



Universidad de Concepción

Dirección de Postgrado

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas - Programa Magíster en Matemática

La desigualdad de Faber-Krahn en Polígonos para el p -Laplaciano fraccionario-Dirichlet.

The Faber-Krahn inequality for the fractional Dirichlet p -Laplacian for polygons.

FRANCO ANDRÉS OLIVARES CONTADOR

CONCEPCIÓN-CHILE

2016

Profesor Guía: Rajesh Mahadevan

Dpto. de Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Concepción



Universidad de Concepción

Dirección de Postgrado

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas - Programa Magíster en Matemática

La desigualdad de Faber-Krahn en Polígonos para el p -Laplaciano fraccionario-Dirichlet.

The Faber-Krahn inequality for the fractional Dirichlet p -Laplacian for polygons.

FRANCO ANDRÉS OLIVARES CONTADOR

CONCEPCIÓN-CHILE

2016

Comisión evaluadora: Prof. Rafael Benguria

Prof. Gyula Csató

Prof. Fethi Mahmoudi

Prof. Rajesh Mahadevan

Dpto. de Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Concepción

Índice general

Introducción	6
1. Preliminares	9
1.1. Espacio de Sobolev Fraccionario	9
2. Herramientas	25
2.1. Desigualdad de Prékopa-Leindler	25
2.2. Rearreglo simétrico decreciente de conjuntos y funciones	31
2.3. Simetrización de Steiner de conjuntos y funciones	36
2.4. Desigualdad de Brascamp-Lieb-Luttinger	42
2.5. Adición y Sustracción de Minkowski	53
2.6. Distancia Hausdorff	62
3. Primer valor propio del p-Laplaciano fraccionario-Dirichlet	67
3.1. Propiedades del primer valor propio del p -Laplaciano fraccionario-Dirichlet	67
4. Minimización del primer valor propio p-Laplaciano fraccionario-Dirichlet	73
4.1. Desigualdad de Pólya-Szegő no local	73
4.2. El caso del polígono	80
Bibliografía	83

Índice de figuras

2.1. Simetrización de Steiner	36
2.2. sucesión triángulos	64
2.3. sucesión de cuadriláteros	66



Agradecimientos

Agradezco a CONICYT por otorgarme la beca para estudios de Magíster nacional CONICYT-PCHA/Magíster Nacional/2013-22131441 y por el apoyo de FONDECYT Regular 1130595. Agradezco a todos los que han colaborado en la realización de esta tesis, en especial, a Rajesh Mahadevan, por su invaluable apoyo en el desarrollo de esta, por fortalecer mis conocimientos matemáticos y profundizar mis valores científicos, o por que no decirlo, humanos. A Rafael Benguria, por estimar que el tema abordado en esta tesis, se podía desarrollar en un tiempo razonable, además, de corregir el manuscrito e enriquecerlos con sus valiosos comentarios. A Mark Ashbaugh que nos brindo una apreciable ayuda en el caso del cuadrilátero, en el que estábamos detenidos durante varias semanas. A Gyula Csató por leer el borrador y motivarme a darle un sentido más concreto a objetos abstractos, que son objeto de concretizar. A Erika Torres y José Aguayo, por orientarme en el trato con la burocracia con la que interactúe durante mis estudios de Magíster. A Carlos Martínez por responder de manera tan clara y precisa mis dudas. A Fethi Mahmoudi por su disposición y celeridad para evaluar este texto.

Introducción

El problema isoperimétrico clásico dice lo siguiente:

“entre todos los conjuntos de un volumen dado el que tiene la menor superficie es la bola”.

Siguiendo la línea de este problema, se han estudiado diversos problemas isoperimétricos [28].

Por ejemplo, la desigualdad de Faber-Krahn:

“entre todos los conjuntos de un mismo volumen el que minimiza el primer valor propio Laplaciano Dirichlet es la bola”.

Dado que la bola es el conjunto más simétrico para un volumen dado, Pólya y Szegő conjeturaron que entre todos los polígonos de n -lados de área dada en \mathbb{R}^2 , el polígono regular minimiza el primer valor propio del Laplaciano Dirichlet.

A pesar de que la conjetura es fácil de intuir, sólo se ha demostrado para los casos $n = 3$ y $n = 4$. Para $n \geq 5$, está aún abierta.

Hace un tiempo se ha generado interés por el estudio de la desigualdad de Faber-Krahn para variantes del Laplaciano. En este contexto, los resultados anteriores han sido generalizados para el p -Laplaciano [28] [35].

Recientemente se ha estudiado fuertemente versiones no locales del Laplaciano. En este contexto, se ha demostrado la desigualdad de Faber-Krahn para p -Laplaciano Fraccionario-Dirichlet [4]. Motivados por este resultado y la conjetura de Pólya y Szegő en esta tesis nos dedicaremos a demostrar el resultado para el caso del polígono para $n=3$ y $n=4$ para p -Laplaciano Fraccionario con condiciones de Dirichlet sobre la frontera, es decir, queremos demostrar la desigualdad de Faber-Krahn restringida a triángulos y cuadriláteros de una misma área. La demostración se basará en el uso de simetrización de Steiner de conjuntos y funciones.

Como el operador p -Laplaciano fraccionario es no local, los espacios naturales para estudiarlo son los espacios de Sobolev fraccionario, por eso iniciaremos el primer capítulo con un breve estudio de dichos espacios. Daremos su definición, y versiones no locales de la desigualdad Poincaré, teorema de Rellich-Kondrachov y desigualdad de Sobolev.

En el segundo capítulo, revisamos la definición y principales propiedades de rearrreglo simétrico decreciente (rearrreglo de Schwarz) y simetrización de Steiner de conjuntos y funciones. También daremos algunos rudimentos de geometría de cuerpos convexos, convergencia respecto a la distancia Hausdorff, adición y sustracción de Minkowski de conjuntos. Los anteriores conceptos nos van a permitir usar sucesiones que converjan a nuestros conjuntos minimizantes, el cuadrado y triángulo equilátero. Además en este mismo capítulo se estudiará la demostración de una desigualdad general de rearrreglos, actualmente llamada desigualdad de Brascamp-Lieb-Luttinger (BLL) [3],[34], de la cual la desigualdad de rearrreglo de Riesz es un caso particular. Una herramienta importante para la demostración de la desigualdad BLL es la desigualdad de Prékopa-Leindler, a la que presentaremos una demostración argumentada en la desigualdad de Brunn-Minkowski para el caso unidimensional e inducción sobre la dimensión del espacio. Para finalizar este capítulo, se dará el caso de igualdad para la desigualdad de rearrreglo de Riesz para simetrización de Steiner con la función intermedia fija, el que resulta esencial para demostrar la unicidad de nuestro problema. Para finalizar este capítulo de herramientas se dará la definición de distancia Hausdorff para conjuntos compactos y también para conjuntos abiertos acotados.

En el tercer capítulo se presentarán las propiedades básicas del primer valor propio del p -Laplaciano fraccionario-Dirichlet, tales como monotonía, la invariancia bajo traslaciones y transformaciones ortogonales, además de su regla de homotecia. Con las anteriores propiedades junto a herramientas de análisis convexo, demostraremos la continuidad del primer valor propio del p -Laplaciano fraccionario-Dirichlet para el caso convexo.

En el último capítulo se dará la demostración del principio (desigualdad) de Pólya y Szegő no local bajo la simetrización de Steiner [16] [4] con su respectivo caso de igualdad, dicha desigualdad la ocuparemos para dar la demostración de la desigualdad de Faber-Krahn fraccionaria para triángulos y cuadriláteros, con su respectivo caso de igualdad.

Franco Olivares Contador, Junio 2016.



Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacio de Sobolev Fraccionario

Para esta sección nos basaremos en Di Nezza [12], Brasco y otros [4] y F. Demengel y otros [11]. Al ser el p-Laplaciano fraccionario un operador no local, los espacios naturales para estudiarlo son los espacios de Sobolev fraccionario, por esto en este capítulo los estudiaremos; daremos su definición y la demostración de una serie de desigualdades que lo involucran. En la literatura los espacios Sobolev fraccionarios también son llamados espacios de Aronszajn, Gagliardo o Slobodeckij, en honor a los matemáticos que lo introdujeron entre 1955 a 1958.

Definición 1.1.1. Dado Ω un conjunto abierto arbitrario en \mathbb{R}^n , $p \in (1, \infty)$ y $s \in (0, 1)$, definimos el espacio Sobolev fraccionario $W^{s,p}(\Omega)$ como sigue

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : [u]_{W^{s,p}(\Omega)} < \infty\}$$

donde a

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

se le llama seminorma de Gagliardo de u .

En $W^{s,p}(\Omega)$ definimos la norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + [u]_{W^{s,p}(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.1)$$

Ejemplo 1.1.2. *función que no pertenezca a $W^{1,2}(-1,1)$ pero si a un espacio Sobolev fraccionario adecuado.*

Sea h la función Heaviside restringida a $(-1,1)$. Recordemos que $h \in L^2(-1,1)$ pero su derivada débil es la función delta centrada en 0, la que no pertenece a $L^2(-1,1)$. Luego $h \notin W^{1,2}(-1,1)$ (espacio Sobolev usual). Estudiemos la integral que define la seminorma de Gagliardo para h

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{|h(x) - h(y)|^p}{|x - y|^{1+ps}} dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^0 \frac{|h(x) - h(y)|^p}{|x - y|^{1+ps}} dx dy + \int_{-1}^1 \int_0^1 \frac{|h(x) - h(y)|^p}{|x - y|^{1+ps}} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^0 \frac{1}{|x - y|^{1+ps}} dx dy + \int_{-1}^0 \int_0^1 \frac{1}{|x - y|^{1+ps}} dx dy \\ &= 2 \int_{-1}^0 \int_0^1 \frac{1}{|x - y|^{1+ps}} dx dy < \infty \Leftrightarrow sp < 1. \end{aligned}$$

Así, $h \in W^{s,p}(-1,1) \Leftrightarrow sp < 1$. En particular, $h \in W^{1/2-\epsilon,2}(-1,1)$ para cualquier $0 < \epsilon \leq 1/2$ pero $h \notin W^{1/2,2}(-1,1)$.

Proposición 1.1.3. *El espacio $W^{s,p}(\Omega)$ dotado con la norma (1.1) es un espacio Banach.*

Demostración: Sea $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $W^{s,p}(\Omega)$ dotado con la norma (1.1), es decir,

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \left(\|u_n - u_m\|_{L^p(\Omega)}^p + [u_n - u_m]_{W^{s,p}(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Esto implica que $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega)$, y por la completitud de este espacio, existe $u \in L^p(\Omega)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$. También por lo anterior, la sucesión $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ de funciones

$$v_n(x, y) = \frac{u_n(x) - u_n(y)}{|x - y|^{s + \frac{n}{p}}}$$

es una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega \times \Omega)$, luego, tenemos que $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ es convergente a un elemento de $L^p(\Omega \times \Omega)$. Extrayendo una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ de $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ que converge en casi todas partes a u , podemos observar que $\{v_{n_k}(x, y)\}_{k=1}^\infty$ converge para casi todo par (x, y)

a

$$v(x, y) = \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{s + \frac{n}{p}}}.$$

Aplicando el lema de Fatou, obtenemos que

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dx dy \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_{n_k}(x) - u_{n_k}(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dx dy < \infty.$$

Así, $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Observamos que ,

$$\|u_n - u_m\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \|u_n - u_m\|_{L^p(\Omega)}^p + \|v_n - v_m\|_{L^p(\Omega \times \Omega)}.$$

haciendo $m \rightarrow \infty$ en la última expresión se concluye $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$.

■

Proposición 1.1.4. *Para $1 < p < \infty$ el espacio $W^{s,p}(\Omega)$ dotado con la norma (1.1) es un espacio reflexivo.*

Demostración: definimos

$$T : W^{s,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times L^p(\Omega \times \Omega) \text{ por } T(u) = \left(u, \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{s + \frac{n}{p}}} \right),$$

donde $W^{s,p}(\Omega)$ es equipado con la norma (1.1) y $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega \times \Omega)$ es equipado con la norma $\|(u, v)\| = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega \times \Omega)}$. Observe que

$$\|T(u)\| = \|u\|_{L^p(\Omega)} + [u]_{W^{s,p}(\Omega)},$$

es decir, T es un isometría. Dado que $W^{s,p}(\Omega)$ es un espacio Banach, $T(W^{s,p}(\Omega))$ es un espacio Banach, así es cerrado en el espacio reflexivo $(L^p(\Omega) \times L^p(\Omega \times \Omega), \|\cdot\|)$, luego, $T(W^{s,p}(\Omega))$ es reflexivo. Por lo tanto $W^{s,p}(\Omega)$ es reflexivo.

■

Desde ahora nos enfocaremos en el siguiente espacio

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} < \infty\},$$

al que lo dotaremos con la norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} := [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.2}$$

Si se hace $\Omega = \mathbb{R}^n$ en la Proposición 1.1.3 y Proposición 1.1.4 sus demostraciones siguen siendo válidas, así $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ es Banach y Reflexivo.

Notemos que $[u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} < \infty$, para toda $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Ahora definiremos el espacio de Sobolev fraccionario con el que trabajaremos posteriormente.

Definición 1.1.5. *El espacio $\widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$ esta definido como la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ sobre $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ con respecto a la norma (1.2).*

Como $\widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, luego es un espacio Banach y reflexivo.

La semi norma de Gagliardo cumple la siguiente desigualdad del tipo Poincaré.

Proposición 1.1.6. *(Desigualdad de Poincaré para seminorma de Gagliardo). Sea $1 \leq p < \infty$ y $s \in (0, 1)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un conjunto abierto y acotado, entonces,*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p \leq I_{n,s,p}(\Omega) [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p \text{ para } u \in C_0^\infty(\Omega),$$

donde la cantidad geométrica $I_{n,s,p}(\Omega)$ está definida por

$$I_{n,s,p}(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\text{diam}(\Omega \cup B)^{n+sp}}{|B|} : B \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega \text{ es una bola } \right\}.$$

Demostración: sean $u \in C_0^\infty(\Omega)$ y $B_R \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ una bola de radio R contenida en el complemento de Ω . Para $x \in \Omega$ e $y \in B_R$, tenemos,

$$|u(x)|^p = \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} |x-y|^{n+ps}.$$

Integrando la expresión anterior sobre B_R con respecto a y , se deduce,

$$|B_R| |u(x)|^p \leq \sup_{x \in \Omega, y \in B_R} |x-y|^{n+ps} \int_{B_R} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dy$$

Integrando sobre Ω con respecto x obtenemos

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \leq \frac{\text{diam}(\Omega \cup B_R)^{n+sp}}{|B_R|} \int_{\Omega} \int_{B_R} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dx dy.$$

Como B_R fue seleccionada arbitrariamente, la demostración queda concluida. ■

Observación 1.1.7. *El resultado anterior muestra que para un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ el espacio $\widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$ puede ser equivalentemente definido como la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ sobre $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ con respecto a la seminorma $[\cdot]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$.*

Daremos una demostración de una desigualdad del tipo Sobolev para espacios Sobolev fraccionario siguiendo a Di Nezza [12], se realizará vía algunas estimaciones algebraicas, no haciendo uso de técnicas de interpolación o espacios de Besov.

Lema 1.1.8. *Fijando $x \in \mathbb{R}^n$. Sean $p \in [1, \infty)$ y $s \in (0, 1)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un conjunto medible con medida finita. Entonces,*

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \geq \omega_{n-1} \frac{\omega_n^{sp/n}}{sp} |\Omega|^{-sp/n}$$

Demostración: Sea $\rho := \left(\frac{|\Omega|}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}$, así

$$\begin{aligned} |(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \cap B(x, \rho)| &= |B(x, \rho) \setminus (\Omega \cap B(x, \rho))| \\ &= |B(x, \rho)| - |\Omega \cap B(x, \rho)| \\ &= |\Omega| - |\Omega \cap B(x, \rho)| \\ &= |\Omega \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(x, \rho))|. \end{aligned}$$

Considerando la identidad anterior y usando coordenadas polares centradas en x , tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} &= \int_{(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \cap B(x, \rho)} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} + \int_{(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(x, \rho))} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\ &\geq \int_{(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \cap B(x, \rho)} \frac{dy}{\rho^{n+sp}} + \int_{(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(x, \rho))} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\ &= \frac{|(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \cap B(x, \rho)|}{\rho^{n+ps}} + \int_{(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(x, \rho))} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\ &= \frac{|\Omega \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(x, \rho))|}{\rho^{n+ps}} + \int_{(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(x, \rho))} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\ &\geq \int_{\Omega \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(x, \rho))} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} + \int_{(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(x, \rho))} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \rho)} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\ &= \omega_{n-1} \int_{\rho}^{\infty} r^{-sp-1} dr \\ &= \omega_{n-1} \frac{\omega_n^{sp/n}}{sp} |\Omega|^{-sp/n}. \end{aligned}$$



Lema 1.1.9. Sean $p \in [1, \infty)$ y $s \in (0, 1)$ tal que $sp < n$. Fijo $T > 1$. Sea $N \in \mathbb{Z}$ y $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ una sucesión decreciente no negativa y acotada con $x_k = 0$ para cualquier $k \geq N$. Entonces,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^{(n-sp)/n} T^k \leq T^{\frac{n}{n-sp}} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ x_k \neq 0}} x_{k+1} x_k^{-sp/n} T^k$$

Demostración: Por hipótesis claramente tenemos que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^{(n-sp)/n} T^k \quad \text{y} \quad \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ x_k \neq 0}} x_{k+1} x_k^{-sp/n} T^k \quad \text{son series convergentes.}$$

Usando una sustitución para trasladar índices y la desigualdad de Hölder para los exponentes conjugados $\alpha = n/sp$ y $\beta = n/(n-sp)$, se consigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^{(n-sp)/n} T^k &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{k+1}^{(n-sp)/n} T^k \\ &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ x_k \neq 0}} x_{k+1}^{(n-sp)/n} T^k \\ &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ x_k \neq 0}} (x_k^{sp/n\beta} T^{k/\alpha}) (x_{k+1}^{1/\beta} x_k^{-sp/n\beta} T^{k/\beta}) \\ &\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (x_k^{sp/n\beta} T^{k/\alpha})^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ x_k \neq 0}} (x_{k+1}^{1/\beta} x_k^{-sp/n\beta} T^{k/\beta})^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ &\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^{(n-sp)/n} T^k \right)^{sp/n} \left(\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ x_k \neq 0}} x_{k+1} x_k^{-sp/n} T^k \right)^{(n-sp)/n}. \end{aligned}$$

De esta desigualdad tenemos que

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^{(n-sp)/n} T^k \right)^{1-sp/n} \leq T \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{k+1} x_k^{-sp/n} T^k \right)^{(n-sp)/n}.$$

Desde la última desigualdad el lema queda demostrado.



En la siguiente proposición y posterior teorema se usará una constante genérica $C(n, p, s)$, la que no representando necesariamente la misma constante.

Lema 1.1.10. Sean $p \in [1, \infty)$ y $s \in (0, 1)$ tal que $sp < n$.

$$\text{Sea } f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ con soporte compacto.} \quad (1.3)$$

Para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, definimos

$$x_k := |\{|f| > 2^k\}|. \quad (1.4)$$

Luego,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dx dy \geq C \sum_{k \in \mathbb{Z}, x_k \neq 0} x_{k+1} x_k^{-sp/n} 2^{pk} \quad (1.5)$$

para una constante $C = C(n, p, s) > 0$.

Demostración: Sabemos que $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Debido a esto podemos considerar que $f \geq 0$, reemplazando f por $|f|$ si es necesario. Definimos

$$X_k := \{|f| > 2^k\} = |f|^{-1}(2^k, \infty). \quad (1.6)$$

Claramente observamos que $X_{k+1} \subseteq X_k$, luego

$$x_{k+1} \leq x_k. \quad (1.7)$$

Definimos

$$D_k := X_k \setminus X_{k+1} = \{2^k < f \leq 2^{k+1}\} \text{ y } d_k := |D_k|. \quad (1.8)$$

Debido a sus definiciones y (1.3), se deduce que:

$$d_k \text{ y } x_k \text{ son acotados y se hacen cero cuando } k \text{ es suficientemente grande.} \quad (1.9)$$

Desde la definición de los conjuntos D_n , se observan los siguientes hechos:

$$D_n \cap D_m = \emptyset \text{ si } m \neq n \quad (1.10)$$

$$\bigcup_{\substack{l \in \mathbb{Z} \\ l \leq k}} D_l = \mathbb{R}^n \setminus X_{k+1} \text{ y } \bigcup_{\substack{l \in \mathbb{Z} \\ l \geq k}} D_l = X_k \quad (1.11)$$

Por simetría

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dx dy &= \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \int_{D_i \times D_j} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dx dy \\
 &= 2 \sum_{\substack{i,j \in \mathbb{Z} \\ j \leq i}} \int_{D_i \times D_j} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dx dy \\
 &\geq 2 \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ x_{i-1} \neq 0}} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \leq i-2}} \int_{D_i \times D_j} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dx dy
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Ahora, fijemos $i \in \mathbb{Z}$ y $x \in D_i$, entonces, para cualquier $j \in \mathbb{Z}$ con $j \leq i - 2$ y cualquier $y \in D_j$ tenemos que

$$|f(x) - f(y)| \geq |f(x)| - |f(y)| \geq 2^i - 2^{j+1} \geq 2^i - 2^{i-1} = 2^{i-1} \tag{1.13}$$

Por (1.11), (1.13) y el Lema 1.1.8, se consigue

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \leq i-2}} \int_{D_j} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dy &\geq 2^{p(i-1)} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \leq i-2}} \int_{D_j} \frac{dy}{|x - y|^{n+ps}} \\
 &= 2^{p(i-1)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus X_{i-1}} \frac{dy}{|x - y|^{n+ps}} \\
 &\geq C_0 2^{pi} x_{i-1}^{-\frac{sp}{n}},
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

donde C_0 es una constante adecuada (independiente de i).

