



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
MAGÍSTER EN CIENCIAS MENCIÓN FÍSICA

Campo escalar acoplado conformalmente en 4 dimensiones con torsión.

Tesis para optar al grado de
Magíster en Ciencias con mención en Física

por

Perla Soledad Medina Medina

Director de Tesis : Dr. Fernando Izaurieta

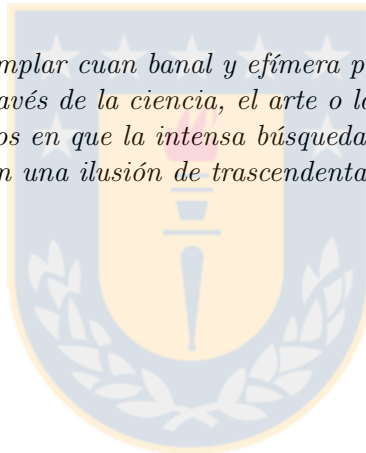
Comisión : Dr. Julio Oliva
Dr. Jorge Zanelli

CONCEPCIÓN • CHILE
Mayo de 2017



Dedicado a mi familia y amigos.

Algunos hombres al contemplar cuan banal y efímera puede ser su existencia, han buscado la inmortalidad a través de la ciencia, el arte o la filosofía. Así muchos han trascendido; y aquellos en que la intensa búsqueda no logró evitar su muerte, seguramente conciliaron una ilusión de trascendentalidad inmensamente bella.

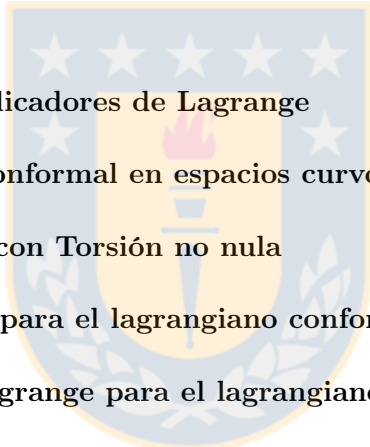


ANÓNIMO

Tabla de contenido

Índice de figuras	vi
Resumen	vii
1. Introducción: Principio de Equivalencia	1
1.1. Principio de Equivalencia	1
1.2. Relatividad General	3
1.3. Relatividad General en el Formalismo de Einstein	4
1.3.1. Formalismo matemático	4
1.3.2. Acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica	6
1.4. Relatividad General en el formalismo de Cartan	7
1.4.1. La variedad y el espacio tangente	7
1.4.2. El vielbein	7
1.4.3. La conexión de Lorentz	8
1.4.4. Tensores invariantes	10
1.4.5. Curvatura y Torsión	10
1.4.6. 4-forma Lagrangiana en el formalismo de primer orden	11
2. Teorías Tenso escalares	13
2.1. Lagrangiano de Horndeski con Torsión	14
2.1.1. El Lagrangeano	16
2.1.2. Variaciones	17
2.1.3. Ecuaciones de campo	20
2.1.4. Volviendo al lenguaje de segundo orden y los multiplicadores de Lagrange	23
2.2. Brans-Dicke generalizado	24
2.2.1. Ecuaciones de campo	25
2.2.2. Postulado Cosmológico	26
2.2.3. Ecuaciones de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	29
2.2.4. Caso de un Fluido Perfecto	30

2.2.5. Volviendo al lenguaje de segundo orden y comparación con las ecuaciones de Brans-Dicke sin torsión	33
3. Teoría conformal	35
3.1. El Lagrangiano Conformal con torsión	38
3.1.1. Construcción del Lagrangiano Conformal con Torsión	39
3.2. Ecs. de campo en el lenguaje de primer orden	42
3.2.1. Variación con respecto al campo ϕ	43
3.2.2. Variación con respecto al campo e	43
3.2.3. Variación con respecto al campo ω	43
3.2.4. Volviendo al lenguaje de segundo orden y los dos caminos no compatibles	44
3.3. Traza del tensor energía-momentum en presencia de Torsión	45
4. Conclusiones	50
A. El operador Σ^a	52
B. Torsión nula y multiplicadores de Lagrange	55
C. Ecuación de Killing conformal en espacios curvos	59
D. Invariancia conforme con Torsión no nula	62
E. Ecuaciones de campo para el lagrangiano conformal	67
F. Multiplicadores de Lagrange para el lagrangiano conformal	71
G. Ecuaciones cosmológicas para el lagrangiano conformal	75
Bibliografía	78



Índice de figuras

1.1. Galileo. <i>Fuente: www.historiaybiografias.com</i>	1
1.2. Principio de Equivalencia. <i>Fuente: www.fantasymundo.com</i>	3
1.3. Transporte paralelo. <i>Fuente: Elaboración propia.</i>	9



Resumen

Esta tesis trata sobre el estudio de teorías de gravedad con campos escalares acoplados no minimalmente en formalismo de primer orden, dando especial énfasis al estudio del lagrangiano conformal. Primero se presenta la teoría gravitacional y su motivación a partir del alma de ésta: El Principio de Equivalencia. Luego, se hace un repaso de Relatividad General estándar (es decir, con el constraint de torsión nula) para luego enfocarse en el estudio de Relatividad General en el formalismo de segundo orden.

Más tarde se presentan las teorías tensoescalares y lo que motiva el estudio de éstas. Asimismo se estudiará el caso más general en este contexto: el lagrangiano de Horndeski, pero ahora en el formalismo de primer orden. Estudiaremos sus ecuaciones de campo y las dificultades que aparecen al recuperar a posteriori el formalismo de segundo orden con torsión nula, debido a una interesante relación entre torsión y campos escalares para acoplamientos no minimales que también será expuesta. Luego se estudiará un caso interesante contenido en el Horndeski: un lagrangiano de Brans-Dicke modificado, cuyas ecuaciones de campo son mucho más manejables que el caso anterior y permiten una mejor comparación con las ecuaciones de campo estándar sin torsión.

Finalmente se hablará sobre teorías conformales, advirtiendo sobre la diferencia entre transformación y simetría conformal en espacios curvos. Además, se revisarán las bondades del estudio del lagrangiano conformal estándar y es aquí donde preguntamos: ¿Puede ser construido un lagrangiano en el formalismo de primer orden tal que sea invariante conformal?. Veremos que la respuesta es sí. Observaremos también que este nuevo lagrangiano conformal no está contenido como un caso particular del Horndeski con torsión, y se discutirán las interesantes consecuencias de considerar términos torsionales explícitos en este caso (lagrangiano conformal con torsión). Para concluir, se analizará la conexión entre nuestro lagrangiano invariante conformal con tensores de energía-momentum sin traza.

Capítulo 1

Introducción: Principio de Equivalencia

En esta sección introduciremos los elementos fundamentales para el posterior estudio de teorías de gravedad en el formalismo de primer orden.

La siguiente discusión está basada y puede ser leída con más detalle en [1], [2], [3], [4].

1.1. Principio de Equivalencia

Los principios básicos de la Relatividad Especial son el Principio de Relatividad, que nos asegura que todos los observadores inerciales son equivalentes para todas las leyes de la física, y el otro principio es la Constancia de la Velocidad de la Luz para todos los observadores.

Recordemos que Galileo, quién según el mito arrojaba pesos de masas pequeñas y grandes desde lo alto de la torre Pisa (en realidad hizo rodar objetos de distintas masas por planos inclinados).

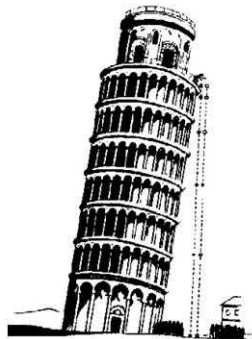


Figura 1.1: Galileo. *Fuente: www.historiaybiografias.com*

Tuvo la gran intuición de que todos cuerpos caerían a la vez si los efectos de roce con el aire podrían despreciarse, aunque en su época no se sabía por qué ocurría esto. No fue sino hasta el descubrimiento de las leyes de gravitación de Newton que se infirió esto significa que la *masa inercial* y *masa gravitacional* son equivalentes.

Así, para un cuerpo tendremos asociadas dos masas, la masa inercial de un cuerpo, m_I , la cual es definida como aquella cantidad que mide la resistencia de un cuerpo a cambiar su estado de movimiento, de acuerdo a la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m_I \vec{a}, \quad (1.1)$$

Por otro lado, se define la masa gravitacional, m_G , de un cuerpo como la cantidad que mide la magnitud de la fuerza que este cuerpo experimenta al estar en una región del espacio con campo gravitacional \vec{g} :

$$\vec{F}_G = -m_G \vec{\nabla} \Phi \quad (1.2)$$

De manera que la aceleración de un cuerpo debido a un campo gravitacional \vec{g} es dado por

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \left(\frac{m_G}{m_I} \right) \vec{g}.$$

de manera que la masa gravitacional es el análogo gravitacional a la carga eléctrica (es decir, es entendida como la *carga gravitacional* del cuerpo. La interacción gravitacional parece (de acuerdo a todas observaciones realizadas hasta hoy) tener la propiedad única que todos los cuerpos aceleran en la misma dirección y con la misma magnitud en un campo gravitacional dado. En general se eligen las unidades de masa tal que $m_I = m_G$.

Esta relación no tiene nada de inocente, de hecho es muy profunda pues nos dice la trayectoria de los cuerpos sometidos (solamente) a la acción de la gravedad es independiente de las propiedades del cuerpo (carga, composición, temperatura, color, etc.) y sólo depende del campo gravitacional en el que se encuentra (determinado por los otros cuerpos en el sistema) y de la posición y velocidad inicial de éste, este principio es conocido como el Principio de Equivalencia Débil (WEP) el cual ha sido avalado experimentalmente desde las primeras observaciones de Galileo, hasta ahora con los más precisos y modernos experimentos. Debido a esta equivalencia si Usted estimado lector estuviese encerrado en una caja sellada (suficientemente pequeña y en un tiempo suficientemente corto), le sería imposible distinguir a través de experimentos mecánicos si está sobre el planeta tierra o en una nave espacial con aceleración constante \vec{g} . Ver figura (1.2)

Acabamos de mencionar un detalle muy importante: esta equivalencia solamente funciona a nivel **local**. Si la caja fuese lo suficientemente grande podemos percibir efectos de marea (es decir, inhomogeneidades del campo gravitacional).

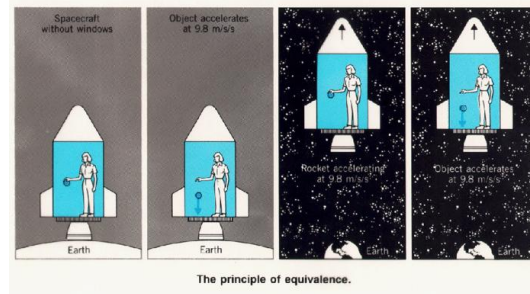


Figura 1.2: Principio de Equivalencia. Fuente: www.fantasymundo.com

1.2. Relatividad General

En la construcción de la teoría de Relatividad General de Einstein, éste asume como ingrediente crucial para su construcción el Principio de Equivalencia Débil:

En una región (espacio-temporal) suficientemente pequeña (donde las in-homogeneidades del campo gravitacional puedan ser despreciadas), y respecto a un Sistema de Referencia en caída libre, las trayectorias de todo (pequeño) cuerpo, libre de fuerzas no-gravitacionales, son líneas rectas con velocidad constante.

Sin embargo, parece bastante poco realista restringirse solamente a experimentos puramente mecánicos. Debido a esto es que existen dos versiones del Principio de Equivalencia, el que mencionamos anteriormente que nos habla sobre la equivalencia de masa inercial con masa gravitacional, llamado Principio de Equivalencia Débil (WEP) y la generalización de éste realizada por Einstein quién postuló que los Sistemas de Referencia (SR) en caída libre son en toda situación, es decir, para todo tipo de fenómeno físico (no solamente mecánico, también por ejemplo, electromagnético), equivalentes a los Sistemas de Referencia Inerciales (SRI's) en ausencia de gravitación; ésta generalización es llamada el Principio de Equivalencia de Einstein (EEP). Donde un SRI es entendido como un sistema de ejes rectos ortogonales respecto a los cuales un cuerpo libre de fuerzas externas se mueve en línea recta con velocidad constante. Como los fenómenos físicos no-gravitacionales conocidos son descritos exitosamente en el marco de la Teoría Especial de la Relatividad, Einstein asumió en su teoría de Relatividad General, que incorpora la gravitación, que es *en los SRLI's en caída libre donde son válidas las leyes conocidas en la teoría de Relatividad Especial*.

Para concluir recordemos que en Relatividad Especial los Sistemas de Referencia Inerciales (SRI) tienen *extensión infinita*; no hay un límite para la extensión de la región del espacio donde las partículas libres de fuerzas se mueven en línea recta a velocidad constante.

En Relatividad General (RG), sólo consideramos Sistemas de Referencia Localmente Inerciales (SRLI) por lo que su extensión es necesariamente finita, porque sólo en regiones suficientemente pequeñas se pueden despreciar los efectos de la gravedad. Así, en Relatividad General no existen SRI **globales**, sólo **locales**, de manera

que no tiene sentido comparar velocidades relativas entre observadores inerciales en caída libre lejanos entre sí, puesto que encontraríamos que acelera uno con respecto del otro (debido a la curvatura espaciotemporal). Con *extensión finita* nos referimos a una región espaciotemporal suficientemente pequeña donde las inhomogeneidades puedan ser despreciadas, y tal que con respecto a un SR en caída libre, las trayectorias de todo (pequeño) cuerpo, libre de fuerzas no-gravitacionales, son líneas rectas con velocidad constante.

Estas ideas corresponden al Principio de Equivalencia de Einstein (EEP) el cual es el corazón y alma de la teoría gravitacional pues nos dice que si el EEP es válido, entonces los efectos de gravedad deben ser equivalentes a los efectos de vivir en un espaciotiempo curvo. Debido a esto es que el Principio de Equivalencia de Einstein es tan poderoso y podemos presentarlo de manera más compacta diciendo que establece que (para más detalles se recomienda revisar [5]):

- El principio de equivalencia débil es válido (WEP).
- El resultado de cualquier experimento local no-gravitacional es independiente del sistema de referencia en caída libre en el que se lleva a cabo.
- El resultado de cualquier experimento local no-gravitacional es independiente de dónde y cuándo se lleva a cabo en el universo (homogeneidad e isotropía a nivel local).

La segunda parte es llamada la invariancia local de Lorentz, y la tercera parte es llamada la invariancia local de posición.

1.3. Relatividad General en el Formalismo de Einstein

1.3.1. Formalismo matemático

Por esto, en la teoría de Einstein se asume que un campo gravitacional general puede ser descrito por un espaciotiempo cuadridimensional curvo (tensor de curvatura no nulo, métrica no constante), geometrizando de esta forma la interacción gravitacional. En Relatividad General es necesario considerar que las ecuaciones que describen algún sistema físico son covariantes bajo transformaciones generales de coordenadas (es decir, válidas con la misma forma en cualquier sistema de coordenadas), y tales que se reducen a las ecuaciones válidas en la teoría de Relatividad Especial en sistemas de coordenadas geodésicas (asociados a SRLI's).

Metricidad y paralelismo

En cuatro dimensiones, el espaciotiempo posee 1 dimension temporal y 3 dimensiones espaciales. Éste es descrito por una variedad pseudo-Riemanniana M dotada de una métrica $g_{\mu\nu}$ con signatura lorentziana. El tensor de rango 2 simétrico, $g_{\mu\nu}$,

codifica toda la dinámica del espacio tiempo. El tensor métrico $g_{\mu\nu}$, proporciona la noción de distancia entre puntos vecinos x^μ y $x^\mu + dx^\mu$:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

De manera que las propiedades relevantes definidas sobre la variedad pueden ser construidas a partir de la métrica.

Es importante hacer una diferencia entre las características métrica y afín del espaciotiempo. La propiedad afín (regla) define la noción de transporte paralelo, mientras que la noción de distancia y de cómo son medidas las distancias en la variedad, son descritas por la propiedad métrica (compás).

En geometría diferencial, nuestro concepto de paralelismo está codificado por la conexión afín: $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$. Ahora bien, puesto que sabemos que la derivada parcial de un tensor no define un nuevo tensor bajo transformaciones generales de coordenadas (TGC's) (esto es debido a que resta vectores definidos en distintos puntos, lo que implica que si las derivadas de un vector se anulan en un Sistema Coordinado entonces éstas no se anulan necesariamente en otro). Por lo que necesitamos una nueva definición de derivada tal que permita medir el cambio de un tensor al ser transportado paralelamente; a partir de una conexión afín y de un campo vectorial (covariante) es posible definir la siguiente una combinación, que sí es un tensor bajo TGC's:

$$\nabla_\mu A_\nu \doteq \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha A_\alpha. \quad (1.3)$$

donde ∇_μ es llamada derivada covariante. Conviene notar que Γ está definida sobre nuestra variedad y puede ser concebida, en general, como un objeto geométrico no necesariamente relacionado con una métrica.

En Relatividad General estándar, Einstein asume el mínimo número de campos dinámicos, por lo que en su teoría los únicos grados de libertad son los grados de libertad métricos, para esto es necesario imponer un constraint. El cual en términos matemáticos es expresado en términos del tensor de Torsión:

$$T_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha. \quad (1.4)$$

La conexión afín que satisface esto es conocida como la conexión o símbolos de Christoffel $\overset{\circ}{\Gamma}{}^\lambda_{\mu\nu}$:

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$$

Donde observamos que el paralelismo está codificado a través de la métrica $g_{\mu\nu}$. Donde se usa el círculo $^\circ$ para denotar los términos sin torsión.

Otro objeto de estudio interesante es el conmutador de dos derivadas covariantes actuando de un vector arbitrario V^ρ :

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} - T^\lambda_{\mu\nu} \nabla_\lambda V^\rho. \quad (1.5)$$

Donde $T^\lambda_{\mu\nu}$ corresponde al tensor de Torsión y $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ es conocido como el tensor de curvatura de Riemann, el cual está dado por

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (1.6)$$

Además se definen,

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\alpha_{\mu\alpha\nu}, \quad (1.7)$$

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (1.8)$$

las cuales son conocidos como el tensor de Ricci y la curvatura escalar de Ricci, respectivamente.

1.3.2. Acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica

Debido a que no es posible construir un escalar invariante con las estructuras fundamentales: $g_{\mu\nu}, \Gamma^\alpha_{\mu\nu}$. Para la construcción de un lagrangiano invariante que entregara ecuaciones de segundo orden, Hilbert eligió la curvatura escalar de Ricci R , debido a que es la única lineal en la segunda derivada de $g_{\mu\nu}$. De manera que la acción de Einstein-Hilbert en 4-dimensiones con constante cosmológica corresponde a

$$S_{EH}^{(4)} = \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (1.9)$$

Tal que su variación conduce a las ecuaciones de campo (en el vacío)

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (1.10)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es conocido como el tensor de Einstein y es definido como sigue

$$G_{\mu\nu} = \mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathring{R}. \quad (1.11)$$

1.4. Relatividad General en el formalismo de Cartan

1.4.1. La variedad y el espacio tangente

En términos matemáticos el principio de equivalencia se traduce en que el espaciotiempo está dotado de una variedad D -dimensional M suave, diferenciable y con singularidades aisladas, tal que en cada punto de la variedad $x \in M$ puedo definir un espacio tangente D -dimensional T_x de signatura Lorentziana $(-, +, \dots, +)$. La relación de esto con el principio de equivalencia es que justamente al pasar de un abierto en M a un abierto en T_x se hace un cambio de sistema de referencia a la de un observador en caída libre. Este isomorfismo es justamente una manera de relacionar los tensores en el espacio en M y en T_x , y viceversa. Este isomorfismo es representado por un mapeo lineal (biyectivo) e , llamado el vielbein.

1.4.2. El vielbein

Este isomorfismo es el alma de la teoría ya que nos asegura la validez del principio de equivalencia, por ello es sumamente importante y el nombre que le otorgamos dependerá de la dimensión en que estemos trabajando, por ejemplo, en D -dimensiones (para un número arbitrario D), son llamados *vielbeine*, del alemán viel=muchas y bein(e)=piernas, es decir, muchas patas. En 1-dimensión es llamado *einbein*, en 2-dimensiones *zweibeine*, en 3-dimensiones *dreibeine*, en 4-dimensiones *vierbeine*. Este isomorfismo tiene la misma cantidad de *patas* tanto en la base ortonormal (la cuál estará representada por índices latinos) como en la base coordenada (con índices griegos).

Este isomorfismo es justo un cambio de coordenadas espaciotemporales entre M y la colección de espacios tangentes en cada punto de la variedad T_x , así es posible construirlo como una transformación de coordenadas entre un abierto en M con coordenadas locales x^μ , y un marco ortonormal en el espacio de Minkowski T_x con coordenadas z^a . Con matriz Jacobiana dada por,

$$\frac{\partial z^a}{\partial x^\mu} = e^a{}_\mu(x), \quad (1.12)$$

la cual es suficiente para definir una relación uno a uno entre tensores en cada espacio.

Consideremos ahora la separación de coordenadas dx^μ entre dos puntos infinitesimalmente cercanos sobre M , entonces su correspondiente separación en T_x es

$$dz^a = e^a{}_\mu dx^\mu.$$

Así, la longitud de arco en T_x será $ds^2 = \eta_{ab} dz^a dz^b$, la cual induce una métrica sobre M , ya que permite ser expresada de la forma

$$ds^2 = \eta_{ab} e^a_{\mu}(x) e^b_{\nu}(x) dx^{\mu} \wedge dx^{\nu},$$

donde la métrica en M es definida como sigue,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a_{\mu}(x) e^b_{\nu}(x). \quad (1.13)$$

Esto además implica que,

$$\eta^{ab} = g^{\mu\nu} e^a_{\mu} e^b_{\nu}, \quad (1.14)$$

donde $g^{\mu\nu}$ es el inverso de la métrica $g_{\mu\nu}$, y η^{ab} es el inverso de η_{ab} . Multipliquemos a ambos lados de (1.14) por $\eta_{bc} e^c_{\lambda}$ con el objetivo de mostrar que ambos lados son equivalentes,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \eta^{ab} \eta_{bc} e^c_{\lambda} &= g^{\mu\nu} e^a_{\mu} e^b_{\nu} \eta_{bc} e^c_{\lambda} \\ \delta^a_c e^c_{\lambda} &= g^{\mu\nu} e^a_{\mu} g_{\nu\lambda} \\ e^a_{\lambda} &= e^a_{\lambda}. \end{aligned}$$

Por otro lado, si observamos la ec. (1.13), vemos que e^a_{μ} determina la métrica, por consiguiente, el vielbein **codifica** toda la información de metricidad y de tamaño sobre la variedad. Sin embargo, el inverso no es cierto: dada una métrica $g_{\mu\nu}$, existen infinitas elecciones del vielbein que reproducen la misma métrica, por ejemplo, consideremos el caso en $D = 4$ y la simetría de la métrica ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$), vemos que la métrica posee 10 componentes independientes. Por otro lado, tenemos 16 incógnitas, ya que los a y μ pueden tomar cuatros valores, por lo que hay cierta libertad en la elección del vielbeine, que es justamente la diferencia entre estos valores ($16 - 10 = 6$), el cual corresponde al número independiente de rotaciones en 4-dimensiones. Sin embargo, diferentes elecciones nos llevan a la misma métrica; éstas corresponden a las diferentes elecciones del marco local ortonormal que pueden ser usados como base para el espacio de vectores tangentes en T_x . En efecto, es posible rotar el vielbein por una transformación de Lorentz y esto debería ser indetectable desde el punto de vista de la variedad M . No obstante, recordemos que este isomorfismo es válido localmente, es decir, para un laboratorio **suficientemente pequeño** y para un lapso de tiempo de los experimentos **suficientemente corto**, en efecto, una transformación de Poincaré sí sería detectable, ya que estaríamos realizando transformaciones que se alejan de la vecindad-abierto isomorfo a \mathbb{R}^D - y, por lo tanto, perdiendo localidad.

1.4.3. La conexión de Lorentz

Sea $u^a(x) \in T_x$ un vector de Lorentz, es decir, transforma como $u^a \rightarrow \Lambda^a_b u^b$. Sin embargo, la derivada de sus componentes no cambia como un vector de Lorentz:

$$du'^a = \Lambda^a_b du^b + (d\Lambda^a_b) u^b.$$

Donde $d\Lambda^a_b \neq 0$, puesto que Relatividad General es una teoría sin observadores privilegiados. Necesitamos una derivada que sí sea invariante bajo el grupo de Lorentz.

Transportemos paralelamente un vector $u^a(x+dx)$ desde T_{x+dx} al espacio tangente T_x , ver figura (1.3). Este transporte paralelo del campo vectorial $u^a(x+dx)$ desde $x+dx$ a x , es un vector $u^a_{||}(x+dx)$, definido como

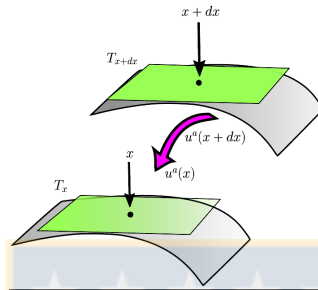


Figura 1.3: Transporte paralelo. Fuente: Elaboración propia.

$$u^a_{||} = u^a(x) + \omega^a_{b\mu}(x) u^b(x) dx^\mu, \quad (1.15)$$

$$= u^a(x) + dx^\mu \left[\partial_\mu u^a(x) + \omega^a_{b\mu}(x) u^b(x) \right], \quad (1.16)$$

$$\doteq u^a(x) + dx^\mu D_\mu u^a(x). \quad (1.17)$$

Donde la 1-forma $\omega^a_{b\mu}$ define el transporte paralelo de tensores de Lorentz en el espacio tangente entre T_x y T_{x+dx} . Y definimos la derivada covariante como

$$D_\mu u^a(x) = \partial_\mu u^a(x) + \omega^a_{b\mu}(x) u^b(x). \quad (1.18)$$

En consecuencia, la derivada covariante D_μ mide el cambio en un tensor producido por el transporte paralelo entre dos puntos vecinos x y $x+dx$.

