



Universidad de Concepción  
Dirección de Postgrado  
Facultad de Ingeniería -Programa de Magíster en Ciencias de la Ingeniería con mención en  
Ingeniería Mecánica

# **EVALUACION TEORICA Y EXPERIMENTAL SOBRE EL EFECTO DE INFILTRACIONES DE AGUA EN EL SUELO EN EL COMPORTAMIENTO DINAMICO DE MAQUINAS**

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería con mención  
en Ingeniería Mecánica

MARCELO ANTONIO MIRANDA CREMASCHI  
CONCEPCION-CHILE  
2019

Profesor Guía: Cristián Molina Vicuña  
Dpto. de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería  
Universidad de Concepción

**UNIVERSIDAD DE CONCEPCION**  
**FACULTAD DE INGENIERIA**  
**DEPARTAMENTO INGENIERIA MECANICA**

Profesor(es) Patrocinante(s):  
Daniella Escribano Leiva  
Cristián Molina Vicuña  
Pedro Saavedra González



**EVALUACION TEORICA Y EXPERIMENTAL SOBRE EL EFECTO DE  
INFILTRACIONES DE AGUA EN EL SUELO EN EL COMPORTAMIENTO  
DINAMICO DE MAQUINAS**

**Marcelo Antonio Miranda Cremaschi**

Informe de Tesis  
para optar al Título de

Magíster en ciencias de la ingeniería con mención en ingeniería mecánica

Diciembre - 2019

## RESUMEN

Se desarrolla un trabajo de investigación sobre fundaciones para máquinas sometidas a vibraciones cuya principal motivación es un caso real de un compresor montado en una fundación tipo bloque en que las vibraciones del sistema son excesivas, siendo que de acuerdo con la memoria de cálculo realizada por la empresa la fundación debiera ser la adecuada para tal caso. Para el desarrollo de este trabajo se diseña y construye un banco de ensayos de un sistema máquina/fundación/suelo que cumple con las recomendaciones necesarias para que los resultados obtenidos de él sean representativos del caso de estudio.

El objetivo general del estudio es establecer la influencia del suelo en la respuesta dinámica del sistema máquina/fundación. Mediante cálculos teóricos y mediciones experimentales obtenidas del mencionado banco, se verifica la validez de la teoría utilizada en el diseño de fundaciones. Finalmente, se estudia la influencia del suelo a través de infiltraciones de agua en el banco de ensayos para simular las napas de agua presentes en el caso que motivó este estudio.

Para poder llevar a cabo este trabajo de investigación se construye un modelo a escala de un sistema máquina/fundación/suelo que entregue resultados representativos del caso de estudio. Para lo anterior se escogió un motor eléctrico trifásico con un disco desbalanceado encargado de generar las fuerzas dinámicas, además de un variador de frecuencias para controlar la velocidad de rotación. Como relleno de suelo se escogió arena debido a que posee buenas propiedades para el caso y se diseñó un cajón de acero capaz de soportar el sistema. La segunda parte corresponde a la realización de mediciones para un suelo seco y para un suelo con infiltraciones de agua. Se utilizaron geófonos triaxiales para determinar el módulo de corte del suelo, mientras que para la respuesta dinámica se utilizaron acelerómetros. El procesamiento de las mediciones se realiza mediante los softwares LabView y Matlab. Finalmente se analizan los resultados obtenidos para establecer la influencia del suelo en el sistema y cumplir con el objetivo general.

De las mediciones realizadas se obtiene que, a pesar de las idealizaciones utilizadas para considerar el suelo, los resultados teóricos son cercanos a los experimentales principalmente para un suelo seco, lo cual valida la teoría utilizada para el diseño de fundaciones. Por otro lado, se comprueba una influencia significativa de las infiltraciones de agua en el comportamiento dinámico del sistema (hasta 10 veces entre un suelo seco y uno completamente saturado), para el caso del banco dicha influencia es debido a la variación en las frecuencias naturales del suelo a medida que ingresa agua al sistema, las cuales coinciden con la frecuencia de operación.

## TABLA DE CONTENIDO

<b>RESUMEN</b> .....	i
<b>TABLA DE CONTENIDO</b> .....	ii
<b>INDICE DE ILUSTRACIONES</b> .....	iv
<b>INDICE DE TABLAS</b> .....	v
<b>NOMENCLATURA</b> .....	vi
<b>CAPITULO 1</b> .....	1
<b>Introducción</b> .....	1
<b>1.1. Definición del problema</b> .....	2
<b>1.2. Estado del arte</b> .....	3
<b>1.2.1. Teoría utilizada en el diseño de fundaciones para máquinas</b> .....	3
<b>1.2.2. Estudios sobre el comportamiento del suelo</b> .....	5
<b>1.2.3. Estudios experimentales que aporten al diseño del banco de ensayos</b> .....	6
<b>1.3. Hipótesis</b> .....	6
<b>1.4. Objetivo general</b> .....	7
<b>1.5. Objetivos específicos</b> .....	7
<b>CAPITULO 2</b> .....	8
<b>Marco teórico</b> .....	8
<b>2.1. Análisis dinámico del sistema</b> .....	8
<b>2.1.1. Modelo propuesto y obtención de las ecuaciones del movimiento</b> .....	8
<b>2.1.2. Resolución de las ecuaciones del movimiento</b> .....	11
<b>2.1.3. Fuerzas de desbalanceamiento</b> .....	15
<b>2.2. Aporte del suelo al sistema máquina/fundación</b> .....	16
<b>2.2.1. Parámetros relevantes del suelo en cuanto al diseño de la fundación</b> .....	16
<b>2.2.2. Suelos bajo la teoría del semi-espacio elástico</b> .....	17
<b>2.2.3. Constantes de rigidez</b> .....	18
<b>2.2.4. Constantes de amortiguamiento</b> .....	20
<b>2.2.5. Obtención del módulo de elasticidad en corte</b> .....	21
<b>CAPITULO 3</b> .....	24
<b>Diseño del banco de ensayos</b> .....	24

3.1. Motor eléctrico trifásico .....	24
3.2. Fundación .....	24
3.3. Relleno de arena fina .....	26
3.4. Cajón de acero .....	28
3.5. Disco desbalanceado .....	29
<b>CAPITULO 4</b> .....	<b>30</b>
<b>Banco de ensayos en operación y metodología experimental</b> .....	<b>30</b>
<b>4.1. Geometría del problema y cálculo de los momentos de inercia</b> .....	<b>32</b>
<b>4.2. Fuerzas de excitación</b> .....	<b>35</b>
<b>4.3. Parámetros del suelo</b> .....	<b>37</b>
4.3.1. Obtención del módulo de elasticidad en corte .....	37
4.3.2. Cálculo de las constantes de rigidez y amortiguamiento .....	39
<b>4.4. Obtención de los valores vibratorios y frecuencias naturales</b> .....	<b>40</b>
4.4.1. Frecuencias naturales .....	41
4.4.2. Valores vibratorios .....	43
<b>CAPITULO 5</b> .....	<b>44</b>
<b>Resultados obtenidos y análisis</b> .....	<b>44</b>
<b>CAPITULO 6</b> .....	<b>49</b>
<b>Conclusiones</b> .....	<b>49</b>
<b>REFERENCIAS</b> .....	<b>50</b>
<b>Anexo 1</b> .....	<b>53</b>
<b>Características y dimensiones del motor eléctrico</b> .....	<b>53</b>
<b>Anexo 2</b> .....	<b>55</b>
<b>Extractos del plano utilizado para fabricar el cajón de acero</b> .....	<b>55</b>
<b>Anexo 3</b> .....	<b>57</b>
<b>Momentos de inercia de masas y de área</b> .....	<b>57</b>

## INDICE DE ILUSTRACIONES

Figura 1. Sistema máquina/fundación/suelo.....	2
Figura 2. Correlación entre la frecuencia natural reducida y el área de la fundación.....	4
Figura 3. Modos de vibrar de una fundación.....	9
Figura 4. Sistema de dos grados de libertad desacoplados .....	10
Figura 5. Sistema de dos grados de libertad acoplados.....	10
Figura 6. Sistema de dos grados de libertad acoplados.....	11
Figura 7. Sistema simple de un grado de libertad.....	12
Figura 8. Esquema de un rotor desbalanceado .....	16
Figura 9. Sección transversal de la base en contacto con el suelo .....	18
Figura 10. Representación del empotramiento de la fundación en el suelo .....	19
Figura 11. Esquema representativo de la disposición de los geófonos triaxiales en terreno .....	22
Figura 12. Representación de una señal típica obtenida mediante los geófonos.....	22
Figura 13. Fundación de concreto utilizada en el banco de ensayos. ....	25
Figura 14. Motor eléctrico trifásico montado en la fundación. ....	26
Figura 15. “Pluviation method” para obtener una densidad controlada.....	28
Figura 16. Cajón de acero que se utiliza como recipiente del sistema.....	29
Figura 17. Disco desbalanceado que genera las fuerzas centrífugas .....	29
Figura 18. Banco de ensayos con el variador de frecuencias conectado. ....	30
Figura 19. Motor eléctrico desbalanceado con acelerómetros conectados .....	31
Figura 20. Disposición de los geófonos. ....	31
Figura 21. Dimensiones de la fundación del sistema.....	33
Figura 22, Motor eléctrico representado como un paralelepípedo para la obtención de su inercia y centro de gravedad .....	34
Figura 23. Centro de gravedad del sistema y centroide de área de la base .....	35
Figura 24. Punto de aplicación de las fuerzas dinámicas .....	36
Figura 25. Ondas horizontales captadas por los geófonos .....	38
Figura 26. Ondas verticales captadas por los geófonos .....	38
Figura 27. Casos de infiltración de agua utilizados en este estudio. ....	44
Figura 28. Velocidades horizontales y verticales .....	45
Figura 29. Frecuencias naturales del sistema horizontales y verticales para cada caso.....	46
Figura 30. Velocidad teórica y experimental en dirección horizontal .....	48
Figura 31. Velocidad teórica y experimental en dirección vertical .....	48
Figura 32. Dimensiones motor eléctrico trifásico.....	54
Figura 33. Dimensiones y partes del cajón de acero.....	55
Figura 34. Montaje de las partes mostradas en la figura 32 .....	56

## INDICE DE TABLAS

Tabla 1. Rango de valores del coeficiente de Poisson de corte para distintos tipos de suelos [Arya 1981 cáp. 4].....	17
Tabla 2. Rango de valores del módulo de corte para distintos tipos de suelos [Arya 1981 cáp. 4] .....	17
Tabla 3. Constantes de rigidez para los modos seis grados de libertad .....	19
Tabla 4. Constantes de amortiguamiento dinámico para los modos de traslación .....	20
Tabla 5. Dimensiones base de la fundación para el caso real y banco de ensayos [mm] .....	25
Tabla 6. Relaciones adimensionales para escalar al caso real [-].....	25
Tabla 7. Densidad máxima y mínima de la arena fina a utilizar .....	27
Tabla 8. Dimensiones internas cajón y cantidad mínima de arena necesaria [mm] .....	28
Tabla 9. Distancias entre el centro de gravedad del sistema máquina/fundación y las fuerzas que genera el disco desbalanceado .....	36
Tabla 10. Fuerzas que genera el desbalanceamiento del disco sobre el centro de masas del sistema ....	37
Tabla 11. Momentos que genera el disco desbalanceado sobre el centro de masas del sistema .....	37
Tabla 12. Velocidad de propagación de la onda horizontal .....	39
Tabla 13. Velocidad de propagación de la onda vertical .....	39
Tabla 14. Módulo de elasticidad en corte horizontal y vertical.....	39
Tabla 15. Constantes de rigidez.....	40
Tabla 16. Constantes de amortiguamiento .....	40
Tabla 17. Frecuencias naturales para los distintos modos de vibrar.....	42
Tabla 18. Valor máximo de cada grado de libertad .....	43
Tabla 19. Velocidades vibratorias máximas obtenidas en el motor .....	43
Tabla 20. Velocidad de corte [m/s].....	45
Tabla 21. Frecuencias naturales [Hz].....	45
Tabla 22. Momentos de inercia de masa para diferentes geometrías .....	57
Tabla 23. Momentos de inercia de área para diferentes secciones .....	58

## NOMENCLATURA

$a_0$	Factor de forma dinámico [-]
$A_b$	Área de la base de la fundación [m <sup>2</sup> ]
$A_w$	Área de la fundación en contacto con el suelo [m <sup>2</sup> ]
$B$	Mitad del ancho de la fundación [m]
$c_x$	Constante de amortiguamiento correspondiente al modo de traslación horizontal [N/m/s]
$c_y$	Constante de amortiguamiento correspondiente al modo de traslación longitudinal [N/m/s]
$c_z$	Constante de amortiguamiento correspondiente al modo de traslación vertical [N/m/s]
$c_\theta$	Constante de amortiguamiento correspondiente al modo de balanceo [Nm/rad/s]
$c_\psi$	Constante de amortiguamiento correspondiente al modo de cabeceo [Nm/rad/s]
$c_\phi$	Constante de amortiguamiento correspondiente al modo de torsión [Nm/rad/s]
$e_x$	Excentricidad en x respecto al eje z entre el centro de masas del sistema y el centro de área de la base de la fundación [m]
$e_y$	Excentricidad en y respecto al eje z entre el centro de masas del sistema y el centro de área de la base de la fundación [m]
$F_x$	Fuerza de excitación aplicada en el eje x [N]
$F_y$	Fuerza de excitación aplicada en el eje y [N]
$F_m$	Factor de amplificación dinámico [-]
$F_z$	Fuerza de excitación aplicada en el eje z [N]
$g$	Aceleración de gravedad [m/s <sup>2</sup> ]
$G$	Módulo de elasticidad en corte [N/m <sup>2</sup> ]
$h$	Distancia vertical entre el centro de masas del sistema y el centro de área de la base de la fundación [m]
$I_x$	Momento de inercia de área respecto al eje x [m <sup>4</sup> ]
$I_y$	Momento de inercia de área respecto al eje y [m <sup>4</sup> ]
$I_z$	Momento de inercia de área respecto al eje z [m <sup>4</sup> ]
$J_\theta$	Momento de inercia de masa respecto al eje x [kgm <sup>2</sup> ]
$J_\psi$	Momento de inercia de masa respecto al eje y [kgm <sup>2</sup> ]
$J_\psi$	Momento de inercia de masa respecto al eje z [kgm <sup>2</sup> ]



$k_x$	Constante de rigidez correspondiente al modo de traslación horizontal [N/m]
$k_y$	Constante de rigidez correspondiente al modo de traslación longitudinal [N/m]
$k_z$	Constante de rigidez correspondiente al modo de traslación vertical [N/m]
$k_\theta$	Constante de rigidez correspondiente al modo de balanceo [Nm/rad]
$k_\psi$	Constante de rigidez correspondiente al modo de cabeceo [Nm/rad]
$k_\phi$	Constante de rigidez correspondiente al modo de torsión [Nm/rad]
$L$	Mitad del largo de la fundación [m]
$m$	Masa [kg]
$m_b$	Masa desbalanceada [kg]
$M_\theta$	Momento con respecto al eje x [Nm]
$M_\psi$	Momento con respecto al eje y [Nm]
$M_\phi$	Momento con respecto al eje z [Nm]
$V$	Volumen [m <sup>3</sup> ]
$V_R$	Velocidad de propagación de la onda de Rayleigh [m/s]
$V_s$	Velocidad de propagación de la onda [m/s]
$\bar{x}$	Coordenada x del centro de gravedad del sistema [m]
$\bar{y}$	Coordenada y del centro de gravedad del sistema [m]
$\bar{z}$	Coordenada z del centro de gravedad del sistema [m]
$\gamma$	Peso específico [N/m <sup>3</sup> ]
$\Delta d$	Distancia entre cada geófono [m]
$\Delta t$	Tiempo que demora en llegar la onda desde un geófono a otro [s]
$\xi$	Factor de amortiguamiento [-]
$\rho$	Densidad [kg/m <sup>3</sup> ]
$\nu$	Módulo de Poisson [-]
$\varphi$	Desfase entre el desplazamiento y las fuerzas [rad]
$\omega_d$	Frecuencia natural amortiguada [rad/s]
$\omega_n$	Frecuencia natural [rad/s]
$\Omega$	Frecuencia de excitación de las fuerzas [CPM]

# CAPITULO 1

## Introducción

Las máquinas tales como motores, compresores, turbinas, bombas, ventiladores, etc. se utilizan para mantener en funcionamiento todas las grandes industrias. Estas máquinas se encuentran sometidas a vibraciones, las que, en caso de superar los valores permisibles, pueden producir daños afectando su funcionamiento. Lo anterior es más relevante en máquinas críticas, pues una falla en ellas puede provocar la detención de la planta por un tiempo indefinido, generando en muchos casos pérdidas millonarias. Por ello es necesario que al poner en operación la máquina, ésta no supere estos valores permisibles. ¿De qué manera? diseñando correctamente una fundación, usualmente de concreto, sobre la cual se montará la máquina y esta fundación depositarla sobre el suelo ya sea de manera superficial o empotrada. Antes de pensar en instalar una máquina, se debe analizar el sistema global máquina/fundación/suelo como el que se muestra en la figura 1.

Para el diseño de las fundaciones hay que considerar las características de la máquina (peso, tamaño, fuerzas que genera y sus frecuencias) y las características del suelo (principalmente el tipo de suelo, densidad y módulo de corte). Con ello es posible diseñar una fundación en términos de su peso, longitud, espesor, altura y forma.

Existen casos en que se ha diseñado la fundación considerando las características previamente mencionadas y, aun así, las vibraciones están sobre los valores permisibles [Prakash 1988 cáp. 13] [Todorovoska et al. 2006 a] [Vlad 2010]. Considerando que las características de la máquina son entregadas por el fabricante, la razón de las altas vibraciones puede deberse a las consideraciones del suelo, ya sea que el estudio geotécnico realizado no es el apropiado, como es el caso de [Prakash 1988 cáp. 13] o que los parámetros del suelo variaron debido a cambios en las condiciones climáticas, como ocurre en [Todorovoska et al. 2006 a].

Debido a lo mencionado anteriormente es que este estudio se enfoca en analizar un caso real en que ocurre algo similar a los anteriormente mencionados. Esto se realiza diseñando un banco de ensayos correspondiente a un modelo a escala del sistema máquina/fundación/suelo mediante el cual se analice si la teoría utilizada actualmente es adecuada para el diseño de fundaciones. En casos como los anteriormente descritos, además, se pretende analizar experimentalmente los diversos parámetros del suelo que puedan afectar al comportamiento dinámico de la máquina.

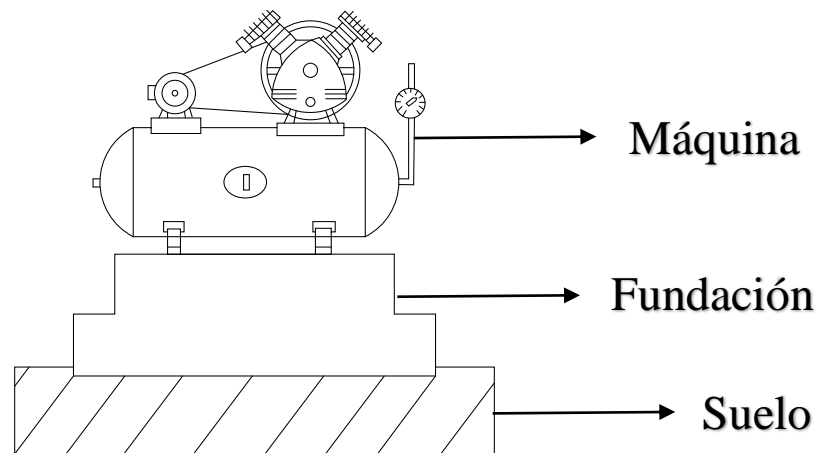


Figura 1. Sistema máquina/fundación/suelo

### 1.1. Definición del problema

La motivación principal para estudiar el diseño de fundaciones recae principalmente en un caso real correspondiente a una refinería de petróleo, en la cual se diseñó una fundación para un compresor de acuerdo con las recomendaciones correspondientes. El problema ocurrió una vez que se montó el compresor sobre la fundación y se puso en operación, ya que el sistema comenzó a vibrar de manera excesiva, además de presentar variaciones en la amplitud de las vibraciones entre las mediciones de un día y otro. La pregunta obvia entonces es ¿Por qué ocurre esto si se utilizó el cálculo y las normas recomendadas? Considerando los resultados obtenidos en [Miranda M. 2017] se descarta que el problema sea debido a un error en la memoria de cálculo del diseño de la fundación, es por ello por lo que en este estudio se desea diseñar a escala un sistema máquina/fundación/suelo para determinar si posibles cambios en las propiedades del suelo son los responsables de las altas vibraciones.

