



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Inestabilidad de las cuerdas negras en teorías de Lovelock cúbicas

Tesis para optar al grado académico
de Magíster en Ciencias con mención en Física

por

Marcela de la Paz Lagos Flores

Director de Tesis : Dr. Julio Oliva

Comisión : Dr. Alex Giacomini
Dr. Fabrizio Canfora

Concepción, Chile Marzo de 2016



A mi familia.





Índice general

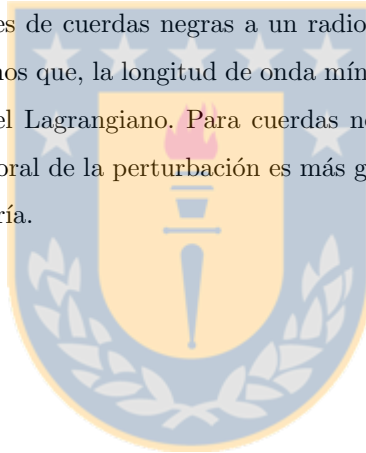
Resumen	7
Abstract	9
Agradecimientos	11
Lista de figuras	13
1. Relatividad General	19
1.1. Relatividad General en $D = 4$	19
1.1.1. Acción de Einstein-Hilbert y ecuaciones de campo	19
1.1.2. Agujero negro de Schwarzschild	21
1.1.3. Coordenadas de Kruskal para la solución de Schwarzschild	22
1.2. Relatividad General en dimensión arbitraria	23
1.2.1. Solución de Schwarzschild-Tangherlini	23
1.2.2. Cuerdas negras homogéneas	24
1.3. Estabilidad	25
1.3.1. Argumento termodinámico	25
1.3.2. Cálculo perturbativo, inestabilidad de Gregory-Laflamme	25
2. Teoría de Lovelock	27
2.1. Acción de Lovelock y ecuaciones de campo	27
2.1.1. Soluciones en teorías de Lovelock puras	28
2.1.2. Coordenadas de Kuskal	30
2.2. Argumento termodinámico para inestabilidad	30
2.3. Cálculo perturbativo de soluciones de cuerda negra	30
3. Inestabilidad de la cuerda negra en teorías de Lovelock de tercer orden en la curvatura	33
3.1. Solución de cuerda negra	33
3.1.1. Perturbación tipo s-wave	33

3.2. Las cuerda negras en teorías de Lovelock de tercer orden son inestables	34
3.2.1. Condiciones de regularidad y consideraciones de gauge	36
3.3. Comparando inestabilidades de cuerda negra en diferentes teorías	37
4. Conclusiones	39
5. Apéndice	41
5.1. Bases no-coordenadas y ecuaciones de estructura de Cartan	41
5.2. Procedimiento para encontrar ecuación maestra	42
5.3. Ecuación maestra en diferentes teorías	43
5.4. Método numérico y convergencia	43
Bibliografía	47



Resumen

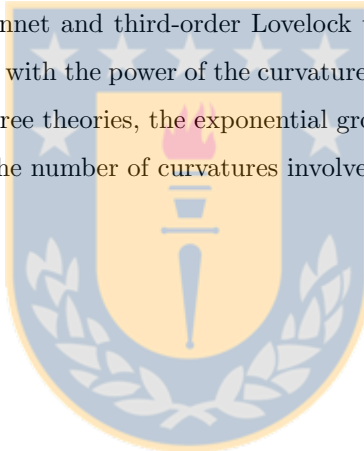
En esta tesis mostramos que las cuerdas negras homogéneas de una teoría de Lovelock de tercer orden en la curvatura son inestables bajo perturbaciones tipo s-wave. Este análisis se realiza en $D = 9$ dimensiones, la dimensión mínima que permite la existencia de cuerdas negras homogéneas en una teoría que contiene solo el término de Lovelock de tercer orden en el Lagrangiano. Tal como en el caso de Relatividad General, la inestabilidad es producida por perturbaciones de longitud de onda grande y representa la contraparte perturbativa de una inestabilidad termodinámica. También proporcionaremos un análisis comparativo de las inestabilidades de cuerdas negras a un radio fijo en Relatividad General, Gauss-Bonnet y teorías de Lovelock cúbicas puras, y mostramos que, la longitud de onda mínima crítica para denotar la inestabilidad crece con la potencia de la curvatura que define el Lagrangiano. Para cuerdas negras con radios en la región inestable de las tres teorías, el crecimiento exponencial temporal de la perturbación es más grande en Relatividad General y decrece con el número de curvaturas involucradas en la teoría.





Abstract

In this thesis we show that homogeneous black strings of third-order Lovelock theories are unstable under s-wave perturbations. This analysis is done in dimension $D = 9$ which is the lowest dimension that allows the existence of homogeneous black strings in a theory that contains only the third-order Lovelock term in the Lagrangian. As it is the case in General Relativity, the instability is produced by long wavelength perturbations and it stands for the perturbative counterpart of a thermal instability. We also provide a comparative analysis of the instabilities of black strings at a fixed radius in General Relativity, Gauss-Bonnet and third-order Lovelock theories, and show that the minimum critical wavelength that triggers the instability grows with the power of the curvature that defines the Lagrangian. For black strings with radii in the unstable region in all the three theories, the exponential growth in time of the perturbation is the largest in General Relativity and it decreases with the number of curvatures involved in the theory.





Agradecimientos

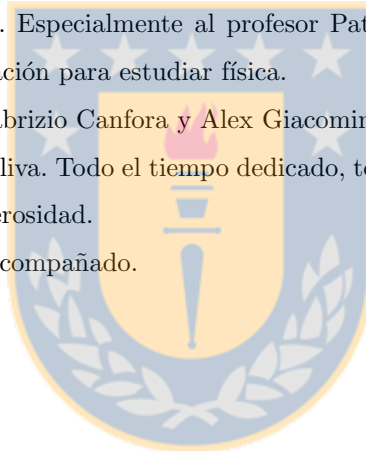
Por todo su cariño y preocupación, quisiera agradecer a toda mi familia; Jorge y Pilar, Poly, Camila y Javier. A mis abuelos, en particular a Chito, quien siempre tuvo la intención de cumplir su promesa. A Inés por recibirme de la mejor manera en esta ciudad. A mis amigos.

Quisiera también agradecer a las secretarias del Departamento, Sra. Patricia, Sra. Martita, a quien siempre recordaré y a Srta. Soledad, quien tuvo siempre la mejor de las disposiciones para atender todas mis solicitudes.

A mis profesores, todas las horas dedicadas. Especialmente al profesor Patricio Salgado, todas sus historias, sus clases, todas sus palabras, principalmente su inspiración para estudiar física.

A los profesores miembros de la comisión, Fabrizio Canfora y Alex Giacomini, por su tiempo y sus valiosos comentarios. Agradezco principalmente al profesor Julio Oliva. Todo el tiempo dedicado, todas las explicaciones y los cálculos realizados, sus ganas de trabajar, su buen humor y generosidad.

Finalmente agradezco a Aldo, quien me ha acompañado.





Lista de Figuras





Índice de figuras

3.1. Modos para la cuerda negra homogénea en Lovelock puro de tercer orden en $D = 9$. El parámetro m en la solución ha sido fijado a 1.	36
3.2. Comparación de modos inestables de cuerda negra para un determinado radio en teorías de Einstein, Gauss-Bonnet y Lovelock cúbicas	38
5.1. Convergencia de frecuencias obtenidas mediante solución en serie de potencias para $k = 0,1$	44
5.2. Convergencia de frecuencias obtenidas mediante solución en serie de potencias para $k = 0,4$	45





Introducción

Las teorías de gravedad en altas dimensiones poseen interesantes características que las han convertido en un importante tema de estudio en la Física teórica. Por una parte las teorías en dimensiones mayores que cuatro proporcionan un interesante escenario para comprobar si muchas de las propiedades de los agujeros negros en dimensión cuatro son intrínsecas o no de estos espacios, o si dichas características se conservan en teorías en altas dimensiones. Otra importante motivación viene del lado de la teoría de cuerdas, la que predice la existencia de dimensiones extras y requiere la introducción de términos de alto orden en la curvatura como correcciones a cortas distancias a la acción de Einstein-Hilbert. Por otro lado la conjetura AdS/CFT [1] ha mostrado la dualidad entre espacios asintóticamente AdS, que pueden ser construidos como soluciones de teorías de alto orden en la curvatura, y una teoría de campos conforme que vive en el borde de ésta. (Ver [2] para un estudio detallado de agujeros negros en dichos escenarios).

La extensión de la Relatividad General a mayores dimensiones implica la aparición de nuevas soluciones de objetos negros, tales como soluciones de cuerdas negras, p -branas negras, black rings, black saturns y otras configuraciones (Ver [3], [4],[5]). Sin embargo, si queremos construir una teoría en mayores dimensiones pero que respete los mismo principios que la Relatividad General de Einstein, términos de orden superior en la curvatura aparecen, como correcciones a pequeñas escalas del término de Einstein-Hilbert. Esta generalización es conocida como la teoría de Lovelock, la que también admite soluciones de objetos negros extendidos.

En este trabajo nos centraremos en soluciones de cuerdas negras homogéneas en distintas teorías de Lovelock y, en particular, en la teoría de tercer orden. Estas soluciones son obtenidas mediante la oxidación de soluciones de agujero negro para teorías de Lovelock con un solo término en la curvatura.

Con las soluciones de cuerda negra puestas en este escenario, además de los agujeros negros, es natural preguntarse cual es la configuración que debe manifestarse luego de un colapso gravitacional en este tipo de teorías. De acuerdo a argumentos termodinámicos, por debajo de una masa crítica, el agujero negro posee mayor entropía y por lo tanto es la configuración que debe predominar en el ensamble microcanónico. Esto viene acompañado en Relatividad General[6] y Gauss Bonnet[31], de una inestabilidad perturbativa de la cuerda negra para longitudes de onda grande. El problema del estado final al que evoluciona la cuerda negra es aún un problema abierto, pero resultados numéricos muestran que para $D = 5$ la cuerda negra evoluciona hacia un conjunto de agujeros negros esféricos conectados por una cuerda negra, que para un tiempo finito, para un observador asintótico, el radio del cilindro tiende a cero y el sistema desarrolla una singularidad desnuda (Ver [7], [8], [9], [10], [12], [15]).

Para el caso de la teoría de Lovelock de tercer orden pura, que ha sido mucho menos explorada, las soluciones de agujero

negro también pueden ser extraídas del polinomio de Wheeler, y el argumento termodinámico [23] también es aplicable. El objetivo principal de esta tesis es mostrar la inestabilidad perturbativa en esta teoría, mediante una perturbación tipo s-wave que viaja en la dirección de la cuerda al igual que en los casos de RG y GB, y posteriormente comparar los comportamientos en la inestabilidad de dichas teorías.

Los capítulos de esta tesis están organizados de la siguiente manera:

El capítulo I consiste en una revisión breve de la teoría de Relatividad de Einstein y su extensión a mayores dimensiones, mostrando las soluciones de agujeros negros estáticos y cuerdas negras homogéneas de esta teoría. Además, mostramos la inestabilidad de Gregory-Laflamme y su contraparte termodinámica, para la cuerda negra.

En el capítulo II, se presenta la generalización de Relatividad General para D arbitrario, la teoría de Lovelock. A sus correspondientes soluciones de agujeros y cuerdas negras se le aplica el mismo estudio realizado para las soluciones de Relatividad General en el capítulo anterior.

El capítulo III detalla el trabajo de esta tesis, donde mostramos la inestabilidad de la cuerda negra en la teoría de Lovelock de tercer orden en la curvatura y posteriormente comparamos su comportamiento con los trabajos anteriores en Relatividad General y Gauss-Bonnet

El capítulo IV está dedicado a comentarios y conclusiones.



