



Universidad de Concepción  
Campus Los Ángeles  
Escuela de Educación

**APROPIACIÓN DE LA HABILIDAD DE MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE  
ESTUDIANTES DE TERCER AÑO DE ENSEÑANZA MEDIA EN LA CIUDAD DE  
LOS ÁNGELES**

Seminario de Título para optar al Grado Académico de Licenciado en Educación y al  
Título Profesional de Profesor de Matemática y Educación Tecnológica.

POR CONSTANZA LORETO AGURTO VEGA  
ÁNGELA VIVIANA TORRES SÁEZ

PROFESOR GUÍA  
DR. CRISTIAN GAMALIEL PÉREZ TOLEDO

COMISIÓN EVALUADORA  
Mg. en Física, Sr. Ramón Elías Muñoz.  
Mg. en Estadística, Sr. Víctor Jara Sánchez

Mayo 2020



Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.



### *Dedicatoria*

*A nuestras madres, Marcela Vega y Viviana Sáez; a nuestras abuelas Carmen Fernández y Ana Sáez; y hermana Florencia Antonio Vega. Cada una de ellas nos dieron ánimo de seguir y apoyo incondicional en este proceso y a lo largo de nuestras vidas.*

*No queremos dejar de mencionar a nuestros profesores de enseñanza media, quienes nos inspiraron en la elección de nuestra carrera universitaria, además de brindarnos su apoyo y consejos durante nuestra práctica profesional.*

*Y, por último, pero no menos importante a una persona que durante nuestra estadía en la universidad nos brindó su apoyo y consejo en todo momento, la señora Ernestina Flores, “tía Tina”. Tía gracias por todo, su apoyo, cariño y tecitos.*

*Constanza Agurto V. y Ángela Torres S*

## AGRADECIMIENTOS

*Antes que todo queremos expresar nuestros agradecimientos a quienes estuvieron brindándonos su apoyo a lo largo de estos años, en especial a nuestras familias, amigos y por qué no, nuestros profesores que siempre nos motivaron y animaron a no desistir de cumplir este sueño. También dar gracias a Dios por darnos las fuerzas necesarias para poder llegar a esta instancia de término de nuestra formación académica.*

*Agradecer de manera muy especial a nuestro profesor guía Cristian Pérez Toledo por su apoyo tanto durante nuestra estadía en la Universidad como en el desarrollo de este seminario, pero por sobre todo por su paciencia, consejos, críticas y por creer en nosotras.*

*También queremos agradecer a los profesores Víctor Jara y Ramón Elías por sus aportes a este trabajo, ya que no hubiese sido posible sin su ayuda.*

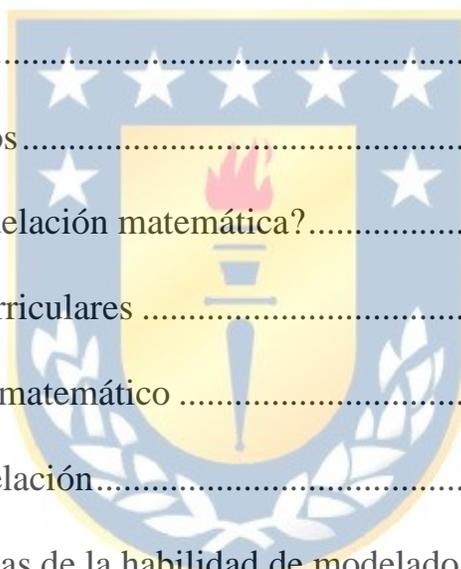
*No queremos dejar de mencionar a todos los docentes que en algún momento fueron parte de nuestra formación, ya que sin ellos no sería posible el llegar a este punto, en especial al profesor Sixto Martínez.*

## TABLA DE CONTENIDO

Dedicatoria .....	1
Agradecimientos .....	2
Índice de tablas.....	7
Índice de ilustraciones.....	8
Resumen .....	10
Abstract .....	12
Introducción .....	14
Capítulo I.....	16
Planteamiento del problema.....	16
1.2 Planteamiento del problema .....	17
1.3 Justificación de la investigación .....	19
1.4 Factibilidad de la investigación .....	20
Capítulo II .....	21
Propuesta de investigación.....	21

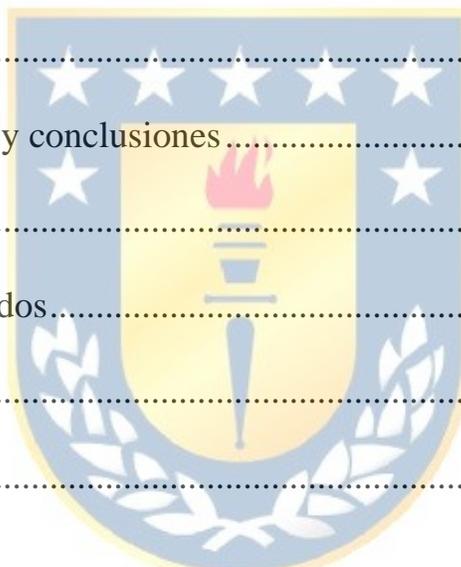


2.1	Objeto de estudio .....	23
2.2	Objetivos de investigación.....	23
2.2.2	Objetivos específicos .....	24
2.3	Preguntas de investigación .....	26
Capítulo III.....		29
Marco teórico .....		29
3.1	Estudios previos.....	29
3.2	¿Qué es la modelación matemática?.....	33
3.3	Habilidades curriculares .....	40
3.4	Modelamiento matemático .....	47
3.5	Ciclos de modelación.....	54
3.6	Subcompetencias de la habilidad de modelado matemático .....	68
Capítulo IV.....		77
Marco metodológico .....		77
4.1	Tipo de investigación .....	77
4.2	Diseño de investigación .....	78
4.3	Población y muestra .....	79
4.4	Variables de la investigación .....	80



4.4.1 Variables independientes .....	80
4.4.2 Variables dependientes .....	80
4.5 Descripción de las variables.....	81
4.5.1 Variables independientes. ....	81
4.5.2 Variables dependientes. ....	82
4.6 Descripción de los instrumentos .....	83
4.7 Aplicación de los instrumentos .....	85
Capítulo V .....	86
Análisis de datos y contrastación de hipótesis.....	86
5.1 Análisis de datos .....	86
5.1.1 Resultados primer problema: recarga de combustible.....	87
5.1.2 Resultados segundo problema: el fardo: utilidad de la mujer / figura geométrica .....	88
5.1.3 Resultados tercer problema: la florería.....	90
5.1.4 Resultados cuarto problema: problema de las copas .....	91
5.1.5 Resultados del quinto problema: mudanza .....	92
5.1.6 Resultados sexto problema: un día en el océano .....	93
5.2 Plan estadístico.....	94

5.3 Contrastación de hipótesis .....	95
5.3.1 Primera hipótesis de trabajo .....	95
5.3.2 Segunda hipótesis de trabajo.....	98
5.3.3 Tercera hipótesis de trabajo .....	100
5.3.4 Cuarta hipótesis de trabajo .....	111
Capítulo VI.....	123
Resultados, discusiones y conclusiones.....	123
6.1 Resultados .....	123
6.2 Discusión de resultados.....	126
6.3 Conclusiones .....	129
6.4 Sugerencias .....	132
Anexos .....	139
Anexo 1: Ejemplar de instrumento utilizado en la investigación .....	140
Anexo 2: Finalidad del instrumento por pregunta .....	143
Anexo 3: Tabla de cálculo de valores p .....	145
Anexo 4: Tablas de análisis de datos .....	147
Anexo 5: Reproducciones de los estudiantes.....	161



## ÍNDICE DE TABLAS

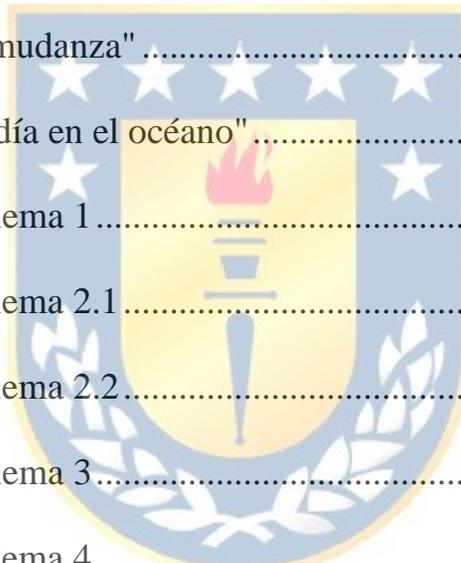
Tabla 1. Población y muestra.....	79
Tabla 2. Resultados primer problema .....	87
Tabla 3. Resultados segundo problema parte 1 .....	88
Tabla 4. Resultados segundo problema parte 2 .....	89
Tabla 5. Resultados tercer problema.....	90
Tabla 6. Resultados cuarto problema.....	91
Tabla 7. Resultados quinto problema.....	92
Tabla 8. Resultados sexto problema .....	93
Tabla 9. Tabla resumen resultados.....	124

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 .....	22
Figura 2 .....	38
Figura 3 .....	47
Figura 4 .....	49
Figura 5 .....	57
Figura 6 .....	58
Figura 7 .....	59
Figura 8 .....	62
Figura 9 .....	63
Figura 10 .....	65
Figura 11 .....	66
Figura 12 .....	67
Figura 13 .....	69
Figura 14 .....	76



Figura 15. Gráfico "Recarga de combustible" .....	101
Figura 16. Gráfico "Utilidad de la mujer" .....	103
Figura 17. Gráfico "Figura geométrica" .....	104
Figura 18. Gráfico "La florería" .....	105
Figura 19. Gráfico "Problema de las copas" .....	107
Figura 20. Gráfico "La mudanza" .....	108
Figura 21. Gráfico "Un día en el océano" .....	110
Figura 22. Gráfico problema 1 .....	112
Figura 23. Gráfico problema 2.1 .....	114
Figura 24. Gráfico problema 2.2 .....	115
Figura 25. Gráfico problema 3 .....	117
Figura 26. Gráfico problema 4 .....	118
Figura 27. Gráfico problema 5 .....	120
Figura 28. Gráfico problema 6 .....	121



## RESUMEN

La presente investigación tiene como propósito conocer las subcompetencias de la habilidad de modelamiento matemático presentes en los estudiantes de tercer año medio de la ciudad de Los Ángeles, en establecimientos particulares subvencionados. Para ello se considera una muestra 123 estudiantes de tres colegios particulares subvencionados de modalidad científico humanista.

El instrumento utilizado para la recolección de datos fue diseñado por las autoras de la presente investigación, donde cada pregunta apunta a una subcompetencia de la habilidad de modelamiento matemático. Dicho instrumento fue validado por docentes de la Universidad de Concepción, Campus Los Ángeles.

Tras el análisis de los resultados obtenidos, se puede observar que en su

mayoría los estudiantes se encuentran preparados para efectuar actividades de modelación matemática, pues poseen las subcompetencias necesarias para ello. Además, se evidenció que no existe diferencia significativa entre los estudiantes de los establecimientos a los cuales se les aplicó el instrumento, misma situación se observó al comparar la variable sexo.

**Palabras clave:** Actividades de modelación matemática, Modelamiento matemático, Habilidad, Subcompetencias.



## ABSTRACT

The purpose of this research is to know the subcompetences of the mathematical modeling ability. For the middle third-year students from the Los Angeles city in private subsidized establishments. For this, a sample of 123 students from three private-subsidized schools of scientific-humanistic modality is considered. eleventh year of schooling

The instrument used for data collection was designed by the authors of the present investigation, where each question points to a subcompetence of mathematical modeling ability. This instrument was validated by teachers from the University of Concepción, Los Angeles Campus.

After analyzing the results obtained, it can be seen that most of the students are prepared to carry out mathematical modeling activities, since they possess the necessary subcompetences for this, and it was also shown

that there is no significant difference between the students of the different establishments To which the instrument was applied, the same situation was observed when comparing the sex variable.

**Key words:** Mathematical modeling activities, Mathematical modeling, Ability, Subcompetences.



## INTRODUCCIÓN

A lo largo de la vida se está expuesto a diversas situaciones que, de forma directa o indirecta, involucran la matemática para su resolución. Algunas de estas situaciones pueden ser tan cotidianas como lo es la cantidad de agua utilizada en una ducha, tiempo que toma un viaje, entre otras.

En el ámbito escolar, el Ministerio de Educación se ha enfocado en modificar y renovar planes y programas de estudio, haciendo énfasis en el desarrollo de diferentes habilidades en los estudiantes, las cuales le son útiles para enfrentarse a problemáticas de la vida diaria. Dichas situaciones pueden tratarse de la resolución de algún problema, en el cual se entregan determinados datos y se debe realizar alguna operación o algoritmo. Pero, ¿qué sucede si se presenta alguna situación sin brindar mayor información que el acontecimiento? A esto se le conoce como una actividad de modelación matemática, que además corresponde a una habilidad que los estudiantes deben desarrollar a lo largo de su formación escolar.

La presente investigación consta de seis capítulos. En el primer capítulo se define el tema a investigar, la presentación del problema, además de su justificación y factibilidad. En el segundo capítulo se presenta la propuesta de investigación. En el tercer capítulo se presenta el marco teórico que respalda nuestra investigación. En el cuarto capítulo se presenta el marco metodológico empleado para la recolección de la información necesaria para nuestra investigación. En el quinto capítulo se analizan los datos obtenidos, después de la aplicación del instrumento construido a la población escogida, y se verifican las hipótesis planteadas. En el sexto y último capítulo se describen los resultados, la discusión de éstos, y se presentan las conclusiones y sugerencias. Finalmente se incluyen referencias bibliográficas y anexos

Se espera que esta investigación sirva a los establecimientos y docentes de matemática como antecedente en cuanto al desarrollo de las habilidades que poseen los estudiantes en la asignatura de matemática, ayudándolos a perfeccionarse en las estrategias de enseñanza/aprendizaje de esta disciplina y en especial la búsqueda de soluciones a diversas situaciones problemáticas

# CAPÍTULO I

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### 1.1 DEFINICIÓN DEL TEMA



La presente investigación busca conocer la apropiación de las subcompetencias presentes en la habilidad de modelamiento matemático en los estudiantes de tercer año de enseñanza media de la ciudad de Los Ángeles. Esta información permitirá a los docentes y establecimientos destinar el tiempo y los recursos necesarios para incorporar o enfatizar en procesos matemáticos de modelación.

El presente trabajo se sitúa en el área de la investigación educativa, pues su interés se basa en conocer la realidad escolar de los establecimientos de enseñanza media en cuanto a las subcompetencias de modelamiento

matemático.

La información se obtendrá mediante el diseño de un instrumento que identifique las diferentes subcompetencias del ciclo de modelación matemática utilizado con propósitos de diagnóstico y evaluación, a través de diversas situaciones de la vida real, de modo que se observe la apropiación de éstas en el desarrollo de cada problema.



## **1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

El Ministerio de Educación (MINEDUC) plantea que en los estudiantes se deben desarrollar ciertas habilidades, las cuales son: representar, resolver problemas, modelar, argumentar y comunicar; ya que, por muchos años en la educación chilena, la enseñanza de la matemática se ha tornado un desafío constante debido a lo complejo de esta ciencia.

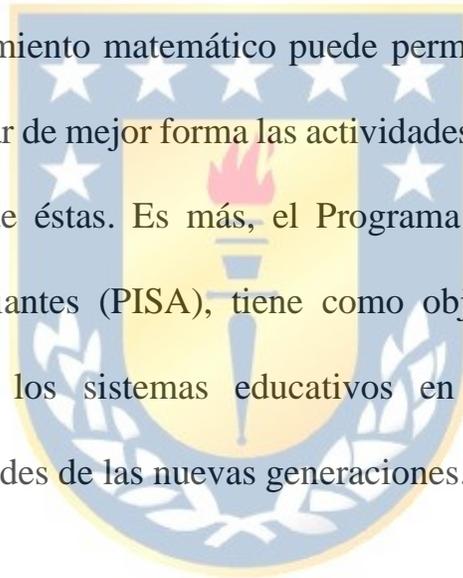
Es por lo anterior, que es necesario desarrollar diversas habilidades en los estudiantes, dentro de las cuales se encuentra la de modelamiento matemático. Los últimos resultados de la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA), la Agencia de Calidad de la Educación (2015) afirma que “no existen diferencias significativas entre los resultados de 2015 y las mediciones anteriores” (p. 74). Lo anterior evidencia que la educación en Chile se ha estancado en cuanto a su rendimiento.

Con la finalidad de revertir esta situación, el MINEDUC ha enfatizado en el desarrollo de las habilidades en los estudiantes. Cabe mencionar que el modelamiento matemático requiere que quienes realicen actividades de este carácter, desarrollen las subcompetencias básicas que éste conlleva.

A causa de lo anterior es necesario conocer las subcompetencias que los estudiantes de enseñanza media poseen al momento de enfrentarse a situaciones que involucren la habilidad de modelamiento matemático.

### 1.3 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

De acuerdo con la problemática planteada, esta investigación tiene relevancia, ya que el conocer el grado de apropiación en los estudiantes de la habilidad de modelamiento matemático puede permitir a los docentes y establecimientos afrontar de mejor forma las actividades de modelación para un desarrollo óptimo de éstas. Es más, el Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA), tiene como objetivo conocer cuán exitosos están siendo los sistemas educativos en la preparación de competencias y habilidades de las nuevas generaciones.



Por otro lado, Aravena (2011) basándose en los planteamientos de Blomhøj (2009), manifiesta con respecto a la modelación matemática aplicada para estudiantes de enseñanza media que “en la formación de profesores esta metodología de trabajo es poco considerada y se requiere de investigaciones que den cuenta de la potencia del modelaje en este nivel”. (p. 2). Lo anterior permite suponer que los docentes no consideran la importancia de esta habilidad, dando pie a cuestionar si los estudiantes se

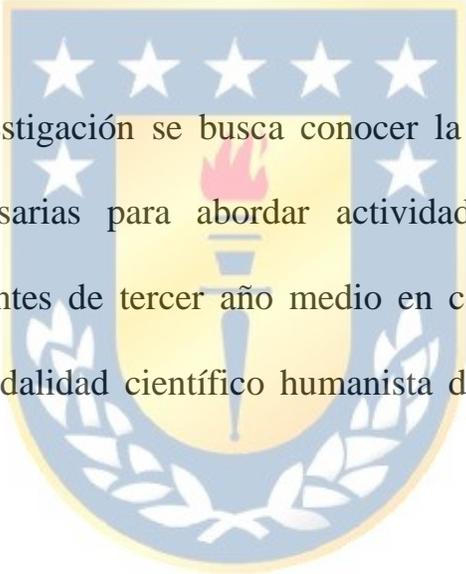
apropian del modelamiento matemático o si desarrollan alguna de las subcompetencias presentes en él.

#### **1.4FACTIBILIDAD DE LA INVESTIGACIÓN**

La presente investigación fue factible, ya que se contó con los recursos necesarios para poder realizarla. Además, se dispuso del acceso a diversos establecimientos educativos que permitieron la aplicación del instrumento a estudiantes de tercer año de enseñanza media de la ciudad de Los Ángeles.

## CAPÍTULO II

### PROPUESTA DE INVESTIGACIÓN



En la presente investigación se busca conocer la apropiación de las subcompetencias necesarias para abordar actividades de modelación matemática en estudiantes de tercer año medio en colegios particulares subvencionados de modalidad científico humanista de la ciudad de Los Ángeles.

El ciclo de modelación matemática que se presenta a continuación ilustra los elementos principales de esta investigación:

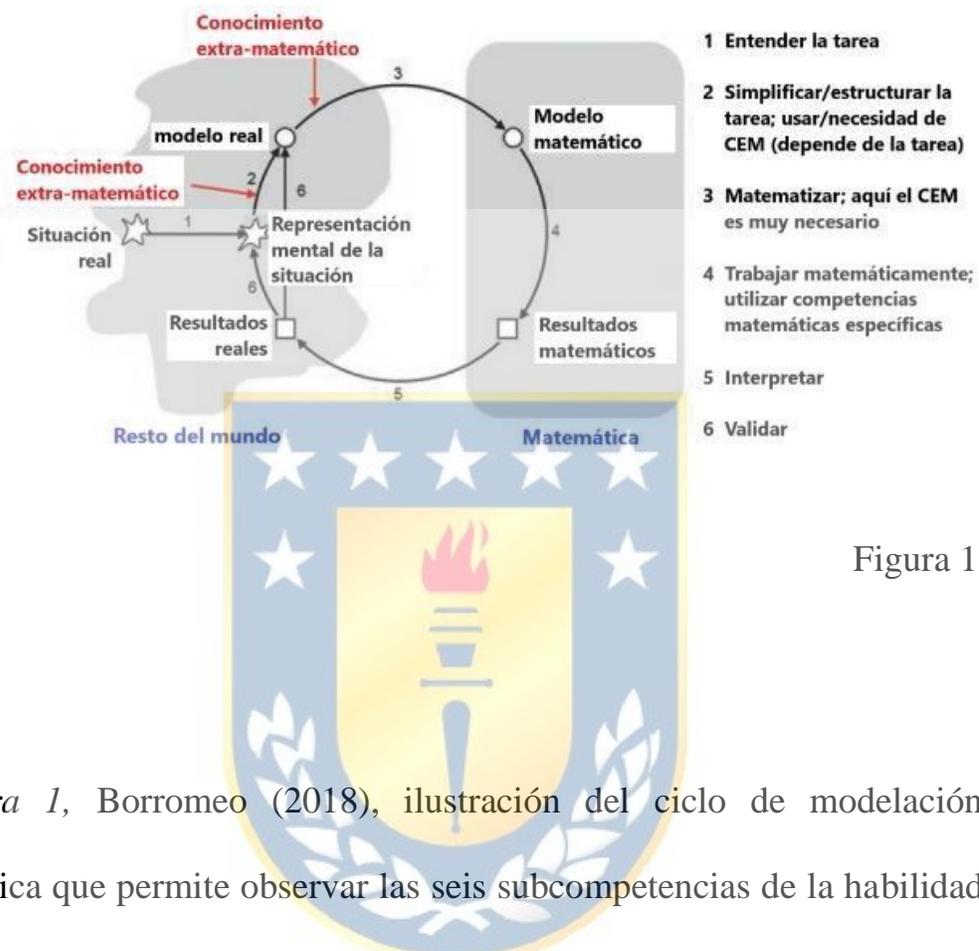


Figura 1

*Figura 1*, Borromeo (2018), ilustración del ciclo de modelación matemática que permite observar las seis subcompetencias de la habilidad de modelamiento matemático que deben poseer y desarrollar los estudiantes. Es relevante mencionar que este trabajo se encuentra dentro del ámbito de la Investigación Educativa.

