



Universidad de Concepción  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

---

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Física

**Saturación de  
la Energía Magnética  
de Ondas Ión-Ciclotrón  
en Plasmas  
Térmicamente Anisotrópicos**

**Sebastián Ignacio Pons Vargas**

Profesor Guía: Dr. Jaime Araneda Sepúlveda

Co-Guía: Dr. Roberto Navarro Maldonado

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Concepción

---

Concepción, Chile

2017

# Agradecimientos

A quienes me han acompañado en presencia o en pensamiento durante mis estudios, por su apoyo y preocupación.

Al team pecera por los momentos gratos y de presión que pasamos, y la lucha por mantener nuestro reducto.

Agradezco a Natalia Astudillo por ser mi compañera en el dolor escribiendo nuestras respectivas tesis durante el verano.

A mis amigos y excompañeros de arriendo, David Opazo e Ivan Villenas por los gratos e incómodos momentos que pasamos, charlando de la vida y las ciencias. A Patricia Cortés, David Aguayo, Dante Riquelme, Leonardo Agüero y Gonzalo Sandoval, a quienes conocí al ingresar al pregrado y que a pesar de las distancias, me quedo con los mejores recuerdos de ellos.

A mi co-tutor Dr. Roberto Navarro por salvar mi tesis en el momento que peor estaba. Gracias por ayudar a este incompetente.

A mi profesor guía, Dr. Jaime Araneda agradecer su tremenda paciencia, por no dejarme a medio camino a pesar de haberlo merecido en más de una oportunidad, gesto que agradeceré hasta el fin de mi historia, y que dedicaré a que sienta que no fue una pérdida el tiempo invertido en mí.

A mis hermanos, simplemente gracias por ser ustedes y finalmente, pero los más importantes en toda esta historia, mis padres quienes a pesar de todo el difícil camino que recorrí jamás dejaron de apoyarme, aconsejarme y ser el soporte que mantiene mi espalda.

# Tabla de contenido

<b>Índice de figuras</b>	<b>v</b>
<b>Índice de cuadros</b>	<b>vii</b>
<b>Resumen</b>	<b>viii</b>
<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Una pequeña historia de la física de plasmas . . . . .	1
1.2. Descripción microscópica de plasma no colisionales . . . . .	4
1.3. Motivación . . . . .	6
<b>2. Relación de dispersión en plasmas magnetizados</b>	<b>9</b>
2.1. Relación de dispersión . . . . .	9
2.1.1. Relación de dispersión cinética para plasmas magnetizados . . . . .	11
2.2. Ceros de la relación de dispersión . . . . .	16
<b>3. Constantes de movimiento</b>	<b>22</b>
3.1. Constantes de movimiento generalizadas . . . . .	22
3.2. Constantes de movimiento para un sistema inestable . . . . .	25
<b>4. Código Híbrido</b>	<b>28</b>
4.1. Ecuaciones básicas . . . . .	28
4.1.1. Normalización de las ecuaciones básicas . . . . .	30
4.2. Discretización de las ecuaciones . . . . .	31
4.2.1. Campos electromagnéticos . . . . .	31
4.2.2. Resolviendo la dinámica de los protones . . . . .	32
4.2.3. Densidades y función de forma . . . . .	33
4.3. Esquema del código híbrido . . . . .	36
<b>5. Simulaciones híbridas y Energía magnética saturada</b>	<b>38</b>
5.1. Resultados de las simulaciones . . . . .	41
5.2. Energía magnética saturada . . . . .	44
5.2.1. Identificando la saturación de la energía magnética . . . . .	46
5.3. Evoluciones temporales . . . . .	52

<b>6. Conclusiones y Discusión</b>	<b>61</b>
<b>A. Función de dispersión de plasmas</b>	<b>63</b>
A.1. Propiedades . . . . .	64
A.1.1. Aproximaciones asintóticas . . . . .	64
<b>B. Polarización de ondas ión-cilotrón</b>	<b>66</b>
B.0.2. Representación de ondas circularmente polarizadas . . . . .	67
<b>C. Normalización de la relación de dispersión</b>	<b>68</b>
<b>D. Definiciones y parámetros</b>	<b>70</b>
D.1. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	70
D.2. Definiciones relevantes . . . . .	70
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>



# Índice de figuras

1.1. El Sol	1
1.2. Estados de la materia	3
1.3. Distribución de velocidades en el viento solar	4
1.4. Inestabilidades electromagnéticas	6
2.1. Teorema de Liouville	10
2.2. Camino de integración de Fourier-Laplace	12
2.3. Curvas de nivel del plano $Im(\omega) - Re(\omega)$	17
2.4. Descripción de los modos de la relación de dispersión	18
2.5. Modos de orden superior	19
2.6. Soluciones de la relación de dispersión	20
2.7. Umbrales de estabilidad	21
2.8. Tipos de inestabilidades	21
4.1. Esquema Partícula en celda	31
4.2. Esquema grilla unidimensional	31
4.3. Esquema del método leap-frog	33
4.4. Funciones de forma $s$	34
4.5. Esquema principal del código de simulación	37
5.1. Deformación de la distribución bi-Maxwelliana 1	39
5.2. Deformación de la distribución bi-Maxwelliana 2	40
5.3. Energía libre de sistemas inestables	41
5.4. Evolución de las energías cinéticas para distribuciones de partículas	42
5.5. Evolución temporal de la energía magnética	44
5.6. Evolución temporal energía magnética	45
5.7. Espectro de potencia $\omega - k$ de campo magnético caso estable	45
5.8. Espectro de potencia $\omega - k$ de campo magnético caso inestable	46
5.9. Energía magnética vs. Energías cinéticas	47
5.10. Espectro de potencia de la energía magnética del umbral de estabilidad	48
5.11. Energía magnética saturada	49
5.12. Pendiente energía magnética saturada	50
5.13. Ajuste de la energía magnética saturada	51
5.14. Métodos de Bortnik y Davidson	52
5.15. Evolución temporal de las energías 1	53
5.16. Evolución temporal de las energías 2	54
5.17. Evolución temporal de las energías 3	54

5.18. Derivada temporal de la energía cinética total 1 . . . . .	55
5.19. Derivada temporal de la energía cinética total 2 . . . . .	56
5.20. Ajuste evolución energía cinética total . . . . .	58
5.21. Ajuste de la evolución de la energía magnética . . . . .	59
A.1. Continuidad analítica de la función de dispersión de plasma, $Z$ . . . . .	63
B.1. Polarización circular . . . . .	66
B.2. Desplazamiento helicoidal de una partícula . . . . .	67



# Índice de cuadros

5.1. Tiempos de saturación simulaciones vs. método función error . . . . . 60



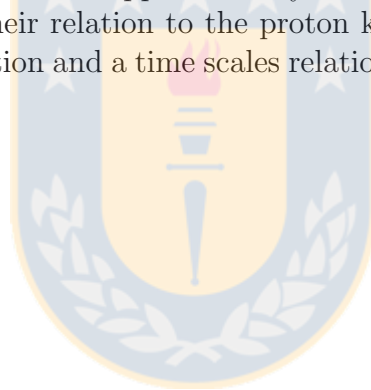
# Resumen

Las ondas electromagnéticas ión-ciclotrón son componentes importantes en plasmas espaciales, astrofísicos y de laboratorio. En estos sistemas las funciones de distribución de velocidades de protones se encuentran normalmente fuera del equilibrio termodinámico, con anisotropías térmicas  $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$ . Estas anisotropías son una fuente de energía libre que permite la excitación de inestabilidades, siendo éstas las responsables del crecimiento de ondas electromagnéticas. Para poder cuantificar los efectos de estas inestabilidades es conveniente conocer las amplitudes y las escalas temporales de saturación de las fluctuaciones del campo magnético. Aunque la teoría lineal es una excelente herramienta para estudiar las tasas de crecimiento de las inestabilidades, esta teoría no es suficiente para predecir la máxima amplitud a la que crecerán las ondas excitadas (saturación). En este trabajo se emplea teoría cinética lineal para plasmas magnetizados y simulaciones híbridas-PIC para estudiar la relajación de distribuciones de protones inicialmente anisotrópicas. Se describen expresiones analíticas que dan cuenta de la saturación de la energía de ondas ión-ciclotrón y su relación con la variación de la energía cinética de las partículas, otras expresiones que permiten representar la evolución temporal de estas energías y una relación que permite predecir las escalas temporales a las cuales la energía magnética satura.



# Abstract

Electromagnetic ion-cyclotron waves are an important component for theoretical, astrophysics and laboratory plasmas. Usually, proton's velocities distribution functions find on small deviations of thermodynamics equilibrium and thermal anisotropies with  $T_{\perp} > T_{\parallel}$ . This anisotropies are a free energy fount who leads instabilities excitations, been the responsables for the electromagnetics waves grow. In order to quantify the effects of this instabilities it is convenient known the amplitude and time scales of magnetic field fluctuations. Even when kinetic linear theory is an excellent tool for study the instabilities growth rates, it's not enough to predict the greatest amplitude of excited waves will grow. In the present work a kinetic linear theory for magnetized plasmas and hybrid-PIC simulations to study anisotropic proton's distribution relaxation are applied. Analytical expressions for ion-cyclotron wave saturation mechanisms and their relation to the proton kinetic energy, another ones to describe this energies time evolution and a time scales relation from magnetic energy are found.



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Una pequeña historia de la física de plasmas

Si bien solo a principios del siglo XX se define el plasma como lo conocemos hoy en día, este viene siendo estudiado indirectamente por milenios. El hombre desde sus inicios ha mirado el firmamento ya sea alabando a Dioses, buscando su propia ubicación, así como solo observar la belleza de éste. Al mirar los cielos el hombre observaba unos puntos extremadamente brillantes, estudiando su trayectoria por el cielo para, por ejemplo, conocer las estaciones del año, útil para las plantaciones y ritos de varias de las civilizaciones antiguas. Estos puntos brillantes solo vistos de noche son llamadas estrellas. Sin embargo, de día una particular estrella es observable a simple vista, la cual ha sido venerada a lo largo de la historia en muchas civilizaciones, como la egipcia, la mesopotámica, la mexicana, la incaica, la china, la japonesa, la griega o en religiones como la hinduista. Esta estrella es nuestro Sol. Una estrella en palabras simples es una gran bola de plasma, estable por efectos gravitatorios, y como tal, el Sol también lo es. Los primeros indicios de observaciones en relación al plasma datan de los antiguos chinos, quienes alrededor del siglo VIII notan manchas oscuras en el Sol; luego Galileo utilizando el primer telescopio astronómico construido por él en 1609, observa estas manchas oscuras en el Sol, hoy conocidas como “manchas solares”.

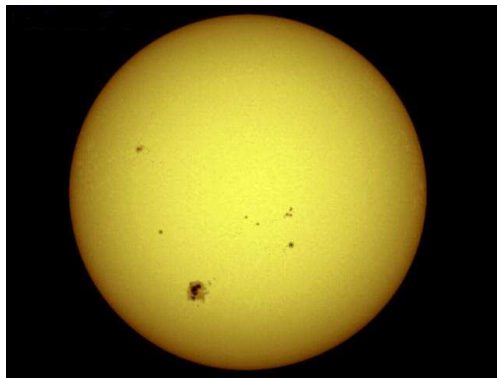


Figura 1.1: **El Sol:** El Sol con algunas manchas solares visibles. Las dos manchas en el medio tienen casi el mismo diámetro que la Tierra. Fuente: <https://solarscience.msfc.nasa.gov/surface.shtml>

A mediados del siglo XIX, el fisiólogo checo Jan Evangelista Purkinje introdujo la definición **plasma** (del griego “formado” o “moldeado”), para describir el fluido transparente que permanece después de la eliminación de todo el material corpuscular de la sangre. Más tarde, en 1922 el científico estadounidense Irving Langmuir propuso que los electrones, iones y partículas neutras en un gas ionizado, podrían ser considerados como materia corpuscular desplazándose en algún tipo de fluido, al cual denominó plasma. Desde entonces, los científicos de plasma han tenido que explicar que no estudian la sangre. Entre los años 1920 y 1930 unos pocos investigadores aislados, cada uno motivado por un problema práctico específico, comenzaron el estudio de lo que ahora se llama *física de plasmas*. Estos trabajos fueron dirigidos principalmente hacia la comprensión (i) el efecto del plasma ionosférico a grandes distancias sobre la propagación de ondas cortas de radio y (ii) tubos electrónicos gaseosos utilizados para la rectificación, el cambio y regulación de tensión en la era previa a los semiconductores. En 1940 Hannes Alfvén desarrolló una teoría de las ondas hidromagnéticas (ahora llamado ondas de ión) siendo estas ondas hoy en día importantes en los estudios de plasmas astrofísicos. Por este trabajo, Hannes Alfvén fue galardonado con el **Premio Nobel de Física** en 1970, el más importante en su tipo.

El Plasma es considerado el cuarto estado de la materia, el cual tiene la peculiaridad de ser el estado más abundante de la materia **visible** en el Universo. El estado plasmático se encuentra de variadas formas en la naturaleza donde los más conocidos son:

- **Plasma termonuclear:** Las capas electrónicas de los átomos no existen, la sustancia es una mezcla de núcleos y electrones libres. En éste estado se encuentran el plasma en los núcleos de las estrellas [1, 2].
- **Plasma de nucleones:** Debido a muy altas temperaturas o presiones, los mismos núcleos atómicos son despedazados. La materia es una mezcla de electrones, protones y neutrones. Los plasmas nucleónicos se manifestaron a los 10–5 s después del comienzo del Universo, donde los quarks crearon los primeros protones y neutrones. Encontramos también este tipo de plasma en las capas exteriores de una supernova explotando, donde su comienzo desarrolla una onda de choque de gas presionado. En ésta capa por un corto tiempo se dan lugar disturbios en las reacciones termonucleares, que dan lugar a elementos pesados [3].
- **Plasma de Quarks-gluones:** en altas energías los nucleones mismos se desmenuzan en sus constituyentes: los quarks y los gluones. En ese estado se encontraba la materia quizá hasta el primer décimo de microsegundo después del comienzo del Universo y artificialmente se logró reproducir este estado de la materia en el CERN en el año 2000 [4].
- **Plasma común:** las capas de electrones de los átomos son parcialmente deterioradas (debido a una alta temperatura o presión). Las partículas libres son responsables de las características plasmáticas de la sustancia en cuestión [3, 5–7].

Para el plasma común, la definición clásica dice que el plasma es un conjunto cuasineutral de partículas con portadores libres de carga eléctrica, el cual desarrolla comportamiento colectivo. Lo más importante es que en el plasma se encuentran portadores de carga eléctrica libres. Los átomos están al menos parcialmente ionizados. El grado de ionización no tiene

que ser muy grande, si el tamaño de la formación de plasma es lo suficientemente extensa. Precisamente un plasma se diferencia de un gas por el que haya portadores libres de carga en el primero. El plasma es conductor y reacciona fuertemente a los campos eléctricos y magnéticos. Cuando nos referimos a la cuasineutralidad del plasma debemos considerar que cuando un plasma visto microscópicamente, un cierto volumen tiene en promedio la misma cantidad de partículas positivas y negativas. Desde afuera el plasma se comporta como si fuera un fluido sin carga (líquido o gas). La exigencia de cuasineutralidad toma en parte de la definición de plasma lo de ser un conjunto de partículas cargadas, las cuales difieren solamente un poco cualitativamente en ésta característica (o sea, un plasma es “casi” neutral, pero no lo es completamente). La última parte de la definición de plasma es su comportamiento colectivo. Con esto se entiende que el plasma es capaz en su conjunto de procesos de generar campos magnéticos y eléctricos, campos a los cuales a su vez puede reaccionar. Dicho de otra forma, el movimiento de las partículas no solo depende de las condiciones locales como las colisiones, sino también de la interacción entre las partículas mediante los campos electromagnéticos que generan las mismas partículas cargadas, principalmente observado en plasmas no colisionales. En otras palabras, un plasma no tiende a ajustarse por influencias externas; sino que a menudo se comporta “como si tuviera una mente propia” [3].

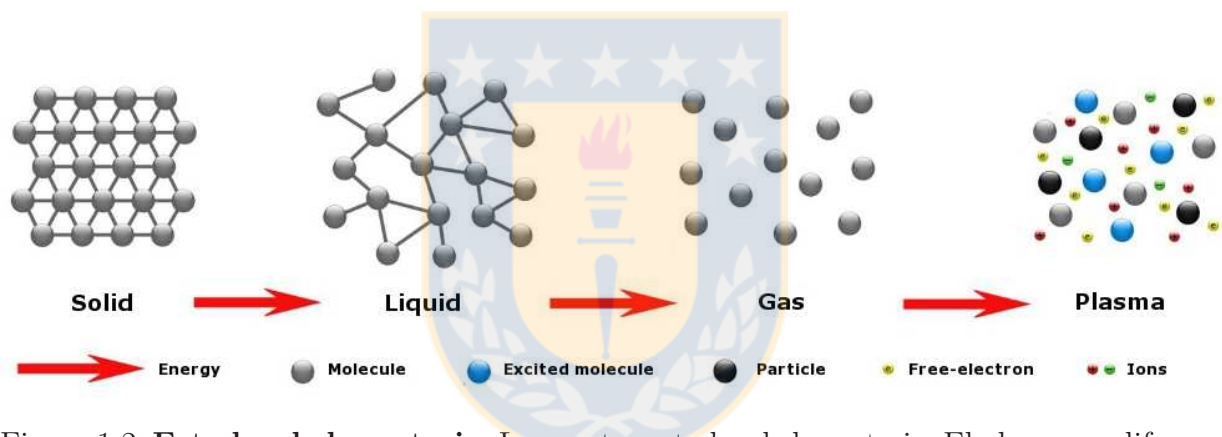


Figura 1.2: **Estados de la materia:** Los cuatro estados de la materia. El plasma se diferencia de un gas debido a la ionización de sus partículas. Fuente: Elaboración propia.

