

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



Causalidad holográfica e inestabilidad en teorías de Lovelock compactificadas

Tesis para optar al grado académico
de Magíster en Ciencias con mención en Física

por

Aldo Javier Vera Serón

Director de Tesis : Dr. Julio Oliva

Comisión : Dr. Alex Giacomini
Dr. Fernando Izaurieta

Concepción, Chile marzo de 2015

a mi familia.



Resumen

En este trabajo dos problemas son abordados. En primer, lugar reportamos la existencia de inestabilidades perturbativas en las cuerdas negras como soluciones de la teoría de Gauss-Bonnet en siete dimensiones, aportando de esta forma evidencia a la conjetura de Gubser-Mitra en el contexto de teorías con potencias superiores en la curvatura.

En la segunda parte de este trabajo analizamos la compatibilidad entre la teoría de Lovelock cúbica en siete dimensiones compactificada que desemboca en Relatividad General y las restricciones para los couplings provenientes de la exigencia de no violación de causalidad holográfica.





Abstract

In this thesis two problems are treated. In the first place, we report the existence of perturbative instabilities in black strings as solutions of the Gauss-Bonnet Theory in seven dimensions, providing in this way evidence to the Gubser-Mitra conjecture in the context of gravity with higher powers in the curvature.

In the second part of this work we analyze the compatibility between the compactified cubic Lovelock theory in seven dimensions that leads to General Relativity and the restrictions on the coupling constants from the requirement of no violation of holographic causality.





Agradecimientos

Dedico esta tesis a mi familia, por su cariño, comprensión y aliento en todas las decisiones que he tomado a lo largo de mi vida. Su esfuerzo y dedicación me han permitido avanzar.

Agradezco principalmente a mi profesor guía Julio Oliva por la ayuda brindada, su buena disposición en enseñar, su amistad, y por permitirme trabajar codo a codo con él este último tiempo. De igual manera a los profesores Alex Giacomini y Fabrizio Canfora, por instruirme en varios tópicos de la Física y por la confianza que han puesto en mí al permitirme colaborar con ellos. También a Marcela por todo el apoyo y cariño.

Agradezco también a los profesores de la Universidad de Concepción; Patricio Salgado, Juan Crisóstomo y Guillermo Rubilar por mostrarme el apasionante mundo de la Física Teórica y ser en gran parte responsables de mi inclinación por el área de la Gravitación.

Finalmente quiero agradecer al director del programa de Magíster Fernando Izaurieta por su apoyo e interés, y la srta. Soledad Daroch por la ayuda brindada en estos años.¹



¹Este trabajo fue financiado parcialmente por el proyecto FONDECYT regular número 1141073 y por la dirección de postgrado de la Universidad de Concepción

Contents

1	Introducción	15
2	Teoría de Lovelock	19
2.1	Relatividad General	19
2.1.1	Las ecuaciones de Einstein	20
2.1.2	Acción de Einstein-Hilbert	21
2.2	Gravedad en dimensiones arbitrarias	22
2.3	La acción de Lanczos-Lovelock	22
2.3.1	Ecuaciones de campo	24
3	Agujeros negros y objetos extendidos	25
3.1	Agujeros negros en la teoría de Lovelock	25
3.1.1	Agujeros negros en Relatividad General con constante cosmológica	26
3.1.2	Agujeros negros en Einstein-Gauss-Bonnet	27
3.1.3	Agujeros negros en <i>pure</i> Gauss-Bonnet	28
3.2	Compactificación simple y objetos extendidos	28
3.2.1	Compactificación simple	28
3.2.2	Cuerdas y p -branas negras homogéneas	29
3.2.3	Inestabilidad de Gregory-Laflamme en RG	30
4	Inestabilidad de la cuerda negra en la teoría de Gauss-Bonnet	33
4.1	Solución de cuerda negra en la teoría de Gauss-Bonnet	34
4.2	Inestabilidad perturbativa	35
5	Causalidad holográfica en la teoría de Lovelock cúbica compactificada	39
5.1	Causalidad holográfica	39
5.2	Compactificación simple en D=7 a Relatividad General	40
5.3	Perturbación en la solución de agujero negro	41
6	Conclusiones	43

7 Apéndice	45
7.1 Delta de Kronecker generalizada	45
7.2 Bases no-coordenadas y ecuaciones de estructura de Cartan	45
7.3 Perturbación tensorial	46
Referencias	47



List of Figures

- 4.1 *Gráfica de Ω vs k para la cuerda negra homogénea en Gauss-Bonnet en $D = 7$. El parámetro m en la solución ha sido fijado a 1. La precisión numérica es tal que todos los dígitos en Ω son estables (la curva continua ha sido incluida únicamente para facilitar la visualización). 37*





Chapter 1

Introducción

La búsqueda de una teoría que unifique la interacción gravitatoria y el modelo estándar; que describe tanto las fuerzas nucleares fuerte y débil como la fuerza electromagnética, y la idea de que el Universo posee una estructura matemática bien definida han llevado a conjeturar que nuestro Universo posee más dimensiones de las que podemos detectar. Existen muchos atisbos dentro de la física teórica de que esto puede ser cierto. El ejemplo más icónico al día de hoy es la teoría de cuerdas, en la que se requieren altas dimensiones para lograr la invariancia conforme a nivel cuántico.

Existen varias teorías que pretenden dar una descripción del Universo en dimensiones mayores, una de ellas es la teoría de Lovelock [1], la que es el objeto de estudio de esta tesis.

La teoría de Lovelock es la generalización de Relatividad General a dimensiones arbitrarias; es la teoría métrica más general que describe la interacción gravitatoria que conduce a ecuaciones de segundo orden en la métrica y es compatible con la conservación del tensor de energía-momentum. En tres y cuatro dimensiones tenemos que Lovelock coincide con Relatividad General, pero en dimensiones mayores se deben considerar términos de orden superior en la curvatura, los que cambian de forma significativa las soluciones de agujero negro aportando importantes correcciones a pequeñas escalas. Además, esta teoría admite soluciones de objetos extendidos tales como cuerdas negras y p -branas negras.

Entonces, si asumimos que el Universo posee dimensiones mayores cabe preguntarse, ¿por qué detectamos solamente cuatro de éstas? Esta pregunta puede resultar muy ambiciosa y complicada de abordar, pero de lo que sí podemos estar seguros es que, para que una teoría de este tipo sea consistente, debe poder reducirse o desembocar de algún modo en teorías en cuatro dimensiones que a día de hoy consideramos válidas.

En el contexto de las teorías de gravedad, una forma de lograr esta reducción dimensional en las teorías de altas dimensiones es mediante la llamada compactificación simple, que es un caso particular de la compactificación de Kaluza-Klein [2] (a la que haremos referencia en el capítulo III). Soluciones de estas teorías compactificadas son los objetos extendidos antes mencionados y presentan singulares características que también revisaremos en este trabajo.

Se sabe que en Relatividad General las soluciones de cuerda negra no son estables y por lo tanto, en un colapso gravitacional, es la configuración de agujero negro la que se debe manifestar; esto se conoce como la inestabilidad de Gregory-Laflamme. De lo anterior surge de forma natural la pregunta de si esta inestabilidad se hereda también a teorías de mayor orden en la curvatura.

La primera parte de esta tesis está dedicada a abordar este problema, en particular, nos centramos en teorías cuadráticas en

la curvatura. Si queremos soluciones de cuerda negra en la teoría de Einstein Gauss-Bonnet necesitamos que la dimensión del espacio tiempo sea al menos cinco, pero soluciones analíticas de este tipo no se conocen, así que para nuestros fines consideraremos la teoría de Gauss-Bonnet pura, ya que, de acuerdo al comportamiento de la solución de Boulware-Deser [3], de existir una solución de cuerda negra en la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet ésta debería tender a la solución de Gauss-Bonnet en el límite cuando el radio es mucho menor que el coupling del término de Gauss-Bonnet, por lo que este acercamiento resulta interesante.

Para llevar a cabo esta labor consideramos una perturbación tipo s-wave y obtenemos una ecuación maestra en términos de una única función cuyo comportamiento asintótico deja de manifiesto la inestabilidad.

La segunda parte de este trabajo es el estudio de la causalidad holográfica en la teoría de Lovelock cúbica en siete dimensiones compactificada a Relatividad General.

En [4] se encontró que si consideramos la teoría de Lovelock en siete dimensiones con el término cúbico en la acción, es posible obtener Relatividad General en cuatro dimensiones con un valor pequeño de la constante cosmológica por medio de una compactificación simple. Esto se logra mediante una elección apropiada de los couplings.

Por otro lado, un requisito básico que debe respetar cualquier teoría que pretenda describir la realidad es que en ésta no se viole causalidad. Por lo tanto, de acuerdo al principio holográfico, es posible encontrar otras restricciones para los couplings de la teoría de Lovelock al exigir que las partículas respeten causalidad en el borde de un espacio Anti-de Sitter [5].

En este trabajo consideraremos una solución de la teoría de Lovelock cúbica correspondiente a un espacio producto de un agujero negro con un espacio de tres dimensiones con curvatura constante y realizamos una perturbación tensorial a dicha solución, cuya ecuación nos permite leer la velocidad de la excitación dual de un gravitón.

Los capítulos de esta tesis están organizados de la siguiente manera:

Los dos primeros capítulos son introductorios y pretenden ser breves, para mayores detalles se recomienda revisar las referencias citadas.

El capítulo I está dedicado a una breve revisión de la teoría de Lovelock; mostramos la construcción de esta teoría mediante una generalización del tensor de Einstein a dimensiones arbitrarias. Presentamos la acción de Lanczos-Lovelock, las ecuaciones de campo y las subfamilias que se desprenden de esta teoría. Mostramos además los posibles lagrangianos para una teoría en siete dimensiones, lo que servirá como punto de partida en los problemas que se abordan en esta tesis.

En el capítulo II estudiamos soluciones a las ecuaciones de Lovelock. Mostramos cómo se construyen soluciones de agujero negro estáticas y esféricamente simétricas para distintas teorías rotuladas por el entero k y el número de dimensiones que se consideren. También exponemos las soluciones tipo cuerda negra y p -brana negra, que corresponden a extensiones dimensionales de las soluciones de agujero negro. Mostramos algunas de las principales características de este tipo de soluciones y presentamos algunas métricas que serán recurrentes a lo largo de este trabajo.

