $k_B$ : Coeficiente de refracción en los puntos A y B, para la situación A y situación B, respectivamente.

$Dh$ : Distancia horizontal

$R$ : Radio medio de la Tierra ( $R \approx 6371 \text{ km}$ )

$h_i$ : Altura del instrumento

$h_p$ : Altura del prisma

Para resolver el desnivel por este método, se calcula la media aritmética, considerando que el desnivel recíproco posee signo negativo, además, se considera como  $k_A \neq k_B$ , puesto que

las mediciones se realizan de manera reciproca, pero en distintas épocas, por lo que las visuales pasan por diferentes capas ambientales, generando diferentes magnitudes.

$$\overline{\Delta H} = \frac{\Delta H_A^B + (-\Delta H_B^A)}{2} \quad (8)$$

$$\Delta H = \frac{1}{2} Dh \cdot (\cot Z_A - \cot Z_B) - (k_A - k_B) \frac{D^2}{2R} \quad (9)$$

Donde,  $\left[ \frac{1}{2} Dh \cdot (\cot Z_A - \cot Z_B) \right]$  es la diferencia de altura nominal y  $\left[ -(k_A - k_B) \frac{D^2}{2R} \right]$  es el efecto de refracción.

### 2.2.5. Nivelación trigonométrica por visuales reciprocas y simultaneas.

La NTVRS es un método de medición alimétrico para calcular el desnivel de un punto respecto de otro, a través de la medición de la distancia inclinada y el ángulo cenital, utilizando visuales reciprocas y simultaneas (Pirtı & Hoşbaş, 2019).

El modelo de medición de la nivelación trigonométrica por lecturas recíprocas simultáneas (figura 7), calcula la diferencia de altura entre dos puntos de referencia *A* y *B*. Consiste en estacionar el equipo topográfico en los puntos entre los que se quiere hallar el desnivel y realizar lecturas cenitales simultaneas desde los dos puntos (Ceylan & Baykal, 2008).

A diferencia del método anterior, para éste, se realizan las mediciones de manera simultánea, o al menos, que las condiciones meteorológicas sean iguales y habiendo transcurrido poco tiempo entre ambas observaciones. Los efectos angulares de la refracción atmosférica serán iguales en las dos visuales y el desnivel, eliminando además el efecto conjuntamente con el de esfericidad. (Shen et al, 2017).

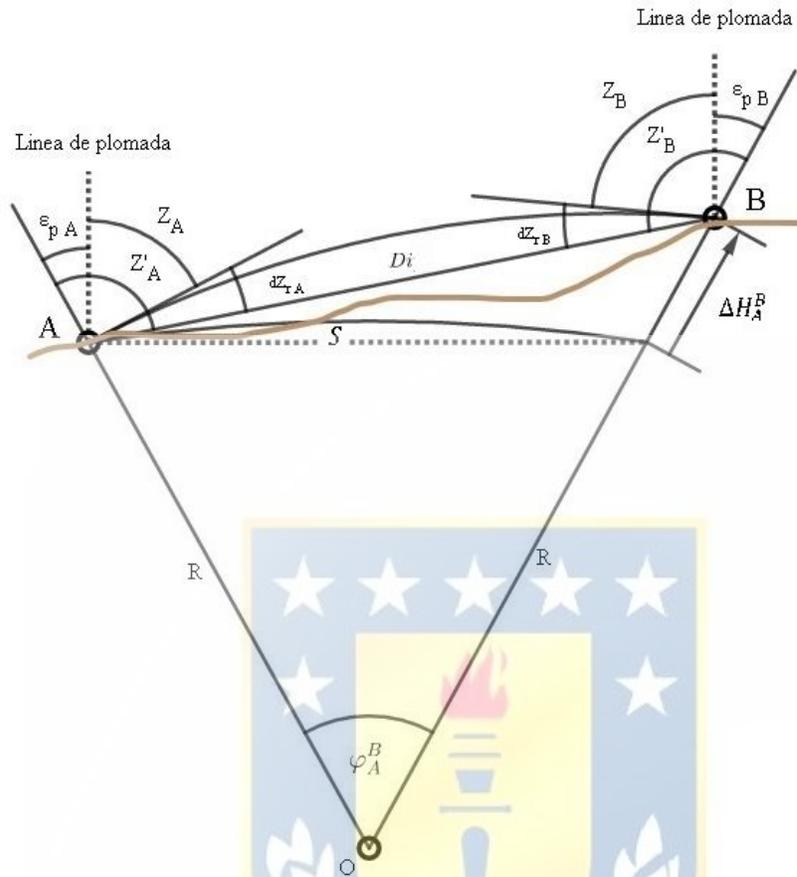


Figura 7: Nivelación trigonométrica por visuales recíprocas y simultáneas. (Ceylan & Baykal, 2008)

Donde,

$Z'_A$  y  $Z'_B$  : son los ángulos cenitales del modelo, medidas desde  $A$  a  $B$  ; y de  $B$  a  $A$ , respectivamente;

$Z_A$  y  $Z_B$  : son los ángulos cenitales observados de  $A$  a  $B$  ; y de  $B$  a  $A$ , respectivamente;

$dZ_{rA}$  y  $dZ_{rB}$  : son los errores del modelo debido al efecto de refracción;

$\varepsilon_{pA}$  y  $\varepsilon_{pB}$  : son los errores del modelo debido a la desviación de la línea de plomada;

$Di$  : es la distancia inclinada observada entre  $A$  y  $B$

$\Delta H_A^B$  : es la diferencia de alturas ortométricas de  $A$  a  $B$ .

$S$  : corresponde a la longitud del arco entre  $A$  y  $B$

$R$  : es el radio medio de la tierra ( $R \approx 6371 \text{ km}$ ) y

$\varphi_A^B$  : es el ángulo formado por  $AOB$  con  $O$  centro de la tierra.

Además,  $A$  y  $B$  son dos estaciones, cuyos ángulos cenitales medidos son  $Z_A$  y  $Z_B$ ,  $dZ_{rA}$  y  $dZ_{rB}$  representa el efecto de refracción para las estaciones  $A$  y  $B$ , además por ser observaciones simultáneas, se cumple que  $dZ_{rA} = dZ_{rB}$ .

De la figura 7 se deduce el desnivel  $\Delta H$  como la diferencia de altura entre la estación  $B$  menos la altura en  $A$ , y Da Silva & Silva (2006) describen esta diferencia de altura de la forma:

$$\Delta H_A^B = S \cdot \tan \Delta Z \quad (10)$$

En la nivelación trigonométrica realizada a lo largo de las triangulaciones, se conoce la longitud ( $S$ ) del arco  $(\widehat{AB})$ , obtenido a partir de la resolución del triángulo geodésico; en polígonos electrónicos, medidos con estación total, se conoce la distancia inclinada ( $Di$ ) entre los dos puntos, por lo que puede tomar la forma siguiente (Rodrigues, 1988):

$$\Delta H_A^B = Di \cdot \sen \Delta Z \quad (11)$$

Donde  $\Delta Z = \frac{Z_B - Z_A}{2}$ , por lo tanto, la forma final para el cálculo del desnivel entre los puntos  $A$  y  $B$ , mediante el método de nivelación trigonométrico por visuales recíprocas y simultáneas será:

$$\Delta H_A^B = Di \cdot \sen \left( \frac{Z_B - Z_A}{2} \right) \quad (12)$$

Esta expresión permite calcular el desnivel entre los puntos  $A$  y  $B$  sin necesidad de considerar los efectos de esfericidad y refracción.

Cabe señalar que los ángulos cenitales  $Z_A$  y  $Z_B$  son las observaciones sin realizar la reducción al terreno, mediante las alturas de los instrumentos, es decir, que las que han sido observadas deberán reducirse al terreno y como con la simultaneidad de las observaciones lo que se pretende

es igualar los efectos de la refracción, puede sustituirse por la condición de operar en condiciones atmosféricas semejantes.

En líneas de nivelaciones largas, donde se requiera más de una instalación de los instrumentos, las diferencias de alturas entre los puntos  $A$  y  $B$  se calcula como la suma de varias diferencias de altura individuales obtenidas de cada instalación de los instrumentos con sus respectivas observaciones, similar al procedimiento especificado en el apartado de nivelación geométrica.

$$\Delta H_A^B = \sum \Delta H_i^j \quad (13)$$

### 2.3. Teoría de errores

Las mediciones realizadas en terreno están siempre sujetas a errores, provocados por factores como imperfecciones propias de los instrumentos, a la capacidad propia de los operadores y a las condiciones atmosféricas; por lo tanto, ninguna medición es exacta o libre de errores (Bedón, 2014).

Los errores están presentes en las mediciones, debido a las limitaciones aludidas, no siguen una ley determinada y su origen está en múltiples causas. por lo que es necesario conocer los tipos y la magnitud de estos para buscar reducirlos a un nivel tolerable para garantizar que los resultados cumplen con cierto grado de precisión.

#### 2.3.1. Fuentes de error

Según Jiménez (2007), existen tres causas por las cuales se producen errores al efectuar mediciones, estas son:

1. **Naturales:** Ocasionados por los fenómenos naturales, como la temperatura, el viento, la humedad, la presión atmosférica, la refracción atmosférica, la gravedad y la declinación magnética.
2. **Instrumentales:** Se deben a imperfecciones en la construcción o ajuste de los instrumentos y del movimiento de sus partes individuales.
3. **Personales:** Tienen su origen principalmente en las limitaciones propias de los sentidos humanos, tales como la vista y el tacto.

### 2.3.2. Tipos de error

Debido a la importancia de conocer los tipos y la magnitud de los errores, estos se clasifican según el efecto que los provoca en tres tipos:

- Errores Groseros ( $\varepsilon_g$ )
- Errores Sistemáticos ( $\varepsilon_s$ )
- Errores Aleatorios ( $\varepsilon_a$ )

De esta manera, el resultado de las observaciones estará compuesto por los siguientes elementos:

$$V_{obs} = \Delta V + \varepsilon_g + \varepsilon_s + \varepsilon_a \quad (14)$$

Donde,

$V_{obs}$  : Corresponde al valor observado y  $\Delta V$  al valor verdadero, el cual no es conocido. Además, los errores groseros y los sistemáticos se eliminan, mediante un análisis apropiado y corrección, quedando solamente el error accidental más el valor verdadero de la observación.

$$V_{obs} = \Delta V + \varepsilon_a \quad (15)$$

### **2.3.2.1. Errores groseros**

Son aquellas equivocaciones ocasionadas por descuido, distracción, cansancio, falta de conocimientos del operador o inconvenientes en la comunicación. Se detectan trabajando de modo metódico y realizando controles sobre las observaciones. Es imprescindible minimizar o eliminar estas equivocaciones siendo muy cuidadoso, ya que esto podría implicar la repetición de los trabajos de campo, incrementando el tiempo, afectando la eficiencia y la economía de un proyecto. (Jimenez, 2007)

### **2.3.2.2. Errores sistemáticos**

Las condiciones que ocasionan errores sistemáticos se comportan de acuerdo a leyes físicas que son posibles de modelar matemáticamente. Por lo tanto, si se conocen las condiciones y su magnitud, es posible calcular una corrección y aplicarla a los valores observados para eliminar dicho efecto (Wolf & Ghilani, 2008).

Son el resultado de factores que comprenden el medio ambiente, los instrumentos y el observador. Este tipo de errores mantienen su signo y magnitud mientras que las condiciones de medición no cambien y por lo tanto son acumulativos.

En algunos casos la magnitud de errores sistemáticos es tan pequeña que se confunde con los errores aleatorios, realizándose un tratamiento equivocado al manejo de estos errores.

### 2.3.2.3. Errores aleatorios

Estos errores están presentes en todas las mediciones topográficas, también llamados errores accidentales o casuales, influyen de manera irregular y varían en magnitud y signo de una observación a otra. Son ocasionados por factores que quedan fuera del control del observador, obedecen las leyes de la probabilidad y se les llama también errores accidentales (Jimenez, 2007).

Debido a que la magnitud y el signo de estos errores son consecuencia del azar, no existen métodos para calcularlos o eliminarlos absolutamente. Se les conoce por esto como errores compensables porque tienden a anularse entre sí en una serie de medidas.

Los errores groseros y los sistemáticos pueden ser prácticamente eliminados de las mediciones u observaciones, pero siempre habrá errores accidentales. Estos tienen un comportamiento aleatorio, sus magnitudes y la frecuencia con que ocurren siguen las leyes de la probabilidad.

#### 2.3.1. Valor probable

Según Paul Wolf (2008), en las mediciones realizadas en terreno, nunca se conoce el valor verdadero de ninguna magnitud. Sin embargo, su valor más probable puede calcularse si se efectúan mediciones redundantes, usando el mismo equipo y procedimiento. De ser así, la primera medición determina el valor y las demás mediciones se considerarán redundantes. El valor más probable en ese caso corresponde a la media aritmética, definida como:

$$\bar{V} = \frac{\sum V}{n} \quad (16)$$

Donde,

$\bar{V}$ : Es el valor más probable de la cantidad que, además, reemplaza al valor verdadero.

$\sum V$ : Es la suma de las medidas individuales  $V$

$n$ : Es el número total de mediciones.

En mediciones donde no se utilizan los mismos instrumentos y procedimientos, o cuando varias magnitudes interrelacionadas se determinan utilizando mediciones indirectas, los valores más probables se calculan empleando el método de mínimos cuadrados (Wolf & Ghilani, 2008).

### 2.3.2. Error absoluto

El error absoluto o real corresponde a la diferencia entre la medición en terreno del valor observado y el valor verdadero ( $\Delta V$ ) de la magnitud (Jimenez, 2007). Esto es el residuo de la observación.

$$r = V - \Delta V \quad (17)$$

Donde,

$r$ : Error absoluto o residuo

$V$ : Valor observado

$\Delta V$ : Valor verdadero

El error absoluto cuantifica la desviación en términos absolutos respecto al valor verdadero. Es importante destacar que al hacer referencia al valor verdadero ( $\Delta V$ ) se debe considerar al valor probable o medio ( $\bar{V}$ ), ya que es imposible medir directamente la magnitud real.

$$r = V - \bar{V}$$

### 2.3.3. Error relativo

Se define como el cociente entre el error absoluto y el valor verdadero de la magnitud que se desea conocer, con el fin de hacerlo más notable, se expresa en forma de porcentaje.

$$\varepsilon_{rel} = \frac{r}{V} \cdot 100 \quad (18)$$

Donde,

$\varepsilon_{rel}$ : Es el error relativo.

### 2.3.4. Medidas de Precisión

En las mediciones es importante obtener el valor más probable pero además tener conocimiento de su precisión mediante el establecimiento de un error en la medición. De esta manera se expresa el grado de refinamiento o perfección aplicado a una medición, asociado a la calidad en su ejecución.

Domínguez (2007) señala tres posibles casos para determinar el error en una medición, estos son:

1. **Error probable:** Siendo  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n$  los errores reales obtenidos en una medición realizada  $n$  veces y luego ordenándolos de manera ascendente según la magnitud, prescindiendo del signo, se llamará error probable ( $\varepsilon_{prob}$ ), al situado en el centro de la serie, es decir, la mediana del conjunto de errores.
2. **Error medio aritmético:** Como su nombre indica, el error medio aritmético, designado por ( $\varepsilon_{ma}$ ), corresponde a la media aritmética de todos los errores reales obtenidos, prescindiendo de su signo.

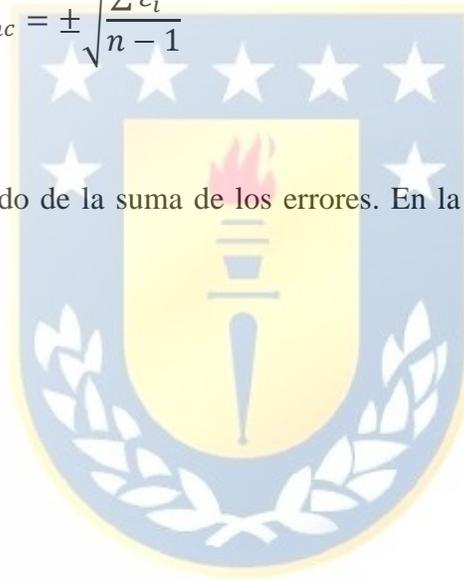
$$\varepsilon_{ma} = \frac{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n}{n} \quad (19)$$

3. **Error medio cuadrático:** La precisión viene mejor determinada en función de los cuadrados de los errores que de sus primeras potencias; por tal motivo se considera ventajoso en comparación a los casos anteriores. El error medio cuadrático es definido por la siguiente expresión:

$$\varepsilon_{mc} = \pm \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{n-1}} \quad (20)$$

Donde,

$\sum \varepsilon_i^2$  : Corresponde al cuadrado de la suma de los errores. En la práctica, se utilizan los residuos de las mediciones.