## 1.2. Descripción microscópica de plasma no colisionales

Observaciones in-situ del viento solar muestran que las distribuciones de protones usualmente cuentan con una componente principal, densa, relativamente Maxwelliana con temperaturas diferentes  $T_{\perp}$  y  $T_{\parallel}$  medidas con respecto a la dirección del campo magnético de fondo  $\mathbf{B}_0$ . A veces puede existir un haz secundario de protones, isotrópico, con deriva relativa a la componente principal [8] que varía entre 0 y 1.5 veces la velocidad de ión local  $v_A$ , como se muestra en la Figura (1.3). Estas distribuciones representan sistemas que no están en equilibrio termodinámico y en consecuencia posibles fuente de excitación de inestabilidades y fluctuaciones electromagnéticas. Existe evidencia de que estas inestabilidades se encuentran presentes en el viento solar ya que ellas parecen acotar la anisotropía térmica, caracterizada por la razón  $T_{\perp}/T_{\parallel}$  de los protones, pero también observada en electrones y partículas alfa.

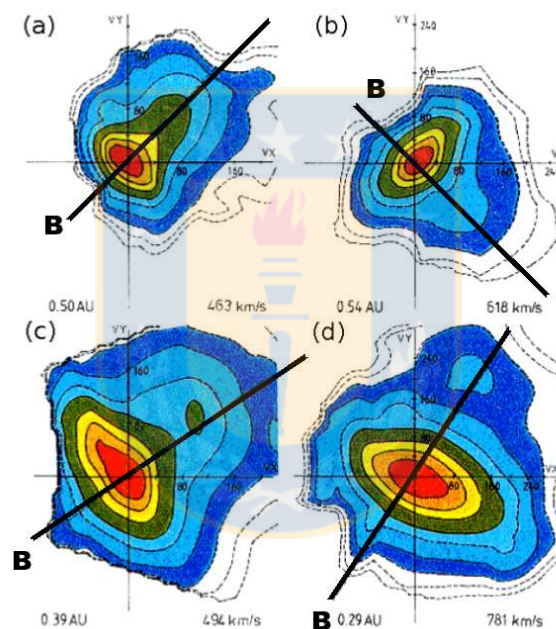


Figura 1.3: **Distribución de velocidades en el viento solar:** Distribuciones de velocidad obtenidas por los proyectos satelitales Helios. Estas distribuciones representan a sistemas que no están en equilibrio termodinámico, lo cual corresponde a una fuente de excitación de inestabilidades y fluctuaciones electromagnéticas. Las líneas negras anchas transversales indican el campo magnético del Sol. Se observa que las distribuciones presentan una dirección privilegiada en torno a la línea de campo magnético y diferentes componentes, donde (a) y (b) presentan un plasma de una sola componente (c) y (d) presentan un core o núcleo donde se concentra la mayor parte de la distribución y una cola o beam, de menor densidad situado a lo largo de la dirección del campo magnético. Se observa que la dirección privilegiada corresponde a la dirección perpendicular respecto a  $\mathbf{B}$ . Fuente: <https://www2.mps.mpg.de/en/projekte/solar-plasma/>

Existen diferentes tipos de inestabilidades y, por ende, varios tipos de fluctuaciones elec-

tromagnéticas [7]. El formalismo para la descripción de inestabilidades se puede dividir en dos categorías principales: la descripción macroscópica, que depende de las propiedades del espacio de configuración del plasma y es preferentemente descrito por ecuaciones de fluidos, usando aproximaciones basadas en la *magnetohidrodinámica* (MHD) [7]. Para modos descritos por teorías de fluido, las inestabilidades son a menudo consecuencia de gradientes espaciales, y usualmente surgen para longitudes de ondas grandes en comparación a la longitud inercial de los iones o radio de Larmor [7,9]. Por otro lado, la descripción microscópica estudia casos de desviaciones del equilibrio termodinámico de las distribuciones de velocidades, gobernada por la ecuación de Boltzmann u otras ecuaciones cinéticas. Para el caso particular en que el comportamiento colectivo del plasma es dominado por interacciones no colisionales, la ecuación de Boltzmann se reduce a la ecuación de Vlasov [10].

Los mecanismos físicos que gobiernan los plasmas a escalas microscópicas están asociados a interacciones del tipo onda-onda y onda-partícula, los cuales requieren una descripción basada en la teoría cinética o equivalentemente de la teoría de Vlasov-Maxwell. En esta teoría se describe el comportamiento del plasma mediante funciones de distribución de velocidades que son soluciones de la ecuaciones acopladas de Vlasov y de Maxwell [11]. Los fundamentos de la descripción cinética de los plasmas están basados en un método estadístico para modelar la posición  $\mathbf{x}$  y velocidad  $\mathbf{v}$  de  $N$  partículas representativas (superpartículas) de las partículas reales en un plasma, sin tener que resolver las leyes de Newton para cada partícula real, lo cual sería una tarea imposible aún para el mejor supercomputador.

Bajo condiciones dominadas por efectos colisionales, las interacciones partícula-partícula guían al plasma de regreso a condiciones de equilibrio, pero en un plasma no-colisional estas interacciones son despreciables y la tarea de llevar al sistema hacia un estado de equilibrio térmico (isotropía térmica) recae en las fluctuaciones de los campos eléctricos y magnéticos [12]. Una anisotropía suficientemente grande, asociada a una especie de partículas del plasma, inducirá el crecimiento de campos electromagnéticos; las fluctuaciones crecientes interactuarán fuertemente con aquella especie, de manera que su distribución de velocidades tenderá a relajarse hacia un estado de equilibrio. Es decir, la anisotropía disminuye (Figura (1.4)).

Simulaciones PIC (*particle-in-cell* en inglés, partícula en celda en español) determinan la dinámica de iones y electrones en el espacio de fase utilizando las ecuaciones del movimiento para las superpartículas representativas de cada especie, acopladas a las ecuaciones de Maxwell. Aunque existen varias formas de realizar simulaciones para plasmas no colisionales, las simulaciones PIC proveen una representación general de la dinámica de este tipo de plasmas, sin embargo requieren grandes recursos computacionales en términos de almacenamiento y tiempo de cálculo. Por otro lado, las simulaciones híbridas también utilizan superpartículas para representar la dinámica de los iones, pero usa modelos de fluidos para describir el comportamiento de los electrones. Consecuentemente, es esperable que las simulaciones híbridas entreguen una correcta representación de la dinámica del plasma para longitudes de onda y frecuencias comparables al radio de Larmor y la frecuencia de ciclotrón de los iones, respectivamente. Como los electrones poseen una masa mucho más pequeña, la descripción de fluido para ellos será adecuada a las escalas espaciales y temporales mencionadas. Debido a la menor cantidad de recursos computacionales que exigen la

simulaciones híbridas, estas simulaciones son muy utilizadas para estudiar inestabilidades electromagnéticas asociadas a los iones [13].

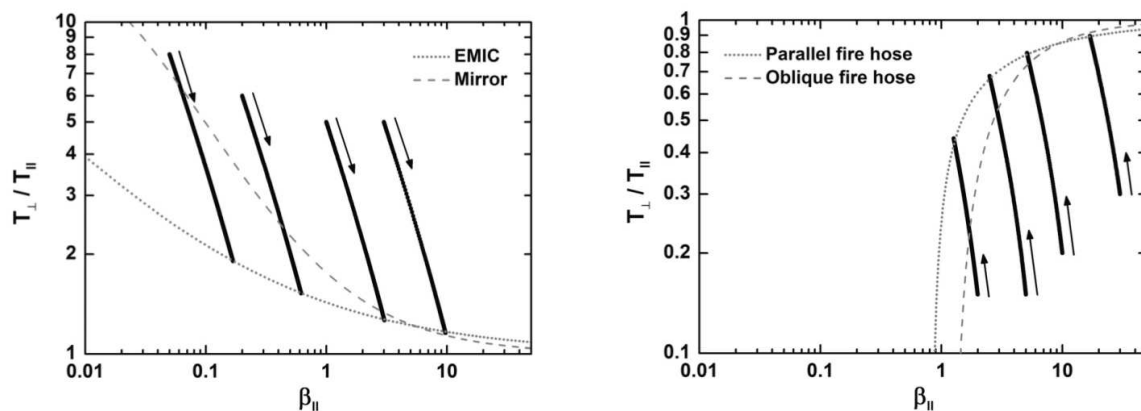


Figura 1.4: **Inestabilidades electromagnéticas:** Inestabilidades electromagnéticas correspondientes a una descripción microscópica del plasma. Las curvas discontinuas describen a la inestabilidad, mientras que las rectas muestran la evolución de un sistema inestable hacia un estado de estabilidad. Las inestabilidades se presentan para anisotropías térmicas de razón (izquierda)  $T_{\perp}/T_{\parallel} > 1$ , donde las inestabilidades presentes se definen por inestabilidades mirror (curva discontinua) o inestabilidades ión-ciclotrón (EMIC, curva punteada), y (derecha)  $T_{\perp}/T_{\parallel} < 1$  donde se presentan inestabilidades firehose oblicuas (curva discontinua) o inestabilidades firehose paralelas (curva punteada). Fuente: [14].

### 1.3. Motivación

En la presente tesis estudiaremos procesos en plasmas a escalas cinéticas y sin colisiones, para un modelo de plasma constituido por una especie estable o fría (electrones) y otra asociada a las inestabilidades (protones). La Figura (1.4) describe inestabilidades electromagnéticas correspondientes a un plasma de electrones y protones con la condición de no colisionalidad, aplicado a un estudio del viento solar rápido. Trabajos realizados mediante simulaciones [15, 16], estudios analíticos [17, 18] y experimentalmente con la ayuda de observaciones utilizando satélites espaciales [15, 19] muestran la existencia de una relación entre la anisotropía térmica  $T_{\perp}/T_{\parallel} \neq 1$  y el parámetro beta del plasma,  $\beta_p$ , que corresponde a la razón entre la presión cinética y la presión magnética,  $\beta_{\parallel p} = P_{\text{cin}}/P_{\text{mag}}$ . La relación entre ambos parámetros, denominada umbral de estabilidad, se caracteriza por denotar la frontera entre estados en equilibrio y el régimen inestable. La Figura (1.4) muestra sistemas inicialmente inestables que evolucionan hacia las curvas que representan los umbrales de estabilidad. Todo sistema que posea valores de anisotropía térmica y del parámetro beta superiores a los valores indicados por estas curvas será inestable. Las curvas discontinuas describen inestabilidades mientras que las rectas muestran la evolución de un estado inestable hacia un estado de estabilidad. Una vez que los sistemas evolucionen hasta localizarse sobre los umbrales, las anisotropías remanentes se habrán reducido de modo tal que las fluctuaciones electromagnéticas cesan de crecer, en otras palabras, se alcanza la estabilidad térmica.

El sistema a estudiar en esta tesis será un plasma homogéneo, cuasineutro, constituido solo por protones y electrones, donde los electrones forman un fluido sin masa de carga neutralizante y los protones partículas dinámicas sin colisiones con una distribución inicial bi-Maxwelliana; este plasma se encontrará sumergido en un campo magnético estático de fondo, en analogía a las distribuciones mostradas en la Figura (1.3). La energía libre está almacenada en la anisotropía térmica inicial (y en el parámetro beta del plasma). Para valores de parámetros iniciales más grandes, mayor será la energía libre disponible, y en consecuencia, mayor la energía total que posea el plasma. Las amplitudes que alcancen las ondas dependerá parcialmente de la cantidad de energía libre que posea el sistema. Cuando la energía libre del sistema es suficiente para ubicar un estado en el régimen inestable, este estado se ubicará por encima de los umbrales como muestra la Figura (1.4).

Conocer los valores instantáneos de la energía electromagnética en un plasma que exhibe inestabilidad ión-ciclotrón ( $T_{\perp}/T_{\parallel} > 1$ ) permite estudiar el balance energético en el sistema y probablemente entender las interacciones onda-partícula que allí ocurren. Para comprender mejor esta clase de fenómenos es conveniente también conocer el valor máximo que alcanza la energía electromagnética en una inestabilidad. Sin embargo, la teoría cinética lineal de los plasmas solo puede entregar información acerca de las regiones de estabilidad o inestabilidad (y de las tasas de amortiguación o crecimiento, respectivamente). En esta tesis se utilizan simulaciones numéricas híbridas para encontrar la evolución temporal de las energías de las fluctuaciones electromagnéticas y cinéticas de las partículas y su relación con los parámetros que determinan las regiones de inestabilidad.

Los objetivos de la presente tesis son encontrar expresiones analíticas que den cuenta del comportamiento de la energía electromagnética saturada como función de los parámetros macroscópicos iniciales del sistema ( $T_{\perp}/T_{\parallel}$  y  $\beta_{\parallel p}$ ) consistentes con las regiones de inestabilidad de la teoría cinética lineal. Además, encontrar una ecuación que permita representar la evolución temporal de las energías involucradas en el proceso de relajación tanto de la energía cinética total, como para la energía electromagnética de las ondas. Por último, encontrar una ecuación que permita predecir el tiempo que requiere el sistema para saturar su energía electromagnética. El trabajo está organizado de la siguiente forma:

El Capítulo 2 presenta una derivación de la relación de dispersión del plasma para casos magnetizados y térmicamente anisotrópicos, donde se considerará una descripción cinética del plasma. Inicialmente se obtendrá una relación de dispersión generalizada, la cual considerará funciones de distribución de velocidades arbitrarias. Así mismo, se darán nociones de teoría cinética lineal, definiendo el tipo de inestabilidades a estudiar y el umbral de estabilidad correspondiente a la inestabilidad. Luego, se derivará la relación de dispersión bajo las mismas consideraciones pero ahora para una función de distribución de velocidades bi-Maxwelliana, se estudiarán las ramas de inestabilidad que aportan a la dinámica de las perturbaciones y se explicará con detalle el significado de las soluciones de la relación de dispersión.

En el Capítulo 3 estudiaremos una propiedad inherente de los plasmas, la cual independiente de si el sistema en estudio se define en base a teoría lineal o no-lineal, corresponde a las constantes del movimiento. Constantes del movimiento para los iones y ondas de bajas



frecuencias serán derivadas en este capítulo, constantes que jugarán un importante rol en la descripción de las energías asociadas a la evolución temporal de la energía disponible y la energía libre del plasma.

Para comprender la dinámica completa del plasma, el cual consta de un comportamiento lineal hasta el estado de saturación de la energía magnética y no-lineal para el estado de relajación (consecuencia de que la energía magnética sature), es imperioso recurrir a simulaciones numéricas que son detalladas en el Capítulo 4, donde utilizaremos un código híbrido dando a conocer su estructura básica, así como condiciones de uso y diferenciación entre especies de partículas y fluido.

Resultados de las simulaciones numéricas serán mostradas en el Capítulo 5, donde introduciremos la noción de energía libre y analizaremos los límites de inestabilidad y de las perturbaciones electromagnéticas como función de la anisotropía térmica de los protones que componen el plasma. Además estudiaremos como se comportan las energías electromagnéticas de las perturbaciones y cinéticas de las partículas en plasmas anisotrópicos. Usando los resultados de las simulaciones identificaremos donde satura la energía magnética de las ondas de Alfvén-ciclotrón, como relacionarla con la teoría cinética lineal y verificar como una ley de escala se presenta en la relación entre la energía magnética saturada y los parámetros iniciales anisotropía térmica  $T_{\perp}/T_{\parallel}$  y beta de plasma de los protones  $\beta_{\parallel p}$ . Por otro lado, se realizará una comparativa con métodos similares ya introducidos en la literatura [20,21]. Además, se realizará un estudio de las evoluciones temporales de la energía cinética total de los protones como de la energía electromagnética y así encontrar una relación que permita describir el comportamiento que presentan las energías durante todo el proceso de excitación, saturación y relajación, y se derivará una ecuación que permita predecir el tiempo que necesita el sistema para saturar.

Finalmente, conclusiones del trabajo realizado se podrán encontrar en el Capítulo 6, donde también se realizará una discusión referente a los resultados que se obtendrán del capítulo anterior.

# Capítulo 2

## Relación de dispersión en plasmas magnetizados

El acoplamiento de las ecuaciones de Vlasov y Maxwell describe la evolución de los campos electromagnéticos,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , y de la función de distribución del espacio de fases,  $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ , de las especies  $j$  que componen el plasma. En este capítulo se estudiarán las ondas electromagnéticas e inestabilidades que aparecen en un plasma de protones y electrones, inmerso en un campo magnético de fondo  $\mathbf{B}_0$ . Para esto, se analizarán las ecuaciones de Vlasov-Maxwell para pequeñas perturbaciones en torno a un equilibrio, con lo cual se desprecian interacciones entre ondas y partículas. Por simplicidad, se considerarán ondas que se propagan a lo largo de  $\mathbf{B}_0$  y, basados en observaciones del viento solar, se supondrá que la distribución de protones es bi-maxwelliana y los electrones serán considerados fríos. En estos sistemas, las funciones de distribución de velocidades de protones se encuentran normalmente fuera del equilibrio termodinámico con anisotropías térmicas con  $T_\perp > T_\parallel$ . Estas anisotropías son una fuente de energía libre que permite la excitación de inestabilidades, siendo éstas las responsables del crecimiento de ondas electromagnéticas. Aún con estas simplificaciones, el presente análisis es relevante para aplicaciones en plasmas de laboratorio y el estudio de plasmas en el espacio [22].

### 2.1. Relación de dispersión

Para el siguiente estudio, se considera un plasma espacialmente homogéneo compuesto por protones y electrones, el cual se encuentra sumergido en un campo magnético estático de fondo de la forma  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{e}}_z$ .