El capítulo III contiene el primer resultado original de este trabajo de tesis. Comenzamos con una introducción a la inestabilidad de Gregory-Laflamme en Relatividad General, esto es, la inestabilidad de las cuerdas negras en la teoría de Einstein en cinco dimensiones. Luego introducimos la solución de cuerda negra para la teoría de Gauss-Bonnet en siete dimensiones y posteriormente nos enfocamos completamente en estudiar la inestabilidad perturbativa de dicha solución.

En el capítulo IV estudiamos la causalidad holográfica de la teoría de Lovelock cúbica en siete dimensiones que permite compactificación a Relatividad General. Primero exponemos el argumento de causalidad holográfica como un método

de selección de teorías razonables dentro de la conjetura AdS/CFT. Luego mostramos la construcción de esta teoría compactificada, y mediante una perturbación tensorial general estudiamos la causalidad.



Chapter 2

Teoría de Lovelock

En este capítulo presentamos la teoría de Lovelock. Comenzamos con una breve revisión de Relatividad General y mostramos cómo esta teoría puede ser extendida a dimensiones arbitrarias mediante la generalización del tensor de Einstein. Presentamos la acción de Lanczos-Lovelock, las ecuaciones de campo y las subfamilias que se desprenden de esta teoría.

2.1 Relatividad General

La Teoría General de la Relatividad es una teoría geométrica del espacio-tiempo en que la fuerza gravitatoria es entendida como la propia curvatura del espacio-tiempo generada por una distribución de materia. Esta teoría, expuesta por Albert Einstein en 1915, surge de la necesidad de incorporar la fuerza gravitatoria en la Teoría Especial de la Relatividad (RE); la que describe el espacio-tiempo como una variedad de cuatro dimensiones globalmente plana.

Estudiando transformaciones generales de coordenadas que permitieran democratizar los sistemas de referencia inerciales (que son sistemas privilegiados en RE) y los no inerciales, Einstein se dio cuenta que el efecto de la gravedad puede ser anulado localmente en un sistema de referencia en caída libre. Esto significa que para regiones suficientemente pequeñas y tiempos suficientemente cortos, es posible escoger un sistema de referencia tal que los experimentos puedan describirse mediante las leyes de la RE.

Lo anterior es postulado como el principio de equivalencia, el cuál establece que:

“Las observaciones realizadas desde un sistema de referencia en movimiento relativo acelerado respecto a un sistema inercial son, localmente, idénticos a los de un observador inercial en un campo gravitatorio.”

En el marco de esta teoría, el espacio-tiempo deja de ser el escenario en que los sucesos ocurren y se transforma en un objeto dinámico. El espacio-tiempo es curvado por la presencia de materia y dicha curvatura, descrita por las ecuaciones de campo de Einstein, es la que define las trayectorias que siguen las partículas.

Matemáticamente, la Relatividad General describe el espacio-tiempo como una variedad diferenciable pseudo-Riemanniana que es localmente equivalente al espacio plano de Minkowski.

En esta sección mostraremos un breve resumen de la formulación y estructura matemática de esta teoría.

2.1.1 Las ecuaciones de Einstein

Consideremos un espacio métrico en el que el intervalo entre dos eventos infinitesimalmente cercanos en la variedad viene dado por el elemento de línea

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico, no degenerado, de segundo rango llamado tensor métrico. Este tensor define la noción de distancia en la variedad, y por lo tanto es el que determina la geometría del espacio-tiempo y la relación causal entre los distintos eventos. También permite hacer la correspondencia (isomorfismo) entre los espacios tangente y cotangente en cada punto de la variedad.

Para el caso particular del espacio plano de Minkowski el tensor métrico es

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (2.2)$$

El segundo elemento fundamental en esta construcción es la conexión. La conexión es la que permite comparar vectores pertenecientes a espacios tangentes de puntos diferentes en la variedad.

En general, métrica y conexión son elementos independientes, pero en el caso de Relatividad General la conexión es definida a partir de la métrica y sus derivadas (conexión de Levi-Civita) en la forma

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial_\nu g_{\rho\lambda} + \partial_\lambda g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\nu\lambda}), \quad (2.3)$$

y sus componentes son llamados símbolos de Christoffel, simétricos en los índices bajos. Se debe notar que la conexión no es un tensor ya que no transforma como tal.

Con las definiciones anteriores podemos introducir el tensor de curvatura de Riemann

$$R^\mu_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda \Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\sigma_{\nu\rho} \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\mu_{\sigma\rho}, \quad (2.4)$$

el que entrega la información de cómo cambia la curvatura en la variedad. Específicamente, lo que mide este tensor es la diferencia en el transporte paralelo de un vector desde un punto a otro a través de curvas distintas. Este transporte paralelo es llevado a cabo por la derivada covariante, definida también a partir de la conexión

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda, \quad (2.5)$$

donde V^ν es un campo vectorial.

Cabe destacar que el tensor de Riemann satisface

$$g_{\mu\sigma} R^\sigma_{\nu\lambda\rho} = R_{\mu\nu\lambda\rho} = -R_{\nu\mu\lambda\rho} = -R_{\mu\nu\rho\lambda} = R_{\lambda\rho\mu\nu},$$

y además

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} + R_{\mu\lambda\rho\nu} + R_{\mu\rho\nu\lambda} = 0,$$

propiedades que resultan muy útiles al momento de buscar soluciones a las ecuaciones de Einstein. Por supuesto, el tensor de Riemann para un espacio plano es nulo.

A partir del tensor de Riemann se construyen también otras cantidades de gran importancia en Relatividad General y que aparecen en las ecuaciones de Einstein.

Se define el tensor de Ricci como

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} = g^{\lambda\rho} R_{\rho\mu\lambda\nu}, \quad (2.6)$$

el escalar de Ricci es dado por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

y finalmente, el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (2.8)$$

este tensor es simétrico y de divergencia nula.

Por otro lado sabemos que las partículas se mueven en el espacio-tiempo siguiendo curvas geodésica. Éstas pueden ser entendidas como una generalización de lo que son las rectas en un espacio plano ya que minimizan la distancia.

La ecuación de las geodésicas es dada por

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0. \quad (2.9)$$

Como vimos anteriormente, cuando la conexión es de Levi-Civita, ésta dependerá del tensor métrico, por lo que el movimiento de una partícula estará determinado por la geometría del espacio-tiempo.

Lo anterior, junto a la idea de Einstein de que la energía (materia) era la responsable de curvar el espacio tiempo, llevó a la conclusión de que las ecuaciones que describen la gravedad deberían ser una igualdad entre un objeto puramente geométrico y algún tensor que describa la distribución de energía.

Las ecuaciones de Einstein en su forma general son

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

donde Λ es la constante cosmológica, $T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{materia}}}{\delta g^{\mu\nu}}$ describe una distribución de energía-momentum y hemos considerado $c = 1$. Además se cumple que

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} \equiv 0, \quad (2.11)$$

$$\nabla_\mu g^{\nu\lambda} \equiv 0, \quad (2.12)$$

lo que es compatible con la conservación del tensor de energía-momentum

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.13)$$

2.1.2 Acción de Einstein-Hilbert

Las ecuaciones de Einstein también pueden ser obtenidas a partir de un principio variacional. Se define la acción de Einstein-Hilbert en cuatro dimensiones como

$$S_{\text{E-H}} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_{\text{materia}}, \quad (2.14)$$

la variación de esta acción respecto de la métrica conduce a las ecuaciones de campo ya mostradas, y sus soluciones representan posibles configuraciones geométricas del espacio-tiempo ocasionada por una distribución de materia. En el siguiente capítulo haremos una breve revisión de las soluciones de agujero negro que aparecen en esta teoría.

2.2 Gravedad en dimensiones arbitrarias

Una teoría que describa la interacción gravitatoria en dimensiones mayores a $D = 4$ de manera consistente, es decir, que sea covariante y conduzca a ecuaciones de campo de segundo orden en la métrica, puede ser construida por medio de una generalización de la Relatividad General de Einstein.

En Relatividad General, las ecuaciones de campo son escritas en términos del tensor de Einstein, el cual satisface las siguientes propiedades:

- Simetría: $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$,
- Depende a lo más de segundas derivadas de la métrica: $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}, \partial g_{\mu\nu}, \partial^2 g_{\mu\nu})$,
- Tiene divergencia nula: $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$,
- Depende linealmente de $\partial^2 g_{\mu\nu}$.

Por lo tanto, una teoría que generalice Relatividad General en dimensiones mayores debe provenir de un principio de acción que conduzca a un tensor que satisfaga estas propiedades. Esta teoría es llamada Teoría de Lanczos-Lovelock, construída a partir de un lagrangiano que es único.

El lagrangiano de Lovelock es equivalente a Relatividad General para $D = 3$ y $D = 4$ como es de esperarse, pero difiere de ésta en dimensiones mayores, ya que este lagrangiano incluye términos superiores en la curvatura adicionales al término de Einstein-Hilbert, aportando importantes correcciones en la física a pequeñas escalas.

2.3 La acción de Lanczos-Lovelock

La acción más general para gravedad que no involucra torsión y que conduce a ecuaciones de campo de segundo orden en la métrica (compatibles con las propiedades antes mencionadas) es la acción de Lovelock [1]

$$S[g_{\mu\nu}] = \int d^D x \mathcal{L}, \quad (2.15)$$

donde la densidad lagrangiana en D dimensiones es

$$\mathcal{L} = \sum_{k=0}^N \alpha_k \mathcal{L}_k, \quad (2.16)$$

con $2N = D - 2$ cuando la dimensión es par y $2N = D - 1$ cuando la dimensión es impar. Los α_k son constantes arbitrarias que no pueden ser determinadas a través de algún principio a menos que se exijan condiciones adicionales en la teoría. Estas constantes son llamadas couplings y poseen dimensión de $[masa]^{D-2k}$.

En (2.16) los términos \mathcal{L}_k son dados por

$$\mathcal{L}_k = \frac{1}{2^k} \sqrt{-g} \delta_{j_1 \dots j_{2k}}^{i_1 \dots i_{2k}} R^{j_1 j_2}_{i_1 i_2} \dots R^{j_{2k-1} j_{2k}}_{i_{2k-1} i_{2k}}, \quad (2.17)$$

y corresponden a extensiones dimensionales de la densidad de Euler. Aquí, $\delta_{j_1 \dots j_{2k}}^{i_1 \dots i_{2k}}$ denota la delta de Kronecker generalizada (Apéndice A).