Integrando sobre D_i en (1.14) y considerando que $D_i \times D_j$ son disjuntos obtenemos

$$\sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \leq i-2}} \int_{D_i \times D_j} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dy dx \geq C_0 2^{pi} x_{i-1}^{-sp/n} d_i. \tag{1.15}$$

Sumando sobre $i \in \mathbb{Z}$ y $x_{i-1} \neq 0$ en (1.15)

$$\sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ x_{i-1} \neq 0}} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \leq i-2}} \int_{D_i \times D_j} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dy dx \geq C_0 \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ x_{i-1} \neq 0}} 2^{pi} x_{i-1}^{-sp/n} d_i. \tag{1.16}$$

Por (1.4) y teorema de Fubini para series dobles se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ x_{i-1} \neq 0}} \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z} \\ l \geq i+1}} 2^{pi} x_{i-1}^{-sp/n} d_l &= \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z} \\ x_{l-1} \neq 0}} \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ i \leq l-1}} 2^{pi} x_{i-1}^{-sp/n} d_l \\
 &\leq \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z} \\ x_{l-1} \neq 0}} x_{l-1}^{-sp/n} \frac{2^{pl}}{2^p - 1} d_l \\
 &\leq \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z} \\ x_{l-1} \neq 0}} x_{l-1}^{-sp/n} 2^{pl} d_l.
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Por (1.16), definición (1.8) y posteriormente usando (1.17) se consigue que

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ x_{i-1} \neq 0}} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \leq i-2}} \int_{D_i \times D_j} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dy dx &\geq C_0 \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ x_{i-1} \neq 0}} 2^{pi} x_{i-1}^{-sp/n} x_i - C_0 \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ x_{i-1} \neq 0}} \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z} \\ l \geq i+1}} 2^{pi} x_{i-1}^{-sp/n} d_l \\
 &\geq C_0 \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ x_{i-1} \neq 0}} 2^{pi} x_{i-1}^{-sp/n} x_i - C_0 \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z} \\ x_{l-1} \neq 0}} x_{l-1}^{-sp/n} 2^{pl} d_l
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Desde (1.16) y (1.18) tenemos que

$$\sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ x_{i-1} \neq 0}} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \leq i-2}} \int_{D_i \times D_j} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dy dx \geq \frac{C_0}{1 + C_0} \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ x_{i-1} \neq 0}} 2^{pi} x_{i-1}^{-sp/n} x_i \tag{1.19}$$

Usando (1.12) y (1.19) el lema queda demostrado. ■

Usando los lemas anteriores demostraremos la desigualdad del tipo Sobolev fraccionaria.

Teorema 1.1.11. *Sea $0 < s < 1$ y $p \in [1, \infty)$ tal que $sp < n$. Entonces existe una constante positiva $C = C(n, s, p)$ tal que, para cualquier función medible $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con soporte compacto, tenemos*

$$\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^p \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy = C[f]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.20}$$

donde $p^* = p^*(n, s)$ es llamado exponente fraccionario crítico y es igual a $\frac{np}{n-sp}$. Consecuentemente, el espacio $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ esta continuamente incluido en $L^q(\mathbb{R}^n)$ para cualquier $q \in [p, p^*]$.

Demostración: Si suponemos que $[f]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$ es infinito, el teorema en este caso queda demostrado. Ahora supongamos que f cumple $[f]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} < \infty$. Para $N \in \mathbb{N}$ definimos las funciones f_N como

$$f_N(x) := \max\{\min\{f(x), N\}, -N\} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.21)$$

según esta definición se obtiene

$$|f_N| = |f|_N \quad \text{y} \quad |f_N(x) - f_N(y)| \leq |f(x) - f(y)|. \quad (1.22)$$

Además

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |f_N(x) - f_N(y)| = |f(x) - f(y)| \quad (1.23)$$

Por el teorema de convergencia monótona se observa claramente que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f_N\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p = \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p. \quad (1.24)$$

Por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue tenemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_N(x) - f_N(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy. \quad (1.25)$$

Por (1.24) y (1.25) el teorema quedará demostrado si se establece para f acotada.

Sean x_k y X_k definidos como en (1.4) y (1.6), respectivamente.

Entonces,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{p^*} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{X_k \setminus X_{k+1}} |f(x)|^{p^*} dx \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{X_k \setminus X_{k+1}} (2^{k+1})^{p^*} dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |X_k \setminus X_{k+1}| 2^{p^*(k+1)} \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{p^*(k+1)} x_k. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Elevando a p/p^* la desigualdad (1.26), se consigue

$$\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^p \leq 2^p \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{p^*k} x_k \right)^{p/p^*}. \quad (1.27)$$

Por definición de p^* , tenemos que $p/p^* = (n - sp)/n < 1$, por esto y la subaditividad de la función $x \mapsto |x|^r$ con $r < 1$, obtenemos que

$$\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^p \leq 2^p \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{pk} x_k^{(n-sp)/n}. \quad (1.28)$$

Ocupando el Lema 1.1.9 con $T = 2^p$, y luego usando el Lema 1.1.10 en (1.28) obtenemos que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^p &\leq C(n, p, s) \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ a_k \neq 0}} 2^{pk} x_{k+1} x_k^{\frac{-sp}{n}} \\ &\leq C(n, p, s) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy, \end{aligned} \quad (1.29)$$

abusando de notación para $C(n, p, s)$ si es necesario.

Ahora demostraremos la conclusión final del teorema. Si $q = p$ caemos en el caso de la desigualdad de Poincaré para seminorma de Gagliardo, así nos falta demostrar solamente para $q \in (p, p^*)$. Definimos $\theta = \theta(p, p^*, q) \in (0, 1)$ tal que $1/q = \theta/p + (1 - \theta)/p^*$. Usando la desigualdad de Hölder para $p/(\theta q)$ y $p^*/((1 - \theta)q)$ se consigue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f|^q dx &= \int_{\Omega} |f|^{\theta q} |f|^{(1-\theta)q} dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{\theta q}{p}} \left(\int_{\Omega} |f|^{p^*} dx \right)^{\frac{(1-\theta)q}{p^*}}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Luego,

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\theta} \|f\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{1-\theta} \quad (1.31)$$

De la desigualdad de Poincaré (Proposición 1.1.6) y (1.31) el teorema queda demostrado. ■

La demostración del siguiente lema la seguimos en Brasco [4].

Lema 1.1.12. Sean $p \in [1, \infty)$ y $s \in (0, 1)$, para toda $u \in \widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$, luego se cumple que

$$\sup_{|h|>0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x+h) - u(x)|^p}{|h|^{sp}} dx \leq C[u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

para una constante $C = C(n, p) > 0$.

Demostración: Sea $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ una función positiva radialmente simétrica con soporte en la región

$B(0,1) \setminus B(0,1/2) = \{x \in \mathbb{R}^n : 1/2 < |x| < 1\}$ y con $\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1$. Para $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y tomando $\epsilon > 0$ tal que $|h|/2 < \epsilon < |h|$ definimos,

$$\rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Usando esta definición y la conmutatividad de la convolución, podemos escribir

$$\begin{aligned} |u(x+h) - u(x)| &= \left| \int u(y) \rho_\epsilon(x+h-y) dy + \int [u(x+h) - u(x+h-y)] \rho_\epsilon(y) dy \right. \\ &\quad \left. - \int u(y) \rho_\epsilon(x-y) dy - \int [u(x) - u(x-y)] \rho_\epsilon(y) dy \right| \\ &\leq \left| \int u(y) [\rho_\epsilon(x+h-y) - \rho_\epsilon(x-y)] dy \right| \\ &\quad + \int |u(x+h) - u(x+h-y)| \rho_\epsilon(y) dy + \int |u(x) - u(x-y)| \rho_\epsilon(y) dy. \end{aligned} \tag{1.32}$$

El segundo y tercer término de la expresión final de (1.32) se puede estimar como sigue

$$\begin{aligned} &\int |u(x+h) - u(x+h-y)| \rho_\epsilon(y) dy + \int |u(x) - u(x-y)| \rho_\epsilon(y) dy \\ &\leq \frac{\|\rho\|_\infty}{\epsilon^n} \left[\int_{B(0,\epsilon) \setminus B(0,\frac{\epsilon}{2})} |u(x+h) - u(x+h-y)| dy + \int_{B(0,\epsilon) \setminus B(0,\frac{\epsilon}{2})} |u(x) - u(x-y)| dy \right]. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Debido a que ρ tiene soporte compacto, por el teorema de la divergencia se observa que $\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \rho = 0$, usando este hecho podemos estimar el primer término de la expresión final de (1.32), de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \left| \int u(y) [\rho_\epsilon(x+h-y) - \rho_\epsilon(x-y)] dy \right| &= \left| \int_0^1 \int u(y) \langle \nabla \rho_\epsilon(x-y+sh), h \rangle dy ds \right| \\ &= \left| \int_0^1 \int [u(y) - u(x+sh)] \langle \nabla \rho_\epsilon(x-y+sh), h \rangle dy ds \right| \\ &\leq \frac{\|\nabla \rho\|_\infty |h|}{\epsilon^{n+1}} \int_0^1 \int_{B(x+sh,\epsilon) \setminus B(x+sh,\frac{\epsilon}{2})} |u(y) - u(x+sh)| dy ds \\ &= \frac{\|\nabla \rho\|_\infty |h|}{\epsilon^{n+1}} \int_0^1 \int_{B(0,\epsilon) \setminus B(0,\frac{\epsilon}{2})} |u(x+z+sh) - u(x+sh)| dz ds, \end{aligned} \tag{1.34}$$

donde en la tercera igualdad se ha usado que ρ es radialmente simétrica.

Usando (1.34) y (1.33) en (1.32) y la convexidad de $t \mapsto t^p$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
 |u(x+h) - u(x)|^p &\leq 3^{p-1} \left\{ \frac{\|\nabla\rho\|_\infty^p |h|^p}{\epsilon^{p(n+1)}} \left(\int_0^1 \int_{B(0,\epsilon)\setminus B(0,\frac{\epsilon}{2})} |u(x+y+sh) - u(x+sh)| dy ds \right)^p \right. \\
 &+ \frac{\|\rho\|_\infty^p}{\epsilon^{pn}} \left(\int_{B(0,\epsilon)\setminus B(0,\frac{\epsilon}{2})} |u(x+h) - u(x+h-y)| dy \right)^p \\
 &\left. + \frac{\|\rho\|_\infty^p}{\epsilon^{pn}} \left(\int_{B(0,\epsilon)\setminus B(0,\frac{\epsilon}{2})} |u(x) - u(x-y)| dy \right)^p \right\}.
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Aplicando la desigualdad de Jensen a cada una de las tres integrales de (1.35) se consigue que

$$\begin{aligned}
 |u(x+h) - u(x)|^p &\leq C(n,p) \left\{ \frac{\|\nabla\rho\|_\infty^p |h|^p}{\epsilon^{n+p}} \int_0^1 \int_{B(0,\epsilon)\setminus B(0,\frac{\epsilon}{2})} |u(x+y+sh) - u(x+sh)|^p dy ds \right. \\
 &+ \frac{\|\rho\|_\infty^p}{\epsilon^n} \int_{B(0,\epsilon)\setminus B(0,\frac{\epsilon}{2})} |u(x+h) - u(x+h-y)|^p dy \\
 &\left. + \frac{\|\rho\|_\infty^p}{\epsilon^n} \int_{B(0,\epsilon)\setminus B(0,\frac{\epsilon}{2})} |u(x) - u(x-y)|^p dy \right\}
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

donde

$$C(n,p) = \left(\frac{3\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \right)^{p-1}.$$

Integrando las funciones que componen (1.36) sobre \mathbb{R}^n y redefiniendo $C := C(n,p)$ adecuadamente podemos conseguir que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} |u(x+h) - u(x)|^p dx &\leq C \left\{ \frac{\|\nabla\rho\|_\infty^p |h|^p}{\epsilon^{n+p}} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(0,\epsilon)\setminus B(0,\frac{\epsilon}{2})} \frac{|u(x+y+sh) - u(x+sh)|^p |y|^{ps+n}}{|(x+y+sh) - (x+sh)|^{ps+n}} dy dx ds \right. \\
 &+ \frac{\|\rho\|_\infty^p}{\epsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(0,\epsilon)\setminus B(0,\frac{\epsilon}{2})} \frac{|u(x+h) - u(x+h-y)|^p |y|^{ps+n}}{|(x+h) - (x+h-y)|^{ps+h}} dy dx \\
 &\left. + \frac{\|\rho\|_\infty^p}{\epsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(0,\epsilon)\setminus B(0,\frac{\epsilon}{2})} \frac{|u(x) - u(x-y)|^p |y|^{ps+n}}{|x - (x-y)|^{ps+h}} dy dx \right\}.
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

Como $|y| < \epsilon$ y $\frac{|h|}{2} < \epsilon < |h|$, entonces $|y| < \epsilon < |h|$ usando esto se observa

$$\frac{|y|^{ps+n}}{\epsilon^n} = |y|^{ps} \left(\frac{|y|}{\epsilon} \right)^n \leq |y|^{ps} < |h|^{ps} \tag{1.38}$$

Usando (1.38) en (1.37) obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} |u(x+h) - u(x)|^p dx &\leq C \left\{ \|\nabla \rho\|_\infty^p 2^p |h|^{ps} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(0,\epsilon) \setminus B(0,\frac{\epsilon}{2})} \frac{|u(x+y+sh) - u(x+sh)|^p}{|(x+y+sh) - (x+sh)|^{ps+n}} dy dx ds \right. \\
 &+ |h|^{ps} \|\rho\|_\infty^p \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(0,\epsilon) \setminus B(0,\frac{\epsilon}{2})} \frac{|u(x+h) - u(x+h-y)|^p}{|(x+h) - (x+h-y)|^{ps+h}} dy dx \\
 &+ \left. |h|^{ps} \|\rho\|_\infty^p \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(0,\epsilon) \setminus B(0,\frac{\epsilon}{2})} \frac{|u(x) - u(x-y)|^p}{|x - (x-y)|^{ps+h}} dy dx \right\} \\
 &\leq C |h|^{ps} [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p.
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

Por (1.39) el lema queda demostrado. ■

Para la demostración del siguiente teorema, necesitamos recordar el criterio de compacidad de Kolmogorov.

Teorema 1.1.13. (*Kolmogorov-M. Riesz-Fréchet*) Sea K un subconjunto acotado de $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$, asuma que

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p = 0$$

uniformemente para $f \in K$. Entonces la clausura de $K|_\Omega$ es compacto para cualquier $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con medida finita. (Donde $K|_\Omega$ denota la restricción a Ω de las funciones de K).

Demostración: Ver [6] Capítulo 4, página 111.

Teorema 1.1.14. (*Teorema de Rellich-Kondrachov Fraccionario*). Sean $p \in [1, \infty)$ y $s \in (0, 1)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$ una sucesión acotada, es decir, $\sup\{\|u_n\|_{\widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)} : n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Entonces existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge fuertemente en $L^p(\Omega)$ a una función u . Además, si $p > 1$ entonces $u \in \widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$.

Demostración: Por desigualdad Poincaré se tiene que $\|u_n\|_{L^p(\Omega)}^p \leq I_{n,s,p}(\Omega) \|u_n\|_{\widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)}^p$ y de una de las hipótesis sigue que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada en $L^p(\Omega)$. Extendiendo las funciones u_n por cero a todo \mathbb{R}^n , se tiene que la sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ esta acotada en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Por el lema

anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u_n(x+h) - u_n(x)|^p dx &= |h|^{sp} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u_n(x+h) - u_n(x)|^p}{|h|^{sp}} dx \\ &\leq C|h|^{sp} [u_n]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p \\ &\leq C|h|^{sp} \sup\{\|u_m\|_{\widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)}^p : m \in \mathbb{N}\} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} |u_n(x+h) - u_n(x)| dx \leq C|h|^{sp} \sup\{\|u_m\|_{\widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)}^p : m \in \mathbb{N}\}.$$

Tomando $|h| \rightarrow 0$ en la expresión anterior, obtenemos que

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} |u_n(x+h) - u_n(x)| dx = 0.$$

Por Teorema 1.1.13 tenemos que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un conjunto relativamente compacto en $L^p(\Omega)$, así existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge fuertemente en $L^p(\Omega)$ a una función u . Luego $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a u . Para $p > 1$, $\widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$ es un espacio Banach y reflexivo, por teorema de Banach–Alaoglu existe una subsucesión de $\{u_{n_{k_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$ que converge débilmente a v con $v \in \widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$. Por desigualdad Poincaré se puede ver que el dual de $L^p(\Omega)$ está incluido en el dual de $\widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$, entonces $\{u_{n_{k_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a v en $L^p(\Omega)$. Por unicidad de límites débiles tenemos que $v = u$. Por lo tanto, $u \in \widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$.

Corolario 1.1.15. *Sean $p \in [1, \infty)$ y $s \in (0, 1)$ tal que $sp < n$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Toda sucesión acotada $\{u_n\} \subset \widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$ admite una sucesión convergente en $L^q(\Omega)$ a una función u , para todo $q \geq 1$ tal que $q < p^*$.*

Demostración: Sea $1 \leq q < p$, usando la desigualdad de Hölder se puede demostrar que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\Omega)}. \quad (1.40)$$

Por (1.40) y Teorema 1.1.14 el teorema queda demostrado en este caso. Sea $p < q$; definimos $\theta(p, p^*, q) \in (0, 1)$ tal que $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p^*}$. Usando la desigualdad de Hölder para $\frac{p}{\theta q}$ y $\frac{p^*}{(1-\theta)q}$ se obtiene que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^\theta \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{1-\theta}. \quad (1.41)$$

Usando los Teorema 1.1.11, Teorema 1.1.14 y (1.41) se demuestra el segundo caso y esto finaliza la demostración del teorema.

■



Capítulo 2

Herramientas

2.1. Desigualdad de Prékopa-Leindler

El propósito central de esta sección es demostrar la desigualdad de Prékopa-Leindler, la que tiene como aplicación notable, la desigualdad isoperimétrica clásica (realmente usando una de sus consecuencias, el teorema de Brunn-Minkowski). En esta tesis, se ocupará una consecuencia de la desigualdad de Prékopa-Leindler para demostrar una desigualdad general de rearrreglos de funciones, de la cual la desigualdad de rearrreglo de Riesz es un caso particular. Para dicho propósito nos inspiramos principalmente por las notas de R. J. Gardner [17].

Proposición 2.1.1. (*Representación capa de pastel*) Sea ν una medida en los conjuntos de Borel de \mathbb{R}^+ tal que $\phi(t) := \nu([0, t])$ es finito para todo $t > 0$. Sea (Ω, Σ, m) un espacio de medida y f una función medible no negativa en Ω . Luego,

$$\int_{\Omega} \phi(f(x))m(dx) = \int_0^{\infty} m(\{x \in \Omega : f(x) > t\})\nu(dt). \quad (2.1)$$

En particular, si m es la medida de Dirac de algún punto $x \in \mathbb{R}^n$ y $\nu(dt) = dt$, luego 2.1 toma la forma

$$\nu(x) = \int_0^{\infty} \chi_{\{y \in \Omega : f(y) > t\}}(x)dt. \quad (2.2)$$

Demostración: Primero observamos que

$$m(\{x \in \Omega : f(x) > t\}) = \int_{\Omega} \chi_{\{f > t\}}(x)m(dx) \quad (2.3)$$

y luego usando el teorema de Fubini tenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty m(\{x \in \Omega : f(x) > t\})\nu(dt) &= \int_0^\infty \int_\Omega \chi_{\{f>t\}}(x)m(dx)\nu(dt) \\
 &= \int_\Omega \int_0^\infty \chi_{\{f>t\}}(x)\nu(dt)m(dx) \\
 &= \int_\Omega \int_0^{f(x)} \chi_{\{f>t\}}(x)d\nu(t)m(dx) \\
 &= \int_\Omega \nu([0, f(x)))m(dx) \\
 &= \int_\Omega \phi(f(x))m(dx).
 \end{aligned}$$

■

Corolario 2.1.2. *Sea f una función medible no negativa en \mathbb{R}^n y $t \geq 0$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty |\{f \geq t\}|dt.$$

Demostración: Usar Proposición 2.1 con m igual a la medida de Lebesgue.

■

Ahora daremos unas definiciones que ocuparemos en esta sección.