Capítulo 1

Relatividad General

1.1. Relatividad General en $D = 4$

En el año 1915, Albert Einstein formula la Teoría General de la Relatividad, teoría geométrica del espacio-tiempo, que incorpora la fuerza de gravedad en un marco consistente con la Teoría de la Relatividad Especial. En esta teoría el concepto de fuerza gravitatoria es reemplazado por la propia curvatura del espacio-tiempo, generada a su vez por su contenido de materia y energía. El espacio-tiempo ahora es una variedad curva cuatri-dimensional, localmente plana y donde en cada punto de esta son válidas las leyes de la Relatividad Especial.

En esta teoría, el espacio-tiempo adquiere un carácter dinámico; éste es curvado por la presencia de materia y dicha curvatura, descrita por las ecuaciones de campo de Einstein, es la que define las trayectorias que siguen las partículas.

En lenguaje matemático, la teoría de Einstein describe el espacio-tiempo como una variedad diferenciable pseudo-Riemanniana, localmente equivalente al espacio plano de Minkowski.

1.1.1. Acción de Einstein-Hilbert y ecuaciones de campo

El principio variacional para la Relatividad General, conocida como la acción de Einstein-Hilbert en cuatro dimensiones, es dada por

$$I_{\text{E-H}} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_{\text{materia}}, \quad (1.1)$$

donde \mathcal{M} es la variedad cuatri-dimensional, G la constante gravitacional de Newton, R el escalar de Ricci, Λ la constante cosmológica y S_{materia} la acción para la distribución de materia. La variación de esta acción respecto de la métrica, el campo dinámico en esta teoría, nos entrega las ecuaciones de campo de Einstein. Las ecuaciones de Einstein en su forma general son dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

con $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci, $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momentum y $g_{\mu\nu}$ la métrica del espacio-tiempo. Las soluciones de estas ecuaciones representan posibles configuraciones geométricas del espacio-tiempo ocasionada por una distribución de materia. A continuación detallaremos un procedimiento alternativo al mencionado anteriormente para encontrarn las ecuaciones de

Einstein.

Consideremos una variedad métrica en el que el intervalo entre dos eventos infinitesimalmente cercanos viene dado por el elemento de línea

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

con $g_{\mu\nu}$ el tensor de segundo rango simétrico y no-degenerado, usualmente llamado métrica. La métrica define la noción de distancia en la variedad, determinando la geometría del espacio-tiempo y la relación causal entre distintos eventos. Además de definir un isomorfismo entre los espacios tangente y cotangente sobre cada punto de la variedad.

Por otra parte, la conexión es un objeto que permite comparar elementos de los espacios tangentes de puntos diferentes en la variedad.

De forma general, la métrica y la conexión son construcciones independientes, pero en Relatividad General la conexión se define en términos de la métrica y sus derivadas. Definida así la conexión, conocida como conexión de Levi-Civita, tiene la forma

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial_\nu g_{\rho\lambda} + \partial_\lambda g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\nu\lambda}),$$

donde sus componentes, simétricas en los dos índices bajos, son llamados símbolos de Christoffel. Es importante notar que la conexión no es un tensor.

Ahora, con la métrica y la conexión de Levi-Civita podemos definir el tensor de curvatura de Riemann, dado por

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} + \Gamma^\sigma{}_{\nu\rho} \Gamma^\mu{}_{\sigma\lambda} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} \Gamma^\mu{}_{\sigma\rho}.$$

Este tensor nos dice cómo cambia la curvatura en la variedad. Definiendo la derivada covariante como

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} V^\lambda,$$

donde V^ν es un campo vectorial, tenemos que $R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}$ mide la diferencia en el transporte paralelo de un vector desde un punto a otro, a través de curvas distintas determinadas por campos vectoriales diferentes. De los anterior, tenemos que sobre un espacio plano, $R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = 0$.

El tensor de Riemann es importantísimo en nuestra construcción. Algunas de sus útiles propiedades son

$$g_{\mu\sigma} R^\sigma{}_{\nu\lambda\rho} = R_{\mu\nu\lambda\rho} = -R_{\nu\mu\lambda\rho} = -R_{\mu\nu\rho\lambda} = R_{\lambda\rho\mu\nu},$$

y

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} + R_{\mu\lambda\rho\nu} + R_{\mu\rho\nu\lambda} = 0,$$

A partir de contracciones del tensor de Riemann tenemos el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} = g^{\lambda\rho} R_{\rho\mu\lambda\nu},$$

el escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu},$$

y el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R.$$

este último simétrico y de divergencia nula. Todas estas, cantidades que aparecerán en las ecuaciones de campo de Einstein. Ahora, desde el punto de vista del movimiento de las partículas en el espacio-tiempo, sabemos que las partículas libre describen curva geodésicas, que pueden ser vistas como la generalización a un espacio curvo de las rectas, que en un espacio plano minimizan la distancia entre dos puntos.

Matemáticamente, las geodésicas están dadas por

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0.$$

Entonces, si la conexión corresponde a la conexión de Levi-Civita, el movimiento de las partículas dependerá de la geometría del espacio-tiempo, definida por su métrica.

Lo anterior y la idea de que la energía y materia eran los responsable de curvar el espacio-tiempo, llevó a Einstein a la conclusión de que las ecuaciones que describen la interacción gravitatoria debían ser una igualdad entre un objeto puramente geométrico y algún tensor describiendo la distribución de energía.

En su forma general, las ecuaciones de Einstein son

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu},$$

con Λ la constante cosmológica y $T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{materia}}}{\delta g^{\mu\nu}}$ describe la distribución de energía-momentum.

Además,

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} \equiv 0,$$

$$\nabla_\mu g^{\nu\lambda} \equiv 0,$$

lo que es compatible con la conservación del tensor de energía-momentum,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

1.1.2. Agujero negro de Schwarzschild

Luego de meses de la formulación final de la Relatividad General de Einstein en 1915, Karl Schwarzschild encontró la primera solución exacta de esta teoría, conocidas como solución de agujero negro de Schwarzschild, o agujero negro estático, dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{r_+}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.3)$$

con $d\Omega$ es el elemento de línea de la 2-esfera y r_+ el radio de Schwarzschild. Esta solución resuelve las ecuaciones de Einstein con $T_{\mu\nu} = 0$, es decir, una solución de vacío. Dado que la solución es estática y simétricamente esférica, originalmente se interpreta como la solución que describe la geometría fuera de un cuerpo masivo esférico y estático, bajo la suposición de que la carga eléctrica y momento angular del cuerpo, además de la constante cosmológica universal, son cero. Además, esta

solución es una útil aproximación para describir objetos astronómicos que rotan lentamente, tales como estrellas o planetas, incluidos la Tierra

De acuerdo al teorema de Birkhoff, la métrica de Schwarzschild es la solución de vacío esféricamente simétrica más general de las ecuaciones de Einstein. Al analizar la solución (1.3), podemos notar que una de las componentes de la métrica se indetermina en el horizonte, cuando $r = r_+$. Ahora, sabemos que en Relatividad General debemos distinguir entre singularidades de curvatura, genuinas singularidades del espacio-tiempo, en las que la curvatura diverge, y singularidades coordenadas, donde las componentes de la métrica divergen por una mala elección de las coordenadas. Para el caso de la solución de Schwarzschild, el cálculo de los invariantes de curvatura nos muestran que r_+ es solo una singularidad coordenada, como veremos en la siguiente subsección, y $r = 0$ es una singularidad de curvatura.

1.1.3. Coordenadas de Kruskal para la solución de Schwarzschild

Según lo dicho en la subsección anterior, tenemos que las coordenadas usadas en la solución (1.3) tienen un problema; el horizonte de eventos r_+ es un punto singular coordenado.

En esta subsección mostraremos la deducción de un sistema coordenado apropiado para estudiar la solución de Schwarzschild en regiones que involucren el horizonte; coordenadas conocidas como coordenadas de Kruskal.

Explícitamente, el problema con las coordenadas de Schwarzschild es que $dt/dr \rightarrow \infty$ sobre la geodésica nula radial al acercarse al horizonte, cerrando los conos de luz e indeterminando la estructura causal de la solución, es decir, cambios en la dirección r se vuelven cada vez más lentos con respecto a la coordenada t . Podemos arreglar esta situación si definimos una nueva coordenada temporal que varíe aún de forma más lenta sobre la geodésica nula. Esta coordenada puede ser definida al resolver la condición que caracteriza una curva radial nula, de donde obtenemos $t = \pm r_* + const$, con r_* representando a la coordenada tortuga dada por

$$r_* = r + r_+ \log \left(\frac{r}{r_+} - 1 \right).$$

Definiendo las coordenadas nulas dobles V, U

$$V = \exp \left(\frac{t + r_*}{2r_+} \right), \quad U = -\exp \left(-\frac{t - r_*}{2r_+} \right),$$

Tenemos que las coordenadas de Kruskal T, R , dadas por $T = \frac{1}{2}(V + U)$ y $R = \frac{1}{2}(V - U)$ quedan para nuestro caso como

$$T = \left(\frac{r}{r_+} - 1 \right)^{1/2} \exp(r/2r_+) \sinh \left(\frac{t}{2r_+} \right)$$

$$R = -\left(\frac{r}{r_+} - 1 \right)^{1/2} \exp(r/2r_+) \cosh \left(\frac{t}{2r_+} \right).$$

En términos de estas coordenadas, la solución de Schwarzschild toma la forma

$$ds^2 = 4 \frac{r_+^3}{r} e^{-r/r_+} (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega^2$$

De esto, podemos ver explícitamente la naturaleza no-singular de $r = r_+$; en esta forma ninguno de los coeficientes de la métrica se comporta de manera especial en el horizonte.

1.2. Relatividad General en dimensión arbitraria

Relatividad General dimensiones mayores que cuatro ha sido sujeto de atención en las últimas décadas. Algunas de las aplicaciones de interés son:

- La Teoría de Cuerdas contiene gravedad y requiere más de cuatro dimensiones.
- La correspondencia AdS/CFT relaciona la dinámica de un agujero negro D -dimensional con aquellos de la teoría cuántica de campos en $D - 1$ -dimensiones inducida en el borde.
- La producción de agujeros negros en altas dimensiones en colisionadores futuros se vuelve una posibilidad concebible en escenarios que involucren dimensiones extras y gravedad de TeV -escala.
- Como objetos matemáticos, las soluciones de agujero negro son una de las más importantes variedades donde $R_{\mu\nu} = 0$, en cualquier dimensión.

Las nuevas características de las soluciones de agujeros negros en mayores dimensiones, que hasta ahora han sido identificadas, pueden ser entendidas en términos físicos como producto de dos ingredientes principales de la teoría: diferente dinámica de rotación y la aparición de objetos negros extendidos.

Con respecto al primer punto, podemos decir que para dimensiones mayores existe la posibilidad de rotación en varios planos independientes y, con el número de dimensiones incrementa la competencia relativa entre los potenciales gravitacionales y centrífugos. Con respecto al segundo, al menos en gravedad en vacío, se admiten soluciones de objetos negros con horizontes extendidos, i.e., cuerdas negras y, en general, p -branas negras. Aunque estos no son soluciones asintóticamente planas, en el sentido global, proveen de la intuición básica para entender nuevos tipos de agujeros negros asintóticamente planos. Sabemos que las ecuaciones de Einstein en principio son independientes de la dimensión del espacio-tiempo, por lo que la generalización de la teoría de la Relatividad de Einstein a mayores dimensiones es directa, la acción estará dada por

$$I_{\text{E-H}}^{(D)} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_{\text{materia}}, \quad (1.4)$$

y las ecuaciones de campo son por supuesto de la misma forma de (1.1.1),

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

donde $\mu = 0, \dots, D - 1$.