En general, la función de distribución  $f_j = f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  de la especie  $j$  en el espacio de fases y el tiempo, satisface la ecuación de Boltzmann [5]

$$\frac{\partial}{\partial t} f_j + \mathbf{v} \cdot \nabla f_j + \frac{q_j}{m_j} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_j = \left( \frac{\partial}{\partial t} f_j \right)_c, \quad (2.1)$$

donde  $q_j$  y  $m_j$  son la carga y masa de la especie  $j$ , respectivamente,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  es el campo eléctrico,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  el campo magnético, y el término de la derecha en esta ecuación

corresponde a las colisiones binarias. Para plasmas a altas temperaturas y plasmas diluidos, el número de partículas dentro de una esfera de Debye es grande, es decir:

$$n_0 \lambda_D^3 = n_0 \left( \frac{T_j}{4\pi n_0 q_j^2} \right)^{3/2} \gg 1,$$

donde  $\lambda_D$  es la longitud de Debye,  $n_0 = n_p = n_e$  es la densidad total de partículas, y  $T_j$  es la temperatura de la especie  $j$ . Por lo tanto, el plasma es considerado como no colisional [10]. Debido a esto, el término de la derecha en la ecuación de Boltzmann (2.1) es despreciable,  $(\frac{\partial f}{\partial t})_c \rightarrow 0$ , de modo que  $f_j$  satisface la ecuación de Vlasov o Boltzmann no colisional:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_j + \mathbf{v} \cdot \nabla f_j + \frac{q_j}{m_j} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_j = 0. \quad (2.2)$$

Cuando consideramos el caso en que no hay colisiones, la ecuación de Vlasov preserva el volumen del espacio de fases, lo cual es consistente con el teorema de Liouville, donde el volumen del espacio de fases es deformable pero la densidad de ésta no cambia durante la dinámica de la distribución, como se muestra en la Figura 2.1. Además, la ecuación de Vlasov es reversible [7] ante inversiones temporales,  $t \rightarrow -t$ ,  $v \rightarrow -v$  y  $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$ , por lo que el sistema es no disipativo y la evolución del sistema es reversible.

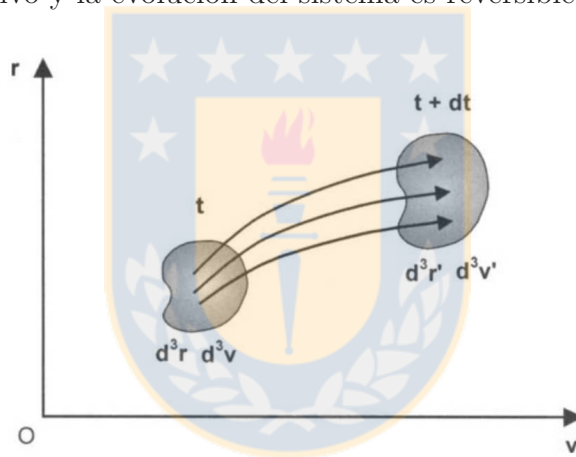


Figura 2.1: **Teorema de Liouville:** En ausencia de colisiones, las partículas dentro del elemento de volumen  $d^3r d^3v$  en  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  en un instante  $t$  ocuparán después de un intervalo de tiempo  $dt$  un nuevo elemento de volumen  $d^3r' d^3v'$  en  $(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$ . Fuente: [7].

Los campos electromagnéticos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}, \quad (2.6)$$

donde  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  y  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$  son las densidades de carga y corriente, respectivamente, dados por

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_j q_j \int d^3v f_j \quad (2.7)$$

y

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_j q_j \int d^3v \mathbf{v} f_j. \quad (2.8)$$

Es interesante notar que las ecuaciones de Maxwell son lineales respecto a los campos y densidades. Sin embargo, como estos campos dependen de la función de distribución a través de las densidades, entonces la ecuación de Vlasov no es lineal respecto a  $f_j$ .

### 2.1.1. Relación de dispersión cinética para plasmas magnetizados

Se considera un plasma inicialmente en equilibrio con un campo magnético estático de fondo,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{e}}_z$ , y se encuentra libre de campos eléctricos  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ . Supongamos que el plasma es inicialmente uniforme y estacionario, de modo que las funciones de distribución  $f_j(\mathbf{v}) = n_j F_j(v_\perp, v_z)$  no dependen del tiempo ni del espacio, donde  $v_\perp$  y  $v_z$  son las velocidades perpendicular y paralela respecto al campo magnético de fondo  $\mathbf{B}_0$ ,  $n_j$  es la densidad de la especie  $j$  no perturbada, y  $F_j = F_j(v_\perp, v_z)$  se encuentra normalizada de acuerdo a [5, 10, 22]

$$2\pi \int_0^\infty dv_\perp v_\perp \int_{-\infty}^\infty dv_z F_j = 1.$$

donde el sistema debe ser neutro y libre de corrientes, de la forma

$$\sum_j q_j n_j \int d^3v F_j = 0, \quad (2.9)$$

$$\sum_j q_j n_j \int d^3v \mathbf{v} F_j = 0, \quad (2.10)$$

de acuerdo a (2.7) y (2.8) iniciales, respectivamente. Además, se debe cumplir que

$$\frac{\partial}{\partial \phi} F_j = 0 \quad (2.11)$$

es decir, la distribución en equilibrio debe ser girotrópica [23].

Suponga que a tiempo  $t = 0$  existe una perturbación en el sistema de modo que aparecen campos electromagnéticos  $\delta\mathbf{E}$  y  $\delta\mathbf{B}$  que deforman la función de distribución, de modo que

$$\mathbf{E} = \delta\mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B} \quad f_j = n_j F_j + \delta f_j, \quad (2.12)$$

Para pequeñas perturbaciones, ( $|\delta f_j| < n_j |F_j|$ ), la ecuación de Vlasov toma la forma

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_j}{m_j} \left( \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right] \delta f_j \\ & = \frac{n_j q_j}{m_j} \left( \delta\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \delta\mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_j, \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde  $\delta\mathbf{E}$  y  $\delta\mathbf{B}$  son los campos electromagnéticos perturbados, campos gobernados por las ecuaciones de Maxwell (2.3)-(2.6) perturbadas como

$$i\mathbf{k} \cdot \delta\hat{\mathbf{E}} = 4\pi \sum_j q_j \int d^3v \delta f_j, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{k} \cdot \delta\hat{\mathbf{B}} = 0, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{k} \times \delta\hat{\mathbf{E}} = \left(\frac{\omega}{c}\right) \delta\hat{\mathbf{B}}, \quad (2.16)$$

$$i\mathbf{k} \times \delta\hat{\mathbf{B}} = \left(\frac{4\pi}{c}\right) \delta \sum_j q_j \int d^3v \mathbf{v} \delta f_j - i \left(\frac{\omega}{c}\right) \delta\hat{\mathbf{E}}, \quad (2.17)$$

con los campos reescritos mediante transformadas de Fourier-Laplace inversas [22], dadas por

$$\delta\mathbf{E} = \int dk_z e^{ik_z z} \int_C \frac{d\omega}{2i\pi} e^{pt} \delta\hat{\mathbf{E}}(k_z, \omega), \quad (2.18)$$

$$\delta\mathbf{B} = \int dk_z e^{ik_z z} \int_C \frac{d\omega}{2i\pi} e^{pt} \delta\hat{\mathbf{B}}(k_z, \omega), \quad (2.19)$$

con  $p = -i\omega$  y  $\omega = Re(\omega) + Im(\omega)$  complejo, donde la parte temporal corresponde a la transformada de Laplace y la espacial a la transformada de Fourier, además de que  $\delta\hat{\mathbf{E}} = \delta\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega)$  y  $\delta\hat{\mathbf{B}} = \delta\hat{\mathbf{B}}(k_z, \omega)$  corresponden a las transformadas de Fourier-Laplace de las perturbaciones. Por otro lado, el contorno  $C$  es paralelo al eje  $Re(\omega)$  con  $\int_C d\omega = \int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma} d\omega$ , de modo que si una función transformada por Fourier-Laplace crece exponencialmente en el tiempo como  $e^{\gamma_0 t}$ , entonces (2.18) y (2.19) convergen solo si  $Im(\omega) > \gamma_0$ , como se muestra en Figura (2.2).

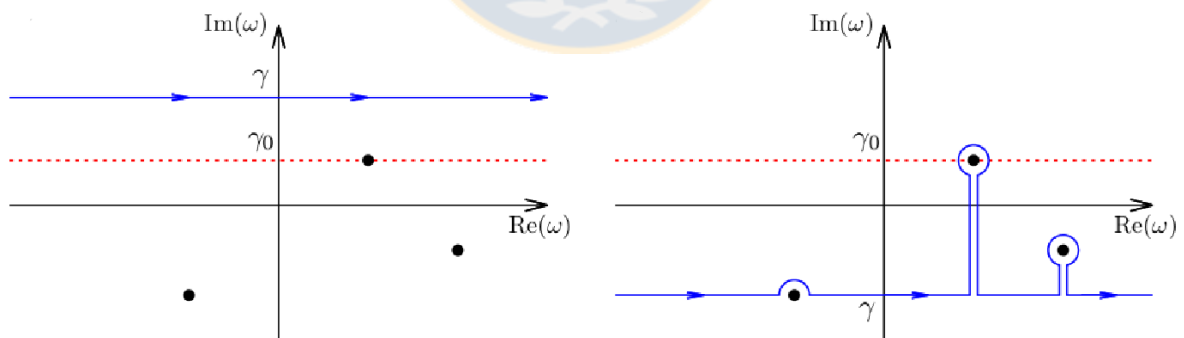


Figura 2.2: **Camino de integración de Fourier-Laplace:** (izquierda) En azul, el camino de integración  $C$  para la transformada inversa de Fourier-Laplace para  $\gamma > \gamma_0$ . Los puntos negros representan singularidad de una función transformada, en el plano  $\omega$  complejo, y la línea punteada a la singularidad con mayor parte imaginaria de la frecuencia,  $\gamma_0$ . (derecha) Continuación analítica para  $\gamma \leq \gamma_0$  mediante deformación del camino de integración. Fuente: [24].

Reemplazando (2.16) en (2.17), se tiene

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \delta \hat{\mathbf{E}}) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sum_j q_j \int d^3 v \mathbf{v} \delta f_j + \frac{\omega^2}{c^2} \delta \hat{\mathbf{E}}. \quad (2.20)$$

Ahora, se reescribe la ecuación (2.13), que se presenta como una derivada total de  $\delta f_j$ , respecto a las transformadas de Fourier-Laplace, como

$$(-i\omega + ik_z v_z) \delta \hat{f}_j = \frac{q_j}{m_j} \left( \delta \hat{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \delta \hat{\mathbf{B}} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_j, \quad (2.21)$$

y si se considera además que  $t_0 \rightarrow -\infty$ , se llega a

$$\begin{aligned} \delta \hat{f}_j &= -\frac{n_j q_j}{m_j} \int_{-\infty}^t dt' \exp \{i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) - (t' - t)]\} \\ &\quad \times \left( \delta \hat{\mathbf{E}} + \frac{\mathbf{v}' \times (\mathbf{k} \times \delta \hat{\mathbf{E}})}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}'} F_j, \end{aligned} \quad (2.22)$$

Se definen ahora las órbitas de una partícula respecto a cada una de las coordenadas espaciales. Sea la velocidad de fase perpendicular, denotada por  $\phi$ , para  $t' = t$ , donde  $(v'_x, v'_y) = (v_{\perp} \cos \phi, v_{\perp} \sin \phi)$  se tiene que

$$\begin{aligned} v'_x &= v_{\perp} \cos(\phi - \Omega_j \tau), & v'_y &= v_{\perp} \sin(\phi - \Omega_j \tau), \\ v'_z &= v_z, & \tau &= t' - t. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Al integrar estas ecuaciones de velocidad, es posible encontrar las orbitas para casos no perturbados [5]

$$x' = x - \frac{v_{\perp}}{\Omega_j} (\sin(\phi - \Omega_j \tau) - \sin \phi), \quad (2.24)$$

$$y' = y + \frac{v_{\perp}}{\Omega_j} (\cos(\phi - \Omega_j \tau) - \cos \phi), \quad (2.25)$$

$$z' = z + v_z \tau, \quad (2.26)$$

estas describen una trayectoria helicoidal propagándose a lo largo del eje  $z$ ;  $\Omega_j = \frac{q_j B_0}{m_j c}$  define la frecuencia de ciclotrón de la especie  $j$  y  $\tau = t' - t$ . La frecuencia de ciclotrón describe el módulo de la velocidad angular de las partículas cargadas de la especie  $j$  moviéndose en un plano perpendicular respecto a  $\mathbf{B}_0$  por efecto de la fuerza de Lorentz, donde  $B_0$  es la amplitud del campo magnético.

Haciendo uso del hecho que  $v'_{\perp}$  y  $v'_z$  son constantes a lo largo de las trayectorias antes calculadas, para el espacio de configuraciones en equilibrio, se considera entonces

$$\begin{aligned} &\left( \delta \hat{\mathbf{E}} + \frac{\mathbf{v}' \times (\mathbf{k} \times \delta \hat{\mathbf{E}})}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}'} F_j \\ &= \frac{v'_{\perp} \cdot \delta \hat{\mathbf{E}}}{v_{\perp}} \left[ \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j - \frac{k_z v_z}{\omega} \left( \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j - \frac{v_{\perp}}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j \right) \right] + \delta \hat{E}_z \frac{\partial}{\partial v_z} F_j, \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde la única dependencia respecto a  $t'$  se presenta en las expresiones que acompañan al término  $\mathbf{v}'_{\perp}$  y  $\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \delta \hat{\mathbf{E}}$ .

Volviendo a la ecuación (2.22), el factor de fase de  $\delta \hat{f}_j$  se puede expresar como [5, 22]

$$\exp [i (\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) - \omega t')] = e^{i(k_z v_z - \omega)\tau}, \quad (2.28)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta \hat{f}_j = & -\frac{in_j q_j}{m_j} \frac{1}{(\omega - k_z v_z - \Omega_j)} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j - \frac{k_z v_z}{\omega} \left( \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j - \frac{v_{\perp}}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j \right) \right] \delta \hat{E}_x \right. \\ & + \left[ \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j - \frac{k_z v_z}{\omega} \left( \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j - \frac{v_{\perp}}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j \right) \right] \delta \hat{E}_y + \left. \left[ \frac{\partial}{\partial v_z} F_j + \frac{\Omega_j}{\omega} \left( \frac{v_z}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j - \frac{\partial}{\partial v_z} F_j \right) \right] \delta \hat{E}_z \right\}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ahora si se sustituye (2.29) en (2.20) se llega una ecuación de la forma

$$\mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.30)$$

donde  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(k_z, \omega)$  es el tensor dieléctrico [5], cuyas componentes son

$$\begin{aligned} D_{xx} = D_{yy} &= 1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3 v \frac{v_{\perp}}{4} \left[ \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j - \frac{k_z v_z}{\omega} \left( \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j - \frac{v_{\perp}}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j \right) \right] \\ &\quad \times \left( \frac{1}{\omega - \Omega_j - k_z v_z} + \frac{1}{\omega + \Omega_j - k_z v_z} \right) \\ D_{xy} = -D_{yx} &= i \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3 v \frac{v_{\perp}}{4} \left[ \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j - \frac{k_z v_z}{\omega} \left( \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j - \frac{v_{\perp}}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j \right) \right] \\ &\quad \times \left( \frac{1}{\omega - \Omega_j - k_z v_z} - \frac{1}{\omega + \Omega_j - k_z v_z} \right), \\ D_{zz} &= 1 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3 v \frac{v_z \partial F_j / \partial v_z}{\omega - k_z v_z}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

y  $D_{xz} = D_{zx} = D_{yz} = D_{zy} = 0$ . Para que la ecuación (2.30) tenga soluciones no triviales, se debe cumplir que

$$\begin{aligned} \det \{ \mathbf{D}(k_z, \omega) \} &= 0, \\ (D_{xx} D_{yy} - D_{xy} D_{yx}) D_{zz} &= 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

De la ecuación (2.32) se encuentran dos casos. Una de ella es

$$D_{zz}(k_z, \omega) = 1 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3 v \frac{v_z \partial F_j / \partial v_z}{\omega - k_z v_z} = 0, \quad (2.33)$$

la cual corresponde a la relación de dispersión de ondas electrostáticas longitudinales que se propagan en un plasma magnetizado, donde  $\omega_{pj} = 4\pi n_0 q_j^2 / m_j$  es la frecuencia de plasma de la especie  $j$ . Para el otro caso, tenemos  $D^+ D^- = D_{xx} D_{yy} - D_{xy} D_{yx} = 0$ , donde  $D^\pm = D_{xx} \pm i D_{xy}$ , o bien

$$D^\pm(k_z, \omega) = 1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3v \frac{v_\perp}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j - \frac{k_z v_z}{\omega} \left( \frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j - \frac{v_\perp}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j \right) \right] \times \left( \frac{1}{\omega \pm \Omega_j - k_z v_z} \right) = 0, \quad (2.34)$$

Los casos con  $D^\pm = 0$  corresponden a la relación de dispersión para ondas electromagnéticas transversales que se propagan a lo largo de  $\mathbf{B}_0$ . El superíndice indica el sentido de la polarización de las ondas electromagnéticas, con  $+$  para ondas de polarización circular derecha, y  $-$  para ondas de polarización circular izquierda.

Esta tesis se enfocará en el estudio de ondas electromagnéticas tipo ión-ciclotrón. Para simplificar el análisis, se introducirá una distribución específica, la que es tratada en la siguiente sección.

### Relación de dispersión para distribuciones bi-maxwellianas

Para el siguiente análisis, y para el resto de esta tesis, se continúa con el modelo físico descrito al comienzo de este capítulo, donde ahora los electrones se consideran fríos, esto es,  $T_e \rightarrow 0$ . Además, trabajaremos con frecuencias bajas del orden de la frecuencia de ciclotrón de los protones,  $|\omega| \sim \Omega_p$ , de modo que los electrones pueden ser considerados como un fluido sin masa. Se asumirá que la función de distribución de velocidades de los protones está descrita por una función bi-Maxwelliana, es decir

$$F_p(v_\perp, v_z) = \frac{n_p}{T_{\perp p} T_{z p}^{1/2}} \left( \frac{m_p}{2\pi k_B} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_p}{2k_B} \left[ \frac{v_z^2}{T_{z p}} + \frac{v_\perp^2}{T_{\perp p}} \right] \right), \quad (2.35)$$

donde  $T_{\perp p}$  y  $T_{z p}$  son las temperaturas perpendicular y paralela respecto a la dirección de propagación, respectivamente. Reemplazando en la relación de dispersión (2.34), se obtiene

$$D^\pm(k_z, \omega) = \frac{k_z^2 v_A^2}{\Omega_p^2} \pm \frac{\omega}{\Omega_p} - [\xi_p^\pm R + \xi_p] Z(\xi_p^\pm) - (R - 1) = 0, \quad (2.36)$$

donde  $v_A = \sqrt{B_0^2 / 4\pi n_p m_p}$  es la velocidad de Alfvén,  $R = T_{\perp p} / T_{z p}$  es la anisotropía térmica,  $Z(\xi_p^\pm)$  función de dispersión del plasma definida por (véase Apéndice A)

$$Z(\xi_p^\pm) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{-t^2}}{t - \xi_p^\pm}, \quad (2.37)$$

y

$$\xi_p = \frac{\omega}{k_z v_{thp}}, \quad \xi_p^\pm = \frac{\omega \pm \Omega_p}{k_z v_{thp}}, \quad (2.38)$$



donde  $v_{thp} = 2k_B T_{zp}/m_p$  es la velocidad térmica paralela respecto a  $\mathbf{B}_0$ , y  $\pm\Omega_p$  depende de la polarización de la onda,  $+\Omega_p$  y  $-\Omega_p$  para ondas polarizadas izquierda y derecha, respectivamente acorde con lo encontrado en (2.34). Para el resto de esta tesis, vamos a definir la velocidad térmica en términos del parámetro  $\beta_{zp} = v_{thp}^2/v_A^2$ , que es la razón entre la energía cinética paralela de los protones y la energía magnética. En la literatura,  $\beta_{zp}$  es conocido como el parámetro beta del plasma.

