

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN  
DIRECCIÓN DE POSTGRADO  
CONCEPCIÓN-CHILE



MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS PARA  
PROBLEMAS EN BIOELECTROMAGNETISMO

*Tesis para optar al grado de  
Doctor en Ciencias Aplicadas con mención en Ingeniería Matemática*

JESSIKA PAMELA CAMAÑO VALENZUELA

JUNIO 2013

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

## RESUMEN

El objetivo principal de esta tesis es proponer, analizar y testear modelos matemáticos y computacionales eficientes a través de los cuales poder localizar actividad cerebral a partir de mediciones de los campos eléctricos y magnéticos en la superficie de la cabeza. Estas mediciones se pueden obtener a través de un electroencefalograma y un magnetoencefalograma. En términos matemáticos, esta tesis se centra en resolver un problema inverso.

En primer lugar se estudia el problema inverso usando como modelo las ecuaciones de corrientes inducidas. Igual que para el sistema completo de ecuaciones de Maxwell, se demuestra que una fuente de corriente volumétrica no puede ser identificada por el conocimiento de las componentes tangenciales de los campos electromagnéticos sobre la frontera, y se caracteriza el espacio de las fuentes no radiantes. Por otro lado, se prueba que el problema inverso tiene una única solución si la fuente está soportada en la frontera de un subdominio o si es la suma de un número finito de dipolos. También este trabajo se enfoca en la aplicabilidad de estos resultados para la localización de la actividad cerebral a partir de las mediciones que se obtienen mediante la electroencefalografía y la magnetoencefalografía.

Posteriormente, se analiza el problema electrostático con fuente de corriente dipolar. Este es un problema singular, ya que tal modelo considera derivadas de primer orden de una distribución delta de Dirac. Su solución pertenece a  $L^p$ , con  $1 \leq p < 3/2$  en el caso tridimensional y con  $1 \leq p < 2$  en el caso bidimensional. Se consideran la aproximación numérica del problema directo a través de elementos finitos lineales a trozos y continuos. Se prueba una estima a priori del error en norma  $L^p$ . Además, se propone un estimador de error a posteriori de tipo residual. Se demuestra que tal estimador es confiable y eficiente. Por último, se utiliza este estimador para guiar un procedimiento adaptativo, el cual experimentalmente muestra un orden óptimo de convergencia.

Luego, se comparan distintos métodos de aproximación de la solución del problema directo considerando un dominio con varias regiones con diferentes conductividades. Para el problema directo, se analiza el caso en el que el dipolo se encuentra en una interfaz. En este caso específico, se usa una aproximación de la distribución delta de Dirac ya que los otros métodos considerados anteriormente no están definidos. Por otro lado, para el problema inverso, se analizan los resultados obtenidos utilizando los distintos métodos ya usados en el problema directo y se añaden a estos, un último método que consiste en usar un procedimiento adaptativo guiado por el estimador de error a posteriori encontrado en el Capítulo 4. Se consideran dos situaciones: una fuente dipolar situada en una región con conductividad regular y lejana a la interfaz y por otra parte, el caso en el que la tal fuente es cercana a una interfaz. Se estudia también el caso de una

fuente distribuida y se compara las matrices de influencia cuando el soporte de dicha fuente se encuentra dentro de una región homogénea y es lejana a la interfaz y en el caso en que el soporte es cercano a la interfaz.

Por último, se considera el problema de corrientes inducidas dependiente del tiempo. Se formula el problema en términos de dos variables, una definida sólo en el dominio conductor y la otra, en la frontera del dominio. Se combinan el método de elementos finitos (FEM) y los elementos de frontera (BEM) para obtener una formulación variacional acoplada FEM-BEM. Se establece la existencia y unicidad de la solución en el caso continuo y en el caso totalmente discreto. Finalmente, se investiga el orden de convergencia del esquema totalmente discreto.

