



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

DISCREPANCIA DE CICLOS HAMILTONIANOS EN
HIPERGRAFOS 3-UNIFORMES

POR

Claudio Javier Mansilla Brito

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la
Universidad de Concepción para optar al título profesional de Ingeniero Civil
Matemático

PROFESOR GUÍA

Dr. Nicolás Sanhueza Matamala

Octubre, 2023
Concepción, Chile



© Claudio Javier Mansilla Brito

Se autoriza la reproducción total o parcial con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

Discrepancia de ciclos hamiltonianos en hipergrafos 3-uniformes

Comisión evaluadora

Dr. Nicolás Sanhueza Matamala [Profesor Guía]

Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción.

Dr. Christopher Thraves Caro

Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción.

Dr. Germain Pastén Tabilo

Departamento de Matemáticas, Universidad de Antofagasta.

Fecha de defensa: 18 de Octubre de 2023





Para María Inés, Claudia y Javiera

Agradecimientos

En la vida, toda persona tiene grandes maestros, los cuales nos guían en todo tipo de circunstancias. Los primeros maestros y maestras parten en el hogar, las personas que están presentes siempre, sin importar en qué situación nos encontremos. Por ello, quiero comenzar agradeciendo a mis abuelos o mejor dicho a mis “Tatas”, María Inés Vera Viñals y Manuel Elías Brito Jorquera, los cuales fueron mi pilar fundamental a lo largo de mi vida. A mi madre, Claudia, quiero agradecerle el constante apoyo emocional entregado desde el día que nací, sin ella no podría estar donde estoy. A mi padre, Javier, le agradezco estar siempre presente en mi vida. A mis otros abuelos, Fresia y Williberto por su constante preocupación y cariño. También quiero darle un especial agradecimiento a mi Tío René, el cual siempre tiene un consejo fundamental cuando lo necesito.

Los grandes maestros no solo viven en el hogar, sino que también existen fuera de este y uno los encuentra cuando menos lo espera. Quiero agradecer a mi profesor guía, Nicolás Sanhueza Matamala el cual me dio la gran oportunidad de trabajar con él y me guió de la mejor forma posible para lograr mi objetivo. También quiero agradecer al profesor Christopher Thraves por sus valiosos consejos y también por aceptar ser parte de mi comisión evaluadora. A Germain Pastén por su gran apoyo en este proceso. Fuera del contexto de este trabajo, quiero agradecer al profesor Freddy Paiva por guiarme en mis primeros años y mostrarme que podía explotar mis habilidades para lograr todo lo que me propusiera. A la profesora Mónica Selva por la gran cantidad de tiempo que se preocupó de mí y mis compañeros siendo jefa de carrera. A la profesora Anahí Gajardo por su increíble espíritu, el cual motiva a cualquier persona a su alrededor.

También es importante tener presente a las amistades y por ello quiero agradecer a Carla por sus años de amistad y apoyo. A Nicolás, Matías, Enzo, Cristóbal, Leandro, Jesús, Maximiliano, Daniel, Alex, Elías y Aníbal, mi gran grupo de amigos los cuales fueron un apoyo emocional enorme, ya sea conversando o jugando.

Dentro de cualquier etapa, siempre encontraremos personas con los mismos intereses, las cuales pueden dejar una gran huella en nosotros. Por ello, quiero agradecer a mis compañeros y amistades Tamahí, Allison, Valeria, Esteban, Carolina, Javier, Vicente, Álvaro, Benjamín e Ignacio, los cuales sin duda fueron un gran apoyo en este largo proceso.

Finalmente quiero agradecer a mi novia, Javiera Arias Gutiérrez, mi apoyo fundamental desde aquel 25 de marzo del 2022, todo este proceso no lo hubiese logrado sin ti, quiero seguir creciendo como persona junto a ti, te amo.

Resumen

El proyecto se enmarca en el estudio de un problema contemporáneo en combinatoria extremal. Particularmente, este se enfoca en encontrar una propiedad en hipergrafos 3-uniformes.

En una vaga explicación, un hipergrafo 3-uniforme es una colección de vértices y aristas, donde las aristas son conjuntos de 3 vértices. Dentro de este caso particular de hipergrafos existen muchas estructuras formadas por las aristas. En nuestro trabajo, encontramos una condición que nos asegura la abundancia de una estructura en particular, la cual son los ciclos hamiltonianos.

Para lograr esto, nos apoyamos en la investigación previa realizada en el ámbito de los grafos desarrollada por Balogh, Pluhár, Jing y Csaba [Bal+20a], donde demostraron que se requiere un grado mínimo específico para asegurar la abundancia de ciclos hamiltonianos en grafos.



Índice General

Resumen	V
Índice de Figuras	VIII
1. Introducción	2
1.1. Discrepancia	2
1.2. Discrepancia en familias de hipergrafos	3
2. Preliminares	7
2.1. Teoremas previos	11
2.2. Teorema de Balogh, Jing, Pluhár y Csaba	11
2.3. Resultado principal	12
2.4. Organización de la tesis	12
2.5. Esbozo de la demostración	13
3. Estudio de ejemplos	15
3.1. Motivación	15
3.2. Primer ejemplo	15
3.3. Segundo ejemplo	17
4. Lema del Bosque Lineal	19
4.1. Definiciones previas	19
4.2. Lemmas previos	20
4.3. Demostración lema del Bosque Lineal	20
5. Formando un ciclo hamiltoniano a partir de un ciclo	23
5.1. Formación de un camino a partir de un ciclo	24
5.2. Formación de un ciclo a partir de un camino	26
5.3. Formación de un ciclo hamiltoniano a partir de un ciclo	27
6. Existencia de caminos entre conjuntos en un 3-grafo	29
7. Gadgets y resultados previos al Teorema	30
8. Demostración del Teorema	32

8.1. Demostración 33

8.2. Conclusiones y trabajo a futuro 41



Índice de Figuras

1.1. Ejemplo de camino positivo en un hipergrafo 3-uniforme completo	6
2.1. Ejemplo de grafo	7
2.2. Ejemplo de un hipergrafo	8
2.3. Ejemplo de un 3-grafo	9
2.4. Camino 3-uniforme de 8 vértices	10
2.5. Ciclo formado a partir de un camino $v_1 \dots v_8$, agregando las aristas $v_7v_8v_1$ y $v_8v_1v_2$	10
2.6. Ciclo hamiltoniano de un 3-grafo en 8 vértices.	10
3.1. Hipergrafo con $\delta_2(H) = \frac{2n}{3}$	16
3.2. Ejemplo de ciclo hamiltoniano con discrepancia alta.	17
3.3. Hipergrafo con $\delta_2(H) = 0$ y $\delta_2^+(H) = \frac{5n}{6}$	17
4.1. Bosque lineal con 3 caminos vértice-disjuntos.	19
4.2. Camino formado por un bosque lineal conectado por 4 aristas.	22
5.1. Ciclo inicial con un vértice u vecino de una tupla en el ciclo.	25
5.2. Camino formado a partir del ciclo.	25
7.1. Ejemplo de Gadget.	30
8.1. Ejemplo de árbol doble-estrella	33
8.2. Esquema caso 2	36

	1
8.3. Lema del Bosque Lineal caso 2	37
8.4. Discrepancia inicial baja caso 2	37
8.5. Discrepancia inicial alta caso 2	38
8.6. Esquema caso 3. En esta figura, los colores representan símbolos. Las aristas negras son aristas negativas y las azules son positivas	39
8.7. Lema del Bosque Lineal caso 3	39
8.8. Discrepancia inicial baja caso 3	40
8.9. Discrepancia inicial alta caso 3	40



1. Introducción

1.1. Discrepancia

El estudio de la discrepancia comenzó con el matemático alemán Hermann Weyl en su artículo [Wey16] sobre la distribución equitativa de números. Rápidamente el estudio de esta comenzó a ser de mucho interés en teoría de números, combinatoria, teoría ergódica, geometría discreta, estadística y muchas otras áreas. Algunos de esos tópicos pueden leerse en los artículos de Beck y Chen [BC86] e igualmente en un capítulo del libro de Alexander, Beck y Chen [Bec17].

Un **hipergrafo** es un conjunto de vértices y aristas, donde las aristas son un subconjunto del conjunto potencia de los vértices.

Nuestro objeto principal a usar en esta tesis es la **discrepancia combinatorial de hipergrafos** la cual es una medida que en nuestro contexto nos permite decidir si un hipergrafo es complejo o dicho de otra forma, nos permite decidir si un hipergrafo es abundante en ciertas estructura. Por ejemplo, diremos que un hipergrafo es complejo en el sentido hamiltoniano, si existen abundantes ciclos hamiltonianos dentro del hipergrafo.

Sea $K = (X, E)$ un hipergrafo, donde X es el conjunto no vacío de vértices y E es el conjunto de aristas. Definimos una función $f : X \rightarrow \{-1, +1\}$. Esta función etiqueta las aristas con signos positivos o negativos. Para una arista $A \in E$, sea $f(A) := \sum_{x \in A} f(x)$, donde $f(A)$ nos cuantifica que tanta diferencia de etiquetado hay entre todos los vértices de la arista A . Dicho de otra forma, si tenemos una discrepancia alta, quiere decir que hay mucho más etiquetado de un tipo que del otro. Por otro lado la discrepancia es baja, entonces hay un balanceo de los dos tipos de etiquetado en los vértices de A .

La **discrepancia** de f se define como:

$$\mathcal{D}(X, E, f) = \max_{A \in E} |f(A)|$$

Es decir $\mathcal{D}(X, E, f)$ representa el mayor valor de discrepancia entre todas las aristas. Por otro lado, la **discrepancia** del hipergrafo H se define como:

$$\mathcal{D}(X, E) := \min_f \mathcal{D}(X, E, f).$$

Lo cual es el menor valor de la discrepancia entre todos los etiquetados del hipergrafo.

Cabe destacar que en nuestro caso $X = E(H)$ y $E = 2^{E(H)}$, es decir, para medir la discrepancia del hipergrafo H usaremos la discrepancia combinatorial de un hipergrafo K , donde los vértices K serán las aristas de H .

1.2. Discrepancia en familias de hipergrafos

Nuestro trabajo lo enfocamos en una relativamente nueva línea de investigación la cual se enfoca en el estudio de la discrepancia combinatorial de hipergrafos de familias de grafos e hipergrafos.

Una familia de grafos es una colección de diferentes tipos de grafos. Por ejemplo, existe la familia de grafos completos, donde todo grafo cumple que todos los vértices son vecinos de todos los demás.

Dado un hipergrafo H , queremos medir cuan complejo es este hipergrafo con respecto a una familia en específico de hipergrafos. En otras palabras queremos encontrar una cota que nos asegure muchos elementos de una misma familia en H .

En el sentido de la discrepancia, se puede entender de la siguiente manera. Para cualquier función etiquetadora $f : X \rightarrow \{-1, +1\}$, existe una de estas familias de hipergrafos con discrepancia alta. Otra forma de ser entendido es también, por mucho que se restrinjan las aristas que están involucradas, siempre habrán suficientes para formar este tipo de familias. Para nuestro caso particular, nosotros estudiamos la abundancia de **ciclos hamiltonianos** en hipergrafos 3-uniforme.

El concepto de discrepancia en grafos e hipergrafos fue impulsada en gran medida por el mítico matemático Paul Erdős. Este, en conjunto con otros matemáticos abrieron esta rama que nos permite visualizar desde el punto de vista de la discrepancia el comportamiento de ciertas estructuras dentro de grafos e hipergrafos.

Daremos una serie de resultados notables donde se muestran diferentes usos de la discrepancia.

Spencer y Alon nos muestran en uno de sus artículos [Spe85] y en su libro [AS16] el siguiente resultado. Dado el hipergrafo $H = (V, E)$, donde el conjunto de vértices está formado por la

unión de n conjuntos de vértices de tamaño a lo más n , es decir, $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$ y $|V_i| \leq n$, para todo $i = 1, \dots, n$. Entonces existe una función $f : E \rightarrow \{-1, +1\}$ que etiqueta cada elemento de cada conjunto, tal que la discrepancia de cada conjunto es a lo más $6\sqrt{n}$.

Erdős, Lovász y Füredi muestran que dado un grafo completo en n vértices y para cualquier etiquetado binario, existe una copia de cualquier árbol en n vértices con discrepancia alta.

Un interesante resultado, es el descrito por Bradač [Bra21]. Este, apoyado fuertemente en el trabajo hecho por Balogh, Jing, Pluhár y Csaba [Bal+20a], se enfoca en el estudio de la discrepancia de potencias de ciclos hamiltonianos, en específico la segunda potencia. Un ciclo hamiltoniano es una colección de aristas que forman un ciclo que ocupa todos los vértices del grafo. La segunda potencia de un ciclo hamiltoniano se puede entender como un ciclo hamiltoniano, con más aristas. Específicamente, cada vértice en el ciclo también tendrá una arista con los vértices a distancia 2 de él dentro del mismo ciclo. El resultado muestra que para todo $\nu > 0$, existe n_0 natural, tal que dado G un grafo en $n \geq n_0$ vértices con grado mínimo al menos $\delta(G) \geq (3/4 + \nu)n$, existe la segunda potencia de ciclo hamiltoniano con discrepancia alta.

Si bien nuestro resultado principal se enfoca en el estudio de ciclos hamiltonianos, el trabajo previo hecho por Balogh, Pluhár, Jing y Csaba [Bal+20a], también estudia la discrepancia de árboles en diferentes grafos, tales como grafos aleatorios 3-regulares y grafos planares.

Un grafo d -regular es un grafo donde todos los vértices tienen exactamente d vecinos. Ellos muestran que dado un grafo aleatorio 3-regular en n vértices, existe una constante $c > 0$ tal que todo árbol en n vértices en el grafo tiene discrepancia al menos cn .

Un grafo planar es un grafo que puede ser dibujado en un plano tal que ninguna arista se cruce con otra. Un ejemplo fácil de ver de grafos planares son los ciclos. También muestran que dado un grafo planar en n vértices, existe una constante $c > 0$ tal que la discrepancia en árboles en n vértices es a lo más $c\sqrt{n}$.