Los cuatro primeros términos de la suma son

- Término de volumen (cosmológico)

$$\mathcal{L}_0 = \sqrt{-g},$$

- Término de Einstein-Hilbert

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} R^{j_1 j_2}_{i_1 i_2} = \sqrt{-g} R,$$

- Término de Gauss-Bonnet

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{4} \sqrt{-g} \delta_{j_1 j_2 j_3 j_4}^{i_1 i_2 i_3 i_4} R^{j_1 j_2}_{i_1 i_2} R^{j_3 j_4}_{i_3 i_4} = \sqrt{-g} (R^2 - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\lambda} R^{\mu\nu\rho\lambda}),$$

- Término de Lovelock cúbico

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 &= \frac{1}{8} \sqrt{-g} \delta_{j_1 j_2 j_3 j_4 j_5 j_6}^{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6} R^{j_1 j_2}_{i_1 i_2} R^{j_3 j_4}_{i_3 i_4} R^{j_5 j_6}_{i_5 i_6} \\ &= \sqrt{-g} \left(R^3 + 3R^{\mu\nu\rho\lambda} R_{\rho\lambda\mu\nu} - 12RR^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + 24R^{\mu\nu\rho\lambda} R_{\rho\mu} R_{\lambda\nu} + 16R^{\mu\nu} R_{\nu\rho} R_{\mu}{}^{\rho} \right. \\ &\quad \left. + 24R^{\mu\nu\rho\lambda} R_{\rho\lambda\nu\sigma} R_{\mu}{}^{\sigma} + 8R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} R^{\rho\lambda}{}_{\nu\epsilon} R^{\sigma\epsilon}{}_{\mu\lambda} + 2R_{\rho\lambda\sigma\epsilon} R^{\mu\nu\rho\lambda} R^{\sigma\epsilon}{}_{\mu\nu} \right). \end{aligned}$$

Aquí podemos ver que relatividad general en cuatro dimensiones con constante cosmológica es un caso particular de la teoría de Lovelock obtenida como una combinación lineal de los dos primeros términos, sin embargo, se debe notar que en cuatro dimensiones el lagrangiano de Lovelock más general es una combinación lineal que incluye el término de Gauss-Bonnet, pero este último no aporta a las ecuaciones de campo y por este motivo suele obviarse, aunque puede contribuir al cálculo de las cargas conservadas [6].

En el lenguaje de las formas diferenciales (Apéndice B) esta acción se escribe como

$$\mathcal{L} = \int \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{D}{2} \rfloor} \alpha_k \mathcal{L}^k, \quad (2.18)$$

donde

$$\mathcal{L}^k = \epsilon_{a_1 \dots a_{2n} a_{2n+1} \dots a_D} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2n-1} a_{2n}} e^{a_{2n+1} \dots a_D}. \quad (2.19)$$

En esta forma se ve claramente que la acción de Lovelock es un polinomio de grado $\lfloor \frac{D}{2} \rfloor$ en la curvatura.

A modo de ejemplo mostramos a continuación algunos posibles lagrangianos que describen distintas teorías en siete dimensiones

- Teoría de Einstein-Hilbert con constante cosmológica en $D = 7$

$$\mathcal{L} = \epsilon_{abcdefg} (\alpha_0 e^a e^b e^c e^d e^e e^f e^g + \alpha_1 R^{ab} e^c e^d e^e e^f e^g)$$

- Teoría de Einstein-Gauss-Bonnet con constante cosmológica en $D = 7$

$$\mathcal{L} = \epsilon_{abcdefg} (\alpha_0 e^a e^b e^c e^d e^e e^f e^g + \alpha_1 R^{ab} e^c e^d e^e e^f e^g + \alpha_2 R^{ab} R^{cd} e^e e^f e^g)$$

- Teoría de Einstein-Gauss-Bonnet-cúbica con constante cosmológica en $D = 7$

$$\mathcal{L} = \epsilon_{abcdefg} (\alpha_0 e^a e^b e^c e^d e^e e^f e^g + \alpha_1 R^{ab} e^c e^d e^e e^f e^g + \alpha_2 R^{ab} R^{cd} e^e e^f e^g + \alpha_3 R^{ab} R^{cd} R^{ef} e^g)$$

2.3.1 Ecuaciones de campo

Las ecuaciones de campo en la teoría de Lovelock son obtenidas variando la acción respecto de los campos vielbein y conexión de spin. Estas ecuaciones son, respectivamente

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} \alpha_k (D - 2k) \varepsilon_a^k = 0, \quad (2.20)$$

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} \alpha_k k (D - 2k) \varepsilon_{ab}^k = 0, \quad (2.21)$$

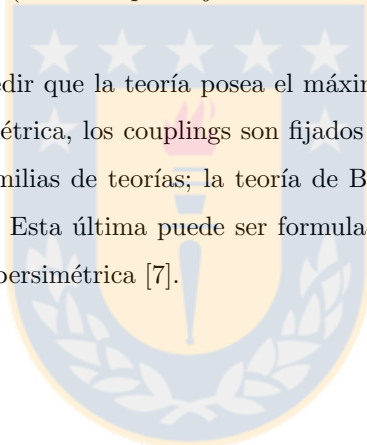
donde

$$\varepsilon_a^k = \epsilon_{aa_1 \dots a_{D-1}} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2k-1} a_{2k}} e^{a_{2k+1}} \dots e^{a_{D-1}}, \quad (2.22)$$

$$\varepsilon_{ab}^k = \epsilon_{aba_1 \dots a_{D-2}} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2k-1} a_{2k}} T^{a_{2k+1}} e^{a_{2k+2}} \dots e^{a_{D-1}}. \quad (2.23)$$

En el llamado formalismo de primer orden el vielbein y la conexión de spin se consideran campos independientes y en este caso la torsión adquiere en general grados de libertad independientes. Al considerar que la torsión es nula la conexión de spin puede ser escrita en términos del vielbein (estos campos dejan de ser independientes), esto es, el formalismo de segundo orden.

Es importante mencionar también que, al pedir que la teoría posea el máximo número de grados de libertad o exigir que exista una única solución maximalmente simétrica, los couplings son fijados en términos de la constante cosmológica y la constante de Newton dando origen a dos familias de teorías; la teoría de Born-Infeld para dimensiones pares y la teoría de Chern-Simons para dimensiones impares. Esta última puede ser formulada como una teoría de gauge para los grupos (A)dS o Poincaré y admite una extensión supersimétrica [7].



Chapter 3

Agujeros negros y objetos extendidos

En este capítulo haremos una revisión de las soluciones a las ecuaciones de Lovelock. Mostramos cómo se construyen soluciones de agujero negro estáticas y esféricamente simétricas para distintas teorías rotuladas por el entero k y el número de dimensiones que se consideren. También exponemos las soluciones tipo cuerda negra y p -brana negra que surgen en esta teoría.

3.1 Agujeros negros en la teoría de Lovelock

En esta subsección haremos una breve revisión de como se construyen soluciones de agujero negro esféricamente simétricas en la teoría de Lovelock en dimensiones arbitrarias. En particular, se muestran algunas de las principales características de los agujeros negros en Relatividad General y la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet.

Consideremos un ansatz a las ecuaciones de campo de Lovelock (2.20) dado por una métrica estacionaria y esféricamente simétrica

$$ds^2 = -f^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f^2(r)} + r^2 d\hat{\Sigma}_\gamma^2 \quad (3.1)$$

con $d\hat{\Sigma}_\gamma^2$ la métrica de un espacio $(D-2)$ dimensional de curvatura constante γ , la que puede tomar valores normalizados de $+1, 0, -1$. Nos referiremos a este espacio como la variedad base.

Introducimos una base ortonormal $\{e^a\}$, con $a = 0, 1, \dots, D$, tal que la métrica sea $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$.

El elemento de línea en esta nueva base se escribe como

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{ab} e^a e^b \\ &= -e^0 e^0 + e^1 e^1 + \dots + e^D e^D, \end{aligned}$$

por lo tanto los vielbein pueden ser elegidos como

$$e^0 = f(r)dt, \quad e^1 = \frac{1}{f(r)}dr, \quad e^i = r\hat{e}^i,$$

donde \hat{e}^i son los vielbein del espacio de curvatura constante.

Usando la primera ecuación de estructura de Cartan asumiendo torsión nula, esto es

$$de^a = -\omega^a{}_b e^b$$

obtenemos las componentes de la conexión de spin

$$\omega^0_1 = f'(r)e^0, \quad \omega^i_1 = \frac{f(r)}{r}e^i, \quad \omega^i_j = \hat{\omega}^i_j,$$

y a partir de esto calculamos las componentes de la curvatura

$$R^{01} = Ae^0e^1, \quad R^{0i} = Be^0e^i, \quad R^{1i} = Ce^1e^i, \quad R^{ij} = Ee^ie^j,$$

donde

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2}[f^2(r)]'', \\ B &= C = -\frac{[f^2(r)]'}{2r}, \\ E &= \frac{1}{r^2}[\gamma - f^2(r)]. \end{aligned}$$

Ahora debemos introducir estas funciones en las ecuaciones de Lovelock para obtener una expresión que nos permita determinar la función f que caracteriza al posible agujero negro. Para lograr esto, escogemos el índice libre $a = 0$ y expandimos en los demás índices, esto es

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \sum_{k=0}^{[\frac{D-1}{2}]} \alpha_k (D-2k) \epsilon_{0a_1 \dots a_{D-1}} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2k-1} a_{2k}} e^{a_{2k+1}} \dots e^{a_{D-1}} \\ &= \sum_{k=0}^{[\frac{D-1}{2}]} \alpha_k (D-2k) E^{k-1} (2kC + (D-2k-1)E) e^1 e^{i_1} \dots e^{i_{D-2}}, \end{aligned}$$

por lo tanto se debe cumplir que

$$\sum_{k=0}^{[\frac{D-1}{2}]} \alpha_k (D-2k) E^{k-1} (2kC + (D-2k-1)E) = 0. \quad (3.2)$$

Al reemplazar en la forma explícita de las funciones C y E obtenemos la ecuación maestra

$$\sum_{k=0}^{[\frac{D-1}{2}]} \alpha_k (D-2k) [r^{d-2k-1} (\gamma - f^2(r))^k]' = 0, \quad (3.3)$$

con

$$\mu = \sum_{k=0}^{[\frac{D-1}{2}]} \alpha_k (D-2k) [r^{d-2k-1} (\gamma - f^2(r))^k]$$

una constante de integración proporcional a la masa del agujero negro.

