Universidad de Concepción
Campus Los Ángeles
Escuela de Educación
Departamento de Ciencias Básicas

Representaciones semióticas y visualización en el aprendizaje de las transformaciones isométricas en el plano cartesiano

Seminario para optar al grado de Licenciado en Educación y al título profesional de Profesor de Matemática y Educación Tecnológica

Seminarista
Sofía Lorena Gatica Silva

Profesor Guía
Sra. Irma Elena Lagos Herrera, Mag. Ed., UdeC.

Los Ángeles de Chile, 2017

Comisión Evaluadora

Sra. Lilian Vargas Villar, Profesora de Matemática, PUC; Dip. en Estadística Aplicada, UdeC; Mg en Educación, Mención Currículo y Evaluación, ULARE; Mag. en Didáctica de la Matemática, UCM.

Sr. Cristian Pérez Toledo, Dr. en Ingeniería Matemática, UdeC.

Sra. Irma Lagos Herrera, Prof. Est. en Español, Mg. en Educación, Dr. Educación (e), UdeC

Exposición oral realizada el día 3 de marzo del año 2017, en la Sala de Biblioteca, Los Ángeles.

Agradecimientos

Agradecer a Dios por sobre todas las cosas, por darme la vida y la fuerza para levantarme cada día y por permitir alcanzar mis proyectos.

A mis padres, por los valores y motivaciones entregados, lo que me permitió perseverar para alcanzar mi meta.

A cada uno de mis profesores por aportar a mi formación profesional y valórica a lo largo de los años de estudio en la carrera.

A los profesores que me ayudaron a concretar este trabajo, pues su ayuda y motivación fueron fundamentales para mi persona. De manera especial a la profesora Irma Lagos por su apoyo incondicional; la acuciosidad del análisis estadístico guiado por la profesora Lilian Vargas y al profesor Cristian Pérez por su disposición y precisión en las correcciones. A los profesores Sixto Martínez y Víctor Jara por su disposición a la atención de dudas; al profesor Ramón Elías y la profesora Nina Almagia por sus tan acertadas palabras, a los profesores Gabriel Aguilera y Francisco Toledo por su rápida respuesta ante alguna petición de ayuda.

A mi familia consanguínea, que independiente de las circunstancias, su apoyo y amor incondicional han sido el pilar de mi vida.

A mis amigos Vanesa Arévalo, Fernando Castillo, Javier Cruces y Josué Alveal, que con su preocupación y risas hacían más amenos los días tanto en la universidad como fuera de ella; en especial, Rodrigo Campos, amigo de batallas, que compartió la mayor parte del tiempo estudiando conmigo a lo largo de estos años, gracias por todo. Parte de este logro también es gracias a ti.

A mi familia que no era de sangre, pero estuvo para mí adoptándome como parte de la suya, gracias tía Martita y gracias Mimí, infinitos abrazos para ustedes.

A cada uno de los funcionarios de la universidad, que con la dedicación a sus labores me permitían llegar plácidamente a las dependencias de mi querida UdeC, de manera especial a la señorita Constanza Castillo, que con su paciencia y gestión en su trabajo proporcionó luz en mi camino.

Dedicatoria

A ti que desde pequeña me cuidaste y no has dejado de hacerlo hasta ahora.
A ti por mostrarme que podía llegar lejos si me esforzaba.
Por ti llegué y llegaré aún más lejos.
Te amo hermano Ray.

Índice

Resumen 1
Abstract..2
Introducción 3
Capítulo 1: Planteamiento del problema..4
1.1 Definición del problema 4
1.2 Planteamiento del problema 5
1.3 Justificación de la investigación..7
1.4 Objetivos..9
1.4.1 Objetivo General..9
1.4.2 Objetivos Específicos..9
1.5 Preguntas de Investigación..10
1.6 Hipótesis de investigación..11
Capítulo 2: MARCO REFERENCIAL..12
2.1 Teorías del aprendizaje..12
2.1.1 Conductismo..13
2.1.2 Constructivismo..15
2.1.3 Teoría socio constructivista de Lev Vygotsky..18
2.2 Factores socioafectivos que influyen en la construcción de aprendizaje........................22
2.2.1 Motivación..22
2.2.2 Actitud..25
2.3 Razonamiento en geometría..27
2.4 Razonamiento espacial..29
2.5 Teoría de Van Hiele..31
2.5.1.1 Historia del modelo..31
2.5.1.2 Descripción de la teoría de Van Hiele..33
2.5.1.3 Niveles de razonamiento..33
2.6 Visualización..36
2.6.1 Algunos antecedentes históricos de la visualización..37
2.6.2 Descripción de la visualización..37
2.7 Teoría de registros de representación semiótica..44
2.7.1 Tipos de registros de representación..48
2.8 Algunos antecedentes históricos de las transformaciones isométricas........................51
Capítulo 3: Marco Metodológico..54
3.1 Alcance de la investigación..54
3.2 Enfoque..54
3.3 Diseño..54

3.4 Dimensión Temporal....54
3.5 Unidad de análisis....55
3.6 Población....55
3.7 Muestra....55
3.8 Variables....56
3.8.1 Variable independiente....56
3.8.2 Variables dependientes y su definición operacional....56
3.9 Recolección de Datos....58
3.10 Instrumentos de recolección de datos. 59
3.10.1 Pre test de transformación isométrica....59
3.10.2 Post test de transformación isométrica....62
3.10.3 Escala de motivación hacia la matemática....63
3.10.4 Test de actitud hacia la matemática....64
3.10.5 Test de razonamiento espacial....64
3.11 Intervención didáctica en Geometría....65
3.12 Tratamiento de los datos....68
Capítulo 4: Análisis de los datos y verificación de hipótesis....69
4.1 Análisis pre y post test de conocimiento de transformaciones isométricas....69
4.1.1 Análisis descriptivo por objetivo....72
4.1.1.1 Objetivo A.... 72
4.1.1.2 Objetivo B....80
4.1.1.3 Objetivo C....91
4.1.1.4 Objetivo D....97
4.2 Análisis de utilización de registros en pre y post test de transformaciones isométricas.... 103
4.3 Análisis pre y post test de razonamiento espacial....112
4.4 Análisis pre y post test de actitud hacia la matemática....114
4.5 Análisis de pre y post test de motivación hacia la matemática....117
4.6 Análisis de aprendizaje hombres v/s mujeres en pre y post test de conocimiento de transformaciones isométricas....120
4.7 Análisis correlacional....123
Capítulo 5: RESULTADOS, CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS....126
5.1 Resultados....126
5.2 Discusión de resultados....128
5.3 Conclusiones....131
5.4 Limitaciones de la investigación....132
5.5 Sugerencias....133
Referencias bibliográficas....134
Anexo A: Conceptos unidad transformaciones isométricas....141
Definiciones y conceptos presentes en la unidad de transformaciones isométricas....142
A. Transformación isométrica....142
a. Transformación isométrica en el plano euclidiano....143

i. Traslación………143
ii. Vector……….143
iii. Simetría axial……………………………………………………………………………………………………….145
iv. Simetría central……………………………………………………………………………………………………146
v. Rotación…….146
b. Transformaciones isométricas en el plano cartesiano……………………………………………147
i. Traslación en el plano cartesiano……………………………………………………………………….147
ii. Simetría axial en el plano cartesiano…………………………………………………………………..147
iii. Simetría central en el plano cartesiano……………………………………………………………….148
iv. Rotación en el plano cartesiano………………………………………………………………………….148
Anexo B: Guías de aprendizaje y presentaciones…………………………………………………………151
Análisis de las actividades según teoría**…**……………………………………………………………179
Anexo C: Planificaciones intervención…………………………………………………………………………184
Anexo D: Instrumentos de recolección de datos……………………………………………………………192

Resumen

Investigación cuantitativa de tipo correlacional y explicativa, con diseño pre experimental de un solo grupo, con pretest, intervención pedagógica y postest, con el propósito de determinar la influencia de la enseñanza basada en la Teoría de representación semiótica y visualización en el aprendizaje de las transformaciones isométricas, en la motivación y actitud hacia la matemática; en el razonamiento espacial de una muestra intencionada de 45 estudiantes de primer año medio de un colegio particular subvencionado rural de vulnerabilidad media de la comuna de Los Ángeles, centro-sur de Chile.

La metodología, que se apoya en la noción semiótica de registro, consiste en distinguir y coordinar registros de representación que los y las estudiantes desarrollan en el transcurso de 4 semanas, a través de actividades en las que el profesor actúa como guía y no sólo como expositor.

Sobre la base de los resultados obtenidos de los análisis estadísticos con pruebas como Shapiro – Wilk, de Wilcoxom y coeficiente de correlación de Spearman, se concluye que la propuesta es efectiva para el proceso de aprendizaje de transformaciones isométricas y en el aumento de la utilización de registros de representación de los y las estudiantes. Se requiere de más tiempo de implementación para incrementar el razonamiento espacial, motivación y actitud hacia la matemática.

Palabras claves: representación semiótica, visualización, razonamiento espacial, aprendizaje, factores socio-afectivos, transformación isométrica

Abstract

A Quantitative research of correlation and explanatory type, with pre-experimental design of a single group, pretest, posttest and pedagogic intervention. This investigation has the purpose of determining the influence teaching based on the semiotic representation theory and the visualization of the learning of the isometric transformations, and its influence on the motivation and attitude toward mathematics and in the spatial reasoning. The subjects of investigation are 45 first grader students from a particular subsidized rural high school with middle vulnerable social situation of the city of Los Angeles, in south-central Chile.

The methodology, which is based on the semiotic notion of record, consists in distinguishing and coordinating the records that the subjects develop through the course of 4 weeks, through activities in which the teacher acts not only as a guide, but also as an expositor.

Based on the results obtained from the statistical analyzes with tests such as Wilcoxom 's Shapiro - Wilk and Spearman' s correlation coefficient, it is concluded that the proposal is effective for the learning process of isometric transformations and for the increase in the use of representation records by the students. However, more implementation time is required to increase spatial reasoning, motivation and attitude towards mathematics.

Keywords: Semiotic Representation, Visualization, Spatial Reasoning, Learning, Socio-affective factors, Isometric Transformation

Introducción

Para la mayoría de los estudiantes en matemática, comprender los conceptos es un tanto difícil y más aún relacionarlos con la realidad. Específicamente, se observa que en la enseñanza de la Geometría se ha mantenido un enfoque deductivo, priorizando la memorización de conceptos, teoremas y fórmulas por parte de los estudiantes. Estas limitaciones formales, simbólicas y algebraicas van en perjuicio de la intuición como una primera manera de acceder al conocimiento geométrico, pues la manipulación, el tacto, la vista y el dibujo deben permitir al alumno habituarse a las figuras, formas y movimientos de su entorno para posteriormente establecer las abstracciones precisas.

A continuación se presenta una investigación sobre la utilización de estrategias didácticas de enseñanza para acceder al conocimiento geométrico y realizar abstracciones de los conceptos implicados. Es por ello que se implementa la Teoría de representación semiótica apoyada de la visualización como metodología para el aprendizaje, en la unidad de Geometría respecto a las transformaciones isométricas en el plano cartesiano, junto con establecer relaciones entre los factores socio-afectivos y el aprendizaje de la Geometría en los y las estudiantes de primer año medio de un colegio particular subvencionado de la comuna de Los Ángeles.

El informe consta de cinco capítulos. En el primero, se presenta el planteamiento del problema que suscita la descripción de las inquietudes presentadas para impulsar la investigación; en el segundo, la base teórica necesaria para dar sustento a lo presentado en el transcurso de la intervención; en el tercero, los métodos utilizados para recabar la información; en el cuarto, el análisis de los datos obtenidos; en el quinto, los resultados y su discusión, las conclusiones y sugerencias originados tras el análisis de resultados. Finalmente, se incluyen las referencias bibliográficas y los anexos que incluyen las guías de aprendizaje, las planificaciones de las sesiones y los instrumentos de recopilación de información.

CAPÍTULO 1: Planteamiento del problema

1.1 Definición del tema

El presente estudio se motiva en la necesidad de evaluar la implementación de metodologías constructivistas que sean eficaces en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los y las estudiantes para mejorar la calidad del aprendizaje en transformaciones isométricas en el plano cartesiano, debido a la tendencia de bajos puntajes en pruebas del Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE), del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA) y del Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS), que miden el conocimiento estandarizado solicitado por el Ministerio de Educación (MINEDUC) y que año a año presenta déficit en distintos niveles en la asignatura de matemática.

Los actuales programas de estudio del país enfatizan el uso de herramientas como la lectura, escritura y el razonamiento matemático de los y las estudiantes para garantizar un aprendizaje constante no sólo en la escuela, sino también en el mundo que los rodea; sin embargo el informe PISA menciona que Chile pese a lograr relativos buenos resultados en las pruebas de matemática, no son comparables con otros países latinoamericanos como México, Uruguay y Costa Rica, ya que, se evidencia una gran brecha entre los que obtienen los mejores resultados, si se considera que un 53% de los estudiantes chilenos de 15 años no logra superar las competencias básicas que les permitan usar su conocimiento y habilidades para resolver problemas, así como poder desarrollar tareas contextualizadas en la vida cotidiana, siendo posible proyectar que la mayoría de esos educandos seguirá teniendo problemas en matemática (PISA, 2012; El Mostrador, 2016; La Tercera,2015)

Por lo anterior, se pretende continuar estudios realizados en la Universidad de Concepción respecto a la enseñanza basada en la Visualización, tales como: “Enseñanza basada en la Visualización en el aprendizaje de funciones raíz cuadrada, exponencial y logarítmica” de Oviedo y Valenzuela (2015) y “Visualización: Una herramienta para el desarrollo del conocimiento de razones, proporciones y proporcionalidad” de Arratia, Manríquez & Valdebenito (2016), además de investigaciones internacionales como Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal (Ospina, 2012) entre tantas otras, en las cuales se evidencia que tales metodologías ajenas a lo tradicional provocan una mejora tanto en el rendimiento como en los factores socio-afectivos, hecho que se traduce en una enseñanza motivante y efectiva porque permiten participación activa de los aprendices, una mayor concentración y construcción de su propio aprendizaje.

La presente investigación se centra en el enfoque cognitivo de Duval , la teoría de representación semiótica apoyada en la visualización, para lograr que el estudiantado se involucre de tal forma en la construcción de objetos matemáticos que permita un aprendizaje significativo en la enseñanza de Transformaciones Isométricas en el plano cartesiano, al tiempo que desarrollan el razonamiento espacial, con énfasis en los niveles semióticos de representación (Guzmán, I., 1998)

1.2 Planteamiento del problema

Las dificultades que presentan los alumnos en Matemática y que generan un bajo rendimiento es una problemática de la que los profesores de la disciplina y los apoderados están en conocimiento. Sin ir más lejos, en diversos resultados de pruebas internacionales tomadas en Chile, tales como PISA y TIMSS se observa que a los estudiantes les dificulta la resolución de ejercicios básicos de matemática. Así, y según los últimos datos recabados por la prueba PISA correspondiente al año 2012, mostraron que Chile logra un puntaje de 423, por debajo del promedio de 500 de la los países que conforman la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), lo que se traduce en la ausencia de cambios significativos en el aprendizaje de los contenidos y conlleva a que persistan los bajos resultados en las mencionadas pruebas.

En cuanto a la educación recibida por los estudiantes en Chile y relacionado con la enseñanza tradicional, Baeza (2010, citado en Oviedo y Valenzuela, 2015) menciona:

> "… una educación como la actual, repetitiva y memorista, donde no hay crítica ni desarrollo de las capacidades creativas de los alumnos, no va llegar a ninguna parte razonable. Creo que la educación es el pilar fundamental de nuestra sociedad, y si damos un paso serio en esta dirección, tendremos un país mucho mejor."

Palabras que cuestionan acertadamente la educación entregada en Chile, señalando que restringe el desarrollo de competencias de los y las escolares por no innovar en la enseñanza-aprendizaje de los estudiantes, limitando la educación a la entrega de contenidos. Al considerar la educación como un pilar fundamental de la sociedad y que con ella se construye un camino hacia un país mucho mejor, se ve rebatido con las evidentes evaluaciones de pruebas estandarizadas, pues se olvida que se relaciona con personas de distintas características, que poseen distintas habilidades, creencias y realidades en su diario vivir, a las que se pueden estimular para que alcancen un buen desarrollo en las tareas que se le encomienden, a través de una correcta motivación, mejorando la actitud y seguridad en las tareas que efectúen.

De manera que la educación a la que se hace mención, la enseñanza tradicional, genera estudiantes desmotivados y aburridos de la forma en cómo aprenden, ya que su única metodología es la memorización de todo lo que es entregado por un profesor. Además, al ser sólo memorístico, se pierde la articulación con la realidad o con situaciones que sean significativas para el alumno, aplicando poco de lo aprendido al momento de presentarse un problema (Sáez, 2010) y en donde ellos mismos, no le encuentran la utilidad de los contenidos propuestos, pues son jóvenes que se encuentran inmersos en la sociedad del conocimiento y con acceso a la tecnología.

Así, para subsanar los hechos a los que limita la enseñanza tradicional, es necesario que se integren en el proceso enseñanza- aprendizaje, teorías que involucren, la estructuración de procesos cognitivos, confrontación con nuevos conocimientos, impulsen al estudiante a retomar los aprendizajes previos para formular uno nuevo y más completo, y que incentiven al profesor a utilizar material interesante y familiar, para que el nuevo aprendizaje se acomode, enriquezca y forme un nuevo saber.

Por lo antes mencionado es ineludible la necesidad de implementar una enseñanza que permita en los y las estudiantes, visualizar mejor los conceptos relacionados con las transformaciones isométricas en el plano Cartesiano y que influya positivamente en la motivación, actitud y en la disminución de los niveles de ansiedad; al mismo tiempo que se mejora la comprensión, razonamiento y aprendizaje del tema en cuestión.

Se decide implementar una enseñanza basada en la Visualización Geométrica con aportes de la Teoría de representaciones semióticas de Raymond Duval, para contextualizar y promover el desarrollo del razonamiento geométrico, de acuerdo a situaciones que le sean familiares a los estudiantes , para influir positivamente en los factores socio-afectivos de motivación y actitud hacia la matemática y en el razonamiento espacial.

1.3 Justificación de la investigación

Se realiza la presente investigación con el propósito de facilitar información a los profesores sobre metodologías poco exploradas en nuestro sistema educacional, conocer la efectividad de la Teoría de representación semiótica y la Visualización geométrica en el proceso enseñanza-aprendizaje de los y las estudiantes y su relación en el razonamiento espacial, la motivación, ansiedad y actitud hacia a la matemática.

Sobre la base de los bajos resultados en las pruebas estandarizadas como PISA, PSU, SIMCE y TIMSS, y a lo propuesto por en el Currículum Nacional, respecto a que el estudiante al estudiar matemática debiera desarrollar habilidades como razonamiento lógico, visualización espacial, pensamiento analítico, el cálculo, modelamiento y destrezas para resolver problemas (MINEDUC, 2013), se observa que no hay relación entre los conocimientos que están adquiriendo con los que se evalúa. Por ende, se evidencia que la forma en la que se está enseñando no es la adecuada, los maestros no abarcan todas las necesidades de enseñanza, en consecuencia tampoco el aprendizaje de los alumnos, por lo que, se debería abordar la educación con enseñanzas que salgan de lo habitual, incentivando a los y las estudiantes de una forma más atractiva, en donde se estimulen no sólo el aprendizaje, sino también los factores socioafectivos.

Así, la Teoría de Representación semiótica con aportes de la visualización se posiciona con un rol importante en la enseñanza de los y las estudiantes y en la adquisición de habilidades para comprender, analizar y predecir situaciones, pues mejora la visión global e intuitiva, además, que sirve como inicio en la comprensión de otras áreas de la matemática, según plantean en diversos estudios (Gutiérrez 1998b; Usiskin 1987;, Yakimanskaya 1991, citado en Fernández, 2011), por ende, el vincular las representaciones semióticas con la visualización en el presente estudio y al no existir otras investigaciones en el ámbito de las trasformaciones isométricas, cumple el requisito de ser innovador.

Por ende, se implementó la Teoría de Representación semiótica con influencia de la visualización como metodología de enseñanza de un grupo pre experimental como intermediario para su aprendizaje, propuesta que descarta la enseñanza tradicional, propiciando una enseñanza construida por el estudiantado y en donde el docente es un guía de tal proceso. Cabe señalar que el interés de la investigación radica en ver la evolución de este grupo en estudio en el aprendizaje con la metodología propuesta, factores socio-afectivos y razonamiento espacial y no en la comparación como sería un experimento puro o cuasi experimental.

1.4 Objetivos

A continuación se presentan los objetivos que orientaron la investigación, tanto el objetivo general como los específicos.

1.4.1 Objetivo General

Analizar la eficacia de implementación de la metodología basada en las representaciones semióticas y visualización en la unidad de Geometría de la signatura de Matemática de primer año medio de un colegio particular subvencionado de la comuna de los Ángeles.

1.4.2 Objetivos específicos

i) Determinar la influencia de las representaciones semióticas y la visualización en el aprendizaje de las Transformaciones Isométricas.

ii) Determinar la influencia de las representaciones semióticas y la visualización en el razonamiento espacial.

iii) Analizar la influencia de las representaciones semióticas y la visualización en el nivel de motivación hacia la matemática.

iv) Analizar la influencia de las representaciones semióticas y la visualización en el nivel de actitud hacia la matemática.

v) Determinar si existen diferencias entre géneros en el aprendizaje de las Transformaciones Isométricas en el plano cartesiano con la metodología de aprendizaje basada en las representaciones semióticas y la visualización.

vi) Determinar si existe correlación entre los factores socioafectivos y el aprendizaje obtenido por los estudiantes al tratar la unidad de transformaciones isométricas en el plano cartesiano con la metodología de aprendizaje basada en las representaciones semióticas y visualización.

1.5 Preguntas de Investigación

1. ¿Cómo influyen las representaciones semióticas y la visualización en el aprendizaje de los y las estudiantes al tratar las Transformaciones Isométricas en el plano cartesiano?
2. ¿Cómo influyen las representaciones semióticas y la visualización en el razonamiento espacial de los y las estudiantes al tratar las Transformaciones Isométricas en el plano cartesiano?
3. ¿Cómo influye en la actitud de los y las estudiantes la implementación de las representaciones semióticas y la visualización al tratar las Transformaciones Isométricas en el plano cartesiano?
4. ¿Cómo influye en la motivación de los y las estudiantes la implementación de las representaciones semióticas y la visualización al tratar las Transformaciones Isométricas en el plano cartesiano?
5. ¿Existen diferencias significativas entre género femenino y masculino en el aprendizaje de las transformaciones isométricas en el plano cartesiano basado de en las representaciones semióticas y la visualización?
6. ¿Cómo influye en las nociones de representación y visualización la implementación de las representaciones semióticas y la visualización al tratar las Transformaciones Isométricas en el plano cartesiano?

1.6 Hipótesis de investigación

H_1: Los y las estudiantes luego de participar en la metodología de las representaciones semióticas y la visualización incrementan su aprendizaje en la unidad de transformaciones isométricas en el plano cartesiano.

H_2: Los y las estudiantes participantes del proceso de las representaciones semióticas y la visualización, incrementan razonamiento espacial en la unidad de transformaciones isométricas en el plano cartesiano.

H_3: Los y las estudiantes participantes de la enseñanza basada en las representaciones semióticas y la visualización incrementan la actitud positiva hacia la matemática.

H_4: Los y las estudiantes expuestos a la enseñanza basada en las representaciones semióticas y la visualización incrementan su motivación hacia la matemática.

H_5: Existe diferencia en el aprendizaje entre hombres y mujeres al participar de la enseñanza basada en las representaciones semióticas y la visualización en la unidad de transformaciones isométricas.

H_6: Los y las estudiantes que participan de la metodología de las representaciones semióticas y la visualización aumentan la utilización de registro de representación.

H_7: A mayor motivación de los y las estudiantes que participan de las representaciones semióticas y la visualización, mayor es su aprendizaje de la unidad de transformaciones isométricas.

H_8: A mayor actitud de los y las estudiantes que participan de las representaciones semióticas y la visualización, mayor es su aprendizaje en la unidad de transformaciones isométricas.

H_9: A mayor razonamiento espacial en los y las estudiantes que participan del proceso de las representaciones semióticas y la visualización, mayor es su aprendizaje de la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad.

CAPÍTULO 2: Marco Referencial

En la actualidad es una ventaja estar al día con aquellas variables o hechos que afectan la enseñanza de los estudiantes. La información y herramientas adecuadas para un buen desempeño como docentes permiten una preparación más amplia de lo que se quiere que el aprendiz internalice.

En el presente capítulo se exponen los conceptos relacionados con teorías de aprendizaje y factores socio-afectivos involucrados en la enseñanza, cuyo fin es proporcionar evidencia sólida para el sustento de la investigación.

2.1 Teorías del Aprendizaje

Para llevar a cabo la presente investigación, es necesario mencionar aspectos relevantes de teorías de aprendizaje, pues sabiendo cómo los y las educandos aprenden, se puede enfocar la enseñanza de manera que impulse sus habilidades y logren asimilar el conocimiento intencionado.

Las teorías del aprendizaje son modelos explicativos que han sido obtenidos en situaciones experimentales, que hacen referencia a aprendizaje de laboratorio, que pueden explicar relativamente el funcionamiento real de los procesos naturales del aprendizaje incidental y que se hace en el aula (Pérez, 1988).

Por su parte, aprendizaje se refiere a una acción que permite adquirir conocimiento, se manifiesta por medio de un cambio perdurable en la conducta de la persona o en la capacidad de comportarse de cierta forma, adquiriéndose a través de la práctica (Candia, 2014)

Así, las teorías de aprendizaje sugieren a los docentes prácticas para facilitar e incitar conductas perdurables que permitan a los y las estudiantes adquirir el conocimiento.

Entre los enfoques del aprendizaje, están la conductista y constructivista. La reforma educacional se fundamenta en la última al solicitar que los estudiantes modelen y representen sus propios conceptos matemáticos (MINEDUC, 2013); pero el desarrollo de las clases en aula es marcadamente conductista.

En este estudio se mencionan ambos enfoques, para explicar los procesos que conlleva cada una; y dilucidar la implementación de la teoría constructivista en las actividades propuestas para que los y las estudiantes adquieran el conocimiento en las transformaciones isométricas; presentando, además otras teorías utilizadas a través de este estudio, para garantizar un aprendizaje de los y las estudiantes en la unidad de Geometría.

2.1.1 Conductismo

Los modelos conductistas más importantes son el condicionamiento clásico de Pavlov, el condicionamiento operante de Skinner y el condicionamiento de Bandura. Dentro de las cuales Watson (1913) recurre a trabajos de Plavlov y establece el condicionamiento como el modelo experimental del conductismo.

Entre las características destacadas del conductismo, Watson (1913) señala que se aprende, asociando estímulos con respuestas, los que se encuentran en función del entorno del individuo, siendo el aprendizaje no duradero y forzado lo que provoca que se adquieran características de memorístico, repetitivo y mecánico. En el caso de las asociaciones, se encuentran vinculadas a la descontextualización y simplificación de las tareas de aprendizaje (Pozo, 1997), tras vincularse sólo a ideas previas y nuevas.

El Conductismo propone que la base fundamental de todo proceso de enseñanza-aprendizaje se halla representada por un reflejo condicionado, es decir, por la relación asociada que existe entre la respuesta y el estímulo que la provoca. Estas conductas generan actitudes positivas o negativas; en el caso de las primeras, tienden a repetirse y aprenderse, mientras que las desagradables, no se repiten y por consiguiente no se aprende (Henson y Eller, 2000).

Lo esencial de la teoría de Plavlov radica en los roles de quienes protagonizan el aprendizaje. El profesor estimula a los alumnos de tal forma que refuerza las conductas positivas o corrige las no deseadas; y es el estudiante un mero receptor pasivo en la adquisición de esas conductas (Candia, 2014).

Respecto a las prácticas escolares, el conductismo ha conducido a que la motivación sea ajena al estudiante, promueve el desarrollo de la memoria, cree dependencia del alumno a estímulos externos, genere que la relación entre educando-educador sea pobre y se asocie la evaluación a la calificación respondiendo a refuerzos negativos (Castañeda, s.f).

Para este modelo, el aprendizaje de los educandos debe adquirirse a través de fenómenos medibles y observables, no considerando los procesos internos como el pensamiento, la motivación y sentimientos, debido a que no son medibles ni primordiales para que los y las estudiantes adquieran o no el conocimiento, pues el aprendizaje ocurre sólo si se observa un cambio en el comportamiento.

Por consiguiente, el conductismo garantiza un aprendizaje memorístico, repetitivo y descontextualizado pues, pese a considerar ideas del entorno, no se consideran los factores socio-afectivos que identifican a una persona que son primordiales para estar en sociedad; además limita el conocimiento a algo mecánico, en donde el razonamiento no tiene lugar; no considera de la naturaleza emocional y racional de la persona, lo que se transmite en la enseñanza.

La sociedad actual requiere de personas, que tengan la capacidad de realizar opiniones, juicios o conjeturas por medio de un análisis previo, los que claramente con una educación mecanicista no es posible. Así, se requiere otro tipo de enfoque para la enseñanza-aprendizaje de los educandos, y puedan a la vez contribuir a través de su educación a la sociedad, razón por la cual se menciona el constructivismo.

2.1.2 Constructivismo

Como anteriormente se mencionó, en la reforma educacional se plantea una educación basada en el descubrimiento y desarrollo de habilidades matemáticas como la observación, la crítica y la generalización. Aunque, en las sesiones que se brindan en las aulas se arraigan al conductismo, se requiere que los y las estudiantes vinculen los conocimientos previos que poseen con los nuevos presentados en este proceso, de forma que construya su aprendizaje con la guía del docente.

A continuación se menciona a qué se refiere el constructivismo y cómo debiera aplicarse en las aulas.

El constructivismo como una perspectiva psicológica y filosófica que sostiene que las personas construyen gran parte de lo que aprenden y comprenden (Bruning, Schraw, Norby & Ronning, 2004), esto se asemeja a las palabras de Cruz (2008), en donde lo define como "la idea de que el individuo, tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos, no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre estos dos factores y la educación". Por ende, el individuo diariamente aprende de las decisiones que toma al estar relacionadas con el medio en el que se encuentra.

Así, el constructivismo hace mención a que las personas crean su propio aprendizaje, tal como lo menciona Coll (1996) orienta a concebir el aprendizaje escolar como un proceso de construcción del conocimiento a partir de los saberes, las experiencias previas y la enseñanza como una ayuda a este proceso. Esto es posible sólo si se proporciona a los estudiantes una ayuda específica, esto es, inducir a la participación de actividades planificadas y sistemáticas producidas por los docentes para que así se logre una actividad mental constructivista (Coll, 1988).

Luego, el modelo constructivista se organiza en torno a tres ideas fundamentales:

i) El estudiante es el responsable último de su propio proceso de aprendizaje. Él es quien reconstruye los saberes de su grupo cultural, y puede ser un sujeto activo cuando manipula, explora, descubre o inventa, incluso cuando lee o escucha la exposición de otros.

ii) El educando no tiene en todo momento que descubrir o inventar en un sentido literal todo el conocimiento escolar. Debido a que el conocimiento en las aulas es resultado de un proceso de construcción en el nivel social, los alumnos y profesores encontrarán ya elaborada y definida una buena parte de los contenidos curriculares.

iii) El rol del profesor no radica solamente en propiciar condiciones óptimas para que el alumno adquiera el saber y realice una actividad mental constructivista, sino también que debe orientar y guiar explícita e intencionadamente dicha actividad.(Coll, 1990)

La construcción del conocimiento del estudiantado está relacionado con el significado que le asigne al seleccionar, organizar y transformar la información que recibe del entorno, permitiendo vincularlas con sus ideas y conocimientos previos. De manera que construye una representación mental a través de imágenes o proposiciones verbales (Díaz y Hernández, 2010)

El conocimiento no es impuesto por el exterior, sino que se forma dentro de ellos. Esto se debe a que las personas construyen su conocimiento con base a sus creencias y experiencias en las situaciones (Cobb y Bowers, 1999), y además de enfocarse en construir el conocimiento, considera el aprendizaje significativo, pues al utilizar situaciones o hechos importantes que tienen relación con los aprendices, resulta familiar o importante la adquisición de esos conocimientos.

De modo que el constructivismo promueve la educación que entrega herramientas a los estudiantes para crear su conocimiento y no solamente repetir sin sentido un contenido entregado por un docente, relacionado lo ya conocido con un nuevo aprendizaje, lo que se aleja notablemente de la mecanización y lo que se relaciona estrechamente con la implementación de nuevas metodologías.

El constructivismo tiene importantes implicaciones para la enseñanza y el diseño curricular (Phillips, 1995 citado en Schunk, 2012). Recomienda un currículo integrado y que los profesores empleen materiales y promuevan, a su vez, la interacción social, de tal forma que los estudiantes se involucren activamente en la construcción de sus conocimientos y que por medio de experiencias desafíen su forma de pensar. Así, mencionan Henson y Heller (2000) que la función principal del profesor es guiar a los estudiantes en su proceso de aprendizaje, utilizando experiencias ya vividas por los alumnos. Por ende, al profesor se le observa como un mediador y al permitir que los estudiantes conjeturen de sus propias observaciones les delega la responsabilidad de ser los protagonistas adquisitivos del aprendizaje.

Luego, las diferencias pedagógicas entre dos esquemas cognitivos de enseñanza, el constructivista y el conductista pueden apreciarse en la tabla C comparativa, que a continuación se presenta.

La tabla, resume el conductismo y el constructivismo, se presenta en el estudio para observar y plantear actividades basadas en el constructivismo, y de ser necesaria complementar con el conductismo, para luego relacionarlas con la metodología de las representaciones semióticas y la visualización.

Por lo tanto, como el constructivismo incita al educando a ser protagonista de su conocimiento mientras el docente es sólo un guía de ese proceso, es que a continuación se presenta una teoría que reúne dichas cualidades, además de considerar el entorno sico-social.

Tipo	Conductismo	Constructivismo
Autores	Watson, Pavlov, Skinner.	Piaget, Vygotski, Bruner y Ausubel.
Aprendizaje	Resultado de la asociación que se produce por la intervención del refuerzo Estímulo- Respuesta.	Resultado de un proceso de construcción y reconstrucción de significados.
Aprender	Es lograr cambios observables y medibles de la conducta.	Es lograr modificar y enriquecer esquemas de pensamiento preexistentes.
Alumno	Es considerado una caja negra, biológica y pasiva que responde a estímulos.	Es considerado el constructor de su conocimiento, lo va generando, partiendo de estructuras cognitivas más simples, a otras más complejas.
Modelo	Aplicado a mediados del siglo XX	Aplicado a fines del siglo XX:
Currículum	Como plan de instrucción, cerrado y obligatorio, para todo el que aprende por igual. Enseñanza tipo enciclopedista	Como proceso y resolución de problemas. Abierto, flexible, sujeto a investigación permanente. Enseñanza basada en situaciones problemáticas.
Programa de estudio	Obligación de cumplir con el programa.	La enseñanza está subordinada al aprendizaje.
Evaluación	Medición de resultados-producto, como entes evaluables, medibles y cuantificables.	Continua y permanente de procesos.
Rol del docente	Docente es protagonista; conduce, guía, instruye. Entrega el saber.	Facilitador, orientador, intermediario en el proceso. Comparte el saber. El estudiante es protagonista.
Rol del alumno	Pasivo, mero receptor del saber.	Protagonista, activo constructor de su propio aprendizaje.

Tabla C extraída de: http://www.laprimariaonline.com.ar/teo-cuadroconduc-construc.htm

2.1.3 Teoría socio-constructivista de Lev Vygotsky

La teoría socio constructivista o sociocultural, corresponde a la proporcionada por Lev Vygotsky y su importancia radica en haber vinculado educación con desarrollo socio-psicológico y destaca los factores interpersonales, los histórico- culturales y los individuales como la clave del desarrollo humano (Tudge y Scrimsher, 2003).

Vygotsky rechaza que el aprendizaje se reduce a una acumulación de reflejos o asociaciones entre estímulo y respuesta, además, considera insuficiente el aprendizaje asociativo. Respecto al conocimiento considera que se construye por medio de actividades y habilidades cognoscitivas inducidas desde la interacción social, al igual que el desarrollo intelectual, influido por la sociedad.

Dentro de los aportes que logran descubrirse tienen relación con pensamiento y lenguaje; herramientas y signos; aprendizaje y desarrollo; y sus implicaciones educativas, las que se detallan a continuación:

i) Pensamiento y lenguaje

Se puede mencionar que la transmisión racional e intencional de la experiencia y el pensamiento a los demás requieren de un sistema mediatizado, lo que correspondería al lenguaje, siendo el proceso más influyente involucrado en el desarrollo cognoscitivo (Schunk, 2012).

ii) Instrumentos mediadores

Se les llama de esa forma debido a que transforman la realidad en lugar de imitarla, es aquí donde se consideran las herramientas psicológicas como el lenguaje, los signos y los símbolos para comprender los procesos sociales. Los adultos enseñan estas herramientas a sus aprendices y luego de que logran internalizarlas, toman el rol de ser mediadoras en sus procesos psicológicos más avanzados (Karpov y Haywood, 1998).

iii) Interacción entre aprendizaje y desarrollo

Vygotsky (1979) señala que tanto aprendizaje y desarrollo están interrelacionados desde los primeros días de vida del niño, pues todo aprendizaje requiere de experiencias previas.

Vygotsky menciona dos niveles evolutivos en el desarrollo de funciones mentales, los que están relacionados con la intervención o no de terceros en el desarrollo mental de quien realiza alguna actividad.

El primer nivel, el nivel evolutivo, se refiere al desarrollo de las funciones mentales del individuo en las actividades que pueden realizar por sí solos y por ende, es lo que señala el estado mental del niño. En cambio, el segundo nivel, el nivel de desarrollo potencial, corresponde a cuando se le brinda ayuda para el desarrollo de actividades, por ende, no logra una solución independiente del problema, pues depende de otros. Es donde la ayuda evidencia el estado mental del educando.

Ahora, la variación que existe en el aprendizaje de los estudiantes con el mismo nivel de desarrollo mental bajo la guía de un maestro, es la que Vygotsky (1979) denominó Zona de Desarrollo Próximo (ZDP):

> "no es otra cosa que la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinando a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz"

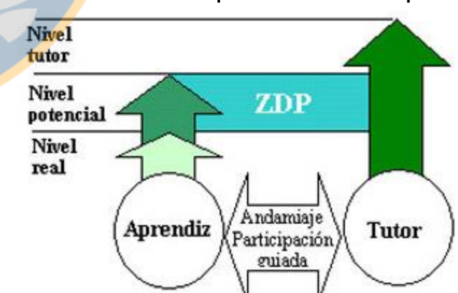


Figura 1.2 Zona de Desarrollo Próximo (ZPD)

Así, la define Vygotsky (1979) como aquellas funciones que están en proceso de maduración caracterizando el desarrollo mental prospectivamente, a diferencia del nivel real de desarrollo que define las funciones que ya han madurado, y caracterizan el desarrollo mental retrospectivamente. De manera que las personas al interactuar con otras, se manifiesta un aprendizaje que incita y activa una gama de procesos mentales. Las interacciones ocurren en diferentes contextos y se encuentran mediada por el lenguaje.

El último punto que falta por mencionar respecto de los aportes de la teoría de Vygotsky, se presenta a continuación:

iv) Implicaciones educativas

Se señalan tres ideas básicas relevantes en educación:

1) Desarrollo psicológico visto de manera prospectiva.
2) Los procesos de aprendizaje incitan los procesos de desarrollo.
3) Intervención de integrantes del grupo social como mediadores entre la cultura e individuo.

La primera idea, la enseñanza debe ser orientada hacia aquello que no conoce, no realiza o no domina suficientemente. El profesor debe exponer a los alumnos ante situaciones que les obliguen a entregar esfuerzo de comprensión y de actuación, por lo que debe intervenir en la ZDP, con el objetivo de provocar avances que espontáneamente no sucederían.

Los procesos de aprendizaje en cambio, consideran que el desarrollo proviene de afuera hacia adentro del individuo, por medio de la internalización, además, que la escuela posee un papel fundamental en la promoción del desarrollo psicológico del estudiante.

Por otra parte, la influencia de miembros de la cultura es esencial en el aprendizaje del estudiante y de su desarrollo; las escuelas promueven el desarrollo integral de los miembros de las sociedades, al ser una mini sociedad.

Así la ZDP junto con la teoría sociocultural de Vygotsky darán cuenta de qué tan cerca de alcanzar el conocimiento estarán los y las estudiantes, y hasta qué punto el profesor puede intervenir como guía para incitar tanto el desarrollo psicológico como de aprendizaje individual y social, y promover un adecuada comprensión.

2.2 Factores socioafectivos que influyen en la construcción de aprendizajes

No sólo son contenidos los que importan al momento de educar. Al tratar con personas, éstas presentan diversas necesidades y emociones que desean y deben expresar. Los profesores interactúan diariamente y por extensos periodos con estudiantes que experimentan una variedad de emociones y para incentivarlos a un aprendizaje se necesita de experiencias positivas y consistentes (Díaz y Hernández, 2010).

Por ende, el docente debe tener conocimiento de factores que influyen en la percepción de los aprendizajes del alumno para también saber cómo educarlos. No se puede olvidar que se quiere del alumno llegue a ser una persona integral, capacitada para afrontar las dificultades de la sociedad y ser un aporte a ella.

Así, es que a continuación se presentan algunos factores emocionales que contribuyen en el desarrollo del estudiante los que evolucionan a través de interacciones en diversas situaciones y sirven de importantes indicadores.

2.2.1 Motivación

De acuerdo a la Real Academia Española (RAE), se define motivación como un *"conjunto de factores internos o externos que determinan en parte las acciones de una persona"* y esas acciones se asocian a una palanca que permite provocar cambios tanto en lo escolar como en el general de la vida(López,2010)

Moore (2001, citado en Díaz y Hernández, 2010) hace mención a que implica "impulsos o fuerzas que nos dan energía y nos dirigen a actuar de la manera en que lo hacemos". De manera que sería la fuente de alimentación que incita a las personas cómo enfrentar las situaciones que se presenten.

En palabras de Woolfolk (1996) “es un estado interno que activa, dirige y mantiene la conducta”, observándose que olvida factores externos que pudiesen influir o en su efecto modificar la conducta.

Relacionado en el ámbito de la educación, Alves(1963) señala que “motivar es despertar el interés y la atención de los alumnos por los valores contenidos en la materia, excitando en ellos el interés de aprenderla, el gusto de estudiarla y la satisfacción de cumplir las tareas que exige”.

Así, la motivación hacia la matemática se relaciona no sólo con el comportamiento manifestado por los estudiantes frente a eventuales situaciones, sino también con el rol que el docente debe implementar para cautivar a los y las estudiantes con lo desconocido y su utilidad. Por ende, motivación es un conjunto de factores compartidos entre docente y educandos que genera un cambio en el accionar de estos últimos.

De modo que al identificar cómo se desarrollan las acciones manifestadas por los y las estudiantes, los docentes pueden potenciar acertadamente las actividades que susciten de su interés.

Estos actos pueden surgir de manera espontánea (motivación intrínseca) o bien inducida de forma externa (motivación extrínseca), es decir, se admite que la comprensión de que las acciones provienen tanto de un interés personal como de las demandas requeridas por agentes externos.

La motivación intrínseca es cuando una acción se presenta pese a no existir recompensa proveniente del exterior, sino más bien internas; es decir, se lleva a cabo debido al propio interés o satisfacción personal que permite su realización como persona. Debido a las legítimas necesidades de competencias y autodeterminación de las que se sustenta la motivación, es que los docentes deben seleccionar actividades que propicien al estudiantado el gusto por aprenderlas y estudiarlas (López, J., 2010).

Por su lado, la motivación extrínseca implica recibir de forma externa algún castigo o recompensa. El individuo externo controla la conducta al proporcionar reforzadores, castigos o recompensa a los estudiantes, lo que se vincula al desempeño de éxito o fracaso de una tarea con la adquisición de resultados que se valoren, los cuales se pueden traducir en privilegios, recompensas materiales, elogios, etcétera (López, J., 2010).

Así, se evidencia que la diferencia entre la motivación intrínseca o extrínseca se refiere a quién induce en el individuo, en este caso el estudiante, una actitud de interés. En el primer caso depende de fuentes internas, el mismo educando; mientras que en el segundo, corresponde a los incentivos que los docentes les pueda brindar. Pero ambas son necesarias, muchas veces el docente provee la motivación externa para lograr la interna.

En cuanto a las teorías psicológicas, la motivación también ha sido evaluada. Respecto al enfoque conductista, la motivación se presenta como una conducta aprendida de acuerdo a los estímulos positivos o negativos, es decir, a los premios o castigos respectivamente. En relación a la perspectiva sociocultural inspirada en Vygotsky, se postula que el origen motivacional es social, ya que los y las estudiantes aprenden y modelan en torno a un contexto histórico social, en donde el lenguaje se convierte en un acelerador de la motivación. Por lo que en este estudio, también se considera la motivación social, esto es, actividades en donde los educandos se comuniquen con sus pares y utilicen a su favor el ánimo proporcionado por ellos.

Es evidente la necesidad de fomentar el interés del estudiantado por las actividades que se realizan, de manera que les puedan asignar un sentido en lo que invierten tiempo, esfuerzo y atención. Por lo que fortalecer las emociones positivas, fomentan la confianza entre profesores y alumnos; el alto nivel de apoyo brindado por el docente, genera en el alumno que posea mayor motivación y compromiso. Evidenciando además que el ambiente en la sala de clases influye en la motivación y aprendizaje (Díaz y Hernández, 2010).

En consecuencia, el profesor es quien mayormente influye en la motivación del alumno al realizar actividades acordes a las competencias de los alumnos, al proporcionarles cierto nivel de apoyo e inducir emociones positivas como generar un buen ambiente en la sala de clases, lo que es conocido como motivación extrínseca. Así, con lo anterior, se promueven mejores comportamientos a nivel individual y social entre los estudiantes de un salón de clases al sentirse partícipe de las actividades, naciendo en ellos la motivación intrínseca, por ende se obtiene una motivación duradera y estable.

Por lo tanto, surge la necesidad de implementar nuevas metodologías que emplacen la atención de los educandos y permitan crear desafíos a sus capacidades para el desarrollo de competencias. Frente a esto, surge la necesidad de utilizar la Teoría de Representación Semiótica y Visualización como estrategia didáctica para la enseñanza de la matemática, puesto que beneficia la autonomía y la obtención de resultados descubiertos por los y las estudiantes, provocando que se involucran más en su aprendizaje e incrementen su motivación, principalmente para la asignatura de matemática.

2.2.2 Actitud

De acuerdo a Rokeach (1968) define actitud como una organización de creencias relativamente permanentes que predisponen a responder de un modo preferencial ante un objeto o situación. Para Mcleod (1992) es una contestación que se desarrolla por repetición de respuestas emocionales y se automatizan con el tiempo, pudiendo ser positivas o negativas (Estrada, Batanro y Fortuny, 2004).

En palabras de Gómez-Chacón (2000), la actitud corresponde a una predisposición evaluativa (es decir positiva o negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento.

Para Auzmendi (1992, citado en Cantorin y Salvatierra, 2012), las actitudes son “aspectos no directamente observables sino inferidos, compuesto tanto por las creencias como por los sentimientos y las predisposiciones comportamentales hacia el objeto al que se dirige.

En cambio para Aiken (2000, citado en Cantorin y Salvatierra, 2012) actitud corresponde a una tendencia a evaluar una entidad con algún grado de aceptación o rechazo, normalmente expresado en respuestas cognitivas, afectivas o conductuales".

Por ende, se entiende por actitud a una predisposición de un individuo que permanece en un periodo de tiempo y ha sido aprendida luego de apreciar el entorno que lo rodea. Esta predisposición es ejercida de manera favorable o desfavorable en el momento en que se propone responder hacia el estímulo que el medio ha ejercido en el individuo.

Las actitudes pueden manifestarse mediante diversas formas o factores, las que en trabajos de Badillo (2000), Cembranos y Gallegos (1988), Sarabia (1992), Robbins (1994), Bolívar (1995), Gómez (1998) y Gómez Chacón (2000) (Araya y Figueroa,2011) han sido organizadas en 4 componentes:

- Cognoscitivo: Referido al conocer, saber. Se expresa mediante la información que posea la persona y de la experiencia frente al comportamiento manifestado por sus percepciones, ideas, opiniones, concepciones y creencias.
- Afectivo: Relativo a la emoción, al sentir. Se coloca de manifiesto al expresar emociones y sentimientos de aceptación o de rechazo, ante la presencia de un estímulo que le produce cierta motivación.
- Conativo o Intencional: Considera la inclinación consciente y voluntaria a realizar una acción.
- Comportamental: Alusivo a la conducta observable, al conjunto de comportamientos.