La discrepancia también nos sirve para visualizar de diferentes formas otras propiedades. Un resultado que nos evidencia esto, es la interesante publicación descrita por Balogh, Csaba, Pluhár y Treglown [Bal+20b] en la cual muestran el Teorema de Hajnal y Szemerédi [Haj70] a través de la discrepancia. Hajnal y Szemerédi muestran que para todo grafo en n vértices, donde n es divisible por r y el grado mínimo de G es $\delta(G) \geq (1 - 1/r)n$ puede ser descompuestos en copias del clique K_r . Por su parte, Balogh, Csaba, Pluhár y Treglown [Bal+20b] muestran que para todo grafo G en n vértices con n suficientemente grande, $\eta > 0$, grado mínimo $\delta(G) \geq \left(1 + \frac{1}{r+1} + \eta\right)n$ y con un etiquetado binario $f : E \rightarrow \{+1, -1\}$, existe una descomposición en

K_r , con discrepancia al menos γn , donde $\gamma > 0$.

También existen resultado en el cual la discrepancia ayuda a mostrar existencia de elementos dentro de un grafo. Bessy, Pardey, Picasarri-Arrieta y Sós [Bes+21], muestran que, dado un grafo completo K , un etiquetado $f : E \rightarrow \{+1, -1\}$ y $d \binom{n}{2}$, $d \in (0, 1)$ aristas etiquetadas positivas y dado un subgrafo inducido G de K con grado máximo a lo más Δ , existe una copia isomorfa G' de G tal que el número de aristas con etiquetado $+1$ es al menos $(d + \Omega\left(\frac{1}{\Delta}\right) - O\left(\frac{1}{n}\right)) m(G)$, donde $m(G)$ es la cantidad de aristas etiquetadas de G y Ω, O son notaciones asintóticas.

También la discrepancia tiene aplicaciones para estructuras en grafos dirigidos. Freschi y Lo [FL22] proponen una extensión del Teorema de Dirac para grafos dirigidos. Ellos muestran que dado un grafo G en $n \geq 3$ vértices con grado mínimo al menos $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, entonces existe un ciclo hamiltoniano con al menos $\delta(G)$ aristas orientadas en la misma dirección.

Nuestro trabajo y los mencionados mayoritariamente en esta tesis se trabajan como un etiquetado binario de aristas, pero también existen investigaciones donde se usan etiquetados no binarios. En específico, se puede ver el trabajo hecho por Srivastav y Doer [DS03] en el cual generalizan teoremas de discrepancia hacia un etiquetado no binarios, tales como el antes mencionado de Spencer [Spe85] y otros. Para estos casos de etiquetado múltiple se suele ver el etiquetado como un coloreo de aristas, es decir, una función $f : X \rightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ donde cada c_i es un color diferente del resto lo cual se denota como un n -coloreo.

Por otra parte, está la reciente investigación realizada por Krishna, Michaeli, Sarantis, F. Wang y Y. Wang [Kri+23]. En ese trabajo estudian, aparte de otros tópicos, la discrepancia no binaria de todos los subárboles en árboles. En particular demuestran que, para todo árbol T con ℓ hojas, la discrepancia de subárboles es exactamente $\left\lceil \frac{\ell}{2} \right\rceil$.

Cabe recalcar que nosotros solamente trabajaremos con etiquetados binarios, es decir, 2-coloreos.

Dentro de cualquier elemento a estudiar, siempre tendremos casos extremos. Un ciclo hamiltoniano sucesión de aristas adyacentes que recorre todos los vértices del grafo una sola vez, cuyo primer y último vértice de la sucesión coinciden. En nuestro trabajo, tenemos los casos donde la discrepancia de ciclos hamiltonianos es naturalmente muy alta y tenemos los casos donde la discrepancia es naturalmente muy baja.

El primer ejemplo es de un hipergrafo 3-uniforme con discrepancia de ciclos hamiltonianos alta. Definamos H como el hipergrafo 3-uniforme completo en n vértices, es decir, existen todas

las aristas posibles. En primer lugar si el etiquetado es muy desbalanceado, es decir, casi todas las aristas son positivas o casi todas son negativas, entonces es claro que la discrepancia es alta. Por otro lado, para un etiquetado balanceado podemos notar lo siguiente. Como cada vértice está en mitad de aristas positivas y mitad de negativas, entonces partimos de un vértice cualquiera y podemos recorrer los vértices eligiendo todos los vecinos de estos como positivos (o negativos) lo cual nos entregará un camino que siempre aumenta la discrepancia. Esto nos deja que la discrepancia será siempre alta, es decir, si tenemos un grafo muy complejo, entonces la discrepancia sube.

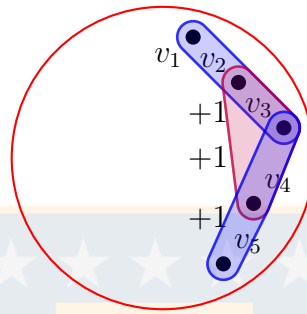


Fig. 1.1: Ejemplo de camino positivo en un hipergrafo 3-uniforme completo

Un ejemplo con discrepancia baja lo podemos formar tomando un hipergrafo 3-uniforme dividido en dos conjuntos de vértices de igual tamaño, V_1 y V_2 , donde cada conjunto contiene todas las aristas posibles y no hay aristas entre los conjuntos V_1 y V_2 . Notamos que podemos etiquetarlo de forma tal que la discrepancia siempre es 0. Esto, ya que podemos etiquetar todas las aristas de V_1 como positivas y todas las aristas de V_2 como negativas.

2. Preliminares

Dado un conjunto de elementos V , denotamos $V^{(k)}$ al conjunto de subconjuntos de V no necesariamente ordenados de tamaño k . Denotaremos el conjunto $[n] := \{1, \dots, n\}$.

Un **grafo** es un par $G = (V, E)$ de conjuntos donde V es el conjunto de vértices de G y $E \subseteq V^{(2)}$. Los elementos en V los nombramos **vértices** y los elementos en E , **aristas**. Este tipo de estructuras la podemos representar como dibujos de puntos y rayas, donde cada punto será un vértice y cada raya será la conexión entre dos vértices.

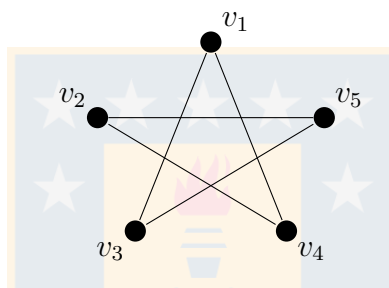


Fig. 2.1: Ejemplo de grafo

Diremos que dos vértices u, v son **vecinos** si $uv \in E$, junto con ello, se define la **vecindad** de un vértice u , como el conjunto de todos los vértices que son vecinos de u . Este conjunto lo denotaremos como $N_G(u)$ o simplemente $N(u)$ si el contexto está claro.

El **grado** $d(v)$ de un vértice v es el número de vecinos que tiene. El número $\delta(G) := \min\{d(v) : v \in V\}$ es el **grado mínimo de G** , a su vez, $\Delta(G) := \max\{d(v) : v \in V\}$ es el **grado máximo de G** .

Dentro de esta tesis necesitamos estudiar ciclos y ciclos hamiltonianos, los cuales los definiremos luego de definir lo que es un camino. Un **camino** es un grafo no vacío $P = (V, E)$ en ℓ vértices tal que $V = \{v_1, \dots, v_\ell\}$ y $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{\ell-1}v_\ell\}$. Denotaremos al camino P como $v_1v_2 \dots v_\ell$.

Sea $P = (V, E)$, tal que $P = v_1 \dots v_\ell$ un camino en ℓ vértices. Si $\ell \geq 3$, entonces el grafo $C := (V, E \cup v_\ell v_1)$ es un **ciclo**. A su vez, un **ciclo hamiltoniano** C_h en un grafo G en n vértices, es un ciclo $C = v_1 \dots v_\ell$, donde $\ell = n$, es decir, C_h es un ciclo que pasa por todos los vértices de G .

Ahora procederemos con las definiciones necesarias para entender lo que se hizo en este trabajo.

Primero definiremos lo que es un hipergrafo (Ver Fig. 2.2)

Definición 1. Un **hipergrafo** H es un par (X, E) , donde X es un conjunto de elementos llamados **vértices** y $E \subseteq 2^X$ es el conjunto de **aristas** de H . Acá, 2^X es el **conjunto potencia** de X . La cantidad de aristas en un hipergrafo H se denotarán como $e(H)$.

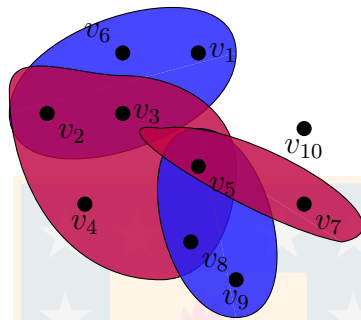


Fig. 2.2: Ejemplo de un hipergrafo

Dado un hipergrafo H , diremos que K es un **subhipergrafo** (o simplemente **subgrafo** si el contexto está claro) de H , si $V(H) = V(K)$ y $E(K) \subseteq E(H)$.

Nuestro objeto principal de estudio son los hipergrafos 3-uniformes (Ver Fig. 2.3)

Definición 2. Un **hipergrafo 3-uniforme** $H = (V, E)$, o un **3-grafo** es un hipergrafo donde toda arista en E tiene tamaño 3.

Un concepto importante que debemos definir es el de vecindad. Para grafos, podemos recordar que la vecindad de un vértice son todos los otros vértices con los cuales comparte arista. Por su parte, para 3-grafos debemos definir el concepto de vecindad de un par de vértices y el de vecindad de un solo vértice.

Dado un 3-grafo, la **vecindad de un par de vértices** $u, v \in V$ consiste en todos los vértices w que comparten una arista con el par uv . A este conjunto lo denotamos $N(uv)$. En otras palabras, w está en $N(uv)$ si existe la arista $uvw \in E$. A su vez, dado un vértice $v \in V$ la **vecindad** de v son todos los pares de vértices que comparten arista con v , esta la denotaremos como $N(v)$.

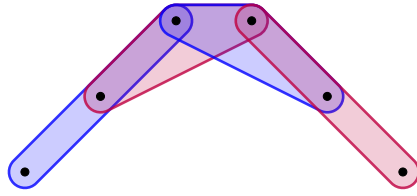


Fig. 2.3: Ejemplo de un 3-grafo

Cabe notar que diferenciaremos ambas vecindades por la cantidad de elementos que contenga, es decir $N(uv)$ es la vecindad del par uv y $N(v)$ es la vecindad del vértice v .

Otro concepto importante y asociado a la vecindad, es el de grado mínimo. Para el caso de 3-grafos veremos dos tipos, el primero que denota el grado mínimo de todo vértice y el otro para denotar el grado mínimo de todo par de vértices. A este último lo llamamos cogrado mínimo.

Dado un 3-grafo $H = (V, E)$ y un un par de vértices $uv \in \binom{V}{2}$, denotamos el cogrado mínimo de H como:

$$\delta_2(H) = \min_{uv \in \binom{V}{2}} |N(uv)|$$

A su vez, se define el **grado mínimo** de un 3-grafo como la mínima cantidad de aristas en las que está contenido todo vértice en H . Se denota como $\delta_1(H)$. Por su parte, definimos el **cogrado** de un par de vértices xy como $d(xy)$ y el **grado** de un vértice x como $d(x)$.

Nuestro trabajo consiste en estudiar ciclos hamiltonianos, pero esta vez en 3-grafos. Para definirlos de buena manera, primero debemos definir cómo son los caminos y ciclos en un 3-grafo.

Decimos que un 3-grafo $P = (V, E)$ en ℓ vértices es un **camino 3-uniforme** si P admite un orden de sus vértices $V = \{v_1, \dots, v_\ell\}$ tal que $E = \{\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\} : 1 \leq i \leq \ell - 2\}$. Los extremos de P son las dos 2-tuplas ordenadas (v_1, v_2) y $(v_{\ell-1}, v_\ell)$. Por simplicidad, representaremos un camino P como los vértices que recorre, es decir, $P = v_1 \dots v_\ell$. Como solo trabajaremos con caminos 3-uniformes, entonces solo los llamaremos **caminos**. Definimos el **tamaño** del camino P como $|P| := |V(P)|$.

A su vez, definimos los ciclos como la completación de un camino.

Sea $P = (V, E)$ un camino 3-uniforme en ℓ vértices tal que $P = v_1 \dots v_\ell$, entonces el grafo $C = (V, E \cup \{v_{\ell-1}v_\ell v_1\} \cup \{v_\ell v_1 v_2\})$ es un **ciclo 3-uniforme**. Como solo trabajaremos con ciclos 3-uniformes, entonces simplemente los llamaremos **ciclos**. El **tamaño de un ciclo** en un 3-grafo lo definimos como $|C| := |V(C)|$ o bien como $|C| := |E(C)|$, es decir, el tamaño de un ciclo es la cantidad de vértices de este, o bien la cantidad de aristas.

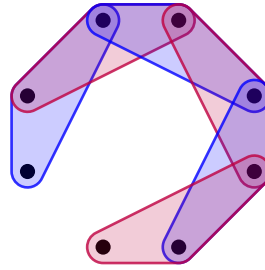


Fig. 2.4: Camino 3-uniforme de 8 vértices

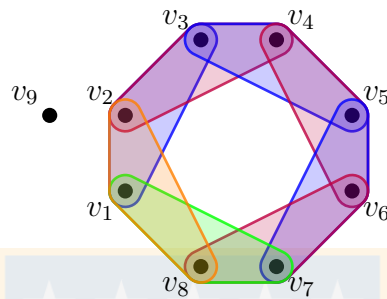


Fig. 2.5: Ciclo formado a partir de un camino $v_1 \dots v_8$, agregando las aristas $v_7v_8v_1$ y $v_8v_1v_2$

Un **ciclo hamiltoniano** en un 3-grafo es un ciclo en H que usa todos sus vértices. Un 3-grafo H se dice **hamiltoniano** si tiene al menos un ciclo hamiltoniano. A su vez, podemos definir un **camino hamiltoniano**, el cual es un 3-grafo en H que contiene todos los vértices de este.

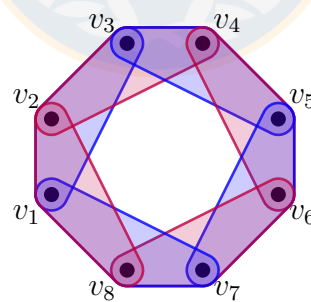


Fig. 2.6: Ciclo hamiltoniano de un 3-grafo en 8 vértices.

Una definición importante será la de un hipergrafo inducido. Un **hipergrafo inducido** es un hipergrafo generado a partir de un conjunto de vértices, donde las aristas se conservan. Denotaremos este operador como $H' = H[V']$, es decir, $H' = (V', E')$ es el hipergrafo inducido por los vértices $V' \subseteq V(H)$ y $E' \subseteq E(H)$.