Se tienen 3 casos históricos que avalan que el comportamiento del suelo cumple un rol importante en el diseño de fundaciones para máquinas, por lo cual se hace más interesante el estudio.

El primer caso histórico trata sobre la interacción suelo-estructura para una construcción soportada por una fundación circular empotrada en un semi-espacio poroelástico [Todorovoska et al. 2006 a], Su objetivo principal es explorar la importancia de la presencia de agua en el suelo y su influencia en los cambios que ocurren en la frecuencia natural del sistema. Cabe mencionar que este trabajo fue motivado por el estudio realizado ese mismo año sobre los efectos de una fuerte lluvia en California, Estados Unidos [Todorovoska et al. 2006 b], que se presumía, fue la responsable de los cambios de frecuencia de un sistema suelo-estructura (una librería en este caso). Luego de realizar los estudios pertinentes y basándose en la teoría de la poroelasticidad de Biot, se obtuvieron los resultados que demostraron que los efectos de la saturación del suelo eran significativos en la rigidez horizontal y vertical de la fundación, para fundaciones empotradas.

El segundo caso histórico trata de un compresor, que fue instalado en una refinería de petróleo, el cual era soportado por una fundación de concreto tipo bloque diseñada de acuerdo con los requerimientos de la máquina, suministrados por el fabricante [Vlad 2010]. En cuanto a las consideraciones del suelo, el

diseñador se basó en un estudio geotécnico que se había desarrollado hace algún tiempo a una distancia de 60 metros de donde se colocaría la fundación; de acuerdo con este estudio, no existían infiltraciones de agua. El problema ocurrió cuando se puso en operación el compresor, ya que la fundación comenzó a vibrar excesivamente. Como primer paso para descubrir el origen del problema, se procedió a realizar un estudio geotécnico del terreno. Tal estudio entregó como resultados que existía presencia de infiltraciones de agua y el suelo se encontraba saturado, lo cual no fue considerado en el diseño. Luego de diversos estudios se concluyó que las vibraciones están fuertemente influenciadas por la presencia de agua, ya que algunas propiedades del suelo cambiaron debido a la presencia de agua bajo la fundación.

El tercer y último caso histórico en estudio consiste en un martillo de forja, en que el diseño de la fundación estaba basado en la información entregada por el proveedor de la máquina [Prakash 1988]. Antes de diseñar la fundación, las condiciones del suelo fueron obtenidas mediante un test in situ. Gracias a este estudio del suelo, una vez que el proveedor sugirió una fundación, se estimó que las condiciones del suelo no eran las adecuadas para ella, por lo tanto, se diseñó una nueva fundación considerando las condiciones reales del suelo. Luego del diseño e instalación, se monitoreó el comportamiento de la fundación y se observó que los valores de las vibraciones se encontraban dentro de los permisibles y que, en este caso, rediseñar la fundación fue lo adecuado. Por lo tanto, se puede concluir que es siempre conveniente hacer un estudio de suelos antes de diseñar una fundación. En este ejemplo, si se hubiesen seguido las recomendaciones del proveedor, el sistema máquina/fundación probablemente presentaría vibraciones no deseadas.

## 1.2. Estado del arte

Una vez definido el problema principal y la motivación que lleva a la realización de este estudio es necesario recopilar toda la información relevante que exista correspondiente al caso o que pueda llevar a su solución. Considerando que en este estudio se analiza un sistema máquina/fundación/suelo y se necesita diseñar un banco de ensayos a escala de este sistema para analizar la influencia del suelo sobre él, es que el estado del arte se separa en tres partes:

### 1.2.1. Teoría utilizada en el diseño de fundaciones para máquinas

En sus inicios el diseño de fundaciones se basaba en la experiencia y observación, es decir, no se realizaba un análisis del suelo y la máquina para cada caso particular. En general, varios modelos desarrollados en cuanto al diseño de fundaciones [Barkan 1962], [Vallabhan 1991] tienen su base en el modelo de Winkler [Winkler 1867], en el cual se idealizaba el suelo como un sistema de resortes elásticos, idénticos e independientes. En 1948 Tschebotarioff [Tschebotarioff 1948] desarrolló un método en que relacionaba el área de contacto fundación/suelo y una variable denominada “reducción de la frecuencia natural”, la cual definió como el producto entre la frecuencia natural de la fundación y la raíz cuadrada de la presión de contacto fundación/suelo. Este método solamente sirve para determinar la frecuencia natural en 4 tipos de suelos distintos, esta correlación se puede observar en la figura 2.

En 1962, Barkan [Barkan 1962] añadió el amortiguamiento viscoso en paralelo a los resortes al modelo de Pasternak, desarrollando el modelo conocido como modelo de Winkler-Voigt. Además, observó una discrepancia en las constantes de los resortes obtenidas para ensayos estáticos y ensayos dinámicos. Por lo tanto, introdujo el término de “masa en fase”, el cual postulaba que una cierta cantidad de masa de suelo se movía en fase con la fundación, es decir, como cuerpo rígido.

Los métodos de la frecuencia natural reducida y el modelo de Winkler-Voigt se consideran métodos empíricos. Posteriormente [Pasternak 1954] desarrolló un modelo en el cual incluyó el módulo de corte  $G$ . Este modelo se considera más apropiado que el anterior, ya que físicamente una de las razones de las vibraciones de la fundación es el contacto entre el suelo y la fundación, además de los esfuerzos de corte que se generan.

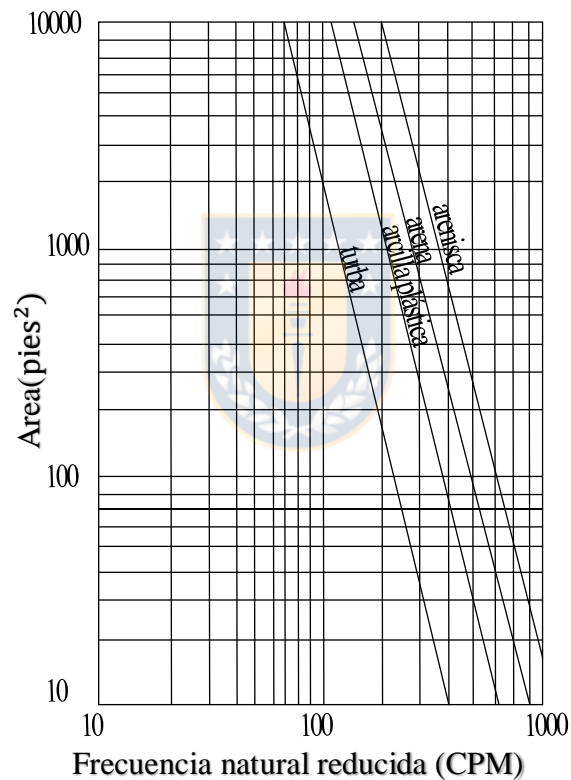


Figura 2. Correlación entre la frecuencia natural reducida y el área de la fundación

La teoría más aceptada y en la cual se basa actualmente el desarrollo de esta área tiene sus inicios en un estudio realizado por Lamb [Lamb 1904], el cual analiza las vibraciones causadas por cargas concentradas sobre un semi-espacio elástico, sólido, isótropo, homogéneo y semi-infinito. Esta teoría es conocida como “teoría del semi-espacio elástico”. Los parámetros necesarios para definir las propiedades del semi-espacio son el módulo de corte, el coeficiente de Poisson y la densidad.

Posteriormente Reissner [Reissner 1936] estudió la respuesta de un disco cilíndrico sometido a la aplicación de una carga vertical, considerando el suelo bajo la teoría de semi-espacio elástico. El mayor aporte de su estudio fue el descubrimiento de la existencia del amortiguamiento geométrico (también

llamado amortiguamiento por radiación), el cual se genera debido al contacto entre el suelo y la base de la fundación. Quinlan y Sung [Quinlan 1953] [Sung 1953] realizaron estudios para considerar los efectos que tenían los cambios en la distribución de esfuerzos de contacto sobre bases circulares en una superficie modelada por el semi-espacio elástico, los cuales producen un desplazamiento lineal o uniforme en la interfase. En estos estudios se presentaron resultados para vibraciones verticales y horizontales en bases circulares y rectangulares. Arnold y Bycroft [Arnold et al. 1955], [Bycroft 1956], estudiaron fundaciones de base circular sometidas a cargas horizontales y momentos. Awojovi [Awojovi 1965] desarrolló estudios para todos los modos de vibrar posibles sobre bases circulares rígidas en un semi-espacio elástico.

Un gran aporte fue el que hizo Hsieh [Hsieh 1962] al ser el primero en demostrar que una fundación cargada verticalmente, en un medio elástico, puede ser representada como un sistema de un grado de libertad masa-resorte-amortiguador. Posteriormente Lysmer demostró que los coeficientes de rigidez y de amortiguamiento del suelo se podían considerar como independientes de la frecuencia [Lysmer 1965]. Luco y Gazzetas [Luco 1974] [Gazzetas 1975] desarrollaron soluciones analíticas para distintos tipos de bases considerando el suelo como un semi-espacio estratificado. Finalmente, Gazzetas en 1991 [Gazzetas 1991] entrega un análisis completo de las constantes de rigidez y amortiguamiento del suelo para una fundación con cualquier tipo de geometría de su base.

Entre las normas utilizadas para el diseño de fundaciones se encuentran: [norma IS: 2974 parte 1] la cual entrega algunas recomendaciones de diseño generales; [norma ACI 351.3R-04] dirigida al diseño de fundaciones para máquinas reciprocantes. Del mismo modo la [norma IS: 2974 parte 2] para máquinas de impacto y [norma IS: 2974 parte 3] para máquinas rotatorias.

### 1.2.2. Estudios sobre el comportamiento del suelo

El suelo cumple un rol importante en el diseño de fundaciones para máquinas ya que es el encargado de entregar la rigidez y amortiguamiento al sistema. Es por ello por lo que se hace necesario estudiar los posibles cambios a los que pueden estar sujetas sus propiedades. Por ejemplo [Díaz et al. 2008] recopiló los estudios de diversos autores evaluando la respuesta del suelo frente a diferentes tipos de cargas dinámicas, los resultados de estos estudios los presenta en una tabla (página 4 del estudio mencionado). Otro estudio relevante es el realizado por [Dong et al. 2016] el cual analiza la influencia de la saturación del suelo en la velocidad de la onda de corte y el módulo de corte para pequeñas deformaciones, todo esto mediante análisis experimentales. De éstos se obtuvo que la velocidad de la onda de corte cambia con el contenido de agua en el suelo a medida que éste pasa desde un estado completamente saturado a uno seco. Además, se demuestra que el suelo arenoso presenta variaciones muy pequeñas del esfuerzo de corte máximo para suelos saturados, mientras que para limos o arcillas se pueden desarrollar cambios significativos para suelos totalmente secos.

Es importante conocer las diferencias entre dos casos a los cuales puede estar sujeta la arena, drenado y no drenado:

1. Caso drenado: El suelo puede cambiar de volumen, por lo tanto, si el suelo se encuentra sometido a vibraciones se puede deformar (densificar). En este caso, se considera el límite

volumétrico de deformación de corte cíclica (bajo esta amplitud de deformación no hay degradación del módulo de rigidez, sobre este valor, el valor de  $G$  disminuye).

2. Caso no drenado: El suelo no puede cambiar de volumen, y en presencia de agua, si el suelo está sometido a vibraciones significativas, se podría generar un exceso de presiones de poros donde sobre la amplitud de deformación cortante límite existe una degradación del módulo de corte.

### 1.2.3. Estudios experimentales que aporten al diseño del banco de ensayos

Para obtener resultados representativos sobre la influencia del suelo en el comportamiento dinámico de sistemas máquina/fundación/suelo es necesario dimensionar el banco de ensayos de manera adecuada, es por ello por lo que se estudia una serie de publicaciones al respecto. Entre ellas se tiene el estudio realizado por [Battacharya et al. 2010] en el cual analiza relaciones de similitud para escalar un modelo real de una turbina eólica soportada por un pilote. El principal aporte de este estudio para el banco de ensayos que se quiere diseñar es la utilización de las denominadas leyes de escalamiento, las cuales son el primer paso para cualquier estudio experimental. Estas leyes consisten principalmente en:

1. Definir grupos de ecuaciones adimensionales relevantes en el estudio. Es decir, que los parámetros que las constituyen sean importantes en el comportamiento del sistema.
2. Asegurarse que estos grupos adimensionales mantengan un valor constante entre el prototipo del banco de ensayos y el modelo real.

Con lo anterior es posible predecir el comportamiento dinámico que tendrá un modelo real frente a diversas excitaciones mediante un prototipo a escala de este modelo. Años más tarde, siguiendo el tema de prototipos a escala de turbinas eólicas soportadas por un pilote, se tiene los estudios de [Yu et al. 2015] y [Cui et al. 2016], de los cuales se desprende la importancia de asegurarse que las condiciones de borde del recipiente que soporta el prototipo no afecten a los resultados del estudio, ya que con ello se invalidarían para el caso real.

De estudios de mecánica de suelos realizados por [Terzagui 1955], se tiene que el comportamiento del suelo se ve afectado por una fundación hasta una profundidad de 2 veces el largo de la base de ésta. Por lo cual se tiene que, para un prototipo de fundación de largo  $L$ , la profundidad del suelo debe ser por lo menos  $2*L$  para que los resultados sean representativos.

### 1.3. Hipótesis

Considerando el caso real mencionado previamente, el cual se quiere analizar en este estudio, además de los antecedentes mencionados en el estado del arte presentado y tomando en cuenta que las características del sistema máquina/fundación (frecuencia, fuerzas, pesos y dimensiones) se mantienen constantes durante todas las mediciones que se realizaron en terreno, se presentan dos hipótesis que podrían explicar el comportamiento indeseable de la máquina:

1. La teoría que se utilizó para diseñar la fundación no era válida para las condiciones del terreno.
2. Existen cambios en las propiedades del suelo que influyen en el comportamiento del sistema. Estos cambios son debido a infiltraciones de agua.

#### **1.4. Objetivo general**

El objetivo general que se espera cumplir con el desarrollo de esta tesis es:

- 1) Establecer la influencia del suelo en la respuesta dinámica del sistema máquina/fundación de manera experimental, para así poder explicar la razón de las altas vibraciones en el caso de estudio.

#### **1.5. Objetivos específicos**

Los objetivos específicos que se espera cumplir con el desarrollo de esta tesis son:

- 1) Diseñar un modelo a escala del caso de estudio y realizar diversas mediciones (tanto en la parte dinámica del sistema como en las propiedades del suelo) que ayuden a cumplir con el objetivo general.
- 2) Mediante mediciones del suelo, evaluar la validez de la teoría utilizada para calcular su rigidez y amortiguamiento.
- 3) Evaluar el comportamiento del sistema máquina/fundación ante la presencia de infiltraciones de agua en el suelo.





## CAPITULO 2

### Marco teórico

Antes de cualquier estudio experimental es necesario definir la teoría con la cual se desarrolla el problema actualmente. Así, una vez obtenidos los resultados experimentales es posible compararlos con ésta y con ello, validar o refutar la teoría.

Para el caso en estudio, el marco teórico se divide en dos partes, una que abarca toda la parte dinámica del sistema máquina/fundación y otra que se encarga de todo lo relacionado al suelo.

#### 2.1. Análisis dinámico del sistema

Debido a que el sistema se encuentra sujeto a fuerzas y momentos dinámicos, es necesario realizar un análisis dinámico para determinar las amplitudes y frecuencias naturales de éste.

##### 2.1.1. Modelo propuesto y obtención de las ecuaciones del movimiento

La fundación se representa como un sistema de seis grados de libertad, por lo tanto, tiene seis modos de vibrar, tres de traslación y tres de rotación (ver figura 3):

1. Traslación a lo largo del eje x (horizontal).
2. Traslación a lo largo del eje y (longitudinal).
3. Traslación a lo largo del eje z (vertical).
4. Rotación alrededor del eje x (balanceo).
5. Rotación alrededor del eje y (cabeceo).
6. Rotación alrededor del eje z (torsión).

El modelo propuesto para el sistema posee las siguientes consideraciones:

1. El suelo se representa como un sistema de resortes y amortiguamientos equivalentes aplicados en el centro de área de la base de la fundación.
2. La excentricidad entre el centro de gravedad combinado de la máquina y fundación con el centro de área de la base no puede superar un 5% de las dimensiones de la base. Se compara la excentricidad y dimensiones para cada eje y si se cumple, es posible desprestigiar el efecto combinado de dos o más grados de libertad (permitiendo aplicar el modelo propuesto) [norma IS:2974 parte 1].

Gracias a estas consideraciones es posible separar el sistema de seis grados de libertad en dos sistemas de un grado de libertad y dos sistemas de dos grados de libertad. Los dos sistemas de un grado de libertad se muestran en la figura 4, en que se representan los grados de libertad de la traslación vertical

(lado izquierdo) y de la torsión (lado derecho). El segundo sistema mostrado en la figura 5 representa los grados de libertad de la traslación horizontal y el cabeceo. Finalmente, la figura 6 representa el sistema para los grados de libertad de la traslación longitudinal y el balanceo.