Esta ecuación nos entrega la forma de la función f para las distintas teorías rotuladas por el valor de k . En este capítulo consideraremos que $\gamma = 1$ ya que solo estamos interesados en soluciones de agujero negro esféricamente simétricos, con esta condición estamos asumiendo que la variedad base es localmente equivalente a una d -esfera. Veamos ahora algunos casos de interés.

3.1.1 Agujeros negros en Relatividad General con constante cosmológica

Para obtener soluciones en Relatividad General con constante cosmológica debemos considerar que $\alpha_k = 0$ para $k \geq 2$, con esto la ecuación (3.3) queda

$$\mu = \alpha_0 D r^{d-1} - \alpha_1 (D-2) r^{d-3} (1 - f^2(r)),$$

la que tiene solución única y es dada por

$$f^2(r) = 1 + \frac{\alpha_0 D}{\alpha_1 (D-2)} r^2 - \frac{\mu}{\alpha_1 (D-2) r^{D-3}}. \quad (3.4)$$

Esta expresión se reduce a la solución de Schwarzschild usual en $D = 4$, esto es $f^2(r) = 1 - \frac{2M}{r}$ al anular el término cosmológico. Bajo estas condición es claro que el horizonte de eventos del agujero negro está localizado en $r_+ = 2M$.

La solución (2.4) es por lo tanto una generalización de la solución de Schwarzschild a dimensiones arbitrarias, y es conocida como la solución de Schwarzschild-Tangherlini-(A)dS si el signo de la constante cosmológica es positivo o negativo, respectivamente.

3.1.2 Agujeros negros en Einstein-Gauss-Bonnet

Para esta teoría debemos considerar que $\alpha_k = 0$ para $k \geq 3$ con lo que obtenemos la ecuación

$$\mu = \alpha_0 D r^{d-1} + \alpha_1 (D-2) r^{d-3} (1 - f^2(r)) + \alpha_2 (D-4) [r^{d-5} (1 - f^2(r))^2],$$

cuya solución es

$$f^2(r) = 1 + \frac{\alpha_1 (D-2) r^2}{2\alpha_2 (D-4)} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\alpha_0 \alpha_2 (D-4)}{\alpha_1^2 (D-2)^2} + \frac{4\alpha_2 (D-4) \mu}{\alpha_1^2 (D-2) r^{D-1}}} \right), \quad (3.5)$$

Ésta es la solución esféricamente simétrica más general a las ecuaciones de campo de Einstein-Gauss-Bonnet, ya que para la teoría de Lovelock también se cumple el teorema de Birkhoff siempre que los couplings sean constantes arbitrarias (como el caso en consideración) [8].

Si asumimos que $\alpha > 0$, dependiendo del signo que se considere en la función f las soluciones se dividen en dos ramas.

El considerar el signo menos en la solución implica la existencia de un horizonte de eventos. Esto corresponde a la solución de Boulware-Deser y es una solución de agujero negro bien comportado. En esta rama, si tomamos el límite $\alpha \rightarrow 0$ ($\alpha_2 \rightarrow 0$) se recupera la solución de Schwarzschild-Tangherlini-(A)dS como es de esperar.

Por otro lado, si se considera la solución con el signo menos se obtiene una singularidad desnuda y es posible demostrar que esta solución presenta inestabilidades, por lo tanto es considerada un falso estado de vacío.

Un caso de especial interés en la solución de Boulware-Deser es cuando $\Lambda \alpha = -3/4$, aquí las ecuaciones de campo admiten una única solución máximamente simétrica y la teoría puede ser formulada como una teoría de gauge. Esto se debe a que en esta elección particular de las constantes la acción de Einstein- Gauss-Bonnet toma la forma de la acción de Chern-Simons. La afirmación de que los términos superiores en la curvatura de la teoría de Lovelock entregan correcciones a pequeñas distancias a Relatividad General puede ser vista en esta solución de agujero negro. Claramente las soluciones de Relatividad General y Einstein-Gauss-Bonnet son significativamente distintas a primera vista pero, si tomamos $r \gg \sqrt{\alpha}$ la solución de Boulware-Deser tiende a la solución de Schwarzschild, es decir, a Relatividad General. Caso contrario, si consideramos que r es muy pequeño, la solución de Boulware-Deser tiende a la solución de pure Gauss-Bonnet, la que pasamos a mostrar a continuación.

De esto resulta claro que Relatividad General no es una teoría completa para describir la dinámica del espacio-tiempo en altas dimensiones, en el sentido que si queremos estudiar la física a cortas distancias son los términos superiores en la curvatura de la teoría de Lovelock los que adquieren mayor importancia.

3.1.3 Agujeros negros en *pure* Gauss-Bonnet

En esta teoría únicamente el coupling α_2 es distinto de cero, por lo que tenemos la ecuación

$$\mu = \alpha_2(D-4)[r^{d-5}(1-f^2(r))^2],$$

y la solución es

$$f^2(r) = 1 \pm \frac{1}{r^{\frac{D-5}{2}}} \sqrt{\frac{\mu}{\alpha_2(D-4)}}. \quad (3.6)$$

Como señalamos anteriormente, esta solución corresponde a considerar r muy pequeño en la solución de Boulware-Deser. De (3.6) vemos que no hay solución de agujero negro para Gauss-Bonnet en $D = 5$ (no hay horizonte de eventos) y por lo tanto la menor dimensión que permite soluciones de este tipo es $D = 6$, esta es

$$f^2(r) = 1 - \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{\mu}{2\alpha_2}}.$$

Esta solución será de gran importancia en lo que sigue de este trabajo, pues es la que usaremos para construir una solución de cuerda negra en el siguiente capítulo

3.2 Compactificación simple y objetos extendidos

En la sección anterior se hizo una revisión de las soluciones de agujero negro en la teoría de Lovelock. Se mostró que si bien los agujeros negros en altas dimensiones presentan características distintas a los de Relatividad General, ambos corresponden a un solo conjunto de soluciones con simetría esférica.

En esta sección mostraremos otro tipo de soluciones en la teoría de Lovelock; las llamadas cuerdas negras y su generalización a mayores dimensiones conocidas como p -branas negras, obtenidas en el contexto de la teoría de Lovelock mediante una compactificación simple de la variedad espacio-tiempo, y entendidas por lo tanto como una extensión dimensional a las soluciones de agujero negro.

3.2.1 Compactificación simple

Pocos años después de que Albert Einstein desarrollara su teoría de la Relatividad General que explicaba de forma consistente la gravitación, T. Kaluza y O. Klein [2] propusieron una teoría que describía el espacio-tiempo como una variedad de cinco dimensiones similar a Relatividad General, pero incluyendo campos de gauge y un campo escalar que permitiesen obtener una teoría que describiera tanto Relatividad General como la electrodinámica en $D = 4$. La idea consistía básicamente en considerar que el espacio-tiempo posee cinco dimensiones, una dimensión temporal, tres espaciales y una quinta dimensión también espacial pero con una longitud muy pequeña y enrollada en cada punto de la variedad, por lo que sería indetectable y los observables no deberían depender de esta coordenada extra.

La idea de Kaluza-Klein así concebida da origen a la teoría de Einstein-Maxwell-dilatón, que no es precisamente una teoría unificada de Relatividad General con electrodinámica, sin embargo, el método de compactificación sigue resultando de gran interés como una forma de desembocar en teorías conocidas a partir de teorías en altas dimensiones.

En este trabajo usaremos el método de compactificación simple, el que se entiende como una compactificación *a la* Kaluza-Klein sin campos de gauge adicionales y con dilatón constante. Asumiremos que la variedad espacio-tiempo M de dimensión D puede ser escrita como un producto de la forma $M_D = \mathcal{M}_{D-p} \times K_p$, con \mathcal{M}_{D-p} una variedad Lorentziana y K_p una variedad Euclidea compacta de curvatura constante.

3.2.2 Cuerdas y p -branas negras homogéneas

Las cuerdas negras son la extensión dimensional más simple a una solución de agujero negro y que satisface las ecuaciones de Lovelock.

Para entender como aparecen estos objetos en la teoría de Lovelock consideremos primero la teoría de Einstein en cinco dimensiones en el vacío. Las ecuaciones a resolver son, por supuesto, de la misma forma que en cuatro dimensiones

$$R_{\mu\nu} = 0,$$

con $\mu = 0, \dots, 4$.

Podemos pensar que una solución a estas ecuaciones podría ser una generalización de la solución de Schwarzschild usual con simetría hiperesférica de la forma

$$ds^2 = -g(r)dt^2 + \frac{dr^2}{g(r)} + d\Sigma_3^2,$$

y de hecho este es el caso, como vimos en la sección anterior.

Ahora bien, en cinco dimensiones este no es el único tipo de métrica que satisface las ecuaciones de Einstein. Por ejemplo, podemos pensar también en un espacio-tiempo de la forma

$$ds^2 = d\tilde{s}_4^2(x^\mu) + dz^2,$$

donde $d\tilde{s}_4^2$ es la métrica de Schwarzschild en cuatro dimensiones. De acuerdo a las propiedades del tensor de Riemman es directo probar que esta métrica también satisface las ecuaciones de Einstein ya que $R_{\mu 5} = 0$, por lo tanto esta métrica es solución de las ecuaciones de campo y se ha obtenido simplemente como una *oxidación* de la solución de Schwarzschild.

Este tipo de objetos son conocidos como cuerdas negras en la teoría de Lovelock y, en general, para una teoría en D dimensiones, un espacio tiempo con topología $M_D = \mathcal{M}_{D-1} \times \mathcal{R}$ (con \mathcal{R} una sección espacial) es solución de cuerda negra. Por supuesto, para teorías con constante cosmológica y términos de mayor orden en la curvatura las soluciones de cuerda negra se vuelven mucho más complicadas de encontrar.

Es importante notar en este punto que la cuerda negra en cinco dimensiones, si bien es matemáticamente simple de construir deja de manifiesto un hecho muy importante, y es que la teoría de Lovelock, incluso en su caso más simple que es Relatividad General sin constante cosmológica admite soluciones significativamente diferentes a los agujeros negros con horizontes con topología esférica, que en cuatro dimensiones son los únicos objetos negros posibles.