2.1. Teoremas previos

Para trabajar en 3-grafos, necesitamos nuevas herramientas que nos permitan comenzar nuestro trabajo de buena manera. Para grafos, conocemos teorema sobre ciclos hamiltonianos demostrado por Gabriel Andrew Dirac:

Teorema 1 (Dirac). *Sea G un grafo en $n \geq 3$ vértices y grado mínimo $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, entonces G contiene un ciclo hamiltoniano.*

El resultado análogo del Teorema de Dirac para 3-grafos fue demostrado por Rödl, Ruciński y Szemerédi [RRS11].

Teorema 2 (Teorema 1.2, [RRS11]). *Sea H un 3-grafo en n vértices, donde n es suficientemente grande. Si $\delta_2(H) \geq n/2$, entonces H tiene un ciclo hamiltoniano.*

Donde muestran que el cogrado mínimo necesario para asegurar la existencia de ciclos hamiltonianos en 3-grafos es de al menos $n/2$. Aparte de este teorema, sabemos que existe un 3-grafo H en n vértices con cogrado mínimo $\delta_2(H) = n/2 - 1$ sin ciclos hamiltonianos.

Por otro lado, tenemos el siguiente teorema mostrado por Reiher, Rödl, Ruciński, Schacht y Szemerédi [Rei+19], el cual es similar al anterior en el sentido de que es una cota que asegura la existencia de ciclos hamiltonianos en 3-grafos, no obstante, este resultado nos entrega una cota para el grado mínimo en un 3-grafo.

Teorema 3 (Theorem 1, [Rei+19]). *Para todo $\alpha > 0$, existe un entero n_0 tal que todo 3-grafo en $n \geq n_0$ vértices y grado mínimo $\delta_1(H) \geq (5/9 + \alpha) \binom{n}{2}$ contiene un ciclo hamiltoniano.*

2.2. Teorema de Balogh, Jing, Pluhár y Csaba

El resultado que más nos interesa es el siguiente Teorema, donde cabe recalcar que haremos un abuso de notación, denotaremos la discrepancia de la familia de grafos \mathcal{F} en el grafo G como $\mathcal{D}(G, \mathcal{F})$:

Teorema 4 ([Bal+20a]). *Sea $c > 0$ una constante pequeña arbitraria y n suficientemente grande. Sea G un grafo de orden n con $\delta(G) \geq (3/4 + c)n$. Entonces $\mathcal{D}(G, \mathcal{H}) \geq cn/32$.*

Donde nos dicen que, si el grado mínimo del grafo es al menos $(3/4 + c)n$, entonces la discrepancia es de al menos $cn/32$. Más aún, si n es divisible por 4, existe un grafo G en n vértices con grado $\delta(G) = 3n/4$ con un etiquetado $f : E(G) \rightarrow \{+1, -1\}$ tal que todo ciclo hamiltoniano tiene discrepancia 0.

Este resultado es bastante interesante ya que caracteriza a través del grado mínimo la existencia de ciclos hamiltonianos en abundancia en un grafo, siendo así una extensión del teorema de Dirac.

Por otro lado, poco tiempo después de la publicación de Balogh et al. Freschi, Hyde, Lada y Treglown [Fre+21] demostraron una extensión de este resultado en el sentido de la cantidad de coloreos. Específicamente mostraron que todo grafo G en n vértices con grado mínimo $\delta(G) \geq (1/2 + 1/2r)n + 2dr^2$, donde r es la cantidad de colores usados, tiene al menos d ciclos hamiltonianos desbalanceados. Podemos notar que el caso $r = 2$ es exactamente el Teorema 4.

2.3. Resultado principal

Nuestro objetivo fue demostrar que existe una cota no trivial para el cogrado mínimo en un hipergrafo 3-uniforme, que nos asegure la existencia de ciclos hamiltonianos en abundancia. El cogrado mínimo es una versión de grado para hipergrafos, en este caso, el cogrado es el número de vecinos que tiene un par de vértices. El resultado principal es el siguiente teorema, el cual es un resultado análogo al mostrado por Balogh et al. [Bal+20a]:

Teorema 5. *Sea $H = (V, E)$ un hipergrafo 3-uniforme en n vértices con cogrado mínimo $\delta_2(H) \geq (5/6 + \lambda)n$, con $\lambda > 0$. Entonces tenemos que $\mathcal{D}(H, \mathcal{H}) \geq \frac{\lambda^4 n}{24}$.*

Donde \mathcal{H} es la familia de ciclos hamiltonianos 3-uniformes.

2.4. Organización de la tesis

- En el Capítulo 3 se estudian dos ejemplos, los cuales nos dieron una noción de lo cual debe ser el cogrado mínimo en un 3-grafo para que se cumpla lo requerido.
- En el Capítulo 4 se muestra que con cogrado mínimo al menos $\delta_2(H) \geq (1/2 + \gamma)n$ podemos asegurar existe un ciclo hamiltoniano que contiene todo conjunto pequeño arbitrario de

caminos vértice disjuntos.

- En el Capítulo 5 probamos que dado un ciclo lo suficientemente grande, podemos formar un ciclo hamiltoniano a partir del ciclo.
- En el Capítulo 6 mostramos un breve resultado que nos será útil en la demostración final.
- En el Capítulo 7 introducimos la noción de gadgets la cual será fundamental para nuestra demostración.
- Finalmente, en el Capítulo 8 mostramos nuestro resultado principal.

2.5. Esbozo de la demostración

Nosotros resolvimos nuestra problemática con las mismas ideas de Balogh, Pluhár, Jing y Csaba [Bal+20a], aunque todos los lemas usados por ellos los rehicimos y demostramos para hipergrafos 3-uniformes. Tuvimos que usar diferentes técnicas ya desarrolladas como las propuestas por Katona y Kierstead [KK99], además de la adaptación del Teorema de Dirac hecho por Rödl, Ruciński y Szemerédi [RSR08]. En el caso de estudio de ejemplos no se llegó a un resultado concreto, aunque uno nos dio una noción del cogrado que debíamos usar para nuestro trabajo, la cual coincidía con el cogrado necesario para que las técnicas desarrolladas por Katona y Kierstead puedan ser aplicadas.

Nuestra demostración se resume de la siguiente forma.

En un primer caso mostramos que si existe un vértice con ciertas características, entonces podemos encontrar un ciclo grande con discrepancia muy alta sobre el cual se puede formar un ciclo hamiltoniano con una discrepancia también muy alta. Luego, suponemos que no existe tal vértice.

En un segundo caso, suponemos que cada vértice está en una mínima cantidad de aristas de ambos etiquetados, lo cual nos da paso para encontrar un camino negativo (o positivo) y el hecho de que no exista el vértice del primer caso nos permite encontrar gadgets, los cuales son minicaminos absorbentes que nos permitirán en conjunto con el camino negativo manipular la discrepancia.

En el tercer y último caso, suponemos que hay muchos vértices desbalanceados, pero nuevamente la suposición de que no existe el vértice con ciertas características nos permite encontrar

dos gadgets para todo vértice en un conjunto específico, los cuales nos permiten manipular nuevamente la discrepancia a conveniencia.



3. Estudio de ejemplos

3.1. Motivación

La idea de un estudio de ejemplos es buscar algún caso de hipergrafo que, dado un etiquetado, todo ciclo hamiltoniano tenga discrepancia cero.

Esto nos aseguraría que el cogrado de ese hipergrafo sea una cota inferior para asegurar la discrepancia hamiltoniano mayor a 0.

Para un 3-grafo H en n vértices y los conjuntos de vértices X, Y, Z es $V(H)$, definimos el conjunto $H[X, Y, Z]$ de aristas xyz en $E(H)$ tal que $x \in X, y \in Y, z \in Z$.

3.2. Primer ejemplo

El primer ejemplo que fue estudiado, es un caso particular de una familia de hipergrafos, construidos originalmente por Piga y Sanhueza-Matamala [PS23].

Una idea vaga de la construcción de este ejemplo es que tomamos 3 conjuntos de vértices y solamente permitimos cierto tipo de aristas.

Sea H un 3-grafo con una partición de vértices $\{U_0, U_1, U_2\}$, donde $E(H) = \bigcup_{\substack{i,j \in \{0,1,2\} \\ i \neq j}} H[U_i, U_i, U_j]$.

En este hipergrafo existen todas las aristas posibles permitidas, es decir, todo par de vértices en U_i es vecino de todos los vértices en U_j y U_k , con $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$. y $j \neq i, k \neq i$. Las aristas las escribiremos como $ii_j, i_ji, jii \in H[U_i, U_i, U_j]$.

En cuanto al etiquetado, las aristas en $H[U_0, U_0, U_2], H[U_2, U_2, U_1], H[U_1, U_1, U_0]$ las etiquetamos como positivas y el resto como negativas.

Cabe recalcar que este es un posible etiquetado, existe una cantidad enorme de posibles etiquetados para cada conjunto de vértices y aristas. En nuestro caso nos acotamos solo al estudio de esta en particular. Podrían existir otros etiquetados que nos brinden más información

al respecto, lo cual no es el eje principal de esta tesis por lo que se deja como una posible pregunta abierta para las personas lectoras.

Para denotar ciclos y caminos, lo haremos como una secuencia de números representativos de la partición donde están. El camino 1101 contiene 2 aristas, 110 y 101. En cuanto a los ciclos, se hará de la misma forma. Por ejemplo, podemos escribir el ciclo 00112200, el cual tiene las aristas 001, 011, 112, 122, 220, 200. Cabe destacar que este último ejemplo se puede entender como un camino, por lo que se dirá explícitamente cuando estemos en presencia de un ciclo.

Ya tenemos el etiquetado, ahora veremos un par de ciclos hamiltonianos que se pueden formar.

Primero, escogemos el ciclo 11220011... Este ciclo (Fig. 3.1) tiene la mitad de aristas positivas (112, 220, 001) y la mitad negativas (221, 110, 002) por lo que este etiquetado nos sirve para al menos un ciclo hamiltoniano.

No obstante, podemos encontrar otro tipo de ciclo el cual nos entrega una discrepancia alta. Podemos formar un ciclo hamiltoniano con casi todas sus aristas positivas (o negativas) el cual puede ser escrito como $(112)^k 11, (220)^k 22, (001)^k 00$ (Fig. 3.2).

Esto último nos dice que este ejemplo en particular no es concluyente.

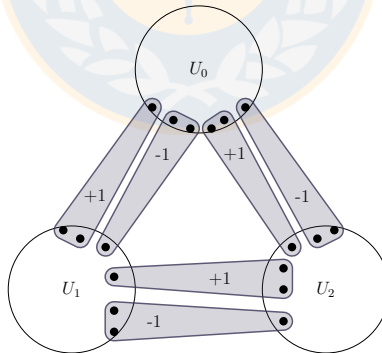


Fig. 3.1: Hipergrafo con $\delta_2(H) = \frac{2n}{3}$

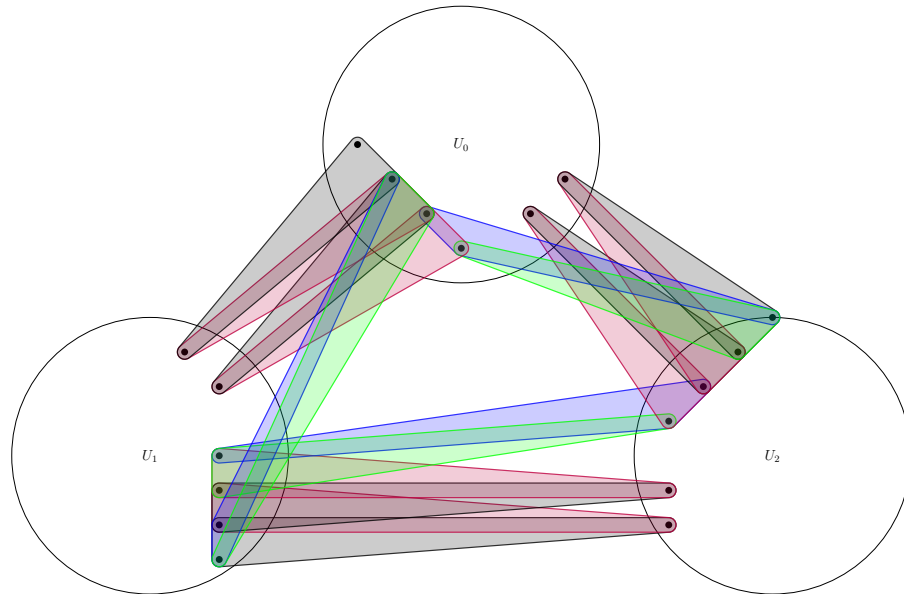


Fig. 3.2: Ejemplo de ciclo hamiltoniano con discrepancia alta.

3.3. Segundo ejemplo

Para el segundo ejemplo, modificamos el hecho por Balogh et al. [Bal+20a] usándolo en 3-grafos.



Fig. 3.3: Hipergrafo con $\delta_2(H) = 0$ y $\delta_2^+(H) = \frac{5n}{6}$

Definimos un 3-grafo $H = (V, E)$, donde $V = V_1 \cup V_2$ tales que $|V_1| = n/6$ y $|V_2| = 5n/6$. Además, solamente permitimos las aristas del tipo 222 y 122. Para este caso, existen todas las aristas permitidas.

La particularidad de este ejemplo es que $\delta_2(H) = 0$, ya que los pares de vértices en V_1 no están dentro de ninguna arista.

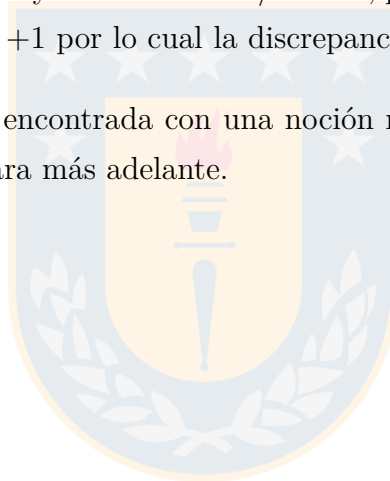
Si usamos una noción de co-grado más débil que la usada en esta instancia, podemos llegar a un resultado interesante.

En específico, usando la definición descrita por Halfpap, Lemons y Palmer [HLP22] la cual explicada vagamente, consiste en contar solamente el cogrado positivo e ignorar los pares de vértices que no estén dentro de ninguna arista.

Más formalmente, dado un 3-grafo H se define $\delta_2^+(H)$ como el cogrado positivo de H , el cual consiste en la máxima cantidad de aristas en las que está contenida un par xy de vértices tales que xy pertenece a al menos una arista.