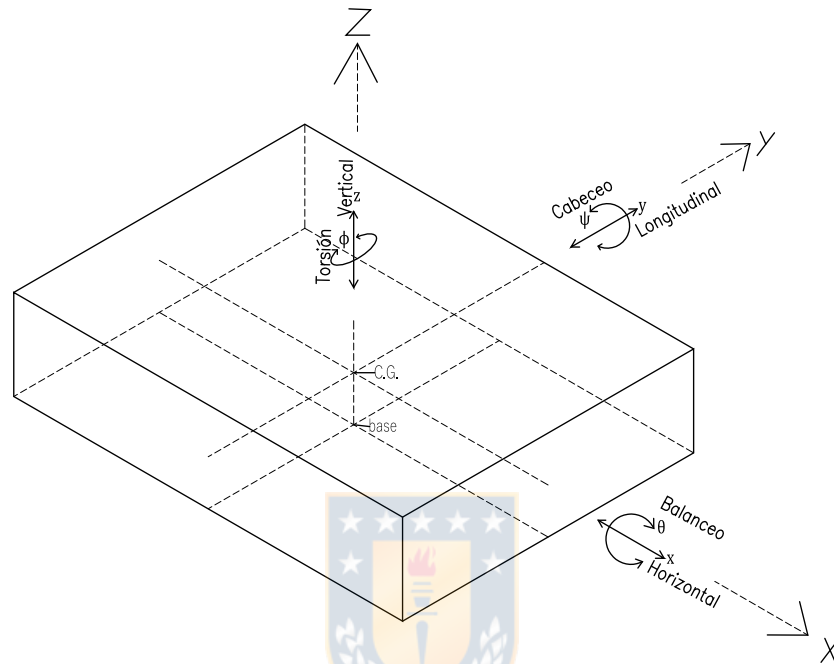


Figura 3. Modos de vibrar de una fundación

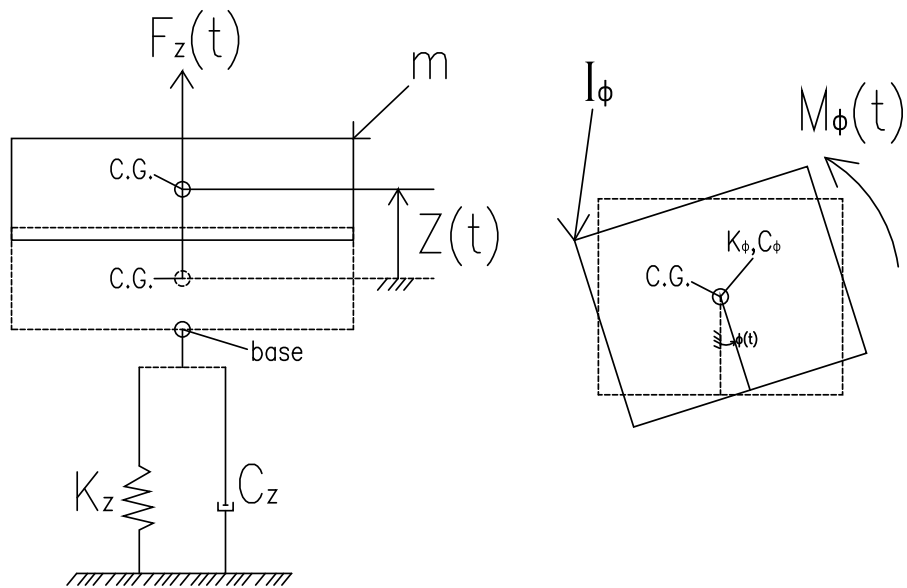


Figura 4. Sistema de dos grados de libertad desacoplados

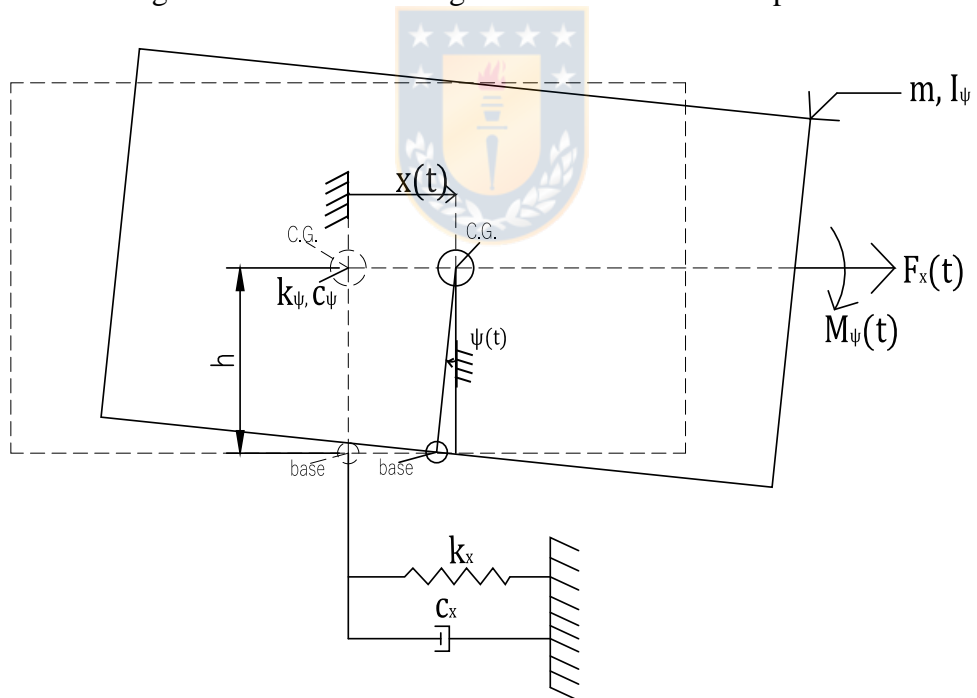


Figura 5. Sistema de dos grados de libertad acoplados

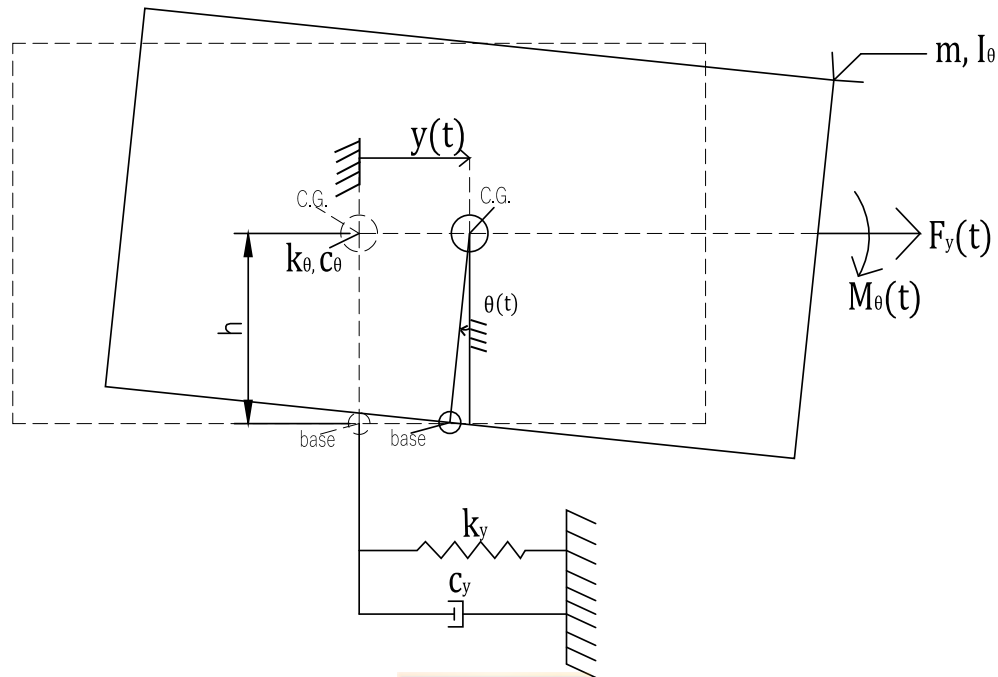


Figura 6. Sistema de dos grados de libertad acoplados

Luego, de la figura 4, se obtienen las ecuaciones del movimiento (1) y (2) correspondientes a los modos de vibrar vertical/torsión, las cuales debido a las consideraciones mencionadas anteriormente están desacopladas. Por lo tanto, se trabajan individualmente como sistemas de un grado de libertad.

De la figura 5, se obtienen las ecuaciones del movimiento (3) y (4), las cuales corresponden a los modos de vibrar horizontal/cabeceo. A diferencia del caso anterior están acopladas, por lo tanto, se debe resolver como un sistema de dos grados de libertad.

Del mismo modo, utilizando la figura 6 se obtienen las ecuaciones (5) y (6), las cuales están acopladas y corresponden a los modos de vibrar longitudinal/balaceo. Su resolución será la de un sistema de dos grados de libertad.

$$m\ddot{z} + c_z\dot{z} + k_z z = F_z \cos(\Omega t) \quad (1)$$

$$I_z\ddot{\phi} + c_\phi\dot{\phi} + k_\phi\phi = M_\phi \sin(\Omega t) \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_\psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x & -c_x h \\ -c_x h & c_x h^2 + c_\psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & -k_x h \\ -k_x h & k_x h^2 + k_\psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \sin(\Omega t) \\ M_\psi \sin(\Omega t) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_y & -c_y h \\ -c_y h & c_y h^2 + c_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_y & -k_y h \\ -k_y h & k_y h^2 + k_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_y \sin(\Omega t) \\ M_\theta \cos(\Omega t) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\quad (6)$$

### 2.1.2. Resolución de las ecuaciones del movimiento

A modo general, se tiene el sistema de un grado de libertad de la figura 7. La ecuación del movimiento que gobierna al problema es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin(\Omega t) \quad (7)$$

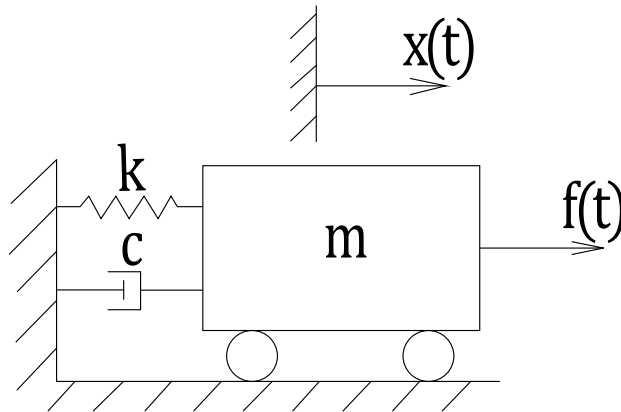


Figura 7. Sistema simple de un grado de libertad

En donde  $m$  representa la masa del sistema para los modos de traslación o la inercia de éste para los modos de rotación.  $c$  y  $k$  son las constantes de amortiguamiento y rigidez respectivamente.  $F_0$  es la amplitud de la fuerza o momento y  $\Omega$  es la frecuencia de excitación de  $F_0$ . La respuesta  $x(t)$  de la ecuación (8) es un desplazamiento en los casos de traslación y un giro para los casos de rotación. La solución general de la ecuación diferencial es de la forma:

$$x(t) = \underbrace{e^{-\xi\omega_n t} (C_1 \sin(\omega_d t) + C_2 \cos(\omega_d t))}_{\text{Solución homogénea}} + \underbrace{X_0 \sin(\Omega t - \varphi)}_{\text{Solución particular}} \quad (8)$$

Debido a que experimentalmente lo que se obtiene es la solución particular (respuesta estacionaria), solamente se resolverá ésta para el análisis teórico.

En la ecuación (9)  $\omega_n$  es la frecuencia natural del sistema y se obtiene de la raíz cuadrada del cociente entre la constante de rigidez y la masa (o inercia según sea el caso) del sistema. Además, se tiene la frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (9)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (10)$$

El factor de amortiguamiento  $\xi$  se define como la razón entre la constante de amortiguamiento  $c$  y el amortiguamiento crítico  $c_c$ . Teniendo que el amortiguamiento crítico  $c_c$  es el máximo valor de  $c$  para que el sistema pueda vibrar libremente.

$$\xi = \frac{c}{c_c} \quad (11)$$

$$c_c = 2\sqrt{km} \quad (12)$$

La solución particular representa la vibración estacionaria, mientras que la solución homogénea representa la vibración transiente. La amplitud y desfase de la parte estacionaria con respecto a la fuerza se muestran en las ecuaciones (13) y (14):

$$X_0 = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \frac{\Omega}{\omega_n}\right]^2}} \quad (13)$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{2\xi \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}\right) \quad (14)$$



Además, se define el factor de amplificación  $F_m$  como la relación existente entre la amplitud de las vibraciones de un sistema de un grado de libertad sometido a una excitación armónica y el desplazamiento estático.

$$F_m = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \frac{\Omega}{\omega_n}\right]^2}} \quad (15)$$

Por lo tanto, reemplazando la ecuación (15) en la ecuación (13) se tiene que la amplitud de la parte estacionaria es:

$$X_0 = F_m \frac{F_0}{k} \quad (16)$$

Con lo anterior es posible determinar la respuesta estacionaria para los modos de vibrar vertical y de torsión representados por las ecuaciones (1) y (2). Para los demás modos, al estar acoplados son

sistemas de más de un grado de libertad y se resuelven mediante el método directo, el cual sirve para determinar la respuesta estacionaria del sistema frente a una excitación armónica.

Para utilizar el método directo hay que reemplazar las ecuaciones (17) -(20) en las ecuaciones del movimiento

$$f_i(t) = F_i e^{j\Omega t} \quad (17)$$

$$x_i(t) = X_i e^{j\Omega t} \quad (18)$$

$$\dot{x}_i(t) = jX_i \Omega e^{j\Omega t} \quad (19)$$

$$\ddot{x}_i(t) = -\Omega^2 X_i e^{j\Omega t} \quad (20)$$

Con ello quedaría un sistema de N ecuaciones con igual número de incógnitas. Siendo N la cantidad de grados de libertad involucrados,  $X_i$  será la respuesta estacionaria para el modo correspondiente  $i$ . Por ejemplo, para los grados de libertad de traslación longitudinal y balanceo (ecuaciones (5) y (6)) se tiene:

$$F_y(t) = F_y e^{j\Omega t} \quad (21)$$

$$y(t) = Y e^{j\Omega t} \quad (22)$$

$$\dot{y}(t) = jY \Omega e^{j\Omega t} \quad (23)$$

$$\ddot{y}(t) = -\Omega^2 Y e^{j\Omega t} \quad (24)$$

$$M_\theta(t) = \Theta e^{j\Omega t} \quad (25)$$

$$\theta(t) = \Theta e^{j\Omega t} \quad (26)$$

$$\dot{\theta}(t) = j\Theta \Omega e^{j\Omega t} \quad (27)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\Omega^2 \Theta e^{j\Omega t} \quad (28)$$



Reemplazando las ecuaciones (21) -(28) en las ecuaciones (5) y (6) se obtiene:

$$-\Omega^2 Y m + c_y jY \Omega - c_y h j \Omega \Theta + k_y Y - k_y h \Theta = F_y \quad (29)$$

$$-\Omega^2 \Theta I_\theta - c_y h j Y \Omega + (c_y h^2 + c_\theta) j \Omega \Theta - k_y h Y + k_y h \Theta = F_y \quad (30)$$

Finalmente, resolviendo el sistema de ecuaciones (29) -(30) se obtiene la respuesta estacionaria  $Y$  correspondiente al grado de libertad longitudinal y la respuesta estacionaria  $\Theta$  correspondiente al balanceo.

Para determinar las frecuencias naturales del sistema se escriben las ecuaciones del movimiento de manera matricial, siendo  $[M]$  la matriz de masas,  $[C]$  y  $[K]$  las matrices de rigidez y amortiguamiento respectivamente, mientras que  $\{F\}$  es el vector de fuerzas de excitación:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (31)$$

Para que el sistema de ecuaciones homogéneo tenga soluciones diferentes a la trivial se debe cumplir que:

$$\text{Det}[Mr^2 + Cr + K] = 0 \quad (32)$$

En donde  $r$  son los valores propios, éstos deben ser complejos conjugados como se muestra en la ecuación (33)

$$r_i = -\alpha_i \pm j \beta_i \quad (33)$$

$$\alpha_i = \xi_i \omega_{n_i} \quad (34)$$

$$\beta_i = \omega_{d_i} \quad (35)$$

Para sistemas de más de un grado de libertad en que el amortiguamiento no es despreciable, la resolución de la ecuación (32) requiere utilizar algún programa de cálculo numérico. En este estudio el software utilizado es MATLAB, en el cual se obtienen las frecuencias naturales y modos de vibrar mediante el comando “eig”, el cual entrega los vectores y valores propios de las ecuaciones del movimiento (modos de vibrar y frecuencias naturales respectivamente).

### 2.1.3. Fuerzas de desbalanceamiento

Debido a que en el banco de ensayos construido las fuerzas generadas por el motor eléctrico son fuerzas de desbalanceamiento del rotor, se hace necesario explicar qué son dichas fuerzas y cómo se generan.

El desbalanceamiento “U” es una condición en que el centro de masa del rotor no coincide con el eje de rotación y se define como el producto entre la masa desbalanceada “m” y la distancia “r” entre esta masa y el eje de rotación. Este desbalanceamiento genera una fuerza centrífuga que se define como se muestra en la ecuación (36)

$$F_c = m_b * r * \omega^2 \quad (36)$$

En donde  $\omega$  es la velocidad de rotación del rotor en  $rad/s$ . La figura 8 representa un esquema de lo mencionado anteriormente.



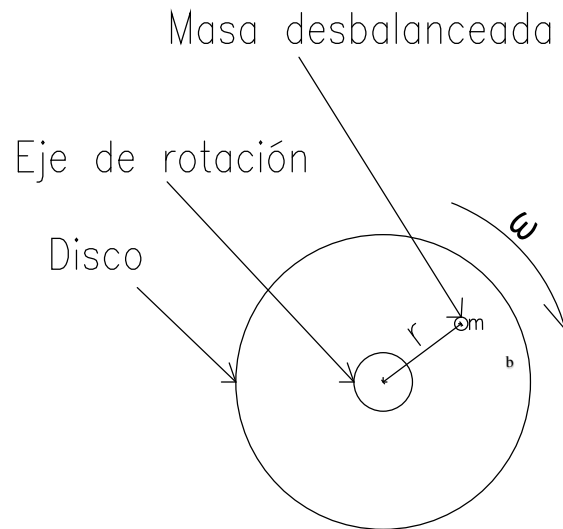


Figura 8. Esquema de un rotor desbalanceado

## 2.2. Aporte del suelo al sistema máquina/fundación

El suelo cumple un rol importante en el diseño de la fundación. Esto pues sus propiedades son determinantes en la rigidez y amortiguamiento que éste le entrega al sistema máquina/fundación, por ende, es necesario considerarlo correctamente para obtener la respuesta dinámica del sistema.

### 2.2.1. Parámetros relevantes del suelo en cuanto al diseño de la fundación

Los parámetros principales del suelo que son necesarios para diseñar la fundación son tres:

1. Coeficiente de Poisson " $\nu$ ": Parámetro adimensional que relaciona las deformaciones longitudinales que sufre un material en sentido perpendicular a la fuerza aplicada y las deformaciones longitudinales en dirección de la fuerza aplicada. Valores típicos del coeficiente de Poisson se muestran en la tabla 1 para distintos tipos de suelos.
2. Densidad " $\rho$ ": Se define como la relación entre la masa y volumen de un cuerpo. Tiene una gran importancia en el amortiguamiento del suelo.
3. Módulo de corte " $G$ ": Representa el cambio de forma que experimenta un material elástico (lineal e isótropo) cuando está sometido a esfuerzos cortantes. En el caso del suelo, estos esfuerzos se generan por el contacto entre éste y la base de la fundación. La tabla 2 muestra los valores del módulo de corte para diversos tipos de suelos.

Tabla 1. Rango de valores del coeficiente de Poisson de corte para distintos tipos de suelos [Arya 1981 cáp. 4]

Tipo de suelo	Módulo de Poisson [ ]
Arcilla	0,35-0,5
Arena	0,3-0,5
Grava	0,3-0,5

Tabla 2. Rango de valores del módulo de corte para distintos tipos de suelos [Arya 1981 cáp. 4]

Tipo de suelo	Módulo de corte [ $\text{N/m}^2$ ]
Arcilla dura	68992000-137788000
Arena suelta	34496000-103390000
Arena densa	68992000-137788000
Grava suelta	103390000-172284000
Grava densa	137788000-275576000

### 2.2.2. Suelos bajo la teoría del semi-espacio elástico

La teoría del semi-espacio elástico fue introducida por Lamb [Lamb 1904]. Posteriormente Reissner [Reissner 1936] realizó estudios considerando el suelo bajo esta teoría. Ella postula que el suelo sobre el que descansa la fundación es un semi-espacio elástico, infinito, sólido, isótropo y homogéneo. Gracias a esta teoría se introdujeron las constantes de rigidez y amortiguamiento al diseño de las fundaciones. Diversos autores se basaron en ella para realizar estudios teóricos y experimentales para determinar las constantes de rigidez y amortiguamiento del sistema. Finalmente, George Gazzetas [Gazzetas 1991] recopiló toda la información de sus estudios, obteniendo así un análisis completo de las constantes de rigidez y amortiguamiento del suelo para una fundación con cualquier tipo de geometría de su base.

Antes de comenzar con el cálculo de estos coeficientes, es importante definir algunos conceptos necesarios para entender el estudio de suelos. Como lo son, la rigidez y el amortiguamiento:

1. Rigidez: Se define como la capacidad que tienen los cuerpos para soportar esfuerzos sin tener grandes deformaciones. Se tienen constantes de rigidez para los modos de traslación y de rotación.
2. Amortiguamiento: Se define como la capacidad de disipación de la energía cinética de un sistema. Para el caso de fundaciones se tiene dos tipos de amortiguamiento:
  - a) Amortiguamiento geométrico: Representa la disipación de energía mediante la propagación de las ondas elásticas. Se genera por el contacto entre las áreas de la base de la fundación con el suelo.

- b) Amortiguamiento interno: Corresponde a la disipación de energía debido a la aplicación de esfuerzos. Este amortiguamiento es muy pequeño con relación al amortiguamiento geométrico. Por lo tanto, el geométrico será el que se utilice en el análisis del problema.

