Universidad de Concepción
Campus Los Ángeles
Escuela de Educación
Departamento de Ciencias Básicas

Educación Matemática Realista: un enfoque para desarrollar habilidades de Matematización con alumnos de secundaria

Seminario para optar al grado de Licenciado en Educación y al Título de Profesor de Matemáticas y Educación Tecnológica

Seminaristas
Sr. Alexis Pérez Roa
Srta. Nicole Vásquez Olave

Profesor Guía
Sra. Irma Lagos Herrera, Profesora de Estado en Español, Magíster en Educación, Dr. Educación (e), U. de C.

Los Ángeles, 2016

COMISIÓN EVALUADORA

Sra. Irma Lagos Herrera, Profesora de Estado en Español, Magíster en Educación mención Currículo, Dr. en Educación (e), U. de C.

Sr. Jorge Cid Anguita, Profesor de Matemáticas y Física, U. de C. Magíster en Enseñanza de las Ciencias Mención Matemática, U. B. B.

Sr. Ramón Elías Muñoz, Licenciado en Ciencias mención Física U. Ch., Magíster en Física Médica, U. Fr.

Exposición oral realizada el día jueves 16 de marzo del año 2017
Auditorio Manuel Rioseco, Campus Los Ángeles, U. de C.

DEDICATORIA

Dedicado a Dios, de quien venimos y a quien vamos, por quien cumplimos en esta vida una misión particular, en mi caso, educar.

A mis padres Nicomedes y Marcela, y mi hermana Juliana, el primer apoyo de mi vida, quienes me impulsaron a cumplir cada uno de mis sueños, apoyándome en cada paso. A mis abuelas María Gricelda y Ana María, por ese calor de madre que siempre me alegra el día y me alentó a seguir adelante, y especialmente a Juvenal y Jaime, que desde un lugar mejor deben estar alegres por esta meta alcanzada.

A Jessica Carolina, mi compañera de vida, que con un amor inconmensurable me motiva día a día a seguir avanzando para llegar lejos, muy lejos, y juntos. Que nunca cambies esa sonrisa que puede alegrar el más amargo de los días.

A mis amigos Francisco, Matías, Margarita, Natanael, Esteban, Hugo, Andrea y en especial Nicole que, con su preocupación, palabras de aliento, consejos e interminables charlas hicieron más ameno este largo proceso.

Alexis

Dedicado a Dios pues Él me acompañado toda mi vida y gracias a Él hoy obtengo este preciado triunfo.
"Mi gloria y mi sustento eres Tú".

A mi Madre que, desde muy pequeña, me convenció que con esfuerzo podía lograr lo que quisiera y todo el tiempo me ha dado su amor incondicional. A mi Padre por creer en mí y apoyarme siempre, sin duda este logro también es suyo. Gracias Papá y Mamá.

A mis hermanos Diego y Florencia, deseo que se sientan orgullosos de su hermana mayor así como yo me siento de ustedes. Los amo con todo mi corazón.

A mi querido Andrés, con el que he vivido preciosos momentos de mi vida, gracias por tu apoyo, por tu amor, tu alegría y tu paciencia. Tú eres mi felicidad.

A mis amigos que han estado conmigo en este proceso y que hasta el último momento me sostuvieron durante los momentos difíciles. Deseo que gocen de este triunfo como si fuese suyo.

Finalmente, no podría olvidar, a Alexis, mi amigo durante muchos años, por tu dedicación, esfuerzo y optimismo, aún en los momentos difíciles. Estoy muy agradecida de que viviéramos esta etapa juntos.

Con amor…

Nicole Vásquez Olave

AGRADECIMIENTOS

A Dios que nos da la vida y la fortaleza para avanzar, en este esfuerzo y vocación, quien guía nuestros pasos y nos alienta a levantarnos cada vez que caemos.

A nuestras familias, que son el pilar fundamental de nuestras vidas, a quienes debemos el logro de esta meta, tanto personal como familiar.

A la Profesora Irma Lagos Herrera, nuestra guía en este proceso, gracias por transmitirnos su fortaleza y su amor por la educación, su ayuda fue fundamental para nosotros, gracias por creer en nosotros y motivarnos a llegar tan lejos como pudimos. También a la Profesora Andrea Riquelme, por su inmensa colaboración en esta investigación, sin su ayuda no hubiera sido posible.

Alexis Pérez & Nicole Vásquez

RESUMEN

Investigación cuanti-cualitativa con diseño cuasi-experimental de grupo experimental y grupo control, con pre y post test, en que se compara la metodología tradicional con el enfoque de la Educación Matemática Realista de Freudenthal como punto de partida para la matematización en el contenido de funciones para estudiantes de secundaria.

La implementación, diseñada para 38 horas pedagógicas en un tercer año medio de un liceo municipal de la comuna de Los Ángeles, se realizó durante 26 horas por motivos ajenos a los investigadores.

Los resultados dan cuenta de un incremento en el nivel de matematización logrado por los y las estudiantes que trabajan bajo el enfoque de la Educación Matemática Realista, sin mostrar diferencias significativas en las variables socio-afectivas y en el aprendizaje del contenido entre ambos grupos.

Palabras clave: Matematización, Funciones, Educación Matemática Realista, Ansiedad, Motivación.

ABSTRACT

Quantitative-qualitative research with quasi-experimental design of experimental and control group, with pretest and posttest, in which it is compared the traditional methodology with the Freudenthals' Realistic Mathematic Education approach as a start point for the mathematization in the functions content for high school students.

The implementation, designed for 38 pedagogical hours in a third grade of a municipal school from Los Angeles commune, was carried out during 26 hours, this because of external reasons.

The results confirm an increase in the mathematization level achieved by the students which worked under the Realistic Mathematic Education approach, with no significant differences in the socio-affective variables and in the learning of the contents between both groups.

Key words: Mathematization, Functions, Realistic Mathematic Education, Anxiety, Motivation.

Hay una cosa que necesitamos decidir urgentemente,
si la imagen de la matemática es para una élite o para todos – una imagen de la matemática para la totalidad de la educación.

Freudenthal, 1973

INDICE

INTRODUCCION

Gran parte de lo que las personas saben y hacen es resultado de los aprendizajes obtenidos a lo largo de la vida. Comúnmente se piensa que el aprendizaje es algo que ocurre solo en la infancia y adolescencia, y en general, se asocia únicamente al aprendizaje escolar. Pero la verdad es que los seres humanos necesitan aprender siempre, a lo largo de toda su vida, desde la cuna materna, a lo largo de la infancia y la juventud, en la vida adulta, y aun en los años de madurez y vejez. En forma permanente las personas necesitan satisfacer necesidades, adquirir herramientas prácticas, de conocimiento, de comunicación y de acción para la interacción social. Entonces, el aprendizaje es inherente a la necesidad de adaptación, puesto que las personas necesitan aprender para incorporarse y participar en la vida social.

Así, de acuerdo con Díaz (2010), la labor de los profesores no es algo trivial, por el contrario, es fundamental para el desarrollo de la persona, y con ello, de la sociedad. En esto radica la importancia de buscar y/o crear nuevas metodologías, que ayuden la labor docente en cuanto a guiar a los estudiantes a construir aprendizajes significativos, cuya trascendencia va más allá de las aulas.

Es así como en la búsqueda de nuevas metodologías se encontraron los aportes de Hans Freudenthal, en lo que se denomina la corriente de la Educación Matemática Realista. Según Bressan (2016) esta corriente didáctica define la matemática como un proceso, una actividad humana de estructuración y organización, de matematización que parte de la experiencia y de la acción del alumno, que está potencialmente al alcance de todos los seres humanos, lo que produce como resultado el conocimiento matemático. La idea central es que la enseñanza de la matemática debe estar conectada con el mundo real, cerca de los y las estudiantes y ser relevante para la sociedad a fin de constituirse en un valor humano.

Su convencimiento es que el o la docente debe poner el énfasis en los procesos de matematización y no en enseñar la matemática como un producto acabado. De tal forma que se consiguen aprendizajes construyendo la matemática, tal como lo hicieron los matemáticos en sus épocas.

Aunque las contribuciones de Freudenthal surgieron en la década del 60’ como oposición firme y crítica a las corrientes pedagógico-didácticas de la época, están vigentes hoy en numerosos enfoques teóricos como PISA y diseños curriculares de varios países como: EEUU, Japón, Indonesia, Gran Bretaña, Alemania, Dinamarca, España, Portugal, Sudáfrica, Brasil, Puerto Rico, entre otros. (Bressan, 2016)

En esta investigación, se analiza la incidencia de utilizar una metodología basada en la Educación Matemática Realista para la enseñanza de funciones con alumnos de tercer año medio de un liceo municipal de nivel socioeconómico medio en la comuna de Los Ángeles, y su relación con las variables socio afectivas de Motivación y Ansiedad.

Aunque la innovación didáctica se diseñó para 16 clases (de 90 minutos cada una) sólo se logró implementar durante cinco semanas, donde se distribuyeron diez sesiones de trabajo, y tres sesiones evaluativas.

Este informe se compone de cinco capítulos, en el primero se aborda la problemática que motiva este estudio y su justificación; en el segundo, se tratan algunos elementos teóricos que sustentan la innovación didáctica; en el tercero, se describe la metodología empleada para su desarrollo; en el cuarto capítulo se detalla el análisis de los resultados obtenidos y verificación de hipótesis; finalmente en el quinto capítulo se muestran las conclusiones, discusión de resultados y/o recomendaciones finales de la investigación.

Se espera que este estudio sea un aporte importante para la educación matemática, tendiendo a mejorar o dinamizar las practicas docentes con metodologías innovadoras que atiendan a las necesidades de una sociedad en constante cambio y sobre todo, a optimizar el proceso de enseñanza-aprendizaje, para que los estudiantes logren mejores aprendizajes significativos en matemáticas, junto con incrementar su motivación y disminuir su ansiedad hacia la asignatura.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Antecedentes

Según las Bases Curriculares vigentes al año 2016 (MINEDUC, 2013) desde séptimo año básico a segundo año medio, el escaso conocimiento matemático y la poca habilidad para utilizarlo tienen profundas e importantes consecuencias en la formación de las personas. Aprender matemática influye en el concepto que niños, jóvenes y adultos construyen sobre sí mismos y sus propias capacidades, pues el entorno social lo valora y lo asocia a logros, beneficios y capacidades de orden superior, pero sobre todo porque lo faculta para confiar en su propio razonamiento y para usar de forma efectiva diversas estrategias en la resolución de problemas significativos relacionados con su vida cotidiana. Así, la adquisición de competencias matemáticas ayuda a que la persona se sienta un ser autónomo y valioso en la sociedad. En consecuencia, se trata de un conocimiento cuya calidad, pertinencia y amplitud afecta la calidad de vida de las personas y a sus posibilidades de actuar en el mundo.

El mismo MINEDUC (2013) exige desarrollar cinco grandes habilidades en los estudiantes desde séptimo año básico y hasta segundo año medio: resolver problemas, representar, modelar, argumentar y comunicar. Habilidades que se interrelacionan y juegan un papel fundamental en la adquisición de nuevas competencias y en la aplicación de conocimientos en los diversos contextos cotidianos. Estas habilidades deben desarrollarse transversalmente en los cuatro ejes temáticos del curriculum.

> La formación matemática ofrece también la posibilidad de trabajar con entes abstractos y con las relaciones entre ellos, preparando a los estudiantes para comprender el medio en que se desenvuelven; un medio en que la cultura, la tecnología y las ciencias se están redefiniendo y haciendo más complejas permanentemente. (MINEDUC, 2013).

Así, es necesario vincular los contenidos tratados en matemáticas con el medio donde se desenvuelven los y las estudiantes, un medio conocido por ellos y del cual en un futuro próximo serán agentes de cambio. De tal forma que los estudiantes puedan usar de forma concreta y abstracta las herramientas matemáticas de que disponen.

1.2 Planteamiento del Problema

Es sabido que en la escuela son escasas las situaciones didácticas en las que los problemas contextualizados funcionan como objeto del quehacer matemático de alumnos y docentes. En cambio, lo que se encuentra en las escuelas son situaciones *camufladas* o enunciados verbales que se plantean en términos matemáticos, o muy evidentemente ligados a la matemática y a las situaciones que se pretende ejercitar. En este tipo de problemas, el contexto pasa a segundo plano y resulta casi irrelevante para la comprensión y el razonamiento necesarios para resolver el problema (Martínez, 2002).

Incluso los alumnos se han acostumbrado a este *juego* de problemas matemáticos ocultos en un enunciado y no consideran las implicancias del contexto en la situación problemática, pues al verse enfrentados a una situación problemática auténtica tienden (muchas veces) a reaccionar de forma mecánica, aplicando reglas matemáticas como una *receta*, donde el contexto se transforma en una trampa o *ruido* que se debe eliminar (Zolkower,2006).

De acuerdo a Rabino (2001) los problemas matemáticos bien contextualizados desencadenen en los y las estudiantes el uso de conocimientos informales y la creación de nuevas estrategias que le asignan significado a los números, a las operaciones, a los algoritmos y procedimientos de cálculo. En cambio, la enseñanza descontextualizada, donde los problemas matemáticos se camuflan en una situación real, acarrea olvidos, confusiones y un uso indiscriminado de las reglas matemáticas que se desean enseñar.

Las corrientes didácticas adoptadas por los diseños curriculares, desde hace algunas décadas propician enseñar matemática a través de la resolución de problemas. Siguiendo a Rabino (2012), los problemas matemáticos a utilizar deben ser significativos para los estudiantes y así estos podrán relacionarlos con su experiencia y conocimientos previos, de tal modo que el alumno sienta interés por resolverlos, solo así serán un instrumento real de aprendizaje de la matemática.

Según la misma Rabino (2012), los problemas que comprometen a los estudiantes con la actividad matemática, promueven la construcción de conceptos y herramientas de esquematización y formalización crecientes, de modo tal que puedan generalizarlos, reutilizarlos, resignificarlos, transferirlos y adaptarlos a situaciones en otros contextos (dentro o fuera de la matemática) para resolver otros problemas. Todo este proceso se desencadena cuando las situaciones problemáticas son familiares a la realidad del alumno, o bien, imaginables por él. Sólo de esta forma el sentido común y las formas de razonamiento del alumno interactúan para llegar a un resultado.

Así, la enseñanza descontextualizada de la matemática dificulta la apropiación de los contenidos obligatorios, desmotiva a los estudiantes y aumenta la brecha entre la matemática escolar y el sentido común. Mientras que el enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR), en cuanto a enseñanza contextualizada de la matemática, favorece el aprendizaje de la misma.

1.3 Justificación del Problema

Ramos (2006) asume que existe una brecha importante entre las matemáticas que se enseñan en la escuela (la matemática formal) y las que las personas hacen servir en su vida cotidiana (mas asociada al sentido común); y que esta brecha es uno de los motivos esenciales que explican las actitudes negativas que muchas personas desarrollan hacia las matemáticas.

El problema evidenciado es que la enseñanza descontextualizada de la matemática, genera en los estudiantes un sentido de lejanía de la misma, de tal forma que no pueden aprehender los conceptos matemáticos como una herramienta útil en sus vidas. Por tanto, aplicar una metodología basada en situaciones realistas puede favorecer el aprendizaje de las matemáticas.

Así, esta investigación se justifica porque pretende determinar la influencia en el desarrollo de habilidades de matematización al utilizar una enseñanza más contextualizada, donde sean los estudiantes quienes construyen su conocimiento pasando a niveles superiores de comprensión desde los problemas cotidianos. Esto es lo que permite el enfoque de la EMR impulsada por Freudenthal (1991).

1.4 Preguntas de investigación

Con todo lo expresado anteriormente, surgen algunas interrogantes que motivan el desarrollo de esta investigación, y que se describen a continuación:

- ¿Cómo incide el enfoque de la EMR en el desarrollo de habilidades de matematización en dos grupos de estudiantes, comparado con la metodología tradicional?
- ¿El enfoque EMR favorece el rendimiento académico de los y las estudiantes?
- ¿Cómo influye en la motivación de los estudiantes la aplicación del enfoque de la EMR?
- ¿Cuál es la incidencia de la metodología basada en la EMR en la ansiedad matemática de los estudiantes?
- ¿Existen diferencias en los niveles de matematización, de ansiedad matemática y motivación presentados por los y las estudiantes que trabajan con la metodología basada en EMR?
- ¿Existe relación entre el nivel de matematización logrado por los estudiantes y las variables socio-afectivas involucradas?

1.5 Objetivo general

Determinar la incidencia en el desarrollo de habilidades de matematización, al aplicar una metodología basada en la Educación Matemática Realista como metodología de enseñanza de las matemáticas, para la unidad de funciones en estudiantes de tercer año medio de un liceo científico-humanista municipal de la comuna de Los Ángeles.

1.6 Objetivos específicos

- Determinar la incidencia de aplicar la metodología basada en la EMR en el nivel de matematización de los estudiantes.
- Establecer las diferencias en el rendimiento académico de los estudiantes que trabajan con la metodología innovadora y la metodología tradicional.
- Mostrar la influencia en la motivación de los y las estudiantes al trabajar con la metodología basada en la EMR.
- Descubrir la incidencia de utilizar la metodología basada en la EMR en la ansiedad presentada por los y las estudiantes.
- Determinar diferencias en los niveles de matematización, de ansiedad matemática y motivación presentados por los y las estudiantes que trabajan con la metodología basada en EMR.
- Determinar las relaciones existentes entre el nivel de matematización de los estudiantes y las variables socio afectivas presentadas por ellos.

1.7 Hipótesis de investigación

Hip. 1. La metodología basada en el enfoque de la EMR favorece el desarrollo de habilidades de Matematización en el grupo de estudiantes intervenido.

Hip. 2. Los estudiantes que trabajan con una metodología basada en la EMR tienen mejor rendimiento académico que los estudiantes participantes en la metodología tradicional, en la unidad de funciones.

Hip. 3. Los estudiantes que trabajan con la metodología basada en EMR tienen mayor motivación que los estudiantes que trabajan con la metodología tradicional luego de la intervención didáctica.

Hip. 4. Los alumnos que participan en la metodología basada en la EMR tienen menor ansiedad matemática que los alumnos que participan en la metodología tradicional.

Hip. 5. No existen diferencias significativas en los niveles de matematización, de ansiedad matemática y motivación presentados por los y las estudiantes que trabajan con la metodología basada en EMR.

Hip. 6. Existe relación entre el nivel de matematización logrado por los estudiantes y las variables socio-afectivas presentadas por los mismos.

CAPÍTULO 2. MARCO REFERENCIAL

En este capítulo se analizan los principales aspectos teóricos que orientan la investigación en curso. Comenzando por las principales teorías de aprendizaje, concepciones básicas del proceso de enseñanza y aprendizaje, para luego centrar el estudio en la enseñanza de las matemáticas y más detalladamente la corriente teórica de la Educación Matemática Realista, que sustenta este seminario. Finalmente se muestran las principales concepciones acerca de los factores socio-afectivos involucrados y un detallado apartado del contenido a tratar, funciones.

2.1 Principales teorías de aprendizaje

A continuación, se presenta una breve descripción de las teorías de aprendizaje más ampliamente conocidas y que se relacionan con esta investigación, entendiendo como teorías del aprendizaje a "aquellos lineamientos generales que definen un estilo de enseñanza basados en la psicología y en la pedagogía (Romero, 2016)".

Para Sarmiento (2007) las teorías de aprendizaje buscan explicar los procesos internos cuando se aprende; procesos de adquisición de habilidades intelectuales, de información y/o conceptos, etc.

2.1.1 Teoría Conductista

La teoría conductista se basa en el estudio del aprendizaje mediante el condicionamiento y supone innecesarios los estudios de procesos mentales superiores para la comprensión de la conducta humana. De acuerdo con Henson & Eller, (2000) el aprendizaje ocurre cuando el individuo muestra cierta conducta o respuesta, producto de un estímulo ambiental específico. Muchos autores conductistas afirman que sólo se debe hablar de aprendizajes observables y medibles objetivamente (Sarmiento, 2007).

Algunos de los autores más representativos del conductismo son Ivan Pavlov, John Watson, Edwin Guthier, Edward Thorndike y B. F. Skinner.

Para sarmiento (2007) el conductismo de Watson se basa en las conexiones Estímulo-Respuesta y afirma que el aprendizaje es el resultado de un acondicionamiento clásico, o sea, formar nuevas conexiones Estímulo-Respuesta. Mientras que Skinner considera tres elementos fundamentales: estimulo discriminativo, respuesta operante y estímulo reforzante. Entre los programas de enseñanza conductista se destaca la ejercitación y los tutoriales, debido a sus buenos resultados de aprendizaje memorístico y algorítmico, pero sin impulsar la comprensión del sujeto.

Según Romero (2016) en la práctica docente, el conductismo es una teoría obsoleta pero no por ello poco efectiva; su desarrollo depende del apoyo que el docente utilice en otras teorías considerando siempre elementos muy importantes como el contenido que se enseña, a quienes se enseña y los objetivos que se persigue alcanzar a través de la enseñanza.

En conclusión, se puede asumir que las metodologías basadas únicamente en la corriente conductista son eficaces a la hora de enseñar algoritmos o definiciones precisas, pero ya que no exigen la comprensión por parte del estudiante, estos aprendizajes son propensos a caducar o ser olvidados por el estudiante con el paso del tiempo y el cese de la práctica.

2.1.2 Teoría Constructivista

Sarmiento (2007) afirma que, para la corriente constructivista, el sujeto adquiere el conocimiento mediante un proceso de construcción individual y subjetivo, por lo que sus expectativas y su desarrollo cognitivo determinan la percepción que tiene del mundo. En esta corriente destacan autores como Piaget, Ausubel o Gagné.

Formalmente Carretero (1997) entrega una sólida definición de lo que es el constructivismo, que se detalla a continuación.

> Básicamente puede decirse que es la idea que mantiene que el individuo —,tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos— no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista,

el conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción del ser humano. ¿Con qué instrumentos realiza la persona dicha construcción? Fundamentalmente con los esquemas que ya posee, es decir, con lo que ya construyó en su relación con el medio que le rodea (Carretero, 1997)

Es decir, el estudiante construye sus conocimientos, vinculando aspectos ambientales, sociales, externos, y también aspectos internos, conocimientos previos, disposición, motivación, actitudes. Así, el conocimiento humano no es una copia de la realidad, ni una invención propia, sino una construcción que vincula lo conocido, con lo que le rodea. Por otra parte, Díaz Barriga (2004) asume que este proceso de construcción depende de dos aspectos fundamentales: los conocimientos previos o la representación que se tenga de la nueva información o de la actividad o tarea a resolver, y la actividad externa o interna que el aprendiz realice al respecto.

Para Díaz Barriga (2004), el aprendizaje escolar desde la concepción constructivista se sostiene en la idea de que la finalidad de la educación es promover los procesos de crecimiento personal del alumno en el marco de la sociedad en la que está inserto. Estos aprendizajes no se producirán de manera totalmente satisfactoria sin la participación del alumno en actividades específicas intencionadas, planificadas y sistemáticas, donde se logre propiciar en el estudiante una actividad mental constructiva.

En conclusión, un proceso de enseñanza-aprendizaje orientado por la corriente constructivista requiere la aplicación de actividades intencionadas, planificadas y diseñadas para que el estudiante, vinculando sus conocimientos previos con los que debe aprender, configure o construya su propio conocimiento.

El aprendizaje significativo

Los aprendizajes se añaden al registro de comportamiento (de la persona) y la memoria es la encargada de que este aprendizaje sea duradero, ella es fundamental pues garantiza la continuidad de que aprendido y de poder seguir aprendiendo.

Para Davini (2008) el aprendizaje implica retención, esto es la conservación de la experiencia previa, que puede ser sensorial o apoyada por las representaciones mentales y la comprensión. La conservación en la memoria será mucho más relevante si está acompañada por la comprensión y la reflexión, ahí es cuando hablamos de aprendizaje significativo.

Según Rodríguez (2011) la teoría del aprendizaje significativo es la propuesta que hizo Ausubel en 1963 en un contexto en el que, ante el conductismo imperante, se planteó como alternativa un modelo de enseñanza-aprendizaje basado en el descubrimiento, que privilegiaba el activismo y postulaba que se aprende aquello que se descubre. Ausubel entiende que el mecanismo humano de aprendizaje por excelencia para aumentar y preservar los conocimientos es el aprendizaje receptivo significativo, tanto en el aula como en la vida cotidiana. Este tipo de aprendizaje necesita de una intensa actividad participativa de quienes están aprendiendo: reflexión, debate y descubrimiento de relaciones.

Para facilitar el logro de aprendizajes significativos existen condiciones básicas que beneficiaran la enseñanza, según Davini (2008) estas condiciones son:

- El contenido que se enseña debe guardar un orden lógico y estructurado.
- El contenido que se enseñe debe ser asimilado por el que aprende.
- Aquello que se aprende y el modo como se enseñe se relacionen con los intereses de quienes aprenden.
- Lo que se aprenda debe tener aplicabilidad al contexto particular o pueda ser transferido a las prácticas de quien aprende.

2.1.3 Teoría Sociocultural

Como ya se dijo, el constructivismo es una teoría de aprendizaje basada en el supuesto de que los seres humanos construyen su propia concepción de la realidad y del mundo en el que viven, pues la teoría sociocultural sigue la misma línea, pero pone énfasis en el rol importante que ocupa la interacción social en el desarrollo cognitivo.

Para Sarmiento (2007) la actividad del estudiante supone una práctica social mediada, al utilizar algunas herramientas y signos al momento de aprender, de esta forma se cierra un circulo dialéctico en que por un lado el sujeto que aprende transforma la cultura, y por otro la interioriza. Vigotsky (1979), supone la importancia de las actividades con significado social de la conciencia. Para él, el medio social es crucial para el aprendizaje que se produce por la integración de factores sociales y personales. De esta forma el entorno social tiene importante influencia sobre la cognición por medio de instrumentos y signos, sus objetos culturales, su lenguaje e intuiciones sociales.

Posteriormente el mismo Vigotsky (1994), insiste que el aprendizaje sólo se produce cuando los instrumentos, signos, símbolos y las normas de interacción social pueden ser incorporadas por los estudiantes en función a su desarrollo previo, vale decir, el aprendizaje depende del desarrollo potencial del estudiante. Para definir la relación que hay entre el desarrollo del estudiante y el aprendizaje, se hace necesario determinar lo que el estudiante es capaz de realizar por sí solo, o con la ayuda de otros.

Según Davini (2008), Vigotsky define la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) como "el espacio en que, gracias a la interacción y la ayuda de otros, una persona puede trabajar y resolver un problema o realizar una tarea de cierta forma y con un nivel que no sería capaz de forma individual". Esto permite a Vigotsky considerar dos niveles en la capacidad del alumno: primero, el límite de lo que puede realizar él por sí solo, denominado Nivel de Desarrollo Real, y luego, el límite de lo que el alumno puede realizar con la ayuda de otros, a esto denomina Zona de Desarrollo Potencial.

La distinción en niveles de la capacidad del estudiante facilita la creación y diseño de estrategias de enseñanza acordes a la inteligencia de cada individuo y la forma en que ellos adquieren su conocimiento, además, fortalece las relaciones sociales y contribuye al mejoramiento de las interacciones verticales (docente alumno) y horizontales (alumno-alumno).

2.2 Proceso de Enseñanza – Aprendizaje

A continuación, se entregan algunos aspectos teóricos relevantes acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje.

2.2.1 La enseñanza

Entendiendo la enseñanza como la transmisión de conocimientos, ideas, experiencias, habilidades o hábitos a una persona que no los tiene. Según Davini (2008) al considerar la enseñanza como una relación entre personas activas y dotadas de sentidos propios, quien enseña puede recuperar el control de esta dinámica, potenciar distintos resultados y ampliar las posibilidades, considerando las siguientes acciones:

- Guiar y apoyar a los alumnos para que trabajen y piensen por sí mismos.
- Ayudar a problematizar los contenidos que se abordan.
- Promover el intercambio entre los estudiantes y el trabajo cooperativo.
- Favorecer la participación en diversas actividades.
- Facilitar que los estudiantes puedan participar de la planificación de sus actividades de aprendizaje y de la valoración de sus procesos.
- Habilitar y estimular el proceso de trasferencia de los aprendizajes a las prácticas, en el contexto particular en el que se encuentran.

Las prácticas de enseñanza son múltiples y variadas, y son objeto de diversas teorías. Pero, en términos generales, existen dos grandes concepciones acerca de la enseñanza: como instrucción y como guía.

Se entiende la enseñanza como instrucción cuando el docente actúa como el transmisor del conocimiento. Aquí los alumnos incorporan los procedimientos, los conocimientos o los conceptos a partir de la acción de quien enseña, a través de la escucha activa, la observación del modelo y la reflexión interna.

Por otro lado, para Davini (2008) en la enseñanza entendida como Guía el docente es un guía sistemático y metódico, pero el papel central de la actividad está en los alumnos, a través de la observación directa de algunos fenómenos, la búsqueda y la indagación activa, la resolución de problemas, la reflexión activa y la originalidad.

En la realidad la enseñanza no adopta un solo enfoque, sino que asumen una orientación general en algún momento dado, o con mayor énfasis, pero integrando momentos de ambas orientaciones en la secuencia metódica de la enseñanza.

Así, cualesquiera sean las concepciones que orienten a la enseñanza, ésta implica necesariamente la propuesta de una secuencia metódica de acciones, sea con mayor orientación hacia la instrucción o hacia la guía, en la que quienes aprenden puedan elaborar su aprendizaje, a través de la reflexión interna o de una actividad participativa. Siguiendo a Davini (2008), los docentes deben tener en cuenta tanto los contenidos como el ambiente pues siempre es necesario que los que enseñan reflexionen sobre estos, ampliando la visión y la conciencia en la acción de enseñar.

2.2.2 El aprendizaje

Según Davini (2008) "el aprendizaje representa un cambio o una modificación del comportamiento de carácter duradero y estable", en otras palabras, un crecimiento, un cambio de estado. Para la misma autora, las teorías de aprendizaje han buscado diferenciar los comportamientos de origen innato a aquellos aprendidos. Los esfuerzos se centraron en el estudio de la génesis del desarrollo individual, en particular, el desarrollo de la inteligencia. Aun en los casos en que se resaltó la importancia de la influencia de los adultos y el papel de la instrucción, los estudios más difundidos o que dominaron el espacio del debate se centraron en la infancia.

Así, tanto en la enseñanza como instrucción (que se centra en la mediación de quien enseña) y en la enseñanza como guía (centrada en la mediación social y del grupo de pares, con la guía de quien enseña), la división entre lo individual y lo social permanecen, como una división artificial. Así, el aprendizaje es siempre un proceso de construcción personal mediado socialmente.

Según Davini (2008) los procesos de construcción del conocimiento, son procesos intrapsicológicos referentes a la construcción de significados y que toman sentido al tener experiencias cotidianas y escolares y, con la revisión, modificación y construcción de esquemas de conocimiento. Así, se puede asumir que la potencialidad de los aprendizajes individuales y grupales depende de la combinación y la integración de las distintas mediaciones en la enseñanza:

- La consideración del contexto social y cultural situado en el que los sujetos participan.
- La disposición y la acción de quienes enseñan, guían, orientan y apoyan.
- Los recursos y las herramientas culturales, desde los objetos materiales hasta los recursos de información y conocimiento
- El ambiente de aprendizaje que se genere.
- Las interacciones con el grupo y la participación colaborativa.
- Las organizaciones en las que se desarrolla el aprendizaje, en la que no solo se adquieren conocimientos y habilidades, son también la cultura y los procedimientos tácticos.

De acuerdo a la misma autora, el aprendizaje siempre necesita de la interacción social que se da entre el profesor, del grupo de pares y del ambiente de organización, entonces es posible asumir que el aprendizaje implica siempre un proceso de construcción y reelaboración de lo aprendido según el sujeto o estudiante.

Al momento de aprender, el alumno transforma y modifica cada aprendizaje; y cada profesor puede advertir que lo que se enseña no es asimilado pasivamente por los estudiantes. Los alumnos son diversos y es importante no coartar su libertad de pensar por sí mismos.

2.3 Enseñanza de las matemáticas

Godino (2003) presenta algunas concepciones sobre las matemáticas que se considera prudente mostrar, pues hace una clara diferenciación en las ideas intuitivas o primitivas con que los docentes preparan sus clases. El mismo autor asegura que las creencias del docente sobre la naturaleza de las matemáticas son un factor importante que condiciona la actuación de los docentes en su clase, mostrándolo en dos corrientes.

Matemática como entes existentes

Hay docentes que piensan en la matemática como objetos con existencia propia (aunque no necesariamente material). Así, los objetos tales como: triángulo, suma, fracción, y muchos más existen, tal como existe un árbol o un animal. Por ello, la tarea del docente es ayudar a los niños a descubrir su existencia, ya que son independientes de las personas que los usan y de las situaciones a las que son aplicables. Para estos docentes, enseñar matemáticas se reduce a presentar estos objetos, de la misma forma que para enseñarles que es un elefante bastaría llevarlos al zoológico.

Con esta concepción, la mejor forma de enseñar matemáticas sería enseñar primero las definiciones y propiedades (lo que se considera saber matemáticas), pasando a segundo plano la aplicación de estos conceptos o la resolución de problemas.

Matemática como construcción social

En cambio, hay docentes que conciben la matemática como el resultado del ingenio y la actividad humana (un constructo social), tal y como la música, literatura o el lenguaje. Estos docentes creen que las matemáticas han sido inventadas por la necesidad de resolver diversos problemas, como el intercambio de objetos, comercio, construcciones, guerra, etc.

Ellos consideran que la formalidad hoy existente de los objetos matemáticos, es el resultado de un proceso de negociación socio-cultural, donde quienes han creado estos objetos deben organizarse para definir las reglas de funcionamiento, de modo que cada objeto encaje en todo el constructo matemático.

La historia de las matemáticas muestra que tanto las definiciones, como las propiedades y los teoremas enunciados por matemáticos son falibles y están sujetos a cierta evolución. De acuerdo a esto, Godino (2003) afirma que en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es natural observar dificultades y errores por parte de los estudiantes en su proceso de aprendizaje, pero que es posible aprender de esos mismos errores. Esta posición es adoptada por las teorías psicológicas constructivistas sobre el aprendizaje de las matemáticas.

En resumen, la concepción que el docente asuma acerca de las matemáticas, condiciona su forma de enseñar las mismas (como un todo existente, o como un constructo social, entre otras). La concepción que motiva esta investigación es la matemática como una construcción social, como una actividad humana.

2.4 Educación Matemática Realista

En las páginas siguientes se entregan aspectos teóricos fundamentales relativos a la corriente de la Educación Matemática Realista de Freudenthal, en que se sustenta esta investigación. Se comienza con una breve introducción a la corriente didáctica y su precursor, para luego abordar las ideas centrales de la misma, posteriormente se detallan los (asi llamados) principios de la educación matemática realista.

2.4.1 Inicios de la EMR

Mucha de la popularidad de Hans Freudenthal proviene de su amplia actuación como fundador y participante activo en el Grupo Internacional de Psicología y Educación Matemática (PME) y la Comisión Internacional para el Estudio y el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática (CIEAEM) en cuyas reuniones manifestaba oposición a las corrientes pedagógico-didácticas y a las “innovaciones” en la enseñanza vinculadas a la matemática que se propiciaban a mediados del siglo pasado, tales como la teoría de los objetivos operacionales, los test estructurados de evaluación, la investigación educativa estandarizada, la aplicación directa del estructuralismo y el constructivismo de Piaget en el aula, la separación entre investigación educativa, desarrollo curricular y práctica docente y la matemática “moderna” en la escuela. Según Rico (1991) no es posible entender el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en Europa durante la última mitad del siglo XX sin considerar los importantes aportes, contribuciones e intervenciones de Freudenthal.

Freudenthal (1980) entiende que el término “educación” encierra tanto el logro de los objetivos de la instrucción formal como el desarrollo de actitudes de toda clase: morales, sociales, emocionales, religiosas y cognitivas. Todo esto hará del ser humano un hombre culto, formado, que es uno de los objetivos más relevantes de la educación.

Ideas Centrales de la EMR

El aporte de Freudenthal que interesa a los fines de este seminario son las bases teóricas de la Educación Matemática Realista. Según Bressan et al. (2005), la Educación Matemática Realista no pretende ser una teoría general del aprendizaje (como el constructivismo, por ejemplo), sino que más bien es una teoría global de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que según la misma autora, se basa en las siguientes ideas centrales:

- Pensar la matemática como una actividad humana (a la que Freudenthal denomina matematización), de modo tal que debe existir una matemática para todos. El quehacer matemático es una actividad estructurante u organizadora que está al alcance de todos los seres humanos.
- Aceptar que el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos niveles donde los contextos y los modelos poseen un papel relevante como vehículos entre un nivel y otro, y que ese desarrollo se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado reinvención guiada, en un ambiente de heterogeneidad cognitiva.
- Desde el punto de vista curricular, la reinvención guiada de la matemática que hacen los estudiantes, en tanto actividad de matematización, requiere de la fenomenología didáctica del docente, como metodología de la investigación, que es la búsqueda de contextos y situaciones que generen la necesidad de ser organizados matemáticamente, siendo las dos fuentes principales de esta búsqueda la historia de la matemática y las invenciones y producciones matemáticas espontáneas de los estudiantes.

Es decir, se puede hablar de Educación Matemática Realista cuando una situación propuesta a los estudiantes los motive a trabajar y utilizar su sentido común en la resolución de la misma, de tal forma que el conocimiento matemático se genera al reinventar las ideas y conceptos matemáticos. Para encontrar situaciones afines a los objetivos del docente, dos buenas fuentes son la historia de las matemáticas y las producciones espontáneas de los estudiantes.

Siguiendo a Alsina (2009), en sus inicios la EMR se sustentó en cuatro características esenciales: el uso de contextos como vehículos para el crecimiento de lo concreto a lo abstracto; el uso de modelos como columna vertebral del progreso; el uso de las construcciones y producciones libres de los estudiantes en los procesos de enseñanza/aprendizaje; y las interrelaciones entre los diversos ejes del curriculum de matemáticas. Características que están bien ligadas a las Ideas Centrales de Freudenthal antes expuestas, pero que se formalizan actualmente en los denominados Principios de la Educación Matemática Realista.

2.4.2 Principios de la Educación Matemática Realista

A continuación, se detallan las seis ideas fundamentales que guían esta corriente didáctica, y que eran denominados por Freudenthal (1991) como *herramientas conceptuales para una teoría de la educación matemática"*, los ahora conocidos como Principios de la Educación Matemática Realista.

Principio de Actividad

La idea fundamental de Freudenthal (1973) es que la matemática debe ser concebida como una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder y la mejor forma de aprenderla es haciéndola. Asimismo, propicia una matemática para todos, reconociendo que no todos los estudiantes han de llegar a ser matemáticos, y que para una mayoría la matemática a utilizar será la que les ayude a resolver los problemas de la cotidianeidad.

> El quehacer matemático es una actividad estructurante u organizadora de matematización que está potencialmente al alcance de todos los seres humanos (Freudenthal, 1991)

De acuerdo al mismo autor, para el estudiante como matemático-investigador, hacer matemática (matematizar) es más importante que aprenderla como producto terminado. El énfasis no está en aprender los algoritmos, sino en algoritmizar, no en el álgebra sino en la actividad de algebrizar, no en las abstracciones sino en la acción de abstraer, no en la forma y la estructura, sino en formalizar y estructurar.

> Las cosas están al revés si se parte de enseñar el resultado de una actividad más que de enseñar la actividad misma -hecho que denomina como inversión anti didáctica- (Freudenthal, 1993).

Bressan (2016) caracteriza la matematización como un proceso que involucra las siguientes habilidades:

- Reconocer características esenciales en situaciones, problemas, procedimientos, algoritmos, formulaciones, simbolizaciones y sistemas axiomáticos.
- Descubrir características comunes, similitudes, analogías e isomorfismos.
- Ejemplificar ideas generales.
- Encarar situaciones problemáticas de manera paradigmática.
- La irrupción repentina de nuevos objetos mentales y operaciones.
- Reflexionar acerca de la actividad matematizadora, considerando los fenómenos en cuestión desde diferentes perspectivas.
- Buscar atajos y abreviar estrategias y simbolizaciones iniciales con miras a esquematizarlas, algoritmizarlas, simbolizarlas y formalizarlas.

Desde la perspectiva realista, se propone que la matemática posee valor educativo en la medida en que permite comprender y participar de los modos en que esta disciplina organiza distintas esferas de nuestro entorno social y natural. De igual forma, en palabras de Bressan (2016) se tiene que una idea central, sino la más importante dentro de esta corriente, es que la enseñanza de la matemática debe ser conectada con la realidad, permanecer cercana a los alumnos y ser relevante para la sociedad, en orden a constituirse en un valor humano.

La matemática, como actividad humana, es una actividad de resolución de problemas, de reconocer (o encontrar) problemas, pero es también una actividad de organización de la disciplina misma. Según Freudenthal (1973), en gran medida la matemática surge históricamente como herramienta para organizar y estructurar el mundo real, por ello su enseñanza debe basarse también en la organización de este tipo de situaciones. Lo que no implica restringirse a aquellos fenómenos del mundo real, dado que sería una limitante para que los estudiantes aprendan a operar dentro de la misma matemática. Se trata entonces, de acuerdo a Zolkower et Al (2006), de que quienes en principio no poseen suficientes herramientas matemáticas, las reinventen a partir de resolver problemas en contextos y situaciones realistas.

Tomar problemas de la vida diaria como punto de partida para matematizar, lo que permite a los estudiantes imaginar las situaciones en cuestión y, poniendo en juego su sentido común y sus propias estrategias de cálculo y de resolución, avanzar hacia niveles superiores de matematización. Según Alsina (2009) esto puede trabajarse en el aula, pues matematizar involucra esencialmente generalizar y formalizar, más concretamente, actividades como modelizar, simbolizar, esquematizar y definir, que conllevan una mayor reflexión.

Principio de Realidad

Para la corriente de la EMR, la matemática surge como organización de la realidad (lo que se denomina matematización), por tanto, el aprendizaje matemático debe tener origen en esa misma realidad. Esto no sólo significa mantener a esta disciplina conectada al mundo real o existente, sino también a lo realizable, imaginable o razonable para los alumnos. Freudenthal propone una buena definición de contexto o situación realista:

> Un contexto es ese dominio de la realidad el cual, en algún proceso de aprendizaje particular, es revelado al alumno en orden a ser matematizado […] Yo prefiero aplicar el término `realidad´ a lo que la experiencia del sentido común toma como real en un cierto escenario (Freudenthal, 1991)

Desde este punto de vista, resultará tan *real* para un estudiante de secundaria trabajar sobre los costos asociados a una tienda de fotocopias, como posteriormente operar con las funciones que modelan la misma situación. Es necesario poner el énfasis en la noción que la EMR tiene de *lo realista,* ya que, por ejemplo, para una persona con estudios matemáticos superiores, una EDO (Ecuación Diferencial Ordinaria) es tan real, como lo son ladrillos para un estudiante de primaria.