Vemos que la Figura 3.3 cumple que $\delta_2^+(H) = \frac{5n}{6}$. Podemos formar un ciclo de la forma 22122.... Si asignamos -1 a las aristas que contengan elementos en V_1 , podemos notar que habrán 3 vértices para cada arista y esto ocurrirá $n/6$ veces, por lo cual tendremos $n/2$ vértices. Luego, el resto tiene etiquetado $+1$ por lo cual la discrepancia es 0.

Aunque esta cota haya sido encontrada con una noción más débil de cogrado, nos dio una idea de lo que debíamos usar para más adelante.



4. Lema del Bosque Lineal

Luego de estudiar los ejemplos, uno de ellos nos dejó como idea que el cogrado mínimo que nos servirá es $\delta_2(H) \geq (5/6 + \lambda)n$, la cual es que la usamos a lo largo de este trabajo. No obstante, para la demostración del Lema del Bosque Lineal, es más que suficiente con un cogrado $\delta_2(H) \geq (1/2 + \gamma)n$, $\gamma > 0$.

Queremos mostrar que dado un 3-grafo H y dada una familia \mathcal{B} de caminos vértice disjuntos entre sí, tales que cada camino en \mathcal{B} está en H , existe un ciclo hamiltoniano que contiene a todos estos caminos. Para ello, necesitamos las siguientes definiciones y lemas.

4.1. Definiciones previas

Un **bosque lineal** \mathcal{B} es una familia de caminos en un 3-grafo, vértice-disjuntos, donde $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$, con $B_j \in H, j \in [m]$, donde $m := |\mathcal{B}|$ es la cantidad de caminos dentro de la familia. Los vértices del bosque lineal se definen como $V(\mathcal{B}) := \bigcup_{j=1}^m V(B_j)$ y la cantidad de vértices en un bosque lineal como $|V(\mathcal{B})| := \sum_{j=1}^m |V(B_j)|$.

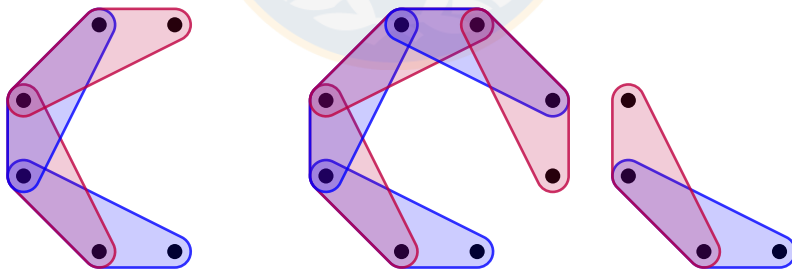


Fig. 4.1: Bosque lineal con 3 caminos vértice-disjuntos.

El lema mostrado es el siguiente

Lema 1 (Lema del Bosque lineal). *Existe $c > 0$ con la siguiente propiedad. Sea $\gamma > 0$, y sea n_0 suficientemente grande. Para todo $n \geq n_0$, todo 3-grafo H en n vértice tal que $\delta_2(H) \geq (1/2 + \delta)n$, y para todo $\mathcal{B} \subseteq H$ bosque lineal con $|V(\mathcal{B})| \leq c\gamma n$, existe $C_h \subseteq H$ ciclo hamiltoniano tal que $\mathcal{B} \subseteq C_h$.*

Para ello ocuparemos dos lemas importantes, para lo cual definiremos algunos conceptos

extra.

Decimos que H es (α, ℓ) -**conectado** si para todo par xy, zw en H existen al menos $\alpha n^{\ell-2}$ caminos desde xy hasta zw en H de largo ℓ .

Sea H un k -grafo y sea P un camino en H . Decimos que H es **hamiltoniano-conectado**, si para dos pares xy, zw de vértices cualesquiera en H , existe un ciclo hamiltoniano en H que los conecta.

4.2. Lemas previos

Para la demostración del Lema del Bosque Lineal, los siguientes lemas fueron de mucha utilidad.

El primero es una idea de Reiher, aunque la demostración está en un artículo de Joos y Kühn, Lemma 2.6 [JK21]. El caso particular que usaremos, fue demostrado por Piga y Sanhueza-Matamala [PS23], el cual nos habla de que si tenemos un co-grado lo suficientemente grande en un 3-grafo, entonces para cualquier par de tuplas de tamaño dos, vértice disjuntas, existen muchos caminos que las unen.

El segundo, demostrado por Glock, Gould, Joos, Kühn y Osthus [Glo+20], nos dice, de manera similar, que para un co-grado grande, podemos encontrar un camino hamiltoniano entre dos pares cualesquiera en el 3-grafo.

Lema 2 (Lema 7.6 [PS23]). *Para todo $d > 1/2$, todo 3-grafo H en n vértices con cogrado mínimo $\delta_2(H) \geq dn$, es $((d^2(2d-1)^4), 8)$ -conectado.*

Lema 3 (Lema 3.6 [Glo+20]). *Para todo $\gamma > 0$, existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ un 3-grafo H en n vértices con cogrado mínimo $\delta_2(H) \geq (1/2 + \gamma)n$ es **hamiltoniano-conectado**.*

No está demás acotar que el Lema 3 originalmente está generalizado para k -grafos con $k \geq 3$.

4.3. Demostración lema del Bosque Lineal

Demostramos el Lema del Bosque Lineal.

Demostración. Sea $\mathcal{B} \subseteq E(H)$ tal que \mathcal{B} induce un bosque lineal en H , con $|V(\mathcal{B})| \leq c\gamma n$. Sea $m := |\mathcal{B}|$ y $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$. Luego, como $|V(\mathcal{B})| \leq c\gamma n$, entonces $m \leq c\gamma n$. Queremos mostrar que existe un ciclo hamiltoniano $C \subseteq H$ tal que $\mathcal{B} \subseteq C$, es decir, todos los caminos del bosque \mathcal{B} están en el ciclo hamiltoniano. Con este propósito, dividiremos el trabajo en dos pasos. Primero encontraremos un camino P que abarque todos los elementos del bosque y en un segundo paso, conectaremos los extremos de P para formar un ciclo hamiltoniano.

Paso 1 : Buscamos un camino P que contenga a todos los caminos $B_k \in \mathcal{B}$, $1 \leq k \leq m$, donde $m \leq c\gamma n$. Para ello, nuestra idea es conectar cada camino del bosque a través de sus extremos. Para realizar cada conexión entre elementos de \mathcal{B} , eliminaremos todo lo de \mathcal{B} que no nos interese y juntaremos los caminos apoyándonos en el Lema 2.

Sean x_k, y_k tuplas ordenadas de tamaño 2, las cuales son el inicio y el fin de $B_k \in \mathcal{B}$. Si queremos unir B_j y B_{j+1} , lo hacemos por y_j y x_{j+1} , tomando $H_j := (H \setminus (V(\mathcal{B}) \cup L_j)) \cup y_j \cup x_{j+1}$, donde $L_j := l_1 \cup l_2 \cup \dots \cup l_j$ y luego aplicamos el Lema 2.

Conectemos B_{m-1} con B_m . Tomamos $H_{m-1} := (H \setminus (V(\mathcal{B}) \cup L_{m-2})) \cup y_{m-1} \cup x_m$. Notemos que $|l_j| = 8$, para todo $j \in [m]$, por lo que $|L_{m-2}| = 8(m-2)$. Luego calculamos el co-grado, donde debemos tener en cuenta que $m \leq c\gamma n$, por lo que $-m \geq -c\gamma n$. Nos queda como sigue:

$$\begin{aligned} \delta_2(H_{m-1}) &\geq (1/2 + \gamma)n - (c\gamma n - 4 + 8(m-2)) \\ &= (1/2 + \gamma)n - (c\gamma n + 8m - 20) \\ &\geq (1/2 + \gamma)n - 9c\gamma n + 20 \\ &\geq \dot{\gamma}n \end{aligned}$$

Donde $\dot{\gamma} := 1/2 + (1 - 9c)\gamma$. En consecuencia del Lema 2, H_{m-2} es $(\dot{\gamma}^2(2\dot{\gamma} - 1)^4, 8)$ -conectado, $c < 1/9$. De tal modo, existe un camino l_{m-1} que conecta y_{m-1} con x_m . Finalmente, $P := \bigcup_{t=1}^{m-1} (B_t \cup l_t) \cup B_m$ es un camino tal que $V(\mathcal{B}) \subseteq V(P)$. Posterior a ello, podemos reparar en la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} |V(P)| &\leq c\gamma n + |L_{m-1}| \\ &= c\gamma n + 8(m-1) \\ &\leq 9c\gamma n - 8 \end{aligned}$$

Por su lado, $|V(\mathcal{B})| \leq c\gamma n$, lo cual nos deja como consecuencia que $|V(P)| \leq 9|V(\mathcal{B})|$.

Ver ejemplo en Figura 4.2.

Paso 2 : La segunda parte de nuestro trabajo será unir los extremos de este camino para que se forme un ciclo hamiltoniano.

Sea P el camino encontrado anteriormente. Sean $P_x, P_y \in V^{(2)}$ los extremos de P . Sea $H' := (H \setminus V(P)) \cup P_x \cup P_y$. Notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \delta_2(H') &= \delta_2(H) - (9c\gamma n - 8) + 4 \\ &\geq (1/2 + \gamma)n - 9c\gamma n \\ &= \gamma''n \end{aligned}$$

Donde $\gamma'' := 1/2 + (1 - 9c)\gamma$, con $c < 1/9$. En consecuencia, H' tiene cgrado mínimo al menos γ'' y por el Lema 3 H' es hamiltoniano-conectado, por lo cual para pares cualesquiera en H' existe un camino hamiltoniano de H' que los conecta. En particular, podemos elegir P_x y P_y . Por ello, aseguramos la existencia de un camino hamiltoniano W que conecta P_x con P_y . Finalmente, si tomamos $C = P \cup W$ formamos un ciclo hamiltoniano C que contiene todos los elementos del bosque lineal \mathcal{B} . \square

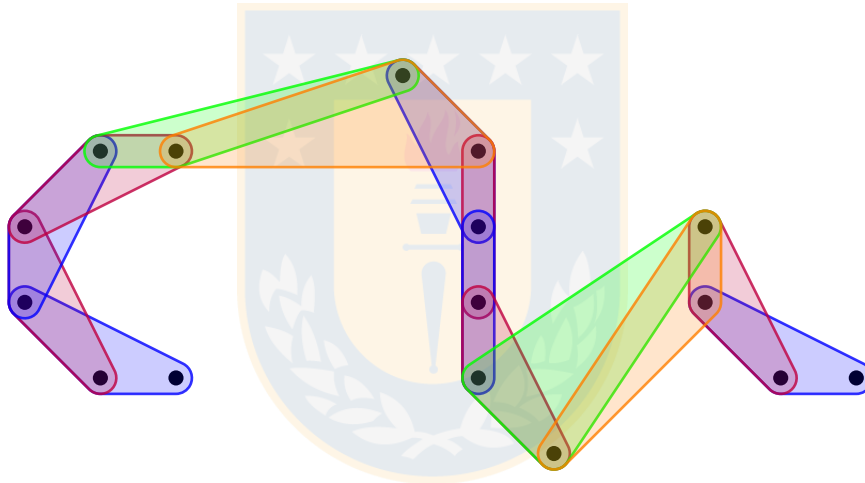


Fig. 4.2: Camino formado por un bosque lineal conectado por 4 aristas.

5. Formando un ciclo hamiltoniano a partir de un ciclo

Dado un 3-grafo H en n vértices, sea C un ciclo de tamaño $|C|$ tal que $V(C) \subset V(H)$. Queremos construir un ciclo hamiltoniano a partir del ciclo C . La construcción en grafos se hace encontrando un ciclo grande en G y luego agregando vértices que están afuera de este conjunto uno a uno. Esto último, agregar vértices, no es difícil en grafos, pero en 3-grafos hacerlo aumenta su dificultad. Para realizar lo anterior, usamos las herramientas mostradas por Katona y Kierstead [KK99].

Definición 3. Sea H un 3-grafo. Sea $(v_{i-2}, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2})$ una 4-tupla en $V(H)^{(4)}$. Definimos

$$R(v_{i-2}, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2}) = \{w \in V(H) : v_{i-2}v_{i-1}wv_{i+1}v_{i+2} \text{ es un camino.}\}$$

Es decir, $R(v_{i-2}, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2})$ son todos los vértices que pertenecen, a la vez, a las vecindades

$N(v_{i-2}v_{i-1}), N(v_{i-1}v_{i+1}), N(v_{i+1}v_{i+2})$. En otras palabras, son los vértices que podemos poner al medio de $v_{i-2}, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2}$ y esta nueva secuencia será un camino. Para referirnos a este tipo de conjuntos en un contexto general, diremos que son conjuntos del **tipo R** .

Para denotar la diferencia entre la discrepancia de un conjunto luego de cambiarlo, es útil recordar la siguiente definición. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Se define la **diferencia simétrica de conjuntos** como

$$A \Delta B := \{x : x \text{ está en la unión de } A \text{ con } B \text{ y } x \text{ no está en la intersección de } A \text{ con } B\}$$

En el siguiente lema, Katona y Kierstead nos dicen, en particular para lo que necesitamos, que dado un 3-grafo H en n vértices con cogrado mínimo al menos $\delta_2(H) \geq (5/6 + \lambda)n$, podemos asegurar que cada 4-tupla de vértices consecutivos $(v_{i-2}, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2})$ en $V(H)^4$ tiene un conjunto R de tamaño mayor a $n/2$ tal que, para todo $w \in R$, $v_{i-2}v_{i-1}wv_{i+1}v_{i+2}$ es un camino.

Lema 4 ([KK99], Lemma 1). Sea H un 3-grafo en n vértices con cogrado mínimo $\delta_2(H) \geq (5/6 + \lambda)n$. Para cualquier 4-tupla $(v_{i-2}, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2})$ en $V(H)^4$, donde $v_{i-2}, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2}$ son diferentes entre sí,

$$|R(v_{i-2}, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2})| > n/2 + \lambda n$$

La idea de lo que sigue es, dado un ciclo C en un 3-grafo H en n vértices con cogrado mínimo $\delta_2(H) \geq (5/6 + \lambda)n$ formar a partir de C un ciclo hamiltoniano C_h .

Para ello, tomaremos un ciclo C y encontraremos un vértice v que no esté en $V(C)$ tal que existe un par de vértices consecutivos en C que sean vecinos de v para así formar un camino. Luego, dado el camino que nos quede del paso anterior la idea es conectarlo, agregando un nuevo vértice. Repetiremos esos pasos hasta formar un camino hamiltoniano y luego concluir mostrando que se puede formar el ciclo hamiltoniano.