### 2.2.3. Constantes de rigidez

Para la obtención de las constantes de rigidez se utiliza la teoría propuesta por Gazzetas en 1991 [Gazzetas 1991]. La figura 9 representa la sección transversal de la base que está en contacto con el suelo y la figura 10 representa el empotramiento de la misma fundación, mientras que la tabla 3 entrega las ecuaciones necesarias para obtener las constantes de rigidez del suelo para los distintos grados de libertad del sistema. Una fundación es superficial cuando se encuentra depositada sobre la superficie del suelo y es una fundación empotrada cuando se encuentra enterrada en el suelo. Además, es necesario conocer la velocidad de la onda  $V_s$  y el parámetro de forma dinámico  $a_0$ , los cuales se definen como se muestra en las ecuaciones (37) y (38) respectivamente:

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (37)$$

$$a_0 = \frac{\omega B}{V_s} \quad (38)$$

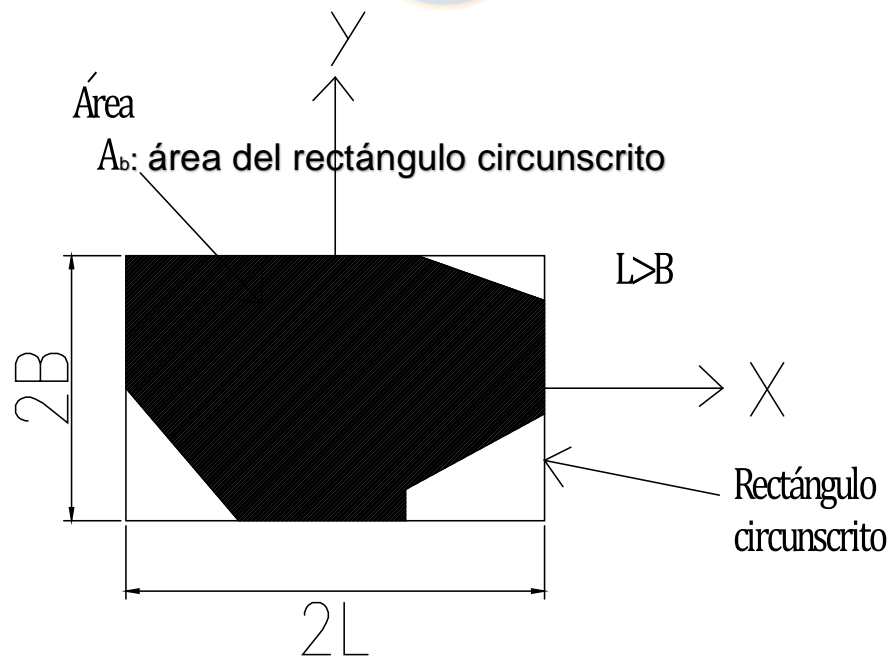


Figura 9. Sección transversal de la base en contacto con el suelo

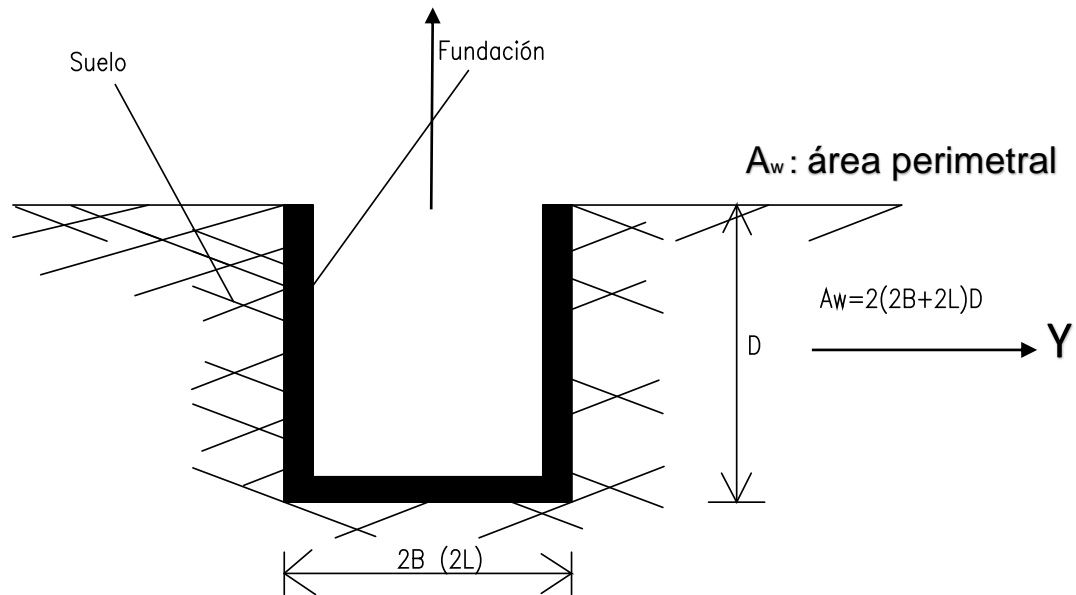


Figura 10. Representación del empotramiento de la fundación en el suelo

Tabla 3. Constantes de rigidez para los modos seis grados de libertad

Modo	Coefficiente de rigidez para una fundación depositada sobre el suelo "K"	Coefficiente de rigidez para una fundación enterrada en el suelo "k"
Horizontal	$K_y$ (igual a la longitudinal)	$k_y$ (igual a la longitudinal)
Longitudinal	$\frac{9LG}{2-v}$	$K_y \left( 1 + 0,15 \left( \frac{D}{B} \right)^{0,5} \right) \left( 1 + 0,52 \left( \left( \frac{h}{B} \right) \left( \frac{A_w}{L^2} \right) \right)^{0,4} \right)$
Vertical	$\frac{4,54LG}{1-v}$	$K_z \left( 1 + \left( \frac{1}{21} \right) \left( \frac{D}{B} \right) \right) (1 + 1,3) \left( 1 + 0,2 \left( \frac{A_w}{A_b} \right)^{\frac{2}{3}} \right)$
Balanceo	$\frac{2,9G}{1-v} I_x^{0,75}$	$K_\theta \left( 1 + 1,26 \left( \frac{D}{B} \right) \left( 1 + \left( \frac{D}{B} \right) \right) \right)$

Cabeceo	$\frac{3G}{1-\nu} I_y^{0,75}$	$K_\psi \left( 1 + 0,92 \left( \frac{D}{L} \right)^{0,6} \left( 1,5 + \left( \frac{D}{L} \right)^{1,3} \right) \right)$
Torsión	$3,5GI_z^{0,75} \left( \frac{I_z}{B^4} \right)^{0,2}$	$K_\phi * \zeta_1 * \zeta_2$ $\zeta_1 = 1 + 0,4 \left( \frac{j_s}{j_r} \right) \left( \frac{B}{D} \right)^{0,6}$ $\zeta_2 = 1 + 0,5 \left( \frac{D}{B} \right)^{0,1} \left( \frac{B^4}{I_z} \right)^{0,13}$ $j_s = \left( \frac{4}{3} \right) d(B^3 + L^3) + 4BLd(L+B)$ $j_r = \left( \frac{4}{3} \right) BL(B^2 + L^2)$

---

#### 2.2.4. Constantes de amortiguamiento

El procedimiento para la obtención de las constantes de amortiguamiento es similar al de las constantes de rigidez. Se utilizan las figuras 9 y 10, mientras que la tabla 4 entrega las ecuaciones necesarias para obtener las constantes de amortiguamiento del suelo.

Tabla 4. Constantes de amortiguamiento dinámico para los modos de traslación

Modo	Amortiguamiento geométrico para una fundación depositada sobre el suelo "C"	Amortiguamiento geométrico para una fundación enterrada en el suelo "c"
Horizontal	$\rho V_s A_b$	$C_x + \frac{13,6\rho V_s B d}{\pi(1-\nu)} + 4\rho V_s L d$
Longitudinal	$\rho V_s A_b$	$C_y + \frac{13,6\rho V_s L d}{\pi(1-\nu)} + 4\rho V_s B d$
Vertical	$\frac{3,4}{\pi(1-\nu)} \rho V_s A_b$	$C_z + \rho V_s A_w$

Balaceo	$\frac{3,4}{\pi(1-\nu)}\rho V_s I_x$	$c_\theta + \rho I_x \left(\frac{d}{B}\right) \left( \left(\frac{3,4}{\pi(1-\nu)} V_s\right) \left(\frac{d}{B}\right)^2 + 3V_s + V_s \left(1 + \left(\frac{d}{B}\right)^2\right) \right) \eta_\theta$
		$\eta_\theta = 0,25 + 0,65\sqrt{a_0} \left(\frac{D}{B}\right)^{-0,25}$
Cabeceo	$\frac{3,4}{\pi(1-\nu)}\rho V_s I_y$	$c_\theta$
Torsión	$\rho V_s I_z$	$c_\phi + 4\rho d \left( \frac{3,4}{3\pi(1-\nu)} V_s (B^3 + L^3) + V_s B L (L + B) \right) \eta_\phi$
		$\eta_\phi = \frac{a_0^2}{a_0^2 + 0,5}$

---

### 2.2.5. Obtención del módulo de elasticidad en corte

En la sección 2.2.1 se entregó una descripción del módulo de elasticidad en corte y se definió como uno de los parámetros del suelo más importantes en cuanto al diseño de fundaciones. Luego, como se puede observar en la sección 2.2.3 y 2.2.4, este parámetro es primordial para la obtención de las constantes de rigidez y amortiguamiento, es por ello por lo que a continuación se detalla el método que se utiliza para su obtención.

El método que se utiliza en este informe consiste en obtener la velocidad de propagación de las ondas de corte mediante geófonos triaxiales conectados a un sistema de adquisición de datos. La figura 11 representa un esquema de la disposición de los geófonos en terreno, en dicha figura, “Geo” representa el geófono, “Δd” la distancia entre los geófonos, “F” es la fuerza que se aplica para generar la onda (en este caso la fuerza es generada por un golpe producido al soltar una moneda a una altura de 50 cm), mientras que los subíndices 1, 2 y 3 son referidos a cada geófono.

Una vez que se produce el golpe, el sistema de adquisición de datos digitaliza la señal eléctrica analógica que producen los geófonos ante el movimiento generado por el paso de las ondas, luego se debe utilizar algún software para traspasar los datos del sistema de adquisición al computador, en este caso se utiliza LabView y MATLAB. El tipo de señal mostrada en el computador es como la que se presenta en la figura 12, en donde “Δt” representa el desfase de tiempo de la señal entre un geófono y otro.

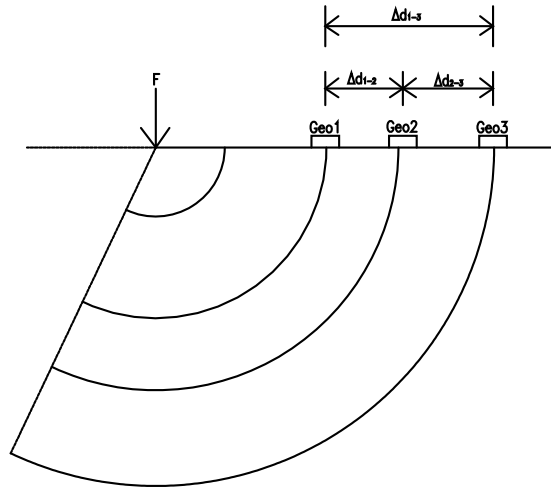


Figura 11. Esquema representativo de la disposición de los geófonos triaxiales en terreno

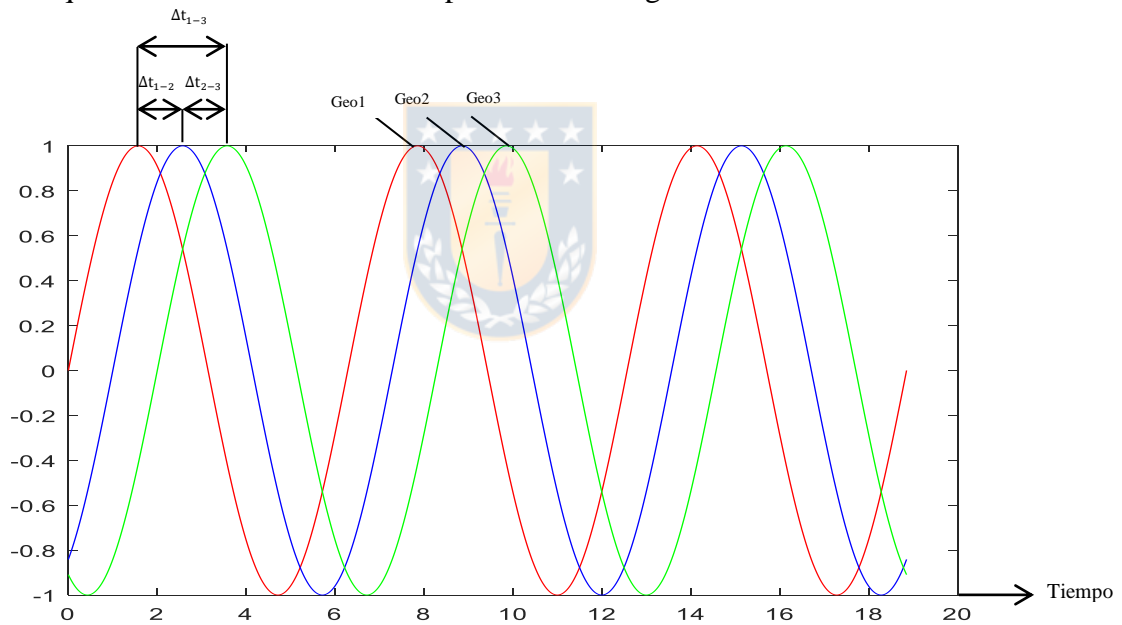


Figura 12. Representación de una señal típica obtenida mediante los geófonos

Conociendo todos los parámetros involucrados en las figuras 11 y 12 es posible obtener la velocidad de la onda de Rayleigh de la forma:

$$V_R = \frac{\Delta d}{\Delta t} \quad (39)$$

En donde:

$V_R$ : Velocidad de propagación de la onda de Rayleigh

$\Delta d$ : Distancia entre cada geófono

$\Delta t$ : Tiempo que demora en llegar la onda desde un geófono a otro.

Sabiendo que la velocidad de propagación de la onda  $V_S$  es un 90% de la velocidad de propagación de la onda de Rayleigh  $V_R$  [Mueller 2013], se obtiene el valor de  $V_S$  y, finalmente, el módulo de corte como se muestra en la ecuación (40)

$$G = V_S^2 * \rho \quad (40)$$

En donde:

$G$ : Módulo de elasticidad en corte del suelo

$\rho$ : Densidad del suelo

$V_S$ : Velocidad de propagación de la onda





## CAPITULO 3

### Diseño del banco de ensayos

Como se ha mencionado en los capítulos anteriores, se busca obtener resultados experimentales para un sistema máquina/fundación/suelo y compararlos con los que se obtienen utilizando la teoría mostrada en el capítulo 2. Por ello es necesario diseñar un banco de ensayos de este sistema, incluyendo las consideraciones adecuadas para que los resultados obtenidos sean realistas. El diseño del banco se compone principalmente de cinco partes:

1. Una máquina que sea capaz de generar fuerzas dinámicas.
2. Una fundación de concreto que soporte a la máquina.
3. Un relleno de suelo que sea acorde al problema (que entregue una rigidez adecuada al sistema máquina/fundación).
4. Un recipiente en el cual se deposite el suelo.
5. Un disco desbalanceado que se encargue de generar las fuerzas centrífugas para que el sistema vibre.



#### 3.1. Motor eléctrico trifásico

El dimensionamiento del banco de ensayos depende principalmente de las dimensiones y el peso de la máquina escogida. Para este estudio se escogió un motor eléctrico trifásico Siemens con rotor jaula de ardilla. En el Anexo 1 se pueden observar sus dimensiones y características principales. Para su elección se consideró el peso, dimensiones y posibilidades de control de velocidad.

Se requiere de un motor con el menor peso posible, para que se puedan minimizar las dimensiones de la fundación de concreto y, por ende, del recipiente del suelo. Con ello es más sencillo su traslado y construcción. El motor seleccionado es de aluminio y tiene un peso de 4,1 kg.

Las dimensiones en las que se puso énfasis al momento de elegir el motor corresponden principalmente a las de su base, ya que de ella depende el largo y ancho de la fundación.

Finalmente, se escogió un motor trifásico para que sea posible variar su frecuencia de excitación al acoplarle a éste un variador de frecuencias. El variador de frecuencias se escogió de acuerdo con la potencia del motor. Ya que éste tiene una potencia de 1/4 HP, se selecciona un variador de frecuencias de 1/2 HP (el variador debe ser de igual o mayor potencia que el motor)

#### 3.2. Fundación

Considerando el estudio realizado por [Battacharya et al. 2010] se tiene que se pueden utilizar las denominadas leyes de escalamiento para diseñar un banco de ensayos a escala de un caso de estudio real y mediante esto, predecir el comportamiento que tendría este último. En este estudio no se quiere

replicar a cabalidad un caso real, aunque sí se utilizarán las leyes entre el caso de la refinería de petróleo mencionado en la definición del problema (pág. 2) y el banco de ensayos que se está diseñando para obtener órdenes de magnitud coherentes en este último (en cuanto a fuerzas, dimensiones, etc.) y así poder fundamentar los resultados obtenidos. La tabla 5 muestra las dimensiones de la fundación del banco de ensayos y del caso real. Cabe destacar que la fundación real es tipo bloque (se compone de una base y un bloque, ambos de concreto) y para el banco de ensayos solo se utilizará una base de concreto, esto pues en ambos casos, las dimensiones de la base son las que determinan la cantidad de relleno de suelo que se debe utilizar.

Tabla 5. Dimensiones base de la fundación para el caso real y banco de ensayos [mm]

Dimensión	Banco de ensayos [mm]	Base fundación real [mm]	Escala [-]
Largo	250	4800	1:19,2
Ancho	250	4800	1:19,2
Alto	100	1750	1:17,5

De acuerdo con estas dimensiones se analiza que las relaciones adimensionales que se presentan en la tabla 6 se mantengan casi constantes tanto para el banco de ensayos como para la fundación real. De la tabla 6 y de la tercera columna de la tabla 5 se observa que se mantienen casi constantes tanto la relación de pesos máquina/fundación como la relación entre las dimensiones de la fundación. Por lo tanto, es correcto utilizar una fundación de concreto de  $250 \times 250 \times 100 \text{ mm}^3$ .

Tabla 6. Relaciones adimensionales para escalar al caso real [-]

Relación	Banco de ensayos [-]	Fundación real [-]
Largo/Ancho fundación	1	1
Largo/Alto fundación	2,5	2,74
Peso Fundación/máquina	3,66	3,72

Las figuras 13 y 14 muestran la fundación de concreto construida, sola y con el motor instalado respectivamente.



Figura 13. Fundación de concreto utilizada en el banco de ensayos.



Figura 14. Motor eléctrico trifásico montado en la fundación.

### 3.3. Relleno de arena fina

Como relleno de suelo se escogió arena fina, ya que posee buenas propiedades para soportar el sistema máquina/fundación, luego se debe determinar la cantidad necesaria para el banco de ensayos. Para esto se utiliza el estudio realizado por [Terzagui 1955], del cual se obtiene que la profundidad de la arena desde la base de la fundación debe ser al menos 2 veces la longitud mayor de esta última. Por lo tanto, sabiendo que el largo de la fundación es de 250 mm y considerando un empotramiento de un 90% de la base en el suelo, se necesita al menos 590 mm de profundidad de arena. Para las dimensiones horizontales, se considera que en la dirección de las fuerzas se necesita que exista un espacio de arena de al menos una vez la longitud de la base, mientras que para la dirección en que no existen fuerzas, con un 60% de la longitud de la base no habría problemas.

En cuanto a la preparación del suelo, lo primero consiste en clasificar el material, para lo cual se realiza una medición de la granulometría. Además, se calcula la densidad máxima y mínima que se puede obtener de la arena, éstas se calculan pesando una muestra de arena y depositándola en un recipiente de volumen conocido, luego se utiliza la ecuación (41).

Se obtuvo como resultado que la arena fina a utilizar posee un 1% de finos por cual es una arena limpia y bien graduada, mientras que las densidades máximas y mínimas se pueden observar en la tabla 7.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (41)$$

Tabla 7. Densidad máxima y mínima de la arena fina a utilizar

	Densidad [ <b>kg/m<sup>3</sup></b> ]
Máxima	1782
Mínima	1458

Una vez conocidas las densidades máxima y mínima de la arena, se puede preparar ésta para el banco de ensayos con una densidad conocida, para ello se utiliza la densidad relativa, la cual se define como se muestra en la ecuación (42).

$$D_r = \frac{\rho_{seca} - \rho_{mín}}{\rho_{max} - \rho_{mín}} \quad (42)$$



Para el banco de ensayos, se prepara una arena con densidad relativa de un 50%, correspondiente a 1620 kg/m<sup>3</sup> que se controla utilizando el denominado “pluviation method” el cual consiste en el sistema mostrado en la figura 15, este sistema consta de un contenedor de altura constante y abertura variable (la densidad que entrega depende de su abertura), con ello se replica el depósito de un refinado granular.