Para Bressan (2015) los problemas propuestos para los estudiantes inicialmente deben estar en el contexto de su vida diaria, y así los alumnos puedan imaginar las situaciones en cuestión, utilizar su sentido común y poner en juego procedimientos de cálculo, estrategias de resolución y modelos matemáticos que mejor sirvan para organizarlas. Para el docente en búsqueda de estas situaciones, el contexto se debe considerar un aspecto intrínseco a las mismas y no como un simple camuflaje a eliminar o apartar para resolverlas.

Rabino (2001) argumenta que la matemática como actividad humana, busca dilucidar y organizar aspectos del mundo que nos rodea, pues los conceptos matemáticos no resultan trasparentes para nosotros como aparecen en los libros científicos, sino que la mayoría de las personas accede a ellos a través del uso que le da en su vida. La misma autora afirma que "Los conceptos matemáticos se adquieren en función de los fenómenos para los cuales son instrumentos útiles de organización y explicación".

Según Freudenthal cuando los contextos en la EMR son significativos para el estudiante se constituyen en puntos de partida de su actividad matemática, promoviendo el uso de su sentido común y de sus estrategias informales, permitiéndoles luego avanzar por sí mismos hacia niveles de mayor formalización. También Castiglione (2015) reconoce que el trabajo en torno a contextos y situaciones problemáticas realistas contribuye, no sólo a la articulación o integración de los distintos ejes curriculares de la matemática escolar, sino también y, fundamentalmente, al cierre de la brecha entre la matemática escolar y el sentido común.

Para Freudenthal (1991) "(La realidad) no es una cosa. Es tantas coas como gente hay y para una persona puede ser tantas cosas como posee en su comprensión interna y circunstancias externas", entonces se hace importante enfatizar en el significado del término *realista* que esta corriente utiliza. Puesto que viene del holandés "*zich realiseren"* que significa la posibilidad de hacer algo realidad en la mente; es válido asumir que una situación es realista si se presenta ante el sujeto que aprende como algo razonable, imaginable, realizable o susceptible. Así, de acuerdo a Rabino et

Al (2001), un contexto realista puede también ser de ficción, basta que los estudiantes lo puedan experimentar como real, es decir, que puedan establecer una relación real con el mismo, comprendiendo lo que ellos están haciendo.

Estos contextos no implican necesariamente problemas de enunciado, de acuerdo a la misma autora, también pueden ser dados a través de dibujos o aún de expresiones simbólicas puras, como un collar, relacionadas en tanto que los alumnos puedan establecer vinculaciones entre ellas para encontrar las soluciones requeridas.

Algunos contextos paradigmáticos propuestos por la EMR son:

- Los patrones en los collares para trabajar regularidades,
- Las formas de las cajas de empaque para estudiar prismas,
- La ubicación de un incendio desde distintos miradores, para trabajar coordenadas, rectas y pendientes, etc.
- Los dobleces de una hoja de papel, para estudiar funciones exponenciales y logarítmicas.

Además de los contextos situacionales, vinculados a la cotidianeidad, Freudenthal considera contextos realistas también a aquellos puramente matemáticos (contextos desnudos o puros), en tanto sean significativos para los niños presentándose a ellos como juegos o desafíos: buscar regularidades en tablas y tableros, construir pirámides numéricas trabajando operaciones inversas, completar cadenas de operaciones buscando relaciones entre los números que las integran, etc.

Para no generalizar y banalizar el concepto de contexto realista es importante tener en cuenta el carácter relativo del mismo, pues de acuerdo a Bressan (2016) el que un contexto, sea o no realista, depende de la experiencia previa de los alumnos y/o de su capacidad para imaginarlo o visualizarlo. Muchos de estos contextos se tornarán modelos mentales a los cuales los alumnos podrán acudir para recordar estrategias de solución utilizadas en ellos. Así, los contextos realistas cumplen un papel esencial en el aprendizaje matemático de los alumnos, en tanto:

- Son puntos de partida en el proceso de enseñanza y aprendizaje para producir matemática y dominios de aplicación de la misma.

- Bien elegidos, resultan de interés para los alumnos.
- Se constituyen en objetos de trabajo, tornando accesible el contenido matemático, y permiten que los estudiantes trabajen en diferentes niveles de conceptualización en base a sus posibilidades.
- Promueven el uso del sentido común y movilizan los conocimientos informales de los alumnos y la creación de modelos.

La tarea del docente es proponer situaciones realistas donde surja la necesidad para el estudiante de matematizar, estas situaciones se encentran fundamentalmente en dos fuentes: la historia de las matemáticas y las producciones espontáneas de los estudiantes. La búsqueda de estas situaciones es lo que Freudenthal (1983) denomina fenomenología didáctica.

En conclusión y como resumen de este principio se pueden considerar las palabras de Van den Heuvel-Panhuizen (1994):

> Un contexto es un evento, una proposición o situación derivada de la realidad, la cual es significativa para los alumnos o la pueden imaginar y conduce a usar métodos matemáticos desde su propia experiencia. Provee significado concreto y apoyo para las relaciones y operaciones relevantes de la matemática. Las situaciones podrían ser tomadas desde experiencias cotidianas, tales como los recorridos del colectivo o las compras y el manejo del dinero. Además […], los contextos pueden encontrarse en la matemática misma – el mundo de problemas con números puros y las relaciones numéricas, tales como el contexto de los números primos.

Principio de Reinvención

Para Freudenthal, la matemática no es otra cosa que una forma de sentido común, sólo que más organizada.

> “Para transformarlo en matemática genuina y para progresar, el sentido común debe ser sistematizado y organizado. Las experiencias del sentido común cristalizan en reglas (por ejemplo, la conmutatividad de la suma) y estas reglas se transforman de nuevo en sentido común, pero a un nivel más alto, constituyendo así la base para una matemática de orden aún mayor, una jerarquía tremenda, construida gracias a una notable interacción de fuerzas” (Freudenthal, 1991).

Este proceso se realiza en las aulas conjugando los roles y responsabilidades del docente y del alumno a través de una forma de interacción denominada “reinvención guiada” y entendida como “un balance sutil entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar” (Freudenthal,1991).

En palabras de Bressan (2005) la educación matemática debe dar a los alumnos la oportunidad guiada por el maestro de reinventar la matemática (no crean, ni descubren, sino que reinventan modelos, conceptos, operaciones y estrategias matemáticas con un proceso similar a los que usan los matemáticos al inventarlas). La misma Bressan (2016) argumenta que el docente posee un papel bien definido en tanto sujeto que media entre los alumnos y las situaciones problemáticas en juego, entre los alumnos entre sí, entre las producciones informales de los alumnos y las herramientas formales, ya institucionalizadas, de la matemática como disciplina.

Para Freudenthal (1991) orientar adecuadamente este proceso exige la capacidad de anticipación, observación (y auto-observación) y reflexión del docente acerca de los aprendizajes a corto y largo plazo de sus alumnos. Esto le permitirá conocer las comprensiones y habilidades de los mismos, para organizar la actividad en el aula y dar lugar a esta reinvención y a los cambios de nivel.

El mismo Freudenthal (1991), argumenta que el aprendizaje, lejos de ser continuo y gradual, presenta discontinuidades, es decir, saltos repentinos de reinvención (evidenciados por los alumnos en las “experiencias de ajá”, en la toma de atajos en sus estrategias, los cambios de puntos de vista, el uso de modelos de distintos niveles de formalización), y va de estructuras complejas y ricas del mundo real a las más generales, abstractas y formales de la matemática.

Según los principios de la EMR, para Castiglione (2015), el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática requiere una función de guía por parte del docente como un docente capaz, no sólo de utilizar diestramente los modelos, sino también de identificar los momentos claves en su origen en las estrategias inventadas por los alumnos. La función docente como guía incluye:

- Adaptar las secuencias curriculares en uso, a las necesidades y habilidades de los alumnos.

- Adoptar un rol pro-activo en relación con los procesos de simbolización y modelización.
- Analizar e interpretar el trabajo oral y escrito de los alumnos, con particular atención a los momentos claves en los procesos de esquematización y formalización progresivas.
- Organizar o estructurar la discusión en torno a las soluciones diversas propuestas por los alumnos, de modo tal que la trayectoria de niveles de menos a más formales, eficientes, sofisticados y generalizables se haga visible.

En resumen, la enseñanza de la matemática, que según Freudenthal (1991) toma la forma de reinvención guiada, es un proceso en que los alumnos re-inventan ideas y herramientas matemáticas a partir de organizar o estructurar situaciones problemáticas en interacción con sus pares y bajo la cuidadosa guía del docente.

Principio de Niveles

El proceso de reinvención se completa con lo que Treffers (1987) llama "matematización progresiva". Los alumnos deben comenzar por matematizar un contenido o tema de la realidad para luego analizar su propia actividad matemática. Este proceso de matematización fue profundizado por Treffers y retomado por Freudenthal (1991) bajo dos formas:

- La de matematización horizontal, que consiste en la organización de situaciones del mundo real por medio de herramientas matemáticas, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación, la experimentación inductiva.
- La de matematización vertical, que toma matemática misma como objeto de estudio –se matematiza la matemática para hacerla más matemática-, que conlleva estrategias de reflexión, esquematización, generalización, prueba, simbolización y rigorización (limitando interpretaciones y validez), con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática.

Un ejemplo bien formulado para diferenciar los conceptos de matematización vertical y horizontal es entregado por Gravemeijer (2000):

> Que cierto aspecto de la actividad matemática de una persona sea llamado 'vertical' u 'horizontal' depende si la actividad incluye alguna extensión de su realidad matemática. Una actividad de simbolización, por ejemplo, podría ser una actividad de rutina para un alumno. Esto sería un caso de matematización horizontal. Sin embargo, si la misma forma de simbolización involucrara para otro alumno una nueva invención, entonces esto implicaría matematización vertical. La matematización vertical es más claramente visible si un alumno explícitamente reemplaza su método de resolución por uno de nivel superior. Es decir que se trata de un cambio a un método de solución, o a una descripción más sofisticada, mejor organizada o, en pocas palabras, más matemática (Gravemeijer, 2000).

En este proceso de matematización progresiva, la EMR admite que los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión. Según Freudenthal (1971) estos niveles son: situacional, referencial, general y formal; y están ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva, sin constituir una jerarquía estrictamente ordenada.

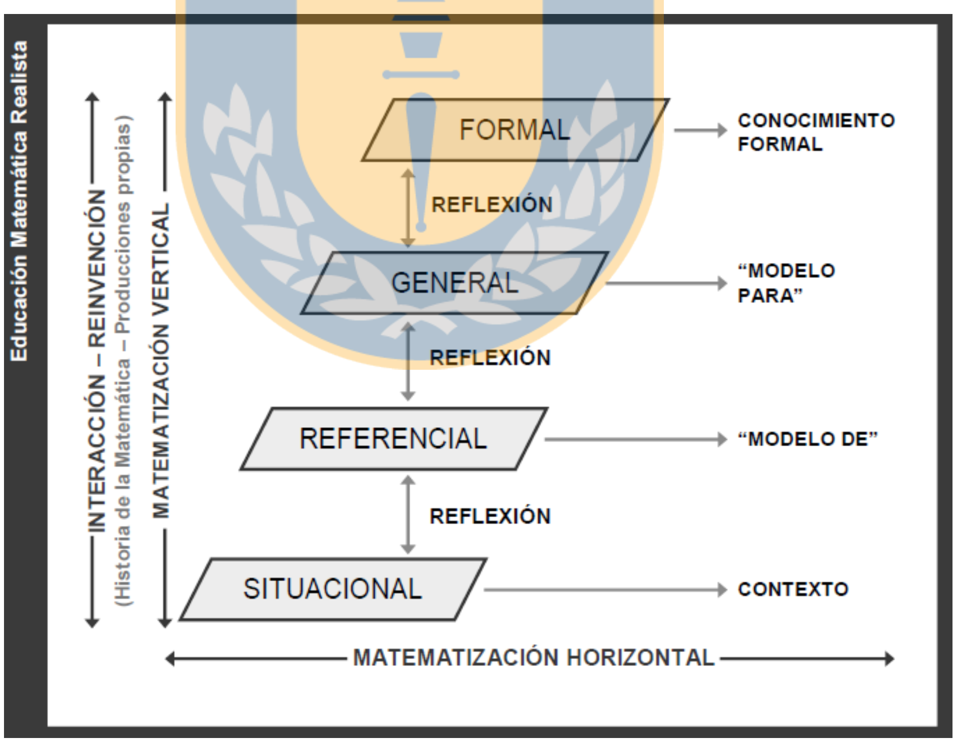


Ilustración 1. Niveles de Matematización. Bressan (2016)

La Ilustración 1 esquematiza el proceso de Matematización Progresiva, cuyo pasaje está favorecido por la reflexión sobre los logros del nivel anterior. Puesto que, como afirma Freudenthal (1971) “la evolución entre niveles se da cuando la actividad en un nivel es sometida a análisis en el siguiente, el tema operatorio en un nivel se torna objeto del siguiente nivel”

Siguiendo a Bressan (2016) en el nivel situacional se da la interpretación de la situación problemática y el uso de estrategias vinculadas totalmente al contexto de la situación misma. Los estudiantes, apoyándose en sus conocimientos informales, en su sentido común y su experiencia, pueden identificar y describir la matemática que yace en el contexto, visualizar, esquematizar y formular el problema de diferentes formas, descubrir relaciones y regularidades, reconocer analogías con otros problemas. Este proceso es denominado *matematización horizontal.*

Para Gallego et Al (2013) en el nivel referencial se inicia el proceso de *matematización vertical*, entendido como el análisis y la reflexión dentro de la matemática misma. Siempre y todavía en referencia a la situación particular dada, los estudiantes elaboran representaciones o modelos (concretos, gráficos, notacionales), descripciones, procedimientos personales y conceptos que esquematizan el problema, es decir, surgen “*modelos de*” la situación particular original.

El nivel general se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias, que supera la referencia al contexto. Siguiendo a Bressan (2016) por la reflexión sobre los conceptos, procedimientos, estrategias y modelos utilizados en el nivel anterior, surgen aspectos generalizables de los mismos y los alumnos pueden concluir que son utilizables para un conjunto de problemas homólogos a los estudiados, dando lugar a “*modelos para”* la resolución de situaciones similares,

En el último nivel, el formal, el trabajo se focaliza en el uso comprensivo de los conceptos, procedimientos estándares y notaciones convencionales, propios de rama de la matemática que se está trabajando.

De acuerdo con Bressan (2016) estos niveles son dinámicos y un alumno puede funcionar en diferentes niveles de comprensión para contenidos distintos o partes de un mismo contenido. Más que describir en forma exacta qué puede hacer el alumno en cada uno sirven para seguir sus procesos globales de aprendizaje. La idea es que los alumnos pueden revertir de un nivel a otro siempre que lo necesiten, ya que ninguno está totalmente separado y los de mayor jerarquía incorporan los conocimientos de los niveles inferiores.

> Comenzando desde la realidad, los alumnos pueden cruzar la frontera a la matemática por sí mismos, aprendiendo a estructurar, organizar, simbolizar, visualizar, esquematizar y mucho más. En resumen, estructurando el proceso de matematización horizontal por sí mismos. Pero también, sea simultánea o posteriormente, ellos pueden progresar en su tratamiento del material matemático dentro de la matemática misma, incrementando su eficiencia de procedimientos, aplicación de abreviaturas, reemplazando el lenguaje relativo a la propia lengua por el lenguaje convencional de símbolos y variables, en otras palabras, por abstraer, generalizar, unificar y cuando es necesario especificar… (Bressan, 2016)

La reflexión que realizan los estudiantes sobre la propia actividad tiene un papel fundamental para el cambio de nivel pues exige un cambio de perspectiva e incluso a un cambio total.

> Uno aprende matemática haciéndola. Los alumnos primero deberían conocer qué están haciendo y lo que es aún más importante, deberían tener la oportunidad de pensar sobre lo que ellos y sus pares han hecho. Esto es la reflexión en el proceso de aprendizaje (Freudenthal, citado por Goffree, 1993).

Bressan (2005) asume que el proceso de matematización debe basarse en el análisis reflexivo del trabajo oral y escrito de los alumnos, con particular atención a los momentos claves (búsqueda de atajos, cambios de puntos de vista, creación o apropiación de modelos más elaborados, etc.) en los procesos de esquematización o formalización progresivas, y en organizar o estructurar las discusiones en torno a las soluciones propuestas por los mismos, de modo tal de hacer visible y explícita la trayectoria hacia niveles de generalización más formales, eficientes y sofisticados.

Para Gravemeijer (2002) los modelos en EMR constituyen representaciones de las situaciones donde se reflejan aspectos esenciales de los conceptos y relaciones matemáticas que son relevantes para solucionar la situación dada. El uso de modelos en la EMR dista del concepto generalizado de modelización matemática, como traducción de situaciones problemáticas a expresiones matemáticas que pueden funcionar como modelos. En esta corriente, el modelo es el resultado de organizar una actividad por parte del sujeto, sosteniendo una profunda implicación constitutiva entre modelo y situación.

Según Zolkower (2006) la EMR respeta los modelos que surgen de los propios alumnos y se acercan otros inspirados en las estrategias informales, ya sean utilizadas por los estudiantes, o que aparecen en la historia de la matemática. Así, el proceso de matematización progresiva se ve facilitado por el uso de modelos emergentes, en el sentido de que no son productos matemáticos preexistentes y orientados a un fin determinado, sino que surgen de la propia actividad organizativa de los estudiantes en torno a las situaciones realistas. Zolkower (2006) afirma que "el modelo es simplemente un intermediario, a menudo indispensable, a través del cual una realidad o teoría compleja es idealizada o simplificada con el fin de volverla susceptible a un tratamiento matemático formal".

Van den Heuvel-Panhuizen (2003) plantea que los modelos, para servir como puente entre los distintos niveles de matematización progresiva deben:

- Estar arraigados en contextos realistas, en el sentido de realizable o imaginable.
- Poseer suficiente flexibilidad como para poder ser aplicados en un nivel más avanzado o general.
- Apoyar la matematización vertical sin bloquear la vuelta al contexto que les dio sentido.
- Ajustarse a las estrategias informales de los alumnos –como si ellos los pudieran haber inventado–.
- Ser fácilmente adaptables a situaciones homólogas a la inicial

Según Bressan (2005) los modelos sirven como puente para sortear la distancia entre la matemática contextualizada e informal y la formal, permitiendo, por su flexibilidad, avanzar en los distintos niveles, modificarse en el tiempo e integrar otros contenidos. Los modelos que aparecen en el nivel situacional (modelos de situaciones particulares) van extendiéndose a otras situaciones y generalizándose con otro lenguaje, tornándose entidades en sí mismos, como herramientas (*modelos para*) para resolver situaciones variadas, haciendo posible un razonamiento matemático más formal. Los modelos así pensados favorecen la matematización vertical sin obstruir, si es necesario, la vuelta a la situación que les dio origen.

Principio de Interacción

Según Bressan (2005) en la EMR, se considera al aprendizaje de la matemática como una actividad social. La reflexión colectiva sobre las interpretaciones de la situación problema, de las distintas clases de procedimientos y justificaciones de solución y de la adecuación y eficiencia de los mismos, lleva a niveles de comprensión más altos. Así, para Bressan (2016) las interacciones sociales verticales (docente-alumno) y horizontales (alumno-alumno) ocupan un lugar central en la EMR, siendo clave para Dekker et al. (2004) el modo en que el docente maneja estos eventos con miras a maximizar oportunidades para la producción, el intercambio y la apropiación de ideas por parte de los alumnos.

La interacción lleva a la reflexión y a capacitar a los alumnos para llegar a niveles de comprensión más elevados. No se piensa en una clase homogénea en sus trayectos de aprendizaje, sino en individuos que siguen senderos propios. Sin embargo, esto no lleva a partir la clase en grupos con procesos similares, sino más bien a mantener toda la clase junta, como una unidad de organización, o al trabajo cooperativo en grupos heterogéneos. Dado que los problemas se seleccionan de manera que den lugar a soluciones apelando a diferentes niveles de comprensión, todos los alumnos pueden trabajar en ellos.

Para Gallego (2010) el trabajo en grupos heterogéneos (con alumnos de distinto nivel de habilidad y destreza matemática), con la guía de un docente hábil puede maximizar las oportunidades para generar o producir, intercambiar y apropiarse de ideas y facilitar el proceso de reinvención ya mencionado. Los alumnos son convocados a accionar y reflexionar: resuelven problemas matemáticos, formulan por sí mismos otros problemas, proponen, comparten, contrastan, justifican y evalúan ideas y herramientas matemáticas, utilizan diagramas, simbolizan y establecen relaciones matemáticas en momentos de trabajo individual, grupal y colectivo.

Principio de Interconexión (Estructuración)

Para Bressan (2016) la resolución de situaciones problemáticas realista a menudo exige establecer conexión y reclama la aplicación de un amplio rango de comprensiones y herramientas matemáticas. Por ello, la EMR no hace profundas distinciones entre los ejes curriculares, lo cual da una mayor coherencia a la enseñanza y hace posibles distintos modos de matematizar las situaciones bajo diferentes modelos y lenguajes, logrando alta coherencia a través del currículo. Freudenthal (1991) propicia la interrelación entre ejes tan pronto, tan fuertemente y con tanto tiempo como sea posible.

Siguiendo a Gallego (2010) la interrelación o entrecruzamiento de esta disciplina con otras se ve alentada por la selección de "buenos" problemas, es decir, de aquellos que son accesibles a todos los alumnos, que ofrecen distintos niveles de desafío, admiten diferentes estrategias de resolución y estimulan la creatividad, entre otras características.

Surge entonces la necesidad de que los docentes encuentren (o generen) buenos problemas, y así como la actividad principal de los alumnos es la de matematizar, la de los docentes según Freudenthal (1991) es la de *didactizar*, entendida como la actividad organizadora de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje. La didactización se da tanto a nivel horizontal como vertical. En su forma horizontal, los docentes actúan, observan y se auto-observan en el aula explicando sus propias prácticas (y las de otros). A nivel vertical, reflexionan, elaboran y formalizan sus propias herramientas didácticas para facilitar el proceso de matematización de los estudiantes. Las teorías desempeñan un papel importante en este proceso de didactización vertical. Este proceso se estructura a partir de la matematización progresiva de los alumnos, por lo que los docentes necesitan oportunidad para experimentar este proceso.

2.5 El currículo, la investigación didáctica y la capacitación docente desde la EMR.

De acuerdo a Bressan (2005) esta corriente concibe al currículo como un proceso que requiere del diseño de secuencias didácticas que, lejos de ser elaboraciones académicas restringidas a objetivos instruccionales, se enmarquen dentro de una filosofía educativa que busca explícitamente promover cambios en la enseñanza formalista y algorítmica de la matemática en las aulas. El motor de este proceso es la *Investigación para el desarrollo* (educativo), una metodología cualitativa/interpretativa basada en experiencias de aulas en las cuales se implementan secuencias didácticas y se observan, registran y analizan hitos, saltos y discontinuidades en el aprendizaje de los alumnos que serán analizados en equipo para mejorar los materiales de enseñanza en un proceso de ida y vuelta entre las trayectorias planificadas y su implementación.

Según Freudenthal (1991) *la investigación para el desarrollo* es una combinación de diseño curricular e investigación educativa, en la que la elaboración de actividades de enseñanza es un medio para explicar, elaborar, evaluar, ajustar y ampliar una teoría de enseñanza. Este tipo de investigación apunta a hacer evidente el proceso de diseño curricular y a explicarlo a través de la reflexión conjunta entre investigadores y docentes. Los resultados de lo que sucede en el aula al aplicar aquello que fue diseñado provisoria e hipotéticamente por el diseñador curricular, retroalimentan la continuación del trabajo en un proceso cíclico de discusión y testeo, y dan lugar a un producto teórico y empíricamente fundamentado que puede servir a otros docentes como marco de referencia para fundamentar sus propias decisiones.

Bressan (2005) propone la contradicción de pedir a los profesores que den a sus alumnos oportunidades para experimentar la matemática como actividad de reinvención, mientras que, en cursos de formación y capacitación docente, se les presentan teorías, propuestas y materiales didácticos prefabricados. Esto los priva de la oportunidad de apropiarse de herramientas fundamentales para el ejercicio de la profesión, incluidos los recursos teóricos y prácticos para didactizar a nivel horizontal y vertical. Para Van den Heuvel-Panhuizen (1999) la EMR está lejos de ser un paradigma acabado; se trata de una propuesta en estado permanente de desarrollo y transformación.

Entre los modelos recurrentemente utilizados por la corriente realista, Zolkower (2006) destaca: materiales didácticos manipulables: contadores, el dinero, collares de bolitas bicolor estructurado de diez en diez (Treffers, 1991); situaciones paradigmáticas: el colectivo (van den Brink, 1984), el restaurante de los panqueques (Streefland, 1991a), la reunión de padres, la fábrica de caramelos en paquetes de 10 unidades (Gravemeijer, 1994); esquemas: el modelo circular, la barra doble o de porcentajes, la tabla de razones (Middleton y otros, 1995; Middleton y otros, 1998, van den Heuvel-Panhuizen, 2003); diagramas: diagrama de árbol; modalidades de notación: el lenguaje de flechas, la notación de libreta y la tabla de combinaciones para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas (Reeuwijk, 1995); y procedimientos volcados simbólicamente como los algoritmos en columnas (Treffers, 1987).

2.5.1 Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática

El Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática (en adelante, GPDM), integrante de la fundación Grupo de Educación de Bariloche (GEB) está constituido por profesionales de la educación dedicados a estudiar, investigar y difundir el enfoque conocido como Educación Matemática Realista a través de cursos, publicaciones, experiencias y materiales para el aula.

El GPDM es un grupo altamente heterogéneo, tanto desde el punto de vista del nivel de conocimiento de la matemática de los participantes (lo integran maestros de nivel inicial y de primaria, profesores con títulos terciarios y universitarios, y hasta un doctor en Física, y una licenciada en Pedagogía de la Matemática) como por el tipo de aula en la que trabajan y la cantidad de años de experiencia, en el aula o en la formación y en la capacitación docente que poseen.

De acuerdo a Bressan (2006) lo que convoca al grupo, es el interés compartido por mejorar las prácticas de enseñanza de la matemática en el aula y enfrentar con herramientas más eficaces los problemas de aprendizaje que ahí surgen, tomando a la EMR como objeto de estudio. Vale aclarar que al presente no se limitan a este enfoque didáctico, sino que se analizan otras líneas didácticas anglosajonas, hispanas y francesas que han llamado la atención de los docentes participantes.

Entre los objetivos del GPDM se pueden encontrar:

- Participar de seminarios de estudio acerca de los distintos enfoques didácticos actuales y en especial, el de la Educación Matemática Realista.
- Estudiar problemas matemáticos, de naturaleza abierta y no rutinaria, para profundizar los saberes disciplinares, fomentando el intercambio de ideas, preguntas e inquietudes entre los docentes.
- Analizar, experimentar, observar y evaluar secuencias didácticas con el enfoque de la "matemática realista" implementadas en las aulas por los docentes del Grupo, con el objeto de investigar su incidencia en los procesos de aprendizaje matemático de los alumnos y en la práctica docente.
- Diseñar secuencias didácticas que reflejen los principios teóricos de la didáctica realista, para su posterior difusión en la capacitación y centros de investigación.
- Difundir este enfoque de la didáctica y los trabajos del Grupo en Congresos y Jornadas de Educación Matemática.
- Realizar cursos de capacitación a docentes interesados en conocer esta corriente.

Además de esta actividad central de los docentes, en el grupo se involucran en la resolución conjunta de situaciones problemáticas que ponen en evidencia los procesos de matematización de los alumnos, ya que exigen el uso de habilidades cognitivas de mayor nivel, instan al análisis y la interpretación y favorecen el proceso de modelización (dado que no admiten un método directo de solución, sino que demandan adaptar, combinar o inventar estrategias). El trabajo de distintos niveles de matematización permitió beneficiar la heterogeneidad del grupo promoviendo situaciones de intercambio que contribuyeron a la valorización mutua entre los integrantes y al enriquecimiento matemático y didáctico de todos.

2.6 Factores socio-afectivos en el aprendizaje

Gómez (2000), pionera en el ámbito del estudio de las emociones en el aprendizaje de las matemáticas plantea la interrogante: ¿de qué depende el hecho, de que un estudiante llegue a encontrar fascinante el quehacer propio de las matemáticas y otro, en cambio, se convierta en profundo aborrecedor de ellas para toda su vida? En la actualidad crece en la conciencia colectiva la necesidad de desentrañar los aspectos emocionales del conocimiento, en los que posiblemente haya que buscar la raíz de muchos fracasos en la vida intelectual colectiva y en particular, en la educación.

Para Sarmiento (2007) son muchos los factores que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje, donde la motivación (fuerza que activa y dirige el comportamiento) es uno de los más importantes. Particularmente en el aprendizaje de las matemáticas, la motivación del alumnado es una de las cuestiones fundamentales a considerar al momento de planificar la enseñanza, ya que permite mantener el nivel de atención y concentración mínimo para aprender.

2.6.1 Motivación hacia la Matemática

López (2010) entiende la motivación como una especie de palanca que mueve la conducta y que permite provocar cambios tanto a nivel escolar como de la vida en general. Así, propone que motivar es despertar el interés y la atención de los alumnos por los valores contenidos en la materia, excitando en ellos el interés de aprenderla, el gusto por estudiarla y la satisfacción de cumplir las tareas que se exigen.

Se sabe que la motivación puede nacer de una necesidad que se genera de forma espontánea (motivación intrínseca), o bien, puede ser inducida de forma externa (motivación extrínseca). A continuación se analizarán ambos tipos.

Motivación intrínseca

Según López (2010), motivación intrínseca es realizar una acción cuando no hay una recompensa externa de por medio. Se llevan a cabo las acciones solo por el interés que generan o la satisfacción personal que proviene de su realización. Se sustenta en las necesidades internas de competencia y autodeterminación. Esto exige a los docentes que seleccionen actividades en la que los estudiantes participen activamente, para que éstos disfruten o simplemente les guste porque se sienten interesados.

Motivación extrínseca

Siguiendo al mismo López (2010), la motivación extrínseca surge cuando hay una recompensa o castigo externo para la persona al realizar (o no) la acción. Entonces, la motivación estará determinada por un sujeto externo, que es quien controla la conducta, es decir, la motivación extrínseca es la que ocurre cuando se dan refuerzos o recompensas a los estudiantes, vinculado siempre al exitoso desempeño del mismo en una tarea asignada.

Frente a esto, Roa (2007) plantea que para conseguir que los alumnos aprendan, no basta con explicar o exigirles que aprendan. Es necesario despertar su atención, crear en los estudiantes un verdadero interés por el estudio, estimular su deseo de conseguir los resultados previos y cultivar el gusto por los trabajos escolares.

Castiglione (2015) en la siguiente cita, comenta como la utilización de situaciones realistas motiva a los estudiantes al nivel que demandan un conocimiento en particular.

> Lo interesante de esta situación es que el nuevo conocimiento […] era demandado por ellos y no impuesto por el docente o un curriculum preestablecido. […] Esta es la sensación satisfactoria de enseñar utilizando la resolución de problemas como método de aprendizaje. Ante el problema y su interés por descubrir y comprender ¡ellos demandan la enseñanza del contenido que precisan! Que diferente hubiera resultado si al comenzar la clase les hubiera anunciado “hoy aprenderemos la notación científica” (Castiglione, 2015).

De tal forma que resulta interesante investigar la relación existente entre la motivación hacia la matemática, con las habilidades de matematización y el rendimiento académico en la asignatura.

2.6.2 Ansiedad Matemática

En líneas generales, se puede comparar la ansiedad con el sentimiento de miedo, y definirla como un conjunto de respuestas emocionales, que permiten reaccionar ante una situación de peligro. Piqueras (2009) define ansiedad como “un estado emocional desagradable, que se caracteriza por sentimientos subjetivos de tensión, preocupación, aprehensión y por la activación del sistema nervioso

Variados estudios sustentan la idea de que la ansiedad interfiere en el proceso educativo, ya que forma parte de la conducta del estudiante y está ligada directamente con el éxito o fracaso escolar. Mato & de la Torre (2009) afirman que la ansiedad es la raíz de muchos casos de fobia o rechazo escolar y la necesidad de prevenirla se comprende cuando se piensa en los efectos que el fracaso escolar puede llegar a tener a corto, mediano o largo plazo.

Mato & de la Torre (2009) muestran que cuando la ansiedad se torna excesiva, amenaza con abrumar a los estudiantes, lo que puede llegar a afectar su funcionamiento adaptable. La ansiedad afecta todos los factores de la capacidad de funcionar del ser humano, causando discrepancias entre las capacidades de una persona y su manera de actuar.

Arratia (2016) define la ansiedad matemática como un estado de malestar expresado como disgusto, preocupación y miedo, con manifestaciones específicas de comportamiento, tales como tensión, frustración, angustia o impotencia que surge cuando los estudiantes se enfrentan o están obligados a realizar tareas matemáticas y que repercute desfavorablemente en el desempeño de las mismas.

Para Mato y de la Torre (2009), la ansiedad se transforma en un factor que impide que las personas se relacionen con las matemáticas de la forma en que ellos desearían, provocando que la capacidad matemática se convierta en algo tremendamente dificultoso. De tal forma que es posible considerar la ansiedad como un obstáculo a la hora de aprender (y de enseñar) matemáticas.

Es posible considerar a la ansiedad matemática como un obstáculo, o barrera al aprendizaje matemático, y parte de la tarea del profesor debiera ser considerar estas variables y plantear acciones tendientes a disminuir la ansiedad, antes de comenzar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

> La ansiedad, el miedo, el temor y la desesperación son estados afectivos esencialmente indeseables …[y]…. el reto del educador/a es irrumpir e interrumpir los sentimientos

negativos como paso previo a la necesaria reconstrucción afectiva/cognitiva que deben tener lugar para el avance del estudiante encontrando caminos didácticos que favorezcan estos aspectos. (Gómez Chacón, 2000).

El nivel de ansiedad es una variable siempre presente, en todo grupo humano, pero si este nivel es más o menos elevado, y si luego de la intervención didáctica hay diferencias significativas sobre el mismo, será un importante antecedente para tener en cuenta al momento de planificar la intervención didáctica, y aplicar la misma.

2.7 Funciones Algebraicas

A continuación, se muestran aspectos teóricos formales del contenido de Funciones extraídos desde el Manual Esencial Santillana de Aritmética y Álgebra (2014). Tales aspectos son relevantes pues deben ser internalizados por los estudiantes al terminar la Intervención Didáctica.

2.7.1 Definición de Función

Concepción de función: Una *función (f)* es una relación entre dos cantidades variables, que asocia a cada elemento de un conjunto *A* (de partida) un único elemento de un conjunto *B* (de llegada).

- Si *x* es un elemento de *A* relacionado con un elemento *y* de *B* bajo la función *f*, se escribe $y = f(x)$.
- Como en la expresión $y = f(x)$, el valor de *y* depende del valor de *x*, se dice que *y* está *en función de x,* y se denomina a la *variable x, variable independiente,* y la *variable y, variable dependiente.*

Evaluación de una función: Evaluar una función $y = f(x)$ es obtener el valor numérico que la función le asocia a un valor determinado de la variable *x.*

Gráfica de una función: Si a cada pareja de valores *x* e *y* relacionados bajo una función *f* se le asocia el par ordenado *(x,y)* del plano cartesiano, obtenemos el grafico de la función *f.* En el eje de las *abscisas* (horizontal) se representan los valores de *x*, y en el eje de las *ordenadas* (vertical), los valores de *y.*

Dominio de una función: Se llama *dominio de una función (Dom(f)),* al conjunto de todos los elementos para los cuales la función está definida, es decir, valores que la variable independiente *(x)* puede tomar.

Recorrido de una función: Se llama *recorrido de una función* (o rango de una función), y se escribe *Rec(f),* al conjunto de valores que toma la variable dependiente *(y),* es decir, todos los valores que son imagen de algún valor de la variable independiente.

Una forma de obtener el recorrido es despejar, en la expresión algebraica de la función, la *variable independiente (x) en función* de la *variable dependiente (y),* luego evaluar para qué valores reales está definida esta expresión.

- *Criterio de la recta paralela al eje Y:* Dada la gráfica de una relación matemática entre dos variables, se pueden trazar rectas paralelas al eje Y. Si alguna de las rectas trazadas interseca en dos puntos o más a la gráfica, entonces la relación no representa una función.

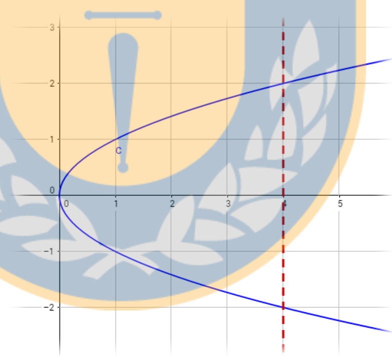


Ilustración 1.Criterio de la recta paralela. Elaboración propia.

Simetría de una Función

- Una función se dice simétrica respecto del *eje Y* si: $f(x) = f(-x)$, para todo *x* y $-x \epsilon \mathbb{R}$. A este tipo de función se le llama *función par*.
- Una función se dice simétrica respecto al origen si: $f(-x) = -f(x)$, para todo x perteneciente al dominio de *f*. A este tipo de funciones se les llama *función impar*.

Composición de funciones

Dado un numero cualquiera *x* del dominio de dos funciones reales $f(x)$ y $g(x)$, se define la *composición de ambas funciones* como una función denotada por $(gof)(x)$ que resulta de aplicar primero *f* sobre *x* y después *g* sobre la imagen de x por *f*. Es decir,

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

Dadas las funciones $g(x)$ y $f(x)$, el dominio de la composición $(gof)(x)$ esta dado por el dominio de *f,* tales que su imágenes pertenezcan al dominio de *g, y el recorrido* está formado por las imágenes de algún elemento en el dominio de *f.*

2.7.2 Tipos de Funciones

Función Lineal

Su representación gráfica es una recta que pasa por el origen del plano cartesiano, cuya expresión está dada por $f(x) = mx$, con *m* un valor real ($m \neq 0$: valor de la pendiente de la recta). En una función lineal $f(x)$ y *x* son directamente proporcionales, ya que $\frac{f(x)}{x} = m$ para cualquier valor de *x.*

Función Afín

Su representación gráfica es una recta que no pasa por el origen, cuya expresión está dada por $g(x) = mx + n$, con *m* y *n* números reales, y *n* distinto de *0*, donde *m* corresponde al *valor de la pendiente,* y *n* al *coeficiente de posición* (este nos indica el punto de intersección de la recta con el eje Y).

Función Constante

Si en una función afín $f(x) = mx + n,\ m = 0$ y $n \neq 0,$ se obtiene $f(x) = n$ o $y = n$, a una función con estas características se le denomina función constante. Es decir, para cualquier valor de la variable *x*, el valor de *f(x)* será siempre *n.*

- *Función Cero:* Es un caso particular de la función constante, pues está definida por $f(x) = 0$ ó $y = 0$, para todo valor real *x.*
- Es importante saber que la recta $x = c$, para cualquier valor de *c,* no está definida como función sobre la variable x.

Funciones definidas por tramos

Son aquellas que tienen distintas expresiones algebraicas según el intervalo en el que están definidas. Se detallará el estudio de este tipo de funciones a partir del siguiente ejemplo:

La función f(x) está conformada por todas las expresiones algebraicas dadas a continuación, donde cada una está definida para un cierto intervalo.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ 4 - x^2, & -2 \leq x \leq 2 \\ 2 + x, & x > 2 \end{cases}$$

Es decir, la función f(x):

- Para los valores de x menores que -2, está definida por la expresión algebraica $x(f(x) = x)$.
- Para los valores de x que se ubican entre -2 y 2 (considerando ambos valores), la expresión que la define es $4 - x^2$ $(f(x) = 4 - x^2)$.
- Para los valores de x mayores que 2, la expresión que la define es $2 + x =$ $(f(x) = 2 + x)$.

Al evaluar la función f(x) se debe considerar al intervalo al cual pertenece el valor numérico a evaluar. Por ejemplo, si:

- $x = 3$ se evalúa en y=2+x, pues 3 pertenece al intervalo de la tercera expresión algebraica de f(x). Luego, $f(3) = 5$.
- $x = -10$ se evalúa en x, pues -10 pertenece al intervalo de la primera expresión algebraica de f(x). Entonces, $f(-10) = -10$.
- $x = -2$ se evalúa en $4 - x^2$, pues -2 pertenece al intervalo de la segunda expresión algebraica. Luego, $f(-2) = 0$.

Función valor absoluto

Se llama a la relación que asocia a un número real cualquiera, el valor de su distancia al cero. Se simboliza por $f(x) = |x|$, y se define como:

$$f(x) = \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ -x, & si\ x < 0 \end{cases}$$

- El *dominio de la función valor absoluto,* son todos los números reales. Es decir, $Dom\ f = \mathbb{R}$
- El *recorrido de la función valor absoluto* son todos los reales positivos incluido el cero. Es decir, $Rec\ f = \mathbb{R}_0^+$.
- Su gráfica es simétrica respecto al Eje Y.

Función parte entera

Es aquella que le asigna a un número real *x,* el mayor entero que es menor o igual a *x.* Se simboliza por $f(x) = [x]$

- El *dominio de la función parte entera*, son todos los reales. Es decir, $Dom\ f = \mathbb{R}$
- El *recorrido de la función parte entera,* el recorrido de $f(x) = [x]$, son todos los reales. Es decir, $Rec\ f = \mathbb{Z}$

Función potencia

Se le llama así a aquella función que se representa de la forma $f(x) = ax^n$, con *a* un número real y *n* un número natural mayor o igual a dos.

Función inversa de f(x)

Se simboliza por $f^{-1}(x)$, ésta si se cumple que $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$, $\forall a \epsilon A, b \epsilon B$. En todas las funciones inversas se cumple que $Dom\ f = Recf^{-1}$ y $Rec\ f = Dom\ f^{-1}$.