5.1. Formación de un camino a partir de un ciclo

Proposición 1 (Formación de un camino a partir de un ciclo). *Sea H un 3-grafo en n vértices con cogrado mínimo $\delta_2(H) \geq (5/6 + \lambda)n$, con $\lambda > 0$. Sea $C \subset H$ un ciclo con $(5/6 + \lambda)n < |V(C)| < n$, entonces existe un camino $P \subseteq H$ con $V(P) = V(C) \cup \{u\}$, $u \in V(H)$ y $|V(P)| = |V(C)| + 1$ y además $|E(P) \Delta E(C)| \leq 14$.*

Demostración. Primero queremos, a partir del ciclo C , formar un camino P tal que $V(P) = V(C) \cup \{u\}$. Supondremos sin pérdida de generalidad que todos los pares consecutivos de vértices en C solo tienen vecinos dentro de C , ya que si algún par xy tuviera al menos un vecino v fuera del ciclo, entonces basta reemplazar la arista xyu con xyv formando un camino, donde u es alguno de los dos vecinos dentro del ciclo del par xy . Sea $u \notin V(C)$ (Fig. 5.1), y sean los vértices del ciclo $V(C) = \{v_1, \dots, v_l\}$. Definimos, para todo $j \in [l]$ los siguientes conjuntos.

- $N_j = \{v_i : v_i \in V(C) \cap N(u, v_j)\}$
- $R_j = \{v_i : v_{j-2}v_{j-1}v_iv_{j+1}v_{j+2} \text{ es camino.}\}$
- $R_j^- = \{v_{i-1} : v_i \in R_j\}$.

Notemos que $|N_j| \geq 2n/3$, ya que $|V(C) \cap N(u, v_j)| \geq 2n/3$. Por otro lado, como supusimos que todo par de vértices solo tiene vecinos dentro de C , entonces cada par de vértices consecutivos en una 4-tupla de vértices consecutivos tiene vecinos solamente dentro de $V(C)$, por lo que para cualquier 4-tupla de vértices consecutivos $v_{i-2}, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$, $R(v_{i-2}, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) \subseteq V(C)$. A su vez, por el Lema 4, $|R_j| \geq n/2 + \lambda n$.

Definimos para todo $j \in [l]$, $S_j := N_j \cap R_j^-$. Podemos observar que:

$$|S_j| = |N_j \cap R_j^-| = |N_j| + |R_j^-| - |N_j \cup R_j^-| \geq 2n/3 + n/2 - n = n/6$$

Por lo cual para cada $j \in [l]$, $|S_j| \geq n/6$ y por el principio del palomar, existe un índice $i \in [l]$, tal que v_i está en al menos $n/6$ conjuntos S_j . Por otro lado, al suponer que todos los vecinos de cualquier par de vértices consecutivos en C están dentro de C , entonces se cumple que $|N(v_{i-1}, v_i) \cap V(C)| \geq 5n/6$, por lo cual, nuevamente ocupando el principio del palomar, podemos notar que existe un índice j , tal que v_j está en $N(v_{i-1}, v_i)$ y v_i está en S_j , es decir, existen las aristas $v_j v_{i-1} v_i$ y $v_i v_j u$ (fig. 5.2). Por lo que tomando este índice j , podemos formar el camino $P = v_{i+2} v_{i+3} \cdots v_{j-2} v_{j-1} v_{i+1} v_{j+1} v_{j+2} \cdots v_{i-2} v_{i-1} v_i v_j u$, el cual cumple lo pedido. Por último, podemos notar que modificamos el lugar de dos vértices los cuales cada uno tienen 3 aristas asociadas y los intercambiamos, luego cada uno aporta 3 aristas nuevas y al agregar dos aristas $v_i v_j u$ y $v_{i-1} v_i v_j$, nos quedaría $|E(P) \Delta E(C)| = 14$. \square

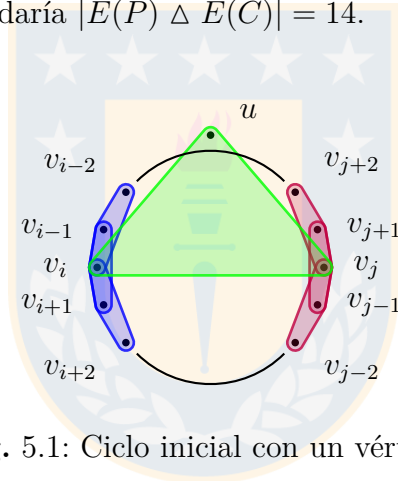


Fig. 5.1: Ciclo inicial con un vértice u vecino de una tupla en el ciclo.

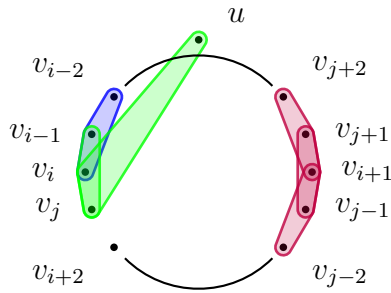


Fig. 5.2: Camino formado a partir del ciclo.

Nuestra segunda misión es tomar el camino P encontrado anteriormente y conectarlo para formar un nuevo ciclo C' . Para ello seguiremos la construcción de Katona y Kierstead .

5.2. Formación de un ciclo a partir de un camino

Proposición 2 (Formación de un ciclo a partir de un camino). *Sea H un 3-grafo en n vértices con cogrado mínimo al menos $\delta_2(H) \geq (5/6 + \lambda)n$, con $\lambda > 0$. Sea $P \subset H$ un camino con $|V(P)| < n$, entonces existe un ciclo $C' \subseteq H$ con $V(C') = V(P) \cup \{u\}$, $u \in V(H)$ y $|V(C')| = |V(P)|$ y además $|E(P) \Delta E(C')| \leq 24$.*

Demostración. Tenemos un camino P y queremos conectarlo para formar un ciclo C' , tal que $|C'| = |P|$. Sea $\ell := |P|$. Sean $(v_{\ell-1}, v_\ell)$ y (v_1, v_2) la tupla final e inicial respectivamente de P . Definimos para todo $i \in \{3, \ell-2\}$ $R_i = R(v_{i-2}, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2})$ y definimos también el siguiente número, el cual nos dirá en cuantos conjuntos del tipo R está el vértice v , $D(v) = |\{i : v \in R_i\}|$.

Notemos que si existe algún vértice x fuera del ciclo tal que x está en el conjunto R de alguna 4-tupla consecutiva en C , entonces podemos formar el ciclo requerido a partir del camino P . Sea $(v_{k-2}, v_{k-1}, v_{k+1}, v_{k+2})$ una 4-tupla de vértices consecutivos en C y $R_k = R(v_{k-2}, v_{k-1}, v_{k+1}, v_{k+2})$. Sea $u \in V(H) \setminus V(P)$ tal que $u \in R_k$. En primer lugar, si v_{k-2}, v_{k-1} y v_{k+1}, v_{k+2} son los vértices extremos del camino P , entonces podemos formar C , luego suponemos que no lo son.

Sean $v_{\ell-1}, v_\ell, v_1, v_2$ los vértices extremos del camino P y $R' = R(v_{\ell-1}, v_\ell, v_1, v_2)$. Luego podemos notar que, $|R'| + |R_k| - n > n + 2\lambda n - n = 2\lambda n$, lo cual nos dice que existen al menos $2\lambda n$ vértices $v'_k \in R_k$ y $v' \in R'$ tales que $v' \in R_k$ y $v'_k \in R'$. Podemos ver que hay muchos vértices que pueden formar un camino con los vértices $v_{\ell-1}, v_\ell, v_1, v_2$, cerrando así el camino para formar un ciclo. Luego, podemos tomar un vértice $v'_k \in R_k$ tal que $v'_k \in R'$ y así cerrar el ciclo y en particular tomamos u para formar un camino $v_{k-2}v_{k-1}uv_{k+1}v_{k+2}$, formando el ciclo $v'_k v_1 v_2 \dots v_{k-2} v_{k-1} u v_{k+1} v_{k+2} \dots v_{\ell-1} v_\ell v'_k$.

Luego, supondremos que todos los vértices que puedan pertenecer a conjuntos R_k , con $v_k \in V(C) \cap V(H)$, están dentro de P . Por lo anterior y por el Lema 4, $|R_i| > n/2 + \lambda n$ y podemos notar que, por el principio del palomar y nuestra suposición, existe un índice i tal que $D(v_i) > n/2 + \lambda n$.

Supongamos primero que $i \in \{\ell-1, \ell, 1, 2\}$. Podemos notar que $|R_i| + D(v_i) - \ell > 0$, en consecuencia, existe un índice r tal que $v_r \in R_i$ y $v_i \in R_r$. Si $i = r$, entonces $v_{\ell-1}v_\ell v_1 v_2$ es un camino y podemos formar el ciclo C' . Si $r \neq i$ y suponiendo sin pérdida de generalidad que $i = 1$, entonces podemos formar el ciclo $C' = v_r v_2 v_3 \dots v_{r-1} v_1 v_{r+1} \dots v_{\ell-1} v_\ell v_r$.

Ahora, supongamos que $i \notin \{\ell-1, \ell, 1, 2\}$. Sea $Q = R(v_{\ell-1}, v_\ell, v_1, v_2)$. Dado que $|R_i| + |Q| - \ell > 2$, existe un índice $j \notin \{i, i-1\}$, tal que $v_j \in R_i$ y $v_{j+1} \in Q$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i < j$. Definimos $B = v_{j+2} \cdots v_\ell v_{j+1} v_1 \cdots v_{i-1} v_j v_{i+1} \cdots v_{j-1}$. Notar que B es un camino de largo $\ell - 1$ (v_i no está). Sea $M = R(v_{j-2}, v_{j-1}, v_{j+2}, v_{j+3})$ y $X = \{v_m \in M : v_i \in R_m\}$. Notemos que $|X| > 2\alpha - \ell > \lambda n$. Supongamos que $v_m \in X$. Dado que $v_i \in R_m$, entonces $m \notin \{i-2, \dots, i+2\} \setminus \{i\}$. Dado que $v_m \in M$, $m \notin \{j-2, \dots, j+3\} \setminus \{j, j+1\}$. Más aún, $m \notin \{i, j\}$ dado que si fuera alguno de ellos, $v_{j+2} \cdots v_\ell v_{j+1} v_1 \cdots v_{i-1} v_j v_{i+1} \cdots v_{j-1} v_i v_{j+2}$ es un ciclo o $v_{j+2} \cdots v_\ell v_{j+1} v_1 v_j$ es un ciclo. Entonces existe $v_m \in X$ tal que $m \notin \{i-2, \dots, i+2\} \cup \{j-2, \dots, j+3\} \cup \{1, 2\} \cup \{\ell-3, \dots, \ell\}$.

Finalmente, podemos tomar el ciclo

$$C' = v_{j+2} \dots v_\ell v_{j+1} v_1 v_2 v_3 \dots v_{p-1} v_i v_{p+1} \dots v_{i-1} v_j v_{i+1} \dots v_{j-1} v_p v_{j+2}$$

Por último notemos que modificamos 4 aristas de lugar. Al sacarlas, eliminamos 3 aristas por cada vértices y al agregarlos en otro lado, añadimos 3 aristas nuevas por cada vértices, lo que implica que $|E(P) \Delta E(C')| \geq 24$ □

5.3. Formación de un ciclo hamiltoniano a partir de un ciclo

Lo que hicimos en los dos lemas anteriores, es ver que podemos pasar de un ciclo en ℓ vértices a un camino en $\ell + 1$ vértices y también pasar de un camino en ℓ vértices a un ciclo en ℓ vértices.

Haciendo estos cambios iterativamente, podemos lograr formar un ciclo que contenga todos los vértices del 3-grafo, es decir, formar un ciclo hamiltoniano, lo cual es justamente lo que nos dice el siguiente Lema.

Lema 5 (Formación de un ciclo hamiltoniano a partir de un ciclo). *Sea H un 3-grafo en n vértices con cogrado mínimo $\delta_2(H) \geq (5/6 + \lambda)n$. Sea $C \subset H$ un ciclo con $|C| > 5n/6$, entonces podemos formar un ciclo hamiltoniano C_h a partir de C y se tiene que $|E(C) \Delta E(C_h)| \leq 38(n - |C|)$.*

Demostración. Sea C con las propiedades del enunciado. Por la Proposición 1, podemos formar un camino P a partir de C , tal que $|P| = |C| + 1$ añadiendo un vértice del exterior. Por la

Proposición 2, podemos formar un ciclo C' a partir de P , tal que $|C'| = |P|$. Podemos iterar lo anterior hasta formar un camino P_h , tal que $|P_h| = n$, es decir, P_h es un camino hamiltoniano. Por último, notemos que el camino P_h cumple todo lo necesario para aplicar la Proposición 2, por lo cual a partir de P_h , podemos formar el camino hamiltoniano C_h . Por otro lado, notemos que cada vez que queramos pasar de un ciclo C_1 a un ciclo C_2 tales que $C_2 = C_1 + 1$, cambiamos a lo más 38 aristas (14 para pasar de ciclo a camino y 24 para pasar de camino a ciclo), por lo que al poder agregar como máximo $(n - |C|)$ vértices, entonces $|E(C) \Delta E(C_h)| \leq 38(n - |C|)$. \square



6. Existencia de caminos entre conjuntos en un 3-grafo

Necesitamos enunciar un teorema que nos facilitará algunos pasos para alcanzar nuestro objetivo. En este teorema, demostrado por Allen, Böttcher, Cooley y Mycroft [All+17], nos dicen que teniendo una cantidad suficiente de aristas, entonces se asegura la existencia de un camino de cierto tamaño.

Se recuerda la notación combinatorial como $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, donde $x! = x(x-1)(x-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

El siguiente teorema es fundamental para mostrar el resultado de esta sección.