La cuerda negra así construida posee un horizonte de eventos cilíndrico y en principio tiene masa infinita, pero si consideramos que la dimensión extra es compacta, es decir, finita y de dimensión L , la cuerda negra adquiere una masa finita (agujero negro de Kaluza-Klein) [9].

También es posible construir otros objetos de la misma forma que la cuerda negra pero agregando más dimensiones adicionales. Este tipo de soluciones son conocidas como p -branas negras, donde p indica el número de dimensiones extras.

Soluciones homogéneas de p -brana negra son de la forma

$$ds^2 = d\tilde{s}_{D-p}^2 + dz_i dz^i,$$

con $i = 1, \dots, p$

3.2.3 Inestabilidad de Gregory-Laflamme en RG

Como mostramos anteriormente, en Relatividad General en cinco dimensiones existen al menos dos tipos de soluciones posibles, la cuerda negra y el agujero negro. Sabemos también que en Relatividad General en cuatro dimensiones solo existe la solución de agujero, por lo tanto cabe preguntarse ¿cuál es la configuración que se manifiesta en un hipotético colapso gravitacional en cinco dimensiones? o dicho de otra forma ¿cuál de estas soluciones es físicamente relevante? En esta sección haremos una breve revisión de la inestabilidad de Gregory-Laflamme [10], la cual afirma que, dependiendo de la masa y la longitud de la cuerda, la configuración de agujero negro es la que predomina ya que las cuerdas negras presentan inestabilidades.

Sabemos que en el universo los sistemas siempre tienden a un estado de mínima energía, por lo que podríamos pensar que mediante este criterio podemos saber si es el agujero negro o la cuerda negra es el sistema preferido en un colapso gravitacional, sin embargo, una vez asignada una longitud a la cuerda negra ambos sistemas tendrán la misma energía.

Otro principio físico que podemos usar para abordar este problema es el de máxima entropía. De la termodinámica de agujeros negros sabemos que a estos objetos se les puede asignar una entropía, por lo tanto, si existe una diferencia de entropía entre el agujero negro y la cuerda negra, es la configuración de mayor entropía la que debe manifestarse.

Ya conocidas las áreas de los horizontes de eventos, se sigue que las entropías de ambos objetos crecen como [9]

$$S_{\text{BH}} \sim M^{\frac{3}{2}} L^{\frac{1}{2}}, \quad S_{\text{BS}} \sim M^2,$$

donde hemos supuesto que ambos poseen la misma masa. De aquí vemos que si la longitud de la cuerda es suficientemente grande, la configuración preferida termodinámicamente es la de agujero negro, por lo tanto es ésta la configuración más relevante y que tienen sentido como estado final.

Este resultado obtenido mediante el argumento termodinámico debe ser avalado por alguna inestabilidad perturbativa de la cuerda, y esto es lo que mostraremos a continuación.

Consideremos una perturbación a la solución de cuerda negra de Relatividad General en $D = 5$

$$g_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

donde $\hat{g}_{\mu\nu}$ es la solución de cuerda negra con $f(r) = 1 - \frac{r_+}{r}$. Como se están buscando inestabilidades de deben resolver las ecuaciones linealizadas de Einstein y buscar un modo creciente.

La perturbación está explícitamente dada por

$$h_{\mu\nu}(t, r, z) = e^{\Omega t} e^{ikz} \begin{pmatrix} H_{tt}(r) & H_{tr}(r) & 0 & 0 \\ H_{tr}(r) & H_{rr}(r) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & H(r) \sigma_{S^2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde se ha considerado simetría esférica y se ha hecho uso de la homogeneidad de la cuerda para sacar los términos exponenciales fuera de la matriz.

El conjunto completo de ecuaciones que aparecen para las funciones $H_{tt}, H_{tx}, H_{xx}, H$ resultan engorrosas y escapan al objetivo de esta sección que es simplemente mostrar la idea detrás de la inestabilidad (para ver los detalles recomendamos leer los papers originales).

El siguiente paso a seguir es reducir el conjunto de ecuaciones diferenciales a una ecuación maestra en términos de una única función y estudiar su comportamiento.

Aunque la solución a dicha ecuación sea muy difícil de encontrar analíticamente, se puede estudiar el comportamiento asintótico de esta función en el horizonte y el infinito. Si existe una solución que pueda ligar las ramas asintóticas bien comportadas, existirá la inestabilidad y, como sabemos, este es el caso.

Todos estos pasos serán mostrados y clarificados en el siguiente capítulo cuando estudiemos la inestabilidad de las cuerdas negras en la teoría de Gauss-Bonnet, que es el primer objetivo de esta tesis.



Chapter 4

Inestabilidad de la cuerda negra en la teoría de Gauss-Bonnet

Se ha demostrado que las cuerdas negras en Relatividad General en dimensiones arbitrarias son inestables y por lo tanto, la configuración que tiene relevancia física es la de agujero negro. La inestabilidad de Gregory-Laflamme se sigue de un argumento termodinámico, ya que la entropía del agujero negro crece como $S_{BH} \sim M^{\frac{D-2}{D-3}}$, mientras que la entropía de la cuerda negra lo hace como $S_{BS} \sim M^{\frac{D-3}{D-4}}$. Estas entropías, como función de la masa, se cruzan para un valor de masa crítica M_c , por lo tanto, para valores de la masa menores que M_c el agujero negro es el que posee mayor entropía, y para valores por sobre M_c lo es la cuerda negra.

Esta relación entre inestabilidades termodinámicas y perturbativas fue lo que llevó a Gubser y Mitra [11] a conjeturar que ambos tipos de inestabilidades siempre se presentan juntas para soluciones de objetos extendidos.

A partir de estos resultados, surge la pregunta natural de si esto ocurre también para teorías con mayor orden en la curvatura. En general, encontrar soluciones de cuerdas negras homogéneas en Lovelock es muy complicado, pero esta labor se simplifica si se consideran teorías con un único término en la suma de Lovelock, como es el caso de Relatividad General sin constante cosmológica.

En este trabajo nos centramos en teorías cuadráticas en la curvatura. Si queremos soluciones de cuerda negra en la teoría de Einstein Gauss-Bonnet necesitamos que la dimensión del espacio tiempo sea al menos cinco, pero soluciones analíticas de este tipo no se conocen, así que para nuestros fines consideraremos la teoría de Gauss-Bonnet pura, ya que, de acuerdo al comportamiento de la solución de Boulware-Deser, de existir una solución de cuerda negra en la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet ésta debería tender a la solución de Gauss-Bonnet en el límite cuando el radio es mucho menor que el coupling del término de Gauss-Bonnet, por lo que este acercamiento resulta de gran interés.

4.1 Solución de cuerda negra en la teoría de Gauss-Bonnet

La acción de la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet en forma tensorial es dada por

$$I_{EGB} [g] = \frac{1}{16\pi G} \int d^D x \sqrt{-g} [R + \alpha (R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta})] . \quad (4.1)$$

Esta teoría admite la solución de agujero negro [3]:

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{D-2}^2 , \quad (4.2)$$

donde

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{(D-3)(D-4)\alpha} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{64\pi G (D-3)(D-4)\alpha}{(D-2)V(S^{D-2})} \frac{M}{r^{D-1}}} \right] , \quad (4.3)$$

con M la masa del agujero negro. Aquí α tiene dimensiones de longitud al cuadrado, y podemos analizar el comportamiento de la métrica cuando $r \gg \sqrt{\alpha}$ y $r \ll \sqrt{\alpha}$, los que son

$$f(r) \underset{r \gg \sqrt{\alpha}}{\approx} 1 - \frac{32\pi G}{(D-2)V(S^{D-2})} \frac{M}{r^{D-3}} + \dots \quad (4.4)$$

$$f(r) \underset{r \ll \sqrt{\alpha}}{\approx} 1 - \left(\frac{64\pi G M}{(D-3)(D-4)(D-2)\alpha V(S^{D-2})} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r^{\frac{D-5}{2}}} + \dots . \quad (4.5)$$

Como vimos en el capítulo anterior, la primera expresión se reduce a la solución de Schwarzschild-Tangherlini de agujero negro, dejando de manifiesto que para grandes distancias los efectos del término cuadrático son despreciables, mientras que para distancias cortas es el término cuadrático el que domina y se recupera la solución de la teoría de Gauss-Bonnet.

Como se mostró en [12], los agujeros negros asintóticamente planos construidos en [13] pueden ser *oxidados* para construir cuerdas negras y p -branas negras homogéneas. Estas configuraciones son soluciones de la teoría que contiene solo el término de orden k en la acción de Lovelock, siendo el caso $k = 1$ Relatividad General.

Por simplicidad consideraremos solamente el término cuadrático de Gauss-Bonnet en siete dimensiones

$$I_{EGB} [g] = \frac{\alpha}{16\pi G} \int d^7 x \sqrt{-g} [R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}] . \quad (4.6)$$

Esta teoría admite las siguientes soluciones

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\mu}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{\mu}{r}} + r^2 d\Omega_5^2 , \quad (4.7)$$

y

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{m}{r^{1/2}} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{m}{r^{1/2}}} + r^2 d\Omega_4^2 + dz^2 , \quad (4.8)$$

las que corresponden a un agujero negro esféricamente simétrico y a una cuerda negra homogénea, respectivamente. Las constantes m y μ determinan la masa de estas configuraciones y $d\Omega_n$ es el elemento de la línea de una n -esfera, S^n .

Se ha demostrado que las cuerdas negras y p -branas negras construidas de esta manera son termodinámicamente inestables [12] de la misma forma que en Relatividad General, ya que las entropías, como función de la masa crecen como $S_{BH}^{GB} \sim M^{\frac{3}{2}}$ y $S_{BS}^{GB} \sim M^2$, respectivamente, y se cruzan para el un valor crítico M_c^{GB} .

