Universidad de Concepción
Campus Los Ángeles
Escuela de Educación
Departamento de Ciencias Básicas

# Visualización: Una herramienta para el desarrollo del conocimiento de razones, proporciones y proporcionalidad

Seminario para optar al grado de Licenciado en Educación y al
Título de Profesor de Matemáticas y Educación Tecnológica

Carrera de Pedagogía en Matemática y Educación Tecnológica, Los Ángeles
Seminaristas:
Sr. Jordan Felipe Arratia Seguel
Srta. Patricia Elena Manríquez Espinoza
Srta. Danae Fernanda Valdebenito Gutiérrez
Profesor Guía
Sra. Irma Lagos Herrera - Sra. Lilian Vargas Villar

Los Ángeles - Enero del año 2016

Comisión Evaluadora

Sra. Lilian Vargas Villar, Profesora de Matemática, Pontificia Universidad Católica, Diplomada en Estadística Aplicada, Universidad de Concepción, Mg en Educación, Mención Currículo y Evaluación, Universidad La República, © Mg. En Didáctica de la Matemática. Universidad Católica del Maule.

Sr. Sixto Martínez Hernández, Ing. en Matemáticas, Mg. en Estadística, U. de Concepción

Sra. Irma Lagos Herrera, Prof. Est. en Español, Mg. en Educación, Dr. Educación (e), U. de Concepción

# *Agradecimientos*

*Primero que todo, quiero agradecer a mi esposa e hijo que estuvieron conmigo en todo momento y son el motor que me da fuerza para levantarme día a día. Agradecer también a mis padres, quienes son un apoyo incondicional.*

*Jordan Arratia Seguel*

*Enero del año 2016*

# *Agradecimientos*

*En primer lugar agradecer a mi hermosa familia (Mi madre, padre, hermanos, tíos(as), primas(os), sobrinas(os)), por entregarme mucha felicidad y emociones, por creer en mí, por apoyarme en cada decisión y ayudarme a salir de los momentos difíciles.*

*Agradezco sinceramente a mis profesoras guías de tesis (Irma Lagos y Lilian Vargas) por su dedicación y compromiso hacia la labor docente. Además, por la entrega de conocimientos, sus orientaciones, persistencia, paciencia y motivación que han sido fundamental para el desarrollo y término de nuestra investigación, pero más aún en nuestra formación académica y profesional.*

*A mis compañeros de tesis (Danae y Jordan) y sus familias, por el respeto, tolerancia, compañerismo y amistad que aportaron los dos durante el desarrollo de la tesis lo cual hizo que esta culminara exitosamente.*

*A todos mis amigos y amigas que si bien es cierto por motivos de la tesis y el trabajo, estuve muy alejada de ellos y ausente en sus vidas, los he tenido presente todo el tiempo en mente y mi corazón, gracias por quererme tanto y desearme lo mejor. Por ultimo agradecer a todas las personas que vivieron de cerca este proceso, con las que compartí el cariño de un hogar (Juanita, Jani, Camila, Kathy, Tiznao, Paty, Susan, Barbarita, Rey, Lorito y Fany).*

*Patricia Elena Manríquez Espinoza*

# *Agradecimientos*

*A mis más preciados tesoros, mis hijos: Martín y Sofía.*

*A mi madre por su apoyo incondicional y por enseñarme el valor de la perseverancia.*

*A mi esposo por estar a mi lado y ser tan maravilloso.*

*A mi hermano por su alegría y cariño.*

*A mis abuelos, tíos, primos y amigos por tanto apoyo emocional y por creer en mí siempre.*

*Danae Valdebenito.*

# Resumen

Investigación cuantitativa, correlacional y explicativa, con diseño pre-experimental de pretest, intervención pedagógica y postest, con grupo experimental, con el fin de determinar la influencia de la visualización como metodología de aprendizaje, en la motivación, ansiedad y actitud hacia la matemática y aprendizaje de los y las estudiantes, de una muestra intencionada de dos cursos de octavo año de colegios particulares subvencionados de la comuna de Los Ángeles, uno ubicado en el sector rural y el otro en el sector urbano, ambos con alta vulnerabilidad social. El proceso de visualización implementado en 14 sesiones de 90 minutos, se basa en el enfoque cognitivo propuesto en la Teoría de representaciones semióticas de Raymond Duval y sobre esta base se presenta el contenido de razón, proporción y proporcionalidad a los grupos experimentales. Una vez obtenidos los resultados y hechos los análisis estadísticos, con las pruebas Shapiro-Wilk, t de Student, t de Wilcoxon, coeficiente de correlación de Pearson y Spearman, se concluye que el proceso de visualización implementado como metodología es efectivo para la enseñanza y el aprendizaje de los y las participantes, ya que se observó un progreso en los GE en las variables en estudio.

**Palabras claves:** Visualización – Rendimiento – Razón – Proporción – Proporcionalidad – Factores socioafectivos.

# Abstract

Quantitative investigation, correlational and explanatory, with pre-experimental design of pretest and also a posttest pedagogical intervention in an experimental group, with the purpose of determine the influence of visualization as a method of learning in the motivation, anxiety and attitude towards mathematics and learning of the students of a purposive sample of two eight year courses of a subsidized private schools in Los Angeles, one located in the rural sector and the other in the urban sector, both with highly level of vulnerability. The display process deployed in 14 sessions of 90 minutes, based on the approach proposed in theory of semiotic representations of Raymond Duval on that basis the content ratios, and proportionality to the experimental groups presented. Once obtained the results and made the statistical analysis, with the Shapiro-Wilk test, t student, wilcoxon test, correlation coefficient of Pearson and Spearman, we conclude that the display process implemented as methodology is effective for teaching and learning of the participants, and that progress was observed in the GE in the variables under study.

**Keywords** display - Performance - Ratio - Proportionality - socio-affective factors.

# Introducción

En general, en educación no se trata solo de transmitir conocimientos, sino de preparar a los alumnos para enfrentar todo tipo de situaciones. Teniendo en cuenta esta realidad es que se ha querido llevar a cabo esta investigación, ya que dentro del proceso de enseñanza existen diversas dificultades en la conceptualización de ciertos conceptos, especialmente en el área de la matemática.

Diversas investigaciones plantean la importancia que tiene la comprensión del concepto de Razón, proporción y proporcionalidad desde el nivel básico, ya que es una unidad trascendental que está presente en el transcurso de todos los niveles educativos. Además se ha observado que en este contenido los docentes tienen bastantes dificultades para lograr motivar a los estudiantes.

Dentro de este contexto es que se ha buscado implementar alguna estrategia didáctica de enseñanza de este concepto es que llegamos a la Visualización como proceso importante de desarrollar en los estudiantes, que ha sido ampliamente estudiado en los últimos años. Es por ello que se ha querido determinar la incidencia de la implementación de una secuencia de actividades didácticas apoyadas en el proceso de Visualización en el aprendizaje de las Razones y Proporciones, así como también poder establecer relaciones entre los factores socioafectivos que están involucrados en todo proceso de enseñanza, dado el objetivo de esta experiencia.

Es importante mencionar que según Buitrago M y Mojica A. (2007) el exceso de propuestas didácticas, lleva a que la clase de matemática se transforme en un espacio de recreación que solo maneja juegos como estrategias de aprendizaje. Es por lo mismo que, muchos docentes prefieren alejar la didáctica de sus clases creyendo que la ausencia de ésta no perjudica el desempeño de las mismas. De igual manera, nos encontramos con una matemática sin conexiones históricas y presentadas de una manera algorítmica y aislada de otras áreas del saber, sin mucha importancia para la mayoría de los estudiantes que buscan aplicaciones útiles en su vida diaria. Esto hace que esta investigación tome más valor ya que se trabajará desde la perspectiva de la didáctica de la matemática sin alejarla de los conceptos que están presenten en la vida cotidiana de los estudiantes.

Diversas investigaciones apuntan a que el desarrollo de competencias matemáticas en edad temprana es un potente y estable predictor del nivel de logro en el área en niveles educacionales superiores (Jordan, Kaplan, Locuniak y Ramineni, 2007; Jordan, Mulhern y Wylie, 2009; citado por Cerda, Pérez, Ortega, entre otros, 2011). Es por esto que se ha querido llevar a cabo la investigación en el contexto de los estudiantes de octavo año de dos establecimientos de la ciudad de Los Ángeles. Teniendo además como variables el hecho de que uno de ellos esté ubicado en el área rural de la ciudad y el otro en el área urbana, ambos con un nivel socio-económico bajo.

La forma en que se abordarán los diversos ámbitos de la investigación es lo que se presenta a continuación y se espera que esto sea de gran importancia dentro de la educación en la asignatura de matemática y que sirva de aporte para la comprensión del concepto de Razón, Proporción y Proporcionalidad.

# Tabla de Contenido

# Capítulo 1

# Planteamiento del Problema

## 1.1. Definición del problema

El interés por la realización de esta investigación surge de la necesidad de buscar nuevos métodos para mejorar la enseñanza de la Matemática en el aula y facilitar la labor docente. Socialmente es un área que constantemente está siendo cuestionada por los bajos resultados que se obtienen en diversas pruebas de medición que existen tanto a nivel nacional como internacional, principalmente en los sectores más vulnerables (Román, 2003). Además culturalmente la mayoría de las personas considera que es una de las asignaturas más complejas. Es por esto que resulta aún más difícil para el profesor de Matemáticas desempeñar su labor en el aula, ya que hay una cierta predisposición por parte de algunos estudiantes de creer que no lograrán comprender los conceptos y que obtendrán bajas calificaciones por el solo hecho de tratarse de matemáticas.

El propósito de esta investigación es tratar en alguna medida de apoyar la labor docente presentando una metodología que va en apoyo de una unidad que si bien es cierto tiene sus inicios en sexto año básico, trasciende a todos los niveles de enseñanza media, la cual se considera compleja y donde se cometen bastantes errores en el proceso de enseñanza-aprendizaje y se tienden a mecanizar los conceptos.

Por esta razón se implementó una metodología basada en el proceso de Visualización con el fin de determinar si ésta tiene alguna incidencia positiva en los estudiantes en cuanto al aprendizaje del contenido de Razones, Proporciones y Proporcionalidad y cómo influye en los factores socioafectivos a los que se ven expuestos generalmente la mayoría de los estudiantes.

## 1.2. Planteamiento del problema

Como se mencionó anteriormente Chile se somete a mediciones de la calidad en la educación tanto a nivel nacional como internacional. Antecedentes aportados por la Agencia de Calidad de la Educación (En adelante, ACE) indicaron que en la prueba del Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (En adelante, SIMCE) 2014 de Matemática el puntaje se mantuvo estable, bajando sólo un punto (de 250 a 249) respecto del año anterior. En cuanto a la diferencia socioeconómica, la Agencia indica que esta es importante, ya que por ejemplo, hay 76 puntos que separan a los alumnos de octavo básico en matemática, y 117 puntos en segundo medio, entre los sectores más altos y bajos.

Desde 1997, Chile participa en diversos estudios internacionales de evaluación de aprendizajes (TIMSS, ICILS, ICCS, TERCE, PISA). En esta oportunidad se hará mención a las pruebas del Estudio de las Tendencias en Matemática y Ciencia (En adelante, TIMSS) y del Programa Internacional para la Evaluación del Estudiante (En adelante, PISA). La primera de ellas se usa para medir los logros de aprendizaje de los estudiantes al finalizar 4° y 8° Básico, en Matemáticas y Ciencias; mientras que la prueba PISA la rinden los estudiantes de 15 años de alrededor de 60 países pertenecientes a la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico), cuyo objetivo es evaluar la formación de alumnos hacia el final de su etapa de enseñanza obligatoria, en tres áreas, consideradas fundamentales en el proceso educativo: Lectura, Matemáticas y Competencia Científica o Ciencias Naturales (Copesa, G., 2015).

El año 2012 se aplicó la prueba PISA de Matemáticas a una muestra de 6.856 escolares de 222 colegios, donde los estudiantes chilenos obtuvieron 423 puntos, ubicándose en el lugar 51° a nivel general, de 65 países. Además, el 52% de los estudiantes se ubicaron bajo el nivel 2 (de un total de 6), lo que implica que no manejan los contenidos mínimos en esa área (Emol, 2015).

Por su parte el año 2011 se llevó a cabo la realización de la prueba TIMMS, donde la muestra estuvo compuesta por 193 establecimientos; en cada uno de ellos se seleccionó un curso, llegándose a un total de 5.835 estudiantes. En esta ocasión, en la prueba de matemáticas los estudiantes de octavo básico obtuvieron un puntaje promedio de 416 puntos, lo cual mejoró en comparación con los resultados del año 2011, sin embrago Chile sigue estando bajo el puntaje central de 500 puntos y bastante lejos de Corea del Sur que promedió 613 puntos, ocupando el primer lugar. En este mismo nivel, sólo un 1% de los estudiantes evaluados en Ciencias y Matemáticas logró un nivel avanzado (625 puntos). En Matemáticas un 4% de los estudiantes logra el nivel alto (550 puntos); el 18% tiene nivel intermedio (475); un 34% está en el nivel bajo (400) y un 43% ni siquiera logra el puntaje para entrar en la evaluación. Si consideramos las brechas, se obtuvo que las escuelas municipales aumentaron 30 puntos al lograr un puntaje general de 387 en 2011, los subvencionados subieron de 405 (en 2003) a 429 y los particulares de 499 a 520 puntos y aunque estas disminuyeron, siguen vigentes. En esta misma prueba al comparar resultados según dominio de contenidos se muestra una clara deficiencia en la unidad de Álgebra, obteniendo los estudiantes un promedio de 403 puntos (Agencia de Calidad de la Educación, 2012).

Todas estas cifras son preocupantes y no se puede desconocer que hay un problema que requiere de una solución, la cual claramente no será expedita, sin embargo es importante buscar estrategias que ayuden a que estas cifras no se mantengan en el tiempo. Motivo principal por el cual se lleva a cabo esta investigación y sobre todo en establecimientos de nivel socioeconómico bajo.

Como se puede observar el área de álgebra presenta dificultades para los estudiantes principalmente en su conceptualización, ya que se cometen errores en su tratamiento. Tal es el caso de las Razones y Proporciones, y sobre todo el concepto de Proporcionalidad. Las razones y proporciones son en definitiva una de las temáticas más difíciles de comprender por parte de los estudiantes y de abordar por parte de los profesores, lo que ha llevado a que dicho contenido sea tratado a través de algoritmos lo que finalmente mecaniza el proceso de resolución dejando de lado la comprensión, es por esto que constituyen un campo ampliamente investigado en los últimos cincuenta años (Ceballos, 2012).

A nivel Curricular, Razón y Proporción son importantes objetos de conocimiento, siempre están presentes en los currículos implementados en la mayoría de los países del mundo (Martin, Mullis & Foy, 2008, TIMSS, 2009; citado por Ceballos, 2012) con importantes similitudes de uno a otro en lo que respecta a la forma de organización de los temas, las estrategias pedagógicas y los niveles de complejidad cognitiva (Adjiage & Pluvinage, 2007; Bosh, 1994; Ponte & Marques, 2005; citado por Ceballos, 2012). Al existir estas similitudes es posible observar con mayor facilidad los errores que se cometen en la enseñanza y buscar así una manera de remediarlos.

Si consideramos la importancia concedida al contenido de Razón y Proporción en los currículos, autores como Vergnaud (1988, 1994), Lesh, Post y Behr (1988), Pluvinage (2007), entre otros, informan que los alumnos no alcanzan niveles apropiados de aprendizaje en estas temáticas durante su ciclo escolar. Además, Hodgen, Kuchemann, Brown & Coe (2010) afirman que los estudiantes no mejoran significativamente sus resultados de un año a otro (Ceballos, 2012).

No es extraño entonces que autores como Vergnaud, Buitrago, Mojica, entre otros, hayan indagado en el tema buscando estrategias de aprendizaje para mejorar la práctica docente al momento de tratar el contenido de razones, proporciones y proporcionalidad.

En cuanto al problema de conceptualización, se ha estudiado el proceso de Visualización el cual en numerosas investigaciones ha sido protagonista en la compresión de conceptos matemáticos (Gatica S. y Ares O., 2012) como por ejemplo el concepto de función.

Burkhard (2012) señala que dentro de las ventajas de la Visualización está el hecho de que la mayoría de las actividades de nuestro cerebro tratan con procesamiento y análisis de imágenes visuales, las que son pre-atendidas y procesadas antes que el texto. Además en comparación con el texto las imágenes necesitan menos energía para ser consumidas (Monge, J. 2009).

Las representaciones visuales tienen por un lado, tareas de comunicación, pero, por otro lado tienen otras tareas significativas, que no se ponen en la perspectiva de muchos docentes, como la de favorecer la formación de representaciones internas, principalmente las imágenes mentales y conceptuales del objeto matemático (Ben-Chaim, 1991).

En este escenario, resulta relevante investigar sobre los recursos para la enseñanza que apoyen las secuencias de actividades de aprendizaje y que permitan el desarrollo de los procesos de Visualización para la enseñanza y aprendizaje de los contenidos de Razones, Proporciones y Proporcionalidad.

Es importante mencionar además que un estudio reciente, encargado por el Ministerio de Educación (U. de Chile, 2000), viene a confirmar que los resultados escolares están fuertemente condicionados por los factores socioeconómicos de los alumnos y, en directa relación con lo anterior, por la dependencia del establecimiento (Weinstein, 2001). Respecto de las capacidades cognitivas y expresivas, los profesores de estas escuelas estiman que la generalidad de sus alumnos muestra condiciones iniciales insuficientes, bajo nivel de aprendizaje, escasa motivación por aprender y falta de concentración. Todo lo anterior los hace ser lentos en la adquisición de conceptos y procedimientos(Román, 2003).

Razón por la cual se estudió el impacto que tiene esta metodología en los factores motivación, ansiedad y actitud hacia las matemáticas.

La investigación propuesta va en apoyo de las prácticas pedagógicas que se realicen en el aula.  El estudio examina en un contexto real la implementación de un programa basado en el proceso de Visualización como metodología el cual está basado en el enfoque cognitivo propuesto en la Teoría de representaciones semióticas de Raymond Duval. Por lo tanto se desea investigar el impacto que esta implementación produce en los estudiantes de octavo año.

## 1.3. Justificación de la investigación

Durante mucho tiempo en la educación chilena la metodología más utilizada ha sido la metodología tradicional de enseñanza, la cual se basa en la teoría conductista de aprendizaje donde lo primordial de esta teoría son los roles que desempeñan sus protagonistas siendo el docente es quien provoca estímulos en los estudiantes para así reforzar las conductas positivas o corregir aquellas no deseadas. En cambio, el estudiante es sólo un receptor pasivo de la adquisición de estas conductas producto del estímulo.

Muchos investigadores la mencionan como la principal causa del fracaso del aprendizaje en matemáticas. Es por esto que resulta imperioso indagar en nuevas metodologías que busquen cambiar este modelo y centrar la enseñanza en el estudiante como ente principal y que sea el quien desarrolle su propio aprendizaje con la ayuda del profesor.

Esta investigación pretende ir en apoyo de esta iniciativa y como se mencionó anteriormente el área de Álgebra es la que presenta más dificultad para los estudiantes. El Ministerio de Educación de Chile (en adelante, MINEDUC) en sus bases curriculares para octavo año sitúa el contenido de razones, proporciones y proporcionalidad en la unidad 4 de Álgebra y menciona que el propósito de incluirla es ofrecer unidad ofrece también la posibilidad de visitar nuevamente tópicos relativos a proporcionalidad directa e inversa, pero con mayor énfasis en el concepto de variación proporcional y tratado desde el punto de vista algebraico. Todo esto se incorpora al repertorio de temas que aportan al desarrollo del razonamiento matemático; en especial, la capacidad para realizar representaciones de objetos abstractos.

Castro y Castro (1993), afirman que para pensar y razonar sobre las ideas matemáticas es necesario hacer una representación interna de la misma forma que mantenga posibilidad de operar con tales representaciones. Cantoral y Montiel en el año 2001, afirman que la visualización no puede ser entendida como el simple acto de ver, sino como “la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende”.

Por todo lo anteriormente descrito, esta investigación proporciona información útil sobre una metodología basada en el proceso de Visualización utilizando el enfoque cognitivo propuesto en la Teoría de representaciones semióticas de Raymond Duval, para los contenidos de Razones, Proporciones y Proporcionalidad, la cual será útil para aquellos docentes que estén interesados en mejorar el aprendizaje en este contenido.

# Capítulo 2

# Propuesta de Investigación

## 2.1. Objetivo general

Analizar la incidencia que tiene el proceso de Visualización como metodología en el aprendizaje, motivación, actitud y ansiedad hacia la matemática, en la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad en estudiantes urbanos y rurales de octavo año de instituciones educativas particulares subvencionadas de bajo nivel socioeconómico perteneciente a la comuna de Los Ángeles.

## 2.2. Objetivos específicos

- Determinar la influencia que tiene el proceso de Visualización en el aprendizaje de la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad de los y las estudiantes.
- Determinar la influencia del proceso de Visualización en el nivel de ansiedad hacia la matemática de los y las estudiantes en la unidad de razón proporciones y proporcionalidad.
- Determinar la influencia del proceso de Visualización en el nivel de actitud hacia la matemática de los y las estudiantes en la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad.
- Determinar la influencia del proceso de Visualización en el nivel de motivación de los y las estudiantes en la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad.

- Determinar si existe relación entre los factores socioafectivos y el aprendizaje obtenido por los estudiantes  al tratar la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad con la metodología de aprendizaje basada en el proceso de visualización.

## 2.3. Preguntas de Investigación.

1. ¿Incide positivamente el proceso de Visualización en el *aprendizaje* de los estudiantes al tratar la unidad de razón, proporción y proporcionalidad?
2. ¿Incide positivamente la metodología basada en el proceso de Visualización en la *ansiedad hacia las matemáticas* de los y las estudiantes al tratar la unidad de razón, proporción y proporcionalidad?
3. ¿Incide positivamente en la *actitud hacia las matemáticas* de los estudiantes al tratar la unidad de razón, proporción y proporcionalidad con la metodología basada en el proceso de Visualización?
4. ¿Incide positivamente en la *motivación* de los estudiantes al tratar la unidad de razón, proporción y proporcionalidad con la metodología basada en el proceso de Visualización?
5. ¿Existe relación entre las variables socioafectivas motivación, actitud y ansiedad hacia las matemáticas, y el aprendizaje de los estudiantes al tratar la unidad razones, proporciones y proporcionalidad con la metodología basada en el proceso de Visualización?

## 2.4. Hipótesis de investigación

**H1:** Los estudiantes expuestos al proceso de visualización, mejoran su rendimiento en la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad.

**H2:** Los estudiantes expuestos al proceso de visualización disminuyen su ansiedad hacia la matemática.

**H3:** Los estudiantes expuestos al proceso de visualización, incrementan su actitud hacia la matemática.

**H4:** Los estudiantes expuestos al proceso de visualización, incrementan su motivación hacia la matemática.

**H5:** A mayor motivación de los estudiantes que participan del proceso de visualización, mayor es su aprendizaje de la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad.

**H6:** A mayor actitud de los estudiantes que participan del proceso de visualización, mayor es su aprendizaje de la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad.

**H7:** A menor ansiedad en los estudiantes que participan del proceso de visualización, mayor es su aprendizaje de la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad.

# Capítulo 3

# Marco Teórico

## 3.1. Teorías de Aprendizaje

Dentro del marco de esta investigación es importante mencionar algunos aspectos de las teorías de aprendizaje, ya que si entendemos cómo los alumnos aprenden seremos capaces de fomentar sus capacidades y centrar nuestra enseñanza a partir de esto. Existe una gran cantidad de teorías psicológicas sobre el aprendizaje cuyas discrepancias no están aclaradas en la práctica educativa. Pero ¿Qué es aprendizaje? existen variadas definiciones del concepto de aprendizaje por parte de diversos autores, las que pueden coincidir o bien, discrepar en la manera en que éste se manifiesta en las personas.

Aunque no existe una definición universalmente aceptada, muchas de ellas presentan elementos comunes (Ertmer & Newby, 1993). De manera particular, la RAE, en su última versión del Diccionario de la Lengua Española del 2001, plantea que el aprendizaje es *"acción u efecto de aprender algún arte, oficio u otra cosa"* entendiéndose por aprender a *"adquirir el conocimiento de algo por medio del estudio o de la experiencia"*. Según Shuell (citado por Ertmer & Newby, 1993) el aprendizaje es *"un cambio perdurable en la conducta o en la capacidad de comportarse de una determinada manera, la cual resulta de la práctica o de alguna otra forma de experiencia"*.

La manera en la cual se define aprendizaje y la forma en como creemos que éste ocurre, tiene implicaciones significativas para las situaciones en las que se desean facilitar cambios en lo que la gente conoce o hace. Sin lugar a dudas, la discrepancia entre los autores no pasa por la definición de aprendizaje, sino que la diferencia fundamental descansa más en la interpretación que en la ya mencionada definición. Las teorías de aprendizaje ofrecen a los docentes estrategias y técnicas válidas para facilitar aprendizajes, así como también la fundamentación para seleccionarlas inteligentemente (Ertimer & Newby, 1993).

A pesar de que las teorías de aprendizaje comúnmente se dividen en conductismo y cognitivismo y que el constructivismo es parte de la teoría cognitivista, se considera según algunos autores que entre estas dos existen diferencias. Por lo tanto a continuación se define la teoría constructivista, ya que es la que aporta a esta investigación.

### 3.1.1. Teoría Constructivista

Esta teoría es la que sustenta la metodología propuesta en este trabajo por lo tanto se mencionan los aspectos más relevantes y que se relacionan con la investigación. En el contexto educativo se considera que para que el aprendizaje sea significativo el estudiante debe relacionar los conocimientos previos que posee y relacionarlos con los nuevos, de esta manera es él quien construye su propio aprendizaje y el docente quien guíe este proceso. Por el contrario del conductismo, en esta teoría el estudiante es el principal protagonista y el docente en su rol de mediador debe apoyarlo.

El constructivismo es una paradigma que integra un conjunto de teorías psicológicas y pedagógicas, las que coinciden en reconocer que el objetivo principal del proceso educativo es el desarrollo humano, teniendo como concepción que en el constructivismo el aprendizaje es un proceso interno inobservable en lo inmediato, que compromete además, toda actividad cognitiva del estudiante y cuyo objetivo es construir un significado (Antón, 2011).

El constructivismo no es un enfoque nuevo del aprendizaje, puesto que así como muchas otras teorías del aprendizaje, posee múltiples raíces en la óptica tanto filosófica como psicológica. Sin embargo en los últimos años, el constructivismo se ha convertido en un asunto de moda, ya que ha recibido atención en un número considerable de disciplinas, incluyendo en el diseño de instrucción (Bednar, 1991; citado por Ertmer & Newby, 1993)

Para el constructivismo, el aprendizaje es una representación de conocimientos, que se integran a otros ya establecidos en la mente del sujeto y construyen unos nuevos a través de la modificación, enriquecimiento o diversificación, todo esto dentro de esquemas que elaboran un sentido y significado a lo aprendido (Antón, 2011).

Según Ertmer & Newby (1993), el estudiante y los factores ambientales son imprescindibles para el constructivismo, así como también lo es la interacción específica entre estas dos variables que crean conocimiento. Para los constructivistas, el aprendizaje está estrechamente ligado a la incorporación del nuevo contenido a situaciones en la que éste se use. Dichas situaciones realmente coproducen el conocimiento (junto con la cognición) a través de la actividad (Brown, Collins y Duguid, 1989; citado por Ertmer & Newby, 1993). Ahora bien, es fundamental que el aprendizaje tenga lugar en ambientes reales y que las actividades de aprendizaje seleccionadas estén necesariamente vinculadas a las experiencias vividas por los estudiantes.

La meta de la instrucción constructivista, no es lograr que el estudiante conozca hechos particulares, sino que sea capaz de elaborar e interpretar la información. Brown (1989) señala que "*la comprensión se desarrolla a través de la utilización continua y situacional… no se cristaliza en una definición categórica"* que pueda evocarse desde la memoria, es decir un concepto seguirá evolucionando con cada utilización a medida que nuevas situaciones, negociaciones y actividades vayan reformulándose a formas distintas, lo que conduce a que la memoria siempre está en "construcción", como una historia acumulativa de interacciones.

Veamos ahora las diferencias pedagógicas entre dos esquemas cognitivos de enseñanza[1].

| Constructivista | Tradicional |
|---|---|
| Los resultados son impredecibles, múltiples y diversos | Los resultados son predecibles. |
| El currículo parte de la realidad o entendimiento del estudiante | Los objetivos son predefinidos, la estructura es formal |
| La secuencia varía de acuerdo con el estudiante y su proceso | Existe una secuencia en la instrucción y las destrezas |
| El docente provee el ambiente y las actividades: el uso del ambiente depende del estudiante | Las actividades son planificadas y definidas por el docente |
| El estudiante estructura los datos | Los datos responden a información externa |
| Los estudiantes resuelven los problemas según lo confrontan. | Los problemas los provee el texto o el docente |
| Promueve el aprendizaje cooperativo para la solución de los problemas y su interpretación. | Cada estudiante realiza su trabajo. |
| El conocimiento como interpretación de la realidad. | Existe un conocimiento oficial que debe ser aprendido |
| La evaluación está basada en el desarrollo personal. | La evaluación está basada en la aprehensión de datos. |

Como se observa en el cuadro ambas teorías presentan diferencias en cuanto al rol que desempeña el docente y el estudiante en el aprendizaje. Cabe destacar que si bien es cierto, desde el punto de vista del rendimiento, puede ocurrir que bajo distintos métodos

[1]McNeil, J. (1995)

el estudiante obtenga resultados similares, sin embargo en la metodología tradicional el aprendizaje será mecánico y memorístico y probablemente si el estudiante se enfrenta a una situación diferente a la que aprendió no sabrá cómo enfrentarla. Por el contrario si el docente guía correctamente al estudiante y se basa en la teoría constructivista es muy probable que se logre un buen aprendizaje y que el estudiante sea capaz de enfrentar otro tipo de situaciones diferentes a las que está acostumbrado, logrando así un aprendizaje significativo. Es tarea del docente saber elegir actividades que potencien las habilidades de los estudiantes, en este caso en el área de la matemática ya que por lo general sólo se mecaniza y se enseñan fórmulas sin darle un real sentido a lo que se está enseñando.

Por esta razón se presentó una descripción de ambas teorías ya que así será posible observar si las actividades que se presentan en esta investigación, basadas en el proceso de visualización, cumplen con el propósito de la teoría constructivista.

Como se mencionó anteriormente el estudiante y los factores ambientales son imprescindibles para el constructivismo, así como también lo es la interacción específica entre estas dos variables que crean conocimiento. Por esta razón es que a continuación se describen algunos de los factores socioafectivos a los que se ve expuesto el estudiante y que interfieren directa o indirectamente en su aprendizaje.

## 3.2. Factores Socioafectivos

Todas las personas son diferentes y por ende no aprenden de la misma forma. El ambiente en el que se lleva a cabo el proceso de enseñanza es muy importante ya que puede ser un potenciador del aprendizaje o inhibidor de éste. Los factores socioafectivos tienen que ver con los sentimientos, las relaciones interpersonales, las actitudes, la motivación, la autoestima, entre otros, que están presentes en todos los estudiantes y que influyen directamente en el éxito o fracaso escolar.

La ciencia psicológica ha experimentado un gran avance en las últimas décadas. Uno de los aspectos más estudiados por los investigadores ha sido la psicología educacional y, más específicamente el fenómeno del aprendizaje. Existen diversas posturas teóricas sobre el mencionado fenómeno, lo que conlleva a un interminable debate entre diversas corrientes debido al mayor o menor énfasis que se le ha puesto a las distintas variables comprometidas en el aprendizaje (Bertoglia, 2005).

Tradicionalmente, el aprendizaje se viene midiendo por logros netamente académicos de los aspectos cognitivos, aun reconociendo que las materias que vienen de la metacognición y dimensión afectiva del individuo determinan la calidad del aprendizaje (Gil, Blanco y Guerrero, 2005. citado por Mato & de la Torre, 2006).

En este contexto es que Mato & de la Torre (2006) exponen que este nuevo enfoque de la dimensión afectiva, beneficiado por los trabajos de McLeod (1988, 1992, 1994), pone de manifiesto que las cuestiones afectivas juegan un papel esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Desde los noventa, se ha acuñado el término de Ciencia Afectiva (Ekman y Davidson, 1994. citado por Mato & de la Torre, 2006) para hacer referencia a la ciencia que estudia los fenómenos afectivos. En educación, el término "dominio afectivo" se utiliza para hablar de las actitudes, emociones, creencias y valores. A lo largo del tiempo, los dominios afectivos y cognitivos se han considerado separados, inclusive se han desarrollado taxonomías de objetivos educativos de manera aislada para ambos dominios. En la actualidad, las propuestas didácticas contemplan la interacción entre ambos, debido a que el individuo pasa de uno a otro de forma inconsciente (Mato & de la Torre, 2006).

Dentro de los factores que inciden en el aprendizaje, para esta investigación se estudia lo que sucede con las variables actitud, ansiedad y motivación hacia la matemática, y como inciden en el progreso del aprendizaje al utilizar la metodología propuesta. Cada una de ellas es estudiada desde el contexto educativo mediante instrumentos que ayudan a establecer relaciones entre cada una de ellas y el aprendizaje en matemática. Se comienza la descripción con la actitud hacia la matemática teniendo en consideración que, según Mato & de la Torre (2006), es uno de los aspectos psicológicos que han alcanzado mayor difusión.

### 3.2.1. Actitud hacia la Matemática

Socialmente la matemática es un área calificada como compleja y difícil de entender. Si bien es cierto los niños en etapa preescolar manifiestan curiosidad por aprender los números y casi como un logro los padres celebran el hecho de que el niño sepa contar, esta realidad va cambiando a medida que ellos comienzan a avanzar en los niveles de la enseñanza básica. Probablemente esto esté condicionado por muchos factores, sin embargo la actitud es una de las variables que influyen directamente en el aprendizaje, especialmente en la matemática. La Real Academia Española define actitud como la "*disposición de ánimo manifestada de algún modo*", que llevada al ámbito de la matemática cobra sentido el decir que tener una buena disposición frente al aprendizaje de esta asignatura incide positivamente en el logro de buenos resultados y de un aprendizaje significativo.

En el ámbito de la investigación existen diversas definiciones de las actitudes, sin embargo los teóricos están de acuerdo en afirmar que la actitud es una "predisposición psicológica para comportarse de manera favorable o desfavorable frente a una entidad particular" (Eagly y Chaiken, 1998 y Zabalza, 1994, citado por Mato & de la torre, 2006). Esto quiere decir que, si un individuo realiza una evaluación positiva hacia un objeto determinado entonces su actitud hacia el mencionado objeto es favorable, lo que lleva a esperar que sus manifestaciones conductuales (respuestas) sean generalmente favorables; mientras que si la evaluación es negativa o en contra del objeto en cuestión, las actitudes serán desfavorables. La teoría dice que la actitud no solo puede ser favorable o desfavorable con respecto a un objeto, sino que además existen grados, los que están ubicados entre estos polos, formando un continuo actitudinal (Mehrens y Lehmann, 1991; citado por Mato & de la torre, 2006).

Zabalza (1994) afirma que nadie nace con una predisposición positiva o negativa hacia algo. La manera en que se aprenden las actitudes es variada, proviniendo de experiencias, ya sean positivas o negativas con el objeto de la actitud. De esta forma, las actitudes se vuelven inevitables (Mato & de la torre, 2006). Sin embargo una persona con una actitud negativa hacia la escuela en general, podría estar dispuesta a asistir a diario y a estudiar para evitar las críticas de los padres. La presión externa, incluidos los premios o el miedo al castigo son, tradicionalmente, la forma de conseguir buenas conductas en los estudiantes. Es por esto que el nexo entre la actitud y la conducta depende de otras variables del entorno del individuo, las que deben ser tomadas en cuenta al momento de hacer una evaluación de las actitudes.

Investigadores señalan que se produce un bloqueo emocional o "barrera psicológica" entre los estudiantes y la matemática (Nimier, 1997 y Truttschel, 2002; citado por Mato & de la torre, 2006). Es posible afirmar que muchos alumnos muestran temor ante la asignatura e inclusive manifiestan odio hacia la matemática. La amenaza afectiva que se adquiere en los primeros cursos de matemáticas, en muchos casos explica la reacción emocional negativa, la cual afecta al logro de las matemáticas y a la utilización de las mismas en la vida profesional (Mato & de la torre, 2006).

Con el pasar del tiempo, se reconoce cada vez más que los resultados de las actitudes, procedentes de la metacognición y dimensión afectiva del individuo, determinan la calidad del aprendizaje. Allport (1935; citado por Mato & de la torre, 2006) señala que esta notoriedad se debe a que las actitudes:

• "No se las puede considerar propiedad exclusiva de ninguna escuela de pensamiento.

• Escapan a la controversia entre herencia y medio, ya que combinan los dos aspectos de la misma. Es posible, en este sentido, concebirlas como disposiciones elementales de conducta, en potencia, sintetizadas en base a sus dotaciones psíquicas innatas y al contenido de sus experiencias"

En este contexto es que las actitudes y la carga emocional vinculada a una disciplina de estudio como la matemática pueden ser consideradas mediadores de las relaciones entre las metas de logro y el nivel de rendimiento en matemática (Pekrun, Elliot y Maier, 2009; citado por Cerda & Ortega, 2012).

En resumen a todos los antecedentes aportados por diversos autores se establece que la actitud incide directamente en el aprendizaje de los estudiantes por lo que se considera una variable dentro de esta investigación y que constituye un factor importante a considerar para el docente ya que al conocer la postura de los estudiantes frente a la asignatura de matemática, puede explorar en métodos que busquen mejorarla.

Como antecedente importante para continuar con el desglose de los temas tratados, se menciona a Aiken (1970, citado por Cerda & Ortega, 2012) quien menciona que desde la década de los setenta se acentúa la relación entre actitud y ansiedad frente a las matemáticas y el logro en dicho ámbito. A continuación se presenta el segundo factor socioafectivo que corresponde a la ansiedad hacia la matemática.

### 3.2.2. Concepto de Ansiedad

Para comenzar a describir la ansiedad hacia la matemática es necesario primero conocer qué se entiende por ansiedad. El concepto es bastante amplio ya que está presente en muchos ámbitos de la vida y tiene relación con procesos internos del organismo humano, principalmente con el sistema nervioso. La manera en que se mide el nivel de ansiedad en el contexto educativo resulta complejo ya que ésta no se presenta de un momento a otro sino que tiene estrecha relación con experiencias pasadas que no fueron agradables y en consecuencia lleva tiempo lograr bajar completamente los niveles de ansiedad elevados, además porque involucra cambios en la conducta del individuo.

Según Öhmán (1993), Marks y Neese (1994) y Gutiérrez Calvo (1996) *"el término ansiedad se utiliza comúnmente para describir un estado emocional desagradable, que se caracteriza por sentimientos subjetivos de tensión, preocupación, aprehensión y por activación del sistema nervioso"*. En términos generales, es posible equiparar la ansiedad con el miedo y definirla como un conjunto de respuestas emocionales, que permiten reaccionar ante una situación de peligro.

Numerosos son los estudios que sustentan que la ansiedad interfiere en el proceso educativo, pues forma parte de la conducta del estudiante y está ligada directamente con el éxito fracaso escolar. Así lo plantean Mato & de la Torre (2006), quienes mencionan que "la ansiedad es la raíz de muchos casos de fobia o rechazo escolar y la necesidad de prevenirla se comprende cuando se piensa en los efectos que el fracaso escolar puede llegar a tener, tanto a corto, como a mediano y largo plazo". Otros estudios como los de Brown y Gelder (1938) señalan que los estudiantes que presentan nervios ante los exámenes tendían a tener un peor rendimiento que los que se mantenían calmados. Sin embargo, cuando se inició el estudio sistemático de los efectos de la ansiedad sobre el rendimiento cognitivo y académico, se utilizaba el concepto de "ansiedad de evaluación".

Comúnmente las personas tienden a sentir nervios de pensar que serán evaluados en cualquier aspecto de la vida, ya sea en una prueba de conducción o en una evaluación médica de visión. El sólo hecho de que nuestro cerebro se prepare para ser evaluado se desencadenan procesos internos que afectan el resultado que esto tendrá. Si esto lo llevamos al ámbito educativo cobra más sentido aún ya que el resultado de una evaluación en una asignatura puede ser decisivo para el futuro del estudiante.

Barker (1984; citado por Mato & de la torre, 2006) expone que cuando la ansiedad se convierte en excesiva, amenaza con abrumar al alumno, lo que puede llevar a afectar su funcionamiento adaptable. La ansiedad afecta a todos los factores de la capacidad para funcionar, causando discrepancias entre las capacidades de una persona y su manera de actuar.

Ya que se tiene una perspectiva sobre lo que es el concepto de ansiedad y lo que involucra para la conducta de las personas, se presenta un visión sobre lo que es la ansiedad pero en el ámbito de la matemática.

#### 3.2.2.1. Ansiedad Matemática

En el contexto educativo, en un esfuerzo por comprender los factores asociados al aprendizaje de la matemática los investigadores se han centrado en el estudio de la denominada ansiedad matemática, definida como un estado de malestar expresado como disgusto, preocupación y miedo, con manifestaciones específicas de comportamiento, tales como tensión, frustración, angustia, impotencia (Guerrero, Blanco y Vicente, 2002; Ho et al., 2000; Pérez-Tyteca et al., 2009; Perry, 2004; Tobias y Weissbrod, 1980; Wood, 1988) que surge cuando los estudiantes se enfrentan o están obligados a realizar tareas matemáticas y que repercute desfavorablemente en el desempeño de las mismas.

Los niveles de ansiedad presente en los estudiantes están fuertemente ligados al logro y éxito en la asignatura de matemática y basta con haber tenido una mala experiencia en la infancia o niñez para que se desencadenen niveles altos de ansiedad, los cuales además inciden en la actitud que presentan los estudiantes a la asignatura.

La ansiedad es un factor que evita que las personas se relacionen con las matemáticas de la forma en que ellos desearían, provocando que la capacidad matemática se convierta en algo tremendamente dificultuoso (Mato & de la torre, 2006). Por tanto, se hace posible considerar la ansiedad hacia la matemática no sólo como una hostilidad hacia la asignatura, sino que también, como algo que tiene efectos más devastadores para el estudiante.

La ansiedad hacia la matemática, puede tomar formas multidimensionales, incluyendo por ejemplo, aversión (un elemento de actitud), preocupación (un elemento cognitivo) y miedo (un elemento emocional), o pudiera ser un reflejo de otras actitudes sutilmente asentadas hacia las matemáticas. (Hart, 1989; citado por Mato & de la torre, 2006)

El grado óptimo de ansiedad depende netamente del individuo y de la tarea a realizar, aunque no es posible precisar en qué momento en nivel de ansiedad deja de influir positivamente en la motivación y se convierte en debilitador en lo que a la realización de la tarea se refiere (Jones, 1984; citado por Mato & de la torre, 2006).

Es posible que el nivel de ansiedad esté presente en todos los estudiantes sólo que en algunos este nivel es más elevado, sin embargo en la asignatura de matemática este nivel generalmente es alto, sobre todo cuando se enfrentan a las evaluaciones. Por esta razón resulta imprescindible considerar este factor al momento de planificar un proceso de enseñanza pues se deben realizar actividades que busquen disminuir este nivel y así poder obtener buenos resultados.

La tercera variable que se considera para esta investigación corresponde a la motivación, la cual está directamente ligada también con la ansiedad y la actitud hacia la matemática.

### 3.2.3. La motivación en el aprendizaje de las matemáticas

La mayoría de las cosas que hacemos están influenciadas por alguna razón o interés interno que conlleva a decidir realizar o no algo. Básicamente esto es la motivación, la cual depende de múltiples factores. La motivación a su vez determina en parte la conducta, que llevada al ámbito escolar puede verse reflejada en un estudiante que presenta un interés mayor por una asignatura y por ende obtiene mejores resultados que en otras donde no se siente motivado. Para el profesor de matemática es un desafío contínuo el lograr que los estudiantes se sientan motivados por la asignatura ya que como se ha mencionado existe cierta predisposición y niveles altos de ansiedad matemática.

Para entender lo que es la motivación llevada al ámbito de la matemática se menciona a Schunk, quien en el año 1998 señala que tanto el concepto de motivación como el de aprendizaje van integrados, ya que el establecimiento de metas y la autoevaluación del progreso constituyen importantes mecanismos motivacionales, al igual que la comparación social de habilidades y opiniones con las de otros. Además es posible afirmar que los factores personales y situacionales ejercen una gran influencia en la motivación y el aprendizaje (Valdés, 2011).

Un importante aspecto, que no se puede dejar de mencionar es la diferencia entre motivación intrínseca y extrínseca. La primera incluye el valor de la tarea y el interés que nace dentro de sí mismo y que empuja al esfuerzo que exige el estudio, mientras que la segunda proporciona alguna clase de beneficio material, es decir no nacen en el estudiante, sino que provienen de otras personas y las circunstancias que los rodean (Gálvez, 2006; citado por Valdés, 2011).