### 2.3.1. Asignación de errores

Una asignación razonable de errores a las magnitudes medidas depende de numerosos factores que no se pueden especificar aquí en detalle. Sin embargo, como norma general, dependerá de si las mediciones se efectúan directamente o si se obtienen tras la aplicación de relaciones matemáticas entre otros valores previamente medidos (medidas indirectas).

#### 2.3.1.1. Medidas directas

Al medir directamente una magnitud mediante un instrumento de medida, se debe indicar el error asociado en la forma:

$$V \pm \varepsilon_0 \quad (21)$$

Donde,

$V$ : Corresponde al valor medido por el instrumento.

$\varepsilon_0$ : Corresponde al error de la medición, que normalmente se considerará la precisión del instrumento de medición, esto es, el menor intervalo discernible en escala. Así, por ejemplo, la sensibilidad de una regla graduada en milímetros es igual a 1.

### 2.3.1.2. Medidas indirectas o propagación de errores.

Como todas las mediciones contienen errores, cualquier cantidad calculada a partir de ellas también los contendrá. El proceso de evaluar los errores en valores calculados con medidas que contienen errores se denomina propagación de errores (Wolf & Ghilani, 2008).

La propagación de los errores aleatorios se calcula usando la ley general de la propagación de varianzas. En topografía normalmente las mediciones son matemáticamente independientes.

Sean  $a, b, c, \dots, n$  los valores medidos que contienen los errores  $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c, \dots, \varepsilon_n$ , respectivamente y  $Z$  un valor que se calcula a partir de los valores medidos  $a, b, c, \dots, n$ , entonces:

$$W = f(a, b, c, \dots, n) \quad (22)$$

$$\varepsilon_w = \pm \sqrt{\left(\frac{df}{da} \varepsilon_a\right)^2 + \left(\frac{df}{db} \varepsilon_b\right)^2 + \left(\frac{df}{dc} \varepsilon_c\right)^2 + \dots + \left(\frac{df}{dn} \varepsilon_n\right)^2} \quad (23)$$

Para  $n$  mediciones en donde los errores aleatorios afectan en iguales magnitudes a cada valor medido, se podría generalizar como:

$$\varepsilon_z = \pm \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{n}} \quad (24)$$

## 2.4. Correcciones

En trabajos topográficos como la nivelación, siempre están afectados por factores externos, dentro de los errores sistemáticos, existen dos efectos que deben ser eliminados (Casanova, 2002):

1. La influencia de la curvatura de la Tierra, que da lugar a la corrección por curvatura, el cual aumenta el desnivel observado ( $C_c$ ).

2. La influencia de la refracción del rayo de luz que proviene del punto visado, que origina la corrección por refracción, el cual disminuye el desnivel observado ( $C_r$ ).

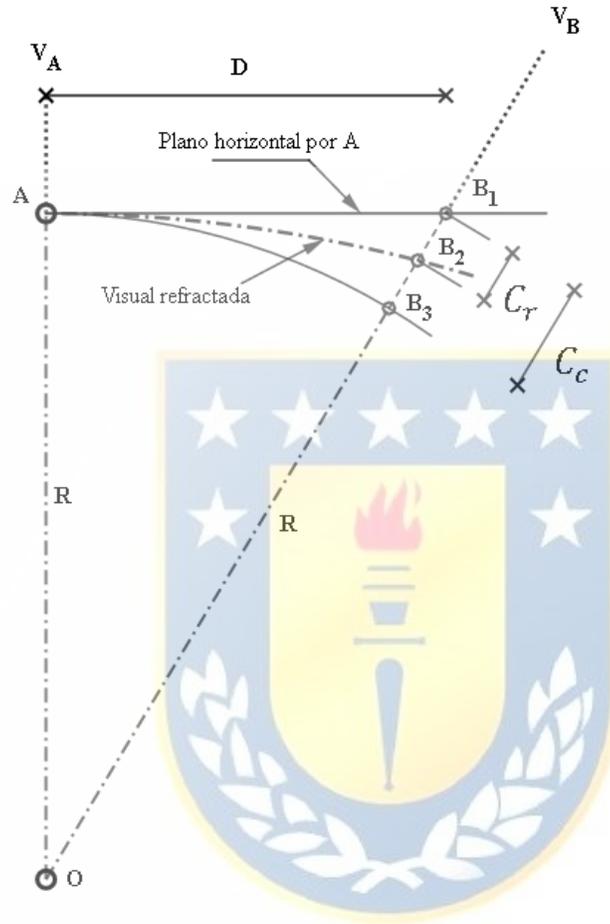


Figura 8: Efectos de curvatura y refracción (Casanova, 2002)

Para considerar los efectos de estos dos errores sistemáticos, se parte del conocimiento de las expresiones que nos permiten obtener su influencia para cada caso en particular, lo cual modifica la formula general de la nivelación trigonométrica, esto es:

$$\Delta H_A^B = \Delta t + (i - o) + C \quad (25)$$

Donde,

$$C = C_c + C_r$$

$$C = \frac{D^2}{2R} - K \frac{D^2}{2R}$$

$$C = (1 - K) \frac{(D_A^B)^2}{2R}$$

$C$ : Corresponde a las correcciones de esfericidad y refracción en conjunto.

Reemplazando en la formula general, se tiene:

$$\Delta H_A^B = \Delta t + (i - o) + (1 - K) \frac{(D)^2}{2R} \quad (26)$$

Para lo cual:

$K$ : Representa el coeficiente de refracción

$R$  : Radio de la Tierra

$D$  : Distancia entre  $A$  y  $B$



#### 2.4.1. Corrección por curvatura

La forma curva de la tierra influye en la nivelación dado que las visuales entre puntos son líneas rectas, cuando deberían describir arcos de circunferencia, de tal manera que la visual es tangencial a la línea de nivel, en consecuencia, deben aplicarse ciertas correcciones cuando las visuales son largas, es decir, cuando es considerable la desviación de la tangente con respecto a un círculo (Casanova, 2002).

Para demostrar esto, se utiliza el Teorema de Pitágoras (figura 6):

$$(R + C_c)^2 = R^2 + D^2$$

$$R^2 + 2R \cdot C_c + C_c^2 = R^2 + D^2$$

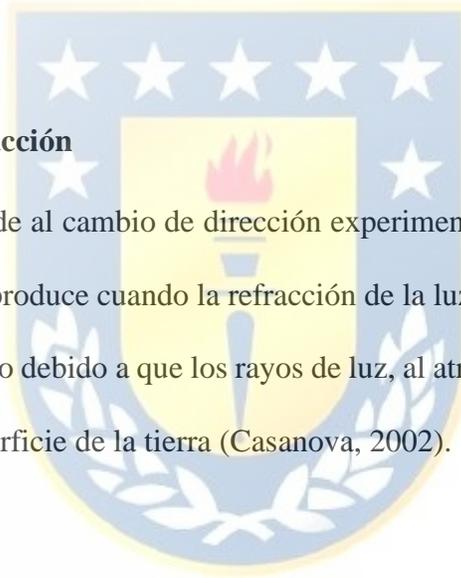
$$C_c = \frac{D^2 - C_c^2}{2R}$$

Donde, si se consideran distancias inferiores a  $2km$ , la magnitud del efecto de curvatura resulta un valor pequeño, por lo que  $C_c^2 \approx 0$ , por ser un infinitésimo de orden superior.

$$C_c = \frac{D^2}{2R} \quad (27)$$

#### 2.4.2. Corrección por refracción

El efecto de refracción corresponde al cambio de dirección experimentado por la luz al cruzar medios con densidades distintas, se produce cuando la refracción de la luz genera un efecto curvo sobre las lecturas que se realizan. Esto debido a que los rayos de luz, al atravesar la atmósfera, son desviados o refractados hacia la superficie de la tierra (Casanova, 2002).



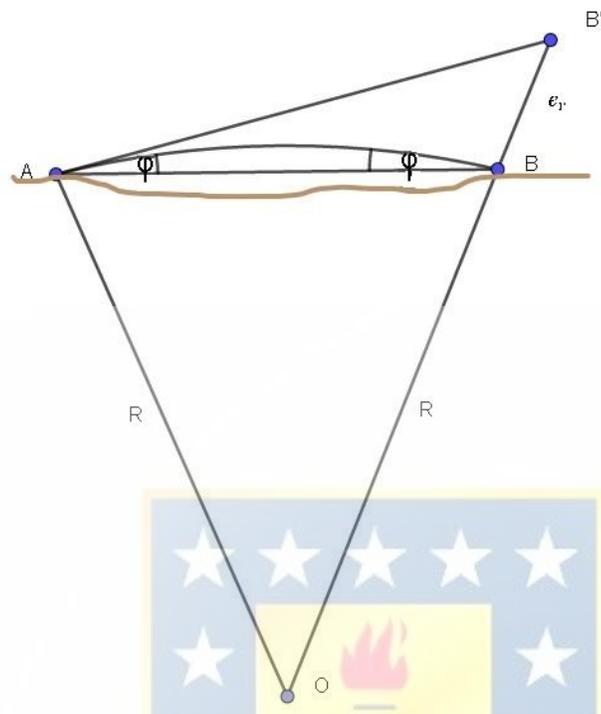


Figura 9: Corrección por refracción (Sánchez & Pereda, 2014).

Debido a este efecto, las visuales en Topografía, se pueden asimilar a un arco de circunferencia, haciendo iguales los ángulos formado por el efecto de refracción en ambas estaciones. El desplazamiento debido a refracción es variable y depende de las condiciones atmosféricas (presión atmosférica, temperatura y humedad relativa), además de la distancia. Pero se puede admitir, para simplificar, la corrección por refracción como una función directa de la corrección por curvatura (Casanova, 2002).

$$C_r = -K \cdot C_c$$

$$C_r = -K \cdot \frac{D^2}{2R}$$

### 2.4.3. Coeficiente de refracción

Un problema para la medición de largas distancias, en topografía, es el fenómeno de la refracción. A causa de variaciones en la densidad del aire durante las observaciones, generando cambios continuos en la dirección de propagación de la visual. La complejidad de la composición atmosférica, así como las variaciones en su densidad, hacen que la determinación de la refracción sea extremadamente difícil.

En el caso de la nivelación trigonométrica por lecturas recíprocas y simultáneas, el cálculo de la diferencia de altura se ve afectada por la magnitud de los coeficientes de refracción. En cualquier caso, el método por lecturas recíprocas y simultáneas mantendrá la magnitud de los coeficientes de refracción suficientemente pequeña.

Para determinar el coeficiente de refracción  $K$  a través de la línea de observación entre los puntos A y B (figura 8), se puede calcular a partir de observaciones recíprocas y simultáneas del ángulo cenital. De esto se deduce la siguiente relación:

$$Z + r = \varphi + 200 - (Z' + r') \quad (28)$$

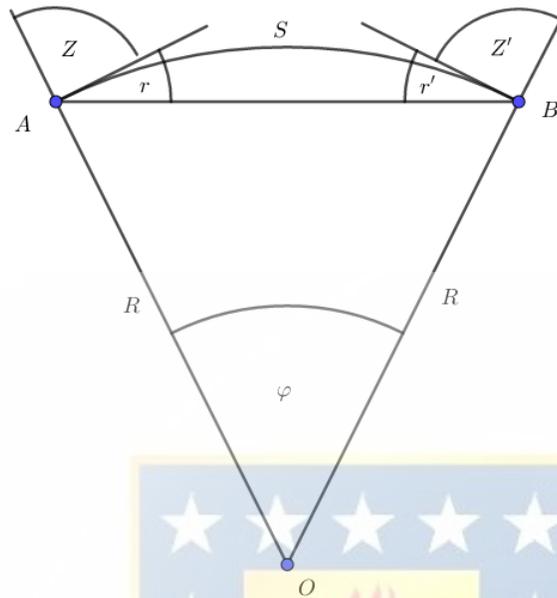


Figura 10: Visuales recíprocas y simultáneas (Farjas, 2017).

Como la luz por defecto describe un arco  $\widehat{AB}$  de longitud  $S$ , los ángulos cenitales que se miden son  $Z$  y  $Z'$ , y debido a que las condiciones atmosféricas son similares para ambas observaciones simultáneas, los ángulos de refracción serán de igual magnitud  $r = r'$  (Farjas, 2017).

$$2r = \varphi - (Z + Z') + 200 \quad (29)$$

De esta forma, dividiendo la expresión por  $2\varphi$  para simplificar, se tiene que el ángulo de refracción es:

$$r = \frac{200 - (Z + Z') + \varphi}{2} \quad (30)$$

Considerando que el coeficiente de corrección  $K$  puede ser obtenido a partir de la hipótesis en que el ángulo de refracción  $r$  es proporcional al ángulo central  $\varphi$ . (Ceylan & Baykal, 2008).

Se tiene que:

$$r = K \cdot \varphi \rightarrow K = \frac{r}{\varphi} \quad (31)$$

$$K = \frac{1}{2} - \frac{(Z + Z' - 200)}{2\varphi} \quad (32)$$

Además, se sabe que el ángulo central se calcula en función del radio  $R$  y la longitud del arco  $S$  formado sobre la superficie. De tal forma que  $\varphi = \frac{S}{R}$ , obteniendo el valor en radianes.

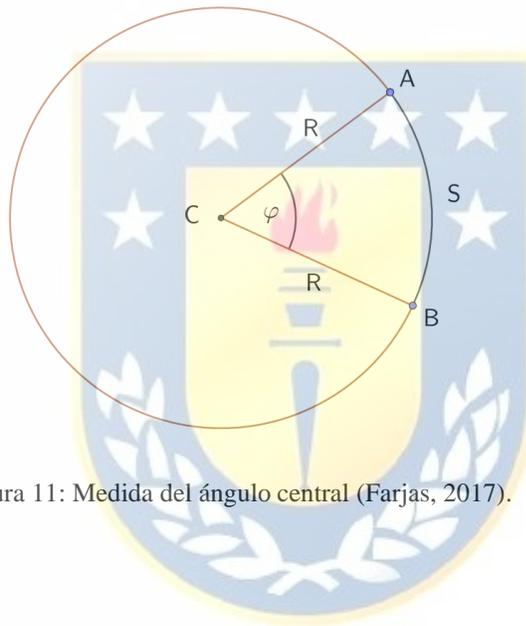


Figura 11: Medida del ángulo central (Farjas, 2017).

Sustituyendo lo anterior, en la fórmula del coeficiente de refracción, se tiene la forma general para el cálculo del mismo:

$$K = \frac{1}{2} - \frac{R}{2S}(Z + Z' - 200) \quad (33)$$

#### 2.4.4. Errores en las mediciones

Cuando se realiza una Nivelación trigonométrica, utilizando equipo topográfico actual, específicamente estación total, se deben considerar los errores que estas poseen, estas se pueden clasificar según:

- Distanciómetro de infrarrojos:
  - Alcance.
  - Precisión:  $a \text{ mm} \pm b \text{ ppm}$ .
- Teodolito:
  - Sensibilidad:  $s^{cc}$
  - Aumentos.
  - Apreciación según la casa comercial:  $a^{cc}$



##### 2.4.4.1. Fuentes de error

Las posibles fuentes de error de acuerdo a las observables son: Lectura acimutal, lectura cenital, distancias, desniveles y posiciones (si se aplica la tecnología GPS). A continuación, se mencionarán los errores asociadas al procedimiento de nivelación trigonométrico, acorde al estudio que se realiza.

##### 2.4.4.2. Error en la observación del ángulo cenital

El error del ángulo cenital observado ( $e_z$ ), ocasionada por los errores accidentales del aparato, vendrá dado por la componente cuadrática de los errores de verticalidad ( $e_v$ ), de puntería ( $e_p$ ) y de lectura ( $e_l$ ) (Farjas, 2017).

$$e_z = \sqrt{e_v^2 + e_l^2 + e_p^2} \quad (34)$$

### a) Error de verticalidad ( $e_v$ )

Es función de la precisión del nivel tubular del aparato. Este error se hace despreciable si la estación dispone de un compensador de doble eje.