Debido a que la derivada covariante transforma como un vector bajo el grupo de Lorentz,

$$Du^a(x) = \Lambda^a_b Du^b(x). \quad (1.19)$$

Se requiere que $\omega^a_{b\mu}(x)$ transforme como

$$\omega^a_{b\mu}(x) \rightarrow \omega'^a_{b\mu}(x) = \Lambda^a_c(x) \Lambda_b^d(x) \omega^c_{d\mu}(x) + \Lambda^a_c(x) \partial \Lambda_b^c(x). \quad (1.20)$$

También podemos evitar el índice coordinado, definiendo $\omega^a_b = \omega^a_{b\mu} dx^\mu$.

Esto nos dice que $\omega^a_{b\mu}$ claramente transforma como conexión. En efecto, esta cantidad nos indica cómo el concepto de transporte paralelo cambia en cada punto de la variedad.

1.4.4. Tensores invariantes

El grupo $SO(D - 1, 1)$ tiene solamente dos tensores invariantes: la métrica de Minkowski, η_{ab} y el tensor de Levi-Civita totalmente antisimétrico, $\epsilon_{a_1 a_2 \dots a_D}$. Estos tensores están definidos por la estructura algebraica del grupo de Lorentz y por lo tanto, son los mismo en cada espacio tangente. Por lo tanto, éstos deben ser constantes a través de la variedad $d\eta_{ab} = 0 = d\epsilon_{a_1 a_2 \dots a_D}$. Además, como son invariantes deben también ser constantes covariantemente,

$$\begin{aligned} d\eta_{ab} &= D\eta_{ab} = 0 \\ d\epsilon_{a_1 a_2 \dots a_D} &= D\epsilon_{a_1 a_2 \dots a_D} = 0 \end{aligned}$$

donde

$$D\eta_{ab} = d\eta_{ab} - \omega^c_b \eta_{ac} - \omega^c_a \eta_{cb}.$$

Esto implica que la conexión de spin satisface las siguientes identidades

$$\begin{aligned} \eta_{ac} \omega^c_b &= -\eta_{cb} \omega^c_a, & (1.21) \\ \epsilon_{b_1 a_2 \dots a_D} \omega^{b_1}_{a_1} + \epsilon_{a_1 b_2 \dots a_D} \omega^{b_2}_{a_1} + \dots + \epsilon_{a_1 a_2 \dots b_D} \omega^{b_D}_{a_1} &= 0. \end{aligned}$$

Notemos que la relación (1.21) restringe a la conexión a ser antisimétrica en sus índices de Lorentz, $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$.

1.4.5. Curvatura y Torsión

Hasta ahora hemos introducido dos 1-formas,

$$e^a, \tag{1.22}$$

$$\omega^{ab}. \tag{1.23}$$

El vielbein y la conexión de Lorentz, respectivamente. Donde e^a establece el isomorfismo entre la variedad M y el espacio tangente plano T_x en cada punto $x \in M$; y ω^a_b está relacionado con el transporte paralelo y la derivada covariante $D = D_\mu dx^\mu$, donde esta última exigía -justamente para ser covariante-, que ω^a_b transforme como

$$\omega^a_b \rightarrow \omega'^a_b = \omega'^a_b = \Lambda^a_c (\omega^c_d + \delta^c_d) \Lambda_b^d. \tag{1.24}$$

De esta manera, tanto el vielbein: el cual está relacionado con las propiedades métricas; así como la conexión de Lorentz: que nos habla de propiedades afines; son

características independientes. Se podría exigir que una propiedad estuviese relacionada con la otra, como lo hace Riemannian. Pero si no se hace ésto, ambos son objetos fundamentales que cumplen distintos roles y no tienen por qué estar relacionados entre sí. Es decir, la 1-forma que hace el isomorfismo entre el espacio tangente y el espacio de la geometría local no tiene por qué depender de la 1-forma responsable del transporte paralelo sobre la superficie al pasar de un espacio tangente a otro. Ahora estudiaremos qué otros objetos geométricos interesantes pueden construirse en este formalismo, llamado formalismo de primer orden.

Se define la **2-forma torsión** T^a como la derivada covariante de la 1-forma vielbein,

$$T^a \equiv De^a = de^a + \omega^a_b e^b, \quad (1.25)$$

la cual debido a la definición de derivada covariante, involucra tanto al vielbein como a la conexión de spin.

Mientras que la derivada exterior covariante de la 2-forma torsión corresponde a

$$DT^a = De^a = d(De^a) + \omega^a_c De^c.$$

Después de un simple cálculo se muestra que

$$DT^a = (d\omega^a_b + \omega^a_c \omega^c_b) e^b, \quad (1.26)$$

donde el factor entre paréntesis es definido como la **2-forma curvatura**

$$R^a_b \equiv d\omega^a_b + \omega^a_c \omega^c_b. \quad (1.27)$$

Así, podemos reescribir (1.26) como

$$DT^a = R^a_b e^b.$$

Las ecuaciones (1.25) y (1.27) definen la 2-forma curvatura y la 2-forma torsión, respectivamente, son llamadas ecuaciones de estructura debido a que éstas describen la estructura geométrica de la variedad M . Donde estas 2-formas satisfacen las siguientes *identidades de Bianchi*,

$$\begin{aligned} DT^a &= R^a_b e^b, \\ DR^a_b &= 0. \end{aligned}$$

1.4.6. 4-forma Lagrangiana en el formalismo de primer orden

Utilizando los tensores invariantes de Lorentz η_{ab} y ϵ_{abcd} y las formas: $e^a, \omega^{ab}, R^{ab}, T^a$. La 4-forma lagrangiana para la geometría que no incluye términos de borde es: (con $\kappa_4 = 8\pi G$ y $c =$ velocidad de la luz)

$$\mathcal{L}_G^{(4)} = \frac{1}{c\kappa_4} \left(\frac{1}{4} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d - \frac{1}{4!} \Lambda \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \right). \quad (1.28)$$

Si además consideramos un lagrangiano de materia tal que

$$\delta_e \mathcal{L}_M = -\frac{1}{c} * \mathcal{T}_d \wedge \delta e^d, \quad (1.29)$$

$$\delta_\omega \mathcal{L}_M = \frac{1}{2c} \delta \omega^{ab} \wedge * \sigma_{ab}. \quad (1.30)$$

De manera que la variación total $\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M$, con respecto al vielbein escrita en el lenguaje coordenado corresponde a la famosa ecuación de campo de Einstein-Hilbert con constante cosmológica,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa_4 \mathcal{T}_{\mu\nu}, \quad (1.31)$$

mientras que su variación con respecto a la conexión de Lorentz escrita en el lenguaje coordenado, toma la forma

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} = \kappa_4 \left(\sigma^\lambda{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\sigma^\gamma{}_{\gamma\mu} \delta_\nu^\lambda - \sigma^\gamma{}_{\gamma\nu} \delta_\mu^\lambda \right) \right). \quad (1.32)$$

Donde $T^\lambda{}_{\mu\nu}$ es la torsión en el lenguaje coordenado. Esta última ecuación nos dice que la torsión solamente puede ser no nula en presencia de materia. Vemos que estas ecuaciones son tal que si imponemos torsión nula a posteriori en las ecuaciones de campo, recuperamos el caso de Relatividad General estándar.

Capítulo 2

Teorías Tenso escalares

Las teorías tenso-escalares de gravedad son una de las teorías alternativas mejor estudiadas que existen en la literatura [6], [7]. Frecuentemente se usan como la manera estándar en la que se modelan las desviaciones de la Relatividad General, y son de particular interés, debido a la estructura relativamente simple de sus ecuaciones de campo lo que permite un cálculo exacto y soluciones analíticas que se encuentran en una serie de situaciones físicamente interesantes. La existencia de un campo gravitacional adicional en el sector gravitacional puede tener importantes consecuencias en Relatividad General, en este contexto el prototipo de escenario es la teoría de Brans-Dicke [8]. Cabe destacar que si bien el escenario más simple a considerar es la adición de un campo escalar extra ϕ , existen teorías alternativas a gravedad estudiadas en [9].

Entre las diversas teorías tenso escalares que se han estudiado durante años, la teoría de Horndeski es la teoría más general en 4-dimensiones que entrega ecuaciones de campo de segundo orden [10]. En este capítulo se estudiará el lagrangiano de Horndeski y sus ecuaciones de campo en el formalismo de primer orden. La teoría de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble es en muchos casos equivalente a Relatividad General pero falla cuando al menos un campo de materia tiene espín intrínseco. La teoría ha sido estudiada en [11], y más recientemente en [12]. Nosotros estudiaremos la relación entre campos escalares y torsión para acoplamientos no minimales, y una manera de recuperar las ecuaciones de Relatividad General en este contexto.

En la segunda parte de este capítulo, tendremos el mismo interés de estudio, pero ahora para un Brans-Dicke modificado, que corresponderá a un caso particular del lagrangiano de Horndeski con torsión. Este segundo trabajo ha sido motivado principalmente por el paper [13], al cual desembocamos para ciertas elecciones especiales en el lagrangiano.

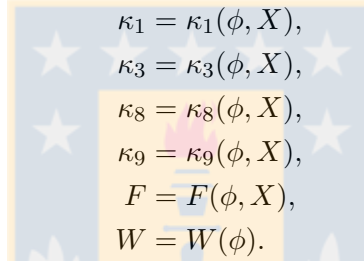
Sabemos que el lagrangiano de Horndeski es el más general en 4-dimensiones para gravedad acoplado a un campo escalar que genere ecuaciones de segundo orden [10]. Está dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_H = & \delta_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta\gamma} \left[\kappa_1(\phi, X) \nabla^\mu \nabla_\alpha \phi R_{\beta\gamma}{}^{\nu\sigma} + \frac{2}{3} \frac{\partial \kappa_1(\phi, X)}{\partial X} \nabla^\mu \nabla_\alpha \phi \nabla^\nu \nabla_\beta \phi \nabla_\gamma \phi \right. \\
& + \kappa_3(\phi, X) \nabla_\alpha \phi \nabla^\mu \phi R_{\beta\gamma}{}^{\nu\sigma} + 2 \frac{\partial \kappa_3(\phi, X)}{\partial X} \nabla_\alpha \phi \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \nabla_\beta \phi \nabla^\sigma \nabla_\gamma \phi \left. \right] \\
& + \delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} [(F(\phi, X) + 2W(\phi)) R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} \\
& + 2 \frac{\partial F(\phi, X)}{\partial X} \nabla^\mu \nabla_\alpha \phi \nabla^\nu \nabla_\beta \phi + 2\kappa_8(\phi, X) \nabla_\alpha \phi \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \nabla_\beta \phi] \\
& - 6 \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (F(\phi, X) + 2W(\phi) - X\kappa_8(\phi, X)) \right] \nabla_\mu \nabla^\mu \phi + \kappa_9(\phi, X).
\end{aligned}$$

Con

$$X = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi,$$

y



$$\begin{aligned}
& \kappa_1 = \kappa_1(\phi, X), \\
& \kappa_3 = \kappa_3(\phi, X), \\
& \kappa_8 = \kappa_8(\phi, X), \\
& \kappa_9 = \kappa_9(\phi, X), \\
& F = F(\phi, X), \\
& W = W(\phi).
\end{aligned}$$

Si se cumple el constraint

$$\frac{\partial F}{\partial X} = 2 \left(\kappa_3 + 2X \frac{\partial \kappa_3}{\partial X} - \frac{\partial \kappa_1}{\partial \phi} \right).$$

2.1. Lagrangiano de Horndeski con Torsión

En esta sección estudiaremos el lagrangiano de Horndeski y sus ecuaciones de campo sin imponer el constraint $T = 0$. Para esto introduciremos un nuevo operador que mapea p -formas en $(p - q)$ -formas

$$\sum_{a_1 \dots a_q} : \Omega^p(M^{(d)}) \rightarrow \Omega^{p-q}(M^{(d)})$$

y está definido como

$$\sum_{a_1 \dots a_q} = (-1)^{(d-p)(p-q)+\eta_-} * e_{a_1} \wedge \dots \wedge e_{a_q} \wedge *$$

En términos de componentes, su acción sobre una p -forma

$$\Phi = \frac{1}{p!} \Phi_{n_1 \dots n_p} e^{n_1} \wedge \dots \wedge e^{n_p}$$

queda descrita a través de

$$\sum_{a_1 \dots a_q} \Phi = (-1)^{(d-p)(p-q)+\eta_-} * (e_{a_1} \wedge \dots \wedge e_{a_q} \wedge * \Phi) * \Phi = \frac{1}{p!(d-p)!} \Phi^{n_1 \dots n_p} \epsilon_{n_1 \dots n_p l_1 \dots l_{p-p}} e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_{d-p}}.$$

El más importante de todos es el caso $q = 1$,

$$\begin{aligned} \sum_a &= (-1)^{d(p-1)-p(p-1)+\eta_-} * e_a \wedge *, \\ &= (-1)^{d(p-1)+\eta_-} * e_a \wedge * \end{aligned}$$

Ahora, si además consideramos una variedad 4-dimensional

$$\sum_a = - * e_a \wedge *$$

La demostración de cómo actúa este operador sobre una p -forma se encuentra detallada en el apéndice A.

Luego, utilizamos este operador para definir en función de la 0-forma escalar ϕ , la 0-forma vector de Lorentz

$$Z^a = \sum_a^a d\phi$$

Por supuesto, en un espaciotiempo ordinario con signatura de Minkowski $(-, +, +, +)$ tenemos $Z^a = (-1)^{\eta_-} * (e^a * d\phi) = - * (e^a * d\phi)$.

En términos de ella definimos

$$X = -\frac{1}{2} Z^a Z_a,$$

y las 1-formas de Lorentz

$$\begin{aligned} \pi^a &= DZ^a, \\ \theta^a &= d\phi Z^a. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por definición se cumplen algunas propiedades importantes

1. $e^a Z_a = d\phi$
2. $\theta^a \wedge \theta^b = e^a \wedge \theta_b = 0$
3. $D\theta^a = \pi^a \wedge d\phi$
4. $\sum^a \theta^b = Z^a Z^b$
5. $X = -\frac{1}{2} \sum_a \theta^a$
6. $X = -\frac{1}{2} (-1)^{\eta_-} * (d\phi \wedge * d\phi)$
7. $\sum_a dX = -\frac{1}{2} \sum_a d \sum_b \theta^b$

Estas definiciones también nos entregan importantes propiedades concernientes a las derivadas de funciones del tipo $f = f(\phi, X)$. Como

$$\frac{\partial X}{\partial Z^a} = -Z_a,$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial Z^a} &= \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial Z^a} \\ &= -Z^a \frac{\partial f}{\partial X} \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial X} &= \frac{Z^a}{2X} \frac{\partial f}{\partial Z^a}. \end{aligned}$$

Dado que $dX = -Z_a \pi^a$, se tiene que la derivada exterior de f puede escribirse de varias formas equivalentes

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial f}{\partial X} dX, \\ &= \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi - Z_a \frac{\partial f}{\partial X} \pi^a, \\ &= \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial f}{\partial Z^a} \pi^a. \end{aligned}$$

2.1.1. El Lagrangeano

En términos de las nuevas variables que hemos definido, el lagrangiano de Horndeski en el lenguaje de formas diferenciales está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H^{(4)}(\phi, e, w) &= 2\kappa_1 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge \pi^d + \frac{2}{3} \frac{\partial \kappa_1}{\partial X} \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge \pi^b \wedge \pi^c \wedge e^d + 2\kappa_3 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge \theta^d \\ &+ 2 \frac{\partial \kappa_3}{\partial X} \epsilon_{abcd} \theta^a \wedge \pi^b \wedge \pi^c \wedge e^d + (F + 2W) \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + \frac{\partial F}{\partial X} \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge \pi^b \wedge e^c \wedge e^d \\ &+ \kappa_8 \epsilon_{abcd} \theta^a \wedge \pi^b \wedge e^c \wedge e^d - \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (F + 2W) - X \kappa_8 \right] \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\ &+ \kappa_9 \frac{1}{4!} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \end{aligned}$$

donde las funciones arbitrarias ($i = 1, 3, 8, 9$)

$$\kappa_i = \kappa_i(\phi, X), \quad (2.1)$$

$$F = F(\phi, X), \quad (2.2)$$

$$W = W(\phi, X), \quad (2.3)$$

$$(2.4)$$

deben satisfacer el constraint de Horndeski

$$\mathcal{C}(\phi, X) = \frac{\partial F}{\partial X} - 2 \left(\kappa_3 + 2X \frac{\partial \kappa_3}{\partial X} - \frac{\partial \kappa_1}{\partial \phi} \right) = 0,$$

con

$$X = \frac{1}{2} Z^a Z_a. \quad (2.5)$$

Es importante mencionar que el teorema de Horndeski [10] establece que cuando se impone el constraint $T^a = 0$, se puede asegurar que las ecuaciones de campo serán de segundo orden. En efecto, cuando no se impone el constraint de torsión nula el teorema de Horndeski ya no es válido. En este trabajo no se pretende generalizar el teorema de Horndeski para el caso de torsión no nula. De hecho, es fácil ver que si trabajamos con torsión no nula, lo más recomendable sería incorporar términos con torsión explícita en el lagrangiano y no solamente pasar el lagrangiano de Horndeski al formalismo de primer orden. Por lo tanto, encontrar el lagrangiano más general en el formalismo de primer orden y que además entregue ecuaciones de segundo orden no será estudiado en esta tesis.

2.1.2. Variaciones

Debido a que podemos escribir Z^a en términos del operador Σ^a como

$$Z^a = \Sigma^a d\phi, \quad (2.6)$$

entonces $Z^a = Z^a(e, \partial\phi)$. Esto significa que las variaciones en ϕ y en e^a inducen una variación en Z^a .

Variaciones δZ^a y $\delta\phi$

De (2.6) tenemos que

$$\begin{aligned} \delta_\phi Z^a &= \delta_\phi \Sigma^a d\phi \\ &= \Sigma^a d\delta\phi. \end{aligned}$$

Consideremos una d-forma \mathcal{H}_a tal que no contenga ninguna dependencia implícita de los campos

$$\mathcal{H}_a \delta_\phi Z^a = \mathcal{H}_a \Sigma^a d\delta\phi. \quad (2.7)$$

Ésto nos permitirá variar un término del lagrangiano con dependencia implícita y explícita de manera independiente (por ejemplo, para un término tipo $X \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d$, su variación corresponderá a $-Z_a \delta Z^a \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d$ y se identifica para este caso $\mathcal{H}_a = -Z_a \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d$).

Ahora bien, usando la propiedad de Σ :

$$\alpha^{(d)} \wedge \Sigma_{a_1 \dots a_q} \beta^{(q)} = \beta^{(q)} \wedge \Sigma_{a_1 \dots a_q} \alpha^{(d)},$$

para el caso $q = 1$, y aplicando esta propiedad en (2.7) vemos que podemos reescribirla como

$$\mathcal{H}_a \delta_\phi Z^a = d\delta\phi \wedge \Sigma^a \mathcal{H}_a.$$

Luego integramos por parte, obteniendo

$$d(\delta\phi \Sigma^a \mathcal{H}_a) = d\delta\phi \wedge \Sigma^a \mathcal{H}_a + \delta\phi d(\Sigma^a \mathcal{H}_a),$$

con lo que finalmente tenemos

$$\mathcal{H}_a \delta_\phi Z^a = -\delta\phi d(\Sigma^a \mathcal{H}_a) + d(\delta\phi \Sigma^a \mathcal{H}_a).$$

Y módulo términos de borde,

$$\mathcal{H}_a \delta_\phi Z^a = -\delta\phi d(\Sigma^a \mathcal{H}_a).$$

Variaciones δZ^a y δe^a

Habíamos definido

$$\begin{aligned} Z^a &= e^a_\mu \partial^\mu \phi, \\ \pi^a &= DZ^a, \\ \theta^a &= d\phi Z^a, \\ X &= -\frac{1}{2} Z^a Z_a. \end{aligned}$$

Vemos que estos términos nos dificultan el cálculo cuando deseamos variar con respecto al vielbein.

Con el fin de hacer un tratamiento análogo al descrito anteriormente, definimos una 1-forma $h^a = h^a_b e^b$ tal que

$$\frac{1}{2} h^a = \delta e^a.$$

De manera que,

$$\delta e^a_\mu = \frac{1}{2} h^a_b e^b_\mu.$$

Así,

$$\begin{aligned}
e_a^\mu e^b_\mu &= \delta_a^b \\
\Rightarrow (\delta e_a^\mu) e^b_\mu + e_a^\mu (\delta e^b_\mu) &= 0 \\
\Rightarrow (\delta e_a^\mu) e^b_\mu + e_a^\mu \frac{1}{2} h^b_c e^c_\mu &= 0 \\
\Rightarrow (\delta e_a^\mu) e^b_\mu + \delta_a^c \frac{1}{2} h^b_c &= 0 / e_b^\nu \\
\Rightarrow \delta e_a^\nu + \frac{1}{2} h^b_a e_b^\nu &= 0 \\
\Rightarrow \delta e_a^\nu &= -\frac{1}{2} h^b_a e_b^\nu.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\delta_e Z_a &= \delta e_a^\mu \partial_\mu \phi \\
&= -\frac{1}{2} h^b_a e_b^\mu \partial_\mu \phi \\
&= -\frac{1}{2} h^b_a Z_b.
\end{aligned}$$

Y como

$$\delta e^b = \frac{1}{2} h^b_a e^a,$$

podemos escribirlo en función del operador Σ^a como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} h^b_a e^a &= \delta e^b \\
\Rightarrow \frac{1}{2} h^b_a &= \Sigma_a \delta e^b.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\delta_e Z_a &= -\Sigma_a \delta e^b Z_b \\
&= -Z_b \Sigma_a \delta e^b.
\end{aligned}$$

Así, si consideramos la d -forma \mathcal{H}^a

$$\mathcal{H}^a \delta_e Z_a = -\mathcal{H}^a Z_b \Sigma_a \delta e^b,$$

y usando la propiedad

$$\alpha^{(d)} \wedge \Sigma_{a_1 \dots a_q} \beta^{(q)} = \beta^{(q)} \wedge \Sigma_{a_1 \dots a_q} \alpha^{(d)},$$

por consiguiente podemos escribir

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^a \delta_e Z_a &= -\delta e^b \wedge Z_b \Sigma_a \mathcal{H}^a, \\
&= \Sigma_a (\mathcal{H}^a) \wedge Z_b \delta e^b.
\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que dada una d -forma \mathcal{H}_a se cumplen las relaciones

$$\mathcal{H}_a \delta_\phi Z^a = -\delta\phi d(\Sigma^a \mathcal{H}_a), \quad (2.8)$$

$$\mathcal{H}_a \delta_e Z^a = \Sigma^a(\mathcal{H}_a) Z_d \wedge \delta e. \quad (2.9)$$

En definitiva, tendremos que al variar el lagrangiano de Horndeski con respecto a ϕ y e^a , éste puede variar directamente por el cambio explícito en ϕ y e^a , o puede variar a través de la dependencia en Z^a con $\delta_\phi Z^a$ ó $\delta_e Z^a$.

Y por supuesto, tenemos que variar de las 1-formas π^a y θ^a a través de ésta dependencia como sigue

$$\delta_Z \pi^a = D\delta Z^a, \quad (2.10)$$

$$\delta_Z \theta^a = d\phi \delta Z^a. \quad (2.11)$$

2.1.3. Ecuaciones de campo

A continuación se presentan las ecuaciones de campo en el formalismo de primer orden, que resultan de variar con respecto a los campos independientes de la teoría ω^{ab} , e^a , y ϕ , de acuerdo al método introducido en la sección [citar sección]. Las variaciones detalladas son muy tediosas y extensas para mostrar todo el cálculo explícito en esta tesis, debido a esto solamente nos enfocamos en explicar el método utilizado para calcularlas y la ventaja de usar tal método al momento de lidiar con tantos duales de Hodge $*$.