## **2.1 OBJETO DE ESTUDIO**

Conocer las subcompetencias predominantes de la habilidad de modelamiento matemático en estudiantes de tercer año medio de colegios particulares subvencionados de la ciudad de Los Ángeles.

## **2.2 OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN**

### **2.2.1 OBJETIVO GENERAL**

Determinar el estado de la apropiación de las subcompetencias presentes en la habilidad de modelamiento matemático en los estudiantes de tercer año de enseñanza media de la ciudad de Los Ángeles.



## 2.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Construir un instrumento que permita determinar las subcompetencias de la habilidad de modelamiento matemático que poseen los estudiantes de tercer año medio.
2. Aplicar individualmente el instrumento construido a estudiantes de tercer año medio de colegios particulares subvencionados de la ciudad de Los Ángeles.
3. Determinar cuáles son las subcompetencias de la habilidad de modelamiento matemático que poseen los estudiantes.
4. Estimar qué porcentaje de estudiantes son capaces de construir un modelo de la situación a partir de una situación real.
5. Estimar qué porcentaje de estudiantes son capaces de simplificar un modelo de la situación para obtener un modelo real.

6. Estimar qué porcentaje de estudiantes son capaces de estructurar un modelo de la situación para obtener un modelo real.
7. Estimar qué porcentaje de estudiantes son capaces de matematizar un modelo real para obtener un modelo matemático.
8. Estimar qué porcentaje de estudiantes son capaces de trabajar matemáticamente un modelo matemático para obtener resultados matemáticos.
9. Estimar qué porcentaje de estudiantes son capaces de interpretar resultados matemáticos para obtener resultados reales.
10. Analizar los resultados obtenidos a partir de la aplicación del instrumento.
11. Comparar los resultados obtenidos por sexo.



12. Comparar los resultados obtenidos por establecimiento.

### 2.3 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN



1. ¿Cuáles son las subcompetencias de la habilidad de modelamiento matemático predominantes en los estudiantes?
2. ¿Cuáles son las subcompetencias de la habilidad de modelamiento matemático más deficientes en los estudiantes?
3. ¿Cuáles son las subcompetencias más relevantes al momento de llevar a cabo una actividad de modelación matemática?
4. ¿Poseen los estudiantes las subcompetencias necesarias para enfrentarse a una actividad que involucre el desarrollo de la habilidad de modelamiento matemático?

5. ¿Existe una diferencia relevante entre el porcentaje de aciertos entre hombres y mujeres de los establecimientos a los cuales se aplicó el instrumento?
6. ¿Existe una diferencia relevante entre el porcentaje de aciertos de los tres colegios a los que se les aplicó el instrumento?



## **2.4 HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN**

**H1:** Más del 70% de los estudiantes poseen las subcompetencias necesarias para enfrentarse a una actividad que involucre el desarrollo de la habilidad de modelamiento matemático.

**H2:** Más del 70% de los estudiantes logran resolver situaciones que involucran actividades de modelación matemática.

H3: No hay diferencia en los resultados obtenidos entre hombres y mujeres.

H4: No hay diferencia en los resultados obtenidos entre los establecimientos a los que se aplicó el test.



## CAPÍTULO III

### MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentarán algunos conceptos y antecedentes previos asociados a la problemática a tratar, con objeto de fundamentar de manera teórica la investigación realizada.



#### 3.1 ESTUDIOS PREVIOS

Existen variadas investigaciones centradas en la modelación matemática, cuyo enfoque se centra en su aplicación y los diversos ciclos que ésta conlleva, las cuales ponen énfasis en cómo se desarrolla y en los resultados que se obtienen.

A continuación, se hace referencia a algunos estudios realizados, donde se presenta la actividad de modelación como un proceso cíclico.

Una investigación titulada “Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática para conjunto generador y espacio generado”, realizada en la Universidad Autónoma de Barcelona por Andrea Cárcamo (2017), cuyos resultados evidenciaron que una innovación matemática basada en la modelación favorece a los estudiantes en la construcción de conjunto generador y espacio generado. En concreto, esta actividad, usada como herramienta para activar los conocimientos previos de los estudiantes cuya finalidad consiste en que ellos los aplicaran hacia la construcción de conjunto generador y espacio generado.

Otra investigación realizada en la Universidad del Bio-Bio y Universidad San Sebastián, Chile, por Leighton E. (2013), titulada “Modelización Matemática. Una Experiencia con Estudiantes Secundarios”, da a conocer resultados obtenidos de estudiantes de secundaria en la asignatura de matemática, en la que el proceso de trabajo de la actividad matemática se sitúa en la modelación, permitiendo articular las secuencias de clases.

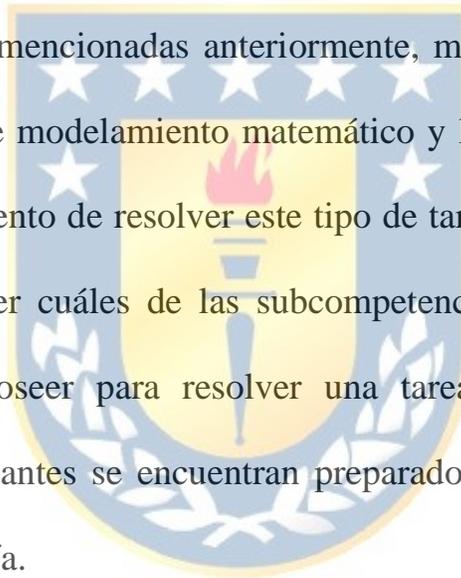
La investigación titulada “Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile”, realizada en la Universidad Católica del Maule, Aravena M. (2007), cuyo objetivo es determinar que mediante un proceso de formación algebraico-geométrico- analítico se pueden controlar las dificultades y obstáculos que presentan los estudiantes con respecto a la integración del contenido matemático con actividades de aula. En el cual afirma:



... a partir de contenidos matemáticos específicos, se analiza el perfil inicial de los estudiantes, las capacidades que desarrollan y el cambio en las concepciones matemáticas cuando se enfrentan a procesos de modelización. Siguiendo una metodología de corte cualitativa y cuantitativa, se diseñó un plan de análisis, que permitió un estudio pormenorizado de las producciones del grupo objeto de experimentación. A nivel de conclusiones se destacan dificultades y obstáculos detectados en el trabajo con problemas en el pretest. En

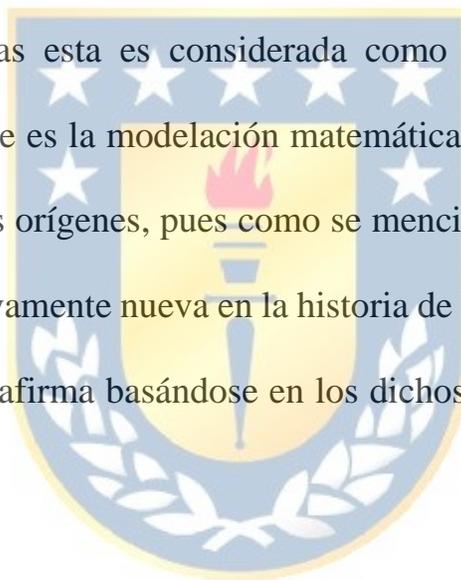
contraste, el pos-test muestra que estas dificultades pueden ser reguladas cuando se relaciona la matemática con las distintas áreas del saber y con la vida cotidiana.” (Aravena M., 2007, p.7)

Las investigaciones mencionadas anteriormente, manifiestan en qué se basan las actividades de modelamiento matemático y las implicancias que éstas conllevan al momento de resolver este tipo de tareas, lo cual sirve de motivación para conocer cuáles de las subcompetencias son las que los estudiantes deberían poseer para resolver una tarea de modelación y determinar si los estudiantes se encuentran preparados para enfrentarse a desafíos de esta categoría.



### 3.2 ¿QUÉ ES LA MODELACIÓN MATEMÁTICA?

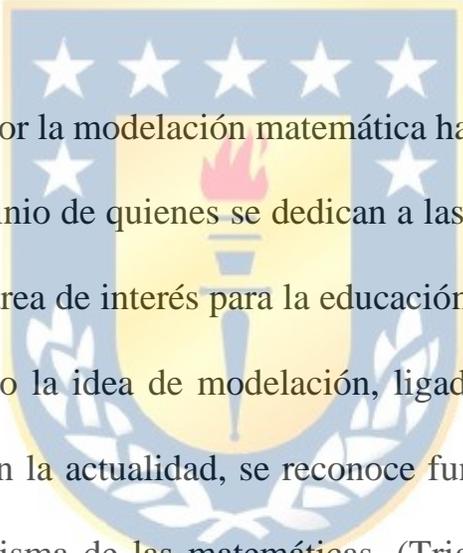
La modelación matemática desde la perspectiva de la educación puede ser considerada como una metodología de enseñanza, pero desde el punto de vista de las matemáticas esta es considerada como una actividad. Para comenzar a describir que es la modelación matemática como una actividad es necesario conocer sus orígenes, pues como se mencionó en las secciones anteriores, ésta es relativamente nueva en la historia de la matemática, es así como Trigueros (2009) afirma basándose en los dichos de Israeli (1996) lo siguiente:



... A través de los años se ha dado un procedimiento que puede denominarse matematización de la realidad o modelación matemática que consiste en el uso de las matemáticas para describir y analizar al mundo, para desarrollar técnicas y tecnologías que intervienen sobre éste

activamente. (p. 77)

De acuerdo con estos autores,



Hoy el interés por la modelación matemática ha pasado a ser de sólo un dominio de quienes se dedican a las matemáticas aplicadas a un área de interés para la educación matemática. En este contexto la idea de modelación, ligada a la visión predominante en la actualidad, se reconoce fundamental en la enseñanza misma de las matemáticas. (Trigueros, 2009, p.77)

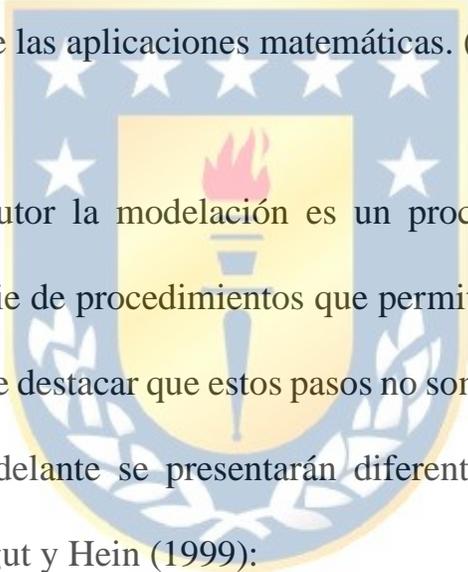
La modelación matemática como proceso se concreta mediante ciertas estrategias, como afirma Villa J. (2007):

La construcción de un modelo no se hace de manera automática ni inmediata, por el contrario, requiere de cierto periodo de tiempo en el cual el modelador pone en juego sus conocimientos matemáticos, el conocimiento del contexto y de la situación y sus habilidades para describir, establecer y representar las relaciones existentes entre las “cantidades”, de tal manera que se pueda construir un nuevo objeto matemático.” (p.67)

De acuerdo con este autor, Biembengut y Hein (1999) definen la actividad de modelación matemática de la siguiente manera:

La modelación matemática es un proceso involucrado en la obtención de un modelo matemático para dar solución a un problema o situación de la vida real. Un modelo matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, en cierto

modo, el fenómeno en cuestión. El modelo permite no sólo obtener una solución particular, sino también servir de soporte para otras aplicaciones o teorías. En la práctica, dicho conjunto de símbolos y relaciones puede estar vinculado a cualquier área de la matemática, en particular, a los instrumentos fundamentales de las aplicaciones matemáticas. (p.20)



Como afirma este autor la modelación es un proceso, por lo que es necesario seguir una serie de procedimientos que permitirán dar solución al problema principal. Cabe destacar que estos pasos no son necesariamente los únicos a seguir, más adelante se presentarán diferentes técnicas de esta índole. Según Biembengut y Hein (1999):

El proceso de modelación involucra una serie de procedimientos, como la elección del tema; reconocimiento de la situación/problema → delimitación del problema; familiarización con el tema que va a ser modelado →

referencial teórico; formulación del problema → hipótesis;  
formulación de un modelo matemático → desarrollo;  
resolución del problema a partir del modelo → aplicación;  
interpretación de la solución y validación del modelo →  
evaluación. (p.12)

De acuerdo con esto, para elaborar un modelo matemático es necesario que el modelador posea ciertas características, que según Biembengut y Hein (1999) deben ser “conocimientos tanto matemáticos como no matemáticos, además de una buena dosis de intuición y creatividad para interpretar el contexto y discernir cuáles son las variables involucradas” (p.13).

Los autores Sierra, Blanco, Garcia-Rafii y Gómez (2011), definen la modelación matemática, basándose en tres autores diferentes, uno de estos es Niss (1989) afirmando que “la modelización matemática se define como el arte de aplicar las matemáticas a la vida real” (p.3). Estos autores concuerdan en el hecho que la complejidad de la modelación matemática radica en el proceso, pues este requiere de diversas facultades que no solo reside en las matemáticas.

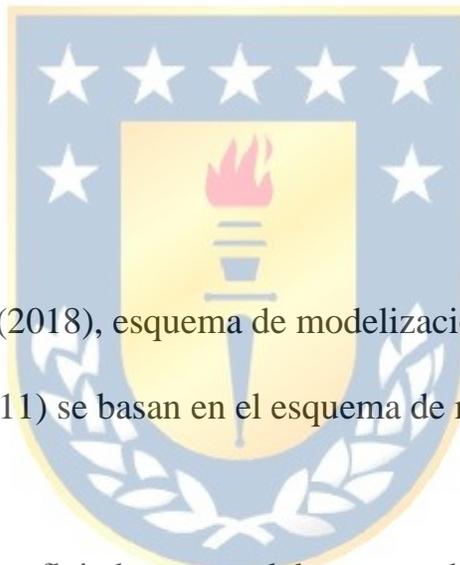
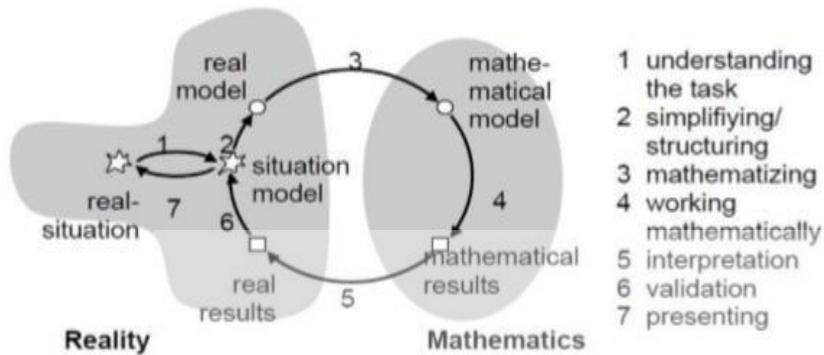


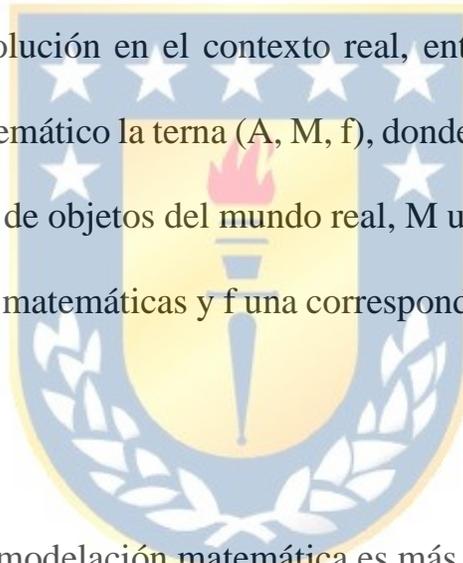
Figura 2

*Figura 2*, Borromeo (2018), esquema de modelización planteado por Blumm, Sierra et al. (2011) se basan en el esquema de modelización planteado por Blumm.

Este esquema (fig. 2) refleja los pasos del proceso de modelización en el que Sierra et al. (2011) describen en base a los dichos de Niss (1989):

... acortándolo en 5 pasos de los 7, se estructura como sigue:

- a. simplificar el problema real a un modelo real
- b. matematizar el modelo real a un modelo matemático
- c. buscar una solución, trabajando matemáticamente, a partir del modelo matemático
- d. interpretar la solución del modelo matemático
- e. validar la solución en el contexto real, entendiendo por modelo matemático la terna  $(A, M, f)$ , donde A representa un conjunto de objetos del mundo real, M un conjunto de expresiones matemáticas y f una correspondencia entre A y M. (p. 4)



Dicho de otra forma, la modelación matemática es más que una herramienta que permita tematizar la realidad, es una estrategia que nos permite entender la matemática a través del mundo en el que se prepara a los aprendices a ver con una actitud diferente la matemática con respecto al mundo real.

### 3.3 HABILIDADES CURRICULARES

En el currículum chileno en matemáticas se ha propuesto una esquematización sobre los contenidos, actitudes y habilidades, pretendiendo que los estudiantes se desarrollen de la manera más íntegra posible. Con respecto a esto, el MINEDUC (2015) destaca lo siguiente:



...el aprendizaje involucra no solo el saber, sino también el saber hacer. Por otra parte, la continua expansión y la creciente complejidad del conocimiento demandan cada vez más capacidades de pensamiento que permitan, entre otros aspectos, usar la información de manera apropiada y rigurosa, examinar críticamente las diversas fuentes de información disponibles, adquirir y generar nuevos conocimientos y aplicarlos de manera pertinente. (p.9)

En este sentido,

... el papel de la enseñanza de las matemáticas es desarrollar las habilidades que generan el pensamiento matemático, sus conceptos y procedimientos básicos, con el fin de comprender y producir información representada en términos matemáticos. Se pretende que las y los estudiantes desarrollen el razonamiento lógico, que implica seleccionar, ordenar y clasificar consistentemente de acuerdo con criterios bien definidos, así como seguir reglas e inferir resultados. En este ciclo, se pretende además que avancen progresivamente hacia el trabajo deductivo y el pensamiento abstracto, dándole sentido a sus experiencias a partir de premisas o símbolos matemáticos. (MINEDUC, 2015, p. 95)

Es por lo anterior que se pone énfasis en cuatro competencias consideradas básicas para favorecer el aprendizaje de parte los estudiantes,

estos son representar, resolver problemas, modelar, y argumentar y comunicar, las cuales se interrelacionan jugando un rol fundamental para adquirir destrezas y nuevos conceptos en la aplicación de estos. Dicho esto, para efecto de esta investigación se interioriza en las bases curriculares donde describen estas habilidades, en específico la de modelamiento matemático, en la que se considera que:



.... modelar es construir un modelo físico o abstracto que capture parte de las características de una realidad para poder estudiarla, modificarla y/o evaluarla; asimismo, ese modelo permite buscar soluciones, aplicarlas a otras realidades (objetos, fenómenos, situaciones, etc.), estimar, comparar impactos y representar relaciones. Así, las alumnas y los alumnos aprenden a usar variadas formas para representar datos, y a seleccionar y aplicar los métodos matemáticos apropiados y las herramientas adecuadas para resolver problemas. De este modo, las ecuaciones, las funciones y la

geometría cobran un sentido significativo para ellas y ellos.

(MINEDUC, 2015, p. 98)

En definitiva, “la acción de modelar es vista como un proceso, en el cual el estudiante transita por momentos para el desarrollo de la habilidad de modelar” (Huincahue. J,2017, p. 5).

Según el MINEDUC (2015),



Al construir modelos, los alumnos y las alumnas descubren regularidades o patrones y son capaces de expresar esas características fluidamente, sea con sus propias palabras o con un lenguaje más formal; además, desarrollan la creatividad y la capacidad de razonamiento y de resolución de problemas, y encuentran soluciones que pueden transferir a otros contextos.

Se espera que, en este ciclo, el o la estudiante:

- Use modelos y entienda y aplique correctamente las reglas que

los definen.

- Seleccione modelos, comparándolos según su capacidad de capturar fenómenos de la realidad.
- Ajuste modelos, cambiando sus parámetros o considerando buenos parámetros de un modelo dado.

La capacidad de modelar se puede aplicar en diversos ámbitos y contextos que involucren operaciones matemáticas con números reales y/o con expresiones algebraicas, análisis de datos, probabilidad de ocurrencia de eventos y sistemas geométricos.

Por otro lado, usar metáforas de experiencias cercanas ayuda a las y los estudiantes a comprender conocimientos matemáticos; por ejemplo: explicar las funciones como una máquina que transforma los números, u ordenar los números en una recta y explicar la adición como pasos hacia la derecha de la recta. En el uso de metáforas se reconocen tres ventajas para el aprendizaje: relacionar experiencias personales con el conocimiento formal, potenciar la comprensión, memorización y explicación de conceptos matemáticos, y

brindar a las expresiones matemáticas un significado cercano.

(p.98)

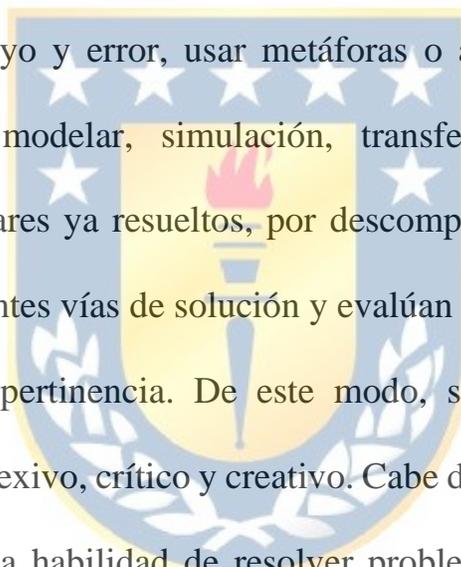
En otras palabras, el currículum plantea el modelamiento matemático como una habilidad que permite que los estudiantes logren desenvolverse en la mayor cantidad de disciplinas posibles, tanto en las matemáticas como en otras áreas, además de generar en ellos un pensamiento crítico que les permita tomar decisiones e influir democráticamente en la sociedad que pertenecen.