- Sensor de inclinación y compensador de doble eje:

$$e_v = 0$$

- Compensador automático:

$$e_v = C_p, \quad \text{siendo } C_p \text{ la característica de precisión.}$$

- Nivel eclímetro simple:

$$e_v = \frac{1}{3} S^{cc}$$

- Nivel con eclímetro de coincidencia:

$$e_v = \frac{S^{cc}}{20} \quad \text{Con eclímetro de coincidencia.}$$

### b) Error de puntería ( $e_p$ )

$$e_p = \frac{C_v}{A} K \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (35)$$

- $C_v$ : El coeficiente de observación cenital.
- $A$ : Los aumentos del antejo.
- $K$ : Es la constante de mayoración.

$$1,5 \leq K \leq 3$$

$n$ : Número de observaciones realizadas.

### c) Error de lectura ( $e_l$ )

Tomamos como valor para este error el mínimo salto en pantalla en la lectura de ángulos centales.

- Sistema óptico mecánico

$$e_l = \frac{2}{3} m \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Siendo:

- ✓  $m$ : El último salto en pantalla.
- ✓  $n$ : El número de observaciones.

- Sistema electrónico

$$e_l = \frac{m_c}{\sqrt{3}}$$

Siendo  $m_c$  el último salto en pantalla en el sistema electrónico.

#### 2.4.4.1. Error en la medición de distancia

La medida de distancias viene caracterizada en las especificaciones de cada instrumento (tabla 17 y 19), por un error estándar o desviación típica, que se denominará  $e_{std}$ . Este consta de dos términos: el primero dado por una constante, expresado en  $mm$ ; y el segundo, proporcional a la distancia medida, y se expresa en partes por millón ( $ppm$ ) o lo que es lo mismo, error en  $mm$  por  $Km$  medido (Farjas, 2017).

Para el caso de las estaciones totales a utilizar, este error se expresa de la forma:

$$e_{std} = 2 \text{ mm} \pm 3 \text{ ppm} \quad (36)$$

Además de este valor de error, existen otros términos que no pueden olvidarse cuando se realiza la medición de distancia en un método de nivelación, y que sirven para caracterizar el instrumental utilizado en la materialización de la señal y el estacionamiento. Estos errores son:

- Error de estación: ( $e_e$ )
- Error de señal: ( $e_s$ )
- Error por inclinación de jalón: ( $e_j$ )

Finalmente, el error en la distancia observada ( $e_D$ ), viene dada por la componente cuadrática de los errores mencionados, expresado de la forma:

$$e_D = \sqrt{e_{std}^2 + e_e^2 + e_s^2 + e_j^2} \quad (37)$$

**a) Error del distanciómetro ( $e_{std}$ )**

Como se mencionó anteriormente, este error está asociado al tipo de aparato utilizado en la medida de las distancias.

$$e_{std} = a + b \text{ ppm} \quad (38)$$

Donde,

$a$ : Error sistemático en la medida de distancias.

$b$ : Error que comete el aparato dependiendo de la distancia medida. ( $b \text{ ppm}$ : milímetros por kilómetro)

**b) Error de la estación ( $e_e$ )**

Es el error asociada a la instalación del instrumento por imperfección de la plomada óptica, mala definición del punto, etc. Se expresa en unidad de  $mm$ , y se debe determinar al momento de realizar el control del instrumento.

**c) Error de la señal ( $e_s$ )**

Es el error asociada a la señalización del punto a observar. Si se sitúa sobre un trípode alcanzaremos errores de 2 mm, pero con jalón éstos serán superiores, pudiendo considerarse valores en torno a 1 cm (Farjas, 2017).

$$e_s \text{ (prisma sobre trípode)} \leq 2 \text{ mm}$$

$$e_s \text{ (prisma sobre jalón)} \leq 10 \text{ mm}$$

**d) Error por la inclinación del jalón ( $e_j$ )**

El jalón no se sitúa completamente vertical, lo que provoca un error en la medida de la distancia, cuya expresión es la siguiente:

$$e_j = \frac{m \sin\beta}{\cos \alpha} \tag{39}$$

Siendo:

$m$ : Altura del jalón.

$\alpha$ : Sensibilidad del nivel de burbuja del jalón.

$\beta$ : Ángulo de máxima inclinación de las visuales.

Considerando que, en una nivelación trigonométrica de precisión, se busca mejores resultados, una manera de eliminar la posibilidad de este error, es la utilización de un trípode para la colocación del prisma, usando el método de contraje forzado.

#### 2.4.4.2. Error en observaciones por visuales reciprocas y simultaneas

La precisión del desnivel al aplicar el método de visuales reciprocas y simultaneas viene dada por la expresión:

$$e_{\Delta H} = Di \cdot \frac{1}{2}(e_{ZA} + e_{ZB}) \cdot \cos\left(\frac{Z_B - Z_A}{2}\right) + (e_D) \cdot \text{sen}\left(\frac{Z_B - Z_A}{2}\right) \quad (40)$$

Donde,

$e_{ZA}$  y  $e_{ZB}$ : Corresponden a los errores totales de las observaciones cenitales.

$e_D$ : Corresponde el error de la medida de distancia.

$Z_A$  y  $Z_B$ : Corresponden a las observaciones cenitales.

$Di$ : Corresponde a la distancia inclinada.

#### 2.4.5. Reducción del ángulo cenital al marco

Para estandarizar las diferencias de nivel, los ángulos cenitales recíprocos observados deben reducirse al terreno, principalmente en los trabajos donde el desnivel la topografía del terreno obliga a utilizar mayor altura para asegurar la intervisibilidad entre los vértices (Rodrigues, 1988).

La fórmula adoptada es la siguiente:

$$Z = Z' + \delta z \quad (41)$$

$$\delta z = \frac{(hj - hi) \cdot \text{sen } Z'}{S} \quad (42)$$

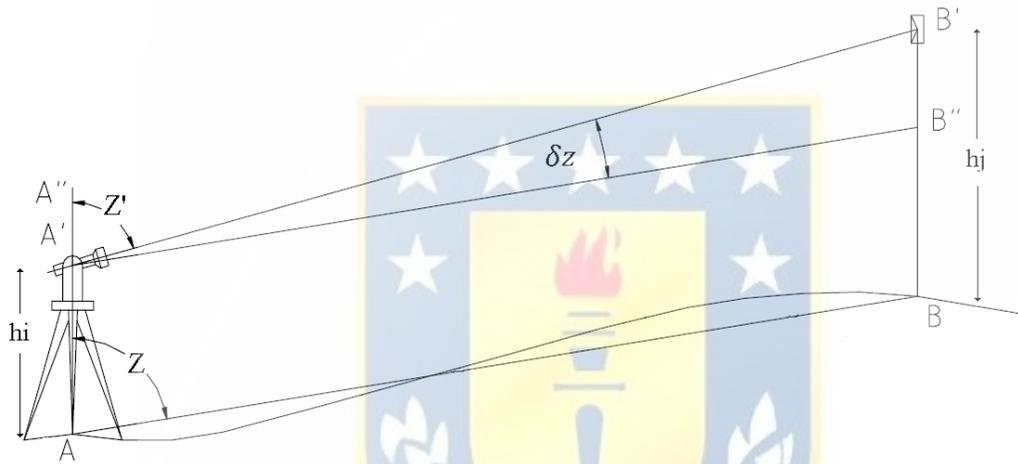


Figura 12: Corrección del ángulo cenital al terreno (elaboración propia).

De la figura 12, se entiende:

$Z$ : Ángulo cenital reducida al marco.

$Z'$ : Ángulo cenital observado.

$\delta z$ : Corresponde al ángulo de corrección.

$hi$ : Altura del instrumento.

$hj$ : Altura de la señal.

$S$ : Longitud del arco entre el instrumento y la señal.

### 2.4.1.Reducción de la distancia al ángulo cenital observado

Debido a que la medición de distancias se realiza en solo una dirección, desde la estación en la posición adelante hacia un reflector, en la posición de la estación de atrás. Aunque el reflector se encuentra a la misma altura y posición de la estación, debido a método de contraje forzado, esta medición también puede poseer una diferencia en la medida del ángulo cenital observado anteriormente.

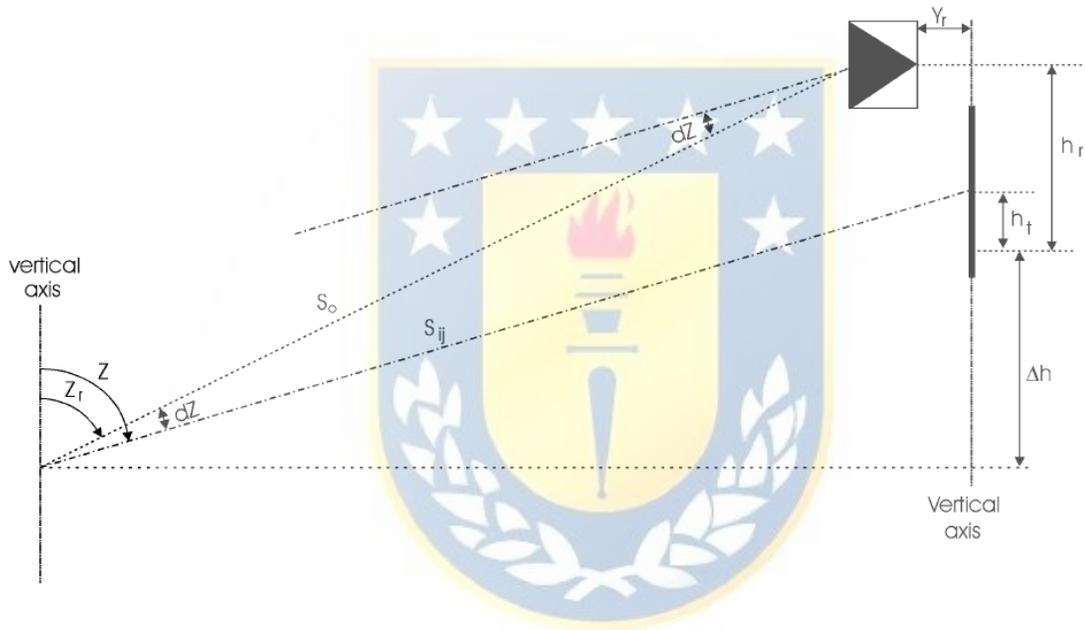


Figura 13: Corrección de la distancia observada (elaboración propia).

De la figura 13 se deduce la siguiente ecuación:

$$S_{ij} = \frac{S_o \cdot \sin(Z - dZ) + Y_r}{\sin Z} \quad (43)$$

$$S_{ij} = \frac{S_o \cdot \sin(Zr)}{\sin Z} \quad (44)$$

Donde,

$S_o$ : Corresponde a la distancia medida hacia el reflector.

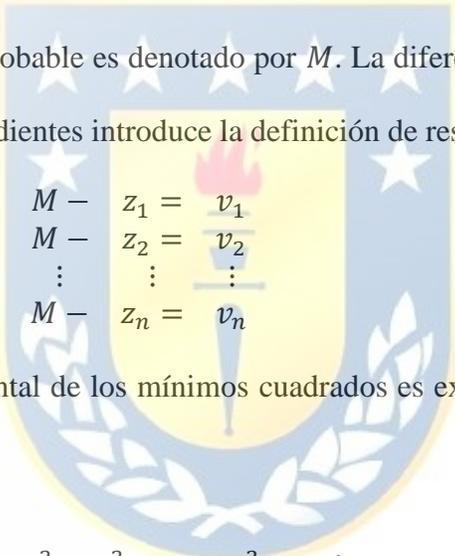
$Z$ : Corresponde al ángulo cenital observado hacia el reflector.

$Z_r$ : Corresponde al ángulo cenital observado hacia la estación.

$S_{ij}$ : Corresponde a la distancia corregida.

## 2.5. Ajuste por Mínimos Cuadrados

De acuerdo con Wolf & Ghilani (2006), el principio de los mínimos cuadrados parte bajo el supuesto de la existencia de varias observaciones independientes igualmente ponderadas ( $z_1, z_2, \dots, z_n$ ) y donde el valor más probable es denotado por  $M$ . La diferencia entre el valor más probable y las observaciones independientes introduce la definición de residuo.


$$\begin{array}{rcl} M - & z_1 = & v_1 \\ M - & z_2 = & v_2 \\ & \vdots & \vdots \\ M - & z_n = & v_n \end{array}$$

Por lo tanto, el principio fundamental de los mínimos cuadrados es expresado en la siguiente ecuación.

$$\Phi = \sum_{i=1}^n v_i^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2 \rightarrow \min \quad (45)$$

La condición anterior establece que “el valor más probable  $M$ , para una cantidad obtenida desde observaciones repetidas de igual peso, es el valor que hace que la suma de los cuadrados de los residuos sea mínima”.

Ahora bien, la situación preliminar presenta el principio fundamental de los mínimos cuadrados cuando las observaciones tienen pesos iguales. Pero el caso más general en el ajuste por mínimos cuadrados asume que las observaciones tienen distintos grados de precisión, por lo tanto, diferentes pesos.

$$\Phi = \sum_{i=1}^n p_i v_i^2 = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 + \dots + p_n v_n^2 \rightarrow \min \quad (46)$$

Esta condición, denominada como la condición de los mínimos cuadrados ponderados, presenta que “El valor más probable M, para una cantidad obtenida a partir de observaciones con diversos pesos, es el valor que hace que la suma del producto de los pesos con sus respectivos residuos al cuadrado es el mínimo.”

Matricialmente, se puede escribir como.

$$\Phi = V^T P V = [v_1 \quad v_1 \quad \dots \quad v_n] \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (47)$$

Donde V corresponde al vector de los residuos y P corresponde a la matriz de los pesos.

### 2.5.1.1. Principio de mínimos cuadrados, método paramétrico de Gauss

#### Markov

El modelo Gauss Markov consiste en establecer un modelo matemático donde se relacionarán  $n$  observaciones con  $u$  parámetros. Para ello es necesario plantear un número de ecuaciones de observación idéntico al número de observaciones.

El objetivo del modelo Gauss Markov es la estimación de las observaciones ajustadas a partir de los parámetros ajustados (Montecino, 2012).

Sean:

$L_b$ : Vector de las observaciones.

$V$ : Vector de residuos.

$L_a$ : Vector de las observaciones ajustadas.

$$L_a = L_b + V \quad (48)$$

$X_0$ : Vector de los parámetros aproximados.

$X$ : Vector de las correcciones.

$X_a$ : Vector de los parámetros ajustados.

$$X_a = X_0 + X \quad (49)$$

El modelo de ajuste Paramétrico estima las observaciones ajustadas en función de los parámetros ajustados, o sea:

$$L_a = F(X_a) \quad (50)$$

Sustituyendo, se tiene:

$$L_b + V = F(X_0 + X) \quad (51)$$

Ahora, aplicando solo el primer término del desarrollo de la serie de Taylor, debido a la primicia de contar con buenos parámetros aproximados, además de realizar un proceso iterativo hasta obtener un vector de correcciones ( $X$ ), se puede linealizar el sistema anteriormente presentado, quedando:

$$AX = L + V \quad (52)$$

Donde,

$A$ : Es la matriz jacobiana (o matriz de las derivadas parciales) que contiene los coeficientes de las ecuaciones de observación linealizadas.

$L$ : Representa el vector de las observadas menos las estimadas ( $L_0 - L_b$ )

De acuerdo con Teunissen (2000), el modelo lineal Gauss Markov considera el peso, lo que se expresa de la siguiente forma.

$$PAX = PL + PV \quad (53)$$

La representación de las ecuaciones normales para el sistema matricial presentado anteriormente puede ser presentado como:

$$A^T PAX = A^T PL \quad (54)$$

Donde,

$P$ : Matriz de peso.

Esta puede ser expresada por las ecuaciones normales  $N$  y  $U$

$$NX = U \quad (55)$$

Donde,

$$N = A^T PA.$$

$$U = A^T PL.$$

Finalmente, mediante el empleo de algebra matricial, son estimadas las correcciones para los parámetros aproximados:

$$X = N^{-1}U \quad (56)$$

Obteniendo las correcciones de los parámetros aproximados somos capaces de obtener el vector de los residuos  $V$ .

$$V = AX + L \quad (57)$$

Finalmente, se obtienen los siguientes vectores de salidas.

a) **Vector de las observaciones ajustadas  $L_a$**

$$L_a = L_b + V \quad (58)$$

Donde,

$L_b$ : Corresponde al vector de las observaciones.

$V$ : Corresponde al vector de los residuos.

b) **Vector de los parámetros ajustados  $X_a$**

$$X_a = X_0 + X \quad (59)$$

Donde,

$X_0$ : Corresponde al vector de los parámetros aproximados.

$X$ : Corresponde al vector de las correcciones.