Primero veamos la variación con respecto a la conexión de Lorentz, la cual produce las ecuaciones de campo $\mathcal{E}_{ab} = 0$, donde \mathcal{E}_{ab} es una 3-forma dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ab} = & -\epsilon_{abcd} T^c \wedge \left[\kappa_1 \pi^d + \kappa_3 \theta^d + (F + 2W) e^d \right] + \\ & + \epsilon_{abcd} e^c \wedge \left[d\kappa_1 \wedge \pi^d + \kappa_1 R^d_e Z^e + d\kappa_3 \wedge \theta^d + \right. \\ & \left. - \kappa_3 d\phi \wedge \pi^d + \frac{1}{2} d(F + 2W) \wedge e^d \right] + \\ & - \frac{1}{2} (Z_a \epsilon_{bcde} - Z_b \epsilon_{acde}) \left[\kappa_1 R^{cd} + \right. \\ & \left. + \pi^c \wedge \left(\frac{\partial \kappa_1}{\partial X} \pi^d + 2 \frac{\partial \kappa_3}{\partial X} \theta^d + \frac{\partial F}{\partial X} e^d \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\kappa_8 \theta^c - \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (F + 2W) - X \kappa_8 \right] e^c \right) \wedge e^d \right] \wedge e^e \end{aligned} \quad (2.12)$$

Las ecuaciones de campo obtenidas con respecto al vielbein y el campo escalar son respectivamente

$$\mathcal{E}_a = E_a + \Sigma^b (\mathcal{S}_b + \mathcal{T}_b + \mathcal{U}_b) Z_a = 0, \quad (2.13)$$

$$\mathcal{E} = E + \mathcal{Z} - d\Sigma^b (\mathcal{S}_b + \mathcal{T}_b + \mathcal{U}_b) = 0, \quad (2.14)$$

donde

$$\begin{aligned} E_d = \epsilon_{abcd} & \left(2\kappa_1 R^{ab} \wedge \pi^c + \frac{2}{3} \frac{\partial \kappa_1}{\partial X} \pi^a \wedge \pi^b \wedge \pi^c + \right. \\ & + 2\kappa_3 R^{ab} \wedge \theta^c + 2 \frac{\partial \kappa_3}{\partial X} \theta^a \wedge \pi^b \wedge \pi^c + \\ & + 2(F + 2W) R^{ab} \wedge e^c + 2 \frac{\partial F}{\partial X} \pi^a \wedge \pi^b \wedge e^c + \\ & + 2\kappa_8 \theta^a \wedge \pi^b \wedge e^c + \frac{1}{3!} \kappa_9 e^a \wedge e^b \wedge e^c + \\ & \left. - 3 \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (F + 2W) - X \kappa_8 \right] \pi^a \wedge e^b \wedge e^c \right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} E = \epsilon_{abcd} & \left[2 \left(\frac{\partial \kappa_1}{\partial \phi} - \kappa_3 \right) R^{ab} \wedge e^c \wedge \pi^d + \right. \\ & + 2 \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 \kappa_1}{\partial \phi \partial X} - \frac{\partial \kappa_3}{\partial X} \right) \pi^a \wedge \pi^b \wedge \pi^c \wedge e^d + \\ & + 2 \frac{\partial \kappa_3}{\partial \phi} R^{ab} \wedge e^c \wedge \theta^d + \\ & + 2 \frac{\partial^2 \kappa_3}{\partial \phi \partial X} \theta^a \wedge \pi^b \wedge \pi^c \wedge e^d + \\ & + \left(\frac{\partial F}{\partial \phi} + 2 \frac{\partial W}{\partial \phi} \right) R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + \\ & + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \phi \partial X} - \kappa_8 \right) \pi^a \wedge \pi^b \wedge e^c \wedge e^d + \\ & + \frac{\partial \kappa_8}{\partial \phi} \theta^a \wedge \pi^b \wedge e^c \wedge e^d + \\ & - \left[\frac{\partial^2 (F + 2W)}{\partial \phi^2} - X \frac{\partial \kappa_8}{\partial \phi} \right] \pi^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + \\ & \left. + \frac{1}{4!} \frac{\partial \kappa_9}{\partial \phi} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \right], \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & \left[2d\kappa_3 \wedge R^{ab} + 2d \frac{\partial \kappa_3}{\partial X} \wedge \pi^a \wedge \pi^b + \right. \\ & + d\kappa_8 \wedge \pi^a \wedge e^b + \\ & \left. + D\pi^a \wedge \left(4 \frac{\partial \kappa_3}{\partial X} \pi^b + \kappa_8 e^b \right) \right] \wedge e^c Z^d + \\ & + 2\epsilon_{abcd} \left[\kappa_3 R^{ab} + \frac{\partial \kappa_3}{\partial X} \pi^a \wedge \pi^b + \right. \\ & \left. + \kappa_8 \pi^a \wedge e^b \right] \wedge T^c Z^d, \end{aligned} \quad (2.17)$$

y las 4-formas \mathcal{S}_a , \mathcal{T}_a y \mathcal{U}_a están dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_d = & 2\epsilon_{abcd} \left[D\pi^a \wedge e^b \wedge \left(2\frac{\partial\kappa_1}{\partial X}\pi^c + 2\frac{\partial\kappa_3}{\partial X}\theta^c + \frac{\partial F}{\partial X}e^c \right) + \right. \\ & + \pi^a \wedge e^b \wedge dX \wedge \left(\frac{\partial^2\kappa_1}{\partial X^2}\pi^c + 2\frac{\partial^2\kappa_3}{\partial X^2}\theta^c + \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}e^c \right) + \\ & \left. + \frac{1}{2}e^a \wedge e^b \wedge dX \wedge \left(\theta^c \frac{\partial\kappa_8}{\partial X} - e^c \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \frac{\partial F}{\partial\phi} - X\kappa_8 \right\} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_d = & 2\epsilon_{abcd} \left[\kappa_1 R^{ab} + \frac{\partial\kappa_1}{\partial X}\pi^a \wedge \pi^b + 2\frac{\partial\kappa_3}{\partial X}\pi^a \wedge \theta^b + \right. \\ & + 2\frac{\partial F}{\partial X}\pi^a \wedge e^b + \frac{1}{2}\kappa_8 e^a \wedge \theta^b + \\ & \left. - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial}{\partial\phi} (F + 2W) - X\kappa_8 \right) e^a \wedge e^b \right] \wedge T^c, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_e = & \epsilon_{abcd} \left[-R^{ab} \wedge e^c \wedge \left(C^d_e + 2\frac{\partial\kappa_1}{\partial X}\delta_{ef}^{gd} Z_g \pi^f \right) + \right. \\ & - \pi^a \wedge \pi^b \wedge e^c \wedge \left(\bar{C}^d_e + \frac{2}{3}\frac{\partial^2\kappa_1}{\partial X^2}\pi^d Z_e \right) + \\ & \left. + \pi^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge M^d_e + e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge K^d_e \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Y las 1-formas de la ec. (2.20): C^a_b , \bar{C}^a_b , K^a_b , y M^a_b , son definidas como

$$\begin{aligned} C^a_b = & 2d\phi \left[\frac{\partial\kappa_3}{\partial X} Z^a Z_b - \left(\kappa_3 - \frac{\partial\kappa_1}{\partial\phi} \right) \delta^a_b \right] + \\ & + e^a Z_b \frac{\partial F}{\partial X}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}^a_b = & 2d\phi \left[\frac{\partial^2\kappa_3}{\partial X^2} Z^a Z_b - \left(3\frac{\partial\kappa_3}{\partial X} - \frac{\partial^2\kappa_1}{\partial\phi\partial X} \right) \delta^a_b \right] + \\ & + e^a Z_b \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} K^a_b = & \left[\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} (F + 2W) - X\frac{\partial\kappa_8}{\partial\phi} \right] d\phi\delta^a_b + \\ & - \frac{1}{4!} e^a Z_b \frac{\partial\kappa_9}{\partial X}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} M^a_b = & \left(2 \left[\kappa_8 - \frac{\partial^2 F}{\partial\phi\partial X} \right] \delta^a_b - \frac{\partial\kappa_8}{\partial X} Z^a Z_b \right) d\phi + \\ & + e^a Z_b \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\partial F}{\partial\phi} - X\kappa_8 \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Donde C^a_b y \bar{C}^a_b satisfacen las propiedades

$$\Sigma^b C^a_b = Z^a \mathcal{C}, \quad (2.25)$$

$$\Sigma^b \bar{C}^a_b = Z^a \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial X}, \quad (2.26)$$

y $\mathcal{C}(\phi, X) = 0$ es el constraint de Horndeski (2.5).

La torsión en los términos \mathcal{T}_a y \mathcal{Z} aparece como resultado del acoplamiento no minimal.

2.1.4. Volviendo al lenguaje de segundo orden y los multiplicadores de Lagrange

Para recuperar las ecuaciones de campo estándar sin torsión, no basta imponer el constraint $T^a = 0$ en las ecuaciones de movimiento. Esto sucede porque en general para acoplamientos no minimales la torsión y la dinámica del campo escalar están íntimamente relacionados, conduciendo generalmente a $T^a \sim \partial\phi$. Por lo tanto, imponer torsión nula en las ecuaciones de movimiento eliminaría toda la dinámica del campo escalar. De manera que si queremos recuperar el caso estándar sin torsión desde las ecuaciones de movimiento debemos incluir una 2-forma multiplicador de Lagrange con un índice de Lorentz, Λ_a , en el lagrangiano de la forma

$$\bar{\mathcal{L}}_H = \mathcal{L}_H + \Lambda_a \wedge T^a, \quad (2.27)$$

con las nuevas ecuaciones de movimiento dadas por

$$\bar{\mathcal{E}}_a = \mathcal{E}_a - D\Lambda_a = 0, \quad (2.28)$$

$$\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E} = 0, \quad (2.29)$$

$$\bar{\mathcal{E}}^{ab} = \mathcal{E}^{ab} - \frac{1}{2}(\Lambda^a \wedge e^b - \Lambda^b \wedge e^a) = 0, \quad (2.30)$$

$$T^a = 0. \quad (2.31)$$

Donde

$$\Lambda^a = 2\Sigma_b \mathcal{E}^{ab} + \frac{1}{2}e^a \wedge \Sigma_{bc} \mathcal{E}^{bc}. \quad (2.32)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de campo estándar sin torsión para la teoría de Horndeski son recuperadas cuando

$$\mathcal{E}^a - 2D\Sigma_b \mathcal{E}^{ab} + \frac{1}{2}e^a \wedge d\Sigma_{bc} \mathcal{E}^{bc} \Big|_{T^a=0} = 0, \quad (2.33)$$

$$\mathcal{E} \Big|_{T^a=0} = 0. \quad (2.34)$$

Para ver detalles del cálculo de estos multiplicadores, ver apéndice B.

Cabe mencionar que este comportamiento contrasta con el estudiado para el caso de Einstein-Cartan con campos acoplados minimalmente. Debido a que en dicho caso, la condición $T^a = 0$ es una ecuación de campo en el vacío y es innecesario introducir multiplicadores de Lagrange para recuperar el caso sin torsión (a diferencia de este caso donde imponer torsión nula lleva a perder la dinámica del campo escalar ϕ). De hecho en ese caso, solamente campos fermiónicos pueden ser fuente de torsión,

la cual se comporta como un campo no propagante (ver, por ejemplo, sección 8.4 [14]).

Este trabajo, además del estudio de ondas gravitacionales en un marco teórico torsional y sus interesantes consecuencias son presentados en [15], aunque éste último estudio no será tratado en esta tesis.

2.2. Brans-Dicke generalizado

En Relatividad General el espaciotiempo es descrito por un tensor de rango 2, la métrica $g_{\mu\nu}$. En el formalismo de primer orden, el vielbein y la conexión de Lorentz son conceptos independientes, de manera que la geometría no está completamente determinada por métrica, debido a esto aparece una nueva cualidad del espaciotiempo: la torsión, T^a , la cual en el formalismo de segundo orden es fijada por el constraint $T^a = 0$.

En esta sección presentamos una generalización del lagrangiano de Brans-Dicke incluyendo un acoplamiento no minimal al término de Gauss-Bonnet sin imponer la condición de torsión nula. Este trabajo a sido motivado por el paper [13]. Se estudiará la relación entre torsión y acoplamientos no minimales para una geometría FLRW. Además, se estudiará si en este marco teórico es posible recuperar las ecuaciones de campo estándar sin torsión para el caso de Brans-Dicke.

Definimos la 4-forma Lagrangeana como

$$\mathcal{L}_T = \frac{1}{4\kappa_4} N(\phi) \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + \frac{1}{4!} [M(\phi)X - V(\phi)] \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + U(\phi) \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd} + \mathcal{L}_M. \quad (2.35)$$

Donde \mathcal{L}_M representa la posible presencia de otras formas de materia no geométricas. (Recordemos que en el caso de Brans-Dicke el campo escalar ϕ se comporta como un campo geométrico que hace el rol de constante cosmológica).

Con

$$\begin{aligned} Z^a &= \Sigma^a d\phi, \\ X &= -\frac{1}{2} Z^a Z_a. \end{aligned}$$

Donde Σ^a es el operador que mapea p -formas en $(p-1)$ -formas y está definido como (ver apéndice A)

$$\Sigma^a = (-1)^{d(p-1)+\eta-} * e^a *.$$

Notemos que si hacemos las elecciones

$$\begin{aligned}
N(\phi) &= \begin{cases} N_{NM} = 1 + \kappa_4 \xi \phi \\ N_{BD} = \phi \end{cases} \\
M(\phi) &= \begin{cases} M_{NM} = \frac{\sigma}{\kappa_4} \\ M_{BD} = \frac{\sigma}{\phi \kappa_4} \end{cases} \\
V(\phi) &= \begin{cases} V_{NM} = \frac{\lambda}{4} \phi^4 \\ V_{BD} = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Obtener el Lagrangeano con acoplamiento no minimal,

$$\mathcal{L}_{NM} = \frac{1}{4\kappa_4} (1 + \kappa_4 \xi \phi^2) \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + \frac{1}{4!} \left(\frac{\sigma}{\kappa_4} X - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right) \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d.$$

O el Lagrangeano de Brans-Dicke,

$$\mathcal{L}_{BD} = \frac{1}{4\kappa_4} \phi \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + \frac{1}{4!} \frac{\sigma}{\phi \kappa_4} X \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d.$$

Sin embargo, no haremos ninguna elección a priori y vamos a variar el lagrangiano para funciones arbitrarias.

2.2.1. Ecuaciones de campo

Las ecuaciones de movimiento fueron encontradas de acuerdo al método explicado en 2.1.2.

Así, la variación de este lagrangiano, en términos de los campos independientes está dada por

$$\begin{aligned}
\delta_\phi \mathcal{L} &= \left\{ \frac{1}{4\kappa_4} \frac{\partial N(\phi)}{\partial \phi} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial M(\phi)}{\partial \phi} X - \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \right) \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \right. \\
&\quad + \frac{1}{3!} M(\phi) \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + \frac{1}{3!} \frac{\partial M(\phi)}{\partial \phi} \epsilon_{abcd} \theta^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\
&\quad \left. + \frac{1}{2!} M(\phi) Z^a \epsilon_{abcd} T^b \wedge e^c \wedge e^d + \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd} \right\} \delta \phi \\
&\quad + d \left(M(\phi) Z^a \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \delta \phi \right).
\end{aligned}$$

$$\delta_e \mathcal{L} = \left[\frac{1}{2\kappa_4} N(\phi) \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c - \frac{1}{3!} M(\phi) Z^a Z_d \epsilon_{abc f} e^b \wedge e^c \wedge e^f + \frac{1}{3!} [M(\phi) X - V(\phi)] \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \right] \wedge \delta e^d.$$

$$\begin{aligned}
\delta_\omega \mathcal{L} &= \epsilon_{abcd} \left\{ -\frac{1}{2\kappa_4} N(\phi) T^c \wedge e^d - \frac{1}{4\kappa_4} \frac{\partial N(\phi)}{\partial \phi} d\phi \wedge e^c \wedge e^d - 2 \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} R^{cd} \wedge d\phi \right\} \wedge \delta \omega^{ab} \\
&\quad + \frac{1}{4!} d(N(\phi) \epsilon_{abcd} \delta \omega^{ab} \wedge e^c \wedge e^d) + 2d(U(\phi) \epsilon_{abcd} \delta \omega^{ab} \wedge R^{cd}).
\end{aligned}$$

donde se define la cero forma

$$Z^a = \Sigma^a d\phi, \quad (2.36)$$

y las 1-formas

$$\pi^a = DZ^a, \quad (2.37)$$

$$\theta^a = Z^a d\phi. \quad (2.38)$$

Con el fin de usar un lenguaje compatible con aquél introducido en la sección anterior.

2.2.2. Postulado Cosmológico

Las observaciones cosmológicas han demostrado que el Universo es altamente simétrico a escalas muy grandes, sin embargo, estas mediciones no fueron hechas en el tiempo en que Friedmann y Lemaître comenzaron sus investigaciones sobre la dinámica del Universo considerando la distribución de masa más simple: homogénea e isotrópica, usando las ecuaciones de Einstein. Más tarde estas suposiciones (homogeneidad e isotropía) fueron llamadas el *Principio Cosmológico*.

Así a escalas cosmológicas el Universo (visto desde un observador co-móvil con el fluido cosmológico) es homogéneo e isotrópico. La métrica más general en 4-dimensiones que satisface el principio cosmológico es la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). En coordenadas esféricas está dada por

$$\begin{aligned} e^0 &= dt, \\ e^1 &= \frac{a(t)}{\sqrt{1-kr^2}} dr, \\ e^2 &= a(t)r d\theta, \\ e^3 &= a(t)r \sin \theta d\varphi. \end{aligned}$$

Definimos ahora la constante de Hubble H en función del parámetro de aceleración $a(t)$ como

$$H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (2.39)$$

puesto que sólo tiene componente temporal, vemos que

$$H_0 = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = H,$$

luego,

$$\Rightarrow H_{\hat{a}} = 0.$$

De manera que,

$$\begin{aligned} de^1 &= He^0 \wedge e^1, \\ de^2 &= He^0 \wedge e^2 + \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a(t)r} e^1 \wedge e^2, \\ de^3 &= He^0 \wedge e^3 + \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a(t)r} e^1 \wedge e^3 + \frac{\cot \theta}{a(t)r} e^2 \wedge e^3, \end{aligned}$$

Por otro lado, dado que estamos trabajando con torsión no nula, debemos encontrar una torsión que cumpla con el postulado cosmológico, es decir, que sea homogénea e isotrópica.

Sabemos que la torsión puede ser escrita como

$$T^a = \frac{1}{2!} [T^a{}_{cd}] e^c \wedge e^d,$$

y la torsión que satisface el postulado cosmológico será

$$T^a = \frac{1}{2!} [\delta_{cd}^{ab} h_b + 2\eta^{af} \epsilon_{bfcd} f^b] e^c \wedge e^d,$$

con los vectores $h_b = h_0 = h(t)$ y $f_b = f_0 = f(t)$ sólo dependientes del tiempo. En [16] se detalla la manera de encontrar la métrica y torsión que satisfacen el postulado cosmológico, cabe mencionar que nosotros reproducimos todos los cálculos y llegamos al mismo resultado. De ahora en adelante se usará la notación $a = (0, \hat{a})$, donde $a=0$ es el índice temporal y \hat{a} los índices espaciales, es decir, toman los valores $\hat{a} = 1, 2, 3$.

Luego,

$$T^{\hat{a}} = -he^0 \wedge e^{\hat{a}} + f(t)\eta^{\hat{a}\hat{f}}\epsilon_{\hat{f}\hat{c}\hat{d}}e^{\hat{c}} \wedge e^{\hat{d}}.$$

Es trivial notar que T^0 . De esta forma,

$$\begin{aligned}
\kappa^{\hat{a}0} &= -h_0 e^{\hat{a}} \\
&= -h(t) e^{\hat{a}} \\
&= -\kappa^{0\hat{a}}, \\
\kappa^{\hat{a}\hat{b}} &= -\eta^{\hat{a}\hat{m}} \eta^{\hat{b}\hat{n}} \epsilon_{0\hat{m}\hat{n}\hat{f}} f^0 e^{\hat{f}} \\
&= -\eta^{\hat{a}\hat{m}} \eta^{\hat{b}\hat{n}} \epsilon_{\hat{m}\hat{n}\hat{f}} f(t) e^{\hat{f}}.
\end{aligned}$$

De todo lo anterior podemos obtener la conexión de Lorentz completa, es decir, $\omega^{ab} = \hat{\omega}^{ab} + \kappa^{ab}$, la cuál está dada por

$$\begin{aligned}
\omega^{0\hat{i}} &= (H + h) e^{\hat{i}}, \\
\omega^{12} &= -\frac{\sqrt{1 - kr^2}}{a(t)r} e^2 - f(t) e^3, \\
\omega^{13} &= -\frac{\sqrt{1 - kr^2}}{a(t)r} e^3 - f(t) e^2, \\
\omega^{23} &= -\frac{\cot \theta}{a(t)r} e^3 - f(t) e^1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la 2-forma curvatura de Lorentz tiene la forma

$$\begin{aligned}
R^{0\hat{a}} &= \left[(\dot{H} + \dot{h}) + H(H + h) \right] e^0 \wedge e^{\hat{a}} + f(t) (H + h) \eta^{\hat{a}\hat{m}} \epsilon_{\hat{m}\hat{c}\hat{f}} e^{\hat{c}} \wedge e^{\hat{f}}, \\
R^{\hat{a}\hat{b}} &= \left[(H + h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] e^{\hat{a}} \wedge e^{\hat{b}} + (\dot{f} + Hf) \eta^{\hat{a}\hat{m}} \eta^{\hat{b}\hat{c}} \epsilon_{\hat{m}\hat{c}\hat{f}} e^{\hat{f}} \wedge e^0.
\end{aligned}$$

Estos resultados, como es de esperar coinciden con los estudiados en el paper paper [13], ya que se trabajó con el mismo vielbein y torsión.

Ahora bien, para el campo escalar en el caso cosmológico tenemos que se cumplirá

$$\begin{aligned}
\theta^a &= Z^a d\phi, & Z^a &= -\delta_0^a \dot{\phi}, \\
\Rightarrow \theta^0 &= Z^0 d\phi & \Rightarrow Z^0 &= -\dot{\phi}, \\
&= -\dot{\phi} (\partial_0 \phi) dx^0 & \Rightarrow Z^{\hat{a}} &= 0. \\
&= -\dot{\phi} \dot{\phi} e^0 \\
&= -\dot{\phi}^2 e^0, \\
\Rightarrow \theta^{\hat{a}} &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi^a &= DZ^a \\
&= -\delta_0^a D\dot{\phi} \\
&= -\left(\delta_0^a d\dot{\phi} + \dot{\phi}\omega^{a_0}\right) \\
&= -\left(\ddot{\phi}e^0 + \dot{\phi}\hat{\omega}^{\hat{a}_0}\right) \\
&= -\ddot{\phi}e^0 - \dot{\phi}(H+h)e^{\hat{a}},
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
d\phi &= \dot{\phi}e^0, \\
X &= -\frac{1}{2}Z_a Z^a \\
&= \frac{1}{2}(Z^0)^2 \\
&= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2
\end{aligned}$$

2.2.3. Ecuaciones de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Consideremos un Lagrangeano de materia tal que

$$\begin{aligned}
\delta_e \mathcal{L}_M &= - * \tau_d \wedge \delta e^d, \\
\delta_\omega \mathcal{L}_M &= -\frac{1}{2} \delta \omega^{ab} \wedge * \sigma_{ab}, \\
\delta_\phi \mathcal{L}_M &= -\delta \phi * \Theta.
\end{aligned}$$

De manera que

$$\mathcal{L}_T = \mathcal{L} + \mathcal{L}_M$$

Ecuaciones de campo con respecto al campo ϕ

$$\delta_\phi(\mathcal{L} + \mathcal{L}_M) = 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{3}{\kappa_4} \frac{\partial N(\phi)}{\partial \phi} &\left\{ \left[(\dot{H} + \dot{h}) + H(H+h) \right] + \left[(H+h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] \right\} + \left\{ -\frac{\partial M(\phi)}{\partial \phi} \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \right\} \\
&- M(\phi) \left\{ \ddot{\phi} + 3\dot{\phi}(H+h) \right\} + 3\dot{\phi}hM(\phi) \\
+ 4! \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} &\left\{ \left[(\dot{H} + \dot{h}) + H(H+h) \right] \left[(H+h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] - 2f(H+h)(\dot{f} + Hf) \right\} - \Theta = 0.
\end{aligned}$$

Ecuaciones de campo con respecto al campo e

$$\delta_e(\mathcal{L} + \mathcal{L}_M) = 0$$

Para \mathcal{T}_0

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left\{ -\frac{3}{3!\kappa_4} N(\phi) \left[(H+h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] + \frac{1}{3!} \left[M(\phi) \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \right\} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} e^{\hat{a}} \wedge e^{\hat{b}} \wedge e^{\hat{c}} \wedge \delta e^0 = + * \mathcal{T}_0 \wedge \delta e^0 \\ & \Rightarrow \frac{1}{3!} \left\{ \frac{3}{\kappa_4} N(\phi) \left[(H+h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] - \left[M(\phi) \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \right\} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} e^{\hat{a}} \wedge e^{\hat{b}} \wedge e^{\hat{c}} = - * \mathcal{T}_0 \end{aligned}$$

Para $\mathcal{T}_{\hat{d}}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left\{ \frac{1}{\kappa_4} N(\phi) \left[(\dot{H} + \dot{h}) + H(H+h) \right] + \frac{1}{2\kappa_4} N(\phi) \left[\left(\frac{H}{c} + h \right)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2!} \left[M(\phi) \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right] \right\} \epsilon_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} e^0 \wedge e^{\hat{b}} \wedge e^{\hat{c}} \wedge \delta e^{\hat{d}} = + * \mathcal{T}_{\hat{d}} \wedge \delta e^{\hat{d}} \\ \Rightarrow & \left\{ \frac{1}{\kappa_4} N(\phi) \left[(\dot{H} + \dot{h}) + H(H+h) \right] + \frac{1}{2\kappa_4} N(\phi) \left[(H+h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2!} \left[M(\phi) \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right] \right\} \epsilon_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} e^0 \wedge e^{\hat{b}} \wedge e^{\hat{c}} = + * \mathcal{T}_{\hat{d}} \end{aligned}$$

Variación con respecto al campo ω

$$\delta_\omega (\mathcal{L} + \mathcal{L}_M) = 0$$

Para $\sigma_{0\hat{b}}$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2\kappa_4} N(\phi) h - \frac{1}{4\kappa_4} \dot{\phi} \frac{\partial N(\phi)}{\partial \phi} - 2 \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} \dot{\phi} \left[(H+h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] \right\} \epsilon_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} e^0 \wedge e^{\hat{c}} \wedge e^{\hat{d}} \wedge \delta \omega^{0\hat{b}} = \frac{1}{2} * \sigma_{0\hat{b}} \wedge \delta \omega^{0\hat{b}} \\ \Rightarrow & \left\{ \frac{1}{2\kappa_4} N(\phi) h - \dot{\phi} \left(\frac{1}{4\kappa_4} \frac{\partial N(\phi)}{\partial \phi} + 2 \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} \left[(H+h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] \right) \right\} \epsilon_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} e^0 \wedge e^{\hat{c}} \wedge e^{\hat{d}} = \frac{1}{2} * \sigma_{0\hat{b}} \end{aligned}$$

Para $\sigma_{\hat{a}\hat{b}}$

$$\begin{aligned} & \left\{ -f \frac{1}{\kappa_4} N(\phi) + 8 \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} \dot{\phi} (H+h) f \right\} e^0 \wedge e_{\hat{a}} \wedge e_{\hat{b}} \wedge \delta \omega^{\hat{a}\hat{b}} = \frac{1}{2} * \sigma_{\hat{a}\hat{b}} \wedge \delta \omega^{\hat{a}\hat{b}} \\ & f \left\{ \frac{1}{\kappa_4} N(\phi) - 8 \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} \dot{\phi} (H+h) \right\} e^0 \wedge e_{\hat{a}} \wedge e_{\hat{b}} = -\frac{1}{2} * \sigma_{\hat{a}\hat{b}} \end{aligned}$$

2.2.4. Caso de un Fluido Perfecto

Consideremos un fluido perfecto en equilibrio termodinámico

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^+ = (p + \rho) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}.$$

Donde ρ corresponde a la densidad de energía propia del fluido, p es la presión y U^μ es la cuadrivelocidad local,

$$\begin{aligned} U^0 &= 1, \\ U_{\hat{\mu}} &= 0, \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{00}^+ &= (\rho + p) + pg_{00}, \\ &= \rho + p(1 + g_{00}), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{0\hat{\nu}}^+ &= pg_{0\hat{\nu}}, \\ \mathcal{T}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^+ &= pg_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \end{aligned}$$

En nuestro caso, $g_{00} = -1$ y $g_{0\hat{\nu}} = 0$, de manera que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{00}^+ &= \rho, \\ \mathcal{T}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^+ &= pg_{\hat{\mu}\hat{\nu}}. \end{aligned}$$