Definición 2.1.3. *La suma de Minkowski de dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ se define como*

$$A \oplus B := \{z \in \mathbb{R}^n : z = x + y, x \in A, y \in B\}.$$

Definición 2.1.4. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se define el conjunto producto como*

$$\alpha A = \{z \in \mathbb{R}^n : z = \alpha x, x \in A\}.$$

Teorema 2.1.5. *(Desigualdad de Brunn-Minkowski en \mathbb{R}) Sea $0 < \lambda < 1$. Sean A y B dos conjuntos no vacíos medibles acotados en \mathbb{R} tal que $(1 - \lambda)A \oplus \lambda B$ es también medible. Luego*

$$|(1 - \lambda)A \oplus \lambda B| \geq |(1 - \lambda)A| + |\lambda B| \tag{2.4}$$

Demostración: Supongamos que A e B son conjuntos compactos. Como la operación \oplus es continua, $A \oplus B$ es compacta. Traslademos a A y B en $u, v \in \mathbb{R}$ de modo que $(A+u) \cap (B+v) = \{0\}$, $A+u \subset \{x : x \leq 0\}$ y $B+v \subset \{x : x \geq 0\}$. Luego, $(A+u) \cup (B+v) \subset (A+u) \oplus (B+v)$,

esto junto a la invariancia de la medida de Lebesgue bajo traslación, nos permite justificar la siguiente estimación

$$\begin{aligned}
 |A \oplus B| &= |(A + u) \oplus (B + v)| \\
 &\geq |(A + u) \cup (B + v)| \\
 &= |[(A + u) \setminus (B + v)] \cup [(B + v) \setminus (A + u)] \cup \{0\}| \\
 &= |(A + u) \setminus (B + v)| + |(B + v) \setminus (A + u)| + |\{0\}| \\
 &= |A + u| + |B + v| \\
 &= |A| + |B|.
 \end{aligned}$$

Si reemplazamos A y B por $(1 - \lambda)A$ y λB , respectivamente; obtenemos (2.7) para conjuntos compactos. Finalmente la demostración del teorema se obtiene para los conjuntos A y B de la hipótesis, mediante una aproximación por la regularidad interior de la medida de Lebesgue. ■

Teorema 2.1.6. (*Desigualdad de Prékopa-Leindler en \mathbb{R}^n*) Sea $0 < \lambda < 1$. Sean f, g y h funciones no negativas integrables en \mathbb{R}^n que satisfacen

$$h((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda}g(y)^\lambda \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx \right)^\lambda.$$

Demostración: Esta demostración se realizará mediante inducción. Primero demostraremos el caso $n = 1$. Si $t \geq 0$, $f(x) \geq t$ y $g(y) \geq t$, entonces por hipótesis tenemos que

$$h((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda}g(y)^\lambda \geq t^{1-\lambda}t^\lambda = t.$$

Luego

$$(1 - \lambda)\{f \geq t\} \oplus \lambda\{g \geq t\} \subset \{h \geq t\}.$$

Por el Teorema 2.1.5 se deduce que

$$(1 - \lambda)|\{f \geq t\}| + \lambda|\{g \geq t\}| \leq |\{h \geq t\}|. \quad (2.5)$$

Por (2.5), Corolario 2.1.2 y desigualdad de las medias aritmética y geométrica se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h(x)dx &= \int_0^{\infty} |\{h \geq t\}|dt \\ &\geq (1 - \lambda) \int_0^{\infty} |\{f \geq t\}|dt + \lambda \int_0^{\infty} |\{g \geq t\}| \\ &= (1 - \lambda) \int_{\mathbb{R}} f(x)dx + \lambda \int_{\mathbb{R}} g(x)dx \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)dx \right)^{\lambda}. \end{aligned}$$

Supongamos que es cierto para $n - 1$, con $n \in \mathbb{N}$.

Para un $c \in \mathbb{R}$ fijo, definimos $h_c : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow [0, \infty)$ por $h_c(z) = h(c, z)$, similarmente definimos f_c y g_c . Sean $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$, y $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ tales que $c = (1 - \lambda)c_0 + \lambda c_1$. Entonces,

$$\begin{aligned} h_c((1 - \lambda)x + \lambda y) &= h((1 - \lambda)c_0 + \lambda c_1, (1 - \lambda)x + \lambda y) \\ &= h((1 - \lambda)(c_0, x) + \lambda(c_1, y)) \\ &\geq f(c_0, x)^{1-\lambda} g(c_1, y)^{\lambda} \\ &= f_{c_0}(x)^{1-\lambda} g_{c_1}(y)^{\lambda}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la hipótesis inductiva tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_c(x)dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{c_0}(x)dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{c_1}(x)dx \right)^{\lambda}.$$

Por el Teorema de Fubini y desigualdad Prékopa-Leindler para $n = 1$ se consigue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_c(z)dzdc \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{c_0}(z)dzdc_0 \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{c_1}(z)dzdc_1 \right)^{\lambda} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx \right)^{\lambda}. \end{aligned}$$

■

Ahora demostraremos la versión multiplicativa de la desigualdad de Brunn-Minkowski para \mathbb{R}^n .

Teorema 2.1.7. *Sea $0 \leq \lambda \leq 1$. Sean A y B dos conjuntos no vacíos medibles acotados en \mathbb{R}^n tal que $(1 - \lambda)A \oplus \lambda B$ es también medible. Luego*

$$|(1 - \lambda)A \oplus \lambda B| \geq |A|^{1-\lambda}|B|^\lambda$$

Demostración: Sean $f = \chi_A$, $g = \chi_B$ y $h = \chi_{(1-\lambda)A+\lambda B}$. Sea $x, y \in \mathbb{R}^n$. Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ o $y \in \mathbb{R}^n \setminus B$, entonces $h((1 - \lambda)x + \lambda y) = 0 = f(x)^{1-\lambda}g(y)^\lambda$. Si $x \in A$ e $y \in B$, entonces $h((1 - \lambda)x + \lambda y) = 1 = f(x)^{1-\lambda}g(y)^\lambda$. En ambos casos se cumple las hipótesis del Teorema 2.1.6, usando dicho teorema se obtiene que

$$\begin{aligned} |(1 - \lambda)A \oplus \lambda B| &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(1-\lambda)A+\lambda B}(x) dx \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(x) dx \right)^\lambda \\ &= |A|^{1-\lambda}|B|^\lambda, \end{aligned}$$

■

Teorema 2.1.8. *(Desigualdad de Brunn-Minkowski en \mathbb{R}^n)* Sea $0 \leq \lambda \leq 1$. Sean A y B dos conjuntos no vacíos medibles acotados en \mathbb{R}^n tal que $(1 - \lambda)A \oplus \lambda B$ es también medible. Luego

$$|(1 - \lambda)A \oplus \lambda B|^{\frac{1}{n}} \geq (1 - \lambda)|A|^{\frac{1}{n}} + \lambda|B|^{\frac{1}{n}} \quad (2.6)$$

Demostración: Sean A y B dos conjuntos no vacíos medibles acotados en \mathbb{R}^n . Definamos $\lambda' = \frac{|B|^{\frac{1}{n}}}{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}}$, $A' = |A|^{-\frac{1}{n}}A$ y $B' = |B|^{-\frac{1}{n}}B$. Entonces, $1 - \lambda' = \frac{|A|^{\frac{1}{n}}}{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}}$. Por otra parte, usando la homogeneidad de la medida de Lebesgue, se tiene que $|A'| = 1$ y $|B'| = 1$.

Por Teorema 2.1.7 tenemos que

$$|(1 - \lambda')A' \oplus \lambda'B'|^{\frac{1}{n}} \geq |A'|^{1-\lambda'}|B'|^{\lambda'} = 1, \quad (2.7)$$

pero

$$|(1 - \lambda')A' \oplus \lambda'B'| = \frac{|A \oplus B|}{(|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}})^n} \geq 1.$$

Entonces,

$$|A \oplus B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}. \quad (2.8)$$

Remplazando A por $(1 - \lambda)A$ y B por λB en (2.8) el teorema queda demostrado

■

Recordemos la definición de un conjunto convexo y función convexa.

Definición 2.1.9. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. C es un conjunto convexo si para cualquier par de puntos $x, y \in C$, y cualquier $\alpha \in [0, 1]$, se tiene $\alpha x + (1 - \alpha)y \in C$.

Definición 2.1.10. Una función $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, donde C es un conjunto convexo, es convexa si $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ para cada $x, y \in C$, y $\alpha \in [0, 1]$.

Definición 2.1.11. Dado un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío, definimos la cápsula convexa de S , a la cual denotaremos como $co(S)$, como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S . La cápsula convexa de un conjunto finito es llamado politopo convexo.

Corolario 2.1.12. Sea C un conjunto convexo en \mathbb{R}^n . Sea $t \in \mathbb{R}$ y definimos $C(t) = \{z \in \mathbb{R}^{n-1} : (z, t) \in C\}$, entonces

$$|C(\theta t + (1 - \theta)s)| \geq |C(t)|^\theta |C(s)|^{1-\theta} \quad \text{para } t, s \in \mathbb{R} \quad \text{y } \theta \in [0, 1].$$

Demostración: Sea $\theta \in [0, 1]$ y definimos $\chi_{C(\theta t + (1 - \theta)s)}$ la función característica de $C(\theta t + (1 - \theta)s)$, debido a la convexidad de C tenemos la siguiente desigualdad

$$\chi_{C(\theta t + (1 - \theta)s)}((1 - \theta)x + \theta y) \geq (\chi_{C(t)}(x))^\theta (\chi_{C(s)}(y))^{1-\theta} \quad \text{para } x, y \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Tomando $h(x) = \chi_{C(\theta t + (1 - \theta)s)}(x)$, $f(x) = \chi_{C(t)}(x)$ y $g(x) = \chi_{C(s)}(x)$ en la desigualdad de Prékopa-Leindler en \mathbb{R}^{n-1} se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h(x) dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x) dx \right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x) dx \right)^\theta. \quad (2.9)$$

Se observa que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h(x) dx = |C(\theta t + (1 - \theta)s)|, \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x) dx = |C(t)| \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x) dx = |C(s)|.$$

Con esto en mente y (2.9) se consigue

$$|C(\theta t + (1 - \theta)s)| \geq |C(t)|^\theta |C(s)|^{1-\theta}.$$

■

2.2. Rearreglo simétrico decreciente de conjuntos y funciones

Para esta sección usaremos Lieb y Loss [25] junto con Kesavan [13].

Un rearreglo mapea una función dada u en una nueva función u^* más simétrica. Esto se realizó mediante un rearreglo de los conjunto de nivel de u . Por esto, los rearreglos se definen para los conjuntos y luego se extiende a funciones.

Definición 2.2.1. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de Borel de medida de Lebesgue finita, definimos A^* , el rearreglo simétrico decreciente (simetrización de Schwarz) del conjunto A , como la bola abierta centrada en el origen cuyo volumen es el de A .

Las funciones adecuadas para aplicarle rearreglos son las funciones Borel medibles que cumple la siguiente definición.

Definición 2.2.2. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función Borel medible, se dirá que f se desvanece en el infinito si $|\{x : |f(x)| > t\}|$ es finito para todo $t > 0$.

Observación 2.2.3. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función Borel medible que se desvanece en el infinito, entonces $\{x : |f(x)| > t\} \subseteq \{x : |f(x)| > s\}$ para cualquier $t > s$.

Luego, $\{x : |f(x)| > t\}^* \subseteq \{x : |f(x)| > s\}^*$ para cualquier $t > s$. Ahora, observemos que $\{x : |f(x)| > t\}$ decrece a cero cuando $t \rightarrow \infty$. En particular, los radios r_t de las bolas $\{x : |f(x)| > t\}^*$ decrece a cero cuando $t \rightarrow \infty$. En vista de esto, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe un $T > 0$ tal que $x \notin \{|f| > t\}^*$ para todo $t \geq T$.

Definición 2.2.4. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función Borel medible que se desvanece en el infinito, definiremos el rearreglo simétrico decreciente f^* de f por,

$$f^*(x) := \int_0^\infty \chi_{\{|f|>t\}^*}(x) dt.$$

donde la integral es en el sentido Riemann.

Observamos directamente de la definición que f^* es no negativa.

Observación 2.2.5. Sea $\alpha_x = \sup\{t \in \mathbb{R} : x \in \{|f| > t\}^*\}$. Entonces, para cada $t < \alpha_x$, $\chi_{\{|f|>t\}^*}(x) = 1$ y para cada $t > \alpha_x$, $\chi_{\{|f|>t\}^*}(x) = 0$. Luego,

$$f^*(x) = \int_0^\infty \chi_{\{|f|>t\}^*}(x) dt = \int_0^{\alpha_x} \chi_{\{|f|>t\}^*}(x) dt + \int_{\alpha_x}^\infty \chi_{\{|f|>t\}^*}(x) dt = \alpha_x. \quad (2.10)$$

Así, f^* se puede redefinir, como

$$f^*(x) = \sup\{t : x \in \{|f| > t\}^*\}.$$

Proposición 2.2.6. Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de Borel de medida de Lebesgue finita, entonces

$$(\chi_E)^* = \chi_{E^*}.$$

Demostración: Por definición, tenemos que

$$\chi_{E^*}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E^* \\ 0 & \text{si } x \in (E^*)^C. \end{cases}$$

Por otra parte,

$$\{\chi_E > t\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } t \geq 1 \\ E & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \mathbb{R}^n & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Así,

$$\{\chi_E > t\}^* = \begin{cases} \emptyset & \text{si } t \geq 1 \\ E^* & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \mathbb{R}^n & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Con esto último, podemos escribir

$$(\chi_E)^*(x) = \sup\{t : x \in \{\chi_E > t\}^*\} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E^* \\ 0 & \text{si } x \in (E^*)^C. \end{cases}$$

■

Proposición 2.2.7. f^* es radialmente simétrico y decreciente como función de $|x|$, es decir,

$$f^*(x) = f^*(y) \text{ si } |x| = |y| \text{ y } f^*(x) \geq f^*(y) \text{ si } |x| \leq |y|.$$

Demostración: Dado que el integrando de la definición de f^* es en término de la función característica de bolas, claramente f^* es radialmente simétrica y no decreciente como función de $|x|$.

■

Proposición 2.2.8. Los conjuntos de nivel de f^* son los rearrreglos de los conjuntos de nivel de $|f|$, es decir, $\{x : f^*(x) > t\} = \{x : |f(x)| > t\}^*$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego, f^* es Borel medible y $|\{x : f^*(x) > t\}| = |\{x : |f(x)| > t\}|$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o sea, f y f^* son equimedibles.

Demostración: Sea $x \in \{y : f^*(y) > t\}$. Supongamos que $x \notin \{y : |f(y)| > t\}^*$. Para todo $r > t$, se tiene que

$$\{y : |f(y)| > r\} \subset \{y : |f(y)| > t\}.$$

Aplicando rearrreglo en la última inclusión se consigue que

$$\{y : |f(y)| > r\}^* \subset \{y : |f(y)| > t\}^*,$$

de esto se desprende que , $x \notin \{y : |f(y)| > r\}^*$.

Luego,

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \int_0^\infty \chi_{\{|f|>t\}^*}(x) dt \\ &= \int_0^t \chi_{\{|f|>t\}^*}(x) dt + \int_t^\infty \chi_{\{|f|>t\}^*}(x) dt \\ &\leq \int_0^t 1 dt + 0 = t, \end{aligned}$$

esto es una contradicción. Por lo tanto, $x \in \{y : |f(y)| > t\}^*$.

Recíprocamente, si $x \in \{y : |f(y)| > t\}^*$, entonces t no es supremo de $|f|$, esto garantiza que se pueda encontrar un $m > t$ tal que $x \in \{y : |f(y)| > m\}^*$ (esta es una bola centrada en el

origen más pequeña que $\{y : |f(y)| > t\}^*$). Ahora, si $r < m$, entonces $x \in \{y : |f(y)| > r\}^*$.

En virtud de lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \int_0^\infty \chi_{\{|f|>r\}^*}(x) dr \\ &= \int_0^m \chi_{\{|f|>r\}^*}(x) dr + \int_m^\infty \chi_{\{|f|>r\}^*}(x) dr \\ &= \int_0^m 1 dr + \int_m^\infty \chi_{\{|f|>r\}^*}(x) dr \geq m > t. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\{x : f^*(x) > t\} = \{x : |f(x)| > t\}^*.$$

En particular, $\{x : f^*(x) > t\}$ es una bola abierta para todo t . Esto significa que f^* es una función Borel medible y de hecho es semi-continua inferior.

De la identidad anterior se deduce que

$$|\{x : f^*(x) > t\}| = |\{x : |f(x)| > t\}^*| = |\{x : |f(x)| > t\}|.$$

■

Corolario 2.2.9. *Sea f una función no negativa medible. Entonces, $(f + \tau)^* = f^* + \tau$*

Demostración: Usando Proposición 2.2.8 y un cambio de variable pertinente se justifica las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} f^*(x) + \tau &= \sup\{v : x \in \{y : f^*(y) > v - \tau\}\} \\ &= \sup\{v : x \in \{y : f(y) + \tau > v\}^*\} \\ &= (f(x) + \tau)^*. \end{aligned}$$

■

Corolario 2.2.10. *Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible Borel que se desvanece en el infinito y $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continua y monótona creciente con $\Phi(0) = 0$. Entonces,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(f(x)^*) dx.$$

Demostración: Por las hipótesis de Φ se puede garantizar la existencia de una medida ν , tal que $\Phi(t) = \nu([0, t])$. Por el Teorema 2.1 tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|) dx = \int_0^\infty |\{x : |f(x)| > t\}| \nu(dt)$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(f(x)^*) dx = \int_0^\infty |\{x : f(x)^* > t\}| \nu(dt).$$

Por la Proposición 2.2.8 sabemos que $|\{x : |f(x)| > t\}| = |\{x : f(x)^* > t\}|$, así

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(f(x)^*) dx.$$

■

El corolario anterior es cierto para toda $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ función medible Borel.

Corolario 2.2.11. *Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible Borel, entonces, $\|f\|_p = \|f^*\|_p$.*

Demostración: La demostración de este corolario sigue de la aplicación del corolario anterior a la función $x \mapsto |x|^p$.

■

Proposición 2.2.12. *Si $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ es monótona creciente, entonces $(\Phi \circ |f|)^* = \Phi \circ f^*$.*

Demostración: Con el fin de demostrar esta proposición, primero se probará que,

$$\{x : (\Phi \circ |f|)(x) > \tau\} = \{x : |f(x)| > \alpha_\Phi(\tau)\}$$

donde

$$\alpha_\Phi(\tau) = \inf\{\gamma : \Phi(\gamma) > \tau\}.$$

Considerando $w \in \{x : |f(x)| > \alpha_\Phi(\tau)\}$, y usando la monotonía creciente de Φ , tenemos

$$\Phi(|f(x)|) > \Phi(\alpha_\Phi(\tau)) \geq \tau.$$

Debido a esto, $w \in \{x : (\Phi \circ |f|)(x) > \tau\}$.

Ahora consideremos $w \in \{x : (\Phi \circ |f|)(x) > \tau\}$, entonces $(\Phi \circ |f|)(w) > \tau$. Así, tenemos $|f(w)| > \alpha_\Phi(\tau)$. Usando Teorema 2.1 la proposición queda demostrada.



En esta tesis no se va usar el rearrreglo simétrico decreciente en toda su generalidad sino que su definición y propiedades en una dimensión.

2.3. Simetrización de Steiner de conjuntos y funciones

Para esta sección usaremos Gruber[18].

Definición 2.3.1. *Sea Ω un conjunto abierto y acotado o un conjunto compacto de \mathbb{R}^n y H un hiperplano que pasa por el origen.*

La simetrización de Steiner Ω^ de Ω con respecto a H se define como sigue: para cada recta L ortogonal a H tal que $\Omega \cap L \neq \emptyset$, el segmento $\Omega \cap L$ se mueve hasta que su punto medio este en H . La unión de todos los segmentos así obtenidos es Ω^* . (ver una figura explicativa más abajo).*

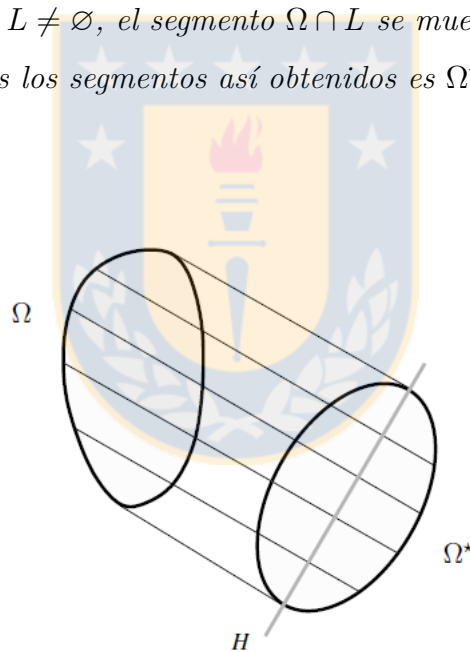


Figura 2.1: Simetrización de Steiner

Se observa claramente de esta última definición que Ω^* es simétrica respecto a H .

Definición 2.3.2. *Se dirá que un subconjunto K de \mathbb{R}^n es un cuerpo convexo si es compacto y convexo. Se dirá que es un cuerpo convexo propio si su interior es no vacío, en otro caso,*

impropio. El inradio $r(K)$ y el circunradio $R(K)$ son, respectivamente, el máximo radio de las bolas contenidas en K y el mínimo radio de las bolas que contienen a K .

Definición 2.3.3. *La área o contenido de Minkowski $S(M)$ de un subconjunto adecuado M en \mathbb{R}^n es*

$$S(M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(M \oplus \epsilon B(0, 1)) - V(M)}{\epsilon}$$

donde $V(M)$ es el volumen de M .

En el caso de un politopo convexo o un conjunto convexo, existe este límite y el área de superficie en el sentido de Minkowski coincide con un significado habitual de superficie, para ver detalles de esto consultar [19].

Antes de ver una serie de propiedades de simetrización de Steiner de cuerpos convexos, necesitamos un lema previo.