Cabe mencionar que existe una estrecha relación entre modelación matemática y resolución de problemas, generando confusión en sus definiciones. En base a esto el MINEDUC (2015) afirma lo siguiente:

Aprender a resolver problemas es tanto un medio como un fin en la adquisición de una buena educación matemática. Se habla de resolver problemas (en lugar de ejercicios) cuando la

o el estudiante logra solucionar una situación problemática dada, contextualizada o no, sin que se le haya indicado un procedimiento a seguir. Para ello, necesita usar estrategias, comprobar y comunicar: los alumnos y las alumnas experimentan, escogen o inventan y aplican diferentes estrategias (ensayo y error, usar metáforas o algún tipo de representación, modelar, simulación, transferencia desde problemas similares ya resueltos, por descomposición, etc.), comparan diferentes vías de solución y evalúan las respuestas obtenidas y su pertinencia. De este modo, se fomenta el pensamiento reflexivo, crítico y creativo. Cabe destacar que la importancia de la habilidad de resolver problemas debe ser desarrollada y aplicada frecuentemente en problemas tanto rutinarios como no rutinarios. En este contexto, muchas veces lo que más aporta al aprendizaje de las y los estudiantes no es la solución de un problema matemático, sino el proceso de búsqueda creativa de soluciones. (p.97)



### 3.4 MODELAMIENTO MATEMÁTICO

Según Salett (1999), “Modelaje Matemático es el proceso involucrado en la obtención de un modelo. Este proceso, desde cierto punto de vista, puede ser considerado artístico, ya que, para elaborar un modelo, además del conocimiento matemático, el modelador debe tener una dosis significativa de intuición-creatividad para interpretar el contexto, discernir qué contenido matemático se adapta mejor y tener sentido lúdico para jugar con las variables involucradas.” (p. 2)

De lo anterior la misma autora afirma que “matemática y realidad son dos conjuntos disjuntos y el modelaje es un medio de conjugarlos.” (p.2)

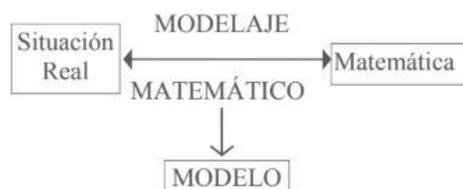


Figura 3

*Figura 3, Salett (1999), Esquema del proceso de modelaje matemático.*

De acuerdo con los dichos de Salett (1999), actualmente la matemática está siendo utilizada en fenómenos tanto microscópicos como macroscópicos. Ahora bien, el modelamiento matemático es útil para representar situaciones reales con instrumental matemático - modelo matemático - involucra una serie de procedimientos, que consta de tres etapas, divididas a su vez en cinco subetapas.

A continuación, se plantean las etapas y subetapas ya mencionadas en el párrafo anterior, según lo descrito por Salett (1999):

- 1) Interacción con el asunto
  - a) Reconocimiento de la situación problema;
  - b) Familiarización con el asunto que va a ser modelo-investigación
- 2) Construcción matemática

- a) Formulación del problema-hipótesis
  - b) Resolución del problema en términos del modelo
- 3) Modelo matemático
- a) Interpretación de la solución-convalidación.

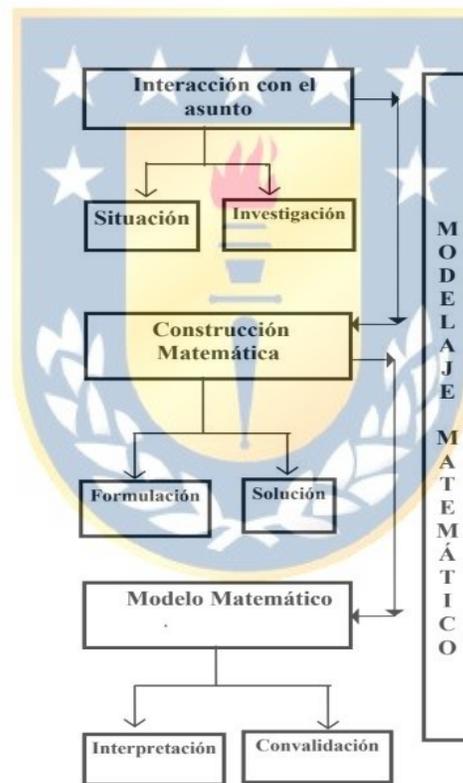


Figura 4

*Figura 4, Salett (1999), diagrama de proceso de modelaje matemático.*

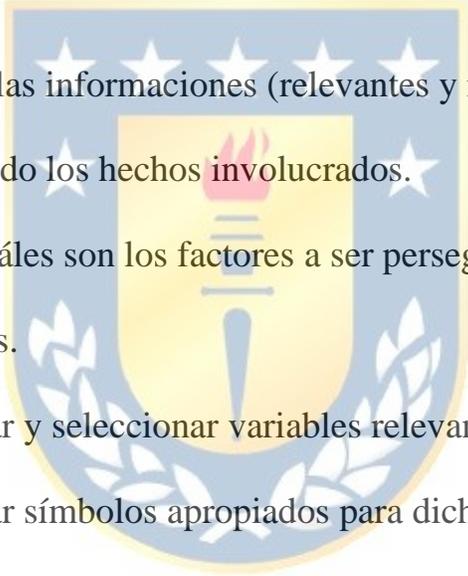
Este diagrama contiene las siguientes subetapas que se describen a continuación:

Para una mejor comprensión se presenta la descripción de cada una de las etapas y subetapa:

1. Interacción con el asunto: Una vez delineada la situación que se pretende estudiar, debe hacerse una investigación sobre el asunto, tanto indirectamente (a través de libros y revistas especializadas) como directamente in situ (a través de datos experimentales obtenidos con especialistas del área). Aunque se haya dividido esta etapa en dos subetapas, los límites entre ambas no son tajantes: el reconocimiento de la situación-problema se torna cada vez más claro, a medida que se van conociendo los datos.
2. Construcción Matemática: Ésta es la etapa más compleja y desafiante. Está subdividida en formulación del problema y

solución. Es aquí que se da la “traducción” de la situación-problema al lenguaje matemático. Intuición y creatividad son elementos indispensables en esta etapa.

En la formulación del problema-hipótesis, es necesario:

- 
- Clasificar las informaciones (relevantes y no relevantes) identificando los hechos involucrados.
  - Decidir cuáles son los factores a ser perseguidos, planteando la hipótesis.
  - Generalizar y seleccionar variables relevantes.
  - Seleccionar símbolos apropiados para dichas variables.
  - Describir las relaciones que se establezcan, en términos matemáticos.

Se debe concluir esta subetapa con un conjunto de expresiones aritméticas y fórmulas, o ecuaciones algebraicas, o gráficas, o representaciones, o programa computacional que nos lleven a la solución o nos permitan deducir una.

En la solución del problema en términos del modelo la situación pasa a ser resuelta o analizada con el “instrumental” matemático que se dispone. Esto requiere un aguzado conocimiento sobre las entidades matemáticas usadas en la formulación.

3. Modelo Matemático: Para poder concluir el modelo, se torna necesario un chequeo para así comprobar en qué nivel éste se aproxima a la situación-problema traducida y a partir de ahí, poder utilizarlo.

De esta forma, se hace primero la interpretación del modelo y posteriormente, se comprueba la adecuación-convalidación.

Para interpretar el modelo se analizan las implicaciones de la solución, derivada del modelo que está siendo investigado. Entonces, se comprueba la adecuación del mismo, volviendo a la situación-problema investigada, evaluando cuán significativa y relevante es la solución.

Si el modelo no atiende a las necesidades que lo generó, el proceso debe ser

retomado en la segunda etapa cambiando hipótesis, variables, etc.

Es importante al concluir el modelo, elaborar un informe en el que se comuniquen todas las facetas del desarrollo, con el fin de propiciar su uso.

(Salett, 1999, p. 3)

De lo anterior, se tiene que la habilidad de modelamiento matemático, a su vez, requiere del desarrollo de subcompetencias como construir, matematizar e interpretar, las cuales permitirán dar una solución a las problemáticas planteadas.

Ahora bien, Bosch et. al. (2006) basándose en dichos de la OCDE (2003) afirman:

En la actualidad, en la investigación en educación matemática se considera el término “modelización” de manera más rica y fértil, configurando un amplio y heterogéneo dominio de investigación que no ha dejado de crecer en los últimos años.

Tanto desde la investigación en educación matemática como desde diferentes segmentos de la sociedad, es usual oír hablar de la necesidad de relacionar los contenidos matemáticos con ciertos aspectos de la vida real y sobre la necesidad de desarrollar la “competencia modeladora” como una competencia matemática básica de cualquier ciudadano, como recoge el reciente informe mundial PISA realizado por la OCDE. (p.43)



### **3.5 CICLOS DE MODELACIÓN**

Ciertamente dentro de la literatura observada en los diferentes estudios que respaldan esta investigación se presentan diversos ciclos de modelación. Borromeo (2018) respalda esto anunciando que “These cycles are different, because they are dependent on various perspectives on modeling and, in some cases, whether complex or non-complex tasks are used (Borromeo

Ferri 2006)”. (p.20)

Actualmente, la mayoría de las investigaciones debido a la complejidad de la modelación matemática, se centran en los ciclos, pues son considerados como una herramienta de aprendizaje y enseñanza tanto para docentes como para los estudiantes

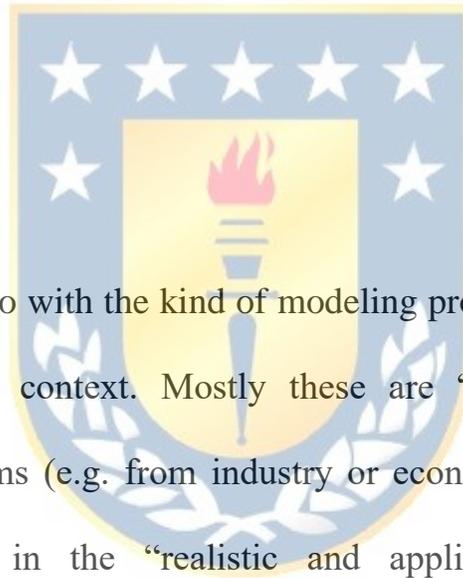
Borromeo (2018) clasifica los diferentes ciclos de modelación según sus propósitos, objetivos de investigación y práctica, de la siguiente manera:

- Ciclo de modelación a partir de las matemáticas aplicadas
- Ciclo de modelación didáctico o pedagógico
- Ciclo de modelación psicológico
- Ciclo de modelación diagnóstico / ciclo de modelación desde una perspectiva cognitiva

De acuerdo con esta clasificación se asocian diversos ciclos que encajan a sus determinadas características, las cuales son sugeridas por Borromeo (2018).

## Ciclo de modelación a partir de las matemáticas aplicadas

Esta clasificación surge a partir de la característica que se destaca de todos los ciclos de modelación los cuales son la situación real y el modelo matemático, como afirma Borromeo (2018):



This is partly to do with the kind of modeling problems which are used in this context. Mostly these are “realistic and complex” problems (e.g. from industry or economics) in the sense described in the “realistic and applied modeling perspective” mentioned earlier. The complexity of the real problems influences the number of phases within the modeling cycle to some extent, because there is no need to make more distinctions. (p. 21)

Uno de los ciclos con estas características es el ciclo de modelación de Pollak, 1979

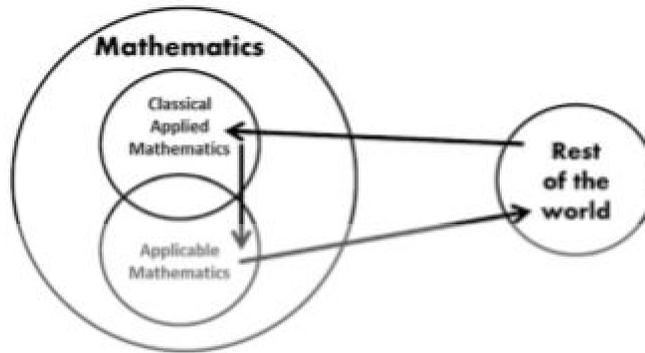


Figura 5

*Figura 5*, Borromeo (2018), ciclo de modelación de Pollak, este proceso presenta la relación que hay entre, matemática aplicada clásica, matemática aplicable y el resto del mundo, es decir un traspaso entre la matemática y la realidad. Para entender lo que significa el modelamiento matemático, es muy útil e importante que estos dos mundos se presenten por separado.

### Ciclo de modelación didáctico o pedagógico

En este caso se diferencian la situación real y el modelo matemático como dos mundos, al igual que en el modelo de Pollak. De acuerdo con Borromeo (2018) desde un punto de vista didáctico y pedagógico, este tipo de ciclos se

considera una herramienta significativa para modelar lecciones, en particular debido a los cuatro pasos que este tipo de ciclos posee y que se encuentran claramente organizados.

A continuación, se presenta el ciclo de modelación de Blum (1996) y Kaiser (1995), el cual fue uno de los primeros que encajaron en el punto de vista didáctico pedagógico.

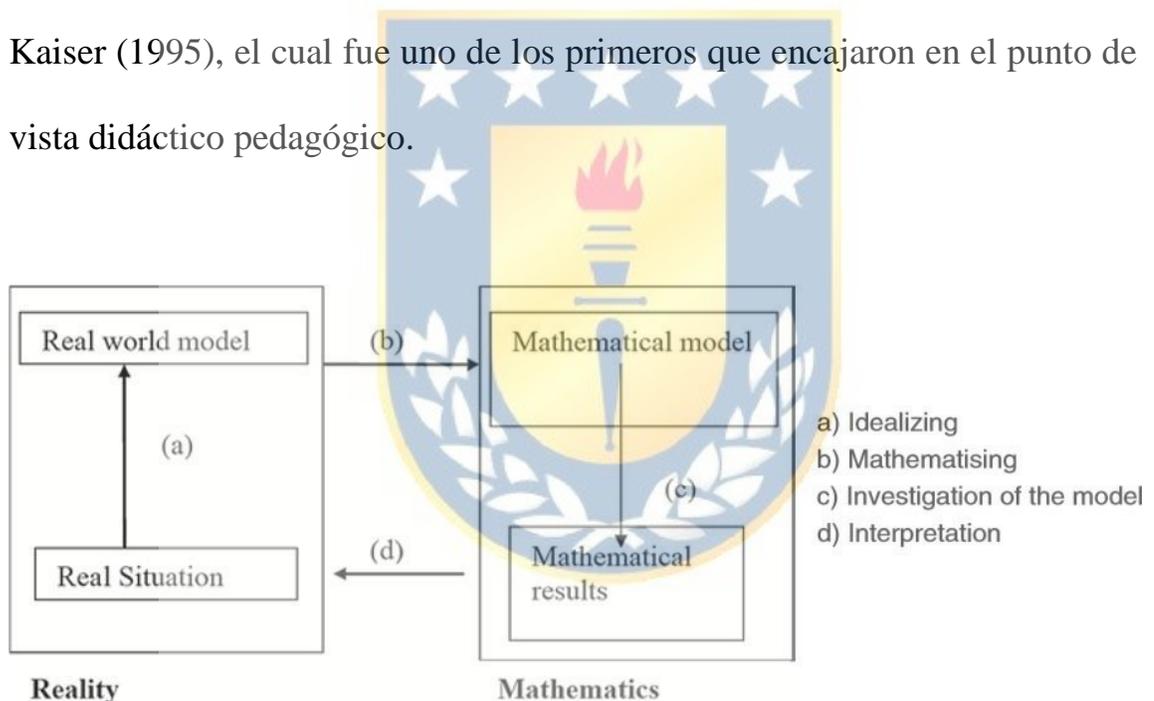


Figura 6

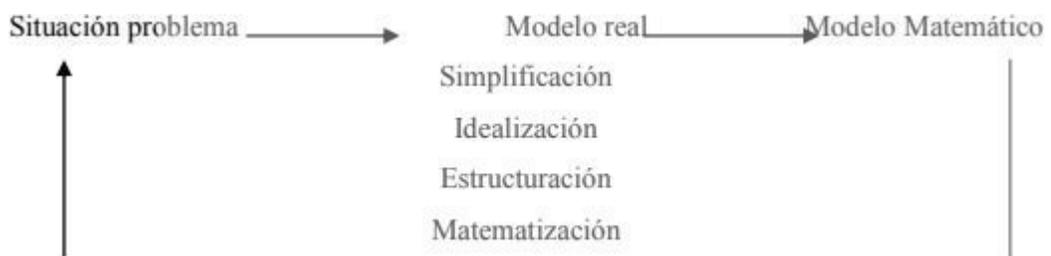
*Figura 6*, Borromeo (2018), Ciclo de modelación de Blum y Kaiser, este proceso se conforma por 4 etapas en las que se transita por el mundo real y el matemático, dentro del mundo real se encuentran 2 partes del proceso de

modelación, estos son, modelo del mundo real y situación real; por otro lado, en el mundo matemático están el modelo matemático y los resultados matemáticos. Los procesos que conforman el ciclo son los siguientes:

- a) Idealizando
- b) Matematizando
- c) Investigación del modelo
- d) Interpretación



Otro ciclo que encaja esta clasificación es el ciclo propuesto por Leighton (2013) de Blum y Niss, el que también considera estos 4 pasos.

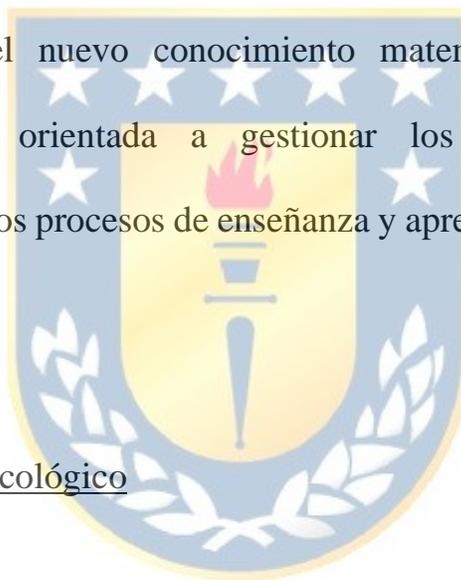


*Figura 7*

*Figura 7, Leighton (2013), Ciclo de la modelización Blum y Niss. Con*

respecto a este proceso, Leighton (2013) afirma lo siguiente:

Hoy en día el término modelización, también fomentado por la OCDE en el año 2003, haciendo hincapié al desarrollo de la competencia modeladora, como una herramienta básica de cualquier ciudadano; posee dos grandes líneas. La primera de adquisición del nuevo conocimiento matemático. Y la segunda línea, orientada a gestionar los sistemas y aplicaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje. (p.3)



### Ciclo de modelación psicológico

Los ciclos que pertenecen a esta clasificación son aquellos que se originan en la investigación psicológica más que en la matemática y su enseñanza.

Borromeo (2018) afirma:

This cycle is not used in school and it was not an intention of

the developers to do so. But the relevance for including the situation model in the diagnostic modeling cycle offered new ways for research, for practice and particularly for teacher education and training on mathematical modeling. (p.24)

El siguiente ciclo fue creado por psicólogos y se caracteriza por enfocarse en el proceso mental que debe realizar el estudiante. Con respecto al ciclo Borromeo (2018) sugiere enfocarse en el “modelo de la situación” o “situation model”, el cual se utiliza principalmente en problemas de modelación considerados no complejos (específicamente con problemas verbales y tiene su origen en la lingüística de texto). Un modelo de situación puede describirse brevemente como una representación mental de la situación que se da en el problema.

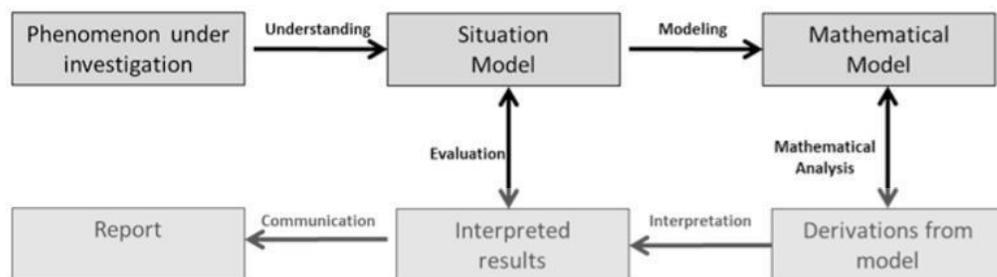


Figura 8

*Figura 8*, Borromeo (2018), ciclo de modelación de Verschaffel, el cual describe el proceso psicológico y mental que se efectúa en cada etapa. Queda en evidencia que en este ciclo no hay distinción entre las matemáticas y la realidad, además este no es utilizado en la escuela y los desarrolladores no tenían la intención de hacerlo.

Ciclo de modelación diagnóstico / Ciclo de modelación desde una perspectiva cognitiva

Estos tipos de ciclos son los que suelen utilizar los docentes, pues de acuerdo con Borromeo (2018) los investigadores que "trabajan" con este tipo de ciclo de modelado se centran especialmente en los procesos cognitivos de las personas durante los procesos de modelado. Por esta razón el modelo de situación se incluyó en este ciclo, porque los investigadores suponen que esta fase es más o menos recorrida por todos los individuos durante el modelado.