Teorema 6 ([All+17], Teorema 1). *Para todo positivo γ , existe un entero N tal que lo que sigue se cumple para todo $\alpha \in [0, 1]$. Si H es un 3-grafo en $n \geq N$ vértices con $e(H) \geq (\alpha + \gamma) \binom{n}{3}$, entonces H contiene un camino de tamaño ℓ , para todo $\ell \leq \alpha n$.*

Lema 6 (Existencia de camino). *Sea H un 3-grafo en $n \geq N$ vértices, con N un natural cualquiera y $U \subseteq V(H)$, tal que $|U| \geq \nu n$ y para todo $v \in U$, $d_H(v) \geq \gamma \binom{n}{2}$, entonces existe un camino P de largo al menos $\ell \geq \frac{\gamma \nu n}{2}$ y cada arista de P tiene al menos un vértice en U .*

Demostración. Queremos usar el Teorema 6 para demostrar la existencia de este camino. Para ello, verifiquemos cual es la mínima cantidad de aristas de H haciendo un conteo para cada vértice. Sea $N \in \mathbb{N}$ y $n \geq N$. Notemos que cada vértice en U está en al menos $\gamma \binom{n}{2}$ aristas, luego la cantidad de aristas se puede contar como la suma del grado de cada vértice en U , pero al haber 3 vértices en cada arista estaremos contando el triple de veces, por lo cual la cantidad de aristas es al menos $e(H) \geq \frac{1}{3} \sum_{v \in U} d_H(v)$. Desarrollemos lo anterior:

$$e(H) \geq \frac{1}{3} \sum_{v \in U} d_H(v) \geq \frac{\gamma}{3} \binom{n}{2} |U| \geq \gamma \nu \binom{n}{3} = \left(\frac{\gamma \nu}{2} + \frac{\gamma \nu}{2} \right) \binom{n}{3}$$

Por lo que invocando el Teorema 6, encontramos un camino P de tamaño $\ell \geq \frac{\gamma \nu n}{2}$. Es claro que toda arista tiene al menos un vértice en U . \square

7. Gadgets y resultados previos al Teorema

Para lo que sigue necesitamos los *gadgets*, los cuales serán una pieza clave en el primer resultado. Estos consisten en vértices que cumplen con estar en ciertas aristas que los hacen una estructura fundamental para demostrar nuestro resultado principal.

Definición 4. Sea H un 3-grafo. Un gadget es una colección de 5 vértices u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 tales que existe el camino $u_1u_2u_4u_5$ y además existe el camino $u_1u_2u_3u_4u_5$. Las aristas del camino $u_1u_2u_4u_5$ las llamaremos aristas inferiores y las demás, aristas superiores.

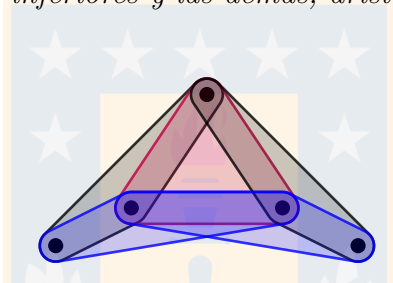


Fig. 7.1: Ejemplo de Gadget.

Necesitamos definir lo que es un vecindario positivo o negativo, dado que al estar en presencia de un hipergrafo con signos en las aristas, todo vértice estará en cierta cantidad de aristas etiquetadas como positivas y otras como negativas.

Definición 5. Sea H un 3-grafo con una función $f : E(H) \rightarrow \{+1, -1\}$. Definimos el **vecindario positivo** de $v \in V(H)$ como $N^+(v)$, el cual consta de pares de vértices con los cuales v forma aristas positivas. Análogamente se define el vecindario negativo de v como $N^-(v)$, el cual consta de pares de vértices con los cuales v forma aristas negativas.

Un concepto importante que debemos tener en cuenta es el balanceo de vértices en un 3-grafo. La idea de esta definición es poder tener presente que, cuando ocurra, cada vértice balanceado se asegura de estar en una cantidad mínima de aristas positivas y negativas.

Definición 6. Sea H 3-grafo con una función $f : E(H) \rightarrow \{+1, -1\}$. Diremos que un vértice $v \in V(H)$ es τ -balanceado, si v pertenece a al menos $\tau \binom{n}{2}$ aristas positivas y al menos $\tau \binom{n}{2}$ aristas negativas. En otro caso, diremos el vértice es τ -desbalanceado.

El siguiente lema lo usaremos para mostrar algunas propiedades útiles dentro de la demostración.

Lema 7. *Sea G un grafo en n vértices y $\lambda > 0$ tal que $E(G) \leq \lambda \binom{n}{2}$, entonces el conjunto $W = \{v \in V(G) : d_G(v) \geq \lambda'n\}$ es de tamaño $|W| \leq \frac{\lambda}{\lambda'}n$.*

Demostración.

$$\lambda \binom{n}{2} \geq |E(G)| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(H)} d_G(v)$$

Desglosamos la sumatoria, diferenciando los vértices que tienen grado mayor o igual a $\lambda'n$ y los que tienen grado menor al mismo.

$$\geq \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{v \in V(H) \\ d(v) \geq \lambda'n}} d_G(v) + \sum_{\substack{v \in V(H) \\ d(v) < \lambda'n}} d_G(v) \right)$$

Luego mayoramos la suma de los vértices con grado menor a $\lambda'n$ por 0

$$\begin{aligned} &\geq \frac{1}{2} \lambda'n |\{v \in V(H) : d_G(v) \geq \lambda'n\}| \\ &= \frac{1}{2} \lambda'n |W| \end{aligned}$$

Luego, como $\lambda \binom{n}{2} \geq \frac{1}{2} \lambda'n |W|$ se concluye que $|W| \leq \frac{\lambda}{\lambda'}n$. □

8. Demostración del Teorema

Para finalmente demostrar el Teorema 5, necesitamos los últimos resultados previos, los cuales son los siguientes.

Primero, veamos la siguiente proposición que es bastante simple, pero muy útil.

Proposición 3. *Sea H un 3-grafo en n vértices y $\delta_2(H) \geq (5/6 + \lambda)n$, entonces $\delta_1(H) \geq (5/6 + \lambda)\binom{n}{2}$.*

Demostración. Haremos el conteo fijando un vértice arbitrario x de H .

$$d(x) = \frac{1}{2} \sum_{y \in V(H)} d(xy) \geq \frac{1}{2}(5/6 + \lambda)n^2 = (5/6 + \lambda)\binom{n}{2}$$

Luego, como se cumple para cualquier x en H , entonces $\delta_1(H) \geq (5/6 + \lambda)\binom{n}{2}$. □

Recordamos el conocido Lema del saludo de manos, el cual nos entrega una relación directa entre la cantidad de aristas de un grafo y la suma de los grados de todo vértices del mismo grafo.

Lema 8 (del saludo de mano). *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Entonces se cumple que:*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E|$$

El siguiente Teorema, nos habla de que si la cantidad de aristas en un grafo es alta, entonces se asegura la existencia de todos los árboles doble-estrella en k vértices como subgrafos en G . Este Teorema es fundamental para encontrar un tipo de gadgets.

Teorema 7 ([McL05], Teorema 1). *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Si $|E| > (k - 2)\frac{|V|}{2}$, entonces para todo $k \geq 2$ todo árbol doble-estrella en k vértices, está contenido en G como subgrafo.*

La demostración se dividirá en 3 partes. Primero, supondremos que existe un tipo de vértice el cual cumple ciertas características y junto con ello demostraremos que si en efecto existe este vértice, entonces podemos formar un ciclo hamiltoniano con discrepancia alta. Luego analizaremos qué ocurre cuando hay cierta cantidad de vértices balanceados y luego cuando eso no ocurre.

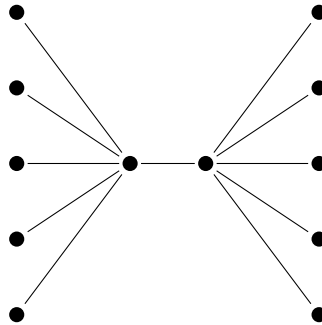


Fig. 8.1: Ejemplo de árbol doble-estrella

8.1. Demostración

Demostración del Teorema 5. Dado $v \in V(H)$, definimos los siguientes grafos.

El primer grafo consiste en el *link graph* de v , es decir, dado v , la arista xy está en el grafo si existe la arista xyv en el hipergrafo.

$$V(L(v)) \subset V(H)$$

$$E(L(v)) = \{xy \in V^{(2)}(H) : xyv \in E(H)\}$$

El siguiente grafo consiste en todas las aristas en $L(v)$ que tienen una vecindad positiva grande

$$V(B^+(v)) \subset V(H)$$

$$E(B^+(v)) = \{xy \in E(L(v)) : |N_H^+| \geq n/6\}$$

El siguiente grafo consiste en todas las aristas en $L(v)$ que tienen una vecindad negativa grande

$$V(B^-(v)) \subset V(H)$$

$$E(B^-(v)) = \{xy \in E(L(v)) : |N_H^-| \geq n/6\}$$

Caso 1: Supongamos que existe un vértice $v \in V(H)$ tal que $|B^+(v)| < \frac{\lambda^2}{2} \binom{n}{2}$ o $|B^-(v)| < \frac{\lambda^2}{2} \binom{n}{2}$, es decir, existen pocos pares de vértices que tienen mucho grado positivo o bien pocos pares de vértices que tienen mucho grado negativo. Supondremos lo segundo, es decir, existen pocos pares de vértices que tienen mucho grado negativo.

Definamos el conjunto $W = \{v \in V(H) : d_{B^-}(v) \geq \lambda n\}$ el cual es un subconjunto de los vértices de $B^-(v)$. Por el Lema 7, podemos asegurar que $|W| \leq \frac{\lambda n}{2}$.

Definamos el hipergrafo $H' = H[V(H) \setminus W]$ y notemos que $\delta_1^+(H') \geq \left(\frac{5}{9} + \alpha\right) \binom{n}{2}$, donde donde $\alpha = \frac{\lambda}{12} - \frac{\lambda^2}{4}$. Es decir, todo v3rtice x en H' tiene grado m3nimo positivo $d^+(x) \geq \left(\frac{5}{9} + \alpha\right) \binom{n}{2}$.

$$\begin{aligned}
 d^+(x) &= \frac{1}{2} \sum_{y \in V(H')} d_{H'}^+(xy) \\
 &\geq \frac{1}{2} \sum_{y \in N_{L \setminus B^-}(x)} d_{H'}^+(xy) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{y \in N_{L \setminus B^-}(x)} (d_H(xy) - |W|) \\
 &\geq \frac{1}{2} |N_{L \setminus B^-}(x)| \left(\frac{2}{3} + \frac{\lambda}{2}\right) n \\
 &= \frac{1}{2} (d_L(x) - d_{B^-}(x) - |W|) \left(\frac{2}{3} + \frac{\lambda}{2}\right) n \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{5}{6} + \lambda\right) n - \lambda n - \frac{\lambda n}{2}\right) \left(\frac{2}{3} + \frac{\lambda}{2}\right) n \\
 &= \left(\frac{5}{9} + \alpha\right) \binom{n}{2}
 \end{aligned}$$

Esto nos dice que $\delta_1^+(H') \geq \left(\frac{5}{9} + \alpha\right) \binom{n}{2}$ y por el Teorema 3, existe un ciclo hamiltoniano C_h donde todas sus aristas son positivas. Notemos que C_h es hamiltoniano en H' , pero no lo es en H ya que faltan los v3rtices de W , es decir, faltan $\frac{\lambda n}{2}$ v3rtices. Luego, $|C_h| \geq n - \frac{\lambda n}{2}$. Invocando el Lema 5, podemos formar un ciclo C'_h hamiltoniano en H , donde su discrepancia es al menos $n - \frac{\lambda n}{2} - \frac{38\lambda n}{2} \geq \frac{\lambda^4 n}{24}$. Donde esta 3ltima cota se cumple con mucha holgura.

El resultado anterior es an3logo si suponemos al principio que existen pocos pares de v3rtices que tienen mucho grado positivo, es decir, suponer que $B^+(v) < \frac{\lambda^2}{2} \binom{n}{2}$, por lo que de ahora en adelante supondremos que para todo v en los v3rtices de H ,

$$|B^+(v)|, |B^-(v)| \geq \frac{\lambda^2}{2} \binom{n}{2} \quad (8.1)$$

Caso 2: Al menos $n/2$ v3rtices son λ^4 -balanceados.

Sea S el conjunto de v3rtices balanceados con m3s pares de vecinos positivos. Podemos suponer que $|S| \geq n/4$, ya que en caso contrario podemos hacer un cambio de etiquetado, donde cada arista positiva pasa a ser negativa y viceversa, teniendo as3 la propiedad requerida.

Dado que todo vértice en S es λ^4 -balanceado, entonces cada vértice tiene al menos $\lambda^4 \binom{n}{2}$ pares de vecinos negativos.

Invocando el Lema 6 con el conjunto de vértices S , donde todo vértice u en S tiene grado en H al menos $d(u) \geq \lambda^4 \binom{n}{2}$, existe un camino P negativo tal que $|P| \geq \frac{\lambda^4 n}{4}$ y además cada arista en P tiene al menos un vértice en S . Tomaremos un subcamino $P' \subseteq P$ tal que $|P'| = \lfloor \frac{\lambda^4 n}{4} \rfloor$. Definimos el conjunto $P^+ := V(P') \cap S$ y el conjunto $P^- := V(P') \setminus S$. Notemos que todo vértice en P^+ tiene grado positivo al menos $\frac{5}{12} \binom{n}{2}$ ya que estos vértices están en S .

Nuestro primer objetivo es mostrar que todo vértice en P^+ puede formar un gadget en el cual las aristas superiores sean positivas. Dicho de otra forma, buscamos un camino que forme un gadget con los vértices en P^+ , tal que todo par consecutivo de este camino esté en el vecindario positivo de dicho vértice. Además, queremos que cada camino que forme el gadget con los vértices en P^+ sea disjunto de todos los demás y del camino P' .

Supongamos que todo vértice en P' forma un gadget, menos un vértice v que está en P^+ . Definimos el conjunto D como el conjunto de todos los vértices en los gadgets, donde podemos notar que D abarca los vértices de gadgets que están en P' y los que no. Además, es claro que $|D| = \frac{5\lambda^4 n}{4}$.

Queremos evitar los vértices en D . Para ello definimos el hipergrafo $H^* = H[V(H) \setminus D]$, donde quitamos $\frac{5\lambda^4 n}{4}$ vértices y además en un peor caso quitamos $\frac{5\lambda^4}{2} \binom{n}{2}$ aristas positivas.

Sea $L^+(v) = \{xy \in V^{(2)}(H^*) : xyv \in E(H^*) \text{ y además } xyv \text{ tiene etiquetado positivo}\}$ el link graph positivo de v .