El modelo queda representado de la siguiente forma:

$$F(X_a) = L_a \rightarrow F(X_0 + X) = L_b + V \quad (60)$$

Para determinar las precisiones y correlaciones existentes en las variables se analizará la matriz de varianzas – covarianzas de los vectores resultantes. La matriz varianza – covarianza corresponde a una matriz cuadrada que dispone en su diagonal principal las varianzas de todas las variables. Mientras que en los elementos no diagonales poseen las covarianzas entre dos variables. Entre sus propiedades se encuentra que es simétrica con respecto a su diagonal principal y es definida positiva.

Cabe destacar que para el calculo de la matriz varianza-covarianza, es posible utilizar la varianza a-posteriori ( $\hat{\sigma}_0^2$ ), debido entregar resultados más realistas.

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n - u} \quad (61)$$

Matriz Varianza-Covarianza de los parámetros ajustados.

$$\sum_{X_a} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot N^{-1} \quad (62)$$

Matriz Varianza-Covarianza de las observaciones ajustadas.

$$\sum_{L_a} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot AN^{-1}A^T \quad (63)$$

Matriz Varianza-Covarianza de los residuos.

$$\sum_V = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (P^{-1} - AN^{-1}A^T) \quad (64)$$

### 2.5.2. Test Estadísticos

Luego del ajuste de una red se hace necesario analizar los resultados obtenidos. El objetivo es la determinación de los errores en las observaciones, de esta forma se hace necesario detectar y eliminar los errores groseros (*Outliers*) para no considerarlos como parte del ajuste.

Eliminar los errores del modelo funcional es fundamental, pues la alta sensibilidad del ajuste por mínimos cuadrados genera que todos los valores atípicos puedan disminuir peligrosamente la calidad de los resultados.

Existen a lo menos dos test que se aplican a los resultados ajustados, estos son técnicas para detectar los errores groseros en el ajuste.

- I. Test Global.
- II. Test Local.

#### 2.5.2.1. Test Global.

El test global corresponde a una prueba general del ajuste, para lo cual es necesario conocer la varianza a posteriori ( $\hat{\sigma}_0^2$ ). Una de las restricciones para la aplicación de este test, es que las precisiones de las observaciones deben ser conocidas (Montecino, 2012)

La siguiente formulación representa una prueba estadística fundamental en la estimación por mínimos cuadrados.

$$\frac{V^t PV}{\sigma_0^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} (n - u) \sim N_{n-u}^2 \quad (65)$$

Con  $n - u = r$ .

Donde  $n$  son los números de observaciones,  $u$  representa la cantidad de incógnitas y  $r$  son los grados de libertad en el ajuste.

Según Leick (2004) basándose en las estadísticas, el test global es utilizado para determinar si el ajuste en su totalidad es satisfactorio. Este test ejerce como prueba de hipótesis lo siguiente:

$$H_0: \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$$

$$H_a: \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$$

Donde,

$\sigma_0^2$ : Varianza a priori.

$\hat{\sigma}_0^2$ : Varianza a posteriori.

La hipótesis nula establece que la varianza a priori es estadísticamente igual a la varianza a posteriori, de esta forma, si se acepta la hipótesis nula, el ajuste se considera que es correcto y que no hay presencia de *outliers* a un nivel global. Recordemos que la varianza a posteriori corresponde a un valor estimado. Ambas varianzas no tienen que ser numéricamente idénticas; pero deben ser estadísticamente iguales, es decir:

$$X^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}(r) = \frac{V^t P V}{\sigma_0^2}$$

De esta forma:

$$X_{r, \alpha/2}^2 < X^2 < X_{r, 1-\alpha/2}^2$$

El nivel de significancia  $\alpha$ , es decir, la probabilidad de rechazar la hipótesis nula a pesar de que es cierto, se fija generalmente a 0,05.

Rechazando la hipótesis nula indicará problemas en el ajuste. Desafortunadamente, para esto puede haber más de una razón;

- a) Estimación incorrecta de pesos: Ocurre principalmente por una sobrestimación de las precisiones, ya que la desviación estándar asignada representa un valor muy pequeño.
- b) Modelo matemático incorrecto: La utilización de un modelo matemático que no represente la relación entre parámetros y observaciones tendrá como consecuencia errores en los resultados.
- c) Errores en las observaciones: Existe la posibilidad de que al menos una observación pueda contener un error grosero, de esta forma su residuo incrementará su tamaño.

Puede que no sepamos cuál de las razones anteriores causó el fracaso en el test global, pero cualquiera que sea la razón es necesario investigarlo.

#### **2.5.2.2. Test local.**

La aplicación de un test global permitirá validar de forma general el ajuste, a pesar de que este sea aprobado puede que exista la presencia de *outliers* en las observaciones, ya que este indicador es bastante sensible a la mala designación de la matriz de peso. Por lo tanto, se deben analizar los residuos de las observaciones para presenciar las grandes discrepancias que los afectan (Wolf & Ghilani, 2006).

Es importante entender que, si un residuo no pasa la prueba estadística, no quiere decir que exista un error en esa observación. La observación es seleccionada para que pueda ser examinada y finalmente decidir si mantenerla o rechazarla, esto dependerá completamente de si los resultados obtenidos satisfacen al usuario (Leick, 2004).

El test de outliers en las observaciones, consiste en comparar el tamaño de cada residuo en relación al valor crítico para un intervalo de confianza específico utilizando las desviaciones estándar de los residuos.

El intervalo de confianza utilizado corresponderá a  $E_{95}$ , en teoría, al 95% de los errores de las observaciones que deben estar dentro de la campana de Gauss. Esta categoría de error es generalmente utilizada para las observaciones topográficas o geodésicas, expresando la precisión y la detección de outliers en los datos. Por lo tanto, para encontrar el valor del 95% del error probable para cualquier tipo de mediciones se utiliza la siguiente expresión:

$$E_{95} = 1.960\sigma$$

Donde  $\sigma$  corresponde a la desviación estándar de los residuos.

El análisis correspondiente es:

$$v_i < \sigma_{vi}$$

Donde  $v_i$  corresponde al residuo de la observación  $i$  y  $\sigma_{vi}$  corresponde a la desviación estándar del residuo de la observación  $i$ . De esta forma, si la condición es correcta, se considera aprobado el test local en la observación  $i$ .

En caso de la eliminación de una observación por no pasar el test local, se debe realizar el ajuste (sin la observación) verificando que el modelo funcional está libre de outliers.

### 3. Datos y metodología

#### 3.1. Área de estudio

El área de estudio corresponde a la ciudad de Los Ángeles, pertenece a la Provincia del Biobío y Región del mismo nombre. Está ubicada a 510 kilómetros de Santiago, por la ruta 5 sur, entre los ríos de La Laja y Biobío, a 133 metros sobre el nivel del mar (SUBDERE, 2020).

En la ciudad de Los Ángeles se encuentra materializada una red de control vertical, constituida por 7 vértices distribuidos de forma homogénea, ubicados en los extremos de la urbe. Este proyecto abarca un área aproximada de unos  $17 \text{ km}^2$  y un perímetro total entre vértices cercana a 33 kilómetros (Flores, 2015).

#### 3.2. Antecedentes

Los antecedentes de este proyecto se recopilaron de la investigación titulada “Establecimiento de una red de control vertical para la ciudad de Los Ángeles, Chile” de Flores (2015) quien estableció una red vertical, en la ciudad de Los Ángeles, con precisión de  $\sim 8 \text{ mm.}$ , lo que indica que corresponde a una red de control vertical precisa según el Ministerio de Obras Públicas (MOP, 2020). Las alturas de los vértices corresponden a alturas NMM ligadas a la Red Vertical Chilena, por lo tanto, la red de control vertical esta referenciada al sistema de referencia vertical chileno (Flores, 2015).

La red de Flores (2015) está constituida por los vértices:

- DFA: Ubicado en la intersección del pasaje Los Cóndores con la Avenida Ricardo Vicuña, en una esquina del bandejón central.

- CEP: Ubicado en el bandejón central frente a una distribuidora de gas licuado, en la Av. Francisco Encina, llegando a la Av. Las Industrias. Sector Pallihue.
- PH: Ubicado en la rotonda que se genera en la intersección de la Av. Padre Hurtado con calle Los Misioneros. Sector Villa Galilea.
- EC: Ubicado a un costado del Camino María Dolores, específicamente en la vereda que da acceso a la empresa denominada “Controladora de plagas forestales”.
- MD: Ubicado en las proximidades de un paradero, en la intersección del camino María Dolores con pasaje Itahue.
- VIR: Ubicado en las proximidades a la virgen situada en la intersección de la Av. Sor Vicenta con la Av. Las Industrias.

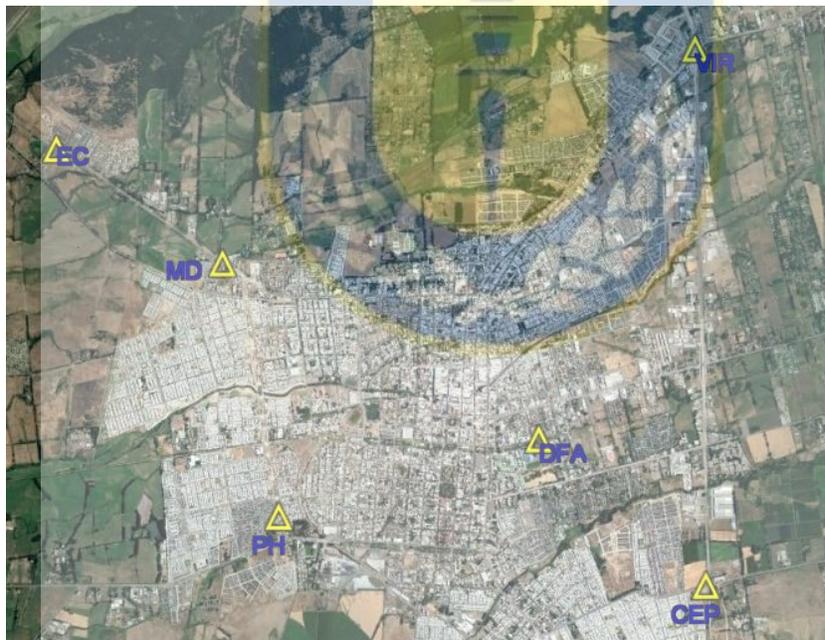


Figura 14: Área de estudio, Los Ángeles (Google Earth).

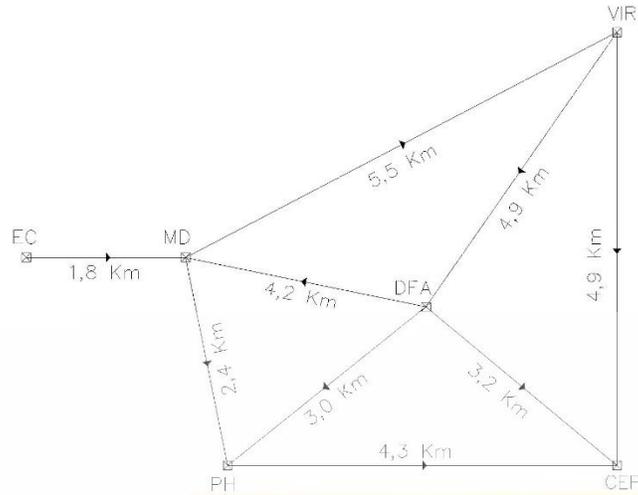


Figura 15: Croquis de la red de nivelación (Flores, 2015).

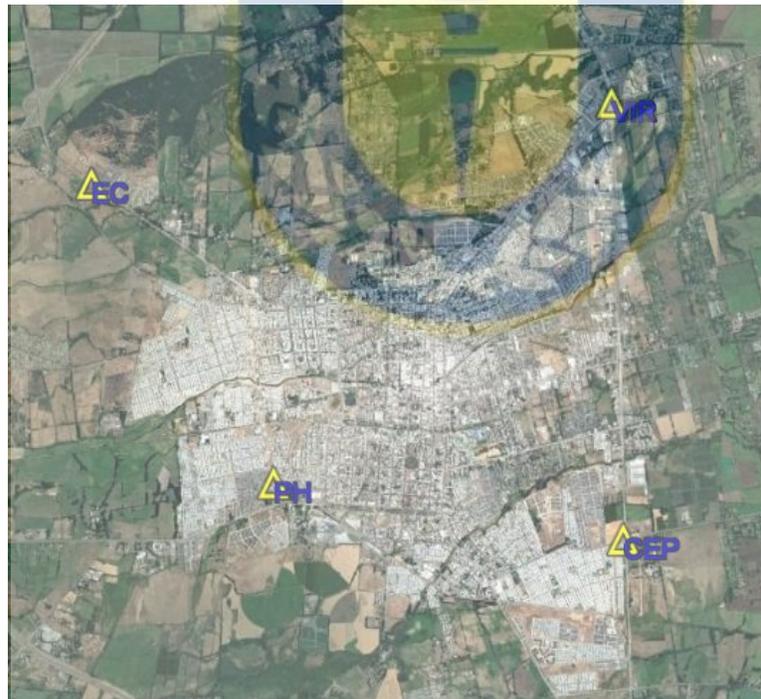


Figura 16: Situación actual de la Red altimétrica de Los Ángeles (Google Earth).

Desde que se creó la red altimétrica de Los Ángeles, han pasado 5 años y fueron eliminados 2 puntos de la red, MD y DFA (ver fig.14), a causa de trabajos que se han realizado en la vía. No obstante, debido a que en este proyecto se desea evaluar el desempeño del método NTVRS de manera práctica, bastará con los puntos existentes y sus alturas conocidas, con ello se obtendrá los desniveles entre los puntos a utilizar (ver fig.16).

### 3.2.1. Nivelación Geométrica

Los desniveles que obtuvo Flores (2015), para la red vertical en la ciudad de Los Ángeles se muestran en la tabla 1:

Vértices		DV (m)	$\sigma$ (m)
Desde	Hasta		
MD	VIR	30,403	0,009
VIR	CEP	-12,678	0,009
PH	CEP	5,181	0,007
MD	PH	12,544	0,006
DFA	MD	-18,427	0,007
VIR	DFA	-11,976	0,008
DFA	PH	-5,883	0,006
DFA	CEP	-0,702	0,007
EC	MD	-3,049	0,005

Tabla 1: Desnivel entre vértices, usando Nivelación Geométrica. (Flores, 2015).

Además, se cuenta con las alturas de los puntos, referidos al NMM (ver tabla 2), cabe señalar que el vértice DFA posee una desviación estándar de  $0.0mm$ , ya que corresponde al vértice que utilizó Flores (2015) para referenciar la red.

<b>Vértices</b>	<b><math>H_{nmm}(m)</math></b>	<b><math>\sigma (m)</math></b>
DFA	143,692	0,000
PH	137,809	0,006
MD	125,265	0,007
VIR	155,668	0,008
EC	128,314	0,008
CEP	142,990	0,007

Tabla 2: Alturas NMM de la Red de Control Vertical. (Flores, 2015).

### 3.2.2. Nivelación por técnicas GPS

La nivelación realizada en el trabajo de Flores (2015), utilizó como punto fijo la estación permanente UDEC, con coordenadas cartesianas en el sistema de referencia SIRGAS definidas para la época 2012 – 04 – 05. La configuración utilizada para el procesamiento fue la que se detalla en el cuadro siguiente.

<b>Configuración del Proyecto</b>	
Elipsoide	WGS-84
Proyección	UTM
Hemisferio	Sur
Huso	18
Modelo de Geoide	EGM96

Tabla 3: Configuración para procesamiento de datos GPS (Flores, 2015).