Como lo muestra el siguiente ciclo:

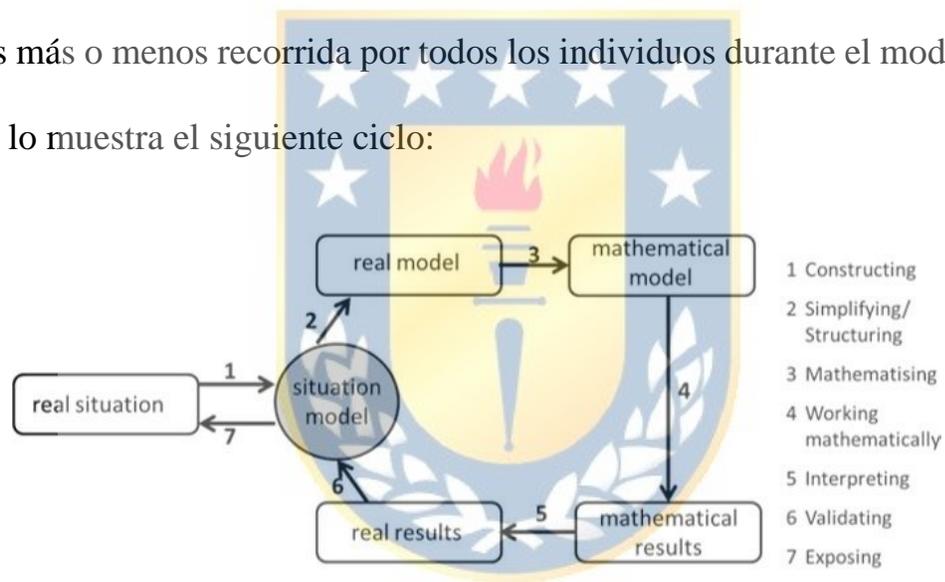


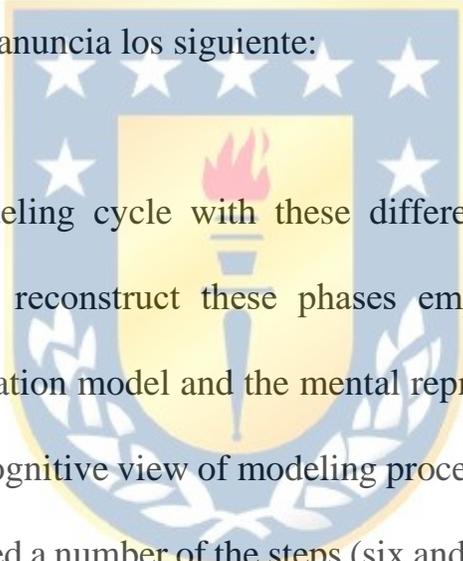
Figura 9

*Figura 9, Borromeo (2018), ciclo de modelación de Blum y Leiß (2007).*

De Borromeo (2018) se desprende que los autores Blum y Leiß entienden el modelo de la situación como una fase importante durante el proceso de modelado: incluso como la más importante. Esto se debe a que describen la

transición entre la situación real y el modelo de situación como una fase de comprensión de la tarea.

Este ciclo (fig. 9) es la base para la presente investigación, pues es considerado como uno de los más completos por diversos autores, como Borromeo (2018) quien anuncia los siguiente:



I used this modeling cycle with these different phases to describe and to reconstruct these phases empirically” ... Through the situation model and the mental representation of the situation, a cognitive view of modeling processes is given, which is supported a number of the steps (six and seven). Thus for diagnostic purposes this cycle is a good instrument (p. 24)

La misma autora propuso años antes un ciclo con características similares.

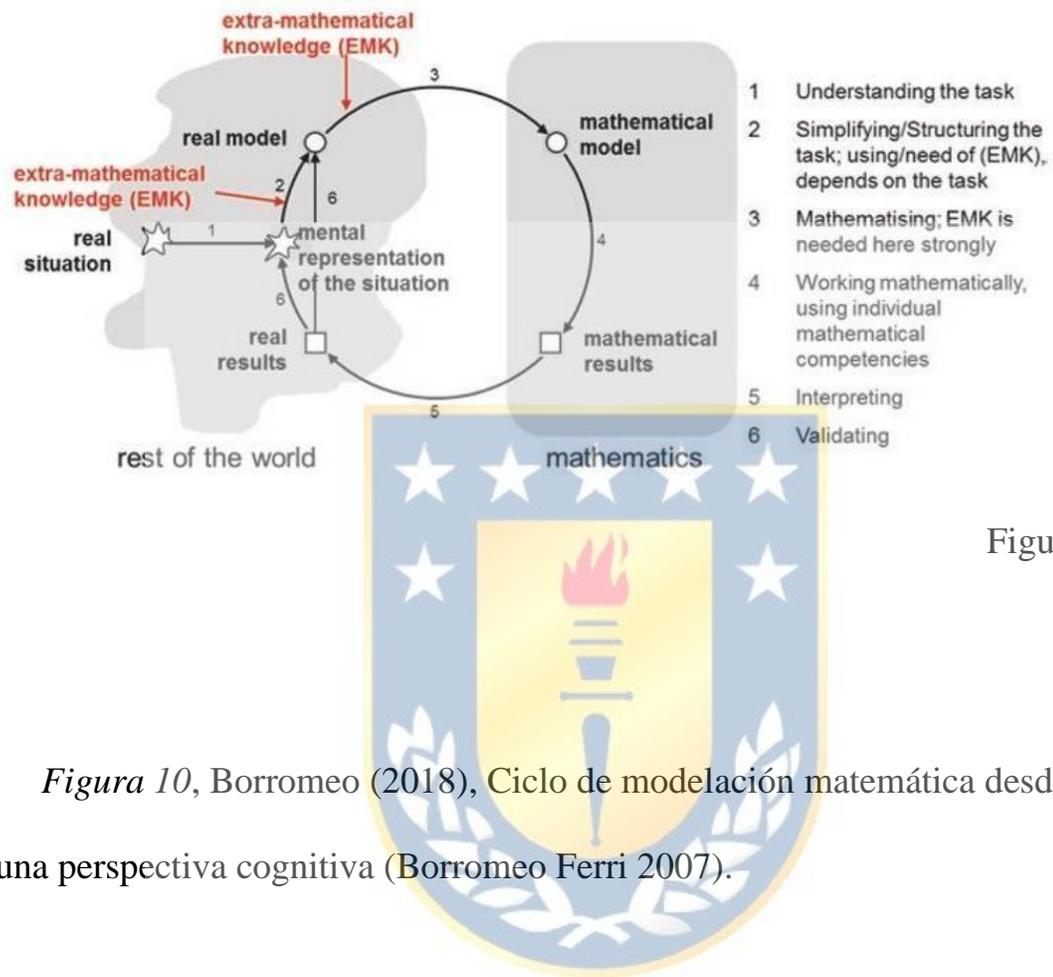


Figura 10

*Figura 10*, Borromeo (2018), Ciclo de modelación matemática desde una perspectiva cognitiva (Borromeo Ferri 2007).

Otros autores que plantean ciclos desde la perspectiva cognitiva son Gallart, Ferrando y García-Raffi, este es el ciclo de Blum y Leiß.

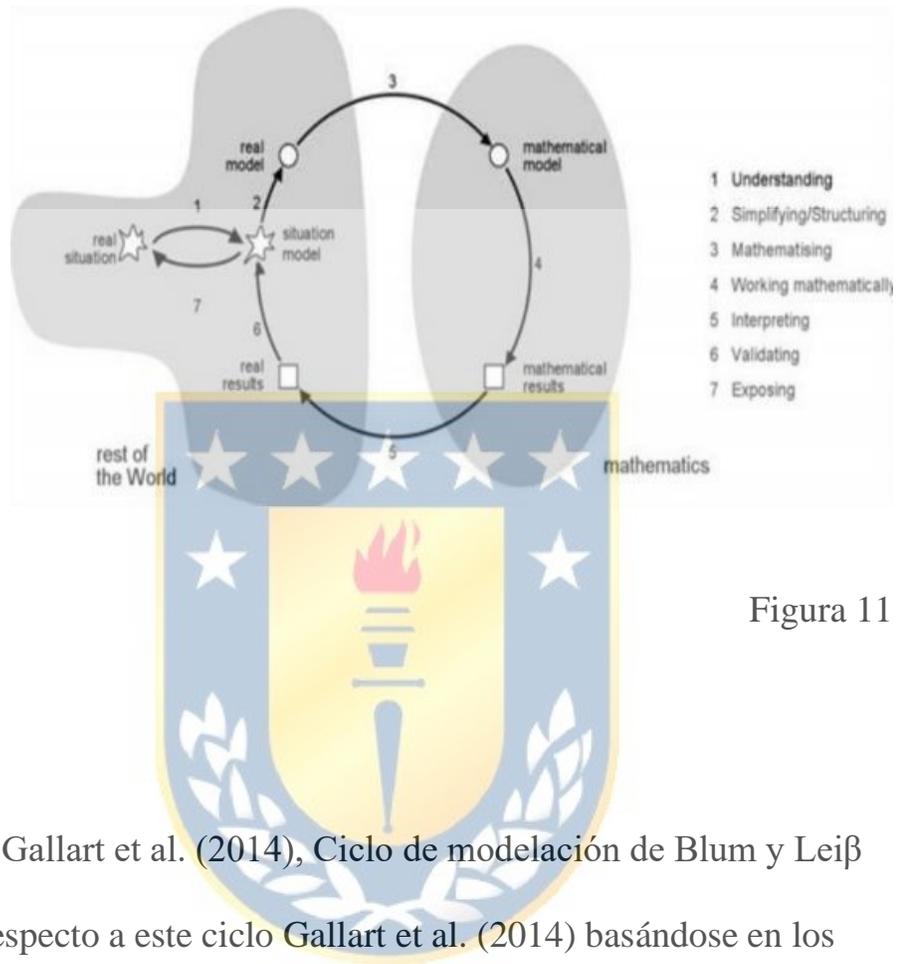


Figura 11

*Figura 11*, Gallart et al. (2014), Ciclo de modelación de Blum y Leiß (2007). Con respecto a este ciclo Gallart et al. (2014) basándose en los dichos de Maaß (2006) afirma:

El ciclo de Blum y Leiß (2007) ... nos ofrece un marco de referencia a partir del cual describir el proceso de resolución de una tarea de modelización. La representación del proceso

completo de modelización mediante un ciclo tiene que ser visto como un esquema simplificado e idealizado, y no como un algoritmo que se debe recorrer de forma lineal. (p. 94)

Otro esquema que describe claramente el proceso de modelación matemática es el propuesto por Morten Blomhøj.

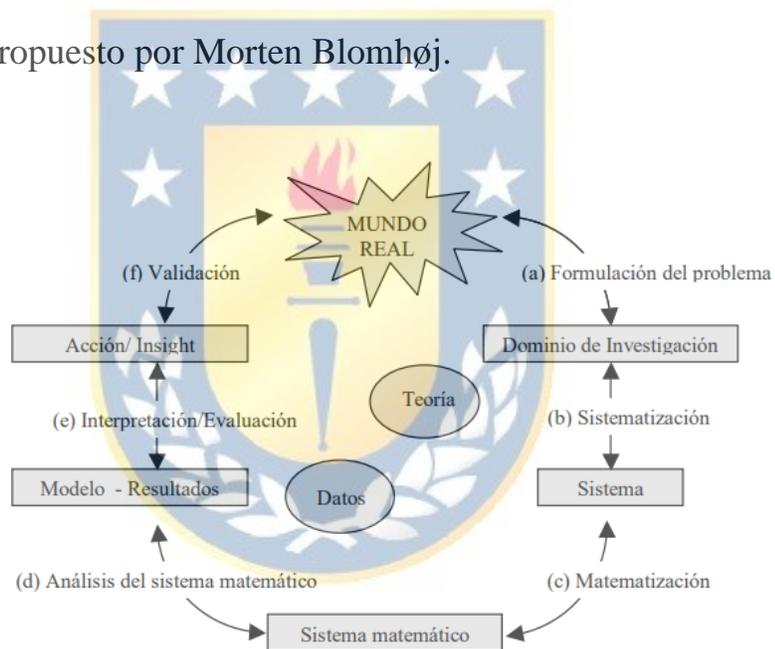


Figura 12

*Figura 12*, Morten Blomhøj, Traducción: María Mina (2008), Un modelo gráfico de un proceso de modelización, el mismo autor firma:

El proceso de modelización no debería ser entendido como un proceso lineal... un proceso el modelo y la intención de uso de éste, conduce a una redefinición del modelo. De hecho, cada uno de los seis sub-procesos puede introducir cambios en el proceso previo. (p. 23)

### **3.6 SUBCOMPETENCIAS DE LA HABILIDAD DE MODELADO MATEMÁTICO**



Al momento de resolver una actividad de modelación matemática se requiere de ciertas competencias, dentro de las cuales ya se presentó la de modelamiento, pero de esta se desprenden otras competencias necesarias para resolver la situación planteada.

Algunos autores la describen como categorías, subcategorías, dimensiones, etapas del proceso de modelación o competencias de

modelación matemática; para objeto de esta investigación se les denominará como subcompetencias de la habilidad de modelamiento matemático, pues sin estas no sería posible desarrollar la habilidad de modelamiento.

Estas subcompetencias son construir, simplificar, estructurar, matematizar, trabajar matemáticamente, interpretar, validar y exponer. Las cuales son utilizadas en diferentes partes del proceso de resolución de actividades que involucran la modelación matemática, como lo propone el siguiente ciclo

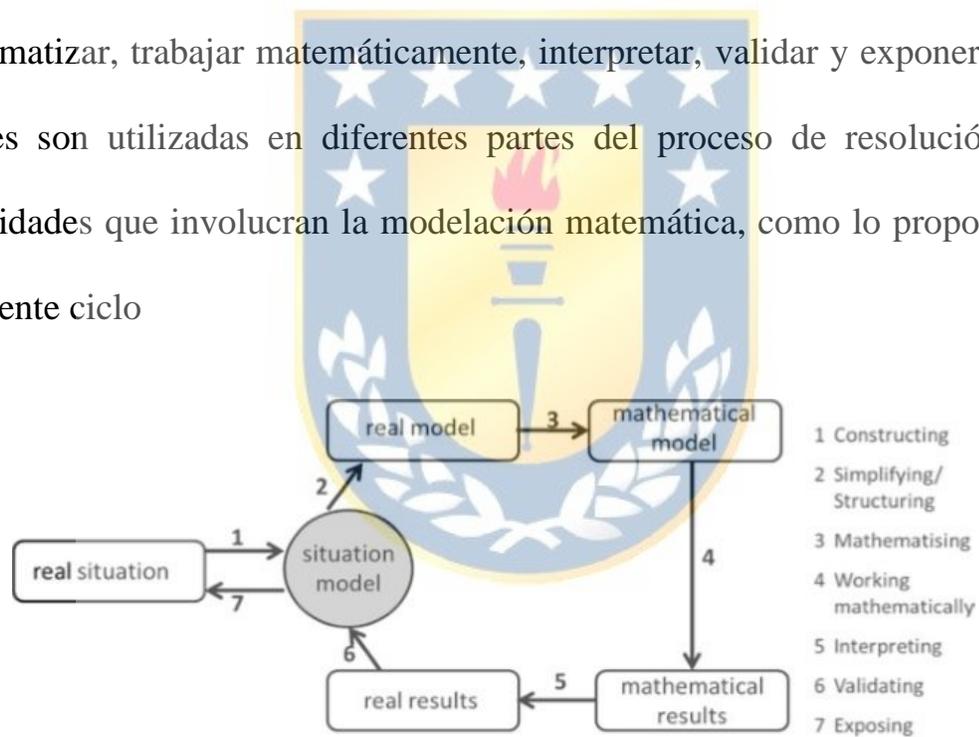


Figura 13

*Figura 13*, Borromeo (2018), ciclo de modelación de Blum y Leiß. Esta imagen refleja las subcompetencias que son necesarias para sortear el ciclo

de modelación, el cual no siempre debe ser en un mismo orden, en algunos casos se da que tres subcompetencias sean utilizadas en un proceso.

A continuación, se presentarán las definiciones de las subcompetencias obtenidas de diferentes autores, para luego exponer la que se consideró más completa para esta investigación.

Según Aravena M., Caamano C. (2007), las subcompetencias presentes en el proceso de modelación matemática se observan a través de categorías, los autores también aluden a algunas subcompetencias a tratar en esta investigación, definiéndolas como dimensiones, estas son:

- (1) Organización e interpretación del problema, que incluye: identificación de los datos y condiciones; utilización de sistemas de representación, y reconocimiento e interpretación de variables que intervienen.

(2) Matematizar el problema, que incluye: planteamiento de las ecuaciones matemáticas; utilización de algoritmos y propiedades; desarrollo de procesos algebraicos; determinación de dominio y recorrido, y formulación del modelo.

(3) Aplicación y verificación del modelo. Establecer una relación entre los datos matemáticos y el problema real, es decir, someter las variables del modelo a datos de la realidad, si se ajusta a las condiciones, mediante la evaluación del modelo con nuevos datos del dominio.

(4) Comunicación matemática. Dar una interpretación de los datos y de los conceptos desde punto de vista del problema real. Interpretar datos a partir del modelo matemático. (Aravena M., 2007, p.13)

Cómo es posible apreciar en estas dimensiones se observan características esenciales de las subcompetencias que se mencionaron en un principio, las

cuales compararemos para comenzar a plantear paulatinamente sus definiciones. En la primera dimensión es posible situar las subcompetencias de construir, simplificar y estructurar; en la segunda se encuentra la de matematizar; en la tercera dimensión se posicionarían las de trabajar matemáticamente, interpretar y validar; finalmente en la cuarta restaría la subcompetencias de exponer los resultados.

Otro autor que menciona algunas competencias es Leighton E. (2013) describiéndolas como “capacidades desarrolladas usando modelización matemática” (p. 5), en la cual se basa en dichos de Giménez (2002) afirmando,

...la modelización matemática implica una mejor formación matemática y una mejor formación profesional. En efecto, el trabajo con la modelización lleva implícita:

- La capacidad para resolver problemas reales con una actitud crítica.

- Una comprensión más amplia de la aplicabilidad de los conceptos.
- El desarrollo de la creatividad y el descubrimiento.
- La capacidad para integrar los conceptos.
- La capacidad para apreciar el poder de la matemática.

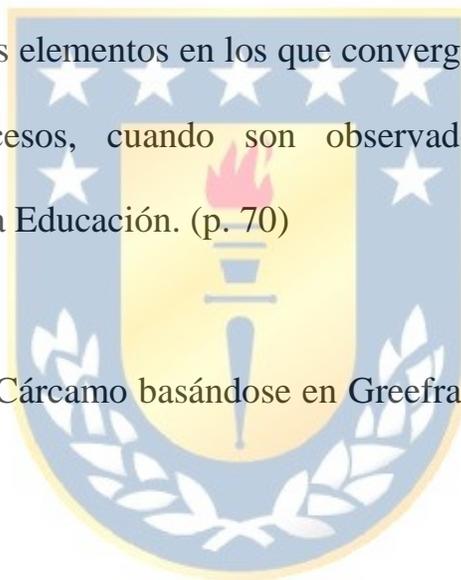
(Leighton E., 2013, p.5)

Con respecto a estas habilidades Villa (2007) manifiesta lo siguiente:



Entre los elementos comunes que guardan los procesos de modelación y modelización están: la experimentación, la abstracción y simplificación (en cuanto a la idea de que se trabaja con un fragmento de la realidad) el uso de representaciones, y en las diferentes fases que incluyen el recorrido desde el planteamiento del fenómeno hasta la construcción, evaluación, validación y modificación del modelo. Por esta razón, cuando se habla de modelación no se

trata de una “elementalización” del proceso de modelización, sino todo lo contrario, una resignificación de este proceso con fines educativos. Con seguridad que esta distinción entre ambos términos carece de sentido dentro de la narrativa al interior del aula, pero sí puede ayudar a los maestros a tomar conciencia de los elementos en los que convergen y divergen estos dos procesos, cuando son observados desde la panorámica de la Educación. (p. 70)



Ahora bien, Andrea Cárcamo basándose en Greefrath y Vohölter (2016) afirma:

La modelización matemática dividida conscientemente en procesos parciales permite la formación de competencias parciales individuales y la institución de una competencia de modelización integral a largo plazo. Esta visión tiene dos finalidades: reducir la complejidad del problema tanto a los

profesores como a los estudiantes y crear tareas (o preguntas)  
adecuadas. (Cárcamo, 2017, p.27)

De este modo Cárcamo presenta una tabla extraída y traducida de Greefrath y Vohölter (2016) en la que se observan las subcompetencias y los indicadores que permiten observar en los estudiantes la presencia de estas subcompetencias.



Sub-competencia	Indicador
Construyendo	Los estudiantes construyen su propio modelo mental a partir de un problema dado y así formulan una comprensión de su problema.
Simplificando	Los estudiantes identifican información relevante e irrelevante de un problema real.
Matematizando	Los estudiantes traducen situaciones reales específicas y simplificadas en modelos matemáticos (por ejemplo, términos, ecuaciones, figuras, diagramas y funciones)
Interpretando	Los estudiantes relacionan los resultados obtenidos de la manipulación dentro del modelo a la situación real y así obtienen resultados reales
Validando	Los estudiantes juzgan los resultados reales obtenidos en términos de plausibilidad
Exponiendo	Los alumnos relacionan los resultados obtenidos en el modelo situacional con la situación real y obtienen así una respuesta al problema.

Figura 14

*Figura 14*, Cárcamo (2017), Subcompetencias involucradas en el ciclo de modelación matemática propuesto por Blum y Leiss. En esta figura es posible observar la mayoría de las subcompetencias presentadas al inicio de esta sección

## CAPÍTULO IV

### MARCO METODOLÓGICO

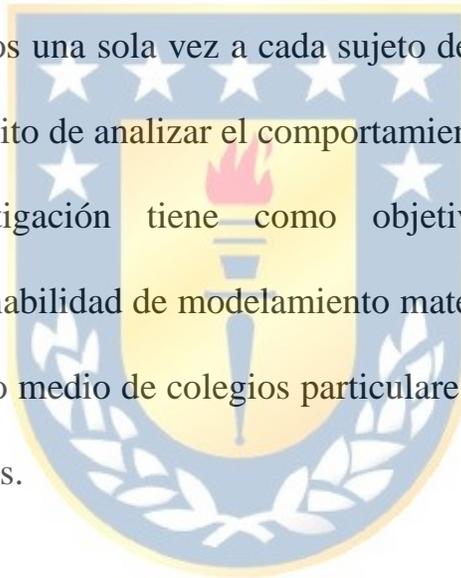
#### 4.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN

Esta investigación es de tipo cuantitativa-exploratoria, ya que se obtienen resultados cuantificables de las variables de estudio, teniendo además como fin mostrar una realidad de una problemática de interés. Se debe mencionar que a la vez es de carácter no experimental, ya que no se manipulan las variables consideradas.