De acuerdo a las consideraciones anteriores, las actitudes se pueden expresar mediante juicios valorativos (positivos-negativos) dependiendo a qué sea expuesto el individuo, suelen determinar las intenciones y el comportamiento, actuando como motivadoras de la conducta. Las actitudes pueden ser del tipo verbal o no verbal, de manera que al no ser siempre observables de forma directa, se apoya de las manifestaciones de las creencias, sentimientos, intenciones o conductas: verbalizaciones o expresiones de sentimiento acerca del objeto, por afinidad o evitación, tendencia o preferencia, etc.(Bolívar, 1995).

En cuanto a la Actitud hacia la matemática, Bazán y Aparicio (2006) afirman que conforme a los niveles de estudio que los educandos avanzan, la actitud hacia la matemática se vuelve menos favorable. Diversos son los factores que pueden influir en ese retroceso. Entre ellos se considera que los profesores influyen en la actitud de los alumnos (Nortes, Martínez-Atero y Nortes Checa. 2013). Por ende, es necesario saber cómo se debe mejorar la actitud, ya que, las actitudes positivas potencian el aprendizaje y por el contrario las negativas lo inhiben, llegando inclusive, a perdurar en la vida adulta (Cockcroft, 1985).

Así, para mejorar la actitud hacia la matemática, se debe considerar que al realizar alguna actividad a los alumnos, se le debe facilitar la información necesaria vinculada con el entorno en que se encuentra, es decir, actividades contextualizadas a la realidad, necesidad y utilidad de los estudiantes, lo que se relaciona asociado a la forma cognoscitiva de la actitud; además, se deben realizar actividades de acuerdo a las competencias que poseen los educados para inducir a la participación en las mismas, lo que se encuentra vinculado al factor conativo o intencional y comportamental; junto con potenciar la buena relación profesor- alumno y alumno-alumno, relacionado con el factor afectivo. Por lo que, las actividades realizadas sobre la base de la Teoría de representación semiótica y visualización, son asociadas a un medio que le es familiar al educando, como por ejemplo utilizar el gimnasio para realizar reflexiones y ubicación de puntos en el plano cartesiano, lo que al realizarlas de manera grupal mientras el profesor los orienta, permite potenciar los factores conativo y comportamental al incitar que entre ellos mismos se motiven a realizarlas, mientras el profesor es quien crea las actividades a su medida y les proporciona seguridad y motiva a superarse a sí mismos.

2.3 Razonamiento en Geometría

Al reconocer la matemática como una herramienta construida por el ser humano, se asume que en su desarrollo existe lugar para diferentes tipos de razonamientos, los que se asemejan a la comunicación informal en la interacción cotidiana.

En primer lugar hay que mencionar que razonamiento se asocia con la capacidad de establecer nuevas relaciones entre conceptos, las que se expresan en argumentos. Es como una red que facilita actos de comprensión, siendo cada uno de los actos de comprensión acompañado del razonamiento (Camargo, Leguizamón y Samper, 2001).

Duval (1998) por su parte, señala que razonamiento es cualquier proceso que permita adquirir nueva información a partir de otra.

Así al estar asociada a relaciones entre conceptos cuya información es conocida con otra por conocer, existen diferentes formas de razonamiento. Entonces los tipos de razonamientos en geometría se asocian al razonamiento visual, el razonamiento intuitivo o informal y el razonamiento inferencial los que pueden llegar a complementarse.

El razonamiento visual, se asocia al tratamiento de las representaciones mentales de los objetos (Clements y Battista, 1992), lo que Duval (1998) señala como proceso de visualización.

El razonamiento intuitivo o informal está relacionado con ideas las que son sometidas a asociaciones u oposiciones (Camargo, Leguizamón y Samper, 2001). El razonamiento se promueve por la exploración al sacar conjeturas basadas en la experiencia, de las cuales se obtienen los argumentos para explicar , convencer o comunicar a otros una idea geométrica, lo que Duval (1998) llama procesos constructivos de configuraciones que sirven como modelo para experimentar propiedades geométricas y a la vez verificar, explicar o aclarar un resultado.

El razonamiento inferencial integra procesos inductivos, abductivos y deductivos y hace mención a la creación de discursos formales orientados a la construcción de demostraciones.

El caso de este estudio, utiliza el razonamiento visual, asociada a la visualización y el razonamiento inductivo a la teoría de Van Hiele para conceptualizar e institucionalizar el saber de los y las estudiantes, por lo que a continuación, se presenta el razonamiento espacial y a continuación una teoría que es utilizada hace algunos años en Geometría, la que explica el razonamiento de los educandos en este tópico de la matemática.

2.4 Razonamiento espacial

Las bases curriculares del MINEDUC solicitan desarrollar destrezas de visualización en el estudiantado para que desplieguen sus capacidades espaciales y que entiendan que ellas les facilitan comprender el espacio y sus formas (MINEDUC, 2013). Sin embargo, como la visualización está relacionada con un conjunto de habilidades relacionadas con el razonamiento espacial (Gonzato, Fernández y otros, 2011) no basta sólo con describir la visualización. Por esta razón es que a continuación, se presenta lo relevante de este razonamiento para la investigación.

En primer lugar, la caracterización del razonamiento en geometría, está dada por procesos que realiza el sujeto en los que, a partir de informaciones previas se intenta pasar a nuevas formas de información, en el caso del razonamiento en geometría, se refiere a uno deductivo, que garantiza la producción e interpretación de formas. (León y Calderón, s.f).

Luego, el razonamiento espacial para Godino, Fernández y otros (2011), corresponde a un conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan representaciones, relaciones y transformaciones mentales de los objetos espaciales.

Según Battista (2008a) para comprender no sólo los procesos cognitivos presentes en el pensamiento geometrico , sino que también el paso de un nivel a otro, primero debe entenderse cómo las personas crean y representan mentalmente el conocimiento geométrico espacial. El punta pie inicial se origina con la percepción y las imágenes, por lo que hay que considerar desde la percepción de la forma hasta el todo de las partes; y por último, el paso de las imágees a las relaciones explícitas.

Así es como Dreyfus (1991) mostró diversos ejemplos que mostraban la importancia de la visualización en el razonamiento matemático, aunque existía una cierta resistencia de los estudiantes para usarlo, pues era más probable que los estudiantes generaran imágenes visuales y no tanto el razonamiento analítico, ya que operar holísticamente crea más carga cognitiva que los modos secuenciales de razonamiento.

Tal como se menciona anteriormente, Presmeg (1986b) también identifica que a los educandos no les dificulta generar imágenes visuales del tipo concreto pictórico; sin embargo, si es arduo producir patrones de imágenes e imágenes dinámicas. La importancia de estas últimas radica en que son las más adecuadas para ser vinculadas al proceso analítico, o sea, para usar el razonamiento analítico.

Aunque esto no es netamente responsabilidad de los estudiantes, pues como lo menciona Dreyfus (1991, citado por Fernández, 2011), los propios matemáticos son los responsables del bajo estatus otorgado al razonamiento visual. Son ellos mismos quienes lo ocupan para su trabajo, mas son reacios a evidenciar el proceso que utilizaron.

Es más, Hadamard (1945) señala que la mayoría de los matemáticos cuando piensan, evitan el uso de palabras y símbolos algebraicos, utilizando imágenes vagas que son de naturaleza geométrica.

Así, alguna de las razones podría ser que al ser las imágenes visualizadas tan nítidas que resulte difícil describirlas, o debido al proceso cultural que se ha vivido, ya que, durante los siglos XIX y XX se basaban en un pensamiento lógico y formalista, implicando cierta resistencia hacia la argumentación visual. Y no fue sino hasta finales del siglo XX que se comenzó a dar importancia a este tópico al redescubrir el poder que brindaba (Dreyfus, 1991).

Ahora, la noción abstracta de representación implica una relación entre dos o más configuraciones (Goldin, 2002). Y en el contexto de la psicología del aprendizaje matemático y resolución de problemas, es necesario considerar configuraciones internas y externas. Las primeras corresponden a configuraciones verbales y sintácticas, visual imaginería, reglas y algoritmos, etc. En cambio, las configuraciones externas son generalmente observables a través del entorno como objetos de la vida real, gráficos, figuras geométricas, etc.

Algunos autores discrepan con la importancia asignada por Goldin (2002), sin embargo el interés que este manifiesta de la interacción entre las representaciones externas e internas es fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Esto se observa, por ejemplo que hay objetos que no pueden ser aprendidos directamente por los sentidos, es necesario aprender a "verlos" y a comunicarnos a través de sus signos (Fernández, 2011).

Para Duval(1998, citado por Torregrosa, Quesada y otros, 2010), se pueden mencionar al menos tres tipos de razonamientos en relación con los procesos discursivos y que anteriormente ya fueron nombrados: El proceso configural, que se identifica con la aprehensión operativa; el discursivo natural, observado a través de la comunicación espontánea, utilizando descripciones, explicaciones y argumentaciones; el proceso discursivo teórico, el que se produce mediante la deducción y puede ser realizado en un registro simbólico o lengua natural.

Como el profesorado debe estimular el razonamiento espacial en sus estudiantes y ellos mismos dejar de lado la creencia que no basta con eso para una demostración, pues los procesos que se utilizan para llegar a obtenerlo, son tan válidos como una demostración algebraica, este estudio incluye actividades que lleven al estudiante a visualizar espacialmente conceptos, como lo son las transformaciones, por medio de actividades contextualizadas a su realidad y al contexto educativo y conlleven a la interacción entre las representaciones externas e internas de los individuos, es decir, que el educando visualice, razone y comprenda las sesiones por medio del análisis de ellas y del entorno del que provienen.

2.5 Teoría de Van Hiele (1957)

A continuación se presenta una descripción del Modelo de Van Hiele, según Jaime (1993) en donde se describen brevemente las características, fases y propiedades que hacen de éste un modelo de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

2.5.1.1 Historia del modelo

El modelo de Van Hiele existe hace aproximadamente 60 años. En el año 1957 los profesores holandeses Pierre M. van Hiele y Dina van Hiele-Geldof presentan sus tesis doctorales que muestran, por una parte un modelo de enseñanza y aprendizaje de la geometría y, por otra, simultáneamente su aplicación en unos cursos de Geometría.

El modelo al conocerse en distintos países es tomado y aplicado al currículum. Es por naciones como la Unión Soviética y Holanda que a mediados de los años 60 y a inicios de los 70 respectivamente, que lo utilizaron obteniendo buenos resultados. Sin embargo, no es conocido en occidente hasta que EEUU, país en donde a mediados de los años 70 se realiza una conferencia de I. Wirszup que fue publicada, es utilizado como puente de la región, tras transmitir la información del modelo. Más tarde, se realizaron tres proyectos de investigación que sirvieron de puntapié inicial a su aplicación en Occidente. Éstos son los desarrollados en Brooklyn, Chicago y Oregón por Fuys, Geddes, Tishler en 1998; Usikin en 1082; y Burger, Shaghnessy en 1990 y 1986, respectivamente.

La importancia del proyecto de Brooklyn de Fus, Geddes, Tishler en 1998, radica en que tradujeron del holandés al inglés documentos del modelo, de los que no se tenían registros. Además, se diseñaron tres unidades de enseñanza, organizadas según los niveles de razonamiento, implementadas para evaluar el razonamiento de los estudiantes.

En el proyecto Chicago de Usikin en 1982, se evaluó el nivel de razonamiento a 2700 estudiantes de enseñanza secundaria en EEUU mediante test. Se destaca de este proyecto los test diseñados, fabricados en base a los niveles 1 a 5 del modelo, mediante ítemes de selección múltiple. Mas, la aplicación de los test no queda exenta a críticas, cuestionadas por su efectividad debido a su rápida aplicación, facilidad de uso y faltas de alternativas. Dichas críticas fueron realizadas por Wilson y Crowley en el año 1990, pero las mismas tuvieron una pronta respuesta por el autor del proyecto el mismo año.

Por lo que respecta al proyecto de Oregón, realizado por Burger y Shaughnessy en 1990, se estudia la adecuación del modelo de Van Hiele para describir, precisamente, el razonamiento de los estudiantes en geometría. Se rescata de la investigación, una batería de problemas empleados en las entrevistas de los 48 estudiantes, cuyo tópico trata principalmente de triángulos y cuadriláteros.

Pese a los estudios realizados utilizando el modelo, éste ha sufrido variantes a lo largo del tiempo, variaciones inclusive realizadas por el mismo autor. Sin embargo, los investigadores siguen considerando la descripción básica realizada en Wirszup (1976), la que corresponde a cinco niveles (Jaime, 1993)

2.5.1.2 Descripción de la teoría de Van Hiele

El modelo de Van Hiele se divide en dos ámbitos: Descriptivo e Instructivo. En el primero de ellos, el modelo clasifica y describe el razonamiento geométrico de los individuos mediante niveles, los cuales permiten dimensionar el progreso, la transición y el logro a un nivel superior. Mientras que en el instructivo, se señalan guías para actividades, a través de fases, las que están dirigidas especialmente hacia los docentes para que potencien el desarrollo del razonamiento de los estudiantes.

Los niveles de razonamiento son divididos en cinco, cuya complejidad va en aumento hasta alcanzar el quinto; y por lo que respecta a las actividades, éstas son apoyadas en cinco fases para que puedan estar contextualizadas al lenguaje de los estudiantes, y se evite de esa forma badenes en el desarrollo del razonamiento, y por otro lado, se obtenga mayor experiencia en cada una de ellas.

2.5.1.3 Los niveles de razonamiento

La descripción más aceptada de los cinco niveles de razonamientos se encuentra en trabajos de Wirszup correspondientes al año 1976 (Jaime, 1993). No obstante, el modelo ha sufrido diversas modificaciones en el tiempo, entre ellas del mismo Van Hiele, quien en primera instancia redujo su propuesta a cuatro niveles, hablando de una posible existencia de un quinto difícil de identificar. Más tarde, él lo modifica a tres, reorganizándolo de tal manera que elimina el quinto nivel, adecuando los niveles dos al cuarto en los niveles dos y tres. Pese a sus esfuerzos, la numeración más aceptada es del 1° al 5°, cuyas características serán descritas a continuación:

- **Nivel 1**: Las personas poseen la percepción visual de las figuras, pueden reconocer propiedades visuales o físicas básicas, sin embargo, las aprehenden como un elemento más físico que matemático. Por ende, no logran generalizar. Al tener una percepción individual de las figuras, las propiedades no es posible asignarla a casos similares. Además, la posición de las figuras es una propiedad fundamental a la hora de clasificarlas, esto es debido a que no generalizan.

Se refiere principalmente al grupo de estudiantes de enseñanza básica. Sin embargo, al final de este ciclo, los alumnos deberían introducirse al nivel 2.

- **Nivel 2**: Los aprendices reconocen propiedades y elementos de figuras geométricas. Las propiedades son percibidas como independientes y logran ahora generalizar, para lo cual utilizan y comprenden partículas lógicas sencillas. Sin embargo, cometen el error de comprobar en un caso particular. Esto tiene solución si mejoran su razonamiento.

Está comprendido por estudiantes de 12 y 16 años. En este nivel hay muchos alumnos que continúan con razonamiento nivel 1; en cambio quienes alcanzan lo esperado, suelen utilizar términos matemáticos en contextos relacionados de manera física que por sus propiedades, es decir, a sus posiciones. Un ejemplo de ello lo menciona Gutiérrez (s.f), corresponde a la explicación de un alumno respecto a un conjunto de cuadriláteros, en donde selecciona rombos de acuerdo a sus "4 lados, dos paralelos inclinados y dos paralelos rectos" aludiendo a que correspondía a un cuadrado "por los 4 lados paralelos y forma ancha y baja". Así el estudiante relaciona términos matemáticos del cuadrado al rombo, por tener lados congruentes y paralelos. Esto se puede traducir en que es un cambio de posición de dichos lados.

- **Nivel 3:** Los individuos se percatan de las implicancias de las propiedades geométricas. Logran realizar clasificaciones y demuestran con argumentos deductivos abstractos, en lenguaje entendido por ellos. Analizan distintos ejemplos concretos para mejorar el razonamiento lo que les permite comprender demostraciones formales sencillas realizadas por el profesor. Además, son capaces de reproducir variaciones de esas demostraciones pero no son capaces de realizar autónomamente demostraciones formales.

Los alumnos al finalizar los 16 años, ya deberían tener indicios de tener un mayor razonamiento deductivo abstracto, el que se desarrolla durante toda su enseñanza media hasta que comienza el periodo de especialización en estudios superiores.

- **Nivel 4:** Las personas adquieren la capacidad de usar razonamiento matemático formal. Reconocen expresiones distintas de un mismo concepto y demostraciones, pudiendo utilizar bien teoremas, definiciones, etc. Basta con acceder a la educación superior para estar en el nivel 4.

- **Nivel 5**: Los individuos trabajan en sistemas axiomáticos distintos del usual, su razonamiento abstracto se basa en un sistema de axiomas determinado. Están conscientes de la importancia de la precisión al tratar los fundamentos y las relaciones entre estructuras matemáticas.

Los estudiantes son capaces de trabajar con distintos tipos axiomáticos, como por ejemplo al utilizar dos tipos de geometría, la euclidiana y una no euclidiana. Sin embargo, debido a las pocas investigaciones asociadas a este nivel, es que los matemáticos tienden a no aceptar la existencia o simplemente ignorarlo.

Al hablar de niveles de razonamiento, es necesario indicar que la adquisición de ello es un proceso que se basa en la superación de los niveles, sin saltar alguno (Importancia que destaca su autor). Es por ello que dicho proceso se dice entonces, secuencial. Por lo cual, cada nivel tiene un lenguaje propio, comprendido por el estudiante. La aprehensión del lenguaje, se logra mediante la adquisición de experiencia al utilizar las distintas formas de razonamiento, lo que permite de esa forma el paso a un nivel. Esta información cobra importancia para un docente al momento de existir la comunicación profesor-alumno, para que ésta sea fluida y el educando comprenda lo que el profesor quiere que comprenda.

En el caso de la presente investigación, al ser realizado con estudiantes de 14-15 años, las actividades se centrarían entre el nivel 1 y 2 de razonamiento, aunque no se descarta que alguno pueda conseguir el nivel 3, en donde logran reconocer las características de las transformaciones isométricas de traslación, rotación y simetrías central y axial, respecto a la ubicación del eje de simetría de la figura resultante de la transformación; la distancia entre la figura original y la resultante; los elementos e instrumentos necesarios para efectuar los movimientos, lo que posteriormente puede ser contextualizado a la realidad por estudiantes que se encuentren en el segundo nivel.

Así, la presentación de los niveles de razonamiento y actividades a través de lo cual se desarrolla el razonamiento, es útil para los docentes al momento de preparar material a los estudiantes, hecho que les permite no exigirles más allá de lo que se encuentren preparados , y también, para comprenderse mutuamente(docente-educando), ya que, si el docente se encuentra en un nivel de razonamiento muy alto o bajo, es posible provocar obstáculos en el aprendizaje de los conceptos que se quiere internalicen.

2.6 Visualización

Al estudiar matemática, los y las estudiantes deben adquirir la visualización espacial, el pensamiento analítico y las destrezas para resolver problemas (MINEDUC, 2011). Específicamente en el eje de Geometría, se espera que los estudiantes desarrollen sus capacidades espaciales y que entiendan que ellas les facilitan comprender el espacio y sus formas, proponiendo actividades en que usen destrezas de visualización (MINEDUC, 2013).

Lo que indica que es una destreza que los profesores imperativamente deben potenciar y arraigar en los y las estudiantes durante el proceso de aprendizaje principalmente en la unidad de Transformaciones Isométricas en el plano cartesiano por tener conceptos útiles para desarrollar habilidades espaciales.

2.6.1 Algunos antecedentes históricos de la visualización

Numerosos son los estudios realizados en Matemática que evidencian la importancia de la Visualización, especialmente en el área de Geometría (Battista, 2007; Bishop, 1989; Clements y Battista, 1992; Gutiérrez, 1996; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Presmeg, 2006a citado en Fernández, 2011). Es más, en las últimas dos décadas se ha incentivado con mayor intensidad la investigación en este tema debido al auge de la tecnología en la presentación de conceptos, formas, relaciones y propiedades; otra razón por la cual se reconoce su importancia es debido a que se sustenta principalmente de elementos visuales e influencia de esa forma en la comprensión y aprendizaje de conceptos geométricos (Sainz, 2014).

Como señala Sainz (2014), la visualización ha tenido varias perspectivas de investigación desde sus inicios en los años 70 y 80, con una mirada más psicológica, pasando por estudios de pensamiento geométrico espacial hasta llegar a lo más reciente que considera la manipulación de la tecnología , utilizando los computadores como apoyo en la enseñanza de los conceptos que quiere que se aprehendan, pero no es sino en el año 2000 que se inició con una mirada desde lo semiótico, en donde vinculaba lo visual y simbólico; y donde se observaba también la coordinación de registros de representación, como la relación entre las imágenes personales y aspectos emocionales del individuo.

2.6.2 Descripción de visualización

La visualización es una herramienta significativa al momento de comprender, analizar y predecir situaciones del entorno pues, es capaz de reconocer patrones de naturaleza matemática (Hershkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996 citado en Fernández, 2011), y además, tal como menciona Gutiérrez (1998, citado por Sainz, 2014) fomenta el mejoramiento de la visión global e intuitiva y de la comprensión en diversas áreas de la matemática como el cálculo, álgebra, estadística y geometría, que es el tópico considerado en la presente investigación.

En cuanto a la visualización espacial, no existe unanimidad a la hora de nombrarla, por lo que se puede encontrar como "percepción espacial", "imaginación espacial", "imaginería", "razonamiento visual", "visión espacial", "visualización" o "pensamiento espacial", entre otros en diversos trabajos.

En el caso de Hershkowitz (1990), la reconoce como visualización, y hace referencia a que es una habilidad para representar, transformar, generalizar, comunicar, documentar y reflexionar sobre información visual, mientras que para Presmeg (1997) visualización es el proceso empleado en la construcción y transformación de imágenes mentales.

Por su parte Cantoral y Montiel (2001), manifiestan que ésta se puede entender como una habilidad, que permite representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual al igual que Hershkowitz (1990), pero difiere con este último en que se aplica en el pensamiento y el lenguaje que aprendemos.

De Guzmán (1996) señala que la visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestras contemplaciones que solamente podremos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta. En la misma línea, Hitt (1998) asevera que es el proceso de formar imágenes y usarlas efectivamente para el descubrimiento y entendimiento matemático; además de considerar lo visual como un preámbulo hacia la abstracción de conceptos y así permitir al estudiante formar varios modelos de una situación de aprendizaje.

Zimmermann & Cunningham (1991) menciona: "… la visualización matemática da profundidad y significado a la comprensión, puede ser utilizada como una guía confiable para la resolución de problemas a la vez que promueve un razonamiento crítico". Gutiérrez (1996, citado por Sainz, 2014) coincide en algunos términos como una actividad de razonamiento y de resolución de problemas, mas agrega que es basada en el uso de elementos espaciales o visuales, desarrollados de forma física o mental y que además sirve para comprobar propiedades.

Para Duval (1999), en cambio, la visualización es una actividad cognitiva que es intrínsecamente semiótica, ni mental ni física, es decir, es uno de los tres procesos cognitivos que cubren las funciones epistemológicas específicas en geometría (Visualización, Construcción y Razonamiento).

En el mismo ámbito, Duval (2002) distingue entre visión y visualización. Visión la asocia a una percepción visual, la que proporciona un acceso directo al objeto físico y necesita exploración a través de movimientos físicos para obtener una aprehensión completa del objeto. En cambio, visualización se refiere a una actividad cognitiva que se basa en la representación semiótica de un objeto, en donde no es suficiente ver, sino comprender qué se quiere mostrar a través de representaciones esquemáticas o figuras, como los dibujos, diagramas o esquemas, gráficas, producidos en papel, medios electrónicos o en la mente, esto es imaginados (Balderas, 1998; Presmeg y Balderas; 2001).

La visualización posee además elementos básicos en todas las concepciones, las que explican, cómo observan los individuos y qué utilizan para ello. Esto se traduce en:

- **Los productos : Las imágenes mentales**

Las imágenes mentales corresponden a una representación cognitiva de un concepto o propiedad matemática por medio de elementos espaciales o visuales. Hay distintos tipos, tales como concretas pictóricas: fotos en la mente; de fórmulas; de Patrones; cinéticas : llevan asociada una actividad muscular como movimiento de cabeza; y dinámicas: se imagina el objeto movilizándose, sin movimientos físicos (Piesmeg, 1986b).

- **Los procesos para manipular esas imágenes**

Acción física o mental en la cual las imágenes mentales están involucradas (Gutiérrez,1996), los tipos son procesamiento visual e interpretación de información figurativa. El procesamiento visual se relaciona con la conversión de información no visual en imágenes, o al considerar una imagen ya formada en otra, en cambio, la interpretación de la información figurativa, se asocia a los intentos de leer, comprender e interpretar una imagen para extraer información de ella (Bishop, 1989).

- **Las habilidades para la creación y el procesamiento de las imágenes**

Habilidades utilizadas por los individuos para la creación y procesamiento de imágenes visuales. Tales habilidades suelen ser coordinación motriz de los ojos, Identificación visual, Conservación de la percepción, reconocimiento de posiciones en el espacio, reconocimiento de las relaciones espaciales, discriminación visual y memoria visual (Del Grande, 1990).

En el presente estudio se implementaron elementos básicos relacionados con las tres concepciones: los productos, los procesos para manipular imágenes y las habilidades de creación y procesamiento de imágenes, a partir de las cuales, se llevó a cabo las imágenes pictóricas, cinéticas y dinámicas las cuales movilizan sus elementos principales según la conveniencia del educando. En el caso de las habilidades para la creación, considera a ambas por convertir información abstracta en visual y viceversa; y por último las habilidades para la creación y el procesamiento de las imágenes gesticula la coordinación de los ojos y la identificación de características para luego aislarla del contexto.

Se presenta en el estudio las habilidades mencionadas en actividades contextualizadas a la realidad, que a modo de relación con la descripción anterior, se menciona la que se utiliza un mapa de la ciudad de Los Ángeles y como medio didáctico un juego utilizado por ellos, el PokémonGo®. En ella debían movilizar el plano de la ciudad, utilizar las calles y sus medidas y realizar los movimientos de traslación de un jugador en el plano cartesiano. En el mapa, tras seguir instrucciones, debían encontrar el norte de la ciudad (el mapa se encontraba de forma oblícua) y asociarlo con alguno de los ejes, de preferencia el eje de las ordenadas. Cada una de las calles, al poseer la misma longitud, permitía graduar el plano cartesiano; la ubicación de los premios en las esquinas, junto con el nombre de las calles y sus sentidos, permitió realizar la traslación del jugador. No olvidando que al ubicar los balones y realizar los movimientos en el plano cartesiano, permite el tratamiento del concepto en el mismo instante en que se realiza una conversión entre la identificación de la coordenada en el mapa y que posteriormente es plasmado en el plano cartesiano.

Situaciones similares son las que familiarizan las actividades de rotación, simetría axial y central en donde se utilizan las habilidades anteriormente mencionadas, las que admiten transformar su medio, visualizarlo en su mente, ubicarse espacialmente y transformarlo de forma que otro sea capaz de entender lo que está viendo. En este contexto es que Duval afirma que la visualización hace visible lo que no es accesible a la visión (Duval, 1999), por lo que ésta proporciona una vía directa al objeto pero, como anteriormente se señala, necesita de una cierta exploración que apoyada de movimientos, no tan sólo físicos que permiten obtener una aprehensión completa del objeto.

De modo que visualizar es explorar mediante esquemas, aprehender y coordinar representaciones, imaginar traducir e interpretar geométricamente un concepto y por supuesto el desarrollo de habilidades que los estudiantes utilizan para la construcción de su propio conocimiento.

Se le atribuye a la visualización la creación de significado al símbolo, lo que facilita la generación de conductas denominadas como sentido del símbolo (Arcavi, 1994, citado de Sainz, 2014), que se relacionan con procesos más allá de las habilidades procedimentales, evitado así – intención por lo demás de la presente investigación- los errores que provienen de un aprendizaje mecánico.

Ahora, para las diferentes formas de ver las figuras asociadas a actividades geométricas, existen clasificaciones que permiten compararlas entre sí, las que se relacionan al tipo de operación empleada al relacionarse con la Geometría. Se pueden distinguir 4 formas diferentes entre sí, y se nombran según qué son capaces de realizar los educandos al presentarse un problema, los que según Guzmán (s.f) se denominan como:

i) El Botanista quien reconoce formas a partir de cualidades visuales del entorno, suele ser la más usual en usar y permite nombrar las formas elementales como tipos de triángulos y diferenciar entre formas que presentan similitudes como el cuadrado y un rectángulo. En estos casos, las propiedades a distinguir son características visuales de contorno.

ii) El Topógrafo o agrimensor que mide los bordes de una superficie, realiza actividades que exigen pasar de una escala de tamaño a otra y su dificultad para los educandos radica en poner en correspondencia lo que observan y lo que está dibujado en una hoja, como por ejemplo elección de objetos de referencias, la elección de puntos o de ejes de referencias para representar la posición de objetos respecto la de otros movilizan propiedades geométricas de mediciones.

iii) El Constructor quien descompone una forma en trazas, es decir, con ayuda de instrumentos los educandos toman conciencia que las propiedades geométricas no son meras características perceptivas mientras son capaces de trazar formas con regularidad.

iv) El Inventor que transforma formas de unas en otras, exigiendo una desconstrucción visual de formas perceptivas primordiales para obtener la figura pedida como agregar trazas suplementarias a una figura de partida.

La visualización en cada una de las formas de abordar la Geometría mencionadas anteriormente participa activamente. En el caso del Botanista y el Agrimensor, se asocian a una visualización icónica, la que consiste en asociar la figura observada como un objeto independiente de las operaciones que se efectúen sobre ella, en cambio, el Constructor y el Inventor se vincula a una visualización no icónica, la que depende de una secuencia de operaciones que permite reconocer propiedades geométricas, que en la figura se ve afectada de manera que es desprendida de una organización más compleja. Por lo que la visualización icónica es necesaria para llegar a alcanzar el razonamiento de la visualización no icónica y que los estudiantes logren discernir las propiedades geométricas de las figuras que en un principio observan sólo como una imagen estática.

En las actividades presentadas a los estudiantes se utilizaron formas relacionadas a la visualización icónica y no icónica, de manera que lleguen a reconocer las propiedades y alcancen la forma de acercarse a la geometría como Constructor, lo que se verá reflejado cuando tracen figuras y deban realizar rotación o traslación con regla y transportador, pudiendo verificar y descubrir las propiedades de cada una de las transformaciones isométricas.

Ahora, en cuanto a la coordinación de representaciones, se puede decir que es importante para la visualización, porque proporciona una aprehensión global de un concepto, además al estar relacionada con operaciones de razonamiento se apoya de esquemas, razonamientos y elementos visuales o espaciales (Gutiérrez,1996), de modo que la visualización logra describir el proceso de crear representaciones geométricas o gráficas de los conceptos matemáticos y que sin ir más lejos, se puede apoyar además del uso de computadores como medio de proyección (Zimmerman y Cunningham, 1991).

Pero, pese a todo lo favorable que se muestra la visualización, no siempre se han apreciado las características positivas en el proceso de enseñanza – aprendizaje .Es así como menciona Sainz (2014) respecto de visualización:

> "Diversos ejemplos en los que la visualización puede llevar a engaños hicieron dudar a la comunidad científica de la fiabilidad de los argumentos y demostraciones visuales, provocando desconfianza hacia lo visual e instaurando un modelo formalista que empezó en la universidad pero caló rápidamente a secundaria. Hacia finales del siglo XX comenzó a haber indicios de cambio hacia un resurgir de la visualización en la actividad matemática. Desde el punto de vista didáctico, Stylianou (2001) señala que en la universidad existe una aceptación y reconocimiento de los métodos visuales, aunque su tratamiento es aún muy superficial".

La presente investigación pretende que los estudiantes logren la abstracción de los conceptos matemáticos que se enseñan al incentivar el reconocimiento de patrones, la comprensión, análisis, transformación, representación, e interpretación de información visual para que construyan su conocimiento, situación que fomentaría la resolución de problemas y un razonamiento crítico; lo que se encuentra lejos de ser un aprendizaje mecánico o un aprendizaje cercano al método tradicional y , por el contrario, se acerca más al constructivismo, que es lo que pretende la presente investigación.

Es necesario, entonces, la especificación de las representaciones semióticas y la visualización para dar respuesta a cómo se coordinan los registros de representación en geometría (Duval, 1995,1998), más específicamente en isometría, en donde hay variedad de realizar actividades para recuperar información visual, especialmente del medio que rodea a los educandos.

2.7 Teoría de registros de representación semiótica

Algunos autores han reconocido la importancia de las diferentes representaciones semióticas al manipular un objeto matemático. Entre ellos se puede mencionar a investigadores como Duval (1999); Hitt (1996); Zimmermann & Cunninghan (1991); Dreyfus (1991).

Para Duval (1999), no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación, la que corresponde a las diferentes maneras de utilizar un sistema semiótico. Por lo que se precisa conocer qué es una representación y un sistema semiótico, para sopesar la importancia que le da este autor a su Teoría de Representación Semiótica, para lo cual se apoyará de definiciones brindadas por diversos autores.

Representar, según Rico (2009) corresponde a una práctica que abarca una multiplicidad de opciones como sustituir, dar presencia a un ausente y, por ende, confirma su ausencia, observándose la representación como una dualidad entre representante- representado. Y tal como se menciona la relación existente puede generar dificultades para la matemática:

> "El concepto de representación da por supuesta la consideración de dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas. Uno de estos entes se denomina objeto representante (símbolo o representación), el otro es el objeto representado (concepto), también está implícita cierta correspondencia entre el mundo de los objetos representantes y el mundo de los objetos representados" (Kaput,1987a).

Así, las representaciones se manifiestan como herramientas (signos o gráficos) que dan a conocer conceptos y procedimientos matemáticos con las cuales los individuos se acercan al conocimiento matemático, luego, las personas asignan significados y logran comprender estructuras matemáticas. Razón por la cual estas representaciones poseen el interés de la didáctica (Randford ,1998 citado por Rico, 2009). De modo que la importancia otorgada a las representaciones es debido a que se utilizan en los análisis de procesos de comprensión, aprendizaje y de asignación de significados que llevan a cabo los estudiantes en el aprendizaje de la matemática (Macías, 2014).

Por lo que una representación semiótica corresponde a una producción constituida por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y funcionamiento (Duval, 1995).

De modo que, para comprender cuál es el objetivo de las representaciones, es que a continuación se muestran sus clasificaciones.

Las representaciones pueden clasificarse en externas e internas.

i) **Externas:** Se refieren a representaciones idóneas a ser percibidas por los sentidos, tales como el lengua natural, las fórmulas algebraicas, las gráficas, las figuras geométricas, entre otras. Son el medio por el cual los individuos exteriorizan una imagen mental para que puedan ser accesibles a los demás. Éstas actúan como estímulo para los sentidos en procesos de construcción de estructuras mentales y permiten la expresión de conceptos e ideas a los sujetos que las utilizan.

ii) **Internas:** Son imágenes mentales que los individuos poseen de los objetos y relaciones las que permiten formar, por lo demás, su conocimiento (Gruszycki, Oteiza, Maras, Gruszycki, & Ballés, s.f)

Dichas representaciones, tanto las externas como internas, suscitarán en la investigación parte del conocimiento de los estudiantes, los que podrán ser relacionados y fomentados con la visualización.

Sin embargo, no basta con saber los objetivos de la representación para sopesar la importancia de las representaciones semióticas planteadas por Duval, sino también, con qué se relaciona la semiótica.

Whitson (1994, citado por Hoyos, 1998) hace mención a que la semiótica corresponde a una actividad signada, y como tal provee de recursos conceptuales y vocabulario necesario para dar procesos de mediación signada. Y un Sistema semiótico se refiere al conjunto de signos y reglas que representan objetos, donde los signos son unidades elementales del sistema y las reglas rigen las asociaciones de los signos (Macías, 2014).

Para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación según Duval (1993,1995, citado por Oviedo, Kanashiro y otros, 2006) debe cumplir ciertos requisitos, permitir tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis, a saber:

i) **Identificación:** Reconocimiento de la representación presentada al individuo sin mayor dificultad.

ii) **Tratamiento:** Transformación realizada al interior de un mismo registro en donde ha sido formulada.

iii) **Conversión:** Transformación realizada entre diferentes registros.

La importancia de identificar estas tres actividades cognitivas, radica en que permite no confundir el objeto matemático que se debe aprehender con las representaciones que se utilicen para facilitar su comprensión, ya que, la coordinación de los diversos registros usados permite la comprensión conceptual.

En el contexto de la conversión, se debe analizar aparte del tratamiento, aunque en la enseñanza no es considerada de esa forma (Duval, 1993), se le presta más importancia sólo a la representación y el tratamiento, lo que influye en los estudiantes a una dificultad de cambios de registro.

Así, la importancia de la conversión radica en que permite la vinculación del concepto enseñado en diferentes registros, lo que conlleva a la comprensión y no a la memorización, tal como lo menciona Duval (1998):

> Para la actividad matemática es esencial poder movilizar varios registros de representación semiótica (figuras, gráficas, simbólica, lengua natural, etc.) en el

transcurso de una misma tarea, ya sea recogiendo un registro más bien que otro. E independientemente de toda comodidad de tratamiento, ese recurso a varios registros parecen una condición necesaria para que los objetos matemáticos no sean confundidos con sus representaciones y para que sean reconocidos en cada una de ellas.

Sin embargo, la mayoría de los estudiantes son incapaces de cambiar registros de representación, por lo que se debe buscar formas en que éstos puedan observar, criticar y conjeturar acerca de éstos. Desafío que se plantea en la presente investigación en relación la Unidad de Geometría, en el concepto de transformación isométrica en el plano cartesiano.

De modo que para que los estudiantes puedan construir los conceptos que se desean aprendan, deben basarse en a lo menos dos registros de representación, y quedará en evidencia la capacidad de ellos de coordinación si muestran una rápida utilización de la conversión cognitiva (Duval, 1993,1995). Donde previamente deberán analizar, y observar qué es lo mejor que pueden hacer para la resolución del problema presentado, hecho que deberá ser apoyado con la visualización.

Así y tal como mencionan Oviedo , Kanashiro y otros (2006), considerando lo dicho por Duval, las consideraciones visuales son importantes al momento de resolver problemas. La visualización matemática se encuentra relacionada en este contexto bajo en una visión global, integradora, holística, que permita articular representaciones de varios temas, lejos de posibles contradicciones.

Aunque la visualización no es la única forma de que no se confundan los registros con los objetos matemáticos, se puede llevar a los estudiantes a que manipulen el conocimiento y las representaciones de la siguiente forma:

i) En sí se debe reconocer el mismo objeto de conocimiento a través de representaciones cuyos contenidos no tienen relación entre sí

ii) Reconocer y distinguir dos objetos a través de dos representaciones cuyos contenidos parecen semejantes porque dependen del mismo sistema de representación, lo que llevaría a una comparación.

Por lo que de una u otra forma, es esencial poder movilizar diferentes registros de representación semiótica (lengua natural, lenguaje funcional, lenguaje algebraico, gráfico, figuras, etc.) y desarrollar coordinación entre ellos (Duval, 2006b) aunque ésta no sea espontánea.

La importancia de no confundir un objeto, radica en que toda confusión entre el objeto y su representación provoca, en un plazo más o menos amplio, una pérdida de la comprensión: los conocimientos adquiridos se hacen rápidamente inutilizables por fuera de su contexto de aprendizaje, sea por no recordarlos, o porque permanecen como representaciones "inherentes" que no sugieren ningún tratamiento productor (Duval, 2004).

Es así que en la presente investigación se utilizaron distintos tipos de representación articulados con los distintos niveles de razonamiento de la teoría de Van Hiele y la visualización, promoviendo de esa forma a que los estudiantes observen, critiquen y conjeturen acerca de éstos, utilizando la conversión señalada por Duval(2004).

2.7.1 Tipos de registros de representación

Los registros de representación corresponden a medios de expresión caracterizados por sus respectivos sistemas semióticos. Un registro se encuentra constituido por signos como trazos, símbolos, íconos y a su vez estos signos asociados de manera interna según los lazos de contexto y de pertenencia a una misma red semántica y de manera externa, según las reglas de combinación de signos en expresiones o configuraciones (Guzmán, 1998).

Al estar presentes los registros de representación en el estudio, se detallan a continuación en una tabla representativa, los tipos utilizados en el estudio con una respectiva descripción. Además, para contextualizar dichos registros y comprender la aplicación, se ejemplifican con un extracto de las acciones solicitadas a los estudiantes.

Registro	**Descripción**
Lengua Natural	Permite introducir definiciones, así como hacer descripciones o designaciones.
Ejemplo intervención	**I. Situación.** Un jugador de Pokémon Go anda en búsqueda de gimnasios. Sin embargo, desde donde él se encuentra, el juego le indica que "está demasiado lejos de su posición"; además, en el camino hay una poképarada. Según el Go Map (mapa que indica la ubicación de pokemones, etc.), desde la esquina en donde está detenido, debería desplazarse hacia el Este dos cuadras para encontrar la poképarada; en cambio el gimnasio desde la poképarada, se encuentra una cuadra hacia el Este y dos hacia el Norte. El jugador se propone ir a ambos lugares, y espera con ansias llegar al gimnasio, pues hay un Gyarados que no tiene en su colección. (1 cuadra= 100m). (situación acondicionada al juego de Pokémon Go)
T. isométrica	Si el estudiante logra comprender lo que el registro de lengua natural sugiere, pueden relacionar la distancia que debe recorrer el jugador con el desplazamiento realizado, concepto tratado en la asignatura de Física, y dicho desplazamiento con la transformación isométrica traslación. Además, el planteamiento está formulado para que el educando aplique razonamiento espacial.
Numérico	Permite apreciar algunas de las características y elementos identificados de los objetos matemáticos a los que hace referencia, así como vincularlos y relacionarlos con representaciones gráficas y geométricas: Datos circunferencia: c1 (2,1) y p2 (0,5) Datos Circunferencia: C (5,9) y r3=3. También permite realizar operaciones de cálculo y aplicar propiedades como pueden ser la distributiva, conmutativa, etc.
Ejemplo intervención	En el plano cartesiano, ubique el punto de partida y el punto de llegada del jugador de un color y las paradas que hizo de otro color, de manera que se pueda identificar las coordenadas de dichos puntos,
T. isométrica	La actividad se orienta para que el educando logre relacionar posteriormente el concepto de vector necesario para una traslación en el plano cartesiano.

Registro Figural o icónico	Engloba dibujos, esquemas, bosquejos, líneas, marcas, etc. Que intentan representar el objeto de conocimiento sin dar cuenta de la cualidad de los elementos involucrados. (ver imagen 2.8.1.a)
Ejemplo intervención	Reconozca a qué transformación isométrica corresponden las imágenes y mencione los elementos característicos.(ver imagen 2.8.1.b)
T. isométrica	De acuerdo a la imagen del plano cartesiano, el alumno puede identificar características de las trasformaciones isométricas, recurriendo a conocimientos previos como ángulos, contando la distancia entre los puntos, lo que se traduce en un tratamiento dentro del mismo registro figural.
Registro Gráfico	Posibilita inferir, con un simple vistazo, el comportamiento que va seguir una determinada función, así como efectuar tratamientos propios de su registro como son las traslaciones, reflexiones, simetrías, contracciones, dilataciones, etc. La representación gráfica-cartesiana hace patentes diversos elementos (puntos de corte con los ejes, ejes de simetría, posición en el plano, curvatura, etc.) (26)
Ejemplo intervención	Se le ha aplicado simetría central respecto del origen al triángulo de vértices A (5,6), B (1,2) y C (3,6) del cual se sabe que el homólogo de B, el punto B', tiene coordenadas (-1,0), Grafique el triángulo original y el triángulo resultante.
T. isométrica	Luego de que el educando lee, identifica la figura a trazar y las coordenadas relacionadas, realiza la conversión al plano cartesiano trazando la figura (conversión al registro icónico y registro gráfico) y con las características de la simetría central ya visualizadas, se las aplica a la figura del plano cartesiano obteniendo así la simétrica a través de un punto, es decir, puede graficar cada punto (conversión al registro gráfico) para luego dibujar la figura (conversión al registro figural)

Tabla: Elaboración propia, sobre la base de cuadro 3 de Marroquín (2009)

Por tanto, las expresiones simbólicas, enunciados, diagramas, gráficos y otras nociones usuales de matemática pueden ser tratados de forma coordinada a través de los registros de representación, de manera que expresen diversas propiedades y relaciones estructurales entre los conceptos e ideas representadas. Cabe destacar que los símbolos y signos en el desarrollo del pensamiento matemático son determinantes, y por ello la semiótica y todos aquellos aspectos que forman parte de dicho campo, se han incorporado como ámbito de estudio en el área de educación matemática. Los signos y las representaciones en matemática no tienen como función primordial la de comunicar o evocar algún objeto ausente, sino que el papel fundamental, y verdaderamente importante, lo constituyen las transformaciones de unas representaciones en otras, ya que permiten obtener nuevas informaciones, y propiedades, y extraer nuevos conocimientos de los objetos, ideas y conceptos representados (Duval,2006a), razón por la cual se ha considerado las representaciones para la presente investigación. Además, las actividades propuestas fueron formuladas con la intención de que el educando utilice y desarrolle el razonamiento espacial, razón por la cual se describe a continuación.

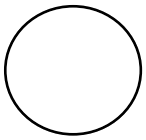
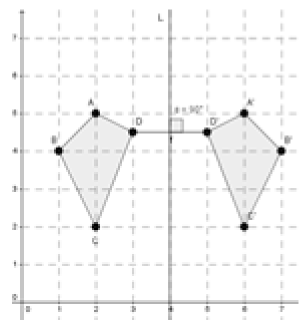


Imagen 2.8.1.a

imagen 2.8.1.b


2.8 Algunos antecedentes históricos de las transformaciones isométricas

Para comprender el concepto de transformaciones isométricas, tópico en estudio de la investigación, y sus aplicaciones, es necesario recurrir a la epistemología del concepto, lo cual ofrece una orientación de la procedencia, de su antigua utilización y de cómo llegó a nombrarse de tal forma. A continuación se presenta los orígenes de las transformaciones isométricas y su paso por la historia según Moreira (s.f), quien se basó en textos como Historia de la matemática (Boyer, 1996) y Des transformations des figures aux transformations poctuelles (Jahn, 1998).

El origen de las transformaciones isométricas proviene de la antigüedad, en donde los problemas de representación de los objetos en el espacio y los problemas de sombras, fueron la principal preocupación de los pintores y artistas del Renacimiento. La descripción del mundo real se convirtió en el objetivo de la pintura y los artistas emprendieron el estudio de la naturaleza para reproducirla fielmente en sus lienzos, donde se enfrentaron al problema matemático de presentar el mundo real tridimensional en un lienzo bidimensional.

Fueron tres artistas principales que relacionaron sus obras con la matemática y se preocuparon por una representación exacta de la naturaleza. Fillipo Brunelleschi (1377-1446) el primer artista que estudió y utilizó las matemáticas, luego Leonardo Da Vinci (1452-1519) siguió los pasos, al escribir su obra "Tratatto della pintura"sobre la perspectiva, publicado recién en 1651 y Durero(1471-1528) De todos los artistas del renacimiento, el mejor matemático fue el alemán Albert Durero quién escribió un libro sobre geometría: "Instrucción en la medida con la regla y compás"(1525), para ayudar a los artistas sobre la perspectiva. Es así como la perspectiva se transforma en un instrumento de estudio de la geometría.

Posterior a ellos, el arquitecto e ingeniero Gerard Desargues (1591-1661), fue el antecesor de la idea de transformación en geometría y de la utilización de propiedades invariantes. Sus trabajos se inscriben en el marco de la teoría de las cónicas, consideradas secciones planas de un cono de revolución con un plano que lo interseca y luego, gracias a las perspectivas, son también interpretadas como proyecciones perspectivas en un círculo sobre un plano paralelo al que contiene al círculo. Una cónica es así una proyección del círculo que sirve de base al cono a partir del vértice del cono sobre un plano secante. La transformación permite demostrar que una relación verdadera en el círculo lo es en una cónica cualquiera.

Pascal (1623-1662), siguiendo a Desargues, retoma los métodos proyectivos de este último para redactar su tratado de las cónicas. Como Desargues, Pascal continúa a expresando las cónicas como imágenes de la circunferencia de un círculo estableciendo de nuevo el lado con la perspectiva.

En este periodo histórico las transformaciones geométricas aparecen como instrumentos implícitos de transferencia de propiedades. Las únicas transformaciones utilizadas son las proyecciones, pero quedan en el contexto de las cónicas, y no son consideradas como objeto de estudio en sí mismas, sino como simples relaciones entre dos figuras donde prima la noción de invariante. Luego toma importancia la geometría analítica.

La geometría analítica o el "método de las coordenadas" ha sido introducido en el siglo XVII paralelamente por Fermat (1601-1665) y por Descartes (1596-1650) como un método general para resolver problemas geométricos y particularmente para estudiar curvas y superficies.

