



**Universidad de Concepción**  
**Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas**  
**Departamento de Estadística**

**Estimación y predicción en modelos GARCH con  
parámetros suavemente variables en el tiempo: Un  
enfoque no paramétrico**

Por Jorge Andrés Muñoz Mendoza

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de  
Concepción para optar al grado académico de Magíster en Estadística.

Profesor Guía: Guillermo Patricio Ferreira Cabezas, Ph.D

Concepción, Abril 2023

## **DERECHOS DE AUTOR**

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

**DEDICATORIA**

...A Dios

A mis amados padres...*Jorge y Gladys*

A mi esposa...*Carmen*

A mis dos joyas...*Franquito y Fernanda*

A mi amada vieja...*Isabel*

A mis hermanos...*Carol, Jonathan, Cristian y Alan*

A mis suegros...*Jorge y Mara*

*“hoy por tí...mañana por mí”*

## AGRADECIMIENTOS

Son muchas las personas a las cuales quisiera agradecer en este trabajo de tesis que; representa la culminación de uno de los procesos académicos que siempre soñé.

En primer lugar quiero agradecer a *Dios*, pues gracias a él, hoy he llegado a ser lo que soy, por darme su compañía en los momentos buenos y, especialmente en los difíciles; y por permitirme disfrutar tal aprendizaje y la experiencia durante este tiempo.

A mi gran familia, una agradecimiento eterno. A mis padres, *Jorge y Gladys*, por apoyarme en todo momento a cumplir este sueño, por ser mi sustento espiritual; y por ser parte de mi motivación de seguir adelante. A mi esposa, *Carmen Veloso*, gracias por su amor, su espera y comprensión; y por instarme a seguir con mis sueños y alentarme a no decaer en los momentos más difíciles. Mi agradecimiento más especial es para mis dos joyas, mis hijos, *Fraquito y Fernandita*, quienes con cada sonrisa diaria me motivan a seguir adelante y darles el mejor ejemplo que un padre puede brindarles. También, quiero agradecer a mis hermanos *Carol, Jonathan, Cristian y Alan*, por su apoyo incondicional durante todo este tiempo. Agradezco a mis abuelas *Isabel y Angélica* (Q.E.P.D) por hacerme sentir orgulloso de mis raíces y por demostrarme siempre su amor incondicional y la alegría de ver mi superación. También por recordarme en todo momento que cualquier cosa es posible con perseverancia y fe en Dios. A mis suegros, *Jorge y Mara*, les doy las gracias por su gran cariño y por su importante apoyo en esta etapa familiar.

Un especial agradecimiento extendiendo a *Guillermo Ferreira Cabezas*, mi profesor guía, por ser un referente a seguir, por su permanente feedback durante todo este viaje estadístico, por permitirme ser su ayudante y por establecer una relación de trabajo para futuras investigaciones. Le agradezco siempre su buena onda, consejos y apoyo. También me gustaría agradecer a los profesores *Jean Navarrete, Bernardo Lagos y Daisy Arroyo* por su dedicación y buenas enseñanzas. Realmente disfrute mi travesía gracias a sus firmas.

*Jorge A. Muñoz Mendoza*

# Índice general

---

Índice general	4
Índice de figuras	6
<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
1.1. Objetivos de la Investigación . . . . .	11
1.1.1. Objetivo general e hipótesis . . . . .	11
1.1.2. Objetivos específicos . . . . .	11
1.2. Enfoque y tipo de investigación . . . . .	12
1.3. Datos y recursos . . . . .	12
<b>2. Marco metodológico</b>	<b>13</b>
2.1. Modelo tv-GARCH . . . . .	13
2.2. Métodos no paramétricos . . . . .	15
2.2.1. Regresión lineal local . . . . .	16
2.2.2. Regresiones Splines . . . . .	17
2.2.3. Splines suavizados . . . . .	18
2.2.4. Evolución de la función de parámetros del modelo LS-GARCH . . . . .	18
2.3. Representación Espacio-Estado y Filtro de Kalman . . . . .	19
2.3.1. Representación funcional . . . . .	19
2.3.2. Predicción h-pasos adelante . . . . .	21
<b>3. Experimentos de Simulaciones</b>	<b>23</b>
3.1. Amplitud de la ventana . . . . .	23
3.2. Simulación de Monte Carlo . . . . .	24
<b>4. Aplicación empírica</b>	<b>29</b>
4.1. Índice de Precios Selectivos de Acciones . . . . .	29

<b>5. Conclusiones</b>	<b>32</b>
------------------------	-----------

<b>Bibliografía</b>	<b>33</b>
---------------------	-----------

# Índice de figuras

---

2.1. Principio de reescalamiento del tiempo. . . . .	14
3.1. MSE de modelos: promedio de parámetros temporalmente variables. . . . .	26
3.2. Curvas suaves para parámetros tv-GARCH(1,1): Simulación de Monte Carlo. . . . .	27
3.3. Predicción 50-pasos-adelante del modelo tv-GARCH(1,1): Simulación de Monte Carlo. . . . .	28
4.1. Estimación de curvas modelo tv-GARCH: IPSA. . . . .	29
4.2. Predicción a 20-pasos-adelante para el IPSA. . . . .	30
4.3. Comparación de predicciones: LS-GARCH v/s GARCH(1,1). . . . .	31

---

# Estimación y predicción en modelos GARCH con parámetros suavemente variables en el tiempo: Un enfoque no paramétrico

Jorge A. Muñoz Mendoza

## Resumen

Proponemos un enfoque espacio-estado para un modelo tv-GARCH no paramétrico. A través de diversas técnicas no paramétricas estimamos las curvas de coeficientes con cambios suaves a lo largo del tiempo y empleamos un sistema recursivo basado en el Filtro de Kalman para efectuar y evaluar las predicciones. Empíricamente, desarrollamos ejercicios de simulación de Monte Carlo y evaluamos el modelo con datos efectivos del mercado accionario chileno a través del Índice de Precios Selectivo de Acciones (IPSA). Nuestros hallazgos demuestran que el modelo tv-GARCH no paramétrico proporciona predicciones más precisas que un modelo GARCH estacionario. Estos resultados tienen implicancias relevantes para la gestión de riesgos y las estrategias de diversificación de los portafolios.

Clasificación JEL: C14, C15, C53, C58.

*Palabras Claves:* No estacionarios, GARCH, localmente estacionario, filtro de Kalman.



---

# Estimation and Prediction of Slowly Time-Varying Parameters in GARCH models: A Non-parametric Approach

Jorge A. Muñoz Mendoza

## Abstract

We propose a state-space approach for a non-parametric tv-GARCH model. Through various non-parametric techniques we estimate the coefficient curves with smooth changes over time and we use a recursive system based on the Kalman Filter to make and evaluate the predictions. Empirically, we developed Monte Carlo simulation exercises and evaluated the model with actual data from the Chilean stock market through the Selective Stock Price Index (IPSA). Our findings demonstrate that the non-parametric tv-GARCH model provides more accurate predictions than a stationary GARCH model. These results have relevant implications for risk management and portfolio diversification strategies.

JEL Clasification: C14, C15, C53, C58.

*Keywords:* Non-stationary, GARCH, Local Stationary, Kalman Filter.

---

## Capítulo 1

# Introducción

---

Modelar la volatilidad se ha transformado en un aspecto de crucial importancia en la práctica de los mercados financieros internacionales debido a sus implicancias sobre la diversificación de los portafolios y la gestión de riesgos. Por esta razón, el modelo GARCH propuesto por Engle (1982) y Bollerslev (1986), se ha convertido en una de las principales herramientas de estimación y predicción de la volatilidad.

En la literatura existen diversos estudios que han evaluado la precisión de los modelos GARCH, tanto simétricos como asimétricos. Chen y Watanabe (2019) demostraron que los modelos GARCH, particularmente las especificaciones asimétricas, tienen un importante poder predictivo para la volatilidad financiera, hecho que evidentemente permite una estimación más precisa del Value at Risk (VaR) y otras medidas de incertidumbre. Otros estudios teóricos y empíricos también han corroborado las ventajas del modelo GARCH y sus contribuciones prácticas para la gestión y valoración de riesgos financieros (Chen et al. 2012; Dias, 2017; Chen et al., 2021; So et al. 2022). Sin embargo, la evidencia también ha advertido que estos modelos subestiman la volatilidad y los riesgos, particularmente en períodos de crisis y de profundo estrés financiero (Bollerslev y Mikkelsen, 1996; Tsay, 2010). Su menor capacidad para capturar y modelar la dinámica del segundo momento condicional de las series financieras radica en la estacionariedad del modelo, hecho que supone parámetros constantes a lo largo del tiempo para representar la volatilidad.

Para corregir esta rigidez estructural de los modelos GARCH estacionarios, algunos estudios han introducido modelos más sofisticados del tipo time-varying GARCH (en adelante tv-GARCH) que relajan el supuesto de estacionariedad estricta. Uno de los trabajos pioneros en esta materia fue el de Dahlhaus y Subba Rao (2006), quienes propusieron un modelo tv-ARCH a partir de una aproximación localmente estacionaria que calcula los parámetros para diversos puntos fijos en el tiempo. Más tarde, Amado y Teräsvirta (2008) extendieron del modelo tv-GARCH utilizando enfoques paramétricos aditivos y multiplicativos. Sus hallaz-

gos establecieron que las predicciones de la volatilidad accionaria del S&P 500 obtenidas a partir de este modelo fueron más precisas que las estimadas a través de otras especificaciones GARCH estacionarias.

Estudios posteriores profundizaron en la estimación de modelos tv-GARCH a través de técnicas paramétricas más complejas. Por ejemplo, Rohan y Ramanathan (2013) and Rohan (2013) utilizaron un polinomio local a través de un procedimiento de dos etapas que permite estimar la función de parámetros de un modelo tv-GARCH. Chen y Hong (2016) utilizaron quasi-máxima verosimilitud local para estimar una estructura tv-GARCH, mientras que Ferreira et al. (2017) utilizan ecuaciones recursivas del Filtro de Kalman para estimar una especificación espacio-estado de dicho modelo. Más recientemente, Pourkhanali et al. (2021) utilizaron polinomios de Chebyshev para estimar los parámetros temporalmente variables, en donde los coeficientes del polinomio se aproximaron numéricamente mediante el método de gradiente descendiente. En todos estos casos, el modelo tv-GARCH proporcionó predicciones más precisas que modelos GARCH estacionarios, tanto a través de simulaciones específicas como para datos reales.