Función raíz cuadrada

Se llama a la relación que asocia un número real $x(x \geq 0)$ con su raíz cuadrada positiva. Esta función se representa por $f(x) = \sqrt{x}$. El dominio y recorrido de la función raíz cuadrada son los conjuntos:

$$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 0\} \text{ y } Rec\ f = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 0\}$$

Función raíz cubica

Se le llama así a la relación que asocia a cada número real *x* con su raíz cubica. Esta función se representa por $f(x) = \sqrt[3]{x}$

El dominio y *recorrido* de la función raíz cubica son todos los números reales. Es decir, $Dom\ f = \mathbb{R}$ y $Rec\ f = \mathbb{R}$. Además, para la función raíz cubica se cumple que:

$$x < 0 \Longrightarrow f(x) < 0 \qquad x = 0 \Longrightarrow f(x) = 0 \qquad x > 0 \Longrightarrow f(x) > 0$$

Función cuadrática

La función cuadrática se representa como $f(x) = ax^2 + bx + c$, *con* $a \neq 0, b\epsilon\mathbb{R}$ y $c\epsilon\mathbb{R}$. Ésta función se denomina *cuadrática* o de *segundo grado* ya que el exponente mayor de la variable independiente es 2.

- *Eje de simetría de la parábola.* En la parábola se puede trazar el eje de simetría, en “dos partes iguales” (o ramas congruentes). Es decir, la parábola es una curva simétrica.

- *Concavidad de la parábola.* Se le llama así a la *abertura* de las ramas de esta, y esta dependerá del signo del coeficiente *a,* dándose dos casos:

  - Si $a\epsilon\mathbb{R}^+(a > 0)$, la concavidad de la parábola está orientada *hacia arriba*.
  - Si $a\epsilon\mathbb{R}^-(a < 0)$, la concavidad de la parábola está orientada *hacia abajo*.

Función logarítmica

Es la relación que asocia a cada número real positivo *x* con su logaritmo en una base dada (*b*). Esta función se representa por: $f(x) = \log_b x$, donde *b* es cualquier número real, salvo el 1.

El *dominio* de la función logarítmica está dado por todos los *números reales positivos,* y su *recorrido* corresponde a todos los *números reales.*

- *Para* $b > 1$. Se tiene que:
  - La curva asociada a la función logarítmica intersecta al eje de las abscisas en el punto *(1,0).*
  - La función es creciente para todos los valores de x.
  - La asíntota de la curva corresponde al eje *y*.

- *Para* $0 < b < 1$. Se tiene que:
  - La curva asociada a la función logarítmica intersecta el eje de las abscisas en el punto *(1,0).*
  - La función es decreciente para todo valor de *x.*
  - La asíntota de la curva corresponde al eje *y.*

- Si la base de una función logarítmica es el numero irracional e, se tiene una Función logaritmo natural, lo que se escribe: $f(x) = \log_e x$ o bien $f(x) = \ln x$.

Dado que la base de esta función es e, su dominio y recorrido coincide con el de cualquier función logarítmica de base mayor que 1.

Función exponencial

Es la función de la forma $f(x) = a^x$, donde $a \epsilon \mathbb{R}^+ - \{1\}$ y $x \epsilon \mathbb{R}$. El dominio de la función exponencial está dado por todos los *números reales, su* recorrido *corresponde a todos los* números reales positivos.

- Para $a > 1$. Se tiene que:
  - La curva asociada a la función interseca al eje de las ordenadas en el punto *(0,1).*
  - La función es creciente para todo valor de *x.*

- La asíntota de la curva corresponde al eje *x.*

➢ Para $0 < a < 1$. Se tiene que:

- La curva asociada a la función interseca al eje de las ordenadas en el punto *(0,1).*
- La función es decreciente para todo valor de *x.*
- La asíntota de la curva corresponde al eje *x.*

Relación función exponencial y función logarítmica

Dada la función de la forma $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, su inversa está dada por la función $f^{-1}(x) = \log_a x$.

Como caso particular, dada la función $f(x) = e^x$ su inversa está dada por la función $f^{-1}(x) = \ln x$.

CAPÍTULO 3. MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se explica la metodología de investigación utilizada en este estudio, las características de los instrumentos de recolección de datos y detalles de la intervención misma.

3.1 Enfoque Investigativo

El presente seminario de investigación se basa en un enfoque de investigación mixto, vinculando el enfoque cuantitativo para el tratamiento de los datos estadísticos recabados, y el enfoque cualitativo.

En palabras de Hernández et al. (2014) el enfoque cuantitativo de investigación utiliza la recolección de datos para probar alguna hipótesis, con base en la medición numérica y el análisis estadístico, con el fin de establecer pautas de comportamiento y probar teorías. Ello implica que el orden sea riguroso, comenzando por la concepción de un problema, el planteamiento de objetivos y preguntas de investigación que van acotándose con el estudio de la literatura y confección del marco teórico. Para responder a las preguntas es necesario establecer hipótesis y determinan variables, diseñando un plan para probarlas, se miden estas variables en un determinado contexto y se analizan de acuerdo a métodos estadísticos.

También Hernandez et al (2014) definen la investigación cualitativa como aquella que se enfoca en comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto. Mientras que concebir al investigador como instrumento de recolección de los datos, faculta la propia observación del investigador como un referente válido, y ya que el contexto o ambiente evoluciona con el transcurrir del tiempo, este puede intervenir para encausar la discusión hacia los objetivos del seminario.

Todo esto se ajusta bien a la investigación realizada, recabando datos con algunos test estandarizados, pero también analizando las producciones de los estudiantes.

3.1.1 Tipo de investigación

El tipo de investigación que más se ajusta a los fines de este seminario es una descriptiva, con elementos correlacionales. Descriptiva, pues se busca especificar las propiedades y características de la aplicación de una Metodología de Enseñanza basada en la EMR con estudiantes de un Liceo Municipal, en cuanto a las habilidades de matematización, ansiedad matemática, motivación y aprendizaje, es decir, únicamente se pretende medir o recoger información de manera independiente (o conjunta), sobre las variables involucradas. Además, es correlacional pues se espera determinar grado de asociación que exista entre las variables en ambas muestras.

3.1.2 Diseño de investigación

La esencia de los diseños experimentales, según Hernández et al (2014), es que requiere la manipulación intencional de una acción o variable para analizar sus posibles resultados. Para los mismos autores, la aplicación de un Pre Test ofrece las ventajas tanto de controlar desde un inicio la experimentación vislumbrando diferencias significativas entre ambos grupos, como también de analizar el puntaje-ganancia de cada grupo (la diferencia de puntuaciones de Pre Test y Post Test).

Así, la investigación en curso tiene un diseño cuasi-experimental, con Grupo Control (GC) y Grupo Experimental (GE), aplicación de Pre-Test en ambos grupos, Intervención didáctica basada en la metodología innovadora con el GE, y aplicación de Post-Test en ambos grupos.

3.2 Población

La población de estudio está compuesta por todos los alumnos de tercer año medio de un Liceo Científico-Humanista de la Comuna de Los Ángeles, ellos (mayoritariamente) comenzaron su educación secundaria en esa misma institución en 7° año básico el año 2013, y salvo los cambios de profesores, todos ellos han seguido el mismo PEI y los lineamientos del Departamento de la asignatura. Por tanto, se asume (*a priori*) la homogeneidad de condiciones para todos los estudiantes de ese nivel, en ese establecimiento.

En la última evaluación SIMCE de Matemáticas (2015), los estudiantes de esta generación obtuvieron un puntaje promedio de 337 puntos, lo cual los ubica 57 puntos sobre el promedio nacional de establecimientos de similar grupo socio-económico. Según los datos de la misma medición (SIMCE, 2015), la mayoría de los apoderados han declarado tener entre 12 y 13 años de escolaridad y un ingreso del hogar que varía entre $450.001 y $700.000. Mientras que entre 31,01% y 50% de los estudiantes se encuentran en condición de vulnerabilidad social.

El énfasis del proyecto educativo de la institución está puesto en el desarrollo integral de sus estudiantes, con una orientación religiosa laica, primando en la excelencia académica, con una fuerte preparación para el ingreso a la Educación Superior vía Prueba de Selección Universitaria (PSU).

En el contexto propio de los estudiantes de la población, hay que hacer mención a los “accidentados” años académicos precedentes, ya que la institución regularmente se pliega a las movilizaciones nacionales tanto de estudiantes como de funcionarios públicos, los estudiantes han sufrido las consecuencias de las mismas. Así, los estudiantes de los grupos-curso que conforman la muestra no tuvieron clases referentes a Funciones durante los últimos dos años, es decir, desde octavo año básico. De primer momento esta condición fue un impedimento para los investigadores, pero paulatinamente se fue transformando en una ventaja el hecho de tener una extensa red de contenido que impartir, ya que la EMR se contrapone a las separaciones curriculares de contenidos. Así, solo con una situación realista, se podían abordar varios contenidos, incluso de distintos niveles académicos.

3.3 Muestra

La muestra seleccionada es dirigida (o no probabilística) dado que los grupos/cursos seleccionados son determinados directamente por criterios ajenos al investigador, pero que no interfieren en la validez de la investigación en curso.

Grupo Control (GC)

Este grupo está conformado por 37 alumnos, donde el 11% de los estudiantes reside fuera de la ciudad de Los Ángeles (en comunas como Huépil, Santa Bárbara, Negrete y Laja), el 89% restante del curso vive en la comuna. El 49% del curso está compuesto por varones y el 51% damas.

En cuanto a la composición familiar, el 70% de los alumnos vive con sus dos padres y el 30% restante vive sólo con uno de sus padres, más específicamente, el 2% de los estudiantes vive solo con su padre, y el 28% restante con su madre.

Con respecto a la permanencia en la institución, el 11% de los estudiantes ingresaron al Liceo durante el año en curso, mientras que el 89% restante eran compañeros en años anteriores.

Grupo Experimental (GE)

Este grupo está conformado por 37 alumnos, donde el 26% reside fuera de la ciudad de Los Ángeles (en ciudades como Huépil, Santa Bárbara, Negrete y Santa Fe) a diferencia del 74% que vive en la misma ciudad. El 29,6% del curso está compuesto por varones y el 70,4% por damas.

En cuanto a la composición familiar, el 68,9% de los alumnos viven con ambos padres y el 31,1% restante solo con su madre.

Por otro lado, el 10% de los estudiantes del grupo cursaron 2° año medio en otra institución, mientras que el 90% fueron compañeros de curso en años anteriores.

3.4 Variables de estudio

En esta sección se entrega una definición conceptual y operacional de todas las variables consideradas en este estudio.

Para los efectos de esta investigación, la enseñanza tradicional es aquella que gran parte de los docentes aplica en sus clases, es decir, donde se explican los contenidos de forma clara, y los contenidos siguen una progresión lineal. Los errores son cargo del estudiante por no adoptar la actitud apropiada. En general, se concibe a los y las estudiantes como un envase donde el docente debe colocar los contenidos, y el estudiante es sólo un ente pasivo. (Vargas Merina, 2009)

Se entiende por EMR aquel proceso en que los estudiantes re-inventan ideas y herramientas matemáticas a partir de organizar o estructurar situaciones problemáticas en interacción con sus pares bajo la guía del docente, en un proceso de matematización progresiva caracterizado por distintos niveles de comprensión (Freudenthal, 1991).

En la siguiente tabla se detallan las variables consideradas en esta investigación.

Variable	Tipo de variable	Definición Conceptual	Definición Operacional
Metodología	Independiente	Metodología utilizada para lograr el aprendizaje en los estudiantes.	Metodología tradicionalmente utilizada en el GC, y Metodología basada en la EMR en el GE.
Aprendizaje	Dependiente	Rendimiento académico de los estudiantes al terminar la intervención didáctica.	Promedio de los resultados obtenidos en Test Tradicional, evaluado en escala con notas de 1 a 7.
Nivel de matematización	Dependiente	Distintos niveles de comprensión caracterizados por las actividades mentales y lingüísticas, bien ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva.	Sumatoria de puntaje obtenido en Pre y Post Test de funciones basado en EMR, de un total de 67 puntos.

Variable	Tipo de variable	Definición Conceptual	Definición Operacional
Motivación	Dependiente	Voluntad que estimula a hacer un esfuerzo con el propósito de alcanzar ciertas metas.	Sumatoria de los puntajes obtenidos por los estudiantes en el Test de Motivación, de 15 ítemes y un total de 75 puntos.
Ansiedad matemática	Dependiente	Miedo irracional hacia esta disciplina, que dificulta la realización de cálculos numéricos y la resolución de problemas de matemáticas en diversas situaciones de la vida académica y cotidiana del sujeto. Gresham (2010).	Sumatoria de los puntajes obtenidos por los estudiantes en el Test de Ansiedad, de 24 ítemes y un total de 120 puntos.
Género	Interviniente	Distinción entre femenino y masculino.	Diferencias en las variables de estudio entre hombres y mujeres que participan en la metodología innovadora basada en EMR.

3.5 Recolección de datos

La recolección de datos cuantitativos y cualitativos se hizo en función de las variables dependientes, que son: aprendizaje, nivel de matematización, motivación y ansiedad matemática, en ambos grupos, en tres etapas: antes, durante y después de la intervención didáctica.

- **Etapa previa** Semanas antes de comenzar la intervención didáctica, se aplicó a ambos grupos el Pre Test de funciones basado en EMR (ver anexo), junto con los test de Motivación y Ansiedad matemática.

- **Durante la intervención didáctica:** Se utiliza una bitácora de clases para registrar los hitos más importantes en cada una de las sesiones, allí se encuentran diálogos docente-alumno, y alumno-alumno que parecen relevantes para los fines de esta investigación. Además, transcurridas seis sesiones de trabajo se aplica el Test de Proceso para registrar datos en el desarrollo parcial de la intervención.

- **Etapa posterior:** Finalizada la intervención didáctica, se aplica el Post Test de funciones basado en EMR (ver anexo), junto con los test de Motivación y Ansiedad matemática. Además del Test Tradicional de funciones.

3.6 Instrumentos de recolección de datos

Para cumplir con los objetivos y dar respuestas a las preguntas de investigación planteadas se utilizarán seis instrumentos de recolección de datos. El primero de ellos corresponde a un Pre-Test de funciones bajo la metodología EMR; luego un Test de motivación hacia las matemáticas; un Test de Ansiedad hacia las matemáticas y un Post-Test de funciones bajo la misma metodología, aplicado al finalizar la intervención didáctica. Además de un Test de proceso, para medir durante el transcurso de la intervención la variable de aprendizaje de funciones. Finalmente, una evaluación bajo la metodología tradicional.

3.6.1 Pre-Test Funciones

Este instrumento fue diseñado por los autores con el propósito de verificar los conocimientos previos de los estudiantes con respecto a funciones, en problemas contextualizados al nivel de realidad imaginable para ellos. Inicialmente se elaboró una pauta de 25 ítemes considerando como referencia preguntas aplicadas en las pruebas tipo PISA, TIMMS, SIMCE, y un módulo de Matemáticas en Contexto: ¡Viva el Álgebra! Este listado de ítemes se sometió a validación por tres docentes expertos de la Universidad de Concepción, tres docentes del Liceo donde se realizó la intervención didáctica, y una docente experta del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. Todos los ítemes apuntan a los Aprendizajes Esperados propuestos por el MINEDUC (2011) para los niveles en que se introducen las funciones (primer y segundo año medio).

Luego de la validación se seleccionaron cinco ítemes, cada uno con 3, 4 o 5 sub-ítemes que tendían a guiar un proceso de matematización vertical para el problema. Así, el Pre Test de funciones quedó conformado por 22 reactivos, agrupados en 5 situaciones realistas que guiaban un proceso de matematización.

Tabla 1. Tabla de Especificaciones Pre Test de Funciones

Contenidos	Nivel Situacional (1 punto)	Nivel Referencial (2 puntos)	Nivel General (3 puntos)	Nivel Formal (4 puntos)	ÍTEMES	PUNTS.
Concepto de Función, Dominio y Recorrido, Función Inversa.		1.b	3.c	1.c, 1.e, 2.c,	**5**	**17**
Evaluación de Funciones	1.a,	1.d,	2.b	2.a,	**4**	**10**
Función lineal, afín y constante.			2.d, 3.a	2.e, 3.b	**4**	**14**
Función definida por tramos, exponencial, cuadrática o logarítmica	5.a, 5.b,	5.d	5.c, 5.e	4.a, 4.b, 4.c, 4.d,	**9**	**26**
ÍTEMES	**3**	**3**	**6**	**10**	**22**	
PUNTAJES	**3**	**6**	**18**	**40**		**67**

La valoración de los resultados de los estudiantes se hace calificando de 1 a 4 puntos cada reactivo, de acuerdo al “nivel de matematización” en que se cree que se situaba el alumno para resolver el problema. De tal forma que a algunos reactivos se les podía dar respuesta sólo ubicándose en el nivel situacional de matematización (1 punto), mientras que otros reactivos exigían procesos de esquematización, formalización, generalización, etc., llegando a situarse en el nivel formal de matematización (4 puntos).

En los Objetivos Específicos de este Test, se espera que los estudiantes de tercer año medio sean capaces de:

A) Determinar relaciones y regularidades en contextos gráficos, y utilizarlos para resolver preguntas asociadas.

B) Representar, traducir o interpretar situaciones contextualizadas o relaciones mediante una fórmula general, modelo matemático o gráfico.

C) Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas en la construcción de modelos matemáticos (funciones).

D) Determinar intuitiva y formalmente los conjuntos dominio y recorrido de una función.

E) Identificar los diferentes tipos de funciones, algebraica y gráficamente.

F) Construir, a partir de problemas contextualizados, la función inversa y función compuesta.

El coeficiente Alfa de Cronbach calculado para la muestra es $\alpha = 0.926$, por tanto puede asumirse que el Pre Test de Funciones es confiable. La versión original de este Test se encuentra en el Anexo 5.2 de este seminario.

3.6.2 Test de Motivación hacia las matemáticas.

El test de motivación validado inicialmente por Arzola y Cares (2013) y posteriormente por Sagardía y Manquepi (2014) está compuesto por una escala tipo Likert de 15 afirmaciones con cinco opciones de respuesta (desde "nunca" a "siempre"), donde los estudiantes deben elegir la opción con la que se sientan más identificados. Las valoraciones utilizadas para la corrección de la misma son: Siempre, 5 puntos; Casi Siempre, 4 puntos; A Veces, 3 puntos; Casi Nunca, 2 puntos; Nunca, 1 punto; y cada omisión con 0 puntos.

El puntaje total corresponde a la sumatoria de los puntajes de cada afirmación (siendo 75 el máximo puntaje), de tal forma que una puntuación más alta, indica mayor motivación hacia la asignatura de matemáticas.

El test tiene como objetivo identificar los estímulos en los que se desenvuelven los estudiantes en una sala de clases, que se basan en los criterios de Logros, Poder y

Afiliación. Cada ítem hace referencia a un criterio, como se muestra en la siguiente tabla:

Logros	Poder	Afiliación
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15

Sagardía y Manquepi (2013) validaron el Test de Motivación hacia las matemáticas para su aplicación a jóvenes de Enseñanza Media el año 2013; logrando una confiabilidad de 0.68 utilizando el coeficiente *Alfa de Cronbach*. Mientras que en esta investigación, el valor calculado del *Alfa de Cronbach* para la muestra es $\alpha = 0.733$, por tanto se puede asumir que el test es confiable. La versión utilizada de este Test se encuentra en el Anexo 5.3 de este seminario.

3.6.3 Test de Ansiedad hacia las matemáticas

Elaborado por Suinn y Winston (2003), este Test ha sido muy utilizado, y por tanto reiteradas veces validado, ejemplo de ello en los trabajos de Mato y Muñoz (2006), Tárraga (2008), Maureira (2012), Pascal y Vidal (2012). El test se compone de 24 ítems en una escala tipo Likert, con cinco opciones de respuesta referidas a la regularidad con que el estudiante manifiesta ciertas conductas. Estas categorías son “Nada”, “Muy poco”, “Algo”, “Bastante” y “Mucho”, que se cuantifican de 1 a 5 puntos respectivamente.

Los 24 ítems se agrupan en cinco factores de la siguiente forma:

Factor	Ítems	Cantidad de ítems
Ansiedad ante la evaluación de matemáticas	1, 2, 8, 10, 11, 14, 15, 18, 20, 22 y 23.	11 ítemes
Ansiedad ante la temporalidad	4, 6, 7 y 12	4 ítemes
Ansiedad ante la comprensión de problemas	5, 17 y 19	3 ítemes
Ansiedad frente a los números y operaciones matemáticas.	3, 13 y 16	3 ítemes
Ansiedad ante situaciones matemáticas de la vida real	9, 21 y 24	3 ítemes

El test piloto fue sometido a un análisis de fiabilidad, aplicado a 160 estudiantes, obteniendo un coeficiente Alfa de Cronbach (consistencia interna) de 0,8351, por lo que se reformularon algunos ítems, para simplificar su comprensión por los estudiantes. Posteriormente se aplicó a una muestra final de 1220 sujetos, obteniendo una fiabilidad de 0,9504 lo que implica una alta fiabilidad del Test (Muñoz, J. & Mato. M., 2007). Mientras que en esta investigación, el coeficiente Alfa de Cronbach calculado es es $\alpha = 0.940$, por lo tanto puede asumirse que el test es confiable. Este Test se encuentra en el Anexo 5.4 de este seminario.

3.6.4 Post-Test Funciones

Este instrumento corresponde a una prueba similar al Pre-Test, con los mismos objetivos, pero con parámetros y contextos distintos para cada una de las preguntas, siendo tomadas también del listado de ítems sometidos a validación por expertos de la Universidad de Concepción y el Liceo Municipal de Los Ángeles donde se realizó la intervención didáctica.

Este Test se aplicó tanto en el GE como en el GC una vez finalizada la intervención didáctica, esto con el objetivo de poder comparar los resultados obtenidos en ambos cursos (Pre-Test y Post-Test). La Tabla de Especificaciones siguiente muestra los contenidos evaluados en el Post Test de Funciones, y su relación con los niveles de matematización esperados.

Contenidos	Nivel Situacional (1 punto)	Nivel Referencial (2 puntos)	Nivel General (3 puntos)	Nivel Formal (4 puntos)	ÍTEMES	PUNTS.
Concepto de Función, Dominio y Recorrido, Función Inversa.	3.a	3.b	1.e, 2.c, 3.e	1.c, 3.c, 5.d	**8**	**24**
Evaluación de Funciones	1.b	1.a	5.a	2.a	**4**	**10**
Función lineal, afín y constante.			1.d	2.b, 3.d	**3**	**11**
Función definida por tramos, exponencial, cuadrática o logarítmica			5.b, 5.c	4.a, 4.b, 4.c, 4.d	**6**	**22**
ÍTEMES	**2**	**2**	**7**	**10**	**21**	
PUNTAJES	**2**	**4**	**21**	**40**		**67**

El coeficiente Alfa de Cronbach calculado para este Test es es $\alpha = 0.874$, por tanto se considera que el Post Test de Funciones es confiable. Este Test se encuentra en el Anexo 5.7 de este seminario.

3.6.5 Test de Proceso

El test de proceso se aplicó durante la intervención con el fin de evaluar la apropiación individual de los alumnos con respecto a los contenidos trabajados. El test se aplicó en ambos grupos, en un tiempo de 45 minutos. Los estudiantes debían resolver una Situación Realista, donde evaluaron de habilidades de Matematización respecto a los contenidos de funciones, que fueron: Concepto de función, Dominio y recorrido, Diferenciar entre función lineal, afín, constante o identidad, Función inversa y Representación gráfica de funciones.

El Test de Proceso aplicado se encuentra en el anexo 5.5 de este seminario.

3.6.6 Test Tradicional

El test elaborado en conjuntos con el docente titular de la asignatura, fue aplicado a ambos grupos luego del Post Test de Funciones, con la finalidad de determinar el grado de conocimientos matemáticos respecto a funciones que los estudiantes lograron con la intervención didáctica innovadora. Los contenidos evaluados fueron:

- Concepto de Función.
- Dominio y Recorrido de una función.
- Representación gráfica de funciones.
- Función lineal.
- Función afín.
- Función constante.
- Función identidad.
- Función definida por tramos.
- Resolución de problemas mediante ecuaciones literales
- Función valor absoluto.
- Función parte entera.
- Función inversa.

Esta prueba se construyó con preguntas de selección múltiple con cinco alternativas de respuesta, de las cuales una era la alternativa correcta, los métodos utilizados por los estudiantes para obtener la respuesta correcta fueron:

- Resolver el problema y marcar la alternativa correcta
- Probar con todas las alternativas hasta encontrar una que se ajustara a la pregunta.
- Descarte, esto es, que utilicen los conocimientos que tiene para asegurar cuales son incorrectas y así tener menos opciones correctas, de este modo aumenta la probabilidad de acertar con la respuesta correcta.

Estos son los métodos que usualmente se trabajan en la Institución, para que los estudiantes puedan enfrentar la Prueba de Selección Universitaria (PSU, método vigente de selección para ingresar a la educación superior). El Test Tradicional aplicado se encuentra en el anexo 5.6 de este seminario.

3.6.7 Recolección de datos cualitativos

Una metodología basada en EMR exige al observador registrar fehacientemente los acontecimientos relevantes en los procesos de matematización individuales y grupales de los estudiantes, tanto para planificar las situaciones posteriores, como para evidenciar las estrategias de los estudiantes.

Es así como surge la idea de utilizar *Notas de Campo* (ver anexo 5.8), que corresponden a un registro de los acontecimientos que ocurren en una actividad, como una clase, una evaluación, una entrevista médico-paciente o una sesión de trabajo grupal. Su uso permite al observador registrar aquello que considera importante y que su memoria podría olvidar. Usualmente, en una nota de campo se puede almacenar datos como: hora de un suceso, una breve descripción de las características del suceso en cuestión y una interpretación (o comentarios) del observador acerca de los hechos registrados.

Al registrar las clases se pueden evidenciar regularidades en el comportamiento de los y las estudiantes, estrategias similares, obstáculos o errores frecuentes, razonamientos similares, que ayudan al docente a guiar las sesiones de trabajo posteriores.

3.7 Descripción de la Intervención didáctica

Para la EMR, la función del docente como guía exige analizar e interpretar el trabajo oral y escrito de los alumnos, con particular atención en los momentos claves en los procesos de esquematización y formalizaciones progresivas, de tal forma que la intervención didáctica del GE se estructuró con dos fases dinámicas: general y colaborativa.

Así, al momento de iniciar la clase y proponer la situación realista a trabajar, al encontrar análisis o respuestas grupales o individuales destacables, y al formalizar el concepto tratado se hacía un plenario general, tratando de captar la atención de todos los estudiantes. El resto de la clase era colaborativa, es decir un trabajo grupal progresivo, supervisado y guiado por el docente a cargo, quien debía involucrarse en la discusión grupal y proponer preguntas clave, que incitaran a los estudiantes a desprenderse de la situación original para avanzar a niveles de matematización superior. Para verificar el cumplimiento de las actividades se solicitaba la entrega de un informe donde consignaban todas sus conclusiones y respuestas.

Todo el material didáctico utilizado se encuentra compendiado en un módulo didáctico, en el anexo 5.1 de este seminario.

Mientras tanto, en las clases del GC se seguía el ritmo normal del docente titular que también se pueden organizar en dos fases, menos dinámicas: teórica y práctica. En la fase teórica, regularmente al inicio de la clase, se introduce un nuevo concepto o contenido relacionado (o no) con los contenidos anteriores, se muestran algunas propiedades y/o ejemplos, para luego dar paso a la fase práctica con un listado o pauta de ejercicios o problemas a resolver, que serán revisados de forma individual o grupal al finalizar la clase.

A continuación, se describe la planificación global de la metodología innovadora aplicada en esta investigación. La intervención se realizó en 13 sesiones de 90 minutos cada una, planificadas de la siguiente forma:

<table>
<tr><td colspan="6">SEMANA 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aplicación de
Pre-Test</td><td colspan="2">Clase 1
Situación ¿Dónde fotocopiar?
Concepto de Función</td><td colspan="2">Clase 2
Formalización
Dominio y Recorrido
Función Inversa</td></tr>
<tr><td colspan="6">SEMANA 2</td></tr>
<tr><td colspan="3">Clase 3
Situación ¡Llave mala! ¡Mala llave!
Función Lineal</td><td colspan="3">Clase 4
Situación ¿Qué plan de celular?
Función Afín</td></tr>
<tr><td colspan="6">SEMANA 3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Clase 5
Función Afín
Actividad propuesta</td><td colspan="3">Clase 6
Situación ¿Qué plan elegir?
Función Constante</td></tr>
<tr><td colspan="6">SEMANA 4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aplicación de
Test de Proceso</td><td colspan="2">Clase 7
Situación: ¡Paga menos, mientras más hablas!
Función definida por tramos</td><td colspan="2">Clase 8
Formalización
Función definida por tramos</td></tr>
<tr><td colspan="6">SEMANA5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Clase 9
Función identidad
Composición de Funciones</td><td colspan="2">Clase 10
Situación ¿Cómo hago el corral?
Función Cuadrática y Raíz Cuadrada.</td><td colspan="2">Aplicación de
Post-Test</td></tr>
</table>

Síntesis de la planificación de la intervención.

CLASE	OBJETIVO	PROCESOS DE MATEMATIZACIÓN	CONTENIDOS	ACTIVIDADES Y EVALUACIÓN
1	Conocer los conceptos de Función, matematizando una situación realista, trabajando colaborativamente con su grupo.	Traducir el problema en términos matemáticos Generalizar Representar Gráficamente	Concepto de Función	Trabajo grupal sobre una situación realista Confección de informe entregado al docente
2	Formalizar los conceptos de Dominio y Recorrido, Conocer la Función Inversa matematizando una situación realista.	Traducir el problema en términos matemáticos Generalizar Representar Gráficamente	Concepto de Dominio Concepto de Recorrido Función Inversa	Trabajo grupal sobre una situación realista
3	Matematizar una situación realista para conocer el concepto de Función Lineal, trabajando de forma colaborativa con su grupo	Traducir el problema en términos matemáticos Generalizar Representar Gráficamente	Función Lineal	Trabajo grupal sobre una situación realista Confección de informe entregado al docente
4	Matematizar una Situación Realista para conocer el concepto de Función Afín, en interacción formativa con el grupo de trabajo.	Traducir el problema en términos matemáticos Generalizar Representar Gráficamente	Función Afín	Trabajo grupal sobre una situación realista
5	Formalizar el concepto de Función Afín, y aplicarlo en la resolución de ejercicios propuestos.	Traducir el problema en términos matemáticos Evaluar valores Generalizar Representar Gráficamente	Función afín	Trabajo grupal sobre una situación realista Confección de informe entregado al docente

CLASE	OBJETIVO	PROCESOS DE MATEMATIZACIÓN	CONTENIDOS	ACTIVIDADES Y EVALUACIÓN
6	Matematizar una situación realista para conocer el concepto de Función Constante, trabajando de forma colaborativa.	Traducir el problema en términos matemáticos Generalizar Representar Gráficamente	Función constante	Trabajo grupal sobre una situación realista
7	Conocer el concepto de Función definida por tramos, matematizando una situación realista con su grupo de trabajo.	Traducir el problema en términos matemáticos Generalizar Representar Gráficamente	Función definida por tramos.	Trabajo grupal sobre una situación realista
8	Formalizar la definición de función definida por tramos y aplicarlo en la solución de ejercicios propuestos.	Traducir el problema en términos matemáticos Evaluar Valores Generalizar Representar Gráficamente	Función definida por tramos.	Trabajo grupal sobre una situación realista Confección de informe entregado al docente
9	Conocer los conceptos de Función Identidad y Composición de Funciones, matematizando situaciones realistas de forma colaborativa.	Traducir el problema en términos matemáticos Generalizar Representar Gráficamente	Función Identidad Composición de funciones	Trabajo grupal sobre una situación realista
10	Matematizar una situación realista para conocer los conceptos de Función Cuadrática y Función Raíz Cuadrada.	Traducir el problema en términos matemáticos Evaluar valores Generalizar Representar Gráficamente	Función Cuadrática Función Raíz Cuadrada. Función inversa Graficar funciones dadas	Trabajo grupal sobre una situación realista Confección de informe entregado al docente

3.8 Tratamiento de los datos

Una vez recolectada la información con los instrumentos ya mencionados, se estudió la normalidad de las variables mediante el contraste de normalidad de Shapiro-Wilk. Si la variable analizada sigue una distribución normal se utilizaron pruebas paramétricas para su análisis, y en caso contrario, pruebas no paramétricas.

Cuando las variables analizadas son independientes y siguen una distribución normal, se utiliza la prueba f de Fisher para analizar la igualdad de las varianzas, ya que se desconocen las varianzas poblacionales.

Las pruebas paramétricas utilizadas para conocer la diferencia entre las medias son: prueba t de Student, si las varianzas son iguales, y en caso contrario, la prueba de Welch-Satterthwaite.

Las pruebas no paramétricas utilizadas para conocer la diferencia de las medias son: la prueba U de Mann-Whitney en caso de tener variables independientes y la prueba Wilcoxon para variables dependientes.

Para determinar la existencia de una correlación significativa entre las variables cuantitativas, se utiliza el coeficiente de correlación de Pearson, cuando los datos corresponden a variables con distribución normal y en caso contrario, se utiliza la correlación de Spearman

El análisis de toda esta información se realiza con el Software XLstat, complemento del programa Excel

Mientras tanto el análisis cualitativo se realizó en dos fases: con las notas de campo se planificaban las siguientes sesiones considerando los procesos y avances o dificultades de los estudiantes, y por otro lado, se analizan las producciones de los estudiantes en pre y post test, interpretando las estrategias utilizadas.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS Y VERIFICACIÓN DE HIPÓTESIS

En primer lugar, se ofrece un análisis descriptivo de los resultados en Pre y Post Test aplicados en ambos grupos.

Tabla 2. Estadísticos descriptivos del Test de Funciones

Estadístico	PRETEST G.C.	POSTEST G.C.	PRETEST G.E.	POSTEST G.E.
No. de observaciones	37	37	37	37
Mínimo	6	19	2	20
Máximo	70	59	55	64
Mediana	24	34	15	47
Media	27,946	35,973	21,054	45,189

En la tabla 4 se pueden apreciar las variaciones de ciertos estadísticos en ambos grupos, antes y después de la intervención didáctica. Así, se puede considerar el incremento en la media de puntajes de ambos grupos para valorar la mejora de la metodología innovadora, diferencia que en el GC es de aproximadamente 8 puntos, en el GE es de 24 puntos aproximados, con esto es posible afirmar que la metodología innovadora, basada en la EMR logra aumentar considerablemente los niveles de matematización de los estudiantes, más que la metodología tradicionalmente utilizada.

A continuación, se expone un detallado análisis inferencial acerca de los datos recabados luego de la Intervención Didáctica (en adelante, I.D.), considerando las hipótesis de investigación antes expuestas. Para efectos de facilitar la comprensión del lector, se entenderá como MEMR la innovadora Metodología basada en Educación Matemática Realista, y como MT la Metodología Tradicionalmente utilizada en los establecimientos de educación.

4.1 Nivel de Matematización

Hipótesis 1. La metodología basada en el enfoque de la EMR favorece el desarrollo de habilidades de Matematización en el grupo de estudiantes intervenido.

4.1.1 Comparación de ambos grupos antes de la I.D.

Inicialmente, la prueba Shapiro-Wilk arrojó que la variable nivel de matematización no sigue una distribución normal, por lo que se utilizó la Prueba de Mann-Whitney para la diferencia de medias, considerando las siguientes hipótesis de trabajo:

H₀: No existe diferencia significativa en los conocimientos iniciales de funciones entre los alumnos que participan en la MEMR y alumnos que participan en la MT.

Hₐ: Si existe diferencia significativa en los conocimientos iniciales de funciones entre los alumnos que participan en la MEMR y estudiantes que participan en la MT.

Luego,

$\boldsymbol{\mu_1}$: Puntaje promedio de alumnos que participan en la MT.

$\boldsymbol{\mu_2}$: Puntaje promedio de alumnos que participan en la MEMR.

Así, las hipótesis a contrastar para las medias poblacionales con un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$ son las siguientes:

$$\boldsymbol{H_0}: \boldsymbol{\mu_1} = \boldsymbol{\mu_2}$$

$$\boldsymbol{H_a}: \boldsymbol{\mu_1} \neq \boldsymbol{\mu_2}$$

Se utiliza la prueba U de Mann-Whitney, pues los datos de ambos grupos provienen de variables que no siguen una distribución normal. En las siguientes tablas se resumen los datos obtenidos con XLSTAT:

Variable	Observaciones	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típica
x_1	37	6,000	70,000	27,946	16,900
x_2	37	2,000	55,000	21,054	14,706

U	862,500
Valor esperado	684,500
Varianza (U)	8546,240
valor-p (bilateral)	0,055
Alfa	0,05

Puesto que el valor-p calculado es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, no se puede rechazar la hipótesis nula, por tanto no existe diferencia significativa entre las medias de conocimiento inicial en ambos grupos. El riesgo de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera es de 5,49%.

4.1.2 Comparación de ambos grupos después de la I.D.

Las hipótesis a contrastar son:

H₀: No existe diferencia significativa en el nivel de matematización de funciones entre los alumnos que participan en la MEMR y alumnos que participan en la MT.

Hₐ: Los alumnos que participan en la MEMR alcanzan mayor nivel de matematización de funciones que los estudiantes que participan en la MT.

Luego,

$\boldsymbol{\mu_1}$: Puntaje de alumnos que participan en la MEMR.

$\boldsymbol{\mu_2}$: Puntaje de alumnos que participan en la MT.

Así, las hipótesis a contrastar para las medias poblacionales con un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$ son las siguientes:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_a: \mu_1 > \mu_2$$

Se utiliza la Prueba U Mann-Whitney, pues los datos de ambos grupos provienen de variables que no siguen una distribución normal. En las siguientes tablas se resumen los datos obtenidos con XLSTAT:

Variable	Observaciones	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típica
x_1	37	20,000	64,000	45,189	14,636
x_2	37	19,000	59,000	35,973	11,179

U	941,500
Valor esperado	684,500
Varianza (U)	8547,634
valor-p (unilateral)	0,003
alfa	0,05

Puesto que el valor-p computado es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, se debe rechazar la hipótesis nula y aceptar la hipótesis alternativa; es decir, los y las estudiantes que participan en la MEMR alcanzan mayor nivel de matematización de funciones que los estudiantes que participan en la MT. El riesgo de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera es inferior al 0,28%.

4.1.3 Aumento en el nivel de matematización en el GE.

Las hipótesis a contrastar son:

H₀: No existe diferencia significativa en el nivel de matematización de los estudiantes que participan en la MEMR antes y después de la intervención didáctica.

Hₐ: Los estudiantes que participan en la MEMR logran un mayor nivel matematización después de la intervención didáctica.

Luego,

$\boldsymbol{\mu_1}$: Promedio de puntaje en Pre Test de matematización del GE.

$\boldsymbol{\mu_2}$: Promedio de puntaje en Post Test de matematización del GE.

Así, las hipótesis a contrastar para las medias poblacionales con un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$ son las siguientes:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_a: \mu_1 < \mu_2$$

Se utiliza la prueba Wilcoxon de los rangos signados, pues los datos de ambas mediciones son dependientas y provienen de una variable que no sigue una distribución normal. En las siguientes tablas se resumen los datos obtenidos con XLSTAT:

Variable	Observaciones	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típica
x_1	37	2,000	55,000	21,054	14,706
x_2	37	20,000	64,000	45,189	14,636

V	1,000
Valor esperado	351,500
Varianza (V)	4392,000
valor-p (unilateral)	< 0,0001
alfa	0,05

Puesto que el valor-p computado es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0,05$, se debe rechazar la hipótesis nula y aceptar la hipótesis alternativa. Así, los estudiantes que participan en la MEMR logran un mayor nivel matematización después de la intervención didáctica. EL riesgo de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera es inferior al 0,01%.

4.1.4 Aumento en el nivel de matematización en el GC

Las hipótesis a considerar son:

H₀: No existe diferencia significativa en el nivel de matematización de los estudiantes que participan en la MT antes y después de la intervención didáctica.

Hₐ: Los estudiantes que participan en la MT logran un mayor nivel matematización después de la intervención didáctica.

Luego,

$\boldsymbol{\mu_1}$: Promedio de puntaje en Pre Test de matematización del GC.

$\boldsymbol{\mu_2}$: Promedio de puntaje en Post Test de matematización del GC.

Así, las hipótesis a contrastar para las medias poblacionales con un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$ son las siguientes:

$$\boldsymbol{H_0}: \boldsymbol{\mu_1 = \mu_2}$$

$$\boldsymbol{H_a}: \boldsymbol{\mu_1 < \mu_2}$$

Se utiliza la prueba Wilcoxon de los rangos signados, pues los datos de ambas mediciones son dependientas y provienen de una variable que no sigue una distribución normal. En las siguientes tablas se resumen los datos obtenidos con XLSTAT:

Variable	Observaciones	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típica
x_1	37	6,000	70,000	27,946	16,900
x_2	37	19,000	59,000	35,973	11,179

V	110,000
Valore esperado	351,500
Varianza (V)	4388,125
valor-p (unilateral)	0,000
Alfa	0,05

Puesto que el valor-p computado es menor que el nivel de significación alfa=0,05, se debe rechazar la hipótesis nula, y aceptar la hipótesis alternativa. Por tanto, luego de la intervención didáctica, los estudiantes del GC logran matematizar en un nivel superior que antes de la misma. El riesgo de rechazar la hipótesis nula H0 cuando es verdadera es inferior al 0,01%.

Estos resultados comprueban lo expuesto en las investigaciones revisadas, ya que la aplicación en base a la EMR tiene efectos positivos en los procesos de matematización individuales, es decir, los estudiantes intervenidos son más capaces de utilizar estrategias lógicas para resolver problemas cotidianos, que sus compañeros que trabajaron en base a la metodología tradicional.

4.2 Rendimiento académico

Hipótesis 2. Los estudiantes que trabajan con una metodología basada en la EMR tienen mejor rendimiento académico que los estudiantes participantes en la metodología tradicional, en la unidad de funciones.

4.2.1 Comparación de ambos grupos después de la I. D.

Luego de la intervención didáctica, se aplica el Test Tradicional (ver anexo 5.6) cuyos resultados se contrastan mediante la prueba U de Mann-Whitney, con las siguientes hipótesis de trabajo:

H₀: No existe diferencia significativa en el rendimiento de los alumnos que participan en la MEMR y los alumnos que participan en la MT.

Hₐ: Los alumnos que participan en la MEMR logran mejor rendimiento en matemáticas que los alumnos que participan en la MT.