Desde una perspectiva cognitiva, el valor de la información, ya sea por su novedad o su significado personal, tiene altas propiedades motivacionales. Al momento de recibir la información reciente, la procesamos, la almacenamos y la recuperamos para aplicarla a nuevas situaciones de aprendizaje. En el flujo dinámico, la motivación es el motor que nos da la energía suficiente para profundizar en los aprendizajes que, de otra forma, nos causaría cansancio y agotamiento, mientras que un exceso de motivación provoca entusiasmo al aprender. Uno de los factores de aprendizaje más importantes es el contexto, que incluye elementos internos, así como también externos. El hecho de estar motivado intrínsecamente, hace despertar el interés por la tarea y empuja al esfuerzo que exige el estudio (Valdés, 2011).

Contextualizándolo con la educación, resulta imperiosa la necesidad de crear y/o utilizar distintos tipos de materiales didácticos y programas tecnológicos para la enseñanza de todas las áreas. Particularmente en las áreas de ciencias, se ha convertido cada día en un nuevo desafío el integrar un aspecto motivacional en los estudiantes, despertando distintos tipos de intereses. Específicamente para el profesor de matemática es una tarea importante lograr motivar a los estudiantes ya que esto facilita el aprendizaje y ayudará también a disminuir los niveles de ansiedad y mejorará la actitud hacia la matemática.

En síntesis sobre los factores socioafectivos podemos decir que tanto la actitud como la ansiedad y la motivacion a están directamente relacionados con el aprendizaje, por lo tanto no se deben olvidar al momento de planificar un contenido en cualquier área. Especialmente en la adolescencia los estudiantes son más susceptibles a lo que sucede en su entorno y como han crecido en una generación tecnológica resulta más difícil motivarlos, por lo que el docente debe lograr incorporar aspetos interesantes y apoyarse en la tecnología para lograr captar la atención de los estudiantes. Sobre todo en la matemática se deben establecer actividades adecuadas al contexto en que ellos se encuentran pues esto dará sentido a lo que se enseña y así será más significativo el aprendizaje.

Como se menciona anteriormente, la metodología que se implementa está basada en el proceso de visualización, por lo que en la siguiente sección se da a conocer en qué consiste este proceso.

## 3.3. Proceso Visualización

Cuando nos enfrentamos a una situación nueva, por ejemplo, cuando entramos en una ciudad desconocida, vamos percibiendo a través del sentido de la vista diversos elementos: árboles, coches, casas. En una segunda fase vamos integrando estas primeras imágenes en una estructura más compleja, percibiendo las calles, las manzanas de casas y las grandes zonas urbanas de la ciudad. Obtenemos así, de forma gradual, una imagen visual de la misma que podemos reconocer en una posterior visita. Este proceso de captación y formación de una imagen mental es lo que se llama proceso visual. En la construcción de éste proceso interviene una experiencia previa haciendo asociaciones con otras imágenes mentales almacenadas en nuestra memoria. (Alsina, Burgués y Fortuny, 1997).

La visualización ha sido objeto de numerosas investigaciones en Educación Matemática (Battista, 2007; Bishop, 1989; Clements y Battista 1992; Gutierrea, 1996; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Presmeg, 2006). Se trata de evaluar los procesos y capacidades de los sujetos para realizar ciertas tareas que requieren “ver” o “imaginar mentalmente los objetos geométricos espaciales, así como relacionar los objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas con los mismos.

El aprendizaje de la matemática implica el desarrollo de habilidades visuales y de argumentación. Más aún, para lograr un aprendizaje significativo es necesario construir una interacción fuerte entre estos dos componentes, de manera que el discurso teórico quede anclado en experiencias perceptivas que ayuden a construir su sentido y, a su vez, las habilidades visuales deben ser guiadas por la teoría, para ganar en precisión y potencia (Castiblanco et al., 2004).

Para comprender estos procesos, se realiza primero un acercamiento a la definición de visualización:

Generalmente se entiende por visualización la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido se trata de un proceso mental muy usado en distintas áreas del conocimiento matemático y, más generalmente, científico. (Cantoral & Montiel, 2001).

La visualización es "el acto por el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso es adquirido a través de los sentidos" (Zazkis, Dubinsky & Dautermman, 1996).

Hershkowitz, Parzysz & Van Dermolen (1996), indican: "entendemos por visualización la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual y viceversa. Esto incluye también la transferencia de un tipo de representación visual a otra.

Arcavi (2003, p. 217) describe la visualización en términos muy generales: "La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas". Asimismo, considera que la matemática, como creación humana y cultural que trata con objetos y entidades muy diferentes de cualquier fenómeno físico, se apoya fuertemente sobre la visualización en sus diferentes formas y niveles, no solo en el campo de la geometría.

Duval (2002) distingue entre visión y visualización. La visión es la percepción directa de un objeto espacial; la percepción visual necesita exploración mediante movimientos físicos, del sujeto que ve, o del objeto que se mira, porque nunca da una aprehensión completa del objeto. Entiende la visualización como representación semiótica de un objeto, una organización bi-dimensional de relaciones entre algunos tipos de unidades.

La visualización o razonamiento visual se entiende como una forma de pensar basada en representaciones esquemáticas o figuras, como los dibujos, diagramas o esquemas, gráficas, producidos en papel, medios electrónicos o en la mente, esto es imaginados (Balderas, 1998; Presmeg y Balderas; 2001).

En general, observamos que el término visualización está asociado con:

- Las representaciones (internas y externas)
- Los procesos de manipular imágenes.
- Las habilidades para la creación y procesamiento de las imágenes.
- La habilidad para interpretar, transformar y comprender representaciones
- El desarrollo del pensamiento en general
- El lenguaje para comunicar conceptos e ideas matemáticas

La visualización cada vez más se ha convertido en un tópico importante de las diversas escuelas del pensamiento relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Principalmente se le ubica como componente de los procesos mentales que tienen lugar en la actividad matemática, aunque se tiene claro que al relacionarse estrechamente con la percepción se presenta también en diversas situaciones de la vida cotidiana. (Cantoral & Montiel, 2003)

Gatica (2012) menciona que la visualización no es más que un medio con el que cuenta el alumno para poder realizar un mejor entendimiento y que referirse a visualizar un concepto,  habla de comprender un concepto a través de una imagen visual. (Davis,

1993) la considera “una manera de ver las cosas”. (Giaquinto, 1992) hace notar también que la visualización es *“la intencionalidad”* que no está presente en el mero ver.

Así también en su libro *El rincón de la pizarra* (Gúzman, 1996) escribe: *“Con la visualización en matemáticas se pretende otra cosa. Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo.”*

Como se puede apreciar son diversas las investigaciones que definen visualización y todas ellas coinciden que visualización no es solo el simple acto de ver.

Además cabe preguntarse: ¿Cómo se beneficia un estudiante al trabajar con visualización en la enseñanza?

La respuesta está en que las representaciones visuales tienen por un lado, tareas de comunicación, pero, por otro lado tienen otras tareas significativas, que no se ponen en la perspectiva de muchos docentes, como la de favorecer la formación de las representaciones internas, principalmente las imágenes mentales y conceptuales del objeto matemático (Planchart.O, 2002).

Para comprender más sobre la visualización es que se acompaña de una sección donde se hace referencia a la historia de la visualización.

### 3.3.1. Historia de la Visualización

Conocer la historia que antecede a un concepto nos da indicios importantes para entender en profundidad la trascendencia que éste posee y servirá de guía para establecer comparaciones sobre el objeto de estudio.

Dentro de la línea de investigación en educación matemática Tall y Vinner (1981) introdujeron los constructores “imagen conceptual”, para describir el estado de los conocimientos del sujeto individual con relación a un concepto matemático. Se trata de entidades mentales que se introducen para distinguir los conceptos matemáticos formalmente definidos y los procesos cognitivos por medio de los cuales se conciben. Con la expresión “imagen conceptual se describe la estructura cognitiva total asociada a un concepto, que incluye las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados” Tall y Vinner (1981; citado por Lezama, 2012)

Hasta la década de los 80, apenas pueden encontrarse investigaciones en Educación Matemática en visualización de forma exclusiva. Fue en esta década cuando el tema de la visualización matemática sufre un punto de inflexión (Presmeg, 2006). Desde entonces se ha producido cada vez un mayor número de investigaciones, desde enfoques muy distintos.

A continuación se puede ver un resumen de la trayectoria de estas investigaciones hecha por Presmeg. (citado por Molina & Guerrero, 2004)

| Fechas | |
|---|---|
| Los comienzos | - Primera mitad del s. XX: estancamiento producido por el dominio del conductivismo.<br><br>- Años 1970 – 1980: re-emerge la investigación en imágenes desde su base psicológica con metodologías tanto cuantitativas como cualitativas, sobre todo las últimas.<br><br>- Se investigan tanto las ventajas y desventajas, como los aspectos cognitivos y afectivos. |

| | |
|---|---|
| Años 90 | - La visualización se reconoce como un campo específico de investigación de la educación matemática<br><br>- Se incorporan estudios sobre el desarrollo curricular y sobre áreas particulares de las matemáticas<br><br>- Investigaciones sobre qué tipo de enseñanza promueve una visualización matemática efectiva<br><br>- Influencia de las tecnologías<br><br>- Diferencias de género en el uso de la visualización, y uso que hacen de ella la comunidad matemática.<br><br>- Rechazo de los estudiantes a visualizar en matemáticas<br><br>- Usar medios de representación conlleva necesariamente una mejora o evolución en el futuro |
| Del 2000 en adelante | - Se amplía la visión de la visualización hacia sus aspectos semióticos, por ejemplo, y el desarrollo teórico.<br><br>- Investigaciones sobre gesticulación unidos con los aspectos de la naturaleza de las ideas encarnadas en torno a la matemática.<br><br>- Conexiones entre diferentes inscripciones o registros matemáticos.<br><br>- La necesidad de solidificar teorías que puedan unificar todo el campo de visualización dentro de la educación matemática. |

### 3.3.2. Roles Fundamentales de la Visualización

En el caso de la enseñanza de las matemáticas lo visual juega un papel importante. Son diversas las áreas que precisan de representaciones visuales, tanto para representar algún concepto, como de instrumentos útiles para el análisis.

Presmeg (1986) ha encontrado diversos tipos de visualización según la categorización de tipos de imágenes mentales:

1) Imágenes concretas pictóricas. Se trata de imágenes figurativas de objetos físicos.

2) Imágenes de fórmulas. Consisten en la visualización mental de fórmulas o relaciones esquemáticas de la misma manera como se las vería, por ejemplo, en el libro de texto.

3) Imágenes de patrones. Son imágenes de esquemas visuales correspondientes relaciones abstractas. A diferencia del tipo anterior, no se visualiza la relación propiamente dicha (un fórmula generalmente), sino alguna representación gráfica de su significado.

4) Imágenes cinéticas. Se trata de imágenes en parte físicas y en parte mentales, y que en ellas tiene un papel importante el movimiento de manos, cabeza, etc.

5) Imágenes dinámicas. Son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan.

Un determinada imagen puede ser de dos tipos diferentes pues, normalmente, su clasificación cinética o dinámica es independiente de su clasificación como pictórica, patrón o de fórmula.

Según Bishop (1989), las imágenes visuales (físicas o mentales) son los objetos que se manipulan en la actividad de visualización, manipulación que se realizar según dos tipos de procesos:

- Procesamiento visual (VP). Este es el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales y también el proceso de transformación de unas imágenes visuales y formadas en otras.

- Interpretación de información figurativa (IFI). Este es el proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales para extraer la información que contienen. Por lo tanto, este proceso puede verse como el inverso del interior.

La fuerte visualización es una ventaja del contexto geométrico de la razón, en comparación con otros contextos. Lo que didácticamente importa es la verbalización visual. Mucho más frecuentemente los contextos de la razón no son visuales, pero son accesibles a la visualización. Finalmente de acuerdo con Freudenthal (1983), la comprensión de la razón puede guiarse y profundizarse mediante visualizaciones.

En relación al proceso de visualización y su historia se puede apreciar la relación que ésta posee con la matemática y sus contenidos. Específicamente se menciona a Raymond Duval y su descripción de las representaciones semióticas como base de la metodología propuesta.

### 3.3.3. Registros de representación Semiótica de Raymond Duval

Los fundamentos claves de nuestra investigación se basan en los registros de representación semiótica desarrollada por Raymond Duval, y la incidencia que tiene en los estudiantes para el desarrollo del concepto matemático, particularmente en la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad.

El aprendizaje de la matemática es un campo de estudio que da cabida al análisis de actividades cognitivas, tales como la conceptualización, el razonamiento, resolución de problemas, etc. Por lo que enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión.

Se da a entender por representación semiótica a *"la producción constituida por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento"* (Duval, 1995; citado por Macías Sánchez, 2014).

Para que las representaciones tengan una utilidad en la actividad matemática, deben pertenecer a sistemas semióticos que sean registros de representación y para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, se debe dar lugar a tres actividades cognitivas fundamentales asociadas a toda representación, dentro de las que se destacan las de *formación*, como aquellas representaciones de algo a partir de un conjunto de caracteres e intencionalidades; las de *tratamiento*, cuando una transformación produce otra dentro del mismo registro; y las de *conversión*, cuando la transformación produce otra representación en un registro distinto al de la representación inicial. (Duval, 1999; citado por Tamayo Alzate, 2009)

De acuerdo con Duval, las representaciones semióticas resultan ser indispensables al momento de querer acceder, adquirir o comunicar conocimientos matemáticos. Además, menciona que un objeto matemático (números, funciones, rectas, gráficos, triángulos, etc.) tiene la particularidad de contar con distintas maneras de representación semiótica (Duval, 1996; citado por D´Amore, 2004) como es el caso de razones, proporciones y proporcionalidad, éstas se pueden representar en forma: tabular, gráfica, algebraica y pictórica o en la forma de enunciado en la lengua natural. Para lograr una adquisición conceptual del objeto matemático mencionado pasa necesariamente a través de una o más de éstas representaciones semióticas (Chevallard, 1991; Duval, 1993, 1995; Godino y Batanero, 1994; citado por D´Amore, 2004).

Finalmente, dados los antecedentes sobre teorías de aprendizaje, factores socioafectivos y visualización, es que se implementa la metodología propuesta en esta investigación considerando cada uno de estos aspectos como esencial al momento de integrar un nuevo conocimiento en los estudiantes ya sea de la asignatura de matemática o en cualquier proceso de enseñanza.

En nuestro cuerpo el cerebro es el centro de control de casi todas las actividades vitales necesarias para la supervivencia. Numerosos son los estudios que basan su interés en el funcionamiento de éste para lograr entender la conducta humana y los procesos que implican cada uno de nuestros pensamientos, emociones y la forma en que aprendemos. Este es el objetivo principal de los estudios basados en neurociencia y que para esta investigación se relacionan con la visualización en el ámbito educativo.

A continuación se menciona los aspectos más relevantes para esta investigación sobre neurociencia.

## 3.4. Neurociencia y Educación

Hacia el año 1983 en Francia ocurrió un importante avance que dio origen a muchos estudios sobre neurología moderna. Se cuenta que el médico francés Paul Pierre Broca después de varios años de estudio sobre el cerebro humano, demostró la existencia de relación entre el habla y un área del cerebro, indicando que el daño en esta área produce pérdida del habla.

Las observaciones sistemáticas de pacientes afectados por lesiones cerebrales, hechas a lo largo del siglo XX, permitieron profundizar en los misterios de la anatomía y funcionamiento del cerebro (Radford & André, 2009).

Dentro de este mismo ámbito y en relación al tema de la visualización que se aborda en este trabajo, es que nos referiremos al término neurociencia y su relación con la educación, y más específicamente en el área de la matemática.

A pesar de que existen dificultades en relacionar estos dos ámbitos, según Radford y André (2009) existen varias razones que justifican el interés de la didáctica de las matemáticas por la investigación actual sobre el cerebro, debido a que la neurociencia puede contribuir a esclarecer el problema general de la naturaleza del pensamiento. Según declaran Kandel, Schwartz y Jessell (1997), el propósito general de la neurociencia es entender cómo el encéfalo produce la marcada individualidad de la acción humana.

En palabras del Dr. Sergio Mora Gutiérrez, académico del Programa Disciplinario de Farmacología Molecular y Clínica del Instituto de Ciencias Biomédicas de la Universidad de Chile, las neurociencias estudian la estructura y el funcionamiento del cerebro, abarcando muchos niveles, desde el puramente molecular hasta el específicamente conductual y cognitivo, pasando por el celular, químico, farmacológico y patológico. Más concisamente, las neurociencias se preocupan de investigar los mecanismos por los cuales el cerebro humano aprende y memoriza, lo que las relacionan directa y naturalmente con las ciencias de la educación.

Teniendo en cuenta estas ideas y queriendo dar énfasis en el proceso de visualización en matemáticas, es que se cree cobra importancia el concepto de neurociencia. Además sabemos desde hace algún tiempo que la visualización es una herramienta útil para aprender y que además de producir fuertes respuestas fisiológicas, visualizar un objeto pone en marcha la mayoría de las regiones cerebrales activadas por la visión efectiva del mismo (Kosslyn, 2005, citado por Howard-Jones, 2011). Esta capacidad de las imágenes mentales de activar gran parte de la circuitería cerebral implicada en la experiencia perceptiva real enfatiza su fuerza y utilidad potenciales como herramienta de aprendizaje. (Howard-Jones, 2011).

Según la teoría del localizacionismo cerebral, la actividad matemática se presenta, en mayor medida, en el lóbulo frontal y parietal del cerebro. Dentro del lóbulo parietal, se registra mayor consumo de energía con la actividad matemática en la región denominada surco intraparietal y en la región inferior. Parece ser que la región inferior parietal controla el pensamiento matemático y la capacidad cognitiva visual-espacial. (Fernández, 2010).

En síntesis podemos decir que neurociencia y visualización son conceptos que se encuentran ligados a la educación y en particular a la enseñanza de la matemática puesto que ambas representan herramientas útiles para desarrollar estrategias de enseñanza, por lo tanto aportan información relevante para llevar a cabo el cumplimiento del objetivo principal de esta investigación.

Como se menciona anteriormente, la historia que precede a un contenido aporta información importante sobre lo que se investiga. Es por esto que a continuación se desglosa una sección sobre la historia de la matemática y específicamente de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad.

## 3.5. Historia y epistemología de la matemática

La matemática es una de las ciencias más antiguas. El momento exacto en el que se crearon las matemáticas es algo difícil de precisar, sin embargo es posible afirmar que ha sufrido una evolución a través del tiempo.

Las primeras civilizaciones muestran un gran avance en el pensamiento y uso de la matemática, ya que las usaban diariamente y la mayoría sin tener conciencia de la importancia de sus razonamientos. Sin embargo hubo grandes personajes que enfocaron sus estudios en los números y lo que ellos abarcaban. Diversos autores describen los inicios de la matemática y su posterior desarrollo a través de la historia de la humanidad.

En cuanto a las civilizaciones orientales, el escritor Struik (citado por Ruíz, 2003) señala: "La matemática Oriental se originó como una ciencia práctica para facilitar el cómputo del calendario, la administración de las cosechas, la organización de trabajos públicos, y la recolecta de impuestos. El énfasis inicial estaba naturalmente en la aritmética práctica y la medición. Sin embargo, una ciencia cultivada durante siglos por un oficio especial cuya tarea no sólo es aplicarlo sino también para instruir en sus secretos, desarrolla tendencias hacia la abstracción. Gradualmente, llegará a ser estudiada en sí misma. La aritmética no sólo evolucionó hacia el álgebra porque permitió cómputos prácticos mejores, pero también porque era el resultado natural de una ciencia cultivada y desarrollada en las escuelas de escribas. Por estas mismas razones, la medición se desarrolló hacia los principios -pero no más- de una geometría teórica" (Struik, A Concise History of Mathematics, p. 18, citado por Ruiz, 2003)

Continuando con el estudio de la historia de la matemática, y en forma más general el célebre matemático ruso A.N. Kolmogórov, distingue los siguientes períodos:

1. **Nacimiento de la matemática:** Este período se inicia en las profundidades de la civilización primitiva y se prolonga hasta los siglos VI y V antes de Cristo. Comprende la etapa de la formación de las ideas más primitivas de número y de forma hasta el momento en que la matemática adquiere cierta independencia, con objetivos y métodos propios. Pertenecen a este período las culturas egipcia y la babilónica. En esta etapa se formaron la aritmética y la geometría, las cuales estaban íntimamente relacionadas. La matemática era una colección de reglas aisladas que provenían de la experiencia con el medio ambiente; no existía aún un sistema organizado ni unificado.(Fernandez, 2005)
2. **La matemática elemental:** Este período se inicia entre los siglos VI y V A.C., con Tales y Pitágoras, cuando la matemática deja de ser un conocimiento solo al servicio de aplicaciones inmediatas, en donde existían resultados teóricos aislados y recetas numéricas, para luego pasará constituirse en una ciencia altamente intelectual. Por ello, la denominación "elemental" es solo una expresión para ubicar a la matemática en el contexto general de lo que vendría siglos después. En efecto, los trabajos matemáticos de Arquímedes y de Apolonio son de alta profundidad matemática, inclusive no muy bien conocidos actualmente en nuestro medio. Los Elementos de Euclides, constituye una obra singularmente original para su época y está escrita con un rigor que hace de ella una obra perdurable a través del tiempo. Hasta mediados del siglo XVI se inicia una etapa revolucionaria que produjo cambios. Gracias a la física y al conocimiento de otras ramas, la matemática se hace dinámica, estudia los cambios existentes en la naturaleza; se inicia la etapa de las magnitudes variables, la que fue fuertemente estimulada por la creación de la geometría analítica y del cálculo infinitesimal.(Fernández, 2005)

3. **La matemática de magnitudes variables:** Se inicia con los trabajos de Descartes, Newton y Leibniz, así como con las múltiples contribuciones que se hicieron, antes y después de estos científicos. La geometría analítica y el cálculo (diferencial e integral) fue el punto de partida de cambios fundamentales en la matemática pues ella se volvió capaz de resolver problemas nuevos que provenían del mundo físico. La humanidad entraba a la era de las máquinas.

   El inicio de este período se ubica entre los siglos XVI y XVII, época en que se investiga a la matemática de las magnitudes variables. Por esa época surgieron algunas organizaciones científicas, como la Royal Society de Londres (1662); también se organiza la Academia de París (1666). Se fundan algunas Revistas sobre matemática. Este período termina a mediados del siglo XIX, época en que se han de producir progresos esenciales que ampliaron la visión del mundo dela matemática.(Fernández, 2005)

4. **La matemática contemporánea:** Este es el periodo más difícil de especificar ya que existen muchas teorías nuevas. El campo de las aplicaciones de la matemática es muy amplio en nuestros días; es casi todo el conocimiento humano. Si bien esta etapa se inicia, más o menos, a mitad del siglo XIX, no se sabe cuándo termina, debido al incremento de las computadoras, los robots y las máquinas. (Fernández, 2005)

   Si bien es cierto se aumenta día a día en los diferentes campos de la matemática, la base de éstas sigue estando en la antigüedad, lo que sucede es que se han encontrado nuevas verdades que se adaptan a las que ya se conocían.

Así como lo hizo A.N. Kolmogórov, hubo otros importantes matemáticos, pedagogos e historiadores que han descrito algunas ideas relevantes sobre la historia de la matemática haciendo hincapié en la importancia que tiene el conocer estos antecedentes como aporte para la enseñanza.

Tal es el caso de Houzel (1977, p.VI.3), quien escribe: *"Las reelaboraciones sucesivas que la Matemática hace de las teorías precedentes, atenúan su historia, y aquí hay que buscar una de las principales razones que provocan el que las Matemáticas sean, en un alto grado, negadoras de su propia historia".*(González, 2004)

Aún en nuestros tiempos es frecuente creer en una ideología que concibe las ciencias (y sobre todo la Matemática) como cuerpos de doctrina universales e intemporales de verdades perpetuas, de modo que por su carácter eterno, las ciencias escaparían a la historia. (González, 2004)

La Historia de la Matemática altera esta creencia, como ilustra Del Río (1993, p.37) con numerosos casos de problemas históricos: "*[...]. Estos ejemplos nos muestran que la importancia de un concepto o de un teorema es algo contextual, relativo al estado de la ciencia en ese momento y, por tanto, la eternidad de las verdades matemáticas es una cualidad relativa.* En sentido parecido, tras una larga argumentación, escribe Cañón (1993, p.402): *Los resultados de la Matemática son producción cultural, [...], son relativos a un contexto socio-histórico".*(González, 2004)

Como vemos entonces, estos autores aportan diferentes perspectivas de los inicios de la matemática y su posterior desarrollo en el transcurso de los años. Todos ellos concuerdan en que la cultura es algo fundamental en el crecimiento y utilización de los conceptos matemáticos.

En este mismo sentido, reflexionando sobre la importancia del estudio de la historia de la matemática, no parece difícil demostrar que la perspectiva histórica permite, por una parte, dar una visión más panorámica de los problemas matemáticos para calibrar con mayor precisión la importancia de los diversos temas, que quedan así mejor articulados dentro de un contexto general (González, 2004).

El matemático y escritor Kline (1992, p.16) señala: "*la historia puede dar la perspectiva global del tema y relacionarlas materias no sólo unas con otras sino también con las líneas centrales del pensamiento matemático*". Además, el estudio de la historia permite conocer la aparición de dificultades epistemológicas que presentan una gran similitud con las que atraviesan los estudiantes, y por tanto, como escribe Maza (1994, p.24): facilita "*la determinación de obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de los alumnos*", que como cuestión filosófica general sobre la Didáctica es, sin duda, de gran importancia (González, 2004).

Como se observa, conocer algo sobre la historia ayuda al momento de profundizar en un contenido matemático. Dentro de este contexto resulta muy necesario conocer cómo surge el concepto de razón, proporción y proporcionalidad ya que se logra abordar desde sus inicios y así resaltar la importancia que esto posee para la investigación.

## 3.6. Base histórica de los conceptos de razón y proporción.

Si nos remontamos al inicio de la historia, el concepto de razón fue utilizado inconscientemente por civilizaciones primitivas con el sólo hecho de afirmar que una tribu tenía el doble de habitantes que la tribu vecina, o que una longitud es la mitad de otra. Sin embargo, hubo que esperar hasta la aparición de los pitagóricos para hablar de razón entre dos números, puesto que sólo aceptaban a los números enteros; una fracción no era más que una razón entre dos números enteros y no una entidad numérica. Los pitagóricos relacionaron la matemática con la música, construyendo las escalas musicales comparando una porción vibrante de una cuerda y la cuerda entera, expresando esto último usando razones (Fernández, 2005).

Los pitagóricos también establecieron razones entre longitudes, expresándolos de la siguiente manera: por ejemplo, una vara de 5 metros es el resultado de multiplicar la unidad de metro por 5; ahora bien, si tenemos una vara de 5 metros y una de 7 metros, es posible establecer una razón entre las dos varas, como la relación 5:7. A estas longitudes las llamaron conmensurables. Sin embargo, se podría pensar que siempre sería posible establecer una razón entre dos unidades de longitud, haciendo cada vez más pequeña la unidad hasta lograr lo buscado y, de esta manera asegurar la conmensurabilidad. No obstante, los mismos pitagóricos se encargaron de demostrar que existen longitudes inconmensurables. Es decir, encontraron razones que no podían ser expresadas como razones entre dos números enteros. Por ejemplo, aquella entre la hipotenusa y un cateto en triángulos rectángulos o la razón entre el lado de un cuadrado y su diagonal (Ruíz, 2003).

Se supone que las razones inconmensurables fueron descubiertas por Hipaso de Metaponto, quien habría pagado con su vida dicho descubrimiento. No obstante, Aristóteles afirma que los Pitagóricos suministraron la prueba de que la raíz cuadrada de dos es inconmensurable, utilizando el método de reducción al absurdo para su respectiva demostración (Ruíz, 2003).

Vale la pena destacar que las razones inconmensurables, números irracionales, fueron utilizados primitivamente por los babilónicos, quienes los aproximaban. Todo parece indicar que tanto los babilónicos como los egipcios utilizaban este tipo de números sin tener conciencia sobre la naturaleza diferente de los mismos (Ruíz, 2003).

Sin lugar a dudas, una de las consecuencias de la no aceptación de los irracionales por parte de los pitagóricos fue la pérdida de la identificación de los números con la geometría: mientras que era válido considerar longitudes, áreas y diversos tipos de razones en geometría, a la hora de establecer relaciones numéricas sólo se aceptaban aquellas conmensurables. Lo anterior redujo considerablemente la potencialidad de la geometría, la aritmética y el álgebra (Ruíz, 2003).

Eudoxo de Cnido, quién es considerado uno de los más grandes matemáticos de la antigüedad, sólo superado por Arquímedes, contribuyó con la teoría de las proporciones cuyo objetivo fue evitar el uso de los irracionales como números sin dejar de hacer geometría. Lo que hizo fue, en esencia, introducir la noción de magnitud, que no era un número pero servía para tratar con ángulos, segmentos, volúmenes, áreas, puesto que, mientras los números eran discretos, las magnitudes eran continuas. Para Eudoxo, una razón de magnitudes era una proporción, es decir, una identidad de dos razones, fueran conmensurables o no. Esta teoría, abría las posibilidades de trabajo en la geometría, llegando más allá en los aspectos críticos e "inaceptables" de los irracionales. Además, la teoría de las proporciones dio validez indirectamente a la regla empírica de los egipcios para el volumen de un tronco de pirámide y completó el trabajo de los pitagóricos sobre los números similares.  Además, la teoría Eudoxiana separó la geometría y la aritmética, privilegiando a la primera y debilitando a la segunda. Todas aquellas situaciones aritméticas o algebraicas que generaran irracionales eran convertidas en problemas geométricos (Ruíz, 2003).

Eudoxo, al introducir las magnitudes, para poder utilizar inconmensurables en geometría, tuvo que destacar la importancia de la deducción a partir de axiomas explícitos, lo que quiere decir que manipular razones inconmensurables era un asunto delicado mirado desde el punto de vista lógico, lo cual obligaba a precisiones y a un manejo deductivo cuidadoso (Ruíz, 2003).

Posteriormente, Euclides incluyó varios resultados de Eudoxo en sus escritos, los cuales han tenido que ser reconstruidos a partir de recensiones, comentarios, críticas u observaciones de otros escritores. El libro V está basado en el trabajo de Eudoxo y es considerado como el principal resultado de la geometría euclidiana. Incluye la teoría de las proporciones con las razones inconmensurables evitando los números irracionales. Mientras que los libros del I al IV evitan las magnitudes inconmensurables, el libro V las incluye a partir de la teoría de las magnitudes atribuidas al ya mencionado Eudoxo. Sin lugar a dudas, el libro de los Elementos  se Euclides presta una gran ayuda como fuente histórica en cualquier ámbito de la matemática, incluido la proporcionalidad. Sin embargo, el primer inconveniente del texto es que el concepto de razón no está definido en forma precisa y clara (Fowler, 1979; citado por Oller, A. & Gairín J., 2013) pero lo que parece incuestionable, a partir de las primeras definiciones de razón del libro V, es que ésta no es, de algún modo, un número. Este carácter no numérico se ve reforzado en el hecho de que apenas se tratan las operaciones entre las razones, además en ningún momento se habla de igualdad entre razones, sino de "guardar la misma razón" (V, Def. 5; citado por Oller, A. et.al, 2013).

Un aspecto interesante está relacionado con la necesidad de aplicar en situaciones prácticas concretas todo el aparato teórico ya desarrollado. La razón tenía únicamente sentido entre las magnitudes homogéneas, mientras que el producto de magnitudes carecía de sentido. Estos dos aspectos hacen prácticamente inaplicables la teoría de las situaciones prácticas en las que debería ser aplicada. Cabe destacar que siempre las razones son entre distancias o entre tiempos y nunca entre distancias y tiempos, es decir, solo eran consideradas las razones internas y no externas (Freudenthal, 1983; citado por Oller, A. et.al, 2013).

Es importante mencionar que no sólo en la cultura griega es posible encontrar algunos intentos de fundamentación teórica, también la cultura china da cuenta de la preocupación por la búsqueda de métodos generales o por la justificación de los ya mencionados métodos. Los textos orientales y particularmente chinos, poseen un eminente enfoque práctico. Lo anterior trata de colecciones de problemas acompañados con su respectiva solución numérica o de una descripción del método de resolución aplicados a los datos concretos de la ya mencionada situación problemática (Oller, A. et.al, 2013).

El matemático chino Lui Hui, trata la proporcionalidad insertando un nuevo concepto, el lü, el cual define como un conjunto de números correlacionados. La interpretación de este concepto es simple. Se dispone de varias magnitudes directamente proporcionales y un lü no es más que un conjunto de valores de dichas magnitudes. Este concepto de lü, es fundamental para Lui Hui, y permite comprender el origen de la regla de tres (Oller.A, et.al, 2013).

En la cultura china aplicaban la proporcionalidad a situaciones mercantiles, es por esto que no existe obstáculo alguno para relacionar directamente dos magnitudes distintas, de hecho se consideran simultáneamente pares de magnitudes diferentes. Aquí, a diferencia del enfoque griego, entran en juego la idea de razón interna, comparación de magnitudes de la misma naturaleza, y razón externa, la cual compara magnitudes de naturalezas distintas, siendo esta última la predominante (Oller.A, et.al, 2013).

En la edad media, comienza el proceso de aritmetización, entendido como la progresiva identificación de las razones como un ente numérico. Sin embargo, la teoría griega fue la que permaneció a lo largo de los siglos, primeramente en el propio mundo griego, posteriormente fue adoptado en la cultura árabe, en la Europa medieval.

Pese a esto, existían algunos defectos o inconvenientes en la teoría. Principalmente eran:

1. El concepto de razón no estaba definido rigurosamente en los *Elementos.*
2. En los *Elementos* sólo admite la composición de dos razones de la forma $a: b$y $b: c$ para obtener $a: c$ (lo que se llama razón doble, V, def. 9) (Oller.A, et.al, 2013).

El primer problema recientemente mencionado, es de carácter teórico y, por ende, la necesidad de solucionarlo nace únicamente por el deseo de que la teoría esté completa desde la perspectiva lógica. La situación es diferente en lo que se refiere al segundo problema. Se sabe que los árabes recogieron del mundo oriental diversas técnicas de resolución de problemas (Regla de tres, de cinco, y superiores) las cuales no podían ser justificadas de manera estricta por la teoría griega de las proporciones (Youschkevitch, 1976, citado por (Oller.A, et.al, 2013).

Mientras transcurría la Baja Edad Media, proliferaron las traducciones, copias y comentarios a los Elementos de Euclides, surgiendo así, respuestas a los problemas anteriores. El problema de la definición y la naturaleza de las razones surgen en las dos culturas más importantes del momento, la cristiana y la árabe, mientras que el problema de la composición de razones, por su origen práctico recogido de la tradición oriental, sólo aparece en el seno de la cultura árabe. Los primeros avances en la respuesta a los ya mencionados problemas corresponden a los comentarios de Omar al-Khayyam a los Elementos y la traducción de la misma obra de Giovanni Campano. Es llamativo observar que en el caso de al-Khayyam se trabaja siempre en el ámbito de las magnitudes (entendidas en el sentido griego, es decir, como magnitudes geométricas) mientras que Campano únicamente se centró en las razones numéricas (Oller.A, et.al, 2013).

El análisis histórico presentado conduce a conclusiones que deberían ser consideradas al planificar un proceso de enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad aritmética.

Según Oller y Gairín (2013), una de las consecuencias del proceso de aritmetización del concepto euclídeo de razón es que abre la posibilidad de enfocar dicho proceso de definición de razón de dos maneras:

1. Entre dos cantidades de una misma magnitud.

2. Entre dos números

Estos mismos autores mencionan que no se encuentran razones entre cantidades de una misma magnitud en ningún texto de secundaria español en los últimos 20 años, omitiendo, además, alguna posible definición de razón entre cantidades de distintas magnitudes. Los aspectos mencionados con anterioridad dan lugar a algunos inconvenientes para la comprensión de los alumnos (Oller. A. et. al, 2013):

1. *"Todas las situaciones problemáticas relacionadas con la proporcionalidad que se presentan a los alumnos involucran el manejo de magnitudes. En ese caso, lo que suele suceder es que se deja de lado por completo a las magnitudes para que los alumnos se centren en la faceta puramente numérica del problema, con lo que se pierde de vista el sentido de los pasos dados para resolverlo.*

2. *Aun si se recurre al uso de la razón entre cantidades de una misma magnitud, pensamos que dicha razón no constituye el mejor punto de vista para comprender los procesos que subyacen a una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes. Eso es así, principalmente, porque dicha razón es un escalar, que carece de un significado claro en el contexto del problema."*

En los dos casos expuestos recientemente, la consecuencia principal es que una situación problemática en el contexto de las magnitudes termina convirtiéndose en una situación en la que priman las manipulaciones meramente numéricas (Oller. A. et.al, 2013).

Este contenido ampliamente estudiado a través del tiempo es la base matemática que sustenta este estudio para determinar la incidencia de la metodología basada en el proceso de visualización.

A continuación se presenta la manera cómo se han tratado los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad en el contexto educativo.

## 3.7. Tratamiento del concepto de razón, proporción y proporcionalidad

Sabemos que muchas de las dificultades que presentan los alumnos en enseñanza media provienen de una mala comprensión de los conceptos tratados en enseñanza básica (Obando, Vasco, & Arboleda, 2014b), es por esto que resulta importante ahondar en el tratamiento correcto del concepto que se pretenda enseñar. Dentro de este contexto es que se abordará el tema de razón, proporción y proporcionalidad (de aquí en adelante RPP) desde tres ámbitos importantes: cognitivo, epistémico y semiótico-antropológico.

1. **Los procesos cognitivos:**

Dentro de este ámbito las primeras investigaciones tienen relación con el estudio del desarrollo del pensamiento proporcional o razonamiento proporcional. Se inicia con los aportes de Piaget quien en 1978 hizo un seguimiento de las etapas del desarrollo intelectual, hasta llegar a la de las operaciones formales, lo que condujo a entender los fundamentos que él encontró en el tratamiento específico de los temas de razón y proporción. Por medio de diversas situaciones buscó entender cómo evoluciona del pensamiento de un niño y en ellos estuvo presente el problema de cómo llegan a entender las proporciones. En situaciones sobre velocidad para diferentes tiempos y distancias y problemas que involucraban probabilidades observó que estos están directamente relacionados con la idea de proporción y que dichos problemas no pueden ser completamente desarrollados sino hasta el nivel de operaciones formales (Ruiz, 2006).

Piaget señala además que el sujeto puede construir el esquema de proporcionalidad cualitativa cuando comprende que un incremento en una variable independiente da el mismo resultado que un decremento en la variable dependiente. Es decir, cuando comprende que requiere de un elemento de compensación (Ruiz, 2006).

Para Piaget la noción de proporción empieza siempre de una forma cualitativa y lógica, antes de estructurarse cuantitativamente.

En un experimento con una balanza de barra, Piaget observó que el sujeto puede comprender, mediante la manipulación, que es posible conservar el equilibrio teniendo dos pesos iguales a las mismas distancias del centro, pero también se conserva el equilibrio disminuyendo un peso, pero alejándolo y aumentando el otro, aunque aproximándolo al centro. La comprensión de esta proporcionalidad (tanto directa como inversa), se da en primer lugar por vía cualitativa: "es lo mismo aumentar el peso que la distancia" luego en formas métricas simples: "disminuir el peso aumentando la longitud equivale a aumentar el peso disminuyendo la longitud" (Ruiz, 2006).

Estos antecedentes son muy importantes dentro de esta investigación ya que dan cuenta de cómo se comienza a configurar el pensamiento de los alumnos en torno a las proporciones y aportan ideas didácticas sobre cómo abordar el tema de proporcionalidad directa e inversa.

Como veremos estos estudios fueron aumentando y ya para la década de los ochenta se comenzaron a analizar posibles secuencias de enseñanza y, reconociendo la complejidad del campo, se edifican nuevas líneas de investigación en busca de la comprensión de los factores asociados

Cabe destacar el aporte de Noelting, quien en 1980, siguiendo con el desarrollo del razonamiento proporcional, usó un problema de contexto numérico con una mezcla de jugo de naranja. Este consistió en la comparación de mezclas entre vasos que contienen jugo de naranja y agua. A través de diferentes variaciones en las mezclas él buscaba que los sujetos determinaran en cuál había mayor concentración de jugo. Formuló 23 reactivos o mezclas, los cuales variaba de acuerdo al grado de complejidad respecto al concepto de razón. Fueron aplicados a sujetos cuyas edades oscilaban entre 6 y 16 años (Ruiz, 2006).

Él observó que los sujetos pueden comparar primero las cantidades de jugo de naranja y agua “dentro de” cada recipiente y luego comparan las dos relaciones establecidas; pero también observa que los sujetos pueden comparar primero las dos cantidades de jugo de naranja y las dos cantidades de agua “entre” los recipientes y después comparan estas dos relaciones. En el problema, una relación “dentro de”, corresponde a la razón entre el jugo de naranja y el agua en cada reactivo y una relación “entre” corresponde a la razón, ya sea entre el número de vasos de jugo de naranja en ambos reactivos o entre la cantidad de vasos de agua también en los dos reactivos (Ruiz, 2006).

Este ejercicio con el jugo de naranja y agua es una forma sencilla de iniciar en los alumnos el concepto de razón y proporción, ya que mediante una actividad práctica ellos deberían ser capaces de establecer relaciones que, aunque parezcan obvias, son la esencia del concepto.

A continuación se presenta el segundo ámbito que corresponde a la estructura matemática.

**2. La estructura matemática:**

En los años noventa se produce un nuevo giro: las investigaciones sobre el razonamiento proporcional, además de las variables de orden cognitivo y de contexto, entran a considerar otras de orden epistémico relativas a la estructura, organización y naturaleza del conocimiento matemático en juego.

En general, se pueden caracterizar los aportes de este periodo en los siguientes términos:

I. **Procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de los números racionales:** caracterización de tales procesos y definición de tipologías de situaciones relativas a la construcción de la unidad, al tipo de magnitud y a la cuantificación de magnitudes (Behr, Harel, & Post, 1992; Behr, Khoury, Harel, Post, & Lesh, 1997; Kieren, 1988; Ohlsson, 1988).

II. **Razonamiento proporcional en los procesos de aprendizaje en los niños en edad escolar:** una mejor comprensión de los conceptos de razón y proporción, de variación y covariación, mostrando sus estrechas relaciones con la multiplicación, la división y las magnitudes (Confrey & Smith, 1994, 1995; Harel, Behr, Lesh, & Post, 1994; Hart, 1988; Lamon, 1994; Lesh et al., 1988; Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2000; Steffe, 1994).

III. **Aritmética de las cantidades:** reconocimiento de que los procesos aritméticos estudiados en la escuela, aditivos o multiplicativos, no sólo requieren operar sobre los números que representan las medidas, sino sobre las cantidades mismas y las magnitudes a las que pertenecen (construcción de diferentes tipos de magnitud); ello exige consideraciones tanto cognitivas como didácticas para la enseñanza y el aprendizaje (Schwartz, 1988).

IV. **Estructura cognitiva y didáctica del pensamiento multiplicativo**: nuevos enfoques en lo que se denominó el razonamiento proporcional en edades tempranas (Kaput & West, 1994; Spinillo & Bryant, 1991, 1999) que permitieron identificar, (a) los tipos de procesos de compensación, tanto aditivos como multiplicativos, que son precursores del razonamiento proporcional propiamente dicho, (b) la importancia de la coordinación de los procesos de variación entre espacios de medida (a partir de los procedimientos escalares o funcionales) para el desarrollo de los conceptos propios de la proporcionalidad directa, y, (c) la necesidad de incluir el papel de las distintas formas de representación sobre la construcción de tal forma de razonamiento.

V. **Campo conceptual de las estructuras multiplicativas:** se asume que la construcción de los conceptos relativos al razonamiento proporcional se da en un proceso complejo que implica, (a) coordinación con otros conceptos interrelacionados, (b) coordinación entre tipos de situaciones relacionadas con los conceptos y los procedimientos y (c) uso de diferentes formas de representación implicadas en la construcción de los invariantes operatorios relativos a los conceptos (Vergnaud, 1988, 1991, 1994). (Obando, Vasco, & Arboleda, 2014a)

Todos estos antecedentes son muy importantes al momento de estudiar el concepto de RPP ya qua dan indicios de lo que implica el concepto. Es importante mencionar que en la actualidad han aparecido nuevas investigaciones que van afinando nuevas técnicas para la comprensión de los conceptos de RRP.

Dentro de este mismo contexto, pero más recientemente se puede mencionar el aporte de la didacta María del Carmen Chamorro, quien en su libro titulado "Didáctica de las matemáticas para primaria" menciona *que "un momento importante en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Primaria se presenta en la introducción de las fracciones, decimales y la razón".* Ella considera de suma importancia que el profesor desarrolle las fracciones, números decimales, porcentajes, razón y proporción de manera relacionada, ya que forman una estructura que comparte ciertos aspectos matemáticos y psicológicos (Chamorro M, 2003).