Pese a estos avances, aún existen brechas metodológicas y empíricas que no han sido del todo exploradas en la estimación de modelos tv-GARCH, y que a través de esta investigación pretendemos abordar. Primero, y pese al avance en la implementación de técnicas no paramétricas a la estimación de modelos de series de tiempo observado en las últimas décadas, aún no hay un amplio desarrollo de esta materia para modelos tv-GARCH. La ventaja de los métodos no paramétricos es que los modelos y parámetros están definidos de una forma más general que no está sujeta a una forma explícita de la función de distribución de los datos. En esta materia, varios son los trabajos que han estudiado la implementación de técnicas no paramétricas como funciones splines o regresiones localmente estacionarias a modelos de series de tiempo (Fryzlewicz, 2005; Moulines et al., 2005; Palma et al., 2013; Bardet y Doukhan, 2018; Van Delft y Eichler, 2018; Navarrete y Viswanath, 2018), así como otros que los aplican a modelos GARCH estacionarios (Härdle et al., 2003; Linton y Yan, 2011; Meister y Kreiß, 2016; Liu y Yang, 2016; Cassim, 2018; Klemelä, 2020). No obstante, sólo un escaso número de estudios han implementado métodos no paramétricos a la estimación de modelos tv-GARCH. Polzehl y Spokoiny (2006) proporcionan una forma general de tv-GARCH a través de funciones de cambios espontáneos que permiten variaciones temporales suaves de los parámetros. Los autores advierten que la estimación a través de técnicas paramétricas es más compleja que las no paramétricas para el caso de un tv-GARCH debido a que las funciones que modelan los coeficientes pueden tener discontinuidades. Más tarde, Engle y Rangel (2008) descomponen la volatilidad en un componente de alta frecuencia y otro slow-moving, el cual se

---

representan mediante una función spline. Los autores sostienen que la ventaja del componente slow-moving es que se puede explicar por variables de baja frecuencia como el crecimiento de PIB, inflación o tasas de corto plazo; hecho que evidentemente hace más precisa la predicción de la volatilidad a largo plazo. Más recientemente, Inoue et al. (2021) proponen un modelo lineal localmente estacionario para estimar tv-GARCH(1,1). Los autores demuestran que los parámetros de un modelo GARCH estacionario son inestables en el tiempo, y que su performance predictiva es significativamente inferior en comparación a un modelo con parámetros temporalmente variables.

Nuestro trabajo corresponde a una extensión natural del trabajo de Ferreira et al. (2017), y profundiza el estudio del modelo tv-GARCH a través de métodos no paramétricos. Sus contribuciones se pueden resumir en dos puntos. Primero, nuestra investigación discute la implementación de diversos métodos no paramétricos tales como regresiones localmente estacionarias, splines, spline suavizados, para estimar las curvas de los coeficientes en un contexto de variaciones suaves. Ello permite la comparabilidad tanto del proceso de estimación así como de la precisión de las predicciones a través de las diversas técnicas. Segundo, y a diferencia de los estudios previos, nuestra investigación propone una adaptación del modelo tv-GARCH no paramétrico a una representación espacio-estado. Esta representación facilita el cómputo de predicciones permitiendo el uso de variados algoritmos como el Filtro de Kalman (en adelante *KF*).

## 1.1. Objetivos de la Investigación

De acuerdo a las brechas empíricas y metodológicas formulamos los siguientes objetivos, tanto general como específicos.

### 1.1.1. Objetivo general e hipótesis

La hipótesis de la investigación es que a través de técnicas no paramétricas se puede estimar un modelo tv-GARCH cuya capacidad predictiva sea superior a los modelos GARCH tradicionales. Por esta razón, el objetivo general de esta investigación es proponer una extensión del modelo GARCH bajo una estructura tv-GARCH estimada mediante métodos no paramétricos y evaluar su precisión predictiva.

### 1.1.2. Objetivos específicos

De acuerdo al objetivo general planteado, se desprenden los siguientes objetivos específicos:

1. Proponer tres formas de estimación no paramétricas para el modelo tv-GARCH (Regresión lineal local, P-splines y splines suavizados).
2. Evaluar la capacidad predictiva fuera de muestra mediante el uso de filtros de Kalman.

## 1.2. Enfoque y tipo de investigación

El proyecto es del tipo investigación-acción ya que a través de sus contribuciones teóricas y empíricas proporciona nuevo conocimiento en el área de la econometría financiera y sus potenciales resultados pueden contribuir a la cuantificación de riesgos en la toma de decisiones de inversión bajo incertidumbre. Por lo señalado, la presente investigación tiene un enfoque cuantitativo-descriptivo-correlacional-explicativo y está basado en tres aspectos que subyacen a su estructura y potenciales contribuciones:

- Una contribución teórica al proponer nuevos métodos de estimación de modelos tv-GARCH, particularmente no paramétricos,
- Una contribución metodológica que involucra la creación de rutinas en R para el proceso de estimación, y
- Una contribución empírica que permita evaluar y comparar las ventajas teóricas-metodológicas del modelo teórico, así como su capacidad predictiva fuera de muestra.

## 1.3. Datos y recursos

Para estudiar y evaluar los objetivos a través de una aplicación empírica, usaremos datos diarios del Índice de Precios Selectivos de Acciones (IPSA) de la Bolsa de Valores de Santiago. Los datos fluctúan entre enero de 2010 y diciembre de 2020. Los modelos y procesos de estimación-predicción son implementados en rutinas de R y serán guiados por el profesor Guillermo Ferreira Cabezas (PhD). El cronograma o planificación del trabajo detalla las siguientes actividades:

- Reuniones de trabajo.
- Lecturas adicionales
- Recepción de feedback de parte del profesor.
- Presentación en congresos de especialidad.
- Presentación del proyecto y defensa final.

# Marco metodológico

---

## 2.1. Modelo tv-GARCH

El modelo tv-GARCH fue introducido por Dahlhaus y Subba Rao (2006), y Amado y Teräsvirta (2008). Inspirados en Ferreira et al. (2017), quienes profundizaron en la literatura de modelos GARCH no estacionarios con parámetros temporalmente variables, establecemos una extensión natural para esta línea de investigación. Para una serie de tiempo  $X_{t,T}$  con media cero y definida sobre el set de información  $\mathcal{F}_{t-1}$  disponible desde el pasado infinito, denotado formalmente por  $\{X_{t-i,T} : i = 1, 2, \dots\}$ , el modelo tv-GARCH tiene la siguiente estructura general:

$$X_{t,T} = \sigma \left( \frac{t}{T} \right) \varepsilon_t, \quad (2.1)$$

$$\sigma_{t,T}^2 = c \left( \frac{t}{T} \right) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \left( \frac{t}{T} \right) X_{t-i,T}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \left( \frac{t}{T} \right) \sigma_{t-i,T}^2, \quad (2.2)$$

Donde  $\sigma_{t,T}^2 = \text{VAR}(X_{t,T} | \mathcal{F}_{t-1}) = \text{E}(X_{t,T}^2 | \mathcal{F}_{t-1})$  es la varianza condicional de  $X_{t,T}$  y  $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ . De acuerdo a la Figura 2.1, definimos  $u = (t/T) \in (0, 1]$  como los puntos de tiempo reescalados (Dahlhaus y Subba Rao, 2006; Amado y Teräsvirta, 2008; Rohan, 2013; Ferreira et al., 2017). Note que cuando la ecuación de la varianza condicional (2.2) no depende de  $u$  se obtiene el tradicional modelo GARCH estacionario. De esta forma, resulta evidente que el rescalamiento al dominio  $[0, 1]$  nos permite obtener una secuencia de puntos temporales para los cuales podemos estimar los parámetros como funciones que varían suavemente a lo largo del tiempo.

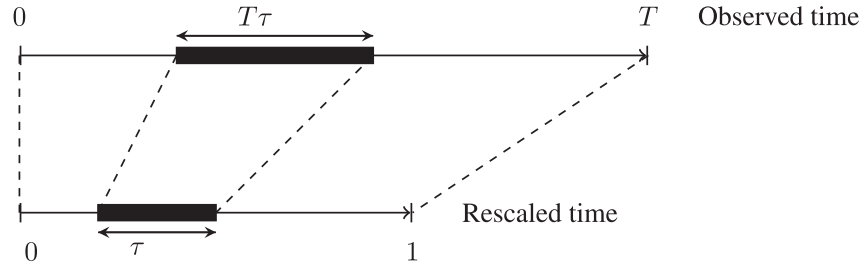


Figura 2.1: Principio de reescalamiento del tiempo.

En nuestra investigación, focalizamos la atención sobre un modelo tv-GARCH(1,1), ya que esta simple estructura ha sido ampliamente utilizada en la práctica de los mercados financieros para representar la relación riesgo-retorno de los diversos activos. Luego, el modelo tv-GARCH(1,1) o GARCH localmente estacionario (denotado por LS-GARCH(1,1)) se define como:

$$X_{t,T} = \sigma_{t,T} \varepsilon_t, \quad (2.3)$$

$$\sigma_{t,T}^2 = c\left(\frac{t}{T}\right) + \alpha\left(\frac{t}{T}\right) X_{t-1,T}^2 + \beta\left(\frac{t}{T}\right) \sigma_{t-1,T}^2, \quad (2.4)$$

donde  $c(u) = \alpha(u) = \beta(u) = 0$  para  $u < 0$  y  $c(u) > 0$ ,  $\alpha(u) > 0$  y  $\beta(u) > 0$  para  $u \in (0, 1]$ . Estas condiciones garantizan la no negatividad de  $\sigma_{t,T}^2$ . La implementación de la estimación de parámetros temporalmente variables en el dominio del tiempo a través del sistema espacio-estado indicado en (2.4) asume dos condiciones de regularidad del modelo. Estas son:

A1. El modelo tv-GARCH satisface las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} 0 < \alpha(u) + \beta(u) &\leq 1 - \delta, \\ 0 < u &\leq 1, \\ \sup_u \{c(u)\} &< \infty \quad \text{for some } \delta > 0. \end{aligned}$$

Estas condiciones sostienen que la varianza condicional tiene un comportamiento de persistencia en el tiempo asociada a los parámetros  $\alpha(u)$  y  $\beta(u)$ , mientras que la constante de la ecuación de la varianza condicional  $c(u)$ , que representa la porción homocedástica de la dicha varianza, es finita. Estas condiciones iniciales garantizan que el modelo tv-GARCH está bien definido y tiene una solución única.

A2. Consideremos la existencia de las constantes finitas  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  tales que para todo  $u_1, u_2 \in (0, 1]$  tenemos que:

$$\begin{aligned} |c(u_1) - c(u_2)| &\leq M_1 |u_1 - u_2|, \\ |\alpha(u_1) - \alpha(u_2)| &\leq M_2 |u_1 - u_2|, \\ |\beta(u_1) - \beta(u_2)| &\leq M_3 |u_1 - u_2|. \end{aligned}$$

Estas condiciones conocidas como Condiciones Continuas de Lipschitz en el intervalo  $(0, 1]$  garantizan que los parámetros temporalmente variables sean funciones suaves.