En la base de Lorentz tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{00}^+ &= p, \\ \mathcal{T}_{\hat{a}\hat{b}}^+ &= p\eta_{\hat{a}\hat{b}} \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} *\mathcal{T}_0 &= *e^0 \mathcal{T}_{00}, \\ &= -\frac{1}{3!} \rho \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} e^{\hat{a}} \wedge e^{\hat{b}} \wedge e^{\hat{c}}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} *\mathcal{T}_{\hat{c}} &= *e^{\hat{m}} \mathcal{T}_{\hat{m}\hat{c}}, \\ &= *e^{\hat{m}} \mathcal{T}^{\hat{m}}_{\hat{c}}, \\ &= *e^{\hat{m}} p \delta_{\hat{c}}^{\hat{m}}, \\ &= p *e_{\hat{c}}, \\ &= -p \frac{1}{2!} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} e^{\hat{0}} \wedge e^{\hat{a}} \wedge e^{\hat{b}}. \end{aligned}$$

Y las ecuaciones de campo se transforman en

$$\begin{aligned} \frac{3}{\kappa_4} \frac{\partial N(\phi)}{\partial \phi} \left\{ [(\dot{H} + \dot{h}) + H(H + h)] + \left[(H + h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] \right\} + \left\{ -\frac{\partial M(\phi)}{\partial \phi} \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \right\} \\ - M(\phi) \left\{ \ddot{\phi} + 3\dot{\phi}(H + h) \right\} + 3\dot{\phi}hM(\phi) \\ + 4! \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} \left\{ [(\dot{H} + \dot{h}) + H(H + h)] \left[(H + h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] - 2f(H + h)(\dot{f} + Hf) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\frac{3}{\kappa_4} N(\phi) \left[(H + h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] - \left[M(\phi) \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] = \rho, \quad (2.41)$$

$$\frac{1}{\kappa_4} N(\phi) [(\dot{H} + \dot{h}) + H(H + h)] + \frac{1}{2\kappa_4} N(\phi) \left[(H + h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] + \frac{1}{2!} \left[M(\phi) \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right] = -\frac{1}{2!} p, \quad (2.42)$$

$$\frac{1}{2\kappa_4} N(\phi) h - \dot{\phi} \left(\frac{1}{4\kappa_4} \frac{\partial N(\phi)}{\partial \phi} + 2 \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} \left[(H + h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] \right) = 0, \quad (2.43)$$

$$f \left\{ \frac{1}{\kappa_4} N(\phi) - 8 \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} \dot{\phi} (H + h) \right\} = 0. \quad (2.44)$$

Comparación con el caso del paper [13]:

Para este caso se deben elegir las funciones en (2.35) de la forma $U = (H + h)$, $N(\phi) = cte. = 1$, $M(\phi) = 0$, $V(\phi) = cte. = \frac{\Lambda}{\kappa_4}$, $U(\phi) = \frac{\phi}{4\kappa_4}$. De manera que,

$$\begin{aligned} (\dot{U} + HU) \left(U^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right) - 2fU(\dot{f} + HF) &= 0, \\ \frac{3}{\kappa_4} \left[U^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] - \frac{1}{\kappa_4} \Lambda &= \rho, \\ \frac{1}{\kappa_4} [\dot{U} + UH] + \frac{1}{2\kappa_4} \left[U^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] - \frac{1}{2!} \frac{1}{\kappa_4} \Lambda &= -\frac{1}{2} p, \\ \frac{1}{2\kappa_4} h - 2\dot{\phi} \frac{1}{4\kappa_4} \left[U^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] &= 0, \\ f \frac{1}{\kappa_4} - 8 \frac{1}{4\kappa_4} f \dot{\phi} U &= 0. \end{aligned}$$

Luego, obtenemos

$$\begin{aligned}
(\dot{U} + HU) \left(U^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right) - 2fU(\dot{f} + HF) &= 0 \\
U^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 - \frac{\Lambda}{3} &= \frac{\kappa_4}{3}\rho \\
2 \left[\dot{U} + UH \right] + U^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 - \Lambda &= -\kappa_4 p \\
h - \dot{\phi} \left[U^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] &= 0 \\
f(1 - 2\dot{\phi}U) &= 0
\end{aligned}$$

que coinciden con las ecuaciones estudiadas en el paper.

2.2.5. Volviendo al lenguaje de segundo orden y comparación con las ecuaciones de Brans-Dicke sin torsión

Análogamente al caso de Horndeski, tenemos que la torsión es generada por la dinámica del campo escalar por lo que para obtener las ecuaciones de campo estándar para el caso de Brans-Dicke hay que incorporar los multiplicadores de Lagrange presentados en B.

Para nuestro lagrangeano (2.35) el multiplicador corresponde a (usando el sistema de unidades $\kappa_4 = c = 1$),

$$D\Lambda_a = \left\{ N'' \partial_\gamma \phi \partial^\lambda \phi - N'' \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi \delta_\gamma^\lambda + N' \delta_\gamma^\lambda \partial^\nu \partial_\nu \phi - N' \partial^\lambda \partial_\gamma \phi \right\}. \quad (2.45)$$

Vemos que el caso de Brans-Dicke corresponde a las elecciones:

$$\begin{aligned}
N &= \phi, \\
N' &= 1, \\
N'' &= 0, \\
\partial^\nu \partial_\nu \phi &= \square \phi.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
D\Lambda_a &= \left(\delta_\gamma^\lambda \square \phi - \partial^\lambda \partial_\gamma \phi \right), \\
&= \left(g_{\lambda\alpha} \delta_\gamma^\lambda \square \phi - \partial_\alpha \partial_\gamma \phi \right), \\
&= \left(g_{\gamma\alpha} \square \phi - \partial_\alpha \partial_\gamma \phi \right), \\
&= \left(g_{\mu\nu} \square \phi - \partial_\mu \partial_\nu \phi \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\delta_e L - D\Lambda_a \wedge e^a = T_{\mu\nu}, \quad (2.46)$$

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \frac{R}{2} - \frac{\sigma}{\phi^2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{\phi} \nabla_\mu \nabla_\nu + g_{\mu\nu} \left(\frac{\square \phi}{\phi} + \frac{\sigma}{2\phi^2} (\nabla \phi)^2 + \frac{V}{\phi} \right) = \frac{1}{\phi} T_{\mu\nu}. \quad (2.47)$$

Todos estos resultados, además del interesante análisis cosmológico de las ecuaciones (2.40)-(2.44) es presentado en [17].



Capítulo 3

Teoría conformal

“Mi trabajo siempre ha tratado de unir la verdad y la belleza, pero cuando tengo que escoger el uno o el otro, generalmente escojo la belleza. La interrogante de los fundamentos más profundos y el significado último de las matemáticas permanece como un problema abierto; no sabemos en qué dirección encontrará su solución final o si siquiera una respuesta final y objetiva puede ser esperada. ‘Matematizar’ es quizás una actividad creativa del hombre, como el lenguaje o la música, de originalidad primordial, y cuyo curso histórico desafiará siempre una racionalización objetiva completa.”

Hermann Weyl

Geometría de Weyl y Transformaciones conformales:

Una de las suposiciones de la geometría Riemanniana aplicada a gravedad es que las unidades físicas definidas por los instrumentos son localmente las mismas en todas partes y en todo tiempo, independiente del campo gravitacional presente. En 1918 el alemán Hermann Weyl propuso ir más allá, la idea de Weyl fue la siguiente: el transporte paralelo de dos vectores V^i y W^j desde x^i hasta $x^i + dx^i$ es generalizado, el ángulo α entre los vectores se mantiene fijo bajo el transporte paralelo, pero se rompe la suposición de que la longitud de ambos vectores permanecerá invariante. Así, el ángulo entre ellos será intocable pero la noción de transporte paralelo cambiará, en efecto, el lema de Ricci (o compatibilidad métrica) ya no será válido por lo que los símbolos de Christoffel, los cuales determinan el transporte paralelo, son modificados; si la derivada covariante de la métrica es nula, entonces recuperamos la geometría Riemanniana.

Weyl ahora permite una estructura geométrica en la cual el transporte paralelo infinitesimal de un vector puede resultar con un cambio en su longitud. Así, si consideramos la derivada covariante de la métrica no nula y dada por $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = A_\alpha(x)g_{\mu\nu}$, y multiplicamos los coeficientes de la métrica por un factor de escala $\Omega(x) > 0$ (dilatación), entonces

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &\rightarrow \Omega(x)g_{\mu\nu}, \\ \Rightarrow \nabla_\alpha \bar{g}_{\mu\nu} &= \nabla_\alpha \Omega(x)g_{\mu\nu} + \Omega(x)\nabla_\alpha g_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

usando que $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = A_\alpha(x)g_{\mu\nu}$, $\nabla_\alpha \bar{g}_{\mu\nu} = \bar{A}_\alpha(x)\bar{g}_{\mu\nu}$ y dividiendo por $\Omega(x) > 0$, tenemos

$$\bar{A}_\alpha g_{\mu\nu} = \left[\frac{\nabla_\alpha \Omega(x)}{\Omega(x)} + A_\alpha \right] g_{\mu\nu}$$

De manera que

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &\rightarrow \Omega(x)g_{\mu\nu}, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \nabla_\mu \ln(\Omega(x)), \end{aligned} \tag{3.1}$$

Todo esto sugiere fuertemente identificar A_μ con el potencial electromagnético, y las transformaciones (3.1) con una transformación de gauge afectando simultáneamente gravedad y electromagnetismo. Haciendo una especial elección para $\Omega(x)$ a la que Weyl llamó “Eichung”(=“gauge”).

Belleza matemática versus realidad Física: En 1928 Weyl escribió una carta a Einstein anunciando un próximo paper sobre la unificación de gravedad y electromagnetismo y preguntando si el paper podía ser presentado por Einstein a la Academia de Ciencias de Berlín. Luego de una correspondencia infructuosa donde en una de las cartas Einstein escribió a Weyl “Por bella que sea tu idea, debo admitir abiertamente que de acuerdo a mi punto de vista es imposible que la teoría corresponda a la naturaleza”. El resultado fue que la comunidad de físicos de la época criticaron duramente a Weyl. Sin embargo, un par de años más tarde la idea de Weyl tuvo un renacimiento inesperado y modificación en el marco teórico de mecánica cuántica, Weyl arregló su idea (en lugar de un cambio de escala, la transformación de gauge fue interpretada como un cambio en la fase de la función de onda) y lo que descubrió fue que podía describir el electromagnetismo como teoría de gauge. [18]

Sobre transformaciones conformales y simetrías:

Sea M una variedad D -dimensional con métrica $g_{\mu\nu}$ de signatura Lorentziana. Y consideremos la transformación

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}, \tag{3.2}$$

entonces se dice que $\bar{g}_{\mu\nu}$ surge de una transformación conformal, siempre que $\Omega(x)$ sea una función suave y estrictamente positiva. Es importante enfatizar que una transformación conformal no está asociada, en general, a un difeomorfismo de

M . Un difeomorfismo $\psi : M \rightarrow M$ para el cual $\psi^*g_{\mu\nu} = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}$ es llamado una isometría conformal [19], en particular el espacio de Minkowski posee los 15 generadores del grupo conformal (traslaciones, rotaciones, dilataciones y transformaciones espaciales) [20]. Para resaltar la diferencia entre una simetría y una transformación conformal, escribamos la ecuación a resolver para encontrar los vectores de Killing conformales en espacios curvos

$$\frac{d}{2} \left[\overset{\circ}{R}{}^\mu{}_\lambda \overset{\circ}{\nabla}{}^\lambda \zeta^\mu + \overset{\circ}{\nabla}{}^\mu \overset{\circ}{R}{}_{\mu\lambda} \zeta^\lambda \right] = (d-1) \square_B \overset{\circ}{\nabla}{}_\lambda \zeta^\lambda, \quad (3.3)$$

vemos que resolver esta ecuación para una métrica dada es altamente no trivial, porque para empezar, ¿Qué ansatz razonable para la métrica postular? De manera que no podemos asegurar que existirán vectores de Killing conformales en una variedad arbitraria M . Para ver detalles del cálculo, ver apéndice C. Por consiguiente, una cosa es tener una transformación conformal que induzca para cierto peso conforme, por ejemplo, una invariancia en algún lagrangiano; y otra cosa es tener una isometría conformal que me hable de direcciones en las cuáles puedo “arrastar” un tensor sin deformarlo.

Las transformaciones conformales preservan la estructura causal de la variedad y han sido usadas en varios contextos en relatividad general, en particular, en la definición de asintóticamente plano [21]. Básicamente para una transformación del tipo (3.2), con $\Omega(x) = \exp[2\sigma(x)]$, es decir, para una dilatación (no una transformación general del grupo conformal), el espaciotiempo sí se da cuenta de que se realizó esta transformación y por lo tanto cambiará tanto la conexión afín como la curvatura de Riemann de la forma

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}{}^\alpha{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \bar{g}^{\alpha\beta} \{ \partial_\mu \bar{g}_{\beta\nu} + \partial_\nu \bar{g}_{\beta\mu} - \partial_\beta \bar{g}_{\mu\nu} \} \\ &= \frac{1}{2} e^{-2\sigma} g^{\alpha\beta} \{ e^2 \partial_\mu g_{\beta\nu} + e^2 \partial_\nu g_{\beta\mu} - e^2 \partial_\beta g_{\mu\nu} + 2e^{2\sigma} g_{\beta\nu} \partial_\mu \sigma + 2e^{2\sigma} g_{\beta\mu} \partial_\nu \sigma - 2e^{2\sigma} g_{\mu\nu} \partial_\beta \sigma \} \\ &= \Gamma{}^\alpha{}_{\mu\nu} + \delta_\nu^\alpha \partial_\mu \sigma + \delta_\mu^\alpha \partial_\nu \sigma - g_{\mu\nu} \partial^\alpha \sigma. \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}{}^\lambda{}_{\mu\rho\nu} &= \overset{\circ}{R}{}^\lambda{}_{\mu\rho\nu} + \delta_\nu^\lambda \partial_\mu \partial_\rho \sigma - \delta_\rho^\lambda \partial_\mu \partial_\nu \sigma + g_{\mu\rho} \partial_\nu \partial^\lambda \sigma - g_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\lambda \sigma \\ &\quad + \delta_\rho^\lambda \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - \delta_\nu^\lambda \partial_\mu \sigma \partial_\rho \sigma + g_{\mu\nu} \partial_\rho \sigma \partial^\lambda \sigma - g_{\mu\rho} \partial_\nu \sigma \partial^\lambda \sigma \\ &\quad + \left(g_{\mu\rho} \delta_\nu^\lambda - g_{\mu\nu} \delta_\rho^\lambda \right) \partial^\alpha \sigma \partial_\alpha \sigma. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Donde el círculo indica que no se consideran efectos de la torsión, es decir, $\overset{\circ}{\Gamma}{}^\lambda{}_{\rho\alpha} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^\lambda{}_{\alpha\rho}$.

Invariancia conformal:

Consideremos el lagrangiano del non-minimal coupling,

$$-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{\xi}{2} R \phi^2 - \alpha \phi^4,$$

este lagrangiano es conformalmente invariante para la elección particular de $\xi = 1/6$, bajo las transformaciones conformales

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(x)g_{\mu\nu}, \quad (3.6)$$

$$\phi \rightarrow \Omega^s(x)\phi, \quad (3.7)$$

con $s = -1$, donde s es llamado el peso conformal. Así el lagrangiano,

$$-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu - \frac{1}{12}R\phi^2 - \alpha\phi^4, \quad (3.8)$$

es llamado el lagrangiano del conformal coupling. Este es un caso muy particular de un lagrangiano invariante bajo transformaciones conformales, donde la transformación conformal del campo ϕ compensa la transformación de la métrica solamente si nos quedamos con la elección $\xi = 1/6$. Este acoplamiento especial para el campo escalar ϕ es la única prescripción que asegura la validez del principio de equivalencia en espacios curvos [22]. Además de que las ecuaciones de campo a resolver son mucho más amigables. Debido a esto en la siguiente sección nos interesamos en estudiar precisamente el conformal coupling pero ahora en un contexto más general: **con torsión**.

3.1. El Lagrangiano Conformal con torsión

La motivación de este trabajo ha sido inspirada en el paper [23], la pregunta fundamental fue ver si se podría construir un lagrangiano invariante conformal en el formalismo de primer orden, y ver si se siguen obteniendo las mismas bondades que se obtienen en la geometría de Riemann, esto es que sea una prescripción que asegure la validez del principio de equivalencia en espacios curvos, que el tensor energía momentum tenga traza cero y las ecuaciones de campo sean más amigables.

Para esto recordemos que para recuperar la geometría Riemannianna debemos imponer

$$T^a \equiv 0, \quad (3.9)$$

$$\Rightarrow de^a + \omega^a_b \wedge e^b = 0, \quad (3.10)$$

eso implica que ω^{ab} satisface una ecuación algebraica que se puede despejar, tal que al final del día se obtiene la dependencia: $\omega^{ab} = \omega^{ab}(e, \partial e)$. El requerimiento de torsión nula es una suposición evidentemente no necesaria, pero es una posibilidad. Sin embargo, considerar esta posibilidad elimina inmediatamente un campo independiente del juego, al mismo tiempo que se restringen las ecuaciones de movimiento. Así, lo más transparente es considerar una conexión sin imponer el constraint $T^a = 0$, de modo que consideraremos una conexión de Lorentz tal que

$$\omega^{ab} = \hat{\omega}^{ab} + \kappa^{ab}, \quad (3.11)$$

donde la primera parte es tal que su correspondiente torsión se anula, es decir,

$$de^a + \hat{\omega}^a_b \wedge e^b = 0. \quad (3.12)$$

Así, llamaremos a esta parte de la conexión $\hat{\omega}^{ab}$ la conexión libre de torsión, la cual está completamente determinada por la estructura métrica de la variedad.

Y puesto que la torsión viene dada por

$$\begin{aligned} T^a &= de^a + \omega^a_b \wedge e^b, \\ &= de^a + [\hat{\omega}^a_b + \kappa^a_b] \wedge e^b, \\ &= \kappa^a_b \wedge e^b. \end{aligned}$$

De manera que si no imponemos el constraint $T^a = 0$, toda la información torsional está contenida en κ^a_b , la cual es una 1-forma llamada **contorsión**.

3.1.1. Construcción del Lagrangiano Conformal con Torsión

A continuación se hará una generalización a la transformación conformal usual para una variedad con torsión no nula. Sea la transformación conformal

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = e^{2\sigma} g_{\mu\nu}, \quad (3.13)$$

es decir, una dilatación y que corresponde en términos del vielbein a

$$e^a \rightarrow \bar{e}^a = \exp(\sigma) e^a. \quad (3.14)$$

Definimos

$$\xi^a = \sum^a d\sigma = - * (e^a \wedge * d\sigma), \quad (3.15)$$

con el operador \sum^a y sus propiedades mostradas en el apéndice A, y tal que

$$\sum_a = - * e_a \wedge *,$$

donde $*$ corresponde al dual de Hodge en $D = 4$, así se cumple

$$d\sigma = \xi_c e^c. \quad (3.16)$$

Por lo tanto la conexión sin torsión transforma como (para detalles del cálculo ver apéndice D)

$$\bar{\omega}^{ab} = \hat{\omega}^{ab} + e^a \zeta^b - e^b \zeta^a. \quad (3.17)$$

Ahora haremos la hipótesis de que la contorsión no re-escala bajo transformaciones conformales,

$$\kappa^{ab} \rightarrow \bar{\kappa}^{ab} = \kappa^{ab}, \quad (3.18)$$

y que por lo tanto la conexión completa re-escala bajo transformaciones conformales de la forma

$$\omega^{ab} \rightarrow \bar{\omega}^{ab} = \omega^{ab} + [e^a \xi^b - e^b \xi^a]. \quad (3.19)$$

Esto significa que la torsión $T^a = \kappa^a_b \wedge e^b$ sí re-escala bajo transformaciones conformales, y en efecto lo hace de la misma forma que el vielbein

$$T^a \rightarrow \bar{T}^a = \exp(\sigma) T^a. \quad (3.20)$$

De manera que quedándonos con el ansatz $\bar{\kappa}^{ab} = \kappa^{ab}$, es decir, imponiendo que la contorsión no re-escala, tenemos que

$$R^{ab} \rightarrow \bar{R}^{ab} = R^{ab} + D[e^a \xi^b - e^b \xi^a] + [e^a \xi_c - e_c \xi^a] \wedge [e^c \xi^b - e^b \xi^c], \quad (3.21)$$

utilizando (3.16) en $[e^a \xi_c - e_c \xi^a] \wedge [e^c \xi^b - e^b \xi^c]$, implica

$$e^a \xi^b \wedge d\sigma - e^a e^b \xi^2 - e_c e^c \xi^a \xi^b + \xi^a d\sigma \wedge e^b = -d\sigma \wedge (e^a \xi^b - e^b \xi^a) - e^a \wedge e^b \xi^2.$$

Por lo tanto, podemos escribir finalmente cómo cambia la curvatura bajo transformaciones conformales

$$\bar{R}^{ab} = R^{ab} + T^a \xi^b - T^b \xi^a - [e^a \wedge D\xi^b - e^b \wedge D\xi^a] - [d\sigma \wedge (e^a \xi^b - e^b \xi^a) + \xi^2 e^a \wedge e^b]. \quad (3.22)$$

Ahora bien, esto suele escribirse como

$$\Omega = \exp(\sigma),$$

y por lo tanto,

$$\sigma = \ln \Omega, \quad (3.23)$$

$$d\sigma = \frac{1}{\Omega} d\Omega, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \xi^a &= \frac{1}{\Omega} \sum^a d\Omega \\ &\equiv \frac{1}{\Omega} Z^a. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Luego, en términos de Ω tenemos que

$$\bar{R}^{ab} = R^{ab} + D\left[\frac{1}{\Omega} (e^a Z^b - e^b Z^a)\right] - \frac{1}{\Omega^2} [d\sigma \wedge (e^a Z^b - Z^a e^b) + Z^2 e^a \wedge e^b] \quad (3.26)$$

Consideremos ahora el término completo del lagrangeano de Einstein-Hilbert y veamos cómo cambia bajo la transformación conformal $\bar{e}^a \rightarrow \Omega e^a$, esto es

$$\epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \rightarrow \epsilon_{abcd} \bar{R}^{ab} \wedge \bar{e}^c \wedge \bar{e}^d.$$

El detalle de cómo transforma conformalmente este término está detallado en el apéndice D, usamos este resultado y luego re-etiquetamos,

$$\Omega \rightarrow \phi, \quad (3.27)$$

$$\Rightarrow Z^a = \Sigma^a d\phi \quad (3.28)$$

y definiendo (para mantener un lenguaje consistente con las definiciones de capítulos anteriores)

$$\begin{aligned} -2X &\equiv Z^a Z_a = \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi, \\ \theta^a &\equiv d\Omega \Xi^a = d\phi e^a{}_\mu \partial^\mu \phi. \end{aligned}$$

Podemos definir un lagrangeano conformal \mathcal{L}_c como la transformación conformal del término de Einstein-Hilbert, dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c &= \phi^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + 2\epsilon_{abcd} X e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\ &+ 6\epsilon_{abcd} \theta^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + 4\phi \epsilon_{abcd} Z^a T^b \wedge e^c \wedge e^d \\ &+ 2d \left[\epsilon_{abcd} \phi e^a Z^b \wedge e^c \wedge e^d \right]. \end{aligned}$$

Este lagrangeano es invariante bajo las transformaciones

$$e^a \rightarrow \lambda e^a, \quad (3.29)$$

$$\phi \rightarrow \frac{1}{\lambda} \phi, \quad (3.30)$$

$$\kappa^{ab} \rightarrow \kappa^{ab}. \quad (3.31)$$

Nótese además que el término

$$\alpha \phi^4 \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d,$$

es trivialmente invariante, con α una constante adimensional, así ignorando los términos de borde, escribimos el lagrangiano conformal como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c &= \phi^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + 2\epsilon_{abcd} X e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\ &+ 6\epsilon_{abcd} \theta^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + 4\phi \epsilon_{abcd} Z^a T^b \wedge e^c \wedge e^d \\ &- \alpha \phi^4 \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d. \end{aligned}$$

Puesto que se descompuso la conexión de Lorentz, tal que una parte sea dependiente de la métrica $\omega^{ab} = \hat{\omega}^{ab} + \kappa^{ab}$. En consecuencia, los campos independientes en

esta teoría serán el vielbein e^a , la contorsión κ^{ab} y el campo escalar ϕ .

Luego, el paso a realizar es romper la simetría, es decir, restamos el lagrangiano conformal a un término no invariante que corresponde al término de Einstein-Hilbert con constante cosmológica y regularizando para obtener las unidades correctas, obtenemos el siguiente lagrangiano con el que trabajaremos de ahora en adelante

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{4\kappa_4} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d - \frac{\Lambda}{4!\kappa_4} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d - \frac{1}{4!} \phi^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \\ & + \frac{1}{4!} X \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d - \frac{1}{3!} \phi \epsilon_{abcd} Z^a T^b \wedge e^c \wedge e^d - \frac{\alpha}{4!} \phi^4 \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Este lagrangiano coincide con el estudiado en [23] cuando pasamos al lenguaje coordinado y apagamos la torsión. Por simplicidad se considerará el sistema de unidades $\hbar = c = 1$

3.2. Ecs. de campo en el lenguaje de primer orden

Definimos un lagrangiano total \mathcal{L}_T como la suma de un lagrangiano de materia \mathcal{L}_c que corresponderá a la parte invariante conformal, más un lagrangiano de geometría \mathcal{L}_G que corresponde al término de Einstein Hilbert con constante cosmológica.

Donde el Lagrangeano de materia \mathcal{L}_M será tal que

$$\delta_e \mathcal{L}_M = - * \mathcal{T}_d \wedge \delta e^d, \quad (3.33)$$

$$\delta_\omega \mathcal{L}_M = - \frac{1}{2} \delta \omega^{ab} \wedge * \sigma_{ab}, \quad (3.34)$$

$$\delta_\phi \mathcal{L}_M = 0. \quad (3.35)$$

Y un Lagrangiano de geometría \mathcal{L}_G , de manera que el Lagrangiano completo es de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M$$

Identificamos para nuestro caso el Lagrangiano de geometría como los términos de Einstein-Hilbert con constante cosmológica y al Lagrangiano de materia a aquellos que provienen de la invariancia conforme.