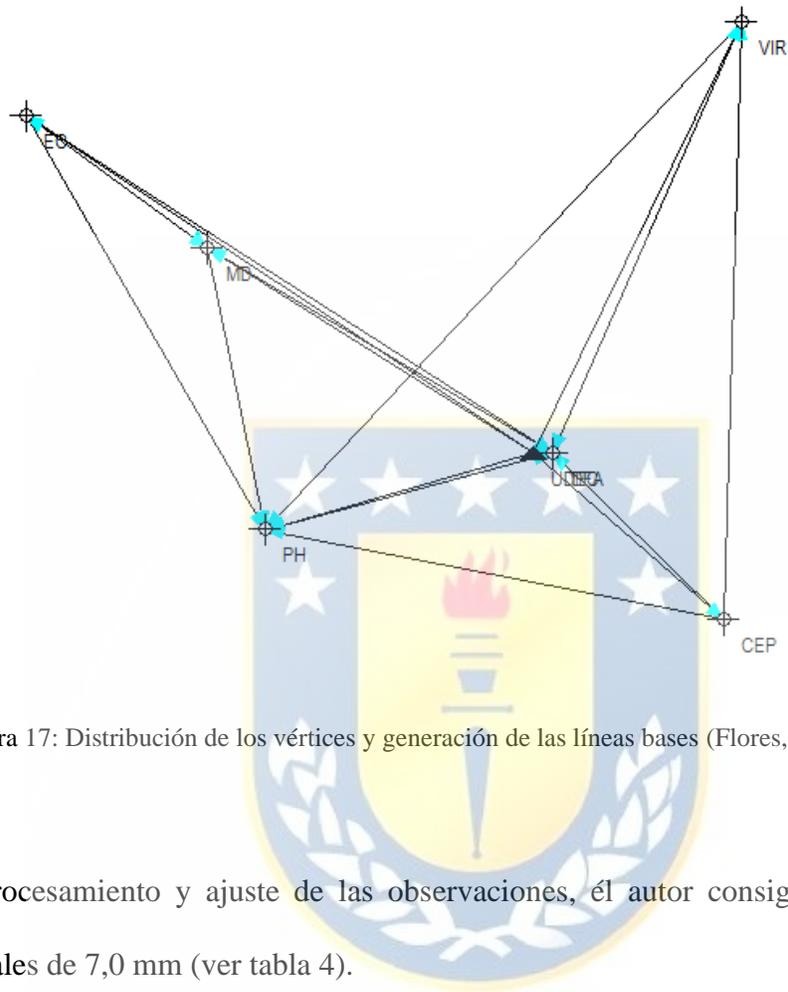


Figura 17: Distribución de los vértices y generación de las líneas bases (Flores, 2015).

Mediante el procesamiento y ajuste de las observaciones, el autor consiguió una red con precisiones verticales de 7,0 mm (ver tabla 4).

Vértices	h (m)	N (m)	H <sub>nmm</sub> (m)	σ (m)
DFA	163,116	19,837	143,279	0,004
PH	157,146	19,825	137,321	0,002
MD	144,661	19,863	124,798	0,004
VIR	175,124	19,885	155,239	0,007
EC	147,716	19,890	127,826	0,003
CEP	162,327	19,825	142,502	0,004

Tabla 4: Alturas elipsoidales y ortométricas de la red de control vertical. (Flores, 2015)

### 3.2.3. Desniveles entre los vértices de la red

Debido a trabajos de construcción en la zona de estudio, se perdieron dos puntos de referencia de la red, quitando la posibilidad de replicar las líneas de nivelación, debido a esto, se dispondrá de las alturas ortométricas ( $H_{nmm}$ ), determinadas por Flores (2015).

Con el propósito de comparar los desniveles entre los vértices existentes, se determinó generar a partir de los antecedentes, las líneas de nivelación PH-EC, EC-VIR, PH-VIR y EC-CEP. Estas líneas propuestas no se encuentran entre las líneas de nivelación de Flores (2015), por lo que se determinarán por las líneas de nivelación que las conforman.

En el caso de la línea de nivelación PH-EC, se determinará por la suma de los desniveles conformados entre PH-MD y MD-EC. Estos desniveles se sumarán de manera directa y la precisión de la nueva línea de nivelación se determinará mediante propagación de errores. De la misma manera, se obtendrá el desnivel y su precisión para la línea de nivelación EC-VIR (ver tabla 5).

En el caso de la línea nivelación PH-VIR, se tienen tres posibles rutas para realizar el cálculo del desnivel, estas serán las obtenidas anteriormente, PH-EC y EC-VIR. Una segunda opción serán los desniveles de PH-CEP y CEP-VIR. La tercera opción para el cálculo del este desnivel serán los desniveles entre PH-DFA y DFA-VIR. Así se tendrán tres posibles desniveles y su precisión, mediante propagación de errores. Igual que en el caso anterior, se obtendrá de la misma manera, el desnivel y su precisión para la línea de nivelación EC-CEP (ver tabla 5).

Lo mismo se realizó con los antecedentes obtenidos del método GPS, donde se obtuvo el desnivel entre los vértices mediante diferencia de alturas y a través de teoría de errores, se obtuvo su desviación estándar. Los desniveles obtenidos, servirán para realizar una comparación de los métodos aplicados (ver tabla 6).

Línea		DV	$\sigma$ (m)	Línea		DV	$\sigma$ (m)
PH	MD	-12,544	0,006	PH	EC	-9,495	0,01
MD	EC	3,049	0,005				
EC	MD	-3,049	0,005	EC	VIR	27,354	0,01
MD	VIR	30,403	0,009				
PH	MD	-12,544	0,006	PH	VIR	17,859	0,01
MD	VIR	30,403	0,009				
PH	DFA	5,883	0,006	PH	VIR	17,859	0,01
DFA	VIR	11,976	0,008				
PH	CEP	5,181	0,007	PH	VIR	17,859	0,01
CEP	VIR	12,678	0,009				
EC	MD	-3,049	0,005	EC	CEP	14,676	0,01
MD	PH	12,544	0,006				
PH	CEP	5,181	0,007	EC	CEP	14,676	0,01
EC	MD	-3,049	0,005				
MD	DFA	18,427	0,007	EC	CEP	14,676	0,01
DFA	CEP	-0,702	0,007				
EC	MD	-3,049	0,005	EC	CEP	14,676	0,01
MD	VIR	30,403	0,009				
VIR	CEP	-12,678	0,009				

Tabla 5: Determinación de nuevas líneas de nivelación propuestas.

Línea		Nivelación Geométrica		Nivelación por GPS	
Desde	Hasta	DV (m)	$\sigma$ (m)	DV (m)	$\sigma$ (m)
VIR	CEP	-12,678	0,009	-12,737	0,011
CEP	PH	-5,181	0,007	-5,181	0,006
PH	EC	-9,495	0,011	-9,495	0,005
EC	VIR	27,354	0,014	27,413	0,010
EC	CEP	14,676	0,02	14,676	0,007
PH	VIR	17,859	0,015	17,918	0,009

Tabla 6: Desniveles de la red, obtenidos a partir de los antecedentes de Flores (2015).

### 3.3. Nivelación Trigonométrica de Visuales Recíprocas y Simultánea

#### 3.3.1. Planificación

Las líneas de nivelación se ordenaron en el sentido de giro de las agujas del reloj, y se diseñó una ruta viable para la nivelación, mediante Google Earth, consiguiendo las longitudes correspondientes.

1.  $VIR \rightarrow CEP = 4878 (m)$
2.  $CEP \rightarrow PH = 4458 (m)$
3.  $PH \rightarrow EC = 4209 (m)$
4.  $EC \rightarrow VIR = 7169 (m)$
5.  $PH \rightarrow VIR = 7787 (m)$
6.  $EC \rightarrow CEP = 9106(m)$

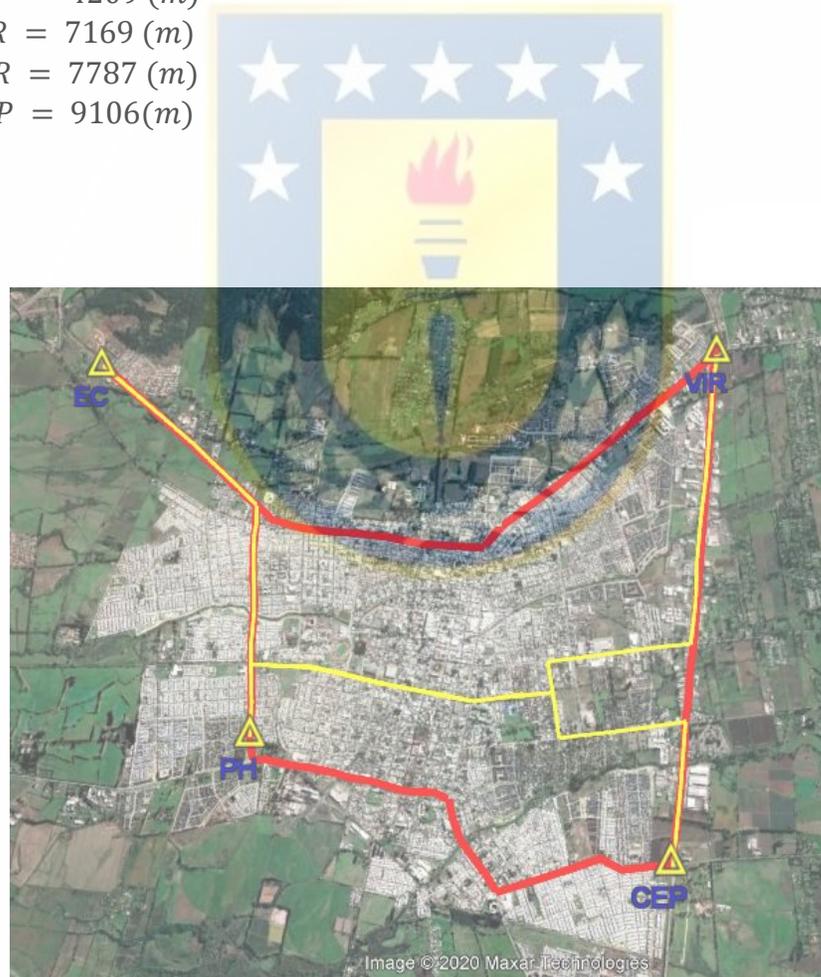


Figura 18: Líneas de nivelación para red altimétrica, Los Ángeles (Google Earth).

De los 6 puntos de la red original, se pudo constatar con una visita a terreno la existencia de solo 4, debido a que 2 fueron eliminados. El punto *MDA*, fue quitado, a causa de la construcción de una parada de autobús que se realizó en el lugar, y el punto *DFA*, fue eliminado al construirse una ciclovía.

Las rutas de nivelación se realizaron según se planificó (ver fig. 18), comenzando las rutas de nivelación entre los puntos exteriores de la red (líneas rojas), para seguir luego realizar las rutas de nivelación que atraviesa por la zona central de Los Ángeles, desde PH hacia VIR y desde EC hacia CEP (líneas amarillas).

Las rutas para cada línea de nivelación se mencionan a continuación, considerando utilizar las avenidas y calles más amplias, con el propósito de tener visadas más largas, menor número de instalación, y menores interferencias visuales.

<b>Desde</b>	<b>Hasta</b>	<b>Distancia (m)</b>	<b>Ruta</b>
VIR	CEP	4878	Por Avenida Las Industrias
CEP	PH	4458	Camino el Peral - Av. Francisco Encina - Av. Los Carreras - Av. Vicuña Mackenna - Av. Padre Hurtado
PH	EC	4209	Av. Padre Hurtado - Camino María Dolores
EC	VIR	7169	Camino María Dolores - Calle Orompello - Calle Almagro - Av. Sor Vicenta
PH	VIR	7787	Av. Padre Hurtado - Av. Ricardo Vicuña - Calle Balmaceda - Av. Alemania - Av. Las Industrias
EC	CEP	9106	Camino María Dolores - Av. Padre Hurtado - Av. Ricardo Vicuña - Calle Balmaceda - Av. Gabriela Mistral - Av. Las Industrias

Tabla 7: Rutas de las líneas de nivelación.

El tiempo estimado para la realización del trabajo en terreno fue de 9 días, considerando un rendimiento de 5 km por día, realizando instalaciones con distancias aproximadas de 500m, además se consideró 1 día para control de los instrumentos.

Actividad	Días de trabajo										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Control de los instrumentos	x										
Prueba de campo		x									
Nivelación VIR - CEP			x								
Nivelación CEP - PH				x	x	x					
Nivelación PH - EC					x	x					
Nivelación EC - VIR						x	x				
Nivelación PH - VIR								x	x		
Nivelación EC - CEP									x	x	
Repetición de nivelación con error											x

Tabla 8: Cronograma de actividades.

### 3.3.1.1. Instrumental

El instrumental utilizado para todas las labores de terreno de la NTVRS fue:

- 2 estaciones totales.
- 2 trípode.
- 1 base nivelante.
- 1 prisma con tarjeta de puntería.
- 3 radios.

Las estaciones totales utilizadas para el experimento fueron la Estación total Trimble modelo M3, y la Estación total Spectra modelo Focus 2, con precisiones angular de 5 ''.

Las especificaciones técnicas de ambos modelos de Estación total se presentan en las tablas 21 al 24, del ítem Anexos.

### 3.3.1.2. Registro

Las observables realizadas fueron:

- observaciones directas: ángulo cenital ( $Z$ ), distancia inclinada ( $Di$ ) y su correspondiente altura instrumental ( $h_i$ ).
- observaciones indirectas: ángulo de refracción ( $dZ_r$ ), coeficiente de corrección ( $k$ ), distancia corregida ( $Di'$ ) y desnivel entre los puntos  $i$  y  $j$  ( $\Delta H_{ij}$ ), las que se calcularán por cada estación de cambio.

Debido a que para este método se realizan observaciones de manera recíproca y simultánea, fue necesario de dos operadores para la realización de las mediciones. Por lo tanto, se determinó que los datos observados se registrarán en un registro de campo (Ver tabla 24), de manera independiente para cada estación. Así mismo, en cada medición se registró los factores ambientales locales i.e. temperatura y humedad. Para la temperatura se utilizó un sensor UNI-T modelo UT333, con precisiones de  $\pm 1.0^\circ C$ , y para la humedad se utilizó un sensor de  $\pm 5\% RH$ . La presión atmosférica se midió mediante un navegador GPS de la marca Garmin modelo 64s, el cual posee un barómetro incorporado.

### 3.3.2. Control de instrumentos

Este procedimiento es de vital importancia, debido a incremento de la tensión en los instrumentos causado por las condiciones de mediciones extremas, el transporte, el

almacenamiento prolongado y los cambios importantes en la temperatura pueden provocar la alineación incorrecta del instrumento y generar mediciones erróneas. Dichos errores pueden eliminarse mediante el ajuste del instrumento o con métodos de medición específicos.

Los controles a los instrumentos se realizaron según el manual de cada estación total. Estos se generalizaron mediante los siguientes ítems.

- Comprobación del desplazamiento de la burbuja.

En este control se comprueba la perpendicularidad entre el eje de nivel tubular (LL) y el eje principal del instrumento (VV).

- Comprobación del error de colimación horizontal.

En este control se comprueba la perpendicularidad entre el eje de colimación (CC) y el eje secundario (HH).

- Comprobación del error de índice del círculo vertical.

En este control se comprueba el paralelismo entre el eje del nivel índice del círculo vertical y el eje de colimación (CC).

Para equipos que poseen compensador de doble eje, como los que se están utilizando, este error es despreciable.

- Comprobación del error por inclinación del instrumento.

En este control se comprueba la perpendicularidad entre el eje secundario (HH) y el eje principal (VV).

- Comprobación del desplazamiento de la plomada.

En este control se comprueba la coincidencia del eje principal (V V) y la vertical descrita por la plomada.

Los resultados fueron los siguientes:

<b>Verificación</b>	<b>Focus 2</b>	<b>M3</b>
Desplazamiento de la burbuja	0	0
Error de Colimación horizontal	0,0003	0,0006
Error de índice del círculo vertical.	0,0035	0,0027
Error por inclinación del instrumento.	0,0003	0.0003
Desplazamiento de la plomada.	1mm	1mm

Tabla 9: Errores del control de instrumentos:

Con el control de los instrumentos se comprueban las condiciones de los equipos, y conocidos estos errores, serán considerados para la obtención del desnivel y precisión en la medición. Se destaca que los instrumentos a utilizar poseen compensador de inclinación de doble eje, por lo tanto, los errores de inclinación y del círculo vertical, son despreciables. No así, el desplazamiento de la plomada que si se considerará en la determinación del error de observación cenital.

### 3.4. Mediciones

#### 3.4.1. Medición angular

Para el método NTVRS, se consideró un mínimo de tres series de mediciones en posición directa y tránsito. Las observaciones se llevaron a cabo mediante dos procesos: en el primer proceso se realizaron observaciones recíprocas y simultáneas entre dos estaciones totales posicionadas en dos puntos con distancias, alrededor de 500 m. Aunque esto no siempre fue así, puesto que se trabajó en el radio urbano de la ciudad, lo que produjo una dificultad en la ejecución. En cada posición, se debió considerar la geometría vial, la topografía del terreno, las interferencias constructivas y de señaléticas, el tránsito vehicular, el tránsito de personas, la vegetación, etc. Producto de todas estas interferencias agregando además el ruido ambiental y la refracción en la

visual, generaron errores, las cuales se debió compensar con mayor redundancia de observaciones. Estas observaciones cenitales se registraron en el formulario de registro (ver tabla 27).