En relación a la forma funcional de estas funciones suaves, Ferreira et al. (2017) proponen funciones determinísticas para los parámetros del modelo (2.4), especificando la evolución temporal de los parámetros en una forma general. Sea  $g_j(u)$  con  $j = 1, 2, \dots$  una base para el espacio de funciones suavemente variables y  $\theta(u)$  el parámetro temporalmente variable del modelo (2.4). De esta forma, podríamos escribir  $\theta(u)$  en términos de la base  $g_j(u)$  como sigue:

$$\theta(u) = \sum_{j=0}^k \alpha_j g_j(u). \quad (2.5)$$

Donde  $\alpha_j$  son los parámetros que relacionan linealmente el set de parámetros  $\theta(u)$  del modelo (2.4) con la base  $g_j(u)$ . En estos casos, la forma funcional de la base  $g_j(u)$  es muy importante en el proceso de estimación. Algunos ejemplos son los polinomios generados por la base ( $g_j(u) = u^j$ ), expansiones de Fourier generadas por la base ( $g_j(u) = e^{iuj}$ ) y los filtros de wavelets generados por el sistema de Haar o Daubechies. En nuestro caso, proponemos tres alternativas de estimación no paramétrica de un modelo GARCH localmente estacionario, que a diferencia de los métodos paramétricos, no establecen una forma específica para la distribución de la muestra y no se ven afectados por posibles discontinuidades de las funciones que representan a los parámetros (Polzehl y Spokoiny, 2006).

## 2.2. Métodos no paramétricos

En esta sección se presentan y discuten el ajuste no paramétrico mediante curvas caracterizadas por un componente semiparamétrico para la función de parámetro variable en el tiempo indicado en (2.5). Asumiremos que el vector de parámetros  $\theta(u) = [c(\cdot), \alpha(\cdot), \beta(\cdot)]$  puede ser modelado en (2.5) a través de la siguiente forma general:

$$\theta_j = m(t_j) + \omega_j \quad \text{para } j = 1, \dots, M \quad (2.6)$$



donde  $\omega_j$  son errores aleatorios *iid* con media 0, siendo  $t_j$  el punto medio del  $j$ -ésimo bloque,  $M$  el número de bloques (mayores detalles en la sección 3.4) y  $m(\cdot)$  es una función desconocida llamada función de regresión. En este punto, el aspecto clave de la regresión no paramétrica es un estimador  $\hat{m}$  de  $m$  a partir de muestras *iid*  $(t_1, \theta_1), \dots, (t_M, \theta_M)$ . Por ello, a lo largo de este trabajo definiremos  $u_j = \frac{t_j}{T}$  como el punto medio del  $j$ -ésimo bloque reescalado en el dominio de tiempo  $[0, 1]$ .

Por otra parte, en el contexto de la estimación de la función de regresión se han desarrollado diferentes métodos a través de trabajos metodológicos y empíricos recientes tales como polinomios, spline suavizadas, suavizamiento de wavelets entre otras técnicas (Fan y Gijbels, 1996; Cristobal y Alcalá, 2000; Ruppert et al., 2003; Rohan y Ramanathan, 2013; Roy y Karmakar, 2020). En lo siguiente, proporcionaremos una breve revisión y discusión acerca de los métodos no paramétricos a utilizar en el modelo de parámetros temporalmente variables indicado en (2.6).

### 2.2.1. Regresión lineal local

Asumimos que la función de regresión  $m_j$  tiene  $p$  derivadas en un punto  $u$ . Luego, a través del Teorema de Taylor podemos obtener una aproximación para los valores en el entorno de  $u$ . Esto justifica que  $\theta_j$  puede ser enfocado localmente por una función polinomial de grado  $p$  que nos permite construir una regresión local en cada punto  $u_j$  tal que la estimación  $\hat{m}$  minimiza:

$$\sum_{j=1}^M \left[ \theta_j - \sum_{i=0}^p \beta_i (u_j - u)^i \right]^2 K_h(u_j - u),$$

donde  $h > 0$  es el parámetro de ancho de banda que controla las observaciones que caen en cada entorno;  $K_h(x) = h^{-1}K\left(\frac{x}{h}\right)$  es la función kernel  $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la cual satisface las siguientes condiciones:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} xK(x) dx = 0, \quad 0 < \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 K(x) dx < \infty.$$

Luego, podemos reescribir la regresión lineal local estimada  $\hat{m}(u)$  como función de  $(u_j, \theta(u_j))$ :

$$\hat{m}(u) = \mathbf{e}^\top \left( \mathbf{X}_u^\top \mathbf{W}_u \mathbf{X}_u \right)^{-1} \mathbf{X}_u^\top \mathbf{W}_u \boldsymbol{\theta}, \quad (2.7)$$

donde  $\mathbf{e}^\top = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{X}_u$  es una matriz de dimensión  $M \times (p+1)$  con la  $i$ -ésima fila igual a  $[1, (u_j - u)]^\top$ ,  $\mathbf{W}_u = \text{diag}[K_h(u_1 - u), \dots, K_h(u_M - u)]$ ,  $K_h$  es una función kernel y  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_M) \in \mathbb{R}^M$ .

### 2.2.2. Regresiones Splines

La función no paramétrica desconocida  $m(u_j)$  es modelada usando funciones suavizadas spline penalizadas (P-spline). Recientemente, las funciones spline penalizadas se han tornado muy populares dentro de las técnicas de suavizamiento debido a que vinculan funciones suavizadas y modelos lineales mixtos, haciendo más atractivo el proceso de estimación. De acuerdo con Crainiceanu et al. (2005), este vínculo está hecho de una base de splines de  $p$  grados, con lo que la representación de  $m(u_j)$  estará dada por:

$$\alpha_1 g_1(u) + \alpha_2 g_2(u) + \dots + \alpha_{p+1} g_{p+1}(u) + \sum_{s=p+2}^K \alpha_s g_{p+1+s}(u), \quad (2.8)$$

donde  $\alpha_0, \dots, \alpha_{K+p+1}$  son coeficientes y  $g_1, \dots, g_{K+p+1}$  son funciones bases para los splines de orden  $p$ . La forma más natural para estimar (2.8) es usar una base P-spline o una base de potencia truncada definida como:

$$\begin{aligned} g_1(u) &= 1, \\ g_2(u) &= u, \\ &\vdots \\ g_{p+1}(u) &= u^p, \\ g_{p+1+s}(u) &= (u - \kappa_s)_+^p \quad ; \quad s = 1, \dots, K, \end{aligned}$$

donde  $x_+$  denota la parte positiva de  $x$  y  $\kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \dots \leq \kappa_K$  son nodos fijos, típicamente ubicados en cuantiles de la distribución de valores únicos de la covariable  $u$ . Luego, definimos la matriz de bases  $G \in \mathbb{R}^{M \times (K+p+1)}$  como:

$$G_{ij} = g_j(u_i), \quad i = 1, \dots, M; \quad j = 1, \dots, K + p + 1,$$

ahora podemos usar la regresión lineal para determinar los coeficientes óptimos como:

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^{K+p+1}} \|\boldsymbol{\theta} - \mathbf{G}\alpha\|^2,$$

lo cual nos lleva a adaptar la siguiente regresión spline:

$$\hat{m}(u) = \sum_{j=1}^{K+p+1} \hat{\alpha}_j g_j(u). \quad (2.9)$$

Sin embargo, es necesario mencionar algunos aspectos relevantes. Primero, discutamos algunos aspectos en relación a la dimensión de  $K$ . Es bien conocido que en la regresión spline un pequeño valor de  $K$  podría generar un sobre suavizamiento, mientras que un valor grande de  $K$  podría proveer estimaciones muy aproximadas. Adicionalmente, como el número de funciones bases aumenta, el problema de la regresión se sobrecondiciona tornando la estimación numérica menos estable. Segundo, la ubicación de los nodos es un problema complejo en la regresión no paramétrica. En la literatura no paramétrica de splines, en general y para todo  $K$ , los nodos interiores se colocan en orden estadístico o igualmente espaciados. Para corregir estos problemas, los nodos son reemplazados por todos los puntos del rescalamiento  $(u_1, \dots, u_M)$  permitiendo el suavizado de splines.

### 2.2.3. Splines suavizados

Los splines suavizados evitan el problema de selección de nodos ya que usan los inputs como nodos y, simultáneamente controlan el sobreajuste del modelo al reducir los coeficientes de la función estimada en su expansión de base. Con inputs  $(u_1, \dots, u_M)$  contenidos en el intervalo  $[0, 1]$ , el spline de suavizado estimado  $\hat{m}$  de un orden dado  $k$  está definido como:

$$\hat{m} = \arg \min_m \sum_{j=1}^M (\theta_j - m(u_j))^2 + \lambda \int_0^1 \left( m^{(k+1)/2}(u) \right)^2 du,$$

donde  $\lambda \geq 0$  es el parámetro de ajuste, el cual gobierna la fuerza de cada término en el proceso de minimización. El valor de  $k$  más comúnmente considerado es  $k = 3$ , definido como el spline suavizado cúbico definido como:

$$\hat{m} = \arg \min_m \sum_{j=1}^M (\theta_j - m(u_j))^2 + \lambda \int_0^1 (m^2(u))^2 du. \quad (2.10)$$

### 2.2.4. Evolución de la función de parámetros del modelo LS-GARCH

Para determinar el comportamiento de la función de parámetros, proponemos un estudio exploratorio de datos. Para una exposición más ordenada y autocontenida, suponga que estamos interesados en conocer la estructura dinámica de los parámetros variables en el tiempo para el modelo LS-GARCH (1,1):

$$\begin{aligned} X_{t,T} &= \sigma_{t,T} \varepsilon_t, \\ \sigma_{t,T}^2 &= c \left( \frac{t}{T} \right) + \alpha \left( \frac{t}{T} \right) X_{t-1,T}^2 + \beta \left( \frac{t}{T} \right) \sigma_{t-1,T}^2, \end{aligned}$$

para  $t = 1, \dots, T$ . En este caso, debemos modelar tres curvas usando los procedimientos descritos en las secciones previas. Luego:

$$\begin{aligned} c(t_j) &= m_1(t_j) + \omega_1(t_j), \\ \alpha(t_j) &= m_2(t_j) + \omega_2(t_j), \\ \beta(t_j) &= m_3(t_j) + \omega_3(t_j), \end{aligned}$$

para  $j = 1, \dots, M$ , y  $M$  siendo el número de bloques de datos. Específicamente, dada una muestra  $\{X_{1T}, \dots, X_{TT}\}$ , el dominio de la observación  $\{1, \dots, T\}$  es dividida en  $M$  bloques superpuestos de longitud  $N$  con  $S$  cambios/saltos tal que  $T = S(M - 1) + N$  y el punto medio del  $j$ -ésimo bloque es  $t_j = S(j - 1) + N/2$  con  $j = 1, \dots, M$ . Una vez determinados los bloques de datos, se obtienen las estimaciones locales de un modelo GARCH (1,1) estacionario a través de la función archspec del paquete rugarch de R sobre cada bloque. El comportamiento de estas estimaciones nos da una pista del tipo de funciones capaces de capturar la variación de los parámetros variables en el tiempo. Finalmente, estimamos estas curvas utilizando las técnicas descritas en las secciones anteriores.