Así encontramos las ecuaciones de campo en el lenguaje de primer orden al variar con respecto a los campos independientes (para detalles del cálculo ver apéndice E).

A continuación se presentan las ecuaciones de campo para los 3 campos independientes de la teoría. Para mantener un lenguaje consistente con los capítulos anteriores, se utilizará la definición de la 1-forma $\pi^a = DZ^a$ al momento de escribir las ecuaciones de campo, donde $Z^a = e^a_\mu \partial^\mu \phi (= \Sigma^a d\phi)$.

3.2.1. Variación con respecto al campo ϕ

De la ec. (3.35) vemos que

$$\delta_\phi(\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M) = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{4!}\phi\epsilon_{abcd}R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + \frac{1}{3!}\epsilon_{abcd}\pi^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + \frac{1}{2!}Z^a\epsilon_{abcd}T^b \wedge e^c \wedge e^d + \frac{1}{3!}\epsilon_{abcd}d\phi \wedge T^{ab}{}_n e^n \wedge e^c \wedge e^d \\ & -\frac{1}{3!}\epsilon_{abcd}Z^a T^b \wedge e^c \wedge e^d - \frac{\alpha}{3!}\phi^3\epsilon_{abcd}e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

3.2.2. Variación con respecto al campo e

De (3.33) la ecuación para el campo e toma la forma

$$\delta_e \mathcal{L}_G = - * \mathcal{T}_d \wedge \delta e^d.$$

Luego,

$$-\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}R^{ab} \wedge e^c + \frac{1}{3!}\Lambda\epsilon_{abcd}e^a \wedge e^b \wedge e^c = -8\pi G * \mathcal{T}_d. \quad (3.37)$$

Donde

$$\begin{aligned} - * \mathcal{T}_d &= \frac{1}{3!}X\epsilon_{abcd}e^a \wedge e^b \wedge e^c + \frac{1}{3!}\phi Z_d \epsilon_{abcq} T^{ba}{}_n e^n \wedge e^c \wedge e^q + \frac{1}{3!}d\phi \epsilon_{abcd} Z^a e^b \wedge e^c \\ &+ \frac{1}{3!}\phi \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge e^b \wedge e^c - \frac{1}{3!}Z^a Z_d \epsilon_{abcf} e^b \wedge e^c \wedge e^f. \end{aligned} \quad (3.38)$$

3.2.3. Variación con respecto al campo ω

De acuerdo a la ec.(3.34), encontramos que

$$\delta_\omega \mathcal{L}_G = -\frac{1}{2}\delta\omega^{ab} \wedge * \sigma_{ab}.$$

Luego,

$$\epsilon_{abcd}T^c \wedge e^d = \kappa_4 * \sigma_{ab} \quad (3.39)$$

Con

$$* \sigma_{ab} = \frac{1}{3!}\phi^2 \epsilon_{abcd} T^c \wedge e^d + \frac{1}{3!}\phi \epsilon_{abcd} d\phi \wedge e^c \wedge e^d - \frac{1}{3}\phi \epsilon_{lbcd} Z^l \eta_{fa} e^f \wedge e^c \wedge e^d. \quad (3.40)$$

Esta ecuación nos dice que la torsión es generada por la dinámica del campo escalar. Al igual que en los casos anteriores tratados en esta tesis.

3.2.4. Volviendo al lenguaje de segundo orden y los dos caminos no compatibles

Es importante enfatizar que si uno escribe una acción asumiendo torsión no nula, $T^a \neq 0$, y luego varía independientemente la conexión y el vielbein para encontrar las ecuaciones de movimiento, existe la posibilidad de que se desee imponer a posteriori torsión nula, $T^a = 0$, que sería como recordar al final del trabajo que en realidad se estaban buscando soluciones tipo geometría de Riemann. En general, ese camino no va a coincidir con imponer torsión nula en la acción y luego variarla. Como vimos anteriormente, para el caso del lagrangiano tratado en los trabajos [15], [17], para recuperar las ecuaciones estándar con torsión nula, es necesario introducir multiplicadores de Lagrange que compensen esta inconsistencia. En efecto, argumentamos de forma entusiasta que debido a que la ecuación de campo que resulta de variar con respecto a la conexión de Lorentz nos dice que la torsión es generada por la dinámica de los campos, $T^a \approx \partial\phi$, entonces imponer $T^a = 0$ a posteriori significaría perder toda la información de la dinámica del campo ϕ . Ver apéndice B

Sin embargo, para este caso pasa algo bastante peculiar. Primero recordemos que nuestro lagrangiano conformal (3.32), posee un término con torsión explícita a diferencia de los casos estudiados anteriormente. Ahora llevemos nuestras ecuaciones de campo al lenguaje de segundo orden e impongamos torsión nula. Entonces, usando los resultados del apéndice E, tenemos que las ecuaciones de campo son

$$\mathring{G}_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \mathcal{T}_{\mu\nu}, \quad (3.41)$$

$$\mathring{\square}\phi - \frac{1}{2}\mathring{R}\phi - 4\alpha\phi^2 = 0, \quad (3.42)$$

donde $\mathring{\square} \equiv g^{\mu\nu} \mathring{\nabla}_\mu \mathring{\nabla}_\nu$, y

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + \frac{1}{6} \left[g_{\mu\nu} \square - \mathring{\nabla}_\mu \mathring{\nabla}_\nu + G_{\mu\nu} \right] \phi^2 - \alpha g_{\mu\nu} \phi^4. \quad (3.43)$$

Las cuales son equivalentes a las ecuaciones de campo del paper [23].

Es decir, a pesar de que en este caso la torsión también es generada por la dinámica del campo escalar, no necesitamos introducir los multiplicadores de Lagrange para compensar la inconsistencia de ir por dos caminos distintos para tratar de llegar al mismo destino. Para este lagrangiano conformal con un término explícito torsional, ambos caminos nos conducen al mismo resultado. Esto se debe a que al variar el término con torsión en (3.32) con respecto al vielbein, se llega exactamente a los términos que surgen de calcular los multiplicadores de Lagrange Λ_a presentados en el apéndice F para este caso, a saber:

$$\delta_e \left(\frac{1}{3!} \phi \epsilon_{abcd} Z^a T^b \wedge e^c \wedge e^d \right) = -D\Lambda_a \wedge \delta e^a.$$

Revisar apéndice [] para el calculo detallado de los multiplicadores.

Esta coincidencia ha motivado la pregunta: ¿Podría siempre agregarse un término con torsión explícita en el lagrangiano tal que haga coincidir estos dos caminos? Al menos en 4-dimensiones la respuesta podría ser positiva, recordando además que no hay ninguna restricción para incorporar términos de este tipo en el principio de acción, aunque en general esto no se haga. Es necesario acentuar que si se hubiese tomado el lagrangiano del paper [23] y se hubiese escrito en el lenguaje de primer orden con torsión no nula, no aparece el término torsional $\phi \epsilon_{abcd} Z^a T^b \wedge e^c \wedge e^d$ responsable de esta especial coincidencia. Conjeturamos que para el caso [17], es posible agregar término(s) al lagrangiano con torsiones explícitas tal que su variación con respecto al vielbein coincida con los multiplicadores de lagrange calculados para ese caso, incluso es posible arriesgarse y generalizar la hipótesis diciendo que sucede para cualquier lagrangiano acoplado no minimalmente a un campo escalar en 4-dimensiones. Sin embargo, esto modificaría las ecuaciones de campo y naturalmente lleva a la pregunta ¿Cuál sería el lagrangiano más razonable o el más correcto físicamente? Si bien para nuestro lagrangiano esta coincidencia se ajusta a la perfección, aún no es motivo suficiente para añadir términos torsionales al principio de acción. Sin embargo, una estrategia transparente sería considerar el lagrangiano con torsión explícita, puesto que es menos restrictivo y no eliminaría posibilidades que podrían llegar a ser interesantes.

3.3. Traza del tensor energía-momentum en presencia de Torsión

Sabemos que lagrangeano conformal con torsión \mathcal{L}_e es invariante bajo las transformaciones

$$e^a \rightarrow \exp(\lambda)e^a, \quad (3.44)$$

$$\phi \rightarrow \frac{1}{\exp(\lambda)}\phi, \quad (3.45)$$

$$\kappa^{ab} \rightarrow \kappa^{ab}. \quad (3.46)$$

O en otras palabras podemos decir que el lagrangeano de materia cumple con

$$\mathcal{L}_M(e^a, \omega^{ab}, \phi) = \mathcal{L}_M\left(\exp(\lambda)e^a, \omega^{ab} + \frac{1}{\exp(\lambda)}[e^a Z^b - e^b Z^a], \frac{1}{\exp(\lambda)}\phi\right),$$

donde

$$Z^a = \Sigma^a d\lambda = - * (e^a \wedge * d\lambda).$$

A nivel infinitesimal, esto puede expresarse como

$$\begin{aligned}
\Lambda &= 1 + \lambda \\
Z^a &= \Sigma^a d(1 + \lambda) \\
&= \Sigma^a d\lambda \\
&= - * (e^a \wedge * d\lambda) \\
\frac{1}{\Lambda} &= (1 + \lambda)^{-1} \\
&= 1 - \lambda
\end{aligned}$$

Ahora estudiaremos la versión infinitesimal de las transformaciones finitas (3.44)-(3.46),

$$\delta e^a = \lambda e^a, \quad (3.47)$$

$$\delta \phi = -\lambda \phi, \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned}
\delta \omega^{ab} &= (1 - \lambda) [e^a \Sigma^b - e^b \Sigma^a] d\lambda \\
&= [e^a \Sigma^b - e^b \Sigma^a] d\lambda.
\end{aligned} \quad (3.49)$$

La variación del lagrangiano \mathcal{L}_M bajo una transformación infinitesimal arbitraria de los campos está dada por

$$\delta \mathcal{L}_M = - * \mathcal{T}_d \wedge \delta e^d + \frac{1}{2} * \sigma_{ab} \wedge \delta \omega^{ab} + \mathcal{E} \delta \phi + d \left(\mathcal{M}_a \wedge \delta e^a + \mathcal{M}_{ab} \wedge \delta \omega^{ab} + \mathcal{M} \delta \phi \right)$$

en donde

$$\mathcal{E} = 0$$

corresponde a las de ecuaciones de campo para ϕ y los $d\mathcal{M}_a$, $d\mathcal{M}_{ab}$ y $d\mathcal{M}$ son los términos de borde de e^a , ω_{ab} y ϕ , respectivamente. Entonces, la variación del lagrangiano para las transformaciones infinitesimales (3.47)-(3.49), está dada por

$$\begin{aligned}
- * \mathcal{T}_d \wedge \lambda e^d + \frac{1}{2} * \sigma_{ab} \wedge [e^a \Sigma^b - e^b \Sigma^a] d\lambda - \mathcal{E} \lambda \phi + d(\lambda \mathcal{M}_a \wedge e^a + \mathcal{M}_{ab} \wedge [e^a \Sigma^b - e^b \Sigma^a] d\lambda - \mathcal{M} \lambda \phi) &= 0, \\
- * \mathcal{T}_d \wedge \lambda e^d + * \sigma_{ab} \wedge e^a \Sigma^b d\lambda - \mathcal{E} \lambda \phi + d(\lambda \mathcal{M}_a \wedge e^a + 2\mathcal{M}_{ab} \wedge e^a \Sigma^b d\lambda - \mathcal{M} \lambda \phi) &= 0.
\end{aligned}$$

Cuando $p + q - 1 = d$ se cumple (ver apéndice A)

$$\alpha^{(p)} \wedge \Sigma_a \beta^{(q)} = (-1)^{d(p-1)} \beta^{(q)} \wedge \Sigma_a \alpha^{(p)},$$

así tenemos,

$$\begin{aligned}
(*\sigma_{ab} \wedge e^a) \Sigma^b d\lambda &= d\lambda \wedge \Sigma^b (*\sigma_{ab} \wedge e^a) \\
&= d \left[\lambda \Sigma^b (*\sigma_{ab} \wedge e^a) \right] - \lambda d \Sigma^b (*\sigma_{ab} \wedge e^a) \\
&= -d \left[\lambda \Sigma^b (e^a \wedge *\sigma_{ab}) \right] + \lambda d \Sigma^b (e^a \wedge *\sigma_{ab})
\end{aligned}$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} & \lambda \left(- * \mathcal{T}_d \wedge e^d + d\Sigma^b (e^a \wedge * \sigma_{ab}) - \mathcal{E}\phi \right) + d \left(\lambda \mathcal{M}_a \wedge e^a + 2\mathcal{M}_{ab} \wedge e^a \Sigma^b d\lambda \right) \\ & \quad + d \left(-\lambda \Sigma^b (e^a \wedge * \sigma_{ab}) - \mathcal{M}\lambda\phi \right) = 0, \\ \Rightarrow & \lambda \left(e^d \wedge * \mathcal{T}_d + d\Sigma^b (e^a \wedge * \sigma_{ab}) - \mathcal{E}\phi \right) + d \left(\lambda \mathcal{M}_a \wedge e^a + 2\mathcal{M}_{ab} \wedge e^a \Sigma^b d\lambda \right) \\ & \quad + d \left(-\lambda \Sigma^b (e^a \wedge * \sigma_{ab}) - \mathcal{M}\lambda\phi \right) = 0. \end{aligned}$$

Multiplicando la última ecuación por $-*$, obtenemos

$$\begin{aligned} & \lambda \left(- * e^d \wedge * \mathcal{T}_d - * d\Sigma^b (e^a \wedge * \sigma_{ab}) + * \mathcal{E}\phi \right) - * d \left(\lambda \mathcal{M}_a \wedge e^a + 2\mathcal{M}_{ab} \wedge e^a \Sigma^b d\lambda \right) \\ & \quad - * d \left(-\lambda \Sigma^b (e^a \wedge * \sigma_{ab}) - \mathcal{M}\lambda\phi \right) = 0. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Pero para una variedad 4-dimensional con signatura Lorentziana tenemos que se cumple (ver apéndice A)

$$\Sigma^d = - * e^d \wedge *.$$

De esta manera, el término $- * e^d \wedge * \mathcal{T}_d$ podrá ser escrito como $\Sigma^d \mathcal{T}_d$ y la ecuación (3.50) tomará la forma

$$\lambda \left(\Sigma^d \mathcal{T}_d - * d\Sigma^b (e^a \wedge * \sigma_{ab}) + * \mathcal{E}\phi \right) - * d \left(\lambda \mathcal{M}_a \wedge e^a + 2\mathcal{M}_{ab} \wedge e^a \Sigma^b d\lambda - \lambda \Sigma^b (e^a \wedge * \sigma_{ab}) - \mathcal{M}\lambda\phi \right) = 0.$$

Ahora bien, identificando la traza del tensor de energía momentum

$$\Sigma^d \mathcal{T}_d = \mathcal{T}^d{}_d = \mathcal{T},$$

tenemos que

$$\lambda \left(\mathcal{T} - * d\Sigma^b (e^a \wedge * \sigma_{ab}) + * \mathcal{E}\phi \right) - * d \left(\lambda \mathcal{M}_a \wedge e^a + 2\mathcal{M}_{ab} \wedge e^a \Sigma^b d\lambda - \lambda \Sigma^b (e^a \wedge * \sigma_{ab}) - \mathcal{M}\lambda\phi \right) = 0.$$

Por otra parte, podemos mover el signo menos del segundo término de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Sigma^b (e^a \wedge * \sigma_{ab}) &= - * e^b \wedge * (e^a \wedge * \sigma_{ab}) \\ &= * e^b \Sigma^a \sigma_{ab}, \\ &= * e^b \sigma^a{}_{ba}, \end{aligned}$$

y finalmente obtener

$$\lambda \left(\mathcal{T} - *d * \left[e^b \sigma^a_{ba} \right] + *\mathcal{E}\phi \right) - *d \left(\lambda \mathcal{M}_a \wedge e^a + 2\mathcal{M}_{ab} \wedge e^a \Sigma^b d\lambda - \lambda * e^b \sigma^a_{ba} - \mathcal{M}\lambda\phi \right) = 0. \quad (3.51)$$

Apliquemos una vez más el hodge, invoquemos las ecuaciones de movimiento e ignoremos los términos de borde. Luego, apliquemos nuevamente el hodge para obtener

$$\mathcal{T} - *d * \left[e^b \sigma^a_{ba} \right] = 0. \quad (3.52)$$

Ahora bien, las ecuaciones de movimiento del sistema completo

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_M$$

son

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c - \frac{1}{3!} \lambda \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c &= \kappa_4 * \mathcal{T}_d, \\ \epsilon_{abcd} T^c \wedge e^d &= \kappa_4 * \sigma_{ab}, \\ \mathcal{E} &= 0, \end{aligned}$$

donde tanto $*\mathcal{T}_d$ como $*\sigma_{ab}$ son distintos de cero de acuerdo a las ecuaciones de movimiento (3.38) y (3.40), respectivamente. También podemos escribir esto en el lenguaje tensorial como

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} &= \kappa_4 \mathcal{T}_{\mu\nu}, \\ T^\lambda_{\alpha\beta} - \delta^\lambda_\alpha T^\gamma_{\gamma\beta} + \delta^\lambda_\beta T^\gamma_{\gamma\alpha} &= \kappa_4 \sigma^\lambda_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

De esta última ecuación tenemos que on-shell se satisface

$$\frac{2}{\kappa_4} T^\gamma_{\gamma\alpha} = \sigma^\lambda_{\alpha\lambda}.$$

Finalmente, introduciendo esto en la ecuación (3.52), tenemos que on-shell y sobre el bulk se cumple que

$$\mathcal{T} - \frac{2}{\kappa_4} *d * \left[T^a_{ab} e^b \right] = 0, \quad (3.53)$$

con lo que hemos demostrado que las teorías invariantes conformales poseen (on-shell) un tensor energía-momentum con traza nula, $\mathcal{T}^\mu_{\mu} = 0$, porque se impone el constraint $T^a = 0$. Sin embargo, el caso trivial es considerar torsión nula, un caso menos restrictivo y que podría ser más interesante es si se trabaja en un marco teórico con torsión no nula, pero se satisface:

$$*d * \left[T^a_{ab} e^b \right] = 0. \quad (3.54)$$

3.3. TRAZA DEL TENSOR ENERGÍA-MOMENTUM EN PRESENCIA DE TORSIÓN⁴⁹

Donde $*d*$, a diferencia de la derivada exterior, mapea una p -forma en una $(p-1)$ -forma. Es llamada *derivada exterior adjunta* o *co-derivada* y se denota por d^\dagger . Un análisis profundo de éste último resultado queda pendiente para un posible trabajo futuro, así como el estudio de grupos de homología y cohomología para poder visualizar qué tan razonable sería realizar el teorema de descomposición espectral de Hodge (aunque primero se debería ir desde la variedad Lorentziana a la variedad Riemanniana) para este caso y sus posibles consecuencias.

Además se calcularon las ecuaciones de campo utilizando el postulado cosmológico G.



Capítulo 4

Conclusiones

En esta tesis se contempló el estudio de teorías tenso escalares en el formalismo de primer orden en tres contextos distintos. El primero fue para el lagrangiano más general en 4-dimensiones acoplado a un campo escalar que entregue ecuaciones de segundo orden: El lagrangiano de Horndeski. Donde se concluyó lo siguiente:

- Se introdujo el operador Σ^a , el cual tiene propiedades muy interesantes y resulta muy útil al momento de calcular las ecuaciones de campo para lagrangianos que contengan tantos duales de hodge anidados como es el caso del lagrangiano de Horndeski; debido a que este operador se construye usando $*$, pero entre una de sus propiedades más interesantes está el hecho de que a pesar de que se construye usando el hodge, este operador satisface la regla de Leibniz.
- Existe una íntima relación entre acoplamientos no minimales de campos escalares a la geometría y torsión. Se encontró que en este marco teórico la torsión es generada por la dinámica del campo escalar.
- Es necesario incluir multiplicadores de lagrange para recuperar las ecuaciones de movimiento para el lagrangiano de Horndeski con torsión y todos los casos particulares de éste donde se tengan derivadas del campo escalar en el lagrangiano.
- El teorema de Horndeski ya no es válido en un escenario con torsión no nula. En efecto, hay muchos términos torsionales que pueden ser agregados al lagrangiano los cuales entreguen ecuaciones de segundo orden. Por lo que encontrar el lagrangiano más general en cuatro dimensiones para este caso sigue siendo un problema abierto.

Lo segundo que se hizo fue estudiar caso particular del lagrangiano de Horndeski con torsión, que es una generalización del lagrangiano de Brans-Dicke estándar. Se estudiaron sus ecuaciones de campo y evidentemente por estar contenido en caso anteriormente mencionado también es necesario introducir multiplicadores de lagrange para recuperar las ecuaciones de campo estándar, aunque para este caso es mucho más claro todo y se calculan los multiplicadores para mostrar que efectivamente son

necesarios para recuperar las ecuaciones de campo estándar.

Lo tercero explorado en esta tesis fue el estudio del lagrangiano conformal cuando se trabaja en el formalismo de segundo orden, es decir, con torsión no nula. Los resultados de este estudio fueron muy interesantes ya que contrastan con lo que se obtuvo anteriormente y se motiva la inclusión de términos nuevos en el lagrangiano para los casos vistos previamente. Las conclusiones pueden ser resumidas como sigue:

- Se construyó un lagrangiano que sea invariante conformal en el formalismo de primer orden, tal que no está contenido en el Horndeski con torsión.
- Los términos torsionales explícitos que aparecen en el lagrangiano conformal con torsión permiten recuperar a posteriori las ecuaciones de campo en el formalismo de segundo orden sin necesidad de introducir los multiplicadores de lagrange.
- Debido al punto anterior, se descarta la hipótesis de introducir multiplicadores de lagrange para **todos** los acoplamientos no minimales (tal que contengan términos con derivadas explícitas del campo escalar en el lagrangiano) con el fin de recuperar a posteriori las ecuaciones de campo sin torsión. Además se conjetura que si se introducen elecciones inteligentes de términos torsionales explícitos en los casos anteriores se obtienen ecuaciones de campo que desembocan de manera natural en el formalismo estándar.
- Se demostró que la propiedad de traza nula ya no sigue siendo válida en el marco teórico de un lagrangiano que posea invariancia conformal con torsión.

Para posibles trabajos futuros quedan como problemas abiertos

- Intentar demostrar la validez de la conjetura planteada anteriormente.
- Estudiar en profundidad el paper [22] en un marco teórico torsional.
- Ver si hay alguna consecuencia interesante cuando se considera:

$$d^\dagger \left[T^a_{ab} e^b \right] = 0. \quad (4.1)$$

Apéndice A

El operador Σ^a

Encontramos un nuevo operador que mapea p -formas en $(p - q)$ -formas

$$\sum_{a_1 \dots a_q} : \Omega^p(M^{(d)}) \rightarrow \Omega^{p-q}(M^{(d)})$$

y está definido como

$$\sum_{a_1 \dots a_q} = (-1)^{(d-p)(p-q)+\eta_-} * e_{a_1} \wedge \dots \wedge e_{a_q} \wedge *$$

En términos de componentes, su acción sobre una p -forma

$$\Phi = \frac{1}{p!} \Phi_{n_1 \dots n_p} e^{n_1} \wedge \dots \wedge e^{n_p}$$

queda descrita a través de

$$\sum_{a_1 \dots a_q} \Phi = (-1)^{(d-p)(p-q)+\eta_-} * (e_{a_1} \wedge \dots \wedge e_{a_q} \wedge * \Phi),$$

donde

$$* \Phi = \frac{1}{p!(d-p)!} \Phi_{n_1 \dots n_p} \epsilon_{n_1 \dots n_p l_1 \dots l_{d-p}} e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_{d-p}}.$$

Entonces,

$$\bar{\phi} = e_{a_1} \wedge \dots \wedge e_{a_q} \wedge \frac{1}{p!(d-p)!} \Phi_{n_1 \dots n_p} \epsilon_{n_1 \dots n_p m_1 \dots m_{d-p}} e^{m_1} \wedge \dots \wedge e^{m_{d-p}}$$

Donde

$$e_{a_1} \wedge \dots \wedge e_{a_q} = \eta_{a_1 b_1} \dots \eta_{a_q b_q} e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{b_q}$$

Luego, $\bar{\phi}$ se puede escribir como

$$\bar{\phi} = \eta_{a_1 b_1} \dots \eta_{a_q b_q} e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{b_q} \frac{1}{p!(d-p)!} \Phi_{n_1 \dots n_p} \epsilon_{n_1 \dots n_p m_1 \dots m_{d-p}} e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{b_q} \wedge e^{m_1} \wedge \dots \wedge e^{m_{d-p}}$$

Pero,

$$e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{b_q} \wedge e^{m_1} \wedge \dots \wedge e^{m_{d-p}} = \frac{1}{(d-p+q)!} \delta_{c_1 \dots c_{d-p+q}}^{b_1 \dots b_q m_1 \dots m_{d-p}} e^{c_1} \wedge \dots \wedge e^{c_{d-p+q}}$$

Así,

$$\begin{aligned}\bar{\phi} &= \frac{1}{(d-p+q)!} \left[\frac{1}{(d-p+q)!} \eta_{a_1 b_1} \dots \eta_{a_q b_q} \Phi^{n_1 \dots n_p} \epsilon_{n_1 \dots n_p m_1 \dots m_{d-p}} \delta_{c_1 \dots c_{d-p+q}}^{b_1 \dots b_q m_1 \dots m_{d-p}} \right] e^{c_1} \wedge \dots \wedge e^{c_{d-p+q}} \\ &= \frac{1}{(d-p+q)!} (\phi_{a_1 \dots a_q})_{c_1 \dots c_{d-p+q}} e^{c_1} \wedge \dots \wedge e^{c_{d-p+q}}\end{aligned}$$

Ahora, calculemos el Hodge

$$*\bar{\phi} = \frac{1}{(d-p+q)!} \frac{1}{(p-q)!} (\phi_{a_1 \dots a_q})^{c_1 \dots c_{d-p+q}} \epsilon_{c_1 \dots c_{d-p+q} d_1 \dots d_{p-q}} e^{d_1} \wedge \dots \wedge e^{d_{p-q}}$$

$$\epsilon_{c_1 \dots c_{d-p+q} d_1 \dots d_{p-q}} = \eta_{c_1 l_1} \dots \eta_{c_{d-p+q} l_{d-p+q}} \eta_{d_1 s_1} \dots \eta_{d_{p-q} s_{p-q}} (-1)^{\eta_-} \epsilon^{l_1 \dots l_{d-p+q} s_1 \dots s_{p-q}}$$

$$\Rightarrow *\bar{\phi} = \frac{(-1)^{\eta_-}}{(d-p+q)! (p-q)!} (\phi_{a_1 \dots a_q})_{l_1 \dots l_{d-p+q}} \epsilon^{l_1 \dots l_{d-p+q} s_1 \dots s_{p-q}} e_{s_1} \wedge \dots \wedge e_{s_{p-q}}$$