4.2 Inestabilidad perturbativa

Las ecuaciones de campo de la teoría de Gauss-Bonnet son dadas por

$$E_{\mu\nu} := 2RR_{\mu\nu} - 4R_{\mu\rho\nu\sigma}R^{\rho\sigma} + 2R_{\mu\rho\sigma\tau}R^{\rho\sigma\tau} - 4R_{\mu\rho}R_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} (R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}) = 0 . \quad (4.9)$$

Conocemos la solución de cuerda negra de estas ecuaciones y queremos realizar una perturbación para analizar su estabilidad. Para simplificar las expresiones que surgen en las ecuaciones linealizadas, es conveniente realizar un cambio de coordenadas de la forma

$$r = \left(\frac{m}{1-x} \right)^2 , \quad (4.10)$$

transformación que mapea $r \in [m^2, +\infty[$ en $x \in [0, 1[$. En estas nuevas coordenadas la métrica adopta la forma

$$ds_{BS7}^2 = -xdt^2 + \frac{4m^4 dx^2}{x(1-x)^6} + \left(\frac{m}{1-x} \right)^2 d\Omega_4^2 + dz^2 . \quad (4.11)$$

Por simplicidad, y motivados por el trabajo original de Gregory-Laflamme, consideramos una perturbación tipo s-wave de la forma

$$h_{\mu\nu}(t, x, z) = e^{\Omega t} e^{ikz} \begin{pmatrix} H_{tt}(x) & H_{tx}(x) & 0 & 0 \\ H_{tx}(x) & H_{xx}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H(x)\sigma_{S^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

donde σ_{S^4} es la métrica de la 4-esfera y k es el número de onda a lo largo de la dirección z . Un modo inestable corresponde a una solución acotada de las ecuaciones linealizadas de Gauss-Bonnet con Ω positivo.

Es posible demostrar que las ecuaciones de campo linealizadas implican que las componentes de la perturbación pueden ser escritas únicamente en términos de la función $H_{tx}(x)$ en la forma

$$H_{tt}(x) = \frac{(1-x)^6 x^2}{4m^4 \Omega^4} H'_{tx} + \frac{x(1-x)^6}{4m^4 \Omega} H_{tx} \quad (4.12)$$

$$H_{xx}(x) = -\frac{x}{\Omega} H''_{tx} - \frac{2(1-4x)}{(1-x)\Omega} H'_{tx} + \left(\frac{(3k^2 x + 4\Omega^2)m^4}{x(1-x)^6 \Omega} + \frac{6}{\Omega(1-x)} \right) H_{tx} \quad (4.13)$$

$$H(x) = \frac{x^2(1-x)^2}{6\Omega} H''_{tx} + \frac{(1-3x)(1-x)x}{2\Omega} H'_{tx} + \left(\frac{(1-x)(1-7x)}{6\Omega} - \frac{m^4(3k^2 x + 4\Omega^2)}{6(1-x)^4 \Omega} \right) H_{tx} , \quad (4.14)$$

donde $(')$ denota derivación con respecto a la variable x . Además, la componente $H_{tx}(x)$ satisface la siguiente ecuación maestra, que es lineal y de segundo orden

$$A(x) H''_{tx} + B(x) H'_{tx} + C(x) H_{tx} = 0 , \quad (4.15)$$

donde

$$A(x) = (1-x)^6 x^2 ((1-x)^6 - (12k^2 x + 16\Omega^2)m^4) , \quad (4.16)$$

$$B(x) = 3x(1-x)^5 ((32k^2 x^2 + 48x\Omega^2 - 8k^2 x - 16\Omega^2)m^4 + (1-x)^7) , \quad (4.17)$$

$$C(x) = 4(4\Omega^2 + 3k^2 x)^2 m^8 + (1-x)^5 (45k^2 x^2 + 164x\Omega^2 + 3k^2 x - 20\Omega^2)m^4 + (1-x)^{12} . \quad (4.18)$$

Por lo tanto, es posible resolver las ecuaciones para cada una de las componentes a partir de la ecuación maestra.

En este punto es importante notar que la ecuación (4.15) es invariante bajo las transformaciones

$$m \rightarrow \alpha m, \Omega \rightarrow \alpha^{-2} \Omega, k \rightarrow \alpha^{-2} k, \quad (4.19)$$

por lo tanto, es suficiente estudiar la existencia de inestabilidades para un valor fijo del radio del horizonte de eventos $r_+ = m^2$, ya que los otros pueden ser obtenidos aplicando un reescalamiento.

Una solución analítica para la ecuación (4.15) es muy complicada de obtener, pero sí es posible estudiar el comportamiento asintótico de la función H_{tx} para esta ecuación. El comportamiento de la función $H_{tx}(x)$ en el horizonte ($x \rightarrow 0$) y en infinito el ($x \rightarrow +1$) es dado por

$$H_{tx} \xrightarrow{x \rightarrow 0} C_{\pm} x^{-1 \pm 2m^2 \Omega} (1 + \mathcal{O}(x)), \quad (4.20)$$

$$H_{tx} \xrightarrow{x \rightarrow 1} E_{\pm} (1-x)^{\alpha_{\pm}} e^{\mp \frac{m^2 \sqrt{3k^2 + 4\Omega^2}}{2(1-x)^2} \mp \frac{(8\Omega^2 + 3k^2)m^2 \sqrt{3k^2 + 4\Omega^2}}{2(3k^2 + 4\Omega^2)(1-x)}} (1 + \mathcal{O}(1-x)), \quad (4.21)$$

con

$$\alpha_{\pm} = \frac{1 - 12(3k^2 + 4\Omega^2)^2 \pm m^2 (144k^2 \Omega^2 + 128\Omega^4 + 27k^4) \sqrt{3k^2 + 4\Omega^2}}{(3k^2 + 4\Omega^2)^2}. \quad (4.22)$$

Como estamos buscando modos inestables, necesitamos encontrar una solución numérica que interpole entre el signo “+” en (4.20) y el signo “-” en (4.21), que aparentemente son las ramas bien comportadas.

Es natural pensar que para tener un buen comportamiento en el horizonte debemos considerar que $\Omega > \Omega_{c,GB} := \frac{1}{2m^2}$, como fue considerado originalmente por [14], donde los autores mostraban que para la cuerda negra en Relatividad General en $D = 5$ no existían modos inestables dentro de este rango. Sin embargo, en Relatividad General, en el rango $0 < \Omega < \Omega_{c,GR}$ es posible construir una perturbación que sea una composición de modos divergentes en el horizonte de tal manera que las divergencias se cancelen [15].

Esto también puede ser visto considerando el hecho que una superficie a t constante interseca la superficie de bifurcación en lugar del horizonte futuro. Por lo tanto, es necesario considerar coordenadas tipo Kruskal donde las superficies a T constante sí intersecan el horizonte futuro. Así, en estas coordenadas se pueden ver los modos inestables al considerar la rama con el signo + en (4.20).

Para ver si la ecuación maestra (4.15) admite soluciones acotadas para algún valor positivo de Ω , seguiremos el método empleado en [16] para modos cuasinormales.

El método consiste básicamente en proponer una solución por serie de potencias alrededor del horizonte, luego seleccionar la rama bien comportada y finalmente truncar la serie de potencias en una suma parcial de orden N . Entonces, usando la estructura de polos de la ecuación, podemos suponer que el radio de convergencia incluye $x = 1$ y entonces podemos pedir que la serie truncada se anule en infinito. Tal ecuación provee del espectro de modos inestables.

Los resultados de este análisis están representados en la siguiente figura.

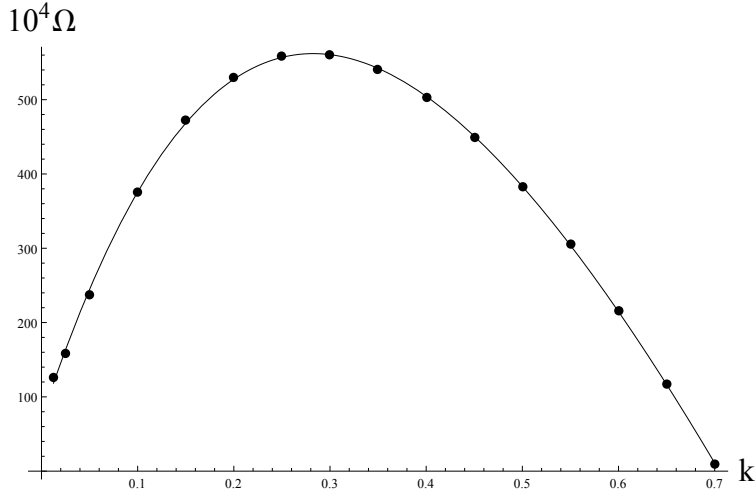


Figure 4.1: Gráfica de Ω vs k para la cuerda negra homogénea en Gauss-Bonnet en $D = 7$. El parámetro m en la solución ha sido fijado a 1. La precisión numérica es tal que todos los dígitos en Ω son estables (la curva continua ha sido incluida únicamente para facilitar la visualización).

Los resultados indican que existe un valor mínimo en la longitud de onda λ_{\min} por encima de la cual la inestabilidad ocurre. Esto implica a la vez la existencia de una longitud crítica de la cuerda sobre la cual la inestabilidad se presenta, al igual que ocurre con las cuerdas negras en Relatividad General [10].

Así, mediante este análisis, hemos encontrado un conjunto de modos inestables en la perturbación de la cuerda negra, y por lo tanto podemos decir que las cuerdas negras en la teoría de Gauss-Bonnet son inestables.



Chapter 5

Causalidad holográfica en la teoría de Lovelock cúbica compactificada

En este capítulo realizaremos un estudio de la causalidad holográfica de la teoría de Lovelock cúbica en siete dimensiones que permite compactificación a Relatividad General. Primero exponemos el argumento de causalidad holográfica como un método de selección de teorías razonables dentro de la conjetura AdS/CFT y luego mostramos la construcción de la teoría compactificada.

Para lograr esta labor consideraremos una solución correspondiente a un espacio producto entre un agujero negro con un espacio de tres dimensiones con curvatura constante, y realizaremos una perturbación tensorial a dicha solución cuya ecuación, para momentum y frecuencias muy grandes, nos permite leer la velocidad de la excitación dual de un gravitón.

5.1 Causalidad holográfica

Como hemos visto en los capítulos anteriores, Lovelock es una teoría que posee un gran número de constantes arbitrarias dependiendo de cuantos términos se consideren en la acción. Estas constantes en principio deberían ser obtenidas experimentalmente, pero como estas teorías son en altas dimensiones solo nos podemos valer de experimentos pensados.

La correspondencia AdS/CFT, que muestra la equivalencia entre una teoría en un espacio-tiempo AdS en el bulk y una teoría de campos conforme en el borde, nos dice que podemos obtener información de uno de estos espacios estudiando su dual.