Considera al plano como un conjunto de puntos, asociados a esos untos el plano pares ordenados y a las curvas, ecuaciones. "Es ésta una de las vetas más ricas y fructíferas del pensamiento matemático que jamás se hayan encontrado". Pero la idea fundamental de ecuación de una curva es puesta en evidencia de manera más clara por Fermat. Su método se funda en el reconocimiento de una correspondencia biyectiva entre los puntos del plano y sus coordenadas y se asocia a las ecuaciones de curvas. Es decir, la Geometría Analítica reemplaza las leyes geométricas(o sus propiedades) de las figuras por las lees algebraicas sobre las coordenadas de sus puntos. Es precisamente esa relación analítica entre puntos y coordenadas que permite reconocer la figura como conjunto de puntos.

Así, en el siglo XIX la obra de Poncelet desarrolla y difunde el método de las transformaciones, que definió la llamada geometría proyectiva. A finales del mismo siglo, se reconoce la noción de grupo que tiene su origen en el estudio de las sustituciones de la raíces de una ecuación algebraica, desarrollada por Galois (1811-1832). Sin embargo fue Klein (1849-1895) quien profundizó este concepto y para quien las transformaciones actúan sobre un espacio y no solamente sobre las figuras.

CAPÍTULO 3: Marco Metodológico

3.1 Alcance de Investigación

El estudio realizado es de tipo explicativo-correlacional, ya que se describió y analizó la incidencia en las variables: razonamiento espacial, motivación y actitud hacia la matemática producto de las representaciones semióticas y visualización; además de comprobar la existencia de alguna relación entre éstas y el aprendizaje, mediante la verificación de hipótesis a través de pruebas estadísticas.

3.2 Enfoque

El enfoque de la investigación es cuantitativo, debido a que se recolectaron datos para un posterior análisis estadístico de éstos, los que corresponden al aprendizaje de los estudiantes en el pre y pos test de matemática, además de los pre y pos test correspondientes a las variables socio-afectivos de motivación y actitud hacia la matemática, de matemática y razonamiento espacial.

3.3 Diseño

En lo referente al diseño de investigación, es de carácter pre-experimental, ya que no fue posible contar con dos grupos similares, por lo que se manipula de manera intencional a un solo grupo, al que se evalúa antes y después de la intervención, para analizar el progreso en el aprendizaje respecto a las transformaciones isométricas en el plano cartesiano y las variables socio-afectivas.

3.4 Dimensión Temporal

Esta investigación corresponde a un estudio transversal puesto que se desea analizar cambios que puedan ocurrir en un periodo reducido de tiempo en las variables determinadas al implementar las representaciones semióticas y visualización, además los datos recolectados serán utilizados para realizar inferencias respecto al cambio que presentaron con el tiempo. (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

3.5 Unidad de Análisis

La unidad de análisis corresponde a hombres y mujeres que pertenecen al nivel de primero de enseñanza media para observar el aprendizaje de los alumnos en transformaciones isométricas en el plano cartesiano tras la participación de la metodología de las representaciones semióticas visualización.

3.6 Población

La población considerada para la investigación estuvo conformada por todos los estudiantes de primer año medio de un colegio rural particular subvencionado de la comuna de Los Ángeles, cuya cantidad corresponde a un total de 250 alumnos.

3.7 Muestra

La muestra es intencionada, puesto que se eligió de acuerdo a las características de la investigación, es decir, alumnos de primer año medio sujeto a la enseñanza de transformaciones isométricas. Además, fue escogida por el establecimiento y corresponde al curso primer año medio F, cuya matrícula asciende a 45 estudiantes, lo que corresponde a un 18% de la población, de los cuales convergen alumnos de ocho comunas de la Provincia del BíoBío, proveniente de diversas realidades sociales, económicas y culturales, en la mayoría de los casos precarias, caracterizadas por una economía de subsistencia de pequeños agricultores, con monocultivos tradicionales y de temporada, además de familias provenientes de sectores periféricos de la ciudad de Los Ángeles y pueblos cercanos, lo cual otorga a este grupo en estudio un índice de vulnerabilidad de 66,71%. Del total 62,8% son mujeres y 37,2% son hombres. Sus edades fluctúan entre los 13 y 15 años; se encuentran internados un 6,6% de los estudiantes.

En general, llevan años expuestos a la enseñanza mecanicista de la Matemática y están acostumbrados a memorizar las materias. Es un buen curso, logran en promedio 60 en Matemática. Sus expectativas son concluir estudios universitarios.

3.8 Variables

En esta sección se dan a conocer la variable independiente considerada para la investigación y aquellas que varían en respuesta a ésta, definiéndose de forma conceptual y operacional.

3.8.1 Variable Independiente

Para la presente investigación se consideró como variable independiente el método de enseñanza-aprendizaje:

- Método de enseñanza - aprendizaje:

  Metodología de aprendizaje basada en la Teoría de representación semiótica y visualización.

  Definición conceptual:

  Producción que incita a realizar actividades cognitivas de identificación, tratamiento y conversión al movilizar dos o más registros de representación semiótica, aprehendiendo el objeto matemático, apoyando al razonamiento y elementos visuales o espaciales.

3.8.2 Variables dependientes y su definición operacional.

A continuación se presentan las variables dependientes y su definición operacional respectiva.

- Grado de conocimiento de las Transformaciones Isométricas:

  Definición conceptual:

  Se concibe por conocimiento a un conjunto de experiencias, valores importantes, información contextual y punto de vista de expertos, que trabajan para facilitar un marco de análisis para la evaluación e incorporación de nuevas experiencias e información (Davenport y Prusak, 1998; citado por Segarra y Bou , 2004).

  Definición Operacional:

  Puntaje obtenido por los estudiantes en el pre test y pos test al grupo en estudio del establecimiento particular subvencionado, que consta de 77 puntos.

- Nivel de actitud hacia las matemáticas:

  Definición Conceptual:

  La actitud hacia la matemática corresponde a la predisposición aprendida por parte de los y las estudiantes a responder de manera positiva o negativa a las matemáticas, lo que determina su intensión e influye en su comportamiento ante la materia (Pérez-Tyteca, Castro, Rico y Casto, 2011; citado por Roberto, Oliver y Espinosa, 2012)

  Definición Operacional:

  Puntaje obtenido por los estudiantes en el test de actitud hacia la matemática, aplicado tanto al inicio como al final de la intervención, al *GE* del establecimiento ya mencionado. El test consta de un total de 95 puntos.

- Grado de Motivación:

  Definición Conceptual:

  Moore (2001 citado en Díaz, 2002) hace mención a que implica "impulsos o fuerzas que nos dan energía y nos dirigen a actuar de la manera en que lo hacemos". De manera que sería la batería que nos incita a cómo desenvolvernos frente a las situaciones que se presenten.

Definición Operacional:

Puntaje alcanzado por los y las estudiantes en el test de motivación que se aplicó, tanto al inicio como al final de la intervención. El test posee un total de 30 puntos.

- Nivel de razonamiento espacial:

  Definición Conceptual:

  Conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan representaciones, relaciones y transformaciones mentales de los objetos espaciales. (Godino, Fernández, y otros, 2011)

  Definición Operacional:

  Puntaje obtenido por los estudiantes en la aplicación del test de razonamiento espacial de Evalúa 8. Las respuestas de los estudiantes serán comparadas con las respuestas existentes en una tabla de corrección, de las que se obtendrá un puntaje a través de una fórmula y luego ubicado el percentil en una tabla de baremo.

3.9 Recolección de Datos

La recolección de datos se fundamenta en la medición y el análisis en procedimientos estadísticos (Santibáñez, 2001) del aprendizaje, la actitud y motivación que muestran los y las estudiantes hacia la matemática y el razonamiento espacial manifestado en las transformaciones isométricas en el plano cartesiano tras la participación en las representaciones semióticas y visualización.

La información recuperada proviene de un grupo de estudio correspondiente al estudiantado de primer año medio de un colegio particular subvencionado, específicamente del primer año F, denominado grupo experimental GE. El curso se encuentra constituido por un 62,8% de mujeres, correspondiente a 27 estudiantes y un 37,2% de hombres, correspondiente 16 varones.

Del total de la muestra se excluyen dos estudiantes, ambas mujeres, por encontrarse con licencia médica no participaron de las sesiones en las que se recolectaron los datos. Lo que hace un total de 43 estudiantes participantes del proceso total de intervención.

3.10 Instrumentos de Recolección de datos

Para llevar a cabo el cumplimiento de los objetivos y dar respuesta a las preguntas de investigación, se utilizaron cuatro instrumentos para la recolección de datos, tanto en los pre test (aplicado antes de la intervención pedagógica) como en los post test (después de la intervención). Tales test consisten en una prueba de dominio sobre transformaciones isométricas, un test de actitud y motivación hacia la matemática y un test de razonamiento espacial.

3.10.1 Pre test de transformación isométrica

El test es de elaboración propia y se destina para verificar los contenidos previos que poseen los estudiantes antes de la intervención del grupo experimental. Es construido sólo en ítem de desarrollo, orientado a los objetivos fundamentales propuestos por el MINEDUC para nivel de primer año medio. La fuente que sirvió de modelo para la construcción del instrumento fue el pre test de Arévalo (2014), que cuenta con dos ítemes, correspondiente a selección múltiple y desarrollo, con 12 y 5 preguntas respectivamente. Sin embargo, las preguntas 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9,10 y 12 del ítem de selección múltiple y las preguntas 1 y 2 del ítem de desarrollo fueron modificados y orientadas a la metodología de Teoría de representación semiótica y Visualización, de modo que el pre test cuenta con 10 ítemes de desarrollo en dónde algunos alcanzan instrucciones hasta la letra d. Cada uno cuenta con al menos dos registros de representación y uno de visualización. El puntaje alcanzado es de 77 puntos

Los contenidos incluidos en el pre test son los siguientes:

- Elementos de transformaciones isométricas.
- Puntos y coordenadas
- Características vectores.
- Concepto de vectores.
- Concepto de traslación
- Concepto de rotación.
- Concepto de simetría axial.
- Concepto de simetría central.

Los objetivos específicos que mide el pre test son:

A) Identificar y Caracterizar transformaciones isométricas en figuras planas y en el plano cartesiano.
B) Ubicar puntos y figuras en el plano cartesiano.
C) Representar y caracterizar vectores y adición de vectores en el plano cartesiano.
D) Realizar transformaciones isométricas a puntos y figuras en el plano cartesiano

La siguiente tabla relaciona cada ítem con los objetivos específicos, los registros de representación: lengua natural (L.N), gráfico (Grá), figural (Fig), numérico (Num); los tipos de visualización icónica (Vi.Icó) y no icónica (Vi. N/I) y los dominios cognitivos de matemática para 4° y (° básico presentes en la prueba TIMMS, los cuales se clasifican en Conocimiento (Cono), Aplicación (Apli) y Razonamiento (Raz).

Categoría	Dominios Cognitivos											
Contenido	**Cono.**	Regi	Vi	O	**Apli**	Repr	Vi	O	**Raz**	Repr	Vi	O
Elementos trans.isom.	1.a,b,c,d.	L. N. Grá.	Icó.	A	11.a,b	L.N Fig	I	A				
Puntos y coordenadas												
					9.a	L.N Grá Num	I	E				
					3.b	L.N. Grá. Fig.	I	B				
Caracteristicas vectores	6	L.N Num Grá	N/I	C								
Concepto de vectores	2.a	L.N. Num Fig.	Icó.	C					2.c.	L.N. Fig.	N/I	A
					7.a,b	L.N Gra	N/I	C				
Concepto de traslación					2.b.	L.N. Num.	N/I	B				
Concepto de rotación					3.a	L.N. Grá. Fig.	N/I	E	4.a	L.N Num.	N/I	E
					4.b	L.N. Grá.	N/I	B				
Concepto de simetría axial					8.a	L.N. Grá Num	N/I	B	8.b	L.N Grá	N/I	A
Concepto de simetría central					9.b	L.N Gra	I	E	5.b	L.N Num Grá	N/I	B
					5.a	L.N Fig. Grá.	N/I	B				

El primer dominio cognitivo, el conocimiento, abarca los hechos, conceptos y procedimientos que necesitan conocer los y las estudiantes; el segundo, la aplicación, se concentra en la capacidad de los educandos para aplicar el conocimiento y la comprensión conceptual al momento de resolver problemas o contestar preguntas; y por último, el razonamiento, va más allá de la solución de problemas de rutina para abarcar situaciones no conocidas, contextos complejos y problemas con múltiples etapas (Educación, 2012).

Para evaluar los registros de representación manifestados por los estudiantes, todas las preguntas que constituyen el test corresponden a ítemes de desarrollo.

Los ítemes fueron sometidos a validación por parte de tres profesores de la Universidad de Concepción, Campus Los Ángeles, todos ellos pertenecientes a la Escuela de Educación. El proceso de validación consiste en presentar el pre test a los 3 profesores que actúan de jueces y son ellos quienes analizan el instrumento para decidir si éste responde a los objetivos planteados, a la vez de manifestar cualquier error existente. Para la evaluación, se dispuso de un tiempo estimado de 3 semanas, en las cuales cada juez revisó el test y entregó sus observaciones.

Así, se realizan las correcciones que dieron lugar al pre test y finaliza el proceso para luego aplicarlo a los escolares. El test queda conformado con 10 ítemes, con un total de 54 puntos para los estudiantes. Sin embargo, para efectos de análisis para esta investigación, se considera un total de 77 puntos al poseer cada pregunta conversión en registros y tipos de visualización, los que se evalúa con 1, si está presente el registro; 0.5 si el registro se presenta medianamente y 0 si no está presente el registro.

Una vez aplicado el pre test se estudió su confiabilidad calculado el coeficiente de Alpha de Conbrach determinado por el programa IBM SPSS, con un $\alpha = 0{,}92$, lo que indica una alta fiabilidad del instrumento.

3.10.2 Post test de transformación isométrica

El test es de elaboración propia y se destina para verificar los contenidos previos que poseen los estudiantes antes de la intervención del grupo experimental. Es construido sólo en ítem de desarrollo, orientado a los objetivos fundamentales propuestos por el MINEDUC para nivel de primer año medio. La fuente que sirvió de modelo para la construcción del instrumento fue el pre test de Arévalo (2014), que cuenta con dos ítemes, correspondiente a selección múltiple y desarrollo, con 12 y 5 preguntas respectivamente. Sin embargo, las preguntas 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9,10 y 12 del ítem de selección múltiple y las preguntas 1 y 2 del ítem de desarrollo fueron modificados y orientadas a la metodología de Teoría de representación semiótica y Visualización, de modo que el pre test cuenta con 10 ítemes de desarrollo en dónde algunos alcanzan instrucciones hasta la letra d. Cada uno cuenta con al menos dos registros de representación y uno de visualización. El puntaje alcanzado es de 77 puntos. Sólo varía del pre test en cuanto a valores en los enunciados y en las imágenes propuestas.

Posterior a la aplicación del post test, se estudió su confiabilidad calculado el coeficiente de Alpha de Conbrach determinado por el programa IBM SPSS, con un $\alpha = 0{,}96$, lo que indica una alta fiabilidad del instrumento.

3.10.3 Escala de motivación hacia la matemática

El instrumento correspondiente a la variable motivación. Fue elaborado por la docente de la Universidad de Concepción, Mg. Irma Lagos Herrera y modificado posteriormente por Candia (2014) en su seminario *"Progreso en la motivación y el aprendizaje al estudiar transformaciones isométricas con Geogebra".* La escala de apreciación consta de 6 indicadores con 5 categorías cuantitativas referidas a la frecuencia con que se observa la conducta especificada en los estudiantes. Estas categorías son las siguientes: siempre (5 puntos), casi siempre (4 puntos), a veces (3 puntos), casi nunca (2 puntos) y nunca (1punto), con un puntaje total de 30 puntos, las cuales miden el grado de aumento o disminución de la motivación de los estudiantes desde la apreciación personal del docente, antes y después de llevar a cabo la intervención para su posterior análisis en cuanto al progreso obtenido.

El estudio de la confiabilidad se aplicó a 36 estudiantes, obteniendo un coeficiente Alpha de Cronbach de 0,950, lo que indica una alta fiabilidad del test.

3.10.4 Test de actitud hacia la matemática

El instrumento correspondiente a la variable actitud ha sido elaborado por Mato y Muñoz (2008), constando inicialmente de 31 preguntas, con un bajo coeficiente de fiabilidad (0.6735). Por lo que se suprimen 12 ítemes para nuevamente realizar el análisis de la fiabilidad del cuestionario final (19 ítemes) con 1220 cuestionarios, obteniéndose un coeficiente de fiabilidad Alpha de Conbrach (consistencia interna) de 0.9706 lo que indica una alta fiabilidad de la prueba.

Así el test está conformado de 19 ítems, donde el estudiante lee una sentencia declarativa y luego decide si está muy de acuerdo, de acuerdo, le es indiferente, está en desacuerdo o muy en desacuerdo. El puntaje asignado va de 5 a 1, respectivamente. La actitud hacia la matemática es el total de la suma de los puntajes asignados según la respuesta de los estudiantes, con un puntaje máximo de 95 puntos (Muñoz, J. y Mato, M., 2008).

3.10.5 Test de Razonamiento Espacial

El instrumento correspondiente a la variable razonamiento espacial ha sido elaborado por García J., García M. y González (2001) en la Batería Psicopedagógica Evalúa 8. La evaluación considera bases cognoscitivas del aprendizaje, la cual valora la capacidad de inferir relaciones espaciales, a partir de dos tipos de estímulos: de un lado los tradicionales cubos de Kosh y el empleo de figuras sólidas. El test consta de 20 ítemes, de las cuales 9 se refiere al empleo de figuras sólidas y 11 a los cubos de Kosh los que suman un puntaje de 19 puntos. En ambos casos, se presenta de forma gráfica.

La técnica de medición se concentra en que se deben contrastar las respuesta de los alumnos con las respuestas existentes en la tabla de corrección. En cada una de las tareas se concede un punto por acierto (A) y se le restan los errores (E), dividiéndolos por el número de alternativas menos uno (n – 1), no contando las omisiones. Además cuenta con simbología y fórmulas detalladas a continuación:

Simbología		Fórmulas
PD: puntaje directo re : razonamiento espacial	t:tarea 1:n°1	PD t1 = A - E /5 PD t2 = A - E /3

Una vez obtenida la puntuación directa de ambas tareas se busca el centil correspondiente en la tabla de baremo presentado en el mismo manual de Evalúa 8.

3.11 Intervención didáctica en Geometría

A continuación se pone en conocimiento del procedimiento realizado de la investigación.

A los y las estudiantes del grupo en estudio, en 25 horas pedagógicas asociadas a 20 sesiones de 90 y 45 minutos, se les aplicó un pre test de razonamiento espacial, motivación y actitud hacia la matemática y el pre test de conocimientos acerca de las transformaciones isométricas con el propósito de determinar los niveles en los cuales se encuentran los escolares antes de dar inicio a la intervención.

Luego de la obtención de los datos, se procede a la intervención del grupo en estudio utilizando las representaciones semióticas y visualización. Por su parte, los estudiantes realizaron actividades apoyadas de material en lengua natural, por medio del cual debían realizar conversiones y tratamientos, y cuando lo ameritaba de material pictórico.

Finalizadas las sesiones, se procedió a aplicar a los educandos post test de iguales características a los pre test, correspondientes a los test de motivación y actitud hacia la matemática, test de razonamiento espacial y post test de conocimiento de las transformaciones isométricas en el plano cartesiano con las modificaciones ya mencionadas con respecto al inicial, cuyo propósito radica en analizar y comparar el avance que hubo en las variables anteriormente descritas.

A continuación se presentan las fechas y los respectivos temas que se abordaron las clases. Para ver detalle de planificación diríjase al anexo C. La sesión se refiere al número de clase realizada, la fecha se refiere al día en que se realizó la clase, las horas pedagógicas (h. p.)

Calendario de intervención curso expuesto a las representaciones semióticas y visualización.

Sesión	Fecha	h.P	Tema	Actividades
0	19 de octubre	2 h	Aplicación pre test de motivación y actitud hacia la matemática; test de razonamiento espacial, pre test de trans.isom. en el plano cartesiano	Recurso:Pre test de motivación, actitud, razonamiento espacial, transformaciones isométricas.
1	21 de octubre	2 h	Elementos básicos del plano cartesiano	Desarrollo de situación “Tablero de ajedrez”.
2	24 de octubre	2 h	Vectores en el plano cartesiano	Revisión de actividades “Tablero de ajedrez”. Desarrollo de situación
3	26 de octubre	1 h	Elementos básicos y vectores del plano cartesiano.	Revisión situación “Encuentra el gimnasio”.
4	27 de octubre	2 h	Concepto de traslación	Desarrollo situación
5	28 de octubre	2 h	Concepto de traslación. Suma de vectores.	Situación “Buscando a Pickachu” (vinculación con situación Encuentra el gimnasio)
6	02 de noviembre	1 h	Revisión actividades.	Revisión de actividades “La cancha de voleibol” y “Buscando a Pickachu”.
7	03 de noviembre	1 h	Concepto de reflexión axial.	Desarrollo de la situación “La cancha de voleibol”

8	**04 de noviembre**	**2 h**	**Evaluación.**	**Evaluación de: Ubicación de puntos en el plano cartesiano y traslación.**
9	07 de noviembre	2 h	Concepto de simetría axial.	Desarrollo de la situación "La cancha de voleibol"
10	9 de noviembre	1 h	Revisión de actividades.	Revisión de la situación de la sesión 9.
11	10 de noviembre	2 h	Concepto de simetría central.	Desarrollo de situación " Balón en el gimnasio"
12	11 de noviembre	2 h	Concepto de simetría central.	Desarrollo de situación " Balón en el gimnasio"
13	14 de noviembre	2 h	Concepto rotación	Desarrollo de situación " Balón en el gimnasio"
14	16 de noviembre	1 h	Revisión de actividades.	Actividad práctica
15	17 de noviembre	2 h	Concepto simetría axial, central y rotación.	Actividad práctica
16	21 de noviembre	2 h	Concepto de simetría axial, central y rotación.	Actividad práctica
17	23 de noviembre	1 h	Revisión de actividades	Guía n° 7 y n° 8
18	24 de noviembre	2 h	Evaluación	Evaluación: simetría central, axial y rotación.
19	25 de noviembre	2 h	Aplicación de post test de trans.isom. en el plano cartesiano	Post test transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
20	28 de noviembre	2 h	Aplicación post test de motivación y actitud hacia la matemática; test de razonamiento espacial.	Post test Motivación, actitud y razonamiento espacial

Es importante señalar que en todas las clases se utilizó GeoGebra para comprobar las actividades de los estudiantes e institucionalizar lo descubierto por ellos. Las actividades podían realizarse en grupo, constituido por estudiantes con los que poseían afinidad, para potenciar el aprendizaje social; además, los y las estudiantes gustaban de actividades deportivas como el voleibol y utilizaban el juego de PokémonGo, razón por la cual se hicieron las actividades contextualizadas al currículum y a su entorno que eran esas actividades recreativas.

3.12 Tratamiento de los datos

Una vez obtenidos los datos del pre y post test de transformaciones isométricas y determinar que no presentaban una distribución normal, se procedió a utilizar pruebas no paramétricas para comparar los datos. Así se utiliza la prueba de Wilcoxom para contrastar datos pareados, al estar relacionados los datos del antes y después de la intervención. Del mismo modo se emplea la misma prueba con los resultados de los test de razonamiento espacial, motivación y actitud hacia la matemática.

Para realizar el análisis se utilizó el programa estadístico IBM SPSS Statistics, versión en español.

CAPÍTULO 4: Análisis de los datos y verificación de hipótesis

A partir, como ya se mencionaba anteriormente, de la recolección de los datos con los instrumentos incluidos en los anexos C, se presenta el análisis estadístico que busca verificar si los resultados corroboran las hipótesis planteadas con anterioridad.

En primer lugar, se dará paso al estudio de los valores obtenidos en el pre y post test de transformaciones isométricas, luego los resultados de las pruebas vinculadas a los factores socioafectivos actitud y motivación, respectivamente y por último a los test de razonamiento espacial.

4.1 Análisis pre test y post test de conocimiento de transformaciones isométricas

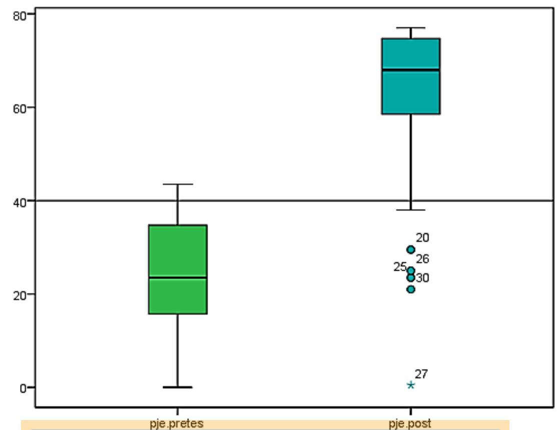
Contrastando los resultados del test anterior y posterior a la intervención, se percibió que existe diferencia significativa entre el conocimiento inicial y el final. Cabe mencionar que el pre y post test tiene una puntuación entre 0 y 77 puntos.

Hipótesis 1:

"Los estudiantes luego de participar en la unidad de transformaciones isométricas con TRS y visualización incrementan su aprendizaje."

Se obtuvo lo siguiente:

Gráfico1: Distribución de puntajes finales en pre y post test de transformaciones isométricas en Grupo de estudio



En el gráfico, se observa diferencias en la distribución de los puntajes entre el pre y post test, en especial en las medias, la que se determina si es significativa estadísticamente al realizar contraste de hipótesis.

Estadísticos descriptivos puntaje pre y post test					
	N	Media	Desviación estándar	Mínimo	Máximo
pje.pretes	43	23,6279	11,48917	,00	43,50
pje.post	43	62,5814	18,11305	,50	77,00

En la tabla, se observa que en el pre test obtuvieron un puntaje mínimo de 0 punto, un máximo de 43,5 con un promedio de 23,63 puntos; mientras que en el post test el mínimo obtenido por los estudiantes es de 0,5 puntos y el máximo de 77, y el promedio de 62,58 puntos. Además se observa diferencias de medias, las que se detallarán a continuación.

Se requiere contrastar, a un nivel de confianza de α=0,05 ,la hipótesis nula de que los datos provienen de una distribución normal para decidir qué tipo de prueba se utilizará para contrastar hipótesis .

H_1: El conjunto de datos de la variable no sigue una distribución normal

H_0 : El conjunto de datos de la variable sigue una distribución normal

Pruebas de normalidad variable puntaje pre y post test

	Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.
Puntaje pre test	,955	43	,093
Puntaje post test	,753	43	,000

Se observa de la tabla, según la prueba Shapiro-Wilk que el puntaje del pre test posee una distribución normal ya que el valor-p (0,093) es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$. Sin embargo, el puntaje en el postest no se distribuye según una ley normal, ya que el valor-p(0,000) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$. Por lo tanto, se rechaza H_0 y se acepta H_1, lo que se traduce en que existe evidencia suficiente para optar por pruebas no paramétricas para contrastar hipótesis de diferencias de medias.

Para determinar diferencias significativas se plantean las siguientes hipótesis:

$$H_0: Md_1 = Md_2$$

$$H_1: Md_1 < Md_2$$

Md_1: Mediana de la distribución de puntaje en pre test de transformaciones isométricas.

Md_2:Mediana de la distribución de puntaje en post test de transformaciones isométricas.

Contrastándose con un nivel de confianza de α=0,05. De manera que se realiza la prueba no paramétrica de Wilcoxom.

Estadísticos de pre y post test de transformaciones isométricas

	pje.post - pje.pretes
Z	$-5{,}712^{b}$
Sig. asintótica (bilateral)	,000

En la tabla, se observa que el valor-p (0,00) es menor que el nivel de significancia α=0,05, por lo que existe evidencia significativa para rechazar la hipótesis H_0 y aceptar H_1. Por lo tanto, se concluye que existe diferencia significativa entre la media del puntaje pre y post test para los estudiantes expuestos a la metodología de las representaciones semióticas, es decir, los y las estudiantes incrementan su aprendizaje en la unidad de Transformaciones Isométricas, ya que en el post test aumenta el promedio comparado con el pre test en 38,95 puntos.

4.1.1 Análisis descriptivo por Objetivo

4.1.1.1 Objetivo A:

"Identificar y Caracterizar transformaciones isométricas en figuras planas y en el plano cartesiano."

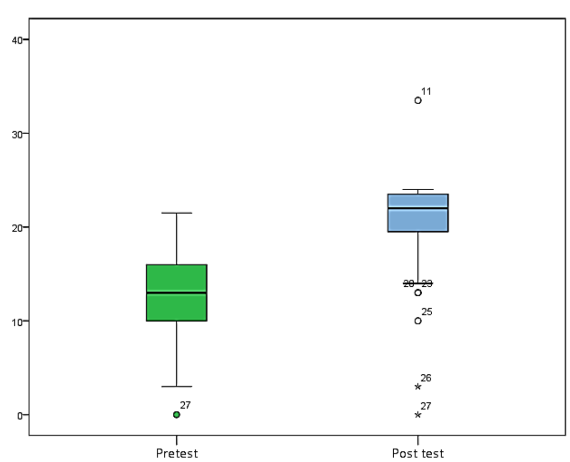
Para el objetivo A, se obtuvieron los siguientes resultados:

Estadísticos de Objetivo A

	ObjetivoA.pos - ObjetivoA.prereal
Z	-5,537[b]
Sig. asintótica (bilateral)	,000

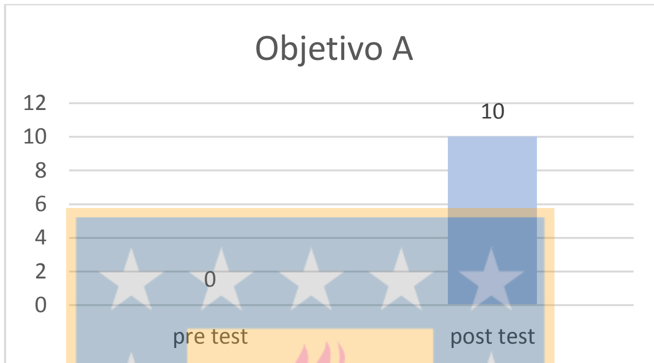
En la tabla se muestra que al ser el valor-p menor que el nivel de significancia α=0,05, existe evidencia significativa, en la que los y las estudiantes incrementan su conocimiento en el Objetivo A, lo que se puede apreciar en los siguientes gráficos.

Gráfico2: Distribución de puntajes sobre el Objetivo A en pre y post test de transformaciones isométricas.



El gráfico muestra que la media varió de un 12,56 en el pre test a un 20,12 en el post test; además, sobre el cuartil75, los datos se encuentran muy concentrados Por lo tanto, hay una gran cantidad de estudiantes que internaliza el objetivo A y mejora su aprendizaje.

<u>Gráfico3:</u> Puntaje máximo en pre y post test del Objetivo A.



En el gráfico se observa que ningún alumno alcanza la puntuación más alta del objetivo A, mientras que en pos test lo alcanza el 23,3%, con un puntaje de 24 puntos.

Luego de presentar los resultados del objetivo A, a continuación se describen las preguntas vinculadas con el objetivo.

<u>Ítem1:</u>

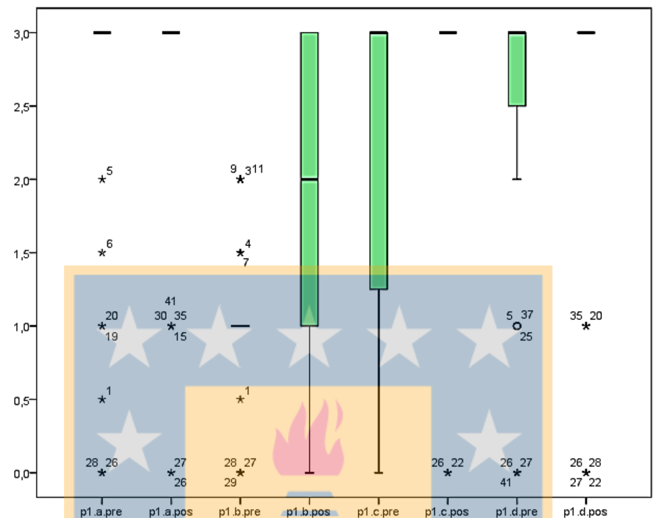
"Reconozca a qué transformación isométrica corresponden las imágenes y mencione los elementos característicos"

Estadísticos de pregunta 1 pre y post test[a]

	p1.a.pos - p1.a.pre	p1.b.pos - p1.b.pre	p1.c.pos - p1.c.pre	p1.d.pos - p1.d.pre
Z	-,574[b]	-4,491[b]	-2,355[b]	-1,138[b]
Sig. asintótica (bilateral)	,566	,000	,019	,255

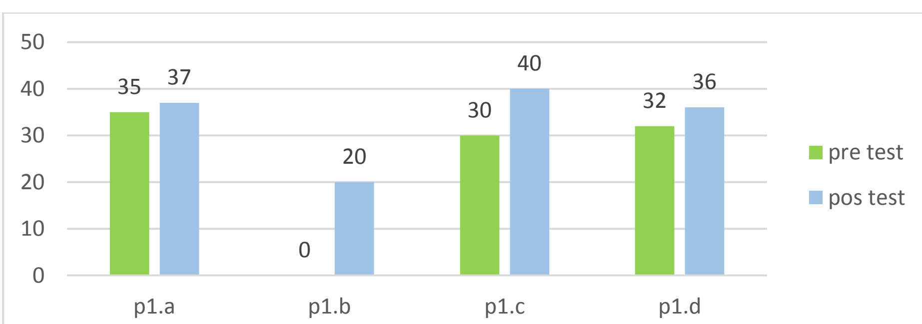
En la tabla se observa que en el ítem 1.a y 1.d el valor-p es mayor que nivel de significancia α=0,05, por lo tanto no existe diferencia significativa que asuma un avance significativo en el aprendizaje. Sin embargo, en el ítem 1.b y 1.c el valor-p es menor que el nivel de significancia α=0,05, por lo que existe diferencia significativa, es decir, incrementan su aprendizaje en esos ítemes.

Gráfico 4: Distribución de puntajes en el ítem 1 pre y post test



El gráfico muestra la variación significativa en la media de los ítemes 1.b y 1.c. En el caso del ítem 1.c la media varía de un 2,3 en el pre test, mientras que en el post test corresponde a un 2,8. Además, se observa las medias de los otros ítemes coinciden en el pre test y post test.

Gráfico 5: Puntaje máximo en los ítemes 1.a, 1.b, 1.c,1.d en pre y post test de transformaciones isométricas



Se observa principalmente la obtención de puntaje máximo en el ítem 1.b con un 45,5% de los estudiantes.

Ítem 2.c:

"*Observe el cuadrilátero ABCD y responda según corresponda:*

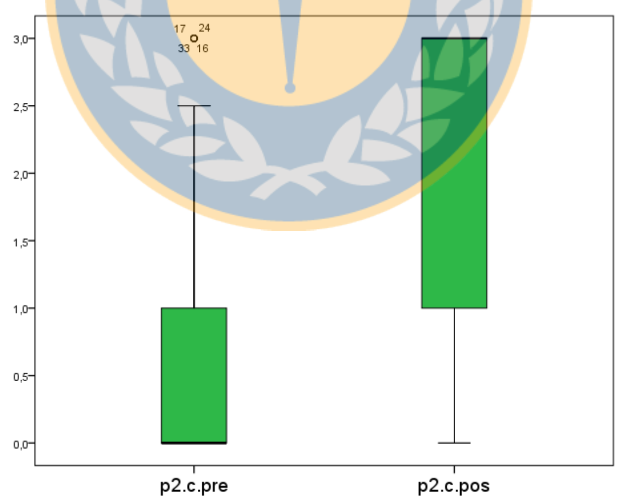
Qué relación existe entre el vector traslación y los vértices de los cuadriláteros ABCD y A'B'C'D'? Explique."

Estadísticos de ítem 2.c

	p2.c.pos - p2.c.pre
Z	-4,680[b]
Sig. asintótica (bilateral)	,000

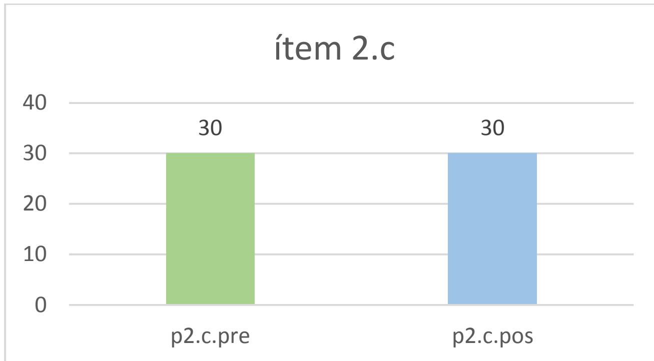
Se observa de la tabla que el valor-p es menor que el nivel de significancia α=0,05, por lo existe evidencia significativa que los y las estudiantes incrementan su conocimiento en el ítem2.c. Apreciándose en el siguiente gráfico.

Gráfico6: Distribución de puntaje en el ítem 2.c.en pre y post test



En el gráfico se muestra que hay diferencias de medias. En el caso del pre test corresponde a un valor de 0,64, mientras que el del post test es de un 2,2. Además, en el pre test los datos se concentran principalmente en el 50 % superior, mientras que en el post test el máximo valor coincide con la media y los valores tienen una concentración en el 50 % inferior de ésta.

Gráfico 7: Puntaje máximo de los estudiantes en ítem 2.c en pre y post test de transformaciones isométricas



Se observa del gráfico que las personas que alcanzan puntaje máximo en el ítem, corresponde al 70% tanto en el pre como en el pos test. Por lo que no hubo mayor cambio de conocimiento en el ítem.

Ítem 8.b:

"Si el punto P (-1,-2) es reflejado con respecto al eje de las ordenadas, se obtiene el punto P' (1,-2).

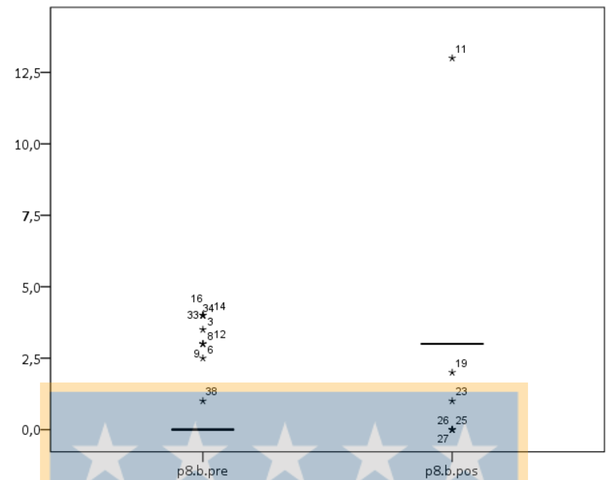
Si un punto P'' del IV cuadrante es reflejado con respecto al eje de las abscisas ¿En qué cuadrante queda el nuevo punto?"

Estadísticos de ítem 8.b

	p8.b.pos - p8.b.pre
Z	$-5{,}034^b$
Sig. asintótica (bilateral)	,000

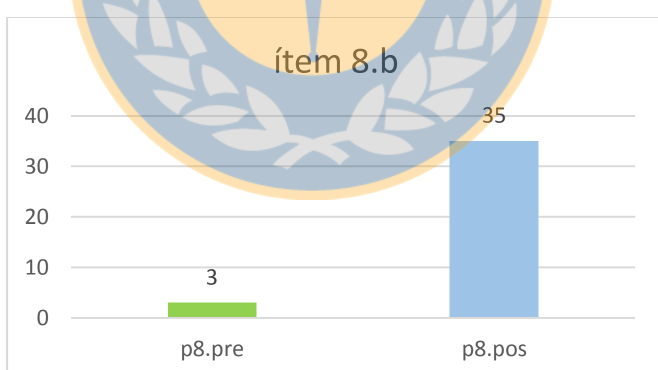
Se observa de la tabla que el valor-p es menor que el nivel de significancia α=0,05, por lo existe evidencia significativa, en la que los y las estudiantes incrementan su conocimiento en el ítem8.b. Apreciándose en el siguiente gráfico.

__Gráfico8:__ Distribución de puntaje en el ítem 8.b en pre y post test de transformaciones isométricas.



En el gráfico se presenta un aumento en la media en el post test, con un número de 2,8. Mientras que en el pre test corresponde a un 0,7.

__Gráfico9__: Máximo de puntaje de estudiantes en ítem 8.b del pre y post test de transformaciones isométricas



Se puede observar que los estudiantes que lograron un puntaje máximo aumentó en el pos test, alcanzando un 81,4% en comparación con el pre test en el que sólo un7% alcanzó 3 puntos.

Ítem 11.a:

"Observa y responde según las siguientes figuras:

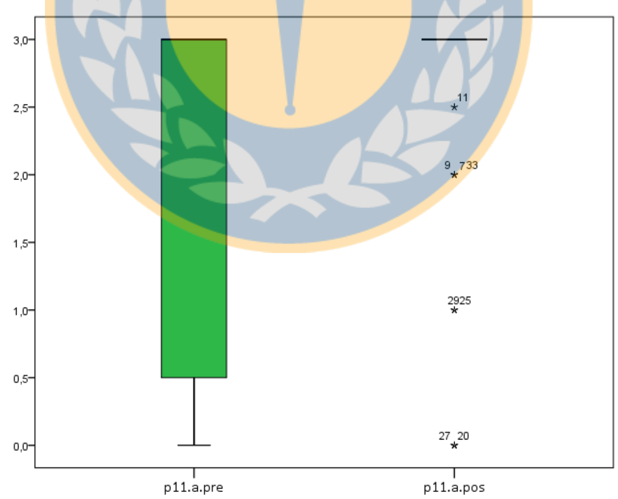
En la tabla marque con una cruz si posee o no ejes de simetría."

Estadísticos de ítem 11.a

	p11.a.pos - p11.a.pre
Z	$-2{,}817^b$
Sig. asintótica (bilateral)	,005

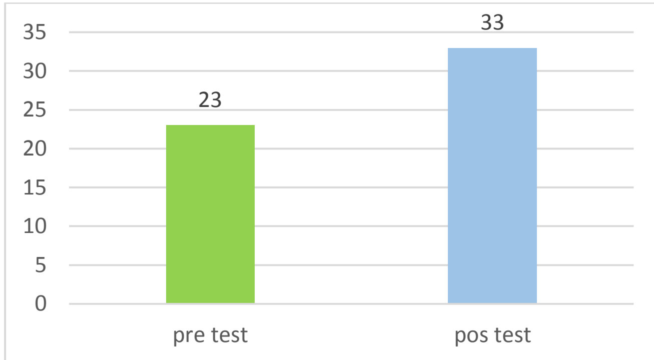
Se observa de la tabla que el valor-p es menor que el nivel de significancia α=0,05, por lo existe evidencia significativa, en la que los y las estudiantes incrementan su conocimiento en el ítem11.a. Apreciándose en el siguiente gráfico.

Gráfico10: Distribución de puntajes de los estudiantes en el ítem 11.a del pre y post test.



En el gráfico se aprecia la variación del promedio que es significativo, en el pre test posee una media de 1,97; mientras que en el post test posee una media de 2,62, la cual se asemeja al máximo puntaje de 3.

Gráfico11: Estudiantes que alcanzan máximo de puntaje en el ítem 11.a



En el gráfico se observa los y las estudiantes que obtuvieron máximos puntajes en el ítem 11.a. En el pre test 23 de ellos alcanzan la máxima puntación, mientras que en el pos test 33, lo que corresponde a un 53.5% y 76,7% respectivamente. Eso implica que de un 46,5% en el pre test se reduce a un 23,3% en el post test, los estudiantes que cometen errores en la respuesta.

Ítem 11.b:

"Observa y responde según las siguientes figuras:

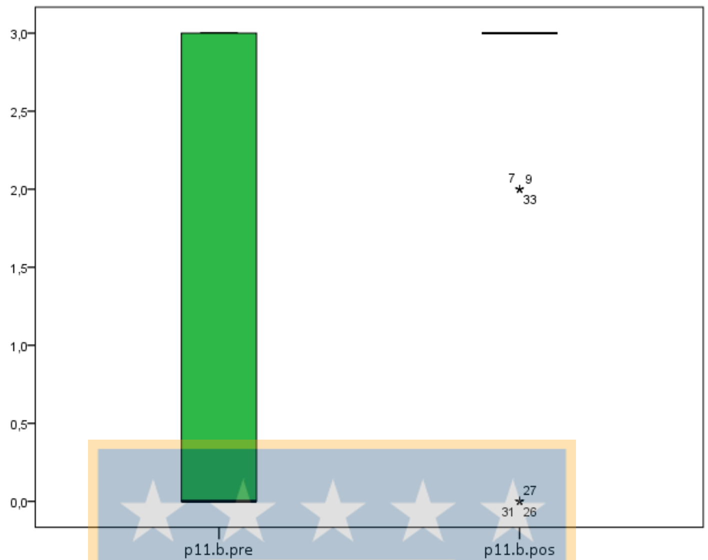
De poseer ejes de simetría, dibújelo."

Estadísticos de ítem 11.b

	p11.b.pos - p11.b.pre
Z	-4,116[b]
Sig. asintótica (bilateral)	,000

En la tabla se muestra que al ser el valor-p menor que el nivel de significancia α=0,05, existe evidencia significativa, en la que los y las estudiantes incrementan su conocimiento en el ítem11.b. Apreciándose en el siguiente gráfico.

Gráfico12: Distribución de puntaje en el ítem11.b pre y post test.



El gráfico indica la variación del promedio que es significativo, en el pre test posee una media de 1,07; mientras que en el post test posee una media de 2,44, la cual se asemeja al máximo puntaje de 3.

4.1.1.2 Objetivo B:

"Ubicar puntos y figuras en el plano cartesiano"

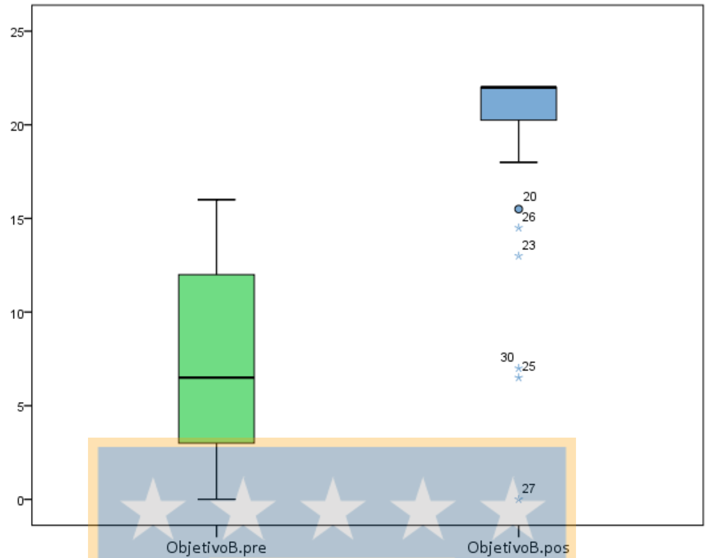
Para el objetivo B, se obtuvieron los siguientes resultados:

Estadísticos de Objetivo B

	ObjetivoB.pos - ObjetivoB.pre
Z	$-5,581^{b}$
Sig. asintótica (bilateral)	,000

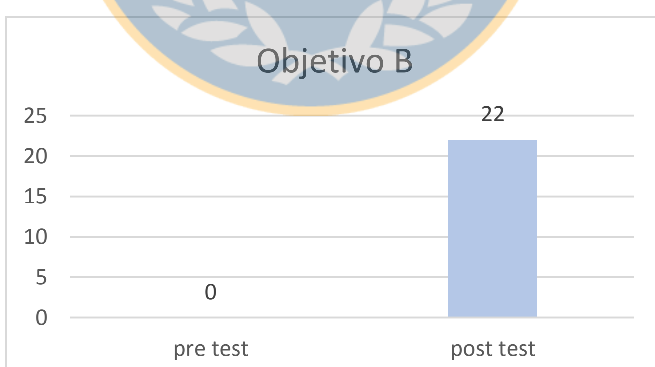
En la tabla se muestra que al ser el valor-p menor que el nivel de significancia α=0, 05, existe evidencia significativa para asumir que los y las estudiantes incrementan su conocimiento en el Objetivo B, lo que se puede apreciar en los siguientes gráficos:

Gráfico 13: Distribución de puntaje sobre el Objetivo B



El gráfico muestra que la media varió de un 7,2 en el pre test a un 19,7 en el post test, además el máximo varió de 16 a 22 puntos, respectivamente, lo que en el caso del post test se asemeja a la media.

Gráfico14: Estudiantes con puntaje máximo en el objetivo B de pre y post test de transformaciones isométricas



Se observa del gráfico que el 51,2% de los estudiantes logra un puntaje máximo, en contraste con un 0%, es decir, ningún alumno logra máximo puntaje de 22 en el pre test.