La relación de dispersión (2.36) relaciona la frecuencia  $\omega = \omega(k_z)$  con el número de onda  $k_z$ . En general, esta relación de dispersión representa una *ecuación trascendental* para la frecuencia [25], por lo que ésta se puede resolver sólo a través de métodos numéricos, lo cual será mostrado en la siguiente sección.

## 2.2. Ceros de la relación de dispersión

La relación de dispersión (2.36), tal como se comentó anteriormente, es una ecuación trascendental para  $\omega(k_z)$ . Este tipo de funciones, en general, no tienen una solución analítica exacta, por lo que es imperioso recurrir a métodos numéricos para resolver (2.36). Para ello, se observa que (2.36) puede ser escrita como

$$D^\pm(k_z, \omega_r + i\gamma) = \text{Re}(D^\pm) + i\text{Im}(D^\pm) = 0, \quad (2.39)$$

de forma que las raíces de la relación de dispersión serán aquellos valores de  $(k_z, \omega) = (k_z, \omega_r + i\gamma)$  que satisfagan simultáneamente

$$\text{Re}(D^\pm(k_z, \omega_r + i\gamma)) = 0, \quad (2.40)$$

$$\text{Im}(D^\pm(k_z, \omega_r + i\gamma)) = 0, \quad (2.41)$$

de manera que cada punto de la relación de dispersión debe estar contenido en una región del plano  $\gamma - \omega_r$ . Por ejemplo, en la Figura 2.3 se muestran las curvas de nivel correspondientes a  $\text{Im}(D^\pm) = 0$  en línea roja y  $\text{Re}(D^\pm) = 0$  con líneas azules para un valor de  $k_z = k_{z_0}$  fijo. Las intersecciones entre líneas rojas y azules corresponden a las soluciones  $\omega = \omega(k_{z_0})$  de la relación de dispersión  $D^\pm = 0$ . Se observa que existen múltiples soluciones a la relación de dispersión.

Una vez se seleccionan las soluciones de interés, se está interesado en encontrar cómo cambian estas soluciones para otros valores de  $k \neq k_0$ . Para ello, se considera la relación de dispersión con  $k_z = k_{z_0} + \Delta k_z$ , con  $|\Delta k_z|$  un número pequeño, y se supondrá que las soluciones para la frecuencia son las mismas que para  $k_z = k_{z_0}$ . Las soluciones serán refinadas usando el método de Müller [26], el cual es un método muy parecido al de la secante, pero la interpolación es cuadrática. En general, este método converge más rápido que el de la secante pero es más lento que el método de Newton. Sin embargo, tiene la ventaja de que no es necesario conocer la derivada de la función  $D^\pm$ , a diferencia del método de Newton, lo que es conveniente cuando tal función es algebraicamente compleja. Este proceso se repite iterativamente para otros valores de  $k$ .

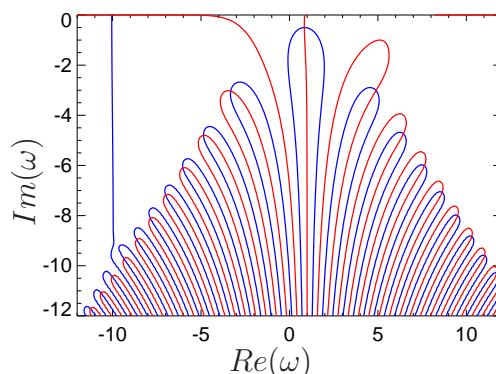


Figura 2.3: **Curvas de nivel del plano  $Im(\omega) - Re(\omega)$ :** Gráfico de contorno tipo para (2.40) y (2.41), donde solo los puntos donde  $Im(\omega)$  (rojo) y  $Re(\omega)$  (azul) se intersectan, son los ceros que satisfacen (2.36). Los parámetros escogidos para resolver la relación de dispersión corresponden a  $R = 1.0$ ,  $\beta_{zp} = 0.35$  y  $k_{z0} = 3.0$ . Fuente: Elaboración propia.

Algunas soluciones numéricas de la relación de dispersión (2.36) son mostradas en la Figura 2.6 para diferentes valores de anisotropía  $R$  (1.0, 4.0 y 7.0) y beta del plasma  $\beta_{zp} = 0.50$ . Estas soluciones corresponden a los cuatro puntos con  $\gamma/\Omega_p$  más cercanos a  $\gamma = 0$  en la figura 2.3. Las curvas rojas que se encuentran en el primer y segundo cuadrante ( $\omega_r > 0$ ) de la figura 2.6 representan las ramas ión-ciclotrón donde las ondas que se excitan poseen frecuencias del orden de la frecuencia de ciclotrón de los protones,  $\Omega_p$ , esto quiere decir que, estas ondas presentan frecuencias que serán asintóticas a  $\omega_r/\Omega_p$ , a menos que se produzca resonancia entre las distribuciones de protones y las ondas de la rama ión-ciclotrón. El hecho que las ondas ión-ciclotrón se presenten para  $\omega > 0$  indica que estas ondas presentan polarización circular izquierda, acorde con la literatura [5, 10, 22, 23, 27, 28]. Las curvas rojas del tercer y cuarto cuadrante ( $\omega_r < 0$ ) presentan las ramas magnetosónicas, que corresponden a ondas con polarización circular derecha. Las curvas rojas, tanto polarización izquierda como derecha representan los modos normales de un sistema oscilatorio [29], tal como el que se estudia actualmente. Por último, las curvas celestes presentes en el primer y segundo cuadrante, representan la rama de los modos de orden superior [23], rama que se encuentra en polarizadas izquierda ( $\omega > 0$ ), los cuales solo existen por efectos de la teoría cinética. Figura (2.4) permite asociar las raíces del plano  $Im(\omega) - Re(\omega)$  con cada uno de los modos y ramas del plano  $\omega_r - k_z$ . Se puede observar claramente que son cuatro las semillas escogidas para el método de Müller, donde cada color está directamente asociado con los colores correspondientes al lado derecho de la Figura (2.6). Además, hacer notar que los modos de orden superior (MOS 1 y 2) aparecen de a pares, y que si bien, existen infinitos posibles ceros para (2.36) y por ende, infinitos modos de orden superior (Figura 2.5), en este trabajo sólo se muestran los primeros modos, MOS 1 y MOS 2.

Por otro lado, es sabido que  $\omega$  no solo presenta parte real, por lo que ahora se analizará su parte imaginaria  $Im(\omega) = \gamma$ , llamada tasa de crecimiento. Esta tasa de crecimiento indica que para  $\gamma < 0$  el sistema se encuentra amortiguado, para  $\gamma = 0$  el sistema es estable, y  $\gamma > 0$  el sistema es inestable. En otras palabras, la tasa de crecimiento  $\gamma$  nos indica para que valores del vector de onda  $k_z$  las ondas se verán fuertemente amortiguadas, crecerán en amplitud

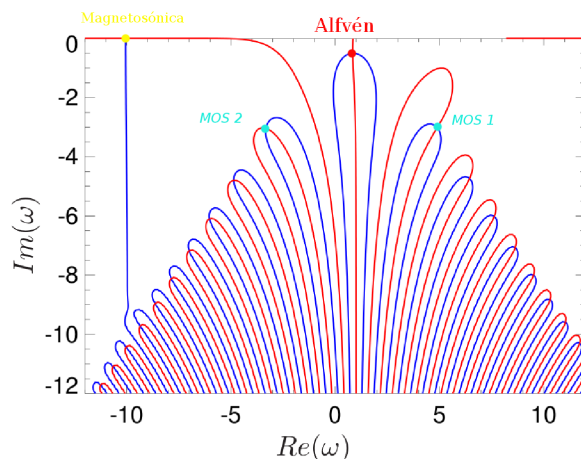


Figura 2.4: **Descripción de los modos de la relación de dispersión:** Los colores corresponden a los valores semilla escogidos para resolver la relación de dispersión, los cuales serán usados por el método de Muller para encontrar los ceros de la relación. Los colores asociados a cada semilla corresponden a las ramas que presenta la solución gráfica de la relación de dispersión, donde cada color se relaciona directamente con los colores y ramas de la Figura (2.6). Fuente: Elaboración propia.

o se excitarán, y donde las ondas permanecen estables. El lado derecho de la Figura (2.6), muestra cuales son las ramas y los modos que aportan información respecto al modelo físico en uso. Independiente del valor de anisotropía dado, los modos de orden superior (curvas celestes) siempre se encuentran en la región  $\gamma < 0$ , encontrándose amortiguadas sin importar el valor de  $k_z$ , por lo que no contribuyen directamente con las ondas ión-ciclotrón. Las ramas magnetosónicas, se encuentran en el estado estable para todo  $k_z$ , esto tiene sentido debido a que estos modos no interactúan directamente con las ondas ión-ciclotrón, principalmente por la polarización con la que interactúan estas ondas (ondas de ión-ciclotrón interactúan con las polarizaciones izquierda, mientras que las ramas magnetosónicas pertenecen a las ramas de polarización derecha). Ahora, las curvas púrpuras corresponden a las ramas ión-ciclotrón, donde las ondas asociadas se verán amortiguadas para el caso estable ( $R = 1.0$ ), y fuertemente excitadas para valores de anisotropía más grandes. De esto, se ve claramente que la rama que más contribuye al modelo físico adoptado es la rama ión-ciclotrón, lo que es acorde con la Figura (2.8). Finalmente, notar que al lado izquierdo de la Figura (2.6) se observa una simetría en torno a  $k_z = 0$ . Esto se debe a que al ser ondas electromagnéticas, éstas aparecen de a pares, en direcciones tanto paralela como antiparalela respecto a  $\mathbf{B}_0 \hat{\mathbf{e}}_z$  [27].

Soluciones normalizadas de la relación de dispersión son mostradas en la Figura (2.6) para inestabilidades electromagnéticas ión-ciclotrón considerando  $\beta_{zp} = 0.50$  y (arriba) el caso estable ( $R = 1.0$ ) (centro)  $R = 4.0$  y (abajo)  $R = 7.0$ . Las curvas que cruzan el origen del plano  $(k_z, \omega_r)$  representan los modos normales de ondas con propagación paralela y antiparalela, y circularmente polarizadas izquierda y derecha, bajo las condiciones dichas en el párrafo anterior. Las curvas que intersectan en  $\omega_r / \Omega_p = 1$  corresponden a los modos de orden superior [23]. La Figura (2.5) muestra diferentes modos de orden superior para un plasma protón-electrón estable y  $\beta_{zp} = 0.35$ , donde las curvas verdes corresponden a los modos de

orden superior, siendo las curvas más externas los casos más amortiguados [28].

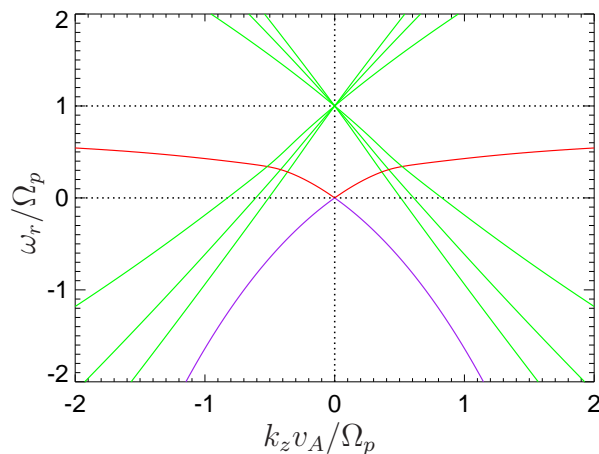


Figura 2.5: **Modos de orden superior:** Curvas verdes representan los modos de orden superior. Estos modos se encuentran para valores de frecuencias entre  $0.5\omega_r/\Omega_p$  y  $1.5\omega_r/\Omega_p$  para  $k v_A/\Omega_p = \pm 3$ . Fuente: Elaboración propia.

Como consecuencia directa de lo anterior, es esperable que, si la inestabilidad excita ondas ión-ciclotrón, estas deberían emerger en las regiones del plano  $\omega - k_z$ . De esta forma, se han encontrado soluciones de la relación de dispersión para plasmas protón-electrón sumergidos en un campo magnético estático de fondo  $\mathbf{B}_0$  con dirección privilegiada en  $z$  con presencia inestabilidades electromagnéticas ión-ciclotrón.

En resumen, en la sección 2.1 hemos derivado la relación de dispersión generalizada partiendo desde la ecuación de Boltzmann. También observamos que (2.32) entrega información de las propiedades de estabilidad de plasmas que satisfacen nuestro modelo físico, presentado al comienzo del presente capítulo, independiente de la función de distribución de velocidades  $f(v_\perp, v_z)$ .

Finalmente, la relación (2.36) presenta soluciones para un caso particular de inestabilidad, donde en nuestro caso, hemos exigido inestabilidades electromagnéticas ión-ciclotrón, además de que la función de distribución de velocidades sea estrictamente bi-maxwelliana, de forma que se debe cumplir siempre  $T_{p\perp 0} > T_{pz0}$ , o dicho de forma similar, anisotropía térmica inicial mayor a 1,  $R > 1$ .

La Figura (2.7) muestra umbrales de estabilidad para diferentes valores de  $\gamma$ , conocido como tasa de crecimiento (para una explicación, ver sección (2.2)).

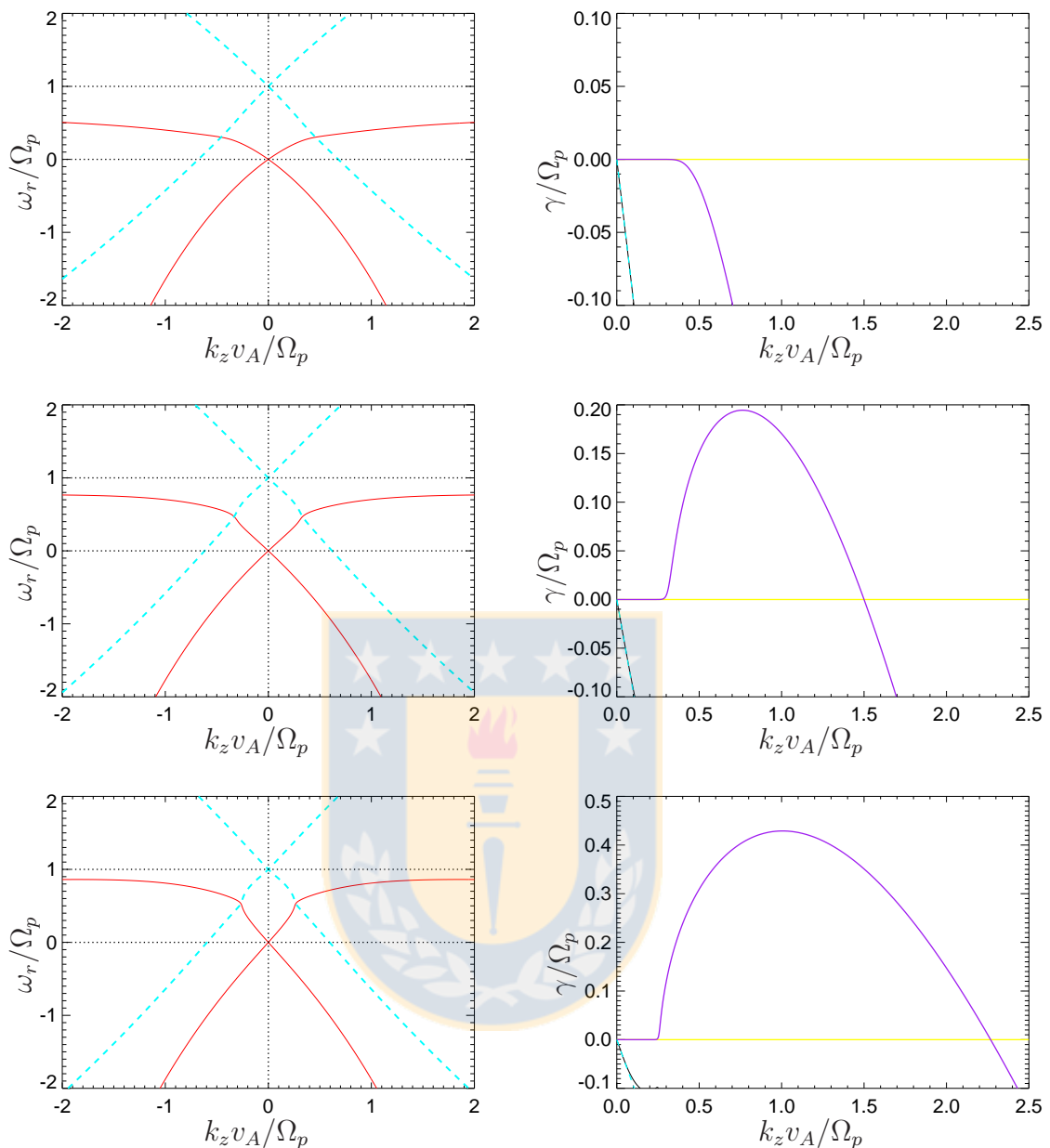


Figura 2.6: **Soluciones de la relación de dispersión:** Soluciones de la relación de dispersión normalizada para inestabilidades electromagnéticas ión-cilotrón considerando  $\beta_{zp} = 0,50$  y (arriba) el caso estable ( $R = 1.0$ ) (centro)  $R = 4.0$  y (abajo)  $R = 7.0$ . Las curvas púrpuras corresponden a la solución imaginaria de (2.39), donde las ondas ión-cilotrón se verán amortiguadas ( $\gamma \leq 0$ ) o excitadas ( $\gamma > 0$ ) [5]. Las curvas rojas y celestes corresponden a la solución real de (2.39), donde al ser ondas electromagnéticas las generadas por la inestabilidad, éstas se generarán de a pares, razón por la que se observa una simetría en torno a  $k_z v_A / \Omega_p = 0$  para todos los casos. Las curvas rojas corresponden a los modos normales, donde las ondas que muestran las soluciones corresponden a ondas circularmente polarizadas izquierda ( $\omega_r / \Omega_p > 0$ ) y derecha ( $\omega_r / \Omega_p < 0$ ) mientras que las curvas celestes a los modos de orden superior de primer orden. Fuente: Elaboración propia.