Dentro de su libro se hace mención al razonamiento proporcional y aclara que éste no se debe limitar sólo al uso de la de la "regla de tres" o resolviendo expresiones como $\frac{a}{b} = \frac{x}{d}$ , multiplicando en cruz y plantea algunas situaciones como la siguiente, en la que se reflejan características de las relaciones de proporcionalidad y presenta un contexto en el que se pueden manifestar los procesos de razonamiento proporcional:

*Pedro compró 12 kilos de naranjas por 18 euros ¿Cuánto hubiera pagado por 9 kilos?* (Chamorro M, 2003)

Los siguientes protocolos muestran rasgos de razonamiento proporcional:

*"Si Pedro ha pagado 18 euros por 12 kilos de naranjas, entonces la mitad de kilos valdrán la mitad de dinero. Así, 6 kilos valdrán 9 euros, y también 3 kilos valdrán 4,5 euros. Luego como 9 kilos son 6 más 3 entonces valdrán 9 euros + 4,5 euros que es 13,5 euros".*

*"Si 12 kilos de naranja valen 18 euros entonces 1 kilo valdrá 1,5 euros. Luego 9 kilos valdrán 9 × 1,5, que es 13,5 euros"*

Como vemos en este caso es muy importante considerar situaciones que realmente busquen que los alumnos desarrollen el razonamiento proporcional de manera adecuada y no sólo se limiten a realizar cálculos numéricos que simplemente no aportan en lo absoluto en la comprensión del concepto. En este ejemplo es claro que no se usó la "regla de tres", sino que se analizó el problema en el contexto adecuado y se desarrolló mediante el uso de sucesiones numéricas que mantienen las relaciones estructurales de la situación proporcional, lo que según la autora, ayuda a que los alumnos generen rasgos de este tipo de razonamiento (Chamorro M, 2003).

En cuanto a lo que los alumnos necesitan desarrollar, Chamorro menciona que: *"Los alumnos necesitan desarrollar un sentido de la noción de razón entendido como el índice comparativo que proporciona información sobre una situación, y por tanto distinguir las situaciones en las que es posible aplicar este índice comparativo de las situaciones en las que no es posible. Esto implica reconocer que en una situación de proporcionalidad los cambios en una magnitud implican cambios en la otra, pero que el índice comparativo entre cantidades correspondientes es constante".*

Los aportes de Chamorro y los anteriormente mencionados constituyen un aporte relevante para el logro de un buen tratamiento del concepto de RPP. Existen muchos más aportes dentro del contexto matemático que no se mencionan, pero que sin duda han hecho que el concepto de RPP constituya un campo ampliamente investigado en los últimos cincuenta años (Obando et al., 2014b).

Pasamos a analizar el tercer ámbito.

### 3. Lo antropológico y lo semiótico.

En la primera mitad de la década de los noventa, se difunden ampliamente dos enfoques teóricos, que si bien corresponden a tradiciones investigativas diferentes, cada uno a su modo ha proporcionado nuevas formas (metodológicas y conceptuales) de abordar la investigación en didáctica de las matemáticas (Obando et al., 2014a). En el marco de la denominada "Teoría Antropológica de lo Didáctico" (TAD), razones, proporciones, proporcionalidad y números racionales se comprenden en términos de Organizaciones Matemáticas (OM) complejas definidas por tipos de situaciones, prácticas matemáticas, técnicas, tecnologías y teorías, estructuradas alrededor de praxeologías institucionalmente situadas. (Obando et al., 2014a)

La Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) de Chevallard (1999), sitúa la actividad matemática, y en consecuencia la actividad del estudio de las matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales, y por eso es que se habla de teoría "antropológica" (Bosch & Gascón, 2009). Este concepto incluye oponerse a la visión particular del mundo en que se excluyen los objetos, conceptos, temas, que se establecen como no pertinentes a la matemática porque aparecen culturalmente alejados de los temas considerados como emblemáticos de las cuestiones de didáctica de las matemáticas (Brosseau, 1997, citado por Hernán, 2013).

Según Chevallard (2007) es necesaria una revolución epistemológica y didáctica que ponga en el principio del aprendizaje de la matemática el estudio de cuestiones con verdadera razón de ser y a las que se esfuercen por responder. Se propone introducir en los sistemas de enseñanza procesos de estudio funcionales, donde los saberes no sean monumentos que el profesor muestra a los estudiantes, sino herramientas materiales y conceptuales, útiles para estudiar y resolver situaciones problemáticas (Corica, 2014).

Desde la perspectiva de las representaciones semióticas, se puede rescatar el reconocimiento de que si bien las distintas temáticas sobre las RPP abandonaron sus referentes hacia las magnitudes para centrarse en aspectos puramente numéricos (quizás por el influjo de las matemáticas modernas en los años setenta), en la actualidad aparece de nuevo un llamado a centrar el estudio de las mismas en las magnitudes, en particular, en relación al dominio de las razones (Adjiage, 2007; Adjiage & Pluvinage, 2007, citado por Obando et al., 2014a).

Los tres ámbitos mencionados se consideran importantes antes de comenzar con el planteamiento de la nueva metodología y lo que esta implica para el tratamiento del contenido en estudio. Pero como vemos también se han cometido errores que siguen presentes incluso hasta el día de hoy. A continuación se mencionan algunos de ellos.

## 3.8. Errores que se cometen en la enseñanza del concepto de razón y proporción

Como hemos visto el proceso de enseñanza sobre los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad es algo complejo, pero imprescindible dentro del contexto escolar. Es por esto que viendo la importancia que éstos poseen es que resulta muy importante desarrollarlos de manera correcta para conducir a los alumnos al logro de aprendizajes significativos, siempre apoyándose en la didáctica. Sin embargo no siempre es comprendida la importancia de abordar la enseñanza de la mejor manera por parte de los profesores y esto conduce a que los alumnos cometan errores en la comprensión de los conceptos.

Diversas investigaciones han puesto de manifiesto que los estudiantes basan su razonamiento intuitivo sobre las razones y proporciones en técnicas aditivas y de recuento en lugar de razonar en términos multiplicativos, lo que indica una deficiencia importante (Godino & Batanero, 2002).

En la década de los ochenta Hart y Karplus (Sánchez, 2013) encontraron que la mayoría de los estudiantes consideró difícil el resolver problemas matemáticos que involucran proporción. Una estrategia que ellos detectaron y que la usaron varios estudiantes fue *la estrategia aditiva incorrecta*, en la cual es sumada una cantidad fija que no se adecúa al modelo de la multiplicación como suma repetida, para efectuar una ampliación, y a medida que pasan los años, los estudiantes siguen manteniendo ese error (Ruiz, 2006). Además comenta que a menudo los problemas de proporción requieren el reconocimiento de un factor escalar fraccional, seguido de una multiplicación por el factor, por lo que considera que la comprensión de las fracciones y las proporciones están vinculadas.

Nesher y Sukenik (1989) hacen un breve recorrido por estudios previos en torno a los conceptos de razón y proporción. Estos autores comentan que el procedimiento más usual seguido en muchos estudios, consistió en la administración de un test que contenía problemas de razón (dado con o sin ilustraciones; presentado en forma escrita u oral) y en analizar las respuestas de los sujetos en términos de las estrategias usadas para resolver estos problemas. Señalan que uno de los errores dominantes (al igual que lo hizo Hart anteriormente) en las estrategias usadas por niños de diferentes edades, es la estrategia aditiva, en donde la relación de las razones es vista como la diferencia entre términos, en lugar de comprender que es de carácter multiplicativo (Ruiz, 2006).

Los trabajos de Bosch (1994) y García (2005) muestran un conjunto de problemáticas, desde el punto de vista del saber de referencia, que pueden ser la causa de la falta de comprensión de los estudiantes con respecto a la proporcionalidad en la educación básica:

1. La homogeneidad de las propuestas clásicas para la enseñanza de la proporcionalidad, que centran su estudio en los ámbitos puramente numéricos, separándola de las relaciones funcionales y de otras áreas del currículo en donde la proporcionalidad podría funcionar como una herramienta potente en la solución de los problemas propuestos.
2. Si bien se identifican elementos praxeológico [2] en relación con la proporcionalidad directa, inversa y compuesta, estos no se integran en praxeologías globales con mayor coherencia teórica; esto es, se conservan como fragmentos aislados y con un bajo nivel de algebrización, perdiendo los elementos teórico-tecnológicos que permitirían su integración en praxeologías globales más estructuradas (Bolea, Bosch, & Gascon, 2001; Bosch, García, Gascón, & Higueras,2006; García, Gascón, Higueras, & Bosch, 2006; citado por Obando et al., 2014b).

Observando estos errores podemos ver que el profesor no siempre es capaz de establecer en el estudiante una noción multiplicativa del concepto de razón, lo cual lo conduce a ver la razón sólo como una entidad numérica racional, que según Freudenthal (1983) corresponde a una violación de la razón, privándola de lo que la hace valiosa como tal, ya que ésta es una función de un par ordenado de números o valores de magnitud.

---

[2] El término praxeología está referido al proceso que busca desarrollar y mantener en el profesional la actitud de indagar, enriquecida en teorías y métodos de investigación permitiendo la reflexión disciplinada de la práctica educativa y el avance del conocimiento y didáctica. .

Todo lo que se acaba de mencionar en este capítulo corresponde al marco teórico que sustenta esta investigación, el cual facilita la comprensión de los conceptos involucrados que logra establecer correctamente la manera de incorporar la metodología basada en el proceso de visualización en la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad, así como también se mencionan los factores socioafectivos importantes de considerar en todo proceso educativo.

Con estos antecedentes se establece el Marco metodológico que constituye parte fundamental de la investigación y que se presenta en el siguiente capítulo.

# Capítulo 4

# Marco Metodológico

## 4.1. Tipo de Investigación

El estudio realizado es de tipo explicativo-correlacional, ya que se describió y analizó la incidencia de las variables consideradas producto del proceso de visualización, además de comprobar la existencia alguna relación entre éstas mediante la verificación de hipótesis a través de pruebas estadísticas.

El enfoque de la investigación es cuantitativo, puesto que se recolectaron datos para un posterior análisis estadístico de los mismos, los ya mencionados datos corresponden al aprendizaje de los estudiantes en el pre y postest de matemática, además de los pre y postest socioafectivos.

## 4.2. Diseño de investigación

El diseño de la investigación es pre-experimental, puesto que no se realizó una comparación entre grupos debido a que no se utilizó grupo control, sino que se analizan las consecuencias de una manipulación intencionada de una muestra en cuanto al progreso de las variables consideradas en este estudio, al utilizar el proceso de visualización.

## 4.3. Población

La población considerada para la presente investigación estuvo conformada por todos los estudiantes de séptimo y octavo año de dos colegios de dependencia particular subvencionado, uno rural y uno urbano de la ciudad de Los Ángeles, con una totalidad de 70 alumnos. Los dos establecimientos anteriormente mencionados, pertenecen a un nivel socio-económico bajo, según SIMCE 2014, ya que, la mayoría de los apoderados declaró tener hasta 8 años de escolaridad y un ingreso familiar de hasta $230.000.

## 4.4. Muestra

La muestra fue seleccionada de manera intencionada en los dos establecimientos, quedando conformada por dos muestras; la primera correspondiente al octavo del establecimiento A, el que es designado como $GE_A$; corresponde al 10% de la población.

Por otra parte, la otra muestra estuvo conformada por el octavo del establecimiento B, el que es designado como $GE_B$; corresponde al 30% de la población.

Es importante aclarar la nomenclatura utilizada, es decir, G: grupo; E: experimental; A: Establecimiento A; B: Establecimiento B. Así, $GE_A$ y $GE_B$ corresponden a los grupos experimentales, de los establecimientos A y B respectivamente.

### 4.4.1. Establecimiento A

Los estudiantes pertenecientes al establecimiento A se encuentran en un contexto rural de la ciudad de Los Ángeles, en el cual 14.4% de los estudiantes viven el sector urbano y el 85.6% en el sector rural de la ya mencionada ciudad. Dicho establecimiento es de dependencia particular subvencionado con un nivel socioeconómico bajo, ya que la mayoría de los padres han declarado tener hasta 8 años de escolaridad y con un ingreso familiar de hasta $220.000.

#### 4.4.1.1.Grupo Experimental A ($GE_A$)

El grupo $GE_A$ estuvo conformado por 7 estudiantes, de los cuales 6 corresponden a mujeres y un hombre. La totalidad de los estudiantes de este grupo vive en el sector rural de la ciudad de Los Ángeles. A continuación se presenta una tabla con el nivel de escolaridad de los padres:

Tabla 1.

| **Nivel Educacional** | **Padre** | | **Madre** | |
|---|---|---|---|---|
| | Cantidad | Porcentaje | Cantidad | Porcentaje |
| **Básica incompleta** | - | - | - | - |
| **Básica completa** | 1 | 14.3% | 3 | 57.2% |
| **Media incompleta** | 1 | 14.3% | 2 | 28.6% |
| **Media completa** | 1 | 14.3% | 1 | 14.3% |
| **Estudios superiores** | 2 | 28.6% | - | - |
| **No informado** | 2 | 28.6% | 1 | 14.3% |
| **Total** | 7 | 100% | 7 | 100% |

En este grupo se trabajó la unidad de razón, proporción y proporcionalidad, utilizando el proceso de visualización, durante un periodo de 28 horas pedagógicas efectuadas durante los meses de octubre y noviembre.

### 4.4.2. Establecimiento B

Los alumnos pertenecientes al establecimiento B, se encuentran en un sector urbano de la ciudad de Los Ángeles, en el cual 95,2% de los estudiantes viven en el sector urbano y el 4,8% en el sector rural de la ya mencionada ciudad. Dicho establecimiento es de dependencia particular subvencionado con un nivel socioeconómico bajo, ya que la mayoría de los padres han declarado tener hasta 8 años de escolaridad y con un ingreso del hogar de hasta $230.000, entre el 79,01% y 100% de los estudiantes se encuentran en condición de vulnerabilidad social.

#### 4.4.2.1.Grupo Experimental B ($GE_B$)

El grupo $GE_A$ estuvo conformado por 21 estudiantes, de los cuales 5 corresponden a mujeres y 16 corresponden a hombres. A continuación se presenta una tabla con el nivel de escolaridad de los padres:

Tabla 2.

| **Nivel Educacional** | **Padre** | | **Madre** | |
|---|---|---|---|---|
| | Cantidad | Porcentaje | Cantidad | Porcentaje |
| **Básica incompleta** | 4 | 19% | 7 | 33,3% |
| **Básica completa** | 3 | 14,3% | 3 | 14,3% |
| **Media incompleta** | 6 | 28,6% | 5 | 23,8% |
| **Media completa** | 1 | 4,8% | 1 | 4,8% |
| **Estudios superiores** | - | - | 2 | 9,5% |
| **No informado** | 7 | 33,3% | 3 | 14,3% |
| **Total** | 21 | 100% | 21 | 100% |

En este grupo se trabajó la unidad de razón, proporción y proporcionalidad, utilizando el proceso de visualización, durante un periodo de 28 horas pedagógicas efectuadas durante los meses de octubre y noviembre.

## 4.5. Variables

En esta sección se explicitan la variable independiente considerada para la investigación y aquellas que varían en respuesta a ésta, y se definen conceptual y operacionalmente.

### 4.5.1. Variable independiente

- Método de enseñanza- aprendizaje:
  - **Metodología de aprendizaje basada en el proceso de visualización:** Definición Conceptual: Habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido se trata de un proceso mental muy usado en distintas áreas del conocimiento matemático y, más generalmente, científico.

### 4.5.2. Variables dependientes y su definición operacional

A continuación se presentan las variables dependientes y su definición operacional respectiva.

- Grado de conocimiento de la razón, proporción y proporcionalidad:

  **Definición Conceptual:**

  Se entiende por conocimiento a la mezcla de experiencias, valores importantes, información contextual y puntos de vista de expertos, que facilitan un marco de análisis para la evaluación e incorporación de nuevas experiencias e información. (Davenport y Prusak, 1998; citado por Segarra & Bou., 2004)

**Definición Operacional:**

Puntaje obtenido por los estudiantes en el pretest y postest aplicado a los grupos experimentales de los establecimientos anteriormente mencionados.

- Nivel de actitud hacia las matemáticas:

**Definición Conceptual:**

Se entiende por actitud hacia la matemática como la predisposición aprendida de los estudiantes a responder de manera positiva o negativa a las matemáticas, lo que determina su intensión e influye en su comportamiento anta la materia (Pérez-Tyteca, Castro, Rico y Casto, 2011; citado por Roberto, Oliver, & Espinosa, 2012)

**Definición Operacional:**

Puntaje obtenido por los estudiantes en el test de actitud hacia la matemática, aplicado tanto al inicio como al final de la intervención, a los grupos experimentales de los establecimientos anteriormente mencionados. El test consta de un total de 95 puntos.

- Nivel de ansiedad hacia la matemática:

**Definición Conceptual:**

La ansiedad hacia la matemática puede ser entendida como un miedo irracional hacia esta disciplina que dificulta la realización de cálculos numéricos y la resolución de problemas de matemáticas en diversas situaciones de la vida académica y cotidiana del sujeto (Gresham, 2010; citado por J. Sánchez, Segovia, & Miñán, 2011)

**Definición Operacional:**

Puntaje obtenido por los estudiantes en el test de ansiedad hacia la matemática, aplicado tanto al inicio como al final de la intervención, a los grupos experimentales de los establecimientos anteriormente mencionados. Dicho test tiene una totalidad de 120 puntos.

- Nivel de Motivación hacia la matemática:

  **Definición Conceptual:**

  Schunk (1998) señala que tanto el concepto de motivación como el de aprendizaje van integrados, ya que el establecimiento de metas y la autoevaluación del progreso constituyen importantes mecanismos motivacionales.

  **Definición Operacional:**

**5.** Puntaje obtenido por los estudiantes en el test de motivación hacia la matemática que se aplicará, tanto al inicio como al final de la intervención, a los grupos experimentales de los establecimientos anteriormente mencionados. El test posee un total de 30 puntos.

## 4.6. Instrumentos de recolección de datos

Para llevar a cabo el cumplimiento de los objetivos propuestos y poder dar respuesta a las preguntas de investigación, se utilizaron cuatro instrumentos para recolectar datos, tanto en el pretest (aplicado antes de la intervención pedagógica) como en el postest (después de la intervención); una prueba de dominio sobre razones, proporciones y proporcionalidad, un test de actitud hacia la matemática, un test de ansiedad hacia la matemática y escala de apreciación de la motivación en los estudiantes.

### 4.6.1. Pretest

Este instrumento fue creado con el propósito de verificar los contenidos previos que los estudiantes poseen antes de comenzar con la intervención, en los grupos experimentales. Cada una de las preguntas apunta a los objetivos fundamentales propuestos por el MINEDUC para el nivel de octavo año. Las fuentes de donde se extrajeron las preguntas del pretest son las pruebas SIMCE y TIMMS.

Los contenidos incluidos en el pretest son los siguientes:

- Concepto de razón.
- Propiedades de la razón.
- Proporcionalidad directa.
- Proporcionalidad inversa.
- Variables no proporcionales.
- Concepto de variable.
- Variaciones proporcionales.

Los objetivos específicos que mide el pretest son:

**A.** Encontrar e interpretar la razón asociada a situaciones de la vida real.

**B.** Utilizar las propiedades de una razón en situaciones de la vida real.

**C.** Resolver problemas que involucren variables proporcionales y no proporcionales a partir de tablas y/o enunciados.

**D.** Resolver problemas que involucren proporcionalidad directa.

**E.** Resolver problemas que involucren proporcionalidad inversa.

**F.** Reconocer variables a partir de un enunciado.

La siguiente tabla relaciona cada ítem con los objetivos específicos:

Tabla 3.

| Categoría | Dominios cognitivos | | | | | | N° de |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Contenido | Ítem Conocimiento | Objetivo | Ítem Aplicación | Objetivo | Ítem Razonamiento | Objetivo | Ítems |
| **Concepto de razón.** | 1.a – 1.b | **A** | 5 – 2.a | **A** | 2.b | **A** | 25% |
| **Propiedades de la razón** | 1.c | **B** | 3 | **B** | 4 | **B** | 15% |
| **Proporcionalidad directa** | 7 | **D** | 6 | **D** | 12 | **D** | 15% |
| **Proporcionalidad inversa.** | | | 13 | **E** | 14 | **E** | 10% |
| **Variables no proporcionales** | 15 | **C** | | | 16 | **C** | 10% |
| **Concepto de variable** | | | 10 | **F** | 11 | **F** | 10% |
| **Variaciones proporcionales.** | 9 – 15 | **C** | | | 8 | **C** | 15% |
| **Total.** | 35%<br>7 | | 30%<br>6 | | 35%<br>7 | | 20 |

Para su elaboración también se utilizaron los dominios cognitivos de matemática para 4° y 8° básico presentes en la prueba TIMMS, los cuales se clasifican en: Conocimiento, Aplicación y Razonamiento.

El primer dominio cognitivo, el conocimiento, cubre los hechos, conceptos y procedimientos que necesitan conocer los estudiantes, mientras que el segundo, la aplicación, se centra en la capacidad de los mismos para aplicar el conocimiento y la comprensión conceptual a la hora de resolver problemas o contestar a preguntas. El tercer dominio cognitivo, el razonamiento, va más allá de la solución de problemas de rutina para abarcar situaciones no conocidas, contextos complejos y problemas con múltiples etapas. (Educacion, 2012)

A continuación se adjuntan las tablas de especificaciones las cuales están descritas según los dominios cognitivos y los contenidos:

Tabla 4.

| **Categoría** | **Dominios cognitivos** | | | **N° de Ítems** |
|---|---|---|---|---|
| **Contenido** | Ítem Conocimiento | Ítem Aplicación | Ítem Razonamiento | |
| **Concepto de razón.** | 1.a – 1.b | 5 – 2.a | 2.b | 25% |
| **Propiedades de la razón** | 1.c | 3 | 4 | 15% |
| **Proporcionalidad directa** | 7 | 6 | 12 | 15% |
| **Proporcionalidad inversa.** | | 13 | 14 | 10% |
| **Variables no proporcionales** | 15 | | 16 | 10% |
| **Concepto de variable** | | 10 | 11 | 10% |
| **Variaciones proporcionales.** | 9 – 15.a | | 8 | 15% |
| **Total.** | 35% 7 | 30% 6 | 35% 7 | 20 |

El pretest consta de tres partes; la primera corresponde a preguntas de desarrollo, el cual está conformado por los ítemes 1.a, 1.b, 1.c, 2.a, 2.b, 3 y 4. La segunda parte corresponde a preguntas de Selección Múltiple la cual está conformada por los ítemes 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11. Finalmente, la tercera parte que corresponde a problemas de aplicación, está conformada por los ítemes 12, 13, 14, 15.a, 15.b, 15.c, 16.a, 16.b.  Cada uno de los ítemes tiene como puntaje 1 punto; por lo tanto, el puntaje máximo es de 22 puntos.

Este instrumento fue sometido a validación por parte de 5 profesores de la Universidad de Concepción, Campus Los Ángeles, todos ellos pertenecientes a la Escuela de Educación. El proceso de validación consiste en presentar el pretest a los 5 profesores que actúan de jueces y son ellos quienes analizan el instrumento para decidir si éste realmente responde a los objetivos planteados y a su vez corregir cualquier error que pueda haber. Para su realización se utilizó un tiempo estimado de 3 semanas, en las cuales cada juez revisó el test y entregó sus observaciones en la pauta que se adjuntó. Finalmente se realizan las correcciones y se concluye el proceso para utilizar el instrumento en los grupos destinados.

Una vez aplicado el pretest se estudió su confiabilidad calculando el Alpha de Cronbach, obteniendo un valor de $\alpha = 0{,}500$, lo cual indica que es suficiente como primera etapa de la investigación. (Nunnally, 1967).

### 4.6.2. Escala de apreciación de la Motivación en los estudiantes

Este instrumento primeramente fue extraído del seminario "*Implementación de algunos aspectos de la metodología de estudio de casos en la enseñanza de las matemáticas*" (2013) de Pascal D. y Vidal G., elaborado por la docente Irma Lagos Herrera de la Universidad de Concepción. La Pauta de Observación de Expresión de la Motivación de dicho seminario, consta de siete indicadores con tres categorías: Siempre, A veces y Nunca, la cual fue reducida a seis ítems con cinco categorías cuantitativas referidas a la frecuencia con que se observa la conducta especificada, para tener un mayor grado de precisión de lo que se observará en los estudiantes. Estas categorías son: Siempre (5 puntos), Casi siempre (4 puntos), A veces (3 puntos), Casi nunca (2 puntos) y Nunca (1 punto), las cuales miden el grado de aumento o disminución de la motivación de los estudiantes desde la apreciación personal del docente, antes y después de llevar a cabo la intervención para su posterior análisis en cuanto al progreso obtenido.

El estudio de la confiabilidad que se aplicó a 36 estudiantes, obteniendo un coeficiente alpha de Cronbach de 0,950, lo que indica una alta fiabilidad del test.

### 4.6.3. Test de Ansiedad hacia las Matemáticas

Una segunda variable a considerar en esta investigación, es la ansiedad hacia las matemáticas de los estudiantes. Para esto se consideró el Test de Ansiedad hacia las Matemáticas elaborado por Muñoz J. y Mato M. en el año 2007 incluye 24 ítemes los que se valoran en una escala que tiene cinco categorías cuantitativas referidas a la "cantidad" con que el estudiante manifiesta ciertas conductas. Estas categorías son: nada (1 punto), muy poco (2 puntos), algo (3 puntos), bastante (4 puntos) y mucho (5 puntos). Las conductas señalan lo que el estudiante "hace o piensa" frente a situaciones puntuales. Los 24 ítemes están distribuidos en cinco factores: el factor ansiedad ante la evaluación de matemática que comprende 11 ítemes (1, 2, 8, 10, 11, 14, 15, 18, 20, 22 y 23); el factor ansiedad ante la temporalidad, formado por 4 ítemes (4, 6, 7, y 12); el factor ansiedad ante la comprensión del problema, formado por 3 ítemes (5, 17 y 19); el factor ansiedad frente a los números y operaciones matemáticas, que comprende 3 ítemes (3, 13 y 16); y el factor ansiedad ante situaciones matemáticas de la vida real, formado por 3 ítemes (9, 21 y 24).

Los autores del test hicieron un análisis de fiabilidad con 160 estudiantes, obteniendo un coeficiente alpha de Cronbach (consistencia interna) de 0,8351, por lo que se redactaron de manera más sencilla algunos ítemes que resultaban difíciles de comprender por los estudiantes y que, en la aplicación piloto, habían causado problemas de interpretación y comprensión y se vuelve a aplicar a la muestra final de 1220 sujetos, obteniendo así una fiabilidad de 0,9504 lo que indica una alta fiabilidad del test (Muñoz, J. & Mato, M., 2007).

### 4.6.4. Test de Actitud hacia las Matemáticas

También se consideró la actitud hacia la matemática de los estudiantes, es por ello que se aplicó el Test de Actitud hacia las Matemáticas elaborado por Muñoz J. y Mato M. en el año 2008 que consta de 19 ítemes, los que se valoran en una escala tipo Likert con cinco categorías: muy de acuerdo (5 puntos), de acuerdo (4 puntos), me es indiferente (3 puntos), en desacuerdo (2 puntos) y muy en desacuerdo (1 punto), en la cual el estudiante deberá leer una sentencia declarativa para luego responder según su grado de acuerdo o desacuerdo con respecto a ésta. Este instrumento incluye dos grandes factores que inciden en la actitud hacia las matemáticas de los estudiantes: la *actitud del profesor percibida por el alumno,* formado por los 11 ítemes (2, 3, 5, 6, 7,9, 10, 12, 14, 15 y 19) y el *agrado y utilidad de las matemáticas en el futuro,* formado por 8 ítems (1, 4, 8, 11, 13, 16, 17 y 18).

Este test fue sometido a un análisis de fiabilidad, luego de ser aplicado a 160 estudiantes, obteniendo así una confiabilidad de 0,6737 en su muestra piloto y de 0,9706 para la muestra final constituida por 1220 estudiantes, lo que indica una alta fiabilidad del instrumento (Muñoz, J. , Mato, M., 2008).

### 4.6.5. Postest

Este instrumento corresponde a una prueba similar al pretest, con los mismos objetivos, pero con valores distintos para cada una de las preguntas, las cuales como se mencionó anteriormente fueron buscadas en las pruebas SIMCE y TIMSS.

Se aplicó a los grupos experimentales una vez terminada la intervención, esto con el objetivo de comparar los resultados obtenidos con los del pretest y analizar si los métodos utilizados mejoraron o no el rendimiento.

El postest consta de tres partes; la primera conformada por los ítemes 1.a, 1.b, 1.c, 2.a, 2.b, 3 y 4. La segunda parte corresponde a preguntas de Selección Múltiple y está conformada por los ítemes 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. La tercera parte corresponde a preguntas de aplicación y está conformada por los ítemes 12, 13, 14, 15.a, 15.b, 15.c, 16.a y 16.b. Todos los ítemes con un puntaje de 1 punto, por lo que el puntaje máximo es de 22 puntos.

Posteriormente se estudió la confiabilidad del postest y se llevó a cabo el cálculo del alpha de Cronbach, obteniendo un valor de $\alpha = 0.886$ correspondiente a la totalidad de establecimientos, por lo que es posible afirmar que el nivel de confiabilidad es bueno.

La tabla de especificaciones es la misma del pretest, ya que sólo se modificaron los valores de las preguntas, sin embargo los objetivos y dominios cognitivos no fueron modificados.

A continuación, se presentan las tablas que relacionan los ítemes con los contenidos, objetivos y dominios cognitivos:

Tabla 5.

| **Categoría** | **Dominios cognitivos** | | | **N° de Ítems** |
|---|---|---|---|---|
| **Contenido** | Ítem Conocimiento | Ítem Aplicación | Ítem Razonamiento | |
| **Concepto de razón.** | 1.a – 1.b | 5 – 2.a | 2.b | 25% |
| **Propiedades de la razón** | 1.c | 3 | 4 | 15% |
| **Proporcionalidad directa** | 7 | 6 | 12 | 15% |
| **Proporcionalidad inversa.** | | 13 | 14 | 10% |
| **Variables no proporcionales** | 15 | | 16 | 10% |
| **Concepto de variable** | | 10 | 11 | 10% |
| **Variaciones proporcionales.** | 9 – 15 | | 8 | 15% |
| **Total.** | 35% 7 | 30% 6 | 35% 7 | 20 |

La siguiente tabla relaciona cada ítem con los objetivos específicos:

Tabla 6.

| **Categoría** | **Dominios cognitivos** | | | | | | **N° de Ítems** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Contenido** | Ítem Conocimiento | Objetivo | Ítem Aplicación | Objetivo | Ítem Razonamiento | Objetivo | |
| **Concepto de razón** | 1.a – 1.b | **A** | 5 – 2.a | **A** | 2.b | **A** | 25% |
| **Propiedades de la razón** | 1.c | **B** | 3 | **B** | 4 | **B** | 15% |
| **Proporcionalidad directa** | 7 | **D** | 6 | **D** | 12 | **D** | 15% |
| **Proporcionalidad inversa** | | | 13 | **E** | 14 | **E** | 10% |
| **Variables no proporcionales** | 15 | **C** | | | 16 | **C** | 10% |
| **Concepto de variable** | | | 10 | **F** | 11 | **F** | 10% |
| **Variaciones proporcionales** | 9 – 15 | **C** | | | 8 | **C** | 15% |
| **Total.** | 35%<br>7 | | 30%<br>6 | | 35%<br>7 | | 20 |

Posteriormente se estudió la confiabilidad del postest y se llevó a cabo el cálculo del Alpha de Cronbach, obteniendo un valor de $\alpha = 0.886$ correspondiente a la totalidad de establecimientos, por lo que es posible afirmar que el nivel de confiabilidad es bueno.

La tabla de especificaciones es la misma del pretest ya que sólo se modificaron los valores de las preguntas, sin embargo los objetivos y dominios cognitivos no fueron modificados. A continuación, se presentan las tablas que relacionan los ítems con los contenidos, objetivos y dominios cognitivos:

## 4.7. Intervención

A continuación se describe el procedimiento seguido para la realización de la investigación.

A los estudiantes de los grupos experimentales, se les aplicó un pretest de motivación, actitud y ansiedad matemática, y el pretest de conocimientos sobre razones, proporciones y proporcionalidad, con el fin de determinar el nivel de estos factores socioafectivos de cada uno de los estudiantes antes de comenzar con la intervención.

Posteriormente, se comienza la intervención en los grupos experimentales utilizando el proceso de visualización. Los estudiantes pertenecientes a estos grupos realizaron actividades concretas, apoyadas de material pictórico para luego resolver situaciones de manera gráfica y simbólica.

Una vez finalizadas las sesiones de clase, se procedió a aplicar los postest correspondientes a los test mencionados con anterioridad: Postest de motivación, actitud hacia la matemática, ansiedad matemática y el de conocimiento sobre razón, proporción y proporcionalidad con modificaciones con respecto al inicial. Todo lo anterior tuvo como finalidad comparar el progreso que hubo en las variables ya descritas comparando los grupos experimentales.

Es importante mencionar que la intervención se realizó en 14 sesiones de 90 minutos cada una, lo que equivale a dos horas pedagógicas, obteniendo un total de 28 horas pedagógicas. La razón por la que se pudo implementar esta cantidad de horas es porque dos de los seminaristas son los profesores de la asignatura de matemática de los cursos correspondientes.

A continuación se presenta un cuadro resumen de las fechas en las que se realizaron cada una de las clases y el tema que se abordó. Para ver en detalle las planificaciones de clase (ver a Anexo B).

Calendario de intervención cursos expuestos al proceso de visualización:

Tabla 7.

| **Clase** | **Fecha Liceo A** | **Fecha Liceo B** | **Horas pedagógicas** | **Tema** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 20 de octubre | 16 de octubre | 2 horas | Concepto de razón |
| **2** | 23 de octubre | 22 de octubre | 2 horas | Propiedades de la razón. |
| **3** | 26 de octubre | 23 de octubre | 2 horas | Concepto y propiedades de la razón. |
| **4** | 27 de octubre | 26 de octubre | 2 horas | Concepto y propiedades de la razón. |
| **5** | 30 de octubre | 29 de octubre | 2 horas | Concepto de proporcionalidad. |
| **6** | 02 de noviembre | 30 de octubre | 2 horas | Concepto de proporcionalidad. |
| **7** | 03 de noviembre | 02 de noviembre | 2 horas | Concepto de variable. |
| **8** | 06 de noviembre | 05 de noviembre | 2 horas | Relación de proporcionalidad directa. |
| **9** | 09 de noviembre | 06 de noviembre | 2 horas | Relación de proporcionalidad directa |
| **10** | 10 de noviembre | 09 de noviembre | 2 horas | Relación de proporcionalidad directa |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **11** | 13 de noviembre | 12 de noviembre | 2 horas | Relación de proporcionalidad inversa. |
| **12** | 16 de noviembre | 13 de noviembre | 2 horas | Relación de proporcionalidad inversa. |
| **13** | 17 de noviembre | 16 de noviembre | 2 horas | Relación de proporcionalidad inversa. |
| **14** | 20 de noviembre | 19 de noviembre | 2 horas | Ejercitación proporcionalidad directa e inversa. |

# Capítulo 5

# Verificación de hipótesis

Dado a los antecedentes que describen a las muestras (Puntaje SIMCE, nivel socioeconómico y dependencia del establecimiento) se asume que corresponden a muestras homogéneas.

## 5.1. Análisis pre y post test matemáticas

**Liceo A:**

Descripción de los resultados obtenidos en el pre y post test de matemática. El pre y post test tienen una puntuación entre 0 y 22.

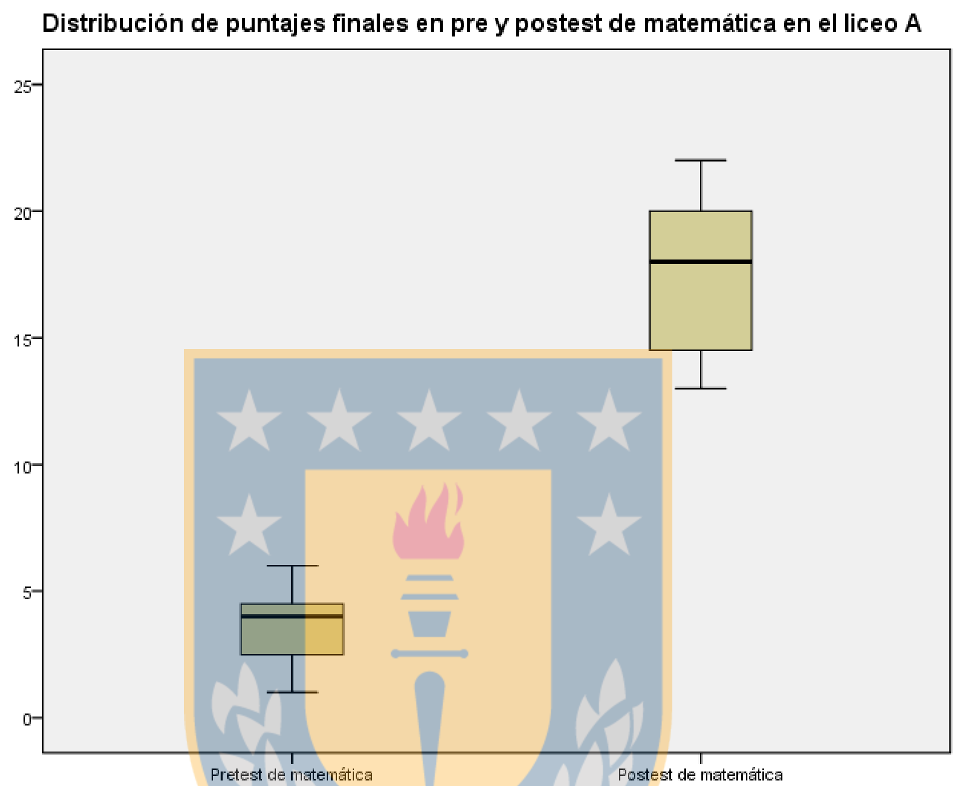
**Hipótesis 1:** Los estudiantes expuestos al proceso de visualización, mejoran el puntaje promedio su rendimiento en la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad.

**Tabla 8: Estadísticos descriptivos**

| | N | Rango | Mínimo | Máximo | Media | Desviación estándar |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pretest de matemática | 7 | 5 | 1 | 6 | 3,57 | 1,718 |
| Postest de matemática | 7 | 9 | 13 | 22 | 17,43 | 3,505 |

En la tabla 8, se observa que en el pre test los estudiantes obtuvieron un puntaje mínimo de 1 punto con un máximo de 6 puntos, con un promedio de 3,57; mientras que en el post test el puntaje mínimo obtenido por los estudiantes es de 13 puntos con un máximo de 22 puntos y un promedio de 17,43.

**Gráfico 1.**




En el gráfico 1, se observa diferencias en las distribuciones de los puntajes obtenidos en la prueba final respecto a la prueba inicial. Para determinar si estas diferencias son significativas estadísticamente, se realiza contraste de hipótesis.

Se quiere contrastar, a un nivel de confianza de $\alpha = 0{,}05$, la hipótesis nula de que los datos proceden de una distribución normal, para decidir las pruebas de contraste que se deben utilizar para determinar la veracidad de la hipótesis de investigación.

$\mathbf{H_0}$**:** El conjunto de datos de la variable sigue una distribución normal

$\mathbf{H_1}$**:** El conjunto de datos de la variable no sigue una distribución normal

**Tabla 9: Pruebas de normalidad variable puntaje pre y postest**

| | Shapiro-Wilk | | |
|---|---|---|---|
| | Estadístico | gl | Sig. |
| Pretest de matemática | ,980 | 7 | ,958 |
| Postest de matemática | ,933 | 7 | ,578 |

Se observa en la tabla 9, que ambas pruebas de normalidad muestran que el puntaje del pre test y el puntaje del post test se distribuyen según una ley normal, ya que el valor-p (0,958 y 0,578 respectivamente) es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$. Esto nos permite optar por pruebas paramétricas para contrastar hipótesis de diferencias de medias.

Para determinar diferencias significativas se plantean las siguientes hipótesis:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 < \mu_2$$

$\mu_1$: Puntaje promedio en pretest de matemática

$\mu_2$: Puntaje promedio en postest matemática

**Tabla 10: Prueba t de Student para muestras relacionadas**

| | Diferencias emparejadas | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Media | Desviación estándar | Media de error estándar | t | gl | Sig. (bilateral) |
| Pretest de matemática - Postest de matemática | -13,857 | 3,579 | 1,353 | -10,244 | 6 | ,000 |

En la tabla 10, se observa que el valor-p (bilateral) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$; luego existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula; por lo tanto se concluye que existe diferencia significativa entre la media del puntaje pre y post test para estudiantes participantes del proceso de visualización en la muestra Liceo A, es decir, los y las estudiantes expuestos al proceso de visualización incrementan su rendimiento en la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad, ya que aumentan el promedio del post test en relación al pre test en 12 puntos (ver tabla 8).

## Liceo B:

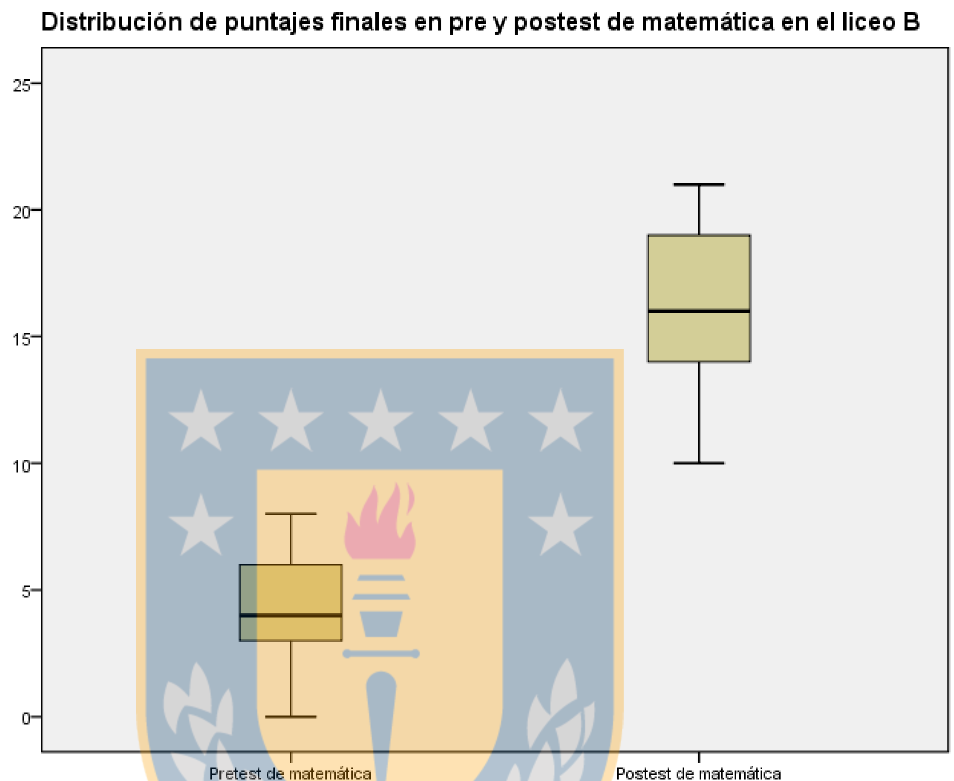
Descripción de los resultados obtenidos en el pre y post test de matemática. El pre y post test tienen una puntuación entre 0 y 22.

**Tabla 11: Estadísticos descriptivos**

| | N | Rango | Mínimo | Máximo | Media | Desviación estándar |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pretest de matemática | 21 | 8 | 0 | 8 | 4,14 | 2,242 |
| Postest de matemática | 21 | 11 | 10 | 21 | 16,29 | 3,379 |

En la tabla 11, se observa que en el pretest los estudiantes obtuvieron un mínimo de 0 respuestas correctas y un máximo de 8 respuestas correctas, un puntaje promedio total de 4,14. Mientras que en el postest el puntaje mínimo aumento a 10 respuestas correctas y 21 respuestas correctas, con un puntaje promedio de 16,29.

**Gráfico 2.**




En el gráfico 2, se observan diferencias en las distribuciones de los puntajes obtenidos en la prueba final con respecto a la prueba inicial. Para determinar si estas diferencias son significativas estadísticamente, se realiza contraste de hipótesis.

Se quiere contrastar a un nivel de confianza de $\alpha = 0{,}05$ la hipótesis nula de que los datos proceden de una distribución normal, para decidir las pruebas de contraste que se deben utilizar para determinar la veracidad de la hipótesis de investigación.

**$H_0$:** El conjunto de datos de la variable sigue una distribución normal

**$H_1$:** El conjunto de datos de la variable no sigue una distribución normal

Tabla 12: Pruebas de normalidad variable puntaje pre y postest

| | Shapiro-Wilk | | |
|---|---|---|---|
| | Estadístico | gl | Sig. |
| Pretest de matemática | ,948 | 21 | ,319 |
| Postest de matemática | ,942 | 21 | ,236 |

Se observa en la tabla 12, que ambas pruebas de normalidad muestran que el puntaje del pre test y el puntaje del post test se distribuyen según una ley normal, ya que el valor-p (0,319 y 0,236 respectivamente) es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$. Esto nos permite optar por pruebas paramétricas para contrastar hipótesis de diferencias de medias.