Esta idea ha sido utilizada en la teoría de Lovelock en [5] para obtener cotas en los valores de algunos couplings en la teoría del bulk mediante el análisis de la causalidad de la teoría en el borde. Este método ha resultado ser de gran interés y es el que usaremos en este trabajo. Consiste básicamente en que, dada una solución de agujero negro asintóticamente AdS, es posible encontrar restricciones para los couplings mediante una perturbación en el bulk que entrega información sobre el comportamiento del gravitón en el borde.

Para hacer esto supongamos que en el borde existen, al menos, una dirección planar y una temporal, por lo que una perturbación en el bulk puede ser escrita en la forma $h_{\mu\nu} = e^{ikx} e^{-i\omega t} H_{\mu\nu}$. Luego, al perturbar las ecuaciones de campo y considerar momentum muy grandes para $r \rightarrow \infty$, es posible leer una expresión para de la excitación de un gravitón en la teoría. Esta velocidad es en principio una velocidad de fase, pero a momentum muy grandes la relación de dispersión es

lineal y por lo tanto estas velocidades se vuelven las mismas.

5.2 Compactificación simple en D=7 a Relatividad General

En [4] se encontró que si consideramos la teoría de Lovelock en siete dimensiones con el término cúbico en la acción, es posible obtener Relatividad General en cuatro dimensiones con un valor pequeño de la constante cosmológica por medio de una compactificación simple. Esto se logra mediante una elección apropiada de los couplings.

Veamos como se construye esta teoría.

En el lenguaje de las formas diferenciales la acción de Lovelock cúbico en siete dimensiones es

$$S_7 = \int_{\mathcal{M}_7} \epsilon_{ABCDEFGH} \left(\frac{1}{7} \alpha_0 e^A e^B e^C e^D e^E e^F e^G + \frac{1}{5} \alpha_1 R^{AB} e^C e^D e^E e^F e^G + \frac{1}{3} \alpha_2 R^{AB} R^{CD} e^E e^F e^G + \alpha_3 R^{AB} R^{CD} R^{EF} e^G \right). \quad (5.1)$$

Si variamos esta acción con respecto al vielbein e^A y la conexión de spin ω^{AB} , obtenemos

$$\delta S_7 = \int_{\mathcal{M}} \epsilon_{ABCDEFGH} \left(\alpha_0 e^A e^B e^C e^D e^E e^F \delta e^G + \alpha_1 R^{AB} e^C e^D e^E e^F \delta e^G + \alpha_2 R^{AB} R^{CD} e^E e^F \delta e^G + \alpha_3 R^{AB} R^{CD} R^{EF} \delta e^G \right. \\ \left. + \alpha_1 \delta \omega^{AB} e^C e^D e^E e^F T^G + 4 \alpha_2 \delta \omega^{AB} R^{CD} e^E e^F T^G + 9 \alpha_3 \delta \omega^{AB} R^{CD} R^{EF} T^G \right),$$

donde hemos asumido que $\delta \omega^{AB}$ es nulo en el borde.

Considerando torsión nula se obtienen las ecuaciones de campo

$$\varepsilon_A = \epsilon_{ABCDEFGH} (\alpha_0 e^B e^C e^D e^E e^F e^G + \alpha_1 R^{BC} e^D e^E e^F e^G + \alpha_2 R^{BC} R^{DE} e^F e^G + \alpha_3 R^{BC} R^{DE} R^{FG}) = 0. \quad (5.2)$$

Consideremos ahora una solución compactificada $\mathcal{M}_4 \times K_3$ de estas ecuaciones

$$ds_{(7)}^2 = ds_{(4)}^2 + R_0^2 d\hat{\Sigma}_{\Lambda_3}^2, \quad (5.3)$$

donde $d\hat{\Sigma}_{\Lambda_3}^2$ es el elemento de línea de un espacio Euclideo de curvatura constante γ proporcional a Λ_3 .

Los vielbein para cada variedad son, respectivamente

$$e_\alpha^A = \{\bar{e}_\mu^a, \hat{e}_\rho^i\}$$

donde a son los índices de Lorentz de la variedad \mathcal{M}_4 e i los índices de Lorentz de la variedad K_3 .

La curvatura del espacio producto es de la forma

$$R^{AB} = \begin{pmatrix} R_{4 \times 4}^{ab} & 0 \\ 0 & R_{3 \times 3}^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{R}^{ab} & 0 \\ 0 & \hat{R}^{ij} = \Lambda_3 \hat{e}^i \hat{e}^j \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Expandiendo la ecuación (5.2) en los índices espacio-temporales de cada variedad obtenemos la ecuación de campo

$$\epsilon_{abcd} \{ (\alpha_2 \Lambda_3 + \alpha_1) \bar{R}^{bc} \bar{e}^d + (\alpha_1 \Lambda_3 + 5\alpha_0) \bar{e}^b \bar{e}^c \bar{e}^d \} = 0 \quad (5.5)$$

y el constraint escalar

$$\epsilon_{abcd} \{ (3\alpha_3 \Lambda_3 + \alpha_2) \bar{R}^{ab} \bar{R}^{cd} + (2\alpha_2 \Lambda_3 + 6\alpha_1) \bar{R}^{ab} \bar{e}^c \bar{e}^d + (\alpha_1 \Lambda_3 + 15\alpha_0) \bar{e}^a \bar{e}^b \bar{e}^c \bar{e}^d \} = 0. \quad (5.6)$$

Tomando la traza de la ecuación (5.5), encontramos

$$\epsilon_{abcd} \bar{R}^{ab} \bar{e}^c \bar{e}^d = - \frac{(2\Lambda_3 + 5\alpha_0)}{(\alpha_2 \Lambda_3 + \alpha_1)} \bar{e}^a \bar{e}^b \bar{e}^c \bar{e}^d,$$

y reemplazando esto en la ecuación (5.6), obtenemos

$$\epsilon_{abcd} \left((3\alpha_3\Lambda_3 + \alpha_2)\bar{R}^{ab}\bar{R}^{cd} + \frac{\alpha_0(5\alpha_2\Lambda_3 - 15\alpha_1) - \alpha_1\Lambda_3(5\alpha_1 + \alpha_2\Lambda_3)}{(\alpha_2\Lambda_3 + \alpha_1)}\bar{e}^a\bar{e}^b\bar{e}^c\bar{e}^d \right) = 0. \quad (5.7)$$

De lo anterior vemos que, al escoger $\Lambda_3 = -\frac{\alpha_2}{3\alpha_3}$ podemos eliminar la obstrucción a las ecuaciones de Einstein cuando se cumple que

$$\frac{\alpha_0(5\alpha_2\Lambda_3 - 15\alpha_1) - \alpha_1\Lambda_3(5\alpha_1 + \alpha_2\Lambda_3)}{(\alpha_2\Lambda_3 + \alpha_1)} = 0.$$

Por otra parte, usando (5.7) y teniendo en cuenta que en Relatividad General la constante cosmológica es dada por

$$\Lambda_D = \frac{\sigma}{2l^2}(d-1)(d-2),$$

para el caso en que $D = 4$ y $\sigma = -1$, encontramos la expresión para la constante cosmológica en términos de Λ_3

$$\Lambda_4 = -3\frac{(5\alpha_0 + \alpha_1\Lambda_3)}{(\alpha_1 + \alpha_2\Lambda_3)}. \quad (5.8)$$

Así, estas ecuaciones nos permiten escribir los couplings α_2 y α_3 en términos de α_1 , α_0 y Λ_3 .

5.3 Perturbación en la solución de agujero negro

Como queremos estudiar la causalidad de esta teoría en el borde, debemos perturbar una solución de agujero negro asintóticamente AdS. Por simplicidad consideraremos una perturbación tensorial general para hacer este análisis [Apéndice C].

Consideremos entonces una solución de agujero negro asintóticamente AdS_4 y planar para las ecuaciones de campo en la variedad de cuatro dimensiones

$$ds_{AdS_4}^2 = -\left(\frac{r^2}{l^2} - \frac{\mu}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{\left(\frac{r^2}{l^2} - \frac{\mu}{r}\right)}dr^2 + r^2(dx_2^2 + dx_3^2), \quad (5.9)$$

y un espacio de curvatura constante en coordenadas de Hopf

$$ds_{S^3}^2 = d\eta^2 + \sin^2\eta d\xi_1^2 + \cos^2\eta d\xi_2^2. \quad (5.10)$$

De las relaciones entre los couplings, y teniendo en consideración que en tres dimensiones $\Lambda_3 = -K$, se lee que

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{5\alpha_1(\alpha_1\Lambda_3 + 3\alpha_0)}{\Lambda_3(5\alpha_0 - \alpha_1\Lambda_3)} = -\frac{5\alpha_1(3\alpha_0 - \alpha_1K)}{K(5\alpha_0 + \alpha_1K)}, \\ \alpha_3 &= -\frac{5\alpha_1(\alpha_1\Lambda_3 + 3\alpha_0)}{3\Lambda_3^2(5\alpha_0 - \alpha_1\Lambda_3)} = \frac{5\alpha_1(3\alpha_0 - \alpha_1K)}{3K^2(5\alpha_0 + \alpha_1K)}, \\ l^2 &= \frac{4\alpha_1}{5\alpha_0 - \alpha_1\Lambda_3} = \frac{4\alpha_1}{5\alpha_0 + \alpha_1K}, \\ f(r) &= \frac{(5\alpha_0 - \alpha_1\Lambda_3)r^2}{4\alpha_1} - \frac{\mu}{r} = \frac{(5\alpha_0 + \alpha_1K)r^2}{4\alpha_1} - \frac{\mu}{r}, \\ g(x_K) &= 1 - \frac{\Lambda_3}{4}(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) = 1 + \frac{K}{4}(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2). \end{aligned}$$

Los vielbein para la métrica del espacio producto son dados por

$$e^0 = \sqrt{f}dt, \quad e^1 = \frac{1}{\sqrt{f}}dr, \quad e^2 = rdx_2, \quad e^3 = rdx_3,$$

$$e^K = \frac{1}{g} dx_K, \quad K = 4, 5, 6.$$

Explícitamente, la métrica de background es

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K} \sin^2 y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K} \cos^2 y_1 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

En el caso de la teoría compactificada, la perturbación sobre la métrica tiene la forma general