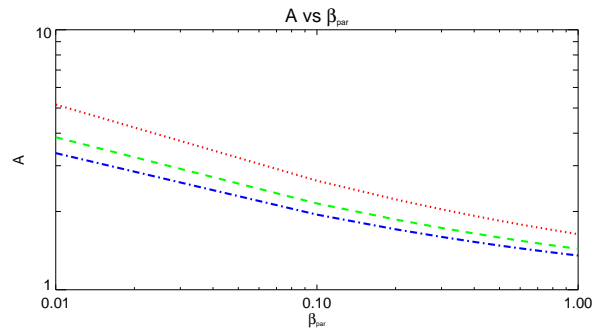


Figura 2.7: **Umbral de estabilidad:** Anisotropía térmica de los protones en función de  $\beta_{zp}$  para inestabilidad ión-ciclotrón. Los cuadrados, triángulos y círculos representan resultados de la teoría cinética lineal correspondientes a  $\gamma = 10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  y  $10^{-4}$ , respectivamente. Las líneas solidas representan los mejores ajustes para cada grupo de datos. Fuente: [16].

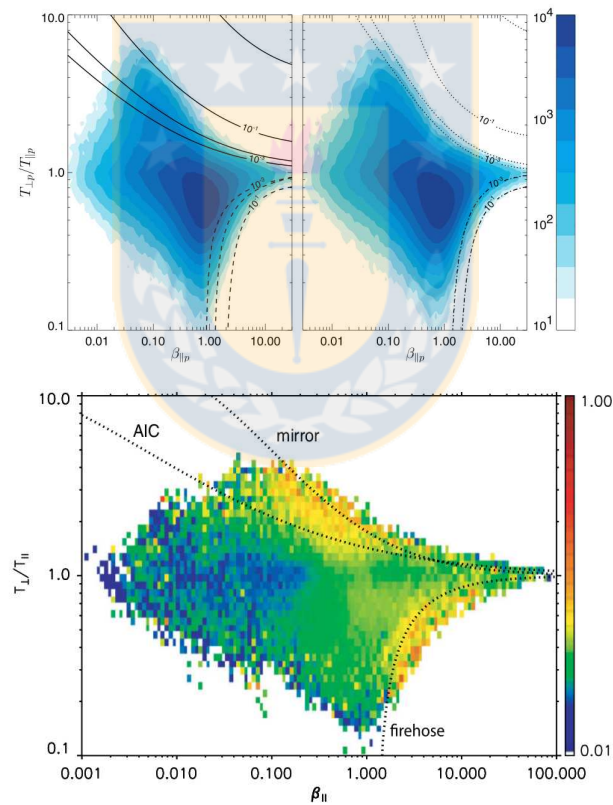


Figura 2.8: **Tipos de inestabilidades:** Magnitud de las fluctuaciones magnéticas respecto a la relación entre la anisotropía y el beta de plasma,  $R$  vs.  $\beta_{zp}$ , para distintos valores de  $\gamma$ . (arriba) Diferentes tipos de inestabilidades se muestran, donde las curvas continuas y discontinuas (izquierda) corresponden a inestabilidades ión-ciclotrón ( $T_{\perp p}/T_{z p} > 1$ ) y discontinuas a firehose paralelo ( $T_{\perp p}/T_{z p} < 1$ ). Fuente: [15]. (abajo) Los valores más altos de potencias se encuentran lejos de los umbrales de estabilidad. Estas potencias más altas corresponden a distribuciones de protones a altas temperaturas, o con energía libre grande. Fuente: [19].

# Capítulo 3

## Constantes de movimiento

Una constante de movimiento es una cantidad que se conserva a través del tiempo imponiendo, en efecto, una restricción en el movimiento. Estas constantes pueden definirse en un campo de fuerzas dado como función de coordenadas en el espacio de fase y tiempo que es constante a lo largo de alguna trayectoria [30], [31].

En el presente capítulo, dos constantes de movimiento independientes entre sí son derivadas para sistemas tanto estables como inestables para perturbaciones electromagnéticas ión-ciclotrón con propagación paralela respecto a un campo magnético estático de fondo uniforme  $B_0 \hat{\mathbf{z}}$ , donde se presentan perturbaciones con amplitud arbitrarias y frecuencias comparables con la frecuencia de ciclotrón de los protones ( $\omega \sim \Omega_p$ ). El análisis se diferencia respecto al trabajo realizado por Davidson & Hammer [32] solo en el hecho que mientras que el trabajo de éstos se realiza para casos de ondas con frecuencias proporcionales a la frecuencia de ciclotrón de los electrones, denominadas ondas Whistlers, el presente capítulo se enfocará en ondas con frecuencias mucho menores, ya que son ondas que resuenan con los protones, frecuencias extremadamente más bajas que las de ondas Whistlers.

### 3.1. Constantes de movimiento generalizadas

Se consideran las ecuaciones acopladas de Vlasov y Maxwell

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q}{m_p} \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right] f = 0, \quad (3.1)$$

donde  $f = f(z, \mathbf{v}, t)$  define la función de distribución de velocidades de los protones en el equilibrio, además  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z, t)$  y  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(z, t)$  definidos por las ecuaciones de Maxwell (Apéndice D).

Al multiplicar (3.1) por  $\frac{1}{2} m_p n_0 v_{\perp}^2$  e integrando sobre  $z$  y  $\mathbf{v}$ , se tiene

$$\frac{1}{2} m_p n_0 \int_{-L}^L \int_{-\infty}^{\infty} dz d^3 v v_{\perp}^2 \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right] f = -\frac{q n_0}{2} \int_{-L}^L \int d^3 v v_{\perp}^2 \left[ \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right] f, \quad (3.2)$$

Si se considera el lado derecho de (3.2) y aplicando el teorema de la divergencia [33], se obtiene

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}qn_0 \int_{-L}^L \int_{-\infty}^{\infty} dz d^3v v_{\perp}^2 \left[ \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right] f \\ &= \frac{1}{2}qn_0 \int_{-L}^L \int_{-\infty}^{\infty} dz d^3v f \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \left( v_{\perp}^2 \left[ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right] \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

de manera similar, dado que  $f(-L) = f(L)$ , esto es  $f$  periódico se cumple que

$$\frac{1}{2}m_p n_0 \int_{-L}^L \int dz d^3v v_{\perp}^2 \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0, \quad (3.4)$$

Por lo tanto, (3.2) se reduce a

$$\frac{1}{2}m_p n_0 \int_{-L}^L \int dz d^3v v_{\perp}^2 \frac{\partial}{\partial t} f = qn_0 \int_{-L}^L \int dz d^3v f \mathbf{v}_{\perp} \cdot \left[ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right], \quad (3.5)$$

Ahora, reescribiendo los campos electromagnéticos usando el potencial vectorial electromagnético  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(z, t)$  y el potencial eléctrico  $\phi = \phi(z, t)$  como

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\perp} + \mathbf{B}_z, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{E}_z, \quad (3.7)$$

donde

$$\mathbf{B}_{\perp} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{B}_z = \mathbf{B}_0, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{E}_{\perp} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \quad \mathbf{E}_z = -\nabla \phi, \quad (3.9)$$

considerando que  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_x \hat{\mathbf{e}}_x + \mathbf{A}_y \hat{\mathbf{e}}_y = \mathbf{A}_{\perp}$ . Reemplazando entonces (3.8) y (3.9) en (3.5) queda

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}m_p n_0 \int_{-L}^L \int dz d^3v v_{\perp}^2 \frac{\partial}{\partial t} f \\ &= n_0 q \int_{-L}^L \int dz d^3v f \mathbf{v}_{\perp} \cdot \left[ \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \nabla \phi \right) + \frac{\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{B}_0)}{c} \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Los términos  $f \mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla \phi$  y  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0$  no contribuyen, mientras que

$$\int \int f \frac{1}{c} \mathbf{v}_{\perp} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = \int \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (f \mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_{\perp} \frac{\partial}{\partial t} f \right], \quad (3.11)$$

$$\int \int \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A} = \int \frac{1}{c} f \mathbf{v}_{\perp} \cdot [\nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}], \quad (3.12)$$

$$\int_{-L}^L dz f (\mathbf{v} \cdot \nabla) (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{A}) = - \int_{-L}^L dz f (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{A}) (\mathbf{v} \cdot \nabla f), \quad (3.13)$$



así, se reescribe (3.5) de la forma

$$\frac{1}{2}m_p n_0 \int_{-L}^L \int dz d^3v v_{\perp}^2 \frac{\partial}{\partial t} f = \frac{qn_0}{c} \int_{-L}^L \int dz d^3v \left[ (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{A}) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f + \mathbf{v} \cdot \nabla f \right\} - \frac{\partial}{\partial t} (f \mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{A}) \right]. \quad (3.14)$$

Se puede notar que aparece el término  $\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right\} f$  presente en (3.2). Lo siguiente es reemplazar aquel término por la parte derecha de (3.2) sin considerar por el momento el término  $f \mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{A}$ , así

$$\begin{aligned} & - \frac{n_0 q}{c} \int_{-L}^L \int dz d^3v \left[ (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{A}) \frac{q}{m} \left[ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f \right] \\ & = \frac{n_0 q^2}{m_p c} \int_{-L}^L \int dz d^3v f \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \left[ (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{A}) \left\{ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right\} \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde la última igualdad se obtiene de usar el teorema de la divergencia respecto a  $\nabla_{\mathbf{v}}$  [33]. Al separar  $\mathbf{v}$  por componentes y ordenando, (3.15) toma la forma

$$\begin{aligned} & \frac{n_0 q^2}{m_p c} \int_{-L}^L \int dz d^3v f \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \left[ (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{A}) \left\{ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right\} \right] \\ & = \frac{n_0 q^2}{m_p c} \int_{-L}^L \int dz d^3v f \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{A}) \left\{ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right\}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Utilizando nuevamente los potenciales  $\mathbf{A}$  y  $\phi$ , sabiendo que  $\mathbf{A} \cdot \nabla_v$  no contribuye información, e integrando por partes [25] la integral por partes de la forma

$$\int_{-L}^L dz f \mathbf{A} \cdot [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}] = - \int_{-L}^L dz |\mathbf{A}|^2 \mathbf{v} \cdot \nabla f, \quad (3.17)$$

obteniendo

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int d^3v f \left( \frac{1}{2} m_p n_0 v_{\perp}^2 + \frac{q}{c} \mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{A} \right) \\ & = \frac{n_0 q^2}{m_p c^2} \int_{-L}^L \int dz d^3v \left[ \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f + \mathbf{v} \cdot \nabla f \right\} \frac{|\mathbf{A}|^2}{2} + f \mathbf{A} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (f |\mathbf{A}|^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ha vuelto aparecer el término de la ecuación de Vlasov, de forma que volviendo a reemplazar este término por (3.2), se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-L}^L \int dz d^3v f \left[ \frac{1}{2} m_p n_0 v_{\perp}^2 + \frac{n_0 q}{c} \mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{A}(z, t) + \frac{1}{2} \frac{n_0 q^2}{m_p c^2} |\mathbf{A}(z, t)|^2 \right] \\ & = \frac{n q^2}{m c^2} \int_{-L}^L \int dz d^3v f \mathbf{A}(z, t) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Trabajando con el lado derecho de (3.19), donde usando la ecuación de Ampère-Maxwell para los potenciales utilizados anteriormente, se tiene que

$$\int d^3v \mathbf{v} f = \frac{1}{4q\pi n_0} \left( -c \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi \right), \quad (3.20)$$

por lo que ordenando términos, (3.19) toma la forma

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{-L}^L \int dz d^3v f \left[ \frac{1}{2} m_p n_0 v_{\perp}^2 + \frac{n_0 q}{c} \mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{A}(z, t) + \frac{1}{2} \frac{n_0 q^2}{m_p c^2} |\mathbf{A}(z, t)|^2 \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{4\pi c^2} \int_{-L}^L dz \boldsymbol{\Omega}_0 \cdot \left( \mathbf{A} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde  $\boldsymbol{\Omega}_0 = q\mathbf{B}_0/mc$ .

Tomando el término  $\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{A}$  de la ecuación (3.19) e integrando por partes respecto a  $\nabla$ , se tiene

$$\frac{qn_0}{c} \left( \int_{-L}^L \int dz d^3v f \right) \mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{A} = \int_{-L}^L \frac{dz}{4\pi} \left( |\mathbf{B}_{\perp}|^2 + \frac{1}{c^2} \mathbf{A} \cdot \frac{\partial}{\partial t^2} \mathbf{A} \right), \quad (3.22)$$

por lo que reemplazando (3.22) en (3.21); finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} C_{\perp} = & \int_{-L}^L \int dz d^3v f \left[ \frac{1}{2} m_p n_0 v_{\perp}^2 + \frac{\omega_{pp}^2}{8\pi c^2} |\mathbf{A}|^2 \right] \\ & + \int_{-L}^L \frac{dz}{8\pi} \left[ 2 |\mathbf{B}_{\perp}|^2 + \frac{2}{c^2} \left( \mathbf{A} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} - \boldsymbol{\Omega}_0 \cdot \left( \mathbf{A} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.23)$$

la primera constante de movimiento generalizada, que corresponde a la cantidad de energía que se particiona en la dirección perpendicular respecto a  $\mathbf{B}_0$ .

Por otro lado, tomando el hamiltoniano de un sistema continuo [30]

$$H = \frac{1}{2} m_p n_0 \int_{-L}^L \int dz d^3v f (v_{\perp}^2 + v_z^2) + \int_{-L}^L \frac{dz}{8\pi} (|\mathbf{B}|^2 + |\mathbf{E}|^2), \quad (3.24)$$

donde se observa que  $\partial H / \partial t = 0$ . Restando (3.23), se obtiene

$$\begin{aligned} C_z = & \int_{-L}^L \int dz d^3v f \left[ \frac{1}{2} m_p n_0 v_z^2 - \frac{\omega_{pp}^2}{8\pi c^2} |\mathbf{A}|^2 \right] \\ & - \int_{-L}^L \frac{dz}{8\pi} \left[ -|\mathbf{B}_{\perp}|^2 + |\mathbf{E}_{\perp}|^2 + |\mathbf{E}_z|^2 - \frac{2}{c^2} \left( \mathbf{A} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} - \boldsymbol{\Omega}_0 \cdot \left( \mathbf{A} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.25)$$

que corresponde a la segunda constante de movimiento generalizada, que entrega información del resto de la energía particionada a lo largo ahora de la dirección paralela respecto a  $\mathbf{B}_0$ .

## 3.2. Constantes de movimiento para un sistema inestable

En la sección anterior se derivaron analíticamente dos constantes de movimiento (3.23) y (3.25) para las direcciones perpendicular y paralela respectivamente, para un plasma homogéneo sumergido en un campo magnético  $\mathbf{B}_0$  constante que se propaga en  $z$ . Estos resultados muestran que la energía total en el sistema se particiona en estas dos direcciones.