Figura 15. “*Pluviation method*” para obtener una densidad controlada.

### 3.4. Cajón de acero

El material escogido para diseñar el recipiente sobre el cual se almacenará la arena corresponde a un acero ASTM A36. El cajón se construye a base de planchas de acero de 3 mm de espesor soldadas en sus extremos y reforzadas con perfil ángulo laminado, esto pues el cajón debe soportar aproximadamente 550 kg sin deflectarse o romperse. Las dimensiones de éste se escogen de acuerdo con la cantidad necesaria de arena que se necesita. Las dimensiones del cajón se pueden observar en la tabla 8 y su plano de fabricación se muestra en el Anexo 2, mientras que la figura 16 muestra el cajón ya fabricado. De la tabla 8 se observa que de acuerdo con las dimensiones del cajón se cumple con la cantidad mínima de arena que se debe utilizar para obtener resultados representativos (tal que las paredes del cajón no afecten a las condiciones de borde).

Tabla 8. Dimensiones internas cajón y cantidad mínima de arena necesaria [mm]

Dimensión	Longitud cajón [mm]	Cantidad mínima de arena [mm]
Largo	850	750
Ancho	600	550
Alto	850	590



Figura 16. Cajón de acero que se utiliza como recipiente del sistema.

### 3.5. Disco desbalanceado

Se diseña el disco mostrado en la figura 17, el cual consta de 12 agujeros que se encuentran a 2,7 cm de distancia del centro del disco, se perforó de este modo para poder desbalancearlo de manera controlada (conociendo el desbalanceamiento que se está generando). Posteriormente se monta el disco desbalanceado en el eje del motor eléctrico y se procede a encender el motor para que se generen las fuerzas. Cabe mencionar que, una vez montado el disco en el motor eléctrico, se procedió a balancearlo hasta asegurarse que el desbalanceamiento residual del disco perforado sea despreciable en comparación al desbalanceamiento  $U$  debido a la masa desbalanceada añadida.

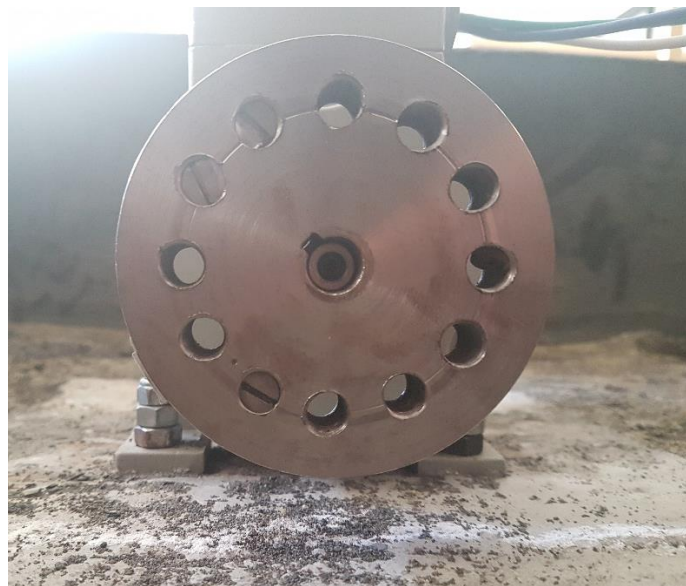


Figura 17. Disco desbalanceado que genera las fuerzas centrífugas

## CAPITULO 4

### Banco de ensayos en operación y metodología experimental

En el capítulo 3 se presentaron las partes que componen el banco de ensayos del sistema máquina/fundación/suelo que se diseñó, mientras que en este capítulo se pondrá en operación dicho banco, realizando el estudio de suelos y análisis de vibraciones para cumplir con el objetivo del trabajo.

La figura 18 muestra el cajón de acero con el variador de frecuencias que está conectado al motor eléctrico. Éste puede hacer trabajar el motor entre 0 y 50 Hz



Figura 18. Banco de ensayos con el variador de frecuencias conectado.

En la figura 19 se puede observar los acelerómetros horizontal y vertical instalados en el motor, con los cuales se obtienen las vibraciones del motor en ambos ejes. Por otra parte, la figura 20 muestra la disposición de los geófonos triaxiales que se utilizan para obtener la velocidad de propagación de la onda de corte, en este solo se estudian dos ejes con los geófonos, el vertical (Eje Z) y el horizontal (válido para los ejes X e Y). Estos geófonos están conectados a un sistema de adquisición de datos, el cual por su parte está conectado a una laptop con un programa creado en LabView para observar y guardar en el computador las ondas medidas por cada geófono.

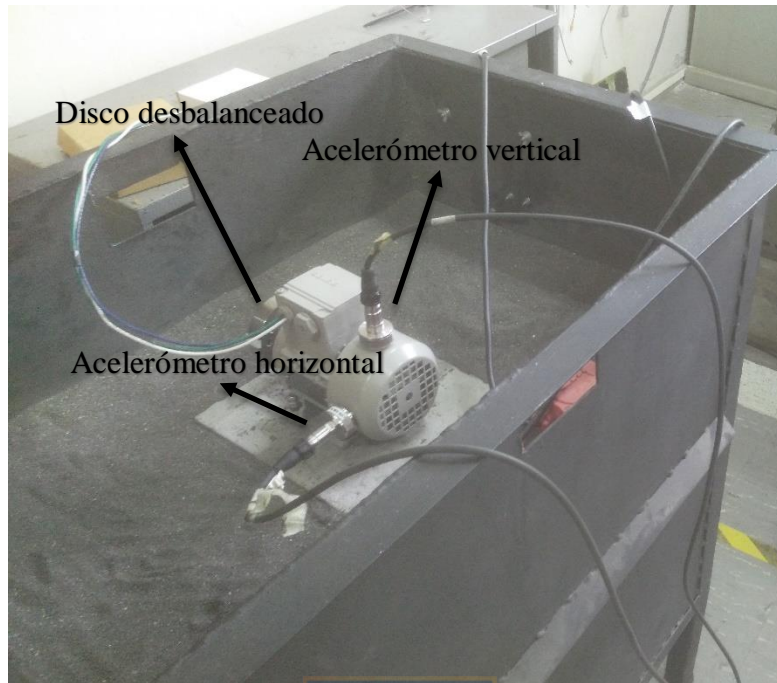


Figura 19. Motor eléctrico desbalanceado con acelerómetros conectados

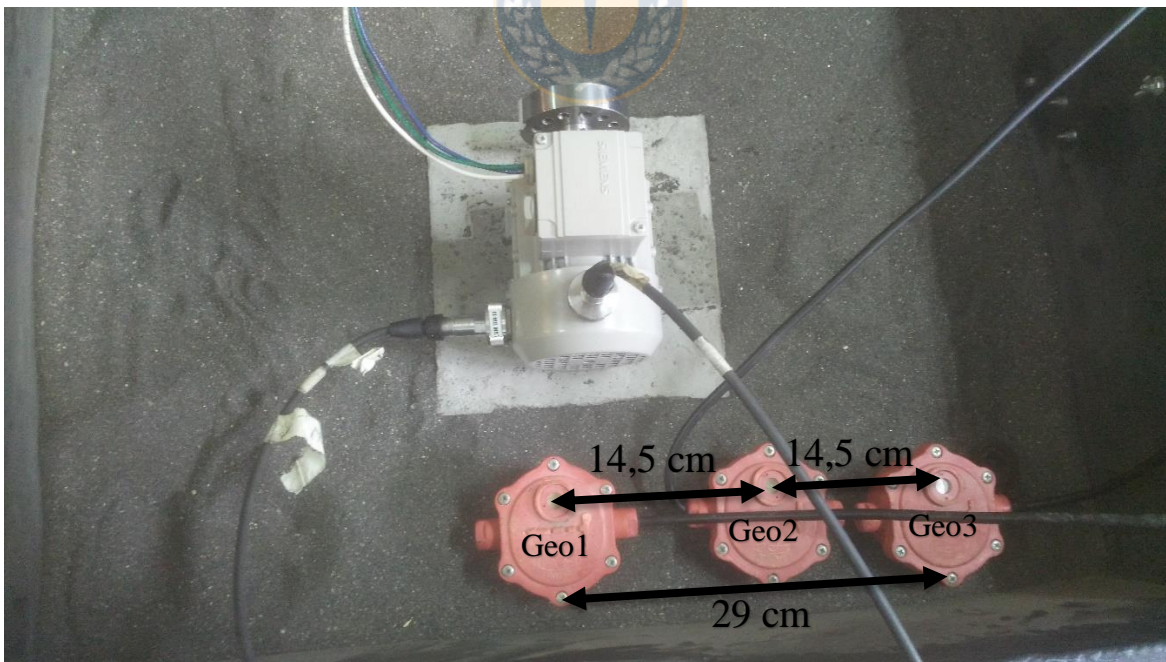


Figura 20. Disposición de los geófonos.



Debido a que se utiliza un variador de frecuencias, para cada frecuencia se tienen distintos valores de las variables en las ecuaciones del movimiento. A continuación, se presenta el desarrollo para el caso particular en que el rotor está girando a 50 Hz para poder ejemplificar de manera clara y precisa el proceso que se utiliza para obtener los resultados.

#### 4.1. Geometría del problema y cálculo de los momentos de inercia

Utilizando los planos del Anexo 1 y la geometría de la fundación mostrada en la tabla 5 y figuras 21 y 22, se conocen todas las dimensiones del sistema máquina/fundación. Con ello es posible determinar los momentos de inercia y los centros de gravedad del sistema. Para ello es necesario conocer la masa de cada elemento. El peso del motor se obtiene del Anexo 1 y es 4,1 kg, la masa del disco se obtuvo midiéndola con una balanza y es de 0,86 kg, mientras que para obtener la masa de la fundación se utiliza la ecuación (43). De aquí en adelante el subíndice 1 es referido a la fundación, 2 referido al motor y el 3 es referido al disco.

$$m_1 = \rho_1 V_1 \quad (43)$$

En donde:

$m_1$ : masa del elemento 1

$\rho_1$ : densidad del elemento 1

$V_1$ : volumen del elemento 1



Por lo tanto, utilizando la ecuación (43) y sabiendo que la densidad del hormigón es 2400 kg/m<sup>3</sup> se tiene:

$$m_1 = 2400 * 0,25 * 0,25 * 0,1 = 15[\text{kg}]$$

Luego, para determinar los momentos de inercia de masa de cada elemento respecto a su centro de gravedad se utiliza la tabla 22 del anexo 3, así:

$$J_{x1} = \frac{1}{12} * 15 * (0,25^2 + 0,1^2) = 0,0906[\text{kgm}^2]$$

$$J_{y1} = \frac{1}{12} * 15 * (0,25^2 + 0,1^2) = 0,0906[\text{kgm}^2]$$

$$J_{z1} = \frac{1}{12} * 15 * (0,25^2 + 0,25^2) = 0,1562[\text{kgm}^2]$$

$$J_{x2} = \frac{1}{12} * 4,1 * (0,18^2 + 0,16^2) = 0,0198[\text{kgm}^2]$$

$$J_{y2} = \frac{1}{12} * 4,1 * (0,12^2 + 0,16^2) = 0,0137[\text{kgm}^2]$$

$$J_{z2} = \frac{1}{12} * 4,1 * (0,18^2 + 0,12^2) = 0,016[\text{kgm}^2]$$

$$J_{x3} = \frac{1}{2} * 0,86 * \left(\frac{0,09}{2}\right)^2 = 0,000871[\text{kgm}^2]$$

$$J_{y3} = \frac{1}{4} * 0,86 * \left(\frac{0,09}{2}\right)^2 = 0,000435[\text{kgm}^2]$$

$$J_{z3} = \frac{1}{4} * 0,86 * \left(\frac{0,09}{2}\right)^2 = 0,000435[\text{kgm}^2]$$

Del mismo modo, utilizando la tabla 23 del Anexo 3 se obtienen los momentos de inercia de área (con respecto a los 3 ejes principales) de la base de la fundación que está en contacto con el suelo.

$$I_x = \frac{1}{12}(0,25 * 0,25^3) = 0.00033 [\text{m}^4] \quad I_y = \frac{1}{12}(0,25 * 0,25^3) = 0.00033 [\text{m}^4]$$

$$I_z = I_x + I_y = 0.00066[\text{m}^4]$$

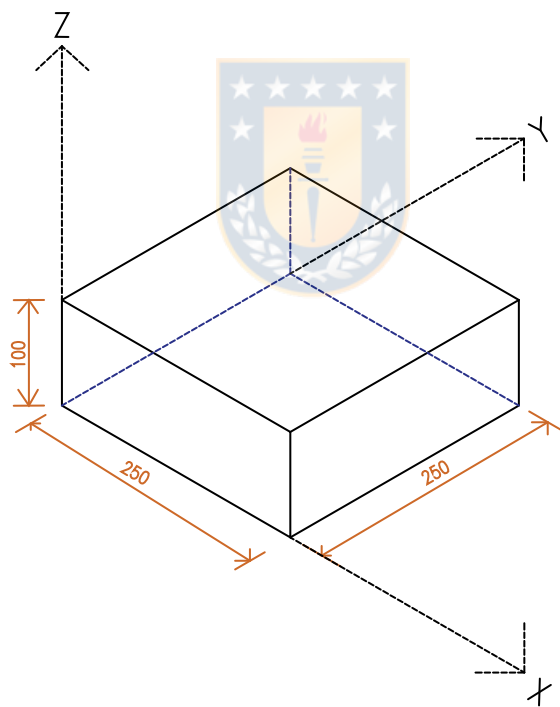


Figura 21. Dimensiones de la fundación del sistema

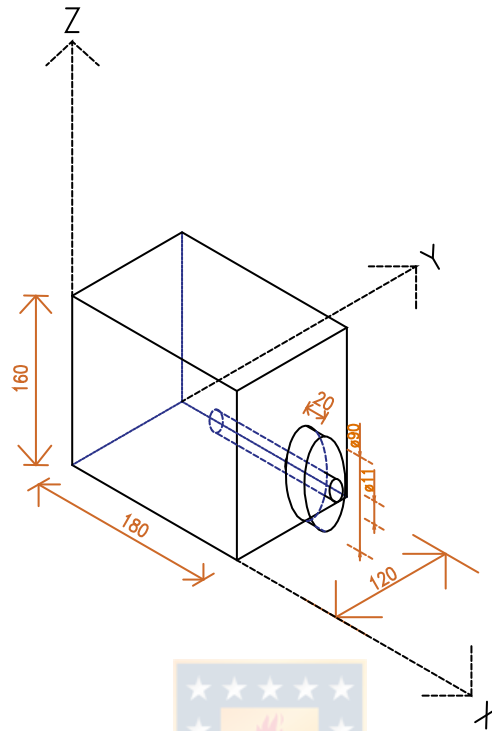


Figura 22, Motor eléctrico representado como un paralelepípedo para la obtención de su inercia y centro de gravedad

Para obtener los momentos de inercia de masa con respecto al centro de gravedad del sistema máquina/fundación es necesario obtener el centro de masa del sistema, para ello se utilizan las ecuaciones (44) –(46)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i * x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (44)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i * y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (45)$$

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i * z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (46)$$

Con:

$x, y, z$ : coordenadas del centro de gravedad de cada elemento

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ : coordenadas del centro de gravedad del sistema máquina/fundación

Las coordenadas del centro de gravedad de cada elemento se obtienen analizando las figuras 21 y 22. Así, se tiene que el centro de gravedad del sistema es:

$$\bar{x} = 0,1293[\text{m}] \quad \bar{y} = 0,125[\text{m}] \quad \bar{z} = 0,0781[\text{m}]$$

Luego, para determinar los momentos de inercia de masa con respecto al centro de gravedad del sistema, se trasladan las inercias de cada elemento al centro de masa del sistema máquina fundación como se muestra en la tabla 22 del anexo 3, así:

$$J_{\theta} = 0,1589 [\text{kgm}^2] \quad J_{\psi} = 0,1606 [\text{kgm}^2] \quad J_{\phi} = 0,1809[\text{kgm}^2]$$

#### 4.2. Fuerzas de excitación

Primero que todo se determina la fuerza centrífuga que se genera para una velocidad de rotación de 3000 CPM ( $314,16 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ), sabiendo que la masa desbalanceada es de 6,8 gramos y se encuentra a una distancia de 2,7 cm del eje de rotación. Se utiliza la ecuación (36) obteniendo para este caso particular una fuerza centrífuga con un módulo de 18 N.

La figura 23 muestra el centro de gravedad del sistema y el centroide de área de la base de la fundación, mientras que la figura 24 representa la fundación con las fuerzas centrífugas generadas por el disco desbalanceado. De acuerdo con las figuras 23 y 24, se determinan las distancias entre el punto de aplicación de las fuerzas con el centro de gravedad del sistema máquina/fundación y el centro de área de la base. Estas distancias se muestran en la tabla 9.

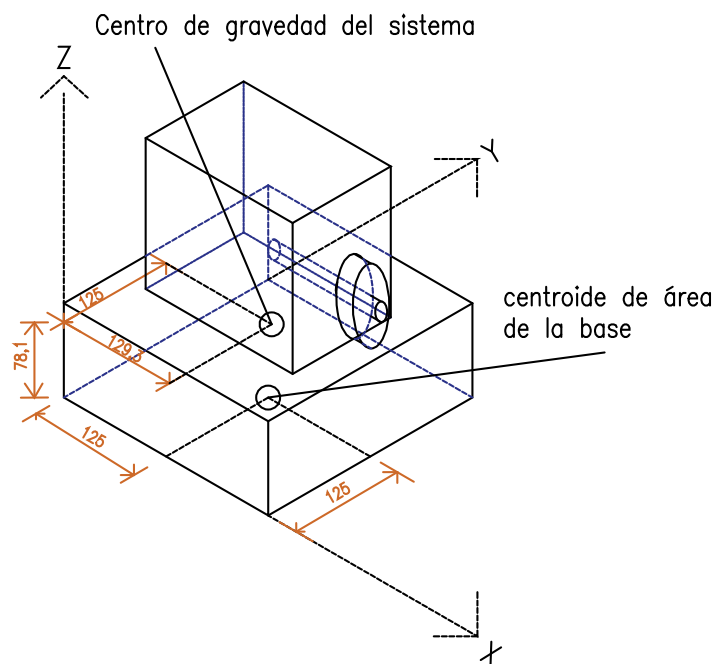


Figura 23. Centro de gravedad del sistema y centroide de área de la base

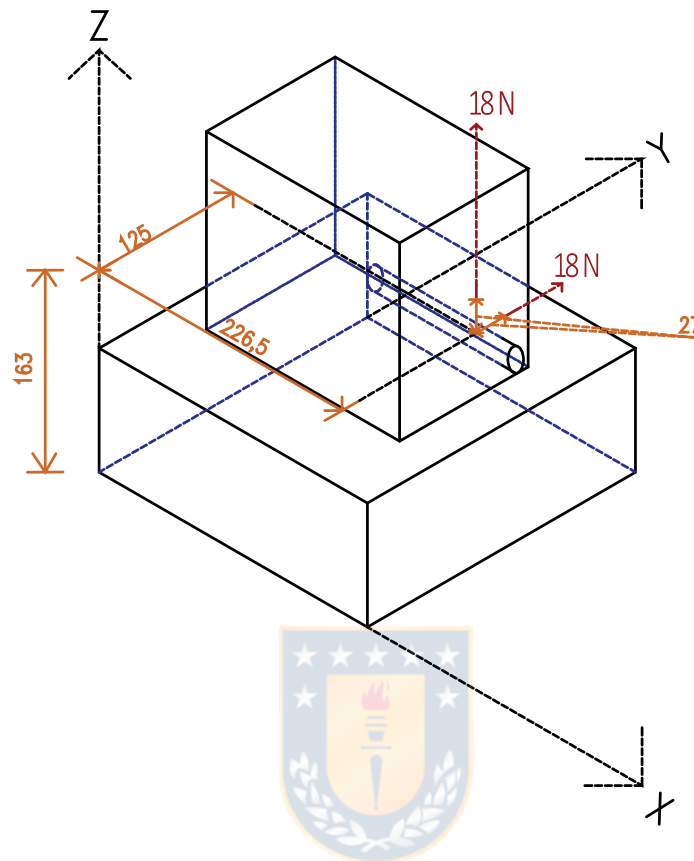


Figura 24. Punto de aplicación de las fuerzas dinámicas

Tabla 9. Distancias entre el centro de gravedad del sistema máquina/fundación y las fuerzas que genera el disco desbalanceado

Eje	Distancia [m]
X	0,0972
Y	0
Z	0,0849

Finalmente, se trasladan las fuerzas dinámicas al centro de gravedad del sistema máquina/fundación, considerando que, al trasladar las fuerzas, éstas generan momentos debido a la distancia entre ambos.