Lema 2.3.4. *Sean K un cuerpo convexo, $x \in K$ y L una recta con $K \cap (L+x) \neq \emptyset$. Entonces, para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ tal que $K \cap (L+x_n) \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \rightarrow x$ se tiene que*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |K \cap (L+x_n)| \leq |K \cap (L+x)|.$$

Demostración: Sea v el vector director de L . Tenemos que

$$K \cap (L+x_n) = [x_n + a_n v, x_n + b_n v] \text{ con } a_n \leq b_n.$$

De esta forma, $|K \cap (L+x_n)| = b_n - a_n$. Debido a que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |K \cap (L+x_n)| < \infty,$$

podemos encontrar una subsucesión tal que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |K \cap (L+x_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |K \cap (L+x_n)|$$

(en esta expresión hemos abusado de la notación).

Debido a la compacidad de K , las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son acotadas, y podemos encontrar

una subsucesión de los naturales que vamos a notar nuevamente por n , tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Luego, $x + av = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + a_n v)$ pertenece a K , de la misma forma $x + bv \in K$.

Luego, por la convexidad de K

$$|K \cap (L + x)| \geq |[x + av, x + bv]| = b - a = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} |K \cap (L + x_n)|.$$

■

Proposición 2.3.5. *Sean K y V cuerpos convexos de \mathbb{R}^n y H un hiperplano. Tenemos las siguientes propiedades:*

- (a) Si $K \subseteq V$, entonces $K^* \subseteq V^*$.
- (b) $(\lambda K)^* = \lambda K^*$ (salvo traslación) para $\lambda \geq 0$.
- (c) Si K es un cuerpo convexo, entonces K^* es un cuerpo convexo.
- (d) $K^* + V^* \subseteq (K + V)^*$ (salvo traslación).
- (e) Si K es un cuerpo convexo, entonces $|K| = |K^*|$.
- (f) Si K es un cuerpo convexo, entonces $S(K^*) \leq S(K)$.
- (g) Si K es un cuerpo convexo propio, entonces $r(K) \leq r(K^*)$.
- (h) Si K es un cuerpo convexo, entonces $R(K^*) \leq R(K)$.

Demostración: Sin pérdida de generalidad supongamos que $0 \in H$. Sea L una recta ortogonal a H que pasa por el origen.

(a) Si $x \in K^*$, luego $x = h + l$ con $h \in H$ y $l \in L$ tal que

$$|l| \leq \frac{1}{2} |K \cap (L + x)| \leq \frac{1}{2} |V \cap (L + x)|,$$

con lo cual $x \in V^*$.

(b) Si $x \in \lambda K^*$, esto equivale a que $x = \lambda y$ con $y = h + l$ donde $h \in H$ y $l \in L$ tal que

$$|l| \leq \frac{1}{2} |K \cap (L + y)|.$$

Debido a que L es un subespacio vectorial, la última desigualdad equivale a

$$|\lambda l| \leq \frac{1}{2} |\lambda K \cap (L + \lambda y)|.$$

Lo que concluye que $x = \lambda y \in (\lambda K)^*$. Esto demuestra que $\lambda K^* \subseteq (\lambda K)^*$. Ahora, usando la inclusión anterior se tiene que $\frac{1}{\lambda}(\lambda K)^* \subseteq (\frac{1}{\lambda}\lambda K)^* = K^*$. Esto da la otra inclusión $(\lambda K)^* \subseteq \lambda K^*$.

c) Sea $\pi_H : \mathbb{R}^n \rightarrow H$ la proyección ortogonal sobre H . Primero demostraremos que la convexidad se mantiene bajo aplicación de simetrización de Steiner.

Sea $x, y \in K^*$ y $\lambda \in [0, 1]$. Por lo anterior, la linealidad de π_H y desigualdad de Brunn Minkowski se tiene que

$$\begin{aligned} |\lambda x + (1 - \lambda)y - \pi_H(\lambda x + (1 - \lambda)y)| &= |\lambda(x - \pi_H(x)) + (1 - \lambda)(y - \pi_H(y))| \\ &\leq \lambda|x - \pi_H(x)| + (1 - \lambda)|y - \pi_H(y)| \\ &\leq \frac{1}{2}((1 - \lambda)|K \cap (L + y)| + \lambda|K \cap (L + x)|) \\ &\leq \frac{1}{2}|(1 - \lambda)(K \cap (L + y)) \oplus \lambda(K \cap (L + x))| \\ &\leq \frac{1}{2}|K \cap (L + (\lambda x + (1 - \lambda)y))|. \end{aligned}$$

Esta última desigualdad muestra que $x + (1 - \lambda)y \in K^*$.

Ahora demostraremos que la compacidad se mantiene bajo aplicación de simetrización de Steiner.

Como K es compacto, K es acotado, es decir, existe $h \in H$ y $R > 0$ tal que $K \subseteq B(h, R)$.

Por (a) se desprende que $K^* \subseteq B(h, R)^* = B(h, R)$, luego K^* también es acotado.

Ahora demostraremos que K^* es cerrado, en efecto, sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K^*$ con $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por la continuidad de π_H se tiene $\pi_H(x_n) \rightarrow \pi_H(x)$. Usando el Lema 2.3.4 se consigue que

$$|x - \pi_H(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \pi_H(x_n)| \leq \frac{1}{2} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |K \cap (L + x_n)| \leq \frac{1}{2} |K \cap (L + x)|.$$

Con lo cual se deduce que $x \in K^*$ y de esta forma K^* es compacto.

d) Sean $x \in K^*$ e $y \in V^*$, equivalentemente $x = h + l$ e $y = k + m$ donde $h, k \in H$ y $l, m \in L$

son tal que

$$\begin{aligned}
 |l + m| &\leq |l| + |m| \\
 &\leq \frac{1}{2}(|K \cap (L + x)| + |D \cap (L + y)|) \\
 &\leq \frac{1}{2}|K \cap (L + x) + D \cap (L + y)| \\
 &= \frac{1}{2}|(K + D) \cap (L + x + y)|,
 \end{aligned}$$

donde en la tercera desigualdad se a ocupando la desigualdad Brunn-Minkowski. Así, $x + y \in (K + D)^*$.

e) Sea π_H la proyección sobre H . Supongamos sin perdida de generalidad que H es el hiperplano $x_n = 0$. Usando el teorema de Fubini, obtenemos que

$$\begin{aligned}
 |K| &= \int_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \pi_H(K)} \left(\int_{x_n \in K \cap (L + (x_1, \dots, x_{n-1}, 0))} dx_n \right) dx_1 \dots dx_{n-1} \\
 &= \int_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \pi_H(K)} |K \cap (L + (x_1, \dots, x_{n-1}, 0))| dx_1 \dots dx_{n-1} \\
 &= \int_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \pi_H(K)} |K^* \cap (L + (x_1, \dots, x_{n-1}, 0))| dx_1 \dots dx_{n-1} \\
 &= \int_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \pi_H(K)} \left(\int_{x_n \in K^* \cap (L + (x_1, \dots, x_{n-1}, 0))} dx_n \right) dx_1 \dots dx_{n-1} \\
 &= |K^*|.
 \end{aligned}$$

f) Por parte (b) y (d), tenemos que

$$(K + B(0, \epsilon))^* \supseteq K^* + (\epsilon B(0, 1))^* = K^* + \epsilon B(0, 1)^* = K^* + \epsilon B(0, 1) \quad (2.11)$$

Si $\epsilon > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{|K^* + \epsilon B(0, 1)| - |K^*|}{\epsilon} &\leq \frac{|(K + \epsilon B(0, 1))^*| - |K^*|}{\epsilon} \\
 &= \frac{|K + \epsilon B(0, 1)| - |K|}{\epsilon}.
 \end{aligned}$$

La primera desigualdad se justifica por (2.11) y la última igualdad por la parte (e). El resultado sigue tomando $\epsilon \rightarrow 0^+$ en la desigualdad anterior y de la Definición 2.3.3.

g) Como K es un cuerpo convexo propio, existe un $k \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$ tal que $B(k, \epsilon) \subseteq K$. Entonces, $B(d, \epsilon) = (B(k, \epsilon))^* \subseteq K^*$, para algún d adecuado. Por definición de máximo y de

inradio, se tiene $r(K) \leq r(K^*)$.

h) Como K es acotado, existe un $k \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$ tal que $K \subseteq B(k, \epsilon)$. Entonces, $K^* \subseteq B(k, \epsilon)^* = B(d, \epsilon)$, para algún d adecuado. Por definición de mínimo y de circunradio, se tiene $R(K^*) \leq R(K)$.

■

A continuación corresponde dar la definición de la simetrización de Steiner de una función.

Definición 2.3.6. *Sea f una función no negativa Lipschitz con soporte compacto en un conjunto abierto Ω . La simetrización de Steiner de f es la función f^* definida en Ω^* por*

$$f^*(x) = \sup\{c : x \in \{y \in \Omega : f(y) > c\}^*\}$$

Una definición de función de Steiner equivalente es la siguiente:

Definición 2.3.7. *Sea f una función no negativa medible definida en \mathbb{R}^n , y sea V un hiperplano $n-1$ dimensional que pasa por el origen de \mathbb{R}^n . Seleccionando un sistema coordenado ortogonal en \mathbb{R}^n , tal que la x_n -dirección sea perpendicular a V . Una función no negativa medible f^* en \mathbb{R}^n es llamada una simetrización de Steiner con respecto a V de la función f , si $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un rearrreglo simétrico decreciente con respecto a x_n de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ para cada x_1, x_2, \dots, x_{n-1} fijo.*

Ahora daremos una serie de propiedades de la simetrización de Steiner de funciones.

Proposición 2.3.8. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de Borel de medida de Lebesgue finita, entonces*

$$(\chi_A)^* = \chi_{A^*}.$$

Demostración: la demostración es completamente análoga a la Proposición 2.2.6.

■

Proposición 2.3.9. *Sea f una función no negativa medible. Entonces,*

$\{x : f^*(x) > t\} = \{x : f(x) > t\}^*$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Con esto se deduce que

$|\{x : f^*(x) > t\}| = |\{x : f(x) > t\}|$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$, o sea, f y f^* son equimedibles.

Demostración: De la definición de simetrización de Steiner de funciones se deduce que

$$f^*(x', x_n) > t, x_n \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad t \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow |x_n| < \frac{1}{2} |\{x_n \in \mathbb{R} : f(x', x_n) > t\}|,$$

y de esta equivalencia es inmediato notar que $\{x : f^*(x) > t\} = \{x : f(x) > t\}^*$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$. ■

Proposición 2.3.10. *Sea $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función creciente, luego*

$$(\Phi \circ |f|)^* = \Phi \circ f^*.$$

Demostración: la demostración es completamente análoga al Corolario 2.2.12. ■

Proposición 2.3.11. *Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible Borel que se desvanece en el infinito y $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continua y monótona creciente con $\Phi(0) = 0$. Entonces,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(f(x)^*) dx.$$

Demostración: Se demuestra de la misma forma que el Corolario 2.2.10 usando Proposición 2.3.9. ■

2.4. Desigualdad de Brascamp-Lieb-Luttinger

El propósito central de esta sección es demostrar una desigualdad general de rearrreglos [3], de la cual la desigualdad de rearrreglo de Riesz es un caso particular, para tal fin usaremos [3], [25], [34].

Teorema 2.4.1. *Sea f_j , $1 \leq j \leq k$, funciones no negativa medible en \mathbb{R}^n que se desvanecen en el infinito, y sea a_{jm} , $1 \leq j \leq k$, $1 \leq m \leq n$, números reales. Sea*

$$I(f_1, \dots, f_k) := \int_{\mathbb{R}^n} dx_1 \dots dx_n \prod_{j=1}^k f_j \left(\sum_{m=1}^n a_{jm} x_m \right).$$

Entonces,

$$I(f_1, \dots, f_k) \leq I(f_1^*, \dots, f_k^*)$$

Demostración: Si $k < n$, claramente ambas integrales divergen. Si $k = n$ y $\det |a_{jm}| = 0$, ambas integrales divergen. Si $k = n$ y $\det |a_{jm}| \neq 0$, la igualdad se cumple (cambiando variable a $y_j = \sum_{m=1}^n a_{jm} x_m$ y usando que $\int f_j = \int f_j^*$).

Así nos falta demostrar el caso $n < k$. Usando la Proposición 2.1.1 y Teorema de Fubini podemos escribir que

$$\begin{aligned} I(f_1, \dots, f_k) &:= \int_{\mathbb{R}^n} dx_1 \dots dx_n \prod_{j=1}^k f_j \left(\sum_{m=1}^n a_{jm} x_m \right) \\ &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^k \chi_{\{f_j > t_j\}} \left(\sum_{m=1}^n a_{jm} x_m \right) dx_1 \dots dx_n dt_1 \dots dt_k \end{aligned}$$

y el mismo argumento sirve para escribir que

$$I(f_1, \dots, f_k) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^k \chi_{\{f_j^* > t_j\}} \left(\sum_{m=1}^n a_{jm} x_m \right) dx_1 \dots dx_n dt_1 \dots dt_k.$$

Teniendo en mente las anteriores identidades, como f_j son funciones que se desvanecen en el infinito, sus respectivos conjuntos de niveles tienen medida finita, de esta forma, para demostrar el teorema, bastará probarlo para funciones características de conjuntos de medidas Lebesgue finita.

Sean O_1, \dots, O_k conjuntos de medida finita. Por regularidad exterior de la medida de Lebesgue, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$ existe una sucesión de conjuntos abiertos $\{O_{jr}\}_{r \in \mathbb{N}}$ tal que $O_j \subset O_{jr} \subset O_{jr-1}$ para todo $r \in \mathbb{N}$ y $\lim_{r \rightarrow \infty} |O_{jr}| = |O_j|$, eso también significa que $\lim_{r \rightarrow \infty} |O_{jr}^*| = |O_j^*|$. De la inclusión anterior se determina que cada O_{jr} tiene medida finita y de la última igualdad tenemos $\chi_{O_{jr}}$ converge en medida a χ_{O_j} , y similarmente se puede justificar que $\chi_{O_{jr}^*}$ converge

en medida a $\chi_{O_j}^*$. Por el teorema de convergencia dominada para convergencia en medida tenemos que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} I(\chi_{O_{1r}}, \dots, \chi_{O_{kr}}) = I(\chi_{O_1}, \dots, \chi_{O_k}) \quad \text{y} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} I(\chi_{O_{1r}}^*, \dots, \chi_{O_{kr}}^*) = I(\chi_{O_1}^*, \dots, \chi_{O_k}^*).$$

Así, para demostrar el teorema basta realizarlo para conjuntos abiertos de medida finita G_1, \dots, G_k .

Es un hecho bien conocido que todo abierto G_i en la topología usual de la recta real es la unión numerable de intervalos abiertos disjuntos. Denotemos aquellos intervalos por I_{i1}, I_{i2}, \dots donde la numeración es seleccionada de tal forma que $|I_{in+1}| \leq |I_{in}|$. Si definimos,

$$F_{im} = \bigcup_{j=1}^m I_{ij} \quad \text{con} \quad i \in \{1, \dots, k\} \quad (2.12)$$

tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |F_{im}| = \sum_{k=1}^{\infty} |I_{ik}| = |G_i| \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \dots, k\}.$$

Por el teorema de la convergencia monótona obtenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I(\chi_{F_{1m}}, \dots, \chi_{F_{km}}) = I(\chi_{G_1}, \dots, \chi_{G_k}) \quad \text{y} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} I(\chi_{F_{1m}}^*, \dots, \chi_{F_{km}}^*) = I(\chi_{G_1}^*, \dots, \chi_{G_k}^*).$$

De esta manera, basta demostrar el teorema para funciones características de unión finita de intervalos abiertos disjuntos.

Para esto, primero demostremos el teorema para funciones características de un intervalo abierto. Sea A_j un intervalo definido por

$$A_j = (\alpha_j - \beta_j, \alpha_j + \beta_j).$$

Sea $J(t)$ la integral definida por

$$J(t) = \int_{\mathbb{R}^n} dx_1 \dots dx_n \prod_{j=1}^k \chi_{A_j}(t) \left(\sum_{m=1}^n a_{jm} x_m \right) \quad (2.13)$$

donde

$$A_j(t) = (\alpha_j t - \beta_j, \alpha_j t + \beta_j) \quad t \in [-1, 1].$$

Sea C el conjunto,

$$C = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, t) : \alpha_j t - \beta_j \leq \sum_{m=1}^n a_{jm} x_m \leq \alpha_j t + \beta_j, j = 1, \dots, k\}.$$

C es convexo pues es la intersección de semi-espacios (los que son convexos) y es balanceado, es decir, $(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \in C$, entonces $-(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \in C$. Para t fijo, definimos $C(t) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : (x_1, x_2, \dots, x_n, t) \in C\}$. Como C es balanceado, $C = -C$ y esto da, $C(-t) = C(t)$. También se observa que $J(t) = |C(t)|$. Tomando $\theta = \frac{1}{2}$ en el Corolario 2.1.12 conseguimos

$$J(0) \geq J(1)^{\frac{1}{2}} J(-1)^{\frac{1}{2}}.$$

Dado que $C(t) = C(-t)$, tenemos que $J(t) = J(-t)$, así

$$J(0) \geq J(1). \tag{2.14}$$

La desigualdad (2.14) demuestra el teorema para el caso de intervalo abierto.

Podemos probar más que lo anterior. Nuevamente por Corolario 2.1.12 tenemos que

$$J(t) \geq J(s)^\theta J(-s)^{1-\theta} = J(s) \quad \text{dados } 0 \leq t \leq s \leq 1 \tag{2.15}$$

donde $0 \leq \theta = \frac{t+s}{2s}$, es decir, J es decreciente.

Ahora demostraremos el teorema para funciones características de unión finita de intervalos disjuntos. Sea $\chi_{A_j}(x)$ la función característica del conjunto

$$A_j = \bigcup_{p=1}^{n_j} \{x \in \mathbb{R} : \alpha_{jp} - \beta_{jp} \leq x \leq \alpha_{jp} + \beta_{jp}\}$$

con $\alpha_{jp} + \beta_{jp} < \alpha_{j(p+1)} - \beta_{j(p+1)}$, $1 \leq p \leq n_j - 1$ y $1 \leq j \leq k$.

La prueba se realizará por inducción sobre $N = (n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Se entenderá por $M < N$ cuando $m_j \leq n_j$ para $1 \leq j \leq k$ y $m_i < n_i$ para algún i .

La demostración para el caso del intervalo nos da la prueba para el caso $N = \{1, \dots, 1\}$.

Asumamos que el teorema es verdadero para $M < N$.

Definimos $\chi_{A_j(t)}(x)$ como la función característica del conjunto

$$A_j(t) = \bigcup_{p=1}^{n_j} \{x \in \mathbb{R} : \alpha_{jp}t - \beta_{jp} \leq x \leq \alpha_{jp}t + \beta_{jp}\}$$

para $0 \leq \tau < t$, donde

$$\tau = \max_{j,p} \left\{ \frac{\beta_{jp} + \beta_{jp+1}}{\alpha_{jp+1} - \alpha_{jp}} \right\} > 0.$$

Para cada $\tau < t \leq 1$ los intervalos de cada función $\chi_{A_j(t)}$ permanecen disjuntos, en $t = \tau$ al menos dos intervalos se intersectan. Dado que cada función $\chi_{A_j(t)}$ es una suma de funciones característica de intervalos, aplicando (2.15) intervalo por intervalo encontramos que

$$J(1) = \int_{\mathbb{R}^n} dx \prod_{j=1}^k \chi_{A_j} \left(\sum_{m=1}^n a_{jm} x_m \right) \leq \int_{\mathbb{R}^n} dx \prod_{j=1}^k \chi_{A_j(\tau)} \left(\sum_{m=1}^n a_{jm} x_m \right) = J(\tau)$$

En $t = \tau$, la familia de funciones $\{\chi_{A_j(t)}\}$ satisface la hipótesis de este teorema, pero se ha reducido a algún $M < N$, debido a esto, podemos ocupar la hipótesis inductiva, y concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx \prod_{j=1}^k \chi_{A_j(\tau)} \left(\sum_{m=1}^n a_{jm} x_m \right) \leq \int_{\mathbb{R}^n} dx \prod_{j=1}^k \chi_{A_j^*(\tau)} \left(\sum_{m=1}^n a_{jm} x_m \right).$$

Observando que $A_j^*(\tau)(\cdot) = A_j^*(\cdot)$ el teorema ha quedado demostrado. ■

Corolario 2.4.2. Sean f_j , $1 \leq j \leq k$, funciones medibles no negativas en \mathbb{R}^p , sean a_{jm} , $1 \leq j \leq k$, $1 \leq m \leq n$, números reales, y sea V cualquier plano que pasa por el origen de \mathbb{R}^p . Luego,

$$\int_{\mathbb{R}^{np}} dx_1 \dots dx_n \prod_{j=1}^k f_j \left(\sum_{m=1}^n a_{jm} x_m \right) \leq \int_{\mathbb{R}^{np}} dx_1 \dots dx_n \prod_{j=1}^k f_j^* \left(\sum_{m=1}^n a_{jm} x_m \right)$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{np}$ con $x_i \in \mathbb{R}^p$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ y f_j^* es la simetrización de Steiner de f_j respecto a V .

Demostración: Sea (x^1, \dots, x^p) un sistema coordenado para \mathbb{R}^p tal que, el eje x^p es ortogonal a V . Manteniendo fijas las coordenadas x_m^q , $1 \leq m \leq n$, $1 \leq q \leq p-1$ y aplicando el teorema anterior sobre $(x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx_1^p \dots dx_n^p \prod_{j=1}^k f_j \left(\sum_{m=1}^n a_{jm} x_m \right) \leq \int_{\mathbb{R}^n} dx_1^p \dots dx_n^p \dots \prod_{j=1}^k f_j^* \left(\sum_{m=1}^n a_{jm} x_m \right).$$

La demostración del corolario sigue integrando con respecto a x_m^q , $1 \leq m \leq n$, $1 \leq q \leq p-1$.