Reescribiendo  $f$  como una suma entre la función de distribución en equilibrio y un término de perturbación, de la forma

$$f = f_0 + \delta f, \quad (3.26)$$

donde la normalización  $\int d^3v f_0(\mathbf{v}, t) = 1$  se conserva para  $t \geq 0$  por (3.1). Por otro lado, los campos se ven perturbados por las transformadas de Fourier toman la forma

$$\delta f(\mathbf{z}, \mathbf{v}, t) = \sum_k f_{0k}(\mathbf{v}, t) e^{(ikz)}, \quad k > 0, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{B}_\perp(\mathbf{z}, t) = \sum_k \mathbf{B}_{\perp k}(t) e^{(ikz)}, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{z}, t) = \sum_k \mathbf{E}_k(t) e^{(ikz)}, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{z}, t) = \sum_k \mathbf{A}_k(t) e^{(ikz)}, \quad (3.30)$$

donde se cumple que  $f_{0k}(\mathbf{v}, t) = (2L)^{-1} \int dz \delta f(\mathbf{z}, \mathbf{v}, t) e^{-ikz}$  y  $\int dz \delta f(\mathbf{z}, \mathbf{v}, t) = 0$  y definiendo las energías cinéticas de los protones como

$$K_\perp(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \int dz d^3v \frac{1}{2} m_p n_0 v_\perp^2 f_0(\mathbf{v}, t), \quad (3.31)$$

$$K_z(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \int dz d^3v \frac{1}{2} m_p n_0 v_z^2 f_0(\mathbf{v}, t), \quad (3.32)$$

Reescribiendo las constantes (3.23) y (3.25) como

$$\begin{aligned} C_\perp &= K_\perp(t) + \frac{1}{8\pi} \sum_k \left[ \left( \frac{\omega_{pp}^2}{8\pi c^2 k^2} + 2 \right) |\mathbf{B}_{\perp k}(t)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{c^2} \left( \mathbf{A}_{-k}(t) \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}_k(t) - \boldsymbol{\Omega}_0 \cdot \mathbf{A}_{-k}(t) \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_k(t) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} C_z &= K_z(t) - \frac{1}{8\pi} \sum_k \left[ \left( \frac{\omega_{pp}^2}{c^2 k^2} + 1 \right) |\mathbf{B}_{\perp k}(t)|^2 - |\mathbf{E}_k(t)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{c^2} \left( \mathbf{A}_{-k}(t) \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}_k(t) - \boldsymbol{\Omega}_0 \cdot \mathbf{A}_{-k}(t) \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_k(t) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.34)$$

y dado que el desplazamiento de corriente es pequeño, y las variaciones de las escalas temporales de  $\mathbf{A}_k(t)$  son grandes en comparación con  $\frac{1}{c^2} \mathbf{A}_k(t)$ , se puede aproximar

$$|\mathbf{E}_k(t)|^2 \leq |\mathbf{E}_{zk}(t)|^2 + |\mathbf{E}_{\perp k}(t)|^2 \ll |\mathbf{B}_{\perp k}(t)|^2, \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{c^2} \left| \mathbf{A}_{-k}(t) \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}_k(t) - \boldsymbol{\Omega}_0 \cdot \sum_k \left( \mathbf{A}_{-k}(t) \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_k(t) \right) \right|^2 \ll |\mathbf{B}_{\perp k}(t)|^2, \quad (3.36)$$

ambas constantes se reescriben entonces por las aproximaciones

$$K_{\perp}(t) + \frac{1}{8\pi} \sum_k \left( \frac{\omega_{pp}^2}{c^2 k^2} + 2 \right) |\mathbf{B}_{\perp k}(t)|^2 = C_{\perp}, \quad (3.37)$$

$$K_z(t) - \frac{1}{8\pi} \sum_k \left( \frac{\omega_{pp}^2}{c^2 k^2} + 1 \right) |\mathbf{B}_{\perp k}(t)|^2 = C_z. \quad (3.38)$$



# Capítulo 4

## Código Híbrido

Desde principios de los años sesenta y a partir de la rápida evolución y desarrollo de computadores, el uso de simulaciones en el estudio de plasmas ha sido de gran interés. La complejidad de la dinámica encontrada en física de plasmas ha motivado el uso herramientas computacionales como una manera eficiente y precisa para complementar estudios teóricos, observacionales y experimentales [34]. Dependiendo de las escalas involucradas y de los fenómenos de interés, estas simulaciones pueden basarse en las ecuaciones de la magnetohidrodinámica, las ecuaciones de Vlasov o en el seguimiento de la trayectoria de las partículas a través de las ecuaciones de Fuerza de Lorentz, por supuesto acomodadas con las ecuaciones de Maxwell. Las simulaciones numéricas permiten estudiar con detalle los efectos no lineales del sistema, los que usualmente no son fáciles de estudiar analíticamente y, por lo tanto, ayuda a complementar estudios teóricos, observacionales y experimentales [15, 19]. En el caso de plasmas espaciales, una buena herramienta para estudiar la dinámica del plasma es a través de simulaciones híbridas, en donde los electrones son considerados como un fluido neutralizante y los iones son tratados como partículas que se mueven en el espacio bajo la influencia de campos electromagnéticos autoconsistentes [20, 23, 27, 28, 35–37].

En este capítulo se introducirá las ecuaciones y algoritmos básicos para el desarrollo de simulaciones híbridas para estudiar fenómenos electromagnéticos a bajas frecuencias, donde las especies de iones (protones) son tratadas cinéticamente bajo el método PIC (*Particle-in-Cell*), y los electrones como un fluido sin masa de carga neutralizante.

### 4.1. Ecuaciones básicas

Como en capítulos anteriores, se considerará un plasma de protones y electrones inmerso en un campo magnético de fondo  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$ , en donde cualquier perturbación en los campos u otras cantidades serán a lo largo de  $\mathbf{B}_0$ . Es decir, el problema se reduce al de un sistema en una dimensión espacial. En los modelos híbridos, la cinética de protones e iones pesados están descritas por las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\frac{dz_i}{dt} = v_{zi} \tag{4.1}$$

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{q_i}{m_i} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} \right). \tag{4.2}$$

donde el índice  $i$  representa al  $i$ -ésimo ión positivo, y los campos  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z_i, t)$  y  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(z_i, t)$  están evaluados en la posición de la partícula. Note que se permite que las tres componentes de la velocidad evolucionen en el tiempo. En la literatura, este tipo de modelo es conocido como simulaciones híbridas 1.5D (una dimension espacial y tres en velocidad).

Los electrones son tratados como un fluido sin masa  $m_e = 0$  de carga neutralizante. Es decir, se resuelve la ecuación del campo de velocidades de los electrones

$$\frac{\partial}{\partial t} n_e m_e \mathbf{V}_e = 0 = -en_e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_e \times \mathbf{B} \right) - k_B \nabla(n_e T_e), \quad (4.3)$$

donde  $\mathbf{V}_e$  es la velocidad macroscópica,  $-e$  la carga de los electrones,  $T_e$  su temperatura y  $n_e$  la densidad de electrones sujeta a la condición de neutralidad de cargas

$$en_e = \sum_i q_i n_i, \quad (4.4)$$

donde la suma es sobre todos los iones positivos. Por simplicidad, se ha considerado que la presión de los electrones  $p_e = k_B n_e T_e$  es isotrópica. En caso contrario, esta cantidad debe ser escrita como un tensor.

La única contribución de la densidad, calculada según (4.4), es en la ecuación (4.3), por lo que la Ley de Gauss  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$  no es necesaria. Además, como la condición  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  se cumple en todo instante de tiempo y  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(z, t)$  depende sólo del espacio  $z$  y el tiempo  $t$ , entonces

$$\mathbf{B}(z, t) = \mathbf{B}_\perp(z, t) + B_0 \hat{z}, \quad (4.5)$$

donde  $\mathbf{B}_\perp$  es el campo magnético perpendicular respecto al eje  $z$ .

Por lo tanto, para el modelo híbrido es suficiente resolver las ecuaciones de Faraday y Ampère. Para ondas de bajas frecuencias se puede usar la aproximación de Darwin, que consiste en despreciar la corriente de desplazamiento en la ley de Ampère (2.6), por lo que las ecuaciones para los campos son

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (4.7)$$

donde  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{iones}} - en_e \mathbf{V}_e$  es la corriente total, con

$$\mathbf{J}_{\text{iones}} = \sum_i q_i n_i \mathbf{v}_i. \quad (4.8)$$

A partir de (4.3), (4.7) y (4.8) se encuentra una ecuación explícita para el campo eléctrico,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{en_e} \left[ \left( \frac{1}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{J}_{\text{iones}} \right) \times \mathbf{B} - k_B \nabla(n_e T_e) \right]. \quad (4.9)$$

En resumen, las ecuaciones básicas para el modelo híbrido son (4.1)–(4.2), (4.4), (4.6) y (4.8)–(4.9).

### 4.1.1. Normalización de las ecuaciones básicas

En plasmas magnetizados existen frecuencias y velocidades características que dominan en la dinámica del sistema. En particular, existen ondas electromagnéticas de frecuencias cercanas a la frecuencia de *ciclotrón de protones*,  $\Omega_p$ , que se propagan a la *velocidad de Alfvén*,  $v_A$ , la que resulta de la oscilación de iones en respuesta a una tensión efectiva en las líneas de campo magnético, similar a la fuerza de un resorte en tensión. Estas cantidades están definidas como

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi n_0 m_p}}, \quad \Omega_p = \frac{eB_0}{m_p c}, \quad n_0 = \frac{1}{m_p} \sum_s n_s m_s \quad (4.10)$$

donde  $n_0$  es la densidad de masa y la sumatoria en  $s$  considera todas las *especies* de iones del plasma. Para plasmas de protones y electrones,  $n_0 = n_p = n_e$ .

Para las simulaciones, se normalizarán los tiempos y velocidades respecto de la frecuencia de ciclotrón  $\Omega_p$  y la velocidad de Alfvén  $v_A$ , respectivamente. Los campos electromagnéticos serán normalizados con respecto al campo magnético de fondo. Es decir,

$$\tilde{t} = \Omega_p t, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v_A}, \quad \tilde{z} = \frac{\Omega_p}{v_A} z, \quad (4.11)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{B}}{B_0}, \quad \tilde{\mathbf{E}} = \frac{c}{v_A} \frac{\mathbf{E}}{B_0}, \quad \tilde{\mathbf{J}} = \frac{\mathbf{J}}{en_0 v_A}. \quad (4.12)$$

Adicionalmente, la masa  $\tilde{m}_s = m_s/m_p$  y carga  $\tilde{q}_s = q_s/e$  de cada especie serán normalizadas respecto a la contraparte de los protones, la densidad  $\tilde{n}_s = n_s/n_0$  de la especie  $s$  respecto a la densidad de masa, y se define el parámetro beta de los electrones como

$$\beta_e = \frac{n_0 k_B T_e}{B_0^2 / 8\pi} = \frac{2k_B T_e}{m_p v_A^2}, \quad (4.13)$$

Finalmente, las ecuaciones básicas normalizadas para las simulaciones híbridas son

$$\frac{d\tilde{z}_i}{d\tilde{t}} = \tilde{v}_{zi}, \quad (4.14)$$

$$\frac{d\tilde{\mathbf{v}}_i}{d\tilde{t}} = \frac{\tilde{q}_i}{\tilde{m}_i} \left( \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{v}}_i \times \tilde{\mathbf{B}} \right), \quad (4.15)$$

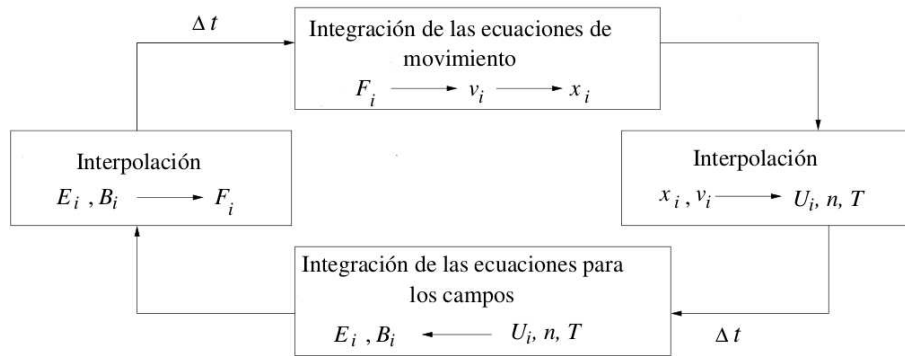
$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{E}}, \quad (4.16)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{\tilde{n}_e} \left[ \left( \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{J}}_{\text{iones}} \right) \times \tilde{\mathbf{B}} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla} (\beta_e \tilde{n}_e) \right], \quad (4.17)$$

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\text{iones}} = \sum_i \tilde{q}_i \tilde{n}_i \tilde{\mathbf{v}}_i, \quad (4.18)$$

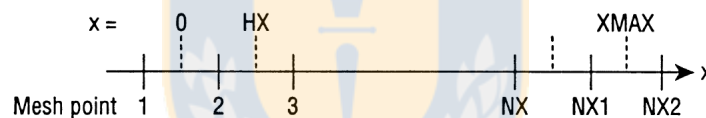
$$\tilde{n}_e = \sum_i \tilde{q}_i \tilde{n}_i. \quad (4.19)$$

Para efectos prácticos, el método de simulación consiste en resolver este sistema de ecuaciones *en orden inverso*, es decir partiendo de las densidades (4.18)–(4.19), los cuales son fuente para resolver las ecuaciones de los campos (4.16)–(4.17), y finalmente usar estos campos para resolver la dinámica de los iones según (4.14)–(4.15). Este esquema se muestra en la figura 4.1.


 Figura 4.1: **Esquema Partícula en celda:** Ciclo de cálculo del método PIC. Fuente: [34].

## 4.2. Discretización de las ecuaciones

Para el análisis de esta sección, se trabajará con las ecuaciones normalizadas (4.14)–(4.19). Consideremos una caja unidimensional de largo  $L$ , discretizada en  $N_g$  celdas de largo  $\Delta z = L/N_g$ , de modo que el nodo  $m$  se encuentra en la posición  $Z^m = m\Delta z$ . Las partículas y campos electromagnéticos son avanzados en el tiempo en intervalos  $\Delta t$ , de modo que en el paso  $n$  el tiempo es  $t_n = n\Delta t$ . Los iones pueden moverse libremente entre celdas. Además, se consideran dos celdas fantasmas, una en cada extremo de la caja, para simular condiciones de borde periódicas (ver figura 4.2).


 Figura 4.2: **Esquema grilla unidimensional:** Esquema de grilla unidimensional usada en el código híbrido de esta tesis. Fuente: [38].

### 4.2.1. Campos electromagnéticos

Para los campos, utilizaremos un esquema de derivadas en diferencias centradas. En el caso de la ecuación (4.16), las derivadas centradas en el tiempo equivalen al método *leap-frog* (salto de la rana), por lo que el campo magnético  $\tilde{\mathbf{B}}_n = \tilde{\mathbf{B}}(t = t_n)$  es conocido en pasos enteros de tiempo, mientras que el campo eléctrico es conocido en pasos intermedios  $\tilde{\mathbf{E}}_{n+1/2} = \tilde{\mathbf{E}}(t = t_{n+1/2})$ . Luego, la ecuación (4.16) discretizada en el tiempo es

$$\tilde{\mathbf{B}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{B}}_n - \Delta t \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}_{n+1/2}. \quad (4.20)$$

Si el campo eléctrico es conocido en los nodos, de modo que  $\tilde{\mathbf{E}}_n^m = \tilde{\mathbf{E}}_n(z = Z^m)$ , entonces el esquema de derivadas en diferencias centradas en espacio es

$$\left[ \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}_{n+1/2} \right]^{m+1/2} = \frac{\hat{z}}{\Delta z} \times (\tilde{\mathbf{E}}_{n+1/2}^{m+1} - \tilde{\mathbf{E}}_{n+1/2}^m), \quad (4.21)$$



lo cual exige que los campos magnéticos sean conocidos en la mitad de una grilla,  $\tilde{\mathbf{B}}_n^{m+1/2} = \tilde{\mathbf{B}}_n(z = Z^{m+1/2})$ .

La ecuación (4.20) depende del campo eléctrico a tiempo  $t = t_{n+1/2}$ . A partir de la ecuación (4.17), se encuentra

$$\tilde{\mathbf{E}}_{n+1/2} = \left[ \frac{1}{\tilde{n}_e} \left( \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{J}}_{\text{iones}} \right) \times \tilde{\mathbf{B}} - \frac{1}{2\tilde{n}_e} \tilde{\nabla}(\tilde{\beta}_e \tilde{n}_e) \right]_{n+1/2}, \quad (4.22)$$

lo que significa conocer el campo magnético y las densidades a tiempo  $t_{n+1/2}$ . En el caso del campo magnético, se usa una interpolación lineal, de modo que

$$\tilde{\mathbf{B}}_{n+1/2} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{B}}_{n+1} + \tilde{\mathbf{B}}_n). \quad (4.23)$$

Debido a las ecuaciones (4.22) y (4.23), la ecuación (4.20) es una expresión implícita para  $\tilde{\mathbf{B}}_{n+1}$ , en el sentido que depende de ella misma. Para resolver esa ecuación, en esta tesis se utiliza iteración funcional según el método propuesto por Horowitz [36, 37]. En este caso se supone, inicialmente, que el campo  $\tilde{\mathbf{B}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{B}}_n$  en (4.23), lo cual se usa para encontrar  $\tilde{\mathbf{E}}_{n+1/2}$  en (4.22) para luego actualizar el valor de  $\tilde{\mathbf{B}}_{n+1}$  según (4.20). Este método se itera varias veces hasta que el valor de los campos converja, lo que usualmente toma alrededor de doce o quince pasos en situaciones ideales.