Para el segundo proceso, se realizaron observaciones hacia un prisma, el cual, tras retirar la estación que mantiene la posición atrás en la nivelación, se sitúa el prisma, en posición de contraje forzado, manteniendo la altura y posición de la estación retirada. Se logró así eliminar la variación en la altura del instrumento, no así, la variación en la lectura del ángulo cenital, debido a que se realizaron las mediciones en una época distinta del proceso anterior (aproximado de 20 minutos luego del primer proceso). Por esto se realizó un mínimo de tres mediciones para obtener redundancia, debido a las interferencias.

#### **3.4.1.1. Criterio de rechazo**

Para obtener el valor probable de la serie de observaciones cenitales, se utilizó el criterio de rechazo, descartando las observaciones con residuo fuera de tolerancia, considerando un intervalo del 95% de confianza  $\left(\sigma_{95\%} = 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ .

Según Rodríguez (1988), se puede considerar hasta dos ángulos aislados o fuera de tolerancia. de ser el caso, se deberá realizar una nueva medición para luego, calcular un nuevo valor medio entre la serie de mediciones. Si hay más de dos rechazos, las series deben repetirse, pero como ya se mencionó, se impuso un mínimo de tres series de medidas, y debido a las condiciones del terreno, se realizaron más mediciones, para obtener mayor redundancia.

En primer lugar, se determinó el cenital observado de cada serie, mediante lectura en posición directa menos la mitad del residuo ( $r$ ), obtenido entre la observación directa y transito correspondiente.

$$r = L_D + L_T - 400$$

$$Z = L_D - \frac{r}{2}$$

El promedio de los cenitales observados, proporciona el valor probable ( $\bar{Z}$ ) del ángulo cenital, en la posición del instrumento. Mediante de teoría de errores, se obtuvo el residuo ( $r_Z$ ) de cada observación, mediante la expresión:

$$r_Z = \bar{Z} - Z$$

A continuación, se descartaron las observaciones que presentaron errores fuera del intervalo de confianza expresado como:

$$\sigma_{95\%} = 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Donde,

$\sigma$ : Corresponde a la desviación estándar de la población.

$n$ : Corresponde a la cantidad de valores de la población.

<i>Serie</i>	<i>Z</i>	$\bar{Z}$	$\sigma_{95\%}$	<i>r<sub>Z</sub></i>
1	100,6351	100,6354	0,0007	0,0004
2	100,6349			0,0005
3	100,6351			0,0004
4	100,6352			0,0002
5	100,6369			0,0015

Tabla 10: Criterio de rechazo para observaciones cenitales.

En la Tabla 10, se presenta el proceso de determinación para el valor más probable o valor medio, de las series de observaciones, el criterio de rechazo se aplicó con un intervalo de confianza del 95% como tolerancia. Por consiguiente, se descartó la observación que posee un residuo fuera de la tolerancia.

De manera similar se realiza este procedimiento para las observaciones cenitales del segundo proceso, con el propósito de descartar las observaciones que presentaron residuos fuera de la tolerancia.

#### **3.4.1. Medición de distancia**

En el segundo proceso se midió la distancia inclinada en una sola dirección, desde la estación en la posición adelante hacia un reflector en la posición atrás, además del ángulo cenital correspondiente, esto en un periodo aproximado de 20 minutos luego del primer proceso, como se mencionó anteriormente.

Las distancias entre los puntos se midieron con el distanciómetro electrónico integrado en ambas estaciones totales, detallado en las especificaciones técnicas de los equipos (ver tablas 23 y 25), y el valor adoptado para cada línea se obtuvo de la media entre la lectura en directa y tránsito por cada serie. Las observaciones lineales se registraron en el formulario de registro (ver tabla 27).

##### **3.4.1.1. Criterio de rechazo**

Una vez obtenida la distancia observada ( $D_i$ ) por cada serie, en la posición del instrumento correspondiente, se procedió a aplicar el criterio de rechazo al conjunto de observaciones.

El procedimiento de rechazo se realizó mediante el control del residuo, en la medición de distancia evaluado con un intervalo del 95% de confianza, lo cual permitió descartar las medidas con residuos fuera del intervalo tolerancia.

<i>Serie</i>	<i>Di</i>	$\bar{D}_i$	$\sigma_{95\%}$	$r_{Di}$
1	657,665	657,646	0,02	0,02
2	657,659			0,01
3	657,640			0,01
4	657,620			0,03

Tabla 11: Criterio de rechazo para medición de distancia.

En la tabla 11, se presenta el proceso de determinación del valor más probable o distancia inclinada media, para las series de mediciones realizadas en una posición, donde a través de teoría de errores se descartarán las mediciones que poseen un residuo fuera de la tolerancia, representado mediante la desviación estándar en el intervalo de confianza al 95%.

### 3.4.1.Reducción del ángulo cenital al marco

Debido a que las líneas de nivelación son considerablemente largas, se realizaron varios puntos de cambio y calculados de manera independiente como desniveles parciales, los que en su conjunto se obtendrá desnivel acumulado entre los vértices de la red.

Además, con fines prácticos, se instalaron estacones con clavos de acero en su centro, para conservar el trabajo de nivelación para los días previos, además en caso de existir algún error en la nivelación, se podría comenzar o llegar hasta esas marcas dejadas de manera logística.

En cada caso donde se presentó un punto de control o referencia se consideró la altura instrumental para reducir el ángulo cenital en el cálculo del desnivel.

### **3.4.2.Reducción de la distancia al ángulo cenital observado**

Debido a que el proceso de medición de las distancias se realizó en una época distinta al proceso de observación de los ángulos cenitales, para cada punto de cambio, y producto que las distancias de visadas y las condiciones ambientales fueron variables, se debió realizar una reducción del ángulo cenital observado en el segundo proceso al obtenido en el primer proceso, con el propósito de corregir la distancia medida.

### **3.5. Procesamiento de datos**

Una vez obtenido las observaciones cenitales recíprocas y la distancia inclinada reducida al cenital observado, se procedió a calcular el desnivel parcial correspondiente a cada tramo, mediante el método de NTVRS, usando la ecuación:

$$\Delta H_A^B = Di \cdot \text{sen} \left( \frac{Z_B - Z_A}{2} \right)$$

Esta expresión permite calcular el desnivel entre los puntos *A* y *B* sin necesidad de tener en cuenta los efectos de la esfericidad y anulando los de la refracción. Esto debido operar en condiciones atmosféricas semejantes.

La precisión del desnivel calculado, en cada tramo, se determinó mediante la definición de propagación de errores utilizando como base la expresión del cálculo del desnivel.

$$\sigma_{\Delta H} = \pm \sqrt{\left(\operatorname{sen}\left(\frac{Z_B - Z_A}{2}\right) \varepsilon_{Di}\right)^2 + \left(\frac{-Di}{2} \cos\left(\frac{Z_B - Z_A}{2}\right) \varepsilon_{Z_A}\right)^2 + \left(\frac{Di}{2} \cos\left(\frac{Z_B - Z_A}{2}\right) \varepsilon_{Z_B}\right)^2}$$

Finalmente sumando todos los desniveles parciales, se obtuvo el desnivel total para la línea de nivelación, entre vértices de la red.

Línea	DV (m)	$\sigma_{DV}$	Longitud (km)	Nº de estaciones
$L_{VIR-CEP}$	-12,739	$\pm 0,007$	4,8	9
$L_{CEP-PH}$	-5,157	$\pm 0,005$	4,3	11
$L_{PH-EC}$	-9,509	$\pm 0,007$	4,2	8
$L_{EC-VIR}$	27,376	$\pm 0,008$	7,2	18
$L_{PH-VIR}$	17,823	$\pm 0,005$	7,8	17
$L_{EC-CEP}$	14,737	$\pm 0,009$	9,8	19

Tabla 12: Desniveles por Línea de nivelación.

Con los resultados preliminares de desnivel, se empleó un análisis de cierre de circuito que consistió en generar polígonos cerrados y calcular el error de cierre. Para cumplir con el análisis planteado en las redes de control vertical precisas, el error de cierre debe estar dentro de la tolerancia exigida por el Ministerio de Obras Públicas presentadas en el Manual de Carreteras, dada por la expresión:

$$\varepsilon_{max} = \pm 0.05 * \sqrt{K} \text{ (m)}$$

Donde  $K$  representa la longitud del recorrido en kilómetros.

Polígono	Líneas	$\sigma$ (m)	$\epsilon_{max}$
1° polígono	$L_{VIR-CEP}; L_{CEP-PH}; L_{PH-VIR}$	-0,074	$\pm 0,206$
2° polígono	$L_{CEP-PH}; L_{PH-EC}; L_{EC-CEP}$	0,071	$\pm 0,214$
3° polígono	$L_{PH-EC}; L_{EC-VIR}; L_{PH-VIR}$	0,044	$\pm 0,219$
4° polígono	$L_{EC-VIR}; L_{VIR-CEP}; L_{EC-CEP}$	-0,101	$\pm 0,234$
5° polígono	$L_{VIR-CEP}; L_{CEP-PH}; L_{PH-EC}; L_{EC-VIR}$	-0,030	$\pm 0,227$

Tabla 13: Análisis de cierre de polígonos.

En la tabla 13, se observa que todos los polígonos analizados están dentro de la tolerancia exigida.

Los desniveles obtenidos poseen errores, lo que hace necesario realizar un ajuste de los datos, mediante Mínimos cuadrados.

### 3.5.1. Ajuste por Mínimos Cuadrados

El ajuste por mínimos cuadrados se realizó mediante el modelo paramétrico de Gauss Markov, donde primeramente se generaron ecuaciones de condiciones en igual cantidad de parámetros.

Modelo de ajuste:  $F(X_a) = L_a$

Numero de observaciones:  $n = 6$

Numero de parámetros:  $u = 3$

Grados de libertad:  $r = 3$

#### I. Datos de entrada:

Los datos de entrada utilizados en el ajuste lineal fueron:

a) Altura fija.

$$H_{VIR} = 0$$

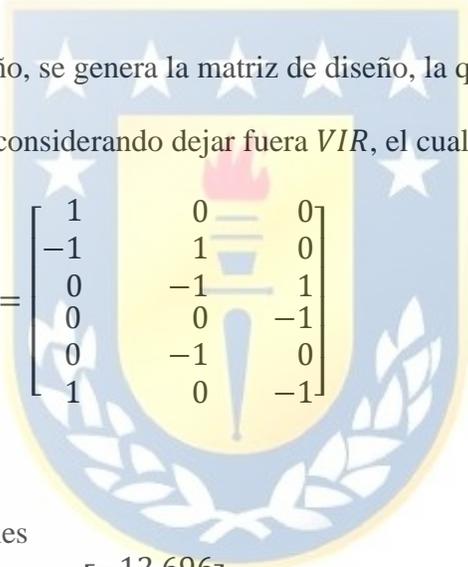
b) Ecuaciones de observación:

Estas ecuaciones toman la forma:  $L + V = A \cdot X$

$$\begin{aligned}
 DV_{VIR-CEP} + V_{VIR-CEP} + H_{VIR} &= H_{CEP} \\
 DV_{CEP-PH} + V_{CEP-PH} &= H_{PH} - H_{CEP} \\
 DV_{PH-EC} + V_{PH-EC} &= H_{EC} - H_{PH} \\
 DV_{EC-VIR} + V_{EC-VIR} - H_{VIR} &= -H_{EC} \\
 DV_{PH-VIR} + V_{PH-VIR} - H_{VIR} &= -H_{PH} \\
 DV_{EC-CEP} + V_{EC-CEP} &= H_{CEP} - H_{EC}
 \end{aligned}$$

c) Matriz de diseño

A partir de las ecuaciones de diseño, se genera la matriz de diseño, la que queda en función de los parámetros que se deben ajustar, considerando dejar fuera  $VIR$ , el cual se mantendrá fijo.



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

d) Vector de observaciones

$$L_b = \begin{bmatrix} -12.696 \\ -5.152 \\ -9.538 \\ 27.386 \\ 17.848 \\ 14.690 \end{bmatrix} (m)$$

e) Matriz de peso

Como matriz de peso, se consideró el inverso al cuadrado de las precisiones obtenidas en las líneas de nivelación. Estas se analizarán como uno sobre la varianza.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{(0.114)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(0.092)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(0.092)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(0.123)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(0.111)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(0.152)^2} \end{bmatrix}$$

## II. Ecuaciones Normales:

De acuerdo con el modelo de ajuste utilizado, se aplicaron las ecuaciones normales.

$$N = A^T * P * A$$

$$U = A^T * P * -L_b$$

El vector de las correcciones se definió como:

$$X = N^{-1} * U = \begin{bmatrix} -12.701 \\ -17.854 \\ -27.381 \end{bmatrix}$$

El vector de residuos se definió como:

$$V = A * X - L_b = \begin{bmatrix} 0.037 \\ 0.004 \\ -0.018 \\ 0.005 \\ 0.031 \\ -0.057 \end{bmatrix} (m)$$

### III. Datos de salida:

- a) Vector de observaciones ajustadas.

$$L_a = L_b + V = \begin{bmatrix} -12.701 \\ -5.153 \\ -9.527 \\ 27.381 \\ 17.854 \\ 14.680 \end{bmatrix}$$

- b) Parámetros ajustados:

El cálculo de los parámetros ajustados se realizó mediante el reemplazo de las observaciones ajustadas las expresiones de relación entre los vértices.

$$\begin{aligned} H_{VIR} &= 0 \\ H_{CEP} &= H_{VIR} + \Delta H_{VIR}^{CEP} = -12.701 \\ H_{PH} &= H_{VIR} + \Delta H_{PH}^{VIR} = 17.854 \\ H_{EC} &= H_{VIR} + \Delta H_{EC}^{VIR} = 27.381 \end{aligned}$$

- c) Matriz varianza – covarianza de las observaciones ajustadas.

$$\sum_{La} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (AN^{-1}A^T)$$

- d) Matriz varianza – covarianza de los residuos.

$$\sum_{La} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot P^{-1} - (AN^{-1}A^T)$$

Estas matrices son representativas de la precisión de las observaciones ajustadas y el residuo, mediante la matriz principal.

Finalmente, el proceso de ajuste deja como resultado el desnivel, a través del vector de observaciones ajustadas, y su respectiva precisión a través de la matriz varianza – covarianza, para la línea de nivelación correspondiente.

### 3.5.2. Test estadísticos

Una vez realizado el ajuste de una red, se hizo necesario analizar los resultados obtenidos para detectar y eliminar los errores groseros (*Outliers*) y no considerarlos como parte del ajuste.

#### 3.5.2.1. Test Global

El test global representa una prueba general del ajuste, prueba si la varianza estimada a posteriori es igual a la varianza a priori, que es igual a uno. Ambas varianzas no tienen que ser numéricamente idénticas; pero deben ser estadísticamente iguales.

Para evaluar el test global, se adopta una de las siguientes hipótesis:

$$H_0 = \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$$

$$H_0 = \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$$

Varianza a posteriori.

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{(V^T P V)}{(n - u)} = 0.1239$$

Como la hipótesis nula establece que la varianza a priori es estadísticamente igual a la varianza a posteriori, El desarrollo del test global queda representado utilizando la estadística chi-cuadrado definida en la expresión:

$$X_{r, a/2}^2 < X^2 < X_{r, 1-a/2}^2$$

Considerando la hipótesis nula y debido a que se utilizó una confianza del 95%, el nivel de significancia  $\alpha$  es 0,05, y 3 grados de libertad. La expresión queda:

$$X_{3,0.025}^2 < \hat{\sigma}_0^2 \cdot 3 < X_{3,0.975}^2$$

Reemplazando numéricamente los valores, obtenemos:

$$0.216 < 0.372 < 9.348$$

De esta forma, está demostrado que el test global es aprobado y se acepta la hipótesis nula, lo que significa que el ajuste se considera correcto y no hay presencia de *outliers* a un nivel global. Por lo tanto, se valida de forma general el ajuste por mínimos cuadrados.

### 3.5.2.2. Test Local

A pesar de haber aprobado el test global, puede que exista la presencia de *outliers* en las observaciones, ya que este indicador es bastante sensible a la mala designación de la matriz de peso. Por lo tanto, se analizaron los residuos de las observaciones, para encontrar discrepancias que puedan afectar.

Una vez obtenido los residuos con sus respectivas desviaciones estándar (tabla 14), se empleó el test local para la detección de *outliers* en las observaciones. analizando que los residuos sean menores que el valor crítico al 95% de confianza.