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h_{ab} & h_{aj} \\ h_{ia} & h_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{4 \times 4} & 0_{3 \times 4} \\ 0_{4 \times 3} & H(x)\varepsilon[T_{ij}]_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

luego, la métrica perturbada (en término de funciones a determinar que dependen de y_1 , y_2 e y_3 , y hacen cumplir la nulidad de la traza en los armónicos tensoriales para la perturbación) toma la forma

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H(x)\varepsilon A & H(x)\varepsilon C & H(x)\varepsilon E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H(x)\varepsilon C & H(x)\varepsilon B & H(x)\varepsilon F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H(x)\varepsilon E & H(x)\varepsilon F & H(x)\varepsilon D \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

$$= \begin{pmatrix} -f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K} + H(x)\varepsilon A & H(x)\varepsilon C & H(x)\varepsilon E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H(x)\varepsilon C & \frac{1}{K} \sin^2 y_1 + H(x)\varepsilon B & H(x)\varepsilon F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H(x)\varepsilon E & H(x)\varepsilon F & \frac{1}{K} \cos^2 y_1 - \cos^2 y_1 H(x)\varepsilon A - \frac{\cos^2 y_1}{\sin^2 y_1} H(x)\varepsilon B \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Introduciendo esto en las ecuaciones de Lovelock cúbico a primer orden en ε

$$\epsilon_{ABCDEFGH} \begin{pmatrix} \delta R^{BC} (3\alpha_3 R^{DE} R^{FG} + 2\alpha_2 R^{DE} e^F e^G + \alpha_1 e^D e^E e^F e^G) \\ + 2(\alpha_2 R^{BC} R^{DE} e^F + 2\alpha_1 R^{BC} e^D e^E e^F + 3\alpha_0 e^B e^C e^D e^E e^F) \delta e^G \end{pmatrix} = 0,$$

y tomando la transformada de Fourier de la función H

$$H(t, r, x) = \int d\omega dk \hat{H}(r) e^{-i\omega t + kx},$$

se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales en las que, al tomar el límite para momentum y frecuencias muy grandes se lee que

$$c_{\text{tensor}}^2 = 1 - \frac{r_+^3}{r^3},$$

donde r_+ es el radio del horizonte de eventos de la solución de Schwarzschild-AdS planar.

Chapter 6

Conclusiones

En la primera parte de esta tesis hemos mostrado que las cuerdas negras en la teoría de Gauss-Bonnet son inestables perturbativamente. Los resultados indican que existe un valor mínimo en la longitud de onda λ_{\min} por encima de la cual la inestabilidad ocurre. Esto implica a la vez la existencia de una longitud crítica de la cuerda sobre la cual la inestabilidad se presenta, al igual que ocurre con las cuerdas negras en Relatividad General. Además, siguiendo los mismos argumentos que en [17], es posible mostrar que esta inestabilidad es física, ya que la perturbación no es gauge puro.

De la segunda parte de esta tesis, la expresión encontrada para la velocidad de la luz del modo tensorial del gravitón nos dice que:

- La restricción de causalidad de la teoría del borde implica la existencia de un horizonte en el bulk ($r_+ > 0$).
- La causalidad de la perturbación tensorial no implica restricciones extras sobre las constantes de acoplamiento libres en la teoría (α_0 y α_1).

Del resultado encontrado en este trabajo surge de manera natural la pregunta de si esto ocurre de igual forma en cualquier teoría que admita compactificación, es decir, si para este tipo de teorías *¿es posible afirmar que la compactificación más la causalidad holográfica implican la censura cósmica?*. Un acercamiento de este tipo permitiría construir un mecanismo de selección de teorías físicamente viables.



Chapter 7

Apéndice

7.1 Delta de Kronecker generalizada

La delta de Kronecker generalizada es un tensor de rango (r, r) totalmente antisimétrico definido como

$$\delta_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r} = \det \begin{pmatrix} \delta_{\nu_1}^{\mu_1} & \delta_{\nu_2}^{\mu_1} & \dots & \delta_{\nu_r}^{\mu_1} \\ \delta_{\nu_1}^{\mu_2} & \delta_{\nu_2}^{\mu_2} & \dots & \delta_{\nu_r}^{\mu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{\nu_1}^{\mu_r} & \delta_{\nu_2}^{\mu_r} & \dots & \delta_{\nu_r}^{\mu_r} \end{pmatrix},$$

correspondiente a una suma de $r!$ términos. Algunas de sus importantes propiedades son:

1. $\delta_{\nu_1 \dots \nu_s \nu_{s+1} \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_s \mu_{s+1} \dots \mu_r} = \frac{(n-s)!}{(n-r)!} \delta_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_s}$,
2. $\delta_{\mu_1 \dots \mu_r}^{1 \dots r} = \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_r}$,
3. $\delta_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r} = \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_r} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_r}$.

7.2 Bases no-coordenadas y ecuaciones de estructura de Cartan

Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable cuyas bases coordenadas en los espacios tangente $T_p \mathcal{M}$ y cotangente $T_p^* \mathcal{M}$ son $\{\partial/\partial x^\mu\}$ y $\{dx^\mu\}$, respectivamente. Si asignamos una métrica a la variedad es posible escoger una nueva base para el espacio tangente como una combinación lineal de las bases coordenadas, esto es

$$e_a = e_a^\mu \partial/\partial x^\mu \quad (7.1)$$

con $\{e_a^\mu\} \in GL(m, R)$. Si requerimos que la base $\{e_a\}$ sea ortonormal, es decir, que satisfaga

$$g(e_a, e_b) = e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{ab},$$

es posible invertir esta relación y obtener que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu, \quad (7.2)$$

con lo que podemos decir en algún sentido que e^a_μ es una especie de raíz cuadrada de la métrica.

Escoger una base no-coordenada en el espacio tangente induce de forma natural una base no-coordenada para el espacio cotangente, a saber

$$e^a = e^a{}_\mu(x)dx^\mu, \quad (7.3)$$

estos $\{e^a\}$ se conocen como vielbein y son 1-formas.

Se debe notar que si bien $\partial/\partial x^\mu$ y $\partial/\partial x^\nu$ conmutan, las bases no-coordenadas no tienen por qué hacerlo, en efecto, estas satisfacen un álgebra

$$[e_a, e_b] = \mathcal{C}_{ab}{}^c e_c, \quad (7.4)$$

con $\mathcal{C}_{ab}{}^c$ las constantes de estructura.

Para realizar el cálculo exterior se define también la conexión de spin como

$$\omega^a{}_b = \Gamma^a{}_{cb} e^c, \quad (7.5)$$

donde $\Gamma^a{}_{cb} = e^c{}_\mu e_a{}^\nu \nabla_\nu e_b{}^\mu$ y $\omega^a{}_b(x) = \omega^a{}_{b\mu} dx^\mu$.

El vielbein y la conexión de spin satisfacen las llamadas ecuaciones de estructura de Cartan

$$T^a = de^a + \omega^a{}_b e^b \quad (7.6)$$

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \omega^c{}_b \quad (7.7)$$

donde hemos definido $T^a = \frac{1}{2} T^a{}_{bc} e^b e^c$ y $R^a{}_b = \frac{1}{2} R^a{}_{bcd} e^c e^d$.

La condición de consistencia de estas ecuaciones lleva a las identidades de Bianchi

$$DT^a = R^a{}_b e^b,$$

$$DR^a{}_b = 0.$$

7.3 Perturbación tensorial

Las perturbaciones tensoriales en una métrica definida sobre un espacio producto de la forma $M_D = \mathcal{M}_{D-p} \times K_p$, con K un espacio de curvatura constante, pueden ser escritas en términos de los armónicos tensoriales [Ishi], los que satisfacen la ecuación

$$(\nabla^2 + k^2)T_{ij} = 0, \quad (7.8)$$

de acuerdo a esto, T es un autotensor del operador laplaciano y posee autovalores negativos. Esta matriz es además libre de traza y con divergencia nula.

La perturbación tensorial más general debe satisfacer

$$h_{ab} = 0, \quad h_{ai} = 0, \quad h_{ij} = 2r^2 H(x) T_{ij},$$

donde H debe ser una función invariante bajo transformaciones de gauge y depende únicamente de las coordenadas de \mathcal{M} . Se debe notar que una perturbación tensorial solo es posible para $D > 4$, puesto que no existen armónicos tensoriales sobre S^2 .

Bibliography

- [1] D. Lovelock, *J. Math. Phys.* **12**, 498 (1971).
- [2] M. J. Duff, B. E. W. Nilsson and C. N. Pope, *Phys. Rept.* **130**, 1 (1986).
- [3] D. G. Boulware and S. Deser, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2656 (1985).
- [4] F. Canfora, A. Giacomini, R. Troncoso and S. Willison, *Phys. Rev. D* **80**, 044029 (2009) [arXiv:0812.4311 [hep-th]].
- [5] X. O. Camanho and J. D. Edelstein, *JHEP* **1004**, 007 (2010) [arXiv:0911.3160 [hep-th]].
- [6] R. Aros, M. Contreras, R. Olea, R. Troncoso and J. Zanelli, *Phys. Rev. D* **62**, 044002 (2000) [hep-th/9912045].
- [7] J. Zanelli, hep-th/0502193.
- [8] R. Zegers, *J. Math. Phys.* **46**, 072502 (2005) [gr-qc/0505016].
- [9] Black Holes in Higher Dimensions, Gary T. Horowitz
- [10] R. Gregory and R. Laflamme, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2837 (1993) [hep-th/9301052].
- [11] S. S. Gubser and I. Mitra, *JHEP* **0108**, 018 (2001) [hep-th/0011127].
- [12] G. Giribet, J. Oliva and R. Troncoso, *JHEP* **0605**, 007 (2006) [hep-th/0603177].
- [13] J. Crisostomo, R. Troncoso and J. Zanelli, *Phys. Rev. D* **62**, 084013 (2000) [hep-th/0003271].
- [14] R. Gregory and R. Laflamme, *Phys. Rev. D* **37**, 305 (1988).
- [15] P. Bizon and R. M. Wald, *Phys. Lett. B* **267**, 173 (1991).
- [16] G. T. Horowitz and V. E. Hubeny, *Phys. Rev. D* **62**, 024027 (2000) [hep-th/9909056].
- [17] R. Gregory and R. Laflamme, *Nucl. Phys. B* **428**, 399 (1994) [hep-th/9404071].