Ítem 2.b:

"Observe el cuadrilátero ABCD y responda según corresponda:

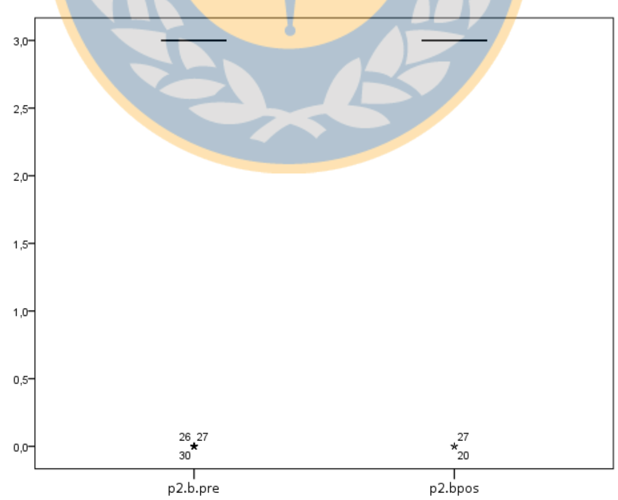
Complete la tabla con las coordenadas de los vértices del cuadrilátero ABCD y A'B'C'D'."

Estadísticos de ítem 2.b

	p2.bpos - p2.b.pre
Z	-2,236[b]
Sig. asintótica (bilateral)	,025

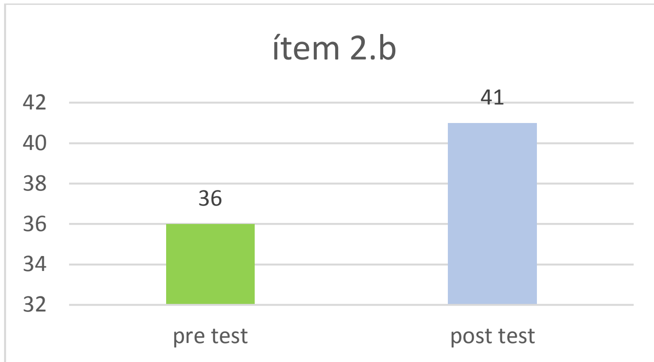
En la tabla se observa que en el ítem 2.b el valor-p es menos que el nivel de significancia α=0, 05, por lo que existe evidencia significativa para asumir que hubo un avance en el aprendizaje del ítem 2.b

Gráfico15: Conocimiento de los estudiantes en ítem 2.b de pre y post test de transformaciones isométricas



En el gráfico se observa que la media en el pre test corresponde a un 2,5, mientras que en el post test a un 2,9. Ambos test coinciden en el máximo de puntaje igual a 3 y el mínimo de puntaje igual a 0.

Gráfico16: Estudiantes que alcanzan puntaje máximo en pre y post test del ítem 2.b



En el gráfico se muestra que el 23,3% de los estudiantes tenía dominio en el contenido del ítem 2.b del pre test, mientras que el 95,3% lo alcanza en el post test con una puntuación en ambos test de 3.

Ítem 3.b:

"Si P (3, −2) se rota en un ángulo de 270° respecto al origen y en sentido antihorario,

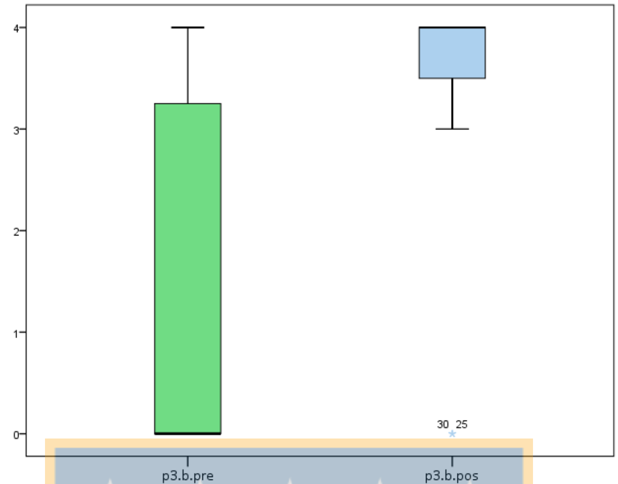
Ubique los puntos P y P' en el plano cartesiano."

Estadísticos de ítem 3.b

	p3.b.pos - p3.b.pre
Z	-5,131[b]
Sig. asintótica (bilateral)	,000

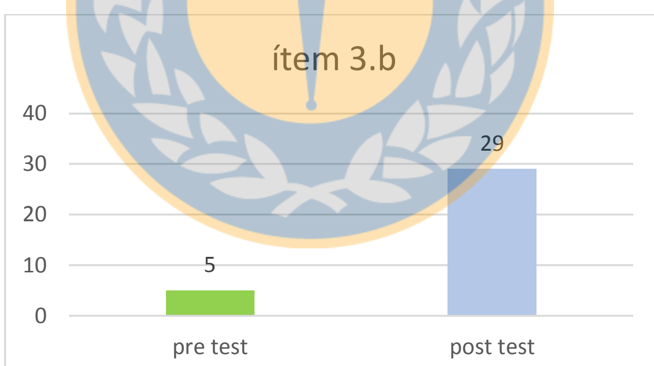
En la tabla se evidencia que el valor-p es menor que el nivel se significancia α=0, 05, por lo que existe evidencia significativa para decir que los y las estudiantes incrementan su aprendizaje en el ítem 3.b. Se puede apreciar además en el siguiente gráfico.

Gráfico17: Variación en el conocimiento del ítem 3.b



En el gráfico se observa que la media aumenta en el post comparado con el pre test, correspondiente a un 1,4 y 3,6 respectivamente. Además, el puntaje máximo para ambos test coincide en 4 puntos. Aproximándose el valor de la media y el máximo del post test.

Gráfico18: Estudiantes que alcanzan puntaje máximo en pre y post test del ítem 3.b



Del gráfico se puede observar que el 11,6% de los estudiantes alcanza el máximo puntaje de 4 puntos, mientras que en el post test lo alcanzan el 67,4%. Esto indica que hubo un aumento de 55,8% de estudiantes que alcanzan el más alto puntaje.

Ítem 4.b:

"Al rotar en un ángulo de 180° el Cuadrilátero de vértices A (5,4), B(1,3) y C(2,-2) respecto del origen y en sentido antihorario,

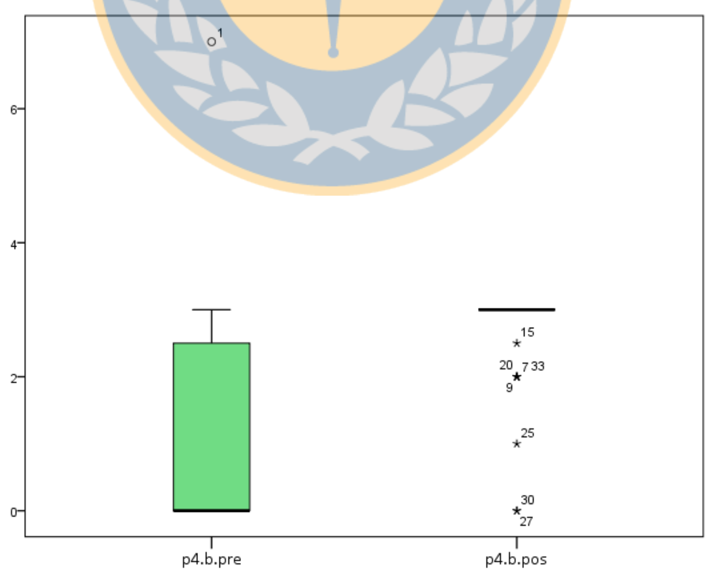
Grafique ambos cuadriláteros."

Estadísticos de ítem 4.b

	p4.b.pos - p4.b.pre
Z	$-4{,}671^{b}$
Sig. asintótica (bilateral)	,000

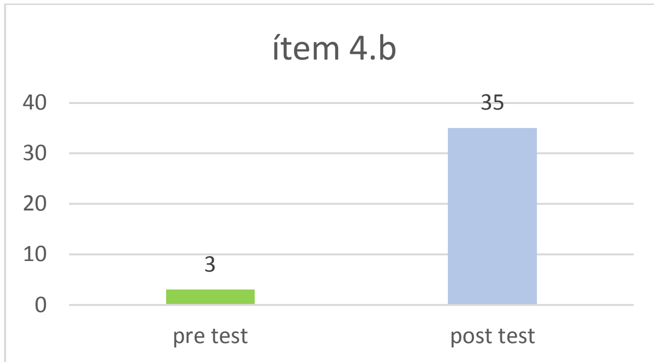
En la tabla se observa que el valor-p es menor que el nivel de significancia α=0,05, por lo que se deduce que existe diferencia significativa en el avance significativo en el aprendizaje del ítem 4.b. Lo que se puede apreciar en el gráfico siguiente.

Gráfico19: Conocimiento en el ítem 3.b de los estudiantes en pre y post test de transformaciones isométricas



Se desprende del gráfico que la media varía de un 1,2 a un 2,7 en el pre y post test, respectivamente.

<u>Gráfico20:</u> Puntaje máximo de estudiantes en pre y post test de transformaciones isométricas en ítem 4.b



Se observa en el gráfico que el 81,4 % de los estudiantes en el post test alcanza el puntaje máximo de 3 puntos, versus el 7% que lo alcanza en el pre test. Eso indica que hubo un aumento de un 74,4% de estudiantes que alcanzaron el puntaje más alto.

<u>Ítem5.a:</u>

"Se le ha aplicado simetría central respecto del origen al triángulo de vértices A (5,6), B (1,2) y C (3,6) del cual se sabe que el homólogo de B, el punto B', tiene coordenadas (-1,0),

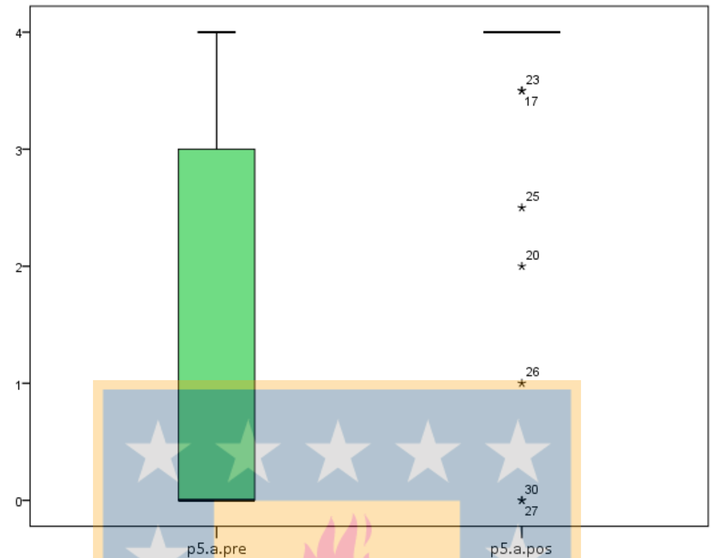
Grafique el triángulo original y el triángulo resultante."

Estadísticos de ítem 5.a

	p5.a.pos - p5.a.pre
Z	$-5,461^{b}$
Sig. asintótica (bilateral)	,000

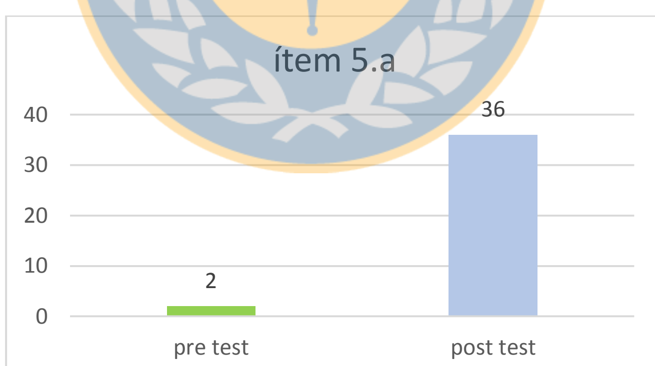
Se observa de la tabla que el valor-p es menor que el nivel de significancia α=0,05, por lo existe evidencia significativa que los y las estudiantes incrementan su conocimiento en el ítem5.a. Apreciándose en el siguiente gráfico.

Gráfico21: Conocimiento en el ítem 5.a de los estudiantes en pre y post test de transformaciones isométricas



Se observa en el gráfico que la media va de un 1,2 a un 3,6 en el pre y post test respectivamente. Además, que en ambos test se alcanzó el máximo de 4.

Gráfico22: Puntaje máximo de estudiantes en pre y post test del ítem 5.a



En el gráfico se observa que el 4,7% de los estudiantes en el pre test alcanza el máximo puntaje de 4 puntos en comparación, con un 83,7% que lo alcanza en el post test. Se evidencia un avance de un 79% de estudiantes que alcanza el puntaje más alto.

Ítem 5.b:

"Se le ha aplicado simetría central respecto del origen al triángulo de vértices A (5,6), B (1,2) y C (3,6) del cual se sabe que el homólogo de B, el punto B', tiene coordenadas (-1,0),

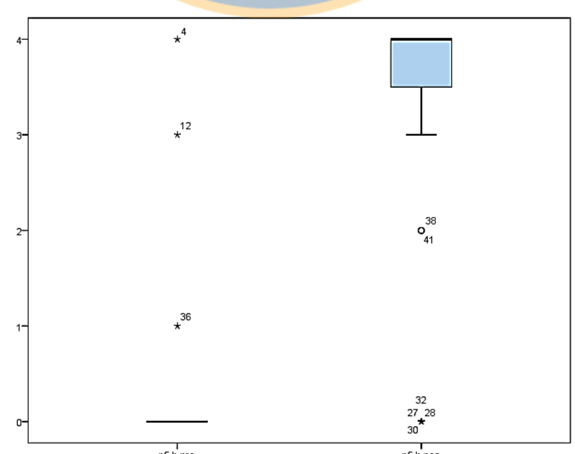
¿Cuáles son las coordenadas del punto por el cual se hizo la simetría?"

Estadísticos de ítem 5.b

	p5.b.pos - p5.b.pre
Z	-5,512[b]
Sig. asintótica (bilateral)	,000

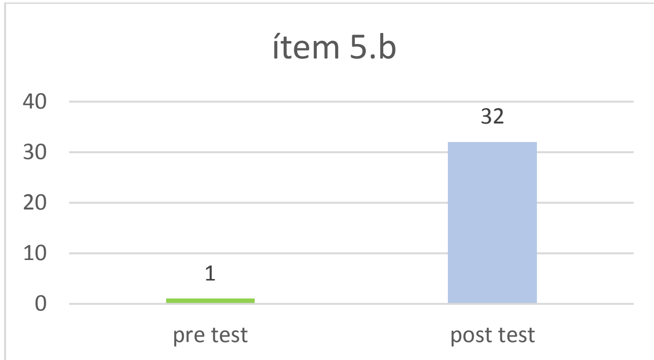
Se observa de la tabla que el valor-p es menor que el nivel de significancia α=0,05, por lo existe evidencia significativa que los y las estudiantes incrementan su conocimiento en el ítem5.b. Apreciándose en el siguiente gráfico.

Gráfico23: Conocimiento de los estudiantes en el ítem 5.b del pre y post test en transformaciones isométricas



Se observa en el gráfico que la media va de un 0,2 a un 3,1 puntos en el pre y post test respectivamente. Además, que en ambos test se alcanzó el máximo de 4 puntos.

Gráfico24: Estudiantes que alcanzan puntaje máximo en pre y post test del ítem 5.b



En el gráfico se muestra que en el pre test el 2,3% de los estudiantes logran el máximo puntaje, y en el post test lo logran el 74,4 %. Por lo que hay un aumento en un 72,1% de estudiantes que logran alcanzar el puntaje máximo de 4 puntos.

Ítem 8.a:

"Si el punto P (-1,-2) es reflejado con respecto al eje de las ordenadas, se obtiene el punto P'(1,-2).

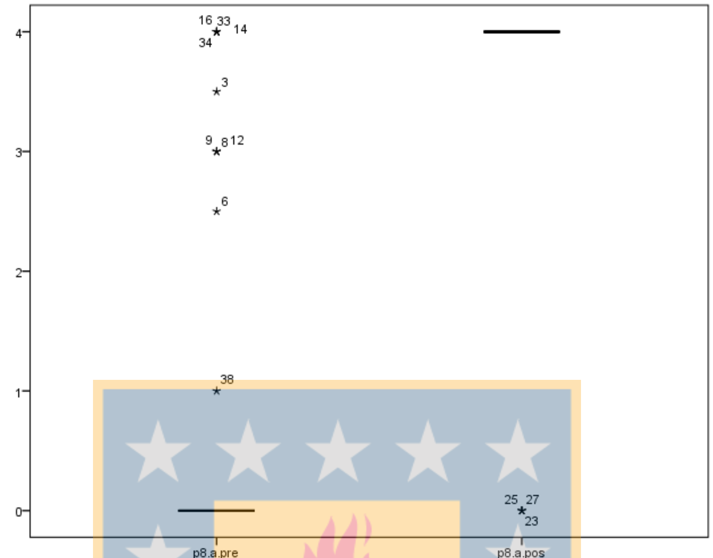
Ubique el punto P y P' en el plano cartesiano."

Estadísticos de ítem 8.a

	p8.a.pos - p8.a.pre
Z	-5,637[b]
Sig. asintótica (bilateral)	,000

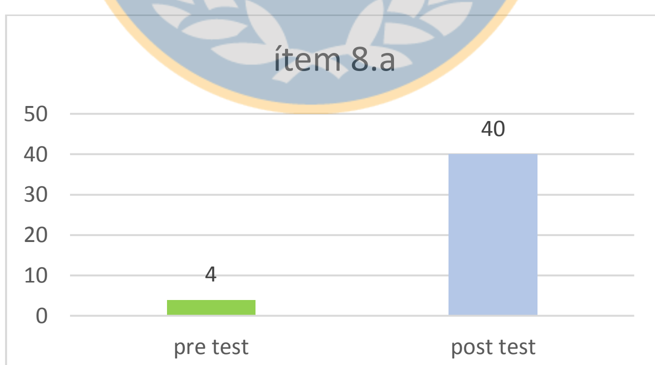
Se observa de la tabla que el valor-p es menor que el nivel de significancia α=0,05, por lo existe evidencia significativa que los y las estudiantes incrementan su conocimiento en el ítem8.a. Apreciándose en el siguiente gráfico.

Gráfico25: Conocimiento de los estudiantes en el ítem 8.a del pre y post test de transformaciones isométricas



Se muestra en el gráfico que la media en el pre test es de 1,9, mientras que en el post test es de 3,1 en el ítem 8., además, coinciden ambos test que en ambos hay puntaje mínimo de 0 puntos y se logra el máximo de 4 puntos.

Gráfico26: Puntaje máximo de estudiantes en pre y post test del ítem 8.a



En el gráfico se muestra que en el pre test el 9,3% de los estudiantes logran el máximo puntaje, y en el post test lo logran el 93 %. Por lo que hay un aumento en un 83,7% de estudiantes que logran alcanzar el puntaje máximo de 4 puntos.

4.1.1.3 Objetivo C

"Representar y caracterizar vectores y adición de vectores en el plano cartesiano."

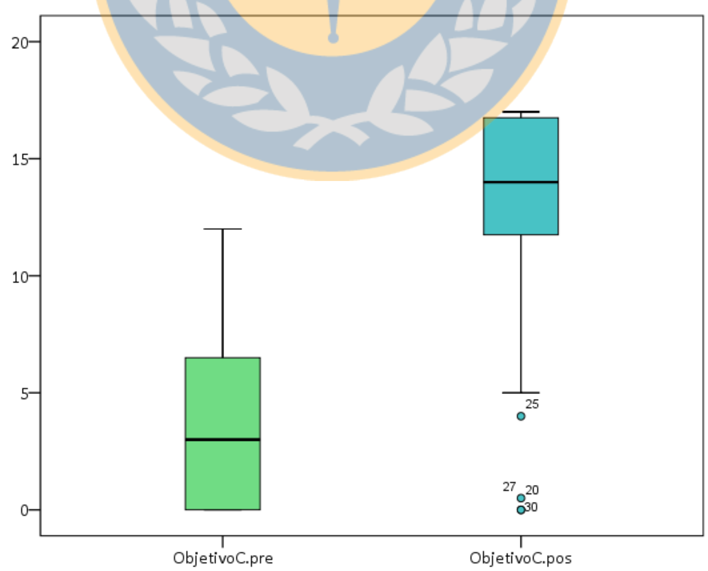
Para el objetivo C, se obtuvieron los siguientes resultados:

Estadísticos de Objetivo C

	ObjetivoC.pos - ObjetivoC.pre
Z	-5,581[b]
Sig. asintótica (bilateral)	,000

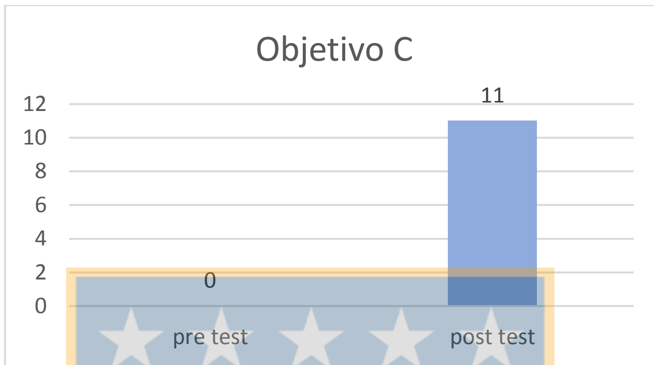
En la tabla se muestra que al ser el valor-p menor que el nivel de significancia α=0,05, existe evidencia significativa, en la que los y las estudiantes incrementan su conocimiento en el Objetivo C, lo que se puede apreciar en los siguientes gráficos.

Gráfico27: Conocimiento de los estudiantes sobre el Objetivo C en pre y post test de transformaciones isométricas



El gráfico muestra que la media varió de un 3,5 a 12,5 desde el pre test al post test. Además. Se observa que el mínimo de puntaje en el pre test corresponde a 0 puntos, coincidiendo con el post test, sin embargo difieren en los máximos puntajes, pues en el pre test los estudiantes alcanzan 12 puntos, mientras que en el post test obtienen una puntación de 17.

<u>Gráfico28</u>: Máximo de puntaje alcanzado por estudiantes en el objetivo C del pre y post test.



En el gráfico se observa que el 25,6% de los estudiantes alcanza el máximo de 17 puntos, mientras que ninguno lo alcanza en el pre test. Por lo que 11 alumnos alcanzan el dominio de contenido del objetivo C. Luego de presentar los resultados obtenidos en el objetivo C, se describe a continuación los ítemes vinculados para alcanzar el objetivo.

<u>Ítem 2.a:</u>

"Observe el cuadrilátero ABCD y responda según corresponda:

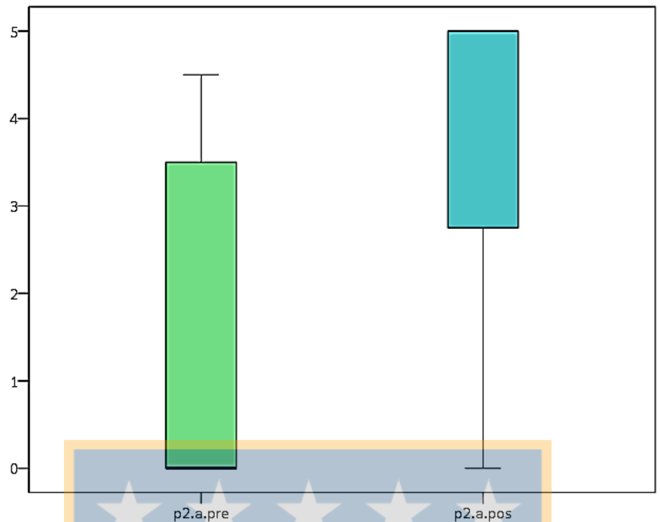
El cuadrilátero ABCD ha sido trasladado por el vector $\vec{v}$.Grafique el vector traslación $\vec{v}$. Y determine sus componentes."

Estadísticos de ítem 2.a

	p2.a.pos - p2.a.pre
Z	$-4{,}621^{b}$
Sig. asintótica (bilateral)	,000

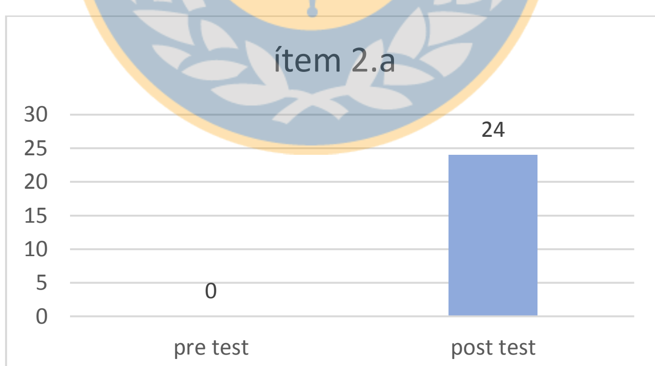
Se muestra en la tabla que en el ítem 2.a valor-p es menor que nivel de significancia α=0,05, por lo tanto existe diferencia significativa que asuma un avance significativo en el aprendizaje en el ítem.

Gráfico 29: Conocimiento de los estudiantes en el ítem 1 pre y post test



Se puede observar en el gráfico que la media en el pre test en el ítem 2.a corresponde a 1,5 puntos, en cambio en el post test aumentó a 3,6.En ambos test coinciden en el mínimo con 0 puntos, mientras que en el máximo de puntaje aumentó de 4,5 a 5 puntos desde el pre al post test.

Gráfico30: Máximo de puntaje de estudiantes en pre y post test de transformaciones isométricas



En el gráfico se muestra que los estudiantes que alcanzaron el dominio del contenido del ítem 2.a corresponden al 55,8% en el post test, mientras que ningún estudiante alcanzó el máximo de 5 puntos.

Ítem 6:

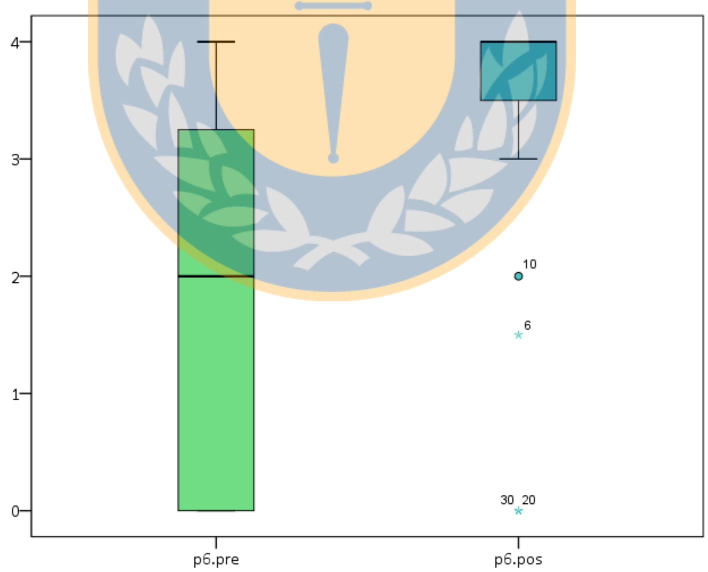
"Dado los puntos A(3,2) y B(-3,1);C(-4,3) y D(-1,4), represente los vectores $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{DC}$*en el plano cartesiano."*

Estadísticos de ítem6

	p6.pos - p6.pre
Z	-4,942[b]
Sig. asintótica (bilateral)	,000

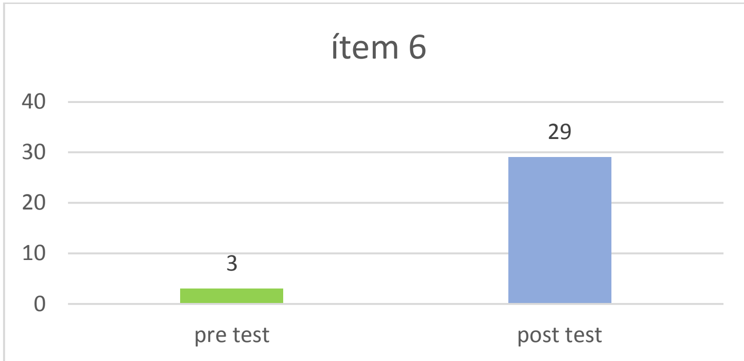
Se observa de la tabla que el valor-p es menor que el nivel de significancia α=0,05, por lo existe evidencia significativa que los y las estudiantes incrementan su conocimiento en el ítem6 Apreciándose en el siguiente gráfico.

Gráfico31: Conocimiento en el ítem 6 de pre y pos test de transformaciones isométricas



En el gráfico se observa que la media varió de un 1,7 en el pre test a un 3,5 en el post test del ítem 6. Además, ambos test presentan estudiantes con puntaje mínimo 0 y máximo 4.

<u>Gráfico32</u>: Máximo de puntaje de estudiantes en ítem 6 del pre y post test de transformaciones isométricas



Se observa en el gráfico que el 7% de los estudiantes alcanzaron el puntaje máximo en el ítem 6, correspondiente a 4 puntos. En el caso del post test, el 76,4% de los estudiantes alcanzó la puntuación y lograron el aprendizaje previsto con el ítem.

<u>Ítem 7.a y 7.b:</u>

"Represente en el mismo gráfico el resultado de:

a) $\vec{u} - \vec{v}$*, si* $\vec{u} = (-3,2)$*y* $\vec{v} = (-3,1)$

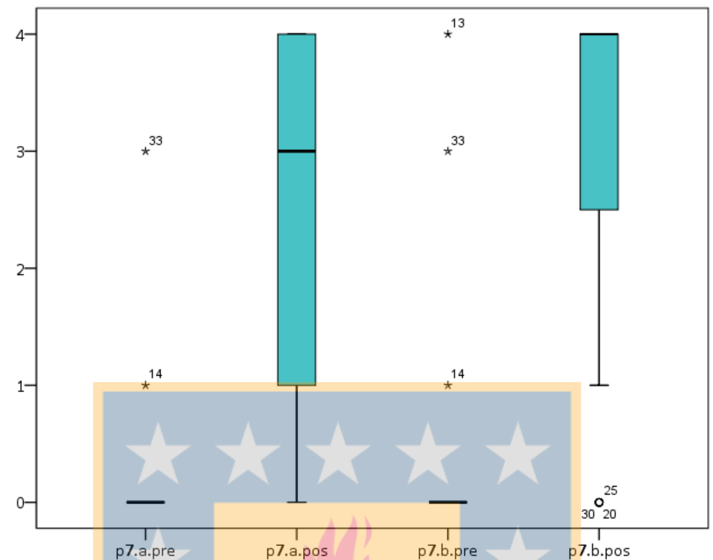
b) $\vec{m} + \vec{n}$*, si* $\vec{m} = (1,-1)$ *y* $\vec{n} = (1,4)$*"*

Estadísticos de ítem 7.a y 7.b pre y post test

	p7.a.pos - p7.a.pre	p7.b.pos - p7.b.pre
Z	-5,050^{b}	-5,404^{b}
Sig. asintótica (bilateral)	,000	,000

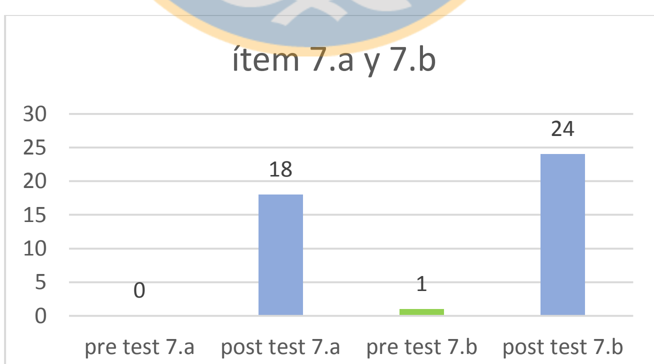
Se observa en la tabla del ítem 7.a y 7.b que el valor-p es menor que el nivel de significancia α=0,05, por lo existe evidencia significativa, en la que los y las estudiantes incrementan su conocimiento en los ítemes. Apreciándose en el siguiente gráfico.

__Gráfico33:__ Conocimiento de los estudiantes en el ítem 7.a y 7.b en pre y post test de transformaciones isométricas



Se observa en el gráfico que la media del ítem 7.a varía de 0,1 a 2,4 puntos desde el pre test al post test. Y en el ítem 7.b sucede algo similar, la media del pre test corresponde a 0,2, mientras que en el post test alcanza el valor de 3.

__Gráfico34__: Máximo de puntaje de estudiantes en ítem 7.a y 7.b del pre y post test de transformaciones isométricas.



Se manifiesta en el gráfico que ningún estudiante alcanzó el máximo de puntaje en el ítem 7.a del pre test, mientras que 1 estudiante sí lo logró en el ítem 7.b del mismo test. Por otro lado, 41,9% de los estudiantes sí alcanza el puntaje de 4 en el ítem 7.a del post test y un 55,8% lo alcanza en el ítem 7.b del mismo test.

4.1.1.4 Objetivo D

"Realizar transformaciones isométricas a puntos y figuras en el plano cartesiano"

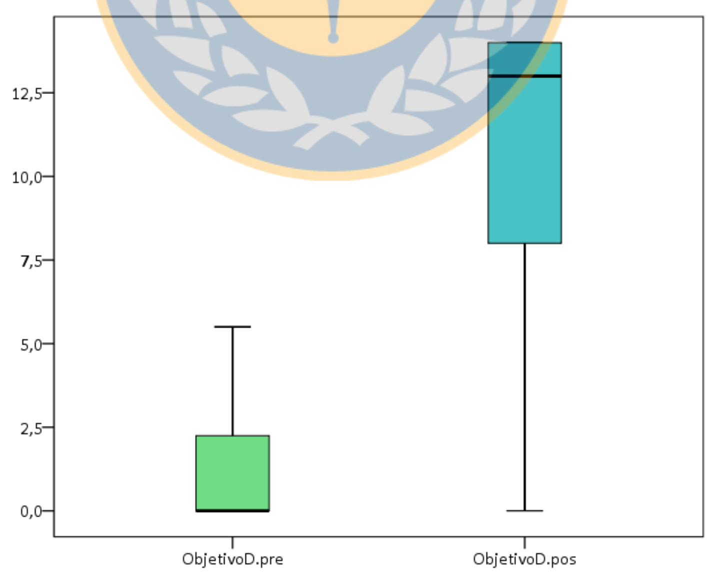
Para el objetivo C, se obtuvieron los siguientes resultados:

Estadísticos de Objetivo D

	ObjetivoD.pos - ObjetivoD.pre
Z	-5,455[b]
Sig. asintótica (bilateral)	,000

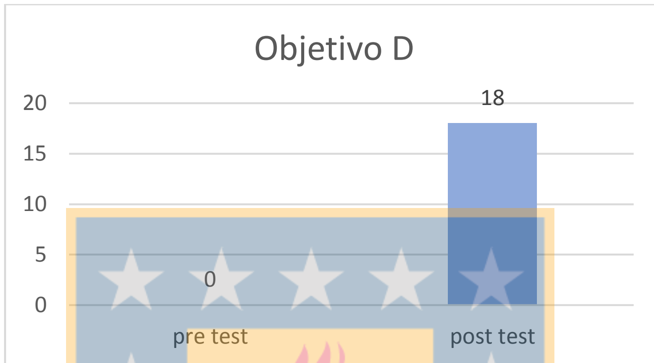
En la tabla se muestra que al ser el valor-p menor que el nivel de significancia α=0,05, existe evidencia significativa, en la que los y las estudiantes incrementan su conocimiento en el Objetivo D, lo que se puede apreciar en los siguientes gráficos.

Gráfico35: Conocimiento de los estudiantes sobre el Objetivo D en pre y post test de transformaciones isométricas



En el gráfico se muestra que las medias del pre y post test varían desde 1,3 a 10,5 respectivamente. Además, en ambos test hay estudiantes que obtienen puntaje mínimo de 0 puntos, existiendo diferencias en la puntuación máxima de 8,5, ya que el puntaje máximo del pre test corresponde a 5,5 puntos, mientras que en el post test asciende a 14.

Gráfico36: Máximo de puntaje de estudiantes en objetivo D del pre y post test de transformaciones isométricas



En el gráfico se observa que el 41,9% de los estudiantes logró alcanzar el máximo puntaje de 14, mientras que ninguno lo hace en el pre test.

Ítem 3.a:

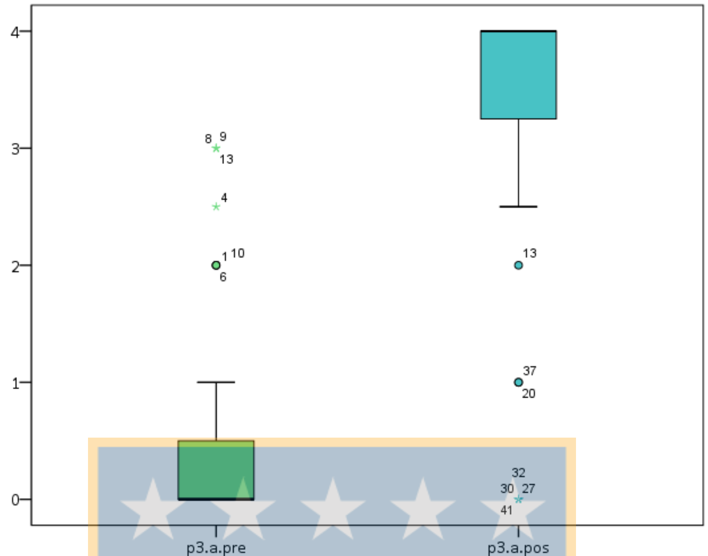
"Si P (3, –2) se rota en un ángulo de 270° respecto al origen y en sentido antihorario, ¿Cuál será la coordenada del nuevo punto P'? "

Estadísticos de ítem 3.a

	p3.a.pos - p3.a.pre
Z	-5,240[b]
Sig. asintótica (bilateral)	,000

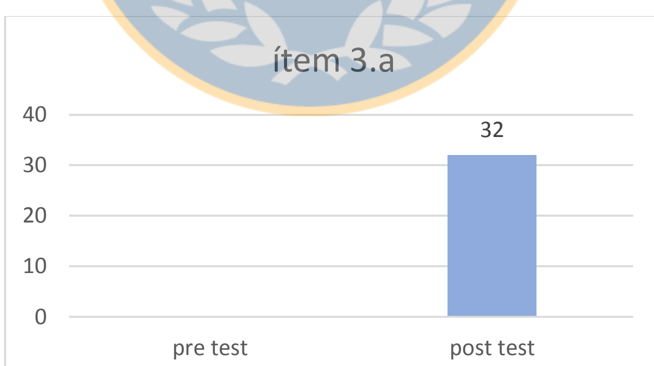
Se muestra en la tabla que en el ítem 3.a valor-p es menor que nivel de significancia α=0,05, por lo tanto existe diferencia significativa que asuma un avance significativo en el aprendizaje del ítem. En los gráficos de a continuación se mostrará con mayor detalle el avance en el conocimiento.

<u>Gráfico 37</u>: Conocimiento de los estudiantes en el ítem 3.a pre y post test



En el gráfico se observa que la media aumentó desde el pre al post test. En el pre test alcanza un valor de 0,5, mientras que el post test de 3,1. Además, en ambos test el valor mínimo corresponde a 0 puntos, mientras que el máximo de 4 puntos es alcanzado en el post test.

<u>Gráfico38</u>: Máximo de puntaje de estudiantes en ítem 3.a del pre y post test de transformaciones isométricas



En el gráfico se muestra que el 74,4%, equivalente a 32 estudiantes, logra el puntaje máximo del ítem 3.a correspondiente a 4 puntos. En cambio en el pre test ningún estudiante logra el puntaje ideal.

<u>Ítem 4.a:</u>

"Al rotar en un ángulo de 180° el Cuadrilátero de vértices A (5,4), B(1,3) y C(2,-2) respecto del origen y en sentido antihorario,

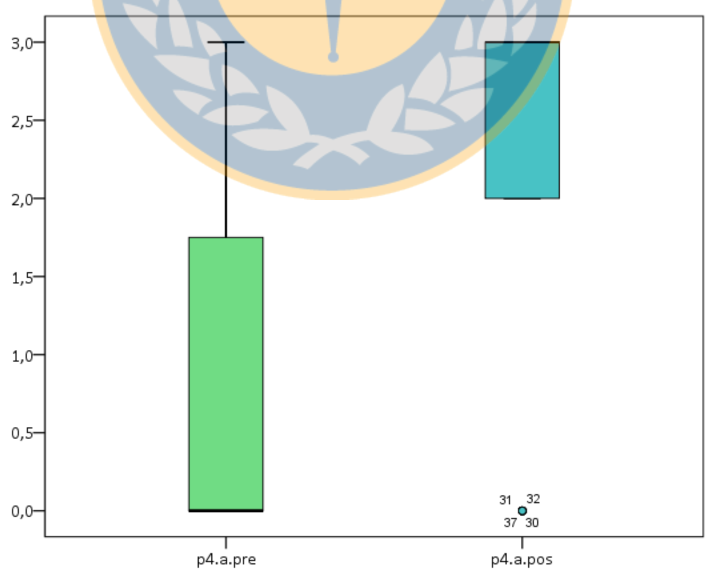
¿Cuál es la coordenada del vértice D si su homólogo, el punto D' del cuadrilátero A'B'C'D', tiene coordenadas (-5,0)?"

Estadísticos de ítem 4.b

	p4.b.pos - p4.b.pre
Z	-4,671[b]
Sig. asintótica (bilateral)	,000

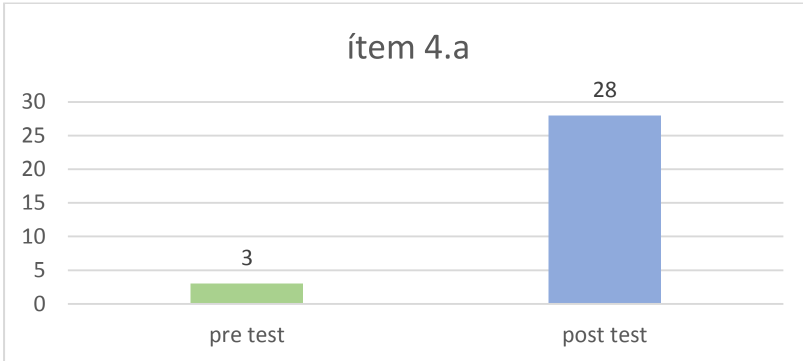
Se observa de la tabla que el valor-p es menor que el nivel de significancia α=0,05, por lo existe evidencia significativa que los y las estudiantes incrementan su conocimiento en el ítem 4.a Apreciándose en el siguiente gráfico.

<u>Gráfico39:</u> Conocimiento en el ítem 4.a de pre y pos test de transformaciones isométricas



Se observa en el gráfico que la media del pre test corresponde a 0,7, mientras que la del post test a 2,2. En mínimo puntaje alcanzado para ambos test es de 0 y el máximo de 3 puntos.

Gráfico40: Máximo de puntaje de estudiantes en ítem 4.a del pre y post test de transformaciones isométricas



Se puede observar en el gráfico que un 7% de los estudiantes alcanza el puntaje máximo de 3 puntos en el ítem 4.a. Por otro lado, en el post test el 65,1% correspondiente a 28 estudiantes alcanza el puntaje ideal.

Ítem 9.a y 9.b:

"Representa en el gráfico:

a) Las coordenadas de los vértices del cuadrilátero trasladado A'B'C'D', por el vector $\vec{u}$

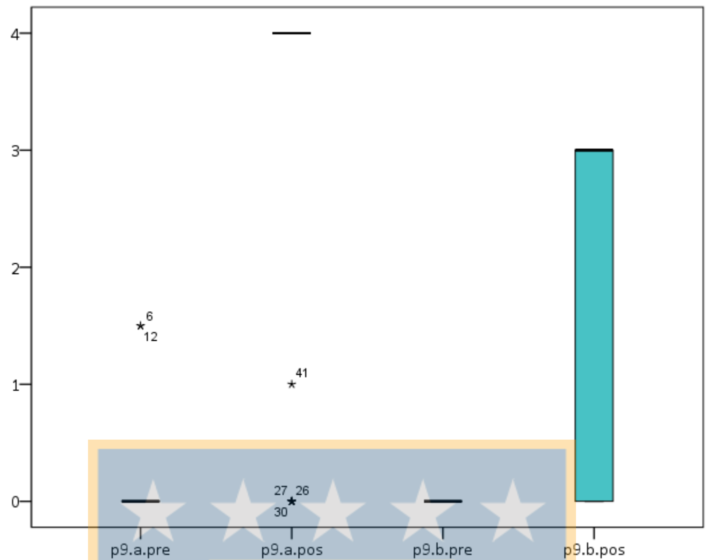
b) La simetría central del cuadrilátero ABCD con respecto al punto H."

Estadísticos de ítem 9.a y 9.b

	p9.a.pos - p9.a.pre	p9.b.pos - p9.b.pre
Z	$-5{,}621^b$	$-5{,}416^b$
Sig. asintótica (bilateral)	,000	,000

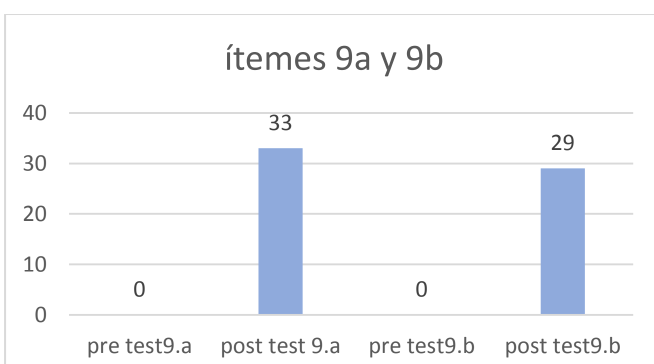
Se observa de la tabla que el valor-p es menor, tanto en el ítem 9.a como 9.b, que el nivel de significancia α=0,05, por lo existe evidencia significativa que los y las estudiantes incrementan su conocimiento en los ítemes ya mencionados Apreciándose en el siguiente gráfico.

Gráfico41: Conocimiento en el ítem 9.a y 9.b de pre y pos test de transformaciones isométricas



En el gráfico se observa que en ambos ítemes la media cambia. Sin embargo, en el ítem 9.a 44 estudiantes obtienen puntaje 0, razón que coincide con la media 0. Y en el post test 33 personas alcanzan el puntaje de 4. En cambio en el ítem 9.b, la media coincide con 0 pues ningún alumno contestó la pregunta, no obstante, en el post test 29 estudiantes alcanzan la puntuación de 3 y 12 de 0 puntos.

Gráfico42: Máximo de puntaje de estudiantes en ítem 4.a del pre y post test de transformaciones isométricas



Se hace la comparación del ítem 9.a y 9.b en el gráfico, en donde se observa que en ambos ítemes en el pre test ningún estudiante alcanza el máximo puntaje. En contraste, se observa en el post test que en el ítem 9.a un 76,7% de los estudiantes alcanza el puntaje máximo de 3 , mientras que en el ítem 9.b lo logra un 67,4% ,correspondiente a 29 estudiantes

4.2 Análisis de utilización de registros en pre y post test de transformaciones isométricas

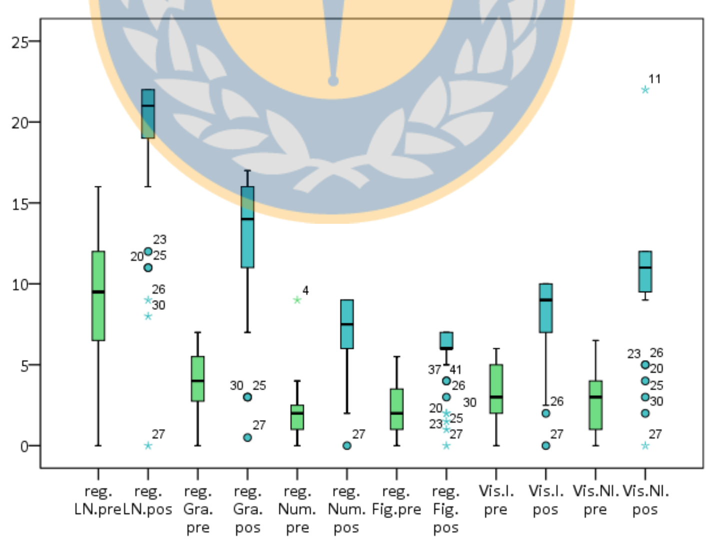
La hipótesis relacionada con este análisis viene dada como:

Hipótesis 6:

Los alumnos expuestos a las representaciones semióticas y visualización aumentan la utilización de registro de representación.

Así, para saber la validez de la hipótesis, se presenta a continuación los resultados de las pruebas del pre y post test en la utilización de registros de representación.

<u>*Gráfico1:*</u> Distribución de puntajes finales en pre y post test de registros de representación.