<b>Línea</b>	<b>V</b>	<b><math>\sigma_V</math></b>	<b><math>\sigma_{95\%}</math></b>	<b>Test</b>
$L_{VIR-CEP}$	0,038	0,049	0,099	<b>PÁSA</b>
$L_{CEP-PH}$	0,004	0,041	0,082	<b>PÁSA</b>
$L_{PH-EC}$	-0,018	0,041	0,083	<b>PÁSA</b>
$L_{EC-VIR}$	0,005	0,052	0,105	<b>PÁSA</b>
$L_{PH-VIR}$	0,031	0,047	0,095	<b>PÁSA</b>
$L_{EC-CEP}$	-0,057	0,061	0,122	<b>PÁSA</b>

Tabla 14: Análisis test local.

Se puede observar que todos los residuos son inferiores a sus respectivos valores críticos de confianza. por consiguiente, se afirma que, tanto el test global como el test local, son aprobados y las observaciones están libres de *outliers*.



#### 4. Resultados y análisis

Luego de haber desarrollado la nivelación, procesamiento y ajuste de la red, se obtuvieron los resultados definitivos de las líneas de nivelación, con sus respectivas precisiones (ver tabla 15). Se puede apreciar que las precisiones obtenidas están en el orden de 3 cm.

<i>Línea</i>	<i>DV (m)</i>	$\sigma_{DV}$
$L_{VIR-CEP}$	-12,701	$\pm 0,028$
$L_{CEP-PH}$	-5,153	$\pm 0,025$
$L_{PH-EC}$	-9,527	$\pm 0,026$
$L_{EC-VIR}$	27,381	$\pm 0,029$
$L_{PH-VIR}$	17,854	$\pm 0,027$
$L_{EC-CEP}$	14,680	$\pm 0,030$

Tabla 15: Desniveles ajustados y su precisión.

La comprobación de la calidad del ajuste realizado, fue mediante los test estadísticos (global y local), con esto se determinó que el ajuste fue realizado correctamente y no existe presencia de *outliers*.

La precisión de cada línea de nivelación se verificó según lo que establece el Ministerio de Obras Públicas mediante el Manual de Carreteras (MOP, 2020), donde determina la tolerancia para una NTVRS (ver tabla 16) como:

$$Tol = \pm 0.05 * \sqrt{K} (m)$$

Donde K es la distancia en *km*.

Además, para poder obtener una mejor visión de los factores que afectaron positiva o negativamente el resultado, se analizaron los errores por kilómetro.

<b>Línea</b>	<b>DV (m)</b>	<b>Longitud (km)</b>	<b><math>\sigma_{DV}(m)</math></b>	<b>Tol (m)</b>	<b>Error por km (m)</b>
$L_{VIR-CEP}$	-12,701	4,8	$\pm 0,028$	$\pm 0,110$	$\pm 0,012$
$L_{CEP-PH}$	-5,153	4,3	$\pm 0,025$	$\pm 0,104$	$\pm 0,012$
$L_{PH-EC}$	-9,527	4,2	$\pm 0,026$	$\pm 0,103$	$\pm 0,014$
$L_{EC-VIR}$	27,381	7,2	$\pm 0,029$	$\pm 0,134$	$\pm 0,008$
$L_{PH-VIR}$	17,854	7,8	$\pm 0,027$	$\pm 0,140$	$\pm 0,007$
$L_{EC-CEP}$	14,680	9,8	$\pm 0,030$	$\pm 0,157$	$\pm 0,006$

Tabla 16: Tolerancias de la NTVRS.

Con lo anterior, se aprueba el proceso de nivelación y ajuste de la red. Pero, debido a poseer una desviación estándar en el orden de los 3cm, se vuelve evidente, la diferencia del método de NTVRS a los métodos geométrico y GPS. Esto debido a las precisiones logradas, lo que entrega una menor dispersión de la información obtenida.

<b>Línea</b>	<b>NG</b>		<b>NGPS</b>		<b>NTVRS</b>	
	<b>Dv(m)</b>	<b><math>\sigma_{Dv}(m)</math></b>	<b>Dv (m)</b>	<b><math>\sigma_{Dv}(m)</math></b>	<b>Dv (m)</b>	<b><math>\sigma_{Dv}(m)</math></b>
$L_{VIR-CEP}$	-12,678	$\pm 0,009$	-12,737	$\pm 0,008$	-12,701	$\pm 0,028$
$L_{CEP-PH}$	-5,181	$\pm 0,007$	-5,181	$\pm 0,004$	-5,153	$\pm 0,025$
$L_{PH-EC}$	-9,495	$\pm 0,008$	-9,495	$\pm 0,004$	-9,527	$\pm 0,026$
$L_{EC-VIR}$	27,354	$\pm 0,010$	27,413	$\pm 0,008$	27,381	$\pm 0,029$
$L_{PH-VIR}$	17,859	$\pm 0,011$	17,918	$\pm 0,007$	17,854	$\pm 0,027$
$L_{EC-CEP}$	14,676	$\pm 0,012$	14,676	$\pm 0,005$	14,680	$\pm 0,030$

Tabla 17: Comparación de desniveles obtenidos por los métodos de nivelación.

<b>Línea</b>	<b>NTVRS- NG(m)</b>	<b>NTVRS- NGPS(m)</b>
$L_{VIR-CEP}$	-0,023	0,036
$L_{CEP-PH}$	0,028	0,028
$L_{PH-EC}$	-0,032	-0,032
$L_{EC-VIR}$	0,027	-0,032
$L_{PH-VIR}$	-0,005	-0,064
$L_{EC-CEP}$	0,004	0,004

Tabla 18: Diferencia de alturas entre los métodos de nivelación.

De las tablas 17 y 18, se aprecia una diferencia de altura y las precisiones obtenidas con el método de NTVRS en comparación con los utilizados por Flores (2015). Aunque el método NTVRS controla los errores sistemáticos como el efecto de curvatura y refracción atmosférica, fue imposible pasar por alto las perturbaciones visuales que dificultaron una puntería precisa dentro del desarrollo de la medición. Estas fueron debido a trabajar en una zona urbana y transitar por calles y avenidas con mucho tránsito vehicular y de personas, lo que generaba un retraso en las series de mediciones y alteraciones visuales, a causa de los gases emitidos por vehículos. Cabe señalar que, al realizar una nivelación geométrica, se utilizan visadas cortas (inferior a 50m), lo que permite minimizar las perturbaciones hasta ser imperceptibles.

Otras variables que se compararon entre los métodos de nivelación fueron tiempo, costo e implicancias técnicas en la ejecución de cada método.

Los tiempos de ejecución de los métodos empleados por Flores (2015) fueron señalados de manera personal por el autor y se corroboraron con los datos en el ítem anexos de su trabajo. Estos se compararon con el tiempo que se tardó en la ejecución del método de NTVRS (ver tabla 19).

<b>Método de nivelación</b>	<b>Días de medición</b>	<b>Distancia recorrida</b>	<b>Rendimiento</b>
Nivelación Geométrica	18 días	33 km	2 km x día
NTVRS	10 días	38 km	3.8 km x día
Nivelación GPS	4 hrs.	6 vértices	40 min. x vértice

Tabla 19: Comparación en tiempos de ejecución de los métodos de nivelación.

<b>Línea</b>	<b>Nivelación Geométrica</b>		<b>NTVRS</b>	
	<b>Días</b>	<b>Posiciones</b>	<b>Días</b>	<b>Posiciones</b>
<i>L<sub>VIR-CEP</sub></i>	3	54	1	9
<i>L<sub>CEP-PH</sub></i>	3	52	2	11
<i>L<sub>PH-EC</sub></i>	2	44	1	8
<i>L<sub>EC-VIR</sub></i>	3	77	2	18
<i>L<sub>PH-VIR</sub></i>	4	86	2	17
<i>L<sub>EC-CEP</sub></i>	3	97	2	19

Tabla 20: Comparación de rendimiento.

De este análisis se comprueba que la NTVRS, genera un ahorro en la cantidad de días y en las posiciones que se realizan para realizar el mismo tramo de nivelación (ver tabla 20), esto producto de las visadas más largas en comparación a la nivelación geométrica.

El análisis de costo, se realizó mediante un presupuesto calculado en relación a los valores de mercado, donde se consideró instrumental, personal y movilización. Se obtuvo un valor diario y se calculo por la cantidad de días que se tardó en cada método de nivelación ejecutado (tabla 21).

Tipo de instrumento	Nivelación Geométrica	NTVRS		Nivelación GPS	
	Nivel electrónico digital Leica Sprinter 150M	Estación Total Spectra Focus 2	Estación Total Trimble M3	GPS Trimble R4	GPS Trimble R8
<b>Instrumento</b>	\$ 25.000	\$ 30.000	\$ 30.000	\$ 120.000	\$ 120.000
<b>Operador</b>	\$ 30.000	\$ 30.000	\$ 30.000	\$ 30.000	\$ 30.000
<b>Ayudante</b>	\$ 40.000 (2pers.)			\$ 20.000	\$ 20.000
<b>Movilización</b>	\$ 20.000	\$ 20.000		\$ 20.000	
<b>Días</b>	18	10		1	
<b>Valor por día</b>	\$ 115.000	\$ 140.000		\$ 360.000	
<b>Costo total</b>	\$ 2.070.000	\$ 1.400.000		\$ 360.000	

Tabla 21: Análisis de costo de ejecución por método.

Se caracterizó el costo en el proceso de nivelación, referente a los criterios antes mencionados, con ello se obtuvo un presupuesto del trabajo de nivelación para cada método. Como se muestra en la tabla 21, la nivelación geométrica, posee el valor diario mas bajo, pero la mayor cantidad de días, resultando ser el más costoso, en cambio en la nivelación GPS, resulta ser el que posee el valor diario más alto, pero al realizarse en un día, el costo final resulta ser menor a los demás. En relación al método de NTVRS, este posee un valor diario cercano al de la nivelación geométrica, pero en cambio posee menor cantidad de días en comparación a la nivelación geométrica, lo que permite calcular un presupuesto menor.

Considerando los aspectos anteriores, se realizó una comparación de los métodos en relación a condiciones e implicancias técnicas que intervienen en la ejecución del proceso de nivelación.

Condición	Nivelación Geométrica	NTVRS	Nivelación GPS
Distancia	Dependerá de la precisión que se quiera alcanzar, siendo visadas menores de 50m.	Permite buenas condiciones de medición y rendimiento en distancias sobre 100m y en terrenos abruptos.	Permite medir puntos sin necesidad que se encuentren intervisibles, en grandes distancias, según lo requiera el trabajo, hasta 50km y según la metodología de procesamiento.
Precisión	Producto de la metodología y los instrumentos utilizados se logra conseguir precisiones de alto nivel, hasta 1mm.	En condiciones ideales, los instrumentos y la metodología ofrecen conseguir precisiones al milímetro, pero debido a las distancias y perturbaciones externas, los resultados se ven afectados, entregando precisiones el nivel del centímetro.	Las precisiones obtenidas dependerán de la metodología empleada, pudiendo alcanzar precisiones de milímetro.
Dificultades	Realizar una nivelación en un entorno urbano, posee dificultades, producto de interferencias visuales por peatones, vehículos, edificaciones y vegetación. Además, no es productivo utilizar este método en terrenos abruptos.	Debido a las visadas alrededor de 500m, las visuales presentan interferencias por peatones, vehículos, edificaciones y vegetación, además de la dificultad de puntería por efecto de refracción, aumentado por los gases vehiculares.	Este método no posee dificultades visuales. Pero si podría presentarse interferencias de señal debido por elementos que generen <i>Multipath</i> .

Eliminación de errores sistemáticos	Permite eliminar los errores sistemáticos, mediante la limitación en las distancias visuales en un rango con menor perturbación.	Proporciona la posibilidad de eliminar errores sistemáticos mediante una metodología recíproca y simultánea entre dos instrumentos.	Este método asegura, a partir de una metodología rigurosa la eliminación de errores sistemáticos, debido a un control exhaustivo de los factores determinantes en la medición.
Personal	La ejecución requiere de un operador y dos ayudantes (alarifes) en el proceso de medición, para tales efectos se requiere una persona con conocimientos técnicos, en tanto los ayudantes es suficiente con poseer nociones de nivelación.	Para la ejecución del método se requiere de dos operadores para los instrumentos, lo que limita a contar con personal con conocimientos técnicos.	Para la ejecución de método se limita a contar con personal con conocimientos técnicos, en proporciones de puntos que se desea medir.

Tabla 22: Consideraciones e implicancias técnicas en los métodos de nivelación.

De este análisis se logra reconocer que el método de NTVRS posee la fiabilidad de entregar buenos resultados en condiciones controladas, lo que permitiría un mejor rendimiento y precisión de alto nivel, adecuado a lo establecido por el Ministerio de Obras Públicas (2002).

## 5. Conclusiones

En este proyecto se evaluó el desempeño de la NTVRS, en la red altimétrica establecida por Flores (2015), en la ciudad de Los Ángeles. Las alturas obtenidas por NTVRS presentaron precisiones en el orden de los 3cm, lo que indica que corresponde a una red de control vertical de tercer orden según el Ministerio de Obras Públicas (2002). En el análisis de los desniveles, se realizó una comparación con los obtenidos mediante la nivelación geométrica y GPS, conseguidas en el proyecto de Flores (2015). Cabe mencionar que los resultados obtenidos, fueron producto de varios factores externos que afectaron las precisiones finales, como son las habilidades del profesional, la experiencia de los operadores, el clima, las distancias utilizadas, y aún más importante, el entorno en el que se trabajó. Este último factor fue determinante, debido a que existen muchas interferencias visuales por vehículos y peatones, además de variaciones en la temperatura a lo largo de la visual por los gases emitidos por vehículos, lo que provocó una demora en la toma de datos y mayor incertidumbre en las lecturas.

El control de instrumentos fue un punto fundamental antes de realizar el trabajo práctico, debido a que se debió considerar el error de plomada, existente en ambos instrumentos, los que fueron considerados en la metodología para obtener los desniveles entre puntos medidos.

El modelo matemático aplicado para la reducción de las observaciones de la NTVRS, permitió eliminar los errores sistemáticos, de refracción y curvatura, pero conforme se avanzó en el ejercicio práctico, se descubrió que la temperatura en el área de visual entre el punto A y B, se ve afectada por variaciones, debido a la superficie del terreno (pasto, tierra, cemento o asfalto) y los gases de los vehículos que transitan, lo que provocó, incertidumbre en la puntería. Para sobrellevar eso, se realizó mayor cantidad de mediciones, con el objetivo de obtener redundancias en las observaciones.

Para determinar la calidad del ajuste y que no haya presencia de *outlier* en los resultados obtenidos, se aplicaron test estadísticos, los que demostraron ser bastantes sensibles a la designación de la matriz de pesos.

La aprobación del test global confirma que el ajuste fue satisfactorio. Por otro lado, la aprobación del test local, descartó la presencia de *outliers* en las observaciones, pues los residuos son menores que el valor crítico al 95% de confianza.

En síntesis, se puede afirmar que el procedimiento de medición, cálculo de desniveles y ajuste de la red, aprobó con los parámetros de control establecidos.

Con respecto al análisis entre los desniveles obtenidos, y a pesar de que los resultados son optimistas, la comparación de los resultados obtenidos mediante la NTVRS, con los obtenidos por Flores (2015), demuestran un desempeño desfavorable, ya que la nivelación geométrica alcanzó precisiones de primer orden, al igual que la nivelación GPS. En cambio, la NTVRS, alcanzó precisiones de tercer orden, de acuerdo al ministerio de Obras Públicas (MOP, 2020), esto debido a trabajar en un ambiente no controlado.

En relación al tiempo, el método de NTVRS logró un buen rendimiento, a pesar de ser un método que no había sido probado y sumado a las dificultades del terreno en un entorno urbano, solamente se debió repetir la primera línea de nivelación, hasta conseguir buenos resultados.

Los costos de ejecución de la NTVRS, fueron menores a la nivelación geométrica siendo un 32% más barato, esto gracias a que se logró realizar el trabajo práctico en un periodo menor, con un 180% de productividad. Este criterio es importante al realizar un trabajo topográfico, debido a que de esto dependerá el éxito o fracaso en cualquier proyecto. Sin embargo, la elección del método de nivelación siempre va de la mano con las precisiones que se desea alcanzar.