■

Corolario 2.4.3. (La desigualdad de Riesz para simetrización de Steiner) Sean f, g y h funciones no negativas medibles en \mathbb{R}^n . Sea

$$I(f, g, h) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x-y)h(y)dx dy.$$

Entonces,

$$I(f, g, h) \leq I(f^*, g^*, h^*), \quad (2.16)$$

donde f^*, g^* y h^* son las simetrizaciones de Steiner de f, g y h respectivamente, respecto a un hiperplano arbitrario V .

Demostración: La demostración queda establecida haciendo $k = 3, n = 2$ y

$$(a_{jm}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ en el Corolario 2.4.2.}$$

■

Intuitivamente se ve que el rearrreglo decreciente simétrico puede ser obtenido como el límite- $L^1(\mathbb{R}^p)$ de una sucesión de simetrización de Steiner respecto a diferentes plano (esto se demuestra en el apéndice del artículo [3]). Usando este hecho junto al corolario 2.4.2, se consigue una versión análoga de este corolario, pero para rearrreglo decreciente simétrico.

Definición 2.4.4. Diremos que un punto x es un punto de Lebesgue de un conjunto medible A en \mathbb{R}^n , si

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{|A \cap B(x, \epsilon)|}{|B(x, \epsilon)|} = 1.$$

Denotaremos el conjunto de puntos de Lebesgue de A como D_A . Claramente desde su definición, el interior de un conjunto A esta contenido en D_A y D_A esta contenido en la clausura de A . También se observa, que si x es punto de Lebesgue de A , entonces $x+y$ es punto de Lebesgue de $A+y$ y $-x$ es un punto de Lebesgue de $-A$. Finalmente, es cierto que x es un punto de Lebesgue de $C \cap D$ si x es un punto de Lebesgue de C y x es un punto de Lebesgue de D .

Teorema 2.4.5. (Teorema densidad de Lebesgue) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $m(A) > 0$. Casi todo punto de A es un punto de Lebesgue de A .

Demostración: Ver apéndice D de [22].

■

Lema 2.4.6. Sean A y B conjuntos medibles en \mathbb{R} , χ_A y χ_B sus funciones características. Entonces,

$$D_A - D_B \subseteq \text{sop}(\chi_A * \chi_B) := \{x \in \mathbb{R}^n : (\chi_A * \chi_B)(x) > 0\}$$

donde

$$(\chi_A * \chi_B)(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(y+x)\chi_B(y)dy$$

Demostración: Desde la definición de $\chi_A * \chi_B$ se obtiene que

$$(\chi_A * \chi_B)(x) = |(A-x) \cap B|.$$

Si $x \in D_A - D_B$, entonces $x = a - b$ con $a \in D_A$ y $b \in D_B$. De esto se deduce que $b = a - x$ es un punto de Lebesgue de $B \cap (A - x)$. Luego, $|(A - x) \cap B| > 0$, o sea, $x \in \text{sop}(\chi_A * \chi_B)$.

■

Lema 2.4.7. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|A| > 0$. Si $A = A + x$ para algún $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces $|A| = \infty$.

Demostración: Como $|A| > 0$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|B| > 0$ con $B := A \cap [n, n+1]$. Entonces, $B + x \subseteq A + x = A$, así $B + mx \subseteq A$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por definición de B , $n \leq b \leq n+1$ para cada $b \in B$. Por propiedad arquimediana existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $Mx > 1$, de esta forma $Msx + n + 1 < M(s+1)x + n$ para todo $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces los intervalos $[n + sMx, n + 1 + sMx]$ para todo $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ son disjuntos. Consecuentemente, A contiene a los conjuntos disjuntos $B + sMx$ con $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Debido a que $|B + sMx| = |B| > 0$, se tiene que A contiene infinitos conjunto de medida $|B|$. Así, queda establecido que $|A| = \infty$.

■

Lema 2.4.8. Sean A y B conjuntos medibles de medida finita en \mathbb{R} y sea J_A y J_B los intervalos más pequeños tal que

$$|A \cap J_A| = |A| \quad \text{y} \quad |B \cap J_B| = |B|, \quad (2.17)$$

respectivamente. Entonces, el intervalo más pequeño que contiene el soporte de $\chi_A * \chi_B := \{x : (\chi_A * \chi_B)(x) > 0\}$ tiene longitud $|J_A| + |J_B|$.

Demostración: Sean $J_A = (a, b)$ y $J_B = (c, d)$ con las características descritas en la hipótesis, entonces $J_A - J_B = (a - d, b - c)$. Se puede ver que $\text{sop}(\chi_A * \chi_B) \subseteq J_A - J_B$. Ahora, supongamos que existe un intervalo $M = (r, s)$ tal que $M \subset J_A - J_B$ y $\text{sop}(\chi_A * \chi_B) \subset M$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $s = b - c$, ahora podemos encontrar $a < a'$ y $d' < d$ tales que $a' - d' = r$. Como J_A y J_B son los intervalos mínimos que cumplen (2.17) se obtiene que

$$0 < |A| - |A \cap (a', b)| = |A \cap (a, a')| \quad \text{y} \quad 0 < |B| - |B \cap (c, d')| = |B \cap (d', d)|. \quad (2.18)$$

Por Teorema de Lebesgue y (2.18) tenemos que

$$A \cap (a, a') - B \cap (d', d) \subseteq D_A - D_B \quad \text{y} \quad |(A \cap (a, a') - B \cap (d', d)) \cap (\mathbb{R} \setminus M)| > 0.$$

Por la contención anterior y Lema 2.4.6 se tiene $A \cap (a, a') - B \cap (d', d) \subseteq \text{sop}(\chi_A * \chi_B) \subset M$. Esto es una contradicción.

■

Lema 2.4.9. Sean A y B conjuntos de medida finita en \mathbb{R}^n . Entonces $\chi_A * \chi_B$ es una función continua en \mathbb{R}^n .

Demostración: Sigue de la aplicación del teorema de la convergencia dominada.

■

Teorema 2.4.10. *Suponga que g es una función positiva esféricamente simétrica decreciente en \mathbb{R}^n y g es estrictamente decreciente (es decir, $|x| < |y| \Rightarrow g(x) > g(y) > 0$). Sean f y h funciones no negativas en \mathbb{R}^n con $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Entonces, existe igualdad en (2.16) si y solamente si $f(x) = f^*(x - y)$ y $h(x) = h^*(x - y)$ c.t.p. para algún $y \in \mathbb{R}^n$, donde f^* y h^* son las simetrizaciones de Steiner de f y h , respectivamente, respecto a un hiperplano arbitrario V .*

Demostración: Desde las hipótesis de las funciones f, g y h se puede suponer sin pérdida de generalidad que f, h, g y sus respectivos rearrreglos van a cero en el infinito. Además se puede suponer que ni f ni h son las funciones nulas. Primero demostraremos el teorema para funciones f, h y g unidimensionales. Debido a que g es estrictamente decreciente existe una medida positiva μ tal que

$$g(x) = \int g_r(x) d\mu(r),$$

donde g_r es la función característica del intervalo $(-r/2, r/2)$. Por Teorema 2.1.1, el teorema de Fubini y esta última representación, tenemos

$$\begin{aligned} I(f, g, h) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x - y)h(y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \chi_{\{f>s\}}(x)g_r(x - y)\chi_{\{h>t\}}(y) ds d\mu(r) dt dx dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} I(\chi_{\{f>s\}}, g_r, \chi_{\{h>t\}}) ds d\mu(r) dt. \end{aligned} \quad (2.19)$$

De la misma forma

$$I(f^*, g, h^*) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} I(\chi_{\{f^*>s\}}, g_r, \chi_{\{h^*>t\}}) ds d\mu dt, \quad (2.20)$$

tomando en cuenta que $g = g^*$. Ahora, la igualdad en la desigualdad de Riesz implica que

$$I(\chi_{\{f>s\}}, g_r, \chi_{\{h>t\}}) = I(\chi_{\{f^*>s\}}, g_r, \chi_{\{h^*>t\}}) \text{ c.t.p } \mu, s, t. \quad (2.21)$$

Las hipótesis de g implican que $\mu((a, b)) > 0$, así la medida μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue . Entonces para demostrar (2.21) basta probar

$$I(\chi_{\{f>s\}}, g_r, \chi_{\{h>t\}}) = I(\chi_{\{f^*>s\}}, g_r, \chi_{\{h^*>t\}}) \text{ c.t.p } r, s, t. \quad (2.22)$$

Sea $A_s = \{f > s\}$ y $B_t = \{h > t\}$, así $A_s^* = \{f^* > s\}$ y $B_t^* = \{h^* > t\}$. Para $r \geq |A_s| + |B_t|$ tenemos que, $x - y \in [-r/2, r/2]$ para todo $x \in A_s^*$ e $y \in B_t^*$. Luego, para tales r, s y t tenemos que

$$\begin{aligned} I(\chi_{\{f^* > s\}}, g_r, \chi_{\{h^* > t\}}) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{f^* > s\}}(x) g_r(x - y) \chi_{\{h^* > t\}}(y) dx dy \\ &= |A_s^*| |B_t^*| \\ &= |A_s| |B_t|. \end{aligned}$$

Afirmación: Si $I(\chi_{\{f > s\}}, g_r, \chi_{\{h > t\}}) = I(\chi_{\{f^* > s\}}, g_r, \chi_{\{h^* > t\}})$ c.t.p. r, s, t . Entonces para todo s, r se tiene que $\{f > s\}$ y $\{h > t\}$ son intervalos concéntricos.

Demostración: Paso 1: Como A_s, B_t son conjuntos de medida finito, $\{(r, s, t) : r > |A_s| + |B_t|\}$ es un conjunto de medida no negativa. Consideremos un $(s_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en la proyección de este último conjunto. Para casi todo $r > |A_{s_0}| + |B_{t_0}|$ tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= I(\chi_{\{f^* > s_0\}}, g_r, \chi_{\{h^* > t_0\}}) - I(\chi_{\{f > s_0\}}, g_r, \chi_{\{h > t_0\}}) \\ &= |A_{s_0}| |B_{t_0}| - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{f > s_0\}}(y + z) g_r(z) \chi_{\{h > t_0\}}(y) dy dz \\ &= |A_{s_0}| |B_{t_0}| - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{f > s_0\}}(y + z) \chi_{\{h > t_0\}}(y) dy dz + \int_{(-\frac{r}{2}, \frac{r}{2})^c} \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{f > s_0\}}(y + z) \chi_{\{h > t_0\}}(y) dy dz \\ &= \int_{(-\frac{r}{2}, \frac{r}{2})^c} \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{f > s_0\}}(y + z) \chi_{\{h > t_0\}}(y) dy dz, \end{aligned}$$

la tercera igualdad se justifica por $g_r(z) = 1 - \chi_{(-\frac{r}{2}, \frac{r}{2})^c}(z)$.

Como

$z \mapsto \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{f > s_0\}}(y + z) \chi_{\{h > t_0\}}(y) dy$ es una función no negativa y continua, se tiene que

$$\{z \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{f > s_0\}}(y + z) \chi_{\{h > t_0\}}(y) dy > 0\} \subseteq \left(-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right) \text{ para casi todo } r > |A_{s_0}| + |B_{t_0}| \quad (2.23)$$

Paso 2: Sea J_{s_0} el intervalo más pequeño tal que $|A_{s_0} \cap J_{s_0}| = |A_{s_0}|$ y J_{t_0} el intervalo más pequeño tal que $|B_{t_0} \cap J_{t_0}| = |B_{t_0}|$. El Lema 2.4.8 asegura que el intervalo más pequeño que contiene a $\{z \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{f > s_0\}}(y + z) \chi_{\{h > t_0\}}(y) dy > 0\}$ tiene longitud igual a $|J_{s_0}| + |J_{t_0}|$. Entonces por (2.23), se tiene que, $|J_{s_0}| + |J_{t_0}| \leq r$ para casi todo $r > |A_{s_0}| + |B_{t_0}|$. Esto da, $|A_{s_0}| + |B_{t_0}| \geq |J_{s_0}| + |J_{t_0}|$. Esto justifica la siguiente desigualdad

$$|J_{s_0}| + |J_{t_0}| \geq |A_{s_0}| + |B_{t_0}| = |A_{s_0} \cap J_{s_0}| + |B_{t_0} \cap J_{t_0}| \geq |J_{s_0}| + |J_{t_0}|,$$

o bien, $|A_{s_0}| + |B_{t_0}| = |J_{s_0}| + |J_{t_0}|$. De esto podemos concluir que,

$$|J_{s_0} \cap A_{s_0}| = |J_{s_0}| = |A_{s_0}| \quad \text{y} \quad |J_{t_0} \cap B_{t_0}| = |J_{t_0}| = |B_{t_0}|,$$

en otras palabras, A_{s_0} es casi todo el intervalo J_{s_0} y B_{t_0} es casi todo el intervalo J_{t_0} . Además, por Lema 2.4.6 se obtiene la inclusión,

$$D_{A_{s_0}} - D_{B_{t_0}} \subseteq \left(-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right).$$

La última inclusión y el hecho que casi todo punto de $A_{s_0} - B_{t_0}$ pertenece a $D_{A_{s_0}} - D_{B_{t_0}}$, nos permite concluir que casi todo punto de $J_{s_0} - J_{t_0}$ pertenece a $\left(-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)$ para casi todo $r > |A_{s_0}| + |B_{t_0}|$. Esto da, que casi todo punto de $J_{s_0} - J_{t_0}$ pertenece a $\left(-\frac{1}{2}(|J_{s_0}| + |J_{t_0}|), \frac{1}{2}(|J_{s_0}| + |J_{t_0}|)\right)$ y esto es posible sólo cuando J_{s_0} y J_{t_0} son intervalos concéntricos, así la afirmación ha quedada demostrada.

Ahora volvamos a la demostración del teorema del caso unidimensional. Fijando t_0 en la proyección de $\{(r, s, t) : r > |A_s| + |B_{t_0}|\}$, por la conclusión del paso anterior, para casi todo s en la proyección $\{s : \exists r \text{ tal que } r > |A_s| + |B_{t_0}|\}$, A_s y B_{t_0} son intervalos concéntricos. Entonces, casi todo los intervalos $\{f > s\}$ tienen el mismo centro (el centro de $\{h > t_0\}$). Luego, $\{f > s\}$ y $\{f^* > s\}$ son trasladados uno del otro por un vector independiente del nivel s . Esto significa $f = f^*$ salvo por una traslación.

De la misma forma, fijando s y variando t se concluye como antes que $h = h^*$ salvo por una traslación.

Ahora, consideremos f, g y h como funciones sobre \mathbb{R}^n . Si $I(f, g, h) = I(f^*, g, h^*)$, esto se puede expresar como

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x', x_n) g(x' - y', x_n - y_n) h(y', y_n) dx_n dy_n dx' dy' \\ & = \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f^*(x', x_n) g(x' - y', x_n - y_n) h^*(y', y_n) dx_n dy_n dx' dy', \end{aligned}$$

con $x', y' \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Usando la desigualdad de Riesz a la identidad anterior se tiene la siguiente expresión en sentido x', y' c.t.p.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x', x_n) g(x' - y', x_n - y_n) h(y', y_n) dx_n dy_n \\ & = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f^*(x', x_n) g(x' - y', x_n - y_n) h^*(y', y_n) dx_n dy_n. \end{aligned}$$

Aplicando el resultado unidimensional a la identidad anterior obtenemos que

$$f(x', x_n) = f^*(x', x_n - k') \quad \text{y} \quad h(y', y_n) = h^*(y', y_n - k') \quad x', y' \text{ c.t.p.}$$

Necesitamos demostrar que k' no depende de la sección. Basta restringirse a secciones de f y h que son no nulas (es decir, no son ceros c.t.p.).

Sean

$$S = \{(x', y') : \sim (f(x', \cdot) = 0 \text{ c.t.p.}) \quad \text{y} \quad \sim (h(y', \cdot) = 0 \text{ c.t.p.})\} \quad \text{y}$$

$$N = \{(x', y') : \sim (f(x', x_n - k') = f^*(x', x_n - k') \text{ c.t.p.}) \quad \text{o} \quad \sim (h(y', y_n) = h^*(y', y_n - k') \text{ c.t.p.})\},$$

(la medida de Lebesgue de N es cero).

Fijemos, ahora (x', y') y (x'', y') en $S \cap N^C$. Tenemos que,

$$\begin{aligned} f(x', x_n) &= f^*(x', x_n - k_{x', y'}) \quad \text{y} \quad h(y', y_n) = h^*(y', y_n - k_{x', y'}) \quad x', y' \text{ c.t.p.} \\ f(x'', x_n) &= f^*(x'', x_n - k_{x'', y'}) \quad \text{y} \quad h(y', y_n) = h^*(y', y_n - k_{x'', y'}) \quad x'', y' \text{ c.t.p.} \end{aligned}$$

De lo anterior se desprende que

$$h(y', y_n) = h(y', y_n + k_{x'', y'} - k_{x', y'}) \quad y_n \text{ c.t.p.} \quad (2.24)$$

Debido a que $(x', y') \in S$ se tiene que $h(y', \cdot)$ es no trivial, esto justifica que existe un $t > 0$ tal que $|A| > 0$ con $A = \{y_n : h(y', y_n) > t\}$. Como $h(y', \cdot)$ se desvanece en el infinito, se tiene que $|A| < \infty$. Por (2.24), obtenemos $A = A + k_{x'', y'} - k_{x', y'}$. Finalmente usando el Lema 2.4.7 tenemos que $k_{x'', y'} = k_{x', y'}$. Esto es válido para todas las secciones x', x'' para la cual $f(x', \cdot)$ y $f(x'', \cdot)$ son no triviales (fijando un y'). Esto demuestra que f es simétrica en cada sección con respecto a un mismo centro. De la misma forma, fijando x' y considerando secciones y', y'' arbitrarias de la función h , podemos concluir que h es simétrica en cada sección con respecto a un mismo centro (el mismo centro de f).

■

2.5. Adición y Sustracción de Minkowski

Para desarrollar esta sección ocupamos Schneider [33].

Definición 2.5.1. La adicción de Minkowski de dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ se define como

$$A \oplus B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

La definición anterior se puede reescribir como

$$A \oplus B := \bigcup_{b \in B} (A + b).$$

Se asumirá que $A \oplus \{0\} = A$ y $A \oplus \emptyset = \emptyset$.

La adición de Minkowski satisface las propiedades conmutativa y asociativa .

Proposición 2.5.2.

1) $A \oplus B = B \oplus A$.

2) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

Demostración: aplicar definición de adición de Minkowski y la conmutativa y asociativa de la suma usual de vectores en \mathbb{R}^n . ■

Definición 2.5.3. La sustracción de Minkowski de dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ se define como

$$A \ominus B := \bigcap_{b \in B} (A - b).$$

Claramente la definición anterior se puede reescribir como

$$A \ominus B := \{x \in \mathbb{R}^n : B + x \subset A\}.$$

Por convención se tiene que $A \ominus \emptyset = \mathbb{R}^n$.

Si $B = -B$, entonces

$$A \ominus B := \bigcap_{b \in B} (A + b).$$

Proposición 2.5.4. Si $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$ tal que $B = -B$ y $A \subset C$ y $B \subset C$. Entonces

$$A \ominus B = C \setminus ((C \setminus A) \oplus B)$$

Demostración: Por hipótesis tenemos, $A \ominus B := \bigcap_{b \in B} (A + b)$.

Por otra parte,

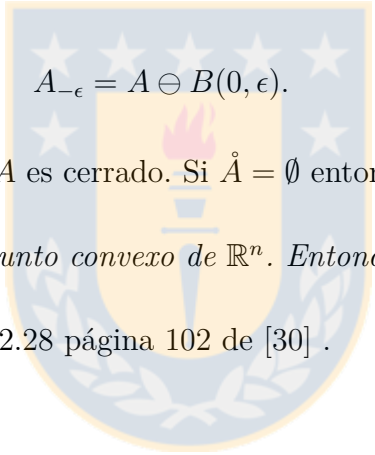
$$(C \setminus A) \oplus B = \bigcup_{b \in B} ((C \setminus A) + b) = C \setminus \left(\bigcap_{b \in B} (A + b) \right).$$

Entonces,

$$C \setminus ((C \setminus A) \oplus B) = \bigcap_{b \in B} (A + b) = A \ominus B.$$

■

Definición 2.5.5. Sea A un subconjunto de \mathbb{R}^n . Sea r el inradio de A . Si $0 \leq \epsilon \leq r$, el conjunto paralelo interno de A a distancia ϵ , que vamos a denotar $A_{-\epsilon}$, es el subconjunto de A definido por



$$A_{-\epsilon} = A \ominus B(0, \epsilon).$$

Observar que $A_{-\epsilon}$ es cerrado si A es cerrado. Si $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ entonces $A_{-\epsilon} = \emptyset$.

Teorema 2.5.6. Sea A un conjunto convexo de \mathbb{R}^n . Entonces, $\overline{A_{-\epsilon}} = \overset{\circ}{A}$.

Demostración: Ver Teorema 2.28 página 102 de [30].