Para determinar diferencias significativas se plantean las siguientes hipótesis:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 < \mu_2$$

$\mu_1$: Puntaje promedio en pretest de matemática

$\mu_2$: Puntaje promedio en postest matemática

Tabla 13: Prueba de t de Student para muestras relacionadas

| | Diferencias emparejadas | | t | gl | Sig. (bilateral) |
|---|---|---|---|---|---|
| | Media | Desviación estándar | | | |
| Pretest de matemática - Postest de matemática | -12,143 | 3,719 | -14,964 | 20 | ,000 |

En la tabla 13, se observa que el valor-p (bilateral) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$; luego existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula; por lo tanto se concluye que existe diferencia significativa entre la media del puntaje pre y postest para estudiantes expuestos al proceso de visualización en la muestra Liceo B, es decir, los estudiantes participantes del proceso de visualización incrementan su rendimiento considerablemente en la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad, esto se puede observar en que la diferencia entre las medias del pre y postest es de 12,143.

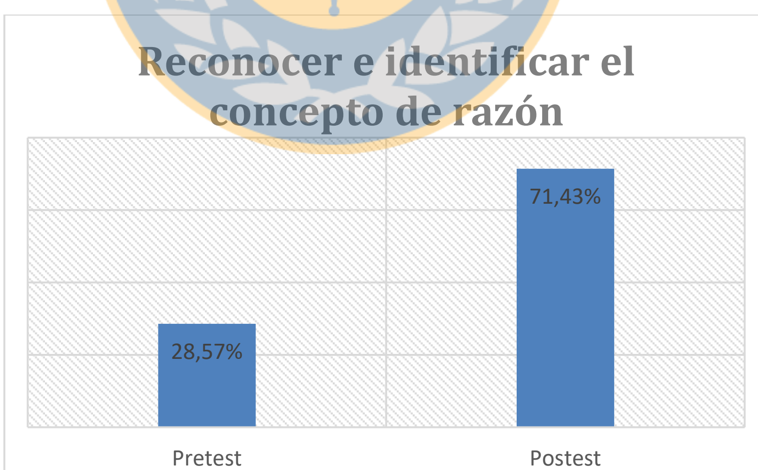
## 5.2. Análisis descriptivo por ítem

Para el objetivo A "Encontrar e interpretar la razón asociada a situaciones de la vida real" se obtuvieron los siguientes resultados:

- En ítem 1.a

**Liceo A**

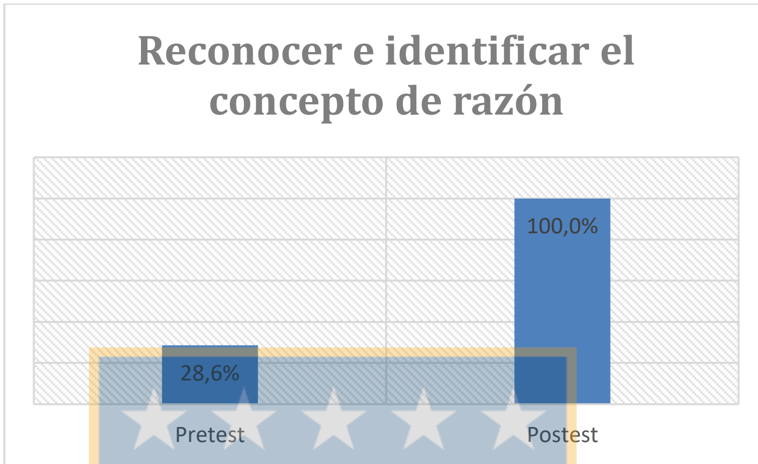
**Gráfico 9:**




El gráfico 9, muestra que en el pretest el 28,57% de los estudiantes respondió de manera acertada, mientras que en el postest el 71,43% del alumnado fue capaz de reconocer e identificar el concepto de razón.

**Liceo B**

**Gráfico 10:**




En el gráfico 10, se puede apreciar que en el pretest el 28,6% de los estudiantes respondió de manera acertada, mientras que en el postest la totalidad del alumnado lo hizo de forma correcta

- En ítem 1.b

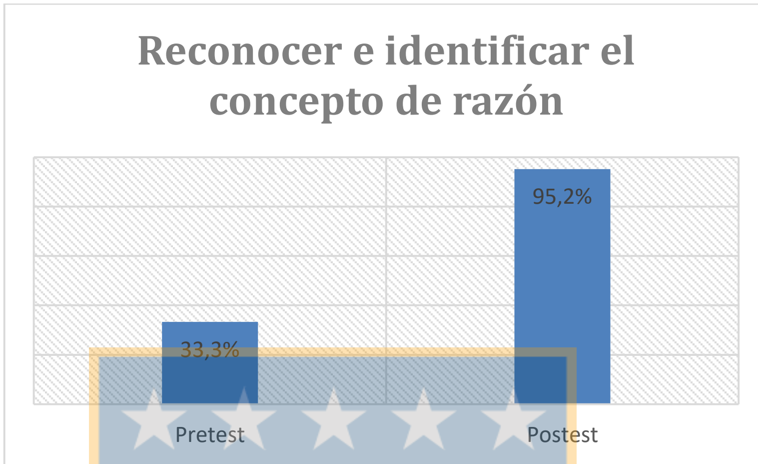
**Liceo A**

**Gráfico 11:**


El gráfico 11, muestra que en el pretest el 14,29% de los estudiantes respondió de manera acertada, mientras que en el postest la totalidad de los alumnos expuestos al proceso de visualización fueron capaces de reconocer e identificar el concepto de razón.

**Liceo B**

**Gráfico 12:**

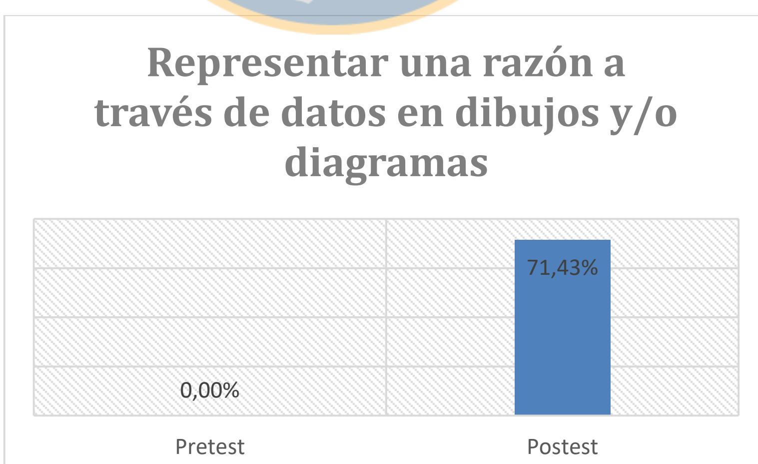



En el gráfico 12, se puede observar que en el pretest el 33,3% de los estudiantes respondió correctamente, mientras que en el postest el 95,2% de los estudiantes respondió de manera acertada.

- En ítem 2.a

**Liceo A**

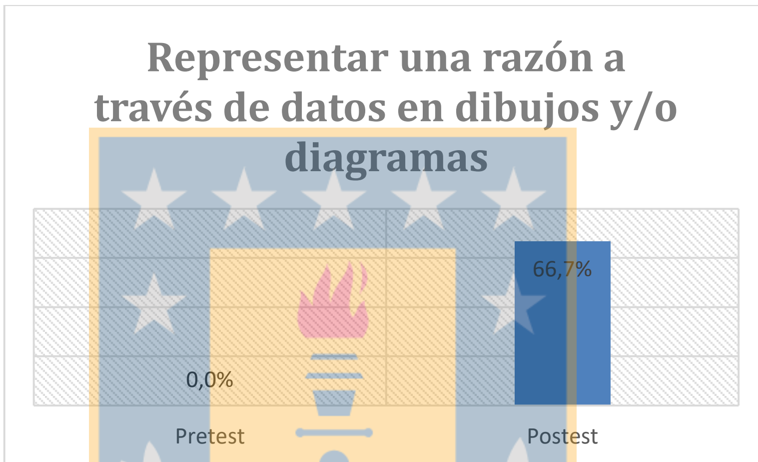
**Gráfico 13:**



En el gráfico 13, es posible apreciar que el pretest, ningún estudiante respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 71,43% del alumnado fue capaz de representar una razón a través de datos en dibujos y/o diagramas.

**Liceo B**

**Gráfico 14:**

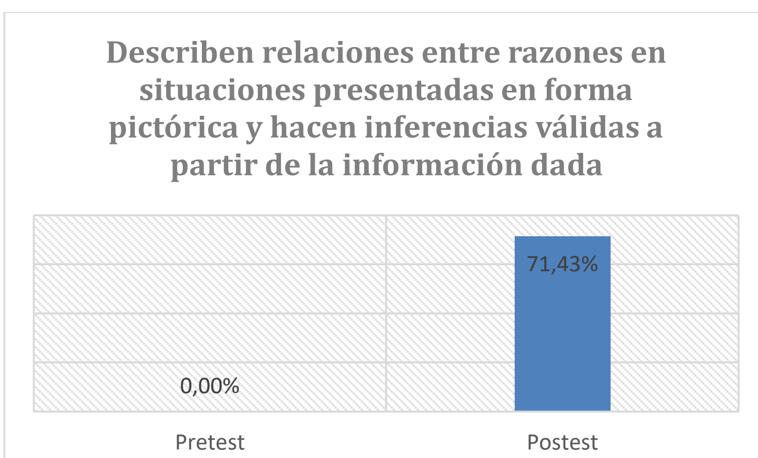



En el gráfico 14, es posible apreciar que el pretest, ningún estudiante respondió de manera acertada, mientras que en el postest el 66,7% del alumnado fue capaz de representar una razón a través de datos en dibujos y/o diagramas.

- En ítem 2.b

**Liceo A**

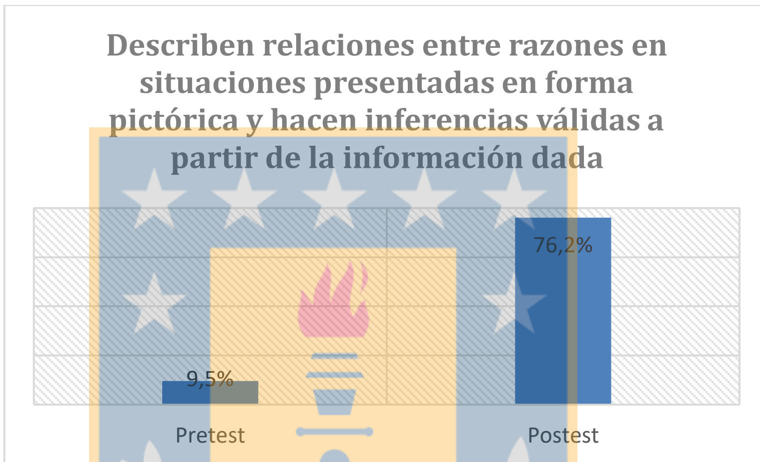
**Gráfico 15:**



El gráfico 15, muestra que en el pretest ningún estudiante fue capaz de responder de manera correcta, mientras que en el postest el 71,43% de los estudiantes lo hizo de forma acertada.

**Liceo B**

**Gráfico 16:**

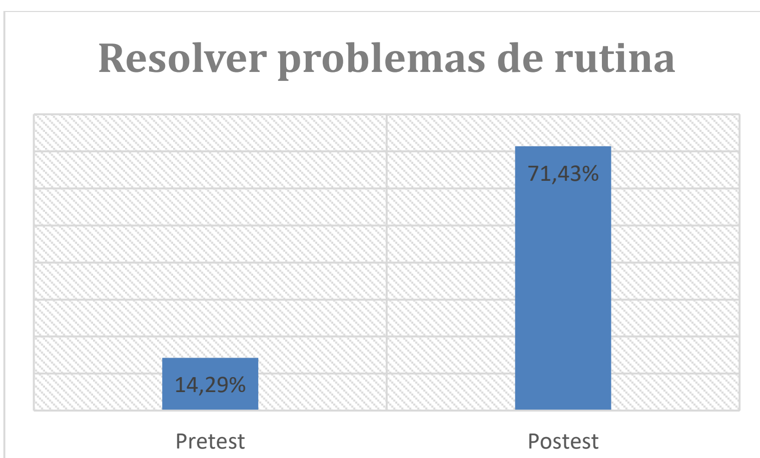



El gráfico 16, muestra que en el pretest, el 9,5% de los estudiantes respondió de manera correcta, mientras que en el postest, el 76,2% fue capaz de responder acertadamente.

- En ítem 5

**Liceo A**

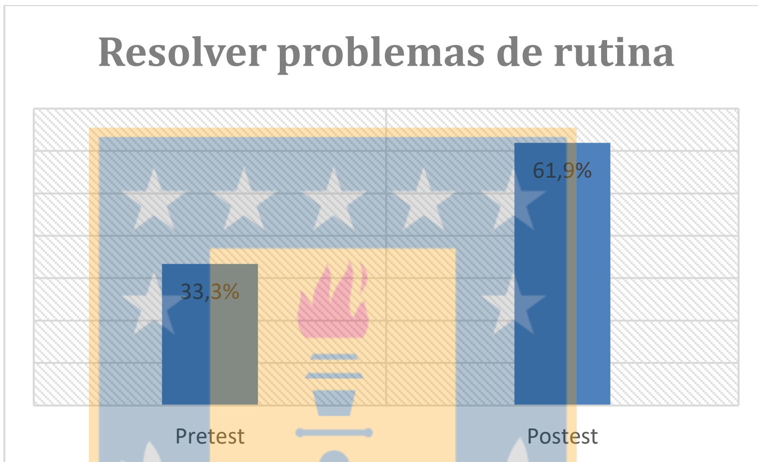
**Gráfico 17:**



En el gráfico 17, es posible observar que en el pretest el 14,29% de los estudiantes respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 71,43% fue capaz de resolver problemas de rutina.

**Liceo B**

**Gráfico 18:**



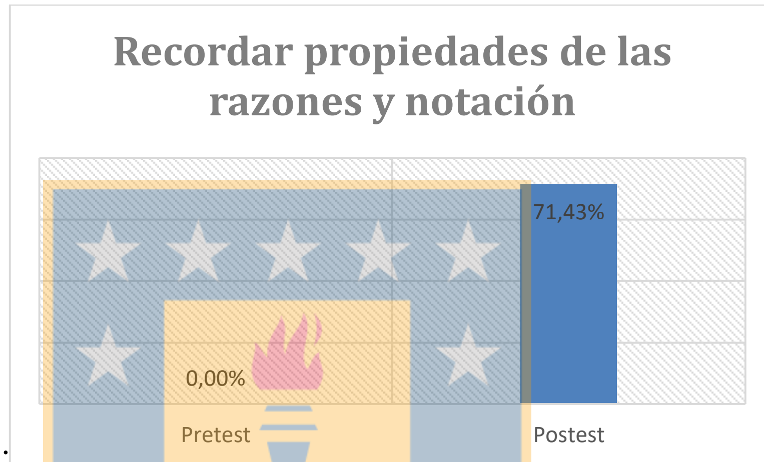

En el gráfico 18, se puede observar que en el pretest el 33,3% de los estudiantes respondió acertadamente, mientras que en el postest el 61,9% del alumnado resolvió problemas de rutina.

Para el objetivo B "Utilizar las propiedades de una razón en situaciones de la vida real" se obtuvieron los siguientes resultados:

- En ítem 1.c

**Liceo A**

**Gráfico 19:**

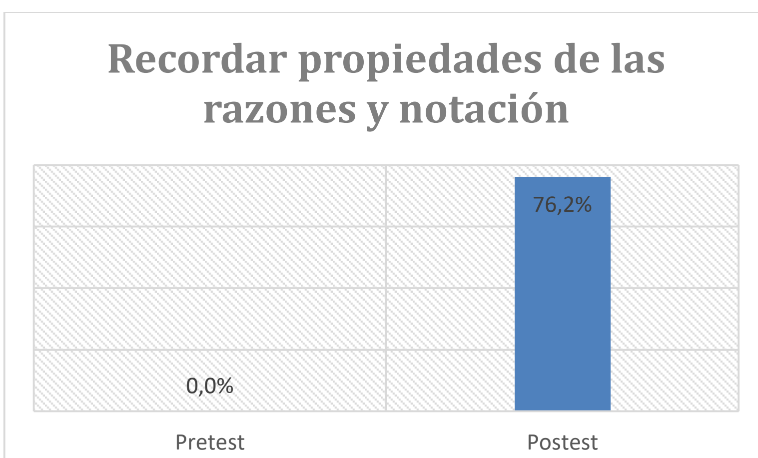



:

En el gráfico 19, es posible apreciar que en el pretest ningún estudiante respondió correctamente, mientras que en el postest el 71,43% de los estudiantes expuestos al proceso de visualización recordaron las propiedades de la razón.

**Liceo B**

**Gráfico 20:**

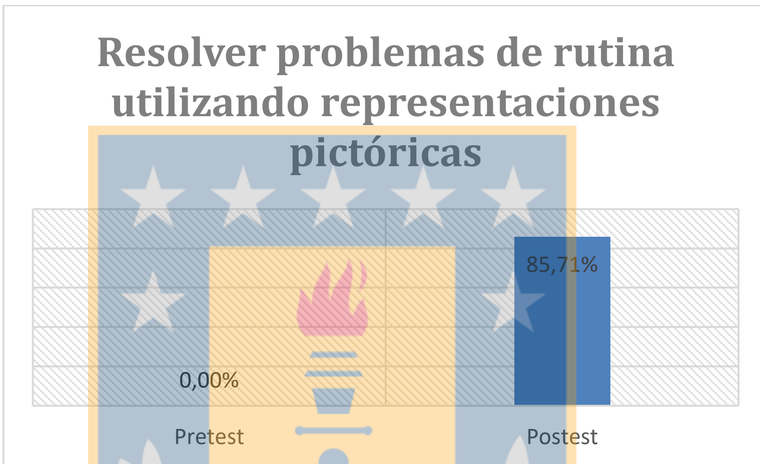


En el gráfico 20, se puede observar que ningún estudiante respondió acertadamente en el pretest, mientras que en el postest el 72,2% del alumnado lo hizo correctamente.

- En ítem 3

**Liceo A**

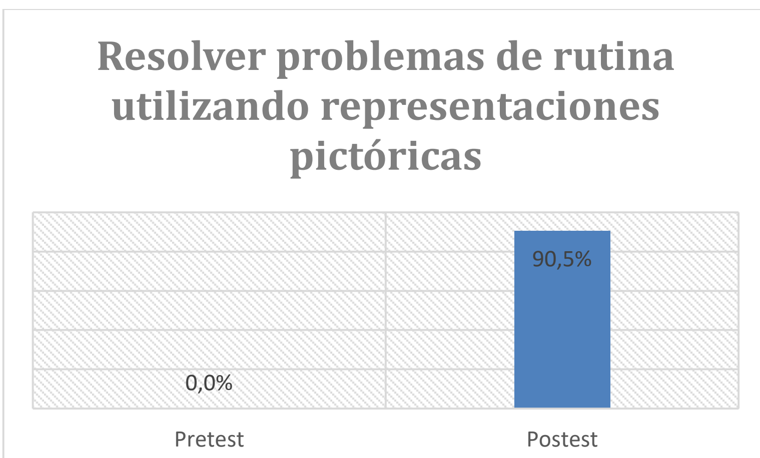
**Gráfico 21:**




En el gráfico 21, se puede observar que en el pretest ningún estudiante es capaz de resolver problemas de rutina utilizando representaciones pictóricas, mientras que en el postest el 85,71% de los estudiantes expuestos al proceso de visualización desarrolló la competencia ya mencionada.

**Liceo B**

**Gráfico 22:**

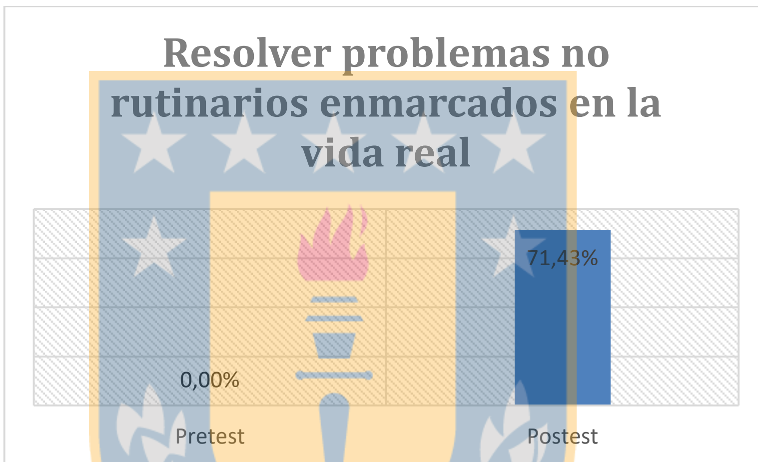


En el gráfico 22, es posible apreciar que en el pretest ningún estudiante respondió correctamente, mientras que en el postest el 90,5% de los estudiantes expuestos al proceso de visualización resolvieron problemas de rutina utilizando representaciones pictóricas.

- En ítem 4

**Liceo A**

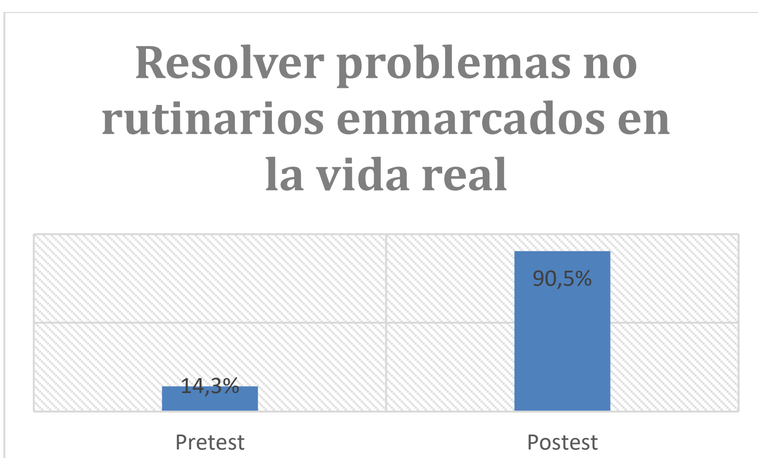
**Gráfico 23:**




En el gráfico 23, es posible observar que en el pretest ningún estudiante resolvió problemas no rutinarios de manera correcta, mientras que en el postest el 71,43% del alumnado lo hizo acertadamente.

**Liceo B**

**Gráfico 24:**



En el gráfico 24, es posible observar que en el pretest el 14,3% de los estudiantes fue capaz de resolver problemas no rutinarios, mientras que en el postest el 90,5% de los estudiantes expuestos al proceso de visualización lo hizo de manera correcta.

Para el objetivo C "Resolver problemas que involucren variables proporcionales y no proporcionales a partir de tablas y/o enunciados" se obtuvieron los siguientes resultados:

- En ítem 8

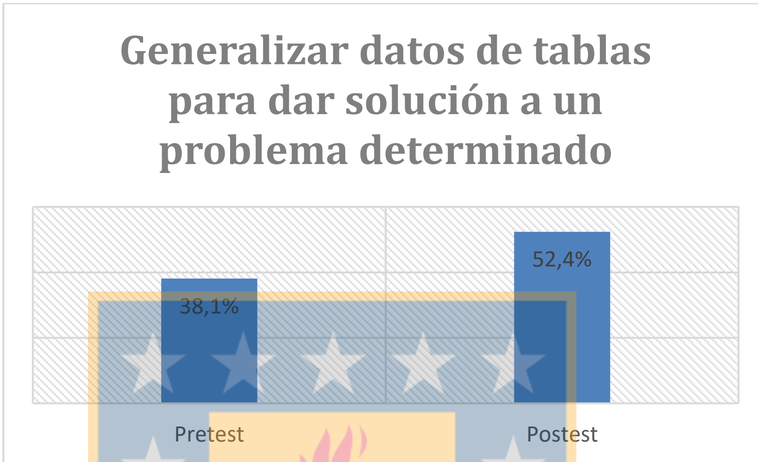
**Liceo A**

**Gráfico 25:**


En el gráfico 25, se puede observar que en el pretest el 42,86% de los estudiantes respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 85,71% del alumnado es capaz de generalizar datos de tablas para dar solución a problemas.

**Liceo B**

**Gráfico 26:**

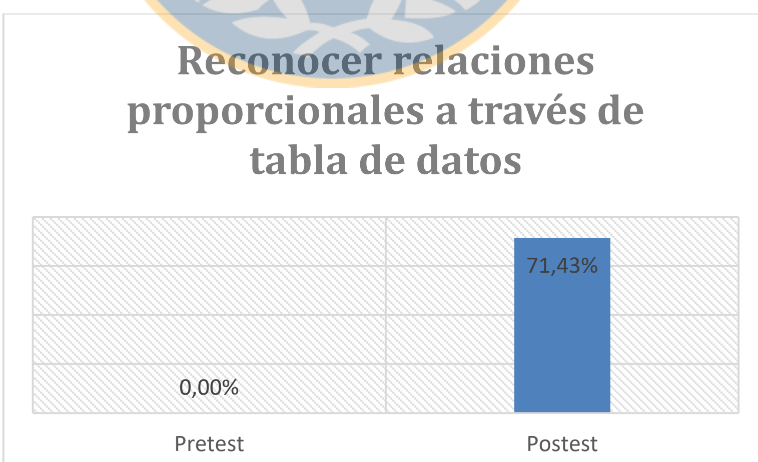



En el gráfico 26, es posible observar que en el pretest el 38,1% de los estudiantes respondió de manera acertada, mientras que en el postest el 52,4% del alumnado es capaz de generalizar datos de tablas para dar solución a un problema.

- En ítem 9

**Liceo A**

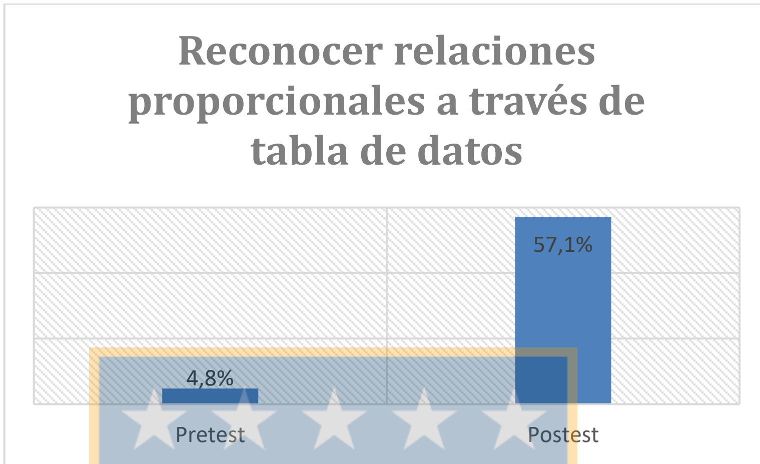
**Gráfico 27:**




En el gráfico 27, es posible observar que ningún estudiante reconoce relaciones proporcionales a través de tabla de datos en el pretest, mientras que en el postest el 71,43% desarrolla la ya mencionada competencia.

**Liceo B**

**Gráfico 28:**

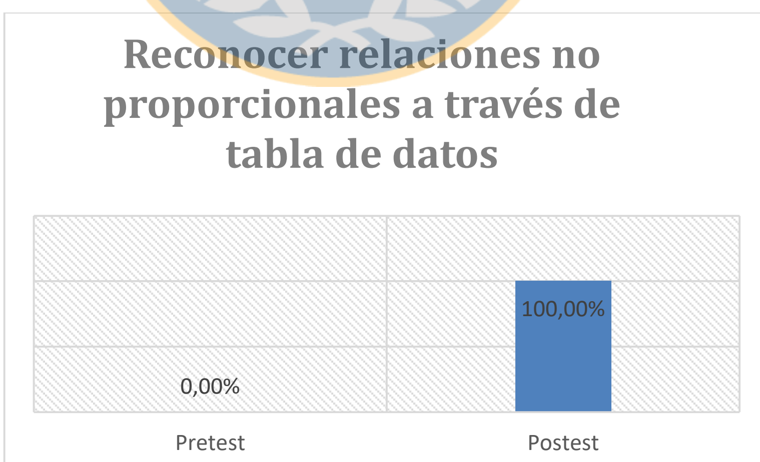



En el gráfico 28, se observa que en el pretest el 4,8% de los estudiantes respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 57,1% de los estudiantes es capaz de reconocer relaciones proporcionales a través de tabla de datos.

- En ítem 15.a

**Liceo A**

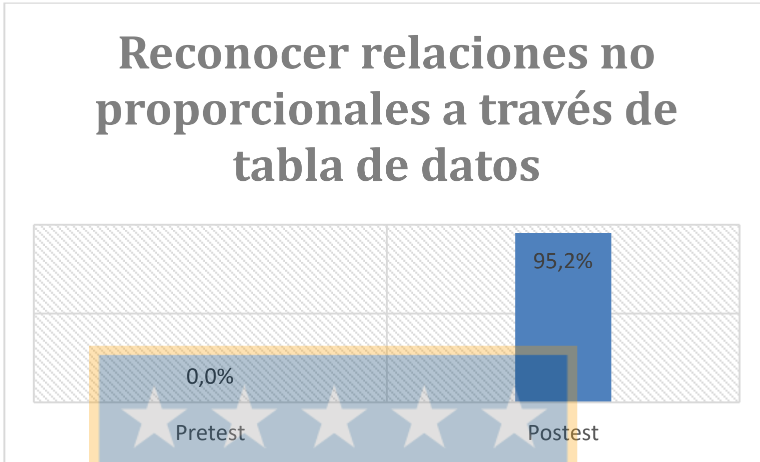
**Gráfico 29:**




En el gráfico 29, se puede observar que en el pretest ningún estudiante reconoce relaciones no proporcionales a través de tabla de datos, mientras que en el postest la totalidad del alumnado lo hizo de manera acertada.

**Liceo B**

**Gráfico 30**:

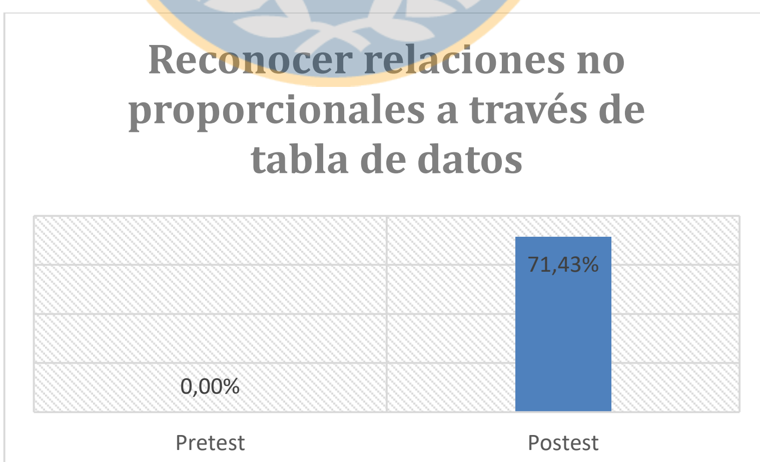



En el gráfico 30, es posible apreciar que en el pretest ningún estudiante respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 95,2% de los estudiantes expuestos al proceso de visualización lo hizo acertadamente.

- En ítem 15.b

**Liceo A**

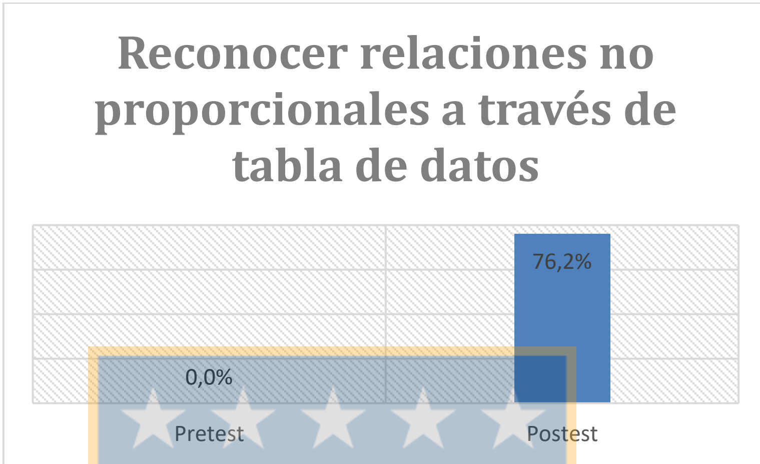
**Gráfico 31:**




En el gráfico 31, es posible apreciar que en el pretest ningún estudiante respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 71,43% de los estudiantes expuestos al proceso de visualización lo hizo acertadamente.

**Liceo B**

**Gráfico 32:**

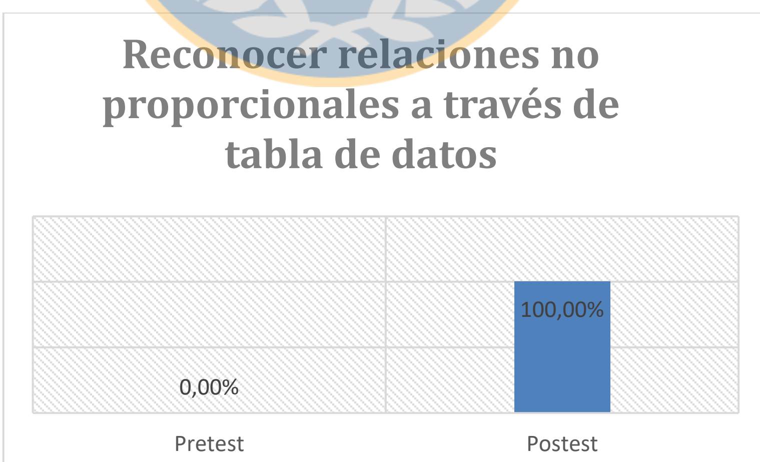



En el gráfico 32, es posible apreciar que en el pretest ningún estudiante respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 76,2% de los estudiantes expuestos al proceso de visualización reconoce relaciones no proporcionales a través de tabla de datos.

- En ítem 15.c

**Liceo A**

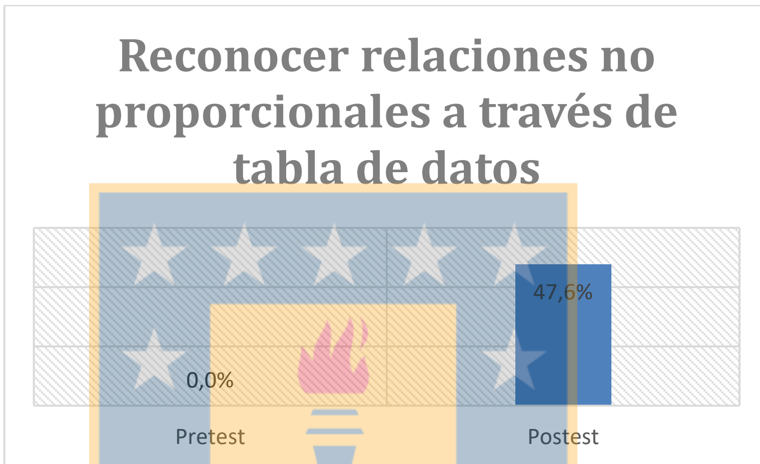
**Gráfico 33:**




En el gráfico 33, es posible apreciar que en el pretest ningún estudiante respondió de manera correcta, mientras que en el postest la totalidad de los estudiantes expuestos al proceso de visualización reconoce relaciones no proporcionales a través de tabla de datos.

**Liceo B**

**Gráfico 34:**

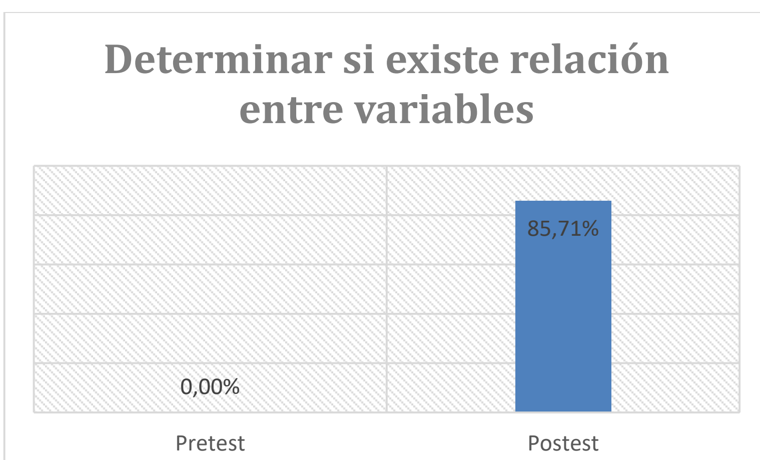



En el gráfico 34, es posible apreciar que en el pretest ningún estudiante respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 47,6% de los estudiantes expuestos al proceso de visualización reconoce relaciones no proporcionales a través de tabla de datos.

- En ítem 16.a

**Liceo A**

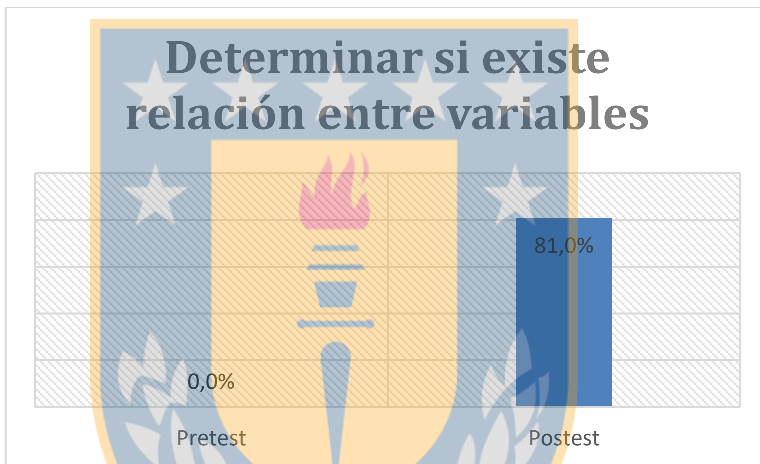
**Gráfico 35:**



En el gráfico 35, es posible apreciar que en el pretest ningún estudiante respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 85,71% de los estudiantes expuestos al proceso de visualización son capaces de determinar si existe relación entre variables.

**Liceo B**

**Gráfico 36:**

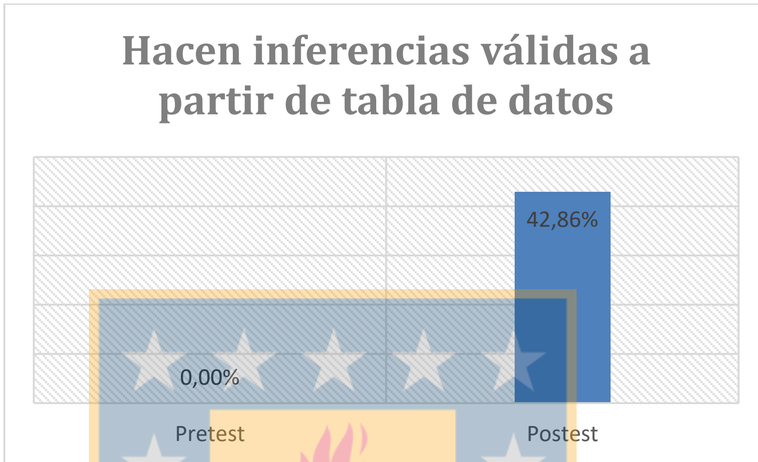



En el gráfico 36, es posible apreciar que en el pretest ningún estudiante respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 81% de los estudiantes expuestos al proceso de visualización lo hizo de forma acertada.

- En ítem 16.b

**Liceo A**

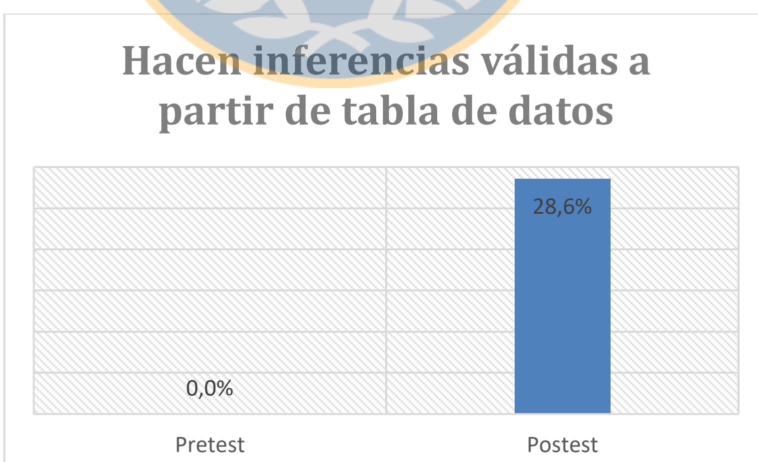
**Gráfico 37:**




En el gráfico 37, es posible apreciar que en el pretest ningún estudiante respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 42,86% de los estudiantes expuestos al proceso de visualización hace inferencias válidas a partir de tabla de datos.

**Liceo B**

**Gráfico 38:**



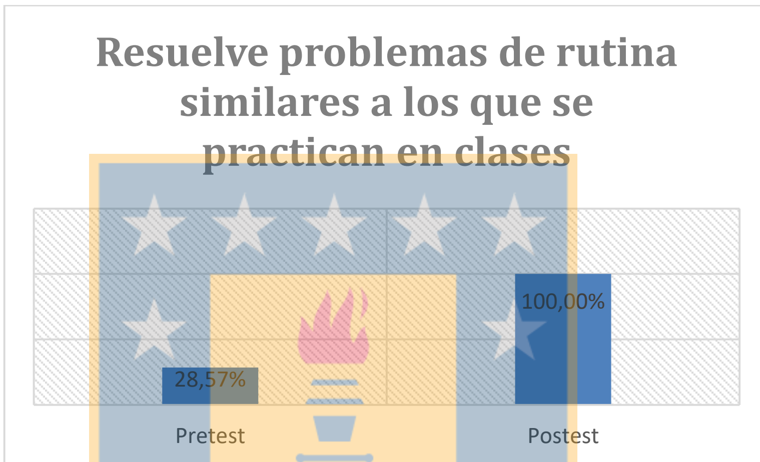

En el gráfico 38, es posible apreciar que en el pretest ningún estudiante respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 28,6%% de los estudiantes expuestos al proceso de visualización lo hizo de manera acertada.

Para el objetivo D “Resolver problemas que involucren proporcionalidad directa” se obtuvieron los siguientes resultados:

- En ítem 6

**Liceo A**

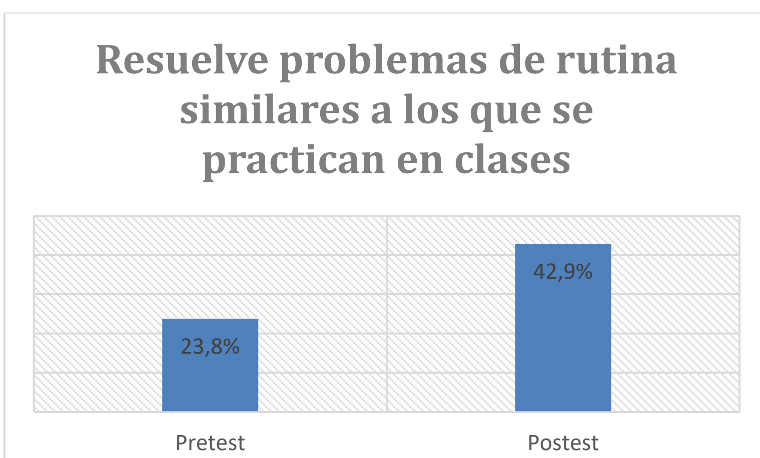
**Gráfico 39:**




En el gráfico 39, se puede observar que en el pretest el 28,57% de los estudiantes respondió de manera correcta, mientras que la totalidad de los estudiantes expuestos al proceso de visualización resuelve problemas de rutina similares a los que se practican en clases.

**Liceo B**

**Gráfico 40:**

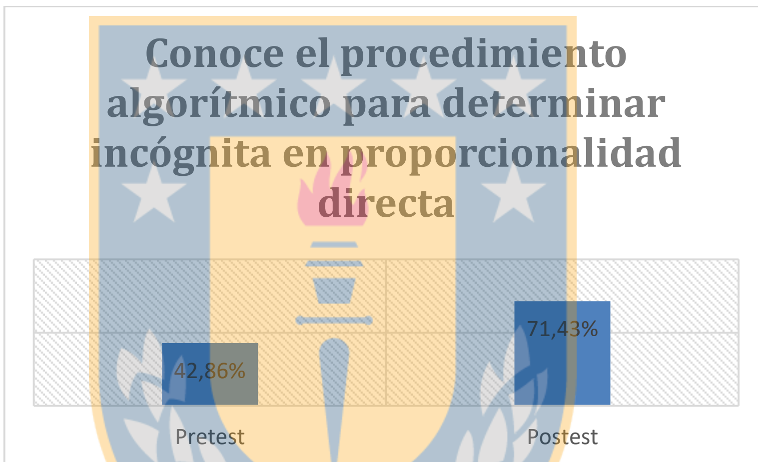


En el gráfico 40, se puede observar que en el pretest el 23,8% de los estudiantes respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 42,9% de los estudiantes expuestos al proceso de visualización resuelve problemas de rutina similares a los que se practican en clases.