Luego,

$\boldsymbol{\mu_1}$: Promedio de notas alumnos del GE en test tradicional.

$\boldsymbol{\mu_2}$: Promedio de notas alumnos del GC en test tradicional.

Así, las hipótesis a contrastar para las medias poblacionales con un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$ son las siguientes:

$$\boldsymbol{H_0}: \boldsymbol{\mu_1} = \boldsymbol{\mu_2}$$

$$\boldsymbol{H_a}: \boldsymbol{\mu_1} > \boldsymbol{\mu_2}$$

Se utiliza la Prueba U de Mann-Whitney, pues los datos de ambos grupos provienen de variables que no siguen una distribución normal. En las siguientes tablas se resumen los datos obtenidos con XLSTAT:

Variable	Observaciones	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típica
x_1	37	2,700	7,000	4,841	1,016
x_2	37	2,300	7,000	4,697	1,164

U	716,500
Valore esperado	684,500
Varianza (U)	8521,784
valor-p (bilateral)	0,733
alfa	0,05

Puesto que el valor-p calculado es mayor que el nivel de significación alfa=0,05, no se puede rechazar la hipótesis nula. Por tanto, no existe diferencia significativa en el rendimiento académico de los estudiantes luego de la intervención didáctica. El riesgo de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera es de 73,29%.

En cuanto al rendimiento académico de ambos grupos no se observan (estadísticamente) diferencias significativas, esto puede atribuirse a lo breve o discontinuo que resultó ser la intervención didáctica, lo esperable era que quienes alcanzaban niveles de matematización mayores, también lo hicieran en su rendimiento académico (evaluaciones tradicionales).

Se recomienda entonces hacer una intervención más prolongada, a grupos de estudiantes que tengan más sesiones de trabajo por semana para comprobar (o desmentir) la hipótesis de que los estudiantes que trabajan con una metodología basada en la EMR tienen mejor rendimiento académico que los estudiantes participantes en la metodología tradicional.

4.3 Motivación Matemática

Los resultados del test de motivación hacia las matemáticas, aplicado al inicio de la intervención didáctica, dan cuenta de que los datos provienen de variables con distribución aproximadamente normal y varianzas iguales (según la prueba Shapiro-Wilk), por lo que se hace uso de la prueba t de Student, la que evidencia que no existe diferencia significativa en el nivel de motivación inicial en ambos grupos.

Hipótesis 3. Los estudiantes que trabajan con la metodología basada en EMR tienen mayor motivación que los estudiantes que trabajan con la metodología tradicional luego de la intervención didáctica.

4.3.1 Comparación de ambos grupos después de la I.D.

Las hipótesis a contrastar ahora son:

H₀: No existe diferencia significativa en el nivel de motivación hacia la matemática entre los estudiantes que participan en la MEMR y los estudiantes que participan en la MT.

$\boldsymbol{H_a}$: Los estudiantes que participan en la MEMR muestran un mayor nivel de motivación hacia la matemática que los estudiantes que participan en la MT.

Luego,

$\boldsymbol{\mu_1}$: Promedio en nivel de motivación hacia la matemática de los estudiantes que participan en la MEMR.

$\boldsymbol{\mu_2}$: Promedio en nivel de motivación hacia la matemática de los estudiantes que participan en la MT.

Así, las hipótesis a contrastar para las medias poblacionales con un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$ son las siguientes:

$$\boldsymbol{H_0: \mu_1 = \mu_2}$$

$$\boldsymbol{H_a: \mu_1 > \mu_2}$$

Se utiliza la prueba t de Student, pues los datos provienen de variables con distribución aproximadamente normal y tienen varianzas iguales. En las siguientes tablas se resumen los datos obtenidos con el software XLSTAT:

Variable	Observaciones	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típica
x_1	37	35,000	67,000	49,846	7,569
x_2	37	36,000	67,000	50,500	7,825

Diferencia	-0,654
z (Valor observado)	-0,378
|z| (Valor crítico)	1,960
valor-p (bilateral)	0,706
Alfa	0,05

Puesto que el valor-p calculado es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, no se puede rechazar la hipótesis nula. Así, se concluye que no existe diferencia significativa en el nivel de motivación hacia la matemática entre los estudiantes que participan en la MEMR y los estudiantes que participan en la MT.

4.3.2 Motivación en el GE

Las hipótesis a considerar son:

H₀ replaced

H_a: Los estudiantes que participan en la MEMR logran un mayor nivel de motivación hacia las matemáticas después de la intervención didáctica.

Luego,

$\boldsymbol{\mu_1}$: Nivel de motivación hacia las matemáticas de los estudiantes que participan en la MEMR antes de la intervención didáctica.

$\boldsymbol{\mu_2}$: Nivel de motivación hacia las matemáticas de los estudiantes que participan en la MEMR después de la intervención didáctica.

Así, las hipótesis a contrastar para las medias poblacionales con un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$ son las siguientes:

$$\boldsymbol{H_0}: \boldsymbol{\mu_1 = \mu_2}$$

$$\boldsymbol{H_a}: \boldsymbol{\mu_1 < \mu_2}$$

Se utiliza la prueba T de Student, pues los datos provienen de muestras con distribución aproximadamente normal y tienen varianzas iguales. En las siguientes tablas se resumen los datos obtenidos con XLSTAT:

Variable	Observaciones	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típica
x_1	37	36,000	66,000	50,846	6,726
x_2	37	35,000	67,000	49,846	7,569

Diferencia	1,000
t (Valor observado)	0,797
t (Valor crítico)	1,686
GL	38
valor-p (unilateral)	0,785
Alfa	0,05

Puesto que el valor-p calculado es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, no se puede rechazar la hipótesis nula. Por tanto, no existe diferencia significativa en el nivel de motivación hacia las matemáticas de los estudiantes que participan en la MEMR antes y después de la intervención didáctica. El riesgo re rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera es de 78,47%.

4.3.3 Motivación en el GC

Las hipótesis a considerar son:

H₀: No existe diferencia significativa en el nivel de motivación hacia las matemáticas de los estudiantes que participan en la MT antes y después de la intervención didáctica.

Hₐ: Los estudiantes que participan en la MT logran un mayor nivel motivación hacia las matemáticas después de la intervención didáctica.

Luego,

$\boldsymbol{\mu_1}$: Nivel de motivación hacia las matemáticas de los estudiantes que participan en la MT antes de la intervención didáctica.

$\boldsymbol{\mu_2}$: Nivel de motivación hacia las matemáticas de los estudiantes que participan en la MT después de la intervención didáctica.

Así, las hipótesis a contrastar para las medias poblacionales con un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$ son las siguientes:

$$\boldsymbol{H_0}: \boldsymbol{\mu_1} = \boldsymbol{\mu_2}$$

$$\boldsymbol{H_a}: \boldsymbol{\mu_1} < \boldsymbol{\mu_2}$$

Se utiliza la prueba t de Student, pues los datos provienen de muestras con distribución aproximadamente normal y tienen varianzas iguales. En las siguientes tablas se resumen los datos obtenidos con XLSTAT:

Variable	Observaciones	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típica
x_1	37	37,000	69,000	51,500	7,599
x_2	37	36,000	67,000	50,500	7,825

Diferencia	1,000
t (Valor observado)	0,835
t (Valor crítico)	1,685
GL	39
valor-p (unilateral)	0,796
Alfa	0,05

Puesto que el valor-p calculado es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, no se puede rechazar la hipótesis nula. Por tanto, no existe diferencia significativa en el nivel de motivación hacia las matemáticas de los estudiantes que participan en la MEMR antes y después de la intervención didáctica. El riesgo re rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera es de 79,56%. Estos resultados se contraponen a la literatura consultada que afirma que el enfoque EMR aumenta la motivación de los estudiantes con la asignatura. Esto puede atribuirse a lo breve de la intervención didáctica, ya que las variables socio-afectivas necesitan de más tiempo para variar.

4.4 Ansiedad hacia la Matemática

Los resultados del test de ansiedad hacia las matemáticas, aplicado al inicio de la intervención didáctica dan cuenta de que los datos provienen de variables con distribución aproximadamente normal y varianzas iguales, por lo que se hace uso de la prueba t de Student, la que evidencia que no existe diferencia significativa en el nivel de ansiedad inicial en ambos grupos.

Hipótesis 4. Los alumnos que participan en la metodología basada en la EMR tienen menor ansiedad matemática que los alumnos que participan en la metodología tradicional.

4.4.1 Comparación de ambos grupos después de la I.D.

Las hipótesis a contrastar ahora son:

H₀: No existe diferencia significativa en el nivel de ansiedad matemática de los alumnos del GE y los alumnos del GC.

Hₐ: Los alumnos del GE tienen menor nivel de ansiedad matemática que los estudiantes del GC, luego de la intervención didáctica.

Luego,

$\boldsymbol{\mu_1}$: Media de puntaje en test de ansiedad matemática del GE.

$\boldsymbol{\mu_2}$: Media de puntaje en test de ansiedad matemática del GC.

Así, las hipótesis a contrastar para las medias poblacionales con un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$ son las siguientes:

$$\boldsymbol{H_0}: \boldsymbol{\mu_1 = \mu_2}$$

$$\boldsymbol{H_a}: \boldsymbol{\mu_1 < \mu_2}$$

Se utiliza la prueba t de Student, pues los datos provienen de variables con distribución aproximadamente normal y tienen varianzas iguales. En las siguientes tablas se resumen los datos obtenidos con XLSTAT:

Variable	Observaciones	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típica
x_1	37	24,000	98,000	53,667	20,380
x_2	37	24,000	89,000	49,625	18,199

Diferencia	4,042
z (Valor observado)	0,929
z (Valor crítico)	1,645
valor-p (unilateral)	0,824
Alfa	0,05

Puesto que el valor-p calculado es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, no se puede rechazar la hipótesis nula. Así, no existe diferencia significativa en el nivel de ansiedad matemática de los alumnos que participan en la MEMR y aquellos participantes en la MT. El riesgo de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera es de 82,35%.

4.4.2 Ansiedad hacia las matemáticas en el GE

Las hipótesis a contrastar ahora son:

H₀: No existe diferencia significativa en el nivel de ansiedad hacia las matemáticas de los estudiantes que participan en la MEMR antes y después de la intervención didáctica.

Hₐ: Los estudiantes que participan en la MEMR logran disminuir su nivel de ansiedad hacia las matemáticas después de la intervención didáctica.

Luego,

$\boldsymbol{\mu_1}$: Promedio nivel de ansiedad matemática del GE en Pre Test.

$\boldsymbol{\mu_2}$: Promedio nivel de ansiedad matemática del GE en Post Test.

Así, las hipótesis a contrastar para las medias poblacionales con un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$ son las siguientes:

$$\boldsymbol{H_0}: \boldsymbol{\mu_1} = \boldsymbol{\mu_2}$$

$$\boldsymbol{H_a}: \boldsymbol{\mu_1} > \boldsymbol{\mu_2}$$

Se utiliza la prueba T de Student, pues los datos provienen de muestras con distribución aproximadamente normal y varianzas iguales. En las siguientes tablas se resumen los datos obtenidos con XLSTAT:

Variable	Observaciones	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típica
x_1	37	28,000	89,000	53,308	16,994
x_2	37	24,000	98,000	53,667	20,380

Diferencia	-0,359
t (Valor observado)	-0,192
t (Valor crítico)	1,686
GL	38
valor-p (unilateral)	0,576
alfa	0,05

Puesto que el valor-p calculado es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, no se puede rechazar la hipótesis nula. Así, no existe diferencia significativa en el nivel de ansiedad hacia las matemáticas de los estudiantes que participan en la MEMR antes y después de la intervención didáctica. El riesgo de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera es de 57,57%.

4.4.3 Ansiedad hacia las matemáticas en el GC

Las hipótesis a contrastar ahora son:

H₀: No existe diferencia significativa en el nivel de ansiedad hacia las matemáticas de los estudiantes que participan en la MT antes y después de la intervención didáctica.

Hₐ: Existe diferencia significativa en el nivel de ansiedad hacia las matemáticas de los estudiantes que participan en la MT antes y después de la intervención didáctica.

Luego,

$\boldsymbol{\mu_1}$: Promedio nivel de ansiedad matemática del GC en Pre Test.

$\boldsymbol{\mu_2}$: Promedio nivel de ansiedad matemática del GC en Post Test.

Así, las hipótesis a contrastar para las medias poblacionales con un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$ son las siguientes:

$$\boldsymbol{H_0}: \boldsymbol{\mu_1 = \mu_2}$$

$$\boldsymbol{H_a}: \boldsymbol{\mu_1 \neq \mu_2}$$

Se utiliza la prueba T de Student, pues los datos provienen de muestras con distribución aproximadamente normal y varianzas iguales. En las siguientes tablas se resumen los datos obtenidos con XLSTAT:

Variable	Observaciones	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típica
x1	40	24,000	114,000	50,675	18,100
x2	40	24,000	89,000	49,625	18,199

Diferencia	1,050
t (Valor observado)	0,475
|t| (Valor crítico)	2,023
GL	39
valor-p (bilateral)	0,637
alfa	0,05

Puesto que el valor-p calculado es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, no se puede rechazar la hipótesis nula. Así, no existe diferencia significativa en el nivel de ansiedad hacia las matemáticas de los estudiantes que participan en la MEMR antes y después de la intervención didáctica. El riesgo de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera es de 63,72%.

Estos resultados se contraponen a la literatura consultada que asevera que trabajar con situaciones realistas, de forma colaborativa, utilizando estrategias provenientes del sentido común, disminuye la ansiedad de los estudiantes con la asignatura. Esto puede atribuirse a lo breve de la intervención didáctica y a factores ajenos a los investigadores, ya que las variables socio-afectivas necesitan de más tiempo para modificarse.

4.5 Género de los estudiantes y otras variables

A continuación, se muestra una serie de pruebas de estadística inferencial orientadas a demostrar o negar distintas hipótesis que consideran el género de los estudiantes que trabajan con la metodología basada en EMR.

Hipótesis 5. No existen diferencias en los niveles de matematización, de ansiedad matemática y motivación presentados por los y las estudiantes que trabajan con la metodología basada en EMR.

4.5.1 Nivel da matematización y género de los estudiantes

Las hipótesis a contrastar son:

H_0: No existe diferencia significativa en el nivel de matematización entre los y las estudiantes del GE.

H_a: Existe diferencia significativa en el nivel de matematización entre los y las estudiantes del GE.

Luego,

μ_1: Promedio de matematización Post Test hombres.

μ_2: Promedio de matematización Post Test mujeres.

Así, las hipótesis a contrastar para las medias poblacionales con un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$ son las siguientes:

$$H_0\text{: } \mu_1 = \mu_2$$

$$H_a\text{: } \mu_1 \neq \mu_2$$

Se utiliza la prueba U de Mann-Whitney, pues los datos de ambos grupos provienen de variables que no siguen una distribución normal.

Variable	Observaciones	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típica
x_1	13	22,000	61,000	43,692	15,266
x_2	25	20,000	64,000	46,000	14,551

U	132,000
Valor esperado	156,000
Varianza (U)	986,477
valor-p (bilateral)	0,454
alfa	0,05

Puesto que el valor-p calculado es mayor que el nivel de significación alfa=0,05, no se puede rechazar la hipótesis nula. De tal forma, no existe diferencia significativa en el nivel de matematización entre las y los estudiantes que participan en la MEMR. El riesgo de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera es de 45,43%.

4.5.2 Motivación matemática y género de los estudiantes

Las hipótesis de trabajo en este sentido son:

H₀: No existe diferencia significativa en el nivel de motivación hacia la matemática de las y los estudiantes que participan de la MEMR.

Hₐ: Existe diferencia significativa en el nivel de motivación hacia la matemática de las y los estudiantes que participan de la MEMR.

Luego,

$\boldsymbol{\mu_1}$: Promedio de nivel de motivación Post Test hombres.

$\boldsymbol{\mu_2}$: Promedio de nivel de motivación Post Test mujeres.

Así, las hipótesis a contrastar para las medias poblacionales con un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$ son las siguientes:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$$

Como las variables consideradas siguen una distribución aproximadamente normal se utiliza la prueba t de Student para dos muestras independientes. Los datos obtenidos con XLSTAT se exponen en las siguientes tablas:

Variable	Observaciones	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típica
x_1	13	35,000	67,000	52,154	8,707
x_2	24	36,000	59,000	48,667	7,087

Diferencia	-3,487
t (Valor observado)	-1,318
|t| (Valor crítico)	2,030
GL	35
valor-p (bilateral)	0,196
Alfa	0,05

Puesto que el valor-p calculado es mayor que el nivel de significación alfa=0,05, no se puede rechazar la hipótesis nula. Así, no existe diferencia significativa en el nivel de motivación hacia la matemática de las y los estudiantes que participan de la MEMR. El riesgo de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera es de 19,60%.

4.5.3 Ansiedad hacia las matemáticas y género de los estudiantes

Las hipótesis de trabajo en este sentido son:

H₀: No existe diferencia significativa en el nivel de ansiedad matemática de las y los estudiantes que participan de la MEMR.

Hₐ: Existe diferencia significativa en el nivel de ansiedad matemática de las y los estudiantes que participan de la MEMR.

Luego,

$\boldsymbol{\mu_1}$: Promedio de nivel de ansiedad Post Test hombres.

$\boldsymbol{\mu_2}$: Promedio de nivel de ansiedad Post Test mujeres.

Así, las hipótesis a contrastar para las medias poblacionales con un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$ son las siguientes:

$$\boldsymbol{H_0}: \boldsymbol{\mu_1} = \boldsymbol{\mu_2}$$

$$\boldsymbol{H_a}: \boldsymbol{\mu_1} \neq \boldsymbol{\mu_2}$$

Como las variables consideradas siguen una distribución aproximadamente normal se utiliza la prueba t de Student para dos muestras independientes. Los datos obtenidos con XLSTAT se exponen en las siguientes tablas:

Variable	Observaciones	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típica
x_1	13	24,000	89,000	47,231	18,669
x_2	24	30,000	98,000	57,542	21,627

Diferencia	10,311
t (Valor observado)	1,449
|t| (Valor crítico)	2,030
GL	35
valor-p (bilateral)	0,156
Alfa	0,05

Puesto que el valor-p calculado es mayor que el nivel de significación alfa=0,05, no se puede rechazar la hipótesis nula. Así, No existe diferencia significativa en el nivel de ansiedad matemática de las y los estudiantes que participan de la MEMR. El riesgo de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera es de 15,62%.

Estos resultados son un precedente para investigaciones similares, ya que en la literatura consultada no hay referencias a diferencias en niveles de matematización o variables socio-afectivas entre hombres y mujeres. Esto puede ser un paso más hacia la equidad en una asignatura donde persiste el mito de que “los hombres son mejores”. Lo que si se puede comprobar es la premisa de Freudenthal “la matemática es una actividad humana, de modo tal que debe existir una matemática para todos” sin diferencias entre hombres y mujeres.

4.6 Correlaciones de las variables involucradas

Se utiliza el coeficiente de correlación de Pearson, con un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, puesto que los datos vienen de variables con distribución aprox. normal.

Hipótesis 6. Si existe relación entre el nivel de matematización logrado por los estudiantes y las variables socio-afectivas presentadas por los mismos.

4.6.1 Nivel de matematización y ansiedad hacia las matemáticas

Las hipótesis a contrastar son:

H₀: No existe correlación entre los niveles de matematización y ansiedad matemática en el contenido de funciones, a raíz de la MEMR.

Hₐ: Existe correlación inversa entre los niveles de matematización y ansiedad matemática en el contenido de funciones, a raíz de la MEMR.

Luego, la matriz de correlaciones (Pearson) se ha obtenido con el software XLSTAT:

Variables	Nivel de Matematización	Ansiedad
Nivel de Matematización	1	-0,538
Ansiedad	-0,538	1

Se observa que existe una correlación inversa entre las variables consideradas, y ya que el $valor - p = 0{,}001$ es menor que el nivel de significancia, existe evidencia significativa para rechazar la hipótesis nula, y de tal forma, existe correlación negativa media entre los niveles de matematización y ansiedad matemática en el contenido de funciones, a raíz de la MEMR.

Esto es favorable, ya que es un antecedente de peso para potenciar la aplicación del enfoque EMR en grupos de estudiantes con alto índice de ansiedad, puesto que el trabajar con situaciones cotidianas, ligadas a su realidad cercana, donde el sentido común orienta los procesos matemáticos, alienta a los y las estudiantes en el trabajo matemático, y por ende disminuye su ansiedad o aprehensión con la asignatura.

4.6.2 Nivel de matematización y motivación matemática

Las hipótesis a contrastar son:

H_0: No existe correlación lineal entre los niveles de matematización y motivación en el contenido de funciones, a raíz de la MEMR.

H_a: Existe correlación lineal entre los niveles de matematización y motivación en el contenido de funciones, a raíz de la MEMR.

La siguiente matriz de correlaciones (Pearson) ha sido generada con el software XLSTAT:

Variables	Nivel de Matematización	Motivación
Nivel de Matematización	1,000	0,230
Motivación	0,230	1,000

Como el $valor - p = 0{,}171$ computado es mayor que el nivel de significancia, no existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula, y de tal forma, existe una correlación positiva débil entre los niveles de matematización alcanzados por los estudiantes y su motivación matemática en el contenido de funciones, a raíz de la MEMR.

Estos resultados sientan un precedente tanto para comprobar el hecho de que el nivel de matematización y la motivación de los estudiantes se relacionan de forma positiva, como para intentar aumentar la motivación de los estudiante trabajando situaciones realistas o contextualizadas. De cualquier forma la respuesta final no está en esta investigación, ya que es una línea investigativa promisoria para un futuro.

Si bien es cierto los investigadores esperaban que esta correlación de variables fuera mayor, se tiene que considerar lo breve de la intervención, lo interrumpido de la misma y lo pequeño de la muestra. Es probable que en una intervención más prolongada y sin interrupciones se tenga mayor relación entre estas variables.

4.7 Comparación de los resultados obtenidos por los y las estudiantes en Test de Proceso y Evaluación Tradicional

Transcurridas cinco sesiones de intervención, se aplicó un Test de Proceso para evidenciar los avances, diferencias o similitudes en los niveles de matematización alcanzados por los y las estudiantes en ambos grupos. Además, al finalizar la intervención didáctica se aplicó una Evaluación Tradicional, que fue confeccionada con los docentes de la Institución y además fue aplicada a todos los estudiantes de ese nivel en el Liceo. Resulta interesante observar los resultados de dichas mediciones de forma descriptiva.

Tabla 3. Estadísticos descriptivos de los Test de Proceso y Evaluación Tradicional. (Elaboración Propia)

Estadístico	Test de proceso		Evaluación tradicional	
	GC	GE	GC	GE
Máximo	13,000	14,000	70,000	70,000
Mínimo	0,000	3,000	27,000	23,000
Media	4,486	10,027	48,405	46,973
Mediana	3,000	11,000	47,000	45,000
Desv. Est.	3,339	3,563	10,158	11,639

Respecto a los resultados obtenidos con el Test de Proceso, se hizo evidente que los y las estudiantes del GE obtenían mejores puntajes que los estudiantes del GC. Esto se explica porque en el GE sólo se había trabajado con Situaciones Realistas, como las que evalúa el Test de Proceso, en cambio el GC conoce definiciones, propiedades y han probado ejercitación con diversos tipos de funciones, pero no aun en problemas conectados a la realidad. En conclusión, con cinco sesiones ya se puede comprobar alguna diferencia importante en el nivel de matematización de los estudiantes intervenidos con la metodología innovadora. Es posible proponer una evaluación de impacto que compruebe dicha diferencia en el nivel de matematización logrado.

Los resultados de la Evaluación Tradicional, aplicada a ambos grupos después del Post Test de Funciones (en particular el promedio grupal) no muestran diferencias significativas entre ambos grupos. Este instrumento evalúa de la forma que tradicionalmente se hace en la institución, es decir, con ítemes de aplicación directa, de selección única, selección múltiple, preguntas abiertas y cerradas, y ya que no se observa diferencias significativas, se puede asumir que la metodología innovadora basada en la EMR no perjudica el aprendizaje de los estudiantes, tampoco lo favorece significativamente en los términos que se evalúan tradicionalmente; por tanto es una metodología alternativa, que permite mejorar los niveles de matematización de los estudiantes, sin perjudicar los conocimientos adquiridos en el plazo estipulado por la institución.

4.8 Comparación de los procesos de matematización de los y las estudiantes en Pre y Post Test de Funciones

Para los fines de este seminario, resulta interesante comparar las producciones puntuales de los estudiantes, comparables en Pre y Post Test. Específicamente se trata del Ítem 3 en Pre Test comparado con el Ítem 2 de Post Test. Esto es relevante, ya que durante la intervención didáctica no se presentaron situaciones realistas gráficas orientadas, como en este caso, al seguimiento de una secuencia de patrones, entonces los estudiantes de ambos grupos no han sido instrumentalizados en el uso de patrones, y por tanto todas aquellas modificaciones en el nivel de matematización que pudiesen lograr los estudiantes en ambos grupos, es evidencia sólo del desarrollo de habilidades de matematización.

ÍTEM 3

Este es el comienzo de una secuencia de patrones.

a) ¿Cuántas esferas hay en la 6° imagen del patrón?
b) Escribe una regla matemática que permita encontrar el número de esferas de la enésima imagen (que ocupa el lugar n).
c) ¿Qué lugar ocupa la figura que se construye con 49 esferas?

ÍTEM 2

Este es el comienzo de una secuencia de patrones.

a) Si se sigue el patrón, ¿Cuántos cuadritos habría en la 7° imagen?
b) Escribe una regla matemática que permita encontrar el número de cuadritos de la enésima imagen (que ocupa cualquier lugar **n**).
c) ¿Qué lugar ocupa la figura que se construye con 73 cuadritos?

Ilustración 2. Ítems comparados en análisis cualitativo. (Elaboración Propia)

En primer lugar, se expone un análisis estadístico descriptivo de los resultados en estos ítems por ambos grupos, para luego dar paso a un análisis detallado de las producciones de los estudiantes.

4.8.1 Análisis estadístico descriptivo

El siguiente gráfico muestra el porcentaje de alumnos que logra cada uno de los niveles de matematización propuestos para el reactivo "Escribe una regla matemática que permita encontrar el número de cuadritos de la enésima imagen (que ocupa cualquier lugar *n*)", para ambos grupos en Pre y Post Test.

El reactivo propuesto a análisis fue creado por los autores dando la posibilidad de que los estudiantes se situaran en el nivel general de matematización para dar una certera respuesta, ya que se solicita una generalización y reflexión de la exploración anterior, un modelo para encontrar el número de cuadritos de la enésima figura.

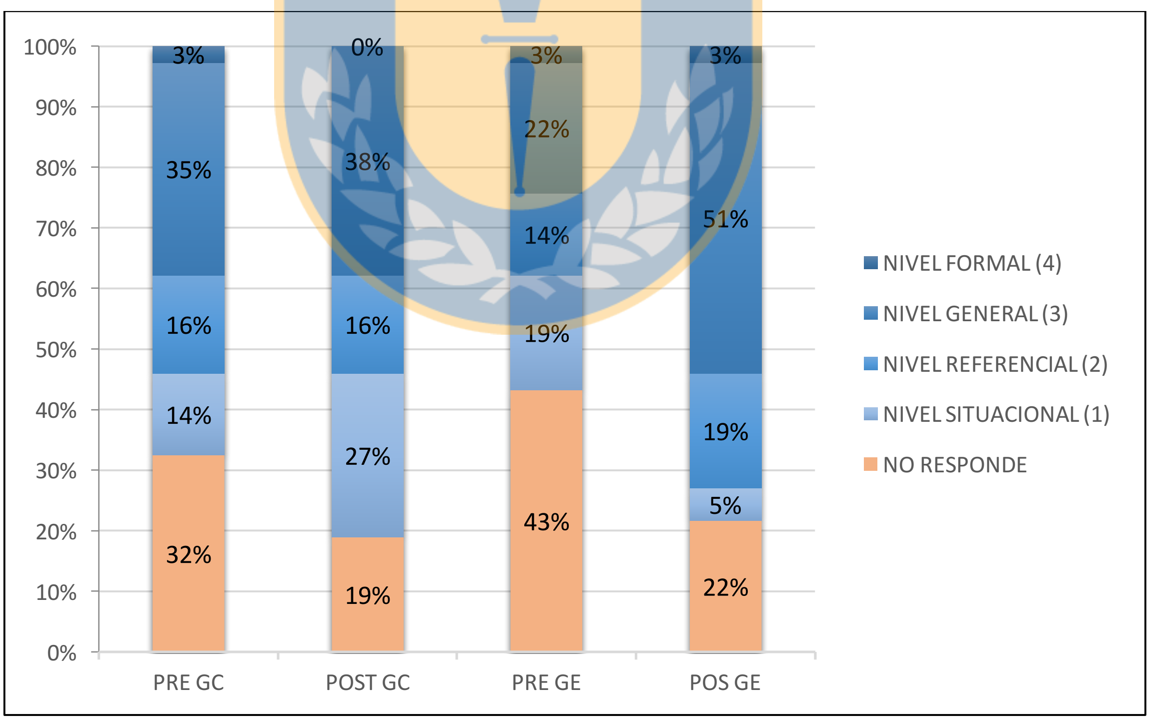


Ilustración 3. Porcentaje de logro en cada nivel de matematización, para el reactivo B. Elaboración propia.

Como se ha citado anteriormente, la situación problemática planteada es resoluble en cualquier nivel de matematización, pero lo que se busca es que los estudiantes puedan hacer el tránsito de los niveles inferiores (situacional y referencial) a los superiores (general y formal), en ese tránsito surge el desarrollo de la habilidad de matematización.

El primer indicador a analizar es el porcentaje de no respuesta. En el GC se observa un descenso de 32% a 19% de alumnos que no responden al reactivo, por otro lado, en el GE el descenso es aún mayor, dado que inicialmente el 43% de los estudiantes no dio respuesta, versus el 22% en el Post Test. Esto quiere decir que en ambos grupos aumentó la cantidad de estudiantes que entregaron algún tipo de respuesta al reactivo indicado después de la intervención didáctica.

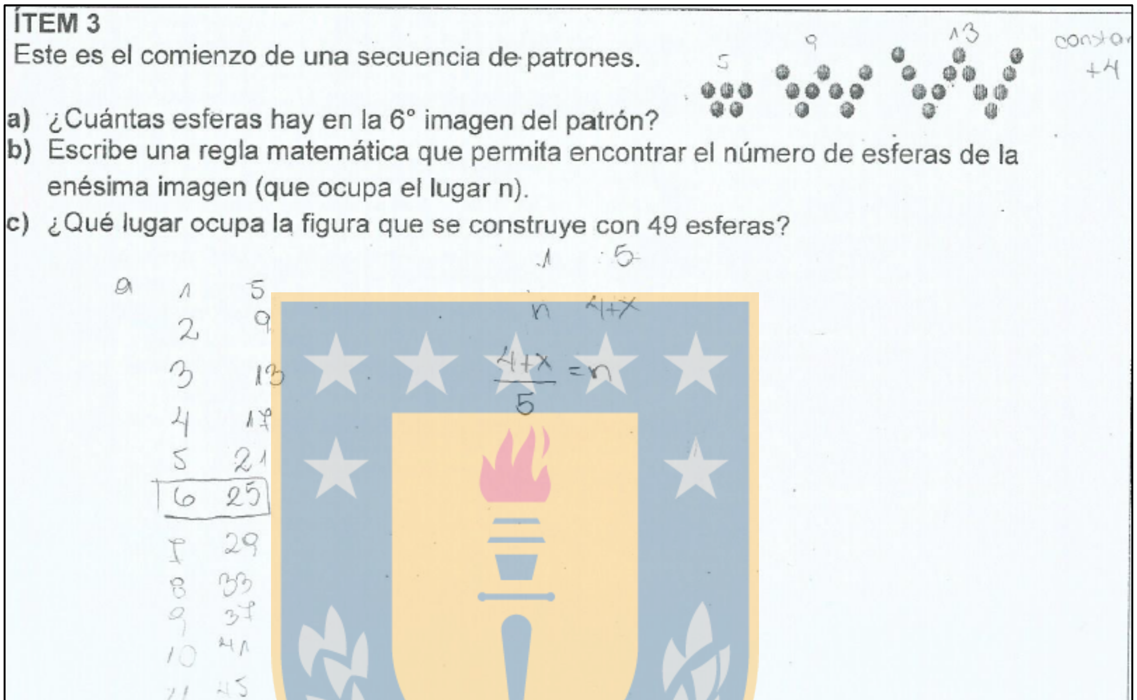
Luego, el GC muestra un leve incremento en el porcentaje de estudiantes que responden en el nivel general y situacional, mientras el nivel referencial se mantiene, es decir, hay un leve o casi nulo tránsito hacia niveles de matematización superiores.

En cambio, en el GE se observa una importante disminución en el porcentaje de estudiantes que responden en el nivel situacional (de 19% a 5%), un leve aumento (de 14% a 19%) en el nivel referencial, y un importante aumento de 29 puntos porcentuales en los estudiantes que responden en el nivel general, lo que es una importante evolución considerando el poco tiempo y lo accidentado de la intervención didáctica.

Es posible asumir que la intervención didáctica basada en la Educación Matemática Realista conduce al desarrollo de habilidades de matematización en los estudiantes intervenidos, no así un mero proceso de instrumentalización en problemas contextuales referidos a funciones. Además, se puede proponer que mayor sería la evolución de los niveles de matematización y con ello las habilidades involucradas en cada uno, si la intervención pedagógica fuese más extensa.

4.8.2 Análisis producciones de los y las estudiantes

A continuación, se analizarán las respuestas de un estudiante del G.E. (a quien se le llamará Sofía), que ha presentado un notorio crecimiento en el nivel de matematización en que se sitúa para resolver los reactivos de Pre y Post Test

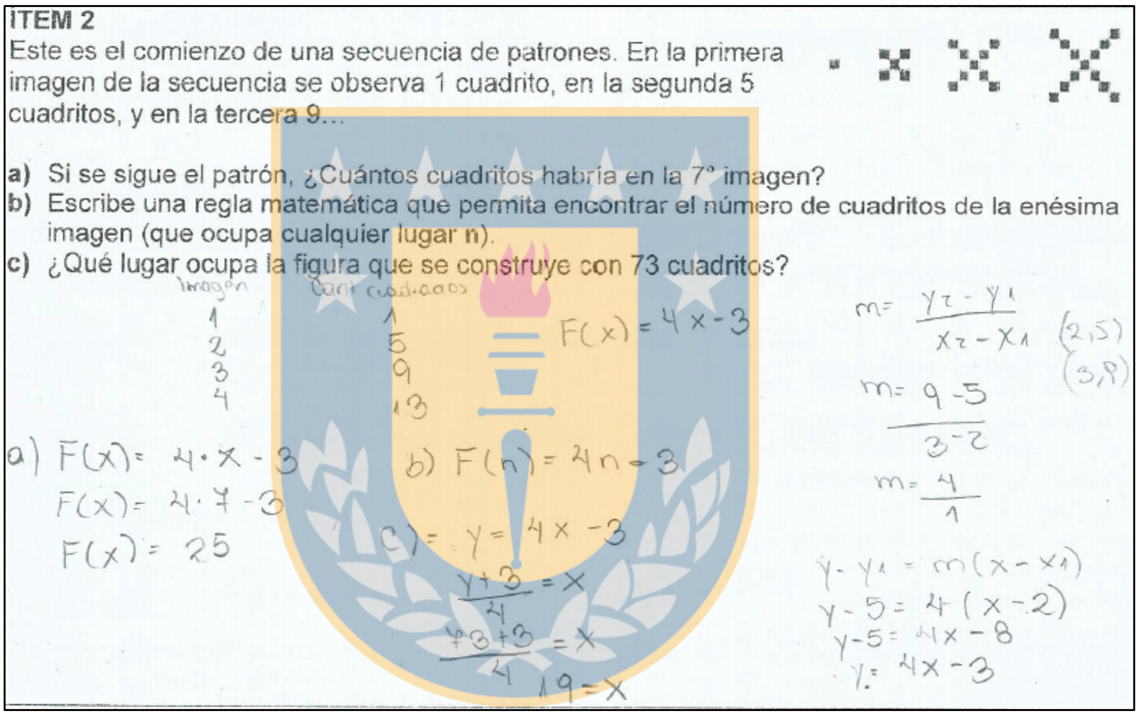

ÍTEM 3
Este es el comienzo de una secuencia de patrones.

a) ¿Cuántas esferas hay en la 6° imagen del patrón?
b) Escribe una regla matemática que permita encontrar el número de esferas de la enésima imagen (que ocupa el lugar n).
c) ¿Qué lugar ocupa la figura que se construye con 49 esferas?

Ilustración 4. Producción de Sofía en Pre Test

En un comienzo, para resolver esta situación, Sofía reconoce un crecimiento constante en el número de esferas del patrón, (anota *constante +4*). Con esto, formula una li sta que le permite conocer el número de esferas que tiene cada figura del patrón (ver ilustración 4), según el lugar que ocupa en la cadena de dibujos. Así, responde acertadamente a la pregunta a). Es necesario poner el énfasis en que las estrategias mentales aquí utilizadas por Sofía, dan cuenta de situarse en un Nivel Situacional, pues solo realiza una inspección numérica de la situación, haciendo una correcta interpretación matemática de la situación original (matematización horizontal).

Pero luego se encuentra con la dificultad de generalizar. Su resultado $n \to 4 + x$, se puede interpretar considerando que sea *x* el número de esferas de la figura anterior *(n-1)*, pero Sofía no lo explica de aquella forma, sólo lo escribe para luego dar paso a una proporción, pues considera como un antecedente el que la primera imagen (*n=1*) se construya con cinco esferas. Con esto Sofía propone un crecimiento proporcional, pero no lo prueba, confía en que su razonamiento la lleve a una respuesta acertada, o le proporcione algún tipo de puntaje. El Nivel de Matematización que se puede apreciar con esta respuesta es Referencial, pues surge un *Modelo de* la situación particular, aunque bastante impreciso, por no decir erróneo, lo interesante del proceso de matematización observado es que Sofía intenta algebrizar, aunque sin tanto rigor matemático pues al no definir claramente que variables representa *x* y *n*, se hacía difícil llegar a un modelo exacto.



ITEM 2
Este es el comienzo de una secuencia de patrones. En la primera imagen de la secuencia se observa 1 cuadrito, en la segunda 5 cuadritos, y en la tercera 9...

a) Si se sigue el patrón, ¿Cuántos cuadritos habría en la 7° imagen?
b) Escribe una regla matemática que permita encontrar el número de cuadritos de la enésima imagen (que ocupa cualquier lugar n).
c) ¿Qué lugar ocupa la figura que se construye con 73 cuadritos?

Ilustración 5. Producción de Sofía en Post Test

En cambio, en el Post Test de Sofía fue posible observar un proceso de matematización mas acabado y riguroso, con diversidad de estrategias matemáticas. En primer lugar, la inspección numérica con una tabla donde consigna el número o posición de la imagen (en la cadena del patrón generado), reconoce un crecimiento lineal, por tanto, intenta encontrar la *función* que modela ese crecimiento. Se aboca entonces a encontrar una *pendiente*, y utilizando la *Ecuación Punto-Pendiente* de la recta, encuentra una expresión algebraica: $y = 4x - 3$, que lego asocia a la función:

$$f(x) = 4x - 3$$

Con esta función, Sofía responde a los tres reactivos propuestos de forma correcta. Es necesario notar que las estrategias mentales de formalización dan cuenta de una amplia reflexión sobre las producciones realizadas y las estrategias anteriores. Por tanto, Sofía matematiza a Nivel General. Es muy difícil que los estudiantes logren matematizar en el Nivel Formal durante una evaluación, salvo que los reactivos estén directamente enfocados a ello.

Como Sofía, muchos estudiantes de ambos grupos lograron superar el Nivel de Matematización con el que trabajaban al comenzar la intervención. En cualquier caso, el objetivo de la intervención no era que los estudiantes matematizaran en el nivel general o formal (superiores) sino que se facilitara el tránsito de niveles, tanto del Nivel Situacional al Nivel Formal, como viceversa.

Ahora se muestran algunas producciones de los estudiantes tanto de GC como de GE, en cuanto a un ítem que se considera interesante para que el lector aprecie los distintos niveles de matematización logrados por los alumnos.

Un estanque está lleno con 1.200 litros de agua. En la parte inferior tiene una válvula que permite la salida de 4 litros por minuto.

a) ¿Cuánto tiempo con la válvula abierta se necesita para que en el estanque queden 1000 litros de agua?
b) ¿Cuánta agua queda en el estanque pasados 6 minutos?, ¿30 minutos?, ¿y t minutos?
c) ¿Qué función representa el agua que queda en el estanque, pasados t minutos desde que se abre la válvula? (en un primer momento el estanque está lleno)
d) ¿Cuál es la pendiente de la recta que representa a esta función, y que representa ese valor en el contexto del problema?
e) ¿Esta función será un modelo exacto de la realidad?

Ilustración 6. Ítem 1 en Post Test de Funciones.

Respuestas al Reactivo A

Las siguientes imágenes, son respuestas que los alumnos entregaron con respecto al reactivo *a) ¿Cuánto tiempo con la válvula abierta se necesita para que en el estanque queden 1000 litros de agua?*

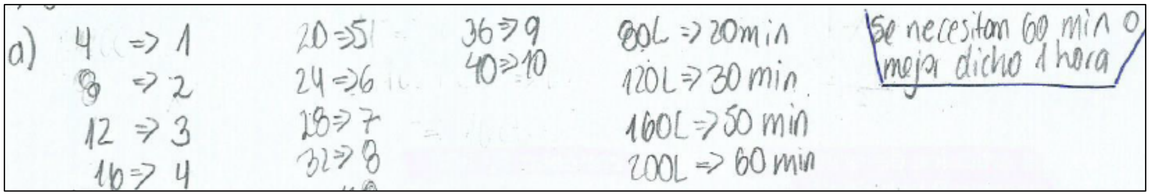


Ilustración 7. Producción de Andrés

La producción de Andrés en éste Ítem muestra una acuciosa inspección numérica: primero tomando la pérdida de agua del estanque cada un minuto, luego por múltiplos de 10 min. Andrés comete un leve error numérico, al considerar que 160lts equivaldrían a 50min de la válvula abierta, lo que lo lleva a responder erróneamente la pregunta. Sin embargo, su razonamiento es completamente válido, en un nivel situacional de matematización.