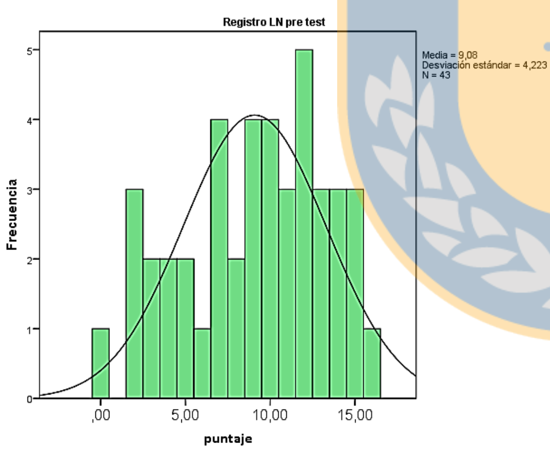


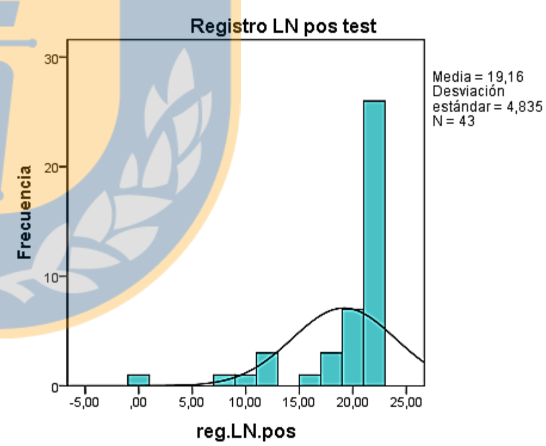
En el gráfico se presentan las distribuciones de los puntajes obtenidos de los distintos registros de representación presentes tanto en el pre test como en el post test de conocimiento de transformaciones isométricas, correspondiente a lengua natural, gráfico, numérico y figural;

además, de los tipos de visualización como Icónica y no Icónica, los que presentan diferencias en los puntajes entre los que se encuentran en el pre y post test.

- **Registro Lengua natural**

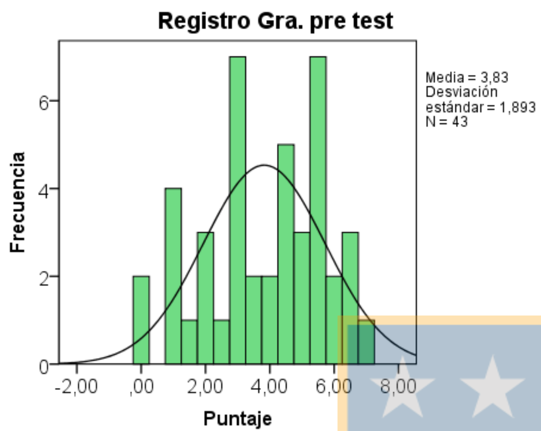
Los y las estudiantes en este registro presentan en el pre test una puntuación mínima de 0 puntos y un máximo de 16 puntos, de un puntaje total de 22. La mitad de los estudiantes obtuvo puntajes iguales o inferiores a 9,5 con una variación de 17,83 y un promedio de 9,08. En el caso del post test, la puntuación mínima continúa en valor 0 puntos, pero la máxima alcanza el puntaje ideal de 22 puntos. La mitad de los estudiantes obtuvo puntaje igual o inferior a 21 puntos con una variación de 23,34 y un promedio de 19,16. Apreciándose la frecuencia en los gráficos de a continuación.

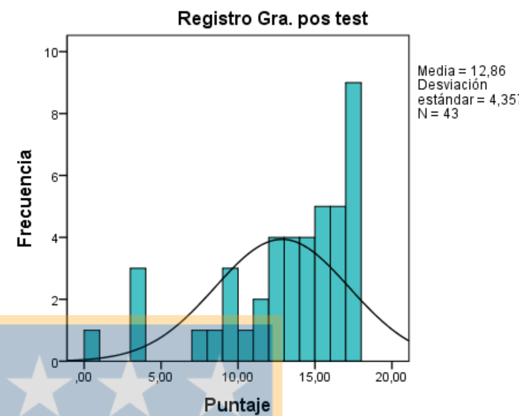




- **Registro Gráfico**

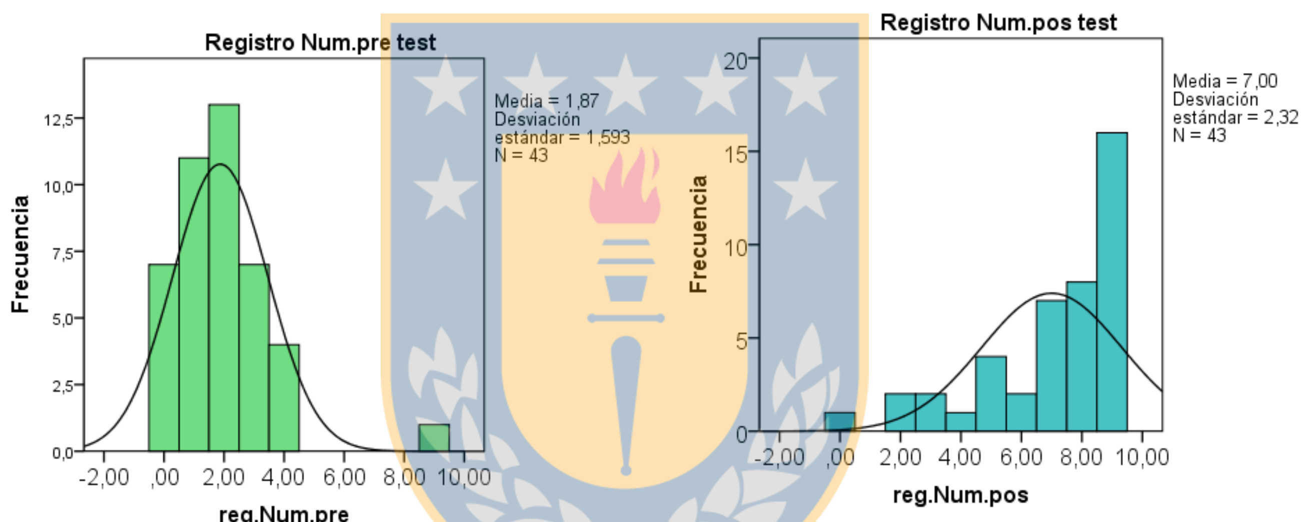
Los y las estudiantes en este registro presentan en el pre test una puntuación mínima de 0 puntos y máxima de 7. La mitad de los estudiantes obtuvieron puntajes iguales o inferiores a 4 puntos con una variación de 3,58 y un promedio de 3,82. Luego, considerando el post test, el puntaje mínimo corresponde a 0,5 puntos y el máximo a 17 puntos, el ideal. La mitad de los alumnos obtuvo puntuación igual o menor a 14 con una variación de 18,98 y un promedio de 12,86. Apreciándose la frecuencia en los gráficos de a continuación.





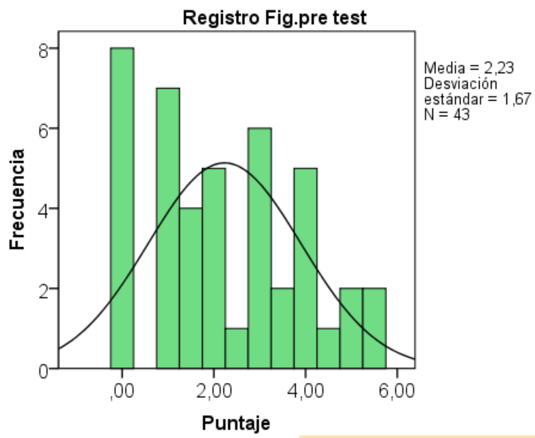
- **Registro Numérico**

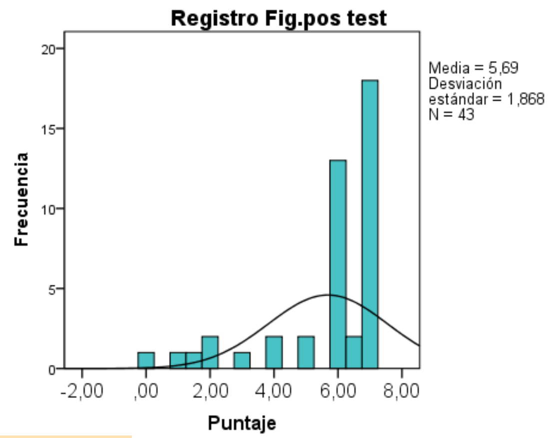
Los y las estudiantes manifiestan en este registro, considerando el pre test, una puntuación mínima de 0 puntos y máxima de 9. La mitad de los estudiantes obtienen puntajes iguales o inferiores a 2 puntos con una variación de 2,53 y un promedio de 1,87. Luego, considerando el post test, el puntaje mínimo corresponde a 0 puntos y el máximo a 9 puntos, el ideal. La mitad de los alumnos obtuvo puntuación igual o menor a 7,5 con una variación de 5,38 y un promedio de 7 puntos. Apreciándose la frecuencia en los gráficos de a continuación



- **Registro Figural**

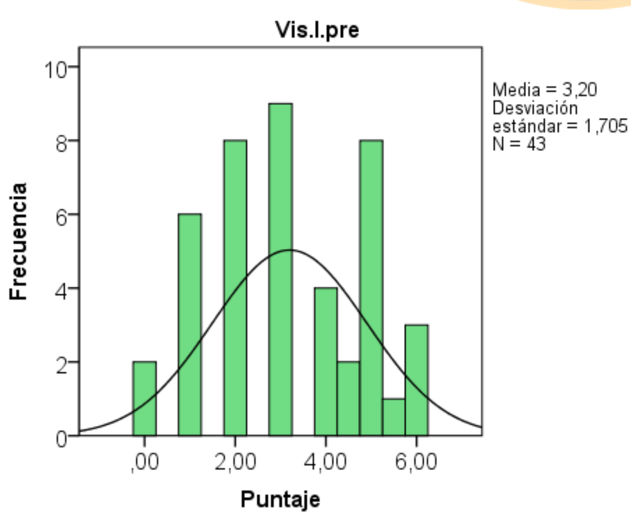
Los y las estudiantes manifiestan en este registro, considerando el pre test, una puntuación mínima de 0 puntos y máxima de 9. La mitad de los estudiantes obtienen puntajes iguales o inferiores a 2 puntos con una variación de 2,53 y un promedio de 1,87. Luego, considerando el post test, el puntaje mínimo corresponde a 0 puntos y el máximo a 9 puntos, el ideal. La mitad de los alumnos obtuvo puntuación igual o menor a 7,5 con una variación de 5,38 y un promedio de 7 puntos. Apreciándose la frecuencia en los gráficos de a continuación.

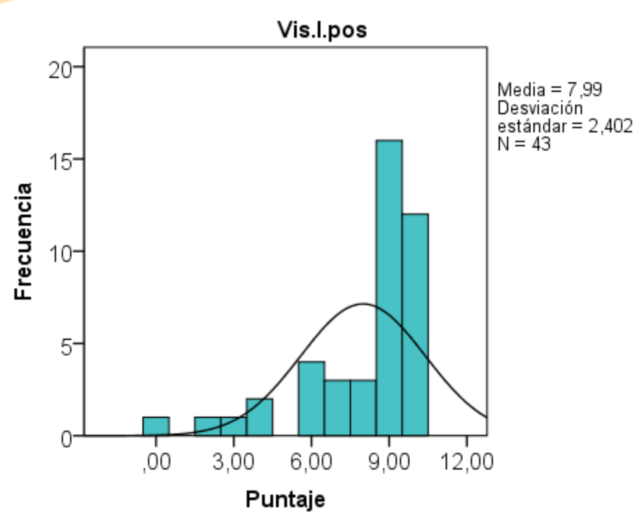




- **Visualización Icónica**

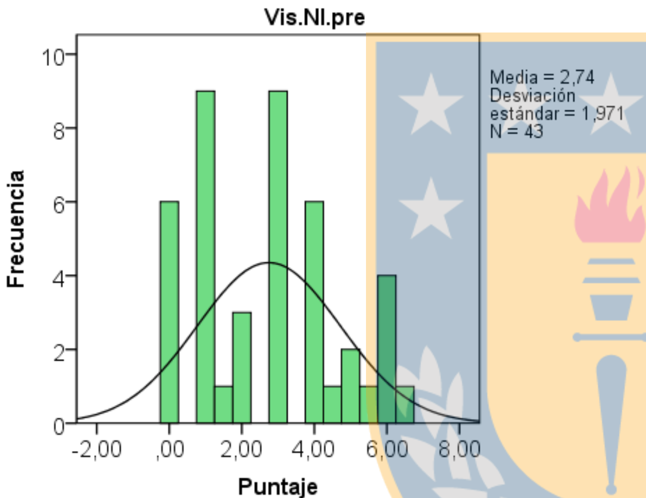
Los y las estudiantes manifiestan en la visualización icónica del pre test, una puntuación mínima de 0 puntos y máxima de 6. La mitad de los estudiantes obtienen puntajes iguales o inferiores a 3 puntos con una variación de 2,9 y un promedio de 3,2. Luego, considerando el post test, el puntaje mínimo corresponde a 0 puntos y el máximo a 10 puntos, el ideal. La mitad de los alumnos obtuvo puntuación igual o menor a 9 con una variación de 5,77 y un promedio de 7,99 puntos. Apreciándose la frecuencia en los gráficos de a continuación.

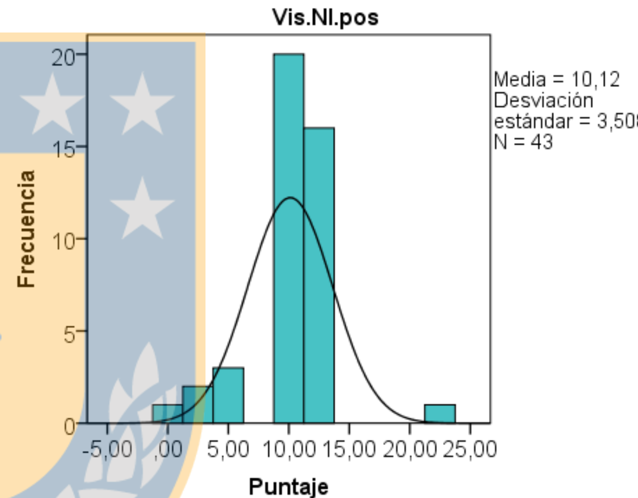




- **Visualización no Icónica**

Los y las estudiantes manifiestan en la visualización icónica del pre test, una puntuación mínima de 0 puntos y máxima de 6,5. La mitad de los estudiantes obtienen puntajes iguales o inferiores a 3 puntos con una variación de 3,89 y un promedio de 2,74. Luego, considerando el post test, el puntaje mínimo corresponde a 0 puntos y el máximo a 22 puntos, el ideal. La mitad de los alumnos obtuvo puntuación igual o menor a 11 con una variación de 12,31 y un promedio de 10,11 puntos. Apreciándose la frecuencia en los gráficos de a continuación.





Por lo tanto, para determinar si las diferencias son significativas estadísticamente, se realiza un contraste de hipótesis. Para ello, se debe contrastar, a un nivel de significancia de $\alpha = 0{,}05$ la hipótesis nula respecto a que los datos proceden de una distribución normal, para luego decidir qué tipo de pruebas deben utilizarse en el contraste de hipótesis y así, en resumidas cuentas, determinar la veracidad de la hipótesis de investigación. De modo que, para todos los registros y las visualizaciones se empleará la misma hipótesis pero el análisis se realizará por separado. La hipótesis viene dada a continuación.

H_0: El conjunto de datos de la variable sigue una distribución normal

H_1: El conjunto de datos de la variable no sigue una distribución normal.

Pruebas de normalidad registros de representación

	Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.
Registro Lengua Natural pre test	,960	43	,135
Registro Lengua Natural post test	,647	43	,000
Registro Gráfico pre test	,954	43	,084
Registro Gráfico post test	,844	43	,000
Registro Numeral pre test	,807	43	,000
Registro Numeral pos test	,822	43	,000
Registro Figural pre test	,934	43	,016
Registro Figural pos test	,714	43	,000
Visualización Icónica pre test	,942	43	,030
Visualización Icónica pos test	,782	43	,000
Visualización no Icónica pre test	,928	43	,010
Visualización no Icónica pos test	,780	43	,000

Se observa en la tabla, de la prueba de normalidad de los registros, lo siguiente:

- **Registro Lengua Natural**

Para el registro L.N. que constituye el pre test, se distribuye según la ley normal, ya que el valor-p (0,135) es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$; sin embargo en el post test el valor-p (0,00) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, por lo tanto no se distribuye normalmente. Luego, existe evidencia significativa para rechazar la hipótesis nula y optar por pruebas no paramétricas para contrastar hipótesis.

- **Registro Gráfico**

En relación al registro Gra referido al pre test, se aprecia que, se distribuye según la ley normal, ya que el valor-p (0,084) es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$. Luego, al considerarlo en el pos test, el valor-p (0,00) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, por lo que no se distribuye según ley normal. Así, existe evidencia significativa para rechazar hipótesis nula y optar por pruebas no paramétricas para contrastar hipótesis.

- **Registro Numeral**

Con relación al registro Num referido al pre test, se aprecia que no se distribuye según la ley normal, ya que el valor-p (0,000) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$. Luego, al considerar el pos test, el valor-p (0,00) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, por lo que no se distribuye según ley normal. Así, existe evidencia significativa para rechazar hipótesis nula y optar por pruebas no paramétricas para contrastar hipótesis.

- **Registro Figural**

Considerando al registro Fig en el pre test, se aprecia que no se distribuye según la ley normal, ya que el valor-p (0,016) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$. Luego, al considerar el pos test, el valor-p (0,00) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, por lo que no se distribuye según ley normal. Así, existe evidencia significativa para rechazar hipótesis nula y optar por pruebas no paramétricas para contrastar hipótesis.

- **Visualización Icónica**

Referido a la VI y considerándolo en el pre test, se aprecia que no se distribuye según la ley normal, ya que el valor-p (0,030) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$. Luego, al considerar el pos test, el valor-p (0,00) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, por lo que no se distribuye según ley normal. Así, existe evidencia significativa para rechazar hipótesis nula y optar por pruebas no paramétricas para contrastar hipótesis.

- **Visualización no Icónica**

Considerándola en el pre test, se aprecia que no se distribuye según la ley normal, ya que el valor-p (0,010) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$. Luego, al considerar el pos test, el valor-p (0,00) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, por lo que no se distribuye según ley normal. Así, existe evidencia significativa para rechazar hipótesis nula y optar por pruebas no paramétricas para contrastar hipótesis.

De modo que, al presentarse lo anterior, todas las comparaciones se realizarán con pruebas no paramétricas por no distribuirse normalmente los datos de los registros. La prueba no paramétrica a utilizar es la Wilcoxom de los rangos con signo.

Para determinar diferencias significativas se plantean las siguientes hipótesis, válidos para cada uno de los registros y visualizaciones:

$$H_0: Md_1 = Md_2$$
$$H_1: Md_1 < Md_2$$

Md_1: Mediana de la distribución de puntaje de registros/visualización en pre test de TI

Md_2: Mediana de la distribución de puntaje de registro/visualización en post test de TI

Estadísticos de registros y visualización

	Reg.LN.pos - Reg.LN.pre	Reg.Gra.pos - Reg.Gra.pre	Reg.Num.pos – Reg.Num.pre	Reg.Fig.pos - Reg.Fig.pre	Vis.I.pos - Vis.I.pre	Vis.NI.pos - Vis.NI.pre
Z	-5,585[b]	-5,715[b]	-5,528[b]	-5,587[b]	-5,597[b]	-5,587[b]
Sig. asintótica	,000	,000	,000	,000	,000	,000

De la tabla anterior, se puede observar que cada uno de los valor-p de los registro corresponde a 0,000, cantidad menor que el nivel de significancia $\alpha = 0,05$, por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que existe diferencia significativa entre la mediana de las distribuciones del puntaje de los registros y las visualizaciones en pre y post test de transformaciones isométricas, es decir, los estudiantes participantes del proceso de las representaciones semióticas y visualización manifiestan aumento en la utilización de registro de representación.

4.3 Análisis pre y post test de razonamiento espacial

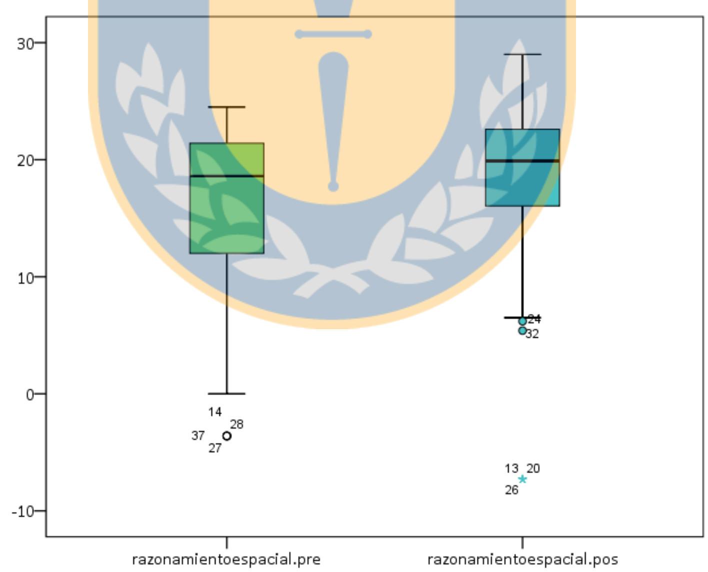
A continuación se describen los resultados obtenidos en el pre y post test de razonamiento espacial.

Hipótesis 2:

> "Los estudiantes luego de participar unidad de transformaciones isométricas con las representaciones semióticas y visualización, incrementan en razonamiento espacial."

Para saber con exactitud si la hipótesis es cierta o refutable, se presenta a continuación los resultados obtenidos en el pre y post test de actitud hacia la matemática.

Gráfico1: Distribución de puntajes finales en pre y post test de actitud hacia la matemática



Se observa en el gráfico1 que existen diferencias entre las distribuciones de los puntajes obtenidos en el post test de razonamiento espacial respecto a su correspondiente pre test, las que se aprecian de mejor forma en la siguiente tabla:

Estadísticos descriptivos

	N	Mínimo	Máximo	Media	Desviación estándar
Razonamiento espacial. Pre	43	-3,6	24,5	15,391	8,7125
Razonamiento espacial. Pos	43	-7,3	29,0	16,437	10,2496
N válido (por lista)	43				

Se presenta en la tabla que el puntaje mínimo se redujo en el post test, en cambio hubo un aumento en la máxima puntuación, con 29 puntos. Además las medias varían entre 8 y 10 entre ambos test. En cuanto a los promedios, los valores también son distintos, por lo que se requiere saber si esas diferencias son significativas. Para ello se realiza contraste de hipótesis, en donde, se requiere contrastar, a un nivel de significancia de $\alpha = 0{,}05$ la hipótesis nula respecto a que los datos proceden de una distribución normal, para luego decidir qué tipo de pruebas deben utilizarse en el contraste de hipótesis y así, en resumidas cuentas, determinar la veracidad de la hipótesis de investigación.

H_0: El conjunto de datos de la variable sigue una distribución normal

H_1: El conjunto de datos de la variable no sigue una distribución normal.

Pruebas de normalidad

	Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.
Razonamiento espacial. Pre	,822	43	,000
Razonamiento espacial. Pos	,798	43	,000

En la tabla se observa que el valor-p tanto para el pre test (0.000) como para el post test (0.000) de razonamiento espacial es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$; por lo que se rechaza la hipótesis nula, y se optan por pruebas no paramétricas para contrastar hipótesis de las distribuciones de los puntajes obtenidos. Así, la prueba a utilizar es la prueba no paramétrica de Wilcoxom.

Para determinar diferencias significativas se plantean las siguientes hipótesis:

$$H_0: Md_1 = Md_2$$
$$H_1: Md_1 < Md_2$$

Md_1: Mediana de la distribución de puntaje en pre test de razonamiento espacial.

Md_2: Mediana de la distribución de puntaje en post test de razonamiento espacial.

Estadísticos de prueba

	Razonamiento espacial. Pues – razonamiento espacial. Pre
Z	-,580[b]
Sig. asintótica (bilateral)	,562

En la tabla se observa que el valor-p (bilateral) es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, por lo que existe evidencia suficiente para aceptar la hipótesis nula y decir que no existe diferencia significativa entre la mediana del puntaje del pre test y post test de razonamiento espacial. Así, los estudiantes que participan de las representaciones semióticas y visualización no incrementan significativamente el razonamiento espacial.

4.4 Análisis pre y post test de Actitud hacia la matemática

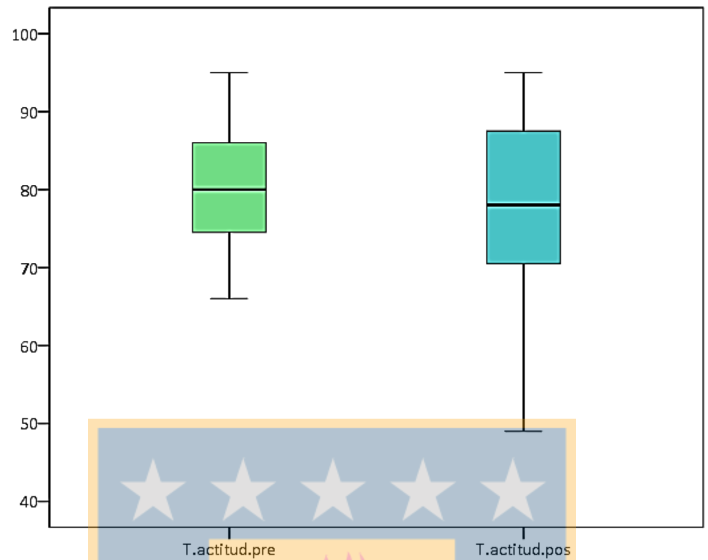
La hipótesis relacionada con este análisis viene dada como:

Hipótesis 3:

> "Los estudiantes expuestos a la enseñanza basada en las representaciones semióticas y visualización incrementan la **actitud** positiva hacia la matemática."

Para saber con exactitud si la hipótesis es cierta o refutable, se presenta a continuación los resultados obtenidos en el pre y post test de actitud hacia la matemática. El pre y post test tienen una puntuación entre 19 y 95.

Gráfico1: Distribución de puntajes finales en pre y post test de actitud hacia la matemática



Se observa en el gráfico1 que existen diferencias entre las distribuciones de los puntajes obtenidos en el post test de actitud respecto a su correspondiente pre test, las que se aprecian de mejor forma en la siguiente tabla:

Estadísticos descriptivos test de Actitud

	N	Rango	Mínimo	Máximo	Media	Desviación estándar
T.actitud.pre	43	29,00	66,00	95,00	79,8605	7,65189
T.actitud.pos	43	46,00	49,00	95,00	78,4884	11,11921

En la tabla se observa que hay una diferencia en los mínimos puntajes obtenidos entre el pre y post test de actitud hacia la matemática. En el caso del pre test, la mínima puntuación mínima es de 66, en cambio en el post test corresponde a 49. Además, los puntajes en el post test se alejan más de la media con una variación (desviación estándar) de 11,12 que en el pre test, cuya variación es de 7,6.

En cuanto a los promedios en ambos test, también hay diferencias. En el caso del pre test se obtiene una puntuación de 79,86 y en el post test de 78,48.

Por lo tanto, para determinar si estas diferencias son significativas estadísticamente, se realiza contraste de hipótesis.

Se requiere contrastar, a un nivel de significancia de $\alpha = 0{,}05$ la hipótesis nula respecto a que los datos proceden de una distribución normal, para luego decidir qué tipo de pruebas deben utilizarse en el contraste de hipótesis y así, en resumidas cuentas, determinar la veracidad de la hipótesis de investigación.

H_0:El conjunto de datos de la variable sigue una distribución normal

H_1:El conjunto de datos de la variable no sigue una distribución normal.

Pruebas de normalidad test de actitud			
	Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.
T.actitud.pre	,957	43	,108
T.actitud.pos	,957	43	,104

Se observa en la tabla, que la prueba de normalidad del puntaje del pre test se distribuye según la ley normal, ya que el valor-p (0,108) es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$; mientras que la prueba de normalidad del puntaje del post test, se distribuye de igual forma, esto es, debido a que el valor- p (0,104) es mayor que el nivel de significancia ya mencionado. Esto permite optar por pruebas paramétricas para contrastar hipótesis de las diferencias de medias.

Para determinar si la diferencia es significativa, se plantean las siguientes hipótesis:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 < \mu_2$$

μ_1: Puntaje promedio en pre test de actitud

μ_2: Puntaje promedio en post test de actitud

Prueba t de Student para muestras relacionadas de test de actitud

	Diferencias emparejadas					t	gl	Sig. (bilateral)
	Media	Desviación estándar	Media de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia				
				Inferior	Superior			
T.actitud.pre - T.actitud.pos	1,37209	9,05019	1,38014	-1,41314	4,15733	,994	42	,326

En la tabla se observa que el valor-p (bilateral) es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, por lo que existe evidencia suficiente para aceptar la hipótesis nula y decir que no existe diferencia significativa entre la media del puntaje del pre test y post test de actitud hacia la matemática. Así, los estudiantes que participan de las representaciones semióticas y visualización no incrementan la actitud positiva hacia la matemática, pues la disposición de ánimo se vio alterada por el cambio en las experiencias para el aprendizaje a las que fueron sometidos y del cambio de profesor (Allport, 1935, citado por Mato y de la Torre, 2006).

4.5 Análisis de pre y post test de Escala de motivación hacia la matemática

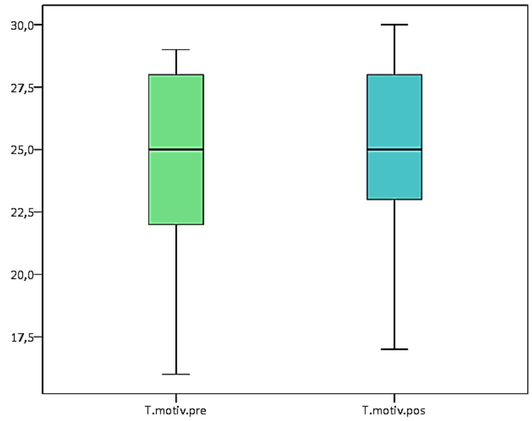
La hipótesis relacionada con este análisis viene dada como:

Hipótesis 4:

"Los estudiantes expuestos a la enseñanza basada en las representaciones semióticas y visualización incrementan la **motivación** hacia la matemática.

Así, para saber la validez de la hipótesis, se presenta a continuación los resultados de las pruebas del pre y post test de motivación hacia la matemática y su posterior análisis, para lo cual se considera una puntuación entre los 6 y 30. En primer lugar se presenta un gráfico, el que muestra la distribución de los puntajes finales en pre y pos test.

Gráfico1: Distribución de puntajes finales en pre y post test de motivación hacia la matemática



Se observa en el gráfico que existe diferencia entre las distribuciones de los puntajes obtenidos tanto en el pre test como en el post test de motivación hacia la matemática, las que se detallan en la tabla que a continuación se presenta:

Estadísticos descriptivos motivación

	N	Rango	Mínimo	Máximo	Media	Desviación estándar
Pre test motivación	43	13,00	16,00	29,00	24,6047	3,64587
Post test motivación	43	13,00	17,00	30,00	25,0465	3,50478

Los puntajes mínimos y máximos alcanzados por los estudiantes, así como el promedio y la variación de ellos cambian entre el pre test y el post test. En el caso de la mínima puntuación, de 16 unidades en el pre test cambia a 17 en el post test; considerando la máxima puntuación, cambia de 29 en el pre test a 30 en el post test. Y la variación de los datos respecto el promedio varía de 3,65 en el pre test a 3,50 en el post test. Además, en la media también existe un cambio, de 24,6 puntos a 25,0 puntos, de pre a post test, respectivamente. Luego, al existir diferencia entre las medias, es necesario saber si son significativas estadísticamente, para lo cual se debe realizar un contraste de hipótesis.

Así, se requiere contrastar a un nivel de significancia de $\alpha = 0{,}05$, la hipótesis nula de que los datos proceden de una distribución normal, para decidir las pruebas de contraste a utilizar para determinar la veracidad de la hipótesis de investigación.

H_0:El conjunto de datos de la variable sigue una distribución normal

H_1: El conjunto de datos de la variable no sigue una distribución normal.

Pruebas de normalidad

	Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.
Pre test motivación	,894	43	,001
Post test motivación	,954	43	,085

Se observa en la tabla que la prueba de normalidad del pre test no se distribuye según ley normal, ya que el valor-p (0,001) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$; por otro lado, la prueba de normalidad del post test se distribuye según la ley normal, ya que el valor-p (0,085) es mayor que el nivel de significancia ya mencionado. Por lo anterior mencionado, se optan por pruebas no paramétricas para contrastar hipótesis de las diferencias de medianas. Así, la prueba a utilizar es la prueba no paramétrica de Wilcoxom.

Para determinar diferencias significativas se plantean las siguientes hipótesis:

$$H_0: Md_1 = Md_2$$

$$H_1: Md_1 < Md_2$$

Md_1: Mediana de la distribución de puntaje en pre test de TI

Md_2: Mediana de la distribución de puntaje en post test de TI

Estadísticos de prueba

	T.motiv.pos - T.motiv.pre
Z	-,765[b]
Sig. asintótica (bilateral)	,444

En la tabla se observa que el valor-p (bilateral) es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, luego existe evidencia suficiente para aceptar la hipótesis nula, por lo tanto se concluye que no existe diferencia significativa entre la mediana de las distribuciones del puntaje pre y post test de motivación hacia la matemática, es decir, los estudiantes participantes del proceso de las representaciones semióticas y visualización no aumentan significativamente su nivel de motivación hacia la matemática.

4.6 Análisis de aprendizaje hombres v/s mujeres en pre y post test de conocimiento de transformaciones isométricas

La hipótesis relacionada con este análisis viene dada como:

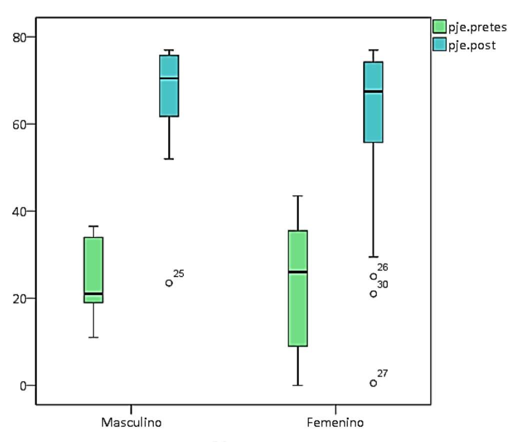
Hipótesis 5:

> Existe diferencia en el aprendizaje entre hombres y mujeres, favorable para los varones, al participar de la enseñanza basada en las representaciones semióticas y visualización en la unidad de transformaciones isométricas

Así, para saber la validez de la hipótesis, se presenta a continuación los resultados de las pruebas del pre y post test en el aprendizaje de hombres v/s mujeres y su posterior análisis.

En primer lugar se da a conocer un gráfico, el que muestra la distribución de los puntajes finales comparando el género en pre y pos test.

<u>Gráfico1:</u> Distribución de puntajes finales en pre y post test conocimiento de transformaciones isométricas según género.



En el gráfico se observa tanto en el pre test como en el post test diferencias en la distribución de puntajes. En el caso del pre test, y considerando el género masculino y femenino, el puntaje mínimo alcanzado fue de 11puntos y 0 puntos, respectivamente. Por otro lado, el puntaje máximo alcanzado por los varones fue de 36,5 puntos y por las damas de 43,5 puntos. En cuanto al promedio alcanzado por los estudiantes, corresponde a 23,71 en el caso de los varones y 23,57 en el caso de las damas.

Considerando el post test, el puntaje mínimo alcanzado por los varones y damas corresponde a 23,5 puntos y 0,5 puntos, respectivamente. Por otro lado, el puntaje máximo alcanzado corresponde a 77 puntos para ambos géneros. Luego, en el promedio también existen diferencias, en el caso de los varones corresponde a 66,13 puntos y en el caso de las damas a 60,48 puntos.

Así, al existir diferencias en las medias entre los géneros en el pre y post test, se debe determinar si es significativa estadísticamente al realizar contraste de hipótesis. Por lo tanto, se requiere contrastar, a un nivel de confianza de α=0,05, la hipótesis nula de que los datos provienen de una distribución normal para decidir qué tipo de prueba se utilizará para contrastar hipótesis.

H_1: El conjunto de datos de la variable no sigue una distribución normal

H_0 : El conjunto de datos de la variable sigue una distribución normal

Pruebas de normalidad de puntajes de pre y post test en cuanto al género

		Kolmogorov-Smirnov[a]		
	Género	Estadístico	gl	Sig.
Puntaje pre test	Masculino	,244	16	,011
	Femenino	,146	27	,143
Puntaje post test	Masculino	,217	16	,043
	Femenino	,302	27	,000

De la tabla se observa, considerando los resultados del pre test, que para el género masculino el valor-p es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, y en el caso del género femenino, corresponde el valor-p mayor que el nivel de significancia, por lo tanto, no se distribuye el conjunto de datos bajo la ley normal, por lo que existe evidencia para rechazar la hipótesis nula y aceptar H_1. Además, en el caso del post test, el valor –p tanto para el género masculino como femenino corresponden a valores menores al nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$(0,043 y 0,00, respectivamente), por lo tanto en el post test, el conjunto de datos posee una distribución normal. Por lo cual, se optan por pruebas no paramétricas para contrastar hipótesis de las diferencias de medianas. Así, la prueba a utilizar es la prueba no paramétrica para pruebas independientes.

Así, para determinar diferencias significativas se plantean las siguientes hipótesis:

$$H_0: Md_1 = Md_2$$

$$H_1: Md_1 < Md_2$$

Md_1: Mediana de la distribución de puntaje de género en pre test

Md_2: Mediana de la distribución de puntaje de género en post test de TI

Resumen de contrastes de hipótesis

	Hipótesis nula	Prueba	Sig.	Decisión
1	Las medianas de pje.pre test son las mismas entre las categorías de Género.	Prueba de la mediana para muestras independientes	,144	Conserve la hipótesis nula.
2	Las medianas de pje.post test son las mismas entre las categorías de Género.	Prueba de la mediana para muestras independientes	,665	Conserve la hipótesis nula.

En la tabla se observa que el valor-p es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, tanto para pre test como para post test en la comparación de medianas respecto al género; luego existe evidencia suficiente para aceptar la hipótesis nula, por lo tanto, se concluye que no existe diferencia significativa entre la mediana de las distribuciones del puntaje de género en el pre y post test de transformaciones isométricas, es decir, los estudiantes participantes del proceso de las representaciones semióticas y visualización no manifiestan diferencias de aprendizaje entre hombres y mujeres.

4.7 Análisis correlacional

Hipótesis 7:

A mayor motivación de los estudiantes que participan de las representaciones semióticas y visualización, mayor es su aprendizaje de la unidad de transformaciones isométricas

$$\mathbf{H_0}: r_s = 0$$

$$\mathbf{H_1}: r_s \neq 0$$

El resultado obtenido en el post test de motivación proviene de una variable que se distribuye normalmente, mientras que los resultados del pos test, proceden de una variable que no se distribuye según ley normal. Por lo que, se utilizó el coeficiente de correlación no paramétrico Rho de Spearman para analizar esta hipótesis. Se consideró a un nivel significancia $\alpha = 0{,}05$, obteniéndose los siguientes resultados:

Correlación de Spearman Aprendizaje en matemática

		Motivación
Aprendizaje en matemática	Coeficiente de correlación	,477**
	Sig. (bilateral)	,001

En la tabla se observa que el valor-p (0,001) es menor que nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, es decir, se rechaza la hipótesis nula. Por lo que existe una correlación lineal, estadísticamente significativa, moderada y directamente proporcional entre los niveles de motivación hacia la matemática y el aprendizaje en transformaciones isométricas producto de la metodología basada en las representaciones semióticas y visualización. Es decir, al utilizar la metodología basada en las representaciones semióticas y visualización, se evidencia que a mayor motivación en los y las estudiantes, mayor es su aprendizaje en la unidad de transformaciones isométricas

Hipótesis 8:

A mayor actitud de los estudiantes que participan de las representaciones semióticas y visualización, mayor es su aprendizaje en la unidad de transformaciones isométricas

Esto es:

$$\mathbf{H_0}: r_s = 0$$

$$\mathbf{H_1}: r_s \neq 0$$

Como se dijo anteriormente, los puntajes del post test de matemática no se distribuyen de forma normal, en cambio los puntajes del pos test de actitud, (0,104>0,05) sí provienen de una distribución normal, por lo que se utilizó el coeficiente no paramétrico de correlación de Spearman para analizar esta hipótesis, considerando un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, se obtuvieron los siguientes resultados:

Coeficiente de correlación de Spearman

		Actitud
Aprendizaje en matemática	Coeficiente de correlación	,455**
	Sig. (bilateral)	,002
	N	43

En la tabla se observa que el valor-p (0,002) es menor que nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, es decir, se rechaza la hipótesis nula. Por lo que existe una correlación lineal, estadísticamente significativa, moderada y directamente proporcional entre la actitud hacia la matemática y el aprendizaje debido a la metodología basada en las representaciones semióticas y visualización. En otras palabras, al utilizar la metodología de las representaciones semióticas y visualización, se evidencia que a mayor actitud en los estudiantes, mayor es su aprendizaje en la unidad de transformaciones isométricas

Hipótesis 9:

A mayor razonamiento espacial en los estudiantes que participan del proceso de las representaciones semióticas y visualización, mayor es su aprendizaje de la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad.

Lo que se traduce en

$$\mathbf{H_0}:\ r_s = 0$$

$$\mathbf{H_1}:\ r_s \neq 0$$

Coeficiente de correlación de Spearman

		Razonamiento espacial
Aprendizaje en transformaciones isométricas	Coeficiente de correlación	,137
	Sig. (bilateral)	,380
	N	43

En la tabla se observa que el valor-p (0,380) es mayor al nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, es decir, se acepta la hipótesis nula y se concluye que dichas variables no están correlacionadas. Es decir, al utilizar la metodología basada en las representaciones semióticas y visualización, no se evidencia que a mayor razonamiento espacial en los estudiantes mayor es su aprendizaje en la unidad de transformaciones isométricas.

CAPÍTULO 5:

Resultados, Conclusiones y Sugerencias

5.1 Resultados

Los resultados obtenidos tras la verificación de las hipótesis de trabajo, se detallan a continuación:

- La metodología basada en las representaciones semióticas y visualización utilizada en la unidad de transformaciones isométricas en el plano cartesiano ayuda a comprender positivamente este tema en los y las estudiantes que participan de ella.
- La participación de los y las estudiantes de la metodología de las representaciones semióticas y visualización en la unidad de transformaciones isométricas en el plano, no evidencia un incremento en el razonamiento espacial.
- Participar de la metodología de las representaciones semióticas y visualización en la unidad de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, no incrementa la actitud positiva de los y las estudiantes hacia la matemática del grupo en estudio.
- La metodología de las representaciones semióticas y visualización utilizada en la unidad de transformaciones isométricas en el plano cartesiano en los y las estudiantes no incrementa la motivación hacia la matemática.
- La participación en la metodología basada en las representaciones semióticas y visualización en la unidad de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, no evidencia diferencias de aprendizajes entre hombres y mujeres.
- Utilizar la metodología basada en las representaciones semióticas y visualización en la unidad de transformaciones isométricas, incrementa considerablemente la utilización de registro de representación.

Resultados Correlación

Los resultados de la correlación vinculada a las variables producto de la intervención, se describe a continuación:

Respecto a los factores socio-afectivos mencionados con anterioridad, la motivación y la actitud hacia la matemática, se pudo evidenciar que existe relación entre cada una con el aprendizaje de los y las estudiantes, ya que existe una moderada correlación entre las variables especificadas, es decir, a mayor presencia de ellas, mayor es el aprendizaje, sin embargo, los estudiantes no aumentaron la motivación y la actitud hacia la matemática debido, en primer lugar al desconocimiento de la metodología por estar acostumbrados al conductismo y al poco tiempo que se empleó, además, el cambio de profesor podría ser uno de los factores que influyeron en los resultados de los y las estudiantes.

En el caso del razonamiento espacial, no se pudo evidenciar que existe relación con el aprendizaje de los y las estudiantes expuesto a la metodología de las representaciones semióticas y visualización.

5.2 Discusión de resultados

De acuerdo al análisis de los estadísticos descriptivos e inferenciales, se discute en el contexto del marco referencial de la presente investigación, los resultados obtenidos.

Primeramente, se logró determinar que la enseñanza basada en el proceso de Teoría de representación semiótica y visualización en la unidad de transformaciones isométricas en el plano cartesiano aumentó ampliamente el conocimiento de los y las estudiantes, evidenciado en el transcurso de las clases y en el test final. Esto puede ser debido a que uno de los factores que estuvieron presentes en las actividades, los registros de representación, tales como lengua natural; numeral; gráfico. Además, el apoyo visual elaborado a partir de situaciones familiares para los y las estudiantes, procuró una mayor y mejor participación en las actividades facilitadas, aumentando así el desarrollo de los registros de representación.

En el caso del registro de Lengua Natural, aumenta considerablemente en los estudiantes que lo desarrollan en la totalidad de los ítemes, dicho aumento es en un 46,5%. La importancia de la utilización de este registro, radica principalmente en comprender a qué se refieren los enunciados de los problemas, lo que se traduce en identificar en base a la teoría de representación, por lo que un 2,3% no logra un avance, correspondiente a una estudiante. Esto puede deberse a la falta de comprensión y esto a su vez, una ausencia o déficit en el aprendizaje en la asignación de significados (Macías, 2014).

Luego, en el registro gráfico, aumentan los estudiantes que superan el puntaje máximo del pre test. Sin embargo sólo un 20,9% alcanza la puntuación máxima. Hay que considerar que para poder realizar los problemas que involucren este registro, se debe realizar una conversión desde el registro de lengua natural y ahí también existen alumnos que no logran desarrollarlo al 100%, por ende se ven afectados los demás.

Considerando del mismo modo al registro numeral, se ve aumentado en un 32,9% los estudiantes que logran desarrollarlo totalmente. Es decir, los estudiantes que pudieron realizar sin problemas la identificación, tratamientos en este mismo registro, y conversión desde otros registros, logrando así el conocimiento esperado.

Sin ir más lejos, quienes desarrollaron el registro figural, aumenta en un 37,2% quienes lo realizan en su totalidad, lo que es muy cercano al registro numeral, lo que puede entenderse que para poder realizar figuras en el plano cartesiano, era necesario del registro anterior, pues para hacer las correctas figuras, debían estar bien ubicadas las coordenadas y saber de las características de las transformaciones isométricas.

En cuanto a la visualización icónica, la cantidad de estudiantes que alcanzan el puntaje máximo aumenta un 27% y la no icónica en un 2,3%. La mayoría de los estudiantes se encuentran cerca de la media en ambos tipos de visualizaciones. Quizás el avance en su totalidad de la visualización no fue la esperada, sin embargo, que los estudiantes se encuentren cercano a la media indica que hay conocimiento, pero podría potenciarse aún más

En segundo lugar, cabe destacar los efectos de las representaciones semióticas y visualización respecto al razonamiento espacial. Era de esperarse que la metodología aumentara en el razonamiento espacial, sin embargo no fue lo que sucedió. El razonamiento espacial no sufrió variaciones importantes, pudo deberse al poco tiempo empleado con la nueva metodología y al poco desarrollo en la visualización, pues existe una estrecha relación entre ambos procesos; otro elemento influyente, la costumbre hacia la metodología conductista, lo que provocaba sacarlos de su zona de confort, además, la poca comprensión en un principio de las actividades que se le solicitaban, pese a estar activos durante todas las actividades.

En último lugar, los estudiantes manifestaron inconformidad con el cambio de docente, lo que se vio relacionado con el tipo de metodología empleada, y por parte de los estudiantes a evidenciar una cierta resistencia al razonamiento de las actividades. Sin embargo, eran estudiantes con una buena actitud, quienes superaban sus obstáculos en la realización de las actividades pese a encontrarlas con un alto grado de dificultad.

En lo referente a los factores socio-afectivos, como la motivación y la actitud se puede mencionar que los estudiantes participantes, poseían buenos niveles iniciales, los que tendieron a la baja en el transcurso de la intervención, sin embargo no afectó significativamente en su aprendizaje. Esto puede deberse a dos motivos, el primero corresponde a que la motivación y actitud se refieren a procesos psicológicos y afectivo-emocionales, por ende, al tenerle mayor aprecio al profesor de la asignatura los factores socio- afectivos mencionados, se vieron afectados con el cambio de profesor al realizarse la intervención, por no conocerlo y no familiarizarse con la nueva metodología; la segunda razón, la que explicaría que la variación no fuera abrupta, se debió a la interacción entre sus pares en la realización de las actividades. Lo que se puede corroborar con la correlación lineal entre las variables socio-afectivas, anteriormente mencionadas, y el aprendizaje de los y las estudiantes.

Por lo tanto, la interacción social permitió el desarrollo de habilidades tanto en los factores socio-afectivos como en el aprendizaje de las transformaciones isométricas en el plano cartesiano. La visualización permitió darle significado a lo que los y las estudiantes comprendían con la movilización de las representaciones y los procesos cognitivos utilizados en las actividades propuestas con la metodología de las representaciones semióticas y visualización.