## 4.2.2. Resolviendo la dinámica de los protones

Una vez conocidos los campos, la dinámica de las partículas descrita por las ecuaciones (4.14) y (4.15), se resuelve mediante el método de *leap-frog* (ver figura 4.3). Según este método, la posición de las partículas  $z_n = z(t_n)$  son conocidas a tiempo  $t_n = n\Delta t$ , mientras que sus velocidades  $\tilde{\mathbf{v}}_{n+1/2} = \tilde{\mathbf{v}}(t_{n+1/2})$  son conocidas en intervalos intermedios. Luego, la discretización temporal de las ecuaciones (4.14) y (4.15) es

$$\tilde{z}_{n+1} = \tilde{z}_n + \Delta t \tilde{v}_{z,n+1/2}, \quad (4.24)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{n+1/2} = \tilde{\mathbf{v}}_{n-1/2} + h(\tilde{\mathbf{E}}_n + \tilde{\mathbf{v}}_n \times \tilde{\mathbf{B}}_n), \quad (4.25)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_n = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{v}}_{n-1/2} + \tilde{\mathbf{v}}_{n+1/2}), \quad (4.26)$$

donde se ha definido  $h = \Delta t \tilde{q}_i / \tilde{m}_i$ . Note que la ecuación para  $\tilde{\mathbf{v}}_{n+1/2}$  es implícita. Se puede encontrar una ecuación explícita para  $\tilde{\mathbf{v}}_{n+1/2}$  tomando el producto punto y cruz con  $\tilde{\mathbf{B}}_n$  [Forslund. Space Science Reviews, **42**, 3-16 (1985); Matsumoto y Omura. Computer Space Plasma Physics: Simulation Techniques and Software], lo que resulta en

$$\tilde{\mathbf{v}}_{n+1/2} = \lambda \tilde{\mathbf{v}}_{n-1/2} + h \left( \tilde{\mathbf{E}}_n + g \tilde{\mathbf{B}}_n + \mathbf{u}_0 \times \tilde{\mathbf{B}}_n \right), \quad (4.27)$$

donde se han despreciado términos del orden de  $h^3$  y

$$\lambda = 1 - \frac{h^2}{2} |\tilde{\mathbf{B}}_n|^2, \quad g = \frac{h}{2} \tilde{\mathbf{v}}_{n-1/2} \cdot \tilde{\mathbf{B}}_n, \quad \mathbf{u}_0 = \tilde{\mathbf{v}}_{n-1/2} + \frac{h}{2} \tilde{\mathbf{E}}_n. \quad (4.28)$$

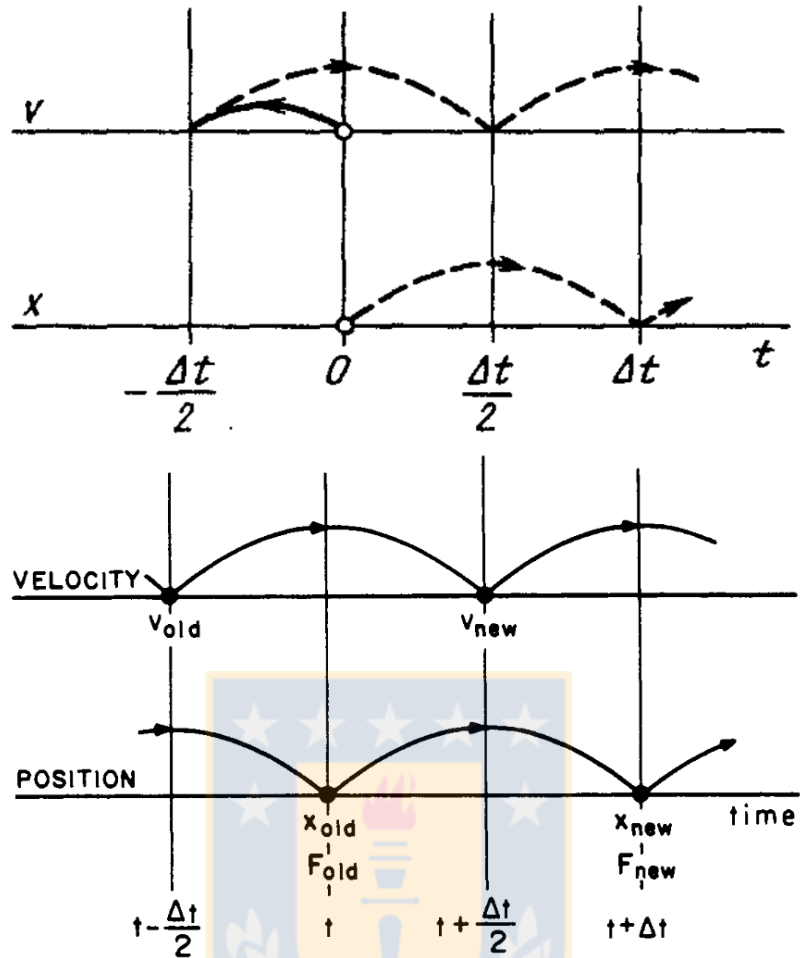


Figura 4.3: Esquema del método leap-frog: (arriba) Para  $t = 0$ , tanto  $x$  como  $v$  se sitúan en un punto inicial  $0$ . El primer paso mueve  $x$  hacia  $\Delta t$ , mientras que  $v$  inicialmente vuela medio paso hacia atrás para luego avanzar un paso completo hacia  $\Delta t/2$  como muestran las líneas continuas y discontinuas para  $v$ . (abajo) Muestra como el método leap-frog actúa para el cálculo temporal de una fuerza  $F_i$  dependiendo de como avanzan  $x_i$  y  $v_i$ . Fuente: [34]

### 4.2.3. Densidades y función de forma

Los campos electromagnéticos usados en (4.27) son evaluados en la posición  $\tilde{z}_n$  de la partícula. Sin embargo, en los métodos híbridos, las partículas pueden moverse libremente a lo largo de la caja, por lo que esta posición no siempre coincide con los puntos de grilla  $Z^m$  donde se conocen las densidades y los campos electromagnéticos. Si las cargas fueran puntuales y el número de grillas es  $N_g \rightarrow \infty$  ( $\Delta\tilde{z} \rightarrow 0$ ), de modo que los nodos representan un continuo en el espacio, entonces las densidades y campos estarían bien definidas con expresiones de la forma

$$\tilde{\rho}_n(\tilde{z}_n) = \sum_m \delta(Z^m - \tilde{z}_n) \tilde{\rho}_n^m,$$

donde  $\delta(Z^m - \tilde{z}_n)$  es la delta de Dirac. En el caso de las simulaciones, donde el espacio es discretizado, la dinámica de una partícula sería afectada por los campos sólo si su posición

coincide con un nodo según la ecuación anterior. Pero esto no es útil, así que es necesario generalizar la ecuación anterior y pensar en las partículas como *nubes de carga* definidas por una función de soporte finito  $S(Z^m - \tilde{z}_n)$  llamada *función de forma*, de modo que las densidades pueden ser interpolados como

$$\tilde{\rho}_n(\tilde{z}_n) = \sum_{m=1}^{N_g} S(Z^m - \tilde{z}_n) \tilde{\rho}_n^m. \quad (4.29)$$

Los campos electromagnéticos y corrientes se calculan usando la misma interpolación. Distintas expresiones para la función de forma dan origen a distintos modos de interpolación (ver figura 4.4). A continuación se describen las funciones de forma más utilizadas en la literatura.

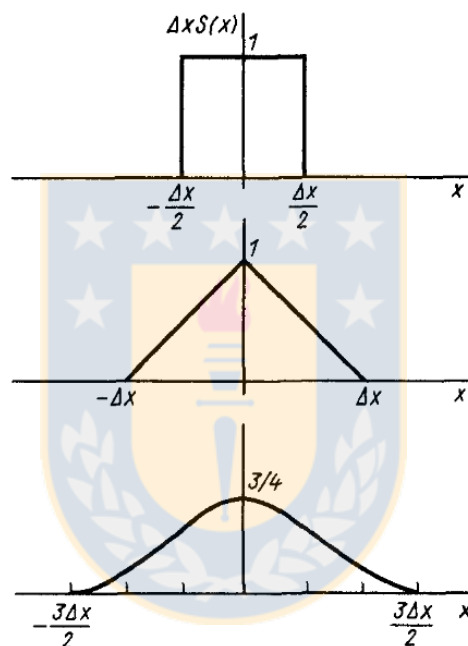


Figura 4.4: **Funciones de forma  $s$** : Diferentes esquemas de la función de forma  $s$ . (arriba) Punto de grilla más cercano - NGP method. Solo una celda de la grilla es usada, de manera que todo el peso estadístico de  $s$  recaer en esta única celda. Con este método simplemente podemos contar el número de partículas que existen en la distancia  $\Delta x_i = 1/\Delta x$  (tamaño de cada celda de la grilla) en un punto cualquiera de la grilla. (medio) Nube en celda - CIC method. (abajo) Spline parabólico, el cual consiste en la unión de tres secciones parabólicas, de largo  $\Delta x$  sin presencia de discontinuidad por pendientes. Fuente: [34].

### Punto de grilla más cercano (NGP)

El método de punto de grilla más cercano (NGP por sus siglas en inglés) consiste en contar el número de partículas cuya posición esté entre  $Z^m - \Delta\tilde{z}/2$  y  $Z^m + \Delta\tilde{z}/2$ , y asignar ese número al nodo  $Z^m$ . Como las partículas se mueven dentro de la celda, eventualmente una de estas partículas va a cruzar la frontera entre las celdas centradas en  $Z^m$  y  $Z^{m\pm 1}$ . Si

la partícula entra o sale de la celda  $m$ -ésima, significa que la densidad en esa celda crece o decrece abruptamente, respectivamente. Ésto hace que, para la simulación, la partícula tenga una forma efectiva rectangular de ancho  $\Delta\tilde{z}$ ,

$$S(Z^m - \tilde{z}_n) = \frac{1}{\Delta\tilde{z}} \begin{cases} 1 & |u| < 1/2 \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}, \quad u = \frac{Z^m - \tilde{z}_n}{\Delta\tilde{z}},$$

por lo que la física según este método es el de partículas de ancho finito en vez de partículas puntuales (ver figura 4.4). Si bien este método es relativamente simple de implementar y es de bajo costo computacional, los saltos en el número de partículas por celda hace que las densidades y campos electromagnéticos resulten ser ruidosos tanto en tiempo como en el espacio, lo cual puede afectar a la física del problema.

### Nube en una celda (CIC)

Una mejora al método anterior consiste en considerar, desde un principio, a los iones como nubes con un ancho finito. En el caso más simple, esta nube es un rectángulo rígido de ancho  $\Delta\tilde{z}$ , el cual no interactúa con otras partículas, es decir pasa a través de otras nubes libremente mientras se mueve por la simulación. Este método es conocido como *nube en una celda* (CIC por sus siglas en inglés). A medida que la nube se mueve por las celdas, una porción  $h_m$  y  $h_{m+1}$  de esa nube se encontrará en las celdas  $m$  y  $m+1$ , respectivamente, con  $h_m + h_{m+1} = 1$ . Entonces, es la porción  $h_m$  la que contribuye a la celda  $m$ . Usando un análisis similar al del método NGP, la nube tendrá una forma efectiva triangular que ocupa dos celdas, de modo que

$$S(Z^m - \tilde{z}_n) = \frac{1}{\Delta\tilde{z}} \begin{cases} 1 - |u| & |u| < 1 \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}, \quad u = \frac{Z^m - \tilde{z}_n}{\Delta\tilde{z}}. \quad (4.30)$$

Explícitamente en la ecuación (4.29), si la nube está centrada entre las celdas  $m$  y  $m+1$ ,

$$\tilde{\rho}_n(\tilde{z}_n) = \frac{1}{\Delta\tilde{z}^2} [(Z^{m+1} - \tilde{z}_n)\tilde{\rho}_n^m + (\tilde{z}_n - Z^m)\tilde{\rho}_n^{m+1}].$$

Este método, que es una interpolación de primer orden, requiere evaluar dos puntos de la grilla por cada partícula, lo que lo hace un método computacionalmente más costoso que el anterior, pero las densidades y campos obtenidos son funciones mucho más suaves.

### Spline de segundo orden

Por otro lado, es posible considerar interpolaciones de mayor orden con el fin de suavizar aún más el perfil de densidad y con esto reducir el ruido numérico, pero a costa de eficiencia computacional. En la simulación usada en esta tesis se ha considerado una función de interpolación de segundo orden, la cual emula la forma de una función gaussiana, como se muestra en la figura 4.4. En este caso, la carga contribuye a tres puntos de grilla por cada partícula, aumentando el costo computacional, pero a medida que las partículas se muevan a lo largo de la grilla, la variación en la densidad de cada grilla será más suave, obteniendo así un perfil de densidades y campos con fluctuaciones numéricas más débiles en comparación

a los casos anteriores.

En este caso, la función de forma es

$$S(Z^m - \tilde{z}_n) = \frac{1}{\Delta\tilde{z}} \begin{cases} \frac{3}{4} - u^2 & |u| < 1/2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} - |u| \right)^2 & 1/2 < |u| < 3/2 \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}, \quad u = \frac{Z^m - \tilde{z}_n}{\Delta\tilde{z}}. \quad (4.31)$$

Reemplazando explícitamente en (4.29), para una partícula en la celda  $m$ , se obtiene

$$\tilde{\rho}_n(\tilde{z}_n) = S_{m-1}\tilde{\rho}_n^{m-1} + S_m\tilde{\rho}_n^m + S_{m+1}\tilde{\rho}_n^{m+1}, \quad (4.32)$$

donde

$$S_m = \frac{1}{\Delta\tilde{z}} \left[ \frac{3}{4} - \left( \frac{Z^m - \tilde{z}_n}{\Delta\tilde{z}} \right)^2 \right], \quad (4.33)$$

$$S_{m\pm 1} = \frac{1}{2\Delta\tilde{z}} \left[ \left( \frac{1}{2} \pm \frac{\tilde{z}_n - Z^m}{\Delta\tilde{z}} \right)^2 \right]. \quad (4.34)$$

### 4.3. Esquema del código híbrido

Para resumir, se muestra un esquema del código híbrido, mostrando a grandes rasgos cuales son los pasos que realiza la simulación, en la Figura (4.5).

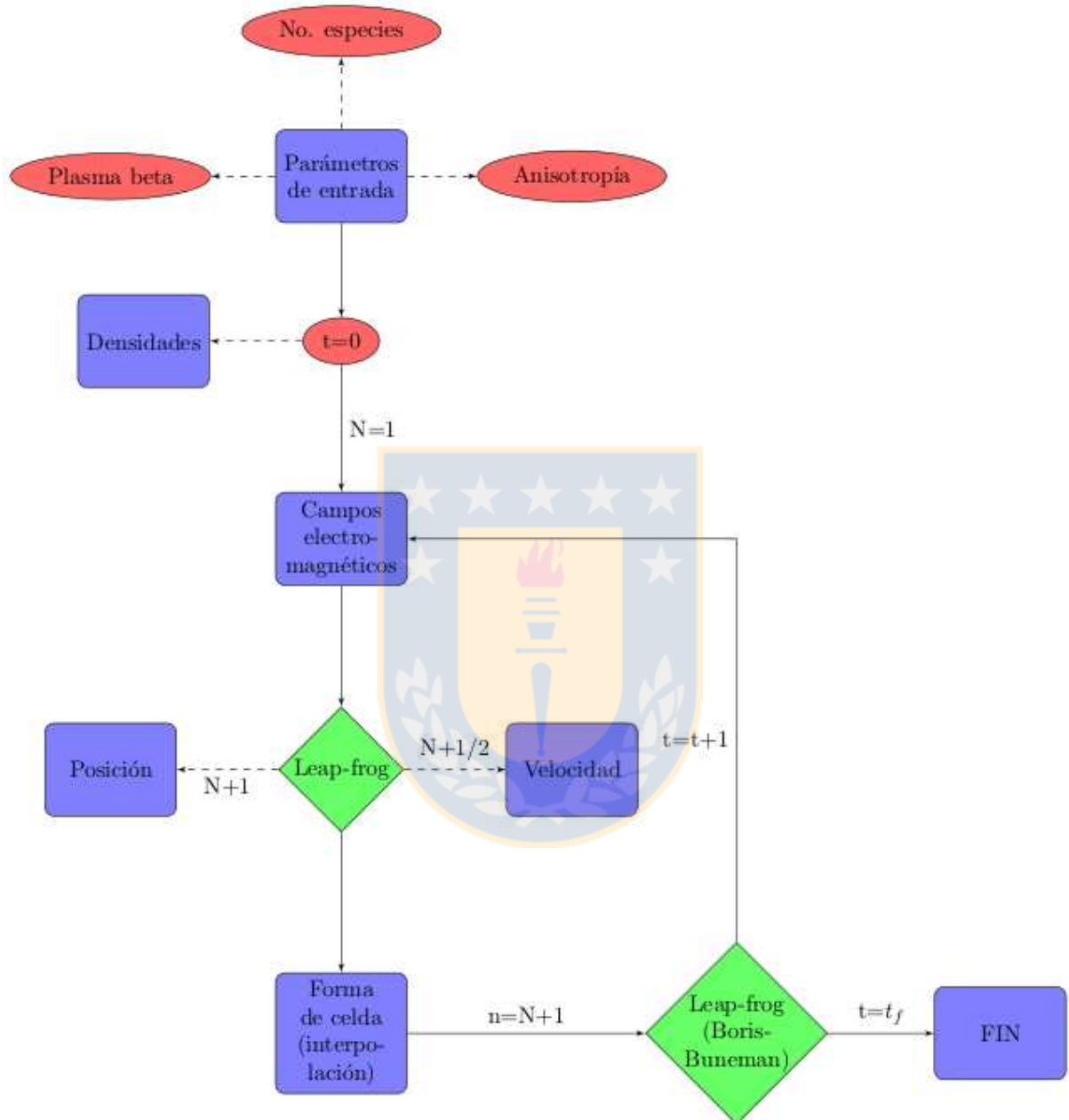


Figura 4.5: **Esquema principal del código de simulación:** Esquema principal del código de simulación usado en esta tesis, donde se muestran a grandes rasgos los pasos más importantes que realiza el código híbrido. Fuente: Elaboración propia.

# Capítulo 5

## Simulaciones híbridas y Energía magnética saturada

Para resolver las ecuaciones para los campos electromagnéticos hemos utilizado una grilla unidimensional en la dirección  $x$  con condiciones de borde periódicas, compuesta de  $Nx = 512$  celdas de tamaño  $\Delta x = 2048$ , con 8192000 partículas. La velocidad y posición iniciales de cada partícula se fijan de manera que para  $t\Omega_p = 0$  se tenga una distribución espacialmente homogénea, y que la función de distribución de velocidades sea bi-Maxwelliana. El paso de tiempo normalizado utilizado es  $dt = 0,0025$  y se realizaron 32768 iteraciones hasta alcanzar un tiempo  $t\Omega_p = 80$ , a menos que se indique lo contrario, considerando solo protones y electrones como se indicó en el capítulo anterior. Por otro lado, respecto al campo magnético, debido a que el código presenta solo una dimensión espacial, el campo solamente depende de la coordenada  $x$  ( $\mathbf{B} = B(x)$ ),  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  lo que implica que la componente  $B_x$  del campo se mantiene constante igual a la magnitud de  $\mathbf{B}_0$  para todo tiempo.

Las simulaciones permiten obtener cantidades macroscópicas para cada celda de simulación, lo que equivale a tener dichas cantidades como función de la posición (coordenada  $x$  en este caso), donde cantidades como temperatura, anisotropía térmica y campo magnético total corresponderán a cantidades promediadas sobre todas las celdas de la grilla. Es decir, el valor mostrado de cierta cantidad en un tiempo  $\Omega_p t$ , corresponde al promedio obtenido en el intervalo  $(t\Omega_p \pm dt)/2$ .