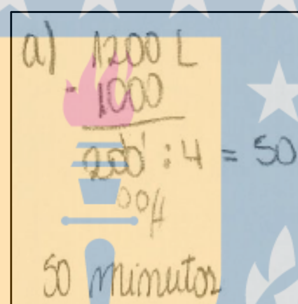


Ilustración 8. Producción de Antonia

En cambio, Antonia considera conocer primero cuanta agua debe gastarse, para luego calcular el tiempo. Así, con una serie de operaciones matematicas llega al resultado esperado de 50 minutos. Se puede decir que Antonia matematiza en un nivel referencial, ya que aparece un modelo tácito de la situación en particular.

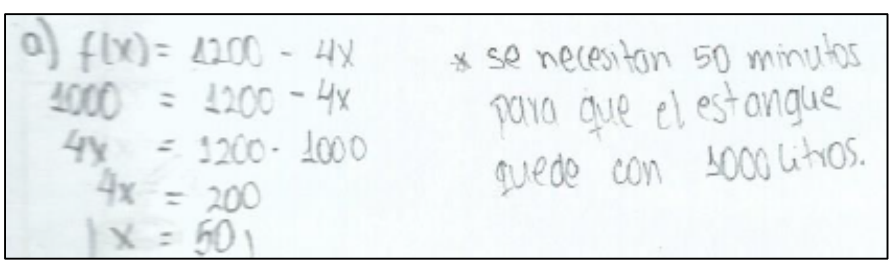


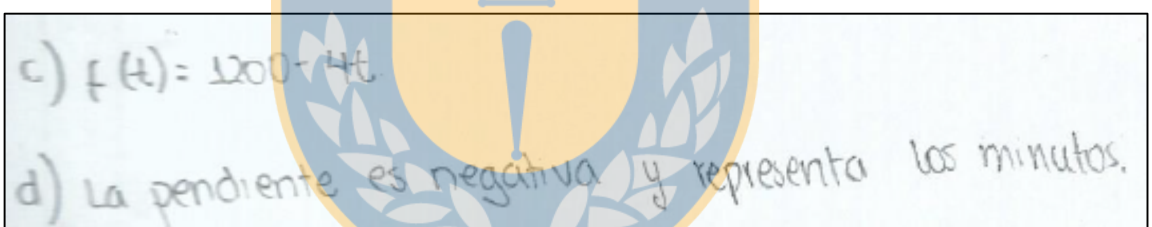
Ilustración 9. Producción de Felipe

Mientras tanto, Felipe comienza el trabajo sobre la situación con un modelo acabado, tal vez surge automáticamente en él, un modelo de función afín donde la pérdida de agua se considera como una variable directamente proporcional al tiempo que transcurre. Así, solo basta reemplazar por 1.000 la imagen de x, lo que da paso al descubrimiento del tiempo perdido: 50 minutos. Así, es posible afirmar que Felipe matematiza en el nivel general, o bien incluso formal.

Respuestas a los Reactivos C y D

Las siguientes producciones son respuestas de los estudiantes a los reactivos C y D para la misma situación realista del Estanque de Agua antes propuesta.

C) ¿Qué función representa el agua que queda en el estanque, pasados t minutos desde que se abre la válvula? (en un primer momento el estanque está lleno) D) ¿Cuál es la pendiente de la recta que representa a esta función, y que representa ese valor en el contexto del problema?


c) $f(t) = 1200 - 4t$

d) La pendiente es negativa y representa los minutos.

Ilustración 10. Producción de Belén

Belén propone como solución a la pregunta C la función $f(t) = 1200 - 4t$, respuesta correcta que debe venir de la mano con las respuestas anteriores, así es posible apreciar el proceso de matematización progresiva, donde la exploración, experimentación, reflexión, generalización y sobre todo el sentido común impulsan a los estudiantes a consignar un modelo preciso. Sin embargo, luego se aprecia una desprolijidad conceptual, dado que caracteriza bien a la pendiente como una constante "negativa", pero no señala su valor, que en la expresión antes expuesta resulta casi evidente, además propone que representa "los minutos", entonces cabe la pregunta ¿Qué entiende Belén por el concepto de pendiente?, tema que no fue tratado directamente en las sesiones de clase, pues el semestre anterior los y las estudiantes participaron de la unidad de Geometría Analítica, donde debieron conocer el concepto. Se puede decir que Belén matematiza en un nivel Referencial o General para esta situación.

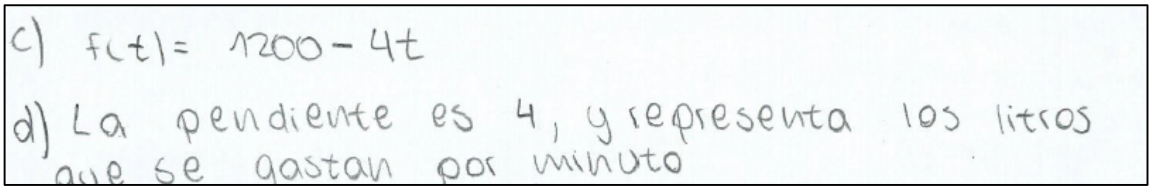

c) f(t) = 1200 - 4t
d) La pendiente es 4, y representa los litros que se gastan por minuto

Ilustración 11. Producción de Alberto.

Luego Alberto, al igual que Belén, consigna una respuesta correcta para el reactivo C, y una acertada descripción de la pendiente en el contexto de la situación, sin embargo, no la identifica de forma correcta, resulta casi paradigmático que se entienda el concepto como una gasto (o pérdida) constante en el tiempo, para la situación propuesta, pero no sean capaces de representarlo como corresponde $m = -4$. Así, Alberto se sitúa probablemente en el nivel General o Referencial para responder a esta situación.

En la Ilustración 16, Roxana responde acertadamente al Reactivo C, pero muestra un amplio proceso para dar solución al Reactivo D, ya que utiliza la definición para calcular la pendiente pedida, se propone dos pares ordenados de la forma (tiempo, agua perdida), con los valores (1,4) y (2,8), con ellos puede calcular la pendiente, que resulta ser 4, lo que es correcto según su interpretación *“Representa la cantidad de agua que sale del estanque en un minuto, expresado en litros”.* Además, grafica esta función de la “pérdida de agua”, con todo esto y aunque Roxana no respondió a lo que se le solicitaba, dio una respuesta satisfactoria utilizando diversas estrategias e interpretaciones, entonces ella matematiza en un nivel General.

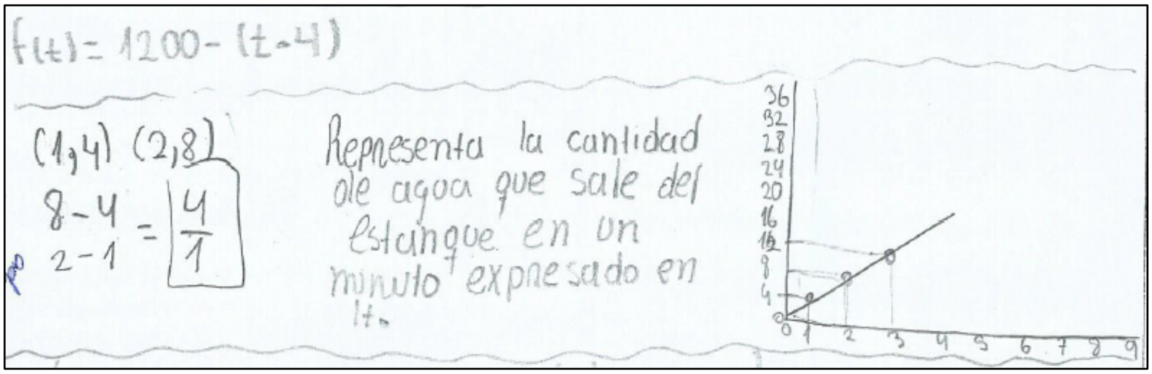


Ilustración 12. Producción de Roxana

Mientras que Matías, en la Ilustración 17, propone la función del *"agua perdida en un tiempo t"*, no es lo que se pide, pero consigna una acertada interpretación para el concepto de pendiente *"Es la cantidad de litros que sale en un minuto".*

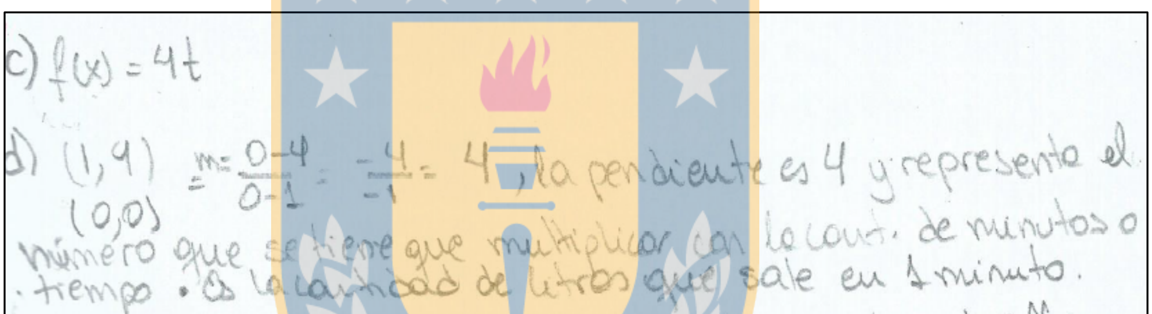


Ilustración 13. Producción de Matías

¿Por qué es importante mostrar y analizar estas producciones particulares de los estudiantes? Porque la EMR exige tomarse de los procesos propios de matematización de los estudiantes para progresar a niveles de comprensión superiores, de tal forma que el análisis (inmediato o *a posteriori*) dará pautas al Docente de cómo conducir el proceso de Enseñanza-Aprendizaje en las clases siguientes.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

Esta investigación permite concluir que el enfoque metodológico basado en la Educación Matemática Realista favorece el desarrollo de habilidades de matematización en los estudiantes, que es un objetivo esencial de las Matemáticas y de los programas de esta disciplina escolar. De este modo constituye una buena alternativa metodológica distinta a las prácticas docentes tradicionales que predominan en las clases de matemáticas, en la construcción de los conceptos matemáticos.

El enfoque basado en la Educación Matemática Realista no desfavorece el rendimiento académico de los estudiantes sobre el contenido de abordado, pero tampoco los incrementa, tal vez por el escaso tiempo de implementación, por razones involuntarias (paro docente) . Se propone que en futuras investigaciones se planifique e implemente una intervención pedagógica más prolongada en un primer semestre o en un colegio de dependencia particular subvencionada; también es sugerente implementar este enfoque desde cursos anteriores.

Dado que la intervención didáctica basada en la Educación Matemática Realista fue demasiado breve, no hay evidencias de variaciones en la motivación y la ansiedad matemática de los estudiantes; lo que corrobora los antecedentes teóricos revisados acerca de que una modificación de las variables socio-afectivas, requiere de una intervención innovadora más extensa.

Es interesante relevar el daño cognitivo que las metodologías conductistas han generado en el estudiantado de tercero medio, que ya llevan once años aprendiendo la matemática de forma mecanicista, que se manifestó en el rechazo de varios estudiantes a la hora de proponerse el trabajo en base a una situación realista, ellos en su mayoría manifestaban la no intención de pensar y de que manifestaban “preferían replicar ejemplos, y resolver ejercicios”. Situación que ejemplifica la observación del Premio Nacional de Ciencias, Dr. Patricio Felmer (2015), en el sentido que hoy “el profesor es el que sabe si un problema está bueno, si un problema está malo, es el que sabe todo, y los niños y las niñas le creen al profesor, no desarrollan su propia capacidad para determinar si algo está bien o está mal y su autonomía frente al conocimiento". De igual modo, es interesante que durante la implementación del enfoque, varios estudiantes de diverso nivel de rendimiento en Matemática participaron activamente en los procesos de matematización.

Esta investigación permite mostrar que la variable de género no es influyente en los niveles de matematización alcanzados por el estudiantado en el contenido de funciones; al contrario, se evidenció que las mujeres presentaban mayor motivación que los hombres, esta condición se mantiene luego de la intervención didáctica.

Existe una relación positiva entre motivación y procesos de matematización, lo que hace suponer que los estudiantes que están motivados (intrínseca o extrínsecamente) con la asignatura logran matematizar en niveles superiores. Algo opuesto ocurre con los niveles de ansiedad: los alumnos con mayor ansiedad solo lograban matematizar en niveles inferiores. La inseguridad en Matemáticas genera ansiedad y ésta bloquea la co- construcción de aprendizaje.

Aunque breve, la experiencia de implementar un enfoque realista en Ed. Media contribuye a los aspectos claves para mejorar la enseñanza de las Matemáticas, según el Centro de Modelamiento matemático, que afirma : "La metodología de enseñanza, la innovación pedagógica y una relación más bidireccional entre estudiantes y profesores son algunos de los aspectos cruciales para mejorar las cifras que han arrojado diferentes mediciones sobre el rendimiento escolar en esta materia".

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A continuación, se propone un listado de las publicaciones revisadas al momento de realizar esta investigación.

Alsina, A. (2009) *EL aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado.* En M.J. Gonzalez & J. Murillo (Eds), Investigaciones en Educación Matemática XIII (pp. 119-127). Santander: SEIEM.

Arratia, J., Manríquez, P., Valdebenito, D. (2016). *Visualización: una herramienta para el desarrollo del conocimiento de razones, proporciones y proporcionalidad*. Universidad de Concepción, Los Ángeles, Chile.

Arzola, M. & Cares, F. (2013) *Propuesta metodológica basada en el método IDEAL de Bransford y Stein para la resolución de problemas en la unidad de Sistemas de Ecuaciones Lineales.* Seminario para optar al grado de licenciado en educación del título profesional de profesor de matemáticas y educación tecnológica. Chile: Universidad de Concepción.

Ausubel, D.; Novak, J. & Hanesian, H. (1993). *Psicología Educativa*. México: Trillas.

Bressan, A.; Gallego, F.; Pérez, S. & Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista, Bases Teóricas*. Publicación del GPDM. Extraído de: www.gpdmatematica-.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teoria_EMR-Final.pdf.

Bressan, A.; Zolkower, B. & Gallego, F. (2004). Los Principios de la Educación Matemática Realista*. Reflexiones Teóricas para la Educación Matemática*. Compilador: Alagia, H. y otros. Buenos Aires: Zorzal.

Castiglione, D. (2015). *Conexiones Matemáticas Múltiples a partir de tres problemas en contexto realista*. Publicación del GPDM. Extraído de: http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/09/conexionesmatematicas.pdf.

Carretero, M. (1997) Constructivismo y educación. México: Progreso.

Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (2004). Teacher interventions aimed at mathematical level raising during collaborative learning. *Educational studies in mathematics*, *56*(1), 39-65.

Diaz Barriga, F. (2004) Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. México: McGraw-Hill.

Gómez Chacón, Inés María (2000). *Matemática Emocional.* Madrid: Narcea.

Felmer, P.(2015). Programa busca mejorar desempeño docente. Los factores clave para mejorar el rendimiento en matemáticas. Universidad de Chile. http://www.uchile.cl/noticias/117354/los-factores-clave-para-mejorar-el-rendimiento-en-matematicas, nov., 2015.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task en Educación Matemática Realista, Bases Teóricas. Publicación del GPDM. Extraído de: http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teoria_EMR-Final.pdf

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, en Educación Matemática Realista, Bases Teóricas. Publicación del GPDM. Extraído de: http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teoria_EMR-Final.pdf

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education, en Educación Matemática Realista, Bases Teóricas. Publicación del GPDM. Extraído de: http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teoria_EMR-Final.pdf

Freudenthal, H. (1985). Mathematics Starting and Staying in reality, en Reflexiones Teóricas para la Educación Matemática de Sadovsky (2005)

Freudenthal, H. (1993). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, en Reflexiones Teóricas para la Educación Matemática de Sadovsky (2005).

Gallego, M & Bressan, A. (2010). *El proceso de matematización progresiva en el tratamiento de patrones.* Correo del Maestro, N° 168. Extraído de: http://gpdmatematica-.org.ar/wpcontent/uploads/2015/08/corre_maestro__matematizacion_progresiva.pdf.

Gallego, M & Pérez S. (2013). *Aportes "realistas" a la educación matemática,* Desde la Patagonia, VOL. 10 - Nº 16. Extraído de http://170.210.81.130/desde/wpcontent-/uploads/2016/07/Gallego_Perez_ense%C3%B1anza_matematica_DLP_Vol10N16_2013.pdf

Godino, J. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Proyecto Edumat-Maestros. Extraído de http://www.ugr.es/local/-jgodino/edumatmaestros/.

Gravemeijer, K. & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: A mathematician on didactics and curriculum theory, en La corriente realista de didáctica de la matemática de Zolkower y otros (2006). Experiencias de un grupo de docentes y capacitadores. Publicación del GPDM.

Gravemeijer, K. (2002). Emergent Modelig as the Basis for an Instructional Sequence on Data Análisis, en Reflexiones Teóricas para la Educación Matemática de Sadovsky (2005).

Henson, K. & Eller (2000). Capitulo 1 Motivación en el Proceso de Enseñanza Aprendizaje, Extraído de http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:-D0oEYWuOvAgJ:proyectofinaliup.wikispaces.com/file/view/Cap%25C3%25ADtulo_1_Motivaci%25C3%25B3n.doc+&cd=3&hl=es&ct=clnk&gl=cl

López, G. (2010). Efecto de la motivación al logro y la inteligencia emocional en el Crecimiento Psicológico. *Revista Venezolana de Gerencia*, *15*(49).

Manquepi, P. & Sagardía, M. (2014) *Resolución de problemas a través de un Aprendizaje Situado.* Seminario para optar al grado de Licenciado en Educación y al título de Pedagogía en Matemáticas y Educación Tecnológica. Chile: Universidad de Concepción.

Mato, M. D., & de la Torre, E. (2009). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico.

Martínez Pérez, M., Da Valle, N., Bressan, A., y Zolkower, B. (2002) La relevancia de los contextos realistas en la resolución de problemas: una experiencia para capacitadores, docentes y alumnos. *Paradigma* Vol. XXIII, Nº 1. Pp. 59 - 94. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Venezuela. Publicado por CIDIPMAR.

MINEDUC (2013) Bases Curriculares Matemática. Extraído de http://www.curriculum-enlineamineduc.cl/605/w3-article-20852.html

Piqueras, J. (2009) emociones negativas y su impacto en la salud mental y física. *Suma Psicológica*, vol. 16, núm. 2, pp. 85-112.

Rabino, A.; Bressan, A. & Zolkower, B. (2001) Valor de los problemas en contextos con sentido para los alumnos. *Novedades Educativas,* n° 129.

Rabino, A. (2012). *Enseñar matemáticas a través de problemas… pero ¿Cómo?*. Extraído de: http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/Rabino_-ensenar_matematica_a_traves_de.pdf.

Ramos, A.B. y Font, V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica. La Matematica e la sua didattica, Anno 20, n. 4, 535-556.

Rico, L. (1991). *Ha fallecido Hans Freudenthal*, SUMA, N° 7. Extraído de: https://revistasuma.es/IMG/pdf/7/SUMA_7.pdf.

Roa, P. A. (2007) Un estudio sobre las concepciones y prácticas de motivación utilizadas por maestros en un colegio oficial de Colombia.

Rodríguez, M. (2011). *La teoría del aprendizaje significativo: una revisión aplicable a la escuela actual.* IN. Revista Electrònica d'Investigació i Innovació Educativa i Socioeducativa. Consultado en http://www.in.uib.cat/pags/volumenes/vol3_num1/-rodriguez/index.html

Romero (2016). La Teoría Conductista Del Aprendizaje Y Su Aplicación En El Aula De Clases De Los Centros Educativos Ecuatorianos, Romero Tacuri Orley Manuel

Sarmiento, M. (2007) La enseñanza de las Matemáticas y las NTIC: una estrategia de formación permanente. Universitat Rovira I Virgili. ISBN: 978-84-690-8294-2 / D.L. T.1625-2007

Streefland, L. (1991). Realistic Matematics Education in Primary School, en Bressan (2016) Educación Matemática Realista, Bases Teóricas

Treffers, A. (1987). Didactical background on a mathematics program for primary education.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1994). El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista: Ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje. Traducido del Inglés por Hector Escalona (2009). Correo del Maestro, núm. 160.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1999). Mathematics Education in The Netherlands: A Guided Tour, en Reflexiones Teóricas para la Educación Matemática de Sadovsky (2005)

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematical education: an example from a longitudinal trajectory on percentages, en La corriente realista de didáctica de la matemática de Zolkower y otros (2006).

Zamora (2013). La contextualización de las matemáticas. Al aprender con situaciones concretas y reales, el conocimiento es más permanente y significativo.

Zolkower, B. & Bressan, A. (2006). Enseñando a didactizar, aprendiendo a matematizar: Ideas y experiencias en torno a la capacitación de docentes. Conferencia. Reunión de Educación MatemáticaK (REM)

Zolkower, B., Bressan, A., & Gallego, F. (2006). La Corriente Realista de Didáctica de la Matemática. Experiencias de un Grupo de Docentes y Capacitadores. *Yupana*, *1*(3), 11-33.

ANEXO

5.1 Módulo Didáctico Funciones


UNIVERSIDAD ACREDITADA 6 AÑOS

Universidad de Concepción

DOCENCIA PREGRADO · DOCENCIA POSTGRADO
INVESTIGACIÓN · VINCULACIÓN CON EL MEDIO
GESTIÓN INSTITUCIONAL
NOVIEMBRE 2010 · NOVIEMBRE 2016

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

CAMPUS LOS ÁNGELES

ESCUELA DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICAS Y EDUCACIÓN TECNOLÓGICA

TERCER AÑO MEDIO

MÓDULO: FUNCIONES

DESARROLLANDO HABILIDADES MATEMÁTICAS DE MATEMATIZACIÓN EN SITUACIONES REALISTAS

2016

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

Contenido

1

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

2

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN, CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

I. CONCEPTO DE FUNCIÓN, DOMINIO Y RECORRIDO

Situación: ¿Dónde fotocopiar?

En las cercanías del colegio "Pablo Neruda" se encuentran dos lugares de impresión y fotocopiado, la descripción del costo de sus servicios aparece a continuación: ¿Cuál alternativa te parece más económica?

FOTOCOPIAS "MARGÁVILA"

Fotocopias e impresiones

Por un solo lado → $15

Por ambos lados → $14

CIBERCAFÉ "TIO PANCHO"

PC (mínimo) → $200

Impresiones → $10

Actividades

1. ¿Cuánto cuesta imprimir 5, 10, 15 y 20 páginas en cada lugar?, ¿y una cantidad cualquiera x?

Páginas	Fotocopias Margávila (por un solo lado)	Fotocopias Margavila(por ambos lados)	Cibercafé Tio Pancho
1			
2			
3			
4			
5			
10			
15			
20			
X			

2. La profesora Paola necesita imprimir un apunte de 5 páginas para sus 30 estudiantes, la fotocopiadora del Liceo está en mantención, por ello debe imprimir en otro lugar. ¿Qué alternativa le recomiendas? Recuerda "la economía es riqueza". Justifica con claridad tu recomendación.

3. Francisco, que es abogado, quiere imprimir un texto de 40 páginas, pero solo por un lado de la hoja; y otro de 50 páginas por ambos lados. ¿Qué le conviene más, ir a la Fotocopiadora o al cibercafé?

4. ¿En qué circunstancias imprimir en el "Cibercafé Tio Pancho" es la alternativa más económica?

5. ¿Existe algún modelo matemático o función que permita representar los costos de imprimir una cantidad x de páginas, para cada una de las opciones?

3

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

6. ¿Puedes graficar las alternativas de impresión, y obtener desde allí la alternativa más económica?

7. Estos "modelos" asociados a cada opción de impresión se pueden definir como **funciones**, si se pone atención a la dependencia de las variables. En la situación propuesta ¿Cuál es la variable independiente?, ¿Cuál es la variable dependiente?
8. Determina las funciones que modelan cada opción de compra (donde ***p*** es precio y ***h*** el número de impresiones)

Costo de imprimir en el "Cibercafé Tío Pancho"	$p(i) = 200 + 10 \cdot i$
Costo de imprimir en Fotocopiadora Margávila (por un solo lado)	
Costo de imprimir en Fotocopiadora Margávila (por ambos lados)	

9. ¿Existe alguna función que permita determinar el número de páginas impresa, sabiendo el dinero que se pagó, en cada una de las tres alternativas de impresión?

Formalización

Una **función f** de un conjunto **A** en un conjunto **B**$(f: A \to B)$ es una relación (regla o correspondencia que asocia dos elementos) en que a cada elemento $x \in A$, le corresponde un único elemento $y \in B$, que se denota por $y = f(x)$.

$$\boxed{\begin{aligned} &f: A \to B \\ &\quad x \to y = f(x) \end{aligned}}$$

y se llama imagen de x por f, mientras que x es preimagen de y

En general, la variable **x**es independiente y la variable **y**, dependiente. Además, en el conjunto de las preimágenes no puede sobrar ningún elemento, mientras que en el de las imágenes sí.

En la situación propuesta anteriormente se tienen que el precio pagado por cada impresión, depende de la cantidad de hojas que se imprima.

4

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

Contraejemplo

Existen situaciones donde las variables involucradas no son necesariamente dependientes una de la otra. Piensa en tus compañeros de curso, y si quieres haz el experimento: ¿Existe una función que relacione la edad de una persona con su estatura?

Actividades

1. Un alambre que tiene una longitud de 60 cm se debe cortar en dos pedazos: con uno, de longitud **x cm**, se puede construir un cuadrado, y con el otro un círculo. Expresa en términos de **x** el área (A) de cada figura.
2. Determina si las siguientes relaciones son o no funciones, si lo son establece cuales son las variables dependiente e independiente:

A	Una persona y su RUT.
B	Una persona y su estatura.
C	El área de un círculo y su radio.
D	El dinero pagado y el consumo de agua.
E	Un vehículo y su patente.
F	Una persona y su peso.
G	Una persona y su edad.

Formalización

$$f : A \rightarrow B$$
$$x \rightarrow y = f(x)$$

Para una función **f** los conjuntos A (de las preimágenes) y B (de las Imágenes) se denominan **Dominio** y **Codominio** respectivamente, y están relacionados con la dependencia de las variables involucradas.

Así, para la situación de ¿Dónde Fotocopiar?, para el cibercafé Tío Pancho, en el Dominio de la función se encuentran la cantidad de hojas a imprimir, porque de eso depende el precio a pagar, elementos que se encuentran en el codominio, tal como ilustra la figura.

X	Y
1	210
2	220
3	230
4	240
5	250
X	200+10x

DOM(f)	COD(f)
1	210
2	220
3	230
4	240
5	250
x	200+10x

Puedes tu relacionar con una flecha cada preimagen del Dominio con su correspondiente imagen en el Codominio

5

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN, CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

II. FUNCIÓN INVERSA

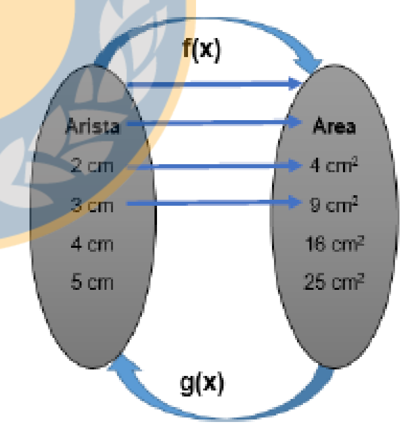
En la situación ¿Dónde imprimir? se determnaron tres funciones que indican el precio a pagar por una cantidad ***x*** de hojas impresas, ahora bien, es posible determinar una expresión algebraica que permite conocer cuántas hojas se imprimieron, conocido el precio que se pagó en cada lugar. Para esta nueva función la variable independiente es el dinero (variable dependiente de la función original), y la variable dependiente es la cantidad de hojas impresas (variable independiente en la función original).

Costo de imprimir en el "Cibercafé Tío Pancho"	$i(p) = \frac{p - 200}{10}$
Costo de imprimir en Fotocopiadora Margávila (por un solo lado)	
Costo de imprimir en Fotocopiadora Margávila (por ambos lados)	

1. ¿Qué estrategia utilizaste para determinar las funciones inversas solicitadas?
2. ¿Qué características tienen los conjuntos Dominio y Recorrido de la nueva función?
3. ¿Para cualquier función es posible hallar una función inversa?

La función f(x) propuesta en la tabla determina el área conociendo su arista, luego se encontró una función g(x) que determina su arista conociendo el área, en otras palabras, lo que hace f(x), g(x) lo "deshace". Representando esto en un **Diagrama Sagital**:

De esta forma se puede decir que la función **g** es función inversa de **f**. Ejemplo f(x)=x^2



Formalización

Se dice que g es función inversa de f si y solo si:

- $Para\ cada\ x\ en\ el\ Dom(f),\ \ g(f(x)) = x$
- $Dom(f) = Rec(g)$
- $Rec(f) = Dom(g)$

6

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

III. FUNCIÓN LINEAL

Situación: ¡Llave mala!, ¡Mala llave!

Se sabe que una de las principales causas de insomnio en las familias chilenas es una llave de agua que queda mal cerrada o esta mala, y gotea incansablemente sin fin. Pero una llave mala no sólo perjudica el sueño de los habitantes del hogar, sino que también su bolsillo… ¿Hagamos la cuentas?

La llave de agua del baño desperdicia una gotita de agua cada 2 segundos, lo que equivale que cada 2 minutos desperdicie 3 ml de agua, ¿Cuánta agua desperdicia en una noche?

Observación: $1m^3$ de agua potable cuesta aprox. $500, $1m^3$ = 1000litros, 1 litro = 1000 ml.

Tiempo	Cantidad de agua	Costo ($)
1 min		
2 min	*3 ml*	
3 min		
4 min	*6 ml*	
5 min		
6 min		
10 min		
15 min		
30 min		
1 hora		
2 horas		
1 día	*2.120ml (2,12 litros)*	
2 días		
3 días		
1 semana (7 días)		
1 mes (30 días)		
x (días)		
y (minutos)		
z (horas)		
	v (litros)	
		W ($)

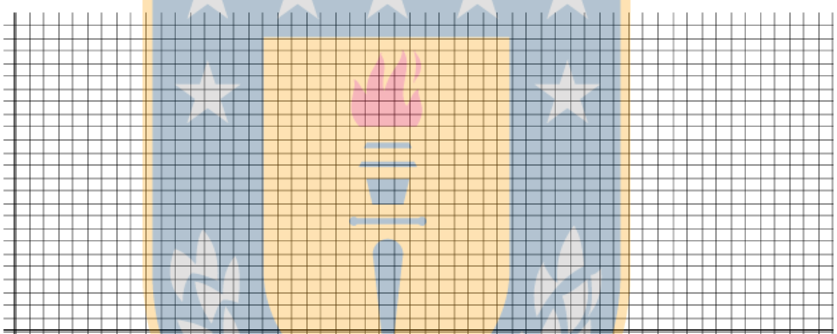
7

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

Preguntas

1. ¿Qué cantidad de agua se ha perdido en media hora de la gotera?
2. Si queda toda la noche goteando ¿Cuál es la pérdida de agua?
3. Te vas de vacaciones con tu familia por una semana y queda la llave goteando ¿Qué cantidad de agua se desperdicia?
4. ¿Qué función permite determinar la cantidad ade agua que se ha perdido, dado un tiempo **t** en minutos?
5. En la gráfica de esta función, ¿Cuál es el valor de la pendiente?, ¿cómo se interpreta ese valor?
6. ¿En cuánto tiempo se pierde 1 litro de agua?
7. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que el agua desperdiciada equivalga a 1 metro cúbico?
8. ¿Qué función determina tiempo **t** en minutos que tardan en caer **a** litros de agua?
9. ¿En cuánto tiempo se desperdician $1000 en agua por la gotera?
10. ¿Es posible analizar gráficamente la situación descrita? Utiliza un gráfico dinero v/s tiempo, en una escala apropiada, que permita analizar la situación descrita.



Formalización

Una función f definida en los números reales se denomina lineal si es de la forma $f(x) = k \cdot x, k \in IR$

En la situación, cuando el tiempo varía de forma constante, el crecimiento del agua desperdiciada varía también en proporción constante; esa proporcionalidad se puede escribir:

$$\frac{y}{x} = k, \qquad k \in IR$$

Por ello esta función se conoce también como **función de proporcionalidad directa**, y la constante *k*, como constante de proporcionalidad.

Observación: El gráfico que representa a una función lineal es una recta que pasa por el origen del plano cartesiano.

8

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

Actividades

1. Analiza cada expresión, luego marca si es o no una función lineal.

a. $f(x) = 4x$ Sí No

b. $h(x) = \frac{2}{5}x$ Sí No

c. $g(x) = 0$ Sí No

d. $j(z) = \frac{3z-3}{5}$ Sí No

e. $d(x) = -3x + 7$ Sí No

f. $C(p) = p - 100$ Sí No

2. Representa cada enunciado en lenguaje algebraico, Luego, responde.

a. La funcion **g** asigna a cada elemento **x** de su dominio su tercera parte.

▶

b. La funcion **h** asigna a cada elemento **x** de su dominio el cubo de su valor.

▶

c. ¿Cuál de las funciones corresponde a una funcion lineal?¿ Porque?

____

____

9

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

IV. FUNCIÓN AFÍN

Situación: ¿Qué plan de celular?

Pedro está cansado de gastar tanto dinero en llamadas telefónicas desde su celular que es Prepago que le cobra $70 por cada minuto, y ha decidido contratar un plan. Su compañía le ofrece las tres opciones más económicas y le dan un tiempo para que considere la oferta.

Empresa TuMóvil		
Plan Turista	**Plan Ejecutivo**	**Plan Familia**
$4000 cargo fijo	$5000 cargo fijo	$3000 cargo fijo
$15 el minuto	$10 el minuto	$30 el minuto

a) ¿Qué oferta le conviene más?
b) ¿En qué debe pensar a la hora de elegir un plan?
c) ¿En qué se diferencia la oferta prepaga de las ofertas de Plan?
d) Si Pedro habla en promedio 80 minutos al mes ¿Qué plan le conviene?, ¿Y si habla más de 100 minutos al mes?
e) Pedro piensa utilizar más de 200 minutos al mes, y según él, le conviene más el Plan Turista. ¿Tiene razón en argumentar esto?
f) ¿La gráfica de las opciones de Plan ayuda a decidir cuál es la más conveniente?, ¿Qué representa la pendiente de estas gráficas en el contexto del problema?
g) ¿Es proporcional el dinero pagado a los minutos hablados en cada opción?
h) ¿El "prepago" corresponde a una función lineal?, ¿Sucede lo mismo con las ofertas de Plan?

Formalización

La opción de Prepago corresponde a una función lineal. Las opciones de Plan, aunque se grafiquen como una recta, no son funciones lineales ya que las variables involucradas no son proporcionales, este tipo de funciones definida en los números reales se denomina Función Afín y formalmente son todas aquellas relaciones que se puedan escribir de la forma:

$$f(x) = ax + b, \quad con\ a, b \neq 0$$

Observación: El gráfico que representa a una función afín es una recta que **no** pasa por el origen del plano cartesiano.

La constante $\boldsymbol{a}$ de la función afín $f(x) = ax + b$ indica *la razón de cambio* de la variable dependiente (y) por cada unidad de variación de la variable independiente (x). $\boldsymbol{a}$ recibe el nombre de *constante de proporcionalidad* o *pendiente* de la función $f(x) = ax + b$.

¿Qué representa la constante $\boldsymbol{b}$ en el contexto de la situación?

10

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

Actividades

1. Analiza la siguiente tabla. Luego, responde.

x	0	5	10	15
f(x)	2	0	-3	4

a. ¿En qué punto, según la tabla, se intersecta la función **f** con el eje **X**? ¿Y con el eje **Y**? __________

b. ¿Existe alguna función afín que cumpla con los valores de la tabla? Justifica.

____

____

c. ¿El gráfico de una función afín puede pasar por el origen? Justifica.

____

____

2. Representa las siguientes funciones en el Plano Cartesiano y responde.

a) $y = x - 5$ **b)** $f(x) = -x - 5$ **c)** $f(x) = -\frac{1}{2}x - 4$ **d)** $y = -0{,}5x + 4$

¿Qué relación notaste entre los gráficos a y b?, ¿y entre los gráficos c y d?

____

____

____

____

11

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

V. FUNCIÓN CONSTANTE

Situación Anexa: ¿Qué plan elegir?

a) ¿Puedes proponer una oferta de prepago que sea más conveniente que las tres alternativas de Plan de TuMóvil?

b) ¿Puedes proponer una oferta de Plan para cualquier cantidad de minutos hablados más económica que las tres de TuMóvil?

c) ¿Qué especificaciones tendría un plan telefónico más caro que las tres alternativas propuestas?

d) La empresa Conecta2 ofrece el plan *SinSorpresa* ilustrado en el siguiente anuncio, ¿Es más conveniente que los de TuMóvil?

Plan SinSorpresa de Conecta2
De 0 a 30 min, $4.000
De 31 a 60 min, $5.000
De 61 a 120 min, $6.000
Más de 2 horas, $7.000

e) ¿Cuánto se paga si hablas 5, 10 o 15 minutos en el plan SinSorpresa?, ¿y si hablas 35, 40 o 45 minutos?

f) Para plan SinSorpresa, si el tiempo varía de 1 en 1, ¿Cómo varía el precio a pagar?

g) ¿Existe una expresión algebraica para la función que modela este plan telefónico?

h) ¿Puedes graficar la función que modela este plan telefónico?

Formalización

Una función de la forma $f(x) = b, b \in R$, recibe el nombre de **función constante** y su representación gráfica es una recta paralela al eje X (o eje de las abscisas).

Al gráfico de la **función constante** $f(x) = b$ pertenecen todos los puntos de la forma $(x, b), con\ x, b \in IR$.

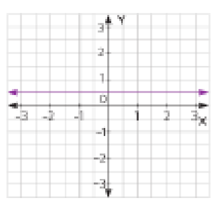
Ejemplo: la función $f(x) = 4$ es una función constante y se representa por el gráfico:

Actividades

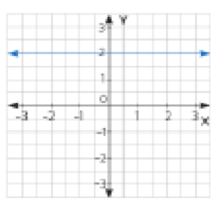
1. Presenta tres situaciones donde intervengan Funciones Constantes

2. ¿Cuál es la función representada por los siguientes gráficos?

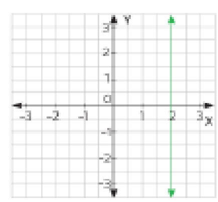
a.



b.



c.



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

VI. FUNCIÓN DEFINIDA POR TRAMOS

Situación "Paga menos mientras más hablas"

La empresa ***Conecta2*** lanzó dos nuevas alternativas de planes telefónicos, donde asegura que *"Pagas menos, mientras más hablas"*. Estas alternativas consideran la aplicación de un cargo fijo y un valor por minuto dependiendo de los minutos utilizados en el mes, tal y como se presenta a continuación. Así, por ejemplo, al contratar el plan familia, si se hablan 30 minutos durante un mes se debe cancelar el cargo fijo de $800, más 30 min a $70 cada uno, lo que resulta en $2.100, en total se deberían cancelar $2.900.

Plan Acción		
Minutos	**Cargo fijo**	**Valor por minuto**
0 a 30	$0	$90
30 a 60	$900	$60
60 y mas	$2700	$30

Plan Familia Unida		
Minutos	**Cargo fijo**	**Valor por minuto**
0 a 20	$0	$110
20 a 40	$800	$70
40 y mas	$2000	$40

¿Es verdad la afirmación de la empresa "Pagas menos mientras más hablas"?

1. ¿Cuánto se debe pagar si se hablan 15 min en ambos planes? ¿Cuál conviene más?
2. ¿Qué plan conviene más al hablar 35 minutos?, ¿y 70 minutos?
3. Representa en un gráfico cartesiano ambos planes propuestos ¿Puedes determinar desde allí cuál es más económico?
4. ¿Cuándo conviene más contratar el *Plan Acción*, y cuando el *PlanFamilia Unida*?
5. ¿Qué funciones representan cada plan?

Formalización

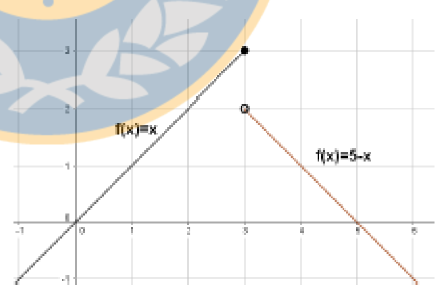
Una **Función definida por tramos** es aquella que utiliza dos o más expresiones para su definición y cada una de ellas emplea un determinado subconjunto del dominio de la función principal,

Ejemplo:

$f: IR \rightarrow IR$

$$x \rightarrow f(x) = \begin{cases} x, & si\ x \leq 3 \\ 5 - x, & si\ x > 3 \end{cases}$$

Lo que se representa gráficamente por



● Representa que el punto (x,y) **pertenece** al gráfico de f.

○ Representa que el punto (x,y) **no pertenece** al gráfico de f.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

Así, para la situación "Paga menos mientras más hablas", una forma de escribir las funciones que determinan el precio pagado, habiendo utilizado x minutos, según cada plan es:

PLAN ACCIÓN

$$f(x)=\begin{cases} 90x, & si\ 0<x<30 \\ 900+60x, & si\ 30<x<60 \\ 2700+30x, & si\ 60<x \end{cases}$$

PLAN FAMILIA UNIDA

$$g(x)=\begin{cases} 110x, & si\ 0<x<20 \\ 800+70x, & si\ 20<x<40 \\ 2000+40x, & si\ 40<x \end{cases}$$

Actividades

1. Grafica las siguientes funciones.

a. $y=\begin{cases} -\frac{x}{2}, & si\ x\le 1 \\ -x+\frac{1}{2}, & si\ x>1 \end{cases}$

b. $y=\begin{cases} x-2, & si\ x<2 \\ 3, & si\ x\ge 2 \end{cases}$

c.

2. Analiza la información. Luego, calcula el valor de las expresiones.

Sean f y g dos funciones definidas de la siguiente manera:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{3x} & si\ x<0 \\ 2x-1 & si\ x\ge 0 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x-1 & si\ x\le -1 \\ 1 & si\ -1<x<1 \\ 3x+1 & si\ 1\le x \end{cases}$$

Calcula el valor de la expresión:

$$\frac{f(0)+g(-1)}{g(0)}=\frac{(2\cdot 0-1)+(-1-1)}{1}=-3$$

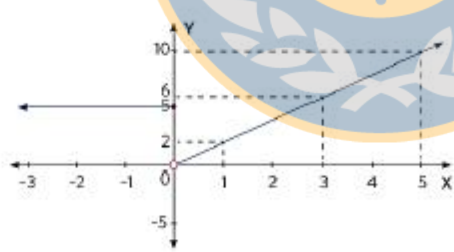
a. $g(2)-4g(f(2)+f(-2))$

b. $\frac{f(3)-g(3)}{f(5)-g(4)}$

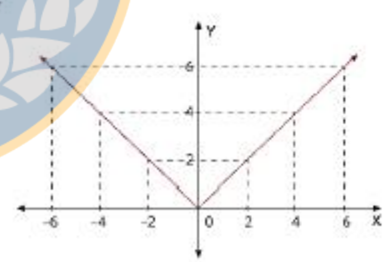
c. $\frac{f(-1)+g(1)}{f(1)+g(2)}$

3. Analiza los siguientes gráficos. Luego, escribe la función por tramos que representa a cada uno de ellos.

a.



b.