De manera que el estudio permite comparar y corroborar con otros estudios como “Objetos, significados, representaciones semióticas y sentidos” (D´amore, 2006), “Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal”(Ospina,2012), “Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial” (Fernández, 2011), “Conceptualización, registros de representación semióticas y neoética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución” (D’Amore,2009), que las teorías mencionadas en el marco referencial de la presente investigación, concuerda con los resultados evidenciados respecto a que el constructivismo social, la motivación y la actitud influyen en el aprendizaje; las representaciones semióticas promueven un aprendizaje y el proceso de conversión al conocimiento; la visualización y el razonamiento espacial se encuentran vinculados y ayudan a construir y manipular representaciones y transformaciones mentales de las actividades a las transformaciones isométricas en el plano cartesiano.

Así, se precisa de un mayor tiempo para lograr una alta relación correlacional entre los factores socio-afectivos, razonamiento espacial y el proceso de las representaciones semióticas y visualización, de modo que puedan lograrse mayores y mejores cambios en el aprendizaje.

5.3 Conclusiones

La enseñanza basada en las representaciones semióticas y visualización influye positivamente en el aprendizaje de los contenidos de la unidad de transformaciones isométricas en el plano cartesiano de primer año medio de un liceo particular subvencionado de la ciudad de Los Ángeles.

Se concluye que la participación de los y las estudiantes de la metodología basada en las representaciones semióticas y visualización promueve la identificación, tratamiento y conversión en los registros de representación semiótica necesarios para lograr conocimiento de las transformaciones isométricas en el plano cartesiano, tal como lo menciona Duval (1998), pues permitió que los objetos matemáticos, en este caso las transformaciones isométricas en el plano cartesiano, no fueran confundidas con una representación como podría ser sólo la ubicación de las coordenadas tras una traslación o la suma de las componentes del eje X y del eje Y al sumar vectores.

El conocimiento se logró debido a que se motivó al estudiante no sólo a observar, criticar y conjeturar sobre las actividades propuestas, sino también a la movilización de los registros de representación, ya que, aun cuando las consideraciones visuales fueron importantes al momento de resolver problemas, no lo fueron tanto como la conversión entre registros. Así, queda evidenciado que la visualización no es el único instrumento que permite la no confusión de los registros con objetos matemáticos, pues al manipular el conocimiento y los registros de representación vinculando los conocimientos previos de transformaciones isométricas en el plano euclidiano con las transformaciones isométricas en el plano cartesiano se logra también el aprendizaje, convirtiéndose en esencial movilizar los registros en las diferentes actividades.

Por lo tanto, se puede concluir que la enseñanza basada en las representaciones semióticas y visualización, incide de manera favorable en el aprendizaje de los y las estudiantes en las transformaciones isométricas en el plano cartesiano, y da cuenta que a mejores indicios de variables socio-afectivas de los estudiantes, es mejor su aprendizaje.

5.4 Limitaciones de la investigación

En cuanto a las limitaciones del estudio, se puede mencionar:

- Prácticas académicas que los y las estudiantes tenían arraigadas de la metodología tradicional al momento del trabajo en clases.
- La motivación y la actitud de los y las estudiantes hacia la asignatura de matemática, quienes al saber que la unidad sería tratada por otro profesor al que estaban acostumbrados, inmediatamente se resistían a colaborar, por que significaba cambiar la mecanización por el razonamiento.
- La costumbre de los y las estudiantes a trabajar en pos de una calificación y a la mecanización, muestran que las actividades del estudio implicaban razonamiento y actitud desinteresada, en desmedro de los objetivos de la investigación.
- Las actividades que se realizaban en el liceo y provocaban interrupción de las clases, pues no permitían seguir una secuencia y los educandos perdían la concentración.
- El poco tiempo empleado en la investigación para observar con precisión algún avance en los factores socioafectivos y en el razonamiento espacial, porque los alumnos no lograron evidenciar cambios significativos en el corto periodo, algo que se podría ver mejorado con un trabajo sistemático y de forma longitudinal con la metodología implementada.

5.5 Sugerencias

Se sugiere a los docentes y profesores en formación, atreverse a la implementación de metodologías alternativas a la tradicional para observar de manera fehaciente la mejoría y desmecanización de los estudiantes en el aprendizaje de los contenidos, pese a que en primera instancia muestren resistencia al cambio o el tiempo implementado sea mayor. Es normal temer a lo desconocido, mas es imperativo inculcar en los estudiantes que vencer obstáculos, en especial salir de la zona de confort, permite conocer y reconocer cuáles son las capacidades potenciales que se ocultan frente a una rutina monótona.

Por otro lado, conviene utilizar situaciones conocidas, de la cultura cotidiana de los estudiantes, para que logren encontrar de esa manera sentido y utilidad a lo que están aprendiendo y en particular, aplicadas a la movilización de los registros de representación, tal como lo plantean las teorías socio-constructivistas.

Además, se sugiere el estudio en otras unidades de matemática la implementación de las representaciones semióticas y visualización al ser una metodología que promueve la crítica, la observación y la conjetura, desde la educación básica.

Referencias Bibliográficas

Allport, G. (1935). Attitudes. In C. A. Murchison (Ed.), A handbook of social psychology (pp. 798 – 844). Worcester, MA: Clark University Press.

Alves, M. (1963): Compendio de Didáctica General. Adaptación publicada con la autorización de Editorial Kapelusz. En http://es.slideshare.net/viteriange/alves-de-mattos-luiz-compendio-de-didactica-general

Araya, L. y Figueroa, N. (2011). Taller socioafectivo para la disminución de la ansiedad ante la matemática en estudiantes de primer año de enseñanza media. Universidad de Concepción. Chile

Arévalo, V. (2016).Influencia de la metodología Aprendizaje Basado en Problemas en el aprendizaje de la unidad de Transformaciones Isométricas, en la motivación y en la actitud para estudiantes de un colegio particular subvencionado.

Arratia,J., Manríquez, P.&Valdebenito, D. (2016). Visualización: Una herramienta para el desarrollo del conocimiento de razones, proporciones y proporcionalidad. Universidad de Concepción, Los Ángeles.

Alonso, J. (1991). Motivación y aprendizaje en el Aula. Madrid: Santillana.

Barrantes, M., Balletbo, I., & Fernández, M. (12,13,14 de Noviembre de 2014). Enseñar Geometría en Secundaria. Buenos Aires, Argentina: Congreso Iberoamericano de ciencia, tecnología innovación y educación).

Battista, M. (2008a). Representations and cognitive objects in modern school geometry.In K.Heid & G. BLume (Eds) . Greenwich, CY.: information Age Publishing Inc.

Balderas, P. (1998). La representación y el razonamiento visual en la enseñanza de la matemática, tesis doctoral, México, Facultad de Filosofía y Letras, unam.

Bazán, J. y Aparicio, A. (2006). Las actitudes hacia la Matemática Estadística dentro de un modelo de aprendizaje. Sinéctica. Revista Semestral del Departamento de Educación, 28, 1-12

Bishop, A. (1989): Review of research on visualization in mathematics education, *Focus on Learning Problems in Mathematics* 11.1, pp. 7-16

Bolívar, A. (1995). La evaluación de valores y actitudes. Madrid: Grupo Anaya, S.A.

Brophy, J. (1998). MotivatingnStudent lo Learn. Boston: McGraw-Hill.

Bruning, R., Schraw, G., Norby, M., & Ronning, R. (2004). Cognitive psychology and instruction. NJ: Merrill/Prentice Hall.

Candia, D. (2014). Progreso en la motivación y el aprendizaje al estudiar transformaciones isométricas con geogebra. Los Ángeles, Chile.: Universidad de Concepción.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001) Visualización y pensamiento matemático. Área de educación superior del Departamento de Matemática Educativa Educación Superior. Centro de investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Cantorin, M. y Salvatierra, A.(2012) Actitud hacia las matemáticas y el aprovechamiento académico de los docentes el II y III ciclo de huancayo, Jauja y Tarma. Horizonte de la Ciencia 2(2) 82-90

Capita, Á. (2009). Sevilla Patente nº ISNN 1988-6047 Dep. Legal: 2922/2007.

Castañeda, J. (s.f). El conductismo en la educación básica de Nuevo León a finales del siglo XX. Facultad de Filosofía y Letras, Colegio de Historia.

Cobb, P., & Bowers, J. (1999). Cognitive and situated learning perspectives in theory and practice. Educational Researcher, 28(2), 4 -15.

Cockcroft, W. (1985). Las matemáticas sí cuentan. Madrid: MEC.

Coll, C. (1988).psicología y currículum. Barcelona: Laia

Coll, C. (1990). Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento. Barcelona: Paidós Educador.

Coll, C. (1996). Constructivismo y educación escolar: ni hablamos siempre de lo mismo ni lo hacemos siempre lo mismo desde la misma perspectiva epistemológica. Anuario de Psicología, 69,153-168.

Cortés y Rodríguez (1999). Imaginando congruencias. Programa MECE- MEDIA. Ministerio de Educación de Chile.

Cruz, J. (2008): El constructivismo en educación. Gaceta ISCEEM, México.

De Guzmán, M. (1996). El rincón de la pizarra. Pirámide, Madrid.

Del Grande, J. (1990): Spatial sense, *Arithmetic Teacher* 37.6, 14-20

Del Valle, Muñoz y Santis (2013) Matemática 1 medio. Ediciones SM Chile S.A. Santiago de Chile

Díaz y Hernández (2002). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista. México: McGraw-Hill.

Díaz y Hernández (2010). Estrategias Docentes para un aprendizaje significativo. México: McGrawHill.

Dreyfus, T. (1991). on the status of vsual reasoning in mathematics and matheatics education. In Furinghetti,F. . Proceedings of the 15 th P.M.E International Conference., (Ed.) 1, 33-48.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique el fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 5, 37-65.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and specific Processes.In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), Exploting mental imagery with computers in mathematical education (pp. 142-157). Berlin: Springer

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En Mammana & Villani (Eds.), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century,37-52. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Instituto de Educación Matemática. Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2002) L'apprentissage de l'alg`ebre et le probl`eme cognitif de la d´esignation des objets. En: J.Ph. Drouhard et M . Maurel (Eds.), Actes des S´eminaires SFIDA-13 `a SFIDA-16, Vol. IV 1901-2001 (pp. 67–94).

Duval, R. (2004). Semiosis y Pensamiento Humano. Traducción de título original: Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. PeterLang. S.A. Santiago de Cali, Colombia. 2ª ed

Duval, R. (2006a). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques. Relime, Número Especial 1, 45-81

Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61, 103- 131

El Mostrador. (15 de Abril de 2016). Informe OCDE: Chile en el top ten de los países con más desigualdad educativa. Santiago, Chile.

Estrada, A., Batanero, C., & Fortuny, J. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formacion y en ejercicio. Enseñanza de las Ciencias, 22(2), 263-274.

Fernández, M. (2011). Una aproximación ontosemiótica a la vosualización y el razonamiento espacial. Tesis Doctoral, Santiago de Compostela.

García y González (2001).Batería psicopedagógica Evalúa-8, test de razonamiento espacial. Editorial EOS. España.

Goldin, G. (2002). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. Journal of Mathematical Behaviour , 17(2), 137-165.

Godino,J., Cajaraville,J., Fernández,T., Gonzato, M. (2011).Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. Enseñanza de las Ciencias.Madrid.

Gómez – Chacón, I. (2000): Matemática emocional. Los efectos en el aprendizaje. Madrid: Narcea S.A.

Gonzato, M., Fernández, T. y Godino, J. (2011).Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. Revista Números (77) 99-117

Gruszycki, A., Oteiza, L., Maras, P., Gruszycki, L., & Ballés, H. (s.f). Geogebra y los sistemas de representación semióticos. Argentina: Comité LAtinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Gutiérrez , A. (s/f). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. España. Universidad de Valencia.

Gutiérrez, A. (1996): Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework, Proceedings of the 20th PME Conference 1, pp. 3-19

Gutiérrez , P., & Jara, D. (2014). Aprendizaje cooperativo en matemática usando el método del caso. Los Ángeles: UdeC.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. Relime (1)1, (5-21).

Guzmán, I. (s.f). De las figuras a la manera de verlas: Como plantear el problema de visualiación en el aprendizaje de la Geometría.

Hadamard, J. (1954). The Psicology of Invention in the Mathematical Field. Princeton,NJ: Princeton University Press

Henson, K., & Eller, B. (2000). Psicología educativa para la enseñanza eficaz. Obtenido de http//goo.gl/xnrTuV

Hernández,R. Fernández C., & Baptista, P. (2010): Metodología de la investigación. Cuarta edición. Mexico: Mc Graw-Hill.

Hershkowitz, R., (1990). Psychological aspects of learning Geometry. EnNesher & Kilpatrick (Eds.), Mathematics and Cognition, 70-95. Cambridge:Cambridge University Press

Hitt, F. (1998). Dificultades en la articulación de diferentes representaciones relativas al concepto de función. Journal of Mathematical Behavior, 17 (1). pág. 123-134. Primera traducción realizada (Alquieira y Perez).CINVESTAV. México.

Hoyos, V. (1998). Revisando la construcción de significado en torno de las ecuaciones lineales con dos incógnitas: Observaciones empíricas con estudiantes de 16-18 años de edad. Investigaciones en Matemática educativa II, 343-364.

Jahn, A. (1998). *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles*. Francia: Université Joseph Fourier

Jaime, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.España. Universitat de Valencia.

Kaput (1987a). Representations Systems and Mathematics. Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics,16-26.Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Kline, M. (1994). El *pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Tomos: 1, 2, 3. Madrid: Alianza Universidad.

La Tercera. (1 de Octubre de 2015). Prueba Pisa 2015: por primera vez se responde totalmente en computador. Santiago.

Leiva, C. (s.f). Conductismo, cognitivismo y aprendizaje. Tecnología en Marcha, 18(1).

López, J. (2010): Geogebra en la enseñanza de las Matemáticas. Profundización y experimentación. En http://goo.gl/60IvHM

Linares, E. (s.f.). El aprendizaje cooperativo. Recuperado de http://www.um.es/eespecial/inclusion/docs/AprenCoop.pdf

Macías, J. (2014). Los registros semióticos en Matemática como elementos de personalización en el aprendizaje. Revista de Investigación Educativa Conect@2, 27-57.

Marroquín, C. (2009). Construcción del concepto de ecuaciones lineales con dos variables mediante visualización y registros de representación en alumnos de primer semestre de ingeniería agroindustrial: secuencia de una situación didáctica. Tegucigalpa, M.D.C.

Mato, M., y de la torre, E. (2006). Diseño y validación de dos cuestionarios para evaluar las actitudes y la ansiedad hacia las matemáticas en alumnos de educación secundaria obligatoria.

Maturana, H., & Nisis, S. (2001). Formación humana y capacitación. Santiago de Chile: Dolmen Editores S.A.

Mcleod, D.(1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptu-alización. Handbook of Research on Mathematics Teaching, 575-596.

Ministerio de Educación de Chile (2013). Bases curriculares 7° a 2° medio.

Ministerio de Educación de Chile (2011) Programa de Estudio Física 1°. Recuperado en Junio de 2014, de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-34456_programa.pdf

Moreira, S. (s.f). Reseña histórica y aplicaciones de las transformaciones geométricas del plano. Universidad Nacional del Litoral. Argentina.

Muñoz, J., & Mato, M. (2008). Análisis de las actitudes respecto a las matemáticas en alumnos de ESO. Revista de Investigación Educativa, 26(1), 209-226. Obtenido de http://www.redalyc.org/pdf/2833/283321884011.pdf

Nortes Martínez-Atero, R., & Nortes Checa, A. (2013). Actitud hacia las matemáticas en futuros docentes de primaria y secundaria. Edetannia 44, 47-76.

Ospina, D. (2012).Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal.Universidad Autónoma de Manizales.

Oviedo, L., Kanashiro, A., Nicolau, M., Delpech, N., & Gorrochategui, M. (2006). El rol de las representaciones semióticas en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Argentina: Universidad Nacional del Litoral.

Oviedo, V. y Valenzuela, R. (2015). Enseñanza basada en la Visualización en el aprendizaje de funciones raíz cuadrada, exponencial y logarítmica. Universidad de Concepción, Los Ángeles.

Palacios, A., Hidalgo, S., Morato, A., & Ortega, T. (2013). Causas y Consecuencias de la ansiedad matemática mediante un modelo de ecuaciones estructurales. Enseñanza de las Ciencias(31.2), 93-111.

Peirce, C. (1992). The essencial Peirce (Vol. 1). Peirce Edition proyect.

Pérez, A. (1988). Análisis didáctico de las Teorías del aprendizaje. Málaga: Universidad de Málaga.

Pérez- Tyteca, P., Castro, E., Fernández, F., & Cano, F. (2009). El papel de la ansiedad matemática en el paso de la educación secundaria a la educación universitaria. PNA, 4(1), 23-35.

PISA (2012). Informe Nacional resultados Chile PISA. Santiago. Ministerio de educación de Chile.

Presmeg, N. (1986b). Visualization in high school mathematics. For the Learning of Mathematics, 6(3), 42-46.

Presmeg, N. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L. D. English (Ed.), Mathematical Reasoning: analogies, metaphors and metonymies in mathematics learning (pp. 299-312). Mahwah, NJ: Erlbaum

Presmeg, N. y Balderas, P. (2001) Visualization and Affect in Non-routine Problem Solving. En Lyn D. English, Mathematical Thinking and Learning, 3(4), 289-313.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en la educación matemática. PNA, 1-14.

Roberto, J., Oliver, E., y Espinosa, C. (2012). Actitudes hacia la matemática de los estudiantes de posgrado en administración: Un estudio diagnóstico, 11, 81 – 98.

Rokeach, M. (1968). Beliefs, attitudes and values. San Francisco: Jossey-Bass.

Sáez, E. (2010): Renovación metodológica activa para el aprendizaje significativo de conceptos. Universidad del Bío Bío. Chile.

Santibáñez, J. (2001): Manual para la evaluación del aprendizaje estudiantil. Conceptos, procedimientos, análisis e interpretación para el proceso evaluativo. México: Trillas.

Sainz, O.(2014). La visualización en geometría: un estudio en 3° ESO. España: Universidad de Cantabria.

Schunk, D. (2012). Teorías del aprendizaje. Una perspectiva educativa. México: Pearson Educación.

Segarra, M., 7 Bou., J. (2004). Concepto, tipos y dimensiones del conocimiento: configuración del conocimiento estratégico. Revista de Economía Y Empresas, Vol. 22, N, 175–196. Recuperado de: http://www.researchgate.net/publication/28185756_Concepto_tipos_y_dimensiones_del_conocimiento_configuracin_del_conocimiento_estratgico/file/9fcfd50bb6da9c94cc.pdf

Stylianou, D.(2001). On the reluctance to visualize in mathematics: Is the picture changing? In M.van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), proceedings of the 25 th PME International Conference, 4, 225-232

Simpson, T. (2002). Dare I oppose constructivist theory? The Educational Forum, 66, 347- 354.

Tobias, S. Y Weissbrod, C. (1980). Antxiety and mathematics: An update. Harvard Educational Review, 50(1), 63-70.

Torregrosa,G., Quesada, H., & Penalva, M. (2010) Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización.Enseñanza de las ciencias, 28(3),327-340.

Tudge, J. y Scrimsher, S. (2003). Lev S. Vygotsky on education: A cultural-historical, interpersonal, and individual approach to development. En B. J. Zimmerman y D. H. Schunk (Eds.), Educational psychology: A century of contributions (pp. 207-228). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Valiante, G. (2000) Writing Self- efficacy and gender orientation: A developmental perspective, a dissertation proposal. Atlanta: Emory University.

Vigotsky, L. (1979): El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Barcelona: Crítica.

Watson, J. (1913). Psychology as the behaviorist views it.Psychological Review,20,158-177.

Wood, E. (1988). Math anxiety and elementary teachers: What does research tell us? For the Learning of Mathematics, 8(1), 8-13.

Woolfolk, A. (1996).Psicología Educativa.México: Prentice-Hall Internacional

Zimmerman, B. & Cuningham (1991). Introducción de los editors.: ¿ Qué es la visualización matemática? In W. Zimmerman & Cunningham (Eds.), MAA notes number 19: Visualization in Teaching and Learning Mathematics (pp. 67-76). MAA

Anexo A

Conceptos unidad transformaciones isométricas

Definiciones y conceptos presentes en la unidad de transformaciones isométricas.

El objetivo de esta unidad, es profundizar los conceptos aprendidos en enseñanza básica en la unidad de geometría, respecto de las transformaciones isométricas en el plano euclidiano, vistas en el presente estudio en primero de enseñanza media pero en el plano cartesiano. Los conceptos que aquí se utilizan han sido definidos por Cortés y Rodríguez (1999) extraído del libro Módulo de Matemática Imaginando congruencias, proporcionado por el Ministerio de Educación, en el programa MECE-MEDIA y del texto de primero de enseñanza media (del Valle, Muñoz y Santis ,2014) proporcionado por el MINEDUC. No obstante, los ejemplos que aquí se presentan, corresponden a una producción personal.

Así, la raíz de los conceptos a tratar vienen dados por una transformación isométrica, que a continuación se presenta su significado.

A. Transformación isométrica

Transformación isométrica es un movimiento que sólo modifica la orientación y/o posición de una figura, pero mantiene su forma y sus medidas.

Las transformaciones tratadas en la unidad, corresponden a traslación, simetría axial, simetría central y rotación en el plano cartesiano. Para comenzar la unidad es imprescindible presentar los conocimientos previos de los y las estudiantes.

En el caso de la asignatura de Física, existe relación entre el concepto de sistemas de coordenadas y vectores para el movimiento de los cuerpos (MINEDUC, 2011), por lo que se hará mención al concepto de vector y transformaciones isométricas en el plano euclidiano

a. Transformación Isométrica en el plano Euclidiano

i. Traslación

Para comprender el movimiento traslación en el plano euclidiano, es necesario anteceder este concepto con el de un vector, el cual es un instrumento para esta transformación isométrica. (del Valle, Muñoz, & Santis, 2013).

ii. Vector

Un vector es un segmento con magnitud, dirección y sentido. Se denota de la forma $\overrightarrow{AB}$. La magnitud, sentido y dirección según Arévalo (2016) corresponden a:

La **magnitud** es la longitud del vector, es decir, la distancia entre el inicio A (cola) y el término B (punta de flecha) y se denota de la forma $|\overline{AB}|$.

El **sentido** es el que va desde el inicio A (cola) hasta el término B (punta de flecha) indicando hacia donde se dirige.

La **dirección** es la magnitud del ángulo que forma la recta que contiene al vector con el eje X.

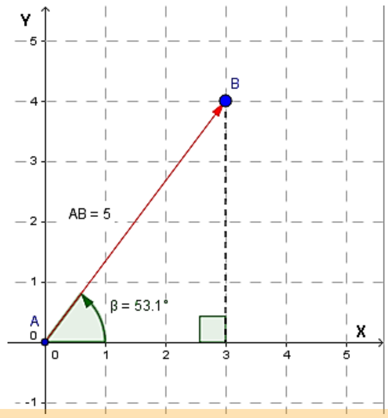
En el plano cartesiano un vector se representa por medio de sus componentes, las cuales se obtienen restando las respectivas coordenadas de los puntos extremos del vector, es decir, dados los puntos A(x, y) y B (z, v), las componentes del vector que va desde A hacia B corresponde a:

$$\overrightarrow{AB} = (x, y) - (z, v) = (z - x, v - y)$$

Luego, si un vector $\vec{v}$ tiene componentes (v_1, v_2) su magnitud o módulo se determina como sigue:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}$$

La imagen 2.10.1.1.1 ejemplifica las componentes, magnitud, dirección y sentido del vector $\overrightarrow{AB}$ considerando las coordenadas A= (0,0) y B = (3,4), respectivamente.



Componentes del vector:

$\overrightarrow{AB} = (3-0, 4-0)$

$\overrightarrow{AB} = (3,4)$

Magnitud del vector:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25}$

$|\overrightarrow{AB}| = 5$

Dirección del vector:

53.1°

Sentido del vector:

Noroeste

Respecto a la notación de vector, se considera la propuesta por el gobierno en el texto del estudiante (del Valle, Muñoz, & Santis, 2013) para que, ante cualquier duda puedan los estudiantes acudir a su texto de estudio y comprender sin problemas lo que allí se plantea. Sin embargo, a los estudiantes se les presenta ambas representaciones, mencionando que deben instruirse de la existencia de diferentes notaciones matemáticas para un mismo concepto; además se les dilucida cuál utilizarán para la unidad.

Notación texto del estudiante:

$$\vec{u} = (x, y)$$

Notación otros autores:

$$\vec{u} = \langle x, y \rangle$$

Así, con la descripción de un vector, se menciona que la transformación isométrica **Traslación** corresponde a un desplazamiento de una figura en una dirección, en un sentido y en una magnitud fija. En dicho movimiento se conserva su forma, orientación y medidas y la dirección, sentido y magnitud de desplazamiento están representados por un vector de traslación $\vec{v}$.

En la imagen 2.10.1.1 se presenta el cuadrilátero ABCD trasladado según el vector $\vec{v}$ resultando el cuadrilátero A'B'C'D'.

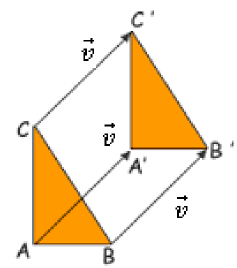


Imagen 2.10.1.1

iii. Simetría axial

Simetría axial o reflexión axial corresponde a la transformación isométrica en la que una figura se refleja respecto a una línea recta llamada eje de reflexión o simetría, de modo que la distancia desde un punto cualquiera de la figura al eje de reflexión debe ser igual que la distancia de su imagen a ese eje. En una reflexión, siempre se podrá comprobar que la línea que une un punto cualquiera con su imagen es perpendicular al eje de reflexión. Así ambas figuras se llaman simétricas si hay un eje de simetría que las refleje.

En la imagen 2.10.1.2 se presenta una simetría axial del cuadrilátero ABCD con respecto al eje de simetría L, obteniéndose la imagen A'B'C'D'. Además, se puede apreciar la igual longitud de los segmentos $\overline{ND}$y $\overline{D'N}$ y el ángulo de 90° que se forma entre ellos y la recta L.

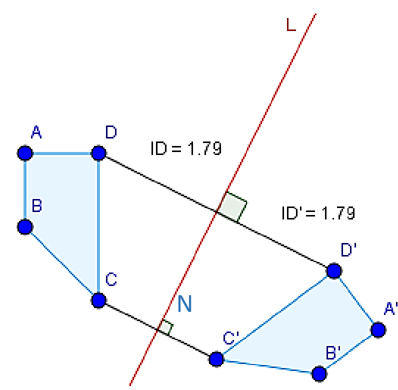


Imagen 2.10.1.2:
Reflexión axial

iv. Simetría Central

Simetría Central o puntual, corresponde a una transformación isométrica en que un punto se refleja con respecto otro punto fijo, llamado centro de simetría. Para cualquier punto y su imagen se cumple que el centro de simetría es el punto medio del segmento que los une.

En la imagen 2.10.1.2 se muestra una simetría central respecto al centro O. Además, se evidencia que la distancia de un punto y su imagen al centro de simetría es la misma.

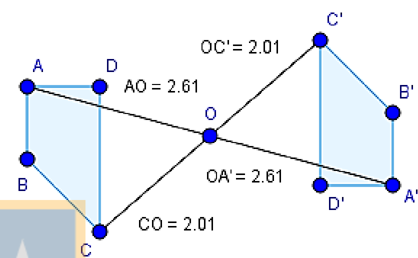


Imagen 2.10.1.2: Simetría Central

v. Rotación

Transformación isométrica en la que cada punto de la figura gira en torno a otro punto fijo, llamado centro de rotación, en cierto ángulo dado. En una rotación, siempre se verifica que las distancias entre un punto P y su imagen P' al centro de rotación, son iguales.

En la imagen 2.10.1.3 se presenta una rotación del cuadrilátero ABCD con respecto al centro de rotación O en ángulos de 90° , 180° y 270°, obteniéndose así los cuadriláteros A'B'C'D', A''B''C''D'' y A'''B'''C'''D''', respectivamente.

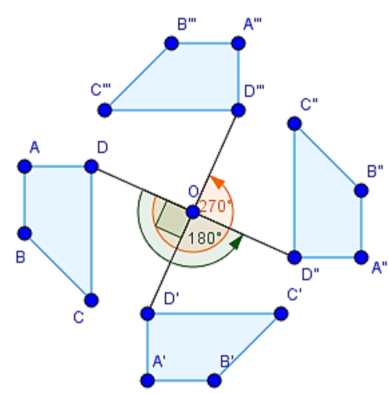


Imagen 2.10.1.3: Rotación

Tras ver las transformaciones isométricas en el plano Euclidiano, se procede a profundizar en el plano cartesiano. Así y según del Valle, Muñoz y Santis (2014) los conceptos relacionados con las transformaciones isométricas deben ampliarse como sigue:

b. Transformaciones Isométricas en el plano cartesiano

i. Traslación en el plano cartesiano

Para trasladar un punto $P\ (x, y)$ en el plano cartesiano respecto de un vector $\vec{v} =$
(v_1, v_2)

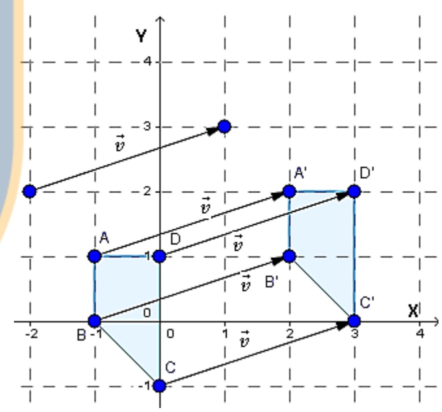
es definida una función $T_{\vec{v}}$ tal que cada punto del plano cartesiano lo asocia con un punto único de coordenadas:

$$T_{\vec{v}}(x, y) = (x + v_1, y + v_2)$$

Sin embargo con los y las estudiantes se les presenta de la siguiente forma:

En el plano cartesiano, la imagen de un punto P(x, y) que se traslada según un vector $\vec{v}$= (a, b) corresponde a P'(x + a, y + b), debido a que ellos mismo llegan a esta conclusión con las actividades propuestas.

Imagen 2.10.3.1



Así, como se presenta en la imagen 2.10.3.1 si se traslada el cuadrilátero ABCD con respecto al vector $\vec{v} =$ $(3,1)$, más específicamente el punto A (-1,1) , se obtiene como imagen el punto A'(-1+3, 1+1), obteniéndose A' =(2,2)

ii. Simetría axial en el plano cartesiano

Para reflejar un punto $P(x, y)$ en el plano cartesiano respecto a un eje coordenado se puede utilizar las siguientes expresiones:

Reflexión respecto a un punto $P(x, y)$ respecto a:	Definida por una función
eje X	$R_x(x, y) = (x, -y)$
eje Y	$R_y(x, y) = (-x, y)$
recta $y = x$	$R_{y=x}(x, y) = (y, x)$

Sin embargo, se utiliza con los alumnos para su comprensión lo siguiente: En el plano cartesiano, la imagen de un punto P(x, y) que se refleja con respecto al eje X corresponde a P'(x,-y). Si la reflexión se realiza con respecto al eje Y, la imagen de P resulta P'' (-x, y), de manera que ellos puedan descubrirlo con las actividades.

A continuación se presenta en la imagen 2.10.3.2 una simetría axial respecto a ambos ejes x e y de un cuadrilátero ABCD, por lo que si se considera el vértice D = (-2,3), con respecto al eje x e y su imagen será D'= (-3, -2) y D''= (2,3), respectivamente.

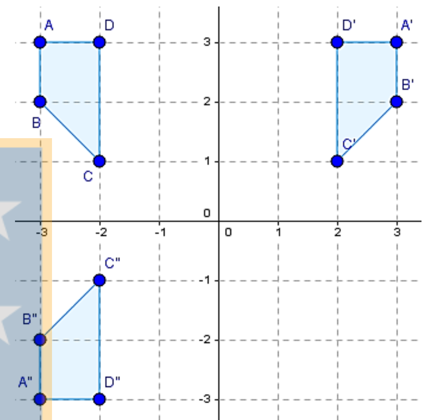


Imagen 2.10.3.2

iii. Simetría Central en el plano cartesiano.

En el plano cartesiano, la imagen de un punto P (x, y) que se refleja con respecto al origen es P' (-x,-y). El punto lleva el nombre de punto de simetría y se caracteriza por ser el punto medio del segmento que une el punto de la figura y su simétrico.

iv. Rotación en el plano cartesiano

La rotación de un punto (x, y) respecto de un centro O y un ángulo de magnitud α pueden ser definida como una función $R_{(O,\alpha)}$. Esta rotación será positiva cuando se realice en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj, y será negativa cuando se realice en el mismo sentido que el giro de las manecillas del reloj.

Para rotar un punto $P(x, y)$ en el plano cartesiano respecto al origen (O) y a un ángulo de rotación de magnitud α, el punto imagen se obtiene utilizando las siguientes expresiones:

$R_{(O,90°)}(x, y) = (-y, x)$

$R_{(O,-90°)}(x, y) = (y, -x)$

$R_{(O,180°)}(x, y) = (-x, -y)$

$R_{(O,-180°)}(x, y) = (-x, -y)$

$R_{(O,270°)}(x, y) = (y, -x)$

$R_{(O,-270°)}(x, y) = (-y, x)$

Sin embargo se les presenta como: en el plano cartesiano, la imagen de un punto P (x, y) que rota en ciertos ángulos con respecto al centro en el origen, viene dada de la siguiente forma:

Rotación de P (x, y) con respecto al origen en:	Corresponde a:
90°	P' (-y, x)
180°	P'(-x,-y)
270°	P'(y, -x)

Vale destacar, que una rotación en 180° equivale a una simetría central.

Así en la imagen 2.10.3.4 se presenta la rotación de un cuadrilátero ABCD en 90°, 180°, 270°. En donde se ejemplifica la rotación del vértice D (-2,3).

Rotación de P (-2,3) con respecto al origen en:	Corresponde a:
90°	P' (-3, -2)
180°	P'(2,-3)
270°	P'(3,2)

Con lo anterior visto se hace necesario mencionar que a los alumnos se les menciona posterior a encontrar el concepto, que existe una relación con funciones, mostrando el contenido, mas se prioriza el descubrimiento y razonamiento de ellos. Además, se les recalca el inverso aditivo de un número, para que no existan confusiones posteriores a observar un signo menos.

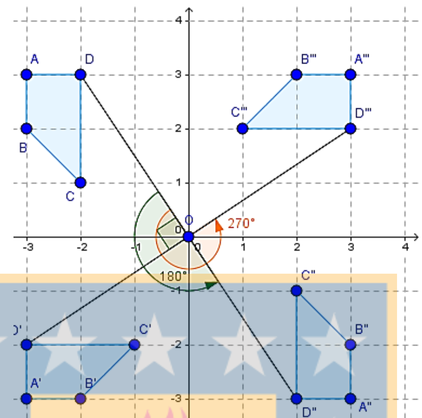


Imagen 2.10.3.4

Anexo B

Guías de Aprendizaje

Situación 1: Tablero de ajedrez

Objetivo: Identificar y caracterizar el plano cartesiano.
Ubicar puntos y coordenadas.
Instrucciones: Lee atentamente cada enunciado y responde las preguntas.

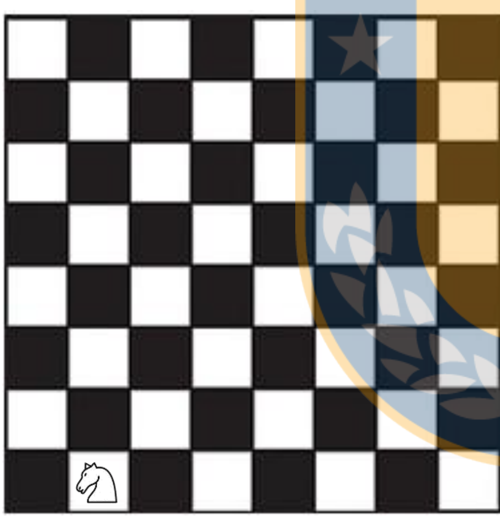
Ítem 1: Se describe a continuación el tablero de ajedrez, y una pieza, el caballo, a través de ello se podrán dar respuestas a las preguntas que a continuación se presentan. La utilidad de los cuatro tableros vendrá dada a continuación.

__Descripción__:

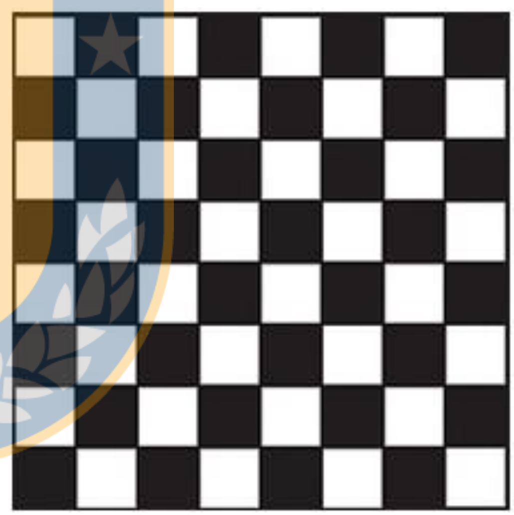
El tablero de ajedrez es un cuadrado dividido en 64 casillas cuadradas del mismo tamaño, con distribución 8 x 8, alternativamente claras (las casillas “blancas”) y oscuras (las casillas “negras”). El tablero se coloca entre los jugadores de tal forma que la casilla de la esquina derecha más cercana a cada jugador sea blanca.

El **caballo** (♘ ♞) es una pieza menor del ajedrez occidental de un valor aproximado de tres peones. Tiene un movimiento semejante a una "L" y, a diferencia de otras piezas, puede saltar piezas intermedias. Captura tomando la casilla ocupada por la pieza adversaria.

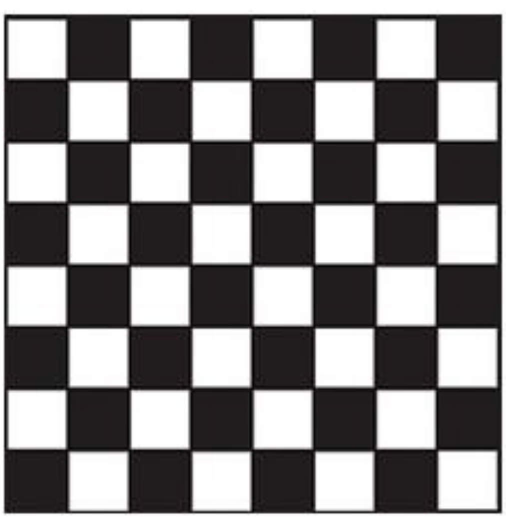
1.



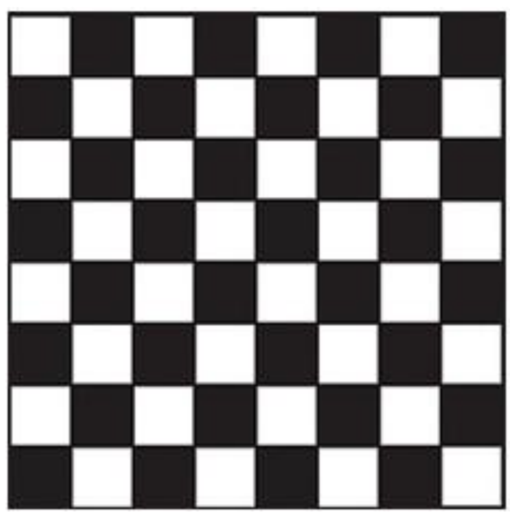
2.



3.



4.



1) Se quiere que el caballo llegue al otro extremo del tablero

  a. ¿Cuántos movimientos debe hacer? Trace la ruta con su lápiz grafito. En el tablero 2.

  b. Marque la posición inicial y final con una cruz. ¿Cuántos cuadrados se desplazó, y en qué sentido? Complete con el número de cuadrados avanzados y encierre el sentido.

  ___ Derecha o Izquierda
  ___Arriba o Abajo

2) Si se hacen **tres** movimientos seguidos, desde la posición actual (*tablero 2*),

  a. Compare la posición del *tablero 1* con los tres movimientos ¿cuáles son las posibles posiciones finales que toma el caballo? Márquelas con una x en el *tablero 3.*

  b. Mencione a cuántos cuadrados y en qué sentido se encuentra cada x de la posición original, tal como lo hizo en la pregunta 1.b.

Primer movimiento:	___ Derecha o Izquierda	___Arriba o Abajo
Segundo movimiento:	___ Derecha o Izquierda	___Arriba o Abajo
Tercer movimiento:	___ Derecha o Izquierda	___Arriba o Abajo

3) Las casillas del tablero de ajedrez reciben nombres, los que se encuentran determinados por letras mayúsculas horizontalmente de derecha a izquierda desde la A a la H y verticalmente de abajo hacia arriba desde el 1 al 8. Así, en el tablero1 el caballo blanco lleva la posición B1:

  a. Ubique las letras y números en el *tablero4.*

  b. Asígnele la posición adecuada a cada casilla de la pregunta 2.a.

Primer movimiento:		
Segundo movimiento:		
Tercer movimiento:		

4) Según lo anterior, ¿qué es necesario para encontrar la ubicación exacta de las piezas? Explique.

Ítem 2: De acuerdo a la descripción de plano cartesiano, ejes coordenados y cuadrantes responda las siguientes preguntas.

5) Dibuja el plano cartesiano en tu cuaderno y ubica los siguientes puntos:

a) A(5,8)
b) B(-3,6)
c) C(6,-7)
d) D(-1,-8)
e) E(0,5)
f) F(5,0)
g) $G(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$
h) $H(0, -\frac{1}{3})$

6) Indica en qué cuadrante se ubica un punto, según las siguientes condiciones:

- **a.** Su abscisa es negativa y su ordenada positiva.
- **b.** Su abscisa y su ordenada positivas.
- **c.** Su abscisa y su ordenada negativas.
- **d.** Su abscisa es positiva y su ordenada negativa.

7) Si el punto P (8, k-1) está en el eje x, ¿Cuál es el valor de k?

8) Si el punto Q (2k+4, -3) está en el eje Y, ¿Cuál es el valor de x?

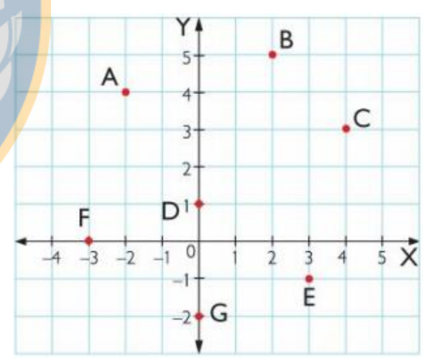
9) Si la figura MNOP es un cuadrado y tres de sus vértices son N (0,3), O (3,0), P (3,3), ¿Cuáles son las coordenadas del vértice M?

10) Si la figura ABCD es un rectángulo de vértices A(5,1), B(5,3), C(1,3) y D(1,1)

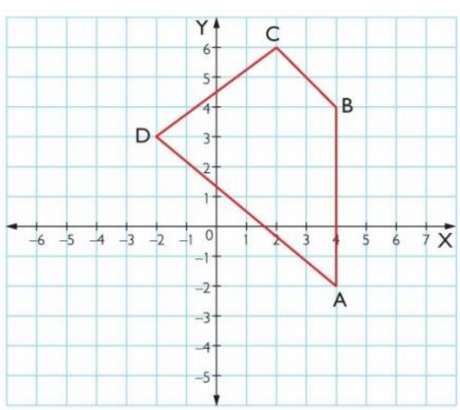
- **a.** Dibújelo en el plano cartesiano
- **b.** Si luego se cambia de posición el vértice A, a la posición A' (-5,-1), ¿Qué valores tomarán las otras coordenadas para mantener las mismas dimensiones del rectángulo?

11) En el siguiente plano cartesiano se han ubicado algunos puntos.

- **a)** ¿Qué punto tiene coordenadas (0, -2)?
- **b)** Si dibuja el segmento $\overline{FB}$, ¿cuáles son las coordenadas de sus extremos?



12) Dado el siguiente polígono en el plano cartesiano.

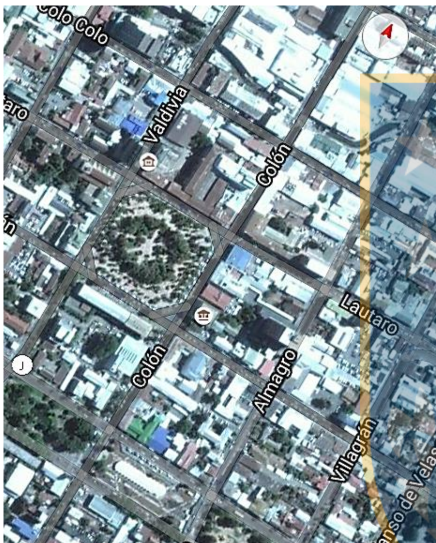


a) Señale la coordenada de los vértices.
b) Señale en qué cuadrante se ubica cada punto.

Situación: "Encuentra el gimnasio"

Nombre:________________________________Curso:__________Fecha: __/__/__ n°Lista:____

- **Objetivos:**
  - Identificar vectores equivalentes.
  - Reconocer características de los vectores.
  - Determinar notaciones del vector.
  - Determinar las componentes de un vector, dada su representación gráfica.
  - Representar vectores en el plano cartesiano dadas sus componentes.
  - Determinar las componentes de un vector, dadas el punto de inicio y final de él.
- **Instrucciones:** Lea y observe atentamente y responda según corresponda.
- **Tiempo de duración**: 30 min



Gyarados

Imagen1. Mapa de Los Ángeles.
Punto Blanco corresponde al jugador (J) y la flecha roja indica hacia el Norte.

II. Situación. Un jugador de Pokémon Go anda en búsqueda de gimnasios. Sin embargo, desde donde él se encuentra, el juego le indica que "está demasiado lejos de su posición", además, en el camino hay una poképarada. Según el Go Map (mapa que indica la ubicación de pokemones, etc.), desde la esquina en donde está detenido, debería desplazarse hacia el Este dos cuadras para encontrar la poképarada; en cambio el gimnasio desde la poképarada, se encuentra una cuadra hacia el Este y dos hacia el Norte. Él se propone ir a ambos lugares, y espera con ansias llegar al gimnasio, pues hay un Gyarados que no tiene en su colección. (1 cuadra= 100m).

III. Desarrollo. Lea cada enunciado y responda según el ítem anterior.

1. ¿Cuántos metros recorre el jugador desde su punto de partida hasta llegar a la poképarada?

2. ¿A qué intersección de calles llega el jugador al detenerse en la poképarada?

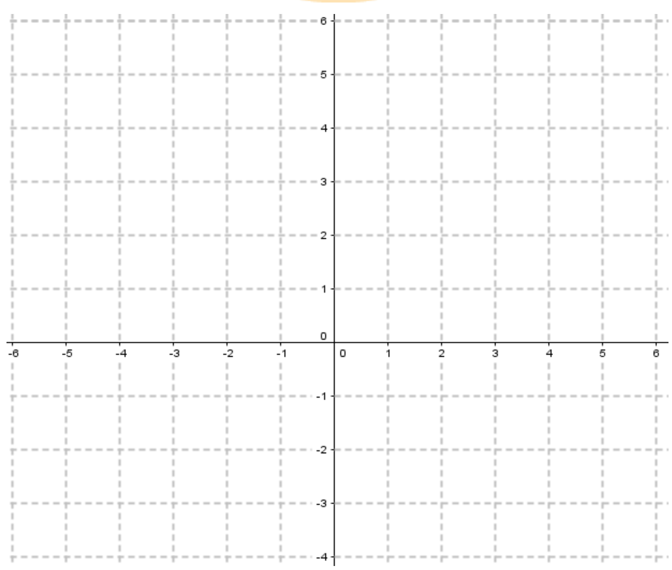
3. ¿Cuántos metros recorre el jugador desde la poképarada hasta el gimnasio?

4. ¿A qué intersección de calles llega el jugador al detenerse en el gimnasio?

5. ¿Cuántos metros camina en total el jugador desde el punto de partida hasta que llega al gimnasio?

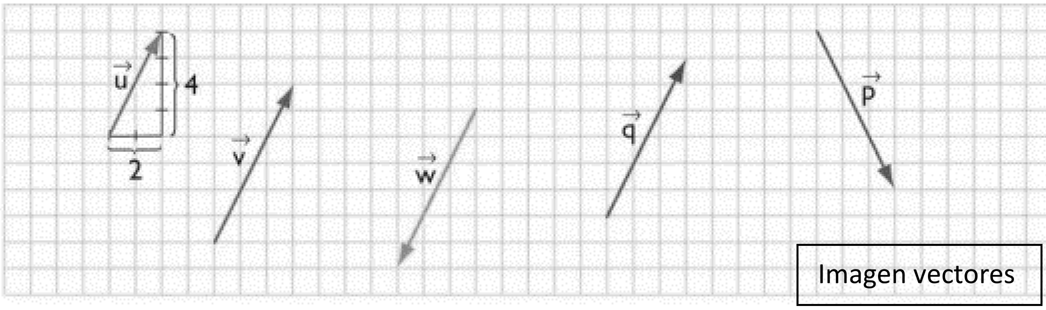
6. Según la Rosa de los Vientos, indique en qué dirección se movió hasta llegar al gimnasio.

