

U N I V E R S I D A D D E C O N C E P C I O N
FACULTAD DE CIENCIAS FORESTALES
Departamento Manejo de Bosques y Medioambiente

MODELOS DE AHUSAMIENTO PARA ARBOLES DE
ROBLE (*Nothofagus obliqua* (Mirb) Oerst. var. *obliqua*) Y
RAULI (*Nothofagus alpina* (Poepp. et Endl.) Oerst.)



MEMORIA PARA OPTAR
AL TITULO DE
INGENIERO FORESTAL.

Por
Hernán Antonio González Jiménez

**MODELOS DE AHUSAMIENTO PARA ARBOLES DE
ROBLE (*Nothofagus obliqua* (Mirb) Oerst. var. *obliqua*) Y
RAULI (*Nothofagus alpina* (Poepp. et Endl.) Oerst.)**

Profesor Asesor

Jorge Cancino Cancino.
Profesor Asistente;
Ing. Forestal; M. Sc.

Profesor Asesor

Pedro Real Hermosilla.
Profesor Asociado;
Ing. Forestal; Ph. D.

Director Departamento
Manejo de Bosques
y Medio Ambiente

Pedro Real Hermosilla.
Profesor Asociado;
Ing. Forestal; Ph. D.

Decano Facultad de Ciencias
Forestales

Jaime García Sandoval.
Profesor Asociado;
Ing. Forestal.

Calificación de la memoria de título:

Jorge Cancino Cancino: ochenta y un puntos.

Pedro Real Hermosilla: ochenta y siete puntos.

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, mis hermanos,
a Dios.



INDICE DE MATERIAS

CAPITULOS	PAGINA
I	INTRODUCCION.....1
II	REVISION BIBLIOGRAFICA.....3
2.1	Antecedentes generales de las especies....3
2.2	Factores que afectan la forma del árbol...3
2.3	Estructura de los modelos de ahusamiento..5
III	MATERIALES Y METODOS.....8
3.1	Materiales.....8
3.2	Métodos.....10
3.3	Selección del mejor ajuste.....15
IV	RESULTADOS Y DISCUSION.....19
4.1	Selección del mejor modelo en el ajuste simultáneo para ambas especies y determinación del efecto de especie.....19
4.2	Determinación del efecto del tamaño del árbol sobre la forma fustal.....21
4.3	Comparación de la calidad predictiva de las funciones obtenidas por los procedimientos de ajuste.....25
4.4	Comparación de la calidad predictiva del volumen total de los ocho modelos analizados.....31
V	CONCLUSIONES.....36

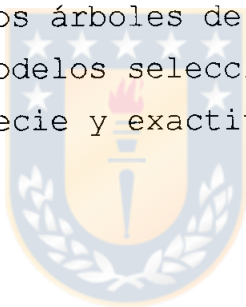
VI	RESUMEN.....	37
	SUMMARY.....	38
VII	BIBLIOGRAFIA.....	39



INDICE DE TABLAS

TABLA N°		PAGINA
1	Localización de los sectores muestreados.....	8
2	Distribución de la muestra por especie, rangos de altura y clase de dap.....	9
3	Precisión y exactitud de cada uno de los modelos seleccionados en análisis, ajustados para los datos de ambas especies en conjunto, ordenados según la eficiencia de estimación de los diámetros de fuste.....	19
4	Coefficientes del ajuste del modelo de ahusamiento por especie y en conjunto.....	20
5	Parámetros y correlación de los ajustes por clases de dap para roble.....	22
6	Parámetros y correlación de los ajustes por clases de dap para raulí.....	22
7	Exactitud de estimación de diámetros por clase de dap, usando los tres procedimientos de ajuste en la especie roble.....	26

- 8 Exactitud de estimación de diámetros por clase de dap, usando los tres procedimientos de ajuste en la especie raulí.....26
- 9 Exactitud de estimación de diámetros por porcentajes de altura de los tres procedimientos de ajuste para roble.....29
- 10 Exactitud de estimación de diámetros por porcentajes de altura de los tres procedimientos de ajuste para raulí.....29
- 11 Exactitud de estimación de los volúmenes individuales de los árboles de la muestra usando los ocho modelos seleccionados; ordenados por especie y exactitud.....32



INDICE DE FIGURAS

FIGURA	PAGINA
1	Distribución de frecuencia muestral por clases de dap, especie y acumulado.....10
2	Perfil de fuste promedio de roble y raulí.....21
3	Errores en la estimación de diámetros por clase de dap de los tres procedimientos de ajuste para la especie roble.....27
4	Errores en la estimación de diámetros por clase de dap de los tres procedimientos de ajuste para la especie raulí.....28
5	Errores de los tres procedimientos de ajuste en la estimación del diámetro, por porcentajes de altura del fuste, para roble.....30
6	Errores de los tres procedimientos de ajuste en la estimación del diámetro, por porcentajes de altura del fuste, para raulí.....30
7	Residuos del volumen total, para roble. Volumen real versus desvíos.....33

8	Residuos del volumen total, para raulí. Volumen real versus desvíos.....	33
9	Residuos del volumen total, para roble. Volumen estimado versus desvíos.....	34
10	Residuos del volumen total, para raulí. Volumen estimado versus desvíos.....	34



I.- INTRODUCCION

Los inventarios forestales pueden ser más eficientes si se usa un sistema de ecuaciones para predecir el volumen total y comercial a cualquier diámetro límite de utilización (Byrne y Reed, 1986). Para esto se necesita describir cuantitativamente la forma del fuste por medio de una función de ahusamiento. El ahusamiento del fuste se define como la tasa relativa de cambio del diámetro del fuste a medida que aumenta la altura; la forma se refiere a la forma geométrica del fuste (Larson, 1963).

Desde que Höjer en 1903 (citado por Pera, 1982) materializó la primera función de ahusamiento se han desarrollado diferentes y complejos modelos de tipo polinomial (los más usados), trigonométricos, segmentados, etc., para modelar la forma fustal.

La forma del fuste con respecto a su eje es convexa desde la base hasta un punto de inflexión, a partir del cual se hace cóncava, terminando en forma cónica en la región de la copa (Loetsch et al., 1973); razón por la cual se han propuesto también modelos segmentados para describir el ahusamiento, los que se ajustan con restricciones de continuidad y pendiente común en los puntos de cambio de forma del fuste (Max y Burkhart, 1976; Cao et al., 1980).

Las funciones de ahusamiento en un árbol individual permiten estimar el volumen de cualquier sección del fuste, número de trozas de dimensiones específicas, altura del árbol para un diámetro límite dado y diámetro del árbol

para una altura deseada. En lo que se refiere a las aplicaciones en un rodal, permite la cubicación directa del rodal, obtención del volumen de un producto determinado, obtención del volumen del rodal en una combinación de productos, confección de tablas de volumen para distintos productos, y describir la distribución del volumen del rodal (Newnham, 1992). En estas aplicaciones es conveniente tener presente que el volumen, su incremento y la forma fustal son influenciados por los tratamientos silviculturales, como las podas, los raleos, la aplicación de fertilizantes y la acción del viento (Valinger, 1992).

En este documento se describe el ajuste de funciones de ahusamiento para roble (*Nothofagus obliqua*) y raulí (*Nothofagus alpina*), y se determina la factibilidad estadística de un ajuste único para ambas especies, además de verificar el efecto del tamaño del árbol sobre la forma fustal. Esto último equivale a seleccionar el tipo de ajuste más eficiente, entre el ajuste promedio, por clase de dap e individual simultáneo. Adicionalmente se compara la precisión en la estimación del volumen total con los modelos analizados.

II.- REVISION BIBLIOGRAFICA

2.1 Antecedentes generales de las especies.

Roble y raulí son especies que coexisten juntas y que pertenecen al mismo género y Tipo Forestal, ocupando sitios ecológicos muy similares. Esto hace suponer que su ahusamiento y forma son similares, lo que justificaría ajustar un modelo general, incluyendo los datos de ambas especies, pero existen, sin embargo, algunas características diferentes entre las especies en cuestión, en lo que se refiere a la morfología y características botánicas.

2.2 Factores que afectan la forma del árbol.

Los factores que afectan el crecimiento y su distribución en el árbol son variados. A continuación se analizan algunos de ellos.

Viento. El viento produce curvatura en el fuste y un estrés en los árboles más expuestos a este factor (Morris y Forslund, 1992); también afecta la dirección y la simetría del crecimiento radial y la variación de la densidad de la madera (Robertson, 1990). Los árboles expuestos al viento tienen un menor crecimiento radial y una mayor flexibilidad que los árboles no expuestos (Telewski y Jaffe, 1986; citados por Dean, 1991). La tasa de crecimiento afecta, a su vez, las propiedades mecánicas de *Pinus elliottii* Engelm. var. *elliottii* (Mac Peak y Saucier, 1990; citados por Dean, 1991).