- En ítem 7

**Liceo A**

**Gráfico 41:**




En el gráfico 41, se puede observar que en el pretest el 42,86% de los estudiantes respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 71,43% de los estudiantes expuestos al proceso de visualización conoce el procedimiento algorítmico para determinar la incógnita en proporcionalidad directa.

**Liceo B**

**Gráfico 42:**


En el gráfico 42, se puede observar que en el pretest el 66,7% de los estudiantes respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 76,2% de los estudiantes expuestos al proceso de visualización conoce el procedimiento algorítmico para determinar la incógnita en proporcionalidad directa.

- En ítem 12

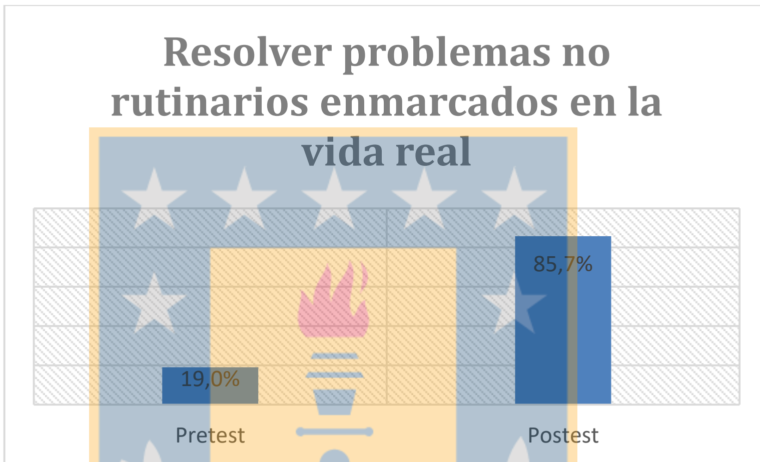
**Liceo A**

**Gráfico 43:**

En el gráfico 43, se puede observar que en el pretest el 42,86% de los estudiantes respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 85,71% de los estudiantes expuestos al proceso de visualización resuelve problemas no rutinarios.

**Liceo B**

**Gráfico 44:**



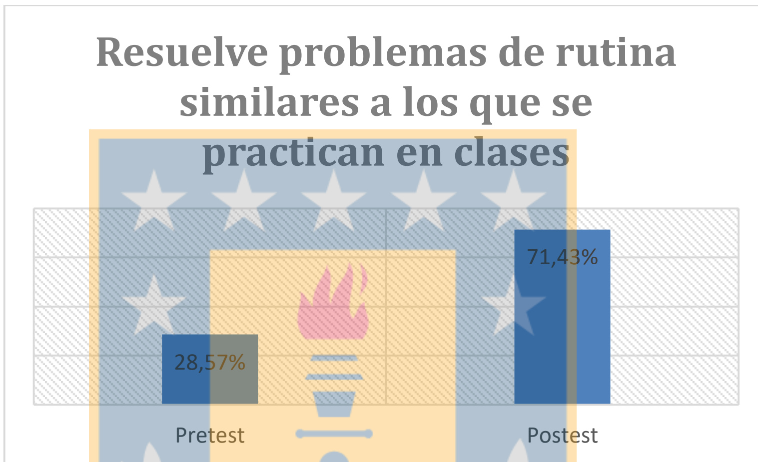

En el gráfico 44, se puede observar que en el pretest el 19% de los estudiantes respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 85,7% de los estudiantes expuestos al proceso de visualización resuelve problemas no rutinarios.

Para el objetivo E "Resolver problemas que involucren proporcionalidad inversa" se obtuvieron los siguientes resultados:

En ítem 13

**Liceo A**

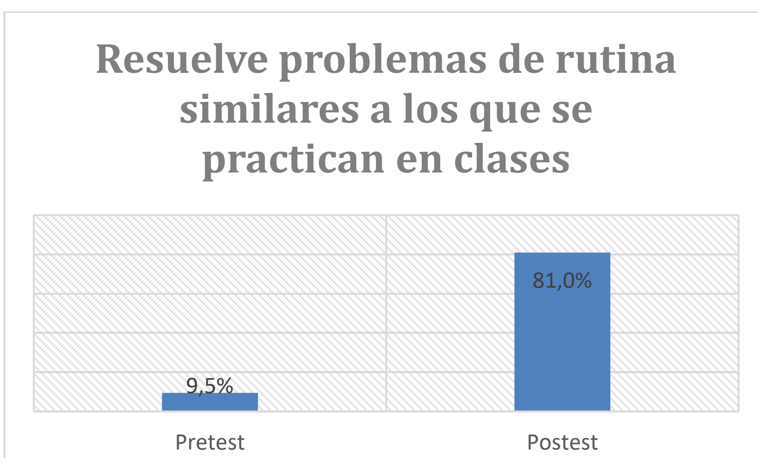
**Gráfico 45:**




En el gráfico 45, se puede observar que en el pretest el 28,57% de los estudiantes respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 71,43% de los estudiantes expuestos al proceso de visualización son capaces de resolver problemas de rutina.

**Liceo B**

**Gráfico 46:**

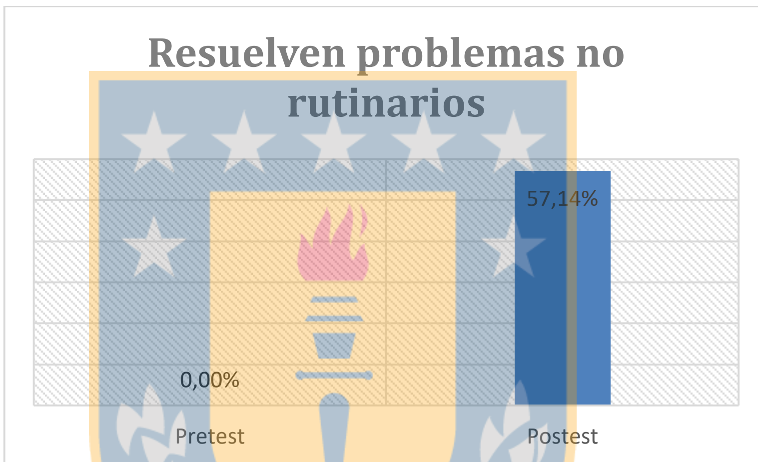


En el gráfico 46, se puede observar que en el pretest el 9,5% de los estudiantes respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 81% de los estudiantes expuestos al proceso de visualización resuelve problemas de rutina.

- En ítem 14

**Liceo A**

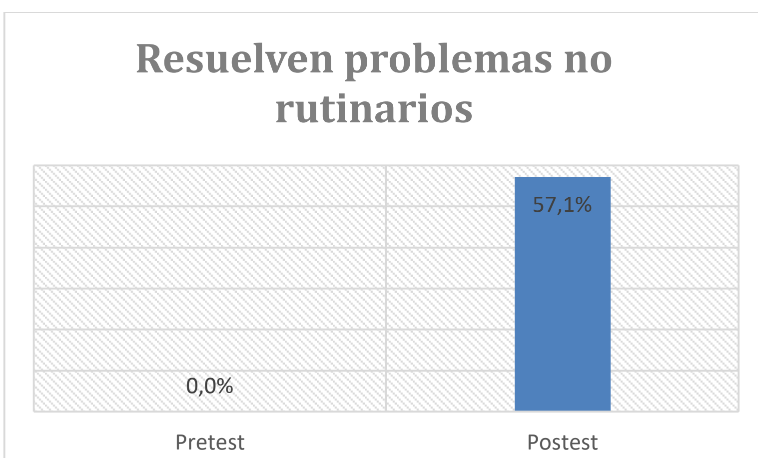
**Gráfico 47:**




En el gráfico 47, se puede observar que en el pretest ningún estudiante respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 57,14% de los estudiantes expuestos al proceso de visualización resuelve problemas no rutinarios.

**Liceo B**

**Gráfico 48:**



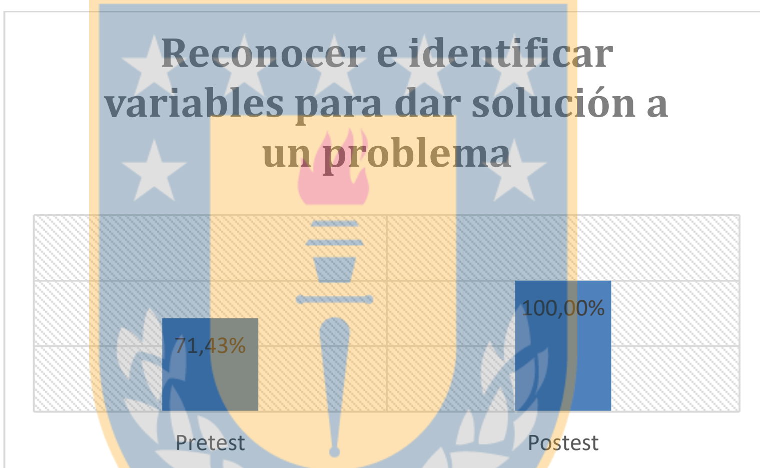
En el gráfico 48, se puede observar que en el pretest ningún estudiante respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 57,1% de los estudiantes expuestos al proceso de visualización resuelve problemas no rutinarios.

Para el objetivo F “Reconocer variables a partir de un enunciado” los resultados obtenidos fueron los siguientes:

- En ítem 10

**Liceo A**

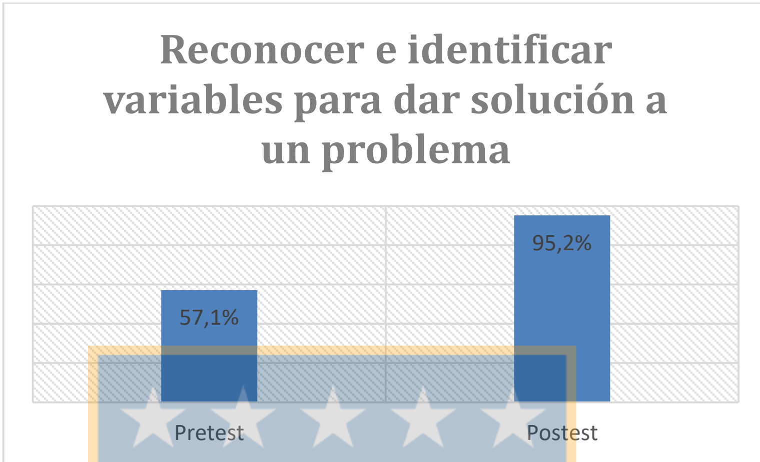
**Gráfico 49:**




En el gráfico 49, se puede observar que en el pretest el 71,43% de los estudiantes respondió de manera correcta, mientras que en el postest la totalidad de los estudiantes expuestos al proceso de visualización reconoce e identifica variables para dar solución a un problema.

**Liceo B**

**Gráfico 50:**

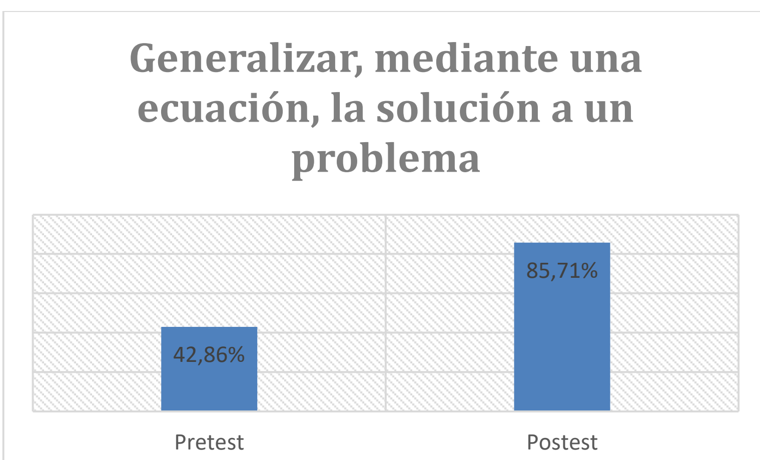



En el gráfico 50, se puede observar que en el pretest el 57,1% de los estudiantes respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 95,2% del alumnado expuesto al proceso de visualización reconoce e identifica variables para dar solución a un problema.

- En ítem 11

**Liceo A**

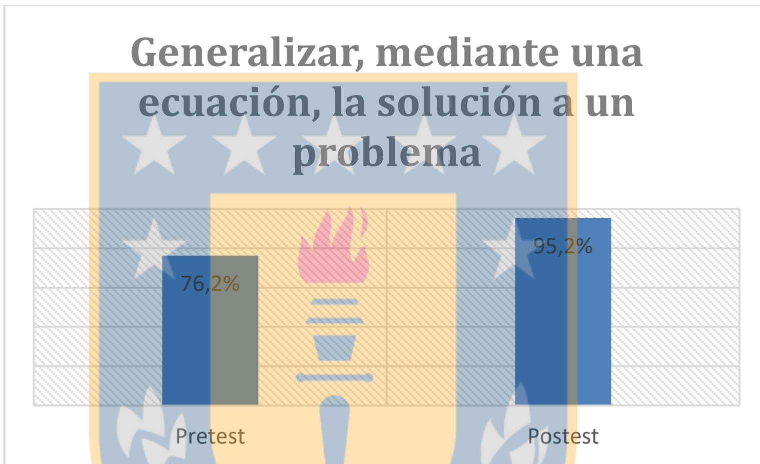
**Gráfico 51:**



En el gráfico 51, se puede observar que en el pretest el 42,86% de los estudiantes respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 85,71% del alumnado expuesto al proceso de visualización generaliza, mediante una ecuación, la solución a un problema.

**Liceo B**

**Gráfico 52:**




En el gráfico 52, se puede observar que en el pretest el 76,2% de los estudiantes respondió de manera correcta, mientras que en el postest el 95,2% del alumnado expuesto al proceso de visualización generaliza, mediante una ecuación, la solución a un problema.

## 5.3. Análisis pre y post test de motivación

### Liceo A:

A continuación se describen los resultados obtenidos en el pre y postest de motivación. El pre y post test tienen una puntuación entre 6 y 30.

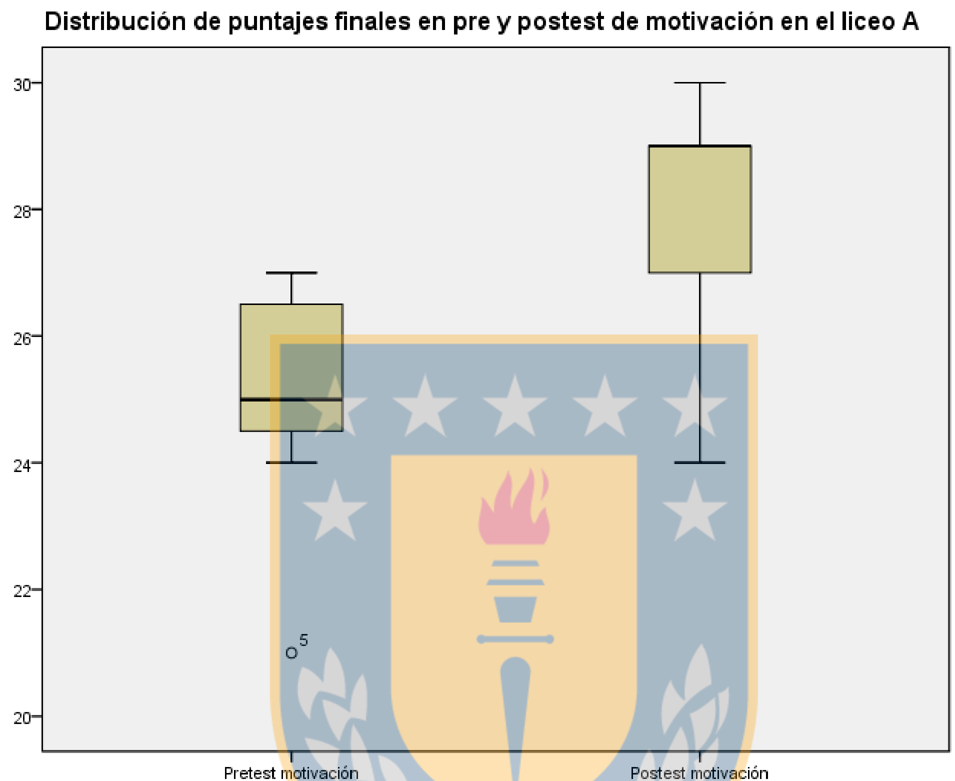
**Hipótesis 2:** Los estudiantes expuestos al proceso de visualización, incrementan su motivación hacia la matemática.

**Tabla 14: Estadísticos descriptivos**

| | N | Rango | Mínimo | Máximo | Media | Desviación estándar |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pretest motivación | 7 | 6 | 21 | 27 | 25,00 | 2,082 |
| Postest motivación | 7 | 6 | 24 | 30 | 27,86 | 2,116 |

En la tabla 14, se observa que en el pretest los estudiantes obtuvieron un puntaje mínimo de 21 puntos con un máximo de 27 puntos, con un promedio de 25. Mientras que en el postest el puntaje mínimo obtenido por los estudiantes es de 24 puntos con un máximo de 30 puntos y un promedio de 27,86.

**Gráfico 3:**




En el gráfico 3, se observa diferencias entre las distribuciones de los puntajes obtenidos en el postest de motivación respecto al pretest de motivación. Para determinar si estas diferencias son significativas estadísticamente, se realiza contraste de hipótesis.

Se quiere contrastar, a un nivel de significancia de $\alpha = 0{,}05$, la hipótesis nula de que los datos proceden de una distribución normal, para decidir las pruebas de contraste que se deben utilizar para determinar la veracidad de la hipótesis de investigación.

**$H_0$:** El conjunto de datos de la variable sigue una distribución normal

**$H_1$:** El conjunto de datos de la variable no sigue una distribución normal

**Tabla 15: Pruebas de normalidad variable puntaje pre y postest**

| | Shapiro-Wilk | | |
|---|---|---|---|
| | Estadístico | gl | Sig. |
| Pretest motivación | ,882 | 7 | ,236 |
| Postest motivación | ,854 | 7 | ,133 |

Se observa en la tabla 15, que ambas pruebas de normalidad muestran que el puntaje del pretest y el puntaje del postest se distribuyen según una ley normal, ya que el valor-p (0,236 y 0,133 respectivamente) es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$. Esto nos permite optar por pruebas paramétricas para contrastar hipótesis de diferencias de medias.

Para determinar diferencias significativas se plantean las siguientes hipótesis:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 < \mu_2$$

$\mu_1$: Puntaje promedio en pretest de motivación

$\mu_2$: Puntaje promedio en postest motivación

**Tabla 16: Prueba t de Student para muestras relacionadas**

| | Diferencias emparejadas | | | t | gl | Sig. (bilateral) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Media | Desviación estándar | Media de error estándar | | | |
| Pretest motivación - Postest motivación | -2,857 | 2,610 | ,986 | -2,897 | 6 | ,027 |

En la tabla 16, se observa que el valor-p (bilateral) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$; luego existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula; por lo tanto se concluye que existe diferencia significativa entre la media del puntaje pre y postest de motivación para estudiantes expuestos al proceso de visualización en la muestra Liceo A, por lo que es posible afirmar que los estudiantes expuestos al proceso de visualización en la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad, incrementan significativamente su motivación.

## Liceo B:

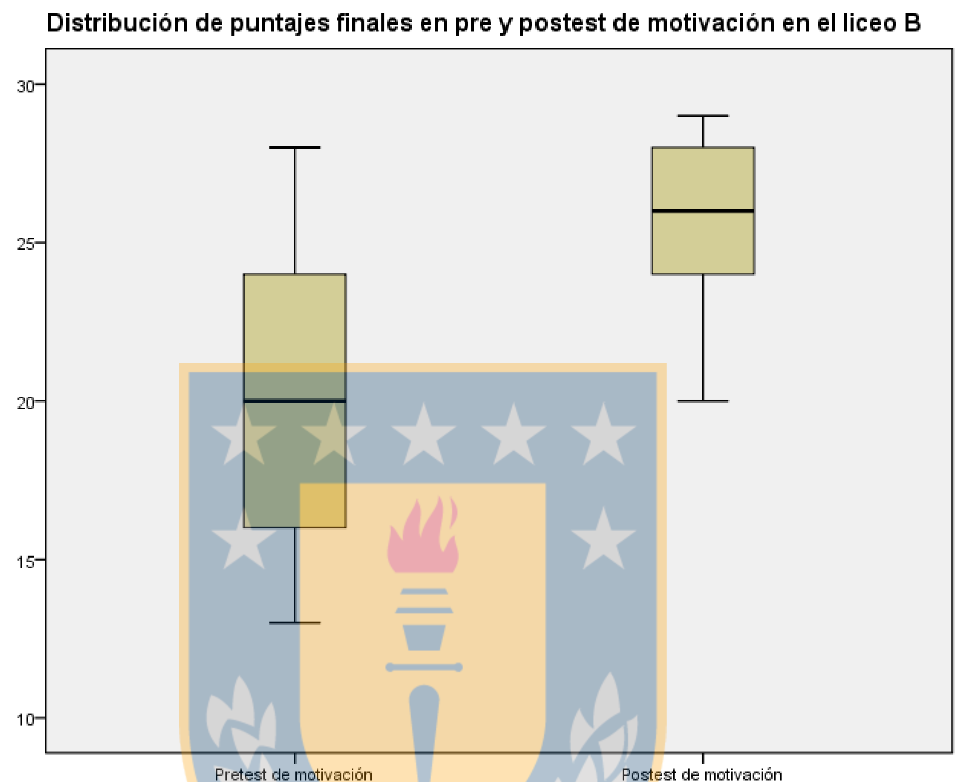
A continuación, se describen los resultados obtenidos en el pre y postest de motivación. El pre y postest tienen una puntuación entre 6 y 30.

**Tabla 17: Estadísticos descriptivos**

| | N | Rango | Mínimo | Máximo | Media | Desviación estándar |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pretest motivación | 21 | 15 | 13 | 28 | 19,43 | 4,874 |
| Postest motivación | 21 | 9 | 20 | 29 | 25,48 | 2,657 |

En la tabla 17, vemos que el máximo en el puntaje del pre y postest de motivación son similares, pero hay un cambio en lo que respecta al mínimo que en un comienzo es de 13 puntos bajo los 20 puntos que presentó el test de motivación de los estudiantes participantes del proceso de visualización, además se puede observar un aumento en la media del puntaje del test de motivación que pasa de 19,43 puntos a 25,48 puntos, también se observa que los puntajes obtenidos en el post test se alejan de la media en menor cantidad que los obtenidos en el pre test.

**Gráfico 4.**




En el gráfico 4, se observa diferencias en las distribuciones de los puntajes obtenidos en la prueba final respecto a la prueba inicial. Para determinar si estas diferencias son significativas estadísticamente, se realiza contraste de hipótesis.

Se quiere contrastar a un nivel de confianza de $\alpha = 0{,}05$ la hipótesis nula de que los datos proceden de una distribución normal, para decidir las pruebas de contraste que se deben utilizar para determinar la veracidad de la hipótesis de investigación.

**$H_0$:** El conjunto de datos de la variable sigue una distribución normal

**$H_1$:** El conjunto de datos de la variable no sigue una distribución normal

**Tabla 18: Pruebas de normalidad variables puntaje pre y postest**

| | Shapiro-Wilk | | |
|---|---|---|---|
| | Estadístico | gl | Sig. |
| Pretest motivación | ,909 | 21 | ,051 |
| Postest motivación | ,940 | 21 | ,219 |

Se observa en la tabla 18, que ambas pruebas de normalidad muestran que el puntaje del pretest y el puntaje del postest se distribuyen según una ley normal, ya que el valor-p (0,051 y 0,219 respectivamente) es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$. Esto nos permite optar por pruebas paramétricas para contrastar hipótesis de diferencias de medias.

Para determinar diferencias significativas se plantean las siguientes hipótesis:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 < \mu_2$$

$\mu_1$: Puntaje promedio en pretest de motivación

$\mu_2$: Puntaje promedio en postest motivación

**Tabla 19: Prueba t Student para muestras relacionadas**

| | Diferencias emparejadas | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Media | Desviación estándar | Media de error estándar | t | gl | Sig. (bilateral) |
| Pretest motivación - Postest motivación | -6,048 | 3,248 | ,709 | -8,533 | 20 | ,000 |

En la tabla 19, se observa que el valor-p (bilateral) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$; luego existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula; por lo tanto se concluye que existe diferencia significativa entre la media del puntaje pre y postest de motivación para estudiantes participantes del proceso de visualización en la muestra Liceo B, en otras palabras los estudiantes participantes del proceso de visualización aumentan su motivación hacia la matemática.

## 5.4. Análisis pre y post test de Actitud hacia la matemática

**Liceo A:**

A continuación, se describen los resultados obtenidos en el pre y postest de actitud hacia la matemática. El pre y postest tienen una puntuación entre 19 y 95.

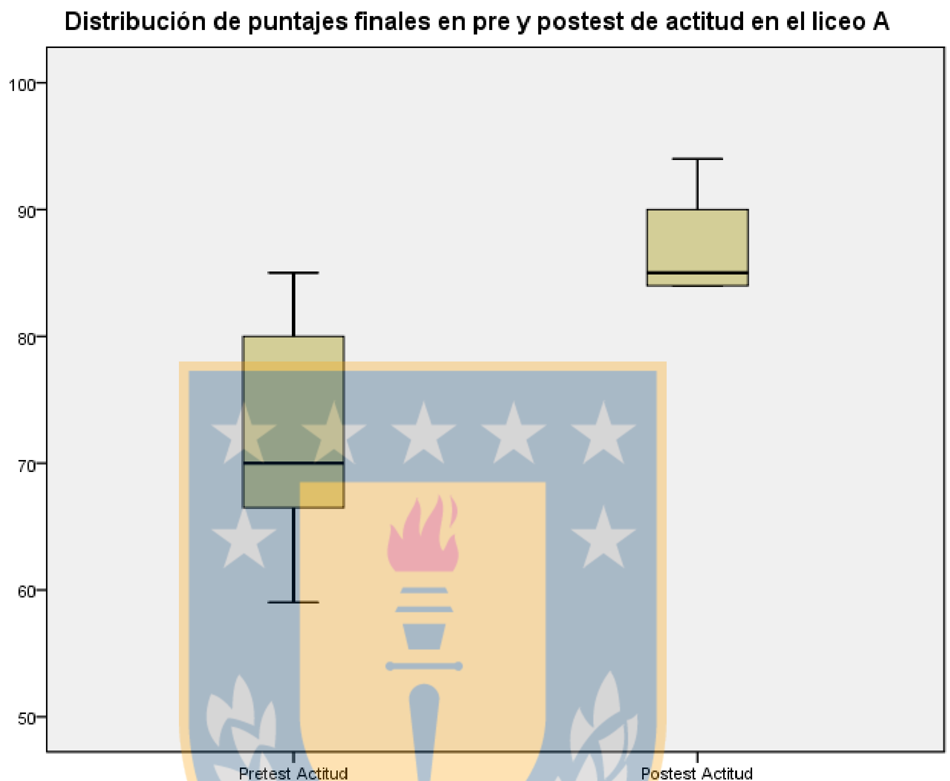
**Hipótesis 3:** Los estudiantes expuestos al proceso de visualización, incrementan su actitud hacia la matemática.

**Tabla 20: Estadísticos descriptivos**

| | N | Rango | Mínimo | Máximo | Media | Desviación estándar |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pretest Actitud | 7 | 26 | 59 | 85 | 72,43 | 9,710 |
| Postest Actitud | 7 | 10 | 84 | 94 | 87,29 | 4,386 |

En la tabla 20, se observa que en el pretest los estudiantes obtuvieron un puntaje mínimo de 59 puntos con un máximo de 85 puntos, con un promedio de 72,43; mientras que en el postest, el puntaje mínimo obtenido por los estudiantes es de 84 puntos con un máximo de 94 puntos y un promedio de 87,29.

**Gráfico 5:**




Se observa en el gráfico 5, que existen diferencias entre las distribuciones de los puntajes obtenidos en el postest de actitud respecto a su correspondiente pretest. Para determinar si estas diferencias son significativas estadísticamente, se realiza contraste de hipótesis.

Se quiere contrastar, a un nivel de significancia de $\alpha = 0{,}05$, la hipótesis nula de que los datos proceden de una distribución normal, para decidir las pruebas de contraste que se deben utilizar para determinar la veracidad de la hipótesis de investigación.

**$H_0$:** El conjunto de datos de la variable sigue una distribución normal

**$H_1$:** El conjunto de datos de la variable no sigue una distribución normal

**Tabla 21: Pruebas de normalidad variable puntaje pre y postest**

| | Shapiro-Wilk | | |
|---|---|---|---|
| | Estadístico | gl | Sig. |
| Pretest Actitud | ,942 | 7 | ,659 |
| Postest Actitud | ,763 | 7 | ,017 |

Se observa en la tabla 21, que la prueba de normalidad del puntaje del pretest se distribuye según la ley normal, ya que el valor-p (0,659) es mayor al nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, mientras que la prueba de normalidad del puntaje del postest no se distribuye según la ley normal, debido a que el valor-p (0,017) es menor al nivel de significancia ya mencionado. Esto nos permite optar por pruebas no paramétricas para contrastar hipótesis de diferencia de medianas.

Para determinar diferencias significativas se plantean las siguientes hipótesis:

$$H_0: M_1 = M_2$$
$$H_1: M_1 \neq M_2$$

$M_1$: Mediana de la distribución del puntaje del pretest de actitud
$M_2$: Mediana de la distribución del puntaje del postest de actitud

**Tabla 22: Prueba de Wilcoxon para muestras relacionadas**

| | Pretest actitud Postest actitud |
|---|---|
| Sig. asintótica (bilateral) | ,018 |

En la tabla 22, se observa que el valor-p (bilateral) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$; luego existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula;

por lo tanto se concluye que existe diferencia significativa entre la mediana del puntaje pre y postest para estudiantes expuestos al proceso de visualización en la muestra Liceo A, por lo que se hace posible afirmar que los estudiantes expuestos al proceso de visualización en la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad incrementan significativamente su nivel de actitud hacia la matemática.

## Liceo B:

A continuación se describen los resultados obtenidos en el pre y postest de motivación. El pre y postest tienen una puntuación entre 19 y 95.

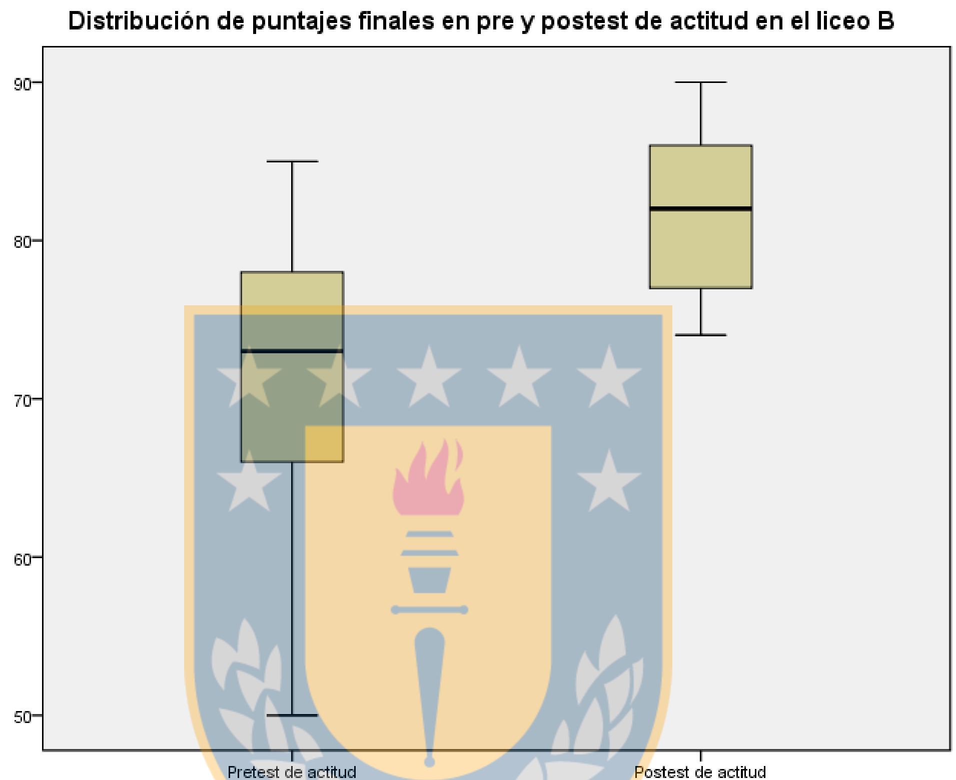
**Hipótesis N°3:** Los estudiantes expuestos al proceso de visualización, incrementan su actitud hacia la matemática.

**Tabla 23: Estadísticos descriptivos**

| | N | Rango | Mínimo | Máximo | Media | Desviación estándar |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pretest Actitud | 21 | 35 | 50 | 85 | 71,48 | 9,158 |
| Postest Actitud | 21 | 16 | 74 | 90 | 81,90 | 4,969 |

En la tabla 23, se observa que en el pretest los estudiantes obtuvieron un puntaje mínimo de 50 puntos con un máximo de 85 puntos, con un promedio de 71,48; mientras que en el postest el puntaje mínimo obtenido por los estudiantes aumento a 74 puntos y el máximo a 90 puntos con un promedio de 81,90.

**Gráfico 6.**




En el gráfico 6, se observa diferencias en las distribuciones de los puntajes obtenidos en la prueba final respecto a la prueba inicial. Para determinar si estas diferencias son significativas estadísticamente, se realiza contraste de hipótesis.

Se quiere contrastar a un nivel de confianza de $\alpha = 0{,}05$ la hipótesis nula de que los datos proceden de una distribución normal, para decidir las pruebas de contraste que se deben utilizar para determinar la veracidad de la hipótesis de investigación.

**$H_0$:** El conjunto de datos de la variable sigue una distribución normal

**$H_1$:** El conjunto de datos de la variable no sigue una distribución normal

**Tabla 24: Pruebas de normalidad variables puntaje pre y postest**

| | Shapiro-Wilk | | |
|---|---|---|---|
| | Estadístico | gl | Sig. |
| Pretest Actitud | ,961 | 21 | ,531 |
| Postest Actitud | ,949 | 21 | ,319 |

Se observa en la tabla 24, que ambas pruebas de normalidad muestran que el puntaje del pretest y el puntaje del postest se distribuyen según una ley normal, ya que el valor-p (0,531 y 0,319 respectivamente) es mayor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$. Esto nos permite optar por pruebas paramétricas para contrastar hipótesis de diferencias de medias.

Para determinar diferencias significativas se plantean las siguientes hipótesis:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 < \mu_2$$

$\mu_1$: Puntaje promedio en pretest de actitud

$\mu_2$: Puntaje promedio en postest actitud

**Tabla 25: Prueba t de Student para muestras relacionadas**

| | Diferencias emparejadas | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Media | Desviación estándar | Media de error estándar | t | gl | Sig. (bilateral) |
| Pretest Actitud - Postest Actitud | -10,429 | 7,291 | 1,591 | -6,555 | 20 | ,000 |

En la tabla 25, se observa que el valor-p (bilateral) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$; luego existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula; por lo tanto se concluye que existe diferencia significativa entre la media del puntaje pre y postest para estudiantes expuestos al proceso de visualización en la muestra Liceo B, en otras palabras los estudiantes participantes del proceso de visualización aumentan su actitud hacia la matemática.

## 5.5. Análisis pre y postest de ansiedad hacia la matemática

### Liceo A:

A continuación se describen los resultados obtenidos en el pre y postest de motivación. El pre y postest tienen una puntuación entre 24 y 120.

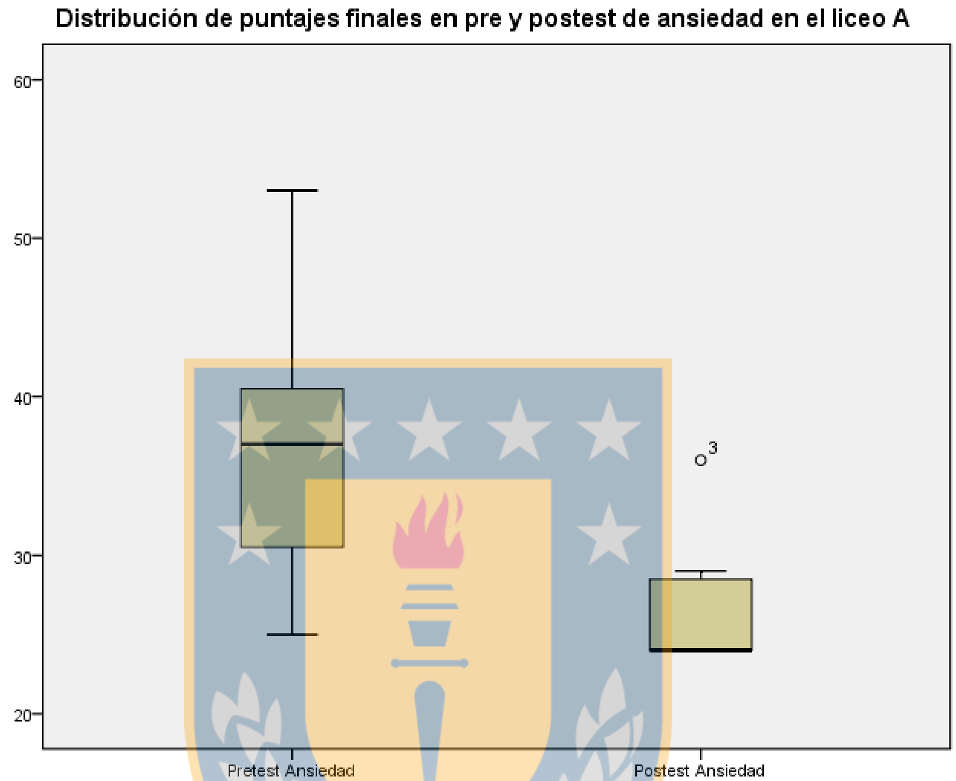
**Hipótesis 4:** Los estudiantes expuestos al proceso de visualización disminuyen su ansiedad hacia la matemática.

**Tabla 26: Estadísticos descriptivos**

| | N | Rango | Mínimo | Máximo | Media | Desviación estándar |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pretest Ansiedad | 7 | 28 | 25 | 53 | 36,71 | 9,250 |
| Postest Ansiedad | 7 | 12 | 24 | 36 | 27,00 | 4,509 |

En la tabla 26, se observa que en el pre test los estudiantes obtuvieron un puntaje mínimo de 25 puntos con un máximo de 53 puntos, con un promedio de 36,71; mientras que en el postest el puntaje mínimo obtenido por los estudiantes es de 24 puntos con un máximo de 36 puntos y un promedio de 27.

**Gráfico 7:**




Se observa en el gráfico 7, que existen diferencias entre las distribuciones de los puntajes obtenidos en el postest de actitud respecto a su correspondiente pretest. Para determinar si estas diferencias son significativas estadísticamente, se realiza contraste de hipótesis.

Se quiere contrastar, a un nivel de significancia de $\alpha = 0{,}05$, la hipótesis nula de que los datos proceden de una distribución normal, para decidir las pruebas de contraste que se deben utilizar para determinar la veracidad de la hipótesis de investigación.

**$H_0$:** El conjunto de datos de la variable sigue una distribución normal

**$H_1$:** El conjunto de datos de la variable no sigue una distribución normal

**Tabla 27: Pruebas de normalidad variable puntaje pre y postest**

| | Shapiro-Wilk | | |
|---|---|---|---|
| | Estadístico | gl | Sig. |
| Pretest Ansiedad | ,961 | 7 | ,827 |
| Postest Ansiedad | ,749 | 7 | ,012 |

Se observa en la tabla 27, que la prueba de normalidad del puntaje del pretest se distribuye según la ley normal, ya que el valor-p (0,827) es mayor al nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, mientras que la prueba de normalidad del puntaje del postest no se distribuye según la ley normal, debido a que el valor-p (0,012) es menor al nivel de significancia ya mencionado. Esto nos permite optar por pruebas no paramétricas para contrastar hipótesis de diferencia de medianas.

Para determinar diferencias significativas se plantean las siguientes hipótesis:

$$H_0: M_1 = M_2$$
$$H_1: M_1 \neq M_2$$

$M_1$: Mediana de la distribución del puntaje del pretest de ansiedad

$M_2$: Mediana de la distribución del puntaje del postest de ansiedad

**Tabla 28: Prueba de Wilcoxon para muestras relacionadas**

| | Pretest Ansiedad Postest Ansiedad |
|---|---|
| Sig. asintótica (bilateral) | ,018 |

En la tabla 28, se observa que el valor-p (bilateral) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$; luego existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula; por lo tanto se concluye que existe diferencia significativa entre la mediana del puntaje pre y postest para estudiantes expuestos al proceso de visualización en la muestra Liceo A, por lo que es posible afirmar que los estudiantes expuestos al proceso de visualización disminuyen sus niveles de ansiedad hacia la matemática en la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad.

## Liceo B:

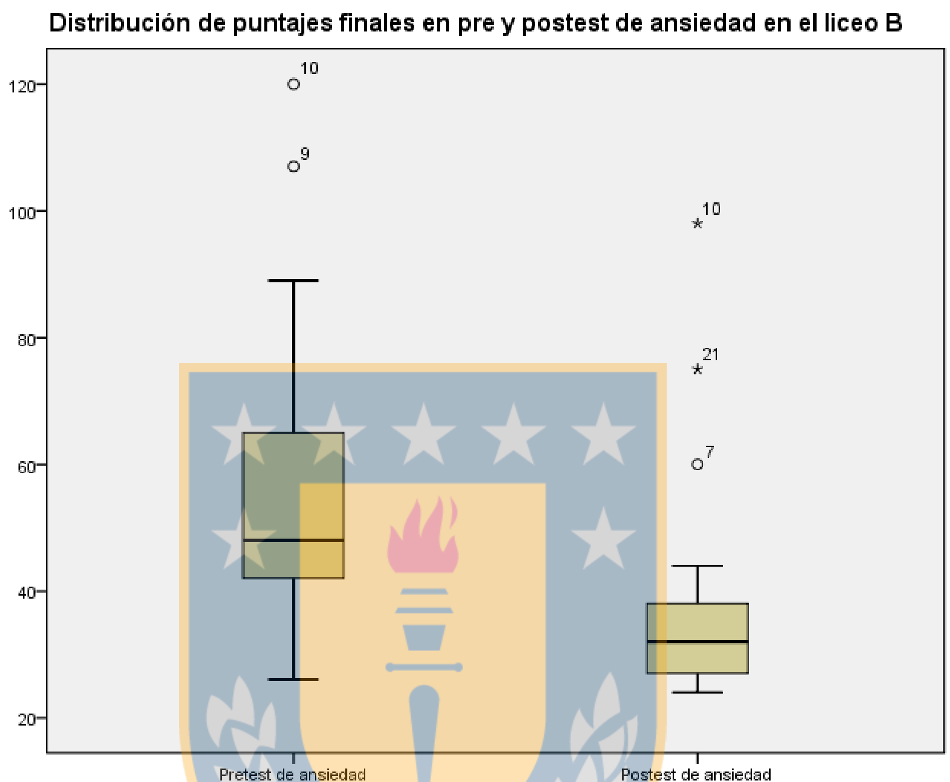
A continuación se describen los resultados obtenidos en el pre y postest de motivación. El pre y postest tienen una puntuación entre 19 y 95.

**Tabla 29: Estadísticos descriptivos**

| | N | Rango | Mínimo | Máximo | Media | Desviación estándar |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pretest Ansiedad | 21 | 94 | 26 | 120 | 56,38 | 25,210 |
| Postest Ansiedad | 21 | 74 | 24 | 98 | 37,57 | 18,611 |

En la tabla 29, se observa que en el pre test los estudiantes obtuvieron un puntaje mínimo de 26 puntos con un máximo de 120 puntos, con un promedio de 56,38; mientras que en el postest el puntaje mínimo obtenido por los estudiantes descendió a 24 puntos y el máximo descendió a 98 puntos, con un promedio de 37,57 puntos.

**Gráfico 8.**




En el gráfico 8, se observa diferencias en las distribuciones de los puntajes obtenidos en la prueba final con respecto a la prueba inicial, aunque cabe mencionar la existencia de valores atípicos en ambas distribuciones. Para determinar si estas diferencias son significativas estadísticamente, se realiza contraste de hipótesis.

Se quiere contrastar a un nivel de confianza de $\alpha = 0{,}05$ la hipótesis nula de que los datos proceden de una distribución normal, para decidir las pruebas de contraste que se deben utilizar para determinar la veracidad de la hipótesis de investigación.

**$H_0$:** El conjunto de datos de la variable sigue una distribución normal

**$H_1$:** El conjunto de datos de la variable no sigue una distribución normal

**Tabla 30: Pruebas de normalidad variables puntajes pre y postest**

| | Shapiro-Wilk | | |
|---|---|---|---|
| | Estadístico | gl | Sig. |
| Pretest Ansiedad | ,903 | 21 | ,040 |
| Postest Ansiedad | ,690 | 21 | ,000 |

Se observa en la tabla 30, que ambas pruebas de normalidad muestran que el puntaje del pretest y el puntaje del postest no se distribuyen según la ley normal, ya que el valor-p (0,04 y 0,00 respectivamente) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, esto nos permite optar por pruebas no paramétricas para contrastar hipótesis de diferencias de medianas.