Luego,

$$\begin{aligned}*\bar{\phi} &= \frac{(-1)^{\eta_-}}{(d-p+q)! (p-q)!} \frac{1}{p!(p-q)!} \eta_{a_1 b_1} \dots \eta_{a_q b_q} \Phi^{n_1 \dots n_p} \epsilon_{n_1 \dots n_p m_1 \dots m_{d-p}} \delta_{l_1 \dots l_{d-p+q}}^{b_1 \dots b_q m_1 \dots m_{d-p}} \epsilon^{l_1 \dots l_{d-p+q} s_1 \dots s_{p-q}} \\ &\quad \times e_{s_1} \wedge \dots \wedge e_{s_{p-q}} \\ &= \frac{(-1)^{\eta_-}}{(d-p+q)! (p-q)!} \frac{1}{p!(p-q)!} \eta_{a_1 b_1} \dots \eta_{a_q b_q} \Phi^{n_1 \dots n_p} \delta_{n_1 \dots n_p m_1 \dots m_{d-p}}^{l_1 \dots l_{d-p+q} s_1 \dots s_{p-q}} \delta_{l_1 \dots l_{d-p+q}}^{b_1 \dots b_q m_1 \dots m_{d-p}} e_{s_1} \wedge \dots \wedge e_{s_{p-q}} \\ &= \frac{(-1)^{\eta_-}}{(p-q)! (d-p+q)!} \frac{1}{p!(d-p)!} \eta_{a_1 b_1} \dots \eta_{a_q b_q} \Phi^{n_1 \dots n_p} (d-p+q)! \delta_{n_1 \dots n_p m_1 \dots m_{d-p}}^{b_1 \dots b_q m_1 \dots m_{d-p} s_1 \dots s_{p-q}} e_{s_1} \wedge \dots \wedge e_{s_{p-q}}\end{aligned}$$

Donde

$$\delta_{n_1 \dots n_p m_1 \dots m_{d-p}}^{b_1 \dots b_q m_1 \dots m_{d-p} s_1 \dots s_{p-q}} = (-1)^{(d-p)(p-q)} \delta_{n_1 \dots n_p m_1 \dots m_{d-p}}^{b_1 \dots b_q s_1 \dots s_{p-q} m_1 \dots m_{d-p}}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}*\bar{\phi} &= (-1)^{\eta_-} \frac{1}{(p-q)!} \frac{1}{p!(d-p)!} \eta_{a_1 b_1} \dots \eta_{a_q b_q} \Phi^{n_1 \dots n_p} (-1)^{(d-p)(p-q)} \delta_{n_1 \dots n_p m_1 \dots m_{d-p}}^{b_1 \dots b_q s_1 \dots s_{p-q} m_1 \dots m_{d-p}} e_{s_1} \wedge \dots \wedge e_{s_{p-q}} \\ &= (-1)^{(d-p)(p-q)+\eta_-} \frac{1}{(p-q)!} \frac{1}{p!(d-p)!} \eta_{a_1 b_1} \dots \eta_{a_q b_q} \Phi^{n_1 \dots n_p} (d-p)! \delta_{n_1 \dots n_p}^{b_1 \dots b_q s_1 \dots s_{p-q}} e_{s_1} \wedge \dots \wedge e_{s_{p-q}} \\ &= (-1)^{(d-p)(p-q)+\eta_-} \frac{1}{(p-q)!} \frac{1}{p!} \eta_{a_1 b_1} \dots \eta_{a_q b_q} \Phi^{n_1 \dots n_p} \delta_{n_1 \dots n_p}^{b_1 \dots b_q s_1 \dots s_{p-q}} e_{s_1} \wedge \dots \wedge e_{s_{p-q}} \\ &= (-1)^{(d-p)(p-q)+\eta_-} \frac{1}{(p-q)!} \frac{1}{p!} \eta_{a_1 b_1} \dots \eta_{a_q b_q} p! \Phi^{b_1 \dots b_q s_1 \dots s_{p-q}} e_{s_1} \wedge \dots \wedge e_{s_{p-q}} \\ &= (-1)^{(d-p)(p-q)+\eta_-} \frac{1}{(p-q)!} \Phi_{a_1 \dots a_q s_1 \dots s_{p-q}} e^{s_1} \wedge \dots \wedge e^{s_{p-q}}\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{a_1 \dots a_q} \Phi &= (-1)^{(d-p)(p-q)+\eta_-} * (e_{a_1} \wedge \dots \wedge e_{a_q} * \Phi) \\ &= (-1)^{[(d-p)(p-q)+\eta_-]^2} \frac{1}{(p-q)!} \Phi_{a_1 \dots a_q s_1 \dots s_{p-q}} e^{s_1} \wedge \dots \wedge e^{s_{p-q}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{a_1 \dots a_q} \Phi = \frac{1}{(p-q)!} \Phi_{a_1 \dots a_q n_1 \dots n_{p-q}} e^{n_1} \wedge \dots \wedge e^{n_{p-q}}$$

El más importante de todos es el caso $q = 1$,

$$\begin{aligned}\sum_a &= (-1)^{d(p-1)-p(p-1)+\eta_-} * e_a \wedge *, \\ &= (-1)^{d(p-1)+\eta_-} * e_a \wedge *\end{aligned}$$

Ahora, si además consideramos $d = 4$

$$\sum_a = - * e_a \wedge *$$

Propiedades de $\sum_{a_1 \dots a_q}$

Este operador, es muy útil para el cálculo debido a que satisface las siguientes propiedades:

1. $\frac{(p-q)!}{p!} e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_q} \wedge \sum_{a_1 \dots a_q} \Phi = \Phi$ (e.d., el operador \sum es invertible)
2. $\sum_{a_1 \dots a_q} = \frac{1}{q!} \delta_{a_1 \dots a_q}^{b_1 \dots b_q} \sum_{b_1 \dots b_q}$ (e.d., el operador \sum es antisimétrico)
3. $\sum_a \sum_{b_1 \dots b_q} = \sum_{b_1 \dots b_q a}$ (e.d., toda la familia de operadores se puede generar en forma recursiva a partir de \sum_a)
4. $\sum_a \sum^a = 0$ (e.d., \sum_a satisface una propiedad análoga a $d^2 = 0$)
5. $\sum_a (\alpha^{(p)} \wedge \beta^{(q)}) = \sum_a \alpha^{(p)} \wedge \beta^{(q)} + (-1)^p \alpha^{(p)} \wedge \sum_a \beta^{(q)}$ (e.d., \sum_a satisface la regla de Leibniz)
6. $D \sum_a + \sum_a D = e_a^\mu D_\mu$
7. $\alpha^{(d-r+q)} \wedge \sum_{a_1 \dots a_q} \beta^{(r)} = (-1)^{(d-r)(r-q)} \beta^{(r)} \wedge \sum_{a_1 \dots a_q} \alpha^{(d-r+q)}$ (e.d., satisface una generalización de $\alpha^{(p)} \wedge * \beta^{(p)} = \beta^{(p)} \wedge * \alpha^{(p)}$)
8. $\alpha^{(d)} \wedge \sum_{a_1 \dots a_q} \beta^{(q)} = \beta^{(q)} \wedge \sum_{a_1 \dots a_q} \alpha^{(d)}$ (e.d., el caso particular $r = q$ en la propiedad anterior)
9. Dada una 0-forma $\lambda^{b_1 \dots b_r}$ y una p -forma Φ , $\sum_{a_1 \dots a_q} (\lambda^{b_1 \dots b_r} \Phi) = \lambda^{b_1 \dots b_r} \sum_{a_1 \dots a_q} \Phi$ (esto se debe a que $* (\lambda^{b_1 \dots b_r} \Phi) = \lambda^{b_1 \dots b_r} * \Phi$)
10. $\sum_b e^a = \delta_b^a$

Apéndice B

Torsión nula y multiplicadores de Lagrange

Consideremos una d -forma lagrangeana del tipo

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(e^a, \omega^{ab}, \phi, \Psi^A, \partial e, \partial \omega, \partial \phi, \partial \psi \right)$$

en donde ϕ es una 0-forma y ψ^A es una p -forma campo fermiónico. Entonces su variación viene dada por

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{E}_a \wedge \delta e^a + \mathcal{E}_{ab} \wedge \delta \omega^{ab} + \mathcal{E} \delta \phi + \mathcal{E}_A \wedge \delta \psi^A + d \left(\mathcal{B}_a \wedge \delta e^a + \mathcal{B}_{ab} \wedge \delta \omega^{ab} + \mathcal{B} \delta \phi + \mathcal{B}_A \wedge \delta \psi^A \right).$$

Entonces, en general

$$T \approx \partial \phi.$$

Es decir, la torsión es generada por campos variables. *¿Cómo recupero las ecuaciones de campo estándar, i.e., $T^a = 0$ sin imponer el constraint $\phi = \text{constante}$?*

Para esto definimos el lagrangeano restringido, igual al lagrangeano antiguo más una $(d-2)$ -forma Λ_a por la torsión, como sigue

$$\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \Lambda_a \wedge T^a$$

con la $(d-2)$ -forma multiplicador de Lagrange Λ_a . Luego, tenemos que la variación de este nuevo término se escribe

$$\delta (\Lambda_a \wedge T^a) = -D\Lambda_a \wedge \delta e^a - \frac{1}{2} (\Lambda_a \wedge e_b - \Lambda_b \wedge e_a) \wedge \delta \omega^{ab} + \delta \Lambda_a \wedge T^a + d (\Lambda_a \wedge \delta e^a).$$

Puesto que su variación con respecto al vielbein está dada por

$$\delta_e \bar{\mathcal{L}} = \delta_e \mathcal{L} + \Lambda_a \wedge D \delta e^a$$

$$\begin{aligned} d(\Lambda_a \wedge \delta e^a) &= D\Lambda_a \wedge \delta e^a + (-1)^d \Lambda_a \wedge D\delta e^a \\ \Rightarrow \Lambda_a \wedge D\delta e^a &= (-1)^d d(\Lambda_a \wedge \delta e^a) - (-1)^d D\Lambda_a \wedge \delta e^a \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \delta_e \bar{\mathcal{L}} &= \delta_e \mathcal{L} - (-1)^d D\Lambda_a \wedge \delta e^a + (-1)^d d(\dots) \\ &= \left[\xi_a - (-1)^d D\Lambda_a \right] \wedge \delta e^a + d(\dots). \end{aligned}$$

Y la variación con respecto a la conexión de Lorentz tiene la forma

$$\begin{aligned} \delta_\omega \bar{\mathcal{L}} &= \delta_\omega \mathcal{L} + \Lambda_a \wedge \delta \omega^a_b \wedge e^b \\ &= \delta_\omega \mathcal{L} - \Lambda_a \wedge e_b \wedge \delta^{ab} \\ &= \xi_{ab} \wedge \delta \omega^{ab} - \frac{1}{2} (\Lambda_a \wedge e_b - \Lambda_b \wedge e_a) \wedge \delta \omega^{ab} \\ &= \left[\xi_{ab} - \frac{1}{2} (\Lambda_a \wedge e_b - \Lambda_b \wedge e_a) \right] \delta \omega^{ab} = 0 \end{aligned}$$

así tenemos que la variación del lagrangeano con vínculo viene dada por

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathcal{L}} &= [\mathcal{E}_a - D\Lambda_a] \wedge \delta e^a + \left[\mathcal{E}_{ab} - \frac{1}{2} (\Lambda_a \wedge e_b - \Lambda_b \wedge e_a) \right] \wedge \delta \omega^{ab} + \mathcal{E} \delta \phi + \mathcal{E}_A \wedge \delta \psi^A + \delta \Lambda_a \wedge T^a \\ &\quad + d \left([\mathcal{B}_a + \Lambda_a] \wedge \delta e^a + \mathcal{B}_{ab} \delta \omega^{ab} + \mathcal{B} \delta \phi + \mathcal{B}_A \wedge \delta \psi^A \right). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Por lo que finalmente obtenemos ecuaciones de campo de la forma

$$\mathcal{E}^a - D\Lambda^a = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$\mathcal{E}^{ab} - \frac{1}{2} (\Lambda^a \wedge e^b - \Lambda^b \wedge e^a) = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$\mathcal{E} = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$\mathcal{E}_A = 0, \quad (\text{B.5})$$

$$T^a = 0. \quad (\text{B.6})$$

Notamos que para recuperar las ecuaciones de campo estándar tenemos que despejar el multiplicador

$$\Lambda^a = \frac{1}{(d-2)!} \Lambda^a_{m_1 \dots m_{d-2}} e^{m_1} \wedge \dots \wedge e^{m_{d-2}},$$

de la segunda ecuación de movimiento y reemplazarlo en la primera para obtener las ecuaciones estándar sin torsión (si la torsión es nula entonces el vielbein y la

conexión son conceptos dependientes y sólo debe haber una ec. de campo asociada a estos campos).

Vamos a resolver en $d = 4$, pero lo mismo se puede hacer en dimensiones más altas. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}\Lambda^a &= \frac{1}{2!} \Lambda^a{}_{rs} e^s \wedge e^t, \\ \mathcal{E}^{ab} &= \frac{1}{3!} \mathcal{E}^{ab}{}_{pqr} e^p \wedge e^q \wedge e^r.\end{aligned}$$

Despejemos esto considerando la segunda ecuación, la cuál que surge de la variación del lagrangiano restringido con respecto a la conexión de espín $\bar{\mathcal{L}}_{\omega^{cd}}$ y vamos a reescribirla como

$$\epsilon_{abcd} \left[\mathcal{E}^{ab} - \frac{1}{2} (\Lambda^a \wedge e^b - \Lambda^b \wedge e^a) \right] \wedge \delta \omega^{cd} = 0.$$

Después de un poco de álgebra llegamos a

$$\frac{1}{3!} \mathcal{E}^{ab}{}_{pqr} \delta_{abmn}^{\text{pqrc}} + \delta_{amn}^{\text{cpr}} \frac{1}{2!} \Lambda^a{}_{pr} = 0,$$

recordando que

$$\delta_{amn}^{\text{cpr}} = \delta_a^c \delta_{mn}^{\text{pr}} - \delta_m^c \delta_{an}^{\text{pr}} + \delta_n^c \delta_{am}^{\text{pr}},$$

llegamos a

$$\frac{1}{3!} \mathcal{E}^{ab}{}_{pqr} \delta_{abmn}^{\text{pqrc}} + (\Lambda^c{}_{mn} + \delta_n^c \Lambda^a{}_{am} - \delta_m^c \Lambda^a{}_{an}) = 0.$$

Trazando sobre c y m , tenemos que

$$\Lambda^c{}_{cn} = -\frac{1}{2} \mathcal{E}^{ab}{}_{abn}$$

y por lo tanto,

$$\Lambda^l{}_{mn} = \frac{1}{2} \delta_n^l \mathcal{E}^{ab}{}_{abm} - \frac{1}{2} \delta_m^l \mathcal{E}^{ab}{}_{abn} + \frac{1}{3!} \mathcal{E}^{ab}{}_{pqr} \delta_{abmn}^{\text{lpqr}}.$$

Esto se puede simplificar usando que

$$\delta_{abmn}^{\text{lpqr}} = \delta_a^l \delta_{bmn}^{\text{pqr}} - \delta_b^l \delta_{amn}^{\text{pqr}} + \delta_m^l \delta_{abn}^{\text{pqr}} - \delta_n^l \delta_{abm}^{\text{pqr}}$$

así,

$$\frac{1}{3!} \mathcal{E}^{ab}{}_{pqr} \delta^l{}_{abmn} = 2\mathcal{E}^{lb}{}_{mnn} + \delta_m^l \mathcal{E}^{ab}{}_{abn} - \delta_n^l \mathcal{E}^{ab}{}_{abm}.$$

Reemplazando eso, tenemos finalmente que

$$\Lambda^a{}_{mn} = 2\mathcal{E}^{ap}{}_{pmn} + \frac{1}{2} (\delta_m^a \mathcal{E}^{pq}{}_{pqn} - \delta_n^a \mathcal{E}^{pq}{}_{pqm}).$$

Entonces, **cuando la torsión es cero** tenemos

$$D\Lambda^a = \left[2D\mathcal{E}^{ap}{}_{pmn} + \frac{1}{2} (\delta_m^a D\mathcal{E}^{pq}{}_{pqn} - \delta_n^a D\mathcal{E}^{pq}{}_{pqm}) \right] \wedge e^m \wedge e^n.$$

Ahora que hemos obtenido la forma de Λ_a resolviendo la ec. (B.3), debemos reemplazarla en (B.2) para recuperar el caso $T^a = 0$.

Donde Λ_a en términos de nuestro operador Σ^a , puede escribirse como

$$\Lambda^a = 2\Sigma_b \mathcal{E}^{ab} + \frac{1}{2} e^a \wedge \Sigma_{bc} \mathcal{E}^{bc}. \quad (\text{B.7})$$

Por lo tanto, concluimos que para obtener las ecuaciones de campo estándar sin torsión debemos resolver las ecuaciones

$$\mathcal{E}^a - 2D\Sigma_b \mathcal{E}^{ab} + \frac{1}{2} e^a \wedge d\Sigma_{bc} \mathcal{E}^{bc} \Big|_{T^a=0} = 0, \quad (\text{B.8})$$

$$\mathcal{E} \Big|_{T^a=0} = 0. \quad (\text{B.9})$$

Apéndice C

Ecuación de Killing conformal en espacios curvos

Consideremos un Lie dragging finito ϕ^* y una función $\Lambda(x)$ finita, tal que,

$$\phi^* g_{\mu\nu}(x) = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x) \quad (\text{C.1})$$

A primer orden infinitesimal,

$$\begin{aligned} \phi^* &= 1 + \epsilon \mathcal{L}_\zeta \\ \Lambda(x) &= 1 + K(x) \end{aligned}$$

donde $1 + \epsilon \mathcal{L}_\zeta$ puede verse como la transformación infinitesimal del generador del grupo de isometrías. Además, notamos que si $\Lambda(x) = 1$ es trivial ver que obtenemos la ec. de Killing usual.

Así, vemos que (C.1) toma la forma

$$[1 + \epsilon \mathcal{L}_\zeta] g_{\mu\nu}(x) = [1 + K(x)] g_{\mu\nu}(x)$$

Donde la derivada de Lie de $g_{\mu\nu}$ con respecto al campo vectorial de Killing conformal ζ debe ser proporcional a $g_{\mu\nu}$. Luego, usando

$$\mathcal{L}_\zeta g_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\nabla}_\mu \zeta_\nu + \overset{\circ}{\nabla}_\nu \zeta_\mu$$

obtenemos la ec. de los Killing conformales

$$\overset{\circ}{\nabla}_\mu \zeta_\nu + \overset{\circ}{\nabla}_\nu \zeta_\mu = K(x) g_{\mu\nu}(x). \quad (\text{C.2})$$

Tomando la traza de (C.2), evaluamos la función $K(x)$, obteniendo

$$K(x) = \frac{2}{d} \mathring{\nabla}_\gamma \zeta^\gamma,$$

por lo tanto, la ec. de Killing conformal será

$$\mathring{\nabla}_\mu \zeta_\nu + \mathring{\nabla}_\nu \zeta_\mu = \frac{2}{d} \mathring{\nabla}_\gamma \zeta^\gamma g_{\mu\nu}(x). \quad (\text{C.3})$$

y

$$\Lambda(x) = 1 + \epsilon \frac{2}{d} \mathring{\nabla}_\gamma \zeta^\gamma + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Tomemos la derivada $\mathring{\nabla}^\nu$ de la ec. (C.3), se sigue que

$$\mathring{\nabla}^\nu \mathring{\nabla}_\mu \zeta_\nu + \mathring{\nabla}^\nu \mathring{\nabla}_\nu \zeta_\mu = \frac{2}{d} \mathring{\nabla}^\nu \mathring{\nabla}_\gamma \zeta^\gamma g_{\mu\nu}(x).$$

Definiendo el Laplaciano de Bochner como

$$\square_B = -\mathring{\nabla}^\nu \mathring{\nabla}_\nu,$$

tenemos

$$\begin{aligned} \mathring{\nabla}_\nu \mathring{\nabla}_\mu \zeta^\nu - \square_B \zeta_\mu &= \frac{2}{d} \mathring{\nabla}_\mu \mathring{\nabla}_\gamma \zeta^\gamma \\ \left[\mathring{\nabla}_\nu, \mathring{\nabla}_\mu \right] \zeta^\nu + \mathring{\nabla}_\mu \mathring{\nabla}_\gamma \zeta^\gamma - \square_B \zeta_\mu &= \frac{2}{d} \mathring{\nabla}_\mu \mathring{\nabla}_\gamma \zeta^\gamma \\ \left[\mathring{\nabla}_\nu, \mathring{\nabla}_\mu \right] \zeta^\nu - \square_B \zeta_\mu &= \left(\frac{2}{d} - 1 \right) \mathring{\nabla}_\mu \mathring{\nabla}_\gamma \zeta^\gamma \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

En general, en un espacio curvo con torsión el conmutador de las derivadas covariantes actuando sobre un vector, toma la forma

$$[\nabla_\lambda, \nabla_\mu] \zeta^\rho = R^\rho{}_{\sigma\lambda\mu} \zeta^\sigma - T^\sigma{}_{\lambda\mu} \nabla_\sigma \zeta^\rho.$$

Por lo que, si la torsión es nula

$$\left[\mathring{\nabla}_\lambda, \mathring{\nabla}_\mu \right] \zeta^\lambda = \mathring{R}_{\mu\lambda} \zeta^\lambda$$

Finalmente la ec. (C.4) se escribirá

$$\begin{aligned}
\mathring{R}_{\mu\lambda}\zeta^\lambda - \mathring{\square}_B\zeta_\mu &= \left(\frac{2}{d} - 1\right) \mathring{\nabla}_\mu \mathring{\nabla}_\lambda \zeta^\lambda \\
\Rightarrow \mathring{\square}_B\zeta_\mu - \mathring{R}_{\mu\lambda}\zeta^\lambda &= \left(1 - \frac{2}{d}\right) \mathring{\nabla}_\mu \mathring{\nabla}_\lambda \zeta^\lambda
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Ahora si tomamos la derivada covariante $\mathring{\nabla}_\nu$ a la ec. (C.5) y usando el hecho de que

$$(\mathring{\square}_B \nabla_\nu - \nabla_\nu \mathring{\square}_B) \zeta_\mu = R_{\lambda\nu} \nabla^\lambda \zeta_\mu,$$

obtenemos

$$-\mathring{R}_{\lambda\nu} \mathring{\nabla}^\lambda \zeta_\mu + \mathring{\square}_B \mathring{\nabla}_\nu \zeta_\mu - \mathring{\nabla}_\nu \mathring{R}_{\mu\lambda} \zeta^\lambda = \left(1 - \frac{2}{d}\right) \mathring{\nabla}_\nu \mathring{\nabla}_\mu \mathring{\nabla}_\lambda \zeta^\lambda \tag{C.6}$$

Después intercambiando índices $\mu \leftrightarrow \nu$, y sumando la expresión resultante a la ecuación (C.6) tenemos

$$-\mathring{R}_{\lambda\nu} \mathring{\nabla}^\lambda \zeta_\mu - \mathring{R}_{\lambda\mu} \mathring{\nabla}^\lambda \zeta_\nu + \mathring{\square}_B [\mathring{\nabla}_\mu \zeta_\nu + \mathring{\nabla}_\nu \zeta_\mu] - \mathring{\nabla}_\mu \mathring{R}_{\nu\lambda} \zeta^\lambda - \mathring{\nabla}_\nu \mathring{R}_{\mu\lambda} \zeta^\lambda = \left(1 - \frac{2}{d}\right) [\mathring{\nabla}_\mu \mathring{\nabla}_\nu + \mathring{\nabla}_\nu \mathring{\nabla}_\mu] \mathring{\nabla}_\lambda \zeta^\lambda \tag{C.7}$$

Usando la ec. (C.3), vemos que (C.7) se escribe como

$$-\mathring{R}_{\lambda\nu} \mathring{\nabla}^\lambda \zeta_\mu - \mathring{R}_{\lambda\mu} \mathring{\nabla}^\lambda \zeta_\nu + \mathring{\square}_B \left[\frac{2}{d} \mathring{\nabla}_\lambda \zeta^\lambda g_{\mu\nu}\right] - \mathring{\nabla}_\mu \mathring{R}_{\nu\lambda} \zeta^\lambda - \mathring{\nabla}_\nu \mathring{R}_{\mu\lambda} \zeta^\lambda = \left(1 - \frac{2}{d}\right) [\mathring{\nabla}_\mu \mathring{\nabla}_\nu + \mathring{\nabla}_\nu \mathring{\nabla}_\mu] \mathring{\nabla}_\lambda \zeta^\lambda \tag{C.8}$$

Tomando la traza de (C.8),

$$-\mathring{R}^\mu{}_\lambda \mathring{\nabla}^\lambda \zeta_\mu - \mathring{R}^\nu{}_\lambda \mathring{\nabla}^\lambda \zeta_\nu + \mathring{\square}_B [2 \mathring{\nabla}_\lambda \zeta^\lambda] - \mathring{\nabla}^\nu \mathring{R}_{\nu\lambda} \zeta^\lambda - \mathring{\nabla}^\mu \mathring{R}_{\mu\lambda} \zeta^\lambda = \left(\frac{4}{d} - 2\right) \mathring{\square}_B \mathring{\nabla}_\lambda \zeta^\lambda$$

equivalente a

$$\frac{d}{2} [\mathring{R}^\mu{}_\lambda \mathring{\nabla}^\lambda \zeta_\mu + \mathring{\nabla}^\mu \mathring{R}_{\mu\lambda} \zeta^\lambda] = (d-1) \mathring{\square}_B \mathring{\nabla}_\lambda \zeta^\lambda \tag{C.9}$$