## 4.2 DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

El diseño de esta investigación es de tipo transversal, siendo realizada a partir de una situación y población en concreto, en un momento determinado.

Los datos serán extraídos una sola vez a cada sujeto de estudio, de manera individual con el propósito de analizar el comportamiento de las variables a considerar. La investigación tiene como objetivo determinar las subcompetencias de la habilidad de modelamiento matemático presentes en estudiantes de tercer año medio de colegios particulares subvencionados en la ciudad de Los Ángeles.



Si bien, las actividades de modelación matemática se caracterizan por ser trabajadas de manera grupal, este instrumento al ser un diagnóstico de carácter exploratorio se aplicó individualmente para conocer el estado de la apropiación de las subcompetencias de la habilidad bajo estudio.

### 4.3 POBLACIÓN Y MUESTRA

La población corresponde a estudiantes de tercer año medio de la ciudad de Los Ángeles, la muestra para este estudio está compuesta por 123 estudiantes de tercer año de tres colegios particulares subvencionados con modalidad científico humanista. Se utilizarán las siglas CSR, CSI y ASC para referirse a los establecimientos de la muestra.

<b>Colegio</b>	<b>Curso</b>	<b>N° de alumnos</b>
CSR	III°AB- III°CD	47
CSI	III°A - III°B	42
ASC	III° yellow- III° blue	34

Tabla 1. Población y muestra

## 4.4 VARIABLES DE LA INVESTIGACIÓN

### 4.4.1 VARIABLES INDEPENDIENTES

- Establecimiento educacional:
  - CSR
  - CSI
  - ASC
- Sexo de los estudiantes a quienes se aplicó instrumento.
  - Femenino
  - Masculino



### 4.4.2 VARIABLES DEPENDIENTES

- Presencia de la subcompetencia construir
- Presencia de la subcompetencia de simplificar.
- Presencia de la subcompetencia de estructurar.

- Presencia de la subcompetencia de matematizar.
- Presencia de la subcompetencia de trabajar matemáticamente.
- Presencia de la subcompetencia de interpretar.

#### 4.5 Descripción de las variables

##### 4.5.1 Variables independientes.

- **Establecimiento:** Corresponde a los colegios en los que se aplicó el instrumento.
- **Sexo:** Corresponde al sexo de los estudiantes que respondieron el test de modelación.



#### 4.5.2 Variables dependientes.

- **Presencia de la subcompetencia construir:** Corresponde a la presencia o no presencia de la subcompetencia de construir de la habilidad de modelamiento matemático.
- **Presencia de la subcompetencia de simplificar:** Corresponde a la presencia o no presencia de la subcompetencia de simplificar de la habilidad de modelamiento matemático.
- **Presencia de la subcompetencia de estructurar:** Corresponde a la presencia o no presencia de la subcompetencia de estructurar de la habilidad de modelamiento matemático.
- **Presencia de la subcompetencia de matematizar:** Corresponde a la presencia o no presencia de la subcompetencia de matematizar de la habilidad de modelamiento matemático.
- **Presencia de la subcompetencia de trabajar**

**matemáticamente:** Corresponde a la presencia o no presencia de la subcompetencia de trabajar matemáticamente de la habilidad de modelamiento matemático.

- Presencia de la subcompetencia de interpretar: Corresponde a la presencia o no presencia de la subcompetencia de interpretar de la habilidad de modelamiento matemático.

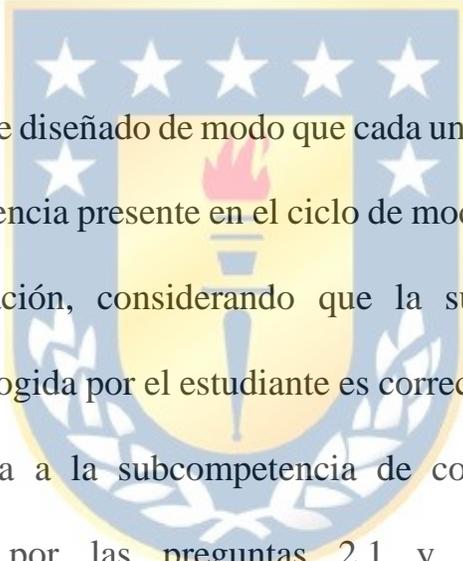


#### **4.6 DESCRIPCIÓN DE LOS INSTRUMENTOS**

La recopilación de datos de la presente investigación se realizó mediante un instrumento evaluativo, el cual se aplicó a una muestra de 123 estudiantes de tres establecimientos educacionales de la ciudad de Los Ángeles.

El instrumento fue construido por las autoras de la presente investigación,

validados por docentes expertos de la Universidad de Concepción, Campus Los Ángeles. Dicha prueba contiene 6 preguntas de tipo opción múltiple. Las preguntas presentan diversas situaciones de la vida real, que se pueden solucionar acudiendo a contenidos matemáticos, pasando por fórmulas de volumen, interpretación de datos, definición de variables entre otros.



Dicho instrumento fue diseñado de modo que cada una de estas preguntas, apunta a una subcompetencia presente en el ciclo de modelación matemática para diagnóstico/evaluación, considerando que la subcompetencia está presente si la opción escogida por el estudiante es correcta. De este modo, el primer problema apunta a la subcompetencia de construir, el segundo problema, compuesto por las preguntas 2.1 y 2.2 apunta a las subcompetencias de simplificar y estructurar respectivamente; el tercer y cuarto problema están dirigidos a la subcompetencia de matematizar, el quinto problema busca conocer si estudiante es capaz de trabajar matemáticamente y el sexto problema permite determinar si el estudiante posee la subcompetencia de interpretar.

#### 4.7 Aplicación de los instrumentos

La aplicación del instrumento fue realizada a fines del segundo semestre del año 2019, a estudiantes de tercer año medio de los establecimientos de la muestra. En dicho período la asistencia a clases de los estudiantes fue relativamente baja, debido al llamado estallido social que vivía el país.

A pesar de esto, se logró ver a los estudiantes motivados al momento de la aplicación.



## CAPÍTULO V

### ANÁLISIS DE DATOS Y CONTRASTACIÓN DE HIPÓTESIS

#### 5.1 ANÁLISIS DE DATOS

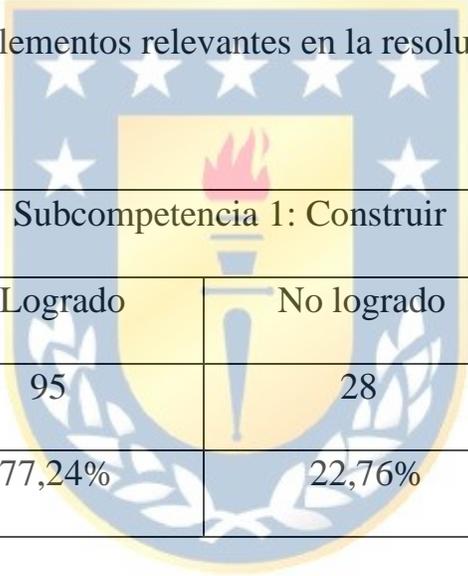
Los contenidos presentes en el test, corresponden tanto a cursos anteriores como propios de tercer año medio.

Anteriormente en el marco teórico se mencionan ciclos de modelación junto a las subcompetencias que estos involucran y deben desarrollar en los estudiantes al momento de enfrentarse a una actividad de este tipo. Para la construcción de este instrumento se utilizó el ciclo de modelación de Blum y Leiß.

A continuación, se presentarán el nivel de logro para las preguntas del test en todos los establecimientos, sin hacer distinción de ellos, es decir, tomando la población completa de estudiantes.

### 5.1.1 RESULTADOS PRIMER PROBLEMA: RECARGA DE COMBUSTIBLE

La siguiente tabla muestra el nivel de logro (respuestas correctas) en este problema, apuntando a la subcompetencia de “construir”, teniendo por objetivo identificar los elementos relevantes en la resolución del problema.



Subcompetencia 1: Construir	
Logrado	No logrado
95	28
77,24%	22,76%

Tabla 2. Resultados primer problema

### 5.1.2 RESULTADOS SEGUNDO PROBLEMA: EL FARDO: UTILIDAD DE LA MUJER / FIGURA GEOMÉTRICA

La siguiente tabla muestra el nivel de logro (respuestas correctas) en este problema, apuntando a la subcompetencia de “Simplificar”, teniendo por objetivo definir variables en la resolución del problema.



Subcompetencia 2.1: Simplificar	
Logrado	No logrado
69	54
56,10%	43,90%

Tabla 3. Resultados segundo problema parte 1

La siguiente tabla muestra el nivel de logro (respuestas correctas) en este problema, apuntando a la subcompetencia de “estructurar”, teniendo por objetivo la capacidad de los estudiantes de estructurar un modelo real

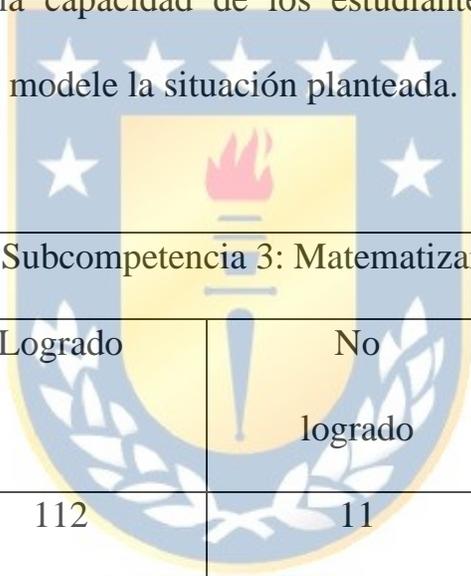
asociando el montón de fardos a una figura geométrica en la resolución del problema.

Subcompetencia 2.2: Estructurar	
Logrado	No logrado
109	14
88,62%	11,38%

Tabla 4. Resultados segundo problema parte 2

### 5.1.3 RESULTADOS TERCER PROBLEMA: LA FLORERÍA

La siguiente tabla muestra el nivel de logro (respuestas correctas) en este problema, apuntando a la subcompetencia de “matematizar”, teniendo por objetivo la capacidad de los estudiantes crear una fórmula matemática que modele la situación planteada.

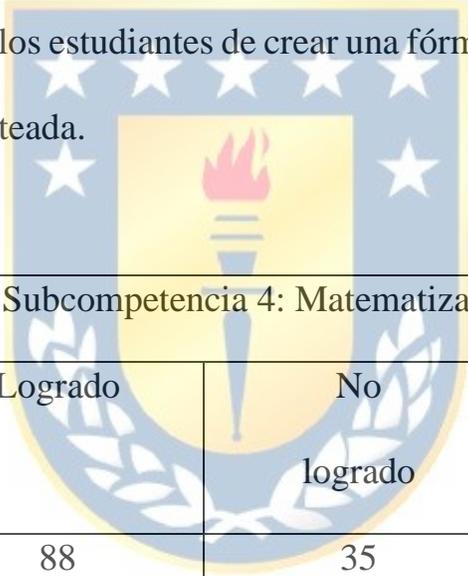


Subcompetencia 3: Matematizar	
Logrado	No logrado
112	11
91,06%	8,94%

Tabla 5. Resultados tercer problema

#### 5.1.4 RESULTADOS CUARTO PROBLEMA: PROBLEMA DE LAS COPAS

La siguiente tabla muestra el nivel de logro (respuestas correctas) en este problema, apuntando a la subcompetencia de “matematizar”, teniendo por objetivo la capacidad de los estudiantes de crear una fórmula matemática que modele la situación planteada.



Subcompetencia 4: Matematizar	
Logrado	No logrado
88	35
71,54%	28,46%

Tabla 6. Resultados cuarto problema

### 5.1.5 RESULTADOS DEL QUINTO PROBLEMA: MUDANZA

La siguiente tabla muestra el nivel de logro (respuestas correctas) en este problema, apuntando a la subcompetencia de “trabajar matemáticamente”, teniendo por objetivo la capacidad de los estudiantes de obtener un resultado matemático utilizando información entregada.

Subcompetencia 5: Trabajar Matemáticamente	
Logrado	No logrado
52	71
42,28%	57,72%

Tabla 7. Resultados quinto problema

### 5.1.6 RESULTADOS SEXTO PROBLEMA: UN DÍA EN EL OCÉANO

La siguiente tabla muestra el nivel de logro (respuestas correctas) en este problema, apuntando a la subcompetencia de “interpretar”, teniendo por objetivo la capacidad de los estudiantes de interpretar un resultado dado, es decir, mencionar unidad de medida correspondiente (resultado real).



Subcompetencia 6: Interpretar	
Logrado	No logrado
52	71
42,28%	57,72%

Tabla 8. Resultados sexto problema

## 5.2 PLAN ESTADÍSTICO

En el análisis estadístico de los datos se desarrollan comparaciones para las siguientes variables:

- Porcentaje de logro de las subcompetencias de construir, matematizar y trabajar matemáticamente. (Hipótesis 1)
- Porcentaje de logro de cada una de las subcompetencias involucradas en el ciclo de modelación matemática. (Hipótesis 2)
- Logro de subcompetencias v/s sexo del estudiante. (Hipótesis 3)
- Logro de subcompetencias v/s establecimiento educacional. (Hipótesis 4)



### 5.3 CONTRASTACIÓN DE HIPÓTESIS

Debido a que el enfoque de nuestra investigación son las subcompetencias de la habilidad de modelamiento matemático que poseen los estudiantes, se considera como referencia el 70% de logro, identificando así cuáles son las subcompetencia predominantes o deficientes en los estudiantes para enfrentarse a tareas de este tipo.



#### 5.3.1 PRIMERA HIPÓTESIS DE TRABAJO

La primera hipótesis planteada para la investigación es:

$H_1$ : Más del 70% de los estudiantes poseen las subcompetencias necesarias para enfrentarse a una actividad que involucre el desarrollo de la habilidad de modelamiento matemático.

Para realizar la prueba de esta hipótesis, el estadístico corresponde al total de éxitos presentes. Cabe mencionar que se considerarán los porcentajes de éxito de las subcompetencias más relevantes al momento de llevar a cabo una actividad de modelación, las cuales son: **Construir, matematizar y trabajar matemáticamente.**

Para el análisis se considera la siguiente hipótesis nula  $H_0$  y alternativa  $H_1$ .

$H_0$ : Los estudiantes no poseen la subcompetencia bajo análisis.

$H_1$ : Los estudiantes poseen la subcompetencia bajo análisis (hipótesis objetivo)

Así entonces, las hipótesis a contrastar para el parámetro  $p$ : proporción de estudiantes que poseen la subcompetencia, tienen la estructura:

$$H_1: p > 0,70 \text{ versus } H_0: p = 0,70$$

Aplicando dichas pruebas mediante planilla Excel (ver Anexo 3) y según las correspondiente tablas de datos, se observó en la subcompetencia **construir** un porcentaje de logro del 77,24% lo cual refleja una evidencia muestral significativa para apoyar la correspondiente hipótesis objetivo (valor  $p = 0,0465$ ), para la subcompetencia **matematizar** se observó un porcentaje del 81,30% que indica evidencia muestral altamente significativa para apoyar la hipótesis objetivo (valor  $p = 0,0031$ ), cabe señalar que en esta subcompetencia se consideró el promedio de los resultados obtenidos debido a que dos preguntas apuntan a la misma subcompetencia y finalmente en la subcompetencia **trabajar matemáticamente**, se observó un porcentaje de logro del 42,28% lo cual refleja que no existe evidencia muestral significativa para apoyar la hipótesis objetivo en esta subcompetencia (valor  $p = 1,0000$ ).

Se puede concluir que los estudiantes poseen las subcompetencias de **construir** y **matematizar**, sin embargo, no poseen la subcompetencia de **trabajar matemáticamente**.

### 5.3.2 SEGUNDA HIPÓTESIS DE TRABAJO

La segunda hipótesis planteada para la investigación es:

H<sub>2</sub>: Los estudiantes logran resolver situaciones que involucran actividades de modelación matemática.

Para realizar la prueba de esta hipótesis se utilizará como referencia el 70% de logro, donde el estadístico, al igual que en la hipótesis anterior, corresponde al total de éxitos presentes.

Cabe mencionar que, para este caso, se analizarán por separado cada una de las subcompetencias involucradas en el ciclo de modelación que corresponden a: **simplificar, estructurar e interpretar.**

Para el análisis se considera la siguiente hipótesis nula H<sub>0</sub> y alternativa H<sub>1</sub>.

H<sub>0</sub>: Los estudiantes no poseen la subcompetencia bajo análisis.

H<sub>1</sub>: Los estudiantes poseen la subcompetencia bajo análisis (hipótesis objetivo)

Así entonces, las hipótesis a contrastar para el parámetro p: proporción de estudiantes que poseen la subcompetencia, tienen la estructura:

$$H_1: p > 0,70 \text{ versus } H_0: p = 0,70$$

Aplicando dichas pruebas mediante planilla Excel (ver Anexo 3) y según las correspondientes tablas de datos, se observó en la subcompetencia de **simplificar**, se obtuvo un porcentaje de logro del 56,10%, teniendo una evidencia muestral no significativa en apoyo a la correspondiente hipótesis objetivo (valor p: 0,9996). Por otro lado, en la subcompetencia de **estructurar** se observa un porcentaje de logro de 88,62%, siendo una evidencia muestral altamente significativa para apoyar la hipótesis, donde el valor p = 0,0000. Finalmente, en la subcompetencia de **interpretar** se obtuvo un porcentaje de logro de 42,28% reflejando que no existe evidencia muestral significativa en apoyo a la hipótesis objetivo con valor p = 1,0000).

### 5.3.3 TERCERA HIPÓTESIS DE TRABAJO

La tercera hipótesis planteada para la investigación es:

H<sub>3</sub>: No hay diferencia en los resultados obtenidos entre hombres y mujeres.

Para este análisis se utiliza tablas de contingencia cuyas variables corresponden a la subcompetencia del ciclo de modelación que se ve involucrada en cada problema del instrumento y el sexo del estudiante. Dichas tablas fueron realizadas con el software SPSS (versión de prueba), considerando la prueba chi-cuadrado con un nivel de significancia  $\alpha=0,05$ , en el caso de tablas de 2x2 se considera el test exacto de Fisher (ver Anexo 4).

Cabe mencionar que se analizarán los resultados de cada problema por separado.

- i) Para el análisis de la primera subcompetencia se

considera:

$H_0$ : El logro de la subcompetencia **construir** medida en el problema 1 no está relacionado con el sexo del estudiante.

$H_1$ : El logro de la subcompetencia **construir** medida en el problema 1 está relacionado con el sexo del estudiante.



Figura 15. Gráfico "Recarga de combustible"

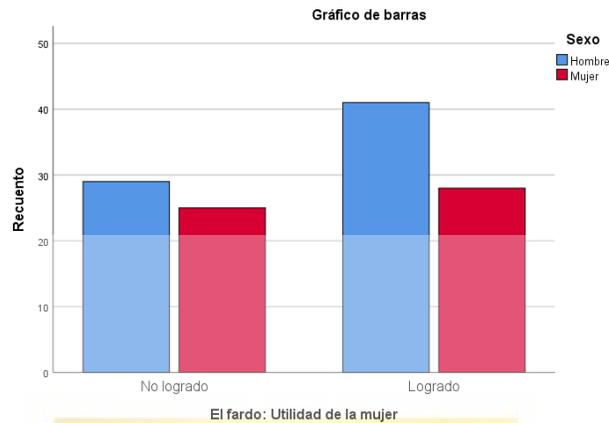
En este caso se obtuvo que el valor  $p = 1,000$  entonces no existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, se concluye que los

factores bajo análisis son independientes o no están relacionados entre sí, es decir, los hombres y mujeres logran el mismo nivel para la subcompetencia de **construir**. Como resultado de la prueba de hipótesis se determina que no hay diferencia entre hombres y mujeres en los resultados obtenidos.

ii) Para la segunda subcompetencia de interés se considera:

$H_0$ : El logro de la subcompetencia **simplificar** medida en el problema 2.1 no está relacionada con el sexo del estudiante.

$H_1$ : El logro de la subcompetencia **simplificar** medida en el problema 2.1 está relacionada con el sexo del estudiante.



El fardo: Utilidad de la mujer

Figura 16. Gráfico "Utilidad de la mujer"

Dado que el p-valor = 0,584 calculado es mayor que el nivel de significación  $\alpha = 0,05$  entonces no existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, se concluye que los factores bajo análisis son independientes o no están relacionados entre sí, es decir, los hombres y mujeres logran el mismo nivel para la subcompetencia de **simplificar**. Como resultado de la prueba de hipótesis se determina que no hay diferencia entre hombres y mujeres en los resultados obtenidos.

iii) Para el análisis de la tercera subcompetencia se plantea:

$H_0$ : El logro de la subcompetencia **estructurar** medida en el problema 2.2 no está relacionada con el sexo del estudiante.

H<sub>1</sub>: El logro de la subcompetencia **estructurar** medida en el problema 2.2 está relacionada con el sexo del estudiante.