Podas y raleos. Las podas y raleos son muy frecuentes hoy en día, cuando se desea obtener un ingreso temprano (raleo comercial) y además madera de alta calidad en la corta final. Estos tratamientos afectan la forma de los árboles y el ahusamiento del fuste. Después de un raleo el ahusamiento es mucho mayor que antes de él (Barbour et al., 1992).

Pressler (1864), citado por Larson (1963), sostiene que el crecimiento del fuste y por lo tanto su forma está sujeta a tres leyes: a) El área del anillo de crecimiento en cualquier punto del fuste es proporcional a la cantidad de follaje sobre él; b) En todo el fuste libre de ramas, el área del anillo de crecimiento será igual y c) En la zona de la copa, el área del anillo de crecimiento decrece hacia arriba en relación a la cantidad de follaje sobre cada punto.

Hay detractores de esta teoría, como Schwartz (1899), citado por Larson (1963), quien sostiene que estas tres leyes carecen de validez científica. Sin embargo, esta teoría tiene cabida si el árbol lo dividimos en tres partes: copa, fuste libre de ramas y tocón. Larson (1963) señala que el tamaño de la copa está directamente relacionado con el ahusamiento de los árboles, por lo que los silvicultores de hoy controlan el aumento excesivo de copa con las podas, las que amortiguan este efecto no deseado.

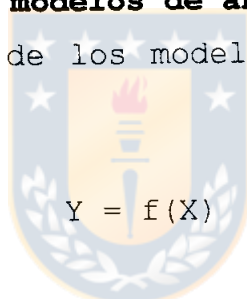
Dominancia. El cambio en la forma del fuste debido a la dominancia se puede mostrar con la variación entre las

diferentes clases de copa de un árbol. Horn (1961), citado por Larson (1963), sostiene que los árboles codominantes incrementan su cilindridad a una tasa mayor que los dominantes; esto es análogo y aplicable a los árboles de crecimiento libre y los de rodales.

Los árboles dominantes tienen un mayor ahusamiento, el que depende del tamaño de la copa (Larson, 1963). Por esto es que las podas y raleos deben ser planificadas cuidadosamente y así lograr la forma y el ahusamiento deseados.

2.3 Estructura de los modelos de ahusamiento.

La estructura general de los modelos de ahusamiento es la siguiente:



En esa relación Y normalmente es una expresión relativa del diámetro y X lo es de la altura de medición. Generalmente se emplea el dap (diámetro a la altura del pecho) como diámetro de referencia y la altura total como altura de referencia. Así X e Y pueden adquirir las formas que se detallan a continuación. La forma de Y y de X, y el expresar los diámetros con o sin corteza importan en la introducción de restricciones en los modelos fustales.

$$X = h / H , \quad X = (H - h) / H , \quad X = (H - h) / (H - 1,3)$$

$$Y = d / D , \quad Y = d^2 / D^2$$

donde:

H = es la altura total del árbol (m).

h = es la altura de medición del diámetro fustal d (m).

D = es el diámetro a la altura del pecho (1,3 m del suelo), con o sin corteza.

d = es el diámetro fustal medido a la altura h (cm), con o sin corteza.

También se han incluido otras variables, como la clase de copa o diámetro de copa, para mejorar la explicación de la variabilidad en la forma de los árboles, pero por el leve aumento de la precisión en la estimación y por fines prácticos su inclusión no se justifica (Burkhart y Walton, 1985). Thomas y Parresol (1991) sostienen que las funciones trigonométricas definidas en el círculo de radio unitario tienen una analogía directa con la sección fustal relativa a una altura relativa, por lo que proponen un modelo de la forma $d/D^2 = f [\text{sen}(h), \text{cotan}(h)]$ para modelar el fuste. En general son muchas las variables y combinaciones de variables que se pueden considerar al modelar el perfil fustal, pero básicamente sólo se trata de diámetros de fuste medidos a ciertas alturas y alturas, expresadas en términos relativos del dap y altura total, respectivamente.

El ajuste de un modelo de ahusamiento específico puede realizarse de tres maneras diferentes. La forma más común es obtener un modelo único para todo el conjunto de datos, proceso que denominaremos ajuste promedio. Otra opción es realizar el ajuste por clase de dap, que se realiza en dos fases; en la primera se genera un conjunto de parámetros de

la función de ahusamiento para cada clase de tamaño; en la segunda fase cada uno de los parámetros debe estimarse a partir de las características generales de tamaño del árbol (dap, altura). La tercera opción es realizar un ajuste individual simultáneo, el que consiste en generar un conjunto de parámetros para cada árbol, valores que también se estiman a partir del tamaño (dap, altura), pero a diferencia de la opción anterior todo el proceso se realiza en una sola etapa.

La introducción de restricciones en los modelos de ahusamiento busca mejorar la exactitud de las estimaciones. Cada restricción obliga al modelo a estimar un valor de diámetro específico en una altura fustal determinada. En esta altura y en las proximidades las estimaciones son mejores que en el resto del fuste. Alturas típicas para la introducción de restricciones son el ápice, la altura de medición del dap, y cualquier otra en que el valor del diámetro fustal pueda ser conocido con exactitud.

III.- MATERIALES Y METODOS

3.1 Materiales.

En el estudio se usaron datos de 250 árboles proporcionados por la Corporación Nacional Forestal (CONAF regional de Concepción), obtenidos en las zonas de Los Lleuques, Mulchén, Quilleco y Yungay. En esos árboles se midió el diámetro sin corteza y el espesor de corteza cada 1,5 m a lo largo del fuste, el dap y la altura total de cada árbol.

La muestra de roble fue tomada en cuatro zonas de la Precordillera Andina; la muestra de raulí se obtuvo del fundo San Lorenzo en el Sector de Quilleco. Durante el muestreo se buscó abarcar todos los estratos y niveles de competencia (Tablas 1 y 2). Todos los rodales muestreados corresponden a bosques del tipo Monte Alto, sin manejo.

TABLA 1. Localización de los sectores muestreados.

Sector (Fundos)	Densidad (árb / ha)	Ciudad	Latitud Sur	Longitud Oeste	Altitud (msnm)
El Castillo	1.396 (roble)	Recinto	36° 50'	71° 30'	500
San Juan Grande 1 y 2	1.230 (roble)	Mulchén	37° 40'	71° 40'	500
San Lorenzo	1.865 (raulí)	Quilleco	37 ° 33'	71° 51'	500
Las Cruces	640 (roble)	Yungay	37° 10'	71° 45'	500

TABLA 2. Distribución de la muestra por especie, rangos de altura y clase de dap.

Clases de Dap (cm)	Número de árboles			Frecuencia relativa (%)			Altura mínima medida (m)		Altura máxima medida (m)		Altura media (m)	
	Ro	Ra	Tot	Ro	Ra	Acu	Ro	Ra	Ro	Ra	Ro	Ra
	7,5	4	-	4	2,3	-	1,6	11,8	-	15,3	-	13,3
12,5	27	6	33	15,5	7,9	13,2	10,3	12,9	20,8	18,5	14,7	16,4
17,5	19	8	27	11,0	10,5	10,8	11,6	15,0	21,8	22,1	17,8	18,4
22,5	34	16	50	19,5	21,1	20,0	15,3	15,1	24,3	24,2	20,4	20,0
27,5	29	10	39	16,7	13,2	15,6	13,2	16,4	24,3	25,5	20,4	19,7
32,5	35	26	61	20,1	34,2	24,4	18,3	20,0	25,6	26,5	21,2	22,7
37,5	17	10	27	9,8	13,1	10,8	16,8	22,4	24,5	28,0	22,3	25,5
42,5	9	-	9	5,1	-	3,6	20,0	-	24,9	-	22,5	-
Total	174	76	250	100	100	100						

Ro :roble.

Ra :raulí.

Tot :acumulado.

El tamaño de la muestra de roble es más grande que la muestra de raulí y tiene un rango de dap mayor (Tabla 2, Figura 1). La altura media por clase de diámetro de raulí es levemente superior a la de roble, lo que resulta en un coeficiente de esbeltez mayor para raulí y un mayor ahusamiento para roble.