Las fuerzas y momentos dinámicos con respecto al centro de gravedad del sistema máquina/fundación se muestran en las tablas 10 y 11 respectivamente. Cabe mencionar que la situación presentada en la figura 24 es una aproximación a un caso más desfavorable que el real, pues los máximos en las direcciones Y, Z no ocurren simultáneamente.

Tabla 10. Fuerzas que genera el desbalanceamiento del disco sobre el centro de masas del sistema

Movimiento	Fuerza [N]
Horizontal	0
Longitudinal	18
Vertical	18

Tabla 11. Momentos que genera el disco desbalanceado sobre el centro de masas del sistema

Movimiento	Momento [Nm]
Balaceo	1,528
Cabeceo	1,75
Torsión	1,75

### 4.3. Parámetros del suelo

Como se mencionó en el capítulo 4 es necesario determinar la densidad, el módulo de Poisson y el módulo de elasticidad en corte del suelo para poder obtener las constantes de rigidez y amortiguamiento del suelo.

Para el módulo de Poisson se trabaja con un valor de 0,3 el cual se encuentra dentro del rango mostrado en la tabla 1, para el propósito de este informe no es relevante si el módulo de Poisson es 0,3 o 0,5 por lo que cualquier valor dentro del rango es adecuado. La densidad del suelo se determinó en la sección 3.3 y es de 1620 kg/m<sup>3</sup>. Por otro lado, la obtención del módulo de corte requiere mayor desarrollo por lo cual se presenta a continuación.

#### 4.3.1. Obtención del módulo de elasticidad en corte

Con el motor apagado para evitar el ruido que se genera en las ondas, se deja caer una moneda sobre la arena a una altura de 50 cm, mientras se miden las ondas con los geófonos triaxiales mostrados en la figura 20. A partir de ellas se obtiene la velocidad de propagación de Rayleigh como se muestra en la sección 2.2.5. La figura 25 muestra las ondas de Rayleigh captadas por los tres geófonos en la dirección horizontal (se consideran iguales tanto para el eje X como el eje Y), mientras que la figura 26 muestra lo mismo para la dirección vertical.

De las figuras 25 y 26 se puede obtener el desfase de tiempo que hay entre la llegada de la onda a un geófono y otro. Además de la figura 20 se tiene la distancia entre cada geófono y con ello es posible determinar la velocidad de la onda utilizando la ecuación (39); y finalmente, el módulo de elasticidad en corte con la ecuación (40). Los resultados se muestran en las tablas 12 y 13, mientras que la tabla 14 muestra el módulo de elasticidad en corte tanto horizontal como vertical.

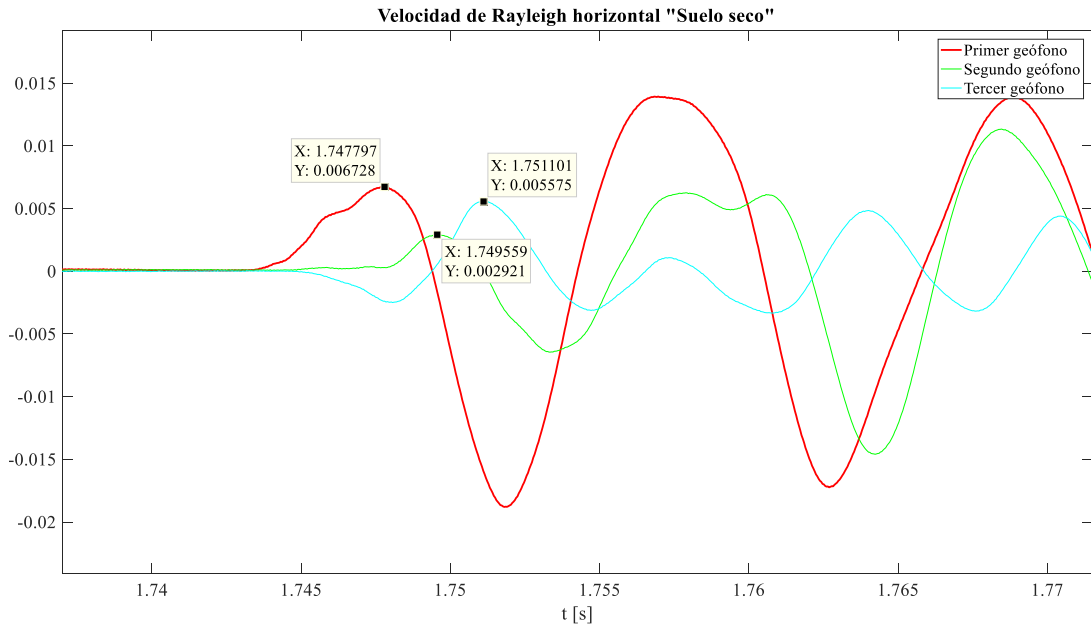


Figura 25. Ondas horizontales captadas por los geófonos

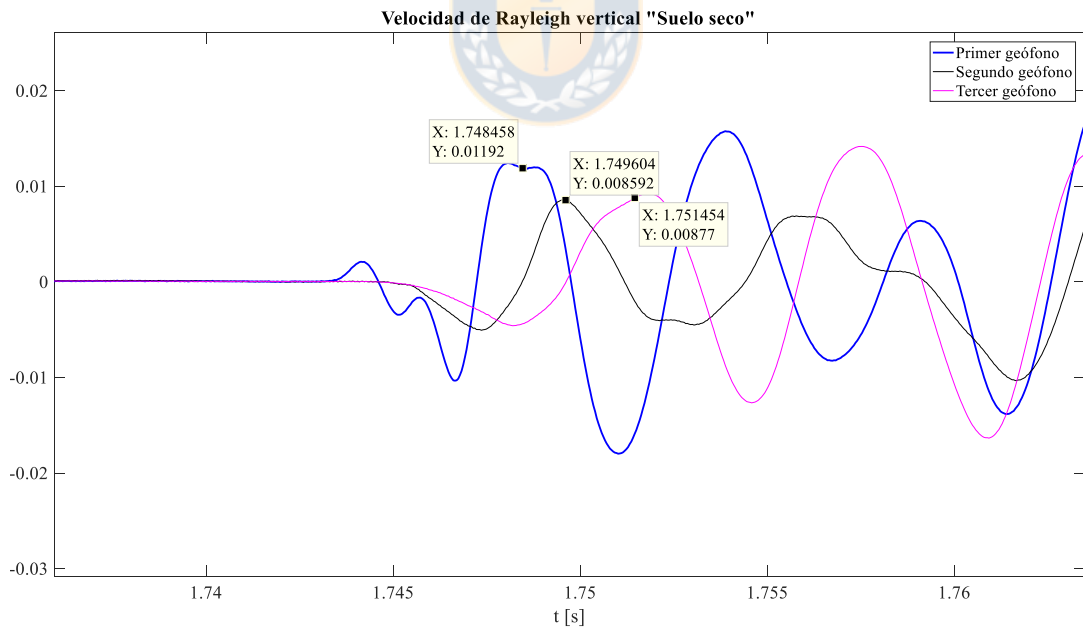


Figura 26. Ondas verticales captadas por los geófonos

Tabla 12. Velocidad de propagación de la onda horizontal

Combinación de geófonos	Distancia [m]	$\Delta t$ [s]	Velocidad de la onda [m/s]
Geo1-Geo2	0,145	$1,762 \times 10^{-3}$	82,29
Geo2-Geo3	0,145	$1,542 \times 10^{-3}$	94,03
Geo1-Geo3	0,29	$3,00 \times 10^{-3}$	96,7
Promedio			91,01

Tabla 13. Velocidad de propagación de la onda vertical

Combinación de geófonos	Distancia [m]	$\Delta t$ [s]	Velocidad de la onda [m/s]
Geo1-Geo2	0,145	$1,146 \times 10^{-3}$	126,52
Geo2-Geo3	0,145	$1,85 \times 10^{-3}$	78,38
Geo1-Geo3	0,29	$3,00 \times 10^{-3}$	96,7
Promedio			100,5

Tabla 14. Módulo de elasticidad en corte horizontal y vertical

Eje	Módulo de corte [ $\text{N/m}^2$ ]
Horizontal	$1,59 \times 10^7$
Vertical	$1,93 \times 10^7$

Una vez definido el módulo de Poisson, la densidad y el módulo de corte es posible continuar con el análisis y obtener las constantes de rigidez y amortiguamiento del suelo.

#### 4.3.2. Cálculo de las constantes de rigidez y amortiguamiento

Para determinar los coeficientes de rigidez y amortiguamiento se utiliza la teoría presentada en las secciones 2.2.3 y 2.2.4, ya que se obtuvieron todas las variables del suelo necesarias se ingresa a las tablas 3 y 4 con dichas variables ( $L = 0,25 \text{ m}$ ;  $B = 0,25 \text{ m}$ ;  $D = 0,1 \text{ m}$ ;  $A_b = 0,0625 \text{ m}^2$ ;  $A_w = 0,1 \text{ m}^2$ ) y se obtienen los resultados presentados en las tablas 15 y 16.



Tabla 15. Constantes de rigidez

Modo	Constante de rigidez “k”
Horizontal	$2,074 \times 10^7$ [N/m]
Longitudinal	$2,074 \times 10^7$ [N/m]
Vertical	$1,555 \times 10^7$ [N/m]
Balanceo	$4,443 \times 10^5$ [Nm/rad]
Cabeceo	$4,587 \times 10^5$ [Nm/rad]
Torsión	$10 \times 10^5$ [Nm/rad]

Tabla 16. Constantes de amortiguamiento

Modo	Constante de amortiguamiento “c”
Horizontal	$3,011 \times 10^4$ [N/m/s]
Longitudinal	$3,011 \times 10^4$ [N/m/s]
Vertical	$3,18 \times 10^4$ [N/m/s]
Balanceo	238,54 [Nm/rad/s]
Cabeceo	238,54 [Nm/rad/s]
Torsión	194,087 [Nm/rad/s]

#### 4.4. Obtención de los valores vibratorios y frecuencias naturales

Para determinar las frecuencias naturales es necesario primero determinar las ecuaciones del movimiento que gobiernan el problema. Para poder aplicar la teoría mostrada en el capítulo 2, es necesario que se cumpla la segunda recomendación de diseño de la página 8.

De la figura 23 se determinan las excentricidades entre el eje que pasa por el centro de área de la base y el eje paralelo que pasa por el centro de gravedad del sistema máquina/fundación.

$$e_x = (0,125 - 0,1293) = 0,0043 \text{ m}$$

$$e_y = (0,125 - 0,125) = 0,0 \text{ m}$$

Luego, el máximo valor admisible es un 5% de la dimensión de la base correspondiente, así

$$e_{x,max} = 0,05 * 0,25 = 0,0125 \text{ m}$$

$$e_{y,max} = 0,05 * 0,25 = 0,0125 \text{ m}$$

Como  $e_x < e_{x,max}$  y  $e_y < e_{y,max}$ , se pueden trabajar los modos de traslación vertical y de torsión desacoplados. Además, se tienen los modos combinados de traslación horizontal con cabeceo y la

traslación longitudinal con el balanceo. Luego, las ecuaciones del movimiento se obtienen del modelo propuesto en el capítulo 2, por lo tanto, utilizando las figuras 4-6 se obtienen las ecuaciones del movimiento.

$$m\ddot{z} + c_z\dot{z} + k_z z = F_z \sin(\Omega t) \quad (47)$$

$$J_\phi \ddot{\phi} + c_\phi \dot{\phi} + k_\phi \phi = M_\phi \sin(\Omega t) \quad (48)$$

$$m\ddot{x} + c_x \dot{x} - c_x h \dot{\psi} + k_x x - k_x h \psi = F_x \sin(\Omega t) \quad (49)$$

$$J_\psi \ddot{\psi} - c_x h \dot{x} + (c_x h^2 + c_\psi) \dot{\psi} - k_x h x + (k_x h^2 + k_\psi) \psi = M_\psi \sin(\Omega t) \quad (50)$$

$$m\ddot{y} + c_y \dot{y} - c_y h \dot{\theta} + k_y y - k_y h \theta = F_y \sin(\Omega t) \quad (51)$$

$$J_\theta \ddot{\theta} - c_y h \dot{x} + (c_y h^2 + c_\theta) \dot{\theta} - k_y h y + (k_y h^2 + k_\theta) \theta = M_\theta \sin(\Omega t) \quad (52)$$

En la sección 4.1 se determinaron las masas e inercias respecto al centro de gravedad del sistema máquina/fundación, en 4.2 se determinaron las fuerzas y momentos actuando respecto al centro de gravedad, y en la sección 4.3.2 se obtuvieron las constantes de rigidez y amortiguamiento para cada grado de libertad, las cuales se muestran en las tablas 14-15. Por lo tanto, las ecuaciones del movimiento (47-52) se encuentran completamente definidas y es posible continuar con el análisis.

#### 4.4.1. Frecuencias naturales

Primero que todo se determinan las frecuencias naturales. Para las ecuaciones (47) y (48) se utiliza la ecuación (9). Para las combinaciones de ecuaciones (49)/(50) y (51)/(52) se utiliza (33) –(35) y se utiliza el comando “eig” en MATLAB, para ello se deben escribir las ecuaciones de forma matricial

$$M1 = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_\psi \end{bmatrix} \quad C1 = \begin{bmatrix} c_x & -c_x h \\ -c_x h & c_x h^2 + c_\psi \end{bmatrix} \quad K1 = \begin{bmatrix} k_x & -k_x h \\ -k_x h & k_x h^2 + k_\psi \end{bmatrix}$$

$$M2 = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_\theta \end{bmatrix} \quad C2 = \begin{bmatrix} c_y & -c_y h \\ -c_y h & c_y h^2 + c_\theta \end{bmatrix} \quad K2 = \begin{bmatrix} k_y & -k_y h \\ -k_y h & k_y h^2 + k_\theta \end{bmatrix}$$

Luego se deben definir las matrices A1, B1, A2 y B2

$$A1 = \begin{bmatrix} M1 & 0 \\ 0 & -K1 \end{bmatrix} \quad B1 = \begin{bmatrix} C1 & K1 \\ K1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A2 = \begin{bmatrix} M2 & 0 \\ 0 & -K2 \end{bmatrix} \quad B2 = \begin{bmatrix} C2 & K2 \\ K2 & 0 \end{bmatrix}$$

Una vez definidas, se utiliza el comando “eig” en MATLAB. Por ejemplo, para los modos de traslación horizontal y cabeceo se escribe de la forma  $[Y1,W1]=\text{eig}(A1\backslash B1)$ . Luego, MATLAB entrega como resultados:

Y1 =

```

0.1479 + 0.1000i    0.1479 - 0.1000i    0.0910 - 0.0284i    0.0910 + 0.0284i
0.9839 + 0.0000i    0.9839 + 0.0000i   -0.9955 + 0.0000i   -0.9955 + 0.0000i
-0.0002 + 0.0001i  -0.0002 - 0.0001i  -0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i
-0.0005 + 0.0009i  -0.0005 - 0.0009i   0.0005 - 0.0002i   0.0005 + 0.0002i

```

Valores propios  
correspondientes a la  
primera frecuencia natural

Valores propios  
correspondientes a la segunda  
frecuencia natural

Ya que el bloque tiene las mismas dimensiones en el eje horizontal y longitudinal, además de tener las mismas constantes de rigidez y amortiguamiento, se puede asumir que los vectores propios para los modos de traslación longitudinal y balanceo serán los mismos que los presentados anteriormente.

Luego, utilizando las ecuaciones mencionadas, los resultados de todas las frecuencias naturales del sistema se muestran en la tabla 17

Tabla 17. Frecuencias naturales para los distintos modos de vibrar.

Modo de vibrar	Frecuencia natural [rad/s]
Primer modo de vibrar horizontal/cabeceo	154,95
Segundo modo de vibrar horizontal/cabeceo	280,9
Primer modo de vibrar longitudinal/balanceo	154,95
Segundo modo de vibrar longitudinal/balanceo	280,9
Vertical	153,5
Torsión	406,6

#### 4.4.2. Valores vibratorios

Primero que todo, la tabla 10 muestra que no existe fuerzas en la dirección horizontal, además, de acuerdo con la disposición de los acelerómetros la comparación será referida a la velocidad longitudinal (eje Y) vertical (eje Z) y los giros debido al balanceo (eje X) y a la torsión (eje Z).

Para el desplazamiento vertical y la torsión se utilizan las ecuaciones desde la (8) hasta (16). Mientras que para el desplazamiento longitudinal y la rotación debido al balanceo se utiliza el método directo detallado en las ecuaciones desde la (17) hasta la (28). Luego, reemplazando los valores correspondientes en las ecuaciones (50) y (51) se obtiene un sistema de ecuaciones, el cual al resolverlo entrega la respuesta estacionaria de ambos modos. Las amplitudes máximas para cada modo se presentan en la tabla 18.

Tabla 18. Valor máximo de cada grado de libertad

Modo	Amplitud
Longitudinal	0,31 [mm/s]
Vertical	0,29 [ $\mu\text{m}$ ]
Balanceo	$0,72 \times 10^{-5}$ [rad]
Torsión	$0,151 \times 10^{-5}$ [rad]

Finalmente utilizando las combinaciones correspondientes, se obtienen los valores máximos a los que está sometido el motor en los puntos en que están conectados los acelerómetros, estos valores se comparan con los obtenidos experimentalmente. En la tabla 19 se puede observar que los resultados obtenidos utilizando la teoría son cercanos a los obtenidos experimentalmente.

Tabla 19. Velocidades vibratorias máximas obtenidas en el motor

Eje	Velocidad teórica[mm/s]	Velocidad experimental[mm/s]
x	0	0
y	0,7	0,47
z	0,56	0,33

## CAPITULO 5

### Resultados obtenidos y análisis

Como se mencionó al principio del capítulo 4, los resultados presentados hasta ahora son del caso particular en que el motor opera a 50 Hz. En este capítulo se presentan los resultados teóricos y experimentales obtenidos para el motor operando entre 30 y 50 Hz utilizando el desarrollo presentado anteriormente y asistido por el software MATLAB.

Sabiendo que la cantidad de arena en la caja de acero tiene una altura de 60 cm y que la base tiene una altura de 10 cm, la cual está completamente empotrada en la arena, se estudian tres casos experimentales para determinar si la presencia de agua en el suelo es influyente en el comportamiento del sistema máquina/fundación. Para todos los casos se sigue el mismo procedimiento, primero se determina la velocidad de la onda de corte del suelo, luego se obtienen las frecuencias naturales del sistema mediante un ensayo de golpe, y finalmente se miden vibraciones provenientes del desbalance del motor variando su frecuencia entre 30 y 50 Hz. Todas las mediciones se realizan para los ejes horizontal y vertical. La Figura 27 ilustra los tres casos de infiltración de agua estudiados:

1. Suelo seco
2. Suelo con infiltraciones de agua por la parte inferior hasta una altura de 50 cm
3. Suelo con infiltraciones de agua por la parte inferior hasta una altura de 60 cm

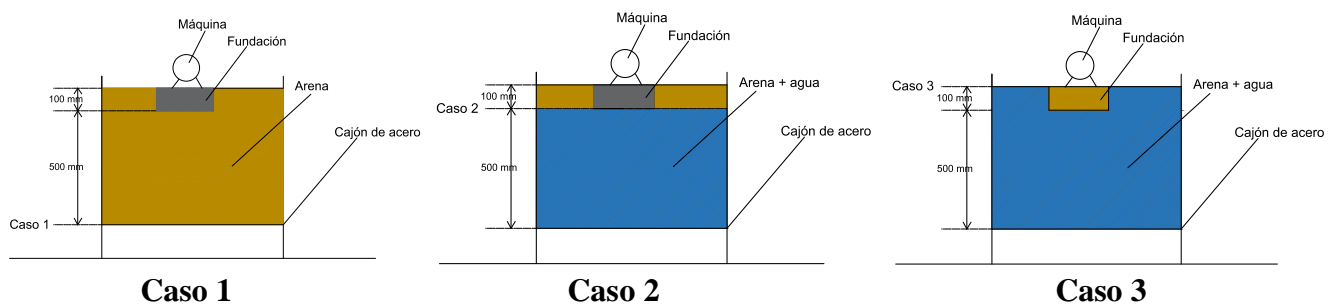


Figura 27. Casos de infiltración de agua utilizados en este estudio.