7. En el plano cartesiano, ubique el punto de partida y el punto de llegada de un color y las paradas que hizo de otro color.



Actividades: Práctica guiada

I. **Compleción.** Observe los vectores de la siguiente cuadrícula y responda según corresponda.

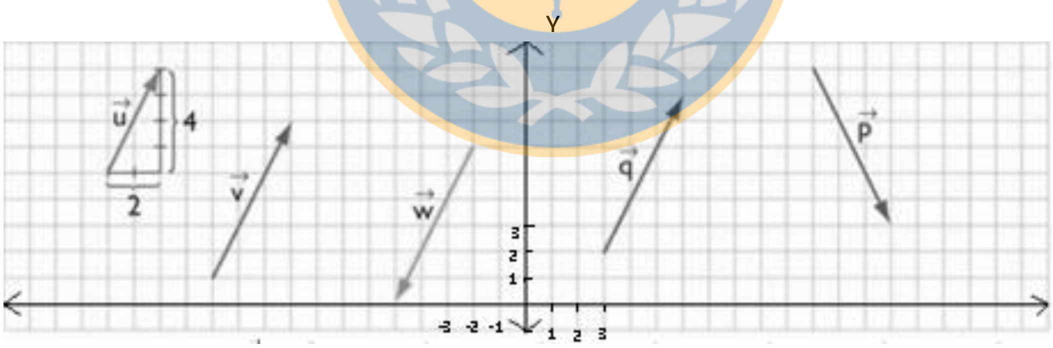


1. Complete las celdas de la tabla según la imagen anterior.

Vector	Componente x	Componente y	Componente (x,y)
$\vec{u}$	2	4	(,)
$\vec{v}$			(,)
	-3	-6	(,)
$\vec{q}$	3		(,)
	3		(,)

2. Según la imagen, completa con las palabras: igual, distinta, magnitud, dirección y sentido donde corresponda.
   a) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen _______ dirección y _______, pero _______ _________.
   b) Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tienen _______ dirección y _______, pero _______ ___________.
   c) Los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$ tienen _______ magnitud pero _______ _________ y ___________.
   d) Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{q}$ tienen _______ dirección, magnitud y sentido.

3. Considere ahora los vectores en el Plano Cartesiano y responda.



i) ¿Cuáles son las coordenadas asociadas al vector?

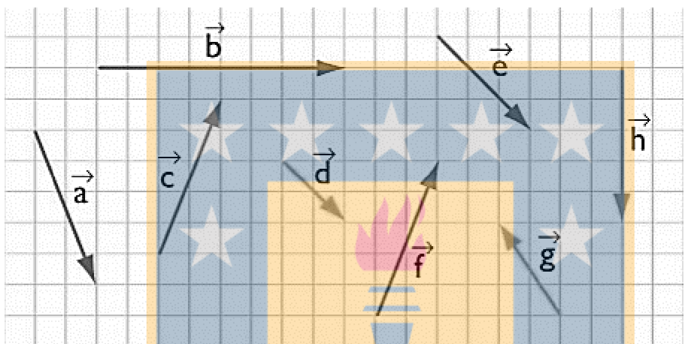
Vector	Coordenada inicial	Coordenada final	Componentes (x,y)
$\vec{u}$	(-16,5)	(-14,)	(2 , 4)
$\vec{v}$	(,)	(,)	(,)
$\vec{w}$	(,)	(,)	(,)
$\vec{q}$	(3,2)	(6,8)	(3,6)
$\vec{p}$	(,)	(,)	(,)

II. Desarrollo. Lea atentamente, tome su tiempo y responda.

i) ¿Qué relación existe entre las coordenadas inicial y final con las componentes del vector?

Práctica Individual

4. Considere los vectores de la siguiente cuadrícula.



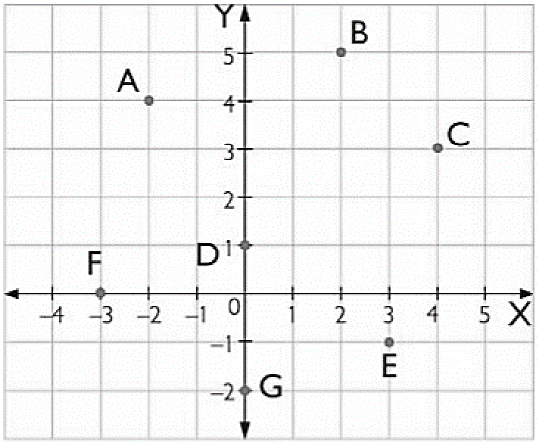
a) Determine las componentes de los vectores.

vector	(x,y)	Vector	(x,y)	vector	(x,y)	vector	(x,y)
$\vec{a}$		$\vec{c}$		$\vec{e}$		$\vec{g}$	
$\vec{b}$		$\vec{d}$		$\vec{f}$		$\vec{h}$	

b) Según la cuadrícula anterior, escriba parejas de vectores:

- Equivalentes:
- Con igual magnitud, pero distinta dirección:
- Con igual dirección y sentido, pero distinta magnitud:
- Con distinta dirección, sentido y magnitud:
- Con igual magnitud y distinto sentido:

5. Considere los puntos indicados en el plano cartesiano.



i) Determine las componentes de los siguientes vectores.

a) $\overrightarrow{AB} =$

b) $\overrightarrow{CB} =$

c) $\overrightarrow{EF} =$

d) $\overrightarrow{DG} =$

ii) Existe un punto H tal que $\overrightarrow{DH}$ sea equivalente a $\overrightarrow{AB}$. ¿Cuáles son las coordenadas de H?

iii) ¿Qué punto tiene coordenadas (3,-1)?

iv) ¿Qué puntos están ubicados en el cuarto cuadrante IV ?

v) ¿Cuáles son las coordenadas asociadas al vector $\vec{v}$?

vi) ¿Cuáles son las coordenadas asociadas al vector $\overrightarrow{DG}$?

vii) Grafica el vector $\vec{v} = \langle 3,2 \rangle$ en el plano cartesiano.

<u>Transformaciones Isométricas: Traslación.</u>

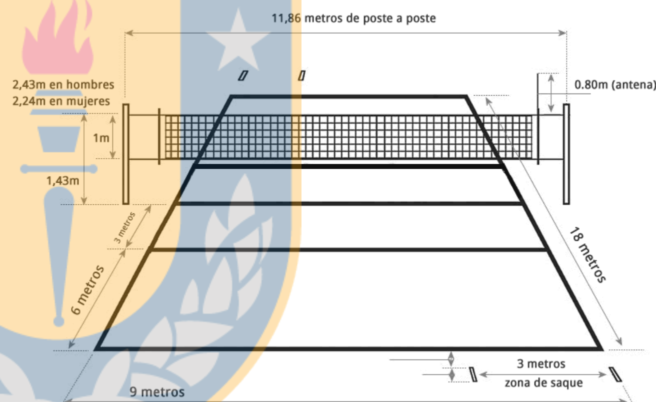
Nombre:_________________________________Curso:__________Fecha: __/__/__ n°Lista:____

<u>Situación: " La cancha de voleibol"</u>

- **Objetivos:**
  - Reconocer características de las transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
  - Reconocer traslaciones de figuras en el plano cartesiano
  - Identificar regularidades entre las coordenadas de los vértices de polígonos al aplicar traslaciones en el plano cartesiano.
  - Determinar el vector que describe una traslación de una figura en el plano cartesiano
  - Efectuar traslaciones de figuras en el plano cartesiano.
- **Instrucciones:** Lea y observe atentamente y responda según corresponda.
- **<u>Tiempo:</u>** 10 min.

I. Situación.

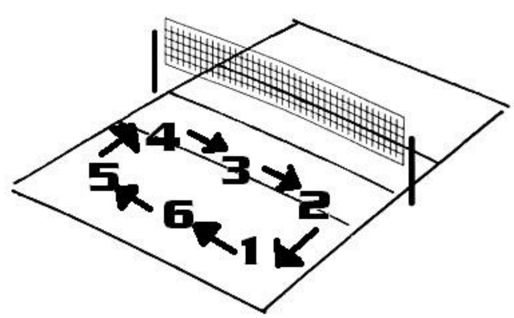
La superficie de la cancha de voleibol es un rectángulo de perímetro 18 m de largo por 9 m de ancho. Las líneas de delimitación son las que delimitan la **cancha** de juego, dos laterales y dos de fondo. Línea central: Se extiende bajo la red y es el eje central que divide la **cancha** en dos campos idénticos.



Los jugadores y sus posiciones vienen dados a continuación:

DELANTEROS.

Jugadores que se encuentran cerca de la red y ocupan las posiciones 4(delantero izquierdo), 3(delantero centro) y 2 (delantero derecho)



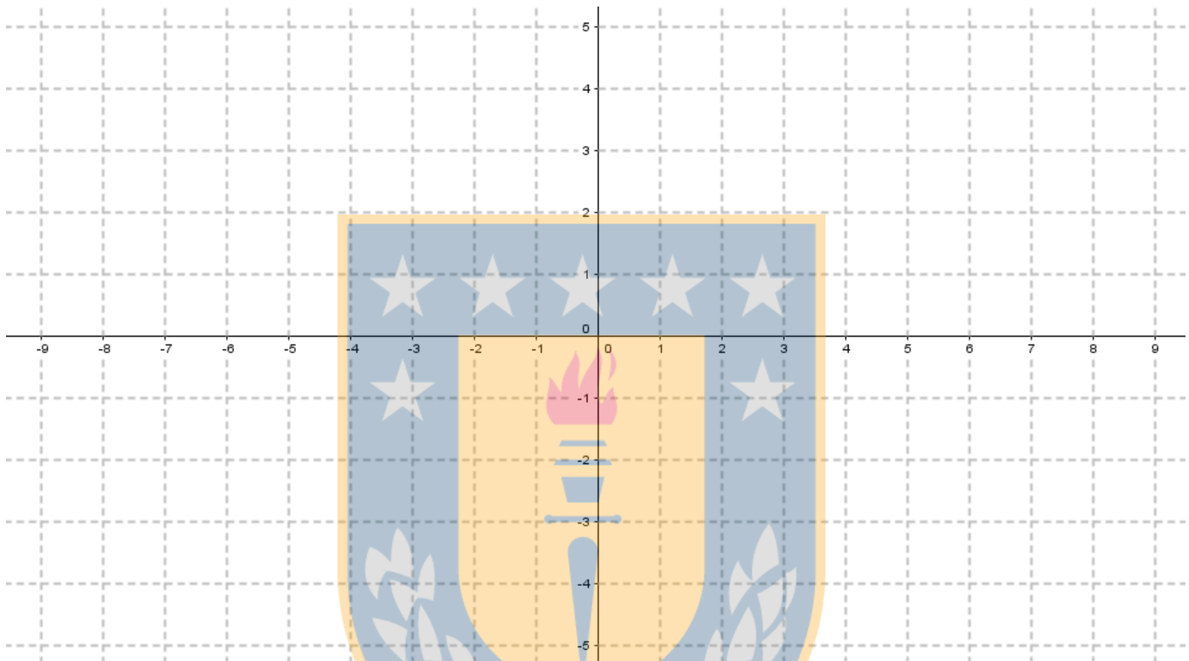
ZAGUEROS

Jugadores de 2ª línea y ocupan las posiciones 5 (zaguero izquierdo), 6 (zaguero centro) y 1 (zaguero derecho).

II. **Desarrollo**. *Responda según el siguiente enunciado*:

Cuando el equipo receptor gana derecho a sacar, los jugadores cambian de posición moviéndose de tal manera que el jugador 1 toma la posición del jugador 6 y el jugador 2 toma la posición del jugador 1.

1) Si en la mitad de la cancha se ubican los ejes cartesianos, la ordenada y la abscisa; el origen queda justo en el centro (la mayor longitud se encuentra asociada al eje de las abscisas).



a) ¿Cuáles serían las coordenadas de los cuatro extremos de la cancha?

b) ¿Cuáles serían las coordenadas de las intersecciones de los ejes con la cancha?

2) Si el jugador 1 se encuentra en la posición de coordenadas A(2,-6) y se mueve a la posición del jugador 6 , que tiene coordenadas B(-2,-7) luego de haber ganado el derecho a sacar,

a) ¿Cuántas metros de movió horizontalmente según el plano cartesiano?____ m
b) ¿Cuántas metros se movió verticalmente según el plano cartesiano?____ m

3) Complete la siguiente tabla según los datos anteriores y responda:

Posición inicial	Movimiento horizontal	Movimiento vertical	Posición Final
(,)			(,)

a) ¿Qué relación existe entre la posición inicial y la posición final con los movimientos horizontales y verticales?

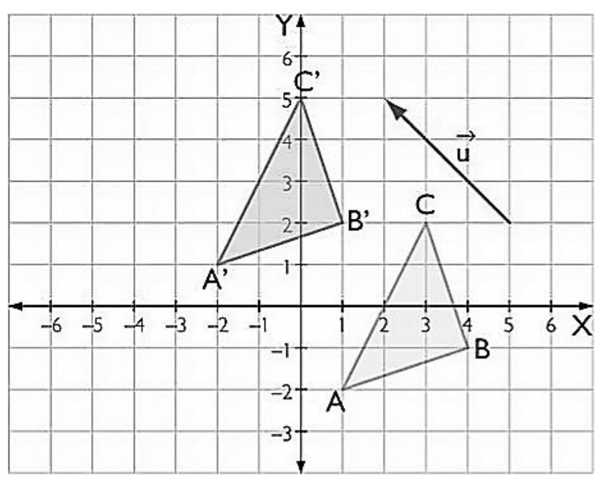
b) ¿Cuáles son las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$?

c) ¿Existe relación entre el vector $\overrightarrow{AB}$ y los movimientos horizontales, verticales realizados?

4) El triángulo ABC de la figura se trasladó según el vector de traslación $\vec{u} = \langle -3{,}3 \rangle$, obteniéndose como imagen el triángulo A'B'C'

a) ¿Cuáles son las imágenes de los vértices del triángulo ABC, bajo la traslación en el vector $\vec{u} = (-3{,}3)$? Complete la tabla

Vértices ΔABC	Traslación según $\vec{u}$	$\Delta A'B'C'$
A (1,-2)	A'(....+-3,-2+3)	A'(-2,1)
B (4 ,)	B'(4 + ,-1+)	B'(1 ,)
C(,)	C' (+ , +)	C' (,)



b) ¿Cómo se obtienen las coordenadas del triángulo trasladado?

c) Del triángulo ABC y el triángulo A'B'C', mida las longitudes solicitadas con el instrumento adecuado, y anótelas en la tabla.

ΔABC	Longitud
$\overline{AB}$	
$\overline{BC}$	
$\overline{AC}$	
$\sphericalangle BAC$	
$\sphericalangle ACB$	
$\sphericalangle CAB$	

$\Delta A'B'C'$	Longitud
$\overline{A'B'}$	
$\overline{B'C'}$	
$\overline{A'C'}$	
$\sphericalangle B'A'C'$	
$\sphericalangle A'C'B'$	
$\sphericalangle C'A'B'$	

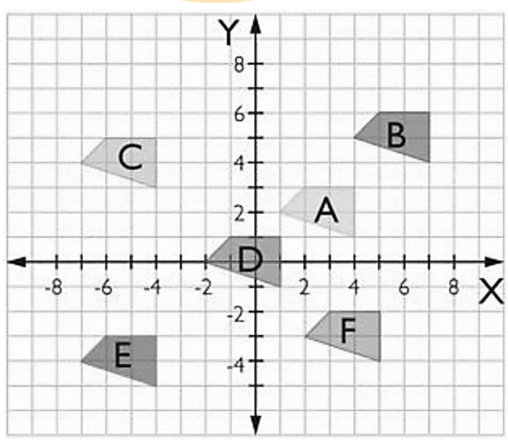
d) ¿Qué puede concluir de las medidas anteriores, si compara la de las ambas tablas?

5) Determina gráficamente el vector que describe cada una de las siguientes traslaciones de los polígonos del plano.

a) A a B

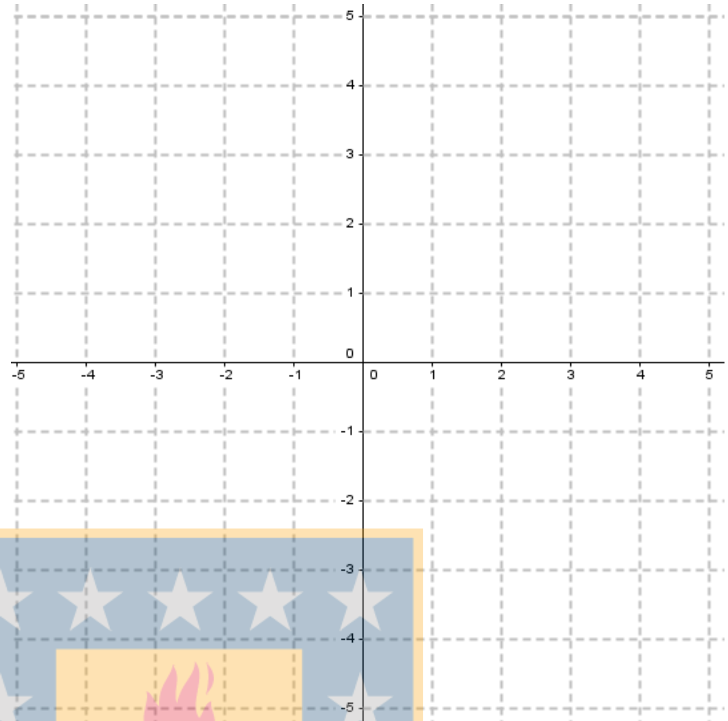
b) D a E

c) C a F



6) Dibuje el triángulo ABC de vértices A(-2, 1), B (1,-1) y C (1, 2) en el plano cartesiano y trasládelo según los vectores:

a) $\vec{a} = (1,2)$
b) $\vec{b} = (-2,3)$
c) $\vec{c} = (3,-2)$
d) $\vec{d} = (-2,-2)$



7) Para cada una de las traslaciones anteriores, indica las coordenadas de la imagen del punto C.

8) Cierta traslación convierte el punto P (2,8) en P' (-5, 6). ¿Cuál es el vector traslación?

Suma de Vectores.

Nombre:________________________________Curso:__________Fecha: __/__/__ n°Lista:____

Situación: “ Buscando a Picachu”

- **Objetivos:**
  - Determinar componentes de la suma de vectores.
  - Reconocer y relacionar la composición de traslaciones con suma de vectores.
- **Instrucciones:** Lea y observe atentamente y responda según corresponda.
- **Tiempo:** 10 min.

I. Situación.

Un jugador de Pokémon Go anda en búsqueda de gimnasios. Sin embargo, desde donde él se encuentra, el juego le indica que “está demasiado lejos de su posición”, además, en el camino hay una poképarada. Según el Go Map (mapa que indica la ubicación de pokemones, etc.), desde la esquina en donde está detenido, debería desplazarse hacia el Este dos cuadras para encontrar la poképarada; en cambio el gimnasio desde la poképarada, se encuentra una cuadra hacia el Este y dos hacia el Norte. Él se propone ir a ambos lugares, y espera con ansias llegar al gimnasio, pues hay un Gyarados que no tiene en su colección. (1 cuadra= 100m).

Considere ahora:

Luego de haber encontrado el gimnasio y ser de su propiedad, el juego le avisa que hay un Pokémon escondido. Desde la posición del gimnasio y luego de haber caminado una cuadra hacia el oeste por Lautaro, le aparece que está Picachu una cuadra hacia el norte. Él corre para poder tenerlo en su colección y no se le escape.

II. Graficar. Utilice el Plano cartesiano para las actividades que a continuación se presentarán.

1) Ubique las coordenadas en el plano cartesiano :

a) Donde partió la búsqueda de Pokémon.

b) Donde encontró el gimnasio.

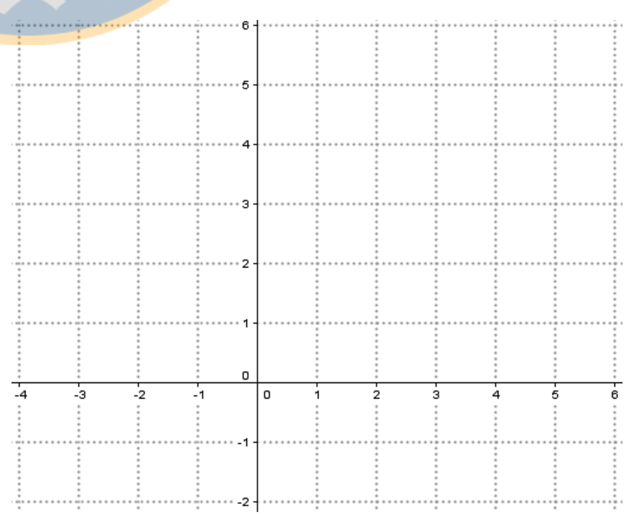
c) Donde encontró el Picachu.

2) Dibuje y nombre en el plano cartesiano los vectores:

a) Inicio búsqueda Pokémon- Llegada al gimnasio.

b) Inicio Gimnasio- Llegada al Picachu

c) Inicio búsqueda Pokémon – Llegada al Picachu.



3) Complete la siguiente tabla y responda:

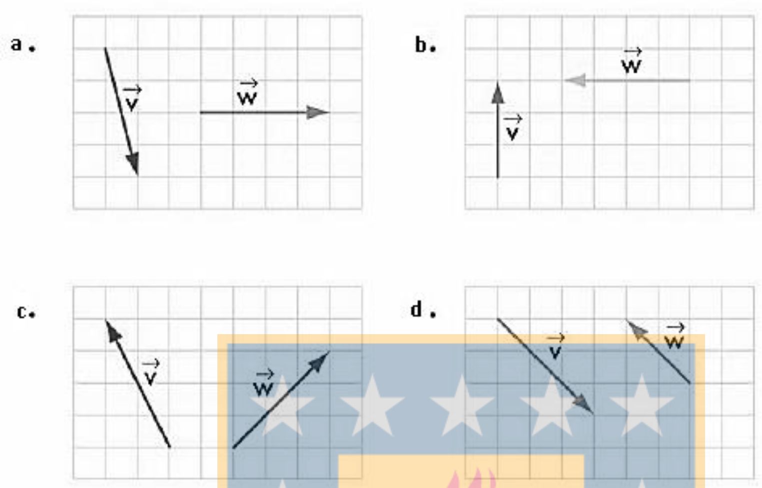
Desplazamiento	Inicio búsqueda Pokémon- Llegada al gimnasio	Inicio Gimnasio- Llegada al Picachu	Inicio búsqueda Pokémon – Llegada al Picachu.
Componentes del vector	(,)	(,)	(,)
Nombre vector			

4) ¿Existe alguna relación entre las componentes de los vectores de las dos paradas mencionadas con las componentes del vector *"Inicio búsqueda Pokémon – Llegada al Picachu"?*

Práctica n°4

Nombre:_________________________________**Curso:**_______ **Fecha:**__/__/__ **n°Lista:**___

1) Copie los vectores dados en tu cuaderno de modo que resulte el vector $\vec{v} + \vec{w}$



2) Represente la suma de los vectores de los ejercicios “a” a “d”, a través de componentes.

3) Dibuje en el plano cartesiano el cuadrilátero ABCD de puntos A (2,3), B(-1,4), C(-3,2) y D(-2,-1).

4) Expresa a través de sus componentes los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}\ y\ \overrightarrow{DA}$.

5) Determina la suma de :

Vectores	Suma
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$	
$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}.$	
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}.$	

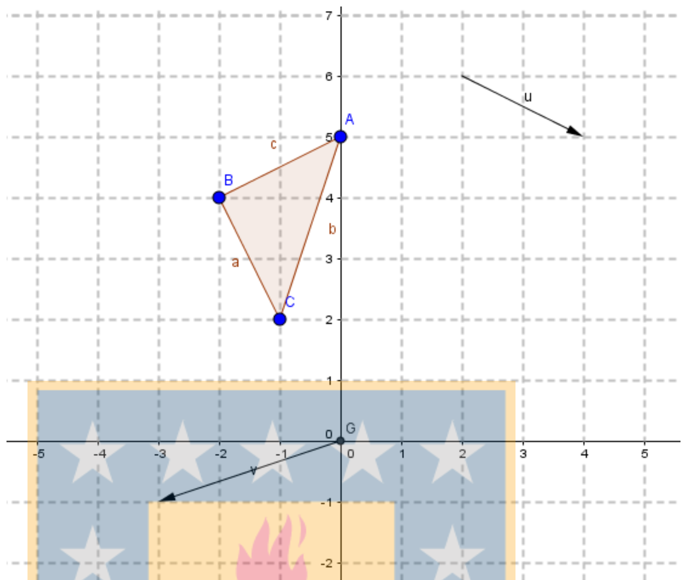
6) Cierta traslación descrita por el vector $\vec{w} = (-2{,}3)$ transforma el punto P (1,2) en P’(,).
Cierta traslación descrita por el vector $\vec{t} = (1{,}4)$ transforma al punto P’(,) en P’’(,).
Así, P (1,2) se transforma en P’ (,) y luego en P’’ (,)

7) Cierta traslación descrita por el vector $\vec{v} = (-2{,}5)$transforma el punto P en P’. Si se aplica a P’ una traslación con vector $\vec{u} = (8, -11)$ se obtiene P”. ¿ Qué vector traslada P a P”?

8) Traslada el triángulo ABC de la figura con respecto al vector $\vec{u}$, para obtener un triángulo A'B'C'. Luego, traslada A'B'C' con respecto a $\vec{v}$, para obtener A"B"C".

a) ¿Cuáles son las coordenadas de A",B" y C"?

b) ¿Qué vector traslada directamente ABC a A"B"C"?



Transformaciones Isométricas: Simetría Axial.

Nombre:_________________________________Curso:__________Fecha: __/__/__ n°Lista:____

Situación: "La cancha de Voleibol"

- **Contenido:** Transformaciones Isométricas – Simetría Axial.
- **Objetivos específicos:**

1. Reconocer la simetría axial en pares de figuras en el plano cartesiano.
2. Identificar regularidades entre las coordenadas de los vértices de polígonos al aplicar simetría axial en el plano cartesiano con respecto al eje X,
eje Y y ejes paralelos a ambos.
3. Determinar el eje de simetría que describe la reflexión de una figura en el plano cartesiano con respecto a un eje de simetría.
4. Efectuar simetrías axiales a figuras en el plano cartesiano, con respecto al eje X, eje Y y ejes paralelos a ambos.

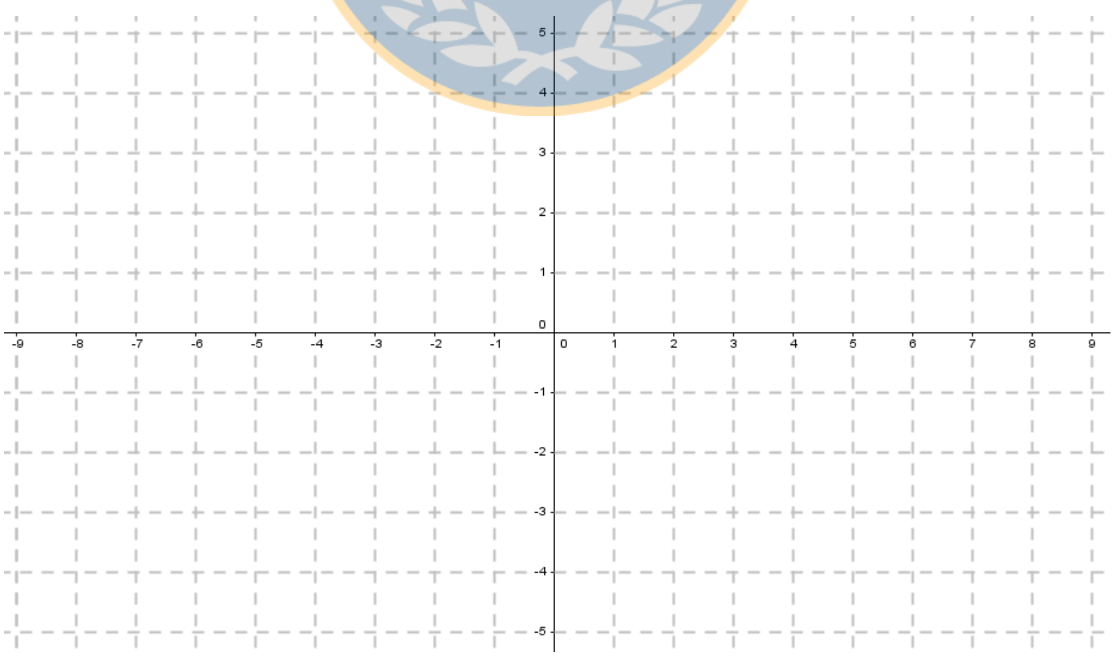
I. Situación. (continuación de " La cancha de voleibol")

Francisco, Mackarenna y Esteban eran tres amigos que estaban jugando en el partido de voleibol. Sin embargo, Francisco y Mackarenna jugaban en el mismo equipo, mientras que Juan lo hacía por el equipo rival. Los tres en algún momento coincidieron en ser delanteros. La posición de los tres jugadores viene dada a continuación:

Mackarenna : M(-2,3)
Francisco: F(-2,-3)
Juan: E(2,3)

II. Desarrollo.

1) Ubique a los tres jugadores en el plano cartesiano asignándole nombres.



2) Complete la siguiente tabla:

Distancia entre	n°cuadrados
¿A cuántos cuadrados se encuentra Mackarenna del eje de las abscisas?	
¿A cuántos cuadrados se encuentra Francisco del eje de las abscisas?	
¿A cuántos cuadrados se encuentra Mackarenna del eje de las ordenadas?	
¿A cuántos cuadrados se encuentra Esteban del eje de las ordenadas?	

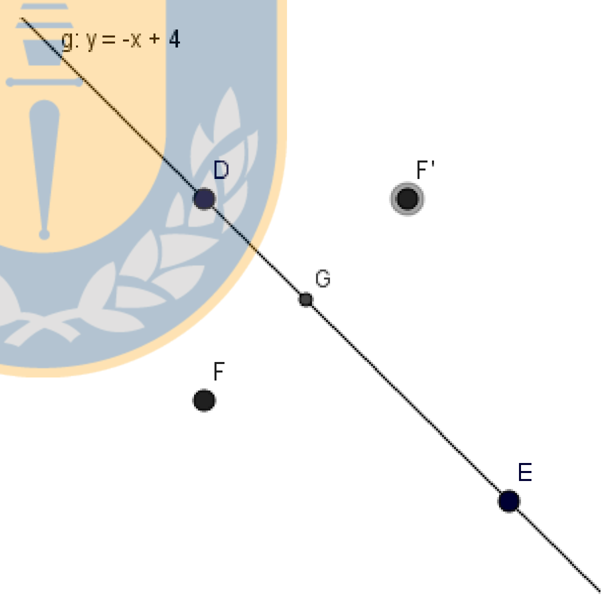
3) En el plano cartesiano y utilizando una regla, una con una línea la posición de:
Esteban- Mackarenna
Mackarenna- Francisco.

4) Con un transportador mida los ángulos que se forman:

Posición	m (∢)
Entre la posición de Esteban y el eje de las ordenadas.	
Entre la posición de Mackarenna y el eje de las ordenadas.	
Entre Mackarenna y el eje de las abscisas.	
Entre Francisco y el eje de las abscisas.	

5) De la siguiente imagen, determine con una regla o transportador, según corresponda:

a) Medida del segmento $\overline{FF'}$:
b) Medida del segmento $\overline{FG'}$:
c) Medida del segmento $\overline{GF'}$:
d) Medida del ángulo ∢ EGF':
e) Medida del ángulo ∢ DGF :

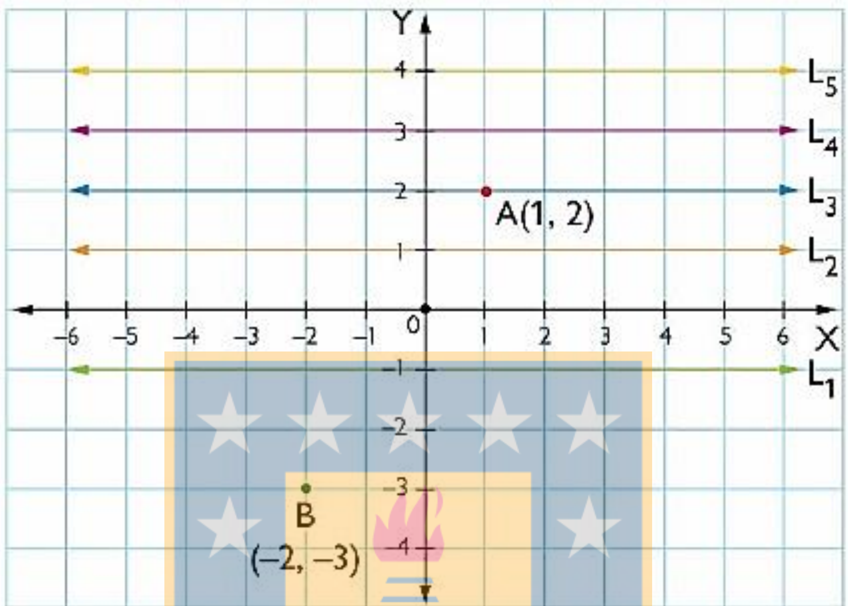


Guía Práctica N°5

Transformaciones Isométricas: Simetría axial.

Nombre:___________________________________Curso:__________Fecha: __/__/__ n°Lista:____

I. Observa atentamente el siguiente plano cartesiano.



1) Refleja el punto A respecto a cada una de las rectas dibujadas y respecto al eje de las abscisas. Escribe los resultados en la tabla.

	A	Reflejando respecto a:					
		L_1	Eje X	L_2	L_3	L_4	L_5
Abscisa	1						
Ordenada	2						

2) ¿Qué regularidad observas entre la ordenada y la abscisa del punto A al reflejarlo respecto de cada recta?

3) ¿Cómo son las rectas respecto del eje X?

4) ¿En qué ordenada las rectas intersectan al eje Y?

Recta	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
Ordenada					

5) Según la siguiente tabla, determine una expresión algebraica que relacione la ordenada del punto original con la ordenada en que las rectas intersecten al eje Y para obtener la ordenada del punto reflejado.

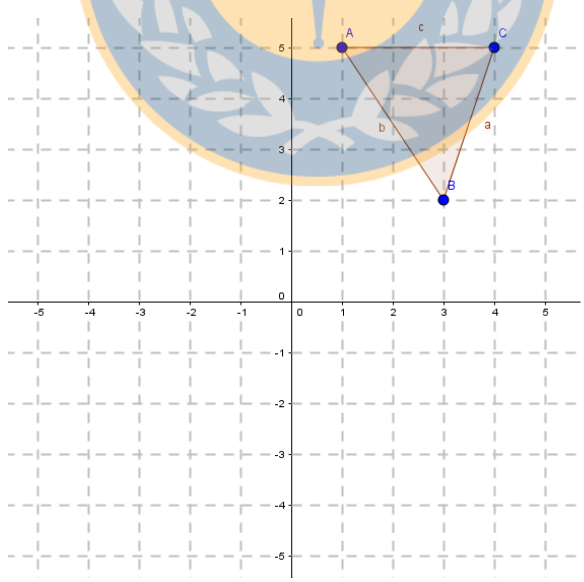
Ordenada original (y)	2	2	2	2	2	2
Ordenada de cada recta que intersecta al eje Y (a)	-1	0	1	2	3	4
Ordenada del punto imagen de la reflexión (y´)	-4	-2	0	2	4	6

a) Utiliza la expresión obtenida en el paso anterior para reflejar un punto P(x,y) respecto a una recta paralela al eje X, que corte al eje Y en el punto (0,a)

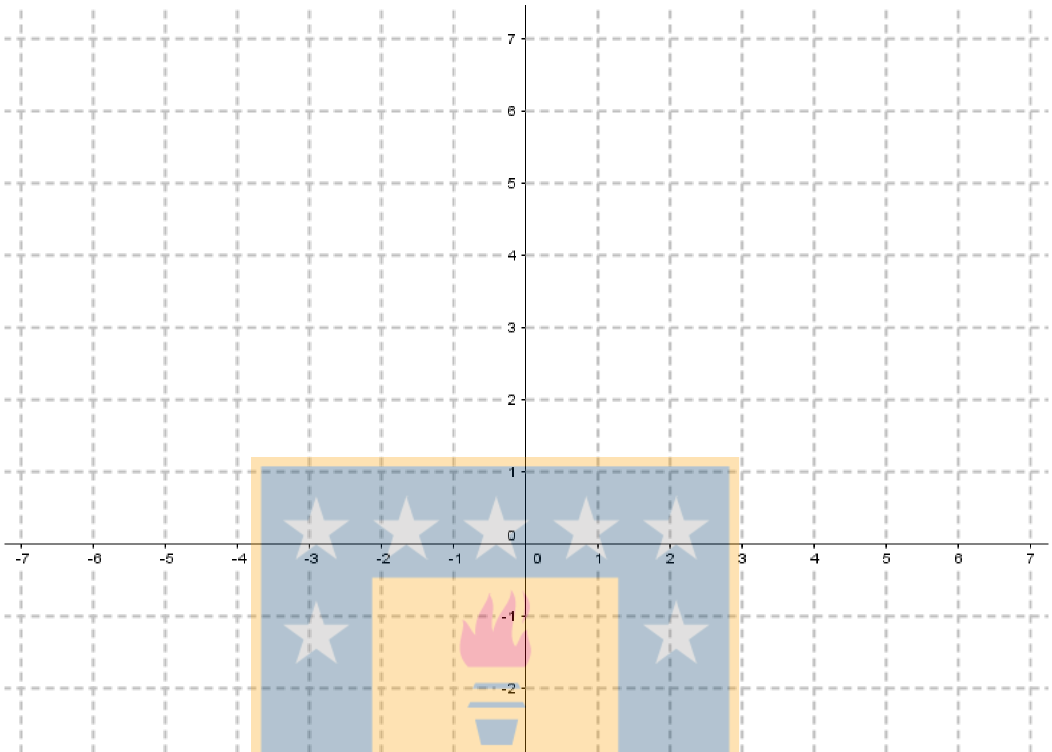
b) Generaliza el resultado obtenido en 6 para una recta paralela al eje Y, que corte al eje X en el punto (b, 0). Utiliza lo que tengas para reflejar el punto B respecto a la recta que pasa por el punto (2,0).

6) Realiza una reflexión al triángulo ABC

a) con respecto al eje X
b) con respecto al eje Y



c) Se aplica una simetría con respecto al eje Y a un triángulo de vértices P(-1, 2); Q(3, 4) Y R(2, 7). ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo P'Q'R'?



R:

<u>Preparando la PSU:</u> Encierra en un círculo la alternativa correcta.

1) Sea A un punto del primer cuadrante; J es el reflejo de A respecto al eje X. Si H es el reflejo de J respecto al eje Y, entonces **HJ** es un segmento:

A) paralelo al eje X.

B) paralelo al eje Y.

C) de la bisectriz del segundo cuadrante.

D) de la bisectriz del primer cuadrante.

E) perpendicular al eje X.

Fuente: Ensayo PSU, DEMRE, 2004.

<u>Transformaciones Isométricas: Simetría Central y Rotación</u>

Nombre:__________________________________Curso:__________Fecha: __/__/__ n°Lista:____

- **Objetivos específicos:**

1. Reconocer simetría central y rotaciones de figuras en el plano cartesiano.
2. Identificar regularidades entre las coordenadas de los vértices de polígonos al aplicar simetría central y rotaciones en el plano cartesiano.
3. Efectuar simetría central y rotaciones en 90°, 180° y 270° en sentido antihorario de figuras en el plano cartesiano.

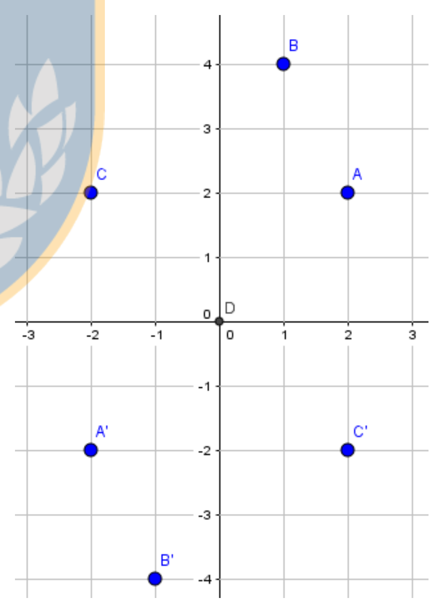
I Situación.

Bajo las graderías del gimnasio se guardan distintos balones. La ubicación de estos en el suelo se presenta a continuación.

II. Desarrollo.

1) Según la posición de los balones en el plano cartesiano:
   a) Trace en el plano cartesiano los segmentos: $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$
   b) Utilizando una regla, mida los segmentos que se piden a continuación y complete la tabla:

Segmento	Medida (cm)
$\overline{BD}$	
$\overline{DB'}$	
$\overline{BB'}$	
$\overline{AD}$	
$\overline{DA'}$	
$\overline{AA'}$	



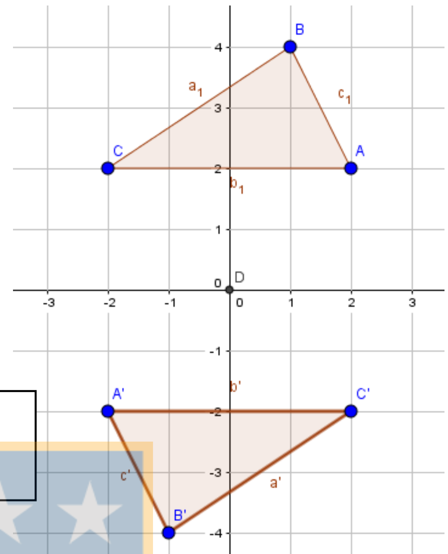
   c) ¿Qué puede deducir para los demás segmentos que faltan por medir?

2) Considerando los triángulos ABC y A'B'C' en el plano cartesiano:

a) Trace en el plano cartesiano los segmentos: $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$

b) Utilizando una regla, mida los segmentos que se piden a continuación y complete la tabla:

Segmento	Medida (cm)
$\overline{BD}$	
$\overline{DB'}$	
$\overline{BB'}$	
$\overline{AD}$	
$\overline{DA'}$	
$\overline{AA'}$	



c) ¿Cómo se relacionan los Triángulos ABC y A'B'C'?

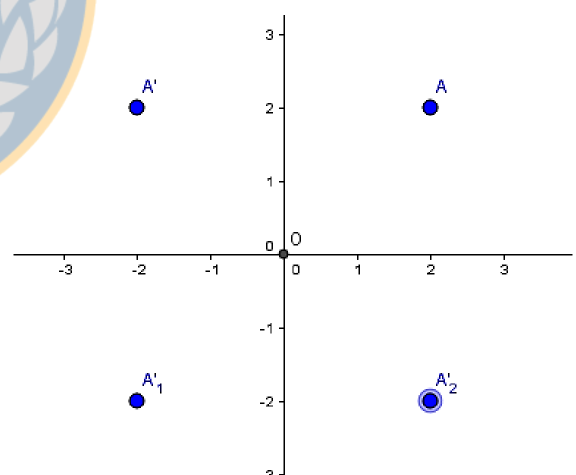
3) Se encuentra ubicado el punto A(2,2) en el plano cartesiano.

a) Trace la recta $\overleftrightarrow{AA'_1}$ entre el punto A(2,2) y el punto $A'_1(-2,2)$

b) Trace la recta $\overleftrightarrow{A'A'_2}$ entre el punto A'(-2,2) y el punto $A'_2(2,-2)$

c) Utilizando transportador y regla en caso que corresponda, complete la siguiente tabla:

Angulo (∢)	Medida ∢(°)	Segmento	Medida(cm)
AOA'		$\overline{OA}$	
$A'OA'_1$		$\overline{OA'}$	
$A'_1OA'_2$		$\overline{A'_1O}$	
A'_2OA		$\overline{A'_2O}$	



4) ¿Qué puede concluir de la tabla anterior?

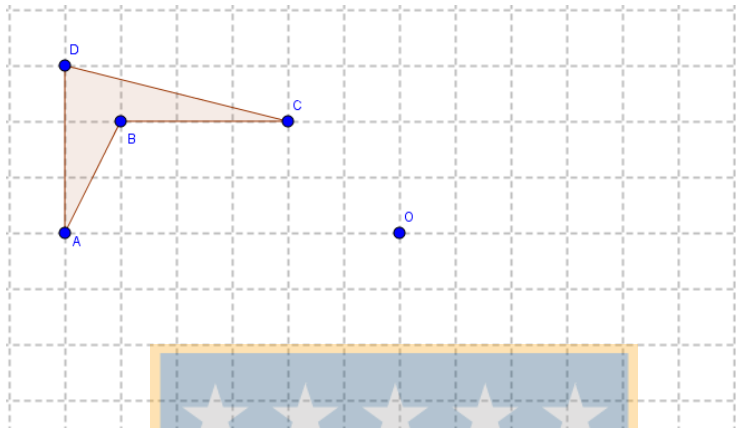
Guía Práctica N°6

Transformaciones Isométricas: Simetría Central

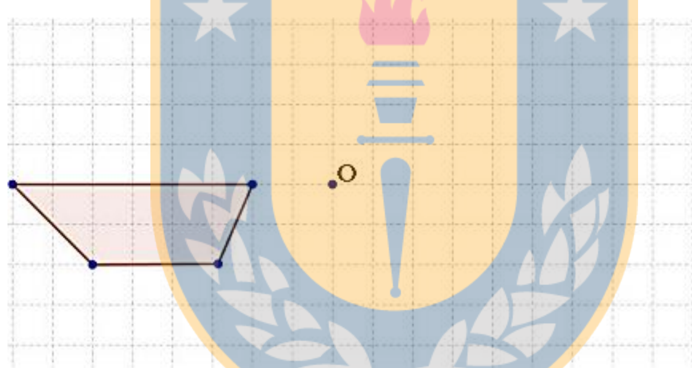
Nombre:_________________________________Curso:__________Fecha: __/__/__ n°Lista:____

1) Dibuje el simétrico de cada figura aplicando la simetría central de centro el punto dado

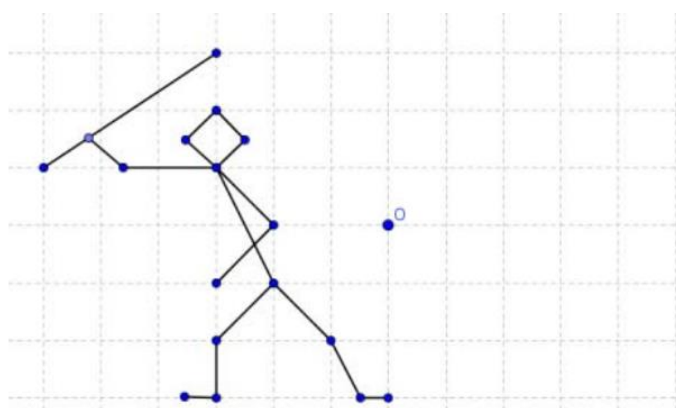
a)



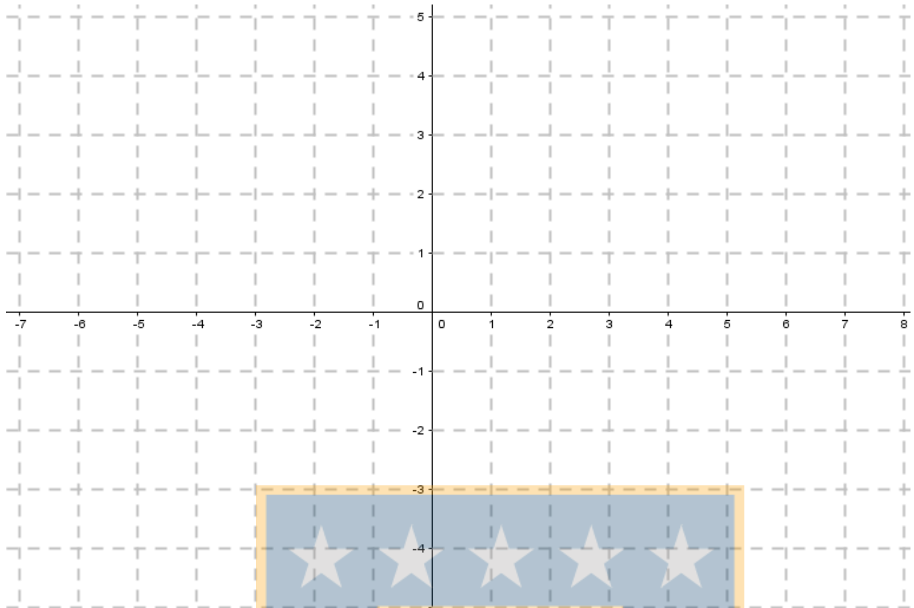
b)



c)



2) En el plano cartesiano, dibuja un polígono ABCD de vértices: A (1,1) ; B(4,-1) ; C(5,3) ; D(2,2).



a) Dibuja el simétrico del polígono ABCD con respecto al punto (0,0). Sea A'B'C'D' la imagen del polígono ABCD. Responde lo siguiente:
el punto simétrico de A es A' = (__,__)
el punto simétrico de B es B' = (__,__)
el punto simétrico de C es C' = (__,__)
el punto simétrico de D es D' = (__,__)

b) De acuerdo a lo obtenido, podrías generalizar un principio que permita construir las imágenes de figuras con simetría central a través del origen, sin hacer uso de compás ni regla,

PRINCIPIO:____ ____ ____ ____

Ejercicio:

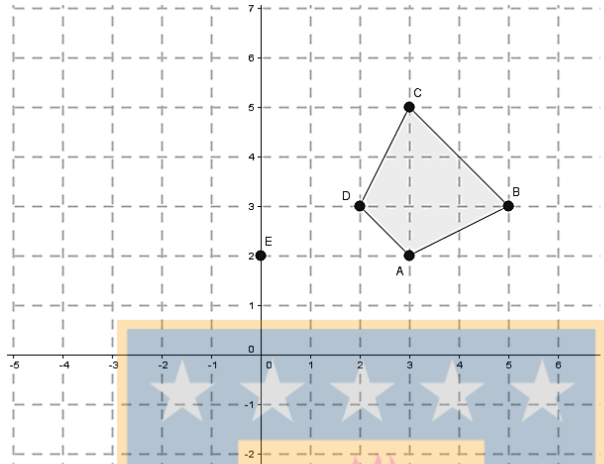
3) En tu cuaderno dibuja en un sistema de ejes cartesianos. Construye un pentágono cuyos vértices son A (2,2); B(-2,8) ; C(-10,0) ; D(-4,-4) ; E(0,-2). Luego determina las imágenes de sus vértices a través de la simetría central con centro el origen (0,0), y construye la imagen del pentágono dado.