Para determinar diferencias significativas se plantean las siguientes hipótesis:

$$H_0: M_1 = M_2$$
$$H_1: M_1 \neq M_2$$

$M_1$: Mediana de la distribución del puntaje del pretest de ansiedad

$M_2$: Mediana de la distribución del puntaje del postest de ansiedad

**Tabla 31: Prueba de Wilcoxon para muestras relacionadas**

| | Pretest Ansiedad Postest Ansiedad |
|---|---|
| Sig. asintótica (bilateral) | ,000 |

En la tabla 31, se observa que el valor-p (bilateral) es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$; luego existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula;

por lo tanto se concluye que existe diferencia significativa entre la mediana de las distribuciones del puntaje pre y postest de ansiedad para estudiantes participantes del proceso de visualización en la muestra Liceo B, en otras palabras los estudiantes participantes del proceso de visualización disminuyen su nivel de ansiedad hacia la matemática.

## 5.6. Análisis correlacional

**Hipótesis N°5:** A mayor motivación de los estudiantes que participan del proceso de visualización, mayor es su aprendizaje de la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad.

$$\mathbf{H_0}: r_p = 0$$

$$\mathbf{H_1}: r_p \neq 0$$

Los resultados obtenidos en el postest de motivación y en el postest de matemática sobre razones, proporciones y proporcionalidad, proceden de variables que se distribuyen normalmente tanto en el liceo A como en el liceo B. Por esto, se utilizó el coeficiente de correlación paramétrico Pearson para analizar esta hipótesis. Considerando un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$ , se obtuvieron los siguientes resultados:

**Liceo A:**

**Tabla 32: Coeficiente de correlación de Pearson**

| | | Motivación |
|---|---|---|
| Aprendizaje en matemática | Correlación de Pearson | ,351 |
| | Sig. (bilateral) | ,441 |

**Liceo B:**

**Tabla 33: Correlación**

| | | Motivación |
|---|---|---|
| Aprendizaje en matemática | Correlación de Pearson | -,177 |
| | Sig. (bilateral) | ,442 |

En la tabla 32 y 33, se observa que los valores-p (0,441 y 0.442 respectivamente) son mayores al nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, es decir, en ambos liceos no se tiene evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula, por lo tanto se concluye que no existe una correlación lineal entre dichas variables. En otras palabras al utilizar metodología basada en el proceso de visualización, no se evidencia que a mayor motivación en los estudiantes, mayor es su aprendizaje en la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad.

**Hipótesis N°6:** A mayor actitud de los estudiantes que participan del proceso de visualización, mayor es su aprendizaje de la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad.

**H$_0$:** $r_p = 0$

**H$_1$:** $r_p \neq 0$

**Liceo A:**

Como ya se dijo anteriormente los puntajes del postest de matemática se distribuye normalmente, no siendo así el puntaje postest de actitud, ya que, la prueba Shapiro-Wilks detecta no se ajusta a la Ley Normal (ver tabla 21). Por esto se utilizó el coeficiente de correlación no paramétrico Spearman para analizar esta hipótesis, considerando un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$ , se obtuvieron los siguientes resultados.

Tabla 34: Coeficiente de correlación de Spearman

| | | Actitud |
|---|---|---|
| Aprendizaje en matemática | Coeficiente de correlación | -,296 |
| | Sig. (bilateral) | ,518 |

En la tabla 34 vemos que le valor-p asociado es de 0,518 mayor al nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$ , esto hace que termine aceptando la hipótesis nula y concluyendo que dichas variables no están correlacionadas. En otras palabras al utilizar metodología basada en el proceso de visualización, no se evidencia que a mayor actitud en los estudiantes, mayor es su aprendizaje en la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad.

**Liceo B:**

Los resultados obtenidos en el postest de actitud de los estudiantes y en el postest de matemática sobre razones, proporciones y proporcionalidad, proceden de variables que se distribuyen normalmente. Es por esto que para el liceo B, se utilizará el coeficiente de correlación de Pearson para analizar esta hipótesis. Considerando que un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 35: Coeficiente de correlación de Pearson

| | | Actitud |
|---|---|---|
| Aprendizaje en matemática | Correlación de Pearson | ,017 |
| | Sig. (bilateral) | ,943 |

En la tabla 35, se observa que el valor-p (0,943) es mayor al nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, es decir se acepta la hipótesis y se concluye que dichas variables no están correlacionadas. En otras palabras, al utilizar metodología basada en el proceso de visualización, no se evidencia que a mayor actitud en los estudiantes, mayor es su aprendizaje en la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad, al igual que lo ocurrido en el Liceo A.

**Hipótesis N°7:** A menor ansiedad en los estudiantes que participan del proceso de visualización, mayor es su aprendizaje de la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad.

$$\mathbf{H_0:}\ r_p = 0$$

$$\mathbf{H_1:}\ r_p \neq 0$$

En ambas muestras Liceo A y B, la prueba Shapiro-Wilks detecta que el puntaje post test de ansiedad no se ajusta a la Ley Normal (ver tablas 27 y 30). Por lo que para contrastar estas hipótesis se interpretó el coeficiente de correlación no paramétrico de Spearman, con un nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, los resultados fueron los siguientes:

**Liceo A:**

**Tabla 36: Coeficiente de correlación de Spearman**

| | | Ansiedad |
|---|---|---|
| Aprendizaje en matemática | Coeficiente de correlación | -,039 |
| | Sig. (bilateral) | ,933 |

**Liceo B:**

**Tabla 37: Coeficiente de correlación de Spearman**

| | | Ansiedad |
|---|---|---|
| Aprendizaje en matemática | Coeficiente de correlación | -,428 |
| | Sig. (bilateral) | ,053 |

En las tablas 37 y 38, se observa que en ambas muestras, Liceo A y Liceo B, el coeficiente de correlación Rho de Spearman nos entrega valores negativos, es decir, que de existir correlación lineal entre estas variables, la correlación sería de manera inversa, pero dado que los valores-p (0,933 y 0.053 respectivamente) son mayores al nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$, no se tiene evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula, por lo tanto se concluye que no existe una correlación lineal entre dichas variables. En otras palabras al utilizar metodología basada en el proceso de visualización, no se evidencia que a menor ansiedad en los estudiantes, mayor es su aprendizaje en la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad, pero se aprecia el indicio de un cambio en las variables recientemente especificadas.

## 5.7. Análisis descriptivo factores socioafectivos

**Tabla 38: Distribución de aumento por ítemes en pre y postest de motivación**

| | Aumentan | | Mantienen | | Disminuyen | | Total Estudiantes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Muestra* | *Liceo A* | *Liceo B* | *Liceo A* | *Liceo B* | *Liceo A* | *Liceo B* | *Liceo A* | *Liceo B* |
| *Realizan actividades solicitadas para el desarrollo de la clase en el tiempo indicado* | 4 | 17 | 3 | 4 | 0 | 0 | 7 | 21 |
| *Consulta sus dudas al docente* | 3 | 15 | 3 | 3 | 1 | 1 | 7 | 21 |
| *Manifiesta interés por aprender los contenidos matemáticos* | 3 | 12 | 3 | 8 | 1 | 0 | 7 | 21 |
| *Se esfuerza por resolver los distintos desafíos propuestos en clases* | 3 | 15 | 4 | 5 | 0 | 0 | 7 | 21 |
| *Realiza aportes al grupo curso con respecto a los contenidos matemáticos tratados* | 4 | 13 | 3 | 7 | 0 | 1 | 7 | 21 |
| *Se esfuerza por terminar las actividades solicitadas* | 2 | 16 | 4 | 5 | 1 | 0 | 7 | 21 |
| *Puntaje Total* | 6 | 21 | 1 | 0 | 0 | 0 | 7 | 21 |

En la tabla 38, se encuentra la descripción por ítemes del pre y postest de motivación, en ella se puede observar el número de los y las estudiantes que aumentaron, mantuvieron y disminuyeron su puntaje inicial respecto al puntaje final, para cada muestra. Cabe destacar que en los ítemes relacionados a la "realización de actividades solicitadas para el desarrollo de la clase en el tiempo indicado" y "esfuerzo por resolver los distintos desafíos propuestos en clases", ningún estudiantes disminuyó su puntaje en estos criterios. Además respecto al puntaje total de los test de motivación solo un estudiante del liceo A mantuvo su puntaje y el resto lo aumentó; mientras que la totalidad de estudiantes del liceo B aumentó su puntaje.

**Tabla 39: Distribución de aumento por ítemes en pre y postest de actitud**

| | Aumentan | | Mantienen | | Disminuyen | | Total Estudiantes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Muestra* | *Liceo A* | *Liceo B* | *Liceo A* | *Liceo B* | *Liceo A* | *Liceo B* | *Liceo A* | *Liceo B* |
| *La actitud del profesor percibida por el alumno* | 7 | 18 | 0 | 3 | 0 | 0 | 7 | 21 |
| *Grado de utilidad de las matemáticas* | 6 | 17 | 1 | 4 | 0 | 0 | 7 | 21 |
| *Puntaje Total* | 7 | 19 | 0 | 2 | 0 | 0 | 7 | 21 |

En la tabla 39, se observa la descripción por ítemes del pre y postest de actitud hacia la matemática, en ella se puede apreciar el número de los y las estudiantes que aumentaron, mantuvieron y disminuyeron su puntaje inicial respecto al puntaje final, para cada muestra. Se resalta que la puntuación en ambos factores no disminuye para ninguna de las muestras, mientras que la mayoría de los y las estudiantes aumentó su puntuación final respecto a la inicial, en ambas muestras. Además la actitud del profesor fue altamente percibida por los y las estudiantes, puesto que solo 3 estudiantes mantuvieron su puntaje en ese factor.

| Tabla 40: Distribución de aumento por ítemes en pre y postest de ansiedad | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Aumentan | | Mantienen | | Disminuyen | | Total Estudiantes | |
| *Muestra* | *Liceo A* | *Liceo B* | *Liceo A* | *Liceo B* | *Liceo A* | *Liceo B* | *Liceo A* | *Liceo B* |
| *Ansiedad ante la evaluación de matemática* | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 20 | 7 | 21 |
| *Ansiedad ante la temporalidad* | 0 | 2 | 2 | 3 | 5 | 16 | 7 | 21 |
| *Ansiedad ante la comprensión del problema* | 0 | 3 | 5 | 6 | 2 | 12 | 7 | 21 |
| *Ansiedad frente a los números y operaciones matemáticas* | 1 | 4 | 3 | 2 | 3 | 16 | 7 | 21 |
| *Ansiedad ante situaciones matemáticas de la vida real* | 1 | 0 | 4 | 6 | 2 | 15 | 7 | 21 |
| *Puntaje Total* | 0 | 1 | 0 | 0 | 7 | 20 | 7 | 21 |

En la tabla 40, se observa la descripción por ítemes del pre y postest de ansiedad hacia la matemática, en ella se puede apreciar el número de los y las estudiantes que aumentaron, mantuvieron y disminuyeron su puntaje inicial respecto al puntaje final, para cada muestra. Cabe destacar que el factor "ansiedad ante la evaluación de matemática" no tuvo un aumento de puntaje en ambas muestras y si una disminución en la totalidad de los estudiantes pertenecientes al liceo A; en el liceo B solo un estudiantes no logro disminuir este factor pero si mantenerla, lo que es concordante con los buenos resultados obtenidos en el postest de matemática (ver tabla 8 y 11).

# Capítulo 6

# Resultados, discusión y conclusiones

## 6.1. Resultados

Los resultados obtenidos luego del análisis de las hipótesis de trabajo son los siguientes.

- El proceso de visualización utilizado en la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad, ayuda a comprender mejor este tema en los y las estudiantes.
- El proceso de visualización utilizado en la unidad razones, proporciones y proporcionalidad, incrementa la motivación de los estudiantes hacia las matemáticas.
- Utilizar el proceso de visualización en la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad, incrementa la actitud positiva de los y las estudiantes hacia las matemáticas.
- El proceso de visualización utilizado en la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad, disminuye los niveles de ansiedad hacia las matemáticas.

## 6.2. Resultados de correlación

Los resultados de la correlación entre las variables producto de la intervención son los siguientes:

En relación a los factores socioafectivos como la motivación, actitud y ansiedad hacia las matemáticas, no se pudo evidenciar que existe relación alguna entre cada una de ellas con el rendimiento de los estudiantes expuestos al proceso de visualización, en ambos grupos experimentales, ya que, los estudios que muestran una alta correlación entre las variables especificadas anteriormente, poseen grupos muestrales grandes, mientras que la cantidad de estudiantes pertenecientes a $GE_A$ y $GE_B$ fue pequeña, además son todos de un mismo nivel social (grupo bajo). Junto con lo indicado, se precisa de un mayor tiempo para lograr mayores cambios en la motivación, actitud y ansiedad hacia la matemática, ya que la causante de los bajos niveles en los factores ya mencionados es, principalmente, experiencias negativas con matemática en la infancia.

### 6.2.1. Discusión de resultados

De acuerdo a los resultados obtenidos mediante el uso de métodos estadísticos descriptivos e inferenciales, se procede a discutir y describir lo ocurrido en relación a los objetivos propuestos en el contexto del marco referencial contemplado en la siguiente investigación.

En primer lugar, se pudo determinar que la enseñanza basada en el proceso de Visualización en la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad aumentó considerablemente el rendimiento de los estudiantes. Esto fue evidenciado tanto en las tareas de clases como en el test final. Uno de los factores que influyó en el rendimiento de los estudiantes fue el uso de diferentes formas de representación, tales como material concreto, imágenes, uso de tablas y gráficos que permitieron dar cuenta de relaciones multiplicativas escalares. En cuanto al apoyo visual utilizado, es importante mencionar que fue contextualizado a la realidad de los estudiantes, logrando así una mayor participación en cada actividad propuesta.

La Visualización es un medio que facilita la comprensión de un concepto a través de una imagen visual, esto sumado al uso de programas informáticos, mediados por la intervención docente adecuada, los aprendizajes pueden mejorar (Gatica, S.N y Enríquez Ares, O. 2012)

Otro factor influyente fue la indagación en los conocimientos previos de los estudiantes, lo que derivó en una correcta comprensión del concepto de razón, es decir, como una comparación multiplicativa entre dos magnitudes.

En segundo lugar, destacar los efectos de la enseñanza basada en el proceso de Visualización, respecto a la motivación. En un comienzo se evidenció la falta de motivación de los estudiantes, por lo que se recurrió a realizar actividades concretas, tales como la preparación de recetas, manipulación de pesas, medición de cantidades de agua, etc., lo que generó en una mayor participación de los estudiantes, adoptando así un rol protagónico en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Otro elemento influyente en el aumento de la motivación fue mayor tuvo que ver con que el diseño de las clases, que fue diferente al que estaban acostumbrados, lo que hacía que salieran de la rutina de trabajo, situación descrita en experiencias anteriores (Gowin, 1981). Tanto el diseño como el desarrollo de las actividades propiciaron la participación activa de los y las estudiantes y la participación implica un mayor compromiso de los estudiantes, que se sentían bien participando en Matemática.

En tercer lugar, como se sabe, los factores socioafectivos operan sobre los cognitivos, permiten o impiden los procesos cognoscitivos; en esos factores influyen las experiencias (positivas/negativas), como se vivenció en la actividad “Un rico jugo” ver anexo (A.1), donde los estudiantes al finalizar la actividad compartieron entre compañeros de un rico y refrescante jugo. Esto sumado a la contextualización de las actividades propuestas y a la correcta aplicación del proceso de visualización hizo que los estudiantes aumentaran la actitud positiva hacia las matemáticas.

Finalmente, es preciso indicar que los factores que influyeron en la disminución de los niveles de ansiedad hacia la matemática fueron que las guías de aprendizaje iban enfocadas a reforzar los contenidos vistos en clases, al igual que los videos y presentaciones en power point, lo que llevó a que el estudiante sintiera confianza y un buen manejo del contenido, todo esto se vio plasmado en la disminución de los niveles de ansiedad en los estudiantes expuestos en el proceso de visualización.

## 6.3. Conclusiones

La enseñanza basada en el proceso de visualización influye positivamente en el aprendizaje de los contenidos de la unidad de razón, proporción y proporcionalidad, en los estudiantes pertenecientes al sector rural y urbano de la ciudad de Los Ángeles. Además es posible concluir que el proceso de visualización facilita la comprensión de los conceptos tratados en dicha unidad, puesto que los estudiantes evidenciaron una mayor comprensión del concepto de razón, logrando reconocer e identificar una razón, además de conseguir representarla, a través de datos, en dibujos y diagramas. También es posible comprobar que los estudiantes expuestos al proceso de visualización, son capaces recordar las propiedades de las razones y de describir relaciones entre éstas en situaciones presentadas en forma pictórica, utilizando esto último para resolver problemas de rutina, y no rutinarios enmarcados en un contexto real. Asimismo es posible verificar que los estudiantes expuestos al proceso de visualización asimilaron de mejor manera el procedimiento algorítmico para determinar una incógnita en proporcionalidad directa, lo que facilita la resolución de problemas asociados a dicha proporcionalidad, además de tener una mayor capacidad para resolver problemas de rutina y no rutinarios asociados a la proporcionalidad inversa.

Considerando la variable motivación hacia las matemáticas en los estudiantes es posible verificar que el proceso de Visualización influye positivamente en la ya mencionada variable, ya que permite que los estudiantes adopten un papel protagónico en su proceso de aprendizaje.

En lo referente a la actitud hacia la matemática percibida en los estudiantes se puede afirmar que aumentan sus niveles iniciales. También es importante mencionar que la actitud del profesor percibida por el alumno fue un factor influyente en el aumento de los niveles de actitud hacia la matemática. Además, debido a que la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad fue ejecutada con recursos didácticos basados en el proceso de visualización que estaban contextualizados a la realidad de cada muestra produjo un incremento en los niveles del factor "grado de utilidad de las matemáticas".

En cuanto a la ansiedad hacia la matemática, en los estudiantes expuestos al proceso de visualización se pudo evidenciar que ésta tuvo una disminución respecto a los niveles iniciales. También fue posible evidenciar que la totalidad de los estudiantes se sienten motivados en la realización de actividades solicitadas para la realización de la clase en el tiempo indicado, lo cual también se pudo observar clase a clase a lo largo de la intervención. Además, gracias al proceso de visualización se pudo apreciar un esfuerzo de los estudiantes por resolver los distintos desafíos propuestos en clases.

Aunque no hay evidencia significativa de correlación lineal entre las variables socioafectivas y el aprendizaje de los estudiantes participantes del proceso de visualización, sin embargo la correlación más fuerte se da entre las variables ansiedad y aprendizaje, donde los resultados no fueron significativos pero se aprecia el indicio notorio de un cambio en ambas muestras, ya que el coeficiente de correlación entrega valores negativos (ver tabla 37) lo que se interpreta como una relación inversa, es decir a menor, ansiedad mayor aprendizaje. También cabe destacar que el factor “ansiedad ante la evaluación matemática” tuvo una disminución en el puntaje final respecto del inicial, en la totalidad de los estudiantes con excepción de uno que mantuvo dicho puntaje, lo que es concordante con los buenos resultados obtenidos en el postest de matemática.

En síntesis, se puede concluir que la enseñanza basada en el proceso de Visualización, incide de manera favorable en el aprendizaje y las variables socioafectivas consideradas en este seminario, como motivación, ansiedad y actitud hacia la matemática en la unidad de razones, proporciones y proporcionalidad de escolares vulnerables de colegio urbano y rural.

## 6.4. Sugerencias

Se sugiere a los docentes y futuros docentes de matemáticas que debatan sobre la enseñanza tradicional de la proporcionalidad. Esta investigación es una muestra de que es factible una práctica docente diferente.

Por otro lado se sugiere en la docencia, la implementación de imágenes contextualizadas a la realidad de los estudiantes, ya que las imágenes propuestas por el profesor no siempre tienen el impacto esperado ya que rara vez son adaptadas al contexto de los estudiantes. Por eso se afirma que la visualización tarea por hacer. “En muchas de las formas de visualización que vamos a experimentar se trata de un verdadero camino de codificación y descodificación que está inmerso en todo un cúmulo de intercambios personales y sociales, buena parte de ellos arraigados profundamente en la misma historia de la actividad matemática. Esto implica que la visualización sea un proceso que hay que aprender en la interacción con las personas a nuestro alrededor y en la inmersión e inculturación en el tejido histórico y social de la matemática” (De Guzmán, M., 1996).

Las palabras de De Guzmán enfatizan el potencial pedagógico de la visualización dentro del aula y lo importante que es su incorporación en diversas áreas. Por esta razón se sugiere a los profesores implementar actividades contextualizadas a la realidad de los estudiantes y que contengan imágenes, diagramas, gráficos, etc., todo lo que facilite a los estudiantes la comprensión de los conceptos.

Se sugiere además que esta metodología no solo se implemente en liceos de alta vulnerabilidad sino también aquellos que posean un nivel socioeconómico alto para analizar la incidencia que el proceso de visualización tiene sobre este tipo de estudiantes.

# Referencias Bibliográficas


Adjiage, R. (2007). Rationnels et proportionnalité: complexité et enseignement au début du collège. *Pétit X*, *74*, 5-33.

Adjiage, R. & Pluvinage, F. (2007). *An Experiment in Teaching Ratio and Proportion*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 65, pp. 149-175.

Agencia de Calidad, Gobierno de Chile (2012). *Resultados TIMSS 2011. Estudio internacional de tendencias en Matemática y Ciencias*. TIMSS & PIRLS, International Study. Rescuperado de: http://www.agenciaeducacion.cl/wp-content/uploads/2013/02/resultados-timss-18-dic-2012.pdf

Alsina, C.; Fortuny, J y Pérez, R (1997) ¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO. Madrid: Autor.

Allport, G. W. (1935). Attitudes. In C. A. Murchison (Ed.), *A handbook of social psychology* (pp. 798 – 844). Worcester, MA: Clark University Press.

Antón, L. (2011). *Teorías Contemporáneas del Aprendizaje.* Recuperado de: htto://coscomantauni.files.wordpress.com/2011/09/teorias-del-aprendizaje.pdf

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215-241.

Balderas, P. (1998), *La representación y el razonamiento visual en la enseñanza de la matemática*, tesis doctoral, México, Facultad de Filosofía y Letras, unam.

Barker, P. (1984). Recognition and Treatment of Anxiety in Children by Means of Psychiatric Interview. In V. P. Varma (Ed.) *Anxiety in Children*, p. 35-55. London. Croom Helm.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC:Information Age Publishing.

Bednar, A. K. Cunningham, D., Duffy. T. M., & Perry, J. D. (1991). Theory into practice: How do we link? En G. J. Anglin (Ed), *Instructional technology: Past, present, and future*. (pp. 12-23). Englewood, CO: Libraries Unlimited.

Behr, M., Khoury, H., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1997). Conceptual Units Analysis of Preservice Elementary School Teachers' Strategies on a Rational-Number-as-Operator Task. *Journal of Mathematics Education, 28*(1), 48-69.

Ben-Chaim, D. & Zoller, U. (1991). *The STS outlook profiles of Israeli high-school students and their teachers*. International Journal of Science Education, 13(4), pp. 447-458.

Bertoglia, R. L. (2005). La ansiedad y su relación con el aprendizaje. Revista Psicoperspectivas de la Escuela de Psicología, Facultad de Filosofía y Educación, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Vol. IV/ 2005, pp. 13-18. Recuperado de: http://www.psicoperspectivas.cl/index.php/pisocoperspectivas/article/viewfile/18/18

Bishop, A. (1989). Review of research in visualization in mathematics education. Focus on Learning Problems in Mathematics, 11(1), 7-16.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva de la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad* (Tesis de Doctorado no publicada). Univesitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España.

Bosch, M., y Gascón, J. (2009). *Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria*. In M. T. G. María José González, Jesús Murillo. (Ed.), *Investigación en Educación Matemática* XIII (pp. 89-113). Santander: SEIEM.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics,* Editada y traducida por N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield. Dordrecht: Kluwer.

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher, 18* (1), 31-42.

Brown, C. & Gelder, D. (1938). Emotional reactions before examinations: I. Physiological changues. *The Journal of Psychology, 46*, 75-84.

Buitrago, M., y Mojica, A. (2007). *Razones y proporciones y su conexion con otras áreas*, (Proyecto de grado), Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático.* México: Prentice Hall & Pearson Educación

Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). Visualización y Pensamiento Matemático. En J. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 16(2), 694-701.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). Visualización y polinomios de interpolación. Enseñanza de la Matemática. *Asociación Venezolana de Educación Matemática 11*(1), 24 - 38.

Cañón, C. (1993). *La Matemática, creación y descubrimiento.* U.P. Comillas. Madrid.

Castiblanco, A.; Urquina, H.; Camargo, L. y Acosta, M. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales.* Colombia: Ministerio de Educación Nacional, Enlace Editores Ltda.

Castro, E. (1993). *Papel de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas. Una experiencia de aula*. En actas de VI Jornadas andaluzas de Matemática (pp. 85-90), Sevilla, España.

Ceballos, E. (2012). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad en el grado octavo de la Institución Educativa María Josefa Marulanda del municipio de La Ceja,* (Informe de práctica docente), Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

Cerda, G., Pérez, C., Ortega, R., Lleujo, M., y Sanhueza, L. (2011). *Fortalecimiento de competencias matemáticas tempranas en preescolares, un estudio chileno.* Psychology, Society, & Education, 3(1), 23–39.

Clements, D. & Battista, M. (1992). Geometry and spacial reasoning. In D. Grouws (Ed.),. *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* (pp. 420-464). New York: Macmillan Publishing Company

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. Educational Studies in Mathematics, 26(2/3), 135-164.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26(*1), 66-86.

Copesa, G. (2015). *Prueba PISA: escolares chilenos están entre los más bajos de la OCDE en solución de problemas. Latercera.com.* Recuperado de: http://www.latercera.com/noticia/nacional/2014/04/680-572106-9-prueba-pisaescolares-chilenos-estan-entre-los-mas-bajos-de-la--ocde-en-solucion.shtml.

Corica, A. R. (2014). Teoría antropológica de lo didáctico: un estudio de caso. *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*, *53*(2), 20–44. Recuperado de: http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4761781.pdf

Chamorro M. (2003). *Didáctica de las Matematicas para primaria*. Madrid, España: Pearson Educación.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de los didáctico. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique.* Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr

D´Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética, 1–23.

Dankhe, G L (1986), *Investigación y comunicación*, McGraw Hill.

Davis, P. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 333–344

Del Río, J. (1997). Historia de las Matemáticas. Implicaciones didácticas, *SUMA 26*, 33-38.

Dreger, R. M. & Aiken, L. R. (1957). The identification of number anxiety in a college population. *Journal of Educational Psychology*, *47*, p. 344-351.

Duval, R. (2002) *L'apprentissage de l'alg`ebre et le probl`eme cognitif de la d´esignation des objets*. En: J.Ph. Drouhard et M . Maurel (Eds.), *Actes des S´eminaires SFIDA-13 `a SFIDA-16*, Vol. IV 1901-2001 (pp. 67–94).

Eagly, A. H. & Chaiken, S. (1998). Attitude structure and function. En D. T. Gilbert, S. T. Fiske y G. Lindzey (Eds.), *The handbook of social psychology* (4ª ed., pp. 269-322). Nueva York: McGraw-Hill.

Ekman, P. & Davidson, R. J. (1994). Affective Science: A Research Agenda. In Ekman, P. & Davidson, R. (Eds.), The Nature of Emotion: Fundamental Questions (pp. 411-430). New York: Oxford University Press.

Emol, (2013). *Prueba PISA: Chile lidera en Latiniamércia, pero sigue muy por debajo de los países de la OCDE.* Recuperado de: http://www.emol.com/noticias/nacional/2013/12/03/632839/chile-figura-como-el-mejo-pais-en-los-resultados-de-la-prueba-pisa-en-latiniamerica.html

Ertmer, P. y Newby, T. (1993). Conductismo, cognitivismo y constructivismo: una comparación de los aspectos críticos desde la perspectiva del diseño de instrucción. *Performance Improvement Quarterly, 6*(4), 50–72.

Fernandez, A. O. (2005). *Historia de la matemática* (Vol. 1). Perú: Autor.

Fernández, J. (2010). Neurociencias y Enseñanza de la Matemática . Prólogo de algunos retos educativos. *Revista Iberoamericana de Educación 51*(2).

Fowler, D. H (1979). Ratio in early Greek mathematics. *Bulletin of American Mathematical Society, 1*(6), 807-846.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gairín, J. y Oller, A. (2012). Análisis histórico sobre la enseñanza de la razón y la proporción. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 249-259). Jaén, España: SEIEM.

Gálvez, A. (2006). Motivación hacia el estudio y cultura escolar: estado de la cuestión. Pensamiento psicológico, 2 (6), 87-101.

García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis de Doctorado no publicada). Universidad de Jaén, Jaén, España.

Gatica, S.y Ares, O. (2012).La importancia de la Visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. *EDMETIC, Revista de Educación Mediática y TIC, 1*(2), 88-107.

Giaquinto, M. (1992). Visualizing as a Means of Geometrical Discover, *Mind & Language* 7, 382-401.

Gil, N., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. Unión. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *2*, 15-32.

Godino, J. y Batanero, C. (2002). Proporcionalidad y su didáctica para maestros. , Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/3_Proporcionalidad.pdf

Gómez-Chacón, I. M (2012) Prospective Teachers' Interactive Visualization and Affect in Mathematical Problem-Solving. *The Montana Mathematics Enthusiast Journal*, 10,1 y 2.

González U., P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma*, *45*, 17–28.

Gropper, G. (1987). A lesson based on a behavioral approach to instructional design. In C.M. Reigeluth (Ed.), *Instructional theories in action: lessons illustrating selected theories and models*. Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum.

Gutiérrez, M. (1996). Ansiedad y deterioro cognitivo: incidencia en el rendimiento académico. *Ansiedad y Estrés*, *2* (2-3), p. 173-194.

Guzmán, Miguel de (1996). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático*. Madrid: Pirámide.

Harel, G., Behr, M., Lesh, R., & Post, T. (1994). Invariance of ratio: the case of children's anticipatory scheme for constancy of taste. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(4), 324-345.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 198-219). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

Hernán, M. (2013). La teoría antropologica de la didactica de Chevallard como sustento teórico para analizar el saber didáctico y matemático en la formacion de profesores en la Universidad Católica de Concepcion. En V*II Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, (pp. 4518–4525). Montevideo, Uruguay.

Hershkowitz, R., Parzysz, B. & Van Dormolen, J. (1996). Space and shape. En A. J. Bishop et al.(Eds.), International handbook of mathematics education, Vol 1 (pp. 161-204). Dordrecht: Kluwer.

Hodgen, J., Kuchemann, D., Brown, M., & Coe, R. (2010). Multiplicative reasoning, ratio and decimals: a 30-year comparison of lower secondary students'understandings. In M. Pinto & T. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 89-96). Belo Horizonte, Brasil.

Houzel, C. (1977). Historia de las Matemáticas y Enseñanza de las Matemáticas. En Bibiloni (y otros) *Materiales para una discusión sobre la enseñanza de la historia de la ciencia y su posible uso didáctico*. VI.1-VI.10.ICE, Univ. Barcelona, 1982.

Howard Jones, P. (2011). Investigación Neuroeducativa. Neurociencia, educación y cerebro: de los contextos a la práctica. Madrid; La Muralla.

Jones, D. (1984). Recgnition and Monitoring of Anxiety by Means of Psychometric Test. En V. P. Varma (Ed.) *Anxiety in Children*, 15-34. London. Croom Helm.

Kandel, E., Schwartz, J. y Jessell T. (1997). *Neurociencia y conducta*. Madrid: Prentice Hall.

Kaput, J., & West, M. (1994). Missing-value poportional reasoning problems: factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 235-290). Albany, NY: State University of New York Press.

Karplus, R., Pulos, S. & Stage, E. (1983). Proportional reasoning of early adolecents. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Adquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). New York, NY: Academic Press.

Kieren, T. (1988). *Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development.* In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number-concepts and operations in the middle grades* (pp. 53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Vol.1. Alianza Universidad, n.º 715, Madrid.

Kolmógorov A. N. (1950). Foundations of the Theory of Probability. Chelsea Publisting Company, New York, 1950.

Kosslyn, S. (2005). Metal images and the brain. *Cognitive Neuropsychology 22*, 333-347.

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In H. Guershon & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-120). Albany, NY: State University of New York Press.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 93-117). Reston, VA: Lawrence Erlbaum associates.

Lesh, M., Post, T., Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). *Rational number, ratio and proportion*. In D. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 296-333). NY: Macmillan Publishing.

Lewis, A. (1970). The ambiguous word “anxiety”. *International Journal of Psychiatry,* 9, p. 62-79.

Lezama, J. (2012). La visualización como estrategia de estudio en el concepto de dependencia e independencia lineal.

M. Lewis & J. M. Haviland (Eds.), *Handbook of emotions*. New York. The Guildford Press.

Macías Sánchez, J. (2014). Los registros semióticos en matemáticas como elemento de personalización en el aprendizaje. *Igarss 2014*, *4*(1), 1–5. Recuperado de http://doi.org/10.1007/s13398-014-0173-7.2

Marks, I.M. & Neese, R.M. (1994). Fear and fitness: An evolutionary analysis of anxiety disorders. *Ethology and Sociobiology*, *15*, p. 247-261

Mato, M., y de la torre, E. (2006). Diseño y validación de dos cuestionarios para evaluar las actitudes y la ansiedad hacia las matemáticas en alumnos de educación secundaria obligatoria.

Mato, M. y De La Torre, E. (2010). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico. Recuperado de: http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Mato2010PNA5(1)Evaluacion.pdf

Maza, C. (1994). Historia de las Matemáticas y su enseñanza: un análisis. *SUMA*, n.º17,17-26.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education. A reconceptualization. En A. D. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-598). New York: Macmillan.

Molina, R., y Guerrero, L. (2004). El papel de la visualización en el aprendizaje de la matemática. Antología, (M).

Monge, J. (2009). *Visualización del conocimiento en la enseñanza de la matemática*, Proyecto de Investigación, Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica.

Nesher, P. & Sukenik, M. (1989). Intuitive and formal learning of ratio concepts. Proceedings of the 13th. *Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 33-40.

Noelting G. (1980). *The development of proportional reasoning and the ratio concept,* Educational Studies in Mathematics, Vol. 11, pp. 217-253.

Nunnally. J. C. (1967). *Psychometric theory*. Nueva York: McGraw Hill.

Obando, G., Vasco, C. y Arboleda, L. (2014). Enseñanza Y Aprendizaje De La Razón, La Proporción Y La Proporcionalidad: Un Estado Del Arte. *Relime*, *17*(1), 59–81.

Öhman, A. (1993). Feard and Anxiety as emotional phenomena: Clinical Phenomenology, evolutionary perspectives, and information-processing mechanisms. En

Olhsson, S. (1988). *Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts.* En J. Hierbert y M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* (pp. 53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Oller, A. y Gairín J. (2013). La Génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Relime*, *16*(3), 317–338.

Planchart, M. (2002). La visualización y modelación en la adquisición del concepto de función. Tesis doctorado, Instituto de Ciencias de la Educación.

Presmeg, N. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6*(3), 42-46.

Presmeg, N. & Balderas, P. (2001) Visualization and Affect in Non-routine Problem Solving. En Lyn D. *English, Mathematical Thinking and Learning, 3*(4), 289-313.

Radford, L., y André, M. (2009). Cerebro, cognicion y matemáticas, *Relime 12*(2), 215–250.

Roberto, J., Oliver, E., y Espinosa, C. (2012). Actitudes hacia la matemática de los estudiantes de posgrado en administración: Un estudio diagnóstico, *11*, 81 – 98.

Román, M. (2003). *Enseñanza aprendizaje en escuelas vulnerables chilenas*, Centro de Investigación Educativa, Chile.

Ruíz, Á. (2003). *Historia y folosofía de las matemáticas*. Costa Rica: Universidad estatal a distancia.

Ruiz, El. (2006). Tratamiento de los conceptos de razón y proporción a través de un programa didáctico. *Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos No.11 Wilfrido Massieu,* México.

Sánchez, E. A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto : una mirada desde la Teoría Antropolgica de lo Didáctico, *Relime 16* (1), 65–97.

Sánchez, J., Segovia, I., y Miñán, A. (2011). Exploración De La Ansiedad Hacia Las Matemáticas En Los Futuros Maestros De Educación. *Ugr.Es, 3*(Diciembre). Recuperado de: http://www.ugr.es/~recfpro/rev153COL6res.pdf

Segarra, M., 7 Bou., J. (2004). Concepto, tipos y dimensiones del conocimiento: configuración del conocimiento estratégico. *Revista de Economía Y Empresas*, *Vol. 22, N*, 175–196. Recuperado de: http://www.researchgate.net/publication/28185756_Concepto_tipos_y_dimensiones_del_conocimiento_configuracin_del_conocimiento_estratgico/file/9fcfd50bb6da9c94cc.pdf

Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (2000). From quantities to ratio, functions, and algebraic relations. Recuperado desde: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/publications/2000-earlier/quantitiesRatios.pdf

Schultz, E. & Heuchert, C. (1983). *Child stress and the school experiencie*. New York: Human Science Press.

Schunk, D. (1998). *Teorías del aprendizaje* (2ª ed.). México D.F.: Pearson Educación.

Schwartz, J. (1988). *Intensive quantity and referent transforming arithmetic.* In J. Hierbert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 41-52). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

Shuell, T. (1986). Cognitive Conceptions of Learning. *Review of Educational Research*, *56*(4), 411-436.

Spinillo, A., & Bryant, P. (1991). Children's Proportional Judgments: The Importance of "Half". *Child Development*, *62*(3), 427-440.

Spinillo, A., & Bryant, P. (1999). Proportional reasoning in young children: part–part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical Cognition*, *5*(2), 181-197.

Steffe, L. (1994). Children's Multiplying Schemes. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 3-40). New York, NY: State University of New York Press.

Struik, D. J. (1948). *A Consice History of Matematics;* Dover Publicationa. Inc., New York, Fourth Revised Edition 1987.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12*, 151-169.

Tamayo Alzate, Ó. (2009). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía, XVIII,* 37 - 49. Recuperado de: http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/viewArticle/6085

Valdés, E. (2001). *Motivación y Neurociencia: Algunas implicaciones educativas.* (pp. 104-109). Recuperado de: http://www.saber.ula.ve/dspace/bitstream/123456789/34329/1/otras_investigaciones2.pdf.

Vargas Merina, A. (2009). "Métodos De Enseñanza." *Innovación Y Experiencias Educativas*, *15*, 1–9.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 141-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum associates.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matematicas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria* (L. O. Segura, Trad.). México, D.F.: Trillas.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In H. Guershon & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-60). New York, NY: State University of New York Press.

Weinstein, J. (2001). Joven y alumno. Desafios de la enseñanza media, 99–119.

Youschkevitch, A. (1976). *Les mathématiques arabes (VIII-XV siecles)*. Paris, Francia: Librairie Philosophique J. Vrin.

Zabalza, M. (1994). *Evaluación de actitudes y valores. Evaluación del aprendizaje de los estudiantes.* Barcelona, España: Grao.

Zazkis, R., Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analitic strategies: a students' understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematic Education, 27*(4), pp. 435-457.

# Anexo A

## Guías de Aprendizaje y Presentaciones

### A.1. Guías de Aprendizaje para $GE_A$ y $GE_B$

**GUÍA N°1 DE RAZONES**

matemática • 8° básico

nombre ..................................................

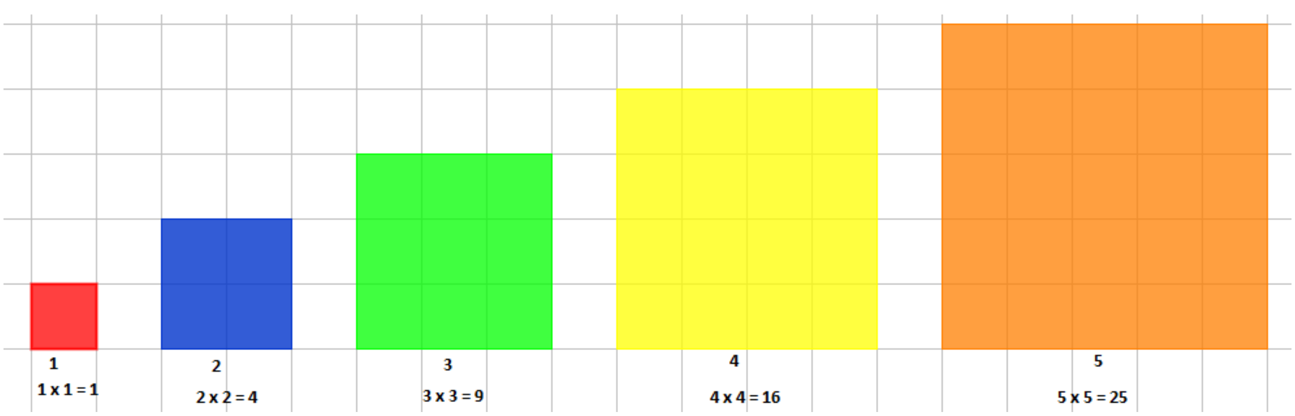
curso .................... fecha ....................

Unidad: N°4 Álgebra

| |
|---|
| Objetivo de la guía: Determinar una razón a partir de la comparación de dos cantidades. |

Subsector: Matemáticas

Determina el lado L, el perímetro P, y el área A de cada uno de los siguientes cuadrados:



| Cuadrado | Lado (L) | Perímetro (P) |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |

Con los datos obtenidos completa la siguiente tabla y escriban sus conclusiones.

| Tipo de comparación | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P-L | | | | | | |
| P/L | | | | | | |

# GUÍA N°2: Razones

matemática • 8º básico

nombre ..........................................................................

curso .................. fecha ..................

Realiza la siguiente actividad.

El entrenador de Pedro quizo analizar la efectividad de los pases que dio en tres dias de entrenamiento. La tabla de abajo muestra los registros de los pases que hizo segun fechas.

| | |
|---|---|
| 2 de septiembre | ○ × ○ × ○ ○ ○ ○ |
| 5 de septiembre | ○ ○ × × ○ × ○ ○ × ○ |
| 9 de septiembre | × ○ ○ ○ × × ○ ○ ○ ○ |

○ : Pases buenos

× : Pases fallidos

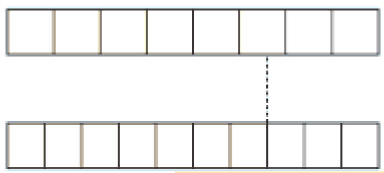
1. Haz el registro de los pases de Pedro usando números y completa la siguiente tabla.

| | 2 Sep. | 5 Sep. | 9 Sep. |
|---|---|---|---|
| **Número de pases buenos** | 6 | 6 | 7 |
| **Número total de pases** | 8 | 10 | 10 |

2. Expresa como razón los datos del 2 y 9 de Septiembre. Usa el número de pases como concecuente y el número de pases buenos como antecedente. Luego comparta estas fracciones de la siguiente manera:

Representar usando graficas de la misma longitud.

$\frac{6}{8}$ 2 Sep.



$\frac{7}{10}$ 9 Sep.

Representar el valor numérico de las razones.

2 Sep. $\frac{6}{8}$ = 60 : 8 = 0,75

9 Sep. $\frac{7}{10}$ = 7 : 10 = 0,70

Compare ambas situaciones. Según esto, ¿Qué día de entrenamiento obtuvo mejores resultados? Explique su razonamiento.

________________________________________________________________

________________________________________________________________

**Guía N° 3. Propiedades de las razones**

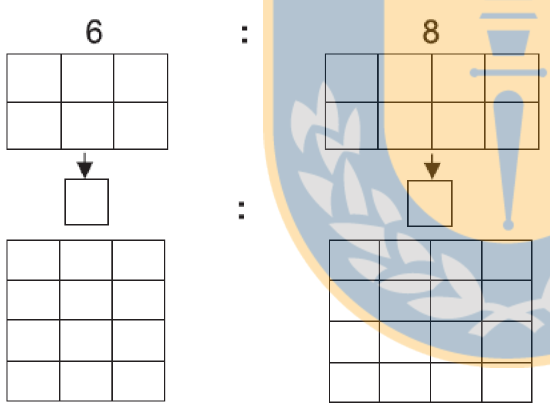
matemática • 8° básico

nombre........................................................................

curso .................. fecha ..................

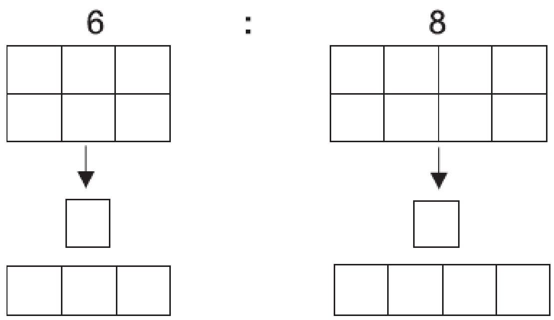
**Objetivo:** Establecer equivalencia entre razones.
Simplificar razones.