Si consideramos espacios planos con una métrica constante de la forma $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, \dots, +1, \dots)$, entonces la ecuación anterior se reduce a

$$\boxed{(d-1) \mathring{\square}(\partial \cdot \epsilon) = 0}. \tag{C.10}$$

Apéndice D

Invariancia conforme con Torsión no nula

En este apéndice se detallará la construcción del Lagrangeano conformal

Tenemos que

$$\bar{e}^a = \exp[\sigma(x)] e^a, \quad (\text{D.1})$$

y definiremos $\bar{\omega}^{ab}$ como la conexión sin torsión para \bar{e}^a y $\dot{\omega}^{ab}$ como la conexión sin torsión para e^a , i.e,

$$\begin{aligned} \bar{D}\bar{e}^a &= 0, \\ \dot{D}e^a &= 0. \end{aligned}$$

Por comodidad llamaremos

$$\Delta^{ab} = \bar{\omega}^{ab} - \dot{\omega}^{ab}.$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \bar{D}\bar{e}^a &= 0 \\ d\bar{e}^a + \bar{\omega}^a_b \wedge \bar{e}^b &= 0 \\ d \exp[\sigma(x)] \wedge e^a + \exp[\sigma(x)] de^a + \exp[\sigma(x)] \bar{\omega}^a_b \wedge e^b &= 0 \\ \exp[\sigma(x)] d\sigma \wedge e^a - \exp[\sigma(x)] \dot{\omega}^a_b \wedge e^b + \exp[\sigma(x)] \bar{\omega}^a_b \wedge e^b &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, definiendo

$$\zeta^a = \Sigma^a d\sigma$$

tenemos

$$\zeta_b e^b \wedge e^a - \dot{\omega}^a_b \wedge e^b + \bar{\omega}^a_b \wedge e^b = 0$$

y por lo tanto

$$\Delta^a_b \wedge e^b - \zeta_b e^a \wedge e^b = 0.$$

Ahora, escribiendo

$$\Delta^a_b = \Delta^a_{bc} e^c,$$

tenemos

$$\begin{aligned} \Delta^a_{bc} e^c \wedge e^b - \zeta_b e^a \wedge e^b &= 0 \\ -\frac{1}{2} (\Delta^a_{mn} - \Delta^a_{nm}) e^m \wedge e^n - \frac{1}{2} \zeta_c \delta_{mn}^{ac} e^m \wedge e^n &= 0 \\ -(\Delta^a_{mn} - \Delta^a_{nm}) - \zeta_c \delta_{mn}^{ac} &= 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\Delta_{abc} - \Delta_{acb} = \zeta_b \eta_{ac} - \zeta_c \eta_{ab}.$$

Considerando las permutaciones cíclicas

$$\Delta_{abc} - \Delta_{acb} = \zeta_b \eta_{ac} - \zeta_c \eta_{ab} \tag{D.2}$$

$$\Delta_{bca} - \Delta_{bac} = \zeta_c \eta_{ba} - \zeta_a \eta_{bc} \tag{D.3}$$

$$\Delta_{cab} - \Delta_{cba} = \zeta_a \eta_{cb} - \zeta_b \eta_{ca} \tag{D.4}$$

sumando (D.2)+(D.3) y restando (D.4), obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta_{abc} - \Delta_{acb} + \Delta_{bca} - \Delta_{bac} - (\Delta_{cab} - \Delta_{cba}) &= \zeta_b \eta_{ac} - \zeta_c \eta_{ab} + \zeta_c \eta_{ba} - \zeta_a \eta_{bc} - (\zeta_a \eta_{cb} - \zeta_b \eta_{ca}) \\ \Delta_{abc} - \Delta_{bac} - \Delta_{acb} - \Delta_{cab} + \Delta_{bca} + \Delta_{cba} &= \zeta_b (\eta_{ac} + \eta_{ca}) + \zeta_c (\eta_{ba} - \eta_{ab}) - \zeta_a (\eta_{bc} + \eta_{cb}) \\ 2\Delta_{abc} &= 2\zeta_b \eta_{ac} - 2\zeta_a \eta_{bc} \\ \Delta_{abc} &= \zeta_b \eta_{ac} - \zeta_a \eta_{bc} \\ \Delta^{ab}_c &= \zeta^b \delta_c^a - \zeta^a \delta_c^b \\ \Delta^{ab} &= e^a \zeta^b - e^b \zeta^a \end{aligned}$$

Así, tenemos que la conexión sin torsión bajo una transformación conformal del tipo (D.1) cambia como

$$\bar{\omega}^{ab} = \dot{\omega}^{ab} + e^a \zeta^b - e^b \zeta^a. \tag{D.5}$$

Además se hace la hipótesis de que la contorsión no re-escala bajo transformaciones conformales,

$$\kappa^{ab} \rightarrow \bar{\kappa}^{ab} = \kappa^{ab}, \tag{D.6}$$

y que por lo tanto la conexión completa re-escala bajo transformaciones conformales de la forma

$$\omega^{ab} \rightarrow \bar{\omega}^{ab} = \omega^{ab} + [e^a \zeta^b - e^b \zeta^a]. \tag{D.7}$$

Y la torsión $T^a = \kappa^a_b \wedge e^b$ lo hace de la misma forma que el vielbein

$$T^a \rightarrow \bar{T}^a = \exp(\sigma)T^a. \quad (\text{D.8})$$

De manera que quedándonos con el ansatz $\bar{\kappa}^{ab} = \kappa^{ab}$, es decir, imponiendo que la contorsión no re-escala, tenemos que

$$R^{ab} \rightarrow \bar{R}^{ab} = R^{ab} + D \left[e^a \xi^b - e^b \xi^a \right] + [e^a \xi_c - e_c \xi^a] \wedge [e^c \xi^b - e^b \xi^c], \quad (\text{D.9})$$

utilizando (3.16) en $[e^a \xi_c - e_c \xi^a] \wedge [e^c \xi^b - e^b \xi^c]$, implica

$$e^a \xi^b \wedge d\sigma - e^a e^b \xi^2 - \cancel{e^c e^a \xi^b} + \xi^a d\sigma \wedge e^b = -d\sigma \wedge (e^a \xi^b - e^b \xi^a) - e^a \wedge e^b \xi^2.$$

Por lo tanto, podemos escribir finalmente cómo cambia la curvatura bajo transformaciones conformales

$$\bar{R}^{ab} = R^{ab} + T^a \xi^b - T^b \xi^a - \left[e^a \wedge D \xi^b - e^b \wedge D \xi^a \right] - \left[d\sigma \wedge (e^a \xi^b - e^b \xi^a) + \xi^2 e^a \wedge e^b \right]. \quad (\text{D.10})$$

Ahora bien, esto suele escribirse como

$$\Omega = \exp(\sigma),$$

y por lo tanto,

$$\sigma = \ln \Omega, \quad (\text{D.11})$$

$$d\sigma = \frac{1}{\Omega} d\Omega, \quad (\text{D.12})$$

$$\begin{aligned} \xi^a &= \frac{1}{\Omega} \sum^a d\Omega \\ &\equiv \frac{1}{\Omega} Z^a. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Luego, en términos de Ω tenemos que

$$\bar{R}^{ab} = R^{ab} + D \left[\frac{1}{\Omega} (e^a Z^b - e^b Z^a) \right] - \frac{1}{\Omega^2} \left[d\sigma \wedge (e^a Z^b - Z^a e^b) + Z^f Z_f e^a \wedge e^b \right]. \quad (\text{D.14})$$

Consideremos el término completo del lagrangeano de Einstein-Hilbert, y veamos cómo cambia bajo la transformación $\bar{e}^a \rightarrow \Omega e^a$,

$$\epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \rightarrow \epsilon_{abcd} \bar{R}^{ab} \wedge \bar{e}^c \wedge \bar{e}^d \quad (\text{D.15})$$

Para poder hacer esto usamos la ec. (refcurvaturafinal), de manera que

$$\begin{aligned} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \rightarrow \epsilon_{abcd} \left\{ R^{ab} + \frac{1}{\Omega} (T^a Z^b - T^b Z^a) - \left[e^a \wedge D \left(\frac{1}{\Omega} Z^b \right) - e^b \wedge D \left(\frac{1}{\Omega} Z^a \right) \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{\Omega^2} \left[d\Omega \wedge (e^a Z^b - Z^a e^b) + Z^f Z_f e^a \wedge e^b \right] \right\} \Omega^2 e^c \wedge e^d \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Ahora, podemos notar inmediatamente que hay dos términos triviales:

- El primer término $\Omega^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d$.
- Y el último $-\Omega^2 \epsilon_{abcd} Z^f Z_f e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d$

Por otro lado, vemos que

$$\epsilon_{abcd} \left[e^a \wedge D \left(\frac{1}{\Omega} Z^b \right) - e^b \wedge D \left(\frac{1}{\Omega} Z^a \right) \right] = \epsilon_{abcd} \left[2e^a \wedge D \left(\frac{1}{\Omega} Z^b \right) \right],$$

dado que me interesa calcular el término

$$\epsilon_{abcd} \left[2e^a \wedge D \left(\frac{1}{\Omega} Z^b \right) \right] \wedge \Omega^2 e^c \wedge e^d$$

integramos por partes

$$D \left(2\epsilon_{abcd} \frac{1}{\Omega} e^a Z^b \wedge \Omega^2 e^c \wedge e^d \right) = D \left(2\epsilon_{abcd} \frac{1}{\Omega} e^a Z^b \right) \Omega^2 \wedge e^c \wedge e^d - 2\epsilon_{abcd} \frac{1}{\Omega} e^a Z^b \wedge D \left(\Omega^2 e^c \wedge e^d \right), \quad (\text{D.17})$$

donde

$$\begin{aligned} D \left(\Omega^2 e^c \wedge e^d \right) &= 2\Omega d\Omega e^c \wedge e^d + \Omega^2 D \left(e^c \wedge e^d \right) \\ &= 2\Omega d\Omega e^c \wedge e^d + \Omega^2 \left(T^c \wedge e^d - e^c \wedge T^d \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D \left(2\epsilon_{abcd} \frac{1}{\Omega} e^a Z^b \wedge \Omega^2 e^c \wedge e^d \right) &= D \left(2\epsilon_{abcd} \frac{1}{\Omega} e^a Z^b \right) \Omega^2 \wedge e^c \wedge e^d \\ &\quad - 4\epsilon_{abcd} \frac{1}{\Omega} e^a Z^b \Omega \wedge d\Omega e^c \wedge e^d \\ &\quad - 2\epsilon_{abcd} \frac{1}{\Omega} e^a Z^b \Omega^2 \left(T^c \wedge e^d - e^c \wedge T^d \right) \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} D \left(2\epsilon_{abcd} \frac{1}{\Omega} e^a Z^b \right) &= d \left(2\epsilon_{abcd} \Omega e^a Z^b \wedge e^c \wedge e^d \right) + 2\epsilon_{abcd} \frac{1}{\Omega} e^a Z^b \wedge D \left(\Omega^2 e^c \wedge e^d \right) \\ &= d \left(2\epsilon_{abcd} \Omega e^a Z^b \wedge e^c \wedge e^d \right) + 4\epsilon_{abcd} d\Omega Z^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\ &\quad + 4\Omega \epsilon_{abcd} Z^a T^b \wedge e^c \wedge e^d \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Por otro lado, el término

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\Omega^2} \epsilon_{abcd} \left[d\Omega \wedge \left(e^a Z^b - e^b Z^a \right) \right] \wedge e^c \wedge e^d \Omega^2 &= -d\Omega \wedge \left(\epsilon_{abcd} e^a Z^b - \epsilon_{bacd} e^b Z^a \right) \wedge e^c \wedge e^d \\ &= -2\Omega \wedge \epsilon_{abcd} Z^b e^a \wedge e^c \wedge e^d \\ &= 2\Omega \wedge \epsilon_{bacd} Z^b e^a \wedge e^c \wedge e^d \\ &= 2\Omega \wedge \epsilon_{abcd} Z^a e^b \wedge e^c \wedge e^d \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Por lo tanto, el término $\epsilon_{abcd}\bar{R}^{ab} \wedge \bar{e}^c \wedge \bar{e}^d$ transforma como

$$\begin{aligned} \epsilon_{abcd}\bar{R}^{ab} \wedge \bar{e}^c \wedge \bar{e}^d &= \Omega^2 \epsilon_{abcd}R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d - \epsilon_{abcd}Z^f Z_f e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\ &\quad + 6d\Omega \wedge \epsilon_{abcd}Z^a e^b \wedge e^c \wedge e^d + 4\Omega \epsilon_{abcd}Z^a T^b \wedge e^c \wedge e^d \\ &\quad + d \left[2\epsilon_{abcd}\Omega e^a Z^b \wedge e^c \wedge e^d \right] \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

Re-etiquetando,

$$\Omega \rightarrow \phi, \quad (\text{D.21})$$

y definiendo (para ser consistente con el lenguaje utilizado en capítulos anteriores)

$$-2X = Z^a Z_a, \quad (\text{D.22})$$

$$\theta^a = d\phi Z^a, \quad (\text{D.23})$$

la expresión anterior se transforma en el lagrangeano

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c &= \phi^2 \epsilon_{abcd}R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + 2\epsilon_{abcd}X e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + 6\epsilon_{abcd}\theta^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\ &\quad + 4\phi \epsilon_{abcd}Z^a T^b \wedge e^c \wedge e^d + 2d \left[\epsilon_{abcd}\phi e^a Z^b \wedge e^c \wedge e^d \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

El cual es invariante bajo las transformaciones

$$e^a \rightarrow \lambda e^a, \quad (\text{D.25})$$

$$\phi \rightarrow \frac{1}{\lambda} \phi, \quad (\text{D.26})$$

$$\kappa^{ab} \rightarrow \kappa^{ab}. \quad (\text{D.27})$$

Apéndice E

Ecuaciones de campo para el lagrangiano conformal

De acuerdo al método introducido en 2.1.2, mostramos las variaciones que resultan al variar cada término del lagrangiano conformal con respecto a los campos independientes de la teoría.

Variación con respecto a ω^{ab}

$$\begin{aligned}\delta_\omega \left(\frac{1}{4\kappa_4} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \right) &= -\frac{2}{4\kappa_4} \epsilon_{abcd} T^c \wedge e^d \wedge \delta\omega^{ab}, \\ \delta_\omega \left(\frac{1}{4!} \phi^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \right) &= -\frac{2}{4!} \phi^2 \epsilon_{abcd} T^c \wedge e^d \wedge \delta\omega^{ab} - \frac{2}{4!} \phi \epsilon_{abcd} d\phi \wedge e^c \wedge e^d \wedge \delta\omega^{ab}, \\ \delta_\omega \left(\frac{1}{3!} \phi \epsilon_{abcd} Z^a T^b \wedge e^c \wedge e^d \right) &= \frac{1}{3!} \phi \epsilon_{lcdb} Z^l \eta_{fa} e^f \wedge e^c \wedge e^d \wedge \delta\omega^{ab}.\end{aligned}$$

Variación respecto a ϕ

$$\begin{aligned}\delta_\phi \left(\frac{1}{4!} \phi^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \right) &= \frac{2}{4!} \phi \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \delta\phi, \\ \delta_\phi \left(\frac{1}{4!} X \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \right) &= \left(\frac{1}{3!} \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + \frac{1}{2!} Z^a \epsilon_{abcd} T^b \wedge e^c \wedge e^d \right) \delta\phi, \\ \delta_\phi \left(\frac{1}{3!} \phi \epsilon_{abcd} Z^a T^b \wedge e^c \wedge e^d \right) &= \frac{1}{3!} \left(\epsilon_{abcd} Z^a T^b \wedge e^c \wedge e^d - d\phi \epsilon_{abcd} T^{ab} e^n \wedge e^c \wedge e^d \right) \delta\phi, \\ \delta_\phi \left(\frac{\alpha}{4!} \phi^4 \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \right) &= \frac{\alpha}{3!} \phi^3 \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \delta\phi.\end{aligned}$$

Variación con respecto a e^a

$$\begin{aligned}
\delta_e \left(\frac{1}{4\kappa_4} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \right) &= \frac{1}{2\kappa_4} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge \delta e^d, \\
\delta_e \left(\frac{\Lambda}{4!\kappa_4} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \right) &= \frac{\Lambda}{3!\kappa_4} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge \delta e^d, \\
\delta_e \left(\frac{1}{4!} \phi^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \right) &= \frac{2}{4!} \phi^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge \delta e^d, \\
\delta_e \left(\frac{1}{4!} X \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \right) &= \left(-\frac{1}{3!} Z^a Z_d \epsilon_{abcf} e^b \wedge e^c \wedge e^f + \frac{1}{3!} X \epsilon_{abcf} e^b \wedge e^c \wedge e^f \right) \wedge \delta e^d \\
\delta_e \left(\frac{1}{3!} \phi \epsilon_{abcd} Z^a T^b \wedge e^c \wedge e^d \right) &= \left(-\frac{1}{3!} \phi Z_d \epsilon_{abcf} T^{ba} e^n \wedge e^c \wedge e^f + \frac{2}{3!} \phi \epsilon_{abcd} Z^a T^b \wedge e^c \right) \wedge \delta e^d \\
&\quad - \frac{1}{3!} d\phi \epsilon_{abcd} Z^a e^b \wedge e^c \wedge \delta e^d - \frac{1}{3!} \phi \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge \delta e^d \\
&\quad - \frac{2}{3!} \phi \epsilon_{abcd} Z^a T^b \wedge e^c \wedge \delta e^d, \\
\delta_e \left(\frac{\alpha}{4!} \phi^4 \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \right) &= \frac{\alpha}{3!} \phi^4 \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge \delta e^d.
\end{aligned}$$

Ecs. de campo en el lenguaje de primer orden

$$\begin{aligned}
\delta_\phi \mathcal{L} = & \left\{ -\frac{2}{4!} \phi \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + \frac{1}{3!} \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \right. \\
& + \frac{1}{2!} Z^a \epsilon_{abcd} T^b \wedge e^c \wedge e^d + \frac{1}{3!} \epsilon_{abcd} d\phi \wedge T^{ab} e^n \wedge e^c \wedge e^d \\
& \left. - \frac{1}{3!} \epsilon_{abcd} Z^a T^b \wedge e^c \wedge e^d - \frac{\alpha}{3!} \phi^3 \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \right\} \delta\phi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_e \mathcal{L} = & \left\{ \frac{1}{2\kappa_4} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c - \frac{1}{12} \phi^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \right. \\
& + \frac{1}{3!} \left[X - \frac{\Lambda}{\kappa_4} - \alpha \phi^4 \right] \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c + \frac{1}{3!} \phi Z_d \epsilon_{abcf} T^{ba} e^n \wedge e^c \wedge e^f \\
& + \frac{1}{3!} d\phi \epsilon_{abcd} Z^a e^b \wedge e^c + \frac{1}{3!} \phi \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge e^b \wedge e^c + \frac{2}{3!} \phi \epsilon_{abcd} Z^a T^b \wedge e^c \\
& \left. - \frac{2}{3!} \phi \epsilon_{abcd} Z^a T^b \wedge e^c - \frac{1}{3!} Z^a Z_d \epsilon_{abcf} e^b \wedge e^c \wedge e^f \right\} \wedge \delta e^d.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_\omega \mathcal{L} = & \left\{ -\frac{1}{2\kappa_4} \left[1 - \frac{1}{6} \phi^2 \kappa_4 \right] \epsilon_{abcd} T^c \wedge e^d + \frac{1}{12} \phi \epsilon_{abcd} d\phi \wedge e^c \wedge e^d \right. \\
& \left. - \frac{1}{3!} \phi \epsilon_{lbcd} Z^l \eta_{fa} e^f \wedge e^c \wedge e^d \right\} \wedge \delta \omega^{ab}.
\end{aligned}$$

Volviendo al lenguaje de segundo orden

Ecs. de caso en el lenguaje coordenado,

Tenemos

$$\begin{aligned}
X\epsilon_{abcd}e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge \delta e^d &= -\frac{3!}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi[\delta e]^{\nu\mu}v^{(4)} \\
d\phi\epsilon_{abcd}Z^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge \delta e^d &= \left(2!g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - 2!\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right)v^{(4)}[\delta e]^{\nu\mu} \\
Z^a Z_d\epsilon_{abcf}e^b \wedge e^c \wedge e^f \wedge \delta e^d &= -3!\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi[\delta e]^{\nu\mu}v^{(4)} \\
\epsilon_{abcd}e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge \delta e^d &= 3!g_{\mu\nu}[\delta e]^{\nu\mu}v^{(4)} \\
\epsilon_{abcd}R^{ab} \wedge e^c \wedge \delta e^d &= [Rg_{\mu\nu} - 2R_{\mu\nu}][\delta e]^{\nu\mu}v^{(4)} \\
\epsilon_{abcd}\pi^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge \delta e^d &= \left(2!g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi - 2!\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\right)v^{(4)}[\delta e]^{\nu\mu}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\delta_e\mathcal{L} &= \left\{ \frac{1}{2\kappa_4}\epsilon_{abcd}R^{ab} \wedge e^c - \frac{1}{12}\phi^2\epsilon_{abcd}R^{ab} \wedge e^c \right. \\
&\quad + \frac{1}{3!}\left[X - \frac{\Lambda}{\kappa_4} - \alpha\phi^4\right]\epsilon_{abcd}e^a \wedge e^b \wedge e^c + \frac{1}{3!}\phi Z_d\epsilon_{abcf}T^{ba}{}_n e^n \wedge e^c \wedge e^f \\
&\quad + \frac{1}{3!}d\phi\epsilon_{abcd}Z^a e^b \wedge e^c + \frac{1}{3!}\phi\epsilon_{abcd}\pi^a \wedge e^b \wedge e^c \\
&\quad \left. - \frac{1}{3!}Z^a Z_d\epsilon_{abcf}e^b \wedge e^c \wedge e^f \right\} \wedge \delta e^d.
\end{aligned}$$

considerando la torsión nula obtenemos

$$\begin{aligned}
\delta_e\mathcal{L} &= \left\{ \frac{1}{2\kappa_4}[Rg_{\mu\nu} - 2R_{\mu\nu}] - \frac{1}{12}\phi^2[Rg_{\mu\nu} - 2R_{\mu\nu}] \right. \\
&\quad + \frac{1}{3!}\left[-\frac{\Lambda}{\kappa_4} - \alpha\phi^4\right]3!g_{\mu\nu} - \frac{1}{3!}3g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi \\
&\quad + \frac{1}{3!}\left(2!g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - 2!\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right) + \frac{1}{3!}\phi\left(2!g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi - 2!\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\right) \\
&\quad \left. - \frac{1}{3!}(-3!\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi) \right\} [\delta e]^{\nu\mu}v^{(4)} = 0, \\
&= \left\{ \frac{1}{2\kappa_4}[Rg_{\mu\nu} - 2R_{\mu\nu}] - \frac{1}{12}\phi^2[Rg_{\mu\nu} - 2R_{\mu\nu}] \right. \\
&\quad + \frac{1}{3!}\left[-\frac{\Lambda}{\kappa_4} - \alpha\phi^4\right]3!g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + \frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right) \\
&\quad + \frac{1}{6}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi^2 - \frac{1}{3}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + \frac{1}{6}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi^2 - \frac{1}{3}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \\
&\quad \left. + \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \right\} [\delta e]^{\nu\mu}v^{(4)} = 0, \\
&= \{G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - 8\pi G\mathcal{T}_{\mu\nu}\} [\delta e]^{\nu\mu}v^{(4)} = 0.
\end{aligned}$$

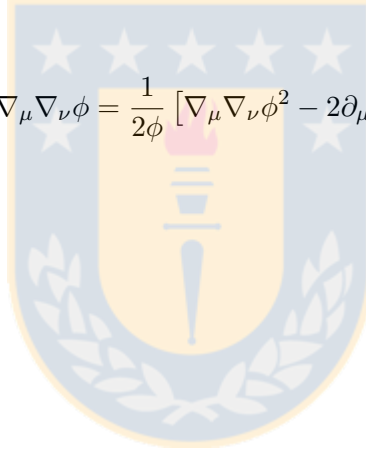
Donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\mu\nu} &= \frac{1}{6}\phi^2 [G_{\mu\nu}] - \alpha\phi^4 g_{\mu\nu} \\
&\quad - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + \frac{1}{3}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi \\
&\quad - \frac{1}{3}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{3}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + \frac{1}{3}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \\
&\quad + \frac{1}{6}\left[g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\mu\nabla_\nu\right]\phi^2 + \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \\
&= \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + \frac{1}{6}\left[g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu + G_{\mu\nu}\right]\phi^2 - \alpha\phi^4 g_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Donde se usó

$$\nabla_\mu\nabla_\nu\phi^2 = 2\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + 2\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$$

$$\Rightarrow \nabla_\mu\nabla_\nu\phi = \frac{1}{2\phi}\left[\nabla_\mu\nabla_\nu\phi^2 - 2\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right].$$



Apéndice F

Multiplicadores de Lagrange para el lagrangiano conformal

En este apéndice usaremos los resultados de B para calcular los multiplicadores de lagrange para el lagrangiano conformal con torsión.