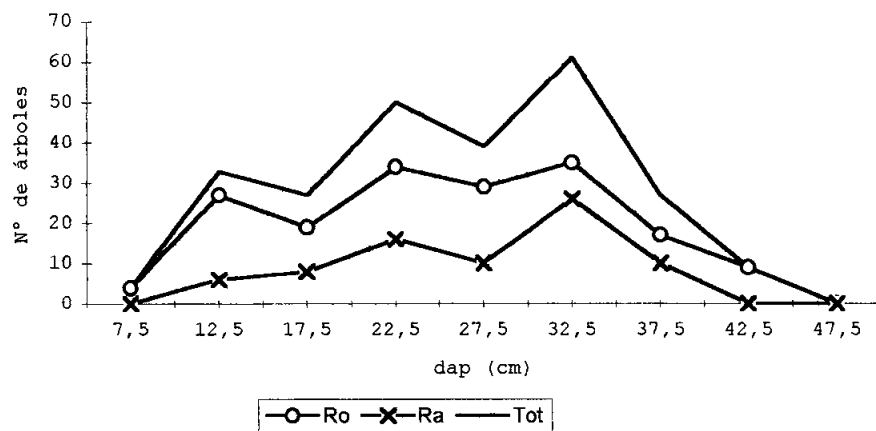


FIGURA 1. Distribución de frecuencia muestral por clases de dap, especie y acumulado.

3.2 Métodos.

El estudio consistió en seleccionar el mejor modelo de ahusamiento entre ocho recopilados de la bibliografía. La elección del modelo se hizo a partir del ajuste promedio, usando los datos de los árboles de ambas especies en forma simultánea. Una vez seleccionado el modelo se verificó la posible existencia de un efecto de especie y tamaño del árbol. Posteriormente se ajustó el modelo elegido, indistintamente por cada clase de tamaño en ambas especies por separado. El último tipo de ajuste que se hizo, fue el que consiste en determinar cada uno de los parámetros del modelo elegido en el primer paso del estudio, en base a características generales del árbol, las que son combinaciones del dap y altura total. Todas las decisiones se tomaron basados en los resultados estadísticos de la prueba F (Weisberg, 1985). Por último se verificó si el mejor modelo seleccionado para estimar diámetros fustales, también lo es para predecir volúmenes.

Modelos ajustados. A continuación se presentan y describen los ocho modelos ajustados. En esos modelos D es el dap con o sin corteza (diámetro fustal medido a 1,3 m del suelo); H es la altura total del árbol (m); h es la altura de medición del diámetro fustal d (m) y d es el diámetro fustal medido a la altura h (cm), con o sin corteza.

- 1.- Modelo polinomial de Allen (1993), basado en el desarrollado por Liu y Keister (1978). Nota: En el presente estudio se modificó la variable independiente.

$$(d / D) = b_1X^{0,5} + b_2X + b_3X^{1,5} + b_4X^2$$

donde:

$$X = (H - h) / H$$

b_i = Coeficientes de regresión

- 2.- Modelo polinomial de Allen (1993), basado en el desarrollado por Liu y Keister (1978).

$$(d / D) = b_0 + b_1X^{0,5} + b_2X + b_3X^{1,5} + b_4X^2$$

donde:

$$X = h / H$$

b_i = Coeficientes de regresión

- 3.- Modelo de forma variable, modificado de Newnham (1992).

$$d / D = X^b$$

$$\begin{aligned} \ln(d / D) = & b_0 \ln(X) + b_1 \ln(X)X + b_2 \ln(X)D / H + b_3 \\ & \ln(X)X(D / H) + b_4 \ln(X) (D / H) / h^{1/2} + b_5 \\ & \ln(X)H / h^{1/2} + b_6 \ln(X)H^2 / h + b_7 \ln(X)DH / h \end{aligned}$$

donde:

$$b = f[X, h, H, \text{dap}]$$

$$X = (H - h) / (H - 1,3)$$

b_i = coeficientes.

4.- Modelo trigonométrico de Thomas y Parresol (1991).

$$(d / D)^2 = b_1 (X-1) + b_2 \text{sen} (c \pi X) + b_3 \text{cotan} (\pi X / 2)$$

donde:

$$X = (h / H)$$

b_1, b_2, b_3, c = coeficientes de regresión.

5.- Modelo de forma variable modificado de Newnham (1992). Nota: la diferencia con el modelo 3 es que aquí se considera el dap sin corteza.

$$d / D = X^b$$

$$b = f[X, h, H, \text{dap}]$$

$$\begin{aligned} \ln(d / D) = & b_0 \ln(X) + b_1 \ln(X)X + b_2 \ln(X)D / H + b_3 \\ & \ln(X)X(D / H) + b_4 \ln(X) (D / H) / h^{1/2} + \\ & b_5 \ln(X)H / h^{1/2} + b_6 \ln(X)H^2 / h + b_7 \\ & \ln(X)DH / h \end{aligned}$$

donde:

$$X = (H - h)/(H - 1,3).$$

b_i = coeficientes de regresión.

$$X = (H - h)/(H - 1,3).$$

b_i = coeficientes de regresión.

6.- Modelo polinomial de Goulding y Murray (1975), citado por Lowell (1986).

$$(d / D) = b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 + b_4X^4 + b_5X^5$$

donde:

$$X = h / H$$

b_i = coeficientes de regresión.

7.- Modelo polinomial de Goulding y Murray (1975), citado por Lowell (1986).

$$(d / D)^2 = b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 + b_4X^4 + b_5X^5$$

donde:

$$X = h / H$$

b_i = coeficientes de regresión.

8.- Modelo de regresión polinomial segmentado de Max y Burkhart (1976).

$$(d / D)^2 = b_1 (h / H - 1) + b_2 ((h / H)^2 - 1) + b_3 (a_1 - h / H)^2 I_1 + b_4 (a_2 - h / H)^2 I_2$$

donde:

b_i = coeficientes de regresión.

$$I_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } h / H < a_1 \\ 0 & \text{si } h / H \geq a_1 \end{cases}$$

$$I_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } h / H < a_2 \\ 0 & \text{si } h / H \geq a_2 \end{cases}$$

a_1 y a_2 : puntos de unión de los submodelos.

El ajuste de los modelos se realizó utilizando el programa estadístico SAS (1982). En el ajuste, los 250 árboles dan origen a 3.310 pares de datos (x, y).

3.3 Selección del mejor ajuste.

Función promedio. El primer paso del análisis consistió en seleccionar el mejor modelo ajustado con los datos de ambas especies juntas, en base a la exactitud de cada modelo, entendido como la suma del error estándar de estimación (EEE) más el sesgo (SS) (Cailliez, 1980; Hocking, 1976; Johnston, 1975; Kahler, 1993), además se usaron los desvíos

absolutos (Cao et al., 1980). Las relaciones matemáticas se detallan a continuación.

$$E^2 = SS^2 + EEE^2$$

$$EEE = \left[\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n(n - q)} \right]^{1/2}$$

$$SS = \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)}{n}$$

$$|SS| = \frac{\sum (|y_i - \hat{y}_i|)}{n}$$

donde:

- E = es la exactitud de las estimaciones.
 SS = es el sesgo.
 |SS| = es el sesgo en valor absoluto.
 EEE = es el error estándar de estimación.
 y_i = i-ésimo valor medido.
 \hat{y}_i = i-ésimo valor estimado con la función.
 q = número de parámetros de la función.
 n = tamaño de la muestra.

Determinación del efecto de especie. Posteriormente se verificó si esta función única describía a las especies estudiadas en forma simultánea, mediante una prueba de F (Weisberg, 1985).

$$F_m = \left[\frac{((SCE_p - (SCE_1 + SCE_2)) / (Gl_p - (Gl_1 + Gl_2)))}{(SCE_1 + SCE_2) / (Gl_1 + Gl_2)} \right]$$

con:

$$F_c \sim [Gl_p - (Gl_1 + Gl_2), (Gl_1 + Gl_2)]$$

donde:

SCE_p = suma de cuadrados del error considerando todos los datos de roble y raulí.

SCE_1 = suma de cuadrados del error considerando los datos de roble.

SCE_2 = suma de cuadrados del error considerando los datos de raulí.

F_m = valor de F calculado.

F_c = valor de F entregado por la tabla.

Gl = grados de libertad.

p = sub - índice para denotar la función que incluye los datos de ambas especies.

1 = sub - índice para denotar la función ajustada para roble.

2 = sub - índice para denotar la función ajustada para raulí.

Determinación del efecto de tamaño. Para analizar el efecto del tamaño del árbol sobre la forma fustal se agruparon los datos por clases de dap (Fcd); en cada clase se ajustó el modelo seleccionado en la primera etapa. Para determinar si había ganancia en la precisión de estimación, al clasificar los datos por clase de dap, se utilizó la prueba de F (Weisberg, 1985).

$$F = \frac{[(SCE_{(Fp)} - \sum SCE_{(Fcd)}) / (Gl_{(Fp)} - \sum Gl_{(Fcd)})]}{[\sum SCE_{(Fcd)} / \sum Gl_{(Fcd)}]}$$

Nota: las variables tienen la misma definición que en el punto anterior.