1.2.1. Solución de Schwarzschild-Tangherlini

Para las ecuaciones de campo definida anteriormente tenemos que la generalización de la solución de Schwarzschild a una dimensión arbitraria D corresponde a una solución estática y con simetría hiperesférica, dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \left(\frac{r_+}{r} \right)^{D-3} \right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{r_+}{r} \right)^{D-3} \right)} dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2, \quad (1.6)$$

para (1.1.1) con $T_{\mu\nu} = 0$. Esta solución es conocida como la solución de Schwarzschild-Tangherlini y se reduce a la solución de Schwarzschild usual en $D = 4$.

En esencia, lo único que hemos hecho es cambiar el decaimiento radial r^{-1} del potencial gravitacional por uno que decae como r^{3-D} . Es directo verificar que esta métrica satisface $R_{\mu\nu} = 0$ y que tiene un horizonte de eventos en $r = r_+$.

1.2.2. Cuerdas negras homogéneas

A partir de las soluciones de agujeros negros generalizadas revisadas en la subsección anterior es posible construir otras soluciones con horizontes de eventos y que satisfagan las ecuaciones de Einstein. El caso más simple corresponde a las soluciones de cuerda negra, correspondientes a la extensión dimensional más simple de una solución de agujero negro, y que tomaremos como ejemplo para mostrar la construcción de estos objetos extendidos.

Entonces, consideremos Relatividad General en el vacío en dimensión D . Las ecuaciones de campo estarán dadas por

$$R_{\mu\nu} = 0,$$

con $\mu = 0, \dots, D - 1$.

En la subsección anterior vimos que la métrica con simetría hipersférica (1.6) es solución de estas ecuaciones, pero no la única. Consideremos, por ejemplo, un espacio-tiempo D -dimensional definido por el elemento de línea

$$ds^2 = d\tilde{s}_{D-1}^2(x^\mu) + dz^2,$$

con $d\tilde{s}_{D-1}^2$ la métrica de Schwarzschild $D - 1$ -dimensional. Debido a las propiedades del tensor de Riemann tenemos que esta métrica también satisface las ecuaciones de Einstein, dado que $R_{\mu 5} = 0$, luego, la métrica anterior, conocida como solución de cuerda negra homogénea, es también solución de las ecuaciones de Einstein. El proceso de agregar una dimensión a una solución se conoce usualmente como una *oxidación* (opuesto a la reducción), por lo que podemos decir que la solución de cuerda negra D -dimensional resulta de oxidar la solución de agujero negro en $D - 1$ -dimensiones.

Construída de esta manera, la cuerda negra tiene un horizonte cilíndrico y, en principio, masa infinita. Considerando la dimensión extra como compacta, es decir, finita y de dimensión L , la cuerda negra adquiere una masa finita, obteniendo agujero negro de Kaluza-Klein en $D = 5$ [2].

De manera general, una solución de cuerda negra de una teoría D -dimensional corresponde a un espacio-tiempo con topología $M_D = \mathcal{M}_{D-1} \times \mathcal{R}$, donde \mathcal{R} es una sección espacial.

Aquí hemos considerado Relatividad General en el vacío. En teorías con constante cosmológica o con potencias mayores en la curvatura soluciones de cuerda negra son difíciles de encontrar. Soluciones analíticas de cuerda negra se han encontrado para teorías puras de Lovelock, como mostraremos más adelante.

Tal como se mencionó anteriormente, la aparición de nuevas soluciones es una de las riquezas de considerar dimensiones altas. En $D = 4$ la única solución de vacío, regular, de objeto negro es la solución de Kerr, con horizonte de evento de topología esférica.

Como última generalización, podemos considerar el agregar más dimensiones a la solución de agujero negro, obteniendo soluciones de p -branas negras. El elemento de línea

$$ds^2 = d\tilde{s}_d^2 + dz_i dz^i,$$

con $i = 1, \dots, p$, corresponde a la solución de p -brana negra homogénea $d + p$ -dimensional

1.3. Estabilidad

Para $D = 4$, sabemos que para Relatividad General, la única solución de agujero negro estática corresponde a la solución de Schwarzschild. Sin embargo, para $D > 4$, vimos en la sección anterior que existen al menos dos tipos de soluciones estáticas posibles, la solución de agujero negro y la solución de cuerda negra. Entonces, en este último caso y con estas dos configuraciones posibles, es válido preguntarse ¿cuál es la configuración físicamente relevante en un hipotético colapso gravitacional? Con la idea de dilucidar esta interrogante, en las subsecciones siguientes haremos una breve revisión del argumento termodinámico y la inestabilidad perturbativa de Gregory-Laflamme [6].

1.3.1. Argumento termodinámico

Desde el punto de vista termodinámico sabemos que en el Universo los sistemas siempre tienden a un estado de máxima entropía, en el ensamble microcanónico. Dado que los agujeros negros emiten radiación de Hawking sabemos de la termodinámica que es posible asignarle una entropía a estas soluciones. Por lo tanto, si existe una diferencia de entropía entre la solución agujero negro y la de cuerda negra, es la configuración de mayor entropía la que deberá manifestarse.

Dadas las áreas de los horizontes de las soluciones de agujero negro (BH) y de cuerda negra (BS), es posible mostrar que las entropías de ambos objetos crecen según

$$S_{BH} \sim m^{\frac{D-2}{D-3}}$$

$$S_{BS} \sim m^{\frac{D-3}{D-4}}$$

con m la masa de ambas soluciones. Estas entropías, como función de la masa, se cruzan para un valor de masa crítica m_c , por lo tanto, para valores de la masa menores que m_c el agujero negro es el que posee mayor entropía, y para valores por sobre m_c lo es la cuerda negra. De esto vemos que si la longitud de la cuerda es suficientemente grande, la configuración preferida termodinámicamente es la de agujero negro, por lo tanto es ésta la configuración más relevante como estado final. Como mostraremos en la siguiente subsección, las soluciones de cuerda negra en Relatividad General son perturbativamente inestables y precisamente esta relación entre las inestabilidades termodinámicas y perturbativas es lo que llevó a Gubser y Mitra [39] a conjeturar que ambos tipos de inestabilidades siempre se presentan juntas para soluciones de objetos extendidos. Este resultado obtenido mediante el argumento termodinámico debe ser avalado por alguna inestabilidad perturbativa de la cuerda, y esto es lo que mostraremos a continuación.

1.3.2. Cálculo perturbativo, inestabilidad de Gregory-Laflamme

En Relatividad General, una pequeña perturbación de un espacio-tiempo está respresentada por un cambio en la métrica, dado por $h_{\mu\nu}$. En nuestro caso, queremos perturbar la solución de cuerda negra homogénea (eicaondada), nuestra solución de background, que denotaremos con $\hat{g}_{\mu\nu}$, por lo que

$$g_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{1.7}$$

definirá nuestra solución perturbada.

Según el método estándar, usaremos el método de separación de variables y descompondremos la perturbación en términos de las simetrías de la geometría de background. La cuerda negra tiene invariancias tanto de traslaciones temporal como en la dirección z , además de la isometría correspondiente a la simetría hiperesférica de la solución de Schwarzschild. Por simplicidad consideraremos una perturbación esféricamente simétrica, lo que significa que no existen términos cruzados con coordenada angular, es decir, la perturbación queda explícitamente dada por

$$h_{\mu\nu}(t, r, z) = e^{\Omega t} e^{ikz} \begin{pmatrix} h_{tt}(r) & h_{tr}(r) & 0 & 0 \\ h_{tr}(r) & h_{rr}(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h(r) \sigma_{S^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde los factores $e^{\Omega t}$ y e^{ikz} representan un modo creciente y el comportamiento oscilatorio de la perturbación, respectivamente. De las ecuaciones de Einstein linealizadas obtenemos un conjunto de ecuaciones diferenciales para las componentes de la perturbación, de las que podemos obtener el comportamiento asintótico. Como buscamos inestabilidades consideramos modos crecientes, tales que $\Omega > 0$. Aunque la solución a dicha ecuación sea muy difícil de encontrar analíticamente, se puede estudiar el comportamiento asintótico de ésta en el horizonte y el infinito. Si existe una solución que pueda ligar las ramas asintóticas bien comportadas, existirá la inestabilidad y, como sabemos, éste es el caso. Ahora, para determinar la regularidad de la perturbación necesitamos que $h_{\mu\nu}$ tienda a cero para r grandes, escogiendo la rama decreciente para este caso, y que además sea regular en el horizonte, lo que debe verificarse en un sistema coordenado localmente regular en el horizonte. Una elección conveniente de coordenadas son las coordenadas de Kruskal.

Es natural preguntarse si los resultados anteriores pueden ser generalizados para teorías que involucren potencias mayores en la curvatura. Sobre esto hablaremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Teoría de Lovelock

2.1. Acción de Lovelock y ecuaciones de campo

La teoría de Lovelock, escrita para el caso particular de $D = 5$, por Lanczos en el año 1938 y posteriormente generalizada por Lovelock para $D \geq 3$ en el año 1971, es la teoría descrita por el Lagrangiano más general construido con los mismos principio de Relatividad General, esto es, el principio de covariancia general y un principio de acción que entregue ecuaciones de campo de segundo orden para la métrica.

La acción de Lovelock corresponde a suma de $[D/2]$ términos

$$I_{(n)} = \frac{1}{2\kappa_D^2} \int d^D x \sqrt{-g} \alpha_n \mathcal{L}_{(n)},$$

donde $\kappa_D = \sqrt{8\pi G_D}$ y α_n son constantes arbitrarias que representan el acoplamiento de los términos en la densidad Lagrangiana dada por

$$\mathcal{L}_{(n)} = \frac{1}{2^n} \delta_{\rho_1 \dots \rho_n \sigma_1 \dots \sigma_n}^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_n} R_{\mu_1 \nu_1}^{\rho_1 \sigma_1} \dots R_{\mu_n \nu_n}^{\rho_n \sigma_n}. \quad (2.1)$$

De esto, podemos que ver que los primeros términos en $\mathcal{L}_{(n)}$ corresponden a

- Término cosmológico

$$\mathcal{L}_{(0)} = 1,$$

- Término de Einstein-Hilbert

$$\mathcal{L}_{(1)} = R,$$

- Término de Gauss-Bonnet

$$\mathcal{L}_{(2)} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda},$$

- Término de Lovelock de tercer-orden

$$\mathcal{L}_{(3)} = R^3 - 12RR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + 16R_{\mu\nu}R^\mu{}_\rho R^{\nu\rho} + 24R_{\mu\nu}R_{\rho\sigma}R^{\mu\rho\nu\sigma} + 3RR_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 24R_{\mu\nu}R^\mu{}_{\rho\sigma\kappa}R^{\nu\rho\sigma\kappa} + 4R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\eta\xi}R^{\rho\sigma}{}_{\eta\xi} - 8R_{\mu\rho\nu\sigma}R^\mu{}_\eta{}^\nu{}_\xi R^{\rho\eta\sigma\xi}.$$

Notemos que los primeros dos términos en la acción de Lovelock son la constante cosmológica y el término cinético de la acción de Einstein-Hilbert respectivamente y, por lo tanto, tenemos que Relatividad General está contenida en la teoría de Lovelock como caso particular.