## 2.3. Representación Espacio-Estado y Filtro de Kalman

### 2.3.1. Representación funcional

Una vez estimadas las curvas utilizando las metodologías antes mencionadas, utilizaremos el Filtro de Kalman para realizar las predicciones de las volatilidades del modelo LS-GARCH. Para ello, siguiendo a Ferreira et al. (2013) y Ferreira et al. (2017), proponemos un filtro para el modelo tv-GARCH (1,1), e indicamos cómo se puede utilizar la salida de este filtro en la estimación de parámetros. Para ello definimos la variable auxiliar:

$$\xi_{t,T} = c\left(\frac{t}{T}\right) + \beta\left(\frac{t}{T}\right)\xi_{t-1,T} + \alpha\left(\frac{t}{T}\right)\tilde{Y}_{t-1,T}, \quad (2.11)$$

donde  $\xi_{t,T} = \sigma_{t,T}^2$  y  $\tilde{Y}_{t,T} = X_{t,T}^2$ . Por construcción,  $\xi_{t,T} = \mathbb{E}\left(\tilde{Y}_{t,T} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)$  y  $\tilde{Y}_{t,T} = \xi_{t,T} + \eta_t$ , donde  $\{\eta_t\}$  es una serie martingala en diferencia. Sustituyendo  $\xi_{t,T} = \tilde{Y}_{t,T} - \eta_t$  en (11) tenemos:

$$\tilde{Y}_{t,T} = c\left(\frac{t}{T}\right) + \left[\beta\left(\frac{t}{T}\right) + \alpha\left(\frac{t}{T}\right)\right]\tilde{Y}_{t-1,T} + \eta_t - \beta\left(\frac{t}{T}\right)\eta_{t-1}$$

Ahora definimos la media de  $\tilde{Y}_{t,T}$  by  $\mu\left(\frac{t}{T}\right) = \mathbb{E}\left(\tilde{Y}_{t,T}\right)$ , la cual satisface  $\mu\left(\frac{t}{T}\right) = c\left(\frac{t}{T}\right) + \left[\beta\left(\frac{t}{T}\right) + \alpha\left(\frac{t}{T}\right)\right]\mu\left[\frac{(t-1)}{T}\right]$ . Note que asumiendo que la condición A2 se mantiene, tenemos

que  $|\mu(\frac{t}{T}) - \mu(\frac{t-1}{T})| = o(1)$ . Luego, la media del proceso  $\tilde{Y}_{t,T}$  puede ser escrito como  $\mu(\frac{t}{T}) = \frac{c(\frac{t}{T})}{1 - \beta(\frac{t}{T}) - \alpha(\frac{t}{T})} + o(1)$ . Teniendo esto en mente, el modelo tv-GARCH(1, 1) puede ser definido como:

$$Y_{t,T} = \left[ \beta \left( \frac{t}{T} \right) + \alpha \left( \frac{t}{T} \right) \right] Y_{t-1,T} + \eta_t - \beta \left( \frac{t}{T} \right) \eta_{t-1} \quad (2.12)$$

donde  $Y_{t,T} = \tilde{Y}_{t,T} - \mu(\frac{t}{T})$ . Dado lo indicado en (2.12), tenemos que un modelo tv-ARMA(1, 1) que puede ser representado por un proceso espacio-espado no estacionario de la forma:

$$Y_{t,T} = Z_{t,T} \xi_{t,T} + G_{t,T} W_{t,T}, \quad (2.13)$$

$$\xi_{t+1,T} = T_{t,T} \xi_{t,T} + H_{t,T} V_{t,T}, \quad (2.14)$$

donde  $\{Y_{t,T}\}$  son las observaciones,  $Z_{t,T}$  es un operador de observación,  $\{\xi_{t,T}\}$  es el vector de estado,  $T_{t,T}$  es el operador de transición de estado y  $H_{t,T}$  es un operador lineal. Por otra parte, los vectores  $\{W_{t,T}\}$ ,  $\{V_{t,T}\}$  son independientes, cada uno de ellos siendo una secuencia de vectores aleatorios normales con media cero y varianza uno. Todos los elementos involucrados en la representación espacio-estado indicada en (2.13) y (2.14) son vectores unidimensionales. El proceso no estacionario indicado en (2.12) puede ser representado por el siguiente sistema espacio-estado finito-dimensional:

$$Y_{t,T} = \xi_{t,T} + \eta_t, \quad (2.15)$$

$$\xi_{t+1,T} = T_{t,T} \xi_{t,T} + H_{t,T} \eta_t, \quad (2.16)$$

para  $t = 1, \dots, T$ , donde  $Z_{t,T} = 1$ ,  $G_{t,T} = 1$ ,  $T_{t,T} = [\beta(\frac{t}{T}) + \alpha(\frac{t}{T})]$  y  $H_{t,T} = \alpha(\frac{t}{T})$ . Basado en la representación espacio-estado (2.15)-(2.16) de  $\{Y_{t,T}\}$ ,  $KF$  ecuaciones pueden ser utilizadas para estimar los parámetros, vectores de estado, futuras observaciones y valores pérdidas. El  $KF$  recursivo está dado por:

$$\hat{\xi}_{t+1,T} = T_{t,T} \hat{\xi}_{t,T} + \Theta_{t,T} \Upsilon_{t,T}, \quad (2.17)$$

$$\Omega_{t+1,T} = T_{t,T} \Omega_{t,T} L'_{t,T} + H_{t,T} J'_{t,T}, \quad (2.18)$$

donde  $\Upsilon_{t,T} = Y_{t,T} - G_{t,T} \hat{\xi}_{t,T}$  es la innovación con varianza  $\Delta_{t,T} = Z_{t,T} \Omega_{t,T} Z'_{t,T} + G_{t,T} G'_{t,T}$ ,  $\Theta_{t,T} = \left( T_{t,T} \Omega_{t,T} Z'_{t,T} + H_{t,T} G'_{t,T} \right) \Delta_{t,T}^{-1}$ ,  $\Omega_{t,T} = \text{VAR}(\xi_{t,T} - \hat{\xi}_{t,T})$ ,  $L_{t,T} = T_{t,T} - \Theta_{t,T} Z_{t,T}$  y  $J_{t,T} = H_{t,T} - \Theta_{t,T} G_{t,T}$ . Las condiciones iniciales del  $KF$  son  $Y_{0,T} = [0, \dots, 0]$ ,  $\hat{\xi}_1 = E(X_1) = [0, \dots, 0]$ ,  $\Omega_{1,T} = E(\xi_1 \xi_1^\top) = \text{diag}\{1, \dots, 1\}$ . Por lo tanto, la aproximación para muestra finita

de la función de la varianza condicional es:

$$\tilde{\sigma}_{t,T}^2 = \hat{\xi}_{t,T} + \frac{c\left(\frac{t}{T}\right)}{1 - \alpha\left(\frac{t}{T}\right) - \beta\left(\frac{t}{T}\right)} \quad (2.19)$$

### 2.3.2. Predicción h-pasos adelante

Consideremos que se disponen de las siguientes observaciones  $\{Y_{1,T}, \dots, Y_{n,T}\}$  y, bajo el enfoque espacio-estado indicado en la sección 4.1, deseamos predecir el valor  $Y_{n+k,T}$ . Entonces, definamos  $\tilde{Y}_{n+k,T} = E(Y_{n+k,T} | Y_{n,T}, Y_{n-1,T}, \dots, Y_{1,T})$  como el predictor de  $k$ -pasos basado en el pasado finito de  $1 \leq n+k \leq T$ . Siguiendo a Ferreira et al. (2017), el vector  $\Theta_{t,T} = 0$  y la matriz  $\Upsilon_{t,T} = 0$  para valores  $t = n+1, \dots, T$ , con lo cual la actualización de las ecuaciones del  $KF$  indicadas en (2.17) y (2.18) queda:

$$\hat{\xi}_{t+1,T} = T_{t,T} \hat{\xi}_{t,T}, \quad (2.20)$$

$$\Omega_{t+1,T} = T_{t,T} \Omega_{t,T} T'_{t,T} + H_{t,T} H'_{t,T}, \quad (2.21)$$

Luego, la predicción a  $k$ -pasos para el vector espacio y su medida de incertidumbre son:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{n+k,T} &= \prod_{j=0}^k T_{n+j,T} \hat{\xi}_{n,T}, \\ \Delta_{n+k,T} &= \prod_{j=0}^{k-1} T_{n+j,T} \Omega_{n,T} \prod_{j=0}^{k-1} T'_{n+j,T} + \sum_{j=0}^{k-j} \prod_{i=0}^j (T_{n+k-i})^i H_{n+k-j-1,T} H'_{n+k-j-1,T} \prod_{i=0}^j (T'_{n+k-i})^i + 1, \end{aligned}$$

para  $k = 1, \dots, T - n$ . De esta forma, la predicción de la varianza condicional es dado por:

$$\tilde{\sigma}_{t,T}^2 = \prod_{j=0}^k T_{n+j,T} \hat{\xi}_{n,T} + \frac{\hat{c}_{NP}\left(\frac{n+k}{T}\right)}{1 - \hat{\alpha}_{NP}\left(\frac{n+k}{T}\right) - \hat{\beta}_{NP}\left(\frac{n+k}{T}\right)}, \quad (2.22)$$

donde el vector de curvas  $(\hat{c}_{NP}, \hat{\alpha}_{NP}, \hat{\beta}_{NP})$  corresponden a predicciones-estimaciones mediante a los métodos no paramétricos señalados en la sección 3. Si estas aproximaciones cumplen la condiciones de regularidad A1 y A2 de la sección 2, entonces la predicción de la varianza es:

$$\tilde{\sigma}_{t,T}^2 \rightarrow \frac{\hat{c}_{NP}\left(\frac{n+k}{T}\right)}{1 - \hat{\alpha}_{NP}\left(\frac{n+k}{T}\right) - \hat{\beta}_{NP}\left(\frac{n+k}{T}\right)} \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty,$$

es evidente que las predicciones de  $X_{t,T}$  (retornos) dado  $\mathcal{F}_{t-1}$  son cero y el  $MSE$  que es  $E(\sigma_{t,T}^2|\mathcal{F}_{t,T}) = c(t/T)/(1 - \alpha(t/T) - \beta(t/T)) + E(\xi_{t,T}|\mathcal{F}_{t-1})$  para  $t = 1, \dots, n$ .