Función variable. El ajuste individual simultáneo genera valores únicos de los coeficientes del modelo fustal básico para cada árbol. Este se realizó expresando cada uno de los coeficientes en función de las variables dap y altura total, modificando el modelo básico seleccionado y agregándole las variables que explicarían la variación en el valor de los coeficientes del modelo básico de cada árbol. Se usaron 13 transformaciones del dap y de la altura total (D, H, D², H², D / H, ln H, 1 / D, 1 / H, 1 / D², 1 / H², √D, √H, D·H). Para encontrar el modelo adecuado a partir de estos términos se empleó el procedimiento STEPWISE (SAS, 1982). Se eligieron todas las variables estadísticamente significativas. Este procedimiento dio origen a una función que se denominó Función Variable y que denotó (Fv).

$$b_i = f(\text{dap}, H)$$

donde:

b_i = parámetros del modelo elegido.
 $f(\text{dap}, H)$ = Representa los términos de interacción a combinar.

Para los tres tipos de funciones (promedio, por clase de tamaño y variable) se comparó la eficiencia de estimación de los diámetros a lo largo del fuste. Para ello se dividió el fuste en diez secciones (cada 10% de la altura), en las que se calculó el error promedio de estimación del diámetro, el valor absoluto de este error y la exactitud.

Cálculo y estimación del volumen. Para cada especie se calculó el volumen total usando la función de volumen obtenida por integración de cada modelo de ahusamiento.

$$\hat{V} = (\pi / 40\,000) D^2 H \int_{x_a}^{x_b} y^2 dx$$

donde:

\hat{V} = volumen estimado con la función (m³).

V = volumen real (m³).

IV.- RESULTADOS Y DISCUSION

4.1 Selección del mejor modelo en el ajuste simultáneo para ambas especies y determinación del efecto de especie.

En el ajuste simultáneo para ambas especies se determinó que el modelo polinomial de Allen (1993) con su variable independiente modificada, denominado modelo uno (1) en este estudio, explica mejor el perfil de fuste de ambas especies. Los modelos 1 y 2 son los menos sesgados, más precisos y exactos de los ocho modelos probados (Tabla 3).

TABLA 3. Precisión y exactitud de cada uno de los modelos en análisis, ajustados para los datos de ambas especies en conjunto, ordenados según la eficiencia de estimación de los diámetros de fuste (n = 3.310).

Modelo N°	Sesgo (cm)	EEE (cm)	Exactitud (cm)
1	-0,00	0,03	0,03
2	-0,00	0,03	0,03
3	-0,00	0,03	0,03
4	-0,00	0,03	0,03
5	-0,01	0,06	0,06
6	-0,09	0,05	0,05
7	-0,01	0,05	0,06
8	-0,04	0,05	0,76

El análisis del efecto de especie demostró que no es factible una función única para ambas especies, sino que se debe ajustar el modelo elegido para cada especie por separado ($F_{muestral} = 20,53$, $F_{critico} = 1,08$, $\alpha = 0,05$; Tabla 4).

TABLA 4. Coeficientes del ajuste del modelo de ahusamiento por especie y en conjunto.

Especie	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	R ²	SCE	n
roble	-1,075415234	7,327626010	-9,555214806	4,316791031	0,98	11,99486	2.214
raulí	-1,97210750	11,60648595	-15,99732591	7,35846442	0,98	5,997610	1.096
Ambas	-1,37203656	8,74281625	-11,68640554	5,32353898	0,98	18,44223	3.310
Modelo: $d/D = b_1X^{0,5} + b_2X + b_3X^{1,5} + b_4X^2$; con $X = (H - h) / H$							

donde:

SCE = suma de cuadrados de los errores.

n = n° de datos (x, y).

R² = coeficiente de correlación.

El perfil promedio del fuste de roble es diferente del de raulí (Tabla 4, Figura 2). Estos se diferencian claramente cerca del ápice (0,85 - 0,95 % de la altura total) y especialmente desde la base hasta la mitad de la altura total del árbol. Roble presenta mayor ahusamiento que raulí.

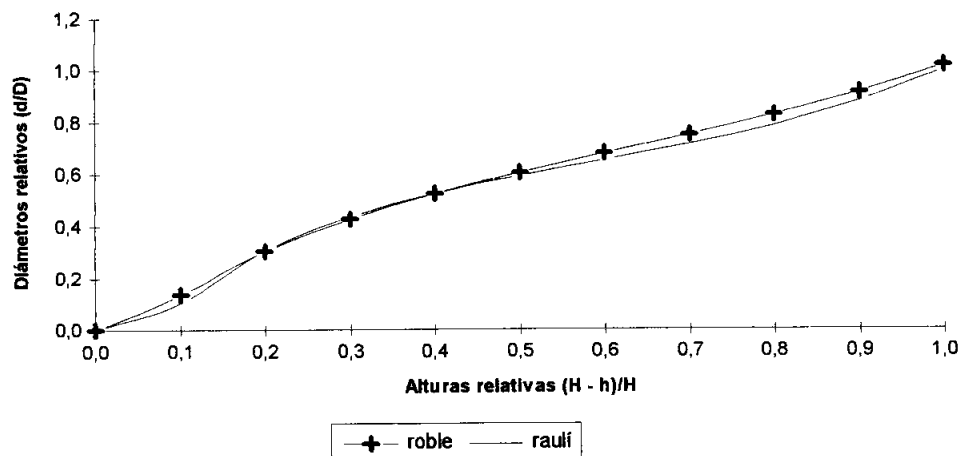


FIGURA 2. Perfil de fuste promedio de roble y raulí.

4.2 Determinación del efecto de tamaño del árbol sobre la forma fustal.

Ajuste del modelo por clase de dap. Tanto para roble ($F_m = 16,74$; $F_c = 1,52$; $\alpha = 0,05$; Tabla 5), como para raulí ($F_m = 6,34$; $F_c = 1,52$; $\alpha = 0,05$; Tabla 6); existe un efecto de tamaño.

La forma fustal varía entre tamaños de árboles y los parámetros difieren cada vez más de los de la función promedio en las clases de dap extremas. Ello implica que cada tamaño de árbol necesita un conjunto diferente de valores de coeficientes. Una desventaja de esto es la necesidad de una función por cada clase, debiéndose estimar 32 parámetros en roble (Tabla 5) y 24 en raulí (Tabla 6) en las condiciones de la muestra y de análisis de este estudio.

TABLA 5. Parámetros y correlación de los ajustes por clases de dap para roble.

Clase dap (cm)	Altura media (m)	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	R ²	SCE	n
7,5	13,3	-6,03177824	29,46876511	-41,87482838	19,59058371	0,98	0,28940	35
12,5	14,7	-0,74077104	7,59885515	-11,72992823	5,93595318	0,98	1,79993	263
17,5	17,8	-0,646437423	6,340895891	-8,925791424	4,263768010	0,98	1,11620	228
22,5	20,4	-1,53939020	9,85489326	-13,55972981	6,26800337	0,99	1,43269	446
27,5	20,4	-0,376885857	4,164810814	-4,817572511	2,020453393	0,98	2,11273	386
32,5	21,2	-1,50486239	8,40731174	-10,10729940	4,20022568	0,99	2,25409	497
37,5	22,3	-1,89735422	10,03219069	-12,65370233	5,52133977	0,99	0,86009	246
42,5	22,5	-0,966001175	4,406844253	-3,841049872	1,371660942	0,99	0,252837	113
Función promedio		-1,075415234	7,327626010	-9,555214806	4,316791031	0,98	11,9948	2.214

TABLA 6. Parámetros y correlación de los ajustes por clases de dap para raulí.

Clase dap (cm)	Altura media (m)	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	R ²	SCE	n
12,5	16,4	-1,20205394	10,86397543	-17,34210653	8,70464430	0,99	0,26078	63
17,5	18,4	-2,06518763	13,18523823	-19,45361405	9,36334134	0,99	0,37927	95
22,5	20,0	-2,87350936	16,46693254	-23,73902136	11,19772300	0,98	1,13496	218
27,5	19,7	-1,92129119	11,56825973	-16,00377277	7,36009686	0,98	0,70723	159
32,5	22,7	-1,37475255	8,26320505	-10,56899042	4,63348368	0,98	2,20253	396
37,5	25,5	-1,65284008	9,28033778	-11,99007914	5,33959612	0,98	0,67841	165
Función promedio		-1,97210750	11,60648595	-15,99732591	7,35846442	0,98	5,99761	1.096

Resultados del ajuste individual simultáneo. Las variables de estado del árbol que predicen los coeficientes del modelo fustal varían entre roble y raulí.