■

Proposición 2.5.7. Sea A un conjunto abierto convexo de \mathbb{R}^n . Entonces

$$A \ominus B(0, \epsilon) = \overline{A} \ominus B(0, \epsilon).$$

Demostración: claramente $A \ominus B(0, \epsilon) \subseteq \overline{A} \ominus B(0, \epsilon)$. Si $x \in \overline{A} \ominus B(0, \epsilon)$, entonces $B(x, \epsilon) \subseteq \overline{A}$.

Usando el Teorema 2.5.6 se obtiene, $B(x, \epsilon) \subseteq \overset{\circ}{\overline{A}} = \overset{\circ}{A} = A$, o bien $x \in A \ominus B(0, \epsilon)$.

■

Definición 2.5.8. Sea A un subconjunto de \mathbb{R}^n . Se dirá que H es el hiperplano soporte de A si cumple:

- 1) A está contenida en uno de los semiespacios determinado por H , y

ii) $A \cap H \neq \emptyset$.

En palabras simples, H es un hiperplano que toca a A , de tal forma que A esta completamente en uno de los lados de H .

Teorema 2.5.9. (*Separación*) Sea A un cerrado convexo de \mathbb{R}^n . Sea $x_0 \notin A$. Entonces:

(1) Existe un único punto $x_1 \in A$ tal que $d(x_0, x_1) = d(x_0, A)$. Aquí $d(., .) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ representa la función distancia euclidiana. La función distancia de un punto x a un conjunto A se define como $d(x, A) := \inf\{d(y, x) : y \in A\}$.

(2) Sea x_1 el punto definido en la parte 1. Luego el hiperplano H que pasa por x_1 y es ortogonal a $x_0 - x_1$ es un hiperplano soporte de A .

(3) Si $u = \frac{x_0 - x_1}{\|x_0 - x_1\|}$ se tiene que $h(A, u) < \langle x_0, u \rangle$, donde h se define a continuación de la demostración de este teorema.

Demostración: 1) Sea $\alpha = \inf\{d(x_0, x) : x \in A\}$. Debido a que $d(x_0, x)$ es no negativa, existe una sucesión minimizante $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $d(x_0, x_n) \rightarrow \alpha$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por la ley del paralelogramo se puede probar que, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R}^n y, por lo tanto, converge a $x_1 = \lim x_n \in A$ (pues A es cerrado). Esto significa que existe un punto $x_1 \in A$ tal que $d(x_0, x_1) = d(x_0, A)$. Usando convexidad de A y el hecho que $d(x_0, .)$ es estrictamente convexa, se puede demostrar que ese x_1 es único.

2) Sea H el hiperplano de ecuación

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - x_1, x_0 - x_1 \rangle = 0\}$$

y H^- el semiespacio de ecuación

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - x_1, x_0 - x_1 \rangle \leq 0\}. \tag{2.25}$$

Demostremos que $A \subseteq H^-$. Si $x \in A$ y $x \notin H^-$, entonces tenemos

$$\langle x - x_1, x_0 - x_1 \rangle = \epsilon > 0.$$

Por otra parte, la distancia al cuadrado de un punto del segmento $\overline{x_1x}$ (por convexidad este segmento pertenece a A) a x_0 esta dada por

$$\begin{aligned} \|((1 - \lambda)x_1 + \lambda x) - x_0\|^2 &= \|x_1 - x_0 + \lambda(x - x_1)\|^2 \\ &= \langle x_1 - x_0 + \lambda(x - x_1), x_1 - x_0 + \lambda(x - x_1) \rangle \\ &= \|x_1 - x_0\|^2 - 2\lambda \langle x - x_1, x_0 - x_1 \rangle + \lambda^2 \|x - x_0\|^2 \\ &= \|x_1 - x_0\|^2 - 2\lambda\epsilon + \lambda^2 \|x - x_1\|^2. \end{aligned}$$

Si $0 < \lambda < \frac{2\epsilon}{\|x - x_1\|^2}$, entonces $-2\lambda\epsilon + \lambda^2 \|x - x_1\|^2 < 0$. De esta forma

$$\|(1 - \lambda)x_1 + \lambda x - x_0\| < \|x_1 - x_0\|.$$

Esto contradice que x_1 es el punto de A más cercano a x_0 . Por lo tanto, $A \subseteq H^-$.

3) Por (2.25),

$$h(A, u) = \frac{1}{\|x_0 - x_1\|} \sup_{a \in A} \langle a, x_0 - x_1 \rangle = \langle x_1, \frac{x_0 - x_1}{\|x_0 - x_1\|} \rangle < \langle x_0, u \rangle. \quad \blacksquare$$

Definición 2.5.10. Sea A un conjunto de \mathbb{R}^n . La función soporte de A es una función asociada con A , definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$, como

$$h(A, x) := \sup_{a \in A} \langle a, x \rangle, x \in \mathbb{R}^n.$$

Si A es compacto en \mathbb{R}^n , el valor máximo de $\langle a, x \rangle$, para $a \in A$ se alcanza en algún punto $a_0 \in A$, debido a que $\langle a, x \rangle$ es una función continua de a .

En este caso, la función soporte $h(A, u)$ de A tiene una interpretación geométrica para un vector unitario u . Sea a_0 un punto de A que maximiza $\langle \cdot, u \rangle$ restringida al conjunto A , así

$$h(A, u) = \sup_{a \in A} \langle a, u \rangle = \langle a_0, u \rangle.$$

De esta manera, $h(A, u)$ es la distancia (signada) desde 0 al hiperplano de A con vector normal exterior u .

A continuación probaremos unas útiles propiedades para la función soporte de un cuerpo convexo.

Proposición 2.5.11. *Sea A un convexo cerrado de \mathbb{R}^n y $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces,*

1) $h(A, \alpha x) = \alpha h(A, x)$, si $\alpha > 0$.

2) $h(A, x + y) \leq h(A, x) + h(A, y)$.

Demostración: 1) Si $\alpha > 0$, entonces

$$h(A, \alpha x) = \sup_{a \in A} \langle a, \alpha x \rangle = \sup_{a \in A} \alpha \langle a, x \rangle = \alpha \sup_{a \in A} \langle a, x \rangle = \alpha h(A, x).$$

2)

$$\begin{aligned} h(A, x + y) &= \sup_{a \in A} \langle a, x + y \rangle = \sup_{a \in A} (\langle a, x \rangle + \langle a, y \rangle) \\ &\leq \sup_{a \in A} \langle a, x \rangle + \sup_{a \in A} \langle a, y \rangle = h(A, x) + h(A, y). \end{aligned}$$

■

Sea H el hiperplano con ecuación

$$\langle x, u \rangle = h(A, u) = \langle a_0, u \rangle.$$

Consideremos el semiespacio $H^-(A, u) := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq \langle a_0, u \rangle\}$. Claramente $A \subseteq H^-(A, u)$ y $H^-(A, u) \cap A = \{a_0\}$. Por lo tanto, $H^-(A, u)$ es un hiperplano soporte de A .

Proposición 2.5.12. *Sea A un cuerpo convexo, entonces la función $h(A, \cdot)$ es continua.*

Demostración: A es un conjunto acotado, así, existe $M > 0$ tal que $|a| < M$ para todo $a \in A$. Sea $a_0 \in A$ tal que $h(A, x) = \langle a_0, x \rangle$. Por desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$|h(A, x)| = |\langle a_0, x \rangle| \leq \|a_0\| \|x\| \leq M \|x\|.$$

Aplicando la parte 2 de la Proposición 2.5.11 se consigue

$$h(A, x) - h(A, x_0) \leq h(A, x - x_0) \leq M \|x - x_0\|,$$

y también una desigualdad análoga a la anterior pero con roles intercambiados de x y x_0 .

Luego,

$$|h(A, x) - h(A, x_0)| \leq M \|x - x_0\|,$$

lo que demuestra que $h(A, \cdot)$ es continua Lipschitz.

■

Teorema 2.5.13. $\bigcap_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} H^-(A, u) = \overline{\text{co}(A)}$. Si A es convexo y cerrado, entonces $\langle x, u \rangle \leq h(A, u)$ para cada vector unitario u , luego $x \in A$.

Demostración: Debido a que $H^-(A, u)$ es convexo que contiene a A para cada $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, se tiene que $\overline{\text{co}(A)} \subseteq H^-(A, u)$ para cada $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Por otra parte, si $x \notin \overline{\text{co}(A)}$, por parte 3 del Teorema 2.5.9, existe u tal que $h(A, u) \leq h(\overline{\text{co}(A)}, u) < \langle x, u \rangle$, entonces $x \notin H^-(A, u)$.

■

Corolario 2.5.14. Sean $A_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y A_2 cerrado convexo en \mathbb{R}^n . Así, $A_1 \subseteq A_2$ si y solamente si $h(A_1, u) \leq h(A_2, u)$ para cada vector unitario u .

Demostración: Si $h(A_1, u) \leq h(A_2, u)$ para cada vector unitario u , entonces $\langle x, u \rangle \leq h(A_2, u)$ para cada vector unitario u y $x \in A_1$, usando el Teorema 2.5.13, obtenemos que $x \in A_2$. La otra implicancia es directa desde la definición de función soporte.

■

El siguiente teorema da una nueva caracterización de conjunto paralelo interno.

Proposición 2.5.15. Sea A un convexo cerrado de \mathbb{R}^n con $0 \in A$ e inradio $r > 0$. Si $0 < \epsilon < r$, entonces

$$A_{-\epsilon} = \bigcap_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} [H^-(A, u) - \epsilon u].$$

Demostración:

$$\begin{aligned} x &\in \bigcap_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} [H^-(A, u) - \epsilon u] \\ &\Leftrightarrow \langle x + \epsilon u, u \rangle \leq h(A, u) \quad \forall u \in \mathbb{S}^{n-1} \\ &\Leftrightarrow \langle x + su, u \rangle \leq h(A, u) \quad \forall 0 < s < \epsilon, \forall u \in \mathbb{S}^{n-1} \\ &\Leftrightarrow \langle x + sv, u \rangle \leq h(A, u) \quad \forall 0 < s < \epsilon, \forall u, v \in \mathbb{S}^{n-1} \\ &\quad (\text{como } \langle u, v \rangle \leq 1 \text{ y } \sup_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} \langle u, v \rangle = 1) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow h(B(x, \epsilon), u) \leq h(A, u)$$

$$\Leftrightarrow B(x, \epsilon) \subseteq A$$

$$\Leftrightarrow x \in A_{-\epsilon}$$

■

Lema 2.5.16. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo con interior no vacío, tal que $B(0, r) \subset A \subset B(0, R)$. Si $0 < \epsilon < \frac{r^2}{4R}$, entonces*

$$(1 - 4\frac{R\epsilon}{r^2})A \subset A_{-\epsilon} \subset A$$

Demostración: La contención $A_{-\epsilon} \subset A$ sigue de la Definición 2.5.7. Ahora demostraremos la otra contención. Por la convexidad de A y que $0 \in A$, basta probar que $(1 - 4\frac{R\epsilon}{r^2})Fr(A) \subseteq A_{-\epsilon}$.

Afirmación: Sea $x \in Fr(A_{-\epsilon})$, entonces, existe un $u_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$ tal que

$$h(A, u_1) = \epsilon \langle u_1, u_1 \rangle + \langle x, u_1 \rangle. \quad (2.26)$$

Demostremos esta afirmación. Para todo $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, debido a que $x + \epsilon u \in A$ tenemos que $\epsilon \langle u, u \rangle + \langle x, u \rangle \leq h(A, u)$ (es decir, $h(A_{-\epsilon}, u) \leq h(A, u) - \epsilon$). Suponga ahora que, $\langle x, u \rangle + \epsilon \langle u, u \rangle < h(A, u)$ para cada $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Sea $f(u) = h(A, u) - (\langle x, u \rangle + \epsilon)$. El ínfimo de la función f es alcanzada en algún $u_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$ (pues esta es continua), entonces $f(u_1) = \inf f(u) > 0$. Sea $\epsilon' = \epsilon + f(u_1)$. Afirmo, que $B(x, \epsilon') \subseteq A$. En efecto, si $z \in B(x, \epsilon')$, así $z = x + sv$ con $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, $0 < s < \epsilon' = \epsilon + f(u_1)$. Estimando conseguimos que

$$\langle z, u \rangle = \langle x + sv, u \rangle \leq \langle x + su, u \rangle = \langle x, u \rangle + s < \langle x, u \rangle + \epsilon + f(u_1) < h(A, u), \quad (2.27)$$

entonces $z \in A$. Lo anterior prueba (2.26).

Por proposición 2.5.12, la función $h(A - x, \cdot)$ es continua, y \mathbb{S}^{n-1} es compacto, así esta alcanza un mínimo, digamos en u .

Observamos que no puede ocurrir que $h(A - x, u) - \epsilon > 0$, pues esto contradice (2.26) y que u es mínimo de $h(A - x, \cdot)$. Luego, $h(A - x, u) \leq \epsilon$, o bien $\langle x, u \rangle = h(A, u) - \epsilon$. Por desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\|x\| = \|x\| \|u\| \geq \langle x, u \rangle = h(A, u) - \epsilon \geq r - \epsilon \geq r - \frac{1}{4}r > \frac{1}{2}r \quad (2.28)$$

, la penúltima desigualdad se tiene debido a que $r < R$ implica $\epsilon < \frac{r}{4}$.

Sea θ el ángulo que forma los vectores u y x , por (2.28) se tiene que

$$\langle x, u \rangle = \cos \theta \|x\| > \frac{1}{2}r. \quad (2.29)$$

Debido a que $\frac{1}{R} < \frac{1}{\|x\|}$ y (2.29) se consigue que

$$\cos \theta \geq \frac{r}{2R}. \quad (2.30)$$

Sea $z = \alpha x$ con $\alpha > 0$ y $z \in Fr(A)$. Claramente,

$$\langle z - x, u \rangle = \|z - x\| \cos \theta \leq \epsilon \quad (2.31)$$

Usando (2.28), (2.29) y (2.30) en (2.31) obtenemos que

$$\frac{\|z - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\epsilon}{\cos \theta} \frac{2}{r} \leq \frac{\epsilon 2R}{r} \frac{2}{r} = 4 \frac{R\epsilon}{r^2}.$$

Esto implica que,

$$\frac{\|z\|}{\|x\|} - 1 \leq \frac{\|z - x\|}{\|x\|} < 4 \frac{R\epsilon}{r^2},$$

o bien,

$$\frac{\|z\|}{\|x\|} < 1 + 4 \frac{R\epsilon}{r^2}.$$

Observamos que $4 \frac{R\epsilon}{r^2} < 1$, entonces

$$\frac{\|z\|}{\|x\|} < \frac{1}{1 - 4 \frac{R\epsilon}{r^2}}.$$

Luego, $(1 - 4 \frac{R\epsilon}{r^2})z \in A_{-\epsilon}$.

Ahora para cualquier $y \in Fr(A)$ el segmento $[0, y]$ intersecta $Fr(A_{-\epsilon})$ en un punto x y el punto z en $Fr(A)$ asociado a x en la discusión anterior es evidentemente y mismo. Entonces, $(1 - 4 \frac{R\epsilon}{r^2})y \in A_{-\epsilon}$. Por lo tanto $(1 - 4 \frac{R\epsilon}{r^2})Fr(A) \subseteq A_{-\epsilon}$.

■

2.6. Distancia Hausdorff

Definición 2.6.1. Sea K_1 y K_2 conjuntos no vacíos compactos de \mathbb{R}^n . Definimos

$$\rho(K_1, K_2) := \sup\{d(x, K_2) : x \in K_1\}.$$

Sea C^n la familia de subconjunto compactos de \mathbb{R}^n . C^n es un espacio métrico con la distancia Hausdorff

$$d^H(K_1, K_2) := \max(\rho(K_1, K_2), \rho(K_2, K_1)). \quad (2.32)$$

Observación 2.6.2. $d^H(K_n, K) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ si y sólo si cualquier $\epsilon > 0$ existe n_ϵ tal que $K_n \subseteq K \oplus B(0, \epsilon)$ y $K \subseteq K_n \oplus B(0, \epsilon)$ para todo $n \geq n_\epsilon$.

Para conjuntos abiertos en un conjunto compacto, definimos la distancia mediante su complemento.

Definición 2.6.3. Sean O_1, O_2 dos conjuntos abiertos del conjunto compacto $B \subset \mathbb{R}^n$. Su distancia Hausdorff se define por

$$d_H(O_1, O_2) = d^H(B \setminus O_1, B \setminus O_2). \quad (2.33)$$

Enunciaremos una útil propiedad de la compacidad de la distancia Hausdorff.

Teorema 2.6.4. Sea B un compacto fijo en \mathbb{R}^n y $\{\Omega_n\}$ una sucesión de conjuntos abiertos de B . Entonces, existen un conjunto abierto $\Omega \subset B$ y una subsucesión $\{\Omega_{n_k}\}$ de $\{\Omega_n\}$ que converge respecto a la distancia Hausdorff a Ω .

Demostración: Ver Corolario 2.2.24 en página 40 de [21].

Observación 2.6.5. Sea $\{P_k\}$ una sucesión de polígonos de n lados, que se encuentra al interior de una bola cerrada B , entonces por Teorema 2.6.4 tenemos que existe un abierto P tal que una subsucesión de $\{P_k\}$ converge respecto a la distancia Hausdorff a P . Como los vertices de todos los polígonos P_k están contenidos en B , podemos usar el Teorema de Heine-Borel para concluir que las sucesiones formado por los vertices de cada polígono tienen una subsucesiones que converge a algún punto de B . Desde la definición de convergencia Hausdorff, y la unicidad de límite se ve que P es un polígono de m lados con $m \leq n$.

Proposición 2.6.6. *Sea B un conjunto compacto en \mathbb{R}^n y Ω_n una familia de subconjuntos abiertos y convexos de B que converge, para la distancia Hausdorff, a un conjunto Ω . Además, asuma que existe un $r > 0$ tal que $B(0, r) \subset \Omega_n$ y $B(0, r) \subset \Omega$. Entonces, Ω_n^* converge a Ω^* , respecto a la distancia Hausdorff, donde Ω^* y Ω_n^* son las simetrizaciones de Steiner de Ω y Ω_n , respectivamente, para un hiperplano H .*

Demostración: Por hipótesis, para cada $\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$B \setminus \Omega_n \subseteq B \setminus \Omega \oplus B(0, \epsilon) \quad \text{y} \quad B \setminus \Omega \subseteq B \setminus \Omega_n \oplus B(0, \epsilon) \quad \text{para cada } n \geq N_\epsilon.$$

Estas contenciones equivalen a que, para cada $\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Omega \ominus B(0, \epsilon) \subseteq \Omega_n \quad \text{y} \quad \Omega_n \ominus B(0, \epsilon) \subseteq \Omega \quad \text{para cada } n \geq N_\epsilon.$$

Por Lema 2.5.16 tenemos que

$$\left(1 - \frac{4R\epsilon}{r^2}\right) \Omega \subseteq \Omega \ominus B(0, \epsilon) \subseteq \Omega_n \quad \text{y} \quad \left(1 - \frac{4R\epsilon}{r^2}\right) \Omega_n \subseteq \Omega_n \ominus B(0, \epsilon) \subseteq \Omega,$$

para cada $n \geq N_\epsilon$.

Desde las últimas contenciones se obtiene que

$$\left(1 - \frac{4R\epsilon}{r^2}\right) \Omega^* \subseteq \Omega_n^* \quad \text{y} \quad \left(1 - \frac{4R\epsilon}{r^2}\right) \Omega_n^* \subseteq \Omega^* \quad \text{para cada } n \geq N_\epsilon,$$

así

$$B \setminus \Omega_n^* \subseteq B \setminus \left(1 - \frac{4R\epsilon}{r^2}\right) \Omega^* \quad \text{y} \quad B \setminus \Omega^* \subseteq B \setminus \left(1 - \frac{4R\epsilon}{r^2}\right) \Omega_n^* \quad \text{para cada } n \geq N_\epsilon.$$

Para cada convexo abierto $A \subseteq B$ se puede demostrar que

$$B \setminus \left(1 - \frac{4R\epsilon}{r^2}\right) A \subseteq B \setminus A \oplus B\left(0, \frac{8R^2\epsilon}{r^2}\right).$$

Según esto último, para cada $\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$B \setminus \Omega_n^* \subseteq B \setminus \Omega_n^* \oplus B\left(0, \frac{8R^2\epsilon}{r^2}\right) \quad \text{y} \quad B \setminus \Omega_n^* \subseteq B \setminus \Omega^* \oplus B\left(0, \frac{8R^2\epsilon}{r^2}\right) \quad \text{para cada } n \geq N_\epsilon.$$

■

Proposición 2.6.7. *Sea Δ un triángulo arbitrario. Definimos $\Delta_1 = \Delta$ y sucesivamente, Δ_{n+1} como la simetrización de Steiner de Δ_n con respecto a la mediatriz (recta perpendicular a un segmento que se traza en su punto medio) a uno de sus lados (al lado con respecto al que no existe simetría). La sucesión $\{\Delta_n\}$ converge a un triángulo equilátero con respecto a la distancia Hausdorff.*

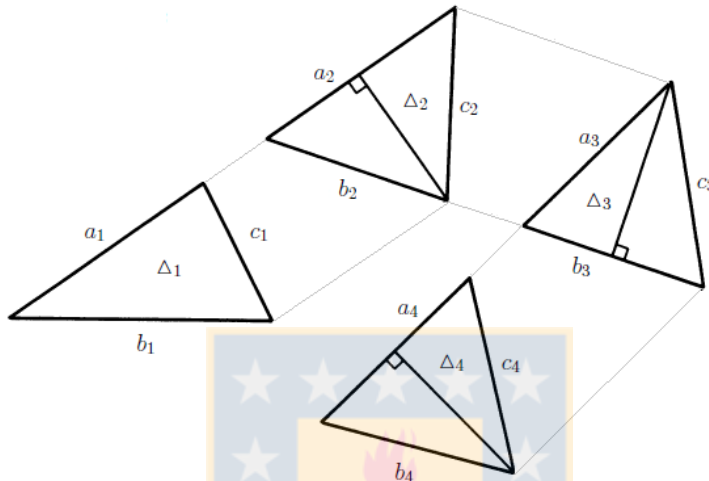


Figura 2.2: sucesión triángulos

Demostración: Sea $M(a)$ la mediatriz al lado de longitud a . Sea un triángulo Δ arbitrario cuyos lados tiene longitudes a_1, b_1 y c_1 , sin pérdida de generalidad supongamos que $a_1 \geq b_1 \geq c_1$, simetrizando a $\Delta_1 := \Delta$ respecto a $M(a_1)$ obtenemos el triángulo isósceles Δ_2 de lados cuyas longitudes son a_2, b_2 y c_2 . Ahora simetrizando a Δ_2 con respecto a $M(b_2)$ se obtiene un Δ_3 de lados de longitudes a_3, b_3 y c_3 . En general la sucesión se genera simetrizando con respecto a $l(a_n)$, luego con $l(b_{n+1})$ y continuando con $l(a_{n+2})$.