---

## Capítulo 3

# Experimentos de Simulaciones

---

### 3.1. Amplitud de la ventana

En esta sección implementaremos una simulación de un proceso tv-GARCH(1,1) a través del Método de Monte Carlo. La estructura del modelo a simular es:

$$X_{t,T} = \sigma_{t,T}\varepsilon_t, \quad (3.1)$$

$$\sigma_{t,T}^2 = c\left(\frac{t}{T}\right) + \alpha\left(\frac{t}{T}\right)X_{t-1,T}^2 + \beta\left(\frac{t}{T}\right)\sigma_{t-1,T}^2, \quad (3.2)$$

para  $t = 1, \dots, T$ . Para incorporar diferentes estructuras lineales y no lineales a los parámetros temporalmente variables de (3.1) y (3.2) dentro de la escala de tiempo  $u \in \{\frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \dots, 1\}$ , nos enfocamos en las sugerencias de Ferreira et al. (2017): Luego:

$$\begin{aligned} \text{Model 1: } c(u) &= c_0, & \alpha(u) &= a_0 + a_1u, & \beta(u) &= b_0 + b_1u + b_2u^2, \\ \text{Model 2: } c(u) &= c_0 + c_1u, & \alpha(u) &= a_0\cos(2\pi u) + a_1, & \beta(u) &= \beta_0u(1-u) + \beta_1u^3, \\ \text{Model 3: } c(u) &= 2u(1-u^2), & \alpha(u) &= a_0\cos(2\pi u) + a_1, & \beta(u) &= 2u(1-u) + \beta_0u^3. \end{aligned}$$

Los valores de cada coeficiente de las curvas anteriores son escogidas de tal manera que cumplan con las condiciones de regularidad A1.

Para la estimación de las curvas en un contexto localmente estacionario utilizaremos una serie de ventanas superpuestas. Definamos  $N$  como la longitud de cada ventana y  $S$  como el largo de la superposición. Luego, analizaremos una serie de valores de estos parámetros con  $N^* \in \{N_1, \dots, N_\nu\}$  tal que  $N_{k-1} < N_k$  para  $k \in \{1, \dots, \nu\}$  y con  $S^* \in \{S_1, \dots, S_\rho\}$  tal que  $S_{i-1} < S_i$  con  $i \in \{1, \dots, \rho\}$ . De esta forma, es posible establecer que el número de bloques  $M$



disponibles a lo largo de la serie está asociado a los valores de  $N^*$  y  $S^*$  de la siguiente forma:

$$M_{ki} = \left\lceil \frac{n - N_k}{S_i + 1} \right\rceil. \quad (3.3)$$

La terna de parámetros  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ik} = (\hat{\mathbf{c}}_{ik}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{ik}, \hat{\boldsymbol{\beta}}_{ik})^T$  para  $i \in \{1, \dots, \rho\}$  y  $k \in \{1, \dots, \nu\}$  serán estimados mediante un modelo GARCH(1,1) estacionario para cada ventana y superposición. Estos valores corresponden a la estructura empírica de las curvas que varían en el tiempo en la que cada vector  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ik}$  tiene largo  $M_{ik}$  y particularmente, cada valor de la sucesión representa el punto medio de cada ventana. Esto es:

$$t_{ikj} = S_i(j - 1) + \frac{N_k}{2}, \quad j \in \{1, \dots, M_{ik}\}.$$

De esta forma, es posible implementar una simulación de Monte Carlo que minimiza el error cuadrático medio (MSE) con  $m$  iteraciones. Esto es:

$$(N^{opt}, S^{opt}) = \arg \min_{ik} MSE_m^{\boldsymbol{\theta}_{ijk}} = \arg \min_{ik} E[\boldsymbol{\theta}_j - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{ikjm}]^2,$$

donde  $\boldsymbol{\theta}_j$  y  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ikjm}$  representan los valores de estructura fija por simulación y la estimación por ventana de los parámetros variantes en el tiempo, respectivamente. Note que cada matriz tiene dimensión  $3 \times M_{ik}$ . Luego, el número óptimo de bloques queda definido como

$$M^{opt} = \left\lceil \frac{n - N^{opt}}{S^{opt} + 1} \right\rceil \quad (3.4)$$

## 3.2. Simulación de Monte Carlo

En esta sección presentamos los resultados del experimento de Monte Carlo practicado al modelo tv-GARCH(1,1) indicado en (3.2). Este ejercicio considera  $m = 50$  iteraciones,  $n = 4000$  observaciones, longitudes de ventana  $N = \{100, 150, 200, \dots, 1000\}$  y un vector de superposición  $S = \{5, 20, 40, 60, \dots, 200\}$ . Dentro de cada ventana, también se estimó un proceso GARCH(1,1) estacionario, obteniendo los coeficientes  $\boldsymbol{\theta}_j^{LS} = (c^{LS}(j), \alpha^{LS}(j), \beta^{LS}(j))'$ .

La Figura 3.1 presenta el log(MSE) de las tres curvas de los modelos 1, 2 y 3. La Figura 3.1(a) corresponde al log(MSE) promedio de las tres curvas del Modelo 1. Se observan valores altos para una longitud de ventana entre  $N = [100 - 150]$ , con un invariante en el largo de shift o superposición. El largo óptimo de ventana es  $N^{opt} = 750$  y un espaciador de superposición

óptimo  $S^{opt} = 160$ . Por lo tanto, utilizando la fórmula (3.4), el número óptimo de bloques fue  $M^{opt} = 21$ , los cuales conforman a  $(x_{1,T}, x_{2,T}, \dots, x_{750,T}), (x_{161,T}, x_{162,T}, \dots, x_{910,T}), \dots, (x_{3201,T}, x_{3202,T}, \dots, x_{4000,T})$  como el set de observaciones.

La Figura 3.1(b) corresponde al  $\log(\text{MSE})$  promedio de las tres curvas del Modelo 2. No se observa una tendencia tanto en valores altos como bajos para  $N$  y  $S$ . Los resultados entregan un largo óptimo de la ventana  $N^{opt} = 550$  y un espaciador de superposición óptimo  $S^{opt} = 200$ , con lo cual el número óptimo de ventanas es  $M^{opt} = 18$ . Los  $M^{opt}$  bloques forman el set de observaciones  $(x_{1,T}, x_{2,T}, \dots, x_{550,T}), (x_{201,T}, x_{202,T}, \dots, x_{750,T}), \dots, (x_{3401,T}, x_{3402,T}, \dots, x_{4000,T})$ .

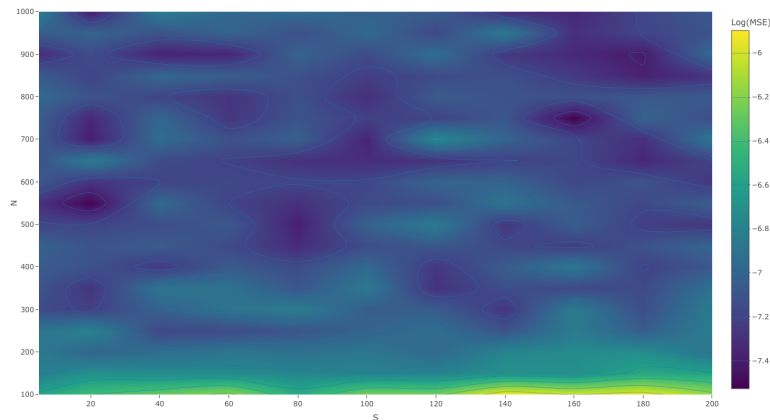
La Figura 3.1(c) corresponde al  $\log(\text{MSE})$  promedio de las tres curvas del Modelo 3. El experimento de Monte Carlo utiliza  $m = 50$  iteraciones y las mismas consideraciones de los modelos 1 y 2 en el conjunto  $N^*$  y  $S^*$ . Para la estructura del modelo 3, los coeficientes fueron seleccionados de tal forma de satisfacer las condiciones de regularidad A1 y se definieron en los valores  $\alpha_0 = 0,2$  y  $\alpha_1 = 0,25$  para la curva  $\alpha(u)$  y  $\beta_0 = 0,2$  para la curva de  $\beta(u)$ . Tras analizar los mínimos locales de cada curva, el largo de la ventana de estimación  $N$  fluctúa entre  $[200 - 400]$  y el rango de superposición  $S$  oscila entre  $[80 - 120]$ . Los resultados proporcionan un largo óptimo de ventana  $N^{opt} = 200$  y un espaciador óptimo de superposición  $S^{opt} = 120$ , con el que número óptimo de ventanas es  $M^{opt} = 32$ .

Considerando estas características estructurales, se estimaron las curvas de parámetros variables en el tiempo a partir de los modelos señalados y empleando los métodos no paramétricos discutidos en la sección 3. En estos casos, los MSE de los métodos de regresión polinomial local (con ancho de banda  $h = 500$  y grado  $deg = 7$ ), smooth spline (con parámetro  $spar = 0,2$ ) y spline (con grado  $deg = 3$  y puntos  $knots = 3$ ) fueron 0.3504, 0.3460 y 0.3462, respectivamente. Estos resultados revelan que la técnica de smoothing spline tuvo mayor precisión predictiva que las otras metodologías.

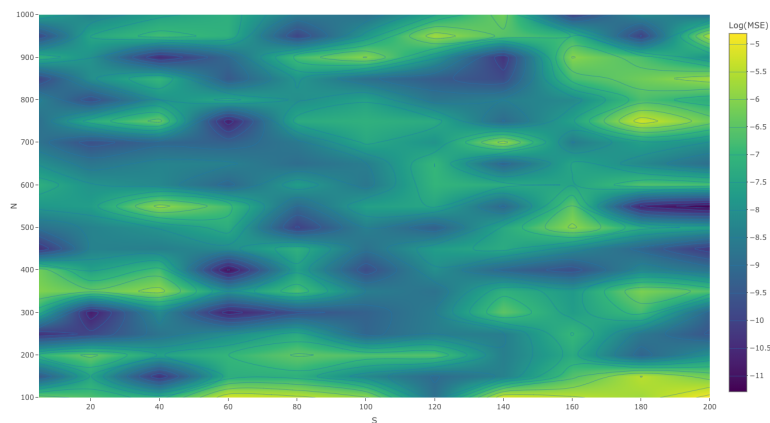
La Figura 3.2 presenta las curvas de los parámetros de la especificación tv-GARCH(1,1) para los modelos 1, 2 y 3. La estimación heurística está representada por puntos negros, la línea segmentada representa la estimación del modelo GARCH(1,1) estacionario que considera toda la muestra, la línea continua azul representa la estructura fija para las curvas de parámetros  $(c(u), \alpha(u), \beta(u))$  y la línea continua roja muestra el mejor ajuste del modelo, que en estos casos fue proporcionada por la técnica Smoothing Spline. La Figura 3.2(a) destaca que el modelo tv-GARCH (modelo 1) se acopla de mejor forma a la evolución temporal de los parámetros y marca una clara diferencia con respecto al modelo GARCH estacionario. Evidentemente, este hecho revela que el modelo GARCH localmente estacionario tiene una mayor capacidad para capturar la dinámica de la volatilidad en relación al modelo estrictamente estacionario. Por otra parte, los modelos 2 y 3 tienen una adherencia comparativamente

menor y es esperable un pobre desempeño predictivo sobre la volatilidad. Este hecho es atribuible a la poca concordancia que existe entre los mínimos locales de error cuadrático medio de cada curva y el mínimo del promedio de las tres curvas en la elección de largo de ventana y parámetro de superposición.