Para roble se seleccionaron las variables que dieron origen al modelo siguiente:

$$d / D = B_1 D X^{1,5} + B_2 H X^2 + B_3 D^2 X + B_4 D^2 X^{1,5} + B_5 D^2 X^2 + B_6 H^2 X^{0,5} + B_7 H^2 X + B_8 H^2 X^{1,5} + B_9 H^2 X^2 + B_{10} D / H X^{0,5} + B_{11} 1 / D X + B_{12} 1 / D X^{1,5} + B_{13} 1 / D X^2 + B_{14} D H X^{0,5} + B_{15} D H X^2$$

En este modelo, factorizando por $X^{0,5}$, X , $X^{1,5}$ y X^2 , se recupera la forma original del modelo básico de ahusamiento:

$$d / D = X^{0,5} (B_6 H^2 + B_{10} D / H + B_{14} DH) + X (B_3 D^2 + B_7 H^2 + B_{11} 1/D) + X^{1,5} (B_1 D + B_4 D^2 + B_8 H^2 + B_{12} 1/D) + X^2 (B_2 H + B_5 D^2 + B_9 H^2 + B_{13} 1/D + B_{15} DH)$$

o sea:

$$d / D = b_1 X^{0,5} + b_2 X + b_3 X^{1,5} + b_4 X^2$$

donde:

$$b_1 = (B_6 H^2 + B_{10} D / H + B_{14} DH)$$

$$b_2 = (B_3 D^2 + B_7 H^2 + B_{11} 1/D)$$

$$b_3 = (B_1 D + B_4 D^2 + B_8 H^2 + B_{12} 1/D)$$

$$b_4 = (B_2 H + B_5 D^2 + B_9 H^2 + B_{13} 1/D + B_{15} DH)$$

En el cual, los coeficientes son función de las características generales de los árboles.

En raulí se obtuvo el modelo siguiente:

$$d / D = B_1 X^{0,5} + B_2 1/D^2 X^{0,5} + B_3 X + B_4 D X + B_5 1/D^2 X + B_6 \sqrt{D} X + B_7 D X^{1,5} + B_8 1/D X^{1,5} + B_9 1/D X^2$$

que factorizado por $X^{0,5}$, X , $X^{1,5}$ y X^2 , equivale a:

$$d / D = X^{0,5} (B_1 + B_2 1 / D^2) + X (B_3 + B_4 D + B_5 1 / D^2 + B_6 \sqrt{D}) + X^{1,5} (B_7 D + B_8 1 / D) + X^2 (B_9 1 / D)$$

o sea:

$$d / D = b_1 X^{0,5} + b_2 X + b_3 X^{1,5} + b_4 X^2$$

donde:

$$b_1 = (B_1 + B_2 1 / D^2)$$

$$b_2 = (B_3 + B_4 D + B_5 1 / D^2 + B_6 \sqrt{D})$$

$$b_3 = (B_7 D + B_8 1 / D)$$

$$b_4 = (B_9 1 / D)$$

Los coeficientes individuales obtenidos realizando el ajuste individual simultáneo se entregan a continuación:

En roble:

$$b_1 = -0,00370310 H^2 + 0,51804550 D / H - 0,00043543 DH$$

$$b_2 = -0,00243534 D^2 + 0,01949124 H^2 + 27,90284762 1/D$$

$$b_3 = -0,04288783 D + 0,00484176 D^2 - 0,02327162 H^2 - 60,44771354 1/D$$

$$b_4 = 0,07844035 H - 0,00269703 D^2 + 0,00510303 H^2 + 35,49402131 1/D + 0,00221686 DH$$

($R^2 = 0,9901$ para el modelo ajustado)

En raulí:

$$b_1 = -1,26880721 - 244,01605547 (1 / D^2)$$

$$b_2 = 25,98877751 + 0,37675633 D + 958,20262935 (1 / D^2) - 5,30179960 \sqrt{D}$$

$$b_3 = -0,03601996 D - 340,86072077 (1 / D)$$

$$b_4 = 169,23000870 (1 / D)$$

($R^2 = 0,9880$ para el modelo ajustado)

4.3 Comparación de la calidad predictiva de las funciones obtenidas por los procedimientos de ajuste.

Exactitud y exactitud de los modelos por clases de dap. Al comparar los tres tipos de ajustes se visualiza que el modelo seleccionado y ajustado por clase de dap muestra un menor sesgo en cada clase de tamaño y también presenta una mayor exactitud en la estimación de los diámetros; la

diferencia con la función de perfil de fuste variable es pequeña. Esto ocurre para ambas especies (Tablas 7 y 8, Figura 3).

TABLA 7. Exactitud de estimación de diámetros por clase de dap, usando los tres procedimientos de ajuste en la especie roble.

Dap (cm)	n	Sesgo (cm)			Sesgo (cm)			Exactitud (cm)		
		Fp	Fcd	Fv	Fp	Fcd	Fv	Fp	Fcd	Fv
7,5	35	-0,10	0,03	-0,27	2,19	0,51	0,60	0,21	0,41	0,32
10,5	263	0,27	-0,01	0,11	2,27	0,81	0,76	0,28	0,07	0,13
17,5	228	0,40	0,00	0,11	2,22	0,87	0,84	0,42	0,08	0,13
22,5	446	0,20	0,00	-0,23	2,25	0,91	0,92	0,22	0,06	0,24
27,5	386	0,32	-0,00	0,00	2,26	1,47	1,40	0,35	0,10	0,09
32,5	497	0,17	0,00	0,18	2,27	1,73	1,55	0,23	0,98	0,20
37,5	246	-0,78	0,00	0,24	4,89	1,66	1,63	0,82	0,15	0,28
42,5	113	-2,83	-0,00	-0,82	4,94	1,41	1,61	2,87	0,21	0,85

Fp: Función promedio.

Fcd: Función por clases de dap.

Fv: Función variable.

TABLA 8. Exactitud de estimación de diámetros por clase de dap, usando los tres procedimientos de ajuste en la especie raulí.

Dap (cm)	n	Sesgo (cm)			Sesgo (cm)			Exactitud (cm)		
		Fp	Fcd	Fv	Fp	Fcd	Fv	Fp	Fcd	Fv
12,5	63	0,38	-0,02	-0,03	0,78	0,61	0,61	0,41	0,10	0,11
17,5	95	0,14	-0,16	-0,20	0,83	0,80	0,87	0,19	0,12	0,24
22,5	218	0,38	-0,01	0,04	1,19	1,15	1,16	0,39	0,10	0,11
27,5	159	0,30	-0,02	0,31	1,34	1,33	1,33	0,33	0,14	0,34
32,5	396	-0,41	0,02	0,00	1,66	1,58	1,61	0,43	0,12	0,12
37,5	165	-0,72	0,01	-0,23	2,03	1,87	1,85	0,74	0,18	0,30

Fp: Función promedio.

Fcd: Función por clases de dap.

Fv: Función variable.

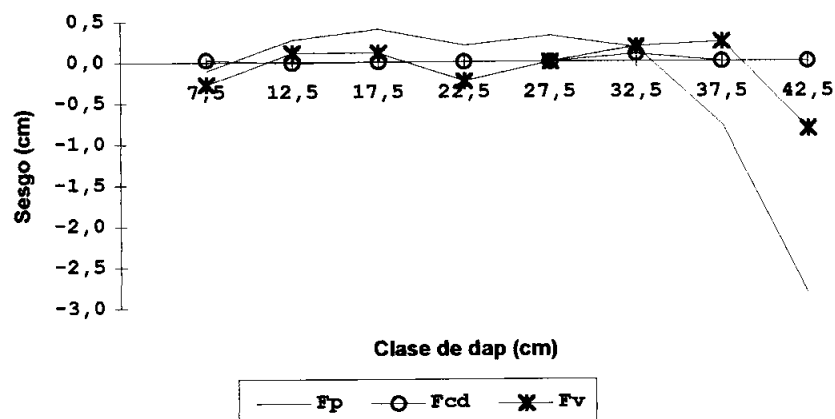


FIGURA 3. Errores en la estimación de diámetros por clase de dap de los tres procedimientos de ajuste para la especie roble.

El sesgo de la función por clase de dap es menor y con un comportamiento más estable en roble. En raulí la magnitud de los sesgos es mayor, lo que se debe a que el tamaño de esta muestra es menor.

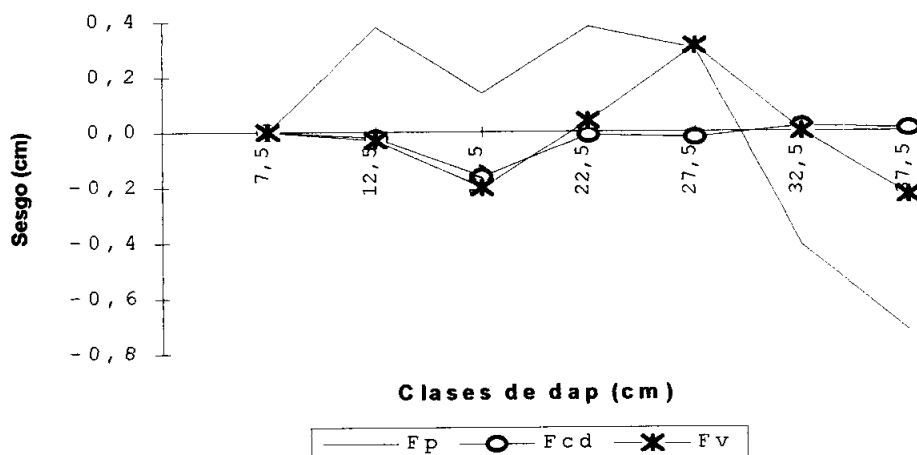


FIGURA 4. Errores en la estimación de diámetros por clase de dap de los tres procedimientos de ajuste para la especie raulí.