Notemos que $\delta(L^+(v)) \geq (5/6 + \lambda^*)n$, donde $\lambda^* = \lambda - \frac{5\lambda^4 n}{4}$ y además notemos que $|E(L^+(v))| \geq \frac{5}{12} \binom{n}{2} - \frac{5\lambda^4}{2} \binom{n}{2} \geq \frac{3}{8} \binom{n}{2}$. Luego, por el Teorema 7, existe todo árbol doble-estrella, es decir el árbol con la arista xy , $\frac{3n}{16}$ vecinos positivos para x y $\frac{3n}{16}$ vecinos positivos para y .

Luego, podemos notar que $|N_{L^+(v)}(x) \cap N_H(xy)| \geq (1/48 + \lambda)n - \frac{5\lambda^4 n}{4} > 4$ y a su vez, para poder usar el Teorema 7, debemos tener al menos $\frac{1}{3} \binom{n}{2}$ aristas en $L^+(v)$ lo cual lo tenemos dado que $\frac{5}{12} \binom{n}{2} - \frac{5\lambda^4}{2} \binom{n}{2} \geq \frac{3}{8} \binom{n}{2}$. Así, cada vértice tiene un gadget disjunto de los demás y del camino P .

Nuestro segundo objetivo es mostrar que todo vértice en P^- forma un gadget, donde las aristas inferiores del gadget son negativas. Cabe destacar que los vértices en P^- no son necesariamente balanceados. Sea $v \in P^-$ y $L(v) = \{xy \in V^{(2)}(H) : xyv \in E(H)\}$. Para que ello

ocurra debe existir un par $xy \in V^{(2)}(L(v))$ tal que $|N_H^-(xy) \cap N_{L(v)}(x)| > 0$, lo mismo para el vértice y . Dado que $|B^-| \geq \frac{\lambda^2}{2} \binom{n}{2}$, es decir, hay al menos $\frac{\lambda^2}{2} \binom{n}{2}$ pares xy en $L(v)$ tales que $|N_H^-(xy)| \geq n/6$, entonces podemos encontrar los gadgets ya que $|N_H^-(xy) \cap N_{L(v)}(x)| \geq \lambda n$, lo mismo para y .

Supongamos que debemos encontrar el último gadget. Debemos evitar al menos $\frac{5\lambda^4 n}{4}$ vértices, lo cual se traduce en que el grado de todo vértice en $L(v)$ se reduce en dicha cantidad. Luego, $\delta(L(v)) \geq (5/6 + \lambda)n - \frac{5\lambda^4 n}{4} \geq (5/6 + \lambda^2)n$. Por otro lado, perdemos al menos $\frac{5\lambda^4}{2} \binom{n}{2}$ aristas en $L(v)$, lo cual se traduce en que $|B^-| \geq \frac{\lambda^2}{2} \binom{n}{2} - \frac{5\lambda^4}{2} \binom{n}{2} \geq \lambda^3 \binom{n}{2}$, es decir, para encontrar el último gadget tenemos disponibles en $L(v)$ al menos $\lambda^3 \binom{n}{2}$ pares con grado negativo en H de al menos $n/6$. Así, para el último vértice se cumple que $|N_H^-(xy) \cap N_{L(v)}(x)| \geq \lambda^2 n$ y $|N_H^-(xy) \cap N_{L(v)}(y)| \geq \lambda^2 n$, por lo que tenemos todos los gadgets requeridos.

Es importante destacar que los gadgets en P^+ en el peor caso van a sumar cada uno $+1$ a la discrepancia y, por otro lado, los gadgets en P^- en el peor caso van a sumar cada uno -1 a la discrepancia.

Elegimos un camino A en 4 vértices u_1, u_2, u_3, u_4 , donde $u_1 u_2 u_3, u_2 u_3 u_4, u_1 u_2 v_1, u_1 v_1 v_2, u_3 u_4 v_\ell, u_4 v_\ell v_{\ell-1} \in E(H)$. Es decir, el camino A puede conectarse al camino P' . Este camino existe ya que podemos elegir los vértices como $u_1 \in N_H(v_1 v_2) \setminus V(P)$ y $u_4 \in N_H(v_{\ell-1} v_\ell) \setminus V(P)$. Luego como $|N_H(u_1 v_{\ell-1}) \cap N_H(u_3 u_4)| \geq \frac{2n}{3}$ y $|N_H(u_4 v_2) \cap N_H(u_1 u_2)| \geq \frac{2n}{3}$, en efecto existen las aristas en H . Ver Fig. 8.2.

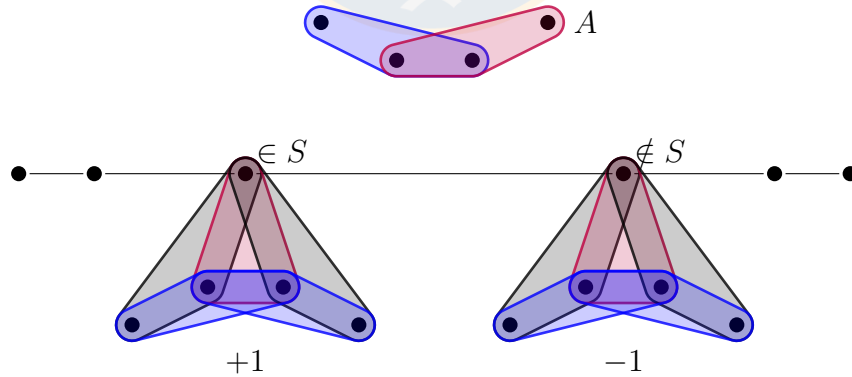


Fig. 8.2: Esquema caso 2

Definamos el hipergrafo $H' = H[V(H) \setminus V(P')]$. Por el Lema 1 sabemos que existe un ciclo hamiltoniano C que pasa por el camino A y por los caminos que forman gadgets con cada vértice en P' (Ver Fig. 8.3). Notemos que C es hamiltoniano en H' , mas no en H . Para ello debemos agregar los vértices faltantes.

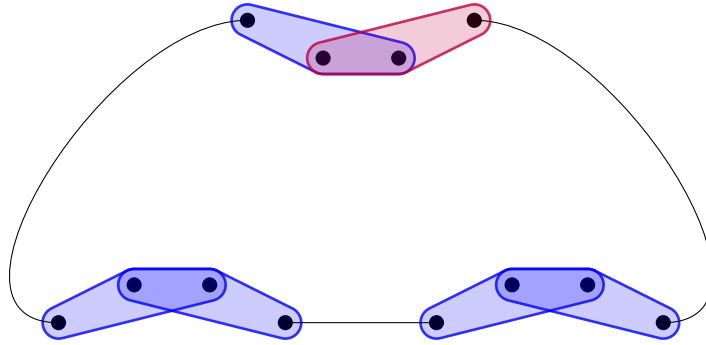


Fig. 8.3: Lema del Bosque Lineal caso 2

Si la discrepancia de C es $f(C) < \frac{\lambda^4 n}{8}$, entonces quitamos las aristas de A y usamos las aristas $u_1 u_2 v_1$, $u_1 v_1 v_2$, $u_3 u_4 v_\ell$, $u_4 v_\ell v_{\ell-1}$ para agregar el camino P' , formando así el ciclo C_1 hamiltoniano en H (Ver Fig. 8.4), con discrepancia

$$f(C_1) \leq f(C) - |P'| + 6 = -\frac{3\lambda^4 n}{8}$$

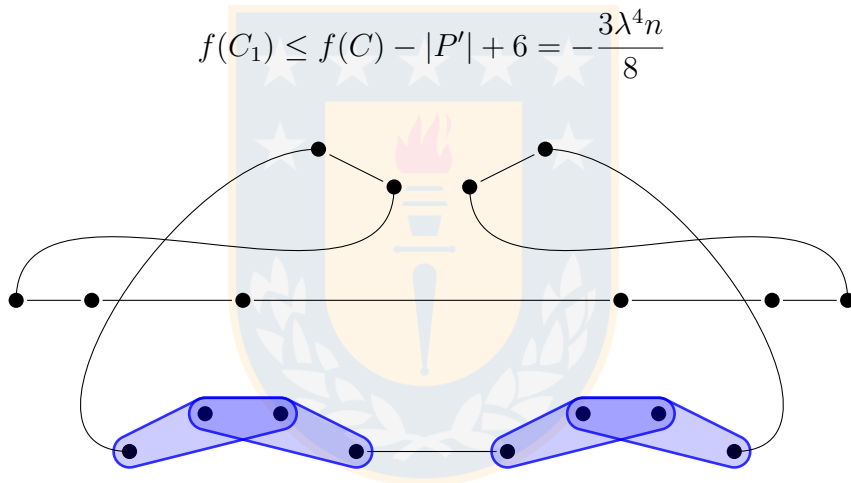


Fig. 8.4: Discrepancia inicial baja caso 2

Por otro lado, si $f(C) \geq \frac{\lambda^4 n}{8}$, formamos el ciclo hamiltoniano C_2 agregando los vértices de P' a través de sus gadgets (Ver Fig. 8.5), lo cual nos dejaría la discrepancia como

$$f(C_2) \geq f(C) + \frac{1}{3}|P'| - \frac{2}{3}|P'| = \frac{\lambda^4 n}{24}$$

Es importante recalcar que $|P^-| = 2|P'|/3$ y por su parte $|P^+| = |P'|/3$ en el peor caso, por lo cual eso explica lo que se suma y resta en la operación.

Entonces, H contiene un ciclo hamiltoniano con discrepancia al menos $\frac{\lambda^4 n}{24}$.

Caso 3: Al menos $n/2$ vértices son λ^4 -desbalanceados.

Sea S el conjunto de vértices desbalanceados que están en a lo más $\lambda^4 \binom{n}{2}$ aristas negativas. Podemos suponer que $|S| \geq n/2$. Sea $S' \subseteq S$ tal que $|S'| = \lfloor \frac{\lambda^4 n}{4} \rfloor$. Queremos formar dos gadgets

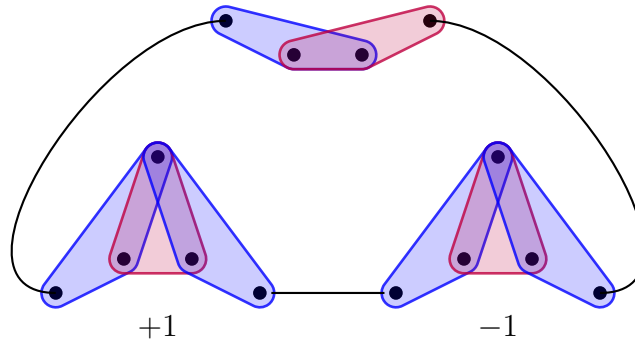


Fig. 8.5: Discrepancia inicial alta caso 2

con cada vértice en S' , los cuales queremos que tengan la siguiente estructura. Un gadget donde toda arista sea positiva y otro gadget donde las aristas inferiores sean negativas.

Supongamos que formamos los dos gadgets con cada vértice en S' , salvo un vértice $u \in S'$. Sea $L(u) = \{xy \in V^{(2)}(H) : xyu \in E(H)\}$. Como todo vértice en S' está en a lo más $\lambda^4 \binom{n}{2}$ aristas negativas, definimos como G al grafo inducido por aquellas aristas y notemos que $|E(G)| \leq \lambda^4 \binom{n}{2}$. Sea $W = \{v \in V(H) : |N_G(v)| \geq \lambda n/2\}$. Por el Lema 7, $|W| \leq 2\lambda^3 n$.

Definimos el hipergrafo $H' = H[V(H) \setminus W]$. Queremos que todo gadget sea disjunto con los demás y que los caminos que forman los gadgets con los vértices en S' , no estén en S' .

Ello nos deja que debemos evitar $\frac{\lambda^4 n}{4} + \frac{8\lambda^4 n}{4} + 2\lambda^3 n \leq \frac{17\lambda^3 n}{4}$ vértices, a su vez perdemos en el peor caso $\frac{17\lambda^3}{2} \binom{n}{2}$ aristas. Luego, como $\frac{\lambda^2 n}{2} \binom{n}{2} - \frac{17\lambda^3 n}{4} > 0$, entonces existe una arista xy en $L(u)$ tal que esta está en al menos $n/6$ aristas positivas, por lo cual existen los gadgets requeridos. A su vez, todo vértice en $L(u)$ tiene a lo más $\frac{\lambda n}{2}$ vecinos negativos, por lo que

$$|N_{H'}^+ \cap N_{L(u)}^+(x)| \geq \frac{\lambda n}{2}$$

Lo cual nos dice que existe el gadget completamente positivo. Este gadget en el peor caso, sumará 1, ya que al agregar el vértice a través de su camino superior, eliminamos dos aristas positivas y agregamos tres positivas. Por otro lado, y de forma análoga, podemos notar que

$$|N_{H'}^- \cap N_{L(u)}^-(x)| \geq \frac{\lambda n}{2}$$

Este gadget en el peor caso, sumará 5, ya que eliminamos dos aristas negativas y agregamos tres positivas.

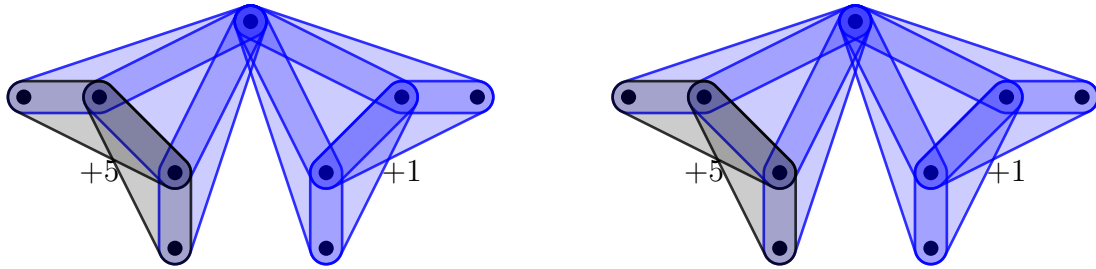


Fig. 8.6: Esquema caso 3. En esta figura, los colores representan símbolos. Las aristas negras son aristas negativas y las azules son positivas

Es importante notar que los gadgets si bien los formamos en H' , estos existen en H . Definimos el hipergrafo $H'' = H[V(H) \setminus S']$ e invocando el Lema 1, existe un ciclo hamiltoniano C en H'' que contiene todos los caminos que forman gadgets con los vértices de S' . Ahora, nos falta agregar los vértices en S' para formar el ciclo hamiltoniano en H . Ver Fig. 8.7.