Las ecuaciones de campo en el vacío son

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = \sum_{n=0}^{[D/2]} \alpha_{(n)} E_{\mu\nu}^{(n)} = 0, \quad (2.2)$$

donde

$$E_{\nu}^{\mu(n)} = -\frac{1}{2^{n+1}} \delta^{\mu\eta_1 \dots \eta_n \xi_1 \dots \xi_n} R_{\eta_1 \xi_1}{}^{\rho_1 \sigma_1} \dots R_{\eta_n \xi_n}{}^{\rho_n \sigma_n}. \quad (2.3)$$

Nuevamente, tenemos que los primeros términos en (2.3) son

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu}^{(0)} &= -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}, \\ E_{\mu\nu}^{(1)} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \\ E_{\mu\nu}^{(2)} &= 2(RR_{\mu\nu} - 2R_{\mu\rho}R^{\rho}_{\nu} - 2R^{\rho\sigma}R_{\mu\rho\nu\sigma} + R_{\mu}{}^{\rho\sigma\gamma}R_{\nu\rho\sigma\gamma}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{(2)}, \\ E_{\mu\nu}^{(3)} &= 3(R^2 R_{\mu\nu} - 4RR_{\rho\mu}R^{\rho}_{\nu} - 4R^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}R_{\mu\nu} + 8R^{\rho\sigma}R_{\rho\mu}R_{\sigma\nu} - 4RR^{\rho\sigma}R_{\rho\mu\sigma\nu} \\ &\quad + 8R^{\rho\kappa}R^{\sigma}_{\kappa}R_{\rho\mu\sigma\nu} - 16R^{\rho\sigma}R^{\kappa}_{(\mu}R_{|\kappa\sigma\rho|\nu)} + 2RR^{\rho\sigma\kappa}_{\mu}R_{\rho\sigma\kappa\nu} + R_{\mu\nu}R^{\rho\sigma\kappa\eta}R_{\rho\sigma\kappa\eta} \\ &\quad - 8R^{\rho}_{(\mu}R^{\sigma\kappa\eta}_{|\rho|}R_{|\sigma\kappa\eta|\nu)} - 4R^{\rho\sigma}R^{\kappa\eta}_{\rho\mu}R_{\kappa\eta\sigma\nu} + 8R_{\rho\sigma}R^{\rho\kappa\sigma\eta}R_{\kappa\mu\eta\nu} - 8R_{\rho\sigma}R^{\rho\kappa\eta}_{\mu}R^{\sigma}_{\kappa\eta\nu} \\ &\quad + 4R^{\rho\sigma\kappa\eta}R_{\rho\sigma\xi\mu}R_{\kappa\eta}{}^{\xi}_{\nu} - 8R^{\rho\kappa\sigma\eta}R^{\xi}_{\rho\sigma\mu}R_{\xi\kappa\eta\nu} - 4R^{\rho\sigma\kappa}_{\eta}R_{\rho\sigma\kappa\xi}R^{\eta}_{\mu}{}^{\xi}_{\nu}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{(3)} \end{aligned}$$

En lo que sigue, consideraremos teorías con solo un único término en la acción, a saber, teorías de Lovelock puras, con $n > 1$, dado que en estas teorías es posible construir cuerdas negras homogéneas y p -branas negras de manera analítica [23].

2.1.1. Soluciones en teorías de Lovelock puras

En esta subsección, y únicamente por simplicidad, usaremos el lenguaje de formas diferenciales [ver apéndice 5.0.1].

Para encontrar las soluciones agujeros negros consideremos un ansatz estacionario y esféricamente simétrico, de la forma

$$ds^2 = -f^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f^2(r)} + r^2 d\hat{\Sigma}_{\gamma}^2 \quad (2.4)$$

con $d\hat{\Sigma}_{\gamma}$ corresponde al elemento de línea de un espacio $(D-2)$ dimensional de curvatura constante γ , la que puede tomar valores normalizados de $+1, 0, -1$.

Introduciendo una base ortonormal $\{e^a\}$, con $a = 0, 1, \dots, D$, tenemos que el elemento de línea queda escrito como

$$ds^2 = \eta_{ab} e^a e^b$$

y escogemos los vielbein según

$$e^0 = f(r)dt, \quad e^1 = \frac{1}{f(r)}dr, \quad e^i = r\hat{e}^i,$$

donde \hat{e}^i corresponden a los vielbein de $\hat{\Sigma}$.

De la primera ecuación de estructura de Cartan

$$de^a = -\omega^a{}_b e^b$$

encontramos las componentes de la conexión de spin, dadas por

$$\omega^0_1 = f'(r)e^0, \quad \omega^i_1 = \frac{f(r)}{r}e^i, \quad \omega^i_j = \hat{\omega}^i_j,$$

y con lo que calculamos las componentes de la curvatura que quedan

$$R^{01} = -\frac{1}{2}[f^2(r)]''e^0e^1, \quad R^{0i} = -\frac{[f^2(r)]'}{2r}e^0e^i, \quad R^{1i} = -\frac{[f^2(r)]'}{2r}e^1e^i, \quad R^{ij} = \frac{1}{r^2}[\gamma - f^2(r)]e^ie^j,$$

Al introducir las curvaturas en las ecuaciones de Lovelock obtenemos una expresión en la que podemos determinar la función f que caracteriza al posible agujero negro. Para esto, consideramos la ecuación de campo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} \alpha_n (D-2n) \epsilon_{0a_1 \dots a_{D-1}} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2n-1} a_{2n}} e^{a_{2n+1}} \dots e^{a_{D-1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} \alpha_n (D-2n) (R^{ij}_{ij})^{n-1} (2n R^{1i}_{1i} + (d-2n-1) R^{ij}_{ij}) e^1 e^{i_1} \dots e^{i_{D-2}}, \end{aligned}$$

luego, para f se debe cumplir que

$$\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} \alpha_n (D-2n) (R^{ij}_{ij})^{n-1} (2n R^{1i}_{1i} + (d-2n-1) R^{ij}_{ij}) = 0.$$

En términos de las funciones R^{1j}_{1j} y R^{ij}_{ij} tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} \alpha_n (D-2n) [r^{d-2n-1} (\gamma - f^2(r))^n]' = 0,$$

donde

$$\mu = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} \alpha_n (D-2n) [r^{d-2n-1} (\gamma - f^2(r))^n] \quad (2.5)$$

es una constante de integración proporcional a la masa del agujero negro.

Para distintos valores de n , es decir, para distintas teorías de Lovelock, la ecuación anterior nos entrega la forma de la función f . En el caso de soluciones de agujero negro esféricamente simétricas, estamos asumiendo que la variedad base es localmente equivalente a una d -esfera. En nuestro caso de interés, es decir, en el contexto de las teorías de Lovelock puras, tenemos que (2.5) contiene solo un término, y de acuerdo a [22], de la integración de (2.5) obtenemos las soluciones de agujero negro esféricamente simétricas

$$ds_{\text{BH}}^2 = - \left(1 - \left(\frac{r_+}{r} \right)^{\frac{d-2n-1}{n}} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r_+}{r} \right)^{\frac{d-2n-1}{n}}} + r^2 d\Omega_{d-2}^2, \quad (2.6)$$

donde $d\Omega_{d-2}$ es el elemento de línea de una $(d-2)$ -esfera y r_+ corresponde al radio del horizonte de eventos relacionado con la masa m del agujero negro según

$$r_+^{d-2n-1} = \frac{2m\kappa_d^2 (d-2n-1)!}{\alpha_n \Omega_{d-2} (d-2)(d-3)!}.$$

Para obtener soluciones de cuerdas negras y de p -branas en teorías puras de Lovelock seguimos el mismo procedimiento descrito en la sección anterior, es decir, debemos oxidar las soluciones de agujero negro (2.6).

2.1.2. Coordenadas de Kuskal

Para el análisis perturbativo posterior y debido al hecho de que una superficie a $t = \text{const}$ intersecta el horizonte en la superficie de bifurcación en vez de intersectar el horizonte futuro, es útil considerar coordenadas tipo-Kruskal, donde, superficies a $T = \text{const}$ sí intersectan el horizonte futuro, lo que nos permite definir apropiadamente la evolución de la perturbación.

Cerca del horizonte, la coordenada tortuga generalizada r_* para esta familia de agujeros negros tiene la forma

$$r_* \sim \frac{nr_+}{d-2n-1} \ln(r - r_+).$$

Definimos la coordenada de Kruskal nula como

$$\begin{aligned} U &= -\exp\left(-\frac{d-2n-1}{2nr_+}(t - r_*)\right), \\ V &= \exp\left(\frac{d-2n-1}{2nr_+}(t + r_*)\right). \end{aligned}$$

Y finalmente hacemos

$$R = V - U, \quad T = V + U.$$

En términos de estas coordenadas la métrica (2.6) es regular en el horizonte, tomando la forma

$$ds_{\text{BH}}^2 = f'(r_+) \left(\frac{nr_+}{d-2n-1}\right)^2 (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega_{d-2}^2,$$

Llamamos a (T, R) las coordenadas de Kruskal generalizadas para esta solución.

2.2. Argumento termodinámico para inestabilidad

En el contexto de las teorías puras de Lovelock, las entropías de las soluciones de agujero negro y cuerda negra (compactificada) en dimensión D , en términos de la masa, tienen el siguiente comportamiento

$$S_{\text{BH}} \sim m^{\frac{D-2n}{D-2n-1}}, \quad S_{\text{BS}} \sim m^{\frac{D-2n-1}{D-2n-2}}.$$

Luego, dada una teoría vemos que estas entropías se cruzan en una determinada masa crítica m_c . Para masas menores a m_c , las soluciones de agujero negro son las favorecidas termodinámicamente.

La existencia de una transición entre las soluciones termodinámicamente favorecidas deben estar ligadas a una inestabilidad perturbativa, de acuerdo a la conjetura de Gubser-Mitra [39].

2.3. Cálculo perturbativo de soluciones de cuerda negra

Como señalamos anteriormente, la inestabilidad de Gregory-Laflamme ha sido ampliamente estudiada en Relatividad General, pero para teorías de Lovelock el escenario es distinto, pues solo ha sido tratada recientemente para el caso de

Gauss-Bonnet puro en siete dimensiones [31]. En este trabajo, los autores, inspirados en los trabajos de Relatividad General, consideran una perturbación tipo s-wave en la dirección de la cuerda que permite encontrar modos inestables para longitudes de onda grande.

Queremos saber cómo se comportan perturbativamente las soluciones en teorías de Lovelock, donde existen ciertas degeneraciones o patologías. En teorías de Lovelock puras no es posible estudiar la estabilidad perturbativa del plano, dado que obtenemos ecuaciones que resultan idénticamente ceros. Entonces, es interesante buscar soluciones que sí tengan un problema perturbativo bien definido, en el sentido predictivo. Las cuerdas negras proveen de un ejemplo.





Capítulo 3

Inestabilidad de la cuerda negra en teorías de Lovelock de tercer orden en la curvatura

3.1. Solución de cuerda negra

Estamos interesados en analizar la evolución de perturbaciones de cuerdas negras homogéneas, son obtenidas oxidando soluciones de agujero negro en teorías puras de Lovelock. Estas soluciones de cuerda negra en $D = 9$, están dadas por

$$ds^2 = - \left(1 - \left(\frac{r_+}{r}\right)^{\frac{1}{3}}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{r_+}{r}\right)^{\frac{1}{3}}\right)} dr^2 + r^2 d\Omega_6^2 + dz^2. \quad (3.1)$$

En [31] se mostró que estas configuraciones son termodinámicamente inestables para masas $m < m_c$. En las próximas secciones mostraremos que esta solución también presenta inestabilidades perturbativas.

3.1.1. Perturbación tipo s-wave

Como se mencionó anteriormente, cuerdas negras en Relatividad General y teoría de Gauss-Bonnet, [6] y [31], respectivamente, son perturbativamente inestables. En particular, el modo inestable en ambos casos corresponde a un modo tipo s-wave y, por lo tanto, inspirados en esto, consideraremos la misma familia de perturbaciones en las teorías de Lovelock de tercer orden. Tales perturbaciones están definidas por:

$$H_{\mu\nu}(x^\alpha) = e^{\Omega t + ikz} h_{\mu\nu}(r),$$

where

$$h_{\mu\nu}(r) = \begin{pmatrix} h_{tt}(r) & h_{tr}(r) & 0 & 0 \\ h_{tr}(r) & h_{rr}(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h(r)\sigma_{S^{d-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En la siguiente sección mostraremos que la cuerda negra para teoría de Lovelock de tercer orden en nueve dimensiones es inestable bajo (3.1.1).