La función con el mejor comportamiento por clases de tamaño de los árboles, independiente de la especie, es la ajustada por clases de dap, seguida por la función variable y por último la promedio (Figuras 3 y 4).

Exactitud de los modelos a lo largo del fuste. Las funciones de fuste variable y la ajustada por clases de dap se comportan en forma similar y ambas son mejores que la promedio (Tablas 9 y 10; Figuras 5 y 6). La función de perfil por clases de dap es la que describe mejor el perfil de fuste por lo que es la más recomendable; ello porque es el método más preciso, ya que para cada clase de tamaño se tiene una función ajustada. Aunque para cada clase de tamaño se debe ocupar el modelo con distintos coeficientes,

eso hoy ya no reviste mayor problema con ayuda de los computadores.

TABLA 9. Exactitud de estimación de diámetros por porcentajes de altura de los tres procedimientos de ajuste para roble.

Alturas %	n	Sesgo (cm)			Sesgo (cm)			Exactitud (cm)		
		Fp	Fcd	Fv	Fp	Fcd	Fv	Fp	Fcd	Fv
00 - 10	181	0,76	0,07	0,07	0,76	0,07	0,07	0,76	0,07	0,07
10 - 20	113	-0,12	0,32	0,23	1,69	1,33	1,28	0,25	0,38	0,29
20 - 30	224	-0,74	-0,15	-0,33	1,84	1,56	1,57	0,76	0,21	0,36
30 - 40	212	-0,43	-0,03	-0,21	1,95	1,61	1,61	0,47	0,16	0,27
40 - 50	233	-0,03	0,36	0,13	1,80	1,67	1,55	0,16	0,39	0,20
50 - 60	227	0,23	0,47	0,25	1,36	1,36	1,22	0,25	0,49	0,27
60 - 70	232	0,48	0,77	0,52	1,38	1,41	1,28	0,49	0,78	0,53
70 - 80	232	-0,14	0,14	-0,11	1,19	1,16	1,08	0,18	0,18	0,14
80 - 90	224	-0,77	-0,36	-0,67	1,22	1,11	1,13	0,77	0,37	0,68
90 - 100	336	0,03	0,46	0,15	1,27	1,29	1,26	0,10	0,47	0,18

TABLA 10. Exactitud de estimación de diámetros por porcentajes de altura de los tres procedimientos de ajuste para raulí.

Altura %	n	Sesgo (cm)			Sesgo (cm)			Exactitud (cm)		
		Fp	Fcd	Fv	Fp	Fcd	Fv	Fp	Fcd	Fv
00 - 10	156	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,11	0,12	0,11
10 - 20	121	0,05	0,28	0,23	1,21	1,21	1,23	0,21	0,33	0,30
20 - 30	107	-0,69	-0,47	-0,46	1,32	1,32	1,40	0,72	0,49	0,49
30 - 40	121	-0,41	-0,18	-0,16	1,58	1,58	1,62	0,46	0,28	0,25
40 - 50	112	0,08	0,24	0,29	1,58	1,58	1,59	0,21	0,31	0,35
50 - 60	110	0,12	0,19	0,19	1,43	1,43	1,43	0,22	0,26	0,26
60 - 70	113	0,41	0,42	0,39	1,44	1,44	1,43	0,44	0,45	0,42
70 - 80	105	-0,04	-0,08	-0,10	1,34	1,34	1,34	0,16	0,18	0,19
80 - 90	71	-0,60	-0,56	0,59	1,31	1,31	1,31	0,62	0,58	0,60
90 - 100	80	-0,01	0,12	0,16	1,86	1,86	1,87	0,25	0,28	0,30

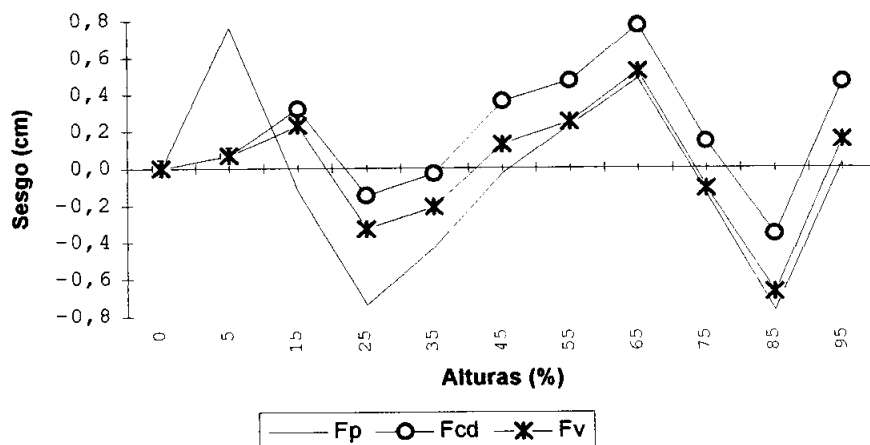


FIGURA 5. Errores de los tres procedimientos de ajuste en la estimación del diámetro, por porcentajes de altura del fuste, para roble.

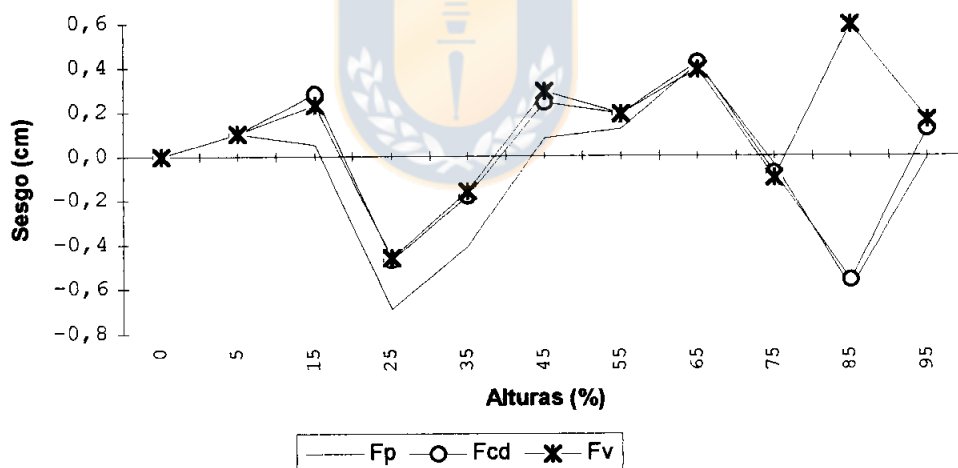


FIGURA 6. Errores de los tres procedimientos de ajuste en la estimación del diámetro, por porcentajes de altura de fuste, para raulí.

4.4 Comparación de la calidad predictiva del volumen total de los ocho modelos analizados.

El modelo de Allen (1993), seleccionado como el mejor en estimar los diámetros fustales, una vez integrado se tradujo en la siguiente función de volumen, pero como se demostró (Tabla 11) para la estimación de volúmenes se debe usar la variable independiente H / h :

$$V = (\pi / 40\,000) D^2 H [1 / 2 b_1^2 X^2 + 4 / 5 b_1 b_2 X^{2,5} + 1 / 3 b_2^2 X^3 + 2 / 3 b_1 b_3 X^3 + 4 / 7 b_1 b_4 X^{3,5} + 4 / 7 b_2 b_3 X^{3,5} + 1 / 2 b_2 b_4 X^4 + 1 / 4 b_3^2 X^4 + 4 / 9 b_3 b_4 X^{4,5} + 1 / 5 b_4^2 X^5]$$

donde:

- V = volumen sólido sin corteza expresado en m^3 .
- π = 3,141592654.
- X = altura relativa (H / h).
- b_1, b_2, b_3 y b_4 = Coeficientes de la función obtenidos en el ajuste del modelo.

TABLA 11. Exactitud de estimación de los volúmenes individuales de los árboles de la muestra usando los ocho modelos seleccionados; ordenados por especie y exactitud.