I. Observe cómo se pueden encontrar razones equivalentes. Escriban el número que corresponde en cada cuadro y realice los cálculos que se indican.




Dada la razón 6: 8, ¿Cuál es la razón que se forma si se multiplica 6 y 8 por 2?

Calcule el valor numérico de las dos razones y compare.




Dada la razón $6:8$, ¿Cuál es la razón que se forma si se divide 6 y 8 por 2?

Calcule el valor numérico de las dos razones y compare.

Si tenemos una razón $a:b$, y se multiplica o divide $a$ y $b$ por el mismo número, las razones resultantes son equivalentes.

1. Escriba tres razones equivalentes a la que se indica. Compruebe la equivalencia.
   a. $2:10$
   b. $8:12$
   c. $5:15$
   d. $7:21$

II. A Lorenzo le piden encontrar una razón equivalente a $28:35$ pero con números más pequeños. Observe como lo hace.

Forma A

$$28 : 35 = (28 \div 7) : (35 \div 7)$$
$$= 4 : 5$$

Forma B

$$\frac{\overset{4}{\cancel{28}}}{\underset{5}{\cancel{35}}} = \frac{4}{5}$$

Una razón se puede simplificar si se divide los números que la forman entre un mismo número. Si se quiere la simplificación con números menores, se divide cada número entre el máximo común divisor entre ambos.

Observe cómo se puede simplificar 0,6: 1,2.

$$0.6 : 1.2 = (0.6 \times 10) : (1.2 \times 10)$$ ← Me ayudo multiplicando por 10.

$$= 6 : 12$$ ← Divido 6 y 12 entre su M.C.D.

$$= 1 : 2$$ ← ¡Y... aquí está la razón simplificada y equivalente a 0.6 : 1.2!

> Una razón expresada con decimales se puede convertir en una razón equivalente expresada con números naturales. Esto hace más fácil su manejo.

2. Simplifique las razones.
   a. $35: 50$
   b. $63: 72$
   c. $8: 20$
   d. $40: 60$
   e. $0,3: 0,7$
   f. $0,20: 0,50$
   g. $1,4: 1,2$
   h. $34,5: 12,5$

**Guía N° 4**

## Instrucciones para preparar un rico jugo

**Receta original a razón de 1 a 4, es decir un sobre de jugo para 4 personas.**

- Primero vierte el contenido de 1 sobre de jugo en una jarra de vidrio o envase desechable.
- Luego vierte el contenido de 4 vasos de agua de 250 ml.
- Servir en 4 vasos de 250 ml.

**Receta a razón de 1 a 7, es decir un sobre de jugo para 7 personas.**

- Primero vierte el contenido de 1 sobre de jugo en una jarra de vidrio o envase desechable.
- Luego vierte el contenido de 7 vasos de agua de 250 ml.
- Servir en 7 vasos de 250 ml.

¿Cómo es el sabor del jugo en relación al anterior?

-----------------------------------------------------------------------------------

¿Qué explicación le das a ello?

------------------------------------------------------------------------------------

**Recetaa razón 3 a 4, es decir 3 sobres de jugo para4 personas.**

- Primero vierte el contenido de 3 sobre de jugo en una jarra de vidrio o envase desechable.
- Luego vierte el contenido de 4 vasos de agua de 250 ml.
- Servir en 4 vasos de 250 ml.

¿Cómo es el sabor del jugo en relación al anterior?

------------------------------------------------------------------------

¿Qué explicación le das a ello?

------------------------------------------------------------------------

**Prepara un jugo para 12 personas.**

¿Cuáles son las medidas correctas?

---------------------------------------------

**Prepara un jugo para10 personas**

¿Cuáles son las medidas correctas?

---------------------------------------------

# Guía de aprendizaje n° 5

matemática • 8° básico

nombre................................................................................

curso .................... fecha ....................

**Unidad:** Álgebra **Subsector:** Matemáticas.

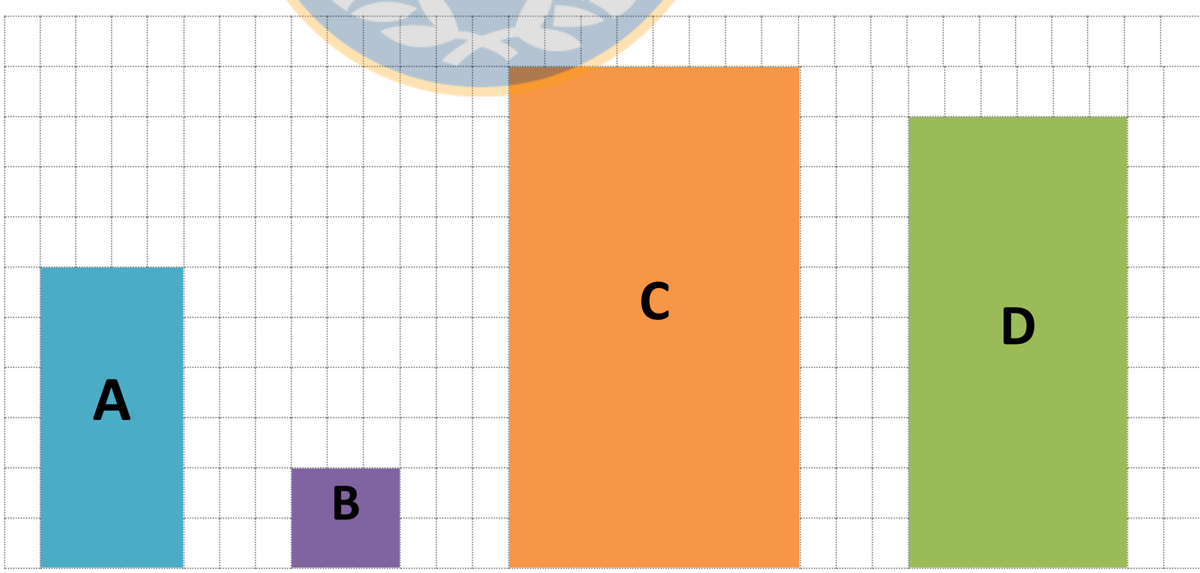
**Objetivo de la guía:** Resolver problemas en diversos contextos utilizando el concepto de razón y sus propiedades.

Instrucciones (Leídas en silencio)

- Lee atentamente esta guía.
- Trabaja en forma individual o en parejas.
- Tienes 35 minutos para trabajar.

**Resuelva las siguientes situaciones**

1. Observe los siguientes rectángulos:



Escriba la razón entre el ancho y el alto.

**a.** Para el rectángulo A..........................

**b.** Para el rectángulo B..........................

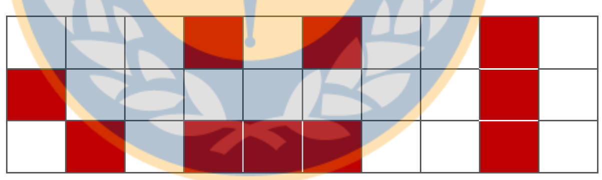
**c.** Para el rectángulo C ..........................

**d.** Para el rectángulo D ..........................

¿Qué sucede si simplifica cada una de esas razones?

.....................................................................................................................................................................
.........
.....................................................................................................................................................................
......
.....................................................................................................................................................................
.........
.....................................................................................................................................................................
......

**2.**En la siguiente figura:

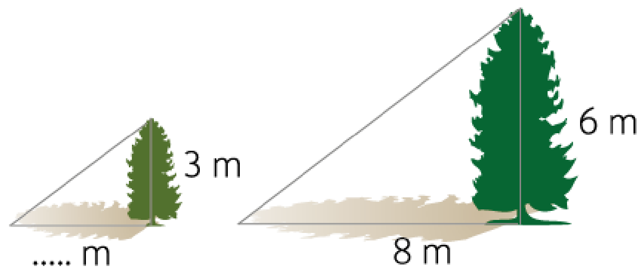


- La razón entre los rectángulos rojos y blancos es.........................................

- La razón entre los rectángulos blancos y el total de rectángulos es .........................................

- Hay que pintar ..................... rectángulos blancos para que queden en la misma razón los rectángulos blancos y rojos .........................................

3. Un árbol de 6  metros de altura proyecta una sombra de 8 metros de largo. A esa misma hora, otro árbol de 3 metros de altura ¿qué sombra proyectará? Justifique.




4. Complete los valores que faltan en las siguientes tablas, según la razón dada.

a) María camina 6 metros en 2 dos minutos.

| Minutos | Metros |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | 6 |
| | |
| 4 | |

b) Un auto avanza 100 kilómetros por hora en una carretera.

| Kilómetros | 100 | | 300 | |
|---|---|---|---|---|
| Hora | 1 | 2 | | 4 |

c) En una bebida, en 600 ml hay 88 calorías:

| Ml | calorías |
| --- | --- |
| 300 | |
| 600 | 88 |
| 900 | |
| 1200 | |

Según lo escrito en el ítem 5, determine si las siguientes proposiciones son (V) o (F)

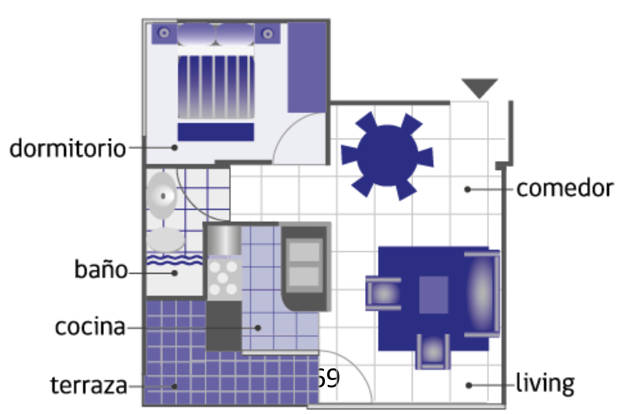
a) _____ En cada minuto María avanza tres metros caminando.

b) _____ La razón entre lo que recorre el auto y lo que se demora en avanzar es **100 : 1**

c) _____ La razón entre lo que se demora María y los metros que recorre es **1 : 3**

d) _____ Por cada 900 ml de bebida gaseosa se consumen 200 calorías.

5. La siguiente imagen muestra un plano de un departamento con un dormitorio.



**a.** Si la razón entre la superficie del comedor y la del dormitorio es 2:1. Y la superficie del comedor mide $24m^2$ ¿cuánto mide la superficie del dormitorio?

**b.** Si el total de la superficie entre el living y la cocina es 72 $m^2$ y se encuentran en razón 3:1. ¿Cuánto mide la superficie del living y la cocina?

**c.** Si la razón entre la cocina y el baño es 2:1 ¿Cuánto mide la superficie del baño?

**d.** Si el departamento lo venden a $ 23 400 000. ¿Cuál es el valor de 1 metro cuadrado?

6. Lea cada situación y represente pictóricamente la razón pedida simplificando si es necesario.

- En el pasillo de un supermercado hay 40 cajas de leche entera y 30 cajas de leche cultivada. La razón entre las cajas de leche y las cultivadas representadas pictóricamente es:

- En un cumpleaños hay 10 globos verdes, 15 azules y 20 rosados. La razón entre los globos azules y rosados representados pictóricamente es:

- En un campo existen 45 caballos y 90 vacas. La razón entre los caballos y las vacas representados pictóricamente es:

**AUTOEVALUACIÓN**

Marca con una **X** la respuesta que tú consideres que refleja mejor lo que hiciste en esta guía.

1. Leí las instrucciones completas Sí ____ No ____
2. Seguí las instrucciones Sí ____ No ____
3. Realicé la actividad en el tiempo establecido Sí ____ No ____
4. Mi trabajo está limpio y ordenado Sí ____ No ____
5. Logré hacer lo que me piden en esta guía. Sí ____ No ____
6. Aprendí con esta guía Sí ____ No ____
7. Me gustó esta guía Sí ____ No ____

Observaciones:

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

_________

# Guía N° 6. Reconocimiento de variables

matemática 8° básico m

nombre | curso | fecha

**Objetivo de la guía:** Reconocer variables relacionadas.

.

- Observe las variables que se presentan a continuación y complete la tabla.


Tiempo recorrido


Kilogramos de papas


Velocidad a la que se recorre


Tipo de bebida


Precio


Número de palabras En el texto

Costo de publicación

Calorías

| **Variables relacionadas** | | **¿Qué variable depende de la otra?** | **¿Por qué?** |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

# Guía N° 7. Proporcionalidad directa

matemática 8° básico m

nombre curso fecha

**Objetivo de la guía:** Reconocer relaciones de proporcionalidad directa

.

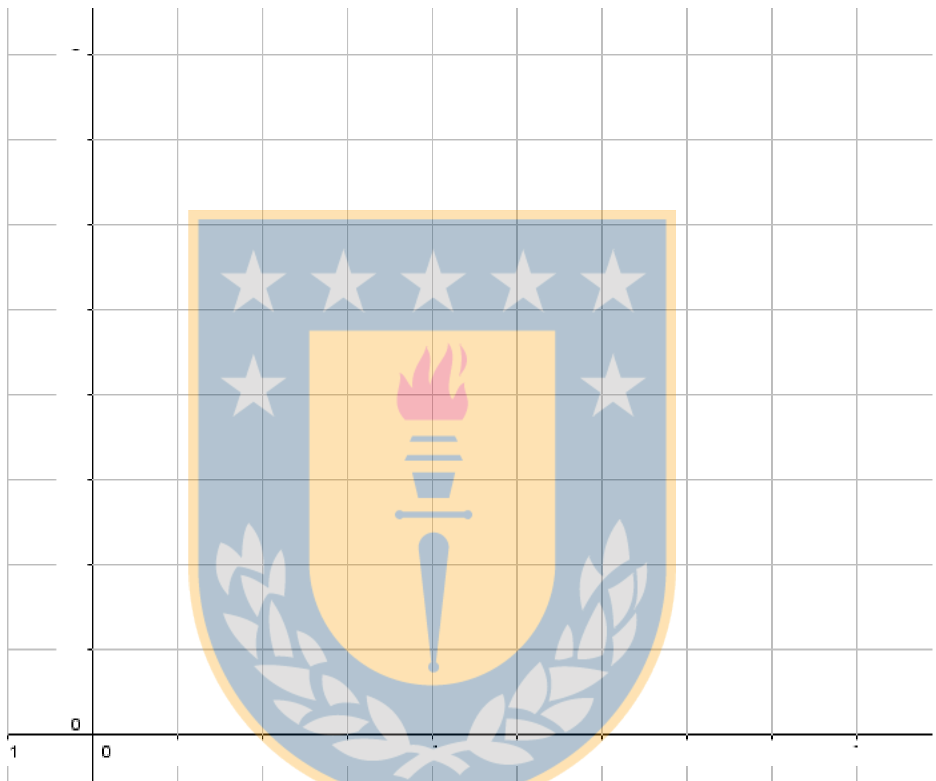
I. Observe con atención la actividad a realizar y complete la siguiente tabla con los datos obtenidos.

| Peso (gr) | Cantidad de bolsas | Cociente<br>(peso/cantidad bolsas) |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

La variable Independiente es: _______________________

La variable Dependiente es: _________________________

II. Con los datos obtenidos, realice el gráfico correspondiente.




III. Realiza en tu cuaderno una tabla de valores con su respectivo gráfico utilizando las variables peso y precio, suponiendo que kilo de arroz tiene un valor de $1200.

# Guía N° 8. Proporcionalidad directa

matemática • 8° básico

nombre........................................................................

curso .................. fecha ..................

**OBJETIVO:** Resolver problemas asociados a proporcionalidad directa.

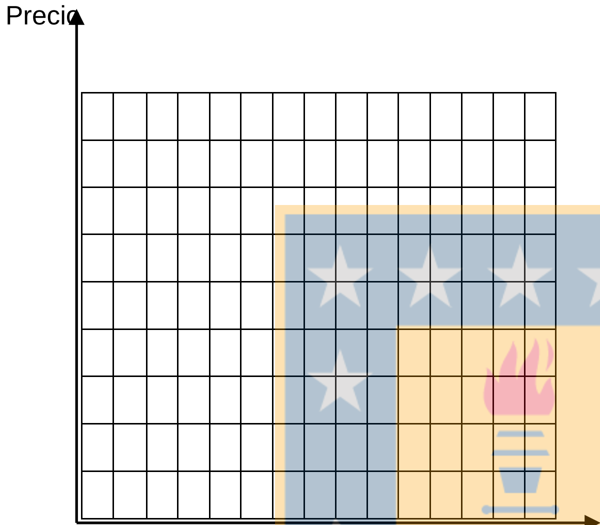
**Ejercicio 1) Proporcionalidad directa en tablas**

Un grupo de amigos ha decidido comprar una bebida para cada uno. Cada bebida cuesta $500. Completa la tabla considerando que el número de bebidas varía, luego gráfica.

| Cantidad de bebidas | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Precio total ($) | | | | | |

**Constante de proporcionalidad**: _____

**Confeccionar gráficos de proporcionalidades**




**Interpretación del gráfico:**

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

**Ejercicio 2)**

Un saco de papas pesa 20 kg. ¿Cuánto pesan 2 sacos?

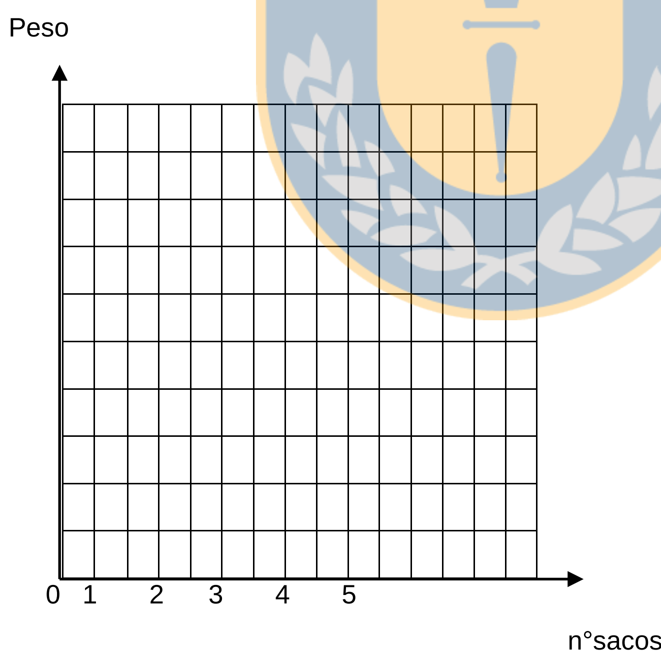
Un cargamento de papas pesa 520 kg. ¿Cuántos sacos de 20 kg se podrán hacer?

| Número de sacos | 1 | 2 | 3 | 4 | .... | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Peso en kg | | | | | .... | 520 |


**20 kg**

**Constante de proporcionalidad**: ____

**Confeccionar gráficos de proporcionalidades**




**Interpretación del gráfico:**

.........................................................

.........................................................

.........................................................

.........................................................

.........................................................

.........................................................

.........................................................

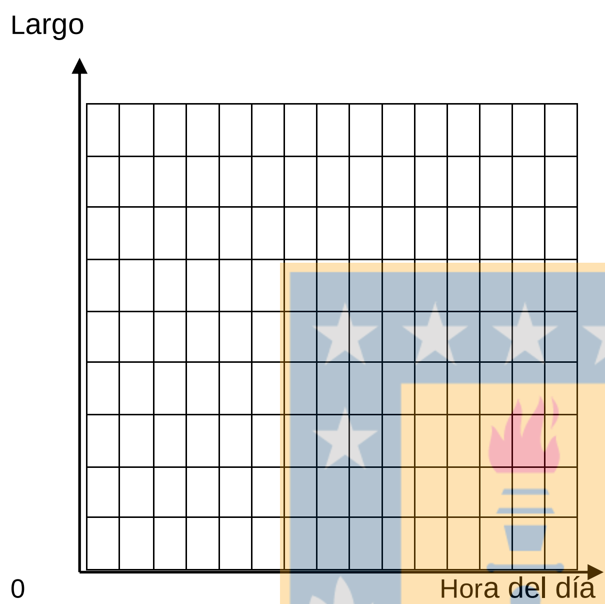
**Ejercicio 3)**

Un árbol aumenta cada 2 horas el largo de su sombra en tres metros, si a las 10 de la mañana la sombra mide 3 metros. ¿Cuánto medirá la sombra a las 12 del día y a las 3 de la tarde?

| Hora del día (hrs) | 10 | 12 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|
| Largo de la sombra | | | | |

| |
|---|
| **Constante de proporcionalidad**: ____ |

**Confeccionar gráficos de proporcionalidades**




**Interpretación del gráfico:**

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

# Guía N° 9. Proporcionalidad inversa

matemática 8° básico m

nombre | curso | fecha

**Objetivo:** Comprender el concepto de proporcionalidad inversa de manera práctica, pictórica y simbólica.

I. Observe con atención la actividad a realizar y complete la siguiente tabla con los datos obtenidos.

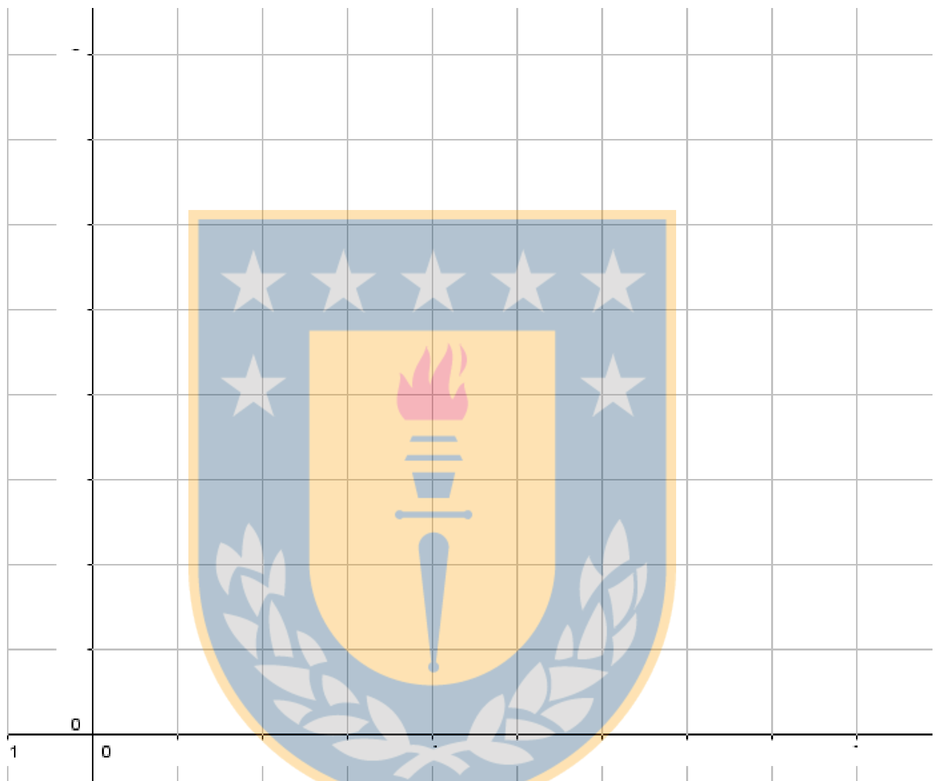
Se tienen 1000 ml de agua. ¿Cuántos vasos de 500 ml se pueden servir? ¿y de 250 ml? ¿y de 125 ml?

| Tamaño del vaso (ml) | Cantidad de vasos que se pueden servir | Producto entre variables |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

La variable Independiente es: ______________________

La variable Dependiente es: ________________________

II. Con los datos obtenidos, realice el gráfico correspondiente.



GUÍA N° 10. RAZÓN Y PROPORCIÓN

matemática • 8° básico

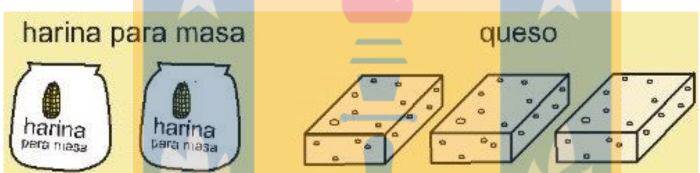
nombre....................................................................................

curso .................... fecha ....................

**I.- Resuelve:**

**1. Doña sonia esta preparando empandas de queso para  su familia. Ellaaumenta y disminuye las cantidades de masa y queso, de manera que el sabor sea siempre el mismo.**

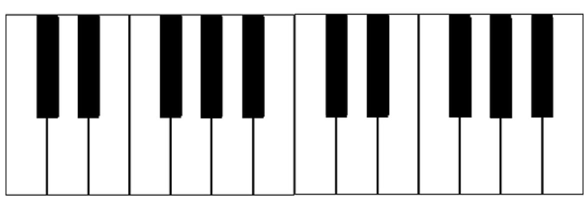
**Receta:**




**a.** Determina la razón entre la cantidad de harina y queso utilizados en la receta**.**___________

**b.**Determina la razón entre la cantidad de harina y la cantidad total de ingredientes para la masa.___________

**2.Considera el siuiente teclado**.



**a**. ¿Cuál es la razón de teclas blancas a teclas negras del teclado? ______________

**b**. Este patrón de teclas se repite en teclados mas grandes. ¿Cuántas teclas negras esperarías encontrar en un teclado con 42 teclas blancas? ________________________

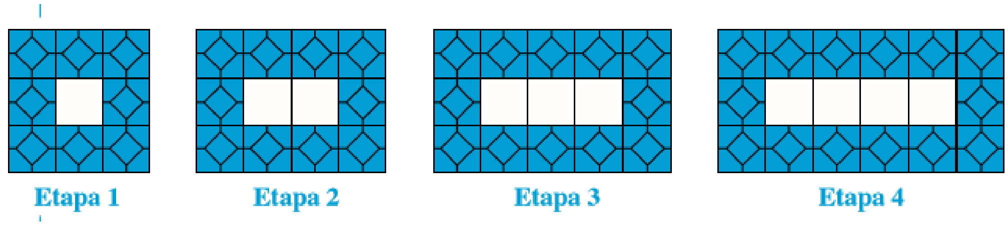
**c**. ¿Cuál sería la razón entre el número de teclas negras y el total de teclas del teclado anterior? ______________

**d**. ¿Cuántas teclas negras esperarías encontrar en un teclado con 72 teclas en total? ____________

**3. Pedro dice,-Comencé con la mezcla A. Hice la mezcla B añadiendo 1 recipiente azul y 1 recipiente claro a la mezcla A. Luego, hice la mezcla C añadiendo 1 recipiente azul y 1 recipiente claro a la mezcla B. Dado que añadí la misma cantidad de azul y la misma cantidad de agua cada vez, el número de recipientes azules es proporcional al número de recipientes claros.**

¿Tiene pedro la razón?. Explica ____________________________________________________________


**4. Diego creó este patron de baldosas.**




**a**. Describe cómo el patron de baldosas blancas y moradas cambio de una etapaa la siguiente. ________________________________________________________________________

**b**. Para las etapas que se muestran, ¿Es proporcional el número de baldosas blancas al número de baldosas moradas?___________________________________________________

II.- Calcula el término desconocido en las siguientes proporciones:

1. $\frac{9}{12} = \frac{12}{x}$

2. $\frac{4}{10} = \frac{x}{60}$

3. $\frac{8}{32} = \frac{2}{x}$

4. $\frac{3}{x} = \frac{x}{12}$

5. $\frac{x}{6} = \frac{24}{x}$

III.- Encierra en un círculo laalternativa correcta.

1. Un ciclista recorre una distancia de 48 km en 4 horas. ¿Cuál es la razón simplificada entre los kilómetros y las horas?

A) 48:1

B) 48:6

C) 12:1

D) 6:48

E) 1:12

2. En la proporción X:16=12:24 el valor de "X" es

A) ninguna es correcta

B) 8

C) 16

D) 18

E) 6

3. En la proporción 16:14=8:X el valor de "X" es igual a:

A) 8

B) 7

C) 5

D) 4

E) 6

4. Un bus recorre 720 kilómetros en 8 horas. ¿Cuántos kilómetros recorrerán en 6 horas, si mantiene la velocidad?

A) 480km

B) 440km

C) 540km

D) ninguna es correcta

E) 640km

## GUÍA N° 11. VARIACIONES PROPORCIONALES

matemática • 8° básico

nombre..........................................................................................

curso .................. fecha ..................

**I.- Obtén el término que falta en cada caso, para que se cumpla la igualdad.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $\frac{21}{70} = \frac{3}{z}$ <br> z= | b) $\frac{y}{2} = \frac{18}{36}$ <br> y= | c) $\frac{4}{x} = \frac{5}{25}$ <br> x= | d) $\frac{3}{15} = \frac{w}{5}$ <br> w= |
| e) $\frac{3}{6} = \frac{12}{v}$ <br> v= | f) $\frac{3}{5} = \frac{u}{10}$ <br> u= | g) $\frac{4}{t} = \frac{11}{22}$ <br> t= | h) $\frac{s}{90} = \frac{4}{40}$ <br> s= |
| i) $\frac{r}{20} = \frac{8}{32}$ <br> r= | j) $\frac{3}{9} = \frac{7}{q}$ <br> q= | k) $\frac{5}{p} = \frac{6}{42}$ <br> p= | l) $\frac{9}{81} = \frac{6}{o}$ <br> o= |

**II.** Completa las tablas, encuentra las constantes de proporcionalidad (k).

**a)** Un vehículo todo terreno gasta 240 litros de combustible en cada 20 kilómetros que recorre, ¿Cuántos litros gastará en 12, 8, 6, 4 y 2 kilómetros?

| **Kilómetros** | 20 | 12 | 8 | 6 | 4 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Combustible** | 240 | | | | | |

k=__________=

**b)** La equivalencia entre el peso de Chile y el dólar es de $450 = 1 dólar. ¿Cuántos pesos chilenos serán 5, 15, 20,50,75 y 100?

| **Pesos chilenos** | 450 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Dólar** | 1 | 15 | 20 | 50 | 75 |

k=________=

**c)** Un estudio local, reveló que un computador gasta aproximadamente $3.000 (mensualmente) por hora que pasa encendido, ¿cuántos pesos se gastará en 4, 12, 18 y 24 horas?

| **Horas** | 1 | 4 | 12 | 18 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Pesos** | 3.000 | | | | |

k=________=

**d)** Paulina tarda 32 minutos en subir 8 fotos a *Internet*. ¿Cuántos minutos tardará en subir 6,4,2 y 1 foto a *internet*?

| **Fotos** | 8 | 6 | 4 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Minutos** | 32 | | | | |

k=________=

**III**. Completa las tablas, encuentra las constantes de proporcionalidad (k).

**a)** Si 3 hombres necesitan 24 días para hacer un trabajo, ¿cuántos días emplearán 6, 9,12 y 18?

| **Hombres** | 3 | 6 | 9 | 12 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Días** | 24 | | | | |

k=________=

**b)** Se sabe que 10 alumnos se demoran 24 minutos en pintar un mural, ¿cuánto tardarán en pintar el mismo mural 5, 15, 20 y 30 alumnos?

| **Alumnos** | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Minutos** | | 24 | | | |

k=________=

**c)** Si 25 jardineros tardan 12 días en podar las palmeras de costanera, ¿cuántos jardineros se necesitan para hacer el mismo trabajo en 10, 6, 4 y 2 días?

| **Jardineros** | 25 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Días** | 12 | 10 | 6 | 4 | 2 |

k=________=

**d)** Un granjero tiene alimento suficiente para alimentar a 30 ovejas durante 9 días. Si cuenta con la misma cantidad de alimento, ¿cuántos días podrá alimentar a 45, 60, 75 y 90 ovejas?

| **Ovejas** | 30 | 45 | 60 | 75 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Días** | 9 | | | | |

k=________=

**2.** Responde si las siguientes igualdades son o no proporciones.

| **a : b** | **c : d** | **Respuesta** |
|---|---|---|
| 2 : 6 | 5 : 15 | |
| 8 : 3 | 4 : 6 | |
| 3 : 6 | 6 : 12 | |

3. Estudia las siguientes tablas de valores y determina si hay proporcionalidad directa.

a.

| x | y |
|---|---|
| 2 | 15 |
| 3 | 10 |
| 4 | 7,5 |
| 5 | 6 |

b.

| x | y |
|---|---|
| 2 | 12 |
| 3 | 13 |
| 4 | 14 |
| 5 | 15 |

c.

| x | y |
|---|---|
| 2 | 5 |
| 3 | 4 |
| 4 | 3 |
| 5 | 2 |

d.

| x | y |
|---|---|
| 10 | 200 |
| 20 | 400 |
| 40 | 800 |
| 80 | 1600 |

e.

| x | y |
|---|---|
| $\frac{1}{8}$ | 30 |
| $\frac{1}{6}$ | 40 |
| $\frac{1}{4}$ | 60 |
| $\frac{1}{2}$ | 120 |

f.

| x | y |
|---|---|
| 810 | 162 |
| 270 | 54 |
| 90 | 18 |
| 30 | 6 |

4. Calcula los valores de a y b en las siguientes tablas, sabiendo que los valores son inversamente proporcionales

a-

| A | B |
|---|---|
| a | 12 |
| 8 | 3 |
| 6 | b |

b-

| A | B |
|---|---|
| 4 | b |
| 6 | 12 |
| a | 4 |

c-

| A | B |
|---|---|
| 9 | 81 |
| a | 7 |
| 3 | b |

d-

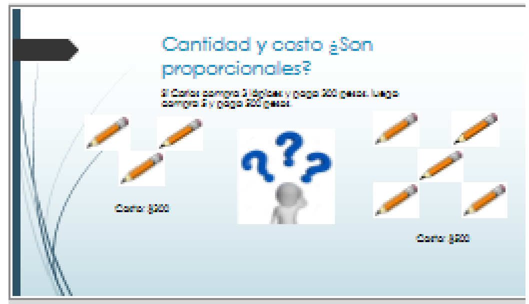
| A | B |
|---|---|
| 10 | b |
| 20 | 12 |
| a | 24 |

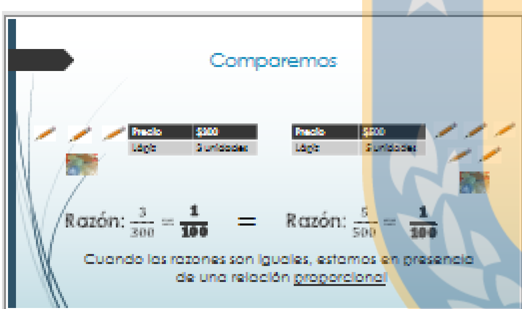
# A.2. Presentación Razón

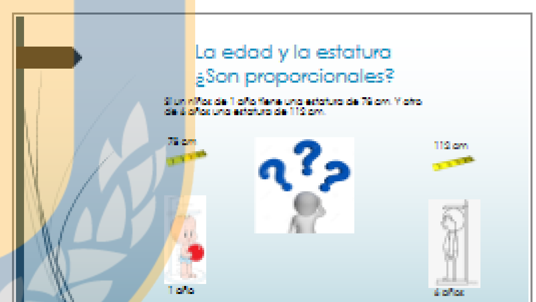




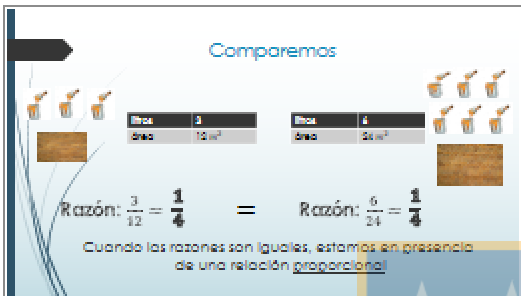

# A.3. Presentación Proporcionalidad

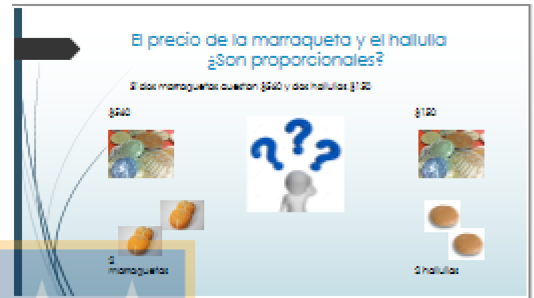



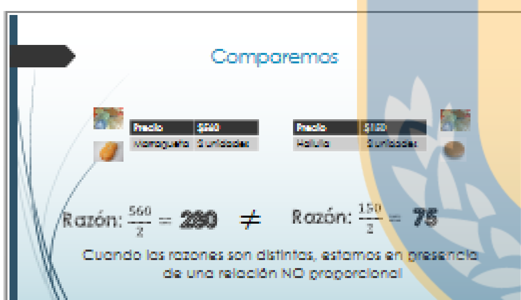






Comparemos
Razón: $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
=
Razón: $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$
Cuando las razones son iguales, estamos en presencia de una relación proporcional

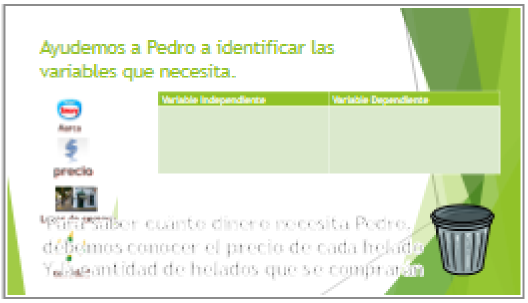

El precio de la marraqueta y el hallulla ¿Son proporcionales?
2 hallullas


Comparemos
Razón: $\frac{560}{2} = 280$
≠
Razón: $\frac{150}{2} = 75$
Cuando las razones son distintas, estamos en presencia de una relación NO proporcional

# A.4. Presentación Identificando Variables



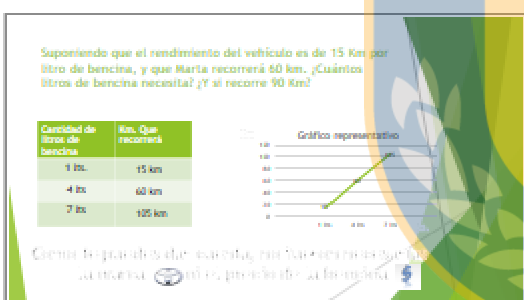




Ayudemos a Pedro a identificar las variables que necesita.
Variable Independiente
Variable Dependiente
precio
Para saber cuanto dinero necesita Pedro,
debemos conocer el precio de cada helado
Y la cantidad de helados que se compraran

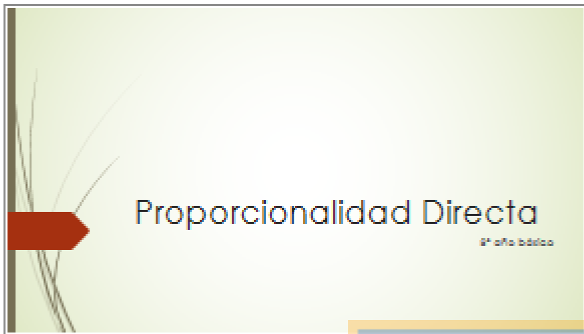

Ahora bien, suponiendo que cada helado cuesta $150 y Pedro quiere comprar 4 ¿Cuánto dinero necesita? ¿Y si compra 7?
Cantidad de helados
Precio por helado
1
$150
4
$600
7
$1.050
Gráfico representativo


Marta quiere realizar un viaje en su vehículo ¿Qué necesita saber para calcular los litros de bencina que utilizará?
Distancia a recorrer (km)


Ayudemos a Marta a identificar las variables que necesita.
Variable Independiente
Variable Dependiente
Para saber cuanta bencina necesita Marta,
debemos conocer el rendimiento del vehiculo y
Los kilómetros que recorrerá

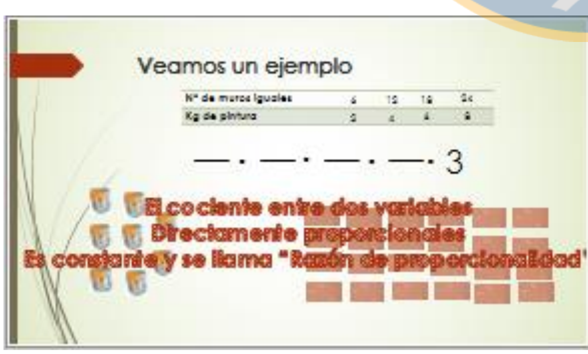

Suponiendo que el rendimiento del vehículo es de 15 Km por litro de bencina, y que Marta recorrerá 60 km. ¿Cuántos litros de bencina necesita? ¿Y si recorre 90 Km?
Cantidad de litros de bencina
Km. Que recorrerá
1 lts.
15 km
4 lts
60 km
7 lts
105 km
Gráfico representativo

# A.5. Presentación Proporcionalidad Directa

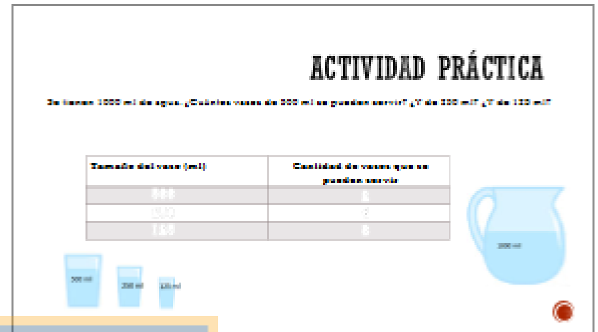


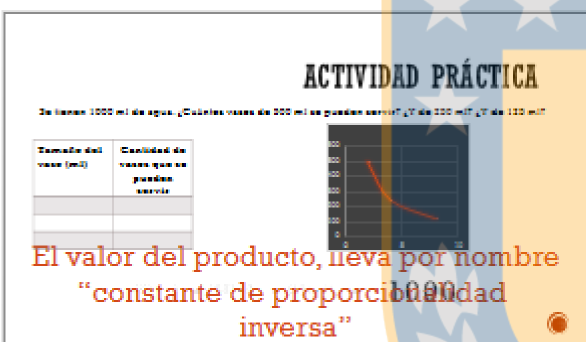




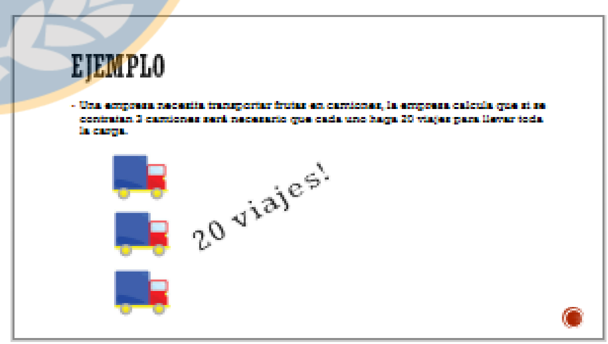


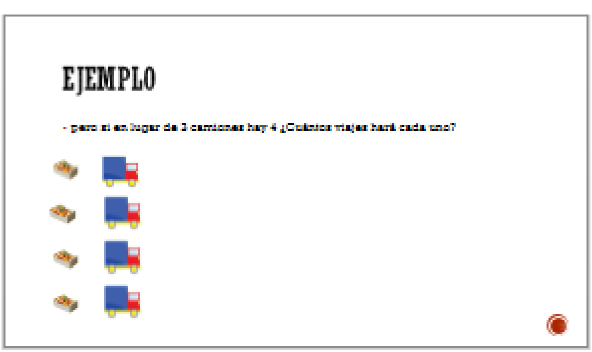
# A.6. Presentación Proporcionalidad Inversa