3.2. Las cuerdas negras en teorías de Lovelock de tercer orden son inestables

Consideramos una cuerda negra homogénea en $D = 9$, la dimensión mínima en la que es posible construir este tipo de soluciones en teorías de Lovelock de tercer orden, y es obtenida de la oxidación de un agujero negro en $d = 8$ donde el potencial gravitacional es $f(r) = 1 - \left(\frac{r_{\pm}}{r}\right)^{1/3}$.

Las ecuaciones de campo a resolver corresponden a

$$E_{\mu\nu}^{(3)} = \begin{aligned} & 3(R^2 R_{\mu\nu} - 4RR_{\rho\mu}R_{\rho\nu} - 4R^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}R_{\mu\nu} + 8R^{\rho\sigma}R_{\rho\mu}R_{\sigma\nu} - 4RR^{\rho\sigma}R_{\rho\mu\sigma\nu} \\ & + 8R^{\rho\kappa}R^{\sigma}{}_{\kappa}R_{\rho\mu\sigma\nu} - 16R^{\rho\sigma}R^{\kappa}{}_{(\mu}R_{|\kappa\sigma\rho|\nu)} + 2RR^{\rho\sigma\kappa}{}_{\mu}R_{\rho\sigma\kappa\nu} + R_{\mu\nu}R^{\rho\sigma\kappa\eta}R_{\rho\sigma\kappa\eta} \\ & - 8R^{\rho}{}_{(\mu}R^{\sigma\kappa\eta}{}_{|\rho|}R_{|\sigma\kappa\eta|\nu)} - 4R^{\rho\sigma}R^{\kappa\eta}{}_{\rho\mu}R_{\kappa\eta\sigma\nu} + 8R_{\rho\sigma}R^{\rho\kappa\sigma\eta}R_{\kappa\mu\eta\nu} - 8R_{\rho\sigma}R^{\rho\kappa\eta}{}_{\mu}R^{\sigma}{}_{\kappa\eta\nu} \\ & + 4R^{\rho\sigma\kappa\eta}R_{\rho\sigma\xi\mu}R_{\kappa\eta}{}^{\xi}{}_{\nu} - 8R^{\rho\kappa\sigma\eta}R^{\xi}{}_{\rho\sigma\mu}R_{\xi\kappa\eta\nu} - 4R^{\rho\sigma\kappa}{}_{\eta}R_{\rho\sigma\kappa\xi}R^{\eta}{}_{\mu}{}^{\xi}{}_{\nu}) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}^{(3)} \end{aligned} = 0.$$

Por conveniencia, usamos una coordenada radial nueva $p = 1 - \left(\frac{r_{\pm}}{r}\right)^{1/3}$ que mapea la región fuera del horizonte $r \in [r_+, +\infty[$ a $p \in [0, 1[$.

En términos de p la métrica toma la forma

$$ds^2 = -pdt^2 + \frac{9r_+^6}{p(1-p)^8}dp^2 + \frac{r_+^6}{(1-p)^6}d\Omega_{(6)}^2 + dz^2. \quad (3.2)$$

De las ecuaciones de campo linealizadas para la métrica perturbada obtenemos las siguientes expresiones para las componentes h_{tt} , h_{pp} y h de $h_{\mu\nu}$ en términos solo de h_{tp} y sus derivadas

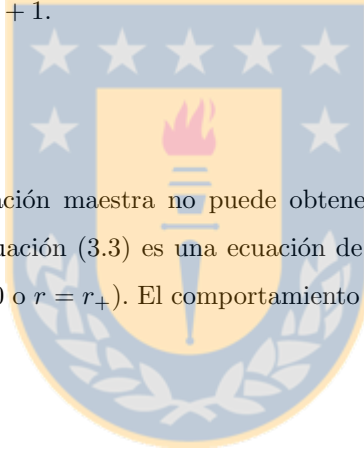
$$\begin{aligned} h_{tt}(p) &= \frac{1}{9} \frac{p^2(p-1)^8}{\Omega r_+^2} \frac{dh_{tp}}{dp} + \frac{1}{9} \frac{p(p-1)^8}{\Omega r_+^2} h_{tp} \\ h_{pp}(p) &= -\frac{p}{\Omega} \frac{d^2 h_{tp}}{dp^2} - 2 \frac{5p-1}{\Omega(p-1)} \frac{dh_{tp}}{dp} \\ &\quad + \frac{(-8p^8 + 56p^7 - 168p^6 + 280p^5 - 280p^4 + 168p^3 - 56p^2 + 2[3k^2r_+^2 + 4]p + 9\Omega^2r_+^2)}{p(p-1)^8\Omega} h_{tp} \\ h(p) &= \frac{p^2(p-1)^2}{12\Omega} \frac{d^2 h_{tp}}{dp^2} + \frac{p(p-1)(11p-3)}{12\Omega} \frac{dh_{tp}}{dp} + \frac{1}{12(p-1)^6\Omega} (9p^8 - 64p^7 + 196p^6 \\ &\quad - 336p^5 + 350p^4 - 224p^3 + 84p^2 - 2[3k^2r_+^2 + 8]p - 9\Omega^2r_+^2 + 1) h_{tp}, \end{aligned}$$

y donde la componente $h_{tp}(p)$ satisface la siguiente ecuación diferencial de segundo orden o ecuación maestra

$$A(p) \frac{d^2 h_{tp}}{dp^2}(p) + B(p) \frac{dh_{tp}}{dp}(p) + C(p) h_{tp}(p) = 0, \quad (3.3)$$

con

$$\begin{aligned}
A(p) &= p^2(p-1)^8(p^8 - 8p^7 + 28p^6 - 56p^5 + 70p^4 - 56p^3 + 28p^2 - 8[3k^2r_+^2 + 1]p - 36\Omega^2r_+^2 + 1) \\
B(p) &= 3p(p-1)^7(p^9 + 36\Omega^2r_+^2 - 9p^8 + 36p^7 - 84p^6 + 126p^5 - 126p^4 + 84p^3 - 4[20k^2r_+^2 + 9]p^2 \\
&\quad - [132\Omega^2r_+^2 - 16k^2r_+^2 - 9]p - 1) \\
C(p) &= p^{16} - 16p^{15} + 120p^{14} - 560p^{13} + 1820p^{12} - 4368p^{11} + 8008p^{10} - 2[57k^2r_+^2 + 5720]p^9 \\
&\quad + 9[88k^2r_+^2 - 53\Omega^2r_+^2 + 1430]p^8 + 8[423\Omega^2r_+^2 - 294k^2r_+^2 - 1430]p^7 \\
&\quad + 28[138k^2r_+^2 - 369\Omega^2r_+^2 + 286]p^6 + 84[210\Omega^2r_+^2 - 45k^2r_+^2 - 52]p^5 \\
&\quad + 14[156k^2r_+^2 - 1305\Omega^2r_+^2 + 130]p^4 + 56[207\Omega^2r_+^2 - 12k^2r_+^2 - 10]p^3 \\
&\quad + 12[6k^2r_+^2 - 357\Omega^2r_+^2 + 12k^4r_+^4 + 10]p^2 + 2[216\Omega^2k^2r_+^4 + 396\Omega^2r_+^2 + 3k^2r_+^2 - 8]p \\
&\quad + 324\Omega^4r_+^4 - 45\Omega^2r_+^2 + 1.
\end{aligned}$$



Dado que una solución analítica de la ecuación maestra no puede obtenerse, es necesario analizar el comportamiento asintótico de sus soluciones. Dado que la ecuación (3.3) es una ecuación de segundo orden, existen dos comportamientos asintóticos posibles cerca del horizonte ($p = 0$ o $r = r_+$). El comportamiento que nos lleva a un modo normalizable es dado por

$$h_{tp} = p^{3m^3\Omega-1}(1 + \mathcal{O}(p)) \sim (r - r_+)^{3m^2\Omega-1} \quad (3.4a)$$

$$h_{tt} = \frac{1}{3m^3}p^{3m^3\Omega}(1 + \mathcal{O}(p)) \sim (r - r_+)^{3m^2\Omega} \quad (3.4b)$$

$$h_{pp} = 3m^3p^{3m^3\Omega-2}(1 + \mathcal{O}(p)) \sim (r - r_+)^{3m^2\Omega-2} \quad (3.4c)$$

$$h = -\frac{m^3}{2\Omega}(k^2m^3 + 4\Omega + 12\Omega^2m^3)p^{3m^3\Omega}(1 + \mathcal{O}(p)) \sim (r - r_+)^{3m^2\Omega}. \quad (3.4d)$$

Como ocurre en Relatividad General [6] y en la teoría de Gauss-Bonnet [31], los dos comportamientos posibles en infinito son dados por una función exponencial de la coordenada radial. Dada una longitud de onda de la perturbación en la dirección extendida (k), como $\lambda = 1/k$, tenemos que buscar valores de Ω que conectan suavemente el comportamiento asintótico (3.4a) con un decaimiento exponencial en infinito. Si es posible hacer eso para algún valor positivo de Ω , diremos que las cuerdas negras son inestables. La Figura 1 muestra que este es, en efecto, el caso.

c

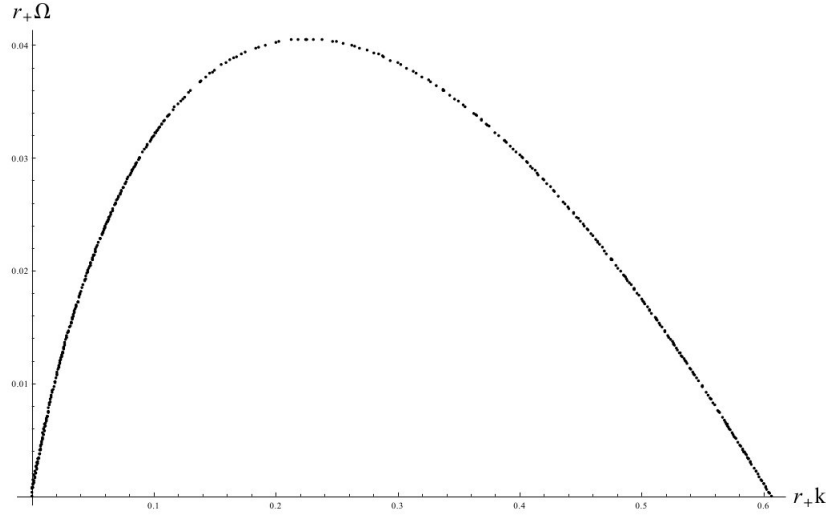


Figura 3.1: Modos para la cuerda negra homogénea en Lovelock puro de tercer orden en $D = 9$. El parámetro m en la solución ha sido fijado a 1.

3.2.1. Condiciones de regularidad y consideraciones de gauge

De la Figura 1, podemos ver que los valores permitidos de Ω son tales que h_{tp} diverge en el horizonte (ver Ec. (3.4a1)). Esto ocurre también para cuerdas negras en Relatividad General, y condujo a los autores de [40] a afirmar que no existen modos inestables normalizables en el caso de una perturbación tipo s-wave. Sin embargo, como se explica en detalle en [41] (ver también Capítulo 2 de [2]), dado el hecho de que las coordenadas de Schwarzschild no cubren el horizonte futuro, es necesario escribir la perturbación en coordenadas de Kruskal, (T, R) . En coordenadas de Kruskal, el comportamiento asintótico de la componente h_{tp} queda dado por

$$h_{TR} \sim (T - R)^{3m^3\Omega}.$$

Dado que el horizonte futuro está localizado en la superficie $R = T$ con $T > 0$, hemos probado que los modos inestables (con $\Omega > 0$) son, en efecto, finitos en el dominio de comunicación externa. Lo mismo ocurre para las componentes $h_{RR}(T, R)$, $h_{TT}(T, R)$ y $h(T, R)$.