La Tabla 20 muestra los resultados obtenidos de las velocidades de onda de corte horizontal y vertical para los tres casos de infiltración de agua. Además, se presentan las variaciones porcentuales para cada caso con respecto a la medición anterior.

Tabla 20. Velocidad de corte [m/s]

Caso	Horizontal	Vertical
1	112	115
2	90 (-19.64%)	90 (-21.7%)
3	72 (-20%)	85 (-5.55%)

Por otro lado, la figura 28 muestra las vibraciones horizontales y verticales obtenidas para los tres casos mencionados para frecuencias entre 30 y 50 Hz. En ambas direcciones se observa cómo aumenta la amplitud de las vibraciones a medida que las infiltraciones de agua se acercan a la Fundación.

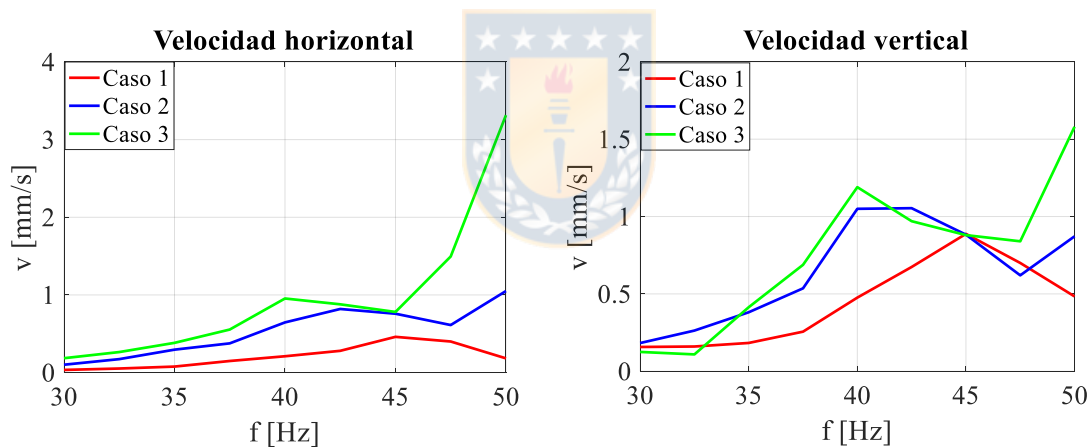


Figura 28. Velocidades horizontales y verticales

La figura 29 muestra las frecuencias naturales horizontal y vertical respectivamente. Donde se observa que al agregar agua al sistema se genera una disminución en las frecuencias naturales fundamentales. La Tabla 21 muestra los valores de estas frecuencias naturales y la variación porcentual en cada caso.

Tabla 21. Frecuencias naturales [Hz]

Caso	Horizontal	Vertical
1	117.3	114.5
2	92.83 (-20.8%)	94.5 (-17.47%)
3	76.2 (-17.9%)	90.2 (-4.55%)

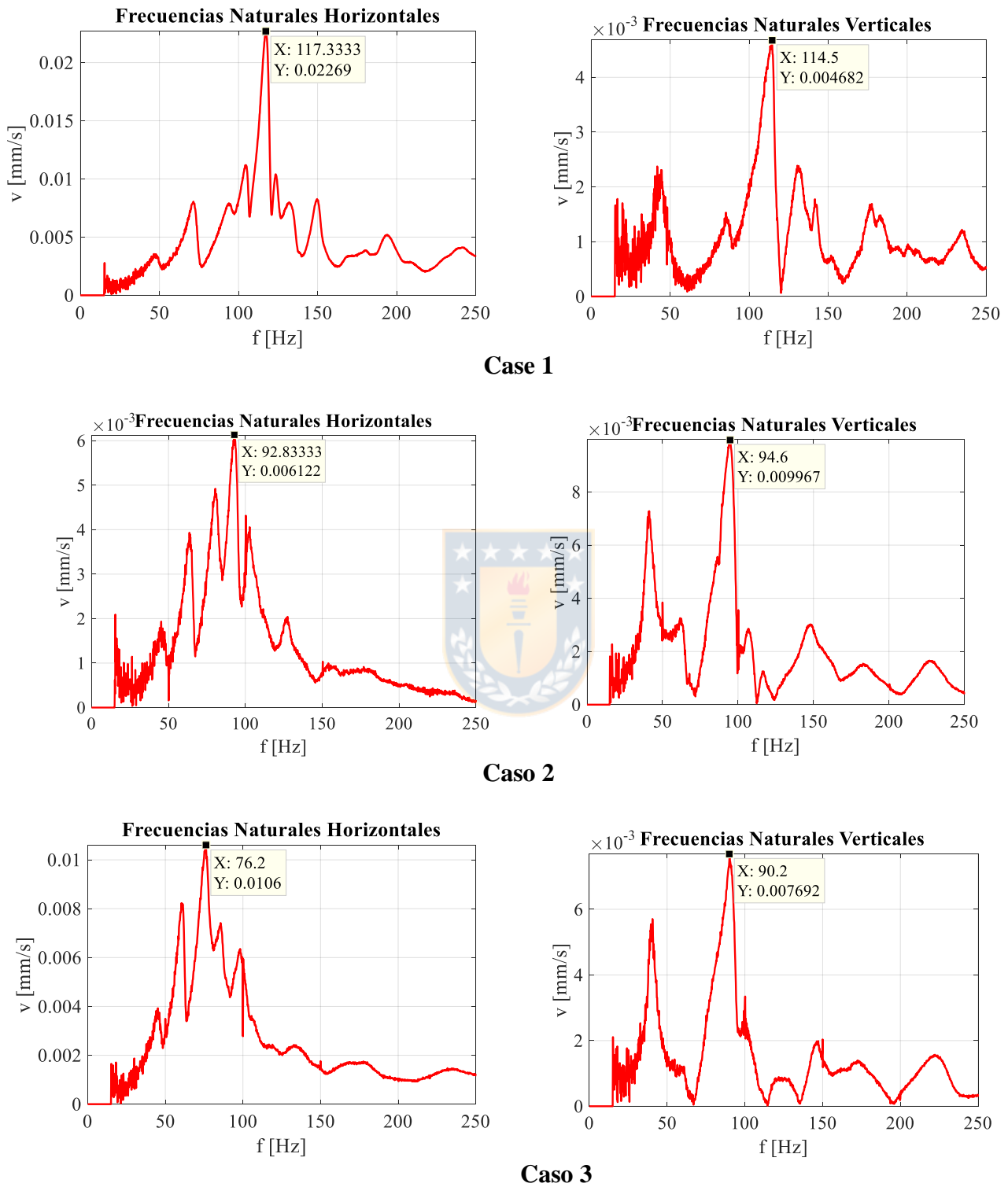


Figura 29. Frecuencias naturales del sistema horizontales y verticales para cada caso

Se observa cómo la variación porcentual de las frecuencias naturales que se muestra en la Tabla 21 coincide con la variación de las velocidades de corte en la Tabla 20. Lo anterior se explica porque existe una relación directa entre las frecuencias naturales y la velocidad de corte. Para explicar esta relación, se usan las ecuaciones (53) - (56). De la ecuación (54) se observa que la rigidez depende del módulo de corte y un valor "C" que es constante (se obtiene de la geometría del problema). Luego, reemplazando las ecuaciones (53) y (54) en (55) se obtiene la ecuación (56), a partir de la cual se observa que un cambio en la velocidad de corte genera el mismo cambio proporcional en las frecuencias naturales.

$$G = V_s^2 * \rho \quad (53)$$

$$k = G * C \quad (54)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (55)$$

$$\omega_n = V_s \sqrt{\frac{\rho * C}{m}} \quad (56)$$

Las figuras 30 y 31 muestran las vibraciones horizontales y verticales respectivamente. En ambas figuras se presentan los resultados teóricos y experimentales para cada caso. En dichas figuras se observa una tendencia de valores similar entre ambos resultados, aunque difiriendo en la forma de sus gráficos, esto se debe al hecho de que en los resultados experimentales se observan frecuencias naturales en el rango de frecuencia utilizado que genera los picos observados. Por otro lado, en los resultados teóricos no hay frecuencias naturales para dicho rango de frecuencias.

Para descubrir la razón de las diferencias entre las frecuencias naturales teóricas y experimentales, se analizó el origen de las frecuencias experimentales. Para realizar esto, se agregaron masas al sistema máquina/fundación para comprobar si se producen cambios en estas frecuencias. Al realizar esta acción, se observa que no hay cambios en las frecuencias fundamentales a medida que se agrega masa al sistema. Por lo tanto, las frecuencias fundamentales presentadas en la figura 29 no corresponden a las frecuencias naturales del sistema máquina/fundación, por lo que se infiere que corresponden a las frecuencias naturales del suelo, ya que no varían con la adición de masa, pero varían con la velocidad de onda de corte del suelo. Para corroborar esta afirmación, se analiza la frecuencia natural del suelo, que se obtiene de la ecuación (57).

$$F_{n,s} = \frac{V_s}{4 * H} \quad (57)$$



Donde  $H$  representa el espesor de la capa de suelo que se está analizando. Esta ecuación no entregará los valores reales para este caso, ya que se usa considerando una longitud horizontal infinita del suelo, por lo tanto, al ser un banco de pruebas, no se cumple. Se puede observar en la ecuación (57) que existe una relación directa entre la frecuencia natural del suelo y la velocidad de corte. Por otro lado, estas frecuencias no dependen de la masa que se aplica al sistema, por lo tanto, tiene sentido que las frecuencias naturales fundamentales presentadas correspondan a las frecuencias del suelo. En casos reales, las frecuencias naturales del suelo se encuentran en bajas frecuencias (menos de 5 Hz) [Ruiz 2009], [Vijayendra 2010].

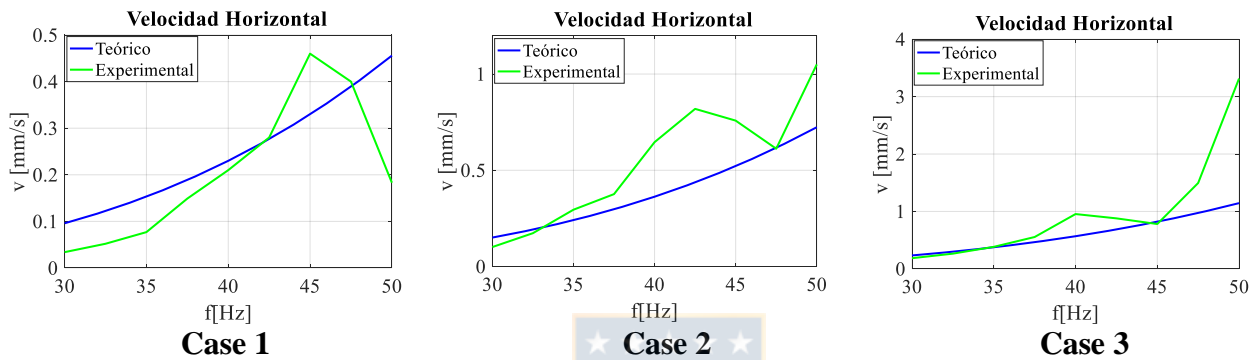


Figura 30. Velocidad teórica y experimental en dirección horizontal

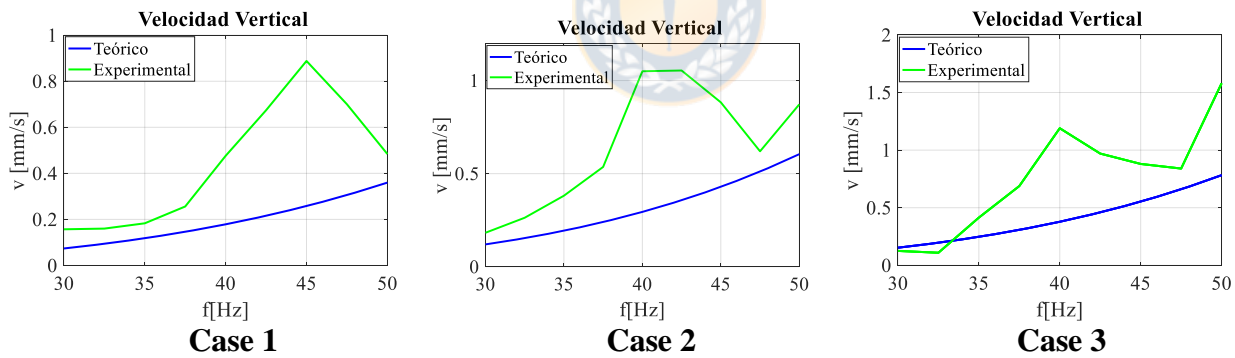


Figura 31. Velocidad teórica y experimental en dirección vertical

## CAPITULO 6

### Conclusiones

En base a los resultados obtenidos de este estudio, las conclusiones se pueden separar en tres partes.

#### 1. En relación con los resultados teóricos.

La teoría comúnmente utilizada para el diseño de fundaciones entrega resultados cercanos a los experimentales principalmente para suelos secos. Las diferencias significativas en suelos saturados se deben a la presencia de frecuencias naturales del suelo, que no están incluidas en la teoría porque en la práctica están en frecuencias muy bajas. Por lo tanto, de este estudio queda claro que la teoría utilizada en el diseño de los fundamentos es adecuada.

#### 2. De los resultados experimentales.

A partir de los resultados obtenidos al variar el nivel del agua en el banco de pruebas, se observa claramente que, a un nivel de agua más alto, la velocidad de corte del suelo disminuye y, por lo tanto, aumenta la amplitud de las vibraciones. Incluso, debido a estas variaciones de las velocidades de corte, las frecuencias naturales se acercan a las frecuencias operativas, aumentando así hasta 10 veces la amplitud de estas vibraciones, como se muestra en la Figura 31. Esto muestra la importancia que tienen la infiltración de agua en el suelo en las vibraciones de las máquinas y la necesidad de una correcta estimación de los parámetros del suelo

#### 3. En relación con las frecuencias naturales.

Las frecuencias naturales obtenidas corresponden al suelo y no al sistema máquina/fundación. Aun así, los resultados son representativos, ya que tanto las frecuencias naturales del sistema como el suelo dependen directamente de las velocidades de las ondas de corte.

## REFERENCIAS

- Arnold R. N., Bycroft G. N., Warburton G. B. (1955).  
Forced vibrations of a body on an infinite elastic solid.  
J. Appl- Mech. ASME
- Arya S., O' Neill M., Pincus G. (1981).  
Design of structures and foundations for vibrating machines (Chapter 4).
- Barkan D. D., Ilyichev V. A. (1962).  
Dynamics of bases and foundations.  
Proc. 9<sup>th</sup> ICSMFE, Tokyo
- Bhattacharya S., Muir D., Lombardi D. (2010).  
Similitude relationships for physical modelling of monopile-supported offshore wind turbines.  
International journal of physical modelling in geotechnics
- Cui L., Battacharya S. (2016).  
Soil-monopile interactions for offshore wind turbines.  
Engineering and computational mechanics
- Bycroft G. N. (1956).  
Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and an elastic-stratum.  
Philos Trans. Royal Soc. Lond.
- Díaz J. A., López J. A. (2008)  
Strain thresholds in soil dynamics.  
14<sup>th</sup> world conference on earthquake engineering
- Dong Y., Lu N. (2016)  
Dependences of shear wave velocity and shear modulus of soil on saturation.  
American society of civil engineers
- Gazetas G. (1975).  
Dynamic stiffness functions of strip and rectangular footing on layered soil.  
S. M. thesis: MIT
- Gazetas G. (1991).  
Formulas and charts for impedances of surface and embedded foundations.  
ASCE
- Hsieh T. K. (1962).

Foundation Vibrations.  
Proc. Inst. Civil Engrs.

IS: 2974 part 1 (1980)  
Foundations for reciprocating types machines

IS: 2974 part 2 (1982)  
Foundations for impact type machines (hammer foundations)

IS: 2974 part 3 (1993)  
Foundations for rotatory type machines

Lamb H. (1904).  
The propagation of tremors over the surface of an elastic solid.  
Philos Trans. Royal Soc. Lond.

Leoni A. J.  
Apunte de coeficiente de balasto (página 10)

Lysmer J. (1965).  
Vertical motions of rigid footings.  
Ph. D. thesis, University of Michigan



Miranda M. (2017).  
Estudio sobre el diseño de fundaciones para máquinas rotatorias y alternativas.  
Proyecto de ingeniería mecánica, Universidad de Concepción

Mueller B. (2013).  
New physical findings revolutionize the drilling and blasting technology as well as the prediction of ground vibrations- Part 1: The new blasting model  
Movement and Blasting Consulting, Leipzig, Germany

Prakash S., Puri V. K. (1988).  
Foundations for machines: Analysis and Design (Chapter 13).

Pasternak P. L. (1954).  
New method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants.  
Fosudarstvennogo Izatestvo Literaturi po Stroitelstre o Atchitekutre, Moskow

Quinlan P. M. (1953).  
The elastic theory of soil dynamics.  
Symp. Dyn. Test Soils ASTM-STP

Reissner E. (1936).

Stationäre axialsymmetrische, durch eine schüt-telnde masse erregte schwingungen eines homogenen elastischen halbraumes.

Ing. Arch.

Sung T. Y. (1953).

Vibrations in semi-infinite solids due to periodic surface loadings.

Symp Dyn. Test Soils ASTM-STP

Todorovska M. I., Al Rjoub Y. (2006a).

Plain strain soil-structure interaction model for a building supported by a circular foundation embedded in a poroelastic half-space.

Soil Dynamics and Earthquake Engineering

Todorovska M. I., Al Rjoub Y. (2006b).

Effects of rainfall on soul-structure system frequency: examples base on poroelasticity and a comparison with full-scale measurements.

Soil Dynamics and Earthquake Engineering

Tschebotarioff G. P., Ward, E. R. (1948)

The Resonance of Machine Foundations and the Soil Coefficients with Affect it

Proc. 2nd Intern. Conf. on Soil Mech & Found. Engng, Rotterdam, Vol I, pp. 309- 13.

Vallabhan C. V. G., Das Y. C. (1991).

Modified Vlasov model for beams on elastic foundations.

J. Geotech. Engng. ASCE

Vlad I. (2010).

Machine Foundations and Blast Engineering Vibrations Case Studies.

Missouri University of Science and Tehhnology.

Winkler E. (1867).

Theory of elasticity and strength.

Prague, Czechoslovakia

Yu L., Wang L., Guo Z., Battacharya S., Nikitas G., Li L., Xing Y. (2015).

Long-term dynamic behavior of monopile supported offshore wind turbines in sand.