El término $D\Lambda_a$ corresponde a

$$D\Lambda^a = \left[2D\mathcal{E}^{ap}_{pmn} + \frac{1}{2} (\delta_m^a D\mathcal{E}^{ji}_{jin} - \delta_l^a D\mathcal{E}^{ji}_{jin}) \right] \wedge e^m \wedge e^n.$$

donde para nuestro caso escribimos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{abcdf} &= \frac{1}{3!} \frac{1}{12} \phi \epsilon_{abmn} \delta_{cdf}^{mnl} Z_l - \frac{1}{3!} \frac{1}{3!} \phi \epsilon_{lbij} \delta_{cdf}^{ijk} Z^l \eta_{ak} \\ &= \frac{1}{3!} \frac{1}{12} \phi \epsilon_{abmn} \delta_{cdf}^{lmn} Z_l - \frac{1}{3!} \frac{1}{3!} \phi \epsilon_{lbij} \delta_{fcd}^{kij} Z^l \eta_{ak} \\ &= \frac{1}{3!} \frac{1}{12} \phi \epsilon_{abmn} \left(\delta_c^l \delta_{df}^{mn} - \delta_d^l \delta_{cf}^{mn} + \delta_f^l \delta_{cd}^{mn} \right) Z_l - \frac{1}{3!} \frac{1}{3!} \phi \epsilon_{lbij} \left(\delta_f^k \delta_{cd}^{ij} - \delta_c^k \delta_{fd}^{ij} + \delta_d^k \delta_{fc}^{ij} \right) Z^l \eta_{ak} \\ &= \frac{1}{3!} \frac{2}{12} \phi \left(\epsilon_{abdf} \delta_c^l - \epsilon_{abcf} \delta_d^l + \epsilon_{abcd} \delta_f^l \right) Z_l - \frac{1}{3!} \frac{2}{3!} \phi \left(\epsilon_{lbcd} \delta_f^k - \epsilon_{lbfd} \delta_c^k + \epsilon_{lafc} \delta_d^k \right) Z^l \eta_{ak} \\ &= \frac{1}{3!} \frac{1}{6} \phi \left(\epsilon_{abdf} Z_c - \epsilon_{abcf} Z_d + \epsilon_{abcd} Z_f \right) - \frac{1}{3!} \frac{1}{3} \phi \left(\epsilon_{lbcd} \eta_{af} - \epsilon_{lbfd} \eta_{ac} + \epsilon_{lafc} \eta_{ad} \right) Z^l \\ &= \frac{1}{3!} \frac{1}{6} \phi \epsilon_{abdf} Z_c - \frac{1}{3!} \frac{1}{3} \phi \left(\epsilon_{lbcd} \eta_{af} - \epsilon_{lbfd} \eta_{ac} + \epsilon_{lafc} \eta_{ad} \right) Z^l \end{aligned}$$

De manera que,

$$\begin{aligned}
 \eta^{bc} \mathcal{E}_{abcdef} &= \frac{1}{3!} \frac{1}{6} \phi \left(\epsilon_{abdf} Z_c \eta^{bc} - \eta^{bc} \epsilon_{abcf} Z_d + \eta^{bc} \epsilon_{abcd} Z_f \right) \\
 &\quad - \frac{1}{3} \phi \left(\eta^{bc} \epsilon_{lbcd} \eta_{af} - \eta^{bc} \epsilon_{lbfd} \eta_{ac} + \eta^{bc} \epsilon_{lbfc} \eta_{ad} \right) Z^l \\
 &= \frac{1}{3!} \frac{1}{6} \phi \epsilon_{abdf} Z^b - \frac{1}{3!} \frac{1}{3} \phi \left(-\epsilon_{lbfd} \eta_{ac} \eta^{bc} \right) Z^l \\
 &= \frac{1}{3!} \frac{1}{6} \phi \epsilon_{abdf} Z^b + \frac{1}{3!} \frac{1}{3} \phi \epsilon_{lbfd} \delta_a^b Z^l \\
 &= \frac{1}{3!} \frac{1}{6} \phi \epsilon_{abdf} Z^b + \frac{1}{3!} \frac{1}{3} \phi \epsilon_{laf} Z^l \\
 &= \frac{1}{3!} \frac{1}{6} \phi \epsilon_{abdf} Z^b - \frac{1}{3!} \frac{1}{3} \phi \epsilon_{ladf} Z^l
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta^{ac} \eta^{bd} \mathcal{E}_{abcdef} &= \frac{1}{3!} \frac{1}{6} \eta^{ac} \eta^{bd} \phi \epsilon_{abdf} Z_c - \frac{1}{3!} \frac{1}{3} \phi \left(\epsilon_{lbcd} \eta_{af} \eta^{ac} \eta^{bd} - \epsilon_{lbfd} \eta_{ac} \eta^{ac} \eta^{bd} + \epsilon_{lbfc} \eta_{ad} \eta^{ac} \eta^{bd} \right) Z^l \\
 &= 0 - \frac{1}{3!} \frac{1}{3} \phi \left(\epsilon_{lbcd} \delta_f^c \eta^{bd} - \epsilon_{lbfd} \eta^{bd} + \epsilon_{lbfc} \delta_d^c \eta^{bd} \right) Z^l \\
 &= -\frac{1}{3!} \frac{1}{3} \phi \left(\epsilon_{lbfd} \eta^{bd} - \epsilon_{lbfd} \eta^{bd} + \epsilon_{lbfc} \eta^{bc} \right) Z^l \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
 D\Lambda_a &= \left[2D\mathcal{E}^{ap}{}_{pmn} + \frac{1}{2} \left(\delta_m^a D\mathcal{E}^{ji}{}_{jin} - \delta_i^a D\mathcal{E}^{ji}{}_{jin} \right) \right] \wedge e^m \wedge e^n \\
 &= 2D\eta^{bc} \mathcal{E}_{abcdef} \wedge e^d \wedge e^f \\
 &= 2D \left(\frac{1}{3!} \frac{1}{6} \phi \epsilon_{abdf} Z^b - \frac{1}{3!} \frac{1}{3} \phi \epsilon_{ladf} Z^l \right) \wedge e^d \wedge e^f \\
 &= 2 \left[\frac{1}{3!} \frac{1}{6} d\phi \epsilon_{abdf} Z^b + \frac{1}{3!} \frac{1}{6} \phi \epsilon_{abdf} \pi^b - \frac{1}{3!} \frac{1}{3} d\phi \epsilon_{ladf} Z^l - \frac{1}{3!} \frac{1}{3} \phi \epsilon_{ladf} \pi^l \right] \wedge e^d \wedge e^f \\
 &= \frac{1}{3!} 2 \left[\frac{1}{6} d\phi \epsilon_{abdf} Z^b + \frac{1}{6} \phi \epsilon_{abdf} \pi^b - \frac{1}{3} d\phi \epsilon_{ladf} Z^l - \frac{1}{3} \phi \epsilon_{ladf} \pi^l \right] \wedge e^d \wedge e^f
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
D\Lambda_a \wedge \delta e^a &= \frac{1}{3!} 2 \left[\frac{1}{6} d\phi \epsilon_{abdf} Z^b + \frac{1}{6} \phi \epsilon_{abdf} \pi^b - \frac{1}{3} d\phi \epsilon_{ladf} Z^l - \frac{1}{3} \phi \epsilon_{ladf} \pi^l \right] \wedge e^d \wedge e^f \wedge \delta e^a \\
&= \frac{1}{3!} \left[\frac{1}{3} d\phi \epsilon_{abdf} Z^b + \frac{1}{3} \phi \epsilon_{abdf} \pi^b - \frac{2}{3} d\phi \epsilon_{ladf} Z^l - \frac{2}{3} \phi \epsilon_{ladf} \pi^l \right] \wedge e^d \wedge e^f \wedge \delta e^a \\
&= \frac{1}{3!} \left\{ \frac{1}{3} \partial_\mu \phi \epsilon_{abdf} e^b{}_\nu \partial^\nu \phi dx^\mu + \frac{1}{3} \phi \epsilon_{abdf} e^b{}_\nu \nabla_\mu \partial^\nu \phi dx^\mu \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3} \partial_\mu \phi \epsilon_{ladf} e^l{}_\nu \partial^\nu \phi dx^\mu - \frac{2}{3} \phi \epsilon_{ladf} e^l{}_\nu \nabla_\mu \partial^\nu \phi dx^\mu \right\} e^d{}_\alpha e^f{}_\beta e^a{}_\sigma [\delta e]{}^\sigma{}_\gamma dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \\
&= \frac{1}{3!} \left\{ \frac{1}{3} \partial_\mu \phi \epsilon_{abdf} e^b{}_\nu \partial^\nu \phi + \frac{1}{3} \phi \epsilon_{abdf} e^b{}_\nu \nabla_\mu \partial^\nu \phi \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3} \partial_\mu \phi \epsilon_{ladf} e^l{}_\nu \partial^\nu \phi - \frac{2}{3} \phi \epsilon_{ladf} e^l{}_\nu \nabla_\mu \partial^\nu \phi \right\} e^d{}_\alpha e^f{}_\beta e^a{}_\sigma [\delta e]{}^\sigma{}_\gamma dx^\mu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \\
&= \frac{1}{3!} \left\{ \frac{1}{3} \partial_\mu \phi \epsilon_{\sigma\nu\alpha\beta} \partial^\nu \phi + \frac{1}{3} \phi \epsilon_{\sigma\nu\alpha\beta} \nabla_\mu \partial^\nu \phi \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3} \partial_\mu \phi \epsilon_{\nu\sigma\alpha\beta} \partial^\nu \phi dx^\mu - \frac{2}{3} \phi \epsilon_{\nu\sigma\alpha\beta} \nabla_\mu \partial^\nu \phi dx^\mu \right\} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} [\delta e]{}^\sigma{}_\gamma v^{(4)} \\
&= \frac{1}{3!} \left\{ \frac{1}{3} \partial_\mu \phi \delta_{\sigma\nu\alpha\beta}^{\mu\alpha\beta\gamma} \partial^\nu \phi + \frac{1}{3} \phi \delta_{\sigma\nu\alpha\beta}^{\mu\alpha\beta\gamma} \partial_\mu \partial^\nu \phi - \frac{2}{3} \partial_\mu \phi \delta_{\nu\sigma\alpha\beta}^{\mu\alpha\beta\gamma} \partial^\nu \phi - \frac{2}{3} \phi \delta_{\nu\sigma\alpha\beta}^{\mu\alpha\beta\gamma} \partial_\mu \partial^\nu \phi \right\} [\delta e]{}^\sigma{}_\gamma v^{(4)} \\
&= \frac{1}{3!} \left\{ \frac{2!}{3} \partial_\mu \phi \delta_{\sigma\nu}^{\mu\gamma} \partial^\nu \phi + \frac{2!}{3} \phi \delta_{\sigma\nu}^{\mu\gamma} \partial_\mu \partial^\nu \phi + \frac{4}{3} \partial_\mu \phi \delta_{\sigma\nu}^{\mu\gamma} \partial^\nu \phi + \frac{4}{3} \phi \delta_{\sigma\nu}^{\mu\gamma} \nabla_\mu \nabla^\nu \phi \right\} [\delta e]{}^\sigma{}_\gamma v^{(4)} \\
&= \frac{1}{3!} \left\{ \frac{2!}{3} \partial_\mu \phi (\delta_\sigma^\mu \delta_\nu^\gamma - \delta_\nu^\mu \delta_\sigma^\gamma) \partial^\nu \phi + \frac{2!}{3} \phi (\delta_\sigma^\mu \delta_\nu^\gamma - \delta_\nu^\mu \delta_\sigma^\gamma) \nabla_\mu \nabla^\nu \phi \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{3} \partial_\mu \phi (\delta_\sigma^\mu \delta_\nu^\gamma - \delta_\nu^\mu \delta_\sigma^\gamma) \partial^\nu \phi + \frac{4}{3} \phi (\delta_\sigma^\mu \delta_\nu^\gamma - \delta_\nu^\mu \delta_\sigma^\gamma) \nabla_\mu \nabla^\nu \phi \right\} [\delta e]{}^\sigma{}_\gamma v^{(4)} \\
&= \frac{1}{3!} \left\{ \frac{2!}{3} \partial_\sigma \phi \partial^\gamma \phi - \frac{2!}{3} \delta_\sigma^\gamma \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi + \frac{2!}{3} \phi \nabla_\sigma \nabla^\gamma \phi - \frac{2!}{3} \phi \delta_\sigma^\gamma \nabla_\nu \nabla^\nu \phi \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{3} \partial_\sigma \phi \partial^\gamma \phi - 8 \delta_\sigma^\gamma \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi + \frac{4}{3} \phi \nabla_\sigma \nabla^\gamma \phi - 8 \phi \delta_\sigma^\gamma \nabla_\nu \nabla^\nu \phi \right\} [\delta e]{}^\sigma{}_\gamma v^{(4)} \\
&= \frac{1}{3!} \left\{ g_{\alpha\gamma} \frac{2!}{3} \partial_\sigma \phi \partial^\gamma \phi - g_{\alpha\gamma} \frac{2!}{3} \delta_\sigma^\gamma \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi + g_{\alpha\gamma} \frac{2!}{3} \phi \nabla_\sigma \nabla^\gamma \phi - g_{\alpha\gamma} \frac{2!}{3} \phi \delta_\sigma^\gamma \nabla_\nu \nabla^\nu \phi \right. \\
&\quad \left. + g_{\alpha\gamma} \frac{4}{3} \partial_\sigma \phi \partial^\gamma \phi - g_{\alpha\gamma} \frac{4}{3} \delta_\sigma^\gamma \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi + g_{\alpha\gamma} \frac{4}{3} \phi \nabla_\sigma \nabla^\gamma \phi - g_{\alpha\gamma} \frac{4}{3} \phi \delta_\sigma^\gamma \nabla_\nu \nabla^\nu \phi \right\} [\delta e]{}^{\sigma\alpha}{}_\nu{}^{(4)} \\
&= \frac{1}{3!} \left\{ \frac{2!}{3} \partial_\sigma \phi \partial_\alpha \phi - g_{\alpha\sigma} \frac{2!}{3} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi + \frac{2!}{3} \phi \nabla_\sigma \nabla_\alpha \phi - g_{\alpha\sigma} \frac{2!}{3} \phi \nabla_\nu \nabla^\nu \phi \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{3} \partial_\sigma \phi \partial_\alpha \phi - g_{\alpha\sigma} \frac{4}{3} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi + \frac{4}{3} \phi \nabla_\sigma \nabla_\alpha \phi - g_{\alpha\sigma} \frac{4}{3} \phi \nabla_\nu \nabla^\nu \phi \right\} [\delta e]{}^{\sigma\alpha}{}_\nu{}^{(4)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, vemos que

$$\begin{aligned}
\Rightarrow D\Lambda_a \wedge \delta e^a &= \frac{1}{3!} \left\{ \frac{2!}{3} \partial_\sigma \phi \partial_\alpha \phi - g_{\alpha\sigma} \frac{2!}{3} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi + \frac{2!}{3} \phi \nabla_\sigma \nabla_\alpha \phi - g_{\alpha\sigma} \frac{2!}{3} \phi \nabla_\nu \nabla^\nu \phi \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{3} \partial_\sigma \phi \partial_\alpha \phi - g_{\alpha\sigma} \frac{4}{3} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi + \frac{4}{3} \phi \nabla_\sigma \nabla_\alpha \phi - g_{\alpha\sigma} \frac{4}{3} \phi \nabla_\nu \nabla^\nu \phi \right\} [\delta e]^\sigma{}_{\nu(4)} \\
&= \frac{1}{3!} \{ 2\partial_\sigma \phi \partial_\alpha \phi - 2g_{\alpha\sigma} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi + 2\phi \nabla_\sigma \nabla_\alpha \phi - 2g_{\alpha\sigma} \phi \nabla_\nu \nabla^\nu \phi \} [\delta e]^\sigma{}_{\nu(4)} \\
&= \frac{1}{3!} (\nabla_\sigma \nabla_\alpha \phi^2 - g_{\alpha\sigma} \nabla_\nu \nabla^\nu \phi^2) [\delta e]^\sigma{}_{\nu(4)} \\
&= \left(\frac{1}{6} \nabla_\sigma \nabla_\alpha \phi^2 - \frac{1}{6} g_{\alpha\sigma} \nabla_\nu \nabla^\nu \phi^2 \right) [\delta e]^\sigma{}_{\nu(4)}
\end{aligned}$$



Apéndice G

Ecuaciones cosmológicas para el lagrangiano conformal

En este apéndice se escriben las ecuaciones de movimiento utilizando el postulado cosmológico en un marco teórico con torsión no nula tratado en 2.2.2.

Variación

$$\begin{aligned} \delta_\phi(\mathcal{L} + \mathcal{L}_M) &= 0 \\ \Rightarrow -\phi \left\{ (\dot{H} + \dot{h}) + H(H + h) + (H + h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right\} - 4\alpha\phi^3 \\ &\quad - \left\{ \ddot{\phi} + 3\dot{\phi}(H + h) \right\} + 2\dot{\phi}h = 0, \\ \Rightarrow -\phi \left\{ \dot{H} + \dot{h} + 2H^2 + 3Hh + h^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right\} - 4\alpha\phi^3 \\ &\quad - \left\{ \ddot{\phi} + 3\dot{\phi}(H + h) \right\} + 2\dot{\phi}h = 0. \end{aligned}$$

Variación

$$\delta_e(\mathcal{L} + \mathcal{L}_M) = 0$$

Para δe^0

$$\begin{aligned} &\left\{ -\left(\frac{1}{2\kappa_4} - \frac{1}{12}\phi^2\right) \left[(H + h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] - \frac{1}{3!} \left[X - \frac{\Lambda}{\kappa_4} - \alpha\phi^4 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3!}\phi^2 + \frac{1}{3!}\phi h + \frac{1}{3!}\phi\dot{\phi}(H + h) \right\} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} e^{\hat{a}} \wedge e^{\hat{b}} \wedge e^{\hat{c}} \wedge \delta e^0 = 0, \\ \Rightarrow &\left\{ -\frac{1}{2\kappa_4} \left(1 - \frac{1}{6}\phi^2\kappa_4 \right) \left[(H + h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] - \frac{1}{3!} \left[X - \frac{\Lambda}{\kappa_4} - \alpha\phi^4 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3!} \left[\phi^2 + 2\phi h + \phi\dot{\phi}H \right] \right\} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} e^{\hat{a}} \wedge e^{\hat{b}} \wedge e^{\hat{c}} = 0. \end{aligned}$$

Consideremos $\kappa_4 = 1$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \left\{ -\frac{1}{2} \left[(H+h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] - \frac{1}{3!} [X - \Lambda - \alpha\phi^4] \right. \\ & \left. + \frac{1}{3!} \left[\phi^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left[(H+h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] \right) + 2\phi h + \phi\dot{\phi}H \right] \right\} \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} e^{\hat{a}} \wedge e^{\hat{b}} \wedge e^{\hat{c}} = 0. \end{aligned}$$

Para $\delta e^{\hat{d}}$

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{1}{2\kappa_4} - \frac{1}{12}\phi^2 \right) \left[2(\dot{H} + \dot{h}) + 2H(H+h) + (H+h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2!} \left[X - \frac{\Lambda}{\kappa_4} - \alpha\phi^4 \right] - \frac{1}{3!}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{3!} [\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}(H+h)] \right\} \epsilon_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} e^0 \wedge e^{\hat{b}} \wedge e^{\hat{c}} \wedge \delta e^{\hat{d}} = 0, \\ & \Rightarrow \left\{ \left(\frac{1}{2\kappa_4} - \frac{1}{12}\phi^2 \right) \left[2(\dot{H} + \dot{h}) + 2H(H+h) + (H+h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2!} \left[X - \frac{\Lambda}{\kappa_4} - \alpha\phi^4 \right] - \frac{1}{3!}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{3!} [\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}(H+h)] \right\} \epsilon_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} e^0 \wedge e^{\hat{b}} \wedge e^{\hat{c}} = 0. \end{aligned}$$

Con $\kappa_4 = 1$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\phi^2 \right) \left[2(\dot{H} + \dot{h}) + 2H(H+h) + (H+h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2!} [X - \Lambda - \alpha\phi^4] - \frac{1}{3!}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{3!} [\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}(H+h)] \right\} \epsilon_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} e^0 \wedge e^{\hat{b}} \wedge e^{\hat{c}} = 0. \end{aligned}$$

Variación

$$\delta_\omega(\mathcal{L} + \mathcal{L}_M) = 0$$

Para $\delta\omega^{0\hat{b}}$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{\kappa_4} \left[1 - \frac{1}{6}\phi^2\kappa_4 \right] h + \frac{1}{6}\phi\dot{\phi} - \phi\ddot{\phi} \right\} \epsilon_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} e^0 \wedge e^{\hat{c}} \wedge e^{\hat{d}} \wedge \delta\omega^{0\hat{b}} = 0, \\ & \Rightarrow \left\{ \frac{1}{\kappa_4} \left[1 - \frac{1}{6}\phi^2\kappa_4 \right] h - \frac{5}{6}\phi\dot{\phi} \right\} \epsilon_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} e^0 \wedge e^{\hat{c}} \wedge e^{\hat{d}} = 0. \end{aligned}$$

Con $\kappa_4 = 1$

$$\Rightarrow \left\{ \left[1 - \frac{1}{6}\phi^2 \right] h - \frac{5}{6}\phi\dot{\phi} \right\} \epsilon_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} e^0 \wedge e^{\hat{c}} \wedge e^{\hat{d}} = 0.$$

Para $\delta\omega^{\hat{a}\hat{b}}$

$$\left\{ -\frac{1}{2\kappa_4} \left[1 - \frac{1}{6}\phi^2\kappa_4 \right] f \right\} e^0 \wedge e_{\hat{a}} \wedge e_{\hat{b}} \wedge \delta\omega^{\hat{a}\hat{b}} = 0,$$

Con $\kappa_4 = 1$

$$\left\{ -\frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{6}\phi^2 \right] f \right\} e^0 \wedge e_{\hat{a}} \wedge e_{\hat{b}} \wedge \delta\omega^{\hat{a}\hat{b}} = 0.$$

Y las ecuaciones de campo se transforman en (con $\kappa_4 = 1$)

$$\begin{aligned} & -\phi \left\{ \dot{H} + \dot{h} + 2H^2 + 3Hh + h^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right\} - 4\alpha\phi^3 \\ & \quad - \left\{ \ddot{\phi} + 3\dot{\phi}(H+h) \right\} + 2\dot{\phi}h = 0, \\ & \quad -\frac{1}{2} \left[(H+h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] - \frac{1}{3!} [X - \Lambda - \alpha\phi^4] \\ & \quad + \frac{1}{3!} \left[\phi^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left[(H+h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] \right) + 2\phi h + \phi\dot{H} \right] = 0, \\ & \left(\frac{1}{2\kappa_4} - \frac{1}{12}\phi^2 \right) \left[2(\dot{H} + \dot{h}) + 2H(H+h) + (H+h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] \\ & \quad + \frac{1}{2!} [X - \Lambda - \alpha\phi^4] - \frac{1}{3!}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{3!} [\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}(H+h)] = 0, \\ & \quad \left[1 - \frac{1}{6}\phi^2 \right] h - \frac{5}{6}\phi\dot{\phi} = 0, \\ & \quad -\frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{6}\phi^2 \right] f = 0. \end{aligned}$$

De la última ecuación, vemos que $f = 0$, luego

$$\begin{aligned} & -\phi \left\{ \dot{H} + \dot{h} + 2H^2 + 3Hh + h^2 + \frac{k}{a^2} \right\} - 4\alpha\phi^3 \\ & \quad - \left\{ \ddot{\phi} + 3\dot{\phi}(H+h) \right\} + 2\dot{\phi}h = 0, \\ & \quad -\frac{1}{2} \left[(H+h)^2 + \frac{k}{a^2} \right] - \frac{1}{3!} [X - \Lambda - \alpha\phi^4] \\ & \quad + \frac{1}{3!} \left[\phi^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left[(H+h)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \right) + 2\phi h + \phi\dot{H} \right] = 0, \\ & \left(\frac{1}{2\kappa_4} - \frac{1}{12}\phi^2 \right) \left[2(\dot{H} + \dot{h}) + 2H(H+h) + (H+h)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \\ & \quad + \frac{1}{2!} [X - \Lambda - \alpha\phi^4] - \frac{1}{3!}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{3!} [\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}(H+h)] = 0, \\ & \quad \left[1 - \frac{1}{6}\phi^2 \right] h - \frac{5}{6}\phi\dot{\phi} = 0. \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] Fernando Izaurieta. *Notas de Clase de Gravitación y Geometría Diferencial*. Universidad de Concepción.
- [2] Guillermo Rubilar. *Teoría General de la Relatividad y Tópicos en Relatividad General*. Universidad de Concepción.
- [3] Mokhtar Hassaine and Jorge Zanelli. *Chern-Simons (Super)gravity*. World Scientific, 2016.
- [4] Clifford M Will. *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge University Press, 1993.
- [5] Clifford M Will. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Reviews in Relativity*, 17:4, 2014.
- [6] Thomas P. Sotiriou. Gravity and scalar fields. *General Relativity and Quantum Cosmology*, 2014.
- [7] Yasunori Fujii and Kei-ichi Maeda. *The scalar-tensor theory of gravitation*. Cambridge University Press, 2007.
- [8] Carl Brans and Robert H Dicke. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, 124:925, 1961.
- [9] Timothy Clifton, Pedro G Ferreira, Antonio Padilla, and Constantinos Skordis. Modified gravity and cosmology. *Physics Reports*, 513:1–189, 2011.
- [10] Gregory Walter Horndeski. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int.J.Theor.Phys.*, 10:363–384, 1974.
- [11] Friedrich W Hehl, Paul Von der Heyde, G David Kerlick, and James M Nester. General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. *Rev. Mod. Phys.*, 48:393, 1976.
- [12] Andrzej Trautman. Einstein-cartan theory. *arXiv preprint gr-qc/0606062*, 2006.
- [13] Adolfo Toloza and Jorge Zanelli. Cosmology with scalar-euler form coupling. *Class.Quant.Grav.*, 30:135003, 2013.
- [14] Daniel Z. Freedman and Antoine Van Proeyen. *Super-gravity, 1st ed.* Cambridge University Press, 2012.

- [15] Omar Valdivia, José Barrientos, Fabrizio Cordonier-Tello, Fernando Izaurieta, Perla Medina, Daniela Narbona, and Eduardo Rodríguez. Nonminimal couplings, gravitational waves, and torsion in horndeski's theory. *arXiv preprint arXiv:1703.09686*, 2017.
- [16] Adolfo Toloza Díaz. *Efectos de la torsión y gravedad con diferentes fuentes de materia. Apéndice C*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, 2015.
- [17] Antonella Cid, Fernando Izaurieta, Perla Medina, and Daniela Narbona. Non-minimally coupled scalar field cosmology with torsion. *arXiv preprint arXiv:1704.04563*, 2017.
- [18] Hans A Kastrop. On the advancements of conformal transformations and their associated symmetries in geometry and theoretical physics. *Annalen Phys.*, 17:631–690, 2008.
- [19] Robert M Wald. *General relativity. Appendix C*. University of Chicago press, 1984.
- [20] R Blumenhagen and E Plauschinn. *Introduction to Conformal Field Theory: With Applications to String Theory, vol. 779 of Lect. Notes Phys.* Springer, 2009.
- [21] Robert M Wald. *General relativity. Chapter 11*. University of Chicago press, 1984.
- [22] Sebastiano Sonego and Valerio Faraoni. Coupling to the curvature for a scalar field from the equivalence principle. *Class.Quant.Grav.*, 10:1185, 1993.
- [23] Cristian Martinez, Ricardo Troncoso, and Jorge Zanelli. de sitter black hole with a conformally coupled scalar field in four dimensions. *Phys.Rev. D*, 67:024008, 2003.