Es interesante ver que el análisis previo se ha hecho sin imponer condiciones de gauge. Por lo tanto, es necesario analizar si los modos inestables encontrados son físicos o no. Tal como fue realizado para cuerdas negras en Gauss-Bonnet en siete dimensiones [31], esto se puede hacer fácilmente si consideramos el siguiente invariante escalar

$$\mathcal{I} = 709R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\lambda\rho}{}_{\sigma\tau}R^{\sigma\tau\mu\nu} + 890R^{\mu\nu}{}_{\lambda\rho}R^{\lambda\sigma}{}_{\nu\tau}R^{\rho\tau}{}_{\mu\sigma}.$$

Este escalar se anula idénticamente para la cuerda negra sin perturbar (3.2). Sin embargo, \mathcal{I} es no-nulo on-shell, para la cuerda negra perturbada ¹ para $k > 0$.

¹Ver [42] para un argumento similar sobre métricas de Einstein no-difeomorfas sobre variedades de grupos y espacios cosetos.

Por lo tanto, hemos mostrado que cuerdas negras en teorías de Lovelock de tercer orden son inestables bajo perturbaciones de longitud de onda grande.

3.3. Comparando inestabilidades de cuerda negra en diferentes teorías

Hemos probado que para los primeros términos de la teoría de Lovelock, por separado, es posible construir cuerdas negras homogéneas que resultan inestables bajo perturbaciones gravitacionales en cada teoría. Dada una longitud de onda de la perturbación y una tasa de crecimiento exponencial de la correspondiente inestabilidad, para un determinado radio del agujero negro en la sección transversal de la cuerda, podemos preguntarnos si es posible determinar cual es la dinámica que conduce a la inestabilidad. Tal comparación tiene sentido solo si cantidades cinemáticas están involucradas, dado que la intensidad de la interacción gravitacional en cada teoría depende del valor del acoplamiento gravitacional que puede ser diferente en cada caso. El radio del horizonte, siendo una cantidad puramente geométrica nos proporciona una buena cantidad para realizar tal comparación. Ahora presentamos algunos detalles de los cálculos que permiten determinar qué teoría de gravedad desestabiliza a la cuerda negra de radio r_+ , más rápidamente.

Con el propósito de fijar ideas, consideremos nuevamente una cuerda negra en $D = 9$ para $n = 1, 2$ y 3 , i.e. para los términos puros de Einstein (RG), Gauss-Bonnet (GB) y Lovelock de tercer orden (L3), respectivamente. Como mencionamos anteriormente, el elemento de línea para la cuerda negra perturbada puede ser obtenido al oxidar el agujero negro dado por (2.6). Para las tres teorías mencionadas estas soluciones tendrán la forma

$$\begin{aligned} ds_{\text{RG}}^2 &= - \left(1 - \left(\frac{r_+}{r} \right)^5 \right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{r_+}{r} \right)^5 \right)} dr^2 + r^2 d\Omega_6^2 + dz^2 \\ ds_{\text{GB}}^2 &= - \left(1 - \left(\frac{r_+}{r} \right)^{\frac{3}{2}} \right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{r_+}{r} \right)^{\frac{3}{2}} \right)} dr^2 + r^2 d\Omega_6^2 + dz^2 \\ ds_{\text{L3}}^2 &= - \left(1 - \left(\frac{r_+}{r} \right)^{\frac{1}{3}} \right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{r_+}{r} \right)^{\frac{1}{3}} \right)} dr^2 + r^2 d\Omega_6^2 + dz^2, \end{aligned}$$

Aplicando una perturbación tipo s-wave definida por (3.1.1), podemos encontrar una ecuación maestra que, por supuesto, toma la siguiente forma

$$A_n(r) \frac{d^2 h_{tr}^{(n)}}{dr^2} + B_n(r) \frac{dh_{tr}^{(n)}}{dr} + C_n(r) h_{tr}^{(n)} = 0, \quad (3.5)$$

para $n = 1, 2, 3$. Las expresiones explícitas para cada una de las funciones se muestran en el apéndice 5.2. Aquí r es la coordenada de Schwarzschild. La ecuación (3.5), en infinito, admite dos comportamientos asintóticos, pero solo uno de estos nos proporcionaría un modo normalizable, dado que decae exponencialmente. Cerca del horizonte, los comportamientos asintóticos permitidos por la ecuación (3.5) son dados por ²

$$h_{tr}^{(1)} \sim (r - r_+)^{-1 \pm \frac{1}{5} \Omega r_+}, \quad h_{tr}^{(2)} \sim (r - r_+)^{-1 \pm \frac{2}{3} \Omega r_+}, \quad h_{tr}^{(3)} \sim (r - r_+)^{-1 \pm 3 \Omega r_+}. \quad (3.6)$$

De manera análoga a lo que hemos discutido en la sección previa, es posible mostrar que la rama positiva en cada caso proporciona un modo físico inestable finito ($\Omega > 0$), siempre que tratemos con la perturbación en coordenadas de Kruskal,

²Notemos que los factores que multiplican Ωr_+ en cada caso corresponden al inverso del decaimiento en el potencial gravitacional de la solución de agujero negro en la sección transversal de la cuerda negra.

presentadas en la primera sección de este capítulo. La Figura 2 muestra los modos inestables para un radio fijo de manera simultánea en las tres teorías de Lovelock diferentes que permiten cuerdas negras homogéneas en $D = 9$.

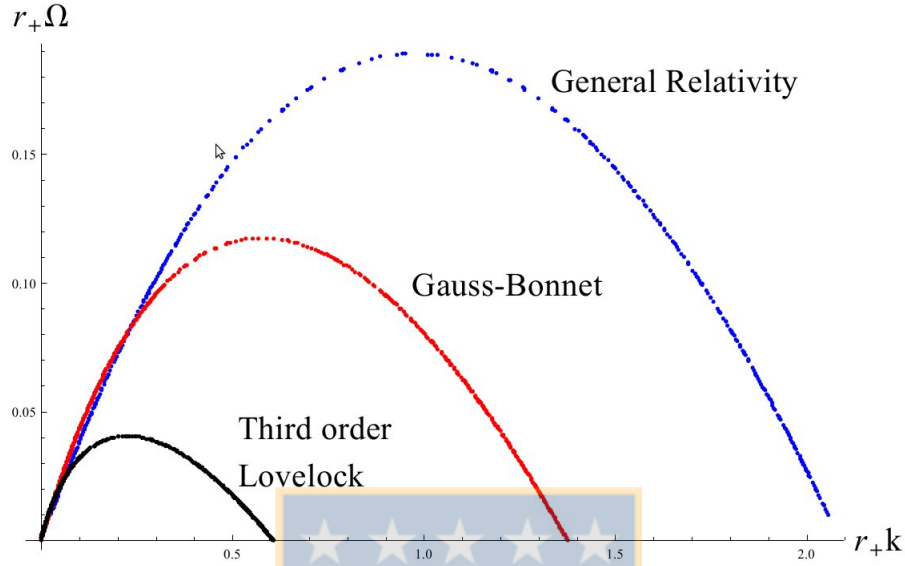


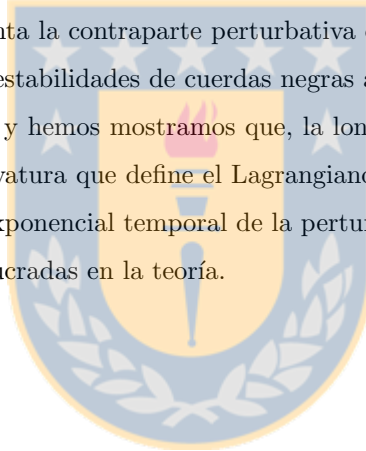
Figura 3.2: Comparación de modos inestables de cuerda negra para un determinado radio en teorías de Einstein, Gauss-Bonnet y Lovelock cúbicas

A partir de la figura, podemos ver que la longitud de onda crítica mínima $\lambda_c^{(n)}$ que activa la inestabilidad de Gregory-Laflamme, crece con la potencia de la curvatura que define cada teoría. Por lo tanto, para un radio del agujero negro fijo en la sección transversal de la cuerda, si compactificamos la dirección z a una escala $R_0 \lesssim \lambda_c^{(1)}$, modos tipo s-wave inestables no estarán permitidos. Luego, si comenzamos a aumentar R_0 , la cuerda negra de Relatividad General se vuelve inestable primero, luego, aquella de la teoría de Gauss-Bonnet se vuelve inestable para $R_0 \gtrsim \lambda_c^{(2)}$, y finalmente, las cuerdas negras de la teoría de Lovelock de tercer orden se vuelven inestables para $R_0 \gtrsim \lambda_c^{(3)}$. Notemos también que en el régimen en el que las tres teorías presentan inestabilidades para un radio fijo, el tiempo característico ($\tau = \Omega^{-1}$) del crecimiento exponencial de la inestabilidad crece con el orden de la teoría de Lovelock. Sería interesante explorar, en una solución aproximada o numérica para una combinación lineal arbitraria de los tres términos, cómo la dinámica de las perturbaciones de cuerdas negras son afectadas a diferentes escalas, que en este caso serán definidas por las constantes de acoplamiento α_3 , α_2 and α_1 . Esto será importante también en la evolución no-lineal de las perturbaciones, dado que, como se muestra en [12], en Relatividad General en $D = 5$, la evolución no-lineal de una perturbación sobre una cuerda negra nos lleva a una estructura auto-similar de agujeros negros conectados por cuerdas negras delgadas, que termina con la formación de una singularidad desnuda nula.

Capítulo 4

Conclusiones

En esta tesis hemos mostramos que las cuerdas negras homogéneas 9-dimensionales de una teoría de Lovelock pura de tercer orden en la curvatura son inestables bajo perturbaciones tipo s-wave. Esta inestabilidad es producida por perturbaciones de longitud de onda grande y representa la contraparte perturbativa de una inestabilidad termodinámica. Además, a partir de un análisis comparativo de las inestabilidades de cuerdas negras a un radio fijo en Relatividad General, Gauss-Bonnet y teorías de Lovelock cúbicas puras, y hemos mostramos que, la longitud de onda mínima crítica para denotar la inestabilidad crece con la potencia de la curvatura que define el Lagrangiano. Para cuerdas negras con radios en la región inestable de las tres teorías, el crecimiento exponencial temporal de la perturbación es más grande en Relatividad General y decrece con el número de curvaturas involucradas en la teoría.





Capítulo 5

Apéndice

5.1. Bases no-coordenadas y ecuaciones de estructura de Cartan

Consideremos una variedad diferenciables \mathcal{M} , cuyos espacios tangentes $T_p\mathcal{M}$ y cotangente $T_p^*\mathcal{M}$ tienen las respectivas bases $\{\partial/\partial x^\mu\}$ y $\{dx^\mu\}$. Si la variedad es dotada con una métrica, podemos definir una nueva base para $T_p\mathcal{M}$ como una combinación lineal de las bases coordenadas, según ordenadas, esto es

$$e_a = e_a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

donde $\{e_a^\mu\} \in GL(m, R)$. La relación anterior es invertible requiriendo que la base $\{e_a\}$ sea ortonormal, es decir, que $g(e_a, e_b) = e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{ab}$.

Luego,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_a^\mu e_b^\nu.$$

Por otro lado, escoger una base no-coordenada para el espacio tangente induce naturalmente una base no-coordenada para $T_p^*\mathcal{M}$, de la forma

$$e^a = e^a_\mu(x) dx^\mu,$$

con las 1-formas $\{e^a\}$ los llamados vielbeins.

Es importante notar que, aunque $\partial/\partial x^\mu$ y $\partial/\partial x^\nu$ conmutan, las bases no-coordenadas no necesariamente lo hacen. En el caso más general, estos vielbeins satisfacen un álgebra

$$[e_a, e_b] = \mathcal{C}_{ab}^c e_c,$$

donde \mathcal{C}_{ab}^c son constantes conocidas como las constantes de estructura del álgebra.