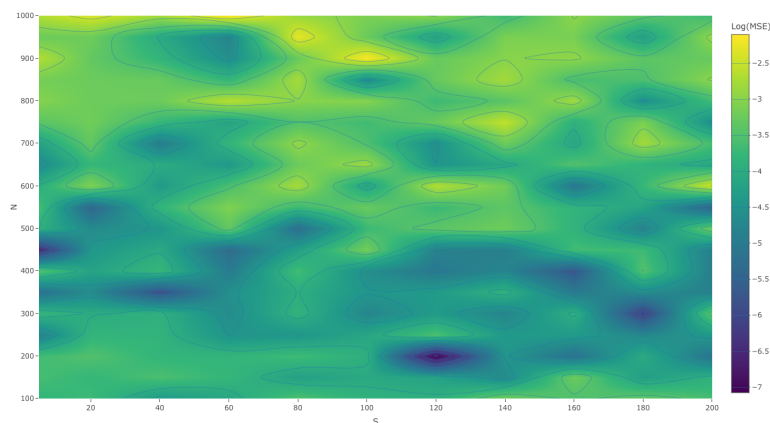
Figura 3.1: MSE de modelos: promedio de parámetros temporalmente variables.



(a) Model 1



(b) Model 2



(c) Model 3

Figura 3.2: Curvas suaves para parámetros tv-GARCH(1,1): Simulación de Monte Carlo.

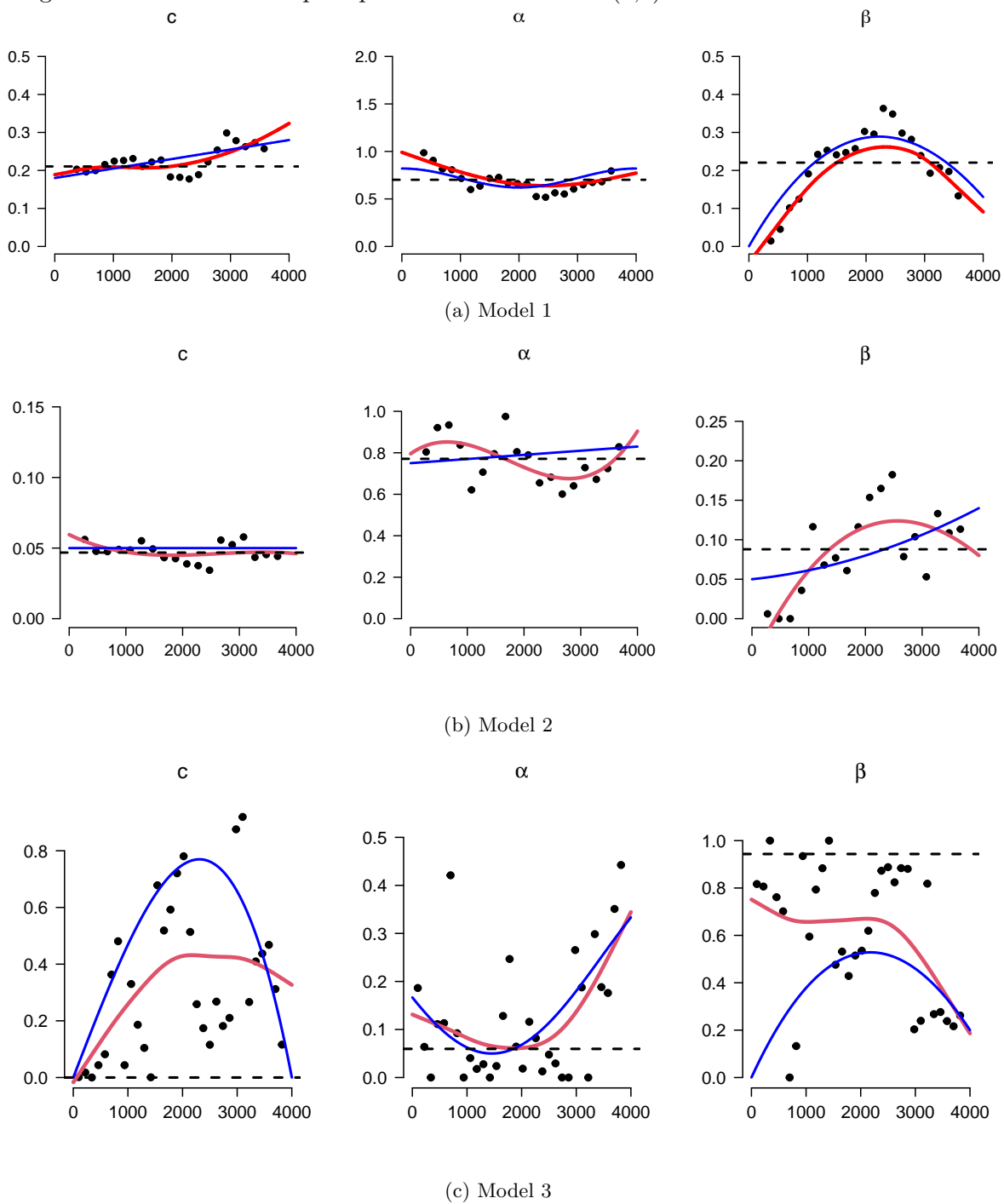
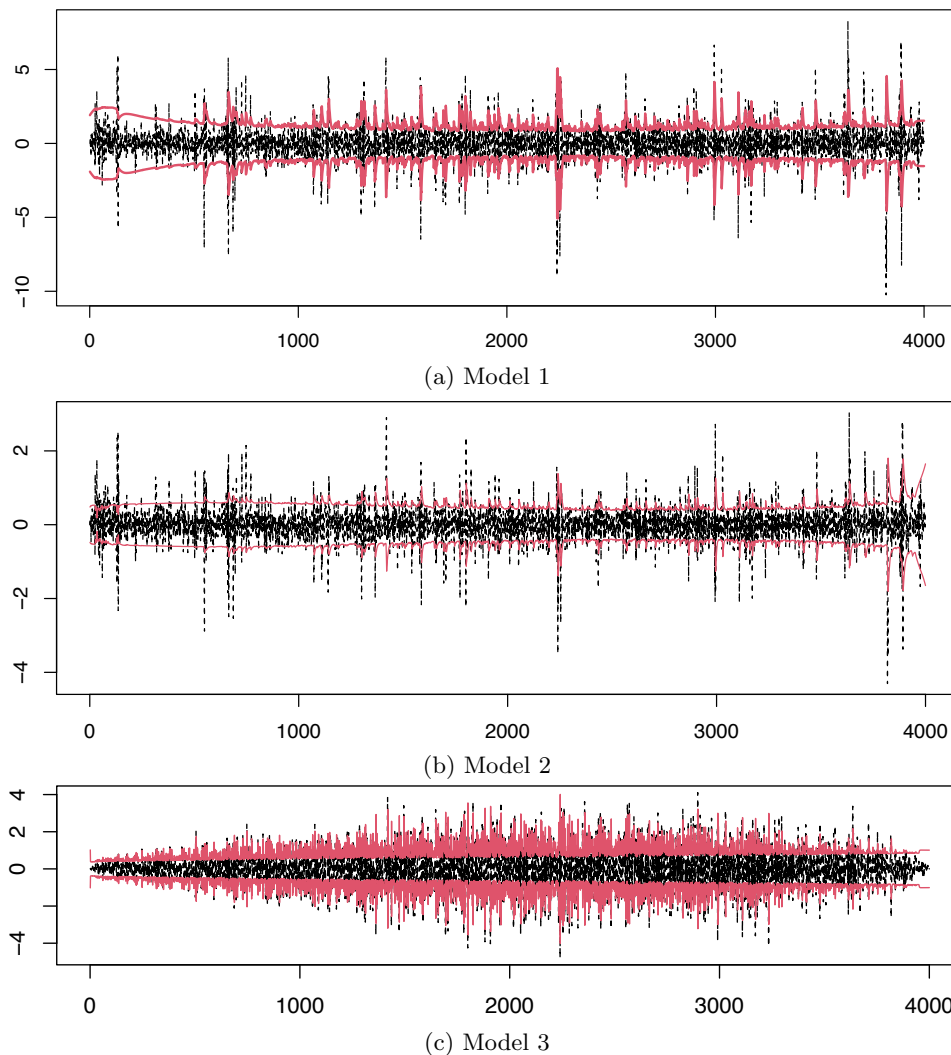


Figura 3.3: Predicción 50-pasos-adelante del modelo tv-GARCH(1,1): Simulación de Monte Carlo.



A partir del modelo tv-GARCH(1,1) simulado, implementamos el  $KF$  para calcular las predicciones 50 pasos adelante y así obtener  $\hat{\sigma}_{3950+j,T}^2$  para  $j = 1, \dots, 50$  con tamaño de muestra  $T = 4000$ . Esto significa que el modelo utiliza las observaciones  $t = 1, \dots, 3950$ , y deja los valores  $t = 3951, \dots, 4000$  fuera de la muestra para evaluar la precisión de los pronósticos. La Figura 3.3 presenta las predicciones 50 pasos adelante de la volatilidad. El modelo 1 muestra una mejor adherencia de la volatilidad (línea roja) respecto de los registros simulados (línea negra), mientras que los restantes modelos presentan un mayor dispersión.

# Aplicación empírica

---

## 4.1. Índice de Precios Selectivos de Acciones

En esta sección analizamos el Índice de Precios Selectivo de Acciones (IPSA) que mide la dinámica de las 40 acciones de mayor presencia bursátil en el mercado. Este indicador es elaborado por la Bolsa de Comercio de Santiago y es el principal índice del mercado bursátil de Chile. El análisis cubre el período diario entre marzo de 2010 y agosto de 2022. El análisis empírico sobre el IPSA se basa en la estimación de las curvas de parámetros del modelo tv-GARCH para una ventana con extensión  $N = 600$ , un parámetro de superposición  $S = 160$ , y por consiguiente, un número de ventanas  $M = 18$ .