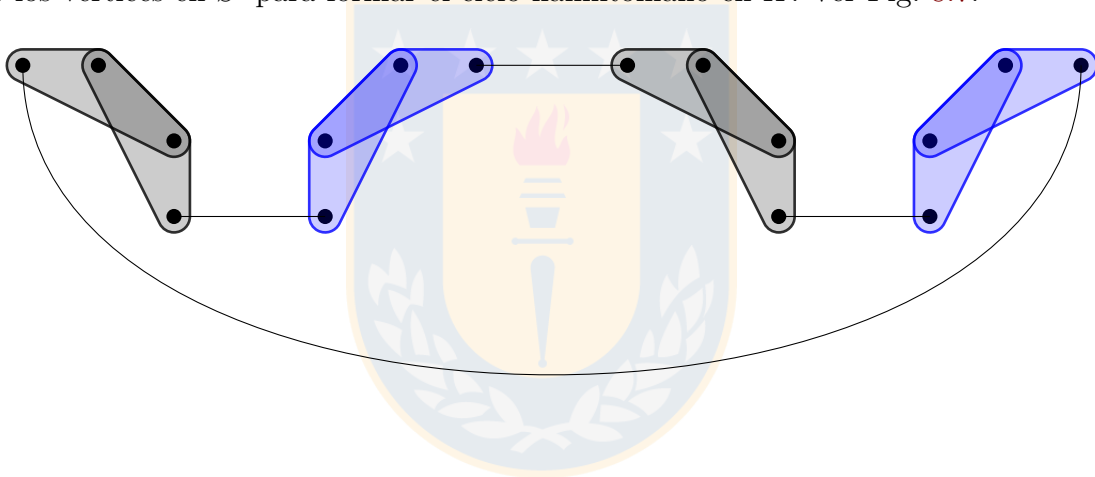


Fig. 8.7: Lema del Bosque Lineal caso 3

Por un lado, si la discrepancia del ciclo es $f(C) < -\frac{\lambda^4 n}{2}$, entonces agregamos los vértices de S' a través de los gadgets con aristas positivos (Ver Fig. 8.8) formando así el ciclo hamiltoniano C_2 con discrepancia

$$f(C_1) < f(C) + |S'| = -\frac{\lambda^4 n}{2} + \frac{\lambda^4 n}{4} = -\frac{\lambda^4 n}{4}$$

A su vez, si la discrepancia del ciclo es $f(C) \geq -\frac{\lambda^4 n}{2}$, entonces agregamos los vértices de S' a través de los gadgets con aristas negativas. Notemos que los gadgets negativos, si los elegimos, se eliminan 2 aristas etiquetadas como negativas y se agregan 3 positivas, lo cual nos deja +5 de discrepancia. (Ver Fig. 8.9). Luego, se forma el ciclo hamiltoniano C_2 con discrepancia:

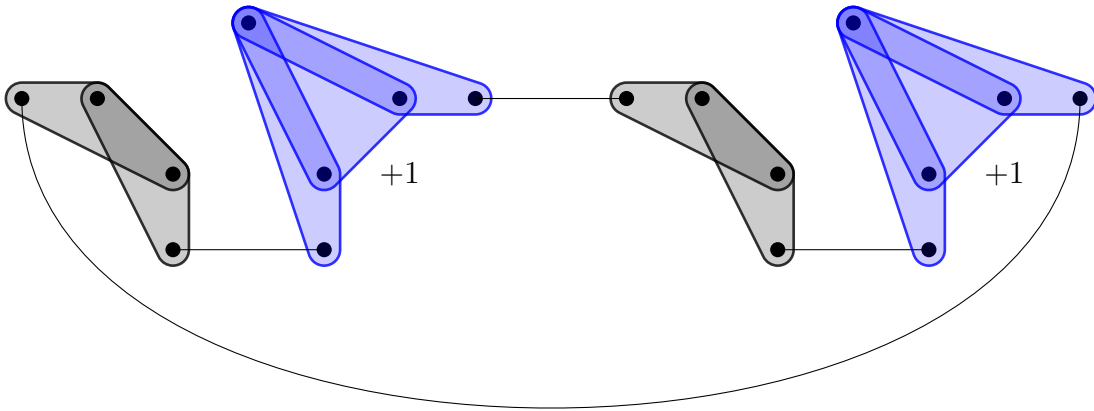


Fig. 8.8: Discrepancia inicial baja caso 3

$$f(C_2) \geq f(C) + 5|S'| = -\frac{\lambda^4 n}{2} + \frac{5\lambda^4 n}{4} = \frac{3\lambda^4 n}{4}$$

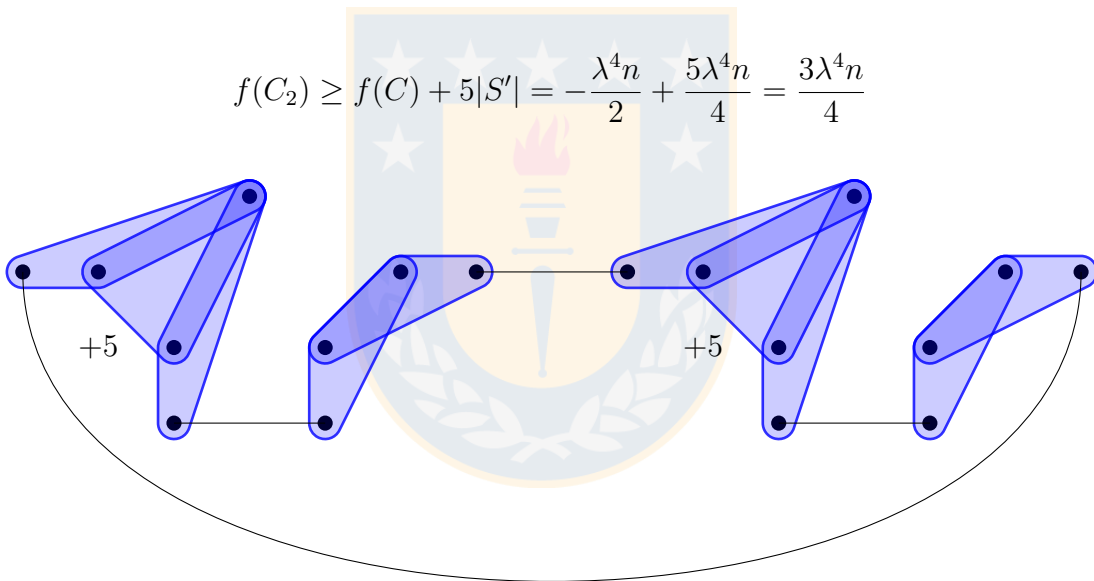


Fig. 8.9: Discrepancia inicial alta caso 3

Por lo cual existe un ciclo hamiltoniano en H con discrepancia al menos $\frac{\lambda^4 n}{4} \geq \frac{\lambda^4 n}{24}$.

□

8.2. Conclusiones y trabajo a futuro

Nuestro trabajo logró mostrar que existe una cota inferior del cogrado mínimo en un 3-grafo H para asegurar que este tenga ciclos hamiltonianos en abundancia. La pregunta obvia después de ello es si podemos encontrar una cota inferior. Nuestro segundo ejemplo, basado en el ejemplo hecho por Balogh et al. [Bal+20a], nos mostró una idea del cogrado. Nos gustaría responder si en efecto existe un 3-grafo con un etiquetado $f : E \rightarrow \{+1, -1\}$ tal que su cogrado mínimo sea $5n/6$ y este tenga discrepancia hamiltoniana 0 para así asegurar que la cota es la mejor posible.

Por otro lado, igualmente como hicieron generalizaciones del resultado de Balogh et al. con respecto a los etiquetados no binarios una investigación interesante sería saber si existe una cota superior para el cogrado mínimo que nos asegure una discrepancia hamiltoniana alta para etiquetados no binarios, es decir responder la siguiente pregunta:

Pregunta 1. *Sea $\lambda > 0$. Sea H un 3-grafo en n vértices con cogrado mínimo al menos $\delta_2(H) \geq \left(\frac{5}{9} + \frac{5}{9r} + \lambda\right)n$ y un etiquetado de aristas $f : E(H) \rightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$. ¿Existe un ciclo hamiltoniano con un desbalanceo de colores?*

En este caso, el desbalanceo se entiende como que haya mucho más de algunos colores que de otros. Lo cual se puede traducir como una generalización de la discrepancia.

Otra generalización interesante sería ver qué ocurre para hipergrafos k -uniformes, con $k \geq 3$. La mayoría de resultados mostrados en esta tesis están escritos convenientemente en sus casos particulares para 3-grafos, pero en realidad las demostraciones están hechas para k -grafos.

Pregunta 2. *Sea $\lambda > 0$. Sea H un k -grafo en n vértices con cogrado mínimo al menos $\delta_{k-1}(H) \geq \left(\left(1 - \frac{1}{2k}\right) + \lambda\right)n$ y un etiquetado de aristas $f : E(H) \rightarrow \{+1, -1\}$. ¿Existe un ciclo hamiltoniano con discrepancia alta?*

Bibliografía

- [All+17] Peter Allen, Julia Böttcher, Oliver Cooley y Richard Mycroft. «Tight cycles and regular slices in dense hypergraphs». *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 149 (2017), 30-100. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2017.01.003>.
- [AS16] Noga Alon y Joel H Spencer. «The probabilistic method». John Wiley & Sons, 2016.
- [Bal+20a] Jozsef Balogh, Bela Csaba, Yifan Jing y András Pluhár. «On the Discrepancies of Graphs». *The Electronic Journal of Combinatorics* 27 (abr. de 2020). DOI: [10.37236/8425](https://doi.org/10.37236/8425).
- [Bal+20b] József Balogh, Béla Csaba, András Pluhár y Andrew Treglown. «A discrepancy version of the Hajnal-Szemerédi theorem». *Comb. Probab. Comput.* 30 (2020), 444-459. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:211572958>.
- [BC86] J. Beck y W. W. L. Chen. «Note on irregularities of distribution». *Mathematika* 33.1 (1986), 148-163. DOI: [10.1112/S0025579300013966](https://doi.org/10.1112/S0025579300013966).
- [Bec17] Jozsef Beck. «Geometric discrepancy theory and uniform distribution». *Handbook of discrete and computational geometry*. Chapman & Hall, 2017.
- [Bes+21] Stéphane Bessy, Johannes Pardey, Lucas Picasarri-Arrieta y Dieter Rautenbach. «Unbalanced spanning subgraphs in edge labeled complete graphs». Preprint (2021). arXiv: [2107.09290](https://arxiv.org/abs/2107.09290) [math.CO]. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2107.09290>.
- [Bra21] Domagoj Bradač. «Powers of Hamilton Cycles of High Discrepancy Are Unavoidable». *Trends in Mathematics* (2021). DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2102.10912> [Focustolearnmore](#).
- [DS03] Benjamin Doerr y Anand Srivastav. «Multicolour Discrepancies». *Combinatorics, Probability and Computing* 12.4 (2003), 365-399. DOI: [10.1017/S0963548303005662](https://doi.org/10.1017/S0963548303005662).
- [FL22] Andrea Freschi y Allan Lo. «An oriented discrepancy version of Dirac's theorem». Preprint (2022). arXiv: [2211.06950](https://arxiv.org/abs/2211.06950) [math.CO]. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2211.06950>.
- [Fre+21] Andrea Freschi, Joseph Hyde, Joanna Lada y Andrew Treglown. «A note on colour-bias Hamilton cycles in dense graphs». Preprint (2021). arXiv: [2011.03948](https://arxiv.org/abs/2011.03948) [math.CO]. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2011.03948>.
- [Glo+20] Stefan Glock, Stephen Gould, Felix Joos, Daniela Kühn y Deryk Osthus. «Counting Hamilton cycles in Dirac hypergraphs». *Combinatorics, Probability and Computing* 30.4 (dic. de 2020), 631-653. DOI: [10.1017/s0963548320000619](https://doi.org/10.1017/s0963548320000619).
- [Haj70] András Hajnal. «Proof of a conjecture of P. Erdős». *Combin. Theory Appl.* 2 (1970), 601.
- [HLP22] Anastasia Halfpap, Nathan Lemons y Cory Palmer. «Positive co-degree density of hypergraphs». Preprint (2022). arXiv: [2207.05639](https://arxiv.org/abs/2207.05639) [math.CO].
- [JK21] Felix Joos y Marcus Kühn. «Fractional cycle decompositions in hypergraphs». *Random Structures and Algorithms* 61 (dic. de 2021). DOI: [10.1002/rsa.21070](https://doi.org/10.1002/rsa.21070).

- [KK99] Gyula Y. Katona y H. A. Kierstead. «Hamiltonian chains in hypergraphs». *Journal of Graph Theory* 30.3 (1999), 205-212. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0118\(199903\)30:3<205::AID-JGT5>3.0.CO;2-0](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199903)30:3<205::AID-JGT5>3.0.CO;2-0).
- [Kri+23] Tarun Krishna, Peleg Michaeli, Michail Sarantis, Fengling Wang y Yiqing Wang. «Discrepancies of subtrees». 2023. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2302.08557>.
- [McL05] Andrew McLennan. «The Erdős-Sós Conjecture for trees of diameter four». *Journal of Graph Theory* 49.4 (2005), 291-301. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/jgt.20083>. DOI: <https://doi.org/10.1002/jgt.20083>.
- [PS23] Simón Piga y Nicolás Sanhueza-Matamala. «Cycle decompositions in 3-uniform hypergraphs». *Combinatorica* (2023), 1-36. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00493-023-00001-2>.
- [Rei+19] Christian Reiher, Vojtech Rödl, Andrzej Ruciński, Mathias Schacht y Endre Szemerédi. «Minimum vertex degree condition for tight Hamiltonian cycles in 3-uniform hypergraphs». *Proceedings of the London Mathematical Society* 119.2 (feb. de 2019), 409-439. DOI: [10.1112/plms.12235](https://doi.org/10.1112/plms.12235).
- [RRS11] Vojtech Rödl, Andrzej Ruciński y Endre Szemerédi. «Dirac-type conditions for hamiltonian paths and cycles in 3-uniform hypergraphs». *Advances in Mathematics* 227.3 (2011), 1225-1299. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aim.2011.03.007>.
- [RSR08] Vojtech Rödl, Endre Szemerédi y Andrzej Rucinski. «An approximate Dirac-type theorem for k-uniform hypergraphs». *Combinatorica* 28 (2008), 229-260. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00493-008-2295-z>.
- [Spe85] Joel Spencer. «Six standard deviations suffice». *Transactions of the American mathematical society* 289.2 (1985), 679-706. DOI: <https://doi.org/10.2307/2000258>.
- [Wey16] Hermann Von Weyl. «Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins». *Mathematische Annalen* 77 (1916), 313-352. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01475864>.