Ahora, para obtener las ecuaciones de estructura de Cartan definimos la 1-forma conexión de spin como

$$\omega^a_b = \Gamma^a_{cb} e^c,$$

con $\Gamma^a_{cb} = e^c_{\mu} e_a^{\nu} \nabla_{\nu} e_b^{\mu}$ y $\omega^a_b(x) = \omega^a_{b\mu} dx^{\mu}$.

Con la definición anterior se obtienen las siguientes relaciones, conocidas como las ecuaciones de estructura de Cartan.

$$T^a = de^a + \omega^a_b e^b$$

$$R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \omega^c_b$$

donde hemos definido $T^a = \frac{1}{2} T^a_{bc} e^b e^c$ y $R^a_b = \frac{1}{2} R^a_{bcd} e^c e^d$.

Por último, la consistencia entre estas ecuaciones nos entrega las identidades de Bianchi

$$DT^a = R^a_b e^b, \quad DR^a_b = 0.$$

5.2. Procedimiento para encontrar ecuación maestra

Detallamos el procedimiento para encontrar la ecuación maestra que determinará el comportamiento de las componentes de la perturbación aplicada a la solución de cuerda negra en la teoría de Lovelock de tercer orden pura.

Inicialmente, y de las ecuaciones de campo linealizadas, partimos con 7 ecuaciones diferenciales de tercer y cuarto orden en p : $E_{tt}, E_{tp}, E_{tz}, E_{pp}, E_{pz}, E_{xx}, E_{zz}$ que dependen de las 4 componentes independientes de la perturbación $h_{tt}, h_{tp}, h_{pp}, h$ y sus derivadas.

La ecuación maestra consiste en una ecuación para solo una componente de la perturbación, nuestra elección es h_{tp} , y sus derivadas que sea completamente consistente con las ecuaciones diferenciales originales.

Los pasos fueron los siguientes:

- Resolver la variable $h(p)$ de la ecuación E_{tz} , ecuación algebraica en esta variable
- Reemplazar resultado en las ecuaciones restantes, específicamente en E_{tp} y E_{pz} , ecuaciones de primer orden en la variable h_{pp}
- Eliminar derivada h'_{pp} de una combinación adecuada de las ecuaciones E_{tp} y E_{pz} , obteniendo así una ecuación algebraica para h_{pp} de la que ésta última es despejada
- Evaluar expresión de h_{pp} obtenida en el paso anterior en todas las ecuaciones, en particular en $h(p)$, E_{pp} y E_{pz} , estas últimas siendo ecuaciones lineales en h''_{tt} .
- De las ecuaciones E_{pp} y E_{pz} despejamos h''_{tt} , de forma independiente. Igualando estas expresiones para h''_{tt} obtenemos ecuación diferencial de primer orden para h_{tp} .
- Evaluamos resultado anterior para h_{tt} en todas las expresiones, en particular en E_{pz} , de donde se resuelve h_{tt} .
- De restar dos expresiones para h''_{tp} obtenemos una ecuación diferencial de segundo orden para h_{tp} .
- El numerador de la ecuación anterior corresponderá a nuestra ecuación maestra.

5.3. Ecuación maestra en diferentes teorías

Las expresiones explícitas para cada una de las funciones en (3.5) están dadas por:

- Relatividad General

$$\begin{aligned}
 A_1 &= r^2(r^5 - r_+^5)^2(-4[\Omega^2 + k^2]r^{12} + 4k^2r_+^5r^7 + 25r_+^{10}), \\
 B_1 &= r(r^5 - r_+^5)(24[\Omega^2 + k^2]r^{17} + 4[9\Omega^2 - 2k^2]r_+^5r^{12} - 16k^2r_+^{10}r^7 - 450r_+^{10}r^5 + 75r_+^{15}), \\
 C_1 &= -(4[\Omega^2 + k^2]^2r^{24} + 24[\Omega^2 + k^2]r^{22} - [8\Omega^2 + k^2]k^2r_+^5r^{19} - 4[12\Omega^2 + 23k^2]r_+^5r^{17} \\
 &\quad + 4k^2r_+^{10}r^{14} + [-101\Omega^2 + 137k^2]r_+^{10}r^{12} + 1650r_+^{10}r^{10} - 69k^2r_+^{15}r^7 - 1050r_+^{15}r^5 + 25r_+^{20}).
 \end{aligned}$$

- Teoría de Gauss-Bonnet

$$\begin{aligned}
 A_2 &= -16r(-2[5k^2 + 8\Omega^2]r^{11} - 2[15k^2 + 8\Omega^2]r_+^3r^8 + 9r_+^3r^6 + 9r_+^6r^3 \\
 &\quad + 2[16\Omega^2 + 15k^2]r_+^{\frac{3}{2}}r^{\frac{19}{2}} + 10k^2r_+^{\frac{9}{2}}r^{\frac{13}{2}} - 18r_+^{\frac{9}{2}}r^{\frac{9}{2}}), \\
 B_2 &= 8r(10[\Omega^2 + 5k^2]r^{10} - 2[32\Omega^2 - 15k^2]r_+^3r^7 - 135r_+^3r^5 - 54r_+^6r^2 \\
 &\quad - 2[8\Omega^2 + 45k^2]r_+^{\frac{3}{2}}r^{\frac{17}{2}} + 10k^2r_+^{\frac{9}{2}}r^{\frac{11}{2}} + 189r_+^{\frac{9}{2}}r^{\frac{7}{2}}), \\
 C_2 &= 2r(-2[8\Omega^2 + 5k^2]^2r^{11} - 40[5k^2 + \Omega^2]r^9 - 50k^4r_+^3r^8 \\
 &\quad + 5[8\Omega^2 - 177k^2]r_+^3r^6 - 720r_+^3r^4 - 72r_+^6r + 20[8\Omega^2 + 5k^2]k^2r_+^{\frac{3}{2}}r^{\frac{19}{2}} \\
 &\quad + 80[9k^2 + 8\Omega^2]r_+^{\frac{3}{2}}r^{\frac{15}{2}} + 365k^2r_+^{\frac{9}{2}}r^{\frac{9}{2}} + 630r_+^{\frac{9}{2}}r^{\frac{5}{2}}).
 \end{aligned}$$

- Teoría de Lovelock de tercer orden

$$\begin{aligned}
 A_3 &= -972[\Omega^2 + 2k^2]r_+^{\frac{14}{3}}r^6 + 27r_+^{\frac{14}{3}}r^4 - 324[3\Omega^2 + 2k^2]r_+^4k^2r^{\frac{20}{3}} \\
 &\quad + 1944[\Omega^2 + k^2]r_+^{\frac{13}{3}}r^{\frac{19}{3}} + 648r_+^5k^2r^{\frac{17}{3}} - 54r_+^5r^{\frac{11}{3}} + 27r_+^{\frac{16}{3}}r^{\frac{10}{3}}, \\
 B_3 &= -108[16k^2r_+^{\frac{14}{3}} + 3\Omega^2r_+^{\frac{14}{3}}]r^5 + 108r_+^{\frac{14}{3}}r^3 - 432[3\Omega^2 + 2k^2]r_+^4k^2r^{\frac{17}{3}} \\
 &\quad + 540[3\Omega^2 + 4k^2]r_+^{\frac{13}{3}}r^{\frac{16}{3}} + 432r_+^5k^2r^{\frac{14}{3}} - 189r_+^5r^{\frac{8}{3}} + 81r_+^{\frac{16}{3}}r^{\frac{7}{3}}, \\
 C_3 &= 3(144k^4r_+^{\frac{14}{3}}r^6 + 3[338k^2 + 129\Omega^2]r_+^{\frac{14}{3}}r^4 + 20r_+^{\frac{14}{3}}r^2 + 36[3\Omega^2 + 2k^2]^2r_+^4r^{\frac{20}{3}} \\
 &\quad - 144[2k^2 + 3\Omega^2]k^2r_+^{\frac{13}{3}}r^{\frac{19}{3}} + 144[3\Omega^2 + 2k^2]r_+^4r^{\frac{14}{3}} - 72[12\Omega^2 + 13k^2]r_+^{\frac{13}{3}}r^{\frac{13}{3}} \\
 &\quad - 366r_+^5k^2r^{\frac{11}{3}} - 28r_+^5r^{\frac{5}{3}} + 9r_+^{\frac{16}{3}}r^{\frac{4}{3}}).
 \end{aligned}$$

5.4. Método numérico y convergencia

Para obtener los modos que satisfacen la ecuación maestra para las perturbaciones, hemos usado una técnica de solución en serie de potencias. Esto consiste en imponer una solución que es una serie de potencias truncada en un determinado orden N alrededor del horizonte (el que corresponde a un punto singular de la ecuación). Incrementando el orden N podemos

obtener una mejor aproximación de la solución. Cuando $N \rightarrow \infty$ la serie de potencias efectivamente converge a la solución completa en un punto dado $r = r_0$ siempre que no hayan otros puntos singulares en el plano complejo en una bola centrada en $r = r_+$ y con radio $|r_0 - r_+|$. Es útil trabajar con coordenadas x que mapean el rango $r \in [r_+, \infty[$ a $x \in [0, 1[$. Luego, procedemos como sigue

- Fijamos un valor para el momentum de la perturbación, $k = k_1$
- Calculamos la solución en serie de potencias alrededor del horizonte ($x = 0$) en un determinado orden N
- Evaluamos la solución en series de potencias en $x = 1$, igualada a cero y encontramos las soluciones reales de Ω
- Repetimos estos pasos con el mismo valor de k pero ahora truncando la serie en orden $N+1$ y paramos el procedimiento luego de que cuatro dígitos del valor obtenido de Ω están estabilizados.

Las Figuras 3 y 4 entregan evidencia de la convergencia del los procesos para $k = 0,1$ and $k = 0,4$, respectivamente, en la teoría de Lovelock de tercer orden. Las curvas continuas han sido obtenidas por ajuste de mínimos cuadradas de una curva de la forma