Guía Práctica N°7

Transformaciones Isométricas: Rotación

Nombre:_________________________________Curso:__________Fecha: __/__/__ n°Lista:____

1) Dibuje la imagen del polígono aplicando la rotación en torno del punto E en un ángulo de 90º. Denote por A, B, C, D los vértices del polígono dado y por A', B',C' D' los vértices de la imagen por la rotación señalada. Determine: A'(,); B'(,); C'(,); D'(,).



2) En un plano cartesiano dibuje el polígono ABCD cuyos vértices son: A (2,1) ; B(8,2) ; C(12,11) ; D(5,5). Dibuje la imagen del polígono ABCD en cada caso (puede usar plantillas diferentes).

Nota: Se denotará por R(H, α) la rotación del plano con centro de rotación el punto H en un ángulo de rotación α. También se dice, giro con centro en H en un ánguloα.

a) Aplique R(O, 90°) al polígono ABCD. Es decir, rote el polígono ABCD, aplicando la rotación con centro en el origen O en un ángulo de 90º.Dibuje el polígono obtenido.

b) Aplique R(O, 180°) al polígono ABCD. Dibuje el polígono obtenido.

c) Aplique R(O, 270°) al polígono ABCD. Dibuje el polígono obtenido.

d) Aplique R(O, 360°) al polígono ABCD. Dibuje el polígono obtenido.

3) De acuerdo al ejercicio anterior, complete lo siguiente:

a) Al girar el poligono ABCD con respecto al origen en un ángulo de 90º, se obtiene la figura A'B'C'D' cuyos vértices son:

A(2,1), Imagen de A: A' (,) C (12,11), Imagen de C: C' (,)

B(8,2), Imagen de B: B' (,) D (5,5), Imagen de D: D' (,)

b) Al rotar el poligono ABCD con respecto al origen en un ángulo de 180º , se obtiene la figura A''B''C''D'' cuyos vértices son:

A(2,1), Imagen de A: A'' (,) C(12,11), Imagen de C: C' (,)

B(8,2), Imagen de B: B'' (,) D(5,5), Imagen de D: D'' (,)

c) Completa la siguiente tabla:

Vértices del polígono	R(O,90°)	R(O,180°)	R(O,270°)	R(O,360°)
A(2,1)				
B(8,2)				
C(12,11)				
D(5,5)				

Análisis de las actividades según teoría.

Se presenta a continuación el análisis de las actividades según la teoría de representación semiótica y visualización, para lo cual se adoptaron ciertas abreviaciones. Para las abreviaturas que se verán en todas las actividades, se detallarán de inmediato, en cambio, las que son exclusivas de la actividad, se detalla posterior a ella.

- L.N: Lengua Natural
- Num.: Numérico
- Grá: Gráfico
- Fig: Figural
- Visua: Visualización
- I: Icónica
- N/I: No icónica

Situación 1: Tablero de ajedrez

	Registro				Visualización		Contenido				
ítem	L.N	Num	Grá	Fig	I	N/I	Sistema de referencia	cuadrantes	Plano cartesiano	ejes	Puntos y coordenadas
1.a	x	x	x		x	x	x				
1.b	x	x			x		x				
2.a	x		x	x	x	x	x				
2.b	x	x	x		x		x			x	
3	x		x	x	x		x			x	
4	x					x	x				x
5	x	x	x	x	x		x		x		x
6	x		x	x	x		x	x	x	x	x
7	x	x		x		x			x	x	x
8	x	x		x							x
9	x	x		x		x					x
10.a	x		x	x	x						x
11	x		x	x	x						
12	x	x	x	x	x			x			x

Situación 2: Encuentra el gimnasio

	Registro				Visualización		Contenido				
Pre	L.N	Num.	Grá.	Fig	I	N/I	Def.Vect	Mag	Dire	Sentido	Componente
1		x	x		x		x	x	x		
2	x			x	x		x				
3		x	x		x		x	x	x		x
4	x			x	x		x				
5	x	x			x		x				x
6	x					x			x	x	
7	x		x			x	x	x	x	x	x

Def.Vect: Definición de vector. Mag: Magnitud. Dire: Dirección.

Actividad individual:

	Registros				Visualización		Contenido					
Pre	L.N	Num	Grá.	Fig.	I	N/I	Comp. Vect	Def. Vect.	Coord.	Carac. vector	Caract. P.C.	
4.a	x	x		x	x		x	x				
4.b.	x	x		x	x		x	x		x		
5.i.	x	x	x		x		x					
5.ii.	x	x			x	x		x	x			
5.iii.	x		x		x				x			
5.iv.	x		x	x	x						x	
5.v.		x	x				X	x			x	
5.vi.			x	x					x			
5.vii.			x	x					x			

Comp. Vect: Componente de vector. Coord.: Coordenada. Carac. Vector: Característica de vector.
Carac. P.C. Característica plano cartesiano.

Situación 3: La cancha de voleibol

	Registros				Visua		Contenido			
ítem	L. N.	Num	Grá	Fig	I	N/I	Caract. T.I.	vector	traslación	Aplicar T.I.
1.a	x		x			x	x			
1.b	x	x	x			x	x			
2.a	x	x	x		x					x
2.b	x	x	x		x					x
3.a.	x					x	x			
3.b.	x					x		x		
3.c	x					x	x	x		x
4.a	x	x	x	x	x		x	x		x

4.b	x	x	x	x	x		x	x	x	
4.c	x	x	x				x			
4.d	x									
5		x	x	x	x		x	x		
6	x		x		x		x	x		x
7	x	x	x		x		x		x	
8	x	x				x	x	x		

Caract. T.I. : Característica transformaciones isométricas

▪ Situación 4: Buscando a Picachu

	Registros				Visualización		Contenido	
ítem	L.N.	Num	Grá	Fig	I	N/I	Caract. T.I.	Vector
1.a.b.c	x		x			x	x	
2.a.b.c	x		x	x	x		x	x
3	x	x				x	x	
4	x	x				x	x	x

Caract. T.I. : Característica transformaciones isométricas

Actividad individual

	Registros				Visualización		Contenido			
ítem	L.N.	Num	Grá	Fig	I	N/I	Suma vector	Componente	Caract. T.I.	traslación
1.a.b.c	x			x	x		x			
2		x		x		x		x		
3	x	x	x		x	x			x	
4	x	x	x			x		x		
5	x	x	x		x		x			
6	x	x				x		x		
7	x	x	x			x	x			x
8.a.b	x	x	x		x	x	x		x	x

Caract. T.I. : Característica transformaciones isométricas

Situación 5: La cancha de voleibol II

	Registros				Visualización		
Pre	L.N	Num	Grá.	Fig.	I	N/I	Carac. T.I.
1	x	x	x	x	x		x
2	x	x			x		x
3	x	x		x	x		x
4	x	x			x		x
5	x	x		x	x		x

Práctica individual

Práctica 5								
	Registros				Visualización			
Pre	L.N	Num	Grá.	Fig.	I	N/I	Carac. T.I.	Simetría axial
1	x	x	x	x	x		x	x
2	x					x	x	x
3	x					x	x	x
4	x	x			x		x	
5	x	x			x	x	x	x
5.a.b	x	x				x		x
6.a.b.c	x	x	x	x	x	x	x	x

Situación 6: Balones en el gimnasio

	Registros				Visualización		Contenido		
ítem	L.N	Num	Grá.	Fig.	I	N/I	Simetría central	Rotación	Caract. P.C
1.a.b.	x	x	x	x	x	x			x
1.c	x		x		x				x
2.a	x		x	x	x				x
2.b	x			x	x				x
2.c	x		x		x				x
3.a.b.c	x	x		x	x		x	x	x
4	x			x			x	x	x

Guía simetría central

	Registros				Visualización		Contenido	
ítem	L.N	Num	Grá.	Fig.	I	N/I	Simetría central	Caract. P.C
1.a.b.c	x		x	x	x		x	x
2.a	x	x	x		x		x	x
2.b	x					x	x	
3	x	x	x		x		x	
							x	

Guía rotación

	Registros				Visualización		Contenido	
ítem	L.N	Num	Grá.	Fig.	I	N/I	Rotación	Caract. P.C.
1	x		x				x	x
2.a.b.c. d	x			x		x	x	
3.a..b	x	x				x	x	

Anexo C

Planificaciones intervención

Clase 27
Asignatura: Matemática
Objetivo: Trabajar elementos básicos del plano cartesiano.
INICIO El profesor les explica que la actividad a desarrollar dependerá de ellos. Y que tiene relación con lo que tratará la unidad.
DESARROLLO Los estudiantes resuelven actividad " Tablero de Ajedrez". El profesor actúa como guía en cuanto a dudas pequeñas. Tras dar término a la actividad. El profesor institucionaliza coordenada de puntos, ejes del plano cartesiano, importancia del plao cartesiano y los alumnos deberán realizar actividad relacionada con caracterizar plano cartesiano.
CIERRE El profesor resuelve dudas a modo general
Recurso: **Actividad: " Tablero de ajedrez".**

<table>
<tr><td>Fecha:</td><td colspan="2">

- **Contenido:** Transformaciones Isométricas- Vectores en el plano cartesiano.
- **Objetivos específicos:**
  1. Identificar característica de los vectores.
  2. Representar vectores en el plano cartesiano dadas sus componentes.
  3. Representar vectores en el plano cartesiano dados sus extremos.
  4. Determinar las componentes de un vector, dados punto inicial y final.
- **Objetivo transversal:**

Valorar la importancia del vector como un elemento necesario para la representación de desplazamiento de objetos.</td></tr>
<tr><td>Tiempo aprox.por actividad</td><td>Secuencia Didáctica</td><td>Recurso didáctico y/o Tipo de Evaluación</td></tr>
<tr><td>10 min.</td><td>Inicio:
E: Desarrollan la situación ”Encuentra el gimnasio” en la que los estudiantes deben realizar un desplazamiento horizontal y luego vertical para evidenciar la importancia de tener un elemento que represente en detalle el desplazamiento.
P: Explica objetivos de la clase.</td><td rowspan="3">- Situación “ Encuentra el gimnasio”
- Pizarra
- Proyector
- Programa Geogebra
- Plumones
- Cuaderno de los alumnos.</td></tr>
<tr><td>70 min.</td><td>Desarrollo:
P: Lleva la actividad al Geogebra.
E: infieren la característica de los vectores: módulo, dirección y sentido.
P: Expone la notación y componente de un vector.
P: Coloca situación de vector cuyo punto inicial no es el origen en el Geogebra.
E: Infieren a partir de las coordenadas del punto inicial y final la componente del vector.
Py E: Se realiza una práctica guiada en donde los estudiantes institucionalizan lo inferido en la explicación.</td></tr>
<tr><td>10 min</td><td>E: Realizan práctica individual en donde por si solos deben aplicar lo aprendido.</td></tr>
</table>

Fecha:	▪ **Contenido:** Transformaciones Isométricas – Traslación. ▪ **Objetivos específicos:** 1. Reconocer características de las transformaciones isométricas en el plano cartesiano. 2. Reconocer traslaciones de figuras en el plano cartesiano. 3. Identificar regularidades entre las coordenadas de los vértices de polígonos al aplicar traslaciones en el plano cartesiano. 4. Determinar el vector que describe una traslación de una figura en el plano cartesiano. 5. Efectuar traslaciones de figuras en el plano cartesiano. ▪ **Objetivo transversal:** - Reconocer aplicaciones de las transformaciones isométricas en el ámbito del deporte y demostrar compromiso con el trabajo.	
Tiempo aprox.por actividad	Secuencia Didáctica	Recurso didáctico y/o Tipo de Evaluación
10 min.	Inicio: E: Desarrollan la situación ”La cancha de voleibol” en la que los estudiantes deben realizar un desplazamiento horizontal y luego vertical para evidenciar la traslación de acuerdo a un vector. P: Explica objetivos de la clase.	- Situación “La cancha de voleibol” - Pizarra - Proyector - Programa Geogebra - Plumones - Cuaderno de los alumnos.
70 min.	Desarrollo: P: Lleva la actividad al Geogebra. E: Infieren la característica de los vectores traslación E: Se realiza una práctica en donde institucionalizan lo inferido en sus conclusiones.	
10 min	E: Realizan consultas. P: Institucionaliza el concepto de vector. P: Deja como tarea una guía, págn 177-180 del estudio de casos.	

<table>
<tr><td>Fecha:</td><td colspan="2">▪ Contenido: Transformaciones Isométricas – suma de vectores, composición de vectores.
▪ Objetivos específicos:
1. Determinar componentes de la suma de vectores.
2. Reconocer y relacionar la composición de traslaciones con suma de vectores.
▪ Objetivo transversal: - Demostrar compromiso con el trabajo.</td></tr>
<tr><td>Tiempo aprox.por actividad</td><td>Secuencia Didáctica</td><td>Recurso didáctico y/o Tipo de Evaluación</td></tr>
<tr><td>10 min.</td><td>Inicio:
P: El profesor hace mención a la situación “ Encuentra el gimnasio”, relacionándolo con el concepto de traslación.
E: Desarrollan la situación ”Buscando a Picachu” en la que los estudiantes deben realizar un desplazamiento horizontal y luego vertical para evidenciar la traslación de acuerdo a un vector.
P: Explica objetivos de la clase.</td><td rowspan="3">- Situación ”Buscando a Picachu”
- Pizarra
- Proyector
- Programa Geogebra
- Plumones
- Cuaderno de los alumnos.</td></tr>
<tr><td>70 min.</td><td>Desarrollo:
P: Lleva la actividad al Geogebra.
E: Infieren la característica de la suma de vectores.
E: Se realiza una práctica en donde institucionalizan lo inferido en sus conclusiones.</td></tr>
<tr><td>10 min</td><td>E: Realizan consultas.
P: Institucionaliza el concepto de suma de vectores y composición de traslaciones.</td></tr>
</table>

Fecha: Jueves 3 de noviembre	▪ **Contenido:** Transformaciones Isométricas – Reflexión Axial. ▪ **Objetivos específicos:** 1. Determinar ejes de simetría que describen la simetría axial de una figura en el plano cartesiano. 2. Determinar la cantidad de ejes de simetría de figuras geométricas. 3. Efectuar simetrías axiales a puntos y figuras en el plano cartesiano, con respecto al eje X, eje Y y ejes paralelos a ambos. ▪ **Objetivo transversal:** - Reconocer aplicaciones de las transformaciones isométricas en el ámbito del deporte y demostrar compromiso con el trabajo.	
Tiempo aprox.por actividad	Secuencia Didáctica	Recurso didáctico y/o Tipo de Evaluación
10 min.	Inicio: P: Explica objetivos de la clase. Expone un power point. E: Relacionan las imágenes con un reflejo, simetría axial más adelante. E: Desarrollan la situación ”La cancha de voleibol” en la que los estudiantes deben realizar e inferir características de reflexión axial.	- Situación “La cancha de voleibol” - Pizarra - Proyector - Programa Geogebra - Plumones - Cuaderno de los alumnos.
70 min.	Desarrollo: P: Lleva la actividad al Geogebra. E: Comprueba conjetura a través de Geogebra. E: Se realiza una práctica en donde institucionalizan lo inferido en sus conclusiones. P: **Como desafío** se propone el ejercicio 5.	
10 min	E: Realizan consultas. P: Resalta importancia de las características de simetría axial.} P: De no alcanzar a realizar la práctica n°5 queda de tarea.	

<table>
<tr><td>Fecha:
10 y 11 de noviembre.</td><td colspan="2">Contenido: Transformaciones Isométricas – Simetría Central y Rotación.
Objetivos específicos:
1. Reconocer simetría central y rotaciones de figuras en el plano cartesiano.
2. Identificar regularidades entre las coordenadas de los vértices de polígonos al aplicar simetría central y rotaciones en el plano cartesiano.
3. Efectuar simetría central y rotaciones en 90°, 180° y 270° en sentido antihorario de figuras en el plano cartesiano.
Objetivo transversal:
▪ - Reconocer aplicaciones de las transformaciones isométricas en una situación cotidiana y demostrar compromiso con el trabajo.</td></tr>
<tr><td>Tiempo aprox.por actividad</td><td>Secuencia Didáctica</td><td>Recurso didáctico y/o Tipo de Evaluación</td></tr>
<tr><td>10 min.</td><td>Inicio:
P: Explica objetivos de la clase. Introduce el contenido presentando imágenes de cartas del naipe francés donde se
utilizó simetría central.</td><td rowspan="2">- Situación ”balones en el gimnasio”
- Pizarra
- Proyector
- Programa Geogebra
- Plumones
- Cuaderno de los alumnos.</td></tr>
<tr><td>70 min.</td><td>E: Infieren sobre cuál es la transformación isométrica que se utilizó en la ubicación de los balones y cuáles son las características generales al aplicar simetría central.
P: Explica las características generales al aplicar simetría central a una figura en el plano cartesiano, cuáles vendrían a
ser las propiedades que se cumplen en ésta y menciona cuál es el elemento necesario para efectuarlas.
A: Definen el término de simetría central por completación en su guía.
P: Expone obra “Duendes” de Escher quien utilizó rotaciones para llevarla a cabo.
A: Infieren sobre cuál es la transformación isométrica que se utilizó en dicha obra y cuáles son las características
generales al aplicar una rotación.
P: Explica las características generales al aplicar una rotación a una figura en el plano cartesiano, cuáles vendrían a ser
las propiedades que se cumplen en ésta y menciona cuáles son los elementos necesarios para efectuarlas.</td></tr>
</table>

	A: Definen el término de rotación por completación en su guía.	
10 min	Cierre: P: Corrige en conjunto con los estudiantes, las regularidades que descubrieron en la actividad. A: Completan guía de actividades con las regularidades descubiertas, de manera algebraica.	

Anexo D

Instrumentos de recolección de datos

ESCALA DE APRECIACIÓN DE LA MOTIVACIÓN DE LOS ESTUDIANTES

Nombre:.. **Curso:**............... **Fecha:**...../...../......

Instrucciones: Marque con una cruz (**X**) la categoría referida a la frecuencia con que se observa la conducta indicada en el estudiante.

Las categorías con sus correspondientes puntajes son las siguientes:

Siempre	Casi siempre	A veces	Casi nunca	Nunca
5	4	3	2	1

Ítems	Siempre	Casi siempre	A veces	Casi nunca	Nunca
1. Realiza las actividades solicitadas para el desarrollo de la clase en el tiempo indicado.					
2. Consulta sus dudas al docente.					
3. Manifiesta interés por aprender los contenidos matemáticos.					
4. Se esfuerza por resolver los distintos desafíos propuestos en clases.					
5. Realiza aportes al grupo curso con respecto a los contenidos matemáticos tratados.					
6. Se esfuerza por terminar las actividades solicitadas.					

TEST DE ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS.

Nombre:.. **Curso:**............... **Fecha:** ....../....../......

Instrucciones: Lea atentamente cada una de las afirmaciones siguientes y responda marcando con una equis (**X**) la alternativa que más le identifique.

	Muy de Acuerdo	**De acuerdo**	**Me es indiferente**	**En desacuerdo**	**Muy en desacuerdo**
1.-Las Matemáticas serán importantes para mi profesión.					
2.-El profesor me anima para que estudie más matemáticas.					
3.-El profesor me aconseja y me enseña a estudiar.					
4.-Las matemáticas son útiles para la vida cotidiana.					
5.-Me siento motivado en clase de matemática.					
6.-El profesor se divierte cuando nos enseña Matemáticas.					
7.-Pregunto al profesor cuando no entiendo algún ejercicio.					
8.-Entiendo los ejercicios que me manda el profesor para resolver en casa.					
9.-El profesor de matemática me hace sentir que puedo ser bueno en matemática.					
10.-El profesor tiene en cuenta los intereses de los alumnos.					
11.-Me gusta como enseña mi profesor de matemática.					
12.-En primaria me gustaban las matemáticas.					
13.-Espero utilizar la matemática cuando termine de estudiar.					
14.-Después de cada evaluación, el profesor comenta los progresos hechos y las dificultades encontradas.					
15.-El profesor se interesa por ayudarme a solucionar mis dificultades con las matemáticas.					

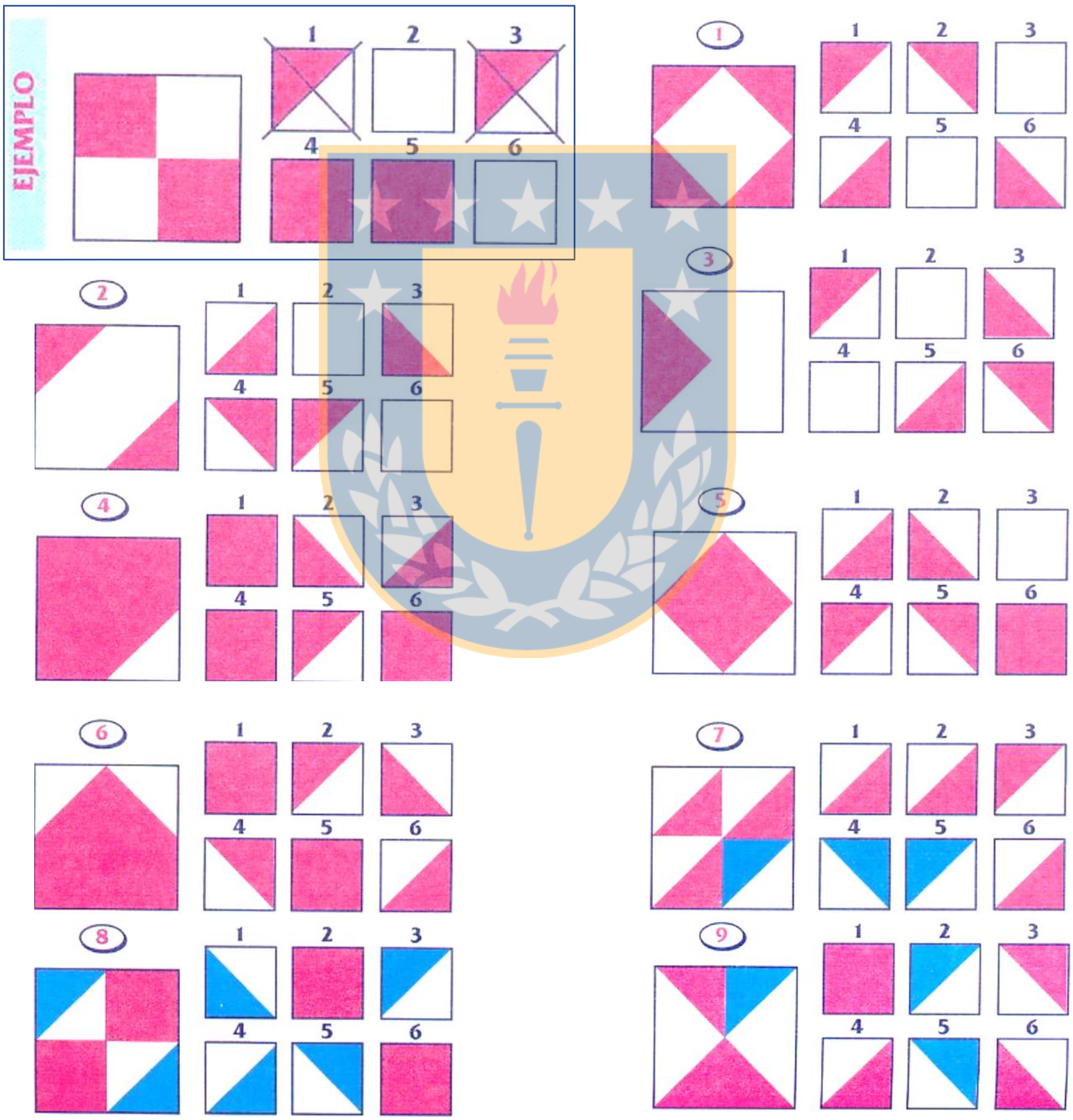
16.-Saber matemática me ayudará a ganarme la vida.					
17.-Soy bueno en matemáticas.					
18.-Me gustan las matemáticas.					
19.-En general las clases de matemáticas son participativas.					

Nombre______________ Fecha:______ N°Lista____

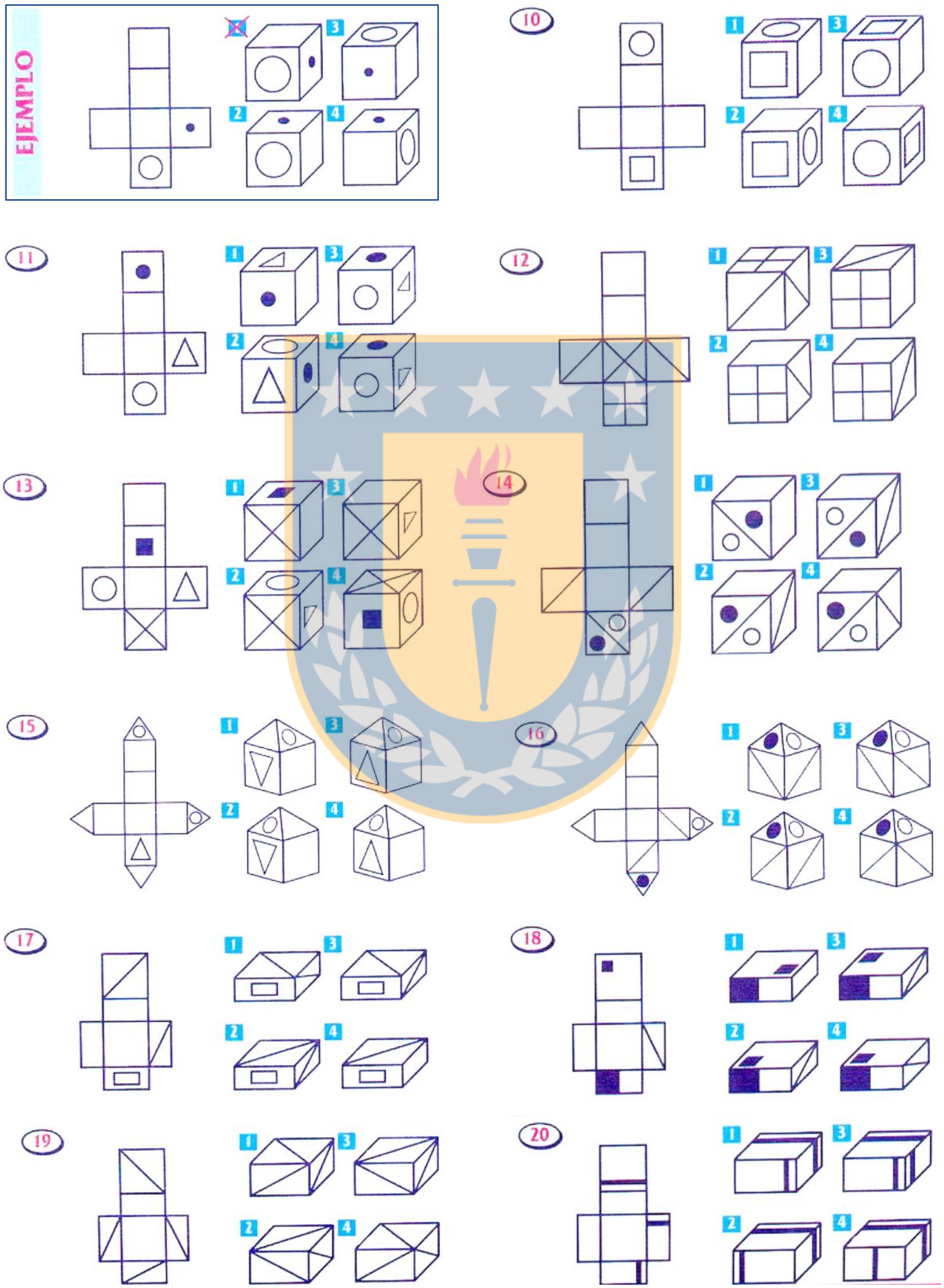
RAZONAMIENTO ESPACIAL

INSTRUCCIONES: Resolverá dos tareas que tienen que ver con el razonamiento espacial. Preste atención, pues algunas tareas te resultarán difíciles, por lo que necesitará de concentración. Dispones de 10 MINUTOS.

1° TAREA: La tarea a realizar exige que señales los DOS CUADRITOS que sobran después de formar el cuadrado grande. Fíjate en el ejemplo.



2° TAREA: Ahora se trata de buscar el dibujo que resulta de montar el desplegable que aparece en la izquierda. Sólo uno es correcto. Fíjate en el ejemplo.



Test de Transformaciones Isométricas

Nombre:.. **Nota:**.............................
Curso:.................. **Fecha:** ____/____/____ **Puntaje Ideal:** **Puntaje Obtenido:**...........................

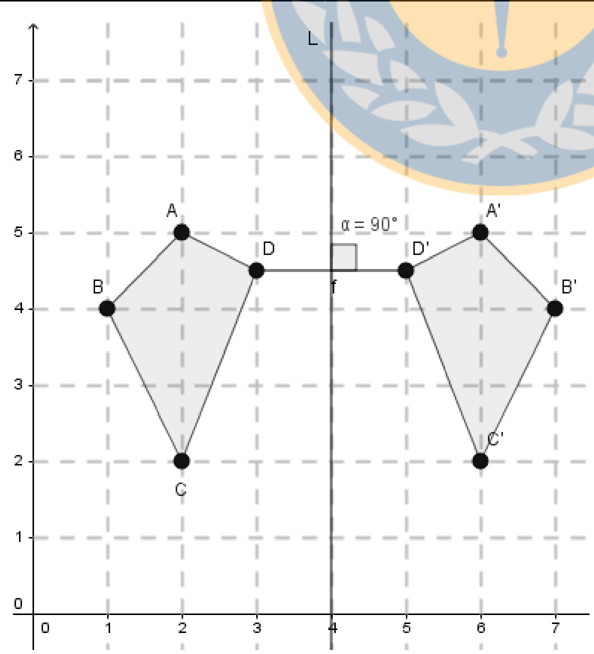
OBJETIVOS ESPERADOS:

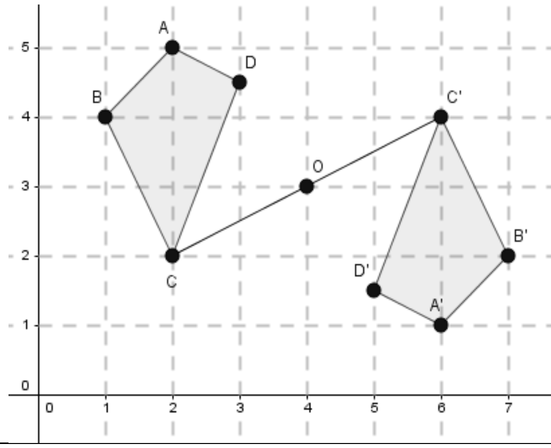
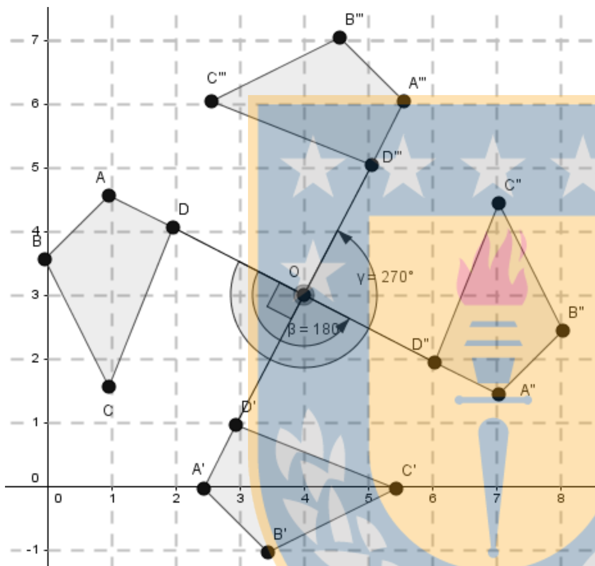
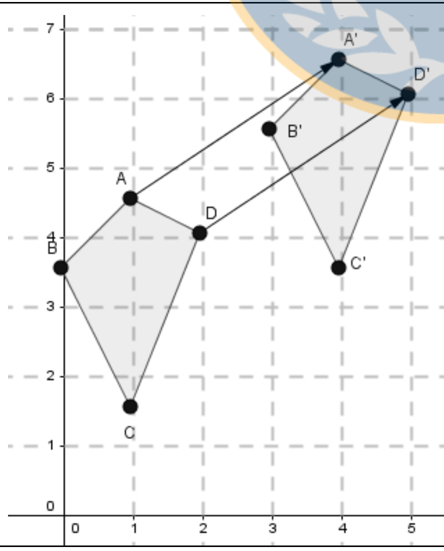
A) Identificar y Caracterizar transformaciones isométricas en figuras planas y en el plano cartesiano.
B) Ubicar puntos y figuras en el plano cartesiano.
C) Representar y caracterizar vectores y adición de vectores en el plano cartesiano.
D) Realizar transformaciones isométricas a puntos y figuras en el plano cartesiano

INSTRUCCIONES:

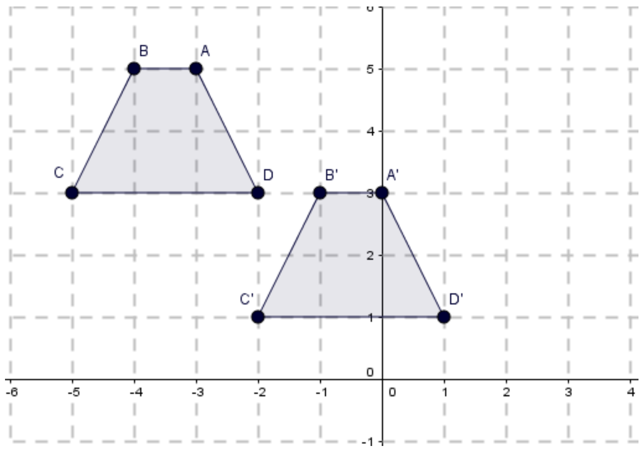
- Lea atentamente el test.
- No se admiten borrones, ni correcciones.
- No se permite usar calculadora.
- Debe **desarrollar cada ejercicio**, de lo contrario no se considerará válida su respuesta.
- Dispone de **80 minutos** para contestar.

1. Reconozca a qué transformación isométrica corresponden las imágenes y mencione los elementos característicos.

a) 	**R:**

b) 	**R:**
c) 	
d) 	R:

2. Observe el cuadrilátero ABCD y responda según corresponda:



a) El cuadrilátero ABCD ha sido trasladado por el vector $\vec{v}$.Grafique el vector traslación $\vec{v}$. Y determine sus componentes.

b) Complete la tabla con las coordenadas de los vértices del cuadrilátero ABCD y A’B’C’D’

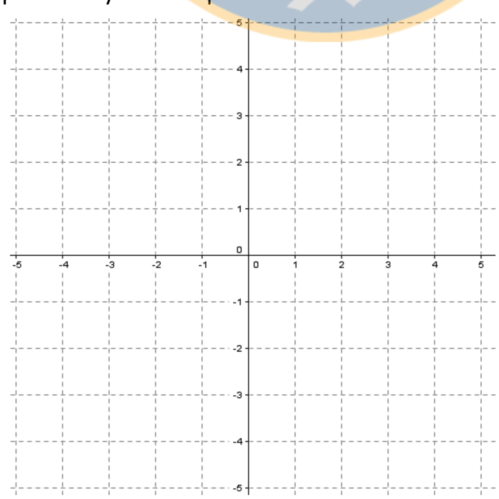
Cuadrilátero ABCD		cuadrilátero A’B’C’D’	
Vértice	Coordenada	Vértice	Coordenada
A	(,)	A’	(,)
B	(,)	B’	(,)
C	(,)	C’	(,)
D	(,)	D’	(,)

c) ¿Qué relación existe entre el vector traslación y los vértices de los cuadriláteros ABCD y A’B’C’D’? Explique.

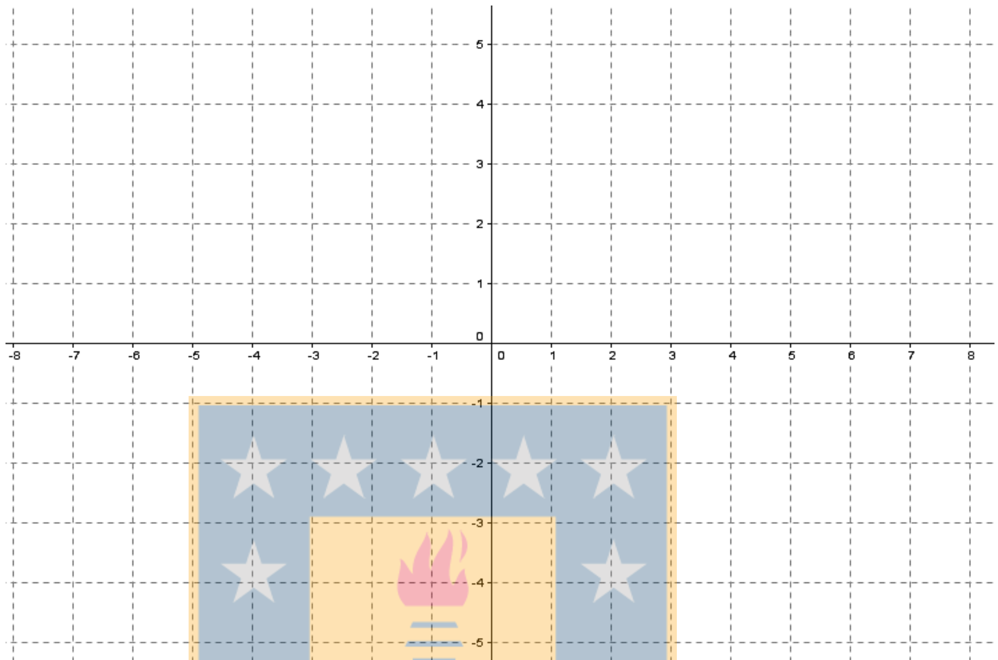
3. Si P (3, –2) se rota en un ángulo de 270° respecto al origen y en sentido antihorario,

a) ¿Cuál será la coordenada del nuevo punto P’?

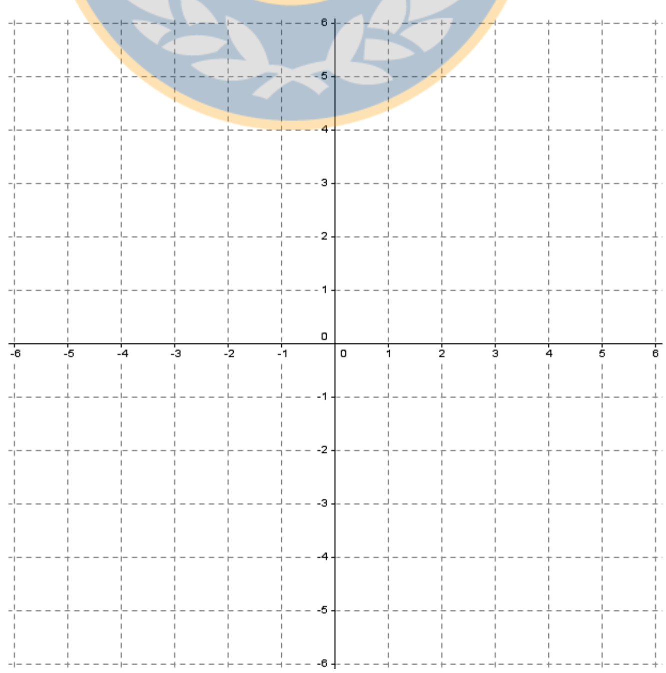
b) Ubique los puntos P y P’ en el plano cartesiano.



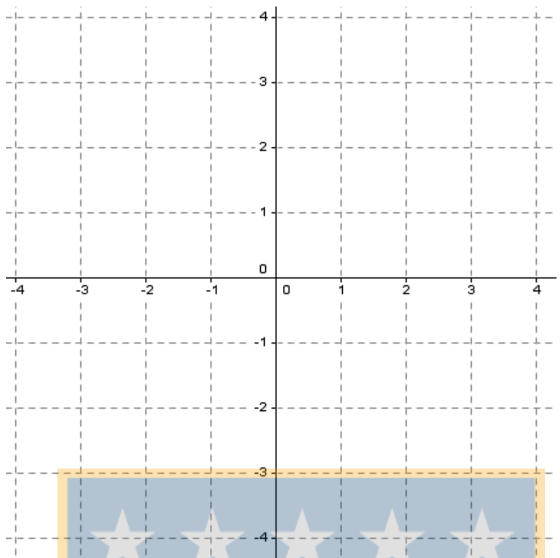
4. Al rotar en un ángulo de 180° el Cuadrilátero de vértices A (5,4), B(1,3) y C(2,-2) respecto del origen y en sentido antihorario,
   a) ¿Cuál es la coordenada del vértice D si su homólogo, el punto D’ del cuadrilátero A’B’C’D’, tiene coordenadas (-5,0)?
   b) Grafique ambos cuadriláteros.



5. Se le ha aplicado simetría central respecto del origen al triángulo de vértices A (5,6), B (1,2) y C (3,6) del cual se sabe que el homólogo de B, el punto B’, tiene coordenadas (-1,0),
   a) Grafique el triángulo original y el triángulo resultante.
   b) ¿Cuáles son las coordenadas del punto por el cual se hizo la simetría?

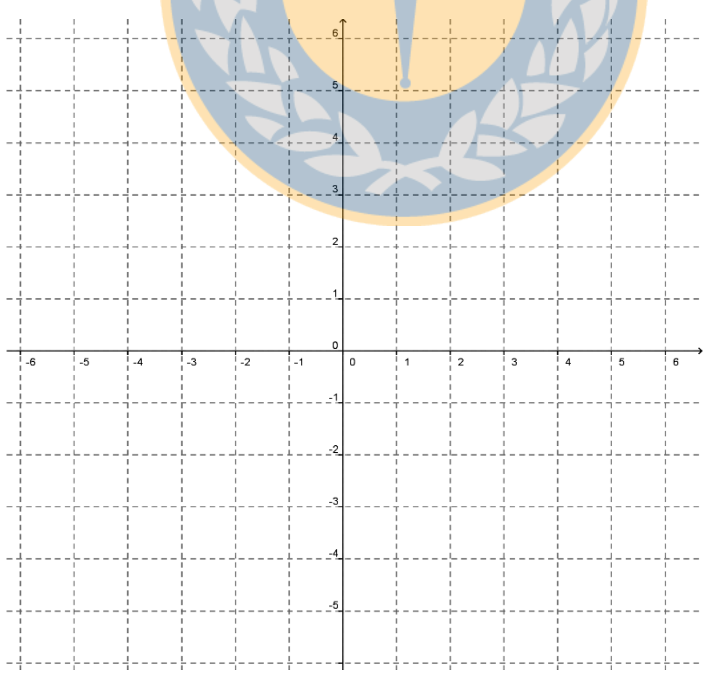


6. Dado los puntos A(3,2) y B(-3,1);C(-4,3) y D(-1,4), represente los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$en el plano cartesiano.

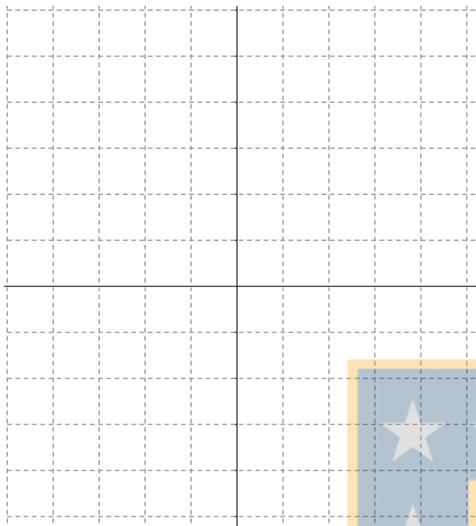


7. Represente en el mismo gráfico el resultado de:

a) $\vec{u} - \vec{v}$, si $\vec{u} = (-3{,}2)$y $\vec{v} = (-3{,}1)$
b) $\vec{m} + \vec{n}$, si $\vec{m} = (1, -1)$ y $\vec{n} = (1{,}4)$

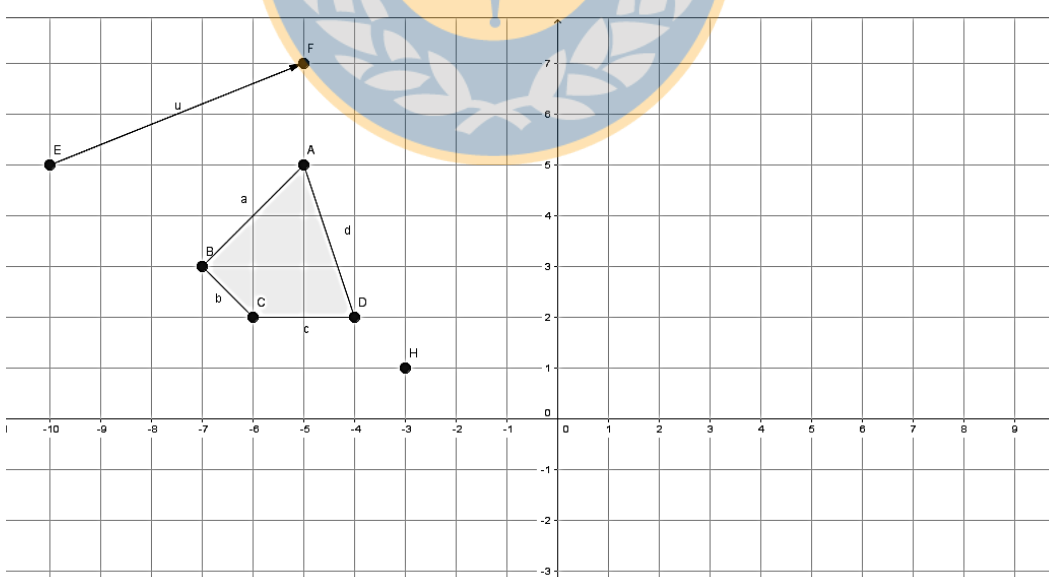


8. Si el punto P (-1,-2) es reflejado con respecto al eje de las ordenadas, se obtiene el punto P’ (1,-2).
   a) Ubique el punto P y P’ en el plano cartesiano.
   b) Si un punto P’’ del IV cuadrante es reflejado con respecto al eje de las abscisas ¿En qué cuadrante queda el nuevo punto?

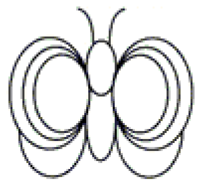


R:

9. Representa en el gráfico:
   c) Las coordenadas de los vértices del cuadrilátero trasladado A’B’C’D’, por el vector $\vec{u}$
   d) La simetría central del cuadrilátero ABCD con respecto al punto H.



10. Observa y responde según las siguientes figuras:
   a) En la tabla marque con una cruz si posee o no ejes de simetría.
   b) De poseer ejes de simetría, dibújelo.

Figura	Ejes de simetría	
	Sí	No
a) 		
b) 		
c)