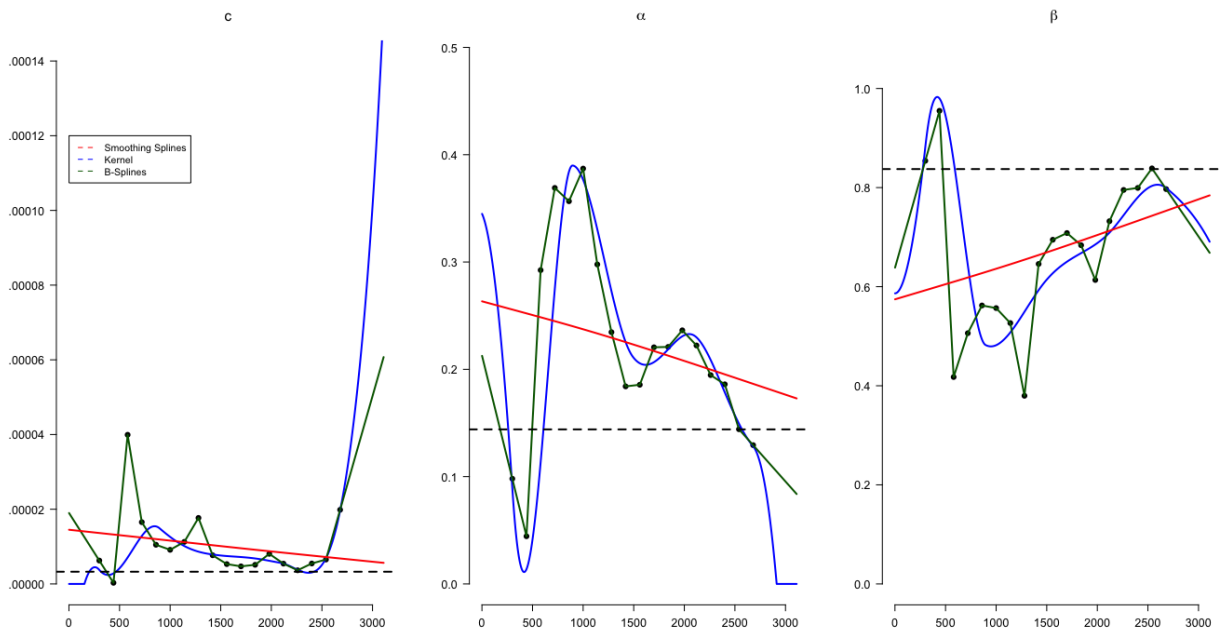


Figura 4.1: Estimación de curvas modelo tv-GARCH: IPSA.

La Figura 4.1 presenta la estimación a través de modelos GARCH estacionarios por ventana. Los puntos negros equiespaciados representan los puntos medios de cada ventana, mientras que la línea segmentada muestran la estimación estacionaria considerando toda la serie de la volatilidad condicional del IPSA. Se observa una evidente diferencia entre los puntos medios y la estimación estacionaria por bloque en la estimación del drift  $c(u)$ , lo que sugiere que la volatilidad del mercado chileno tiene un importante componente heterocedástico, además, es dinámico. Por otra parte, los parámetros  $\alpha(u)$  y  $\beta(u)$  muestran una clara disparidad entre el modelo estacionario y los puntos medios por bloque, lo que hace suponer que la representación variable en el tiempo es una aproximación más apropiada para modelar la volatilidad accionaria del mercado chileno. En todo caso, es importante mencionar que ya no es posible comparar los MSE, ya que no se dispone de una estructura fija como en los modelos 1, 2 y 3.

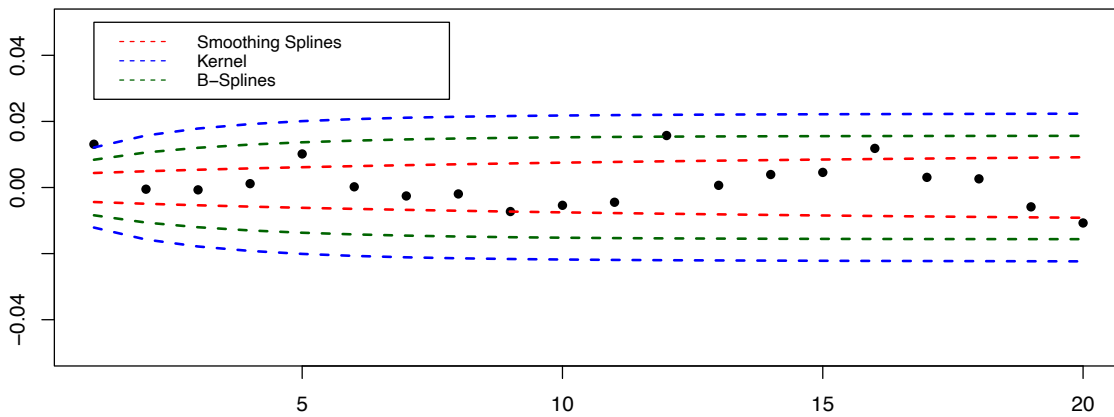


Figura 4.2: Predicción a 20-pasos-adelante para el IPSA.

Dado que la volatilidad de un retorno no es directamente observable, comparar el desempeño de los diferentes modelos propuestos presenta cierta dificultad. En la literatura metodológica, algunos autores dejan una parte de la muestra para fines de predicción, y comparan esta predicción  $\hat{\sigma}_{T+\ell}$  con el shock  $\tilde{Y}_{T+\ell} = X_{T+\ell}^2$ . Este enfoque a menudo encuentra un coeficiente de correlación bajo entre  $\tilde{Y}_{T+\ell}$  y  $\sigma_{T+\ell}^2$ . Sin embargo, tal hallazgo no es sorprendente porque  $\tilde{Y}_{T+\ell}$  por sí sólo no es una medida adecuada de la volatilidad en el tiempo  $T + \ell$ . Considerando desde un punto de vista estadístico los pronósticos 1-paso adelante, tenemos que  $\mathbb{E}(\tilde{Y}_{T+1}|F_T) = \sigma_{T+1}^2$ , de modo que  $\tilde{Y}_{T+1}$  es una estimación consistente de la volatilidad  $\sigma_{T+1}^2$ . Pero no es una estimación precisa de  $\sigma_{T+1}^2$  porque una sola observación de una variable aleatoria con un valor medio conocido no puede proporcionar una estimación precisa de su varianza. Por esta razón, este enfoque no es apropiado para evaluar el desempeño de los pronósticos de los modelos de volatilidad. En nuestro enfoque, disponemos del vector  $\tilde{Y}_{T+\ell}^{KF} = \hat{\xi}_{T+\ell}$

de las ecuaciones recursivas del  $KF$ , por lo que se considera válida la elección de los modelos a partir de la mera comparación de los MSE entre los retornos cuadráticos del IPSA y los retornos cuadráticos estimados mediante  $KF$ .

La Figura 4.2 muestra la predicción a 20 pasos adelante para la volatilidad IPSA. Los puntos negros corresponden a los retornos cuadráticos del IPSA y las líneas de color segmentadas indican las predicciones obtenidas para la volatilidad del IPSA a partir de los métodos no paramétricos analizados en la sección 3. Los mejores modelos estimados con los métodos de regresión local polinomial o kernel (con ancho de ventana  $h = 1440$  y un grado  $deg = 5$ ), la función B-Spline (con parámetros de grado  $deg = 1$  y grados de libertad  $df = 17$ ) y el Smoothing Spline (parámetro  $spar = 1$ ), registraron un MSE equivalente a 0.00069, 0.00070 y 0.00065, respectivamente. Pese al menor MSE de la estimación basada en Smoothing Spline, estos resultados no son concluyentes puesto que fueron ajustados en una muestra de entrenamiento (in-sample). Por lo anterior, la elección del modelo compara la estimación del vector de estado del  $KF$  con los retornos cuadráticos del IPSA. En este caso, el menor MSE a 20 pasos adelante fue registrado por el modelo estimado con B-Spline y cuyo valor alcanzó 0.01301.

Finalmente, la Figura 4.3 muestra la predicción de la volatilidad a 50 pasos tanto a través del (a) modelo tv-GARCH(1,1) con Smoothing Spline ( $\hat{\sigma}_{3090+k,T}^2$ ) como para (b) el GARCH(1,1) estacionario. Note que la volatilidad predicha tiene mayor variabilidad que la exhibida por el modelo estacionario.

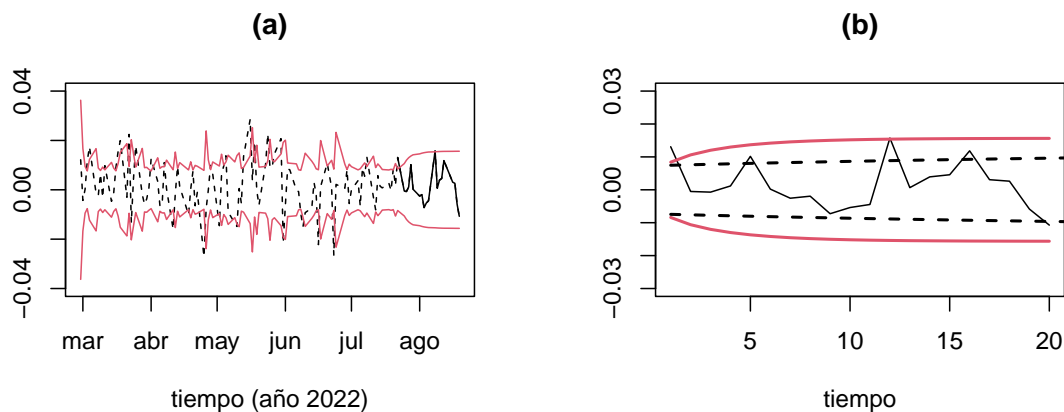


Figura 4.3: Comparación de predicciones: LS-GARCH v/s GARCH(1,1).



# Conclusiones

---

Los modelos GARCH estacionarios han sido ampliamente utilizados para modelar la volatilidad en los mercados financieros debido a su relevancia para la gestión del riesgo de los portafolios. No obstante, en períodos de estrés financiero, estos modelos subestiman el riesgo debido a la rigidez que la propiedad de estacionariedad estricta les impone. En esta materia, los modelos tv-GARCH han surgido como una herramienta relevante para solucionar esta limitación.