Modelo N°	Especie	n	Sesgo (m ³)	Sesgo (m ³)	EEE (m ³)	Exactitud (m ³)
2	Roble	174	-0,0033	0,05	0,0054	0,0063
1	Roble	174	-0,0117	0,05	0,0056	0,0130
4	Roble	174	-0,0244	0,05	0,0061	0,0251
5	Roble	174	0,0663	0,07	0,0078	0,0667
6	Roble	174	-0,1043	0,11	0,0117	0,1049
3	Roble	174	-0,1044	0,11	0,0112	0,1050
7	Roble	174	-0,1123	0,11	0,0124	0,1129
8	Roble	174	-0,1126	0,11	0,0128	0,1132
2	Raulí	76	0,0019	0,06	0,0091	0,0093
1	Raulí	76	-0,0083	0,05	0,0092	0,0123
5	Raulí	76	-0,0089	0,05	0,0129	0,0157
4	Raulí	76	-0,0253	0,06	0,0099	0,0271
6	Raulí	76	-0,1336	0,13	0,0203	0,1351
8	Raulí	76	-0,1408	0,14	0,0220	0,1424
7	Raulí	76	-0,1420	0,14	0,0210	0,1432
3	Raulí	76	-0,7007	0,70	0,1016	0,7080

A continuación se presentan las gráficas de los residuos, las que consideran la diferencia entre el volumen real, y el estimado usando la función de volumen escogida.

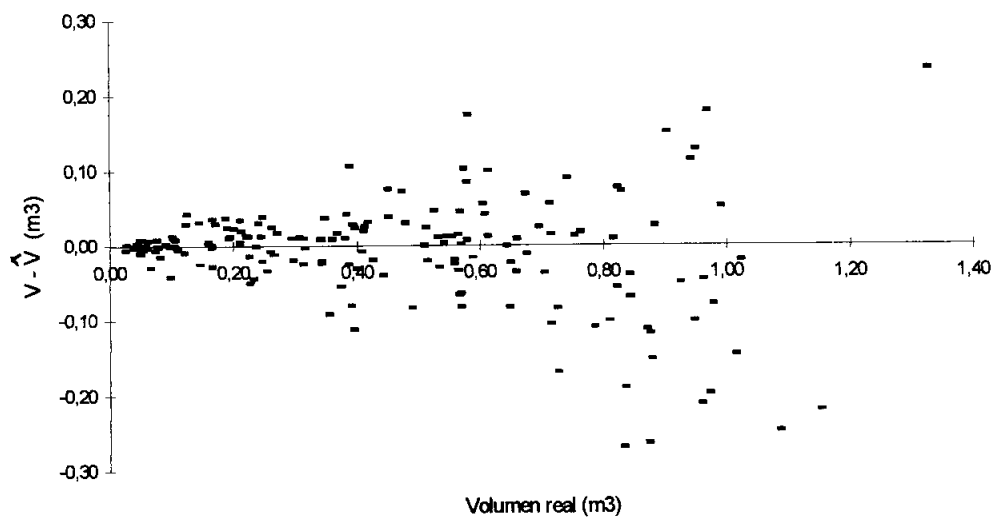


FIGURA 7. Residuos del volumen total para roble. Volumen real versus desvíos.

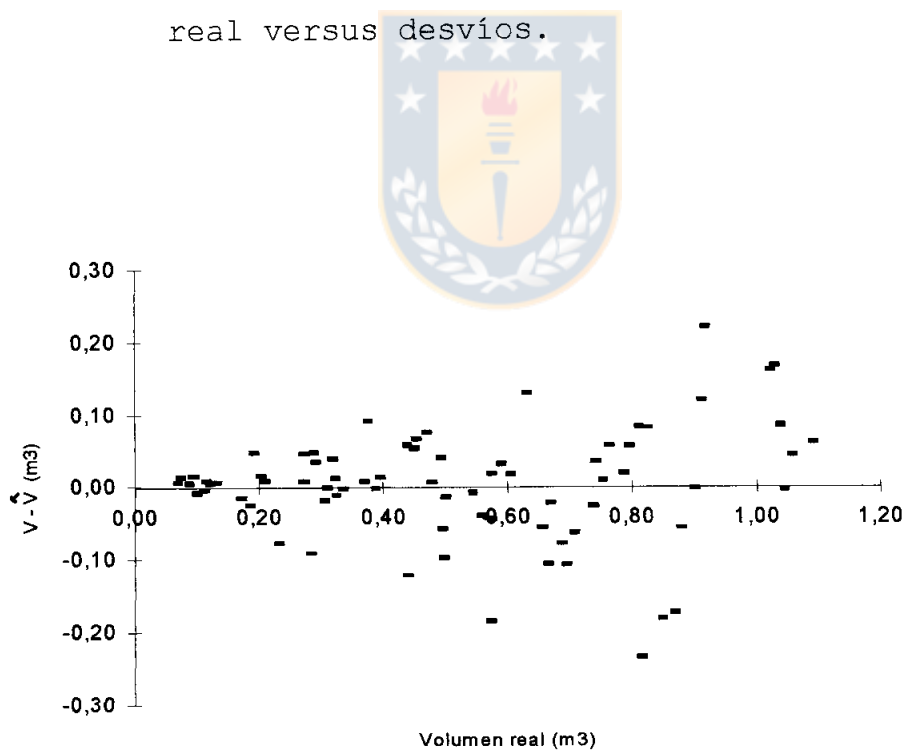


FIGURA 8. Residuos del volumen total para raulí. Volumen real versus desvíos.

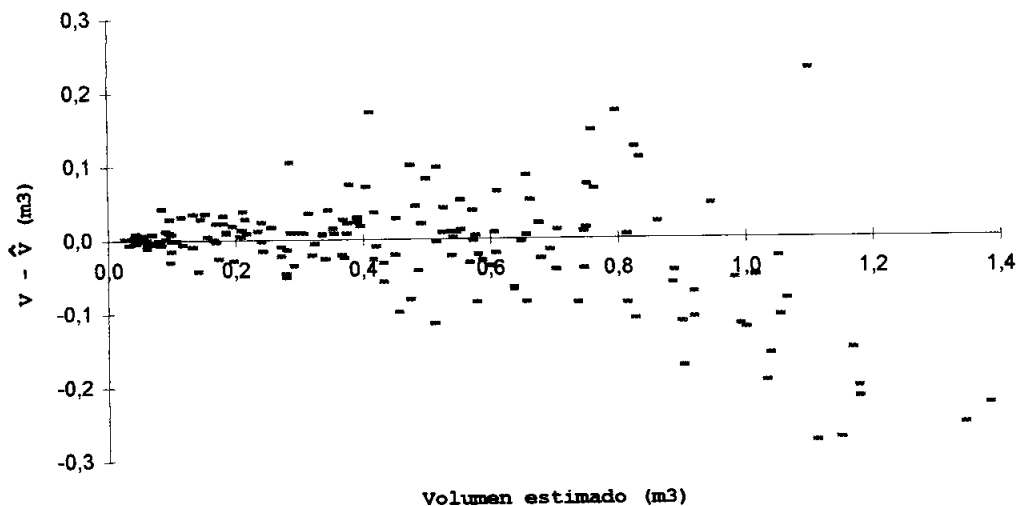


FIGURA 9. Residuos del volumen total para roble. Volumen estimado versus desvíos.

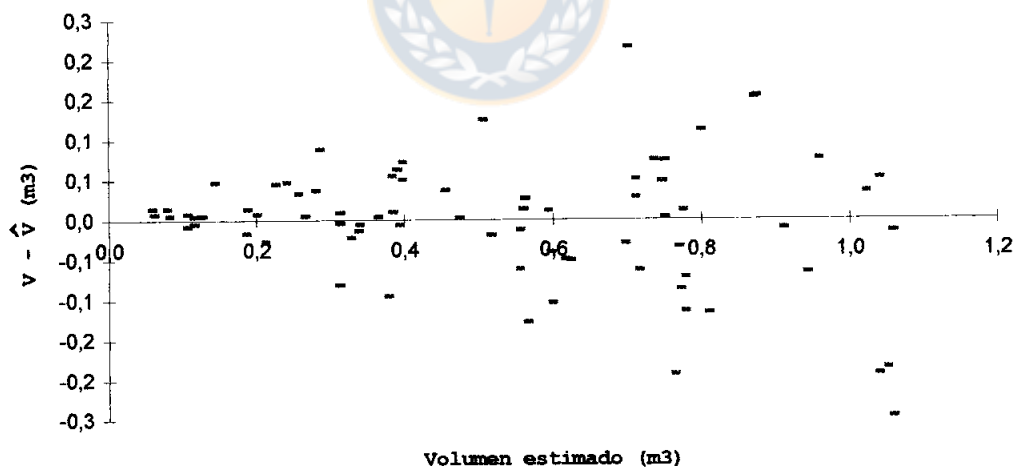


FIGURA 10. Residuos del volumen total para raulí. Volumen estimado versus desvíos.