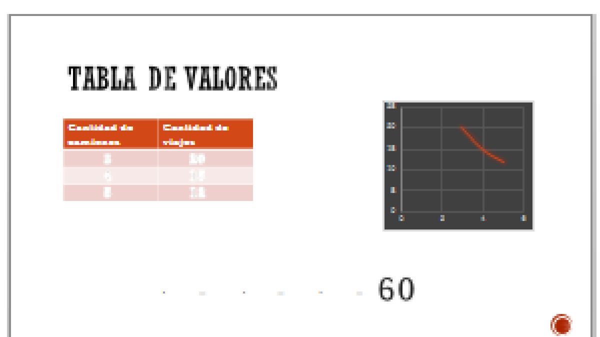





# Anexo B

# Planificaciones intervención $GE_A$ y $GE_B$

| **DISEÑO DE CLASE N° 1** | |
|---|---|
| NOMBRE DOCENTE | FECHA: |
| ESTABLECIMIENTO: | CURSO: 8° año. |
| UNIDAD: Unidad n° 4 “Álgebra” | |
| OBJETIVO DE APRENDIZAJE: Demostrar que comprenden el concepto de razón de manera concreta, pictórica y simbólica, en forma manual y/o usando software educativo | |
| HABILIDADES: Comprobar reglas y propiedades<br>que representanReconocer e identificar los datos esenciales de un problema matemático.s relaciones e in | |
| OBJETIVO TRANSVERSAL: Manifestar curiosidad e interés por el aprendizaje de las matemáticas.<br>Manifestar un estilo de trabajo ordenado y metódico<br>Expresar y escuchar ideas de forma respetuosa | |
| CONTENIDOS PREVIOS: Adición, sustracción,multiplicación, división, fracciones | |

| CONTENIDOS | MOMENTO DE LA CLASE | INDICADORES | EVALUACIÓN |
|---|---|---|---|
| -. Concepto de razón. | INICIO: Se comienza la clase explicando el objetivo de la misma, además de relacionar el contenido a tratar con otras áreas del aprendizaje.<br>Luego se plantea una pregunta ¿De qué maneras podemos comparar dos cantidades? (se piden ejemplos). La cual apunta claramente a las formas cuantitativas de comparar dos cantidades numéricas, la que irá apoyada de una actividad relacionada (ver anexo 1)<br><br>DESARROLLO: Para continuar nuestra clase se complementa la actividad anterior con la definición de razón como comparación multiplicativa entre dos cantidades, además de la interpretación correcta de la misma. Para continuar con el desarrollo de la clase, se procede a realizar una actividad que apunta a la construcción de razones mediante material concreto a base de goma Eva, en la que los alumnos deberán relacionar las cintas entregadas según la razón pedida. Enfatizando la importancia del orden en el que se consideran los elementos y de esta manera, observar que una razón puede tomar valores mayores a uno. (Ver anexo 2)<br><br>CIERRE: Para finalizar con nuestra clase se realiza una actividad apoyada de un power point, donde se presentan | Comparan cantidades por adición y por multiplicación<br><br>Describen la razón de una representación concreta o pictórica de ella.<br><br>Explican la razón como parte de un todo.<br><br>Identifican y describen razones en contextos reales | Coevaluación<br><br>Pauta de observación<br><br>Guía de aprendizaje |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | imágenes de situaciones en la que el alumno deberá decidir a qué razón corresponde y a qué tipo de comparación pertenece. | | |

| |
|---|
| **Conexión de los contenidos tratados con: el medio y su entorno, otras asignaturas.**<br>Los contenidos están directamente relacionados con la vida diaria de los estudiantes, ya que diariamente utilizamos las comparaciones, ya sea al ir de compras o simplemente seguir una receta de un libro de cocina. |

| DISEÑO DE CLASE N° 2 | |
|---|---|
| NOMBRE DOCENTE | FECHA: |
| ESTABLECIMIENTO: | CURSO: 8° año. |
| UNIDAD: Unidad n° 4 “Álgebra” | |
| OBJETIVO DE APRENDIZAJE: Establecer equivalencia entre razones.<br>Simplificar razones. | |
| HABILIDADES: Comprobar reglas y propiedades<br>que representanReconocer e identificar los datos esenciales de un problema matemático.s relaciones e in | |
| OBJETIVO TRANSVERSAL: Manifestar curiosidad e interés por el aprendizaje de las matemáticas.<br>Manifestar un estilo de trabajo ordenado y metódico<br>Expresar y escuchar ideas de forma respetuosa | |
| CONTENIDOS PREVIOS: Operaciones con fracciones. | |

| CONTENIDOS | MOMENTO DE LA CLASE | INDICADORES | EVALUACIÓN |
|---|---|---|---|
| -. Propiedades de la razón. | INICIO: Para comenzar la clase se procede a realizar una actividad que apunta a recordar lo visto en la clase anterior, es decir, el concepto de razón (ver anexo 1). (futbol)<br><br>DESARROLLO: Luego se orienta la clase hacia las propiedades de la razón (amplificación y simplificación) utilizando el material didáctico empleado en la clase anterior.<br>Posterior a ello, los alumnos realizan una actividad que apunta a la aplicación de las propiedades de la razón (ver anexo 2)<br>(japonés y otros)<br><br>CIERRE: Para finalizar con la clase se procede a la realización de la actividad "preparando un buen jugo" (ver anexo 3) | Amplifican correctamente una razón<br><br>Simplifican correctamente una razón<br><br>Dan una representación pictórica de una razón<br><br>Identifican razones equivalentes en contextos de resolución de problemas. | Coevaluación<br><br>Pauta de observación<br><br>Guía de aprendizaje |

| |
|---|
| **Conexión de los contenidos tratados con: el medio y su entorno, otras asignaturas.**Los contenidos están directamente relacionados con la vida diaria de los estudiantes, ya que necesitan de la amplificación y simplificación de razones para dar solución a diversos problemas, tales como la preparación de una receta obtenida de internet, decidir conveniencia de una oferta, etc. |

| **DISEÑO DE CLASE N° 3** | |
|---|---|
| NOMBRE DOCENTE | FECHA: |
| ESTABLECIMIENTO: | CURSO: 8° año. |
| UNIDAD: Unidad n° 4 “Álgebra” | |
| OBJETIVO DE APRENDIZAJE:Resolver problemas en diversos contextos utilizando el concepto de razón y sus propiedades. | |
| HABILIDADES: Comprobar reglas y propiedades<br>que representanReconocer e identificar los datos esenciales de un problema matemático. e in | |
| OBJETIVO TRANSVERSAL: Manifestar curiosidad e interés por el aprendizaje de las matemáticas.<br>Manifestar un estilo de trabajo ordenado y metódico<br>Expresar y escuchar ideas de forma respetuosa | |
| CONTENIDOS PREVIOS: Multiplicación, división, operaciones con fracciones. | |

| CONTENIDOS | MOMENTO DE LA CLASE | INDICADORES | EVALUACIÓN |
|---|---|---|---|
| - Concepto y propiedades de la razón. | INICIO: Se comienza la clase explicando el objetivo de la misma. Posteriormente se realiza un breve repaso de los contenidos tratados en las clases anteriores mediante lluvia de ideas, donde los estudiantes deben ser quienes recuerden y dar algunos ejemplos. Luego se proyecta un ejemplo de proporcionalidad de un software obtenido del link. http://www.educa.madrid.org/web/cepa.coslada/math_online/numbers/numbers10.html. Esto con el objetivo de que los estudiantes visualicen lo que sucede diariamente en la naturaleza donde la razón está presente.<br><br>DESARROLLO: Para continuar, se les entregarán tres imágenes donde los estudiantes deben medirlas y escribir las razones entre el largo y el ancho, luego deben comparar los valores obtenidos en la imagen 1 con respecto a las otras dos y escribir sus respuestas en el cuaderno. Esto con el objetivo de que ellos concluyan que la casas de 1 y 2 no son iguales, no se encuentran en la misma razón y que las casas 1 y 3 son iguales porque representan la misma razón, la diferencia es que en 3 la imagen se amplió.<br>Posteriormente se les entrega una guía de trabajo orientada a interpretar razones, identificar razones equivalentes y a resolver situaciones utilizando propiedades de razones (ver anexo 1.) | Resuelven problemas dados, incluyendo razones.<br><br>Interpretan el valor de una razón. | Guía de aprendizaje<br><br>Autoevaluación<br>. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | CIERRE: Corrección de la actividad en pizarra y se aclaran posibles dudas. | | |
| **Conexión de los contenidos tratados con: el medio y su entorno, otras asignaturas:** Los contenidos están directamente relacionados con la vida diaria de los estudiantes, ya que diariamente utilizamos las comparaciones y ver que las razones están presentes en la naturaleza, en la construcción, etc. | | | |

| **DISEÑO DE CLASE N° 4** | |
|---|---|
| NOMBRE DOCENTE | FECHA: |
| ESTABLECIMIENTO: | CURSO: 8° año. |
| UNIDAD: Unidad n° 4 “Álgebra” | |
| OBJETIVO DE APRENDIZAJE:Reconocer una proporción como una igualdad entre dos razones. | |
| HABILIDADES: Comprobar reglas y propiedades<br>que representanReconocer e identificar los datos esenciales de un problema matemático. e in | |
| OBJETIVO TRANSVERSAL: Manifestar actitudes de solidaridad y respeto, que favorezcan la convivencia.<br>Manifestar un estilo de trabajo ordenado y metódico<br>Expresar y escuchar ideas de forma respetuosa | |
| CONTENIDOS PREVIOS: Multiplicación, división, operaciones con fracciones. | |

| CONTENIDOS | MOMENTO DE LA CLASE | INDICADORES | EVALUACIÓN |
|---|---|---|---|
| Concepto de proporcionalidad | INICIO: Se comienza la clase explicando el objetivo de la misma. Posterior a ello el docente presenta un ppt que busca explicar cuándo dos relaciones son proporcionales, además de hacer énfasis en que no todas las relaciones cumplen con el requisito de proporcionalidad. Para reforzar el contenido, se realiza un actividad donde los estudiantes visualizan la utilidad de reconocer una proporción, ampliando una imagen del curso en un software computacional procurando que la imagen se modifique de manera proporcional y no proporcional para así, llevarlos a la conclusión si cambiamos la razón inicial la imagen se distorsiona, es decir, la imagen no es igual si no se mantiene la relación proporcional entre las medidas originales y las nuevas.<br><br>DESARROLLO: Una vez presentado el ppt, se aclaran posibles dudas con respecto al mismo para luego pedirles que busquen 5 ejemplos de situaciones que involucren relaciones proporcionales y 5 no proporcionales que se puedan apreciar en su entorno.<br><br>CIERRE: Para finalizar se le solicita a los alumnos que formen grupos y escojan una situación de cada caso (proporcional y no proporcional) que más los represente para dibujarlo en una hoja de block. Actividad que será recolectada por el docente. | Identifican relaciones proporcionales y no proporcionales en su entorno<br><br>Interpretan el valor de una razón. | Pauta de observación |

**Conexión de los contenidos tratados con: el medio y su entorno, otras asignaturas:** Los contenidos están directamente relacionados con la vida diaria de los estudiantes, ya que diariamente utilizamos las comparaciones y ver que las razones están presentes en la naturaleza, en la construcción, etc.

| **DISEÑO DE CLASE N° 5** | |
|---|---|
| NOMBRE DOCENTE | FECHA: |
| ESTABLECIMIENTO: | CURSO: 8° año. |
| UNIDAD: Unidad n° 4 “Álgebra” | |
| OBJETIVO DE APRENDIZAJE: Distinguir variables dependientes e independientes. | |
| HABILIDADES: | |
| OBJETIVO TRANSVERSAL: Manifestar curiosidad e interés por el aprendizaje de las matemáticas.<br>Expresar y escuchar ideas de forma respetuosa | |
| CONTENIDOS PREVIOS: Concepto de variable. | |

| CONTENIDOS | MOMENTO DE LA CLASE | INDICADORES | EVALUACIÓN |
|---|---|---|---|
| - Concepto de variable | INICIO: Se comienza la clase dando a conocer el objetivo de la misma de forma oral y escrita en el pizarrón.<br>Luego mediante lluvia de ideas los alumnos forman el concepto de variable.<br><br>DESARROLLO: Mediante un ejemplo concreto con un reloj y un celular, se les pide a dos estudiantes que finjan una llamada telefónica con un determinado tiempo para cada uno, luego se le pide al grupo curso que identifique las variables en la escena. Se realiza la siguiente pregunta: ¿Cuál de las llamadas tuvo un mayor costo de dinero? ¿De qué depende el costo de cada uno? Finalmente los estudiantes deducen las variables dependientes e independientes expuestas en la escena.<br>Para reforzar los conceptos los estudiantes trabajan en una guía de ejercicios, donde deberán distinguir variables en un problema. (Ver anexo)<br><br>CIERRE: Para finalizar con nuestra clase se revise de forma oral las soluciones de la guía. Y se les da como tarea, pensar variables que involucran en su vida cotidiana. | Identifican variables dependientes e independientes, a partir de un problema real. | Coevaluación<br><br>Pauta de observación<br><br>Guía de aprendizaje |

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Conexión de los contenidos tratados  con: el medio y su entorno, otras asignaturas.Los contenidos están directamente relacionados con la vida diaria de los estudiantes, puesto que el reconocimiento de variables es fundamental para dar una correcta solución a cualquier tipo de problemática.</td></tr>
</table>

| **DISEÑO DE CLASE N° 6** | |
|---|---|
| NOMBRE DOCENTE | FECHA: |
| ESTABLECIMIENTO: | CURSO: 8° año. |
| UNIDAD: Unidad n° 4 “Álgebra” | |
| OBJETIVO DE APRENDIZAJE: Conocer la relación de proporcionalidad directa | |
| HABILIDADES: | |
| OBJETIVO TRANSVERSAL: Manifestar curiosidad e interés por el aprendizaje de las matemáticas.<br>Expresar y escuchar ideas de forma respetuosa | |
| CONTENIDOS PREVIOS: Concepto de razón, propiedad fundamental de la razón, propiedades de razón. | |

| CONTENIDOS | MOMENTO DE LA CLASE | INDICADORES | EVALUACIÓN |
|---|---|---|---|
| - Relación de proporcionalidad directa | INICIO: Se comienza la clase dando a conocer el objetivo de la misma de forma oral y escrita en el pizarrón.<br>Luego se les consulta a los estudiantes por el contenido tratado en la clase anterior con el fin de realizar un breve repaso de variables independientes y dependientes.<br><br>DESARROLLO: Para continuar se realiza una actividad en la que los estudiantes deberán pesar (en una balanza digital) bolsitas de arroz de 150 gr c/u. Considerando las variables cantidad de bolsas y peso en gr. Para completar una tabla de valores, previamente entregada (ver anexo 1) para posteriormente identificar la variable dependiente e independiente y realizar el respectivo gráfico. Luego, se le asigna un valor de $1200 al kg de arroz con el fin de que realicen una nueva tabla de valores con su respectivo gráfico, pero esta vez considerando las variables precio y gr de arroz.<br><br>CIERRE: Finalmente, se presenta un power point que resume mediante ejemplos gráficos y animados la definición de relaciones directamente proporcionales. | - Identifican relaciones de proporcionalidad directa.<br><br>- Grafican, a partir de una tabla de valores, una situación directamente proporcional. | Coevaluación<br><br>Pauta de observación<br><br>Guía de aprendizaje |

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Conexión de los contenidos tratados  con: el medio y su entorno, otras asignaturas.Los contenidos están directamente relacionados con la vida diaria de los estudiantes, puesto que la proporción directa está presente en la mayoría de las actividades cotidianas, como por ejemplo; compras en la feria, carga de combustible, preparación de alguna receta, etc.</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| **DISEÑO DE CLASE N° 7** | |
| NOMBRE DOCENTE | FECHA: |
| ESTABLECIMIENTO: | CURSO: 8° año. |
| UNIDAD: Unidad n° 4 “Álgebra” | |
| OBJETIVO DE APRENDIZAJE:Resolver problemas que involucren variables directamente proporcionales en la vida cotidiana. | |
| HABILIDADES: | |
| OBJETIVO TRANSVERSAL: Manifestar curiosidad e interés por el aprendizaje de las matemáticas.<br>Expresar y escuchar ideas de forma respetuosa | |
| CONTENIDOS PREVIOS: Concepto de razón, propiedad fundamental de la razón, propiedades de razón. | |

| CONTENIDOS | MOMENTO DE LA CLASE | INDICADORES | EVALUACIÓN |
|---|---|---|---|
| - Relación de proporcionalidad directa | INICIO: Se comienza la clase dando a conocer el objetivo de la misma de forma oral y escrita en el pizarrón.<br>Posterior a ello se realiza una breve retroalimentación, con el fin de reforzar contenidos tratados en clases anteriores el concepto de proporcionalidad directa.<br><br>DESARROLLO: Los estudiantes resuelven una guía con problemas asociados a variables directamente proporcionales, para estose apoyan de imágenes ilustrativas a cada situación. Además en esta guía deberán registrar resultados en una tabla de valores, que posteriormente graficaran e interpretaran, determinando así la constante de proporcionalidad como el cuociente entre las dos variables.<br><br>CIERRE: Para concluir en conjunto con los estudiantes se revisan y comparan resultados, además discuten sobre un problema propuesto en la guía el cual no constituía a una situación directamente proporcional finalmente se aclaran dudas. | - Identifican relaciones de proporcionalidad directa.<br><br>- Grafican, a partir de una tabla de valores, una situación directamente proporcional. | Coevaluación<br><br>Pauta de observación<br><br>Guía de aprendizaje |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Conexión de los contenidos tratados con: el medio y su entorno, otras asignaturas.** Los contenidos están directamente relacionados con la vida diaria de los estudiantes, puesto que la proporción directa está presente en la mayoría de las actividades cotidianas, como por ejemplo; compras en la feria, carga de combustible, preparación de alguna receta, etc. | | | |

| DISEÑO DE CLASE N° 8 | |
|---|---|
| NOMBRE DOCENTE | FECHA: |
| ESTABLECIMIENTO: | CURSO: 8° año. |
| UNIDAD: Unidad n° 4 “Álgebra” | |
| OBJETIVO DE APRENDIZAJE: Comprender el concepto de proporcionalidad inversa de manera práctica, pictórica y simbólica. | |
| HABILIDADES: | |
| OBJETIVO TRANSVERSAL: Manifestar curiosidad e interés por el aprendizaje de las matemáticas.<br>Expresar y escuchar ideas de forma respetuosa | |
| CONTENIDOS PREVIOS: Concepto de razón, propiedad fundamental de la razón, propiedades de razón. | |

| CONTENIDOS | MOMENTO DE LA CLASE | INDICADORES | EVALUACIÓN |
|---|---|---|---|
| - Relación de proporcionalidad inversa | INICIO: Se comienza la clase dando a conocer el objetivo de la misma de forma oral y escrita en el pizarrón.<br>Posterior a ello se realiza una breve retroalimentación, con el fin de reforzar contenidos tratados en clases anteriores.<br><br>DESARROLLO: Para continuar con la clase, se propone una actividad práctica en la que los alumnos deberán servir un litro de agua, previamente medido, en vasos de 500 ml y registrar en una tabla para posteriormente realizar el gráfico correspondiente (ver anexo 1), la cantidad de vasos que alcanzaron a servir. Luego realizan el mismo procedimiento pero ahora con vasos de 250 ml y finalmente con vasos de 125 ml. Actividad que será apoyada por un power point explicativo.<br><br>CIERRE: Finalmente, se presenta un power point que resume mediante ejemplos gráficos y animados la definición de relaciones inversamente proporcionales. | - Identifican relaciones de proporcionalidad inversa.<br><br>- Grafican, a partir de una tabla de valores, una situación inversamente proporcional. | Coevaluación<br><br>Pauta de observación<br><br>Guía de aprendizaje |

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Conexión de los contenidos tratados  con: el medio y su entorno, otras asignaturas.Los contenidos están directamente relacionados con la vida diaria de los estudiantes, ya que les permite dar solución a problemas cotidianos que involucren variables tales como velocidad y tiempo, trabajadores y tiempo, etc.</td></tr>
</table>

# Anexo C

# Instrumentos de Recolección de Datos

## C.1. Pre-Test de Conocimientos

## Pre test de Conocimiento

| **Nombre:** | **Curso:** | **Puntaje obtenido:** |
|---|---|---|

**Objetivos:**

a. Encontrar e interpretar la razón asociada a situaciones de la vida real.
b. Utilizar las propiedades de una razón en situaciones de la vida real.
c. Resolver problemas que involucren variables proporcionales y no proporcionales a partir de tablas y/o enunciados.
d. Resolver problemas que involucren proporcionalidad directa.
e. Resolver problemas que involucren proporcionalidad inversa.
f. Reconocer variables a partir de un enunciado.

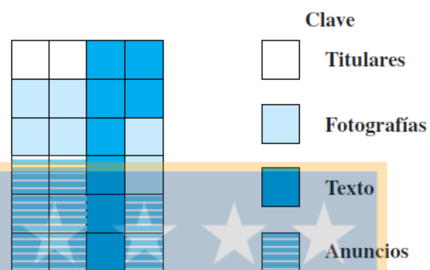
**Instrucciones generales:**

Lea atentamente el test. No se admiten borrones. La falta de claridad en algunas de sus respuestas invalidará la misma. Si es sorprendido copiando oayudando a su compañero, su evaluación será anulada.

## Pre-test Razones y Proporciones

**Resuelve las siguientes situaciones.**

1. Emilio diseña las páginas de un periódico. Él divide una de las páginas en 24 secciones iguales y determina las secciones que se dedicarán a titulares, textos, fotografías y anuncios como muestra la figura.




Determine:

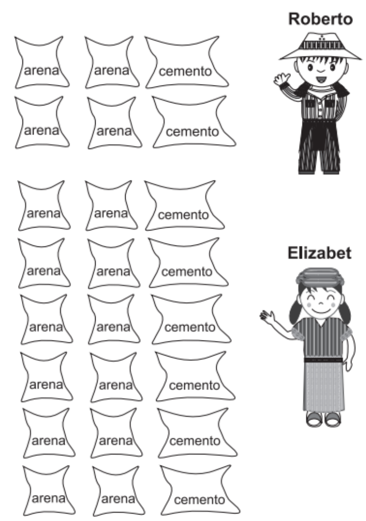
a. La razón entre la cantidad destinada a titulares y la destinada a anuncios: ______________

b. La razón entre la cantidad destinada a texto y el total de la página: _____________

c. Las secciones que están a razón 1 : 4 son: __________________________________ ________________________________________

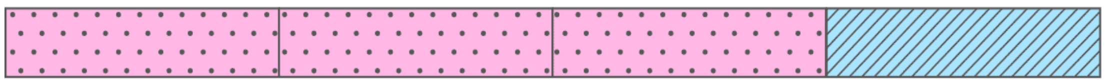
2. Roberto prepara una mezcla con 4 sacos de arena y 2 sacos de cemento. Elizabeth prepara una mezcla con 12 sacos de arena y 6 sacos de cemento.

   a. En cada caso, ¿Cuál es la razón entre las cantidades de sacos de arena y la cantidad total de sacos? ¿Cuál es la razón entre la cantidad de sacos de cemento y la cantidad total de sacos?



b. ¿En qué se parece y en qué se diferencia la mezcla que preparó cada quién?

En un curso, por cada cuatro alumnos tres hacen deporte.



Responda la siguiente situación:

Juan dice que 3 de cada 4 alumnos comen fruta, Roberto dice que él está equivocado, que en realidad son 6 de cada 8.

Pinte la razón para cada uno.

**Juan**

**Roberto**

¿Quién está en lo correcto? Justifica tu respuesta

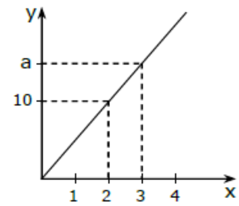
4. En un estudio sobre la salud poblacional aparece, que por cada dos personas con peso normal hay tres personas con sobrepeso. Si en la región hay 2.000.000 personas con peso normal, ¿Cuántas personas con sobrepeso tiene la región?

**Encierre en un círculo la alternativa que considere correcta.**

5. En un colegio hay 280 estudiantes en Educación Básica y 120 estudiantes en Educación Media. ¿Cuál es la razón entre los estudiantes de Educación Básica y el total de estudiantes que hay en el colegio?
   a. 3 : 7
   b. 7 : 3
   c. 7 : 10
   d. 10 : 7

6. Alicia puede correr 4 vueltas alrededor de la pista en el mismo tiempo que Carolina puede correr 3 vueltas. Cuando Carolina haya corrido 12 vueltas, ¿cuántas vueltas habrá corrido Alicia?
   a. 9
   b. 11
   c. 13
   d. 16

7. X e Y son magnitudes directamente proporcionales. Según el gráfico, el valor de a es:




   a. 5
   b. 10
   c. 15
   d. 25

8. Esta tabla muestra el largo de las sombras de cuatro arbustos de distintas alturas a las 10:00 hrs. ¿Cuál es el largo de la sombra a las 10:00 hrs. de un arbusto que tiene una altura de 50 centímetros?

   a. 36 cm
   b. 38 cm
   c. 40 cm
   d. 42 cm

| **Altura del arbusto (cm)** | **Largo de la sombra (cm)** |
|---|---|
| 20 | 16 |
| 40 | 32 |
| 60 | 48 |
| 80 | 64 |

9. ¿En cuál de las siguientes tablas, las variables **P** y **Q** son inversamente proporcionales?

a.

| P | Q |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2 | 5 |
| 3 | 6 |

b.

| P | Q |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 4 |

c.

| P | Q |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 2 |
| 3 | 1 |

d.

| P | Q |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 6 |
| 3 | 9 |

e.

| P | Q |
|---|---|
| 1 | 6 |
| 2 | 3 |
| 3 | 2 |

10. Si el precio de un litro de gasolina es de $750, ¿cuál es la otra variable que debe considerar para calcular el precio de varios litros de gasolina?

    a. El precio total de la gasolina
    b. El kilometraje de su auto
    c. La cantidad de litros que comprará
    d. Los kilómetros que recorrerá

11. Si José vende diariamente 500 huevos de gallina, ¿qué necesito saber para calcular su ganancia total diaria?

    a. El precio de cada gallina
    b. El número de gallinas que tiene
    c. El precio de cada huevo
    d. El número de codornices que tiene

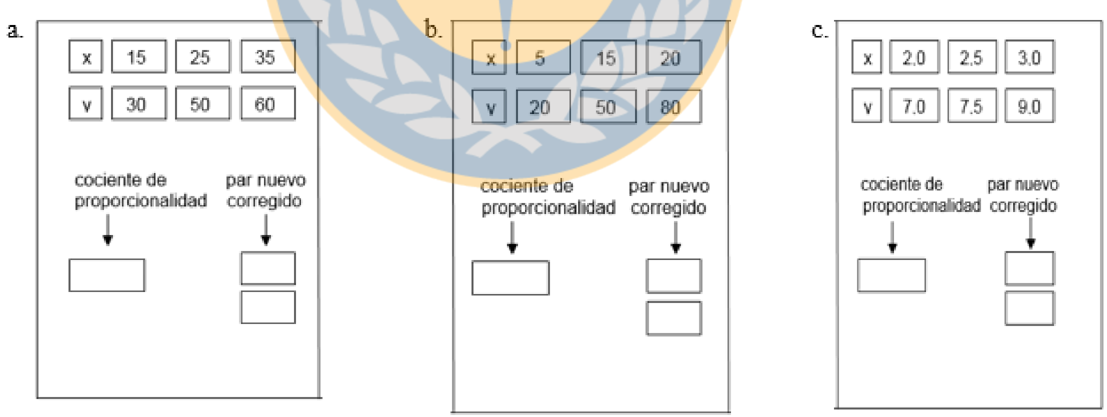
**Resuelve las siguientes situaciones, suponiendo que las variables son proporcionales según sea el caso.**

12. En las vacaciones de verano la familia de Matías pagó $350.000 por arrendar una casa en la playa durante 7 días. ¿Cuánto hubiesen pagado si arrendaran la casa por 21 días?

13. 4 trabajadores necesitan 6 días para pavimentar un segmento de la calle. ¿Cuántos días necesitan 8 trabajadores para pavimentar el mismo segmento de la calle? Explica tu respuesta.

14. En una fábrica de telas, se necesitan 40 máquinas para producir 8.000 metros de tela diarios. Si se quiere fabricar la misma cantidad de tela en tan solo 16 horas ¿cuántas máquinas, de las mismas, se necesitarán?

15. Revisa las tablas de valores si corresponden o no corresponden a dependencias proporcionales. Si no hay proporcionalidad corrige el par de variables para que se cumpla la proporcionalidad. Justifique tu respuesta



16. Un padre tiene 40 años de edad y su hijo, 20 años. Completa la tabla y luego responde.

| | **Hoy** | **En 1 año mas** | **En 5 años más** | **En 10 años más** | **En 15 años más** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Edad del padre** | 40 | 41 | | | |
| **Edad del Hijo** | 20 | 21 | | | |

¿La edad del padre y la del hijo son proporcionales a medida que transcurre el tiempo? ¿Por qué?

## C.2. Test de Ansiedad Matemática

### Test de ansiedad hacia las matemáticas

Nombre: ________________________________ Curso: ________ Fecha: _________

Colegio: ____________________________

**Instrucciones:** Lea atentamente cada una de las afirmaciones siguientes y responda marcando con una cruz (X) la alternativa que más le identifique.

| Ítems | Nada | Muy poco | Algo | Bastante | Mucho |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. Me pongo nervioso cuando pienso en la prueba de matemáticas el día anterior. | | | | | |
| 2. Me siento nervioso cuando me dan las preguntas de la prueba de matemáticas. | | | | | |
| 3. Me pongo nervioso cuando abro el libro de matemáticas y encuentro una página llena de problemas. | | | | | |
| 4. Me siento nervioso al pensar en la prueba de matemáticas, cuando falta una hora para hacerla. | | | | | |
| 5. Me siento nervioso cuando escucho cómo otros compañeros resuelven un problema de matemáticas. | | | | | |
| 6. Me pongo nervioso cuando me doy cuenta de que el próximo curso aún tendré clases de matemáticas. | | | | | |
| 7. Me siento nervioso cuando pienso en la prueba de matemáticas que tengo la próxima semana. | | | | | |
| 8. Me pongo nervioso cuando alguien me mira mientras hago los deberes de matemáticas. | | | | | |
| 9. Me siento nervioso cuando reviso el ticket de compra después de haber pagado. | | | | | |
| 10. Me siento nervioso cuando me pongo a estudiar para una prueba de matemáticas. | | | | | |
| 11. Me ponen nervioso las pruebas de matemáticas. | | | | | |
| 12. Me siento nervioso cuando me ponen problemas difíciles para hacer en casa y que tengo que llevar hechos para la próxima clase. | | | | | |
| 13. Me pone nervioso hacer operaciones matemáticas. | | | | | |
| 14. Me siento nervioso al tener que explicar un problema de matemáticas al profesor. | | | | | |
| 15. Me pongo nervioso cuando hago el examen final de matemáticas. | | | | | |
| 16. Me siento nervioso cuando me dan una lista de ejercicios de matemáticas. | | | | | |
| 17. Me siento nervioso cuando intento comprender a otro compañero explicando un problema de matemáticas. | | | | | |
| 18. Me siento nervioso cuando hago una evaluación de matemáticas. | | | | | |
| 19. Me siento nervioso cuando veo/escucho a mi profesor explicando un problema de matemáticas. | | | | | |
| 20. Me siento nervioso al recibir las notas finales (del examen) de matemáticas. | | | | | |
| 21. Me siento nervioso cuando quiero averiguar el cambio o vuelto en la tienda. | | | | | |
| 22. Me siento nervioso cuando nos ponen un problema y un compañero lo acaba antes que yo. | | | | | |
| 23. Me siento nervioso cuando tengo que explicar un problema en clases de matemáticas. | | | | | |
| 24. Me siento nervioso cuando empiezo a hacer los deberes. | | | | | |

# C.3. Test de Motivación hacia la Matemática

## Escala de Apreciación de la Motivación de los estudiantes

**Nombre:** ______________________________ **Curso:** __________ **Fecha:** __________

**Instrucciones:** Marca con una cruz (**X**) la categoría referida a la frecuencia con que se observa la conducta indicada en el estudiante. Las categorías con sus correspondientes puntajes son las siguientes:

| Siempre | Casi siempre | A veces | Casi nunca | Nunca |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

| Ítems | Siempre | Casi<br>Siempre | A veces<br>Nunca | Casi | Nunca |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. Realiza las actividades solicitadas<br>para el desarrollo de la clase en el tiempo indicado. | | | | | |
| 2. Consulta sus dudas al docente. | | | | | |
| 3. Manifiesta interés por aprender<br>los contenidos matemáticos. | | | | | |
| 4. Se esfuerza por resolver los distintos desafíos<br>propuestos en clases. | | | | | |
| 5. Realiza aportes al grupo curso con respecto a los<br>contenidos matemáticos tratados. | | | | | |
| 6. Se esfuerza por terminar las actividades solicitadas. | | | | | |

## C.4. Test de Actitud hacia la Matemática

### Test de actitud hacia las matemáticas

Nombre: ______________________________ Curso: ________ Fecha: __________

Colegio: ____________________________

**Instrucciones:** Lea atentamente cada una de las afirmaciones siguientes y responda marcando con una cruz (X) la alternativa que más le identifique.

| Ítems | Muy de acuerdo | De acuerdo | Me es indiferente | En desacuerdo | Muy en desacuerdo |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. Las Matemáticas serán importantes para mi profesión. | | | | | |
| 2. El profesor me anima para que estudie más matemáticas. | | | | | |
| 3. El profesor me aconseja y me enseña a estudiar. | | | | | |
| 4. Las matemáticas son útiles para la vida cotidiana. | | | | | |
| 5. Me siento motivado en clase de matemáticas. | | | | | |
| 6. El profesor se divierte cuando nos enseña. | | | | | |
| 7. Pregunto al profesor cuando no entiendo algún ejercicio. | | | | | |
| 8. Entiendo los ejercicios que me manda el profesor para resolver en casa. | | | | | |
| 9. El profesor de matemáticas me hace sentir que puedo ser bueno en matemáticas. | | | | | |
| 10. El profesor tiene en cuenta los intereses de los alumnos. | | | | | |
| 11. En primaria me gustaban las matemáticas. | | | | | |
| 12. Me gusta como enseña mi profesor de matemáticas. | | | | | |
| 13. Espero utilizar las matemáticas cuando termine de estudiar. | | | | | |
| 14. Después de cada evaluación, el profesor me comenta los progresos hechos y las dificultades encontradas. | | | | | |
| 15. El profesor se interesa por ayudarme a solucionar mis dificultades con las matemáticas. | | | | | |
| 16. Saber matemáticas me ayudará a ganarme la vida. | | | | | |
| 17. Soy bueno en matemáticas. | | | | | |
| 18. Me gustan las matemáticas. | | | | | |
| 19. En general las clases de matemáticas son participativas. | | | | | |

# C.5. Post-Test de Conocimiento

## Post test de Conocimiento

| **Nombre:** | **Curso:** | **Puntaje obtenido:** |
|---|---|---|

**Objetivos:**

g. Encontrar e interpretar la razón asociada a situaciones de la vida real.
h. Utilizar las propiedades de una razón en situaciones de la vida real.
i. Resolver problemas que involucren variables proporcionales y no proporcionales a partir de tablas y/o enunciados.
j. Resolver problemas que involucren proporcionalidad directa.
k. Resolver problemas que involucren proporcionalidad inversa.
l. Reconocer variables a partir de un enunciado.

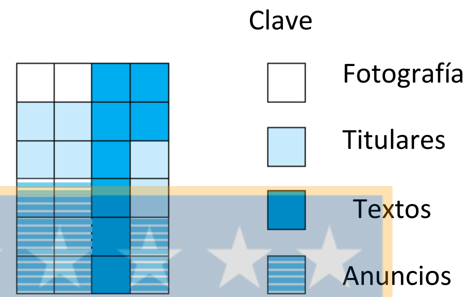
**Instrucciones generales:**

Lea atentamente el test. No se admiten borrones. La falta de claridad en algunas de sus respuestas invalidará la misma. Si es sorprendido copiando oayudando a su compañero, su evaluación será anulada.

## Post-test Razones y Proporciones

**Resuelve las siguientes situaciones.**

1. Emilio diseña las páginas de un periódico. Él divide una de las páginas en 24 secciones iguales y determina las secciones que se dedicarán a titulares, textos, fotografías y anuncios como muestra la figura.




Determine:

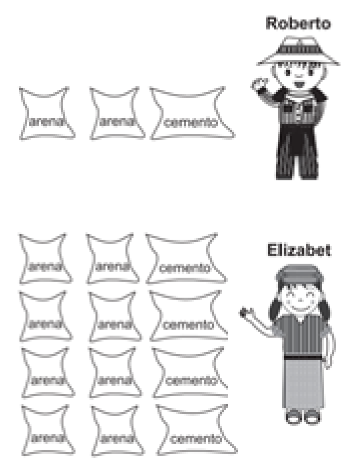
a. La razón entre la cantidad destinada a titulares y la destinada a anuncios: ________________

b. La razón entre la cantidad destinada a texto y el total de la página: ____________

c. Las secciones que están a razón 1 ∶ 4 son: ________________________________ ____________________________________

2. Roberto prepara una mezcla con 2 sacos de arena y 1 sacos de cemento. Elizabeth prepara una mezcla con 8 sacos de arena y 4 sacos de cemento.

a. En cada caso, ¿Cuál es la razón entre las cantidades de sacos de arena y la cantidad total de sacos? ¿Cuál es la razón entre la cantidad de sacos de cemento y la cantidad total de sacos?



b. ¿En qué se parece y en qué se diferencia la mezcla que preparó cada quién?

En un curso, por cada cuatro alumnos tres hacen deporte.

Responda la siguiente situación:

3. Juan dice que 2 de cada 3 alumnos comen fruta, Roberto dice que él está equivocado, que en realidad son 4 de cada 6.

   Pinte la razón para cada uno.

**Juan**

**Roberto**

¿Quién está en lo correcto? Justifica tu respuesta

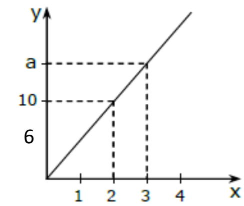
4. En un estudio sobre la salud poblacional aparece, que por cada tres personas con peso normal hay cuatro personas con sobrepeso. Si en la región hay 3.000.000 personas con peso normal, ¿Cuántas personas con sobrepeso tiene la región?

**Encierre en un círculo la alternativa que considere correcta.**

5. En un colegio hay 120 estudiantes en Educación Básica y 180 estudiantes en Educación Media. ¿Cuál es la razón entre los estudiantes de Educación Básica y el total de estudiantes que hay en el colegio?
   a. 2 : 3
   b. 2 : 5
   c. 5 : 2
   d. 3 : 2

6. Alicia puede correr 5 vueltas alrededor de la pista en el mismo tiempo que Carolina puede correr 4 vueltas. Cuando Carolina haya corrido 16 vueltas, ¿cuántas vueltas habrá corrido Alicia?
   a. 12
   b. 14
   c. 16
   d. 20

7. X e Y son magnitudes directamente proporcionales. Según el gráfico, el valor de a es:




a. 2
b. 3
c. 6
d. 9

8. Esta tabla muestra el largo de las sombras de cuatro arbustos de distintas alturas a las 10:00 hrs. ¿Cuál es el largo de la sombra a las 10:00 hrs. de un arbusto que tiene una altura de 30 centímetros?

a. 16 cm
b. 24 cm
c. 26 cm
d. 40 cm

| **Altura del arbusto (cm)** | **Largo de la sombra (cm)** |
|---|---|
| 20 | 16 |
| 40 | 32 |
| 60 | 48 |
| 80 | 64 |

9. ¿En cuál de las siguientes tablas, las variables **P** y **Q** son inversamente proporcionales?

a.

| P | Q |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 6 |
| 3 | 9 |

b.

| P | Q |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 2 |
| 3 | 1 |

c.

| P | Q |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 4 |

d.

| P | Q |
|---|---|
| 1 | 6 |
| 2 | 3 |
| 3 | 2 |

e.

| P | Q |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2 | 5 |
| 3 | 6 |

10. Si el precio de un litro de gasolina es de $750, ¿cuál es la otra variable que debe considerar para calcular la cantidad de litros de gasolina comprados?

    a. La marca del vehículo
    b. El kilometraje de su auto
    c. El precio total de la compra
    d. Los kilómetros que recorrerá

11. Si José vende diariamente 500 huevos de gallina, ¿qué necesito saber para calcular su ganancia total diaria?

    a. El número de gallinas que tiene
    b. El número de codornices que tiene
    c. El precio de cada huevo
    d. El precio de cada gallina

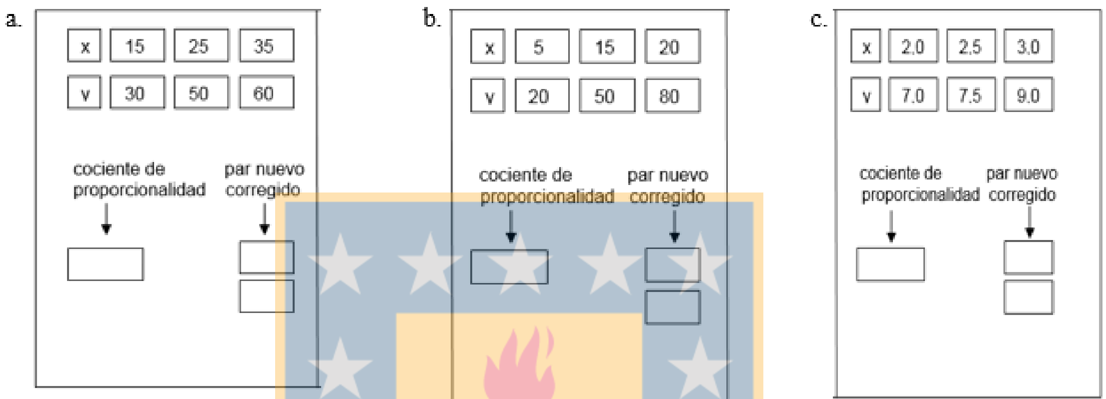
**Resuelve las siguientes situaciones, suponiendo que las variables son proporcionales según sea el caso.**

12. En las vacaciones de verano la familia de Matías pagó $250.000 por arrendar una casa en la playa durante 5 días. ¿Cuánto hubiesen pagado si arrendaran la casa por 20 días?

13. 6 trabajadores necesitan 8 días para pavimentar un segmento de la calle. ¿Cuántos días necesitan 12 trabajadores para pavimentar el mismo segmento de la calle? Explica tu respuesta.

14. En una fábrica de telas, se necesitan 40 máquinas para producir 8.000 metros de tela diarios. Si se quiere fabricar la misma cantidad de tela en tan solo 12 horas ¿cuántas máquinas, de las mismas, se necesitarán?

15. Revisa las tablas de valores si corresponden o no corresponden a dependencias proporcionales. Si no hay proporcionalidad corrige el par de variables para que se cumpla la proporcionalidad. Justifique tu respuesta




16. Un padre tiene 36 años de edad y su hijo, 12 años. Completa la tabla y luego responde.

| | Hoy | En 1 año mas | En 5 años más | En 10 años más | En 15 años más |
|---|---|---|---|---|---|
| **Edad del padre** | 36 | 37 | | | |
| **Edad del Hijo** | 12 | 13 | | | |

¿La edad del padre y la del hijo son proporcionales a medida que transcurre el tiempo? ¿Por qué?

## C.6. Resultados de Aplicación de Instrumentos $GE_A$

| N° estudiante | Conocimiento | | Actitud | | Ansiedad | | Motivación | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Pre-Test | Post-Test | Pre-Test | Post-Test | Pre-Test | Post-Test | Pre-Test | Post-Test |
| **1** | 1 | 18 | 59 | 85 | 39 | 24 | 26 | 26 |
| **2** | 4 | 21 | 85 | 94 | 53 | 24 | 25 | 30 |
| **3** | 4 | 22 | 76 | 84 | 37 | 36 | 27 | 29 |
| **4** | 3 | 13 | 65 | 93 | 31 | 28 | 27 | 29 |
| **5** | 5 | 14 | 84 | 87 | 42 | 29 | 21 | 28 |
| **6** | 2 | 15 | 68 | 84 | 30 | 24 | 24 | 24 |
| **7** | 6 | 19 | 70 | 84 | 25 | 24 | 25 | 29 |
| **Promedio** | 3,57 | 17,43 | 72,4 | 87,3 | 36,7 | 27,0 | 25,0 | 27,9 |

# C.7. Resultados de Aplicación de Instrumentos $GE_B$

| N° estudiante | Conocimiento | | Actitud | | Ansiedad | | Motivación | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Pre-Test | Post-Test | Pre-Test | Post-Test | Pre-Test | Post-Test | Pre-Test | Post-Test |
| **1** | 4 | 16 | 61 | 77 | 64 | 33 | 22 | 26 |
| **2** | 2 | 13 | 68 | 82 | 42 | 29 | 13 | 22 |
| **3** | 5 | 21 | 78 | 90 | 26 | 28 | 25 | 27 |
| **4** | 4 | 19 | 66 | 74 | 27 | 24 | 16 | 22 |
| **5** | 7 | 11 | 59 | 86 | 56 | 28 | 25 | 26 |
| **6** | 7 | 16 | 77 | 77 | 65 | 32 | 13 | 24 |
| **7** | 3 | 17 | 66 | 74 | 63 | 60 | 13 | 24 |
| **8** | 7 | 20 | 75 | 79 | 48 | 44 | 18 | 23 |
| **9** | 3 | 19 | 78 | 89 | 107 | 26 | 16 | 20 |
| **10** | 0 | 10 | 79 | 83 | 120 | 98 | 21 | 28 |
| **11** | 3 | 19 | 61 | 76 | 58 | 32 | 16 | 22 |
| **12** | 5 | 11 | 66 | 84 | 44 | 34 | 13 | 24 |
| **13** | 2 | 13 | 68 | 81 | 36 | 27 | 24 | 29 |
| **14** | 2 | 17 | 83 | 86 | 33 | 27 | 25 | 29 |
| **15** | 6 | 14 | 76 | 82 | 89 | 41 | 15 | 25 |
| **16** | 1 | 15 | 71 | 81 | 43 | 34 | 20 | 26 |
| **17** | 8 | 15 | 85 | 88 | 47 | 38 | 28 | 29 |
| **18** | 5 | 20 | 76 | 86 | 46 | 24 | 21 | 28 |
| **19** | 7 | 19 | 85 | 85 | 65 | 31 | 16 | 26 |
| **20** | 3 | 21 | 73 | 85 | 28 | 24 | 24 | 27 |
| **21** | 3 | 16 | 50 | 75 | 77 | 75 | 24 | 28 |
| **Promedio** | 4,1 | 16,3 | 71,5 | 81,9 | 56,4 | 37,6 | 19,4 | 25,5 |