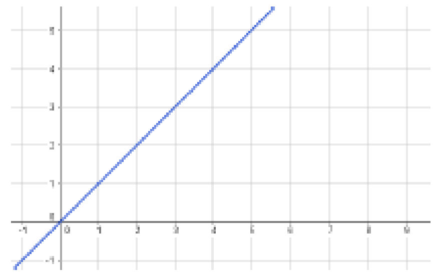


14

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

VII. FUNCIÓN IDENTIDAD



Cuando en una función lineal de la forma $y = f(x) = k \cdot x, k \in IR$, se tiene que $k = 1$, la función queda determinada por $f(x) = x$. Es decir, el valor de la imagen es idéntico al de su preimagen. A esta función se le denomina función identidad.

Al gráfico de la función identidad pertenecen todos los puntos de la forma (x, x) con $x \in IR$

VIII. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Con una caja de cerámicas que cuesta $6.000 se pueden cubrir 1,5m² de piso. Don Juan quiere remodelar su cocina que mide 4m de ancho y 5m de largo, ¿Cuánto dinero gastará en cerámica?

1. Si el piso fuera de $14m^2$, ¿Cuántas cajas de cerámica se utilizarían?
2. ¿Qué función permite determinar la cantidad de cajas de cerámica necesarias para cubrir una cantidad x m^2 de piso?, ¿Cuáles son los conjuntos Dominio y Recorrido para esta función?
3. ¿Cómo es posible determinar el dinero cancelado, de acuerdo a las cajas de cerámica compradas?
4. ¿Cuál es la función que permite saber el precio P que hay que pagar, dados los **X** metros cuadrados de piso que se quieren cubrir con cerámica?, ¿Cuál es el Dominio de esta función?, ¿Y su recorrido?
5. Mario canceló $71.400 en cerámica ¿Cuántas cajas compró y para cuantos metros cuadrados de piso le alcanzó?

Formalización

Sean f y g dos funciones tal que: $f: A \to B$ y $g: B \to C$, entonces la función compuesta $g \circ f: A \to C$ se define como:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

También se puede leer como "g compuesta con f".

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Ejemplo: sean f: ℝ ⟶ ℝ y g: ℝ ⟶ ℝ, definidas por $f(x) = 3x + 1$ y $g(x) = -x$, entonces, al componer las funciones **g** con **f**, se tiene que:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 1) = -(3x + 1) = -3x - 1.$$

Observación: al componer **f** con **g**, se tiene que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x) = 3(-x) + 1 = -3x + 1.$

15

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

Actividades: Analiza cada caso. Luego, responde.

Sea $f: IR \to IR$ y $g: IR \to IR$, las funciones definidas por $f(x) = x^2 + 5x$ y $g(x) = 3x + 1$.

- Determina las expresiones algebraicas que representan a: $(f\ o\ f)(x), (f\ o\ g)(x), (g\ o\ f)(x)$ y $(g\ o\ g)(x)$.
- Calcula el valor de $(f\ o\ (f\ o\ g))(-1)$

¿Qué propiedades cumple la composición de funciones?

....

IX. FUNCION CUADRÁTICA Y RAÍZ CUADRADA

Situación: ¿Cómo hago el Corral?

Don Luis quiere comenzar a criar gallinas, no tiene muchos recursos, pero sí las ganas. Lo primero por hacer es el corral, para ello compró un rollo de malla de 40 metros. "Con eso debe ser más que suficiente para hacer un corral rectangular grande", piensa él. Pero se pregunta ¿De qué dimensiones debo hacerlo para obtener el máximo de área para criar mis aves? Puedes ayudarlo con sus cuentas…

1. Si piensa que el largo son 13 metros, ¿Cuál es el ancho?, ¿y el área?
2. Si cree que el ancho es 8 metros, ¿Cuál es el largo?, ¿y el área?
3. Con el rollo de malla que se tiene, ¿se puede escribir el ancho del corral en función de su largo?, ¿Qué tipo de función es?
4. ¿Cuál es el Dominio y el Recorrido de esta función?
5. ¿Existe alguna función que permita determinar el área del corral, conociendo sólo la dimensión de su largo?, ¿Qué tipo de función es?
6. ¿Cuál es el Dominio y el Recorrido de esta función?
7. ¿Con qué dimensiones se obtiene el área más grande para el corral?
8. Grafica la función obtenida en el punto **5**, ¿Es posible conocer desde esa gráfica las dimensiones del corral para las cuales su área es la más grande posible?

Formalización

Te puedes dar cuenta que el crecimiento de la variable área del corral, no es directamente proporcional al de la variable largo del corral. Este tipo de modelos se denomina **Función Cuadrática.**

Una **función cuadrática** $f: IR \to IR$, es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y $c \in IR$, y $a \neq 0$. Su gráfica es una parábola con eje de simetría vertical. Tiene un vértice, que es su punto más alto o más bajo.

16

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

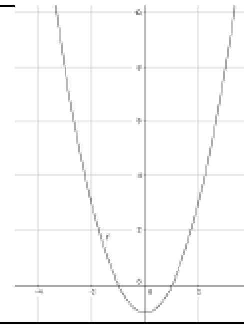
Módulo Didáctico: FUNCIONES

Ejemplo. La siguiente tabla y gráfico corresponden a la función cuadrática $f: IR \rightarrow IR$, tal que $f(x) = x^2 - 1$.

X	Y
-3	8
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3
3	8

En la gráfica se puede apreciar que:

- $Dom(f) = IR$
- $Rec(f) = [-1, +\infty[$
- Vértice $(0, -1)$
- Eje de simetría: Eje Y (x=0)

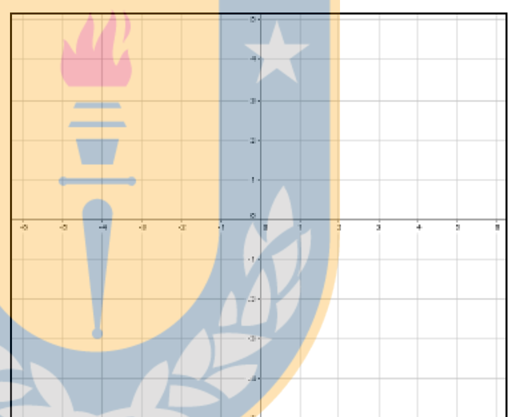


Actividad:

Analiza las siguientes funciones definidas en los números reales y luego responde.

a) Completa la tabla y "esboza" una gráfica para $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2$.

X	$f(x) = x^2$	$g(x) = -x^2$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		



b) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de las funciones **f** y **g**?

c) ¿Cuál es el vértice de la parábola que representa gráficamente a las funciones **f** y **g**?

d) ¿Cuál es el eje de simetría de las parábolas de las funciones asociadas a **f** y **g**?

e) ¿Qué diferencia existe entre la parábola que representa a **f** y la que representa a **g**?

En la situación inicial del corral de Don Luis...

f) ¿Cuál es el dominio de la función encontrada?, ¿y su recorrido?,

g) ¿Ayuda la gráfica a entregar información acerca de la mejor decisión de dimensiones para el corral?

17

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

Situación Complementaria.

Don Luis se ha enterado que existen programas municipales que ayudan a los emprendedores como él. Las bases del programa que le ofrecen, exige que el área del corral de sus gallinas sea de $75m^2$. ¿Qué dimensiones debe tener el ancho y el largo de un corral para que contenga esa área?

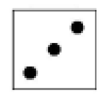
Observación. En la situación anterior determinaste la *función que permite conocer el área, dado el largo del corral*, y ahora necesitamos *conocer el largo (o ancho) del corral, dada la medida de su área*. Al parecer se trata del proceso inverso, o en términos matemáticos, **la Función Inversa.**

Situación: Las funciones en un dado

Consideraremos en este ejercicio un dado tradicional, de esos que se utilizan en los juegos de azar. ¿Cuánto provecho matemático podemos sacar de él?

1. ¿Cuál es el área de una de las caras de un dado si su arista es 1cm, 1,5 cm y 2 cm?

a. 1cm	
b. 1,5 cm	c. 2 cm



2. ¿Y su volumen?, ¿Cuál es esta relación si su arista mide 2cm, 3cm o 4cm?

a. 2cm	b. 3cm	c. 4 cm

3. De este modo podemos relacionar la medida de la **arista** de un dado con las medidas de: el **área** de cualquiera de sus caras(A_c), el **área lateral** (A_l)que es la suma de las áreas de todas sus caras, o el **volumen** que ocupa (V).

Medida de la arista	Área de una cara(A_c)	Volumen del dado (V)	Área lateral (A_l)
$1cm$			
	$4cm^2$		
		$27cm^3$	
	$25cm^2$		

18

		$\sqrt[3]{125cm^3}$	
$\sqrt{2}cm$			
	B		
		A	
X			
2x			

4. Con el ejercicio anterior haz comprobado que existe relación entre las diversas magnitudes asociadas en un dado (o en un cubo cualquiera), ahora te proponemos individualizar las principales funciones que vienen desde esas relaciones.

Área de una cara del dado, conociendo la medida de su **arista**	*Sea x la medida de la arista* $f(x) = x^2$ *representa el área de una cara*
Volumen del dado, conociendo la medida de su **arista**	
Medida de la **arista** de un dado, conociendo el **área de una cara.**	*Sea y la medida del área de una cara* $g(y) = \sqrt{y}$ *representa la medida de su arista*
Medida de la **arista** de un dado, conociendo su **volumen.**	
Área lateral en función de la medida de una **arista**	
Área lateral en función del **área de una cara**	
Área lateral en función del **volumen.**	
Área de una cara del dado, en función de su**volumen.**	
Volumen de un dado, conociendo el **área de una cara**	

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

5. Para cada una de las siguientes funciones: grafique, determine Dominio, Recorrido y función inversa.

a) $f(x) = 3x^2$	b) $g(x) = 2x^2 - 4$
c) $h(x) = \sqrt{5x}$	d) $j(x) = \sqrt{4x + 3}$

Formalización

La **función raíz cuadrada** está definida por:

$$f: IR^+ \cup \{0\} \to IR^+ \cup \{0\}$$
$$x \to f(x) = \sqrt{x}$$

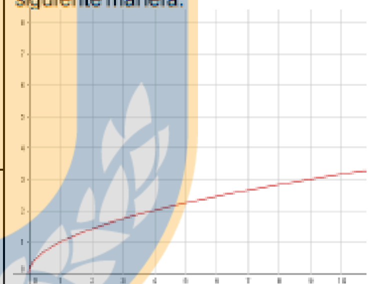
Para esta función se cumplen las siguientes propiedades:

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 1$
- $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$
- $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}$
- $f(x)^n = f(x^n)$

Ejemplos:

- $f(2 \cdot 3) = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = f(2) \cdot f(3)$
- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{f(1)}{f(2)}$
- $f(7)^5 = \sqrt{7}^5 = 7^{\frac{1}{2}5} = \sqrt{7^5} = f(7^5)$

En el plano cartesiano, la función $f(x) = \sqrt{x}$ se representa de la siguiente manera:



Actividades:

1. Analiza la tabla: Luego, complétala.

X	$\frac{100}{4}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2$	10^2	$\frac{16}{625}$	$\log 1$	90.000	$\frac{1}{5^4}$
$f(x) = \sqrt{x}$							
$f(x) = 1 + \sqrt{x}$							

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

2. Analiza el enunciado y evalúa si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

Para ello, escribe V o F según corresponda.

Según $IR^+ \cup \{0\} \to IR^+ \cup \{0\}, g: IR^+ \to IR^+$ y $h: IR \to IR, con$ $f(x) = \sqrt{x}$,

$g(x) = \sqrt{x} + 1$ y $h(x) = |x|$

a. _______ la función g es creciente.
b. _______ los puntos (4,2) y (4,-2) pertenecen al gráfico de f.
c. _______ Si $x \in Z$, entonces $\forall x$ se tiene que $g(x) > f(x)$.
d. _______ Para cualquier $x \in IR$, se tiene que $f(x^2) < h(x)$

3. Analiza la siguiente información. Luego, responde.

a. $g(x) = \sqrt{2x + 3}$	b. $h(x) = \sqrt{-x + 7} + 1$
1. $Dom(g) =$	**4.** $Dom(h) =$
2. $Rec\,(g) =$	**5.** $Rec(h) =$
c. $w(x) = \sqrt{9x + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}}$	d. $r(x) = \sqrt{\frac{x}{3} + 4} - 5$
3. $Dom(w) =$	**6.** $Dom(r) =$
4. $Rec\,(w) =$	**7.** $Rec\,(r) =$

21

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

X. FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

Situación Inicial: de la tierra a la luna doblando papel

Coge una hoja de papel, dóblala por la mitad, luego sin desdoblar vuelve a doblar por la mitad; dobla otra vez por la mitad, y otra vez, y otra, cada vez te cuesta más ¿verdad?, ¿Cuántos dobleces como máximo puedes darle a la hoja?, ¿Por qué sucede esto?

1. Si tuviera un papel más grande (de periódico, por ejemplo), ¿Se podría doblar más veces?
2. Y si tuviera un papel de todo el largo que quisiera, muy grande… ¿Se podría doblar infinitas veces?, ¿Qué función modela esta situación?
3. Sabías que una hoja de papel mide aproximadamente 0,1mm. Si yo pudiese doblar mi hoja de cuaderno 19 veces, ¿A qué altura podría llegar?,¿Qué función modela esta situación?
4. En la función anterior ¿Qué variable depende de la otra?, ¿Cuáles son los conjuntos Dominio y Recorrido?
5. Suponiendo que puedo doblar mi hoja de papel todas las veces que quiera. ¿Cuántas veces tendría que doblarlo para alcanzar 1km?, ¿y 384.400km?
6. ¿Podríamos alcanzar el sol doblando papel? D: 149.600.000Km
7. Grafica la situación descrita de la altura alcanzada por la pila de papeles de acuerdo al número de doblez

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

Situación: Las Bacterias en mi patio.

La llave de agua del jardín está un poco mala, de forma que siempre gotea. Está ubicada en el muro sur de la casa, por lo tanto, nunca le da el sol de frente. En estas condiciones una familia de bacterias ha decidido crecer en toda esa humedad y sombra. Se sabe que las bacterias de jardín (no tan infecciosas como las de baño o cocina, pero igual de resistentes) se reproducen duplicándose cada 1 hora.

Tres horas después de colonizar el jardín han decidido hacer un "Censo de Bacterias" y contabilizaron exactamente 120 de ellas.

Preguntas

1. ¿Cuántas bacterias habrá 4 horas después del Censo de Bacterias?
2. ¿Cuántas bacterias llegaron a colonizar el patio?
3. ¿Cuántas bacterias habrá en cualquier hora (t) luego de la colonización?, ¿Existe alguna función que permita saberlo?
4. ¿Puedes graficar la función Cantidad de bacterias en el tiempo t?
5. ¿En qué momento (t) habrá exactamente 960 bacterias en la llave? ¿y 1920?
6. ¿En qué momento hay exactamente 10.000 bacterias?
7. ¿Qué función permite determinar el tiempo que lleva la familia de bacterias allí, dado el número de bacterias que hay?
8. ¿Se puede graficar la función encontrada?

SITUACION Los intereses de un millón

Cuando comienzas a trabajar, decides ahorrar para en un futuro próximo comprar tu casa o auto. La mejor forma de ahorro es en un banco, pues el dinero gana los intereses a na cierta tasa mensual, o anual. El banco Ofertón te hace la siguiente propuesta: coloca un millón de pesos al 10% de interés anual.

a. ¿Qué variable vas a considerar independiente y cuál dependiente? ______________________

b. ¿Cuánto dinero se tendrá al cabo de 1 año? ¿Y al cabo de 2? ______________________

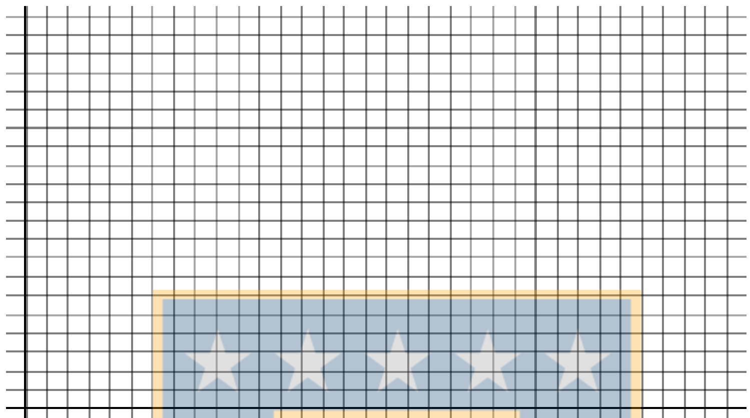
c. Construye una tabla con el dinero que se tendrá en los distintos años.

23

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

d. Representa gráficamente los puntos de dicha tabla.



e. ¿Puedes unir los puntos?
¿Tendría sentido? ______________________________

f. ¿En cuánto tiempo se duplicará? ______________________________

g. Encuentra una expresión que nos dé el dinero obtenido en función del tiempo transcurrido y obtén todas las conclusiones que puedas.

24

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

XI. FUNCIÓN PARTE ENTERA

Situación: ¡A las termas de Nitrao!

En un viaje especial a las Termas de Nitrao, Don José, el organizador del viaje, cobra $5.000 por el pasaje (esto incluye viaje de ida y regreso, y acceso a las Piscinas Termales). Hasta el momento, tiene en su bolsillo $68.000 por concepto de pasajes, pero perdió la libreta donde registró las personas inscritas. ¿Ayudémosle a saber cuántos pasajes ha vendido?, ¿Cuántos asientos disponibles le quedan si el bus tiene capacidad para 28 personas?, ¿Es posible que no sólo haya recibido el dinero completo del pasaje, sino que también "abonos"?

Actividades

1. Existe algún modelo o función que permita relacionar el dinero recaudado por Don José con el número de asistentes al viaje.
2. Don José vendió 17 pasajes, ¿Cuánto dinero tiene en su poder?
3. Si se ocupan todos los asientos del bus, ¿Cuánto dinero logra recaudar?
4. Si Don José tiene $30.000 en su bolsillo, ¿Cuántos pasajes ha vendido?
5. Con $45.000, ¿Cuántas personas van?
6. ¿Puede este gráfico darnos información acerca de cuántas personas van, respecto del dinero que se ha recibido?
7. En el problema inicial Don José tiene $68.000, ¿Cuántas personas van a viajar?

Asistentes	Dinero
0	$0
1	$5.000
2	$10.000
3	$15.000
4	
5	
6	
7	

Formalización

El contexto de la situación inicial nos obliga a tener cierto cuidado… *¡No es posible que asistan 13,6 personas!* No podemos dividir una persona a la mitad. Estos cuidados los tendremos cuando entren en juego dos tipos de variables: Continuas y Discretas.

8. ¿Qué es una variable continua y una discreta? Discútelo con tu grupo y entrega tres ejemplos de cada una de ellas.

Para tener en cuenta estas precauciones, los matemáticos han formalizado un tipo muy particular de función: la **Función Parte Entera**, que se define como:

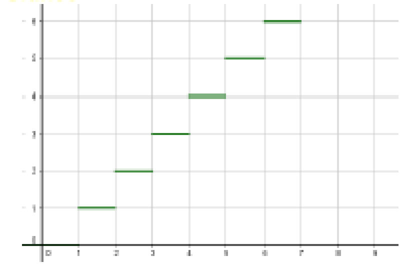
$$\begin{aligned}[x]: IR &\rightarrow Z \\ x &\rightarrow [x] = z\end{aligned} \quad , z \in Z, \quad x \in [z, z+1[$$

25

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

Presta atención a que el Dominio de la función parte entera es el conjunto de los números reales, en cambio, su Recorrido es el conjunto de los enteros.

Ejemplos	Gráfico
a) $[2{,}1] = 2$ b) $[\pi] = 3$ c) $[8{,}43] = 8$ d) $[-2{,}37] = -3$	

Actividades

1. Analiza las tablas y completa con los valores correspondientes.

a.

x	-1,5	-1	0	1	1,5
$f(x) = 3 \cdot [x]$					

b.

x	-1,0	-1,3	0	1,7	3,2
$f(x) = x - [x]$					

2. Calcula el valor de las siguientes expresiones, sabiendo que $f(x) = [1+x]^2$ y $g(x) = [1-x^2]$

a. $[f(2) + 3g(2)] + f(-2)$ b. $g(3) - [4f(1) + f(5)]$ c. $f(0) + [5g(-1) - 3f(1)]$

3. Analiza cada función definida en IR. Luego, determina su dominio, restringiéndolo si es necesario.

a. $f(x) = \frac{x+1}{[1-x]}$ b. $g(x) = \frac{x}{[1+x^2]}$

Dom(f) =	Dom(g) =

26

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN, CAMPUS LOS ÁNGELES.

Módulo Didáctico: FUNCIONES

Resumen de Contenidos

Una técnica que facilita la retención de lo estudiado, par después realizar un repaso eficiente, es el uso de **cuadros sinópticos:** con un resumen esquematizado cuya ventaja es permitir que el contenido se visualice de manera estructurada y organizada.

Completa el cuadro sinóptico, que muestra algunos de los temas trabajados a lo largo de la unidad

Contenido	Definición o procedimiento	Ejemplo
Función		
Elementos de una función		
Representaciones de una función		
Función Lineal y afín		
Función exponencial		
Función logarítmica		
Función raíz cuadrada		
Composición de funciones		

27

5.2 Pre Test Funciones

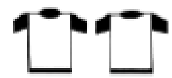
UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

TEST FUNCIONES

Nombre:	Curso:	Fecha:

Instrucciones: Responda a cada una de las preguntas propuestas acerca de cada problema, utilice todas las estrategias que considere necesarias (dibujo, gráfico, cálculos, etc.). Es importante que **NO BORRE** lo que escriba, cualquier producción tiene puntaje. El proceso es más importante que el resultado correcto.

ÍTEM 1



Al comprar los artículos de la imagen se deben cancelar $4.400.

a) ¿Cuánto cuestan 7 camisetas?

b) ¿Cuáles son variables dependientes o independientes: el precio a pagar o la cantidad de camisetas? Justifique.

c) ¿Cuál es la función que permite determinar el precio a pagar por cualquier número de camisetas?

d) El presidente de un club deportivo canceló $37.400 en camisetas ¿Cuántas compró?

e) ¿Existe alguna función que determine el número de camisetas comprado, dado el precio que se pagó?, ¿cuál es el Dominio y Recorrido de esta nueva función?

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN, CAMPUS LOS ÁNGELES.

TEST FUNCIONES

ÍTEM 2

Bill pesaba 107 Kg el verano pasado. Si pretende comenzar una dieta que promete disminuir 2 kilogramos mensualmente.

a) ¿Cuántos meses tardaría en llegar a su peso ideal de 76Kg?

b) ¿Cuántos kilos pesaría pasados 3 meses?, ¿5 meses? y ¿ ***T*** meses?

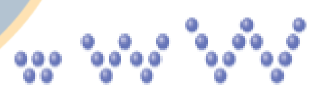
c) ¿Existe una función que represente el Peso de Bill, dependiendo del tiempo ***T*** (en meses) que lleva de dieta?

d) ¿Cuál es la pendiente de la recta que representa a esta función, y que representa ese valor en el contexto del problema?

e) ¿Esta función será un modelo exacto de la realidad?

ÍTEM 3

Este es el comienzo de una secuencia de patrones.



a) ¿Cuántas esferas hay en la 6° imagen del patrón?

b) Escribe una regla matemática que permita encontrar el número de esferas de la enésima imagen (que ocupa el lugar n).

c) ¿Qué lugar ocupa la figura que se construye con 49 esferas?

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN, CAMPUS LOS ÁNGELES.

TEST FUNCIONES

ÍTEM 4

Determina la expresión algebraica (función) que mejor modela estas situaciones.

SITUACIÓN	FUNCION
a) La cantidad de bacterias presentes en un cuerpo infectado se reproduce duplicándose cada tres minutos	
b) ¿Qué función permite conocer cualquier término de la siguiente relación? 1 → 1 2 → 8 3 → 27 4 → 64 … …	
c) Se quiere determinar el lado l (en centímetros) de un cuadrado, conocida su área **a** (en centímetros cuadrados)	
d) El dinero que hay que pagar por el uso de un computador en un cibercafé depende del tiempo de uso: • $300 por la primera media hora • Luego de la primera media hora, $15 cada minuto adicional.	

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN, CAMPUS LOS ÁNGELES.

TEST FUNCIONES

ITEM 5

Tres millones de bacterias están creciendo en un rincón de tu cocina. Es momento de asear la casa y decides utilizar el limpiador de la figura, el cual promociona matar el 99,9% de las bacterias. Es bien sabido que las bacterias de cocina se duplican cada media hora.

- **a)** ¿Cuántas bacterias quedan luego de aplicar el limpiador?
- **b)** ¿Cuántas bacterias habrá a la media hora de aplicar el limpiador?, ¿y a la hora después?
- **c)** ¿Existe alguna función que permita determinar el número de bacterias vivas, conocido el tiempo transcurrido luego de aplicar el limpiador?
- **d)** ¿Cuáles son las variables dependientes e independientes en esta función?
- **e)** ¿Cuánto demorará aproximadamente en haber la misma cantidad de bacterias que antes?

5.3 Test de Motivación

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN, CAMPUS LOS ÁNGELES.

TEST FUNCIONES

TEST DE MOTIVACIÓN HACIA LA MATEMÁTICA

Nombre: ____ Curso_____ Fecha_______

Instrucciones: Lea atentamente cada una de las afirmaciones siguientes y responda marcando con una equis (x) la alternativa que más le identifique.

AFIRMACIONES	Nunca	Casi nunca	A veces	Casi siempre	Siempre
1. Trato fuertemente de mejorar mi desempeño anterior en el trabajo.					
2. Me gusta competir y ganar.					
3. A menudo encuentro que hablo con las personas a mi alrededor acerca de asuntos que no se relacionan con el trabajo en clases.					
4. Me gustan los retos difíciles.					
5. Me gusta llevar el mando.					
6. Me gusta agradar a otros.					
7. Deseo saber cómo voy progresando al terminar las tareas.					
8. Me enfrento a las personas que hacen cosas con las que estoy en desacuerdo.					
9. Tiendo a construir relaciones cercanas con mis compañeros de clases.					
10. Me gusta fijarme y alcanzar metas realistas					
11. Me hago influir en otras personas para que hagan lo que deseo.					
12. Me gusta pertenecer a grupos y a organizaciones.					
13. Me agrada la satisfacción de terminar una tarea difícil.					
14. Con frecuencia trabajo para obtener más control sobre los acontecimientos a mi alrededor.					
15. Me gusta más trabajar con otras personas que solo.					

5.4 Test de Ansiedad

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN, CAMPUS LOS ÁNGELES.

TEST FUNCIONES

TEST DE ANSIEDAD HACIA LAS MATEMÁTICAS

Nombre: ____________________________________ Curso_____ Fecha_______

Instrucciones: Lea atentamente cada una de las afirmaciones siguientes y responda marcando con una equis (x) la alternativa que más le identifique.

AFIRMACIONES	Nada	Muy poco	Algo	Bastante	Mucho
1. Me pongo nervioso cuando pienso en la prueba de matemáticas el día anterior.					
2. Me siento nervioso cuando me dan las preguntas de la prueba de matemáticas.					
3. Me pongo nervioso cuando abro el libro de matemáticas y encuentro una página llena de problemas.					
4. Me siento nervioso al pensar en la prueba de matemáticas cuando falta una hora para hacerla.					
5. Me siento nervioso cuando escucho como otros compañeros resuelven un problema de matemáticas.					
6. Me siento nervioso cuando me doy cuenta de que el próximo curso aun tendré clases de matemáticas.					
7. Me siento nervioso cuando pienso en la prueba de matemáticas que tengo la próxima semana.					
8. Me siento nervioso cuando alguien me mira mientras hago los deberes de matemáticas.					
9. Me siento nervioso cuando reviso el ticket de compra después de haber pagado.					
10. Me siento nervioso cuando me pongo a estudiar para una prueba de matemáticas.					
11. Me ponen nervioso las pruebas de matemáticas.					
12. Me siento nervioso cuando me ponen problemas difíciles para hacer en casa, y que tengo que llevar hechos para la próxima clase.					
13. Me siento nervioso al hacer operaciones matemáticas.					
14. Me siento nervioso al tener que explicar un problema de matemáticas al profesor.					
15. Me siento nervioso cuando hago el examen final de matemáticas.					
16. Me siento nervioso cuando me dan una lista de ejercicios de matemáticas.					
17. Me siento nervioso cuando intento comprender a otro compañero explicando un problema de matemáticas.					
18. Me siento nervioso cuando hago una evaluación de matemáticas.					
19. Me siento nervioso cuando veo/escucho a mi profesor explicando un problema de matemáticas.					
20. Me siento nervioso al recibir las notas finales (del examen) de matemáticas.					
21. Me siento nervioso cuando quiero averiguar el vuelto en la tienda.					
22. Me siento nervioso cuando nos ponen una prueba y un compañero la termina antes que yo.					
23. Me siento nervioso cuando tengo que explicar un problema en clases de matemáticas.					
24. Me siento nervioso cuando empiezo a hacer los deberes.					

5.5 Test de Proceso

INTERROGACIÓN DE MATEMÁTICAS: FUNCIONES

Nombre:______________________________ Curso:______ N° lista:______ Fecha:___/___/___.	Puntaje:	Nota:

Objetivo: Analizar la situación propuesta y responder a las preguntas planteadas con un desarrollo muy claro y ordenado.
Instrucciones: Usted dispone de 30 minutos para realizar esta evaluación individual. Puede trabajar con lápiz de mina si lo desea, pero toda respuesta final debe estar con **lápiz de pasta**, para atender consultas posteriores sobre la evaluación. No se admite el uso de corrector.

SITUACIÓN:

El profesor de matemáticas del 3º año C, siente un gran aprecio por el curso, pues ellos son alumnos ejemplares en conocimientos y comportamiento. Por esto, decide utilizar una escala del 50% de exigencia en la prueba realizada el 32 de septiembre. Sabiendo que con 8 puntos tiene un 2,0 y que el puntaje máximo son 48 puntos, responde lo que se plantea a continuación:

1. Completa la tabla adjunta (recuerda que la nota mínima a obtener es un 1,0). (4 puntos)

Puntaje	**Nota**
0 puntos	**1,0**
8 puntos	**2,0**
	7,0

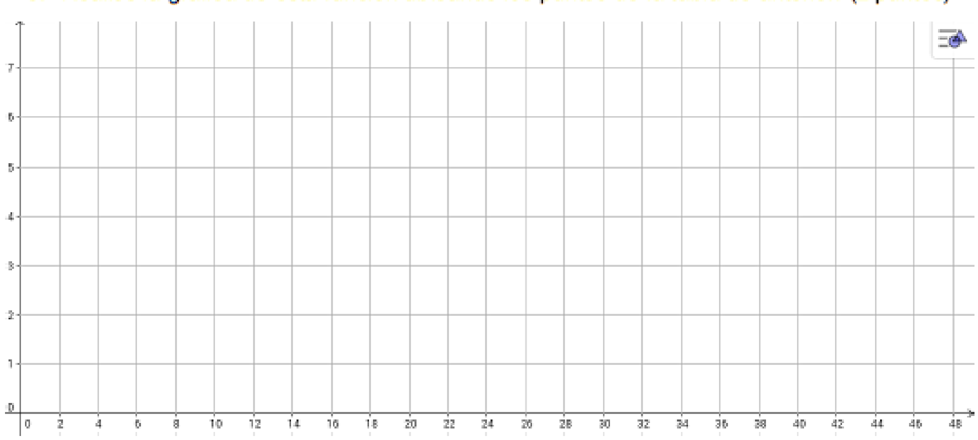
a. ¿Cuál es el puntaje de aprobación en esta prueba? (Puntaje necesario para obtener un 4,0)

b. Si un alumno tiene 28 puntos ¿Qué nota debiese tener?

2. ¿Qué función modela esta situación? ¿De qué tipo es? Escríbala a continuación. (2 puntos)

....

3. Realice la gráfica de esta función ubicando los puntos de la tabla de anterior. (2 puntos)



4. ¿Qué entiendes por dominio y recorrido de una función? (2 puntos)

………

………

………

5. ¿Cuál es la variable dependiente e independiente en este caso? (2 puntos)

………

………

………

6. ¿Cuál es el dominio y recorrido de la función que determina la nota según su puntaje? (2 puntos)

………

………

………

7. **¡EXTRA!** Escriba la función inversa e indique lo que representa. (3 puntos)

………

………

………

5.6 Test Tradicional

Los Ángeles
Departamento de Matemática

Evaluación de Matemática

Unidad: Funciones

Nombre: ______________________________ **Curso:** ______ **Fecha:** /05/2016.

Pje. Máximo: 30 pts. **Pje. Obtenido:** ______.

Indicaciones: La siguiente evaluación le presenta una serie de preguntas que permiten medir sus avances en la unidad de Funciones, lea y analice atentamente cada una de las preguntas, luego de manera ordenada desarrolle lo que se pide en cada pregunta o ejercicio en el espacio indicado.
Para la resolución utilice lápiz de mina o portaminas y el resultado final escríbalo tanto en la evaluación como en la hoja de respuesta.
Recuerde trabajar en forma individual y silenciosa de lo contrario se aplicara el reglamento de evaluación y que está prohibido el uso de calculadora o teléfonos celulares. Usted dispone de 80 minutos para trabajar en su evaluación

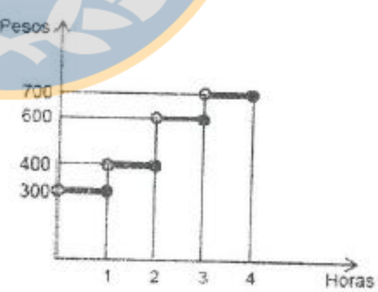
I Selección múltiple: marque la alternativa que usted considere más correcta.

1) Si $f(x) = \frac{|-2x+3|}{-2}$, entonces f(7) es igual a:

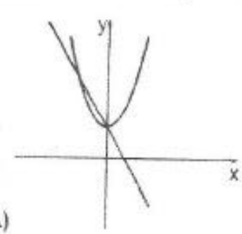
A) 4
B) $\frac{17}{2}$
C) $-\frac{11}{2}$
D) $\frac{11}{2}$
E) $-\frac{17}{2}$

2) En el gráfico de la figura, se muestran las tarifas de un estacionamiento por horas. Un automovilista estaciona durante 4 días: el primer día 152 minutos, el segundo día 180 minutos, el tercer día 90 minutos y el cuarto día 210 minutos. ¿Cuánto canceló en total por los días que estacionó?

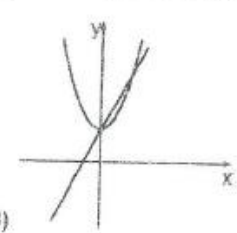
A) $ 1.900
B) $ 2.300
C) $ 2.400
D) $ 2.000
E) Ninguno de los valores anteriores.



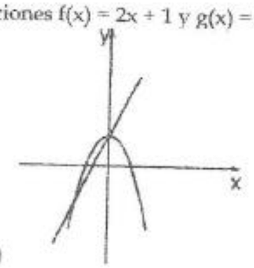
3) ¿En cuál de las opciones siguientes se grafican las funciones $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2 + 1$?



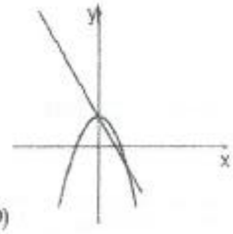
A)



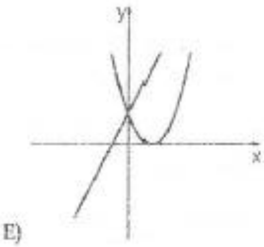
B)



C)



D)



E)

4) La trayectoria de un proyectil está dada por la ecuación $y(t) = 100t - 5t^2$, donde **t** se mide en segundos y la altura **y(t)** se mide en metros, entonces ¿en cuál(es) de los siguientes valores de **t** estará el proyectil a 420 m de altura sobre el nivel del suelo?

I) 6 segundos
II) 10 segundos
III) 14 segundos

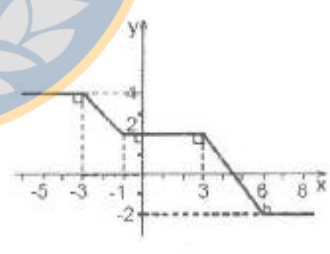
A) Sólo en I
B) Sólo en II
C) Sólo en III
D) Sólo en I y en II
E) Sólo en I y en III

5) ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ en los números reales?

A) $[2,+\infty[$
B) $[-2,+\infty[$
C) $[0,+\infty[$
D) $]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$
E) $[4,+\infty[$

6) ¿Cuál(es) de las siguientes aseveraciones es(son) verdadera(s) respecto del gráfico de la función f(x), en la figura?

I) $f(-2) > f(4)$
II) $f(-1) + f(3) = f(-3)$
III) $f(-6) - f(8) = 2$



A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) Sólo II y III

7) Sea f una función en los números reales, definida por $f(x) = tx + 1$ y $f(-2) = 5$
¿Cuál es el valor de t?

A) -3
B) -2
C) 3
D) 2
E) $\frac{3}{2}$

8) Del gráfico de la función real $f(x) = 1 - |x|$, se puede afirmar que:

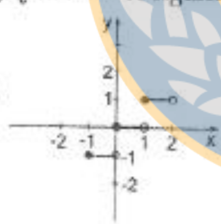
I) tiene su vértice en el punto (0,0)
II) sus ramas se abren hacia abajo
III) corta al eje de las abscisas en $x = 1$ y en $x = -1$

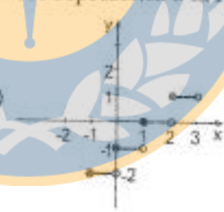
Es(son) verdadera(s):
A) Solo II
B) Solo III
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

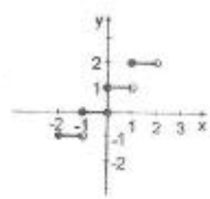
9) Si $f(x) = 5x$, entonces $5 \bullet f(5x)$ es igual a
A) 125x
B) 25x
C) $125x^2$
D) $25x^2$
E) ninguna de las expresiones anteriores.

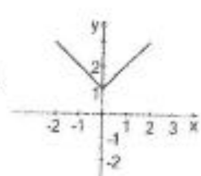
10) Sea f una función cuyo dominio es $\mathbb{R} - \{-1\}$ definida por $f(x) = \dfrac{1-x}{x+1}$, entonces f(-2)
A) 1
B) -1
C) 3
D) -3
E) $-\dfrac{1}{3}$

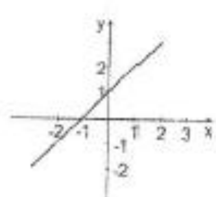
11) ¿Cuál de los siguientes gráficos representa a la función real $y = [x+1]$

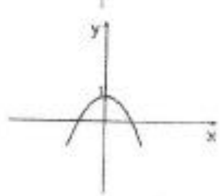
A)


B)


C)


D)


E)


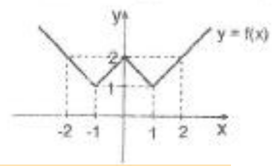
E)


12) El nivel de agua en un estanque es de 12 m y baja 0,5 m cada semana. ¿Cuál de las siguientes funciones representa la situación descrita relacionando el nivel de agua y con el número de semana x?

A) $y = -12 + 0{,}5x$
B) $y = -0{,}5 + 12x$
C) $y = 12 + 0{,}5x$
D) $y = 12 - 3{,}5x$
E) $y = 12 - 0{,}5x$

13) De acuerdo al gráfico de la figura, ¿cuál(es) de las siguientes igualdades es(son) verdadera(s)?

I) $f(-1) + f(1) = f(0)$
II) $3 \cdot f(-2) - f(0) = 2 \cdot f(2)$
III) $f(-2) - f(1) = f(2) - 1$



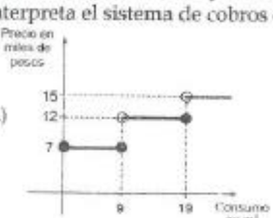
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

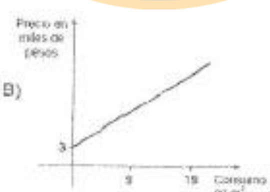
14) Sea la función de números reales $f(x) = x^2 - 3$, ¿cuál es el conjunto de los números reales t que satisfacen $f(t) = 1$?
A) {-2}
B) {-2,2}
C) {2}
D) {4}
E) No tiene solución en el conjunto de los números reales

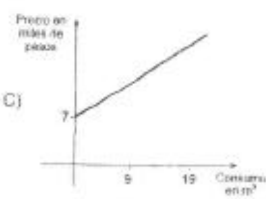
15) El servicio de agua potable de una localidad rural tiene las siguientes tarifas según tramo de consumo:

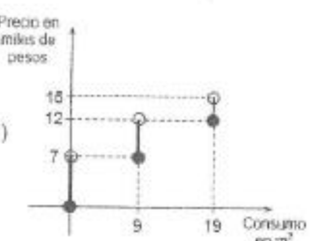
Consumo en m^3	Precio
0 - 9	\$3.000
10 – 19	\$ 8.000
20 o más	\$11.000

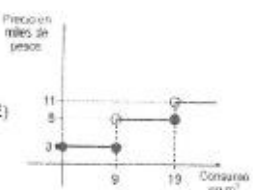
Además, siempre se agrega un cargo fijo de \$ 4.000. Si el consumo no corresponde a un número entero, éste se aproxima al entero superior. ¿Cuál de los siguientes gráficos interpreta el sistema de cobros de la empresa?

A)


B)


C)


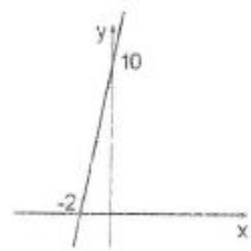
D)


E)


16) En la figura ¿Cuál(es) de las siguientes aseveraciones es(son) verdadera(s)?