Es muy importante la necesidad de contar con el instrumental óptimo para realizar las mediciones de temperatura, presión atmosférica y humedad, con el propósito de verificar que ambas estaciones posean las mismas condiciones ambientales. De no ser así, esto podría afectar los resultados de la metodología de trabajo.

En síntesis, este método de nivelación se destaca por eliminar los errores sistemáticos, en el proceso de nivelación, y permitir conseguir buenas precisiones, con un buen rendimiento y bajo costo en relación a la nivelación geométrica. Con la particularidad de aplicar el ejercicio práctico rigurosamente., teniendo en consideración las variaciones en la temperatura producto de las diferentes superficies del terreno, y los obstáculos naturales o artificiales.



## 6. Referencias

- Anderson, J., & Mikhail, E. (1998). *Surveying, Theory and Practice. 7th edition WCB/McGraw-Hill. Boston.*
- Bedón, J. (2014). *Levantamiento Topográfico y Catastral del Barrio Santa Rosa, de la Parroquia La Merced del Cantón Quito, Provincia de Pichincha.* Universidad Central del Ecuador, Carrera de Topografía y Geomensura, Quito - Ecuador.
- Bohórquez Canto, R., & Palacios Hernández, J. (2017). *Nivelación Geométrica De Poligonal Choconta-Suesca (Apoyo Al Proyecto De Investigación Sobre Planos Topográficos Locales-Tramo K14+ 000 Al K17+ 500).* Bogotá D.C: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Facultad del Medio Ambiente y Recursos Naturales, Tecnología en Topografía.
- Bossler, J. (1984). *Standards and specifications for geodetic control networks.* United States: Federal Geodetic Control Committee.
- Casanova, L. (2002). *Topografía plana, Cap.6, Nivelacion.* Mérida-Venezuela.: Taller de publicaciones de Ingeniería.
- Ceylan, A., & Baykal, O. (2008). Precise height determination using simultaneous-reciprocal trigonometric levelling. *Survey Review*, 40(308), 195-205.
- Da Silva, C., & Silva, A. (2006). Ajustamento de altitude usando observações de ângulos zenitais com leituras recíprocas e simultâneas. *Boletim de Ciências Geodésicas*, 12(1), 45-63.
- Domínguez, G. (2007). *Topografía General Y Aplicada (13° ed.).* España: Ediciones Mundi-Prensa.
- Farjas, M. (2017). Nivelación Trigonométrica. En M. Farjas, *Topografía* (págs. 27-63).
- Farjas, M., & Olària, C. (2012). *Topografía y sus métodos: principios de investigación.* Denboraren Argia: Universidad Politécnica de Madrid.

- Flores, D. (2015). *Establecimiento de una red de control vertical para la ciudad de Los Ángeles, Chile*. Proyecto de Título presentado al Departamento de Ciencias Geodésicas y Geomática Universidad de Concepción, Campus Los Angeles.
- Fotopoulos, G., Kotsakis, C., & Sideris, M. (2003). *How accurately can we determine orthometric height differences from GPS and geoid data*. Calgary, Canada: Journal of surveying engineering.
- Herrera, W., Belete, O., & Batista, Y. (2015). Determinación del coeficiente conjunto de curvatura y refracción en yacimientos lateríticos de Moa. *Minería y Geología*, 31(3), 26-44.
- Hirt, C., Guillaume, S., Wisbar, A., Bürk, B., & Sternberg, H. (2010). Monitoring of the refraction coefficient in the lower atmosphere using a controlled setup of simultaneous reciprocal vertical angle measurements. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 115(D21).
- Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H., & Collins, J. (2001). *Global Positioning System (GPS). Theory and practice* (5° ed.). Springer Wien New York.
- IDE, C. (2018). *Geodesia en Chile, teoría y la aplicación del Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas (SIRGAS)*. Santiago de Chile: Ministerio de Bienes Nacionales.
- Jimenez, G. (2007). *Topografía para ingenieros civiles*. (F. d. Ingeniería, Ed.) Armenia: Universidad de Quindío.
- Jiménez, G., Garzón, J., & Londoño, D. (2017). *Introducción a la Altimetría*. Facultad de Ingeniería Universidad del Quindío: ELIZCOM SAS, ISBN: 978-958-8801-55-1.
- Johnson, A. (2008). Do reciprocal vertical angles have a role in Geomatics? *Survey Review*, 40(309), 285-293.

- Kavouras, M. (1982). *On the Detection of Outliers and the Determination of Reliability in Geodetic Networks*. Fredericton, Canada, 1982: M. Sc. E. Doctoral dissertation, Thesis-Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick.
- Leick, A. (2004). *GPS satellite surveying*. United States of America: A Wiley Interscience publication.
- Montecino, H. (2012). *Ajuste de Observaciones*. Los Angeles: Depto. de Ciencias Geodesicas y Geomaticas. Universidad de Concepcion.
- MOP. (2020). *Manual de Carreteras, procedimientos de estudios viales*. Santiago: Ministerio de Obras Públicas.
- Oscó Poma, G. (2011). *Control vertical, observaciones calculo y compensación por mínimos cuadros en un circuito de nivelación geométrica*. Doctoral dissertation.
- Pırtı, A., & Hoşbaş, R. (2019). Evaluation of some levelling techniques in surveying application. *Geodesy and Cartography*, 361-373.
- Rivera, I. (2016). *Estimación de coordenadas de una red GPS de alta precisión en la ciudad de Los Angeles*. Proyecto de Título presentado al Departamento de Ciencias Geodésicas y Geomática Universidad de Concepción, Campus Los Ángeles.
- Rodrigues, V. (1988). *O Nivelamento Trigonométrico como Apoio Altimétrico à Densificação Gravimétrica*. Curitiba: Universidade Federal do Paraná.
- Roman, O. (2004). *Ways of Determining the Orthometric Heights Using GPS Technology*. Athens, Greece: In FIG Working Week.
- Sánchez, J., & Pereda, R. (2014). *Topografía y Geodesia*. Obtenido de Open Course Ware: <https://ocw.unican.es/course/view.php?id=73&section=1>

- Shen, Y., Huang, T., Guo, X., Zang, O., & Herrero, M. (2017). Inversion Method of Atmospheric Refraction Coefficient based on Trigonometric Leveling Network. *Journal of Surveying Engineering*, 143(1), 06016002.
- SUBDERE. (Septiembre de 2020). *Subsecretaría de Desarrollo Regional y Administrativo*.  
Obtenido de <http://www.subdere.gov.cl/divisi%C3%B3n-administrativa-de-chile/gobierno-regional-del-biob%C3%ADo/provincia-de-biob%C3%ADo/los-%C3%A1ngeles>
- Teunissen, P.-J. (2000). *Adjustment theory: an introduction*. Delft: Delft University Press.
- Valbuena, J., Soriano, M., Vara, M., & Rodriguez, G. (1996). Instrumentación y metodología empleadas en las técnicas altimétricas (II). *Revista del Ilustre Colegio Oficial de Ingenieros Técnicos en Topografía*, 13(75), 6-20.
- Vargas, X. (2010). *Apunte para hidrología, Elementos de meteorología*. Universidad de Chile: Departamento de Ingeniería civil, division recursos hidricos y medio ambiente.
- Villa, R. (2016). El Datum, el geoide, el elipsoide y la cartografía. *Revista general de marina*, 270(1), 27-35.
- Wolf, P., & Ghilani, C. (2002). *Elementary surveying: An introduction to geomatics* (11<sup>o</sup> ed.). New Jersey.
- Wolf, P., & Ghilani, C. (2006). *Adjustment Computations Spatial Data Analysis*.
- Wolf, P., & Ghilani, C. (2008). *Topografía* (11<sup>o</sup> ed.). México: Alfaomega.
- Yujra Tintaya, S., & Silva Mollinedo, J. (2010). *Procesamiento practico en nivelación directa*. (Doctoral dissertation).

## 7. Anexos

### Especificaciones Estación Total Trimble M3 de 5"DR

#### Telescopio

Longitud del tubo	153 mm
Aumento	26 x

#### Alcance de medición

Alcance de medición sin niebla con visibilidad superior a 40km	
Modo Prisma	
Diana reflectora (5cmx5cm)	300 m
Prisma estándar (1P)	5000 m
Modo Reflexión directa	
Objetivo de referencia	200 m

#### Medición de ángulos

Sistema de lectura	Codificador incremental foto electrónico
Diámetro del limbo (lectura)	88 mm & 79 mm

#### Incremento de visualización mínimo

G / M / S	1"/5"/10"
GRAD	0.0005°, 0.0001°, 0.0005°
400G	0.5mg/1mg/5mg
MIL6400	0.01M / 0.1M / 0.5M
Precisión DIN 18723	5" / 1.5 mgon

#### Precisión en la medición de distancias

Modo preciso	
Modo prisma	(3 + 2 ppm x Dist) mm
Modo reflexión directa	(5 + 2 ppm x Dist) mm
Modo Estándar	
Modo prisma	(10 + 5 ppm x Dist) mm

Modo reflexión directa	$(10 + 5 \text{ ppm} \times \text{Dist}) \text{ mm}$
------------------------	--

### Sensibilidad de la burbuja de nivel

Burbuja tubular	30" / 2 mm
Burbuja esférica	10' / 2 mm

### Plomada óptica

Imagen	Vertical
Aumentos	3x
Campo visual	5°
Distancia de enfoque	0.5 m al infinito

Tabla 23: Especificaciones Estación Total Trimble M3 de 5"DR

Configuración	Rango de introducción
Constante del prisma	-999 a + 999
Temperatura	-40 °C a + 70 °C
Presión	440 hPa a 1460 hPa
Escala	0.95000 a 1.00500
Corrección por esfericidad y refracción	0.132 , 0.142 , 0.200 o NO
Corrección del nivel de mar	SI / NO

Tabla 24: Especificaciones ambientales Estación Total Trimble M3.

---

**Especificaciones Estación Total Spectra Precisión Focus 2 de 5"**

---

**Telescopio**

Longitud del tubo	154 mm
Aumento	30 x

**Alcance de medición**

Alcance de medición sin niebla con visibilidad superior a 40km	
Modo Prisma	
Diana reflectora (5cmx5cm)	300 m
Prisma estándar (1P)	4000 m
Modo Reflexión directa	
Objetivo de referencia	500 m

**Medición de ángulos**

Sistema de lectura	Codificador absoluto
Diámetro del limbo (lectura)	79 mm
Incremento de visualización mínimo	
GRAD	1"/5"
400G	0.2"/ 1mg
MIL6400	0.005M / 0.02M
Precisión ISO 17123-3	5" / 1.5 mgon

**Precisión en la medición de distancias**

Modo preciso ISO 17123-4	
Prisma	(2+2 ppm x Dist) mm
Sin prisma	(3+2 ppm x Dist) mm

**Sensibilidad de la burbuja de nivel**

Burbuja tubular	30" / 2 mm
-----------------	------------

Burbuja esférica	8' / 2 mm
<b>Plomada óptica</b>	
Imagen	Derecha
Aumentos	3x
Campo visual	5°
Distancia de enfoque	0.3 m al infinito

Tabla 25: Especificaciones Estación Total Spectra Focus 2 de 5"

<b>Características medioambientales</b>	<b>Rango de introducción</b>
Temperatura de operación	20 °C a 50 °C
<b>Corrección atmosférica</b>	
Rango de temperaturas	40 °C a 60 °C
Presión barométrica	400 mmHg a 999mmHg 533 hPa a 1332 hPa

Tabla 26: Especificaciones ambientales Estación Total Spectra Focus 2.

Registro de observación de ángulo vertical y distancias									
Línea de nivelación							Fecha		
Instrumento							Operador		
Estacion (Ai)		hi		Obj. Observado (Bj)			hj		
Temperatura (°C)		Humedad (%)			Presion (mmHg)				
Serie	Hora	Posicion	Lecturas angulo cenital (Z')	Suma de lecturas	Residuo				
1		Directa							
		Transito							
2		Directa							
		Transito							
3		Directa							
		Transito							
4		Directa							
		Transito							
5		Directa							
		Transito							
Temperatura (°C)		Humedad (%)			Presion (mmHg)				
Serie	Hora	Posicion	Lecturas angulo cenital (Z')	Suma de lecturas	Distancia	hj	Promedio distancia		
1		Directa							
		Transito							
2		Directa							
		Transito							
3		Directa							
		Transito							
4		Directa							
		Transito							
5		Directa							
		Transito							
Observaciones :									

Tabla 27: Formulario para registro de observaciones.

A continuación, se muestran los desniveles parciales para cada línea de nivelación.

<b>Línea de nivelación</b>	<b>VIR - CEP</b>		<b>Línea de nivelación</b>	<b>PH - EC</b>	
Desnivel 1	-2,540	0,001	Desnivel 1	-0,974	0,000
Desnivel 2	-5,755	0,004	Desnivel 2	-10,482	0,000
Desnivel 3	-3,767	0,004	Desnivel 3	7,945	0,003
Desnivel 4	3,626	0,002	Desnivel 4	1,571	0,002
Desnivel 5	1,297	0,002	Desnivel 5	-7,088	0,001
Desnivel 6	-1,182	0,002	Desnivel 6	-3,405	0,000
Desnivel 7	-3,589	0,002	Desnivel 7	1,509	0,005
Desnivel 8	2,897	0,001	Desnivel 8	1,415	0,001
Desnivel 9	-3,727	0,002	<b>Desnivel total</b>	-9,509	0,007
<b>Desnivel total</b>	-12,739	0,007			

<b>Línea de nivelación</b>	<b>CEP - PH</b>	
Desnivel 1	-0,963	0,001
Desnivel 2	-1,213	0,001
Desnivel 3	-3,179	0,003
Desnivel 4	-0,615	0,000
Desnivel 5	-3,394	0,001
Desnivel 6	6,498	0,002
Desnivel 7	5,692	0,001
Desnivel 8	1,460	0,001
Desnivel 9	-3,650	0,003
Desnivel 10	-0,142	0,000
Desnivel 11	-5,653	0,000
<b>Desnivel total</b>	-5,157	0,005

Línea de nivelación	EC - VIR	
Desnivel 1	-1,415	0,0006
Desnivel 2	-1,509	0,0053
Desnivel 3	3,405	0,0026
Desnivel 4	6,845	0,0004
Desnivel 5	0,867	0,0002
Desnivel 6	2,536	0,0017
Desnivel 7	-0,036	0,0003
Desnivel 8	-2,368	0,0012
Desnivel 9	0,928	0,0015
Desnivel 10	-0,127	0,0004
Desnivel 11	-1,465	0,0004
Desnivel 12	-1,110	0,0001
Desnivel 13	3,762	0,0005
Desnivel 14	2,049	0,0002
Desnivel 15	4,630	0,0039
Desnivel 16	3,270	0,0007
Desnivel 17	6,677	0,0030
Desnivel 18	0,438	0,0003
<b>Desnivel total</b>	<b>27,376</b>	<b>0,008</b>

Línea de nivelación	PH - VIR	
Desnivel 1	-0,974	0,000
Desnivel 2	-10,482	0,000
Desnivel 3	1,806	0,000
Desnivel 4	2,968	0,000
Desnivel 5	6,469	0,001
Desnivel 6	2,395	0,001
Desnivel 7	4,429	0,001
Desnivel 8	-0,207	0,001
Desnivel 9	-4,886	0,001

Desnivel 10	3,714	0,000
Desnivel 11	1,381	0,001
Desnivel 12	6,863	0,001
Desnivel 13	-7,932	0,001
Desnivel 14	-1,365	0,003
Desnivel 15	5,729	0,001
Desnivel 16	5,088	0,001
Desnivel 17	2,825	0,001
<b>Desnivel total</b>	<b>17,823</b>	<b>0,005</b>

<b>Línea de nivelación</b>	<b>EC-CEP</b>	
Desnivel 1	-1,415	0,001
Desnivel 2	-1,509	0,005
Desnivel 3	3,405	0,003
Desnivel 4	7,088	0,001
Desnivel 5	-1,571	0,002
Desnivel 6	-7,945	0,003
Desnivel 7	1,806	0,000
Desnivel 8	2,968	0,000
Desnivel 9	6,469	0,001
Desnivel 10	2,395	0,001
Desnivel 11	4,429	0,001
Desnivel 12	-0,207	0,001
Desnivel 13	-4,886	0,001
Desnivel 14	3,714	0,000
Desnivel 15	1,381	0,001
Desnivel 16	6,863	0,001
Desnivel 17	-6,675	0,004
Desnivel 18	2,357	0,001
Desnivel 19	-3,931	0,001
<b>Desnivel total</b>	<b>14,737</b>	<b>0,009</b>