$$\Omega_N = \Omega + a \exp(-bN) \cos(cN + d) \tag{5.1}$$

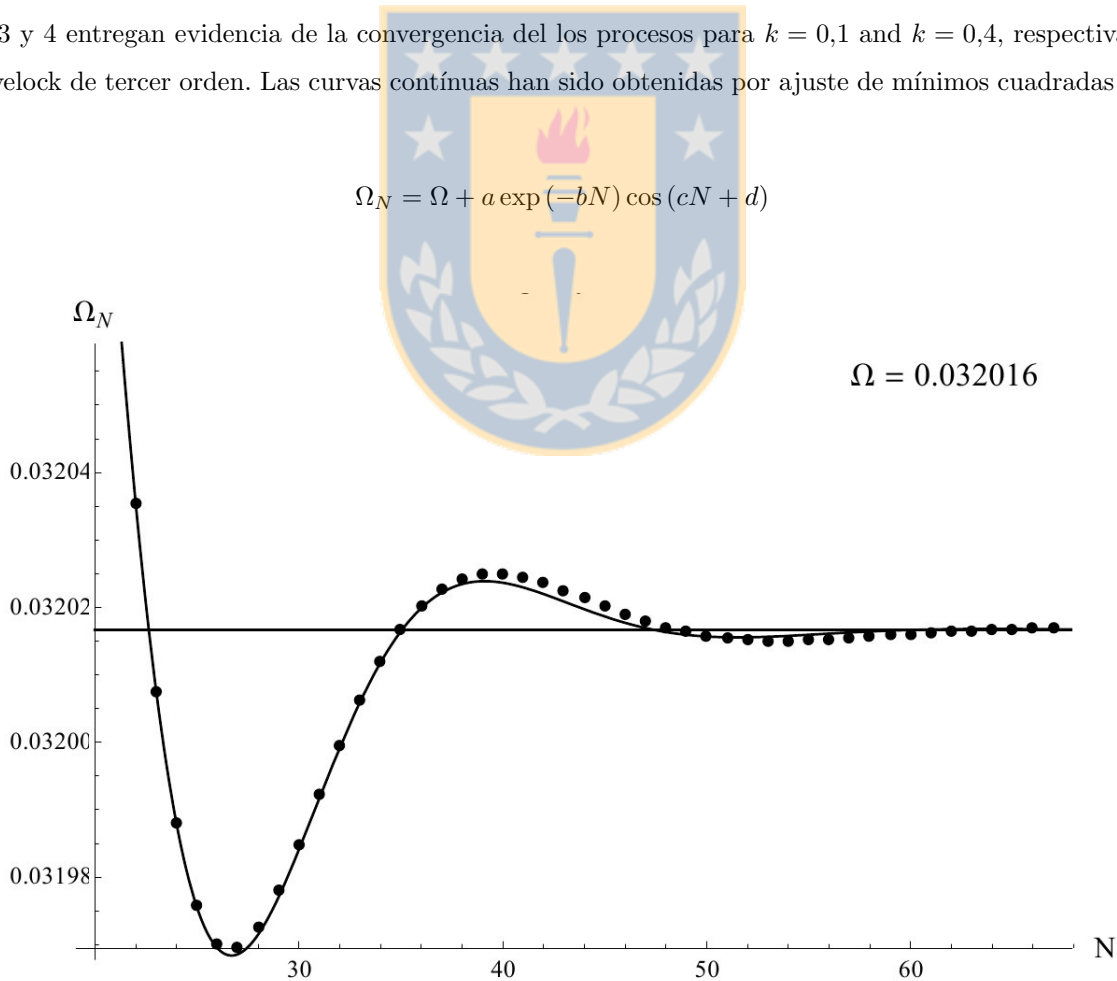


Figura 5.1: *Convergencia de frecuencias obtenidas mediante solución en serie de potencias para $k = 0,1$*

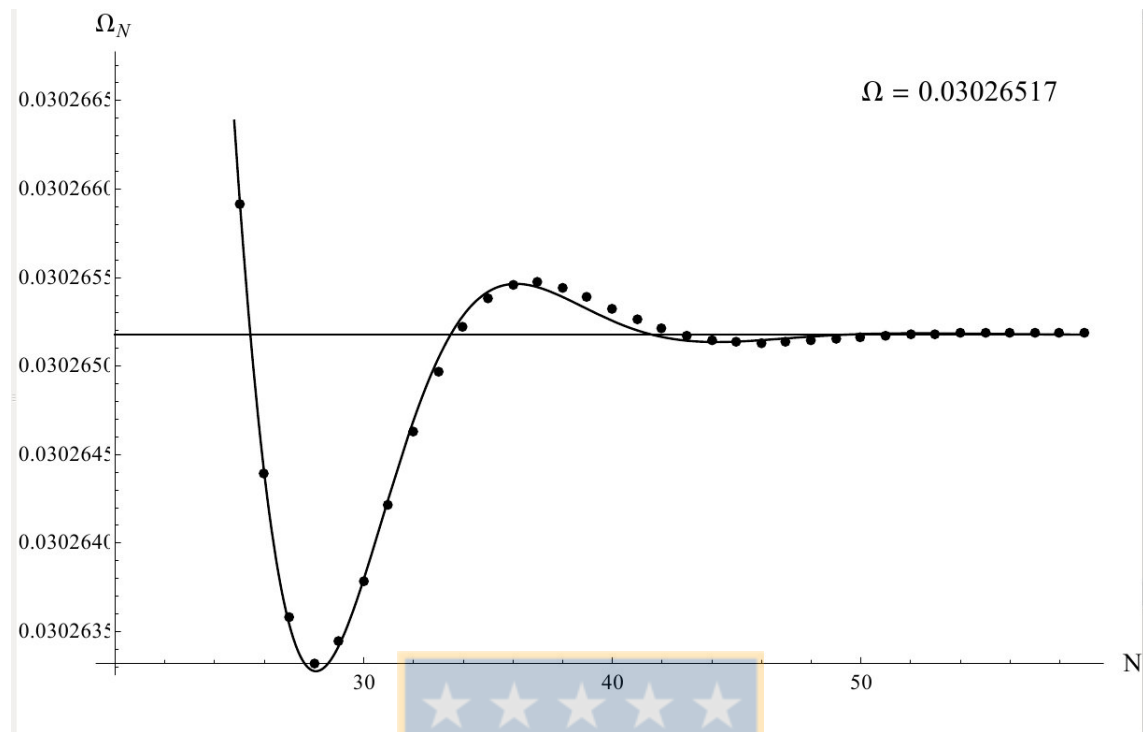


Figura 5.2: *Convergencia de frecuencias obtenidas mediante solución en serie de potencias para $k = 0,4$*

Notamos que para $k = 0,1$, el Ω se estabiliza en cinco cifras para un valor de $N \sim 60$.

Para $k = 0,4$, el valor de Ω se estabiliza en siete cifras al truncar la serie cerca de $N \sim 50$.



Bibliografía





Bibliografía

- [1] J. M. Maldacena, *Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1113 (1999) [*Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998)] doi:10.1023/A:1026654312961 [hep-th/9711200].
- [2] *Black Holes in Higher Dimensions*, Gary T. Horowitz. Cambridge University Press, 2012.
- [3] F. R. Tangherlini, *Nuovo Cim.* **27**, 636 (1963). doi:10.1007/BF02784569
- [4] R. Emparan and H. S. Reall, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 101101 doi:10.1103/PhysRevLett.88.101101 [hep-th/0110260].
- [5] H. Elvang and P. Figueras, *JHEP* **0705**, 050 (2007) doi:10.1088/1126-6708/2007/05/050 [hep-th/0701035].
- [6] R. Gregory and R. Laflamme, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2837 (1993) doi:10.1103/PhysRevLett.70.2837 [hep-th/9301052].
- [7] G. T. Horowitz and K. Maeda, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 131301 (2001) [hep-th/0105111].
- [8] S. S. Gubser, *Class. Quant. Grav.* **19**, 4825 (2002) doi:10.1088/0264-9381/19/19/303 [hep-th/0110193].
- [9] T. Wiseman, *Class. Quant. Grav.* **20**, 1137 (2003) doi:10.1088/0264-9381/20/6/308 [hep-th/0209051].
- [10] E. Sorkin, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 031601 (2004) doi:10.1103/PhysRevLett.93.031601 [hep-th/0402216].
- [11] J. L. Hovdebo and R. C. Myers, *Phys. Rev. D* **73**, 084013 (2006) doi:10.1103/PhysRevD.73.084013 [hep-th/0601079].
- [12] L. Lehner and F. Pretorius, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 101102 (2010) [arXiv:1006.5960 [hep-th]].
- [13] P. Figueras, M. Kunesch and S. Tunyasuvunakool, *Phys. Rev. Lett.* **116**, no. 7, 071102 (2016) doi:10.1103/PhysRevLett.116.071102 [arXiv:1512.04532 [hep-th]].
- [14] R. Emparan, R. Suzuki and K. Tanabe, *JHEP* **1306**, 009 (2013) doi:10.1007/JHEP06(2013)009 [arXiv:1302.6382 [hep-th]].
- [15] R. Emparan, R. Suzuki and K. Tanabe, *Phys. Rev. Lett.* **115**, no. 9, 091102 (2015) doi:10.1103/PhysRevLett.115.091102 [arXiv:1506.06772 [hep-th]].
- [16] D. Lovelock, *J. Math. Phys.* **12**, 498 (1971).
- [17] C. Barcelo, R. Maartens, C. F. Sopuerta and F. Viniegra, *Phys. Rev. D* **67**, 064023 (2003) [hep-th/0211013].

- [18] Y. Brihaye, T. Delsate and E. Radu, JHEP **1007**, 022 (2010) [arXiv:1004.2164 [hep-th]].
- [19] P. Suranyi, C. Vaz and L. C. R. Wijewardhana, Phys. Rev. D **79**, 124046 (2009) [arXiv:0810.0525 [hep-th]].
- [20] B. Kleihaus, J. Kunz, E. Radu and B. Subagyo, Phys. Lett. B **713**, 110 (2012) [arXiv:1205.1656 [gr-qc]].
- [21] T. Kobayashi and T. Tanaka, Phys. Rev. D **71**, 084005 (2005) [gr-qc/0412139].
- [22] J. Crisostomo, R. Troncoso and J. Zanelli, Phys. Rev. D **62**, 084013 (2000) doi:10.1103/PhysRevD.62.084013 [hep-th/0003271].
- [23] G. Giribet, J. Oliva and R. Troncoso, JHEP **0605**, 007 (2006) [hep-th/0603177].
- [24] G. Dotti and R. J. Gleiser, Phys. Rev. D **72**, 044018 (2005) [gr-qc/0503117].
- [25] R. J. Gleiser and G. Dotti, Phys. Rev. D **72**, 124002 (2005) [gr-qc/0510069].
- [26] G. Dotti and R. J. Gleiser, Class. Quant. Grav. **22**, L1 (2005) [gr-qc/0409005].
- [27] C. Charmousis and A. Padilla, JHEP **0812**, 038 (2008) [arXiv:0807.2864 [hep-th]].
- [28] C. Sahabandu, P. Suranyi, C. Vaz and L. C. R. Wijewardhana, Phys. Rev. D **73**, 044009 (2006) [gr-qc/0509102].
- [29] T. Takahashi and J. Soda, Prog. Theor. Phys. **124**, 711 (2010) [arXiv:1008.1618 [gr-qc]].
- [30] R. Gannouji and N. Dadhich, Class. Quant. Grav. **31**, 165016 (2014) [arXiv:1311.4543 [gr-qc]].
- [31] A. Giacomini, J. Oliva and A. Vera, Phys. Rev. D **91**, no. 10, 104033 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.91.104033 [arXiv:1503.03696 [hep-th]].
- [32] J. T. Wheeler, Nucl. Phys. B **273**, 732 (1986). doi:10.1016/0550-3213(86)90388-3
- [33] R. Zegers, J. Math. Phys. **46**, 072502 (2005) doi:10.1063/1.1960798 [gr-qc/0505016].
- [34] F. Mueller-Hoissen, Phys. Lett. B **163**, 106 (1985). doi:10.1016/0370-2693(85)90202-3
- [35] F. Canfora and A. Giacomini, Phys. Rev. D **78**, 084034 (2008) doi:10.1103/PhysRevD.78.084034 [arXiv:0808.1597 [hep-th]].
- [36] J. Matulich and R. Troncoso, JHEP **1110**, 118 (2011) doi:10.1007/JHEP10(2011)118 [arXiv:1107.5568 [hep-th]].
- [37] S. H. Hendi and A. Dehghani, Phys. Rev. D **91**, no. 6, 064045 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.91.064045 [arXiv:1510.06261 [hep-th]].
- [38] X. O. Camanho, J. D. Edelstein and J. M. Sánchez De Santos, Gen. Rel. Grav. **46**, 1637 (2014) doi:10.1007/s10714-013-1637-3 [arXiv:1309.6483 [hep-th]].
- [39] S. S. Gubser and I. Mitra, JHEP **0108**, 018 (2001) doi:10.1088/1126-6708/2001/08/018 [hep-th/0011127].

- [40] R. Gregory and R. Laflamme, Phys. Rev. D **37**, 305 (1988). doi:10.1103/PhysRevD.37.305
- [41] R. Gregory and R. Laflamme, Nucl. Phys. B **428**, 399 (1994) doi:10.1016/0550-3213(94)90206-2 [hep-th/9404071].
- [42] G. W. Gibbons, H. Lu and C. N. Pope, J. Geom. Phys. **61**, 947 (2011) doi:10.1016/j.geomphys.2011.01.004 [arXiv:0903.2493 [hep-th]].