Pese a los avances de los modelos tv-GARCH, aún existen brechas empíricas y metodológicas que abordar. Primero, los avances en técnicas no paramétricas no han sido incorporados en profundidad para la estimación de modelos tv-GARCH por los escasos estudios previos. Estas técnicas ofrecen una ventaja por sobre los métodos paramétricos debido a que no establecen formas específicas para la distribución de los datos. Segundo, los estudios previos no han combinado estos métodos con una representación espacio-estado que permita implementar algoritmos como el  $KF$  para efectuar predicciones de la volatilidad. Nuestra investigación cubre estas brechas y extiende de forma natural los avances propuestos por Ferreira et al. (2017).

Nuestras simulaciones de Monte Carlo, así como la aplicación a IPSA index de la Bolsa de Comercio de Santiago (Chile) demostraron dos aspectos relevantes acerca de la comparativa entre los modelos GARCH y tv-GARCH. Primero, la estructura de los parámetros presentaron curvaturas y quiebres estructurales que los modelos estacionarios no son capaces de capturar. Este hecho revela que la estructura de los parámetros es evidentemente variable en el tiempo. Segundo, el modelo tv-GARCH demostró tener una mejor performance predictiva, particularmente cuando se aplicó el método B-Spline. Este hallazgo revela que los métodos no paramétricos en la estimación de moslode tv-GARCH pueden ser una importante herramienta para la gestión del riesgo en los mercados financieros.

# Bibliografía

---

- [1] Amado, C., and Teräsvirta, T. (2008). Modelling Conditional and Unconditional Heteroskedasticity with Smoothly Time-Varying Structure. CREATES Research Paper No. 2008-8, Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=1148141>
- [2] Bardet, J., and Doukhan, P. (2018). Non-parametric estimation of time varying AR(1)-processes with local stationarity and periodicity. *Electronic Journal of Statistics*, 12(2):2323-2354. doi: <https://doi.org/10.1214/18-EJS1459>
- [3] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3):307:327. doi: [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(86\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1)
- [4] Bollerslev, T., and Mikkelsen, H. (1996). Modeling and pricing long memory in stock market volatility. *Journal of Econometrics*, 73(1):151–184. doi: [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(95\)01736-4](https://doi.org/10.1016/0304-4076(95)01736-4)
- [5] Cassim, L. (2018). Non-parametric Estimation of GARCH(2,2) Volatility model: A new Algorithm. MPRA Paper No. 86861. Retrieved from <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/86861/>
- [6] Chen, B., and Hong, Y. (2016). Detecting for Smooth Structural Changes in GARCH Models. *Econometric Theory*, 32(3):740-791. doi: <https://doi.org/10.1017/S0266466614000942>
- [7] Chen, C., Gerlach, R., Lin, E., and Lee, W. (2012). Bayesian Forecasting for Financial Risk Management, Pre and Post the Global Financial Crisis. *Journal of Forecasting*, 31(8):661-687. doi: <https://doi.org/10.1002/for.1237>
- [8] Chen, C., and Watanabe, T. (2019). Bayesian modeling and forecasting of Value-at-Risk via threshold realized volatility. *Applied Stochastic Models in Business Industry*, 35(3): 747– 765. doi: <https://doi.org/10.1002/asmb.2395>

- 
- [9] Chen, C., Watanabe, T., and Lin, E. (2021). Bayesian estimation of realized GARCH-type models with application to financial tail risk management. *Econometrics and Statistics*. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ecosta.2021.03.006>
- [10] Crainiceanu, C., Ruppert, D., and Wand, M. (2005). Bayesian analysis for penalized spline regression using WinBUGS. *Journal of Statistical Software*, 14(14):1-24. doi: <https://doi.org/10.18637/jss.v014.i14>
- [11] Cristóbal, J, and Alcalá, J. (2000). Nonparametric regression estimators for length biased data. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 89 (1-2):145-168. doi: [https://doi.org/10.1016/S0378-3758\(00\)00092-6](https://doi.org/10.1016/S0378-3758(00)00092-6)
- [12] Dahlhaus, R, and Subba Rao, S. (2006). Statistical inference for time-varying ARCH processes. *The Annals of Statistics*, 34(3):1075 – 1114. doi: <https://doi.org/10.1214/009053606000000227>
- [13] Dias, G. (2017). The time-varying GARCH-in-mean model. *Economics Letters*, 157:129-132. doi: <https://doi.org/10.1016/j.econlet.2017.06.005>
- [14] Engle, R. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50(4): 987-1007. doi: <https://doi.org/10.2307/1912773>
- [15] Engle, R., and Rangel, J. (2008). The Spline-GARCH Model for Low-Frequency Volatility and Its Global Macroeconomic Causes. *The Review of Financial Studies*, 21(3):1187–1222. doi: <https://doi.org/10.1093/rfs/hhn004>
- [16] Fan, J, and Gijbels, I. (1996). Local polynomial modelling and its applications: Monographs on statistics and applied probability 66, CRC Press, 1996.
- [17] Ferreira, G., Navarrete, J., Rodríguez-Cortés, F., and Mateu, J. (2017). Estimation and prediction of time-varying GARCH models through a state-space representation: a computational approach. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 87(12):2430-2449. doi: <http://dx.doi.org/10.1080/00949655.2017.1334778>
- [18] Ferreira, G., Rodríguez, A., and Lagos, B. (2013). Kalman Filter estimation for a regression model with locally stationary errors. *Computational Statistics & Data Analysis*, 62:52-69. doi: <https://doi.org/10.1016/j.csda.2013.01.005>

- 
- [19] Fryzlewicz, P. (2005). Modelling and forecasting financial log-returns as locally stationary wavelet processes. *Journal of Applied Statistics*, 32(5):503-528. doi:<https://doi.org/10.1080/02664760500079563>
- [20] Härdle, W., Herwartz, H., and Spokoiny, V. (2003). Time Inhomogeneous Multiple Volatility Modeling. *Journal of Financial Econometrics*, 1(1): 55–95. doi: <https://doi.org/10.1093/jjfinec/nbg005>
- [21] Inoue, A., Jin, L., and Pelletier, D. (2021). Local-Linear Estimation of Time-Varying-Parameter GARCH Models and Associated Risk Measures. *Journal of Financial Econometrics*, 19(1):202–234. doi: <https://doi.org/10.1093/jjfinec/nbaa026>
- [22] Klemelä, J. (2020). Nonparametric volatility prediction. *WIREs Computational Statistics*. 12(3): e1491. doi: <https://doi.org/10.1002/wics.1491>
- [23] Linton, O., and Yan, Y. (2011). Semi- and Nonparametric ARCH Processes. *Journal of Probability and Statistics*, vol. 2011, Article ID 906212, 1-17. doi: <https://doi.org/10.1155/2011/906212>
- [24] Liu, R., and Yang, L. (2016). Spline Estimation of a Semiparametric GARCH Model. *Econometric Theory*, 32(4):1023-1054. doi: <https://doi.org/10.1017/S0266466615000055>
- [25] Meister, A., and KreiB, J. (2016). Statistical inference for nonparametric GARCH models. *Stochastic Processes and their Applications*, 126(10):3009-3040. doi: <https://doi.org/10.1016/j.spa.2016.03.010>
- [26] Moulines, E., Priouret, P., and Roueff, F. (2005). On recursive estimation for time varying autoregressive processes. *The Annals of Statistics*, 33(6):2610-2654. doi: <https://doi.org/10.1214/009053605000000624>
- [27] Navarrete, R., and Viswanath, D. (2018). Prediction of dynamical time series using kernel based regression and smooth splines. *Electronic Journal of Statistics*, 12(2):2217-2237. doi: <https://doi.org/10.1214/18-EJS1429>
- [28] Palma, W., Olea, R., and Ferreira, G. (2013). Estimation and forecasting of locally stationary processes. *Journal of Forecasting*, 32(1):86-96. doi: <https://doi.org/10.1002/for.1259>
- [29] Polzehl, J., and Spokoiny, V. (2006). Varying coefficient GARCH versus local constant volatility modeling. Comparison of the predictive power. SFB 649 Discussion Papers SFB649DP2006-033, Sonderforschungsbereich 649, Humboldt University, Berlin, Germany.

- 
- [30] Pourkhanali, A., Keith, J., and Zhang, X. (2021). Conditional Heteroscedasticity Models with Time-Varying Parameters: Estimation and Asymptotics. Monash Econometrics and Business Statistics Working Papers 15/21, Monash University, Department of Econometrics and Business Statistics. Retrieved from <http://business.monash.edu/econometrics-and-business-statistics/research/publications>
- [31] Rohan, N., and Ramanathan, T. (2013). Nonparametric estimation of a time-varying GARCH model. *Journal of Nonparametric Statistics*, 25(1): 33-52. doi: <https://doi.org/10.1080/10485252.2012.728600>
- [32] Rohan N. (2013). A time varying GARCH(p,q) model and related statistical inference. *Statistics & Probability Letters*, 83(9):1983-1990. doi: <https://doi.org/10.1016/j.spl.2013.04.030>
- [33] Roy, A. and Karmakar, S. (2020). Bayesian semiparametric time varying model for count data to study the spread of the covid-19 cases. ArXiv preprint arXiv:2004.02281.
- [34] Ruppert, D., Wand, M., and Carroll, R. (2003). *Semiparametric Regression* (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics). Cambridge: Cambridge University Press. doi: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511755453>
- [35] So, M., Chu, A., Lo, C., and Ip, C. (2022). Volatility and dynamic dependence modeling: Review, applications, and financial risk management. *WIREs Computational Statistics*. 14(5), e1567. doi: <https://doi.org/10.1002/wics.1567>
- [36] Tsay, R. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics, Wiley, New York.
- [37] Van Delft, A., and Eichler, M. (2018). Locally stationary functional time series. *Electronic Journal Statistics*, 12(1):107-170. doi: <https://doi.org/10.1214/17-EJS1384>

## **Autorización Publicación de Tesis**

Quien suscribe, Jorge Andrés Muñoz Mendoza, Cédula número 15.173.418-9, alumno del Programa de Magíster en Estadística, que imparte la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, de la Universidad de Concepción, declara ser autor de la tesis titulada *Estimación y predicción en modelos GARCH con parámetros suavemente variables en el tiempo: Un enfoque no paramétrico*.

Si concedo derecho de publicación, comunicación al público y reproducción de esa obra, en forma total o parcial en cualquier medio y bajo cualquier forma del mismo, a la Universidad de Concepción, Chile, para formar parte de la colección material o digital de cualquiera de las Bibliotecas de la Universidad de Concepción y del Repositorio Institucional UdeC. Esta autorización es de forma libre y gratuita, y considera la reproducción de la obra con fines académicos y de difusión tanto nacional como internacionalmente.

Asimismo, quien suscribe declara que dicha obra no infringe derechos de autor de terceros.

Concepción, abril 2023.