I) La pendiente de la recta es igual a 5
II) El punto (1,15) pertenece a la recta
III) La ecuación de la recta es $y = 5x - 10$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y II
E) Solo I y III



17) Dada la función $f(x) = \dfrac{|x-3| - x}{2 - x}$, entonces $f(-4) =$

A) $\dfrac{11}{6}$

B) $-\dfrac{1}{2}$

C) $\dfrac{1}{2}$

D) $-\dfrac{11}{6}$

E) Otro valor

18) Un taxista tiene un cobro fijo de $ 150 y cobra, además, $ 300 por cada Km. recorrido. Entonces la función que relaciona el valor (y) y los kilómetros recorridos (x) es:

A) $y = 150 + 300 \cdot [x]$
B) $y = 150 \cdot [x] + 300$
C) $y = 150 \cdot [x-1] + 300$
D) $y = 150 + 300 \cdot [x-1]$
E) $y = 150 + 300 \cdot [x+1]$

19) Dada la función $f(x) = \sqrt{(x-2)}$, se puede afirmar que:

I) La función está definida para los x mayores o iguales a 2
II) $f(3) = 1$
III) El punto (5,3) pertenece a la función

A) Sólo II
B) Sólo III
C) Sólo I y II
D) Sólo II y III
E) I, II y III

20) Si $f(x) = mx + n$, ¿qué valores deben tener m y n, respectivamente, de modo que $f(3) = 8$ y $f(2) = 6$?

A) $\dfrac{1}{2}$ y 5

B) - 1 y $\dfrac{1}{2}$

C) 2 y 2

D) $\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{13}{2}$

E) 2 y 10

21) Una compañía telefónica ofrece dos planes alternativos de tarifas para sus clientes:
Plan P): $ 10.000 de cargo fijo mensual, más $ 20 por minuto en llamadas de horario diurno y $ 5 por minuto en llamadas de horario nocturno.
Plan Q): $ 14.000 de cargo fijo mensual con derecho a llamar hasta 500 minutos, en cualquier horario; una vez usados los 500 minutos, se paga $ 20 por minuto, por llamadas en cualquier horario. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s) con respecto a las llamadas mensuales de los clientes?

I) Si una persona llama 400 minutos en horario diurno y 200 minutos en horario nocturno, entonces le conviene el plan Q.
II) Si una persona llama 400 minutos en horario diurno y 600 minutos en horario nocturno, entonces le conviene el plan P.
III) Si una persona llama 100 o más minutos en horario diurno y 400 minutos en horario nocturno, entonces gasta lo mismo no importando el plan que contrate.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) I, II y III

22) Una fábrica de lámparas tiene un costo fijo de producción de $ 1.000.000 mensuales y costos varios por lámpara de $ 5.000. Si x representa el número de lámparas producidas en un mes, ¿cuál de las siguientes expresiones representa la función costo C(x)?
A) $C(x) = x + 1.005.000$
B) $C(x) = 1.000.000x + 5.000$
C) $C(x) = 1.005.000x$
D) $C(x) = 5.000x + 1.000.000$
E) $C(x) = (x - 5.000) + 1.000.000$

23) Dada la función $f(x)= 2|1 - x| - x$, ¿cuál(es) de las siguientes igualdades es(son) verdadera(s)?

I) $f(-2) = f(-1)$

II) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

III) $f(2) = 0$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y II
E) Solo II y III

24) Si $f(x) = \log_2 x$, entonces $f(16) - f(8)$ es:
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 7

25) Si $f(x) = x^2 + 3x - 4$, entonces $f(x + 1)$ es igual a:
A) $x^2 + 3x - 2$
B) $x^2 + 5x - 3$
C) $x^2 + 5x - 2$
D) $x^2 + 5x$
E) $x^2 + 3x$

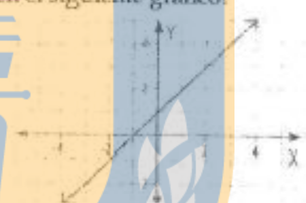
26) ¿Cuál es el dominio de la función $g(x)= \frac{2x}{3x-2}$?

A) $\mathbb{R}-\{0\}$
B) $\mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3}\right\}$
C) $\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$
D) $\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2}\right\}$
E) $\mathbb{R}-\left\{-\frac{2}{3}\right\}$

27) ¿Cuál es el recorrido de la función $h(x) = \frac{1-x}{3x-2}$?

A) $\mathbb{R}-\{0\}$
B) $\mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3}\right\}$
C) $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}$
D) $\mathbb{R}^{+}-\left\{\frac{2}{3}\right\}$
E) $\mathbb{R}^{+}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$

28) ¿Cuál es la función representada en el siguiente gráfico?



A) $f(x) = x$
B) $g(x) = 2x$
C) $h(x) = 1 - x$
D) $p(x) = x + 1$
E) $j(x) = x^2 - 1$

5.7 Post Test Funciones

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN, CAMPUS LOS ÁNGELES.

TEST FUNCIONES

Nombre:	**Curso:**	**Fecha:**

Instrucciones: Responda a cada una de las preguntas propuestas acerca de cada problema, utilice todas las estrategias que considere necesarias (dibujo, gráfico, cálculos, etc.). Es importante que **NO BORRE** lo que escriba, cualquier producción tiene puntaje. El proceso es más importante que el resultado correcto.

ÍTEM 1
Un estanque está lleno con 1.200 litros de agua. En la parte inferior tiene una válvula que permite la salida de 4 litros por minuto.

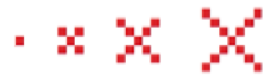
a) ¿Cuánto tiempo con la válvula abierta se necesita para que en el estanque queden 1000 litros de agua?
b) ¿Cuánta agua queda en el estanque pasados 6 minutos?, ¿30 minutos?, ¿y t minutos?
c) ¿Qué función representa el agua que queda en el estanque, pasados t minutos desde que se abre la válvula? (en un primer momento el estanque está lleno)
d) ¿Cuál es la pendiente de la recta que representa a esta función, y que representa ese valor en el contexto del problema?
e) ¿Esta función será un modelo exacto de la realidad?

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. CAMPUS LOS ÁNGELES.

TEST FUNCIONES

ÍTEM 2

Este es el comienzo de una secuencia de patrones. En la primera imagen de la secuencia se observa 1 cuadrito, en la segunda 5 cuadritos, y en la tercera 9…



a) Si se sigue el patrón, ¿Cuántos cuadritos habría en la 7° imagen?
b) Escribe una regla matemática que permita encontrar el número de cuadritos de la enésima imagen (que ocupa cualquier lugar **n**).
c) ¿Qué lugar ocupa la figura que se construye con 73 cuadritos?

ÍTEM 3

Al comprar los artículos de la imagen se deben cancelar $2.800.

a) ¿Cuánto cuestan 9 bebidas?
b) ¿Cuáles son variables dependientes o independientes: el precio a pagar o la cantidad de bebidas? Justifique.
c) ¿Cuál es la función que permite determinar el precio a pagar por cualquier número de bebidas?
d) El profesor Luis canceló $18.900 en bebidas para sus alumnos ¿Cuántas compró?
e) ¿Existe alguna función que determine el número de bebidas compradas, dado el precio que se pagó?, ¿cuál es el Dominio y Recorrido de esta nueva función?

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN, CAMPUS LOS ÁNGELES.

TEST FUNCIONES

ÍTEM 4

Determina la expresión algebraica (función) que mejor modela estas situaciones.

SITUACIÓN	FUNCION
a) Al comprar bebidas en un supermercado mayorista se ponen las siguientes ofertas: a. \$500 cada lata, las 100 primeras. b. \$400 cada lata, al comprar entre 101 y 200 latas. c. \$300 cada lata, al comprar más de 200 latas ¿Qué función modela esta situación?	
b) ¿Qué función permite conocer cualquier término de la siguiente relación? 1 → 2 2 → 6 3 → 12 4 → 20 X → ...	
c) Se quiere determinar la altura ***h*** de un triángulo equilátero, conociendo que la medida de su base es 5 y su área es ***a***.	
d) El dinero que hay que pagar por el uso de una pista de patinaje depende del tiempo, como se detalla: • \$5.000 por la primera media hora • Luego de la primera media hora, \$100 cada minuto adicional.	

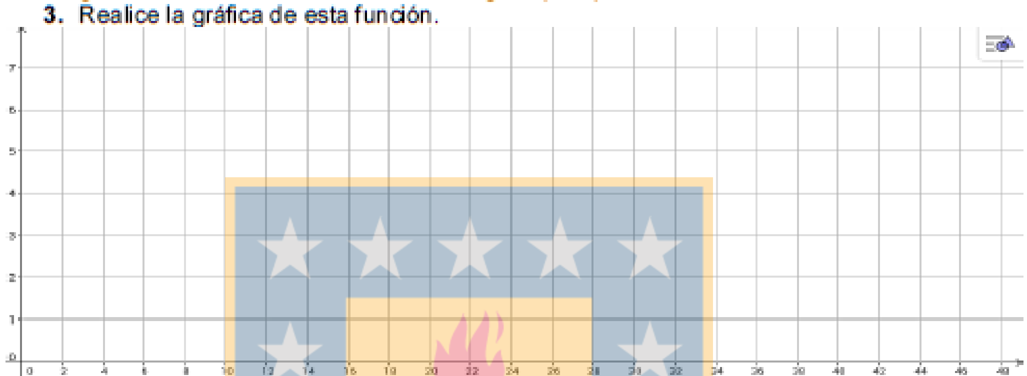
UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN, CAMPUS LOS ÁNGELES.

TEST FUNCIONES

ÍTEM 5

El profesor de matemáticas del 3° año F, siente un gran aprecio por el curso, pues ellos son alumnos ejemplares en conocimientos y comportamiento. Por esto, decide utilizar una escala del 50% de exigencia en la prueba realizada el 32 de noviembre. Sabiendo que con 8 puntos tiene un 2,0 y que el puntaje máximo son 48 puntos, responde lo que se plantea a continuación:

1. Si un alumno tiene 28 puntos ¿Qué nota debiese tener?
2. ¿Qué función modela esta situación? ¿De qué tipo es?
3. Realice la gráfica de esta función.



4. ¿Cuál es el dominio y recorrido de la función que determina la nota según su puntaje?
5. Escriba la función inversa e indique lo que representa.

5.8 Pauta de Observación tipo Nota de Campo.

Hora	REGISTRO	COMENTARIOS
……..	…………………………………………………	……………………………………..
	…………………………………………………	……………………………………..
	…………………………………………………	……………………………………..
	…………………………………………………	……………………………………..
……..	…………………………………………………	……………………………………..
	…………………………………………………	……………………………………..
	…………………………………………………	……………………………………..
	…………………………………………………	……………………………………..
……..	…………………………………………………	……………………………………..

5.9 Planificaciones de Clase Grupo Control

Unidad Funciones		Objetivo de la clase: Conocer el concepto de función, sus características, formas de representación .		
Intervención 1	¿Qué se espera lograr?	¿Cómo enseñar y con que aprender?		¿Qué y con que evaluar?
N° de horas pedagógicas	Aprendizajes esperados de la clase	Actividades de aprendizaje	Recursos	Evaluación
2 horas aulas, Equivalentes a 90 minutos	Mostrar que comprenden la noción de función	**INICIO** Saludo. Introducción a los contenidos de funciones. **DESARROLLO** Lectura comprensiva de la primera hoja del módulo de funciones que corresponde a: concepto de función, evaluación de funciones en un valor dado y representación gráfica de funciones. Posteriormente se analizan los ejemplos propuestos y se desarrollan de forma individual las actividades de la página 5 **CIERRE** Finalmente se procede a dejar en libertad a los estudiantes para que salgan a recreo	- Guía de trabajo - Data (Proyector) - Power Point	Resolución diagrama sagital página 5

Unidad Funciones		Objetivo: Analizar las funciones entendiendo las diferencias entre el dominio y recorrido.		
Intervención 2	¿Qué se espera lograr?	¿Cómo enseñar y con que aprender?		¿Qué y con que evaluar?
N° de horas pedagógicas	Aprendizajes esperados de cada clase	Actividades de aprendizaje	Recursos	Evaluación
2 horas aulas, Equivalentes a 90 minutos	Mostrar que comprenden el dominio y recorrido	**INICIO** Saludo. Introducción a los contenidos de funciones. **DESARROLLO** Lectura comprensiva guía de funciones, explicación de la tarea dada y de dos conceptos centrales de la clase. Dominio y Recorrido de una Función. Los alumnos resuelven en clase la actividad de la página 10 **CIERRE** Se despide a los alumnos recordando que la tarea debe traerse completa la clase siguiente	- Guía de trabajo - Data (Proyector) - Power Point	Tarea página 10

Unidad Funciones		Objetivo: Conocer la función lineal y afín.		
Intervención 3	¿Qué se espera lograr?	¿Cómo enseñar y con que aprender?		¿Qué y con que evaluar?
N° de horas pedagógicas	Aprendizajes esperados de la clase	Actividades de aprendizaje	Recursos	Evaluación
2 horas aulas, Equivalentes a 90 minutos	Analizar representaciones de la función lineal y de la función afín	**INICIO** Saludo. Introducción a los contenidos de funciones. **DESARROLLO** Se realizar una lectura de la pagina 6,7 y 8. Y luego la actividad propuesta en las paginas nombradas. **CIERRE** La clase finaliza con dudas de los alumnos con respecto al tema.	- Guía de trabajo - Data (Proyector) - Power Point	Preguntas del profesor al final de la clase y resolución de las páginas de la actividad.

Unidad Funciones		Objetivo: Establecer estrategias para resolver ejercicios con funciones		
Intervención 4	¿Qué se espera lograr?	¿Cómo enseñar y con que aprender?		¿Qué y con que evaluar?
N° de horas pedagógicas	Aprendizajes esperados de cada clase	Actividades de aprendizaje	Recursos	Evaluación
2 horas aulas, Equivalentes a 90 minutos	Demostrar que comprenden la evaluación, el concepto y las propiedades de las funciones vistas hasta ahora	**INICIO** Saludo. Y explicación de la actividad a realizar **DESARROLLO** Realización de actividad practica pagina 9 y 11. **CIERRE** El profesor despacha a los alumnos y salen a recreo, con el compromiso de traer la actividad finalizada	- Guía de trabajo - Data (Proyector) - Power Point	Observación del trabajo en clase

Unidad Funciones		Objetivo: Establecer estrategias para resolver ejercicios con funciones		
Intervención 5	¿Qué se espera lograr?	¿Cómo enseñar y con que aprender?		¿Qué y con que evaluar?
N° de horas pedagógicas	Aprendizajes esperados de cada clase	Actividades de aprendizaje	Recursos	Evaluación
2 horas aulas, Equivalentes a 90 minutos	Demostrar que comprenden dominio, recorrido, gráfica y forma algebraica de las funciones lineales y afines	**INICIO** Saludo. Introducción a la segunda actividad practica y explicación de cómo resolver cada ítem presentado **DESARROLLO** Realización de la actividad práctica pagina 12,13 y 14, en parejas y con la observación del profesor **CIERRE** El profesor finaliza y recuerda que pronto vendrá la fecha de la primera evaluación (TEST1)	- Guía de trabajo - Data (Proyector) - Power Point	Observación del profesor

Unidad Funciones		Objetivo: Conocer la función definida por tramos		
Intervención 6	¿Qué se espera lograr?	¿Cómo enseñar y con que aprender?		¿Qué y con que evaluar?
N° de horas pedagógicas	Aprendizajes esperados de cada clase	Actividades de aprendizaje	Recursos	Evaluación
2 horas aulas, Equivalentes a 90 minutos	Mostrar que comprenden la función definida por tramos	**INICIO** Saludo. Introducción a los contenidos de funciones. **DESARROLLO** Lectura y análisis de la página 14 y desarrollo la actividad en la pagina 15. **CIERRE** Los alumnos en pareja deben traer lista la actividad de la pagina 15.	- Data (Proyector) - Power Point	Desarrollo correcto de la tarea de la página 15

Unidad Funciones	**EVALUACION DE PROCESO**		
Intervención 7	¿Cómo enseñar y con que aprender?		¿Qué y con que evaluar?
N° de horas pedagógicas	Actividades de aprendizaje	Recursos	Evaluación
2 horas aulas, Equivalentes a 90 minutos	**EVALUACION** **INICIO:** Saludo y lectura de evaluación **DESARROLLO:** Los alumnos desarrollan el test en 60 minutos **CIERRA:** Entrega del test y posterior salida a recreo	Hojas de Evaluación	TEST 1

Unidad Funciones		Objetivo: Analizar la función valor absoluto y parte entera		
Intervención 8	¿Qué se espera lograr?	¿Cómo enseñar y con que aprender?		¿Qué y con que evaluar?
N° de horas pedagógicas	Aprendizajes esperados de cada clase	Actividades de aprendizaje	Recursos	Evaluación
2 horas aulas, Equivalentes a 90 minutos	Los alumnos demuestran que comprender la función valor absoluto y parte entera	**INICIO** Saludo. Introducción a los contenidos de funciones. **DESARROLLO** Lectura y análisis de las páginas 15, 16 y 17. Mas el desarrollo de las actividades que se encuentran en esas páginas. **CIERRE** Queda de tarea la actividad realizada, para entregar al comienzo de la siguiente clase.	- Guía de trabajo titulada: - Data (Proyector) - Power Point	Observación del trabajo en clase por el profesor

Unidad Funciones		Objetivo: Conocer la función inversa y la composición de funciones		
Intervención 9	¿Qué se espera lograr?	¿Cómo enseñar y con que aprender?		¿Qué y con que evaluar?
N° de horas pedagógicas	Aprendizajes esperados de cada clase	Actividades de aprendizaje	Recursos	Evaluación
2 horas aulas, Equivalentes a 90 minutos	Asociar la función inversa con las funciones conocidas Y demostrar que comprenden el concepto de composición de funciones	**INICIO** Saludo y explicación de la nueva materia **DESARROLLO** Lectura pág. 22 y 23, y análisis de la misma. Luego, el profesor propone un par de ejercicios simples en la pizarra sobre función inversa y composición de funciones **CIERRE** Los alumnos realizan sus consultas y se retiran a recreo	- Guía de trabajo titulada: - Data (Proyector) - Power Point	Preguntas al final de la clase

Unidad Funciones	**Evaluación POST TEST**		
Intervención 10			¿Qué y con que evaluar?
N° de horas pedagógicas	Actividades de aprendizaje	Recursos	Evaluación
2 horas aulas, Equivalentes a 90 minutos	**INICIO** Saludo y lectura de la evaluación **DESARROLLO** Lo alumnos tiene 90 minutos para resolver la evaluación **CIERRE** Cada alumno entrega su prueba y se retira de la sala	6 hojas que contienen la evaluación	Prueba

5.10 Planificaciones de Clase Grupo Experimental

Unidad: Funciones **GRUPO EXPERIMENTAL**	**Objetivo de la clase:** Conocer los conceptos de Función, matematizando una situación realista, trabajando colaborativamente con su grupo.		
Intervención 1 / **Tiempo:** 90 minutos	*¿Cómo enseñar y con que aprender?*		*¿Qué y con que evaluar?*
¿Qué se espera lograr? **Aprendizajes esperados la clase**	**Actividades de aprendizaje**	**Recursos**	**Evaluación**
- Conocer el concepto de Función, como una relación entre dos conjuntos. - Utilidad de las Funciones como un medio para modelar situaciones reales, y así comparar para la toma de decisiones.	**INICIO** Saludo. Propuesta de trabajo basado en la resolución de problemas de forma grupal. Entrega de las primeras páginas del Módulo Didáctico de Funciones. **DESARROLLO** Planteamiento de la situación realista *¿Dónde Fotocopiar?* que apunta a conocer el Concepto de Función, lectura colectiva y explicación de la misma. Posteriormente, de forma grupal dan respuesta a las preguntas planteadas en un informe que entregarán al finalizar la clase. Mientras tanto, el docente a cargo guía el trabajo grupal planteando preguntas clave. Cuando se obtienen respuestas generalizadoras, o se nota un avance sustancial, se hace una síntesis global, donde los y las estudiantes aportan a la consolidación del concepto de función. Formalización del concepto de función, y se muestra un contraejemplo, una relación que no es función. **CIERRE** Para finalizar la actividad, se resuelven dudas generales, se comparten globalmente las conclusiones grupales obtenidas y se reúnen los informes de actividad.	- Módulo Didáctico - Data Show y GeoGebra	Revisión de las producciones de los estudiantes en el informe entregado (respuestas acorde a lo solicitado)

Unidad: Funciones **GRUPO EXPERIMENTAL**	**Objetivo de la clase:** Formalizar los conceptos de Dominio y Recorrido, Conocer la Función Inversa matematizando una situación realista.		
Intervención 2 / **Tiempo:** 90 minutos	*¿Cómo enseñar y con que aprender?*		*¿Qué y con que evaluar?*
¿Qué se espera lograr? **Aprendizajes esperados la clase**	**Actividades de aprendizaje**	**Recursos**	**Evaluación**
- Conocer el concepto de Dominio y de Recorrido como los conjuntos de partida y de llegada de una función en particular. - Reconocer la Función Inversa, como aquella relación que le asigna a cada imagen, su preimagen.	**INICIO** Saludo. Retroalimentación de la clase anterior, ¿Qué es y para qué sirve una función? **DESARROLLO** Propuesta de actividades ligadas a la misma situación realista anterior (Pág. 4 Módulo Didáctico) relacionando variables en diversos contextos, para llegar a la formalización de los conceptos de Dominio y Recorrido. Se propone una situación inversa a la originalmente planteada, para llegar a determinar las características de la Función Inversa, y cómo determinarla. Trabajo colaborativo en las páginas 5 y 6 del Módulo Didáctico, mientras el docente supervisa el trabajo grupal, con atención a las producciones de los estudiantes. **CIERRE** Conclusión global de las actividades de la clase, preguntas sintetizadoras: ¿Cómo definirías el Dominio de una función?,¿Cómo puedes definir el recorrido?, ¿Qué características tiene la función inversa?	- Módulo Didáctico - Data Show y GeoGebra	La evaluación de la clase está relacionada con las respuestas de los estudiantes en todo momento, en particular, las preguntas sintetizadoras finales.

<table>
<tr><td>Unidad: Funciones
GRUPO EXPERIMENTAL</td><td colspan="3">Objetivo de la clase: Matematizar una situación realista para conocer el concepto de Función Lineal, trabajando de forma colaborativa con su grupo.</td></tr>
<tr><td>Intervención 3 | Tiempo: 90 minutos</td><td colspan="2">¿Cómo enseñar y con que aprender?</td><td>¿Qué y con que evaluar?</td></tr>
<tr><td>¿Qué se espera lograr?
Aprendizajes esperados la clase</td><td>Actividades de aprendizaje</td><td>Recursos</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td>- Conocer la Función Lineal como la relación de proporcionalidad entre dos variables.</td><td>INICIO
Saludo. Retroalimentación de la clase anterior, referida a Dominio, Recorrido y Función Inversa.

DESARROLLO
Planteamiento de la situación realista ¡Llave mala! ¡Mala llave! (Pág. 7 módulo didáctico), explicación de la misma y trabajo grupal colaborativo tendiente a formalizar la Función Lineal. Mientras tanto, el docente a cargo guía el trabajo grupal planteando preguntas clave. Los estudiantes consignan todos sus resultados en un informe que entregan al docente al finalizar la clase.

Cuando se obtienen respuestas generalizadoras, o se nota un avance sustancial, se hace una síntesis global, donde los y las estudiantes aportan comentarios a la consolidación del concepto de función.

Trabajo práctico en la página 9 del Módulo Didáctico.

CIERRE
Recolección de los informes confeccionados por los estudiantes. Síntesis colectiva detallando los aspectos más importantes analizados en la clase.</td><td>- Módulo Didáctico
- Data Show y GeoGebra</td><td>La evaluación de la clase radica en las respuestas de los estudiantes en todo momento, en particular, las producciones que consignan en el informe entregado.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Unidad: Funciones
GRUPO EXPERIMENTAL</td><td colspan="3">Objetivo de la clase: Matematizar una Situación Realista para conocer el concepto de Función Afín, en interacción formativa con el grupo de trabajo.</td></tr>
<tr><td>Intervención 4</td><td>Tiempo: 90 minutos</td><td colspan="2">¿Cómo enseñar y con que aprender?</td><td>¿Qué y con que evaluar?</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Qué se espera lograr?
Aprendizajes esperados la clase</td><td>Actividades de aprendizaje</td><td>Recursos</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Conocer la Función Afín, como la función que modela situaciones donde se tiene una cantidad fija, sumada (o restada) a una cantidad variable.</td><td>INICIO
Saludo. Retroalimentación de la clase anterior.

DESARROLLO
Planteamiento de la situación realista ¿Qué plan de celular?, para definir la Función Afín (página 10 Módulo Didáctico), en ella se proponen tres alternativas de Plan de Telefonía, y se pide determinar la opción más económica. El análisis numérico se torna tedioso y se hace necesario generalizar y utilizar el álgebra para dar respuesta a las preguntas planteadas.

El docente a cargo guía el trabajo grupal planteando preguntas clave para lograr la generalización, y así los y las estudiantes puedan alcanzar los niveles más altos de matematización, favorecer el tránsito entre niveles para dar respuesta a las preguntas planteadas y reflexionar sobre las mismas.

CIERRE
Se concluye la clase con una síntesis grupal de la situación planteada, ¿Qué opción determinaron como la más económica?, y ¿Cómo llegaron a esa conclusión? Destacar las similitudes y diferencias entre los procesos de matematización expuestos.</td><td>- Módulo Didáctico
- Data Show y GeoGebra</td><td>La evaluación de la clase radica en las respuestas de los estudiantes en los momentos de matematización progresiva.</td></tr>
</table>

Unidad: Funciones **GRUPO EXPERIMENTAL**		**Objetivo de la clase:** Formalizar el concepto de Función Afín, y aplicarlo en la resolución de ejercicios propuestos.		
Intervención 5	**Tiempo:** 90 minutos	*¿Cómo enseñar y con que aprender?*		*¿Qué y con que evaluar?*
¿Qué se espera lograr? **Aprendizajes esperados la clase**		**Actividades de aprendizaje**	**Recursos**	**Evaluación**
- Determinar la definición de función afín - Evaluar ciertas funciones en valores dados - Graficar funciones en un plano cartesiano		**INICIO** Saludo. Retroalimentación de la clase anterior sobre el concepto de función afín. **DESARROLLO** Se continúa trabajando la situación realista de la clase anterior, apuntando hacia la formalización del concepto de Función Afín de forma colectiva, para posteriormente realizar el trabajo práctico grupal propuesto en la página 11 Módulo Didáctico, sobre evaluar y graficar funciones. Mientras el docente monitorea y guía el trabajo de cada grupo, se cerciora de que completen un informe con las actividades realizadas en la clase. **CIERRE** Se concluye la clase destacando las diferencias y similitudes entre las funciones Afín y Lineal.	- Módulo Didáctico - Data Show y GeoGebra	La evaluación de la clase radica en las respuestas de los estudiantes en todo momento, en particular, las producciones que consignan en el informe entregado.

Unidad: Funciones **GRUPO EXPERIMENTAL**		**Objetivo de la clase:** Matematizar una situación realista para conocer el concepto de Función Constante, trabajando de forma colaborativa.		
Intervención 6	**Tiempo:** 90 minutos	*¿Cómo enseñar y con que aprender?*		*¿Qué y con que evaluar?*
¿Qué se espera lograr? **Aprendizajes esperados la clase**		**Actividades de aprendizaje**	**Recursos**	**Evaluación**
- Conocer la Función constante, relacionada con el concepto de función definida por tramos. - Representación de funciones en un plano cartesiano.		**INICIO** Saludo. Retroalimentación de la clase anterior: definición de Función Afín. **DESARROLLO** Se propone la situación realista *¿Qué plan elegir?,* que plantea una nueva oferta telefónica con planes de cargo fijo y consumo variable, las preguntas se orientan a conseguir la formalización de una función constante. El docente monitorea y guía el trabajo de cada grupo, proponiendo preguntas y reflexiones clave para favorecer los procesos de matematización progresiva. Luego de definir la Función Constante, se proponen dos actividades prácticas para ser resueltas por el grupo de trabajo. **CIERRE** Se concluye la clase con un plenario donde los estudiantes discuten las similitudes y diferencias formales de las funciones lineal, afín y constante.	- Módulo Didáctico - Data Show y GeoGebra	La evaluación de la clase radica en las respuestas de los estudiantes en los momentos de matematización progresiva dentro del grupo.

<table>
<tr><td colspan="2">Unidad: Funciones
GRUPO EXPERIMENTAL</td><td colspan="3">Objetivo de la clase: Conocer el concepto de Función definida por tramos, matematizando una situación realista con su grupo de trabajo.</td></tr>
<tr><td>Intervención 7</td><td>Tiempo: 90 minutos</td><td colspan="2">¿Cómo enseñar y con que aprender?</td><td>¿Qué y con que evaluar?</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Qué se espera lograr?
Aprendizajes esperados la clase</td><td>Actividades de aprendizaje</td><td>Recursos</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Conocer el concepto de función definida por tramos.

- Representar gráficamente funciones en el plano cartesiano.</td><td>INICIO
Saludo. Recordar diferencias y similitudes formales de las funciones afín, lineal y constante.

DESARROLLO
Planteamiento de la situación realista ¡Paga menos, mientras más hablas!: dos planes telefónicos con cargo fijo y valor por minuto variables, dependiendo de los minutos hablados, de tal forma que ambos planes constituyen funciones definidas por tramos (página 13 Módulo Didáctico). Se solicita a los y las estudiantes determinar la oferta más conveniente y en que tramos conviene más.

El docente monitorea y guía el trabajo de cada grupo, proponiendo preguntas y reflexiones clave para favorecer los procesos de matematización progresiva.

CIERRE
Se concluye la clase con un análisis gráfico (con el Software GeoGebra) de las funciones propuestas como planes telefónicos, cuyo análisis permite determinar los tramos de mayor economía para cada opción.</td><td>- Módulo Didáctico
- Data Show y GeoGebra</td><td>La evaluación de la clase radica en las respuestas de los estudiantes en los momentos de reflexión grupal y colectiva.</td></tr>
</table>

Unidad: Funciones **GRUPO EXPERIMENTAL**	**Objetivo de la clase:** Formalizar la definición de función definida por tramos y aplicarlo en la solución de ejercicios propuestos.		
Intervención 8 / **Tiempo:** 90 minutos	*¿Cómo enseñar y con que aprender?*		*¿Qué y con que evaluar?*
¿Qué se espera lograr? **Aprendizajes esperados la clase**	**Actividades de aprendizaje**	**Recursos**	**Evaluación**
- Definir concepto de función definida por tramos. - Análisis gráfico de funciones. - Evaluar funciones en valores dados.	**INICIO** Saludo. Retroalimentación de la clase anterior, situación *¡Paga menos, mientras más hablas!*, para conocer el concepto de Función definida por tramos. **DESARROLLO** Se continúa el trabajo de la clase anterior, sobre la misma situación, apuntando hacia la formalización colectiva del concepto (página 14 Módulo Didáctico). Posteriormente se propone un trabajo práctico grupal, con tres actividades que los y las estudiantes deben resolver en un informe para entregar al finalizar la clase. El docente monitorea y guía el trabajo efectivo de cada grupo, proponiendo preguntas y reflexiones clave, para favorecer los procesos de matematización progresiva en el trabajo práctico propuesto. El trabajo practico consiste en graficar funciones definidas por tramos, evaluarlas en valores dados, y determinar las expresiones algebraicas de dos gráficas de funciones. **CIERRE** Se concluye la clase, recogiendo las resoluciones de los estudiantes y discutiendo en colectivo las respuestas de las preguntas trabajadas.	- Módulo Didáctico - Data Show y GeoGebra	La evaluación de la clase radica en las respuestas orales de los estudiantes en todo momento, en particular, las producciones escritas que consignan en el informe entregado.

<table>
<tr><td colspan="2">Unidad: Funciones
GRUPO EXPERIMENTAL</td><td colspan="3">Objetivo de la clase: Conocer los conceptos de Función Identidad y Composición de Funciones, matematizando situaciones realistas de forma colaborativa.</td></tr>
<tr><td>Intervención 9</td><td>Tiempo: 90 minutos</td><td colspan="2">¿Cómo enseñar y con que aprender?</td><td>¿Qué y con que evaluar?</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Qué se espera lograr?
Aprendizajes esperados la clase</td><td>Actividades de aprendizaje</td><td>Recursos</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Conocer el concepto de Función Identidad

- Conocer la composición de funciones

- Componer algebraicamente funciones propuestas</td><td>INICIO
Saludo. Instrucciones de la clase.

DESARROLLO
Mostrar la función identidad, como un caso particular notable de función lineal.

Planteamiento de la situación realista La cerámica de Don Juan, para conocer la composición de funciones y su utilidad en la simplificación de engorrosos cálculos (página 15 Módulo Didáctico).

Los y las estudiantes trabajan en forma grupal colaborativa las preguntas propuestas, mientras el docente guía el proceso de matematización progresiva grupal con preguntas clave.

Resolución colectiva de la situación en pizarra por parte del docente, con ayuda de los estudiantes. Formalización de la composición de funciones. Trabajo práctico de las actividades finales de la página.

CIERRE
Reflexión colectiva acerca de situaciones cotidianas donde pueda ser útil la composición de funciones.</td><td>- Módulo Didáctico
- Data Show y GeoGebra</td><td>La evaluación de la clase radica en las respuestas de los estudiantes durante el proceso de matematización progresiva.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Unidad: Funciones
GRUPO EXPERIMENTAL</td><td colspan="3">Objetivo de la clase: Matematizar una situación realista para conocer los conceptos de Función Cuadrática y Función Raíz Cuadrada.</td></tr>
<tr><td>Intervención 10</td><td>Tiempo: 90 minutos</td><td colspan="2">¿Cómo enseñar y con que aprender?</td><td>¿Qué y con que evaluar?</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Qué se espera lograr?
Aprendizajes esperados la clase</td><td>Actividades de aprendizaje</td><td>Recursos</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Conocer los conceptos de Función Cuadrática y Función Raíz Cuadrada
- Determinar la función inversa
- Graficar funciones dadas
- Evaluar funciones en valores dados
- Graficar funciones en un plano cartesiano</td><td>INICIO
Saludo. Instrucciones de la clase.

DESARROLLO
Planteamiento de la situación realista ¿Cómo hago el corral?, que propone las medidas de un corral, con una longitud fija de malla, para maximizar el área. Las preguntas propuestas orientan a obtener una función cuadrática, la función del área. Luego se pide obtener la función de la longitud de un lado del corral para obtener un área dada: función raíz cuadrada.

El proceso de matematización grupal es monitoreado y guiado por el docente, con preguntas clave sobre el proceso de matematización

Luego de la formalización del concepto, se propone un trabajo práctico que los estudiantes deben desarrollar en un informe para entregar al docente finalizando la clase.

CIERRE
Se concluye la clase con un plenario colectivo donde se reconstruyen los conceptos de función cuadrática y raíz cuadrada, poniendo énfasis en las restricciones de los conjuntos dominio y recorrido para definirlas. Se recogen los informes entregados por los estudiantes.</td><td>- Módulo Didáctico
- Data Show y GeoGebra</td><td>La evaluación de la clase radica en las respuestas de los estudiantes en todo momento, en particular, las producciones que consignan en el informe entregado.</td></tr>
</table>

5.11 Tablas de datos: Resumen puntajes Grupo Control

CÓDIGO	GÉNERO	PRETEST FUNCIONES	PRETEST ANSIEDAD	PRETEST MOTIVA-CIÓN	POSTEST FUNCIONES	POSTEST ANSIEDAD	POSTEST MOTIVA-CIÓN
GC1	M	27	61	47	41	58	46
GC2	M	42	34	69	33	26	67
GC3	M	17	70	50	26	75	62
GC4	H	44	43	51	46	46	47
GC5	H	27	39	52	23	31	40
GC6	H	6	50	57	27	43	62
GC7	H	59	24	42	48	25	47
GC8	H	36	34	60	39	39	61
GC9	H	48	47	48	38	53	50
GC10	H	29	39	57	48	38	50
GC11	H	40	54	53	43	52	46
GC12	H	7	44	38	25	24	36
GC13	M	65	114	51	58	88	45
GC14	M	16	48	45	31	65	42
GC15	H	43	44	57	53	30	48
GC16	H	12	59	52	31	38	52
GC17	H	23	51	53	32	52	42
GC18	H	17	40	52	24	36	55
GC19	M	25	38	44	37	41	42
GC20	H	38	26	53	48	25	56
GC21	M	7	56	38	19	44	44
GC22	M	17	64	62	22	32	49
GC23	H	18	65	54	39	64	57
GC24	M	24	76	44	34	89	40
GC25	M	44	55	47	53	67	45
GC26	M	16	64	50	26	55	42
GC27	H	70	28	50	59	26	49
GC28	H	18	53	61	34	63	50
GC29	M	12	55	37	26	59	40
GC30	M	10	66	41	33	67	64
GC31	M	37	28	44	19	24	50
GC32	M	10	85	49	28	60	45
GC33	M	8	55	51	22	67	48
GC34	H	15	65	61	30	63	51
GC35	M	47	24	64	41	24	60
GC36	M	37	58	55	50	40	54
GC37	H	23	62	65	45	64	56

5.12 Tablas de datos: Resumen puntajes Grupo Experimental

CÓDIGO	GÉNERO	PRETEST FUNCIONES	PRETEST ANSIEDAD	PRETEST MOTIVA-CIÓN	POSTEST FUNCIONES	POSTEST ANSIEDAD	POSTEST MOTIVA-CIÓN
GE1	M	42	46	53	62	47	47
GE2	M	11	63	59	47	58	58
GE3	H	3	32	36	22	48	50
GE4	M	16	78	44	37	69	44
GE5	M	10	55	39	45	75	36
GE6	H	29	39	49	28	49	48
GE7	H	49	28	47	54	24	44
GE8	M	3	72	48	30	58	51
GE9	M	13	67	49	40	47	40
GE10	M	5	71	55	21	86	56
GE11	M	8	34	42	33	40	37
GE12	M	12	59	52	53	56	38
GE13	M	33	33	45	60	34	40
GE14	H	13	41	56	54	42	52
GE15	H	32	46	46	53	28	61
GE16	M	24	59	48	37	46	44
GE17	H	10	54	51	55	63	52
GE18	H	16	75	54	45	66	51
GE19	M	11	61	50	25	54	59
GE20	M	41	62	57	64	74	59
GE21	M	35	33	63	59	33	55
GE22	M	2	89	55	20	86	49
GE23	M	11	42	51	57	38	55
GE24	M	11	88	40	39	96	46
GE25	H	44	49	52	61	31	67
GE26	M	24	47	57	58	35	55
GE27	M	27	37	53	62	30	49
GE28	M	8	86	53	36	90	50
GE29	H	10	61	63	28	89	60
GE30	M	21	35	51	59	40	51
GE31	H	15	60	44	24	62	46
GE32	H	32	44	59	58	31	63
GE33	M	6	77	43	35	98	45
GE34	M	55	46	58	64	55	55
GE35	H	14	40	66	27	46	35
GE36	M	41	38	51	61	36	49
GE37	H	42	43	51	59	35	49

5.13 Detalle de datos

5.13.1 Pre Test Funciones Grupo Control

Género	Código	PRETEST MATEMATIZACION																					
		1.A	1.B	1.C	1.D	1.E	2.A	2.B	2.C	2.D	2.E	3.A	3.B	3.C	4.A	4.B	4.C	4.D	5.A	5.B	5.C	5.D	5.E
M	GC1	1	2	2	1	0	1	1	2	3	1	2	2	2	0	3	0	3	1	0	0	0	0
M	GC2	1	2	3	1	0	1	3	3	3	2	2	3	2	0	2	0	3	2	1	3	3	2
M	GC3	1	0	2	1	2	1	2	2	0	3	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
H	GC4	1	2	3	1	0	1	3	3	2	0	2	3	3	0	3	3	3	2	2	2	3	2
H	GC5	1	2	2	1	3	2	2	2	2	1	2	2	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
H	GC6	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H	GC7	1	2	3	1	4	1	3	4	2	3	1	3	3	4	4	4	4	2	2	3	3	2
H	GC8	1	2	3	1	0	1	3	3	0	0	2	3	3	0	3	3	3	1	1	1	1	1
H	GC9	1	2	3	1	4	3	3	3	2	0	2	3	3	0	4	4	4	1	1	0	3	1
H	GC10	1	2	3	1	3	1	2	0	0	0	1	2	1	1	3	3	0	1	1	0	3	0
H	GC11	1	0	3	3	3	1	3	4	0	0	3	3	3	3	3	0	3	1	1	2	0	0
H	GC12	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	GC13	1	2	3	1	4	3	3	3	3	2	3	3	3	4	4	4	4	2	2	4	3	4
M	GC14	1	2	0	1	1	1	2	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	3	1
H	GC15	1	2	0	1	0	2	3	3	3	3	2	2	3	3	3	3	3	1	1	1	0	3
H	GC16	1	2	0	1	0	1	3	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
H	GC17	1	2	3	1	0	1	3	3	0	0	1	3	1	0	3	0	1	0	0	0	0	0
H	GC18	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	4	1	1	0	3	1
M	GC19	1	2	3	1	0	1	3	3	0	0	1	1	1	0	2	0	2	1	0	0	3	0
H	GC20	1	2	3	1	2	1	1	1	1	0	1	1	1	4	4	4	4	1	1	0	3	1
M	GC21	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
M	GC22	1	2	3	1	2	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	1	1	1	0	0	0
H	GC23	1	2	0	1	0	2	2	0	0	0	1	3	1	0	3	0	0	2	0	0	0	0
M	GC24	1	0	0	1	0	1	3	0	0	0	1	3	2	0	3	0	0	1	1	3	3	1
M	GC25	1	2	3	1	4	1	3	4	3	2	3	3	3	0	3	3	3	1	1	0	0	0
M	GC26	1	2	1	0	0	1	0	0	0	0	2	2	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
H	GC27	1	2	3	1	4	3	3	4	3	4	3	4	3	4	4	4	4	3	3	3	3	4
H	GC28	1	2	2	3	2	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1
M	GC29	1	2	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	3	0	0	1	0	0	0	0
M	GC30	1	2	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0
M	GC31	1	0	2	1	0	1	3	3	0	0	3	3	3	0	4	4	0	1	1	3	3	1
M	GC32	1	0	2	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
M	GC33	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	3	2	0	0	0	0	0	0
H	GC34	1	0	0	1	0	1	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
M	GC35	1	2	3	1	4	1	3	3	0	0	3	3	3	0	4	3	4	1	1	4	3	0
M	GC36	1	2	3	1	3	3	3	3	0	0	1	2	0	0	3	3	3	2	1	0	3	0
H	GC37	1	2	0	1	0	1	1	2	2	1	1	0	0	2	1	2	0	1	1	1	3	0