Theoretical and applied mechanics letters

## Anexo 1

# Características y dimensiones del motor eléctrico



### Hoja de datos de motores con rotor de jaula

*datasheet for three-phase Squirrel-Cage-Motors*

**datos de pedido**                      **1LA7063-4AB10**  
**ordering data:**

número de pedido del cliente / *Client-order-*

número de pedido Siemens / *Order-no.:*

número de oferta / *Offer-no.:*

observación / *Remarks:*

número de ítem / *Item-no.:*

número de envío / *Consignment-no.:*

proyecto / *Project:*

<b>Datos eléctricos\ / Electrical data:</b>				<b>Datos generales / General data:</b>	
tensión nominal <i>rated motor voltage</i>	( 1 ) 230 VD/400 VY, 50 Hz, 460 VY, 60 Hz ( 1 ) 230 VD/400 VY, 50 Hz, 460 VY, 60 Hz			tamaño	063 M
frecuencia <i>frequency</i>	50 Hz		60 Hz	forma constructiva <i>type of construction</i>	( 0 ) IM B3 / B6 B7 / B8 / V5 sin cubierta
potencia nominal <i>rated motor power</i>	0.18 kW		0.21 kW	peso kg, sin accesorios <i>weight in kg, without optional accessories</i>	4.1 kg
velocidad nominal <i>rated motor speed</i>	1350 1/ min		1650 1/ min	material de la carcasa <i>frame material</i>	Aluminio <i>Aluminum</i>
par o torque nominal <i>rated motor torque</i>	1.3 Nm		1.2 Nm	tipo de protección <i>degree of protection</i>	IP 55
corriente nominal (EFF) <i>rated motor current (EFF)</i>	VD	VY	VY	tipo de refrigeración <i>method of cooling, TEFC</i>	IC 411
	1.01 A	0.58 A	0.56 A	la clase vibración <i>vibration class</i>	A ( Standard)
Corriente de arranque / corriente nominal <i>starting- / rated motor current</i>	3.0		3.0	aislamiento <i>insulation</i>	155(F) a 130(B) <i>155(F) to 130(B)</i>
par máximo / par nominal <i>breakdown / rated motor torque</i>	1.9		1.9	clase de servicio <i>duty type</i>	S1 = operación continua <i>S1 = continuous operation</i>
par de arranque/par nominal <i>starting- / rated motor torque</i>	1.9		1.9	velocidad nominal <i>direction of rotation</i>	bidireccional <i>Bi-directional</i>
clase de eficiencia / <i>efficiency class</i>	no aplicable.				
rendimiento o eficiencia a	100%/50Hz	75%/50Hz	100%/60Hz		
	59.0 %	60.0 %	60.0 %		
factor de potencia <i>power factor</i>	0.76	0.70	0.77		
<b>Datos mecánicos / Mechanical data:</b>				<b>Caja de bornes / Terminal box:</b>	
nivel de presión sonora <i>noise 50 Hz/60Hz</i>	42.00 dB		46.00 dB	material de la caja de bornes <i>material of terminal box</i>	Aluminio <i>Aluminum</i>
momento de inercia <i>moment of inertia</i>	0.000370 kg m <sup>2</sup>			tipo de caja de bornes <i>type</i>	gk 030
rodamiento LA <i>bearing AS</i>	6201 2ZC3			rosca del tornillo de contacto <i>terminal screw thread</i>	M4
Rodamiento LCA <i>bearing BS</i>	6201 2ZC3			máxima sección de cable a conectar <i>max. cable cross-sectional area</i>	1.5 mm <sup>2</sup>
fijación del rodamiento <i>locating bearing</i>	rodamiento no fijo con carga preajustada en LA (estándar)			diámetro de cables de entrada de... a... <i>cable diameter from ... to ...</i>	9.0 mm - 17.0 mm
agujeros de drenaje o anticondensación <i>drain holes</i>	No <i>No</i>			entradas de cables <i>cable entry</i>	1xM25x1,5-1xM16x1,5
dispositivo de reengrase <i>regreasing device</i>	No <i>No</i>			prensaestopas <i>cable gland</i>	2 tapones de cierre <i>2 plugs</i>
lubricante <i>type of lubrication</i>	Esso Unirex N3				
período de reengrase\ : 40°C <i>relubrication interval at 40°C</i>	40000 h				
cantidad de grasa \:40°C <i>quantity of grease for relubrication at 40°C</i>	- g				
borne de tierra externo <i>external earthing</i>	?TAK_ABN357_001_000_1LA 00002?				
pintura <i>paintwork</i>	pintura especial en RAL 7030 (gris piedra) <i>Special paint finish, RAL7030 gray</i>				
				<b>Versiones especiales/ special configurations:</b>	



## Anexo 2

### Extractos del plano utilizado para fabricar el cajón de acero

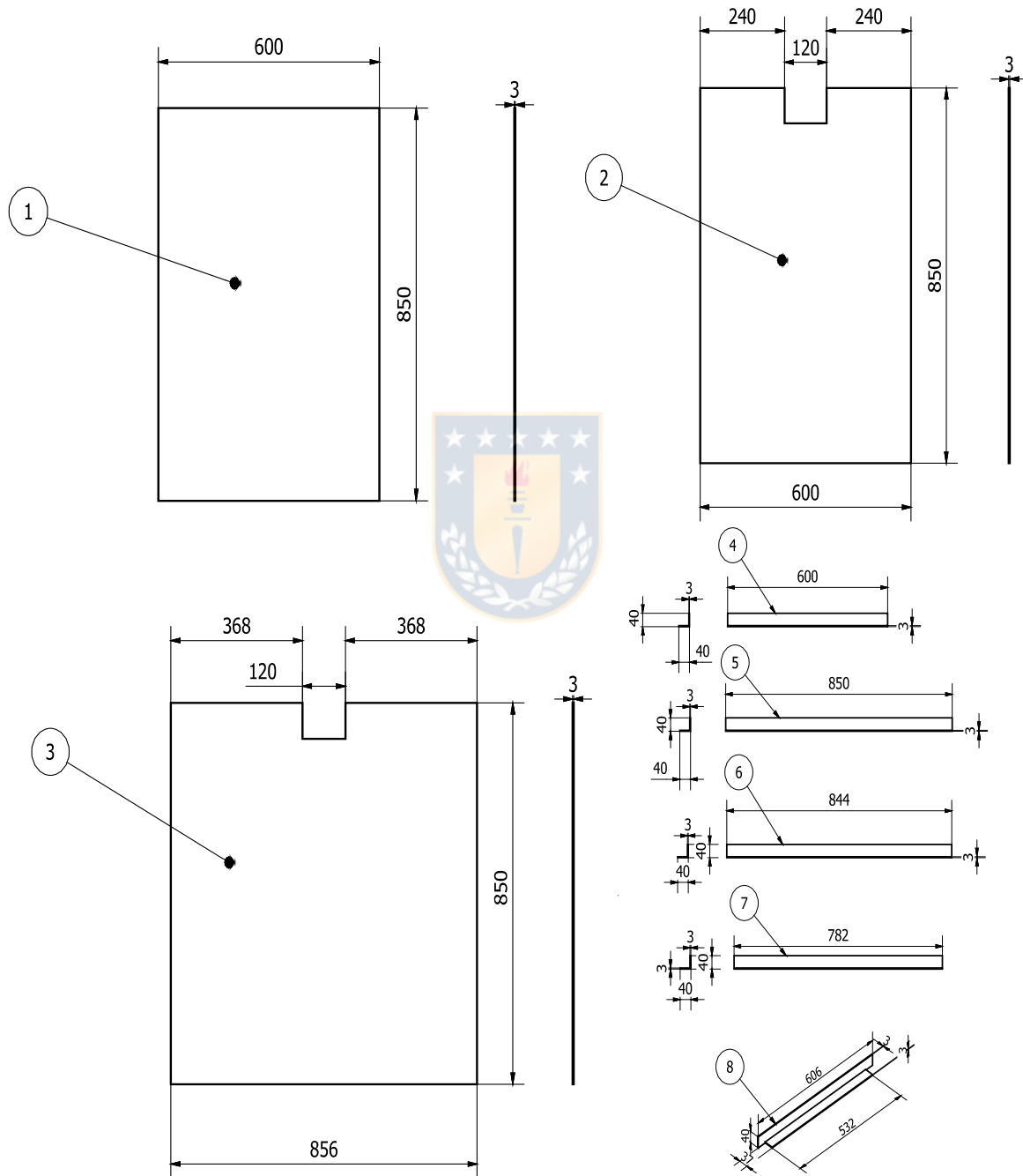


Figura 33. Dimensiones y partes del cajón de acero



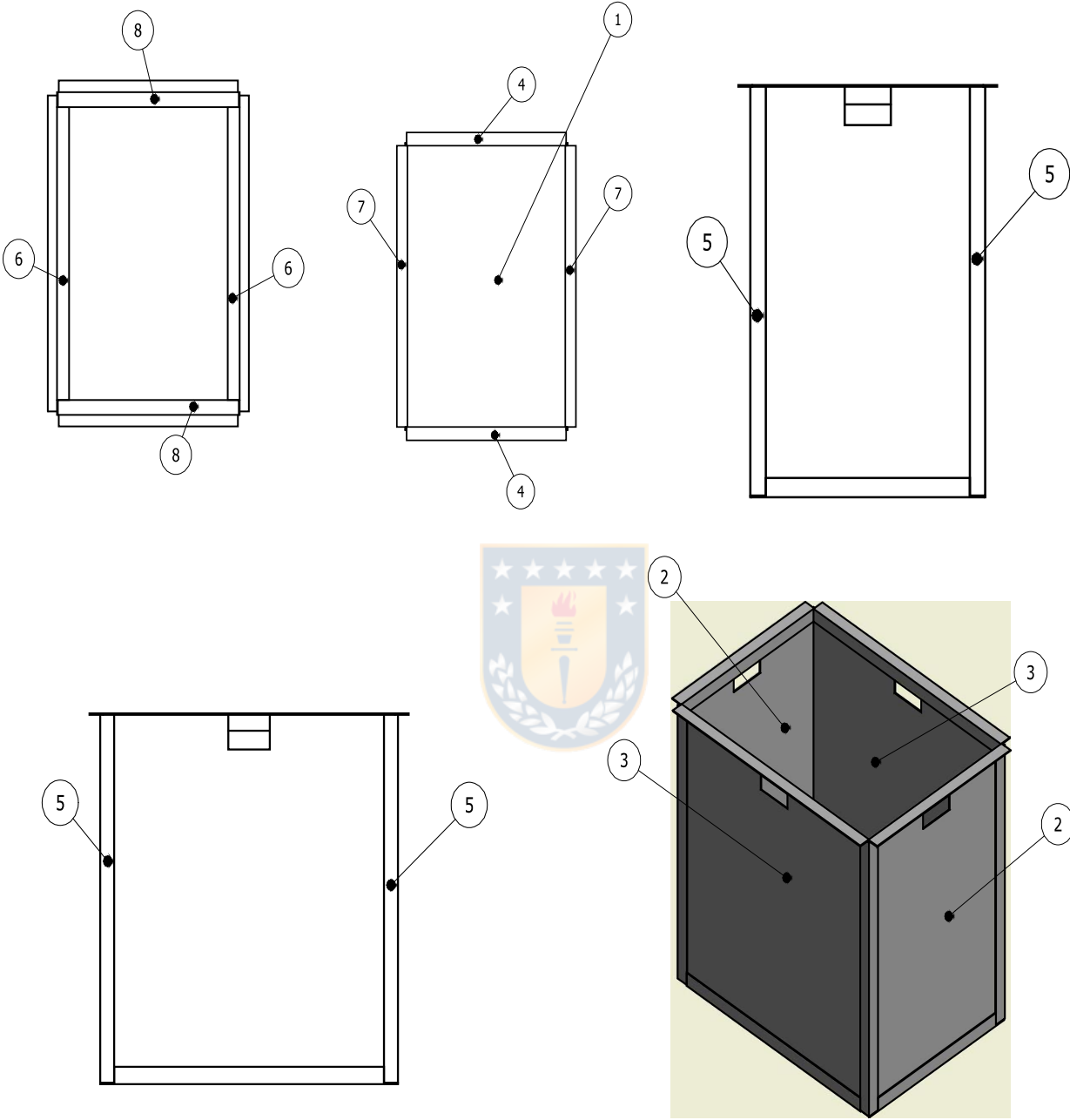


Figura 34. Montaje de las partes mostradas en la figura 32

## Anexo 3

### Momentos de inercia de masas y de área

Tabla 22. Momentos de inercia de masa para diferentes geometrías

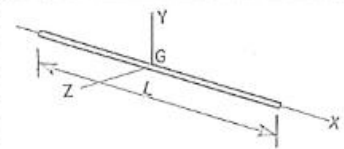
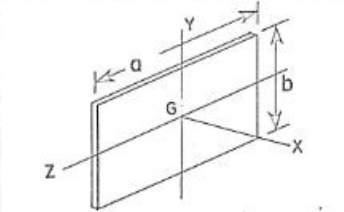
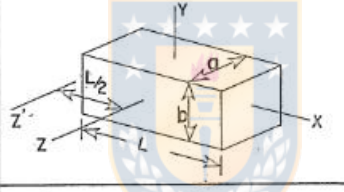
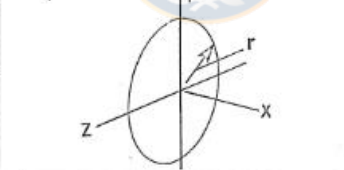
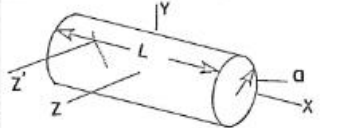
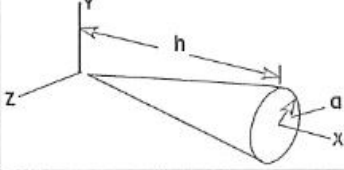
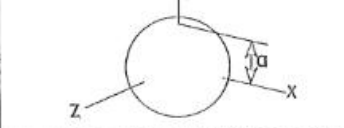
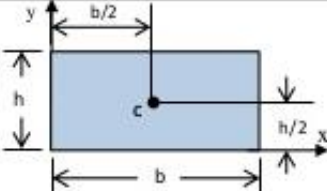
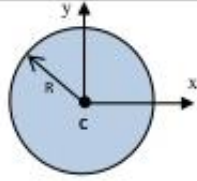
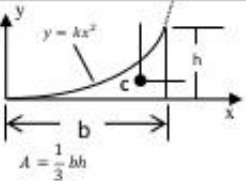
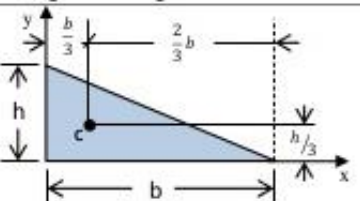
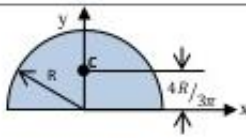
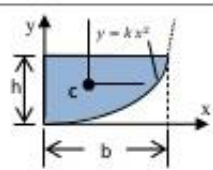
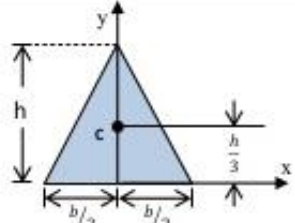
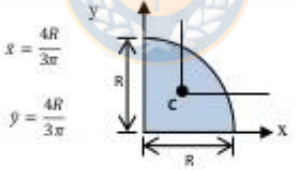
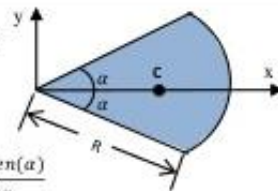
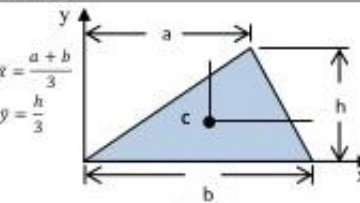
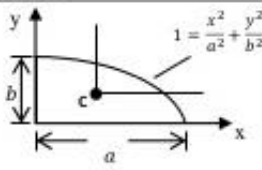
SLENDER ROD		$I_y = I_z = \frac{1}{12} mL^2$
THIN RECTANGULAR PLATE		$I_x = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$ $I_y = \frac{1}{12} ma^2$ $I_z = \frac{1}{12} mb^2$
RECTANGULAR PRISM		$I_x = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$ $I_y = \frac{1}{12} m(a^2 + L^2)$ $I_z = \frac{1}{12} m(b^2 + L^2)$ $I_{z'} = I_z + mL^2/4$
THIN DISK		$I_x = \frac{1}{2} mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4} mr^2$
CIRCULAR CYLINDER		$I_x = \frac{1}{2} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12} m(3a^2 + L^2)$ $I_{z'} = I_z + mL^2/4$
CIRCULAR CONE		$I_x = \frac{3}{10} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5} m(\frac{1}{4}a^2 + h^2)$
SPHERE		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} ma^2$

Tabla 23. Momentos de inercia de área para diferentes secciones

<p><b>Rectángulo</b></p> 	<p><b>Círculo</b></p> 	<p><b>Media Parabólica complementaria</b></p>  <p><math>\bar{x} = \frac{3b}{4}</math> <math>\bar{y} = \frac{3h}{10}</math> <math>A = \frac{1}{3}bh</math></p>
<p><math>\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}</math>    <math>\bar{I}_y = \frac{b^3h}{12}</math>    <math>\bar{I}_{xy} = 0</math> <math>I_x = \frac{bh^3}{3}</math>    <math>I_y = \frac{b^3h}{3}</math>    <math>I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}</math></p>	<p><math>I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}</math>    <math>I_{xy} = 0</math></p>	<p><math>\bar{I}_x = \frac{37bh^3}{2100}</math>    <math>I_x = \frac{bh^3}{21}</math> <math>\bar{I}_y = \frac{b^3h}{80}</math>    <math>I_y = \frac{b^3h}{5}</math> <math>\bar{I}_{xy} = \frac{b^2h^2}{120}</math>    <math>I_{xy} = \frac{b^2h^2}{12}</math></p>
<p><b>Triángulo Rectángulo</b></p> 	<p><b>Semicírculo</b></p> 	<p><b>Media Parábola</b></p>  <p><math>\bar{x} = \frac{3b}{8}</math> <math>\bar{y} = \frac{3h}{5}</math> <math>A = \frac{2}{3}bh</math></p>
<p><math>\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}</math>    <math>\bar{I}_y = \frac{b^3h}{36}</math>    <math>\bar{I}_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}</math> <math>I_x = \frac{bh^3}{12}</math>    <math>I_y = \frac{b^3h}{12}</math>    <math>I_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}</math></p>	<p><math>\bar{I}_x = 0,1098R^4</math>    <math>I_{xy} = 0</math> <math>I_x = I_y = \bar{I}_y = \frac{\pi R^4}{8}</math>    <math>I_{xy} = 0</math></p>	<p><math>\bar{I}_x = \frac{8bh^3}{175}</math>    <math>\bar{I}_y = \frac{19b^3h}{480}</math>    <math>\bar{I}_{xy} = \frac{b^2h^2}{60}</math> <math>I_x = \frac{2bh^3}{7}</math>    <math>I_y = \frac{2b^3h}{15}</math>    <math>I_{xy} = \frac{b^2h^2}{6}</math></p>
<p><b>Triángulo Isósceles</b></p> 	<p><b>Cuarto de círculo</b></p> 	<p><b>Sector Circular</b></p>  <p><math>A = \alpha R^2</math> <math>\bar{x} = \frac{2R\text{Sen}(\alpha)}{3\alpha}</math></p>
<p><math>\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}</math>    <math>\bar{I}_y = \frac{b^3h}{48}</math>    <math>\bar{I}_{xy} = 0</math> <math>I_x = \frac{bh^3}{12}</math>    <math>I_{xy} = 0</math></p>	<p><math>\bar{I}_x = \bar{I}_y = 0,05488R^4</math>    <math>I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{16}</math> <math>\bar{I}_{xy} = -0,01647R^4</math>    <math>I_{xy} = \frac{R^4}{8}</math></p>	<p><math>I_x = \bar{I}_x = \frac{R^4}{8} (2\alpha - \text{sen} 2\alpha)</math> <math>I_y = \frac{R^4}{8} (2\alpha + \text{sen} 2\alpha)</math>    <math>I_{xy} = 0</math></p>
<p><b>Triángulo</b></p> 	<p><b>Cuarto de elipse</b></p> 	
<p><math>\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}</math>    <math>I_x = \frac{bh^3}{12}</math> <math>\bar{I}_y = \frac{bh}{36}(a^2 - ab + b^2)</math>    <math>I_y = \frac{bh}{12}(a^2 + ab + b^2)</math> <math>\bar{I}_{xy} = \frac{bh^2}{72}(2a - b)</math>    <math>I_{xy} = \frac{bh^2}{24}(2a + b)</math></p>	<p><math>\bar{I}_x = 0,05488ab^3</math>    <math>I_x = \frac{\pi ab^3}{16}</math> <math>\bar{I}_y = 0,05488a^3b</math>    <math>I_y = \frac{\pi a^3b}{16}</math> <math>\bar{I}_{xy} = -0,01647a^2b^2</math>    <math>I_{xy} = \frac{a^2b^2}{8}</math></p>	