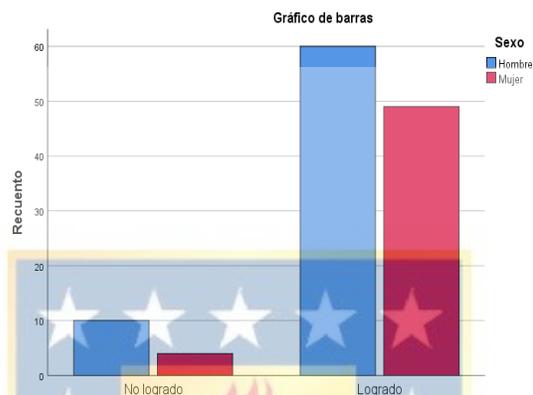


Figura 17. Gráfico "Figura geométrica"

Dado que el p-valor = 0,270 calculado es mayor que el nivel de significación  $\alpha = 0,05$  entonces no existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, se concluye que los factores bajo análisis son independientes o no están relacionados entre sí, es decir, los hombres y mujeres logran el mismo nivel para la subcompetencia de **estructurar**. Como resultado de la prueba de hipótesis se determina que no hay diferencia entre hombres y mujeres en los resultados obtenidos.

iv) Para el análisis de la cuarta subcompetencia debemos plantear:

H<sub>0</sub>: El logro de la subcompetencia **matematizar** medida

en el problema 3 no está relacionada con el sexo del estudiante.

$H_1$ : El logro de la subcompetencia **matematizar** medida en el problema 3 está relacionada con el sexo del estudiante.

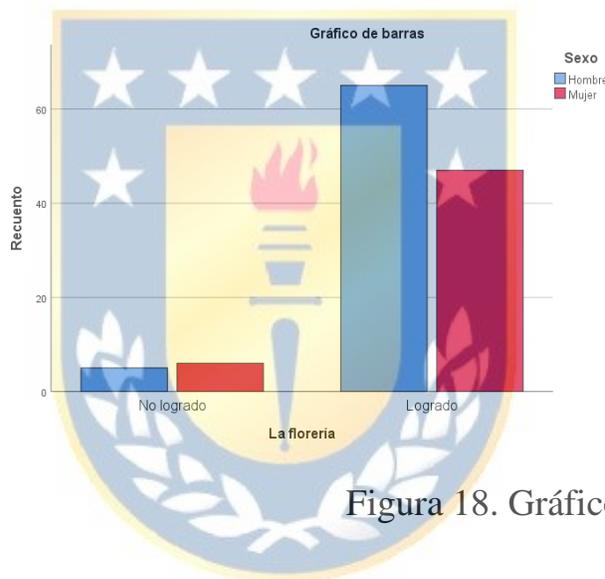


Figura 18. Gráfico "La florería"

Dado que el  $p$ -valor = 0,528 calculado es mayor que el nivel de significación  $\alpha = 0,05$  entonces no existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, se concluye que los factores bajo análisis son independientes o no están relacionados entre sí, es decir, los hombres y mujeres logran el mismo nivel para la subcompetencia de **matematizar**.

Como resultado de la prueba de hipótesis se determina que no hay diferencia entre hombres y mujeres en los resultados obtenidos.

v) Para el análisis de la subcompetencia matematizar medida con el otro problema se plantea:

$H_0$ : El logro de la subcompetencia **matematizar** medida en el problema 4 no está relacionada con el sexo del estudiante.

$H_1$ : El logro de la subcompetencia **matematizar** medida en el problema 4 está relacionado con el sexo del estudiante.



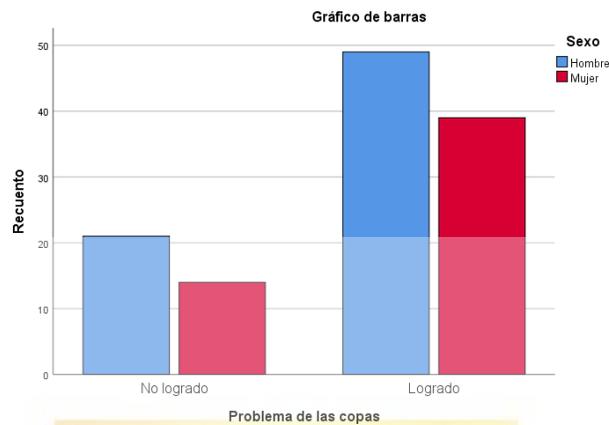


Figura 19. Gráfico "Problema de las copas"

Dado que el p-valor = 0,692 calculado es mayor que el nivel de significación  $\alpha=0,05$  entonces no existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, se concluye que los factores bajo análisis son independientes o no están relacionados entre sí, es decir, los hombres y mujeres logran el mismo nivel para la subcompetencia de **matematizar**.

Como resultado de la prueba de hipótesis se determina que no hay diferencia entre hombres y mujeres en los resultados obtenidos.

vi) Para el análisis de la quinta subcompetencia se tiene:

$H_0$ : El logro de la subcompetencia **trabajar matemáticamente**

medida en el problema 5 no está relacionada con el sexo del estudiante.

H<sub>1</sub>: El logro de la subcompetencia **trabajar matemáticamente** medida en el problema 5 está relacionada con el sexo del estudiante.

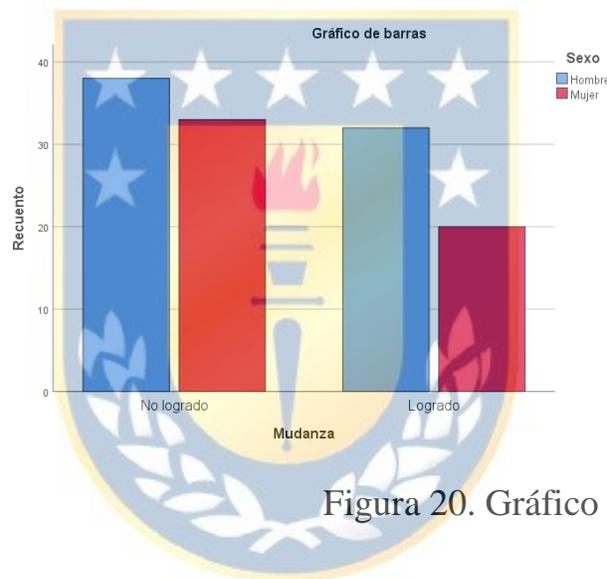


Figura 20. Gráfico "La mudanza"

Dado que el p-valor= 0,462 calculado es mayor que el nivel de significación  $\alpha=0,05$  entonces no existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, se concluye que los factores bajo análisis son independientes o no están relacionados entre sí, es decir, los hombres y mujeres logran el mismo nivel para la subcompetencia de **trabajar matemáticamente**.

Como resultado de la prueba de hipótesis se determina que no hay diferencia entre hombres y mujeres en los resultados obtenidos.

vii) Para el análisis de la última subcompetencia se tiene:

H<sub>0</sub>: El logro de la subcompetencia **interpretar** medida en el problema 6 no está relacionada con el sexo del estudiante.

H<sub>1</sub>: El logro de la subcompetencia **interpretar** medida en el problema 6 está relacionada con el sexo del estudiante



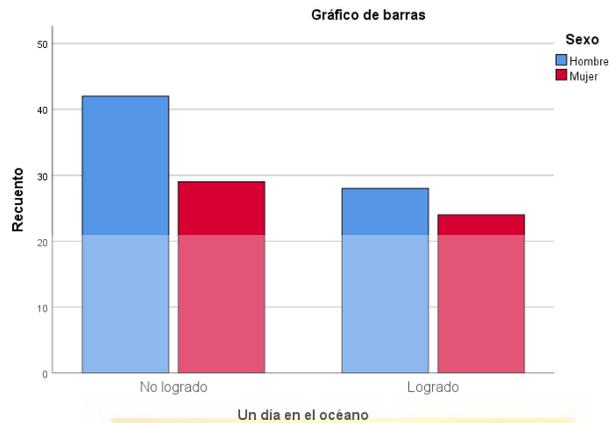


Figura 21. Gráfico "Un día en el océano"

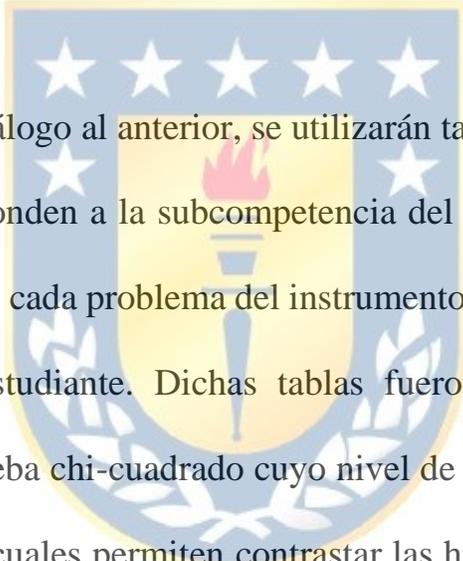
Dado que el  $p$ -valor= 0,585 calculado es mayor que el nivel de significación  $\alpha=0,05$  entonces no existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, se concluye que los factores bajo análisis son independientes o no están relacionados entre sí, es decir, los hombres y mujeres logran el mismo nivel para la subcompetencia de **interpretar**.

Como resultado de la prueba de hipótesis se determina que no hay diferencia entre hombres y mujeres en los resultados obtenidos.

#### 5.3.4 CUARTA HIPÓTESIS DE TRABAJO

La cuarta hipótesis planteada para la investigación es:

H<sub>4</sub>: No hay diferencia en los resultados de los respectivos establecimientos a los que se aplicó el test.



Para este análisis, análogo al anterior, se utilizarán tablas de contingencia cuyas variables corresponden a la subcompetencia del ciclo de modelación que se ve involucrada en cada problema del instrumento y el establecimiento al cual pertenece el estudiante. Dichas tablas fueron realizadas con el software SPSS, con prueba chi-cuadrado cuyo nivel de significancia  $\alpha=0,05$  (versión de prueba) las cuales permiten contrastar las hipótesis. Estas tablas se encuentran en el anexo 4.

Cabe mencionar que se analizarán los resultados de cada problema por separado.

i) Problema 1:

$H_0$ : El logro de la subcompetencia **construir** medida en el problema 1 no está relacionado con el establecimiento al cual pertenece el estudiante.

$H_1$ : El logro de la subcompetencia **construir** medida en el problema 1 está relacionado con el establecimiento al cual pertenece el estudiante.

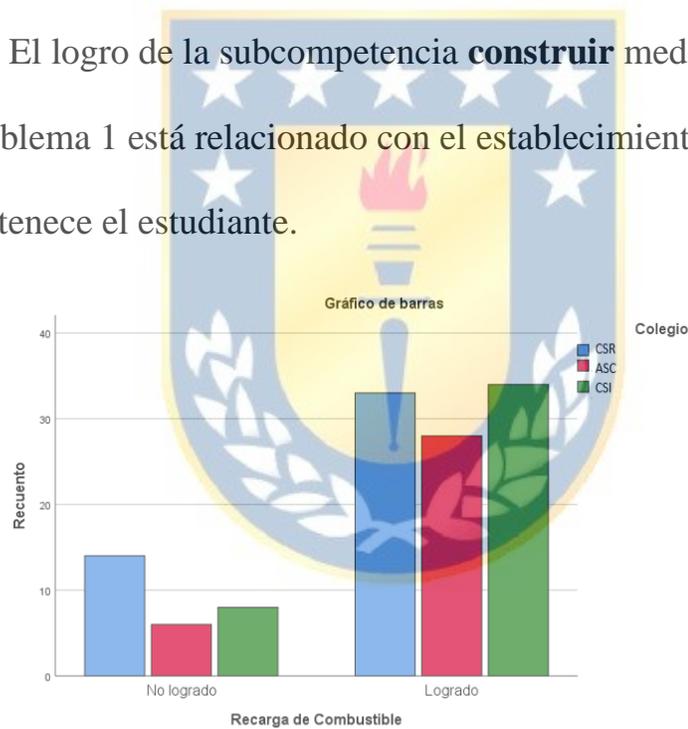


Figura 22. Gráfico problema 1

Dado que el  $p$ -valor= 0,340 calculado es mayor que el nivel de significación  $\alpha=0,05$  entonces no existe evidencia muestral significativa para

rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, se concluye que los factores bajo análisis son independientes o no están relacionados entre sí, es decir, independiente del establecimiento al cual pertenezcan, logran el mismo nivel para la subcompetencia de **construir**.

Como resultado de la prueba de hipótesis se determina que no hay diferencia entre los establecimientos y los resultados obtenidos.

ii) Problema 2.1:

$H_0$ : El logro de la subcompetencia **simplificar** medida en el problema 2.1 no está relacionada con el establecimiento al cual pertenece el estudiante.

$H_1$ : El logro de la subcompetencia **simplificar** medida en el problema 2.1 está relacionada con el establecimiento al cual pertenece el estudiante.

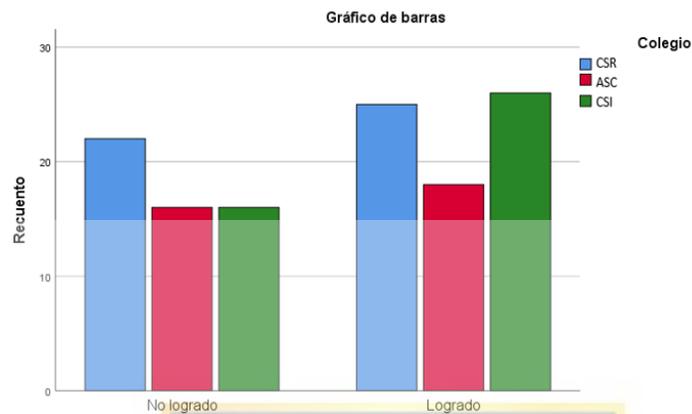


Figura 23. Gráfico problema 2.1

Dado que el  $p$ -valor= 0,646 calculado es mayor que el nivel de significación  $\alpha=0,05$  entonces no existe evidencia muestral significativa para rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, se concluye que los factores bajo análisis son independientes o no están relacionados entre sí, es decir, independiente del establecimiento al cual pertenezcan, logran el mismo nivel para la subcompetencia de **simplificar**. Como resultado de la prueba de hipótesis se determina que no hay diferencia entre los establecimientos y los resultados obtenidos.

iii) Problema 2.2:

$H_0$ : El logro de la subcompetencia **estructurar** medida en el problema 2.2 no está relacionada con el establecimiento al cual pertenece el estudiante.

$H_1$ : El logro de la subcompetencia **estructurar** medida en el problema 2.2 está relacionada con el establecimiento al cual pertenece el estudiante.



Figura 24. Gráfico problema 2.2

Dado que el p-valor= 0,763 calculado es mayor que el nivel de

significación  $\alpha=0,05$  entonces no existe evidencia muestral significativa para rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, se concluye que los factores bajo análisis son independientes o no están relacionados entre sí, es decir, independiente del establecimiento al cual pertenezcan, logran el mismo nivel para la subcompetencia de **estructurar**. Como resultado de la prueba de hipótesis se determina que no hay diferencia entre los establecimientos y los resultados obtenidos.

iv) Problema 3:

$H_0$ : El logro de la subcompetencia **matematizar** medida en el problema 3 no está relacionada con el establecimiento al cual pertenece el estudiante.

$H_1$ : El logro de la subcompetencia **matematizar** medida en el problema 3 está relacionada con el establecimiento al cual pertenece el estudiante.

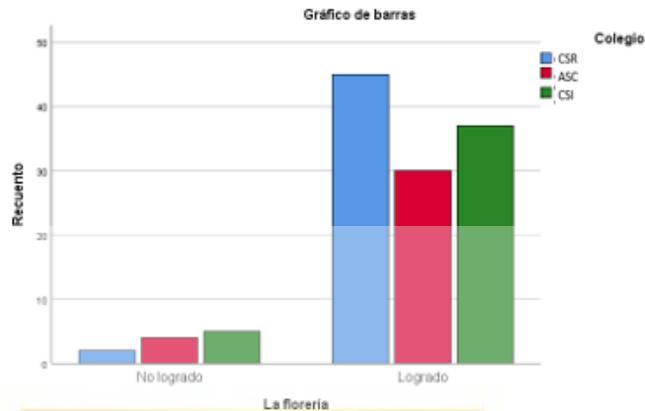


Figura 25. Gráfico problema 3

Dado que el  $p$ -valor= 0,358 calculado es mayor que el nivel de significación  $\alpha=0,05$  entonces no existe evidencia muestral significativa para rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, se concluye que los factores bajo análisis son independientes o no están relacionados entre sí, es decir, los independiente del establecimiento al cual pertenezcan, logran el mismo nivel para la subcompetencia de **matematizar**.

Como resultado de la prueba de hipótesis se determina que no hay diferencia entre los establecimientos y los resultados obtenidos.

v) Problema 4:

$H_0$ : El logro de la subcompetencia **matematizar** medida en el problema 4 no está relacionada con el establecimiento al cual pertenece el estudiante.

$H_1$ : El logro de la subcompetencia **matematizar** medida en el problema 4 está relacionado con el establecimiento al cual pertenece el estudiante.

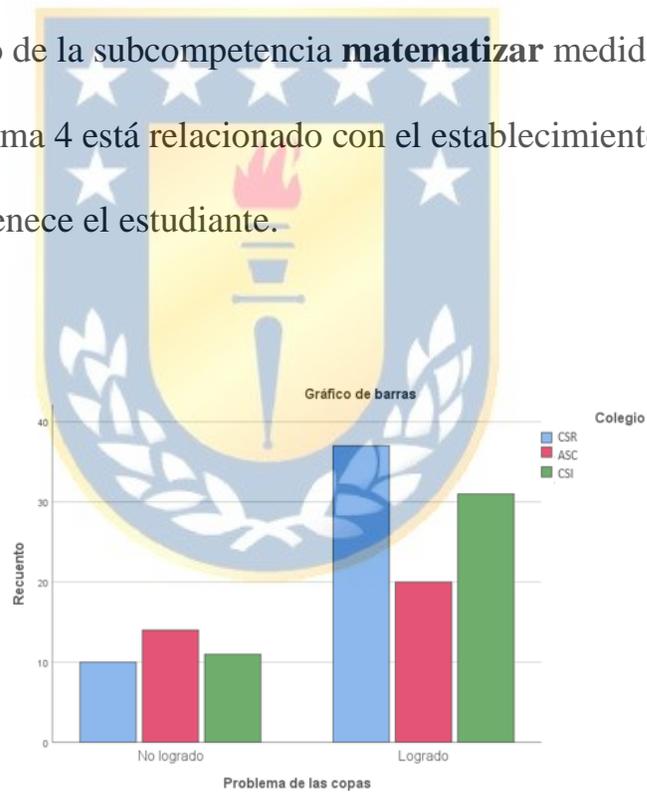


Figura 26. Gráfico problema 4

Dado que el  $p$ -valor= 0,135 calculado es mayor que el nivel de significación

$\alpha=0,05$  entonces no existe evidencia muestral significativa para rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, se concluye que los factores bajo análisis son independientes o no están relacionados entre sí, es decir, independiente del establecimiento al cual pertenezcan, logran el mismo nivel para la subcompetencia de **matematizar**.

Como resultado de la prueba de hipótesis se determina que no hay diferencia entre los establecimientos y los resultados obtenidos.

vi) Problema 5:

$H_0$ : El logro de la subcompetencia **trabajar matemáticamente** medida en el problema 5 no está relacionada con el establecimiento al cual pertenece el estudiante.

$H_1$ : El logro de la subcompetencia **trabajar matemáticamente** medida en el problema 5 está relacionada con el establecimiento al cual pertenece el estudiante.

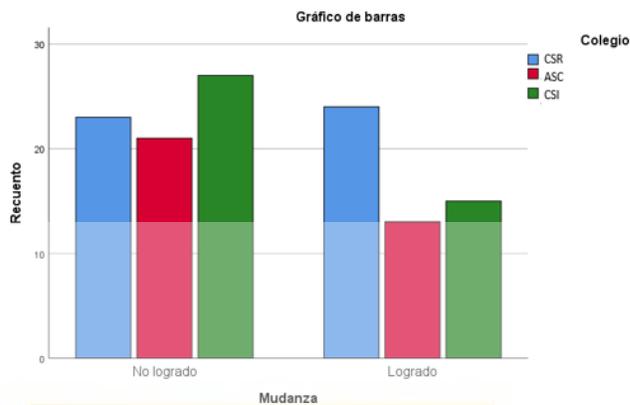


Figura 27. Gráfico problema 5

Dado que el  $p$ -valor= 0,293 calculado es mayor que el nivel de significación  $\alpha=0,05$  entonces no existe evidencia muestral significativa para rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, se concluye que los factores bajo análisis son independientes o no están relacionados entre sí, es decir, los hombres y mujeres logran el mismo nivel para la subcompetencia de **trabajar matemáticamente**.

Como resultado de la prueba de hipótesis se determina que no hay diferencia entre establecimientos y los resultados obtenidos.

vii) Problema 6:

$H_0$ : El logro de la subcompetencia **interpretar** medida en el problema 6 no está relacionada con el establecimiento al cual pertenece el estudiante.

$H_1$ : El logro de la subcompetencia **interpretar** medida en el problema 6 está relacionada con el establecimiento al cual pertenece el estudiante.



Figura 28. Gráfico problema 6

Dado que el  $p$ -valor= 0,104 calculado es mayor que el nivel de significación  $\alpha=0,05$  entonces no existe evidencia muestral significativa para rechazar la

hipótesis nula, por lo tanto, se concluye que los factores bajo análisis son independientes o no están relacionados entre sí, es decir, independiente del establecimiento al cual pertenezcan, logran el mismo nivel para la subcompetencia de **interpretar**. Como resultado de la prueba de hipótesis se determina que no hay diferencia entre los establecimientos y los resultados obtenidos.



## CAPÍTULO VI

### RESULTADOS, DISCUSIONES Y CONCLUSIONES

#### 6.1 RESULTADOS



A continuación, se presenta una tabla resumen de los resultados obtenidos después de la aplicación del instrumento de evaluación, en negrita se destaca la alternativa correcta para cada uno de los problemas. Cabe mencionar que las respuestas presentadas no distinguen sexo ni establecimiento al que pertenecen los estudiantes.

<i>Problema</i>	Alternativas				
	a	b	c	d	omitida
Problema 1	0	27	<b>95</b>	0	1
Problema 2.1	4	<b>69</b>	23	24	3
Problema 2.2	7	<b>109</b>	2	4	1
Problema 3	1	2	<b>112</b>	8	0
Problema 4	12	<b>88</b>	10	11	2
Problema 5	27	<b>52</b>	23	17	4
Problema 6	<b>52</b>	19	12	38	2

Tabla 9. Tabla resumen resultados

*Tabla resumen 1*, de esta tabla se desprende que las subcompetencias predominantes en los estudiantes son las presentes en el problema 1, problema 2.2 y problema 3 y 4; correspondientes a construir, estructurar y matematizar respectivamente.