Debido a que el primer valor propio del p -Laplaciano fraccionario-Dirichlet (que se define en el siguiente capítulo) es invariante bajo traslación, podemos asumir que todos los Δ_n están contenidos en una bola fija B . Por Observación 2.6.5, tenemos que existe un triángulo T y una subsucesión $\{\Delta_{n_k}\}$ que converge a T respecto a la distancia Hausdorff. Si en cualquier etapa, Δ_n es un triángulo equilátero entonces Δ_{n+1} también lo es, y así en este caso el teorema

queda demostrado.

Supongamos que ningún miembro de $\{\Delta_n\}$ es un triángulo equilátero. Sea L_n y l_n las longitudes de los lados mayores y menores de Δ_n , respectivamente. Simetrizando a Δ_n con respecto a $M(L_n)$ se consigue $L_n = L_{n+1}$ y $l_n < l_{n+1}$. Si simetrizamos con respecto a $M(l_n)$, entonces $L_n > L_{n+1}$ y $l_n = l_{n+1}$. Entonces $\{L_n - l_n\}$ es una sucesión monótona decreciente. Así $\lim_{n \rightarrow \infty} (L_n - l_n)$ existe. Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} (L_n - l_n) = \epsilon > 0$, y sea Δ un triángulo tal que $d_H(\Delta_{n_{j_k}}, \Delta) \rightarrow 0$ para alguna subsucesión de $\{\Delta_{n_k}\}$. Sea Δ_ϵ^* el conjunto que se obtiene aplicando continuamente dos simetrizaciones (como las descritas anteriormente) a Δ_ϵ^* . La diferencia entre la longitudes de los lados mayores y menores para Δ_ϵ^* es $L^* - l^* < \epsilon$. Para n suficientemente grande se tiene que Δ_n es arbitrariamente cercano a Δ_ϵ en el sentido de la distancia Hausdorff, por Teorema 2.6.6 se tiene que Δ_{n+2}^* es arbitrariamente cercano a Δ_ϵ^* . Entonces, $L_{n+2} - l_{n+2} < \epsilon$, lo que es una contradicción. Así, $\lim_{n \rightarrow \infty} (L_n - l_n) = 0$. Consecuentemente, existe una subsucesión de Δ_n que converge a un triángulo equilátero. ■

Proposición 2.6.8. *La sucesión infinita construida a partir de un cuadrilátero arbitrario C , alternando una simetrización de Steiner respecto a una mediatriz de una diagonal y luego respecto a una mediatriz de un lado, converge a un cuadrado respecto a la distancia Hausdorff.*

Demostración: Simetrizando un cuadrilátero no convexo respecto a la perpendicular a su diagonal exterior, se obtiene un cuadrilátero convexo. Así, supondremos C que e un cuadrilátero convexo arbitrario cuyas diagonales tienen longitudes M y n con $M > n$. En primer lugar simetrizando C con respecto a una recta perpendicular a cualquiera de sus diagonales. Al cuadrilátero C' (volantín) lo simetrizamos respecto la mediatriz a una de sus diagonales. El cuadrilátero obtenido C_1 es un rombo, simetrizando este respecto a la mediatriz de uno de sus lados obtenemos un cuadrilátero C_2 que es un rectángulo. Simetrizando C_2 respecto a una mediatriz respecto una diagonal obtenmos un rombo C_3 . Si continuamos de esta manera conseguimos una sucesión $\{C_n\}$ en que C_n es un rombo para un n impar y un rectángulo para un n par. Si en cualquier etapa C_n es un cuadrado, luego C_{n+1} es un cuadrado. Supongamos que ningún miembro de $\{C_n\}$ es un cuadrado. Sea C_N cualquier rombo,

para este tenemos $M_N > M_{N+2} > m_{N+2} > m_{N+2}$ (estas desigualdades se puede justificar básicamente por Teorema de Pitagoras, la invariancia del área bajo simetrización de Steiner y que el área de un rombo es el semi producto de la longitud de sus diagonales). Entonces, $M_N - m_N > M_{N+2} - m_{N+2} > M_{N+4} - m_{N+4} > \dots$. De lo que se deduce que, $\{M_{2k-1} - m_{2k-1}\}$ es una sucesión de números no negativos monotona creciente. Siguiendo argumentos análogos al caso del triángulo se puede demostrar que esta sucesión converge a un cuadrado (Un cuadrado es tanto un rectángulo como un rombo).

■

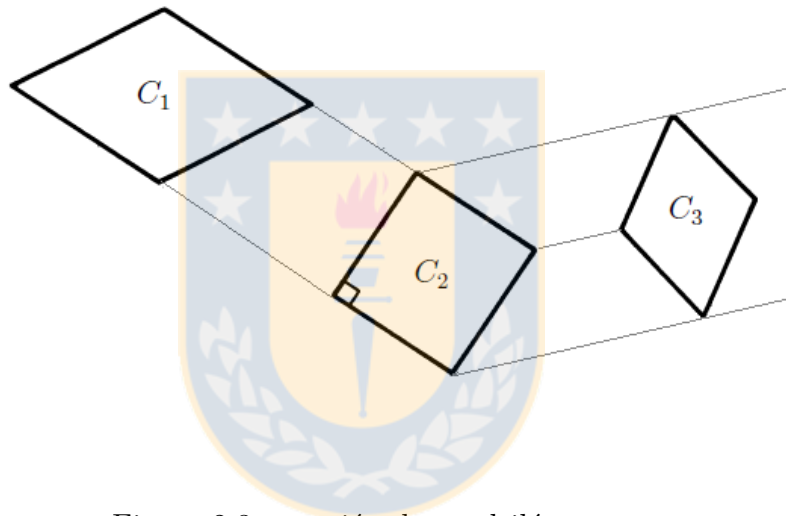


Figura 2.3: sucesión de cuadriláteros

Capítulo 3

Primer valor propio del p-Laplaciano fraccionario-Dirichlet

3.1. Propiedades del primer valor propio del p-Laplaciano fraccionario-Dirichlet

Definición 3.1.1. Sea $p \in (1, \infty)$ y $s \in (0, 1)$. Dado un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definimos

$$\lambda_{1,p}^s(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dx dy}{\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx} : u \in \widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega) \right\}, \quad (3.1)$$

por homogeneidad se puede escribir

$$\lambda_{1,p}^s(\Omega) = \inf \{ [u]_{W^{s,p}(\Omega)}^p : u \in \widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega), \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1 \} \quad (3.2)$$

Observación 3.1.2. Por la desigualdad de Poincaré para la seminorma de Gagliardo (Proposición (1.1.6)), tenemos que $\lambda_{1,p}^s$ es acotado inferiormente.

Teorema 3.1.3. Existe una función $u \in \widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$, $u \neq 0$ y $u = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ que minimiza (3.2). Además satisface la ecuación de Euler Lagrange

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) (\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{n+ps}} dx dy = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p-2} u(x) \phi(x) dx$$

para cada $\phi \in \widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$, que es justamente la formulación variacional de $(-\Delta_p)^s u = \lambda |u|^{p-2} u$, donde

$$\begin{aligned} (-\Delta_p)^s u(x) &:= 2 \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : \delta \leq |x-y|\}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+ps}} dy \\ &= 2P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+ps}} dy. \end{aligned}$$

Demostración: Se demostrará la existencia de u por medio del método directo del cálculo de variaciones. Sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión minimizante en (3.2). Se deduce $\|u_n\|_{\widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)} < \infty$, así por el Teorema de Rellich-Kondrachov Fraccionario (Teorema 1.1.14) existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ tal que $u_{n_k} \rightarrow u$ en $L^p(\Omega)$ y $u \in \widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$. Debido a que $\|u_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} = 1$, se deduce que $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Como $\{u_{n_k}\}$ es una sucesión acotada sobre el espacio Banach y reflexivo $\widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$, existe $\{u_{n_{k_j}}\} \subseteq \{u_{n_k}\}$ que converge débilmente a u . Por la semicontinuidad débil de la seminorma de Gagliardo tenemos que

$$\lambda_{1,p}^s(\Omega) \leq [u]_{W^{s,p}(\Omega)}^p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} [u_{n_{k_j}}]_{W^{s,p}(\Omega)}^p = \lambda_{1,p}^s(\Omega)$$

esto prueba que $\lambda_{1,p}^s(\Omega)$ es alcanzado en $u \in \widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$.

Si u es la función minimizante en (3.1), para cada $\phi \in \widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$ se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)+t\phi(x)-(u(y)+t\phi(y))|^{p-2} (u(x)+t\phi(x)-(u(y)+t\phi(y)))}{|x-y|^{n+ps}} dx dy}{\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)+t\phi(x)|^p dx} \right) \Big|_{t=0} = 0.$$

Derivando y evaluando en $t = 0$ la expresión anterior tenemos que,

$$\begin{aligned} &\left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - (u(y))|^{p-2} (u(x) - u(y)) (\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{n+ps}} dx dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx \right) \\ &\quad - \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - (u(y))|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+ps}} dx dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p-2} u(x) \phi(x) dx \right) = 0. \end{aligned}$$

Despejando

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) (\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{n+ps}} dx dy = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p-2} u(x) \phi(x) dx,$$

Ahora probaremos algunas propiedades para $\lambda_{1,p}^s(\Omega)$.

Proposición 3.1.4. (Regla de homotecia) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Entonces,

$$\lambda_{1,p}^s(t\Omega) = t^{-sp}\lambda_{1,p}^s(\Omega) \quad \text{con } t > 0.$$

Demostración: Sea Ω un conjunto abierto y acotado y $t > 0$. Definimos $T(x) = tx$. Evidentemente $T^{-1}(x) = \frac{1}{t}x$. Con esto definamos una función auxiliar $U(z) = u(T^{-1}(z))$ para cualquier $u \in \widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$. Teniendo en mente esto, transformamos el cociente de Rayleigh usando el cambio de variable $T(x) = w$ y $T(y) = v$,

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dx dy}{\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx} &= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|U(T(x)) - U(T(y))|^p}{|x - y|^{n+ps}} dx dy}{\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|U(w) - U(v)|^p}{|T^{-1}(w) - T^{-1}(v)|^{n+ps}} |\det T^{-1}| |\det T^{-1}| dw dv}{\int_{\mathbb{R}^n} |u(T^{-1}(w))|^p |\det T^{-1}| dw} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|U(w) - U(v)|^p}{|\frac{1}{t}w - \frac{1}{t}v|^{n+ps}} \frac{1}{t^n} dw dv}{\int_{\mathbb{R}^n} |U(w)|^p dw} \\ &= t^{ps} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|U(w) - U(v)|^p}{|w - v|^{n+ps}} dw dv}{\int_{\mathbb{R}^n} |U(w)|^p dw}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Tomando el ínfimo en $u \in \widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$ en la última identidad las funciones U recorren completamente $\widetilde{W}_0^{s,p}(t\Omega)$. ■

Proposición 3.1.5. (invariante bajo traslación) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Entonces,

$$\lambda_{1,p}^s(\Omega) = \lambda_{1,p}^s(\Omega + w) \quad \text{para todo } w \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración: Sea Ω un conjunto abierto y acotado y $w \in \mathbb{R}^n$. Definimos $U(x) = u(x - w)$ para cualquier $u \in \widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$. Según estas expresiones y un cambio de variable $z = x + w$ y $v = y + w$ tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|U(z) - U(v)|^p}{|z - v|^{n+ps}} dx dy$$

De la última identidad, la demostración de este teorema queda establecida. ■

Proposición 3.1.6. *(Invariante bajo transformaciones ortogonal) $\lambda_{1,p}^s(\Omega) = \lambda_{1,p}^s(T(\Omega))$ para toda transformación ortogonal T .*

Demostración: Sea T una transformaciones ortogonal. Con esto definamos una función auxiliar $U(z) = u(T^{-1}(z))$ para cualquier $u \in \widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$. Con lo anterior y el hecho que $|\det T^{-1}| = 1$, transformamos el cociente de Rayleigh usando el cambio de variable $T(x) = w$ y $T(y) = v$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dx dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|U(T(x)) - U(T(y))|^p}{|x - y|^{n+ps}} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|U(w) - U(v)|^p}{|T^{-1}(w) - T^{-1}(v)|^{n+ps}} |\det T^{-1}| |\det T^{-1}| dw dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|U(w) - U(v)|^p}{|w - v|^{n+ps}} dw dv. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Tomando el ínfimo en $u \in \widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$ en la última identidad las funciones U recorren completamente $\widetilde{W}_0^{s,p}(T(\Omega))$, así la demostración de este teorema queda establecida. ■

Proposición 3.1.7. *Si $A \subset B$, entonces $\lambda_{1,p}^s(B) \leq \lambda_{1,p}^s(A)$.*

Demostración: Si $A \subset B$, entonces $C_0^\infty(A) \subset C_0^\infty(B)$. Por otra parte $\widetilde{W}_0^{s,p}(A)$ es definido como la clausura de $C_0^\infty(A)$ en $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ con respecto a la norma (1.2), así $\widetilde{W}_0^{s,p}(A) \subset \widetilde{W}_0^{s,p}(B)$, luego

$$\begin{aligned} \lambda_{1,p}^s(B) &= \min\{\|u\|_{\widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)}^p : u \in \widetilde{W}_0^{s,p}(B), \|u\|_{L^p(B)} = 1\} \\ &\leq \min\{\|u\|_{\widetilde{W}_0^{s,p}(A)}^p : u \in \widetilde{W}_0^{s,p}(A), \|u\|_{L^p(A)} = 1\} \\ &= \lambda_{1,p}^s(A) \end{aligned}$$

■

Proposición 3.1.8. *Sea B un conjunto compacto en \mathbb{R}^n y Ω_n una familia de subconjuntos abiertos y convexos de B que converge, para la distancia Hausdorff, a un conjunto Ω . Además, asuma que existe un $r > 0$ tal que $B(0, r) \subset \Omega_n$ y $B(0, r) \subset \Omega$. Entonces, $\lambda_{1,p}^s(\Omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{1,p}^s(\Omega_n)$.*

Demostración: Por hipótesis $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge, para la distancia Hausdorff, a Ω . Entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe n_ϵ tal que

$$B \setminus \Omega_n \subseteq (B \setminus \Omega) \oplus B(0, \epsilon) \text{ para todo } n \geq n_\epsilon \quad (3.5)$$

y

$$B \setminus \Omega \subseteq (B \setminus \Omega_n) \oplus B(0, \epsilon) \text{ para todo } n \geq n_\epsilon. \quad (3.6)$$

Por Proposición 2.5.4, tenemos que

$$\Omega \ominus B(0, \epsilon) = B \setminus ((B \setminus \Omega) \oplus B(0, \epsilon)). \quad (3.7)$$

Por Proposición 2.5.7, se tiene que

$$\overline{\Omega} \ominus B(0, \epsilon) = \Omega \ominus B(0, \epsilon). \quad (3.8)$$

Usando (3.5) (y posteriormente tomando complemento), (3.7) y (3.8) obtenemos que

$$\overline{\Omega} \ominus B(0, \epsilon) = B \setminus ((B \setminus \Omega) \oplus B(0, \epsilon)) \subset \Omega_n. \quad (3.9)$$

Usando Lema 2.5.16 y (3.9) obtenemos que

$$\left(1 - 4\frac{R\epsilon}{r^2}\right) \Omega \subset \left(1 - 4\frac{R\epsilon}{r^2}\right) \overline{\Omega} \subset \overline{\Omega} \ominus B(0, \epsilon) \subset \Omega_n. \quad (3.10)$$

Entonces aplicando las Proposiciones 3.1.4 y 3.1.7 se consigue que

$$\left(1 - 4\frac{R\epsilon}{r^2}\right)^{sp} \lambda_{1,p}^s(\Omega_n) \leq \lambda_{1,p}^s(\Omega). \quad (3.11)$$

Tomando el limite superior en (3.11) se tiene que

$$\left(1 - 4\frac{R\epsilon}{r^2}\right)^{sp} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \lambda_{1,p}^s(\Omega_n) \leq \lambda_{1,p}^s(\Omega). \quad (3.12)$$

Haciendo tender ϵ a 0 en (3.12) obtenemos que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \lambda_{1,p}^s(\Omega_n) \leq \lambda_{1,p}^s(\Omega) \quad (3.13)$$

Similarmente, aplicando (3.7) y (3.8) en (3.6), por el mismo argumento anterior, obtenemos que

$$\lambda_{1,p}^s(\Omega) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \lambda_{1,p}^s(\Omega_n). \quad (3.14)$$

El resultado sigue inmediatamente de (3.13) y (3.14).

■



Capítulo 4

Minimización del primer valor propio p-Laplaciano fraccionario-Dirichlet

4.1. Desigualdad de Pólya-Szegö no local

Para una función no negativa convexa J sobre \mathbb{R} con $J(0) = 0$ y k una función no negativa sobre \mathbb{R}^n , definimos

$$E[u] := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J(u(x) - u(y))k(x - y)dx dy.$$

Siguiendo la mismas ideas dadas en [16] pero para simetrización Steiner en vez de rearrreglo decreciente simétrica, obtenemos el siguiente lema.

Lema 4.1.1. *Sea J una función no negativa, convexa en \mathbb{R} con $J(0) = 0$ y $k \in L_1(\mathbb{R}^n)$ una función simétrica y decreciente. Entonces para toda función medible no negativa u con $E[u] < \infty$ y $|\{u > \tau\}| < \infty$ para todo $\tau > 0$ uno tiene*

$$E[u] \geq E[u^*],$$

donde u^ es la simetrización de Steiner de u con respecto a un hiperplano. Si, en adición, J es estrictamente convexa y k es estrictamente decreciente, entonces la igualdad se cumple si y solo si u es un traslado de una función que es simétrico con respecto al hiperplano.*

Demostración: Primero escribamos $J = J_+ + J_-$ con

$$J_+(y) = \begin{cases} J(y) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0, \end{cases}$$

y $J_-(t) = J_+(-t)$. Con esto definimos

$$E_+[u] := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J_+(u(x) - u(y))k(x - y)dx dy \quad (4.1)$$

y similarmente se define E_- . Con el acuerdo anterior, podemos escribir $E[u] = E_+[u] + E_-[u]$. Basta demostrar el teorema para E_+ , debido a que la afirmación para E_- (y de este modo para la E original) sigue de que, $J_-(u(x) - u(y)) = J_+(u(y) - u(x))$ y k es simétrica respecto a x e y .