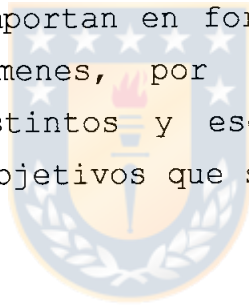
El modelo más consistente en estimar el diámetro fue el denominado Allen 1 y el mejor en estimar el volumen fue el Allen 2; ambos son del tipo polinomial; a la vez el tipo de ajuste más eficiente fue el que se hizo por clases de tamaño (Fcd), con exactitudes que superan en 0,42 cm, como promedio la estimación del diámetro que hace la función promedio (Fp) y en 0,02 cm la misma estimación que hace la función variable (Fv) en la especie roble (Tabla 7). En raulí acontece lo mismo pero la función por clases de dap supera a la otras dos en 0,29 y 0,08 cm respectivamente (Tabla 8).

Los residuos en la estimación de los volúmenes, presentan una distribución insesgada; son errores aleatorios que se distribuyen homogéneamente en las zonas de los gráficos de subestimación (área positiva del gráfico) y sobreestimación (área negativa del gráfico) (Figuras 7, 8, 9 y 10).

Los errores se acentúan más en los árboles de mayor tamaño, pero no exceden los 0,1 a 0,2 m³ para estos árboles.

V.- CONCLUSIONES

- Roble y raulí son especies con diferente forma fustal.
- La mejor función en estimar diámetros, no es la mejor estimando los volúmenes.
- El método de ajuste de funciones de ahusamiento por clases de dap (F_{cd}) es el más adecuado; le sigue en precisión la función variable (F_v) y por último la función promedio (F_p).
- Las funciones se comportan en forma diferente al estimar diámetros y/o volúmenes, por lo que es conveniente ajustar modelos distintos y escoger el más adecuado, dependiendo de los objetivos que se tengan.



VI.- RESUMEN

Se ajustaron 8 modelos de ahusamiento y volumen para 174 árboles de roble (*Nothofagus obliqua* (Mirb) Oerst. var. *obliqua*) y 76 árboles de raulí (*Nothofagus alpina* (Poepp. et Endl.) Oerst). Los árboles muestrales se distribuyen en la precordillera de la Octava Región, entre las ciudades de Chillán y Mulchén.

Se hicieron tres tipos de ajuste: ajuste promedio (Fp), ajuste por clase de tamaño de los árboles (Fcd) y un ajuste variable (Fv). En este último ajuste se calculan los parámetros en base a características generales de los árboles (dap y altura total).

Una vez seleccionado el mejor modelo y el mejor tipo de ajuste en describir el perfil fustal de las dos especies, se verificó si este también era el mejor en estimar los volúmenes, lo que no ocurrió, ya que a pesar de seleccionar el modelo de Allen para ambos casos, existe una diferencia en la variable independiente de este modelo, factor que los hace distintos.

Los modelos son: para estimar perfil fustal, el que integrando se traduce en un modelo de volumen.

$$(d/D) = b_1 X^{0,5} + b_2 X^2 + b_3 X^{1,5} + b_4 X^2$$

$$V = (\pi / 40.000) D^2 H [1/2 b_1^2 X^2 + 4/5 b_1 b_2 X^{2,5} + 1/3 b_2^2 X^3 + 2/3 b_1 b_3 X^3 + 4/7 b_1 b_4 X^{3,5} + 4/7 b_2 b_3 X^{3,5} + 1/2 b_2 b_4 X^4 + 1/4 b_3^2 X^4 + 4/9 b_3 b_4 X^{4,5} + 1/5 b_4^2 X^5]$$

SUMMARY

Using a data set of 150 trees, supplied by the Chilean National Forestry Corporation (CONAF), eight taper and volume models were fit to find the best models for roble (*Nothofagus obliqua* (Mirb) Oerst. var. *obliqua*) and raulí (*Nothofagus alpina* (Poepp. et Endl.) Oerst) trees. The data came from the Andes Mountain of the 8th Region in Chile.

The models were fitted using an average fit (Fp), a fit by size class of dbh (diameter breast height) (Fcd) and a variable fit (Fv). For the latter model the parameters were calculated using the tree dbh and total height.

After the best taper model for both species was chosen, it was tested to know whether it was the best volume model as well. Even though the Allen model was chosen for both uses, there's a different independent variable.

The best taper model is:

$$(d/D) = b_1X^{0,5} + b_2X^2 + b_3X^{1,5} + b_4X^2$$

By integration the following volume model was obtained:

$$V = (\pi / 40.000) D^2H [1/2b_1^2X^2 + 4/5b_1b_2X^{2,5} + 1/3b_2^2X^3 + 2/3b_1b_3X^3 + 4/7b_1b_4X^{3,5} + 4/7b_2b_3X^{3,5} + 1/2b_2b_4X^4 + 1/4b_3^2X^4 + 4/9b_3b_4X^{4,5} + 1/5b_4^2X^5]$$

VII.- BIBLIOGRAFIA

1. Allen, P. 1993. Average relative stem profile comparisons for tree size classes of Caribbean pine. Can. J. For. Res. 23: 2594-2598.
2. Barbour, R.J.; R.E. Bailey and J.A. Cook. 1992. Evaluation of relative density, diameter growth, and stem in a red spruce [*Picea rubens*] stand 15 years after precommercial thinning. Can. J. For. Res. 22: 229-238.
3. Bruce, D.; R.O. Curtis and C. Vancoevering. 1968. Development of a system of taper and volume tables for red cedar. For. Sci. 14(3):339-350.
4. Byrne, C. and D. Reed. 1986. Complex compatible taper and volume estimation systems for Red and Loblolly Pine. For. Sci. 32(2): 423-443.
5. Burkhart, E. and S. Walton. 1985. Incorporating crown ratio into taper equations for loblolly pine trees. For. Sci. 31(2): 478-484.
6. Cailliez, F. 1980. Estimación de volumen forestal y predicción del rendimiento. FAO 22: 1. Roma 92 p.

7. Cao, Q. V.; H. E. Burkhart and T. A. Max. 1980. Evaluation of two methods for cubic - volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. For. Sci. 26(1): 71-80.
8. Dean, T. 1991. Effect of growth rate and wind sway on the relation between mechanical and water-flow properties in slash pine seedlings. Can. J. For. Res. 21(10): 1501-1506.
9. Hocking, R. 1976. The analysis and selection of variables in linear regression. Biometrics. 32: 1-49.
10. Johnston, J. 1975. Métodos de econometría. VICENS-VIVES, Barcelona. 464 p.
11. Kahler, C. 1993. Determinación de una función de husamiento para renovales de roble y raulí. Ciencia e investigación forestal. 7 (1): 117-130.
12. Kozak, A., D. Munro and J. Smith. 1969. Taper functions and their application in forest inventory. the forestry chronicle.
13. Larson, P. 1963. Stem form development of forest trees. For. Sci. Monograph. 5.
14. Liu C. J. and T. D. Keister. 1978. Southern pine stem form defined through principal component analysis. Can. J. For. Res. 8: 188-197.

15. Loetsch, F. ; F. Zöhrer and K.E. Haller. 1973. Forest inventory, BLV Verlagsgesellschaft, München, Bern, Wien. Vol 2. 469 p.
16. Lowell, K. E. 1986. A flexible polynomial taper equation and It's suitability for estimating stem profiles and volumes of fertilized and unfertilized radiata pine trees. Aust. For. Res. 16: 165-174
17. Max, T A. and H. E. Burkhart. 1976. Segmented polynomial regression applied to taper equations. For Sci. 22(3): 283-289.
18. Morris, D. and R. Forslund. 1992. The relative importance of competition, microsite, and climate in controlling the stem taper and profile shape in jack pine. Can. J. For. Res. 22(12): 1999-2003.
19. Newnham, R. 1992. Variable - form taper functions for four Alberta tree species. Can. J. For. Res. 22: 210-223.
20. Pera, R. 1982. Modelo de ahusamiento del fuste de árboles de pino insigne. Tesis de ingeniería forestal Universidad de Chile. Facultad de Ciencias Agrarias, Veterinarias y Forestales, Escuela de Ciencias Forestales, Santiago.

21. Robertson, A. 1990. Centroid of wood density, bole eccentricity, and tree-ring width in relation to vector winds in wave forests. *Can. J. For. Res.* 21: 73-82.
22. S A S. 1982. 'SAS user's guide statistics'. 1982 (SAS Inst. Inc. Cary, North Carolina).
23. Thomas, C. and B. Parresol. 1991. Simple, flexible, trigonometric taper equations. *Can. J. For. Res.* 21(7): 1132-1137.
24. Valinger, E. 1992. Effects of wind sway on stem sorm and crown development of scots pine [*Pinus sylvestris* L.]. *Aust. For.* 55:15-21.
25. Weisberg, S. 1985. Applied linear regression. John Wiley and Sons second edition. 325p.