Para la subcompetencia de construir la cantidad de resultados correctos

fue de 95 equivalente a un 77,24%. Así mismo, para la subcompetencia de estructurar, la cantidad de aciertos fue de 109 equivalente a un 88,62%. Finalmente, para la subcompetencia de matematizar, la frecuencia de resultados correctos fue de 100, considerándose el promedio de aciertos obtenidos en problemas 3 y 4, equivalente a un 81,30%. De lo anterior, se logra observar que los estudiantes poseen estas subcompetencias.

Por otro lado, las subcompetencias más deficientes en los estudiantes fueron las de trabajar matemáticamente e interpretar, obteniendo en ambas una frecuencia de resultados correctos igual a 52, equivalente a un 42,28%, no existiendo evidencia muestral que apoye la presencia de estas subcompetencias en los estudiantes.

De acuerdo con Cárcamo, como se presenta en la figura 12 del marco teórico, comparando los resultados obtenidos en esta investigación es posible interpretar que los estudiantes son capaces de construir un modelo mental a partir de un problema dado y formular una comprensión del problema, al igual que traducir situaciones reales a conceptos y símbolos del mundo matemático. En otras palabras, los estudiantes son competentes al momento

de matematizar una situación en un contexto real. Por otro lado, los resultados evidencian que al momento de interpretar los resultados obtenidos los estudiantes no logran relacionar resultados que ya fueron manipulados.

## **6.2 DISCUSIÓN DE RESULTADOS**

A partir de los resultados obtenidos de la presente investigación, se confirma lo mencionado por Leighton E. (2013), donde afirma que la modelización implica una mejor formación matemática, pues lleva implícita la capacidad de resolver problemas reales con actitud crítica, además de la creatividad y el descubrimiento. Esto se ve reflejado en los resultados obtenidos en el problema 1, en el cual se obtuvo un 77,24% de logro, apuntando a la subcompetencia de construir. En el problema 2.2 donde se obtuvo un 88,62% de logro, siendo dirigido a la estructuración del modelo simplificado. Finalmente, en el problema 3 y 4 con un 81,30% de logro, cuya subcompetencia involucrada es la de matematizar. Dichas subcompetencias

fueron las más predominantes en los estudiantes.

En cuanto a las subcompetencias más deficientes en los estudiantes, se encuentran las de simplificar, presente en el problema 2,1; trabajar matemáticamente, involucrada en el problema 5 e interpretar presente en el problema 6, las cuales se obtuvo un logro de 56,10%, 42,28% y 42,28% respectivamente.

Por otro lado, la Figura 12, Cárcamo (2017), que resume las subcompetencias involucradas en el ciclo de modelación matemática propuesto por Blum y Leiss, muestra indicadores que efectivamente presentaron los estudiantes bajo estudio al momento de dar respuesta a las interrogantes del test. Con respecto a esto, se evidencia a través de los resultados obtenidos en la aplicación del instrumento creado para esta investigación, que los estudiantes realicen lo esperado al momento de enfrentarse a cada una de las subcompetencias, ya que, para la subcompetencia de construir, los estudiantes describen mental o verbalmente el problema, identificando lo que considera relevante para su resolución. Para el caso de los problemas 3 y 4, se desprende que los estudiantes son

capaces de crear o generar fórmulas matemáticas a partir del modelo matemático, correspondiente a la subcompetencia de matematizar.

De lo anterior, cabe mencionar que las subcompetencias predominantes en los estudiantes son las de construir, estructurar y matematizar. Por otro lado, las subcompetencias más deficientes fueron las de simplificar, trabajar matemáticamente e interpretar.

Finalmente podemos decir que los estudiantes poseen algunas de las subcompetencias necesarias para enfrentarse a una actividad de modelación, no existiendo diferencia alguna en cuanto al sexo del estudiante ni al establecimiento al que pertenezcan, pero si cabe destacar la deficiencia de los contenidos propios de la asignatura de matemática al momento de aplicar formulas, esto se ve reflejado en el bajo porcentaje obtenido por los estudiantes de los distintos establecimientos en la subcompetencia de trabajar matemáticamente.

## 6.3 CONCLUSIONES

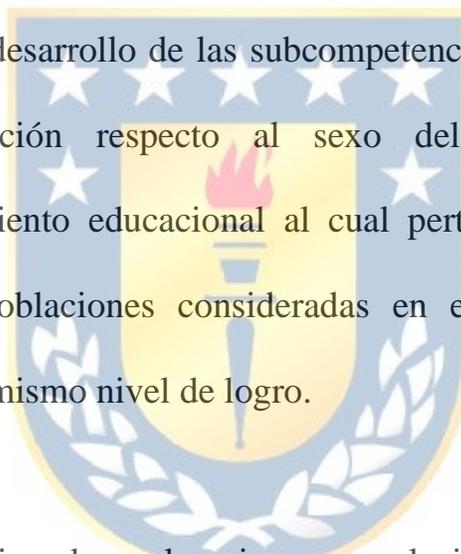
A partir de los datos obtenidos en el instrumento aplicado a los estudiantes, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

1. Si bien los estudiantes al momento de la aplicación del instrumento nunca estuvieron previamente expuestos a una actividad de modelación, sus resultados fueron favorables en las subcompetencias de construir, estructurar y matematizar, concluyendo que los estudiantes poseen estas subcompetencias para enfrentarse a una actividad que involucra la habilidad de modelamiento matemático. Esto no ocurre con las subcompetencias de simplificar, trabajar matemáticamente e interpretar, siendo estas dos últimas las más deficientes en los estudiantes.

De lo anterior se concluye que los estudiantes no están capacitados para desarrollar de forma completa una actividad de modelación, puesto que si bien poseen las subcompetencias iniciales del ciclo (las más complejas de una actividad de

modelación, pues son el puntapié inicial para su resolución), al momento de trabajar matemáticamente se presentan deficiencias, impidiendo llegar a un resultado correcto y a una interpretación coherente.

2. Considerando los resultados obtenidos, el logro o no logro en cuanto al desarrollo de las subcompetencias consideradas, no tiene relación respecto al sexo del estudiante ni al establecimiento educacional al cual pertenece, concluyendo que las poblaciones consideradas en estas comparaciones poseen el mismo nivel de logro.



Retomando lo mencionado en la primera conclusión, como los estudiantes no se habían enfrentado antes a actividades de este tipo, mostraron gran motivación al momento del desarrollo de la tarea. Esto se vio reflejado en los procedimientos que los estudiantes efectuaron al momento de responder las situaciones planteadas. Lo anterior se puede apreciar en el anexo llamado Reproducciones de los estudiantes, donde se presenta el desarrollo que los estudiantes realizaron para dar solución a los problemas propuestos en el

instrumento aplicado.

Además, al momento de aplicar estos instrumentos, se notó un interés particular y buena disposición de parte de los estudiantes y posterior a la aplicación del instrumento preguntaron sobre este tipo de actividades e insistieron en conocer cuáles eran las mejores respuestas. Posteriormente, comunicándonos con los docentes de los respectivos establecimientos comentaron que los propios estudiantes solicitaron más información acerca del tema.



## 6.4 SUGERENCIAS

Al terminar esta investigación, y considerando los resultados obtenidos se sugiere lo siguiente:

- Ampliar la muestra a establecimientos municipales para saber si existen diferencias entre el tipo de establecimiento y las subcompetencias en ellos.
- Considerar este tipo de actividad dentro del aula, ya que se evidencia que los estudiantes presentan mayor interés en ellas.
- Evidenciar a los estudiantes y docentes que poseen estas subcompetencias que son cruciales al momento de enfrentar una actividad de modelación matemática, puesto que pudo ser desarrollada con éxito incluso por los estudiantes que consideraban ser no muy competentes en esta asignatura.
- Investigar sobre el desarrollo de este tipo de actividades en el aula.
- Realizar intervenciones en el aula donde se desarrollen actividades de modelación propiamente tal, ya que esta

investigación demostró que este tipo de actividades son del agrado de los estudiantes y se consideran muy efectiva para lograr aprendizaje y desarrollar competencias necesarias en la asignatura de matemática a nivel de enseñanza media.



## REFERENCIAS

Agencia de Calidad de la Educación. (2017). *Informe de resultados*

*PISA 2015. Competencia científica, lectora y matemática en estudiantes de 15 años en Chile*. Santiago, Chile: Agencia de Calidad de la Educación.

Aravena D., M., & Caamaño E., C. (2007). Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca. *Estudios Pedagógicos*, 7-25.

Aravena Díaz, M. (2011). *Resolución de problemas y modelización germética en la formación inicial de profesores*. Talca, Chile: Universidad Católica del Maule.

Bassnezi, R. C., & Biembengut, S. M. (1997). Modelación Matemática: Una Antigua Forma de Investigación - Un Nuevo Método de Enseñanza. *Números*, 13-25.

Blomhøj, M. (2008). Modelación Matemática una Teoría para la Práctica- traducción de María

Mina. *Revista de Educación Matemática.*

<https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/1041>

9, Vol 23. Num 2.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Kassel, Germany: University of Kassel.

Bosch, M., Garcia, F. J., Gascón, J., & Ruiz Higuera, L. (2006). La modelación matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, 37-74.

Cárcamo Bahamonde, A. (2017). *Una Innovación Docente Basada en los Modelos Emergentes y la Modelización Matemática para Conjunto Generador y Espacio Generado*. Bellaterra, España: Universidad Autónoma de Barcelona.

Cariaga, E. (2014). *Presentación del Ciclo de Modelado Matemático en el Marco del Modelo de Aprendizaje Experiencial de Kolb*. Temuco. Chile: Universidad Católica de Temuco.

Gallart Palau, C., Ferrando, I., & García-Raffi, L. M. (2015).

Análisis competencial de una tarea de modelización abierta.

*Números*, 93-103.

González Pawelek, J. (2014). *El aprendizaje experiencial*. Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires.

Henao, S. M., & Vanegas, J. A. (2012). *La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción y uso de modelos cuadráticos*. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Hidalgo Alonso, S., Maroto Sáez, A., & Palacios Picos, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de Educación*, 75-95.



Leighton Vallejos, E. (2013). *Modelización Matemática. Una Experiencia con Estudiantes Secundarios*. Chile: Universidad del Bio-Bio y Universidad San Sebastián.

Ministerio de Educación. (2015). *Bases Curriculares*. Santiago, Chile: MINEDUC.

Ministerio de Educación. (2016). Desarrollo de Habilidades: Aprender a pensar matemáticamente. En A. Pedreros Matta, *Habilidad de Modelamiento Matemático* (págs. 11-43). Santiago, Chile: MINEDUC.

Salett Biembengut, M., & Hein, N. (1999). Modelación matemática: Estrategia para enseñar y aprender matemática. *Educación Matemática*, 119-134.

Salett Biembengut, M., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 105-125.

Sierra Galdón, L., Juan Blanco, M. A., García-Raffi, L. M., & Gómez Urgelles, J. (2011). Estrategias de aprendizaje basadas en la modelización matemática en educación secundaria obligatoria. *Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de*

*las matemáticas* (págs. 2-20). JOEM.

Trigueros Gaisman, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas.

*Innovación Educativa*, 75-87.

Villa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecnológicas*, 63-85.



## ANEXOS



# ANEXO 1: EJEMPLAR DE INSTRUMENTO UTILIZADO EN LA INVESTIGACIÓN

## Test de Modelación Matemática

Nombre: \_\_\_\_\_

Colegio: \_\_\_\_\_

El presente test tiene por finalidad determinar la apropiación de las subcompetencias presentes en la habilidad de modelamiento matemático. Dispones de 45 minutos para responder el test.

A continuación, se presentan distintas situaciones de la vida real a las cuales se pretende dar solución mediante modelos matemáticos.

### 1. Recarga de combustible

Nicolás vive en Nacimiento, que está a unos 33 kilómetros de la ciudad de Los Ángeles. Para reabastecer su automóvil, conduce a una estación de servicio ubicada en Los Ángeles, donde la gasolina cuesta \$710 por litro, en lugar de los \$810 que cuesta en Nacimiento. ¿Vale la pena este viaje para ahorrar dinero?

A partir de la información dada, determina cuál(es) de los siguientes factores es(son) más importantes para responder la pregunta planteada.

- I. Color del automóvil.
- II. Congestión de la ruta.
- III. Consumo de combustible del automóvil.

- a) Sólo I
- b) Sólo III
- c) II y III
- d) I, II y III

### 2. Fardos de paja

En la imagen se observa un montón de fardos, ordenados de tal forma que queda uno sobre otro formando una pirámide. Además, sobre estos se ubica sentada una mujer.



2.1. ¿Qué utilidad tiene la mujer para determinar la altura de la pirámide de fardos?

- a) Sirve para definir la variable *cantidad de fardos*, y su correspondiente valor.
- b) Sirve para definir la variable *diámetro de los fardos*, y su correspondiente valor.
- c) Sirve para definir la variable *largo de los fardos*, y su correspondiente valor.
- d) Ninguna de las anteriores

2.2. Si se quiere determinar la altura del montón de fardos, ¿qué figura geométrica es adecuada para estructurar un modelo simplificado de la situación?

- a) Cuadrado
- b) Triángulo
- c) Trapecio
- d) Rectángulo

### 3. La florería

En una florería cada rosa vale \$1200. Considera que X representa la cantidad de rosas de un ramo e Y el costo total a pagar. ¿Cuál es el precio de un ramo de rosas?

¿Cuál es la función que se puede utilizar para calcular el precio de un ramo de rosas?

- a)  $Y=1200-X$
- b)  $Y=1200+X$
- c)  $Y=1200X$
- d)  $Y = \frac{1200}{X}$

### 4. Problema de las copas

En la fiesta de despedida de los alumnos de cuarto medio, organizada por los alumnos de tercer año medio, se realizará un brindis. Para el desarrollo de éste se consiguió una donación de copas como se presenta en la imagen. ¿Cuánta bebida, como mínimo, se tendría que disponer para que todos los estudiantes pudiesen tomar una copa en el brindis?

Para las copas se considera una forma de cilindro con radio r y altura h. N=Número de estudiantes.



¿Qué algoritmo o expresión matemática propones para dar respuesta a la interrogante?

- a)  $\frac{4}{3}\pi r^3$
- b)  $N\pi r^2 h$
- c)  $\pi r h^2$
- d)  $\frac{3}{4}N\pi$

### 5. Mudanza

Llega el momento en el que debes mudarte a otra casa. Con el fin de ahorrar dinero, aunque tienes muchas cosas, alquilas por un día una camioneta pequeña, como la que se muestra en la imagen. La zona de carga de la camioneta tiene 1.5m de altura, 1.8m de largo y 1.6m de alto. Las cosas serán guardadas en cajas cuyas dimensiones son 40cm de alto, 60cm de ancho y 60cm de largo.



¿Cuál es el máximo de número de cajas que podrás transportar en un viaje?

- a) 16 cajas
- b) 18 cajas
- c) 24 cajas
- d) 30 cajas

**6. Un día en el océano**

Quizás has observado en el océano que, incluso con una vista clara, solo puedes ver hasta una cierta distancia. Utilizando la fórmula  $d^2 = 13h$  puedes estimar el alcance de la vista  $d$  (en kilómetros), donde  $h$  es la altura (en metros) de la vista respecto del suelo. Según la altura  $h$  de 1,6 metros, se obtiene que la distancia de alcance de la vista es 4,56.



Dicha distancia se mide en:

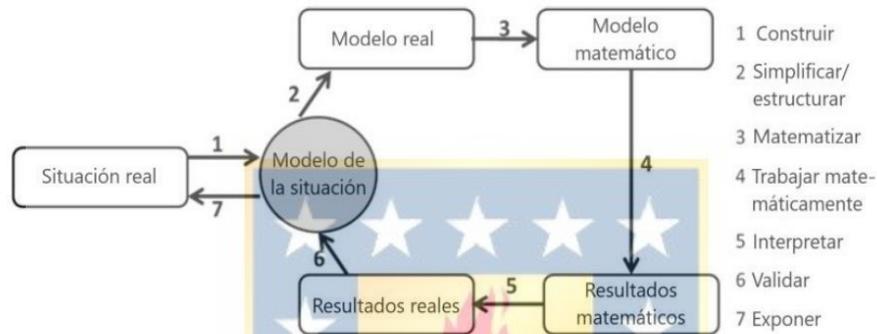
- a) km
- b) m
- c) m<sup>2</sup>
- d) km<sup>2</sup>



## ANEXO 2: FINALIDAD DEL INSTRUMENTO POR PREGUNTA

### Subcompetencias presentes en el instrumento

A continuación, observará el ciclo de modelación en el cual se basó la construcción del instrumento.



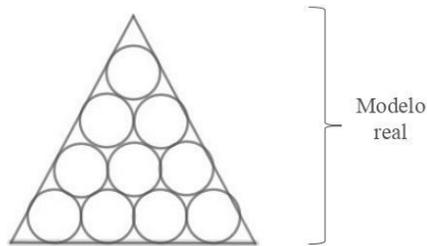
El presente ciclo se enfoca en las subcompetencias que requiere la modelación matemática. Se explicará de forma breve cada subcompetencia tomando como ejemplo el problema de los fardos (problema 2 del instrumento), suponiendo que este es un problema de modelación propiamente tal, donde sólo se indica que hay un montón de fardos, ordenados de tal forma que queda uno sobre otro formando una pirámide y que sobre ellos se encuentra sentada una mujer. Apoyando lo descrito se adjunta una imagen.

#### 1. Construir

En esta primera etapa se pretende que el estudiante describa verbalmente el problema, identificando qué se considerará relevante para su resolución. En este caso, se considera que los fardos tienen forma circular (sección transversal).

#### 2. Simplificar/estructurar

El estudiante estructura el modelo de la situación observando que los fardos tienen una altura. Consigue de esta forma una versión simplificada de la situación (modelo real), la cual le permite definir la variable *diámetro de los fardos* y asociar el montón de fardos a un triángulo.



3. *Matematizar*

El estudiante logra generar fórmulas matemáticas, es decir, crea un modelo matemático en función del diámetro de los fardos.

4. *Trabajar matemáticamente*

El estudiante aplica la matemática y usa los valores más adecuados para dar solución al problema. En este caso, se estima la altura de la mujer en 1,60 metros, obteniendo así un resultado matemático.

5. *Interpretar*

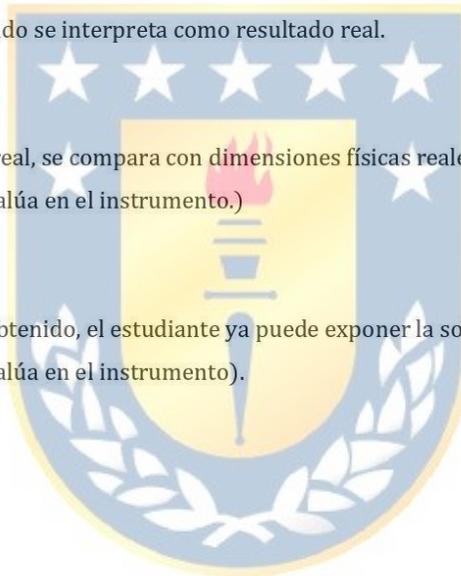
El resultado matemático obtenido se interpreta como resultado real.

6. *Validar*

Una vez obtenido el resultado real, se compara con dimensiones físicas reales. (Esta subcompetencia no se evalúa en el instrumento.)

7. *Exponer*

Luego de validar el resultado obtenido, el estudiante ya puede exponer la solución al problema. (Esta subcompetencia no se evalúa en el instrumento).



### Finalidad de cada pregunta

Este anexo presenta la intención con la cual fueron creados cada uno de los problemas del instrumento.

❖ **Problema 1:** “Recarga de combustible”.

En este problema se busca que el estudiante logre identificar los elementos que son de relevancia para iniciar un proceso de modelación matemática.

Este problema intenta evaluar la subcompetencia de construir del ciclo de modelación.

❖ **Problema 2:** “Fardos de paja”.

Este problema se plantea con la intención de que los estudiantes logren, una vez simplificada la forma de la sección transversal de los fardos (forma circular), utilizar la mujer sentada en los fardos para definir la variable *diámetro de los fardos* (pregunta 2.1). Además, el problema busca determinar si los estudiantes son capaces de estructurar un modelo real asociando el montón de fardos a una figura geométrica (pregunta 2.2).

Este problema se centra en la subcompetencia de simplificar/estructurar.

❖ **Problema 3:** “La florería”.

La intención de este problema es determinar si los estudiantes logran matematizar la situación presentada, es decir, si son capaces de crear una fórmula matemática que modele la situación planteada.

Este problema busca determinar si los estudiantes logran matematizar un modelo real.

❖ **Problema 4:** “Problema de las copas”.

Al igual que el problema 3, la intención de esta problema es evaluar en los estudiantes la subcompetencia de matematizar.

❖ **Problema 5:** “Mudanza”.

En este problema se pretende que los estudiantes trabajen matemáticamente, es decir, que sean capaces de obtener un resultado matemático, usando para ello la información entregada en el modelo matemático considerado implícitamente.

El problema se centra en la subcompetencia de trabajar matemáticamente.

❖ **Problema 6:** “Un día en el océano”.

Este problema busca que los estudiantes interpreten un resultado matemático, donde se les entrega el valor numérico que obtendrían a partir de la fórmula planteada, para posteriormente interpretar este resultado con la unidad de medida correspondiente (resultado real).

El problema busca determinar si los estudiantes poseen la subcompetencia de interpretar.