Paso 1: Primero demostraremos el lema para el caso particular en que u es acotada. Como J es convexa también lo es J_+ . Esto último nos garantiza que la derivada derecha J'_+ de J_+ es una función no negativa y creciente. Además, dado que $J_+(t) = \int_0^t J'_+(\tau)d\tau$ se puede estimar que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J'_+(u(x) - \tau)\chi_{\{z:u(z)\leq\tau\}}(y)d\tau &= \int_{u(y)}^{u(x)} J'_+(u(x) - \tau)\chi_{\{z:u(z)\leq\tau\}}(y)d\tau \\ &= \int_{u(y)}^{u(x)} J'_+(u(x) - \tau)d\tau \\ &= - \int_{u(x)-u(y)}^0 J'_+(w)dw \\ &= J_+(u(x) - u(y)). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Sea

$$e_\tau^+[u] := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J'_+(u(x) - \tau)k(x - y)\chi_{\{z:u(z)\leq\tau\}}(y)dx dy.$$

Usando el teorema de Tonelli para funciones no negativa y (4.2) tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e_\tau^+[u]d\tau &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J'_+(u(x) - \tau)k(x - y)\chi_{\{z:u(z)\leq\tau\}}(y)dx dy d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} k(x - y) \int_0^\infty J'_+(u(x) - \tau)\chi_{\{z:u(z)\leq\tau\}}(y)d\tau dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J_+(u(x) - u(y))k(x - y)dx dy \\ &= E_+[u]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Se afirma que $\int_{\mathbb{R}^n} J'_+(u(x) - \tau) dx < \infty$ para todo $\tau \in \mathbb{R}^+$ arbitrario. En efecto, sea $\tau \in \mathbb{R}^+$ fijo. Debido a que u es acotada existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $u(x) \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Lo anterior, junto a los hechos que J'_+ es creciente y que u se desvanece en el infinito, nos permite deducir que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} J'_+(u(x) - \tau) dx &= \int_{\{z: u(z) \geq \tau\}} J'_+(u(x) - \tau) dx \\ &\leq J'_+(M - \tau) \int_{\{z: u(z) \geq \tau\}} dx < \infty. \end{aligned}$$

Escribiendo $\chi_{\{u \leq \tau\}} = 1 - \chi_{\{u > \tau\}}$ y usando que la integral de Lebesgue es invariante bajo traslación se obtiene que

$$\begin{aligned} e_\tau^+[u] &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J'_+(u(x) - \tau) k(x - y) \chi_{\{u \leq \tau\}}(y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J'_+(u(x) - \tau) k(x - y) (1 - \chi_{\{u > \tau\}})(y) dx dy \\ &= \|k\|_1 \int_{\mathbb{R}^n} J'_+(u(x) - \tau) dx - \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J'_+(u(x) - \tau) k(x - y) \chi_{\{u > \tau\}} dx dy. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Por Proposición 2.3.11 tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} J'_+(u(x) - \tau) dx = \int_{\mathbb{R}^n} J'_+(u^*(x) - \tau) dx \quad (4.5)$$

Usando la Proposición 2.3.8 y Corolario 2.4.3 la integral doble en la parte derecha de (4.4) crece bajo rearrreglo. Este hecho, junto con (4.4) y (4.5) implica que

$$e_\tau^+[u^*] \leq e_\tau^+[u].$$

Por (4.3) y lo anterior tenemos que

$$E_+[u^*] \leq E^+[u].$$

Paso 2: Afirmamos que $E_+[u] \geq E_+[u^*]$ para cualquier función no negativa u con $E_+[u] < \infty$ y $|\{u > \tau\}| < \infty$ para todo $\tau \in \mathbb{R}^+$. Sea $u_M := \min\{u, M\}$.

$$E_+[u_M] = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J_+(\min\{u(x), M\} - \min\{u(y), M\}) k(x - y) dx dy. \quad (4.6)$$

Observamos que J_+ es una función creciente (ya que J_+ es una función convexa no negativa con $J_+(0) = 0$). Con este hecho en mente se puede analizar todos los posibles casos, y se

obtiene la siguiente desigualdad

$$J_+(\min\{u(x), M\} - \min\{u(y), M\}) \leq J_+(u(x) - u(y)). \quad (4.7)$$

Por (4.6), (4.7) y monotonía de la integral tenemos que

$$E_+[u_M] \leq E_+[u] \quad (4.8)$$

La función u_M satisface la hipótesis del paso 1, esto junto a (4.8) permite obtener que

$$E_+[(u_M)^*] \leq E_+[u_M] \leq E_+[u]. \quad (4.9)$$

Observaremos que $\Phi(w) := \min\{w, M\}$ es creciente, por esto podemos usar la Proposición 2.3.10 y conseguimos que

$$(u_M)^* = (u^*)_M \quad (4.10)$$

Por (4.9) y (4.10) tenemos que

$$E_+[(u^*)_M] \leq E_+[u] \quad \text{para todo } M \in \mathbb{N} \quad (4.11)$$

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ fijos. Analizando todos los posibles casos tenemos que

$$J_+((u^*)_M(x) - (u^*)_M(y))k(x - y) \leq J_+((u^*)_{M+1}(x) - (u^*)_{M+1}(y))k(x - y).$$

Debido a la definición de u_M se tiene que $(u^*)_M(x) \rightarrow u^*(x)$ cuando $M \rightarrow \infty$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, de esto último se desprende que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_+((u^*)_M(x) - (u^*)_M(y))k(x - y) = J_+(u^*(x) - u^*(y))k(x - y). \quad (4.12)$$

Por el teorema de convergencia monótona de Lebesgue se deduce que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_+[(u^*)_M] = E_+[u^*] \quad (4.13)$$

Desde (4.11) y (4.13) obtenemos que

$$E_+[u^*] \leq E_+[u].$$

Paso 3: Ahora demostraremos el caso de la igualdad, sean k estrictamente decreciente y J estrictamente convexa, primero asumamos que $E_+[u^*] = E_+[u]$ para funciones u acotadas. Por (4.3) se tiene que $e_\tau^+[u^*] = e_\tau^+[u]$ para $\tau > 0$ c.t.p. y por el Teorema 2.4.10 se tiene que para $\tau > 0$ c.t.p. existe $a_\tau \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\chi\{u < \tau\}(x', x_n) = \chi\{u^* < \tau\}(x', x_n - a_\tau) \quad \text{y} \quad J'_\pm(u(x', x_n) - \tau) = J'_\pm(u^*(x', x_n - a_\tau) - \tau) \quad (4.14)$$

para toda (x', x_n) -c.t.p.. Por hipótesis J_+ es estrictamente convexa en \mathbb{R}^+ pues J lo es, luego J'_+ es estrictamente creciente en \mathbb{R}^+ , así es inyectiva, esto junto con (4.14) nos permite deducir que $(u(x', x_n) - \tau)_+ = (u^*(x', x_n - a_\tau) - \tau)_+$ para τ y x' -c.t.p. ($x' \in \mathbb{R}^{n-1}$). Sean $\tau_1, \tau_2 > 0$ tal que $u^*(x', x_n) = u(x', x_n + a_{\tau_1}) = u(x', x_n + a_{\tau_2})$ x' -c.t.p., de lo que se desprende que $u(x', x_n) = u(x', x_n + a_{\tau_1} - a_{\tau_2})$ x' -c.t.p.. Seleccionando x' tal que $u(x', x_n) \neq 0$ x_n -c.t.p., luego existe un $t > 0$ tal que $\{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : u(x', x_n) > 0\} = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : u(x', x_n) > 0\} + a_{\tau_1} - a_{\tau_2}$ y

$|\{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : u(x', x_n) > 0\}| > 0$. Luego usando el Lema 2.4.7 y que u se desvanece en infinito tenemos que $a_{\tau_1} - a_{\tau_2} = 0$, así a_τ es independiente de τ . Notemos a_τ por a luego $u(x', x_n) = u^*(x', x_n - a)$ (x', x_n) -c.t.p.

Paso 4: Ahora, caracterizamos el caso de la igualdad $E_+[u^*] = E_+[u]$ para funciones u generales que cumplan las hipótesis del teorema. Para cualquier $M > 0$ descomponemos u de la siguiente manera $u = u_M + v_M$ con $u_M := \min\{u, M\}$, con esto en mente, mediante cálculos directos, pero engorrosos se puede encontrar

$$E_+[u] = E_+[u_M] + E_+[v_M] + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} F_M(v_M(x), u_M(y))k(x - y)dx dy, \quad (4.15)$$

con

$$F_M(v, u) = J_+(v + M - u) - J_+(v) - J_+(M - u).$$

Debido a que $E_+[u] < \infty$ entonces entonces los tres términos del lado derecho de (4.15) son finitos, además, por la definición de E_+ se tiene que $E_+[u_M]$ y $E_+[v_M]$ son no negativas. Debido a que J_+ es estrictamente convexo con $J_+(0) = 0$, uno tiene que J_+ es superaditiva. Si

$0 \leq u \leq M$ y $v \geq 0$, por la superaditividad se tiene que $J_+(v + M - u) \geq J_+(v) + J_+(M - u)$, entonces el tercer término del lado derecho de (4.15) también es no negativa. Por la definición de v_M se observa que se desvanece en el infinito, así por el paso 2, se tiene que

$$E_+[v_M] \geq E_+[(v^*)_M] \quad \text{y} \quad E_+[u_M] \geq E_+[(u^*)_M]. \quad (4.16)$$

Supongamos sin demostración, por el momento, que es cierto

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} F_M(v_M(x), u_M(y))k(x - y)dx dy \\ & \geq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} F_M((v^*)_M(x), (u^*)_M(y))k(x - y)dx dy, \end{aligned} \quad (4.17)$$

esto junto a (4.16) y la hipótesis del teorema $E_+[u^*] = E_+[u]$, nos llevan a concluir que $E_+[(u^*)_M] = E_+[u_M]$ para cada $M > 0$, y si a esta última identidad se le aplica el resultado del paso 3, el teorema quedará demostrado. Por lo anterior, nuestro objetivo es demostrar (4.17).

Debido a que J_+ es estrictamente convexa, su derivada lateral derecha J'_+ es estrictamente creciente y continua por la derecha, de esta forma existe una medida no negativa μ tal que $J'_+(t) = \int_0^t d\mu(\tau)$. Por cálculos simples se tiene que $J_+(t) = \int_0^\infty (t - \tau)_+ d\mu(\tau)$ y desde esto se desprende que

$$F_M(v, u) = \int_0^\infty f_{M,\tau}(v, u) d\mu(\tau)$$

con

$$f_{M,\tau}(v, u) := (v + M - u - \tau)_+ - (v - \tau)_+ - (M - u - \tau)_+.$$

Analizando todos los caso para $\tau > 0$, $0 \leq u \leq M$ y $v \geq 0$, se observa que $f_{M,\tau}(v, u) \geq 0$. Por teorema de Tonelli se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} F_M(v_M(x), u_M(y))k(x - y)dx dy = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f_{M,\tau}(v_M(x), u_M(y))k(x - y)dx dy d\mu(\tau),$$

según lo anterior para lograr demostrar (4.17) bastará con probar que para cada $\tau > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f_{M,\tau}(v_M(x), u_M(y))k(x - y)dx dy$$

no crece bajo simetrización de Steiner.

Descomponiendo $f_{M,\tau} = f_{M,\tau}^{(1)} - f_{M,\tau}^{(2)}$, donde

$$f_{M,\tau}^{(1)}(v) := v - (v - \tau)_+$$

y

$$f_{M,\tau}^{(2)}(v, u) := v - (v + M - u - \tau)_+ + (M - u - \tau)_+ = \min\{v, (u - M + \tau)_+\}.$$

Debido a que u se desvanece en el infinito tenemos que $\text{sop}(v_M) = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) > M\}$ tiene medida finita. Claramente $f_{M,\tau}^{(1)}$ es acotado por τ . Por lo anterior, teorema de Tonelli e invariancia de la integral de Lebesgue se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f_{M,\tau}^{(1)}(v_M(x))k(x-y)dxdy = \|k\|_1 \int_{\mathbb{R}^n} f_{M,\tau}^{(1)}(v_M(x))dx$$

es finita. Además, debido a que $f_{M,\tau}^{(1)}$ es creciente por Teorema 2.3.11, la anterior integral es invariante bajo simetrización de Steiner aplicada a v_M .

Por el teorema capa de pastel y el teorema de Tonelli tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f_{M,\tau}^{(2)}(v_M(x), u_M(y))k(x-y)dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \int_0^\infty \chi_{\{\min\{v_M(x), (u_M(y)-M-\tau)_+\} > t\}}(x, y)k(x-y)dt dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \int_0^\infty \chi_{\{(x,y): v_M(x) > t, (u_M(y)-M-\tau)_+ > t\}}(x, y)k(x-y)dt dxdy \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \chi_{\{v_M(x) > t\}}(x)\chi_{\{(u_M(y)-M-\tau)_+ > t\}}(y)k(x-y)dxdydt \end{aligned} \quad (4.18)$$

Usando la desigualdad de Riesz en la última igualdad de (4.18) se observa que crece bajo simetrización de Steiner y con esto el lema queda demostrado. ■

Proposición 4.1.2. *(Desigualdad de Pólya-Szegö no local).* Sean $n \geq 1$, $0 < s < 1$, $1 \leq p < \frac{n}{s}$ y $u \in \widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega)$. Luego,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u^*(x) - u^*(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}}dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}}dxdy, \quad (4.19)$$

donde u^* es la simetrización de Steiner de u con respecto a un hiperplano dado. Si $p > 1$, entonces la igualdad se cumple si y solo si u es proporcional a un traslado de una función que es simétrica con respecto al hiperplano.

Demostración: Dado que $u^*(x)$ es no negativa y $||u(x)| - |u(y)|| \leq |u(x) - u(y)|$, es suficiente probar el teorema para funciones no negativa. Por definición de función Gamma y un cambio de variable obtenemos que

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{n+ps}{2})} \int_0^\infty \alpha^{\frac{n+ps}{2}-1} e^{-\alpha|x-y|^2} d\alpha = \frac{1}{|x-y|^{n+ps}} \quad (4.20)$$

Usando (4.20) y teorema de Tonelli para integrando no negativo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dx dy &= C \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \alpha^{\frac{n+ps}{2}-1} e^{-\alpha|x-y|^2} |u(x) - u(y)|^p d\alpha dx dy \\ &= C \int_0^\infty I_\alpha[u] \alpha^{\frac{n+ps}{2}-1} d\alpha, \end{aligned}$$

con

$$I_\alpha[u] := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x) - u(y)|^p e^{-\alpha|x-y|^2} dx dy \quad \text{y} \quad C = \frac{1}{\Gamma(\frac{n+ps}{2})}.$$

La función $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^p$ es estrictamente convexa y no negativa con $J(0) = 0$. La función $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-|x|^2}$ es una función simétrica estrictamente decreciente con $k \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Aplicando el Lema 4.1.1 al funcional I_α obtenemos el resultado deseado. ■

4.2. El caso del polígono

Teorema 4.2.1. *El triángulo equilátero tiene el menor primer valor propio p -Laplaciano Dirichlet fraccionario entre todos los triángulos de área dada. El cuadrado tiene el menor primer valor propio p -Laplaciano Dirichlet fraccionario entre todos los cuadriláteros de área dada. Además, el triángulo equilátero y el cuadrado son los únicos minimizantes en el problema anterior.*

Demostración: Dado que $\lambda_{1,p}^s$ es invariante bajo traslación y rotación, para demostrar este teorema para triángulos, es suficiente encontrar un triángulo equilátero T' que cumpla

$$\lambda_{1,p}^s(T') \leq \lambda_{1,p}^s(T).$$

Sea T_1 un triángulo arbitrario. Sea $\{T_n\}$ la sucesión construida en la Proposición 2.6.7. Sea u_n una función propia normalizada para el primer valor propio p -Laplaciano Dirichle fraccionario sobre T_n . Luego, por Proposición 4.1.2 tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda_{1,p}^s(T_n) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u_n(x) - u_n(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dx dy \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u_n^*(x) - u_n^*(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dx dy \end{aligned}$$

y por part 5 de la Proposición 2.3.5 tenemos $\|u_n\|_p = \|u_n^*\|_p = 1$. Por lo tanto, usando la Definición 3.1.1, obtenemos que

$$\lambda_{1,p}^s(T_{n+1}) \leq \lambda_{1,p}^s(T_n) \text{ para cada } n. \quad (4.21)$$

Ahora, recordemos que $\{T_n\}$ converge a un triángulo equilátero T con respecto a la distancia Hausdorff. Luego, usando la parte (g) de la Proposición 2.3.5, y si es necesario una traslación, podemos probar que existe una bola fija contenida en todos los triángulos T_n . Usando la parte (h) de la Proposición 2.3.5 también concluimos que todos los triángulos T_n están contenido en una bola fija. Esto permite aplicar la Proposición 3.1.8, y obtenemos

$$\lambda_{1,p}^s(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{1,p}^s(T_n) \leq \lambda_{1,p}^s(T_1).$$

Veamos el caso del cuadrilátero. Sea $\{C_n\}$ la sucesión definida en la Proposición 2.6.8, Ahora, recordemos que esta converge a un cuadrado C con respecto a la distancia Hausdorff. Este hecho junto con un razonamiento similar al caso del triángulo conduce a la desigualdad Faber-Krahn para cuadriláteros.

Ahora trataremos el tema de la unicidad. Suponga que T es cualquier triángulo en que el mínimo es alcanzado en la desigualdad de Faber-Krahn. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que T no es un triángulo equilátero. Así, T no es simétrico respecto a una

mediatriz L de alguno de sus lados l . Sea T^* la simetrización de Steiner de T respecto a L . Sea u la función propia normalizada de $\lambda_{1,p}^s(T)$. Aplicando Proposición 4.1.2 y $\|u\|_p = \|u^*\|_p = 1$, obtenemos

$$\lambda_{1,p}^s(T^*) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u^*(x) - u^*(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dx dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} dx dy = \lambda_{1,p}^s(T).$$

dado que $\lambda_{1,p}^s(T)$ es mínimo, obtenemos que $\lambda_{1,p}^s(T^*) = \lambda_{1,p}^s(T)$. Esto significa que existe igualdad en la desigualdad de Pólya-Szegö no local y así, por la parte de la igualdad de la Proposición 4.1.2, obtenemos que u es un traslado de u^* . Esto es posible sólo si los triángulos T y T^* son traslados uno del otro. Por otra parte, T^* es simétrico respecto a la mediatriz L , pero como T y T^* son traslados uno del otro, entonces, T necesariamente debe ser simétrico con respecto a L . Esto da una contradicción. Así, el único mínimo es el triángulo equilátero. La unicidad en el caso del cuadrilátero es completamente análogo al caso de los triángulos.

■



Bibliografía

- [1] F.J. Almgren and E.H. Lieb, Symmetric decreasing rearrangement is sometimes continuous, *Journal of the American Mathematical Society* Vol. 2, No. 4 (1989), pp. 683-773.
- [2] T. Bhattacharya, A proof of the Faber-Krahn inequality for the first eigenvalue of the p -Laplacian. *Ann Mat Pura Appl*, 177(4) (1999), pp. 225-240.
- [3] H.J. Brascamp and E.H. Lieb, J.M.Luttinger A General Rearrangement Inequality for Multiple Integrals, *Journal of Functional Analysis* 17(1974), pp.227-237.
- [4] L. Brasco, E. Lindgren and E. Parini, The fractional Cheeger problem, *Interfaces and Free Boundaries*, 16(2014), pp. 419-458.
- [5] L. Brasco and E. Parini, The second eigenvalue of the fractional p -Laplacian, *Advances in Calculus of Variations* (2015).
- [6] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.
- [7] F. Brock, A. Mercaldo and M.R. Posterado, On isoperimetric inequalities with respect to infinite measures, *Revista Matemática Iberoamericana*, vol 29, 2013.
- [8] D. Bucur and G. Buttazzo, *Variational Methods in Shape Optimization Problems*, Progress in nonlinear differential equations and their applications, Birkhäuser Boston Inc., 2005.
- [9] A. Burchard, Short Course on Rearrangement Inequalities, in *Notes to the Course: MAT 495, Rearrangement Inequalities*, University of Toronto, 2009.

- [10] C. Dellacherie, Ensembles Analytiques Capacités Mesures de Hausdorff, Springer-Verlag, 1972.
- [11] F.Demengel, G.Demengel, Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations, Springer 2012.
- [12] E. Di Nezza , Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces, Bull. Sci. math., 136 (2012), No. 5, pp. 521-573.
- [13] S. Kesavan, Symmetrization and applications, Series in Analysis, 3, World Scientific Publishing, 2006.
- [14] P. Felmer and C. Torres, Radial symmetry of ground states for a regional fractional, Communications on Pure and Applied Analysis 13, No. 6 (2014), pp. 2395-2406 .
- [15] R.L. Frank, E.H. Lieb and R. Seiringer, Hardy-Lieb-Thirring inequalities for fractional Schrödinger operators, J. Amer. Math. Soc. 21 (2008),pp. 925-950.
- [16] R.L. Frank and R. Seiringer, Non-linear ground state representations and sharp Hardy inequalities, J. Funct. Anal. 255 (2008), pp. 3407-3430.
- [17] R. J. Gardner, The Brunn-Minkowski inequality, Bull.AMS, 39(2002), 355-405.
- [18] P. Gruber, Convex and Discrete Geometry, Berlin: Springer-Verlag, 2007.
- [19] H. Hadwiger, Vorlesungen Über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, Springer-Verlag, Berlin, 1957.
- [20] A. Henrot, Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators, Front. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [21] Antoine Henrot, Michel Pierre, Variation et optimisation de formes: Une analyse géométrique, Springer Science and Business Media, 2005.
- [22] A. C. M. van Rooij, W. H. Schikhof, A Second Course on Real Functions, Cambridge, 1982.

- [23] Idrissaly, The eigenvalues for the p -Laplacian Operator, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Vol 6 (2005).
- [24] B. Kawohl, Rearrangements and Convexity of Level Sets in PDE, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [25] E. H. Lieb and M. Loss, Analysis. American Mathematical Soc., 2001.
- [26] E. Lindgren and P. Lindqvist, Fractional Eigenvalues, Calc. Var. Partial Differential Equations 49(2014), pp.795-826.
- [27] S.W. Liu and J.E. Rubio, Local convergences and optimal shape design, SIAM Journal on Control and Optimization 30 (1)(1992), pp. 49-62.
- [28] R. Osserman, The isoperimetric inequality, Bull.AMS, 84 no 6 (1978), 1182-1238.
- [29] G. Pólya and G. Szegő, Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Princeton University Press, Princeton, NJ (1951).
- [30] W. Prenowitz, James Jantosciak, Join Geometries A Theory of Convex Sets and Linear Geometry , Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1979.
- [31] J.W.S. Rayleigh, The Theory of Sound, 2nd. ed. revised and enlarged (in 2 vols). Dover publications, New York, (1945).
- [32] Russell V. Benson, Euclidean Geometry and convexity, McGraw-Hill, 1966.
- [33] R. Schneider, Convex Bodies The Brunn-Minkowski Theory, Cambridge (1993).
- [34] B. Simon, Convexity An Analytic Viewpoint, Cambridge Tracts in Mathematics, 2011
- [35] F. Toledo, Minimización del primer valor propio del p -Laplaciano de Dirichlet en ciertos clases de dominios, 2012.