5.13.2 Pre Test Funciones Grupo Experimental

Género	Código	PRETEST MATEMATIZACION																				
		1.A	1.B	1.C	1.D	1.E	2.A	2.B	2.C	2.D	2.E	3.A	3.B	3.C	4.A	4.B	4.C	4.D	5.A	5.B	5.C	5.D	5.E
M	GE1	1	0	2	1	3	3	1	3	2	1	3	3	3	3	4	4	0	1	1	0	3	0
M	GE2	1	2	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
H	GE3	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	GE4	1	2	0	1	0	1	2	0	0	0	1	2	1	1	2	1	1	0	0	0	0	0
M	GE5	1	2	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
H	GE6	1	2	3	1	4	0	0	0	0	0	3	3	3	1	3	3	0	1	1	0	0	0
H	GE7	1	2	3	1	4	1	3	4	3	0	3	4	3	0	4	4	4	1	1	1	0	2
M	GE8	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	GE9	1	2	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	3	0
M	GE10	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	GE11	1	2	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	GE12	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	4	1	1	1	1	0	0	0
M	GE13	1	2	3	1	0	1	3	3	0	1	1	0	1	1	4	2	3	1	1	0	3	1
H	GE14	1	2	0	1	0	1	3	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3	0
H	GE15	1	2	3	1	0	2	3	0	0	0	2	3	3	2	4	3	0	2	1	0	0	0
M	GE16	1	2	3	1	4	1	3	0	0	0	1	0	0	1	4	0	0	0	0	0	3	0
H	GE17	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
H	GE18	1	0	2	1	0	3	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
M	GE19	1	2	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
M	GE20	1	2	0	1	0	3	3	4	3	3	1	3	3	2	4	0	0	1	1	1	3	2
M	GE21	1	2	3	1	4	3	3	3	2	0	1	0	1	0	4	4	0	2	1	0	0	0
M	GE22	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
M	GE23	1	2	0	1	0	1	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
M	GE24	1	2	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0
H	GE25	1	2	3	1	2	2	3	1	2	2	3	3	1	2	2	4	3	1	1	1	3	1
M	GE26	1	2	2	1	4	1	3	0	0	0	1	2	1	0	0	0	0	2	1	3	0	0
M	GE27	1	0	0	0	0	1	3	4	2	1	1	0	1	2	4	4	0	1	1	1	0	0
M	GE28	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
H	GE29	1	2	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0
M	GE30	1	2	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	3	3	2	1	1	0	0	0
H	GE31	1	2	3	1	0	1	1	0	0	0	1	2	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
H	GE32	1	2	3	1	0	2	3	0	0	0	1	3	3	0	3	4	0	1	1	0	3	1
M	GE33	1	2	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	GE34	1	2	3	1	4	3	3	3	1	3	2	2	2	2	4	4	4	1	1	3	3	3
H	GE35	1	2	0	1	1	1	1	1	0	3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	GE36	1	2	3	1	4	3	3	3	2	1	1	3	3	4	4	3	0	0	0	0	0	0
H	GE37	1	1	1	2	3	2	3	3	0	3	1	3	3	1	3	4	3	1	1	2	0	1

5.13.3 Pre Test Ansiedad Grupo Control

Género	Código	PRETEST ANSIEDAD																							
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
M	GC1	4	3	1	4	3	2	3	1	1	3	4	3	2	3	4	2	3	4	1	3	1	3	2	1
M	GC2	3	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	3	1	3	1	1	1	1
M	GC3	3	3	3	4	3	5	2	2	4	2	5	4	2	2	5	2	1	4	1	5	3	3	1	1
H	GC4	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	2	3	2	3	3	2	1	2	1	4	1	1	3	1
H	GC5	2	3	2	3	2	1	2	1	1	1	2	2	2	1	2	1	1	2	1	2	1	1	2	1
H	GC6	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	2	2	2	3	2	2	3	1	2	2	1	1	3	1
H	GC7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
H	GC8	1	1	1	3	1	1	1	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	3	1	3	1	1	1	1
H	GC9	2	2	2	3	4	2	1	3	2	1	1	2	1	1	1	2	2	2	2	3	2	2	2	2
H	GC10	2	3	2	3	2	1	2	1	1	1	2	2	2	1	2	1	1	2	1	2	1	1	2	1
H	GC11	3	3	2	3	4	1	2	1	1	1	3	1	1	4	4	1	2	2	1	5	3	1	4	1
H	GC12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	1	5	1	5	1	1	1	5	1
M	GC13	5	5	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	2	5	5	5	5	5
M	GC14	4	1	1	3	1	1	3	3	1	1	3	1	1	3	3	1	3	4	1	2	1	2	3	1
H	GC15	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1	2	4	2	3	1	2	2	2	2	3	1	2	3	3
H	GC16	3	2	2	4	4	2	2	1	1	2	3	3	2	4	4	2	1	3	2	4	1	1	4	2
H	GC17	5	3	2	2	2	1	2	2	1	2	3	2	1	4	3	2	1	2	1	3	1	1	4	1
H	GC18	3	2	1	3	1	1	1	1	1	1	2	1	1	3	3	1	1	3	1	3	1	1	3	1
M	GC19	2	3	1	2	2	1	2	1	1	1	1	2	1	2	2	1	1	2	1	4	1	1	2	1
H	GC20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1
M	GC21	3	3	1	4	2	1	2	1	1	2	4	3	3	3	4	1	2	4	1	5	1	1	3	1
M	GC22	3	3	2	4	3	1	2	2	1	2	3	4	2	4	4	3	2	3	1	5	1	3	3	3
H	GC23	3	5	2	3	3	1	3	5	1	2	5	3	1	2	5	2	3	2	1	5	1	3	1	3
M	GC24	5	4	2	5	5	1	2	5	1	2	4	2	2	4	3	1	3	5	2	5	1	5	5	2
M	GC25	3	3	3	1	1	3	4	4	3	2	3	1	1	2	1	2	2	4	1	4	2	1	3	1
M	GC26	4	3	1	4	1	1	3	3	1	1	5	4	1	4	5	1	1	4	1	5	3	3	4	1
H	GC27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	3	1	1	2	1
H	GC28	3	3	1	4	1	1	2	3	1	1	3	1	5	5	3	1	2	2	1	4	1	1	3	1
M	GC29	2	2	2	2	2	1	2	4	1	1	4	2	1	4	2	2	3	3	1	4	1	4	4	1
M	GC30	4	5	3	4	3	4	3	2	1	3	5	3	2	1	5	2	1	4	2	5	1	1	1	1
M	GC31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	3	1
M	GC32	4	4	4	5	3	5	3	1	1	3	5	3	2	5	5	4	4	4	5	5	1	1	5	3
M	GC33	1	4	2	4	1	1	1	5	1	1	3	1	1	5	5	1	1	3	1	5	1	1	5	1
H	GC34	4	2	3	5	4	1	2	2	5	1	4	1	1	2	3	2	2	3	2	5	5	1	2	3
M	GC35	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M	GC36	4	4	3	2	3	1	2	2	1	3	4	1	1	3	5	1	1	5	1	4	1	2	3	1
H	GC37	3	3	4	4	2	1	2	2	2	2	3	4	2	3	4	3	1	3	1	3	1	4	3	2

5.13.4 Pre Test Ansiedad Grupo Experimental

Género	Código	PRETEST ANSIEDAD																							
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
M	GE1	3	4	1	4	3	1	2	2	1	1	2	1	1	1	3	1	1	2	1	4	1	3	2	1
M	GE2	3	2	3	4	3	2	2	2	1	3	3	3	2	4	4	2	2	3	2	4	1	2	4	2
H	GE3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M	GE4	4	4	3	5	5	2	4	2	1	3	4	2	2	3	5	2	3	5	3	5	2	4	3	2
M	GE5	4	4	3	4	1	1	2	1	1	3	4	2	1	4	4	1	1	3	1	4	1	1	3	1
H	GE6	2	2	1	2	1	1	2	3	1	1	1	1	1	2	2	1	1	2	1	4	1	2	3	1
H	GE7	1	1	1	1	1	1	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	1
M	GE8	4	5	2	3	1	1	2	4	1	3	4	4	3	5	3	3	5	3	2	2	1	3	5	3
M	GE9	4	3	1	5	4	5	2	1	1	1	3	1	2	5	3	1	3	3	1	5	3	4	4	2
M	GE10	5	4	3	5	3	5	4	3	1	3	3	1	1	4	3	1	3	3	1	5	1	3	4	2
M	GE11	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	2	1	3	1	1	2	1
M	GE12	4	4	3	5	2	3	3	2	1	2	5	1	2	2	3	1	2	4	1	3	1	2	2	1
M	GE13	2	2	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	1	1	2	1
H	GE14	3	2	2	4	1	1	1	1	1	2	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	1	1	3	1
H	GE15	3	2	2	3	1	1	2	3	1	1	2	2	1	3	3	2	2	2	1	3	1	1	3	1
M	GE16	4	4	3	5	2	2	3	3	1	3	3	2	1	3	4	1	1	3	1	4	1	1	3	1
H	GE17	3	3	2	2	1	1	1	3	1	2	3	2	2	4	3	2	2	3	2	4	1	2	3	2
H	GE18	4	4	4	5	3	1	2	4	2	3	3	3	2	4	4	2	4	4	3	3	2	1	5	3
M	GE19	4	4	2	4	1	1	4	1	1	3	5	2	1	4	3	2	2	4	1	5	1	1	4	1
M	GE20	4	4	3	5	3	1	2	3	1	2	3	3	1	4	5	2	1	4	1	4	1	1	3	1
M	GE21	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	3	1	1	2	1	1	1	1	1	1
M	GE22	5	4	4	4	3	5	5	3	2	4	4	3	3	5	5	3	4	4	3	5	2	3	3	3
M	GE23	3	2	2	3	2	2	1	1	1	1	2	1	1	1	3	1	2	2	1	5	1	1	2	1
M	GE24	5	5	4	5	4	3	3	5	1	2	5	3	3	5	5	3	3	4	3	5	1	4	4	3
H	GE25	1	2	2	4	2	1	2	2	1	1	3	1	1	2	4	1	1	4	1	4	1	3	4	1
M	GE26	3	2	1	2	1	1	2	3	1	3	4	3	1	1	4	1	1	3	1	5	1	1	1	1
M	GE27	2	4	2	2	2	1	1	1	1	1	3	1	1	1	2	1	1	2	1	1	1	3	1	1
M	GE28	5	4	3	5	5	3	4	4	1	3	3	3	4	5	5	3	3	4	3	5	1	5	4	1
H	GE29	4	3	2	3	1	1	2	1	1	3	4	3	2	4	4	3	3	4	1	5	1	1	4	1
M	GE30	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	3	1	1	2	1	1	3	1	3	4	1
H	GE31	4	3	3	4	1	1	3	1	1	2	3	3	2	4	4	2	2	4	2	4	1	1	4	1
H	GE32	1	3	2	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	5	3	2	2	1	1	4	1	1	5	1
M	GE33	4	4	5	5	4	4	4	3	1	3	5	3	3	4	2	3	2	4	3	4	1	1	4	1
M	GE34	2	3	1	2	4	1	1	3	1	1	2	1	1	3	1	1	3	2	1	3	1	4	3	1
H	GE35	3	2	1	2	1	1	2	1	1	1	2	2	1	1	3	1	2	1	1	3	1	1	2	4
M	GE36	2	2	1	2	1	1	1	1	1	2	2	3	1	2	2	1	1	2	1	3	1	2	2	1
H	GE37	1	2	1	2	1	1	1	1	1	2	3	2	1	3	4	1	1	3	1	3	2	2	3	1

5.13.5 Pre Test Motivación Grupo Control

Género	Código	PRETEST MOTIVACION														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
M	GC1	4	2	3	4	2	4	3	1	4	4	1	3	4	3	5
M	GC2	5	5	3	5	3	5	5	5	5	5	3	5	5	5	5
M	GC3	4	4	3	3	4	3	5	2	2	5	3	2	5	4	1
H	GC4	4	3	4	3	2	4	5	2	3	4	2	3	5	3	4
H	GC5	3	4	2	3	2	4	3	4	5	4	3	3	4	4	4
H	GC6	3	4	4	3	3	5	4	5	5	4	2	3	4	4	4
H	GC7	3	2	3	4	3	2	2	3	3	3	2	2	4	4	2
H	GC8	3	5	4	5	4	4	5	3	4	5	2	3	5	3	5
H	GC9	2	4	4	5	3	4	3	4	3	3	3	2	4	3	1
H	GC10	4	5	5	3	3	4	4	3	4	4	2	5	5	3	3
H	GC11	5	2	3	2	3	2	4	4	4	4	5	3	4	4	4
H	GC12	3	2	3	1	1	5	3	2	3	5	1	2	1	1	5
M	GC13	5	1	4	3	2	5	4	3	5	5	1	5	2	2	4
M	GC14	4	3	2	3	4	2	3	2	4	4	1	3	3	3	4
H	GC15	4	4	3	4	2	5	5	1	5	4	2	4	5	4	5
H	GC16	3	3	4	3	3	4	3	3	5	4	2	4	5	3	3
H	GC17	4	5	4	4	3	3	3	4	3	4	3	2	5	3	3
H	GC18	3	4	3	4	3	3	5	3	3	3	1	3	5	5	4
M	GC19	5	3	2	3	2	3	4	2	3	4	1	3	4	3	2
H	GC20	5	2	3	2	3	2	4	4	4	4	5	3	4	4	4
M	GC21	3	2	3	3	1	3	2	3	3	4	1	3	2	2	3
M	GC22	4	4	5	4	3	4	5	4	3	5	4	3	5	5	4
H	GC23	5	4	3	3	3	3	4	1	4	5	3	3	5	5	3
M	GC24	3	1	2	2	2	5	5	2	2	5	1	3	5	4	2
M	GC25	3	2	3	4	3	4	4	3	3	3	3	3	4	3	2
M	GC26	4	3	3	2	3	4	5	4	4	4	1	1	5	4	3
H	GC27	5	3	4	5	2	2	5	3	3	4	3	2	5	2	2
H	GC28	4	5	4	5	5	3	5	5	4	5	3	3	4	4	2
M	GC29	3	2	3	1	1	1	2	1	4	4	1	1	5	3	5
M	GC30	4	1	4	2	1	3	3	3	3	2	3	3	4	4	1
M	GC31	3	3	4	2	3	1	3	5	3	3	4	3	2	3	2
M	GC32	3	1	4	3	3	3	4	5	3	5	1	4	4	3	3
M	GC33	4	2	2	5	3	1	5	3	2	5	2	5	5	4	3
H	GC34	3	5	4	4	3	5	4	4	5	4	3	4	5	5	3
M	GC35	4	5	4	5	4	5	4	5	5	5	2	4	5	3	4
M	GC36	4	3	4	5	2	3	4	5	3	5	4	3	5	3	2
H	GC37	4	5	4	5	5	3	5	5	4	5	3	5	5	4	3

5.13.6 Pre Test Motivación Grupo Experimental

Género	Código	PRETEST MOTIVACION														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
M	GE1	5	3	2	5	3	4	5	1	5	5	2	4	5	1	3
M	GE2	4	3	3	3	2	5	5	4	5	5	2	5	5	4	4
H	GE3	3	2	5	3	2	5	1	3	3	3	2	1	1	1	1
M	GE4	4	2	3	2	2	3	3	2	3	4	1	4	5	3	3
M	GE5	4	2	3	3	2	1	4	2	4	3	1	2	4	1	3
H	GE6	3	3	4	3	3	4	4	2	5	3	1	4	5	3	2
H	GE7	3	5	4	5	1	1	2	5	2	3	4	2	4	4	2
M	GE8	3	3	5	3	3	1	3	5	4	4	3	2	3	3	3
M	GE9	4	2	3	2	2	3	3	2	5	4	2	4	4	4	5
M	GE10	3	3	5	2	3	3	4	5	4	5	2	3	5	3	5
M	GE11	3	4	3	4	3	2	2	3	1	3	4	2	4	3	1
M	GE12	4	2	3	3	3	4	5	3	4	5	2	3	4	3	4
M	GE13	4	2	3	3	2	4	4	3	3	4	1	2	5	3	2
H	GE14	4	5	5	3	5	3	4	3	4	5	4	2	3	3	3
H	GE15	3	4	3	3	2	3	4	3	3	4	1	2	5	3	3
M	GE16	5	2	3	3	2	3	4	3	4	4	1	2	5	4	3
H	GE17	3	4	3	4	4	3	4	3	2	5	2	3	4	4	3
H	GE18	3	3	2	3	2	4	4	4	4	4	2	5	5	4	5
M	GE19	5	3	4	2	1	3	4	3	4	4	1	3	5	4	4
M	GE20	4	5	3	4	4	5	5	3	3	5	3	3	5	4	1
M	GE21	4	4	3	4	3	4	5	5	5	5	4	5	5	3	4
M	GE22	3	2	4	3	3	5	3	4	4	4	3	3	5	4	5
M	GE23	4	3	4	4	3	2	3	4	5	3	2	4	3	3	4
M	GE24	4	1	3	3	1	3	2	2	3	3	1	3	3	4	4
H	GE25	4	3	3	3	2	3	4	5	3	5	3	3	4	4	3
M	GE26	4	4	4	4	5	3	4	5	4	4	2	5	4	3	2
M	GE27	5	5	2	4	5	2	5	2	2	5	1	4	5	5	1
M	GE28	4	1	3	3	2	4	3	3	5	5	2	4	5	4	5
H	GE29	4	5	4	5	4	5	3	3	4	5	3	4	5	5	4
M	GE30	4	4	3	4	3	4	5	3	3	3	1	3	5	4	2
H	GE31	4	3	2	3	3	3	3	2	3	4	2	2	4	3	3
H	GE32	5	5	3	5	5	3	4	5	3	4	5	2	5	4	1
M	GE33	4	2	3	4	3	4	2	3	3	3	1	3	2	4	2
M	GE34	4	4	3	5	5	4	5	4	3	4	3	4	5	3	2
H	GE35	5	5	4	5	4	4	3	3	3	5	5	5	5	5	5
M	GE36	3	3	3	4	2	4	5	3	3	4	2	3	5	4	3
H	GE37	3	5	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3

5.13.7 Test de Proceso Funciones y Evaluación Tradicional

TEST DE PROCESO	
GC	GE
4	14
2	5
2	5
1	5
6	11
2	5
11	13
3	3
2	6
4	5
3	12
0	13
9	12
4	13
13	13
0	14
3	14
3	5
4	14
10	12
3	12
2	14
3	10
1	11
10	7
5	14
8	8
4	12
2	14
5	8
0	10
3	9
3	10
7	14
6	12
9	5
9	7

EVALUACIÓN TRADICIONAL	
GC	GE
47	63
52	44
43	44
42	37
39	39
54	47
49	44
49	33
42	40
52	23
40	51
27	51
70	62
44	43
64	61
40	50
40	40
40	57
59	44
53	70
52	65
45	34
41	52
56	51
54	55
44	44
70	65
38	44
40	28
48	45
40	27
34	65
47	45
47	51
70	28
56	52
63	44

5.13.8 Post Test Funciones Grupo Control

Género	Código	POSTEST MATEMATIZACIÓN																			
		1.A	1.B	1.D	1.E	2.A	2.B	2.C	3.A	3.B	3.C	3.D	3.E	4.A	4.B	4.C	4.D	5.A	5.B	5.C	5.D
M	GC1	1	1	3	0	3	3	3	2	2	4	2	3	3	4	1	2	2	1	1	0
M	GC2	3	3	1	1	0	0	0	3	2	4	3	0	1	4	4	2	1	0	1	0
M	GC3	1	3	0	2	0	0	0	2	2	3	3	1	1	4	0	2	1	1	0	0
H	GC4	1	3	3	2	3	3	3	3	2	4	3	4	0	4	4	3	0	0	1	0
H	GC5	1	2	1	2	1	0	1	2	2	2	2	1	0	0	0	0	2	0	1	3
H	GC6	1	1	0	0	1	1	1	1	2	3	2	0	3	4	3	2	1	0	1	0
H	GC7	1	3	0	2	1	2	3	2	2	4	3	4	0	4	4	2	2	4	1	4
H	GC8	3	3	3	2	1	2	1	1	2	4	2	4	1	4	1	2	0	0	1	2
H	GC9	1	2	1	1	1	3	3	1	2	4	3	4	0	4	3	3	0	0	1	1
H	GC10	3	3	2	0	3	3	2	3	2	4	3	3	4	4	3	2	0	1	1	2
H	GC11	2	3	0	1	3	3	3	3	2	4	3	4	3	4	0	2	2	0	1	0
H	GC12	3	3	3	0	0	0	0	3	2	4	3	0	4	0	0	0	0	0	0	0
M	GC13	3	3	3	2	1	3	3	2	2	4	3	4	4	4	4	4	3	1	1	4
M	GC14	1	2	1	1	1	3	1	2	2	4	2	2	1	0	2	2	0	1	1	2
H	GC15	1	3	3	2	1	0	1	2	2	4	3	4	4	4	3	3	4	4	1	4
H	GC16	3	2	3	0	1	3	1	2	2	4	2	4	0	4	0	0	0	0	0	0
H	GC17	1	3	0	0	1	3	1	2	2	3	3	3	0	4	3	0	2	0	1	0
H	GC18	3	3	1	0	1	1	1	3	2	4	0	0	2	0	0	0	2	0	1	0
M	GC19	3	3	3	1	0	0	0	2	2	4	3	0	3	4	3	2	1	1	0	2
H	GC20	1	1	2	0	1	3	1	1	2	4	3	4	4	4	4	3	2	4	1	3
M	GC21	1	1	0	0	1	0	1	2	2	2	2	0	2	2	0	0	2	0	1	0
M	GC22	1	1	0	0	1	1	0	2	2	2	2	1	2	3	0	2	1	0	1	0
H	GC23	2	3	3	2	1	2	0	2	2	4	2	0	4	4	3	2	1	1	0	1
M	GC24	1	3	1	0	3	3	3	2	2	4	3	0	1	4	2	1	1	0	0	0
M	GC25	2	3	2	1	3	3	3	2	2	4	3	4	3	3	3	2	2	4	1	3
M	GC26	1	1	0	0	1	1	1	2	2	4	2	0	1	2	1	2	1	1	1	2
H	GC27	3	3	3	2	3	3	3	3	2	4	3	4	4	4	4	3	2	1	1	4
H	GC28	2	3	0	0	2	2	3	2	2	4	3	4	0	0	3	0	1	2	1	0
M	GC29	2	2	0	1	1	1	0	2	2	3	2	3	0	0	3	2	1	1	0	0
M	GC30	3	3	0	1	1	1	1	3	2	4	2	2	3	2	0	0	1	1	1	2
M	GC31	1	3	0	0	1	3	3	2	3	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
M	GC32	1	2	0	0	1	1	0	2	2	4	3	4	0	3	0	2	1	1	1	0
M	GC33	1	2	0	0	1	1	1	2	2	2	2	0	1	2	0	2	1	1	1	0
H	GC34	1	1	0	0	1	2	1	2	2	2	2	2	1	4	2	0	2	1	2	2
M	GC35	1	3	0	0	1	2	1	2	2	4	2	4	3	4	4	2	2	0	1	3
M	GC36	3	3	3	2	1	1	1	3	2	4	3	2	4	4	3	2	2	4	0	3
H	GC37	1	3	0	0	1	1	0	2	2	4	3	4	4	4	4	3	2	2	1	4

5.13.9 Post Test Funciones Grupo Experimental

Género	Código	POSTEST MATEMATIZACIÓN																			
		1.A	1.B	1.D	1.E	2.A	2.B	2.C	3.A	3.B	3.C	3.D	3.E	4.A	4.B	4.C	4.D	5.A	5.B	5.C	5.D
M	GE1	3	3	3	2	1	3	3	3	2	4	3	4	4	4	4	2	3	4	3	4
M	GE2	3	3	0	2	2	0	0	3	2	4	3	4	3	2	1	2	3	4	3	3
H	GE3	1	1	0	0	1	0	0	3	2	4	3	3	0	4	0	0	0	0	0	0
M	GE4	1	2	0	0	1	2	1	3	2	4	3	0	3	1	3	3	3	0	3	2
M	GE5	1	0	0	0	3	3	3	3	2	4	3	0	3	3	4	3	3	4	0	3
H	GE6	3	3	0	0	0	0	0	3	2	3	0	0	0	0	0	0	3	4	3	4
H	GE7	3	2	3	1	1	3	1	3	2	4	3	4	3	4	3	3	3	4	1	3
M	GE8	0	2	0	0	1	1	1	3	2	4	3	2	3	0	0	3	3	1	1	0
M	GE9	3	3	2	1	1	2	2	3	2	4	3	0	0	1	4	1	3	3	2	0
M	GE10	0	2	0	0	1	2	1	3	2	1	0	0	0	4	3	0	1	0	0	1
M	GE11	3	3	0	0	1	2	1	3	2	4	3	1	2	1	2	1	3	0	1	0
M	GE12	2	2	3	1	1	3	3	3	2	4	3	4	4	4	2	3	3	4	2	0
M	GE13	2	3	3	2	1	3	3	3	2	4	3	3	4	4	4	3	3	4	3	3
H	GE14	3	3	3	2	1	0	1	3	2	4	3	3	4	4	3	3	3	3	2	4
H	GE15	2	2	0	1	1	3	3	3	2	4	3	4	4	4	3	1	3	4	2	4
M	GE16	2	3	0	0	2	0	0	3	2	4	3	0	3	2	0	3	3	4	3	0
H	GE17	3	2	3	2	1	3	0	3	2	4	3	4	3	4	4	0	3	4	3	4
H	GE18	1	2	0	0	1	3	3	3	2	4	3	4	1	4	4	1	3	3	3	0
M	GE19	3	3	0	0	1	0	0	3	2	4	2	0	0	0	0	0	3	4	0	0
M	GE20	3	3	3	2	1	3	3	3	2	4	3	4	4	4	4	4	3	4	3	4
M	GE21	3	3	3	1	1	3	3	3	2	4	3	3	4	4	4	2	3	4	3	3
M	GE22	2	3	0	1	1	0	0	2	2	0	0	0	1	3	4	1	0	0	0	0
M	GE23	3	3	3	2	1	3	2	3	2	4	3	4	4	4	4	2	3	4	3	0
M	GE24	2	3	0	1	1	2	1	3	2	4	3	3	2	4	4	0	3	0	1	0
H	GE25	2	3	3	2	1	3	3	3	2	4	3	4	4	4	4	3	3	4	3	3
M	GE26	3	3	2	2	3	3	3	3	2	0	3	3	4	4	3	3	3	4	3	4
M	GE27	3	3	3	1	3	3	3	3	2	4	3	3	4	4	4	3	3	4	3	3
M	GE28	3	0	0	0	1	2	1	3	2	4	1	0	2	4	3	2	2	3	3	0
H	GE29	2	2	0	0	1	3	0	3	2	0	0	0	0	4	1	2	3	0	3	2
M	GE30	2	3	1	2	1	4	3	3	2	4	3	4	4	4	3	2	3	4	3	4
H	GE31	0	0	0	0	1	0	1	3	1	0	1	0	3	4	4	3	3	0	0	0
H	GE32	2	3	3	0	1	3	3	3	2	4	3	4	4	4	4	3	3	4	3	2
M	GE33	2	3	0	1	1	2	1	3	2	0	3	0	3	4	2	3	3	2	0	0
M	GE34	3	3	3	2	3	3	3	3	2	4	3	2	4	4	4	3	3	4	4	4
H	GE35	1	3	0	2	1	1	1	2	2	4	3	0	3	3	0	1	0	0	0	0
M	GE36	2	3	2	1	3	3	3	3	2	4	3	4	4	4	4	3	3	4	3	3
H	GE37	2	3	1	2	1	3	3	3	2	4	3	4	4	4	4	3	3	4	3	3

5.13.10 Post Test Ansiedad Grupo Control

Género	Código	POSTEST ANSIEDAD																							
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
M	GC1	4	3	2	4	3	1	2	1	1	2	4	3	2	3	3	1	3	4	2	4	1	2	2	1
M	GC2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M	GC3	5	5	3	4	3	3	3	3	3	3	4	3	3	3	5	2	2	3	1	4	2	4	3	1
H	GC4	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	2	3	2	3	3	2	1	2	1	3	1	2	3	1
H	GC5	1	3	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	3	1	1	1	1	3	1	1	1	1
H	GC6	2	2	2	2	2	1	1	2	1	1	2	2	2	3	3	1	1	2	1	4	1	1	3	1
H	GC7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1
H	GC8	2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	3	1	1	3	3	2	1	3	1	3	1	1	1	1
H	GC9	3	1	2	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	2	2	2	1	3	2	2	3	2
H	GC10	2	2	1	3	2	1	1	1	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	3	1	2	2	1
H	GC11	3	3	1	5	5	2	1	1	1	1	3	1	1	3	3	1	1	2	1	5	3	1	3	1
H	GC12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M	GC13	4	4	4	5	3	3	4	5	3	3	4	5	3	4	4	3	3	4	3	5	3	3	4	2
M	GC14	4	3	3	3	3	3	5	5	1	3	4	2	2	2	4	2	2	4	1	3	1	1	3	1
H	GC15	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
H	GC16	2	1	1	3	1	1	2	1	2	1	2	1	1	3	3	1	1	2	1	3	1	1	2	1
H	GC17	4	3	2	2	2	1	3	1	1	2	4	2	1	4	3	2	1	2	1	4	1	1	4	1
H	GC18	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	2	1	1	1	3	1	1	2	1	3	1	1	1	1
M	GC19	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	1	1	3	3	1	1	1	1	3	1	1	2	1
H	GC20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1
M	GC21	3	2	1	3	2	1	1	1	1	2	3	2	1	3	3	1	2	2	1	3	1	1	3	1
M	GC22	1	2	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	1	3	1	1	1	1	1	3	1	1	2	1
H	GC23	3	4	2	3	3	2	3	2	1	2	4	3	1	0	3	2	4	3	2	5	2	3	4	3
M	GC24	5	3	3	5	4	1	2	5	1	3	5	3	2	5	5	3	5	5	5	5	1	5	5	3
M	GC25	3	4	2	3	2	1	3	4	1	4	4	2	1	2	5	1	2	4	3	5	2	4	3	2
M	GC26	3	1	1	4	1	1	2	3	1	1	4	2	1	4	4	3	1	3	1	4	1	4	4	1
H	GC27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1
H	GC28	3	3	3	4	2	3	3	3	4	3	3	1	1	3	3	3	1	1	1	1	4	4	3	3
M	GC29	3	3	3	3	2	2	2	3	1	1	4	2	2	4	4	2	2	2	1	5	1	2	4	1
M	GC30	4	5	3	4	4	3	3	2	1	2	4	3	2	2	4	1	1	5	3	4	2	1	2	2
M	GC31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M	GC32	1	3	3	1	1	5	3	1	1	3	3	3	2	5	4	2	1	4	2	4	1	1	3	3
M	GC33	4	3	1	2	3	1	1	5	1	3	4	4	2	5	5	3	1	5	1	5	1	1	5	1
H	GC34	2	1	4	3	4	3	3	3	2	1	2	5	2	3	3	2	3	2	2	4	2	4	2	1
M	GC35	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M	GC36	2	3	1	4	1	1	2	3	1	0	2	1	1	2	3	1	1	2	1	3	1	1	2	1
H	GC37	3	3	2	4	2	1	2	3	3	2	3	0	4	3	4	3	3	3	2	4	1	3	3	3

5.13.11 Post Test Ansiedad Grupo Experimental

Género	Código	POSTEST ANSIEDAD																							
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
M	GE1	4	3	1	5	2	1	2	1	1	3	2	1	1	1	4	1	2	3	1	3	1	2	1	1
M	GE2	3	2	2	4	3	2	2	1	1	2	4	2	2	3	3	2	1	3	3	5	1	3	3	1
H	GE3	3	2	1	2	2	1	1	3	2	3	2	1	2	2	1	1	2	4	2	2	3	3	2	1
M	GE4	4	4	3	5	3	2	3	2	1	2	3	2	2	3	5	2	3	4	2	5	1	4	3	1
M	GE5	4	3	3	4	4	1	3	4	1	4	4	4	3	4	4	4	3	4	1	4	1	3	4	1
H	GE6	3	2	2	2	2	1	2	4	1	2	2	2	2	3	2	2	1	2	2	2	1	2	3	2
H	GE7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M	GE8	3	4	3	3	2	1	2	4	1	1	3	2	3	3	3	2	2	3	2	3	1	3	3	1
M	GE9	2	3	1	3	3	2	1	2	1	1	1	3	1	3	1	1	3	1	1	4	1	4	3	1
M	GE10	5	5	5	5	5	5	4	1	1	4	5	1	4	5	5	3	2	5	3	5	1	1	5	1
M	GE11	3	3	1	3	1	1	1	1	1	1	2	1	2	3	1	1	2	2	1	2	1	1	3	2
M	GE12	4	3	2	3	2	1	4	2	1	1	4	2	1	3	4	2	2	5	1	4	0	1	3	1
M	GE13	3	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1
H	GE14	2	2	2	3	1	1	2	3	1	1	2	2	2	3	2	1	2	1	1	3	1	1	2	1
H	GE15	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1
M	GE16	3	3	0	4	1	1	2	2	1	1	3	3	2	2	4	3	1	3	1	0	1	2	2	1
H	GE17	3	2	2	3	2	3	3	4	2	2	2	3	3	4	4	3	2	3	2	3	1	1	4	2
H	GE18	3	3	3	5	3	1	2	4	2	3	3	3	2	4	3	2	2	3	1	3	2	2	5	2
M	GE19	3	2	1	3	3	1	2	1	1	2	3	2	2	4	3	3	1	4	2	4	1	1	4	1
M	GE20	4	4	3	5	3	1	3	4	2	1	5	5	1	4	5	2	2	4	1	5	2	2	5	1
M	GE21	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	3	1	1	2	1	3	1	1	1	1
M	GE22	5	4	5	5	5	5	3	3	1	3	5	3	3	4	4	3	4	4	3	5	1	2	4	2
M	GE23	3	2	1	3	1	1	2	1	1	2	3	1	1	1	3	1	1	2	1	3	1	1	1	1
M	GE24	5	5	4	5	4	4	4	5	2	3	5	3	3	5	5	5	5	0	3	5	3	5	5	3
H	GE25	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	3	1	1	2	1	1	2	1	1	3	1
M	GE26	1	1	1	3	2	1	2	3	1	2	3	1	1	1	2	1	1	3	1	0	1	1	1	1
M	GE27	2	2	1	2	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M	GE28	5	5	4	4	5	5	3	1	1	2	5	4	3	4	5	3	4	4	4	5	3	4	5	2
H	GE29	4	4	4	4	2	3	4	3	1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
M	GE30	1	1	2	2	2	1	2	2	1	1	1	2	1	2	2	1	3	1	2	3	1	2	3	1
H	GE31	2	3	3	3	1	2	3	3	1	2	4	2	2	3	4	2	3	3	3	5	1	2	4	1
H	GE32	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	3	1	1	2	1	1	2	1	1	3	1
M	GE33	5	5	4	5	4	4	4	5	2	3	5	3	3	5	5	5	5	5	2	5	2	5	5	2
M	GE34	3	3	3	2	4	1	2	4	2	2	3	2	2	4	3	1	1	2	1	1	1	4	3	1
H	GE35	2	3	2	2	2	1	2	1	1	1	2	2	2		2	2	2	2	2	3	1	2	2	5
M	GE36	2	2	1	3	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	3	1	1	2	1	2	1	1	2	1
H	GE37	1	2	1	3	1	1	2	1	1	1	2	2	1	1	3	1	1	2	1	3	1	1	1	1

5.13.12 Post Test Motivación Grupo Control

Género	Código	POSTEST MOTIVACION														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
M	GC1	4	2	3	3	1	4	3	2	4	3	1	3	5	4	4
M	GC2	5	5	3	5	3	5	5	3	5	5	3	5	5	5	5
M	GC3	4	4	3	3	5	4	4	4	5	5	5	3	4	4	5
H	GC4	3	3	3	3	2	4	4	2	3	4	2	3	5	3	3
H	GC5	4	4	3	3	1	3	3	2	3	3	1	3	3	1	3
H	GC6	4	3	3	3	3	5	5	4	5	5	3	4	5	5	5
H	GC7	3	5	4	3	3	2	3	4	4	3	2	2	4	3	2
H	GC8	4	5	3	5	4	4	4	3	5	4	3	4	5	4	4
H	GC9	4	4	4	4	3	4	3	3	3	4	3	3	3	3	2
H	GC10	4	4	3	3	1	4	4	3	4	4	2	4	4	2	4
H	GC11	4	2	3	1	4	3	2	4	3	5	4	2	3	3	3
H	GC12	3	1	3	1	1	4	3	2	4	5	1	1	1	1	5
M	GC13	0	1	5	3	3	4	4	5	4	3	1	4	2	3	3
M	GC14	4	1	2	3	3	2	3	4	3	4	2	3	4	2	2
H	GC15	4	5	3	4	3	4	4	1	4	4	1	1	5	2	3
H	GC16	3	2	3	3	2	4	4	3	5	4	2	5	5	3	4
H	GC17	3	2	4	1	1	3	4	2	2	4	2	2	5	3	4
H	GC18	4	4	3	3	2	4	4	4	5	5	1	3	4	4	5
M	GC19	4	3	3	2	1	2	4	3	3	4	2	3	3	3	2
H	GC20	3	5	3	4	3	5	4	3	3	4	3	4	5	4	3
M	GC21	3	4	4	5	1	3	3	2	3	4	1	2	3	3	3
M	GC22	4	2	5	3	2	3	4	3	3	5	1	2	5	5	2
H	GC23	5	4	3	3	4	3	5	3	4	5	3	4	5	4	2
M	GC24	4	1	2	1	1	5	5	1	3	5	1	2	5	3	1
M	GC25	3	1	4	3	1	3	3	3	5	4	3	3	4	4	1
M	GC26	3	2	2	2	3	3	4	4	2	4	1	2	4	3	3
H	GC27	5	3	5	5	3	2	5	2	2	5	3	2	5	1	1
H	GC28	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	3	4
M	GC29	3	2	4	2	2	2	3	1	3	3	1	2	5	2	5
M	GC30	3	3	4	5	4	5	5	3	4	5	5	5	5	3	5
M	GC31	3	2	5	1	5	5	2	5	5	5	3	5	1	2	1
M	GC32	1	1	5	3	3	3	5	3	2	4	1	4	2	5	3
M	GC33	4	2	2	4	3	3	5	3	3	5	1	3	5	3	2
H	GC34	2	5	5	3	3	4	3	4	4	3	2	4	4	3	2
M	GC35	4	5	3	5	3	3	2	4	5	5	3	5	5	4	4
M	GC36	5	3	2	5	3	3	5	5	3	5	3	1	5	3	3
H	GC37	4	5	3	5	3	2	5	5	2	5	2	5	5	3	2

5.13.13 Post Test Motivación Grupo Experimental

Género	Código	POSTEST MOTIVACION														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
M	GE1	5	2	2	4	3	2	5	2	3	4	2	3	5	2	3
M	GE2	4	3	5	3	2	5	5	3	5	5	2	5	5	4	2
H	GE3	3	3	4	2	3	4	3	4	5	2	3	4	3	3	4
M	GE4	4	2	3	3	1	3	4	3	2	4	1	3	5	2	4
M	GE5	4	2	3	3	2	1	4	3	0	4	1	1	4	1	3
H	GE6	3	3	4	3	2	4	2	2	5	3	2	4	5	3	3
H	GE7	2	5	3	5	5	1	1	5	1	3	5	1	1	5	1
M	GE8	4	5	4	3	4	2	3	5	4	3	4	2	3	3	2
M	GE9	3	2	3	3	1	2	4	3	3	4	1	1	3	2	5
M	GE10	3	3	4	2	4	3	5	3	4	5	2	5	5	3	5
M	GE11	1	4	1	3	3	1	2	3	1	2	4	1	5	5	1
M	GE12	4	1	4	3	2	3	2	3	3	3	1	2	3	1	3
M	GE13	4	2	2	3	2	3	3	2	3	4	1	1	4	3	3
H	GE14	3	5	4	4	5	1	3	3	4	3	5	3	3	3	3
H	GE15	4	3	4	4	4	3	5	4	5	3	5	4	4	5	4
M	GE16	4	1	3	3	1	3	5	2	2	5	1	3	5	3	3
H	GE17	3	3	3	4	4	3	3	3	3	4	3	4	4	4	4
H	GE18	3	3	2	3	2	4	3	3	4	3	3	5	5	3	5
M	GE19	5	3	4	3	3	5	5	5	5	5	2	2	4	3	5
M	GE20	5	5	3	3	5	4	5	4	3	5	3	3	5	5	1
M	GE21	4	3	3	4	3	3	4	4	4	4	3	4	5	3	4
M	GE22	3	3	4	3	3	2	2	3	4	4	3	4	5	3	3
M	GE23	4	3	4	4	4	3	3	4	5	3	3	4	4	3	4
M	GE24	4	2	3	3	2	2	3	2	3	4	1	5	4	4	4
H	GE25	5	3	4	5	3	5	5	5	5	5	5	5	4	3	5
M	GE26	4	4	4	3	5	3	3	5	4	3	3	4	3	4	3
M	GE27	5	4	2	4	4	1	5	2	2	5	2	2	5	4	2
M	GE28	4	1	5	3	1	3	4	1	5	4	2	4	5	4	4
H	GE29	4	5	4	4	4	5	3	3	3	4	3	4	5	4	5
M	GE30	4	3	3	4	2	5	4	3	3	4	1	3	5	4	3
H	GE31	4	2	3	3	2	3	4	2	3	4	2	2	5	4	3
H	GE32	5	5	3	5	5	3	5	5	3	5	5	3	5	5	1
M	GE33	4	2	3	3	2	2	3	2	3	4	1	3	5	5	3
M	GE34	4	4	3	4	4	3	5	4	4	4	2	4	5	3	2
H	GE35	3	3	4	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2
M	GE36	3	2	4	4	3	4	3	3	3	4	2	4	4	3	3
H	GE37	3	4	4	3	3	3	3	3	2	4	3	4	3	4	3