### ANEXO 3: TABLA DE CÁLCULO DE VALORES P

Subcompetencia	Total de logrados	Porcentaje de Logro	Valor p
Construir	95	77,24%	<b>0,0465</b>
Simplificar	69	56,10%	<b>0,9996</b>
Estructurar	109	88,62%	<b>0,0000</b>
Matematizar	100	81,30%	<b>0,0031</b>
Trabajar Matemáticamente	52	42,28%	<b>1,0000</b>
Interpretar	52	42,28%	<b>1,0000</b>



## ANEXO 4: TABLAS DE ANÁLISIS DE DATOS

**Tabla cruzada Recarga de Combustible\*Sexo**

		Sexo			
		Hombre	Mujer	Total	
Recarga de Combustible	No logrado	Recuento	16	12	28
		Recuento esperado	15,9	12,1	28,0
		% dentro de Sexo	22,9%	22,6%	22,8%
	Logrado	Recuento	54	41	95
		Recuento esperado	54,1	40,9	95,0
		% dentro de Sexo	77,1%	77,4%	77,2%
Total	Recuento	70	53	123	
	Recuento esperado	70,0	53,0	123,0	
	% dentro de Sexo	100,0%	100,0%	100,0%	

**Pruebas de chi-cuadrado**

	Valor	df	Significación asintótica (bilateral)	Significación exacta (bilateral)	Significación exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,001 <sup>a</sup>	1	,977		
Corrección de continuidad <sup>b</sup>	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,001	1	,977		
Prueba exacta de Fisher				1,000	,577
Asociación lineal por lineal	,001	1	,978		
N de casos válidos	123				

**Tabla cruzada El fardo: Utilidad de la mujer\*Sexo**

		Sexo		Total	
		Hombre	Mujer		
El fardo: Utilidad de la mujer	No logrado	Recuento	29	25	54
		Recuento esperado	30,7	23,3	54,0
		% dentro de Sexo	41,4%	47,2%	43,9%
	Logrado	Recuento	41	28	69
		Recuento esperado	39,3	29,7	69,0
		% dentro de Sexo	58,6%	52,8%	56,1%
Total	Recuento	70	53	123	
	Recuento esperado	70,0	53,0	123,0	
	% dentro de Sexo	100,0%	100,0%	100,0%	



**Pruebas de chi-cuadrado**

	Valor	df	Significación asintótica (bilateral)	Significación exacta (bilateral)	Significación exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,404 <sup>a</sup>	1	,525		
Corrección de continuidad <sup>b</sup>	,204	1	,651		
Razón de verosimilitud	,403	1	,525		
Prueba exacta de Fisher				,584	,325
Asociación lineal por lineal	,400	1	,527		
N de casos válidos	123				

**Tabla cruzada El fardo: Figura geométrica\*Sexo**

		Sexo		Total	
		Hombre	Mujer		
El fardo: Figura geométrica	No logrado	Recuento	10	4	14
		Recuento esperado	8,0	6,0	14,0
		% dentro de Sexo	14,3%	7,5%	11,4%
	Logrado	Recuento	60	49	109
		Recuento esperado	62,0	47,0	109,0
		% dentro de Sexo	85,7%	92,5%	88,6%
Total	Recuento	70	53	123	
	Recuento esperado	70,0	53,0	123,0	
	% dentro de Sexo	100,0%	100,0%	100,0%	



**Pruebas de chi-cuadrado**

	Valor	df	Significación asintótica (bilateral)	Significación exacta (bilateral)	Significación exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	1,358 <sup>a</sup>	1	,244		
Corrección de continuidad <sup>b</sup>	,772	1	,380		
Razón de verosimilitud	1,411	1	,235		
Prueba exacta de Fisher				,270	,191
Asociación lineal por lineal	1,347	1	,246		
N de casos válidos	123				

**Tabla cruzada La florería\*Sexo**

		Sexo		Total	
		Hombre	Mujer		
La florería	No logrado	Recuento	5	6	11
		Recuento esperado	6,3	4,7	11,0
		% dentro de Sexo	7,1%	11,3%	8,9%
	Logrado	Recuento	65	47	112
		Recuento esperado	63,7	48,3	112,0
		% dentro de Sexo	92,9%	88,7%	91,1%
Total	Recuento	70	53	123	
	Recuento esperado	70,0	53,0	123,0	
	% dentro de Sexo	100,0%	100,0%	100,0%	

**Pruebas de chi-cuadrado**

	Valor	df	Significación asintótica (bilateral)	Significación exacta (bilateral)	Significación exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,647 <sup>a</sup>	1	,421		
Corrección de continuidad <sup>b</sup>	,235	1	,628		
Razón de verosimilitud	,639	1	,424		
Prueba exacta de Fisher				,528	,311
Asociación lineal por lineal	,641	1	,423		
N de casos válidos	123				

**Tabla cruzada Problema de las copas\*Sexo**

		Sexo		Total	
		Hombre	Mujer		
Problema de las copas	No logrado	Recuento	21	14	35
		Recuento esperado	19,9	15,1	35,0
		% dentro de Sexo	30,0%	26,4%	28,5%
	Logrado	Recuento	49	39	88
		Recuento esperado	50,1	37,9	88,0
		% dentro de Sexo	70,0%	73,6%	71,5%
Total	Recuento	70	53	123	
	Recuento esperado	70,0	53,0	123,0	
	% dentro de Sexo	100,0%	100,0%	100,0%	

**Pruebas de chi-cuadrado**

	Valor	df	Significación asintótica (bilateral)	Significación exacta (bilateral)	Significación exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,190 <sup>a</sup>	1	,663		
Corrección de continuidad <sup>b</sup>	,055	1	,815		
Razón de verosimilitud	,191	1	,662		
Prueba exacta de Fisher				,692	,409
Asociación lineal por lineal	,189	1	,664		
N de casos válidos	123				

**Tabla cruzada Mudanza\*Sexo**

		Sexo		Total	
		Hombre	Mujer		
Mudanza	No logrado	Recuento	38	33	71
		Recuento esperado	40,4	30,6	71,0
		% dentro de Sexo	54,3%	62,3%	57,7%
	Logrado	Recuento	32	20	52
		Recuento esperado	29,6	22,4	52,0
		% dentro de Sexo	45,7%	37,7%	42,3%
Total	Recuento	70	53	123	
	Recuento esperado	70,0	53,0	123,0	
	% dentro de Sexo	100,0%	100,0%	100,0%	

**Pruebas de chi-cuadrado**

	Valor	df	Significación asintótica (bilateral)	Significación exacta (bilateral)	Significación exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,787 <sup>a</sup>	1	,375		
Corrección de continuidad <sup>b</sup>	,494	1	,482		
Razón de verosimilitud	,790	1	,374		
Prueba exacta de Fisher				,462	,241
Asociación lineal por lineal	,780	1	,377		
N de casos válidos	123				

**Tabla cruzada Un día en el océano\*Sexo**

			Sexo		Total
			Hombre	Mujer	
Un día en el océano	No logrado	Recuento	42	29	71
		Recuento esperado	40,4	30,6	71,0
		% dentro de Sexo	60,0%	54,7%	57,7%
	Logrado	Recuento	28	24	52
		Recuento esperado	29,6	22,4	52,0
		% dentro de Sexo	40,0%	45,3%	42,3%
Total		Recuento	70	53	123
		Recuento esperado	70,0	53,0	123,0
		% dentro de Sexo	100,0%	100,0%	100,0%

**Pruebas de chi-cuadrado**

	Valor	df	Significación asintótica (bilateral)	Significación exacta (bilateral)	Significación exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,345 <sup>a</sup>	1	,557		
Corrección de continuidad <sup>b</sup>	,162	1	,687		
Razón de verosimilitud	,345	1	,557		
Prueba exacta de Fisher				,585	,343
Asociación lineal por lineal	,342	1	,559		
N de casos válidos	123				

**Tabla cruzada Recarga de Combustible\*Colegio**

			Colegio	
			CSR	ASC
Recarga de Combustible	No logrado	Recuento	14	6
		Recuento esperado	10,7	7,7
		% dentro de Colegio	29,8%	17,6%
	Logrado	Recuento	33	28
		Recuento esperado	36,3	26,3
		% dentro de Colegio	70,2%	82,4%
Total		Recuento	47	34
		Recuento esperado	47,0	34,0
		% dentro de Colegio	100,0%	100,0%

**Tabla cruzada Recarga de Combustible\*Colegio**

		Colegio		
		CSI		Total
Recarga de Combustible	No logrado	Recuento	8	28
		Recuento esperado	9,6	28,0
		% dentro de Colegio	19,0%	22,8%
	Logrado	Recuento	34	95
		Recuento esperado	32,4	95,0
		% dentro de Colegio	81,0%	77,2%
Total		Recuento	42	123
		Recuento esperado	42,0	123,0
		% dentro de Colegio	100,0%	100,0%

**Pruebas de chi-cuadrado**

	Valor	df	Significación asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	2,155 <sup>a</sup>	2	,340
Razón de verosimilitud	2,118	2	,347
Asociación lineal por lineal	1,502	1	,220
N de casos válidos	123		

**Tabla cruzada El fardo: Utilidad de la mujer\*Colegio**

		Colegio		
		CSR	ASC	
El fardo: Utilidad de la mujer	No logrado	Recuento	22	16
		Recuento esperado	20,6	14,9
		% dentro de Colegio	46,8%	47,1%
	Logrado	Recuento	25	18
		Recuento esperado	26,4	19,1
		% dentro de Colegio	53,2%	52,9%
Total		Recuento	47	34
		Recuento esperado	47,0	34,0
		% dentro de Colegio	100,0%	100,0%

**Tabla cruzada El fardo: Utilidad de la mujer\*Colegio**

		Colegio		
		CSI		Total
El fardo: Utilidad de la mujer	No logrado	Recuento	16	54
		Recuento esperado	18,4	54,0
		% dentro de Colegio	38,1%	43,9%
	Logrado	Recuento	26	69
		Recuento esperado	23,6	69,0
		% dentro de Colegio	61,9%	56,1%
Total	Recuento	42	123	
	Recuento esperado	42,0	123,0	
	% dentro de Colegio	100,0%	100,0%	

**Pruebas de chi-cuadrado**

	Valor	df	Significación asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,874 <sup>a</sup>	2	,646
Razón de verosimilitud	,879	2	,644
Asociación lineal por lineal	,657	1	,418
N de casos válidos	123		

**Tabla cruzada El fardo: Figura geométrica\*Colegio**

		Colegio		
		CSR	ASC	
El fardo: Figura geométrica	No logrado	Recuento	5	5
		Recuento esperado	5,3	3,9
		% dentro de Colegio	10,6%	14,7%
	Logrado	Recuento	42	29
		Recuento esperado	41,7	30,1
		% dentro de Colegio	89,4%	85,3%
Total	Recuento	47	34	
	Recuento esperado	47,0	34,0	
	% dentro de Colegio	100,0%	100,0%	

**Tabla cruzada El fardo: Figura geométrica\*Colegio**

		Colegio		Total
			CSI	
El fardo: Figura geométrica	No logrado	Recuento	4	14
		Recuento esperado	4,8	14,0
		% dentro de Colegio	9,5%	11,4%
	Logrado	Recuento	38	109
		Recuento esperado	37,2	109,0
		% dentro de Colegio	90,5%	88,6%
Total	Recuento	42	123	
	Recuento esperado	42,0	123,0	
	% dentro de Colegio	100,0%	100,0%	

**Pruebas de chi-cuadrado**

	Valor	df	Significación asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,542 <sup>a</sup>	2	,763
Razón de verosimilitud	,522	2	,770
Asociación lineal por lineal	,021	1	,886
N de casos válidos	123		

**Tabla cruzada La florería\*Colegio**

		Colegio			
		CSR	ASC	CSI	
La florería	No logrado	Recuento	2	4	5
		Recuento esperado	4,2	3,0	3,8
		% dentro de Colegio	4,3%	11,8%	11,9%
	Logrado	Recuento	45	30	37
		Recuento esperado	42,8	31,0	38,2
		% dentro de Colegio	95,7%	88,2%	88,1%
Total	Recuento	47	34	42	
	Recuento esperado	47,0	34,0	42,0	
	% dentro de Colegio	100,0%	100,0%	100,0%	

**Tabla cruzada La florería\*Colegio**

		Total	
La florería	No logrado	Recuento	11
		Recuento esperado	11,0
		% dentro de Colegio	8,9%
	Logrado	Recuento	112
		Recuento esperado	112,0
		% dentro de Colegio	91,1%
Total	Recuento	123	
	Recuento esperado	123,0	
	% dentro de Colegio	100,0%	

**Pruebas de chi-cuadrado**

	Valor	df	Significación asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	2,053 <sup>a</sup>	2	,358
Razón de verosimilitud	2,266	2	,322
Asociación lineal por lineal	1,630	1	,202
N de casos válidos	123		

**Tabla cruzada Problema de las copas\*Colegio**

		Colegio	
		CSR	ASC
Problema de las copas	No logrado	Recuento	10
		Recuento esperado	13,4
		% dentro de Colegio	21,3%
	Logrado	Recuento	37
		Recuento esperado	33,6
		% dentro de Colegio	78,7%
Total	Recuento	47	
	Recuento esperado	47,0	
	% dentro de Colegio	100,0%	

**Tabla cruzada Problema de las copas\*Colegio**

		Colegio		Total
		CSI		
Problema de las copas	No logrado	Recuento	11	35
		Recuento esperado	12,0	35,0
		% dentro de Colegio	26,2%	28,5%
	Logrado	Recuento	31	88
		Recuento esperado	30,0	88,0
		% dentro de Colegio	73,8%	71,5%
Total	Recuento	42	123	
	Recuento esperado	42,0	123,0	
	% dentro de Colegio	100,0%	100,0%	

**Pruebas de chi-cuadrado**

	Valor	df	Significación asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	3,998 <sup>a</sup>	2	,135
Razón de verosimilitud	3,884	2	,143
Asociación lineal por lineal	,322	1	,570
N de casos válidos	123		

**Tabla cruzada Mudanza\*Colegio**

		Colegio			
		CSR	ASC	CSI	
Mudanza	No logrado	Recuento	23	21	27
		Recuento esperado	27,1	19,6	24,2
		% dentro de Colegio	48,9%	61,8%	64,3%
	Logrado	Recuento	24	13	15
		Recuento esperado	19,9	14,4	17,8
		% dentro de Colegio	51,1%	38,2%	35,7%
Total	Recuento	47	34	42	
	Recuento esperado	47,0	34,0	42,0	
	% dentro de Colegio	100,0%	100,0%	100,0%	

**Tabla cruzada Mudanza\*Colegio**

		Total	
Mudanza	No logrado	Recuento	71
		Recuento esperado	71,0
		% dentro de Colegio	57,7%
	Logrado	Recuento	52
		Recuento esperado	52,0
		% dentro de Colegio	42,3%
Total	Recuento	123	
	Recuento esperado	123,0	
	% dentro de Colegio	100,0%	

**Pruebas de chi-cuadrado**

	Valor	df	Significación asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	2,456 <sup>a</sup>	2	,293
Razón de verosimilitud	2,451	2	,294
Asociación lineal por lineal	2,171	1	,141
N de casos válidos	123		

**Tabla cruzada Un día en el océano\*Colegio**

		Colegio	
		CSR	ASC
Un día en el océano	No logrado	Recuento	22
		Recuento esperado	27,1
		% dentro de Colegio	46,8%
	Logrado	Recuento	25
		Recuento esperado	19,9
		% dentro de Colegio	53,2%
Total	Recuento	47	
	Recuento esperado	47,0	
	% dentro de Colegio	100,0%	

**Tabla cruzada Un día en el océano\*Colegio**

		Colegio	Total	
		CSI		
Un día en el océano	No logrado	Recuento	29	71
		Recuento esperado	24,2	71,0
		% dentro de Colegio	69,0%	57,7%
	Logrado	Recuento	13	52
		Recuento esperado	17,8	52,0
		% dentro de Colegio	31,0%	42,3%
	Total	Recuento	42	123
		Recuento esperado	42,0	123,0
		% dentro de Colegio	100,0%	100,0%

**Pruebas de chi-cuadrado**

	Valor	df	Significación asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	4,518 <sup>a</sup>	2	,104
Razón de verosimilitud	4,561	2	,102
Asociación lineal por lineal	4,474	1	,034
N de casos válidos	123		

## ANEXO 5: REPRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES

### 5. Mudanza

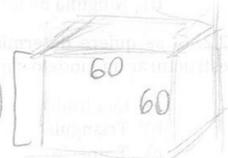
Llega el momento en el que debes mudarte a otra casa. Con el fin de ahorrar dinero, aunque tienes muchas cosas, alquilas por un día una camioneta pequeña, como la que se muestra en la imagen. La zona de carga de la camioneta tiene 1.5m de altura, 1.8m de largo y 1.6m de ancho. Las cosas serán guardadas en cajas cuyas dimensiones son 40cm de alto, 60cm de ancho y 60cm de largo.



150 cm  
180 cm  
160 cm

¿Cuál es el máximo de número de cajas que podrás transportar en un viaje?

- a) 16 cajas
- b) 18 cajas
- c) 24 cajas
- d) 30 cajas



### 4. Problema de las copas

En la fiesta de despedida de los alumnos de cuarto medio, organizada por los alumnos de tercer año medio, se realizará un brindis. Para el desarrollo de éste se consiguió una donación de copas como se presenta en la imagen. ¿Cuánta bebida, como mínimo, se tendría que disponer para que todos los estudiantes pudiesen tomar una copa en el brindis?

Para las copas se considera una forma de cilindro con radio  $r$  y altura  $h$ .  $N$ =Número de estudiantes.



¿Qué algoritmo o expresión matemática propones para dar respuesta a la interrogante?

- a)  $\frac{4}{3}\pi r^3$
- b)  $N\pi r^2 h$
- c)  $\pi r h^2$
- d)  $\frac{3}{4}N\pi$

### 5. Mudanza

Llega el momento en el que debes mudarte a otra casa. Con el fin de ahorrar dinero, aunque tienes muchas cosas, alquilas por un día una camioneta pequeña, como la que se muestra en la imagen. La zona de carga de la camioneta tiene 1.5m de altura, 1.8m de largo y 1.6m de ancho. Las cosas serán guardadas en cajas cuyas dimensiones son 40cm de alto, 60cm de ancho y 60cm de largo.



¿Cuál es el máximo de número de cajas que podrás transportar en un viaje?

- a) 16 cajas
- b) 18 cajas
- c) 24 cajas
- d) 30 cajas



### 3. La florería

En una florería cada rosa vale \$1200. Considera que X representa la cantidad de rosas de un ramo e Y el costo total a pagar. ¿Cuál es el precio de un ramo de rosas?

¿Cuál es la función que se puede utilizar para calcular el precio de un ramo de rosas?

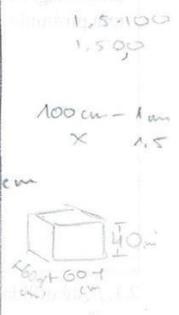
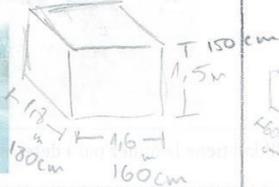
- a)  $Y=1200-X$
- b)  $Y=1200+X$
- c)  $Y=1200X$
- d)  $Y = \frac{1200}{X}$

$Y = 1200 \cdot X$

$X = \text{rosas en un ramo}$   
 $Y = \text{costo}$   
cada rosa = 1200

5. Mudanza

Llega el momento en el que debes mudarte a otra casa. Con el fin de ahorrar dinero, aunque tienes muchas cosas, alquilas por un día una camioneta pequeña, como la que se muestra en la imagen. La zona de carga de la camioneta tiene 1.5m de altura, 1.8m de largo y 1.6m de ancho. Las cosas serán guardadas en cajas cuyas dimensiones son 40cm de alto, 60cm de ancho y 60cm de largo.



¿Cuál es el máximo de número de cajas que podrás transportar en un viaje?

- a) 16 cajas
- b) 18 cajas
- c) 24 cajas
- d) 30 cajas

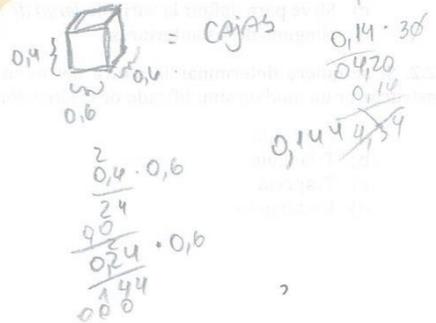
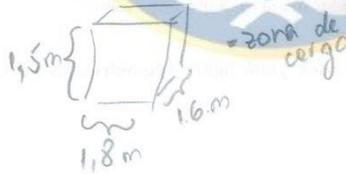
5. Mudanza

Llega el momento en el que debes mudarte a otra casa. Con el fin de ahorrar dinero, aunque tienes muchas cosas, alquilas por un día una camioneta pequeña, como la que se muestra en la imagen. La zona de carga de la camioneta tiene 1.5m de altura, 1.8m de largo y 1.6m de ancho. Las cosas serán guardadas en cajas cuyas dimensiones son 40cm de alto, 60cm de ancho y 60cm de largo.



¿Cuál es el máximo de número de cajas que podrás transportar en un viaje?

- a) 16 cajas
- b) 18 cajas
- c) 24 cajas
- d) 30 cajas



$$\begin{array}{r} 4 \\ 1.5 \cdot 1.8 \\ \hline 12.0 \\ 15 \\ \hline 27.0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 2.7 \cdot 1.6 \\ \hline 16.2 \\ 27 \\ \hline 43.2 \end{array}$$

$$\underline{4.32 \text{ m}^3}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 0.4 \cdot 0.6 \\ \hline 24 \\ 90 \\ \hline 0.24 \cdot 0.6 \\ \hline 144 \\ \hline 000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 0.14 \cdot 30 \\ \hline 0420 \\ 0.14 \\ \hline 91444.59 \end{array}$$

### 5. Mudanza

Llega el momento en el que debes mudarte a otra casa. Con el fin de ahorrar dinero, aunque tienes muchas cosas, alquilas por un día una camioneta pequeña, como la que se muestra en la imagen. La zona de carga de la camioneta tiene 1.5m de altura, 1.8m de largo y 1.6m de ancho. Las cosas serán guardadas en cajas cuyas dimensiones son 40cm de alto, 60cm de ancho y 60cm de largo.



¿Cuál es el máximo de número de cajas que podrás transportar en un viaje?

- a) 16 cajas
- b) 18 cajas
- c) 24 cajas
- d) 30 cajas