Antes de comenzar el análisis de los resultados obtenidos, introducimos la energía libre para distribuciones anisotrópicas. Si bien existen diferentes métodos para conocer o entregar una cantidad de energía libre para que el sistema evolucione, en nuestro caso, para la distribución bi-maxwelliana la energía libre es la deformación de la distribución respecto a una distribución estable. La Figura (5.1) muestra una deformación de la distribución de velocidades de los protones bi-maxwelliana en ( $t\Omega_p = 0$ ) respecto al caso estable para ( $t\Omega_p = 80$ ). Cuan deformada se encuentra la distribución, en esa proporción será la energía libre que posee el sistema al comienzo del proceso. Esta deformación se relaciona directamente con los parámetros anisotropía  $R$  y beta del plasma  $\beta_{zp}$  iniciales. Las Figuras (5.1) y (5.2) muestran 2 casos de parámetros iniciales diferentes, donde la Figura (5.1) presenta  $R = 7.0$  y  $\beta_{zp} = 0.55$ , la deformación de la distribución es clara, mientras que para la Figura (5.2) consideramos  $R = 3.2$  pero  $\beta_{zp}$  similar al caso anterior. Observamos en el último caso una menor deforma-

ción de la distribución, lo que indica que la energía libre que posee el sistema considerado en la Figura (5.2) es mucho menor que la que posee el caso de la Figura (5.1). Con esto confirmamos que la energía libre disponible al inicio del sistema se encuentra relacionada directamente con los parámetros iniciales.

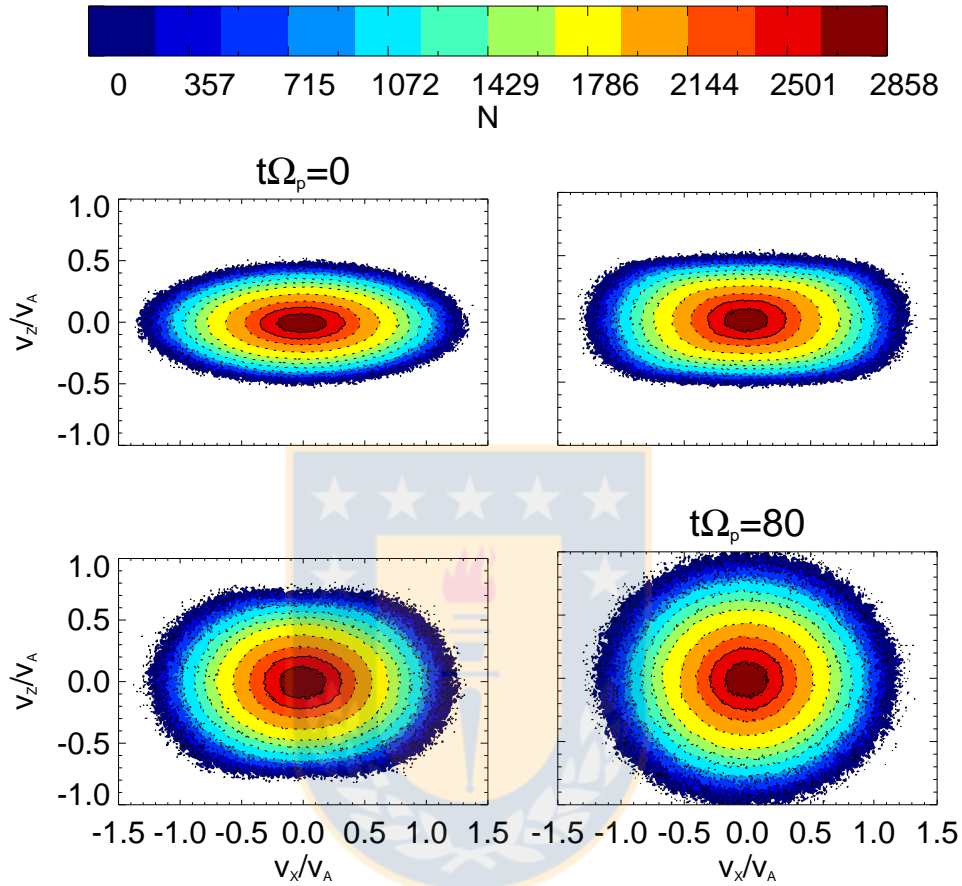


Figura 5.1: **Deformación de la distribución bi-Maxwelliana 1:** Deformación y evolución temporal de la distribución de velocidades bi-Maxwelliana en un régimen inestable, con anisotropía inicial  $R = 7.0$  y beta de plasma  $\beta_{zp} = 0.45$ . Fuente: Elaboración propia.



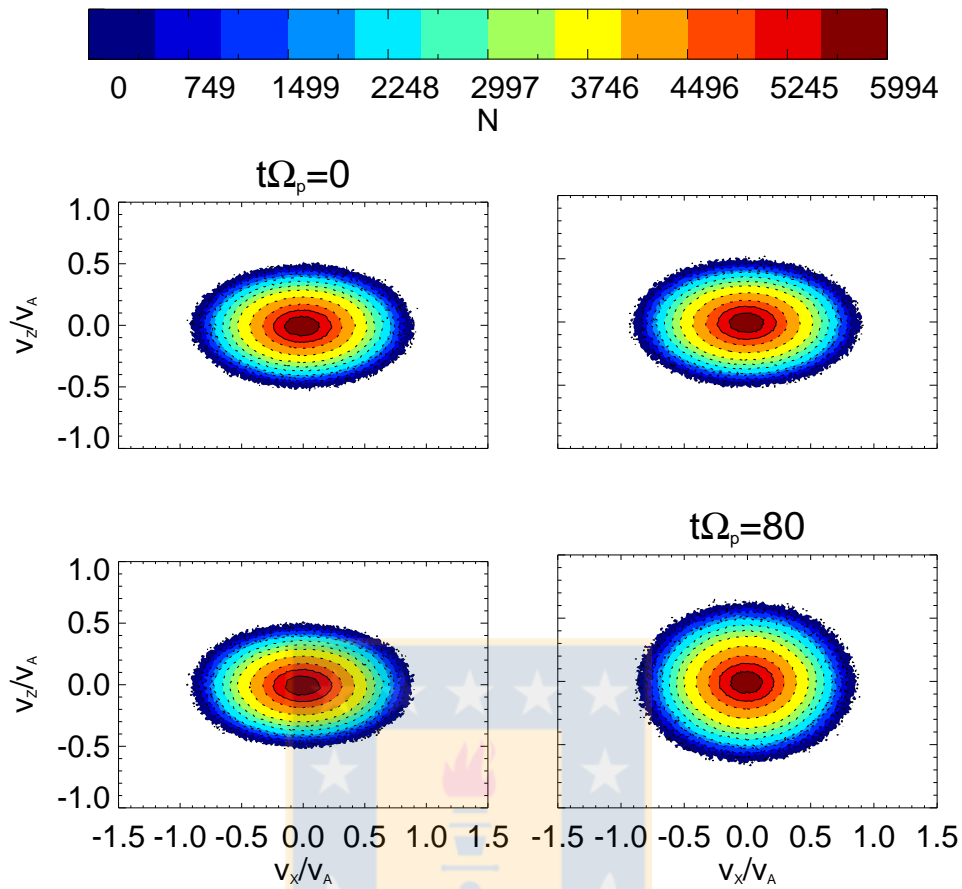


Figura 5.2: **Deformación de la distribución bi-Maxwelliana 2:** Deformación y evolución temporal de la distribución de velocidades bi-Maxwelliana en un régimen inestable, con anisotropía inicial  $R = 3.2$  y beta de plasma  $\beta_{zp0} = 0.45$ . Fuente: Elaboración propia.

Por otro lado, a energías libres más grande, mayores deben ser las tasas de crecimiento de las ondas ión-ciclón y más inestable será el plasma. Esto tiene sentido considerando nuevamente la Figura (2.8), donde los umbrales de estabilidad son en realidad una relación obtenida de la teoría cinética lineal entre la anisotropía y beta del plasma; así entre mayor energía libre, el sistema debe localizarse en estados superiores al umbral de estabilidad de la inestabilidad ión-ciclón. Al final de la simulación, el plasma debe llegar a la estabilidad, como observamos en las Figuras (5.1) y (5.2) para  $t\Omega_p = 80$ , donde el estado final del plasma cae sobre o bajo el umbral de estabilidad, como se muestra en la Figura (5.3), sistemas con energías libres diferentes y por encima del umbral de estabilidad. Se muestra su evolución hasta caer sobre o bajo el umbral.

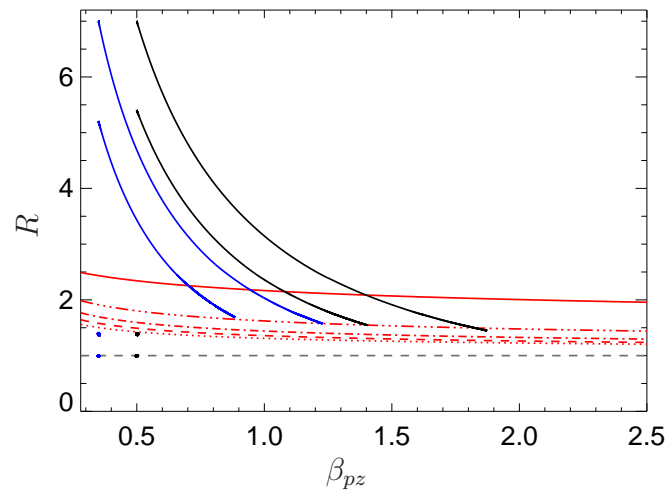


Figura 5.3: **Energía libre de sistemas inestables:** Resultados para 5 diferentes simulaciones comparados en la relación  $R$  vs.  $\beta_{zp}$ . El parámetro de anisotropía es el mismo para todos los casos, mientras que los valores de  $\beta_{zp}$  han ido variando por cada caso. La línea continua corresponde al umbral de estabilidad para  $\gamma_m = 10^{-2}$ , donde  $\gamma_m$  indica el valor máximo de la tasa de crecimiento que se obtiene al resolver la relación de dispersión para la teoría cinética lineal. Fuente: [17].

Ya entendido como funciona la simulación híbrida y entendidas definiciones importantes para comprender sus resultados, realizamos simulaciones para diferentes valores de  $\beta_{zp}$  y  $R$ . Lo que hacemos es dejar  $\beta_{zp}$  inicial fijo entre 0.30-0.55, y variamos  $R$  entre  $R=3.2-7.0$  con diferencias de  $R_i = R_{i-1}+0.2$ , donde  $i$  indica el número de la simulación a realizar. Los resultados son mostrados a continuación.

## 5.1. Resultados de las simulaciones

Una vez iniciada la simulación, toda la energía libre se encuentra contenida excitando las partículas de la distribución en dirección perpendicular respecto a  $\mathbf{B}_0$ , tal como observamos en las Figuras (5.1) y (5.2), donde la deformación de la distribución se ensancha en favor de esta dirección, angostando la distribución de partículas en la dirección paralela. De esto, es fácil deducir que la velocidad térmica de los protones en la dirección perpendicular  $v_{th\perp}$  es mucho mayor que la velocidad térmica de los protones en dirección paralela. Este comportamiento influye directamente en la temperatura medida a lo largo de cada una de las direcciones, donde  $T_{\perp} > T_z$  se cumple para toda la simulación. Esto se aclara en la Figura (5.4), donde se observa que para  $R=1.0$  (curva punteada), 5.0 (curva discontinua) y 7.0 (curva continua), y  $\beta_{zp}=0.50$  inicial fijo para todos los casos, las energías cinéticas perpendiculares (curvas azules) son siempre mayores a las energías cinéticas paralelas (curvas rojas), además, las energías cinéticas perpendiculares presentan puntos de partida diferentes por cada caso, no así los casos paralelos, lo que nos permite inferir que la energía libre se almacena en mayor proporción en las partículas de la distribución en dirección perpendicular. La Figura (5.4) muestra como cambian las energías cinéticas en el tiempo, y que estos perfiles se

cumplen para cualquier valor de parámetros iniciales se escojan. El tiempo de la simulación se deja avanzar hasta  $t\Omega_p = 500$  con  $dt = 0,0153$ , solo con el propósito de mostrar como evolucionan las energías cinéticas para tiempos largos, lo que deja observar que  $K_\perp > K_z$  para toda la simulación, y que solo se logra el equilibrio exacto ( $K_\perp = K_z$ ) para tiempos exageradamente grandes ( $t\Omega_p \rightarrow \infty$ ).

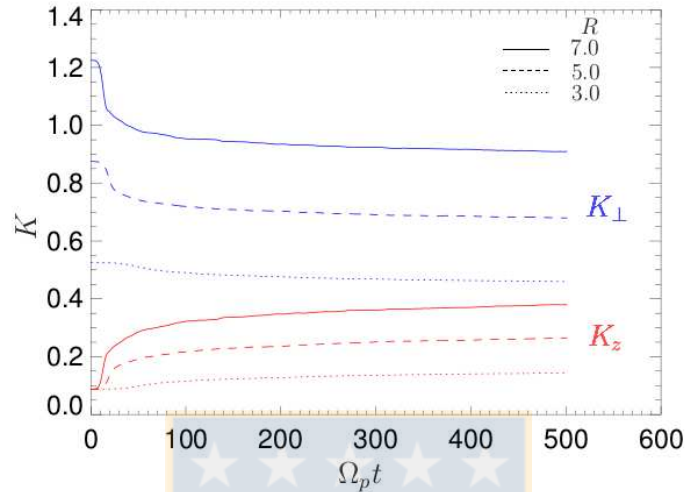


Figura 5.4: **Evolución de las energías cinéticas para distribuciones de partículas:** Evolución temporal de las energías cinéticas paralela y perpendicular para las curvas rojas y azul, respectivamente. Las curvas continuas, discontinuas y punteadas corresponden a Anisotropías iniciales 7.0, 5.0 y 3.0, respectivamente. El valor de  $\beta_{pz}$  se fija en 0.35 para todos los casos. Fuente: Elaboración propia.

Una vez comienza a correr el tiempo, el plasma busca la forma de homogeneizar la distribución hacia una bi-maxwelliana sin perturbar (Figuras (5.1) y (5.2), derecha abajo), por lo que buscará algún mecanismo que permita llegar a ese estado. Usando teoría cinética lineal podemos tener alguna idea de cual es el mecanismo usado [39–41]. Al resolver la relación de dispersión para plasmas bi-maxwellianos (sección 2.1.1, relación (2.36)) pudimos observar que los modos que se excitan fuertemente corresponden a las ramas de ión-ciclotrón, donde ondas electromagnéticas ión-ciclotrón crecen exponencialmente en amplitud, mientras que las ramas magnetosónicas se mantienen en estado estable y los modos de orden superior (MOS 1 y MOS 2) se ven fuertemente amortiguados, por lo que su aporte a la dinámica del modelo usado en esta tesis es despreciable. De esta forma, el mecanismo del que dispone el plasma deriva en excitar ondas de ión polarizadas circularmente izquierda y que presentan vectores de propagación en dirección paralela y anti-paralela respecto a la dirección privilegiada (dado que el código de simulación solo contiene una dirección espacial, esta única dirección se presenta como la dirección privilegiada). La excitación de estas ondas se produce por efectos de transferencia de energía entre la distribución de protones en dirección perpendicular y la onda de ión, de forma que los protones en dirección perpendicular ceden parte de su energía cinética a las ondas, lo que explica los decaimientos exponenciales que se observan en las curvas azules de la Figura (5.4). Las ondas, al absorber esa energía presentan un crecimiento exponencial en sus amplitudes como indica la teoría cinética lineal, y debido

a este crecimiento, los campos electromagnéticos de las ondas comienzan a crecer en intensidad conduciendo al plasma a la inestabilidad de forma que más ondas se ven excitadas y, dependiendo de si los valores de energía libre son muy grandes, ondas en direcciones oblicuas aparecen con amplitudes pequeñas [20], mas como el código solo contempla una única dirección, este efecto no se observa en los resultados de nuestras simulaciones. El aumento de los campos electromagnéticos conllevan al hecho que las energías eléctrica y magnética de las ondas crezcan exponencialmente (Figura (5.5)), donde si bien la energía eléctrica juega un rol en la rica dinámica del plasma, encontramos que  $E_{\perp}/B_{\perp} \ll 1$ , de forma que la energía de la ondas ión-ciclotrón se concentra principalmente en la energía magnética, dada por [42]

$$W_B(t) = \frac{1}{8\pi} \int dz |B(z, t)|^2, \quad (5.1)$$

que corresponde a la energía magnética media. Sucesivo a esto, ondas comienzan a desplazarse por direcciones paralela y anti-paralela donde las distribuciones de protones en esta dirección presentan una velocidad térmica menor (Figuras (5.1) y (5.2)) y por ello una energía cinética bastante más baja comparada a la energía de la distribución de protones en la dirección perpendicular; las ondas comienzan a ceder su energía a los protones, aumentando exponencialmente su energía cinética y por efecto de esto, un aumento en la temperatura medida a lo largo de la dirección paralela,  $T_z$ . Esto se puede observar claramente en las curvas rojas de la Figura (5.4), donde el aumento de la energía cinética paralela es casi proporcional a la disminución de la energía cinética perpendicular. Esa pequeña diferencia se explica en el hecho que las ondas en realidad no cesan completamente su aparición, en otras palabras, aún despues de un tiempo muy largo, las ondas existirán aunque a muy baja amplitud. Esto se observa claramente en la Figura (5.5) que corresponde a la evolución temporal de la energía magnética para los mismos casos simuladosla anteriormente, donde al igual que para la Figura (5.4) el sistema se dejó evolucionar hasta  $t\Omega_p = 500$  sólo con la intención de comprender su comportamiento a escalas de tiempo grandes. Se observa claramente un crecimiento exponencial al comienzo el cual identificaremos como la etapa de excitación, etapa en la cual los protones de la distribución en dirección perpendicular ceden su energía en favor de la ondas hasta que éstas no pueden crecer más, llegando a la etapa de saturación [20], etapa donde la energía magnética se maximiza y el crecimiento exponencial se detiene. Pasada esta etapa, comienza la etapa de relajación, donde el decaimiento de la energía es mucho más lento, claramente no presentando un decaimiento exponencial. Esto puede justificarse en el hecho que hasta la saturación, el sistema es dominado principalmente por procesos lineales, permitiendo el crecimiento exponencial, pero pasada esta etapa, los procesos no-lineales predominan, de manera que el decaimiento y relajación sean mucho más lento. Otra explicación posible radica en que, como la energía libre que el sistema posee para realizar el proceso de estabilidad es finita, no es suficiente para lograr llevar al plasma a la isotropía térmica (por primer principio de la termodinámica), pero al menos es suficiente para que el sistema evolucione por debajo o en torno al umbral de estabilidad, logrando una estabilidad aparente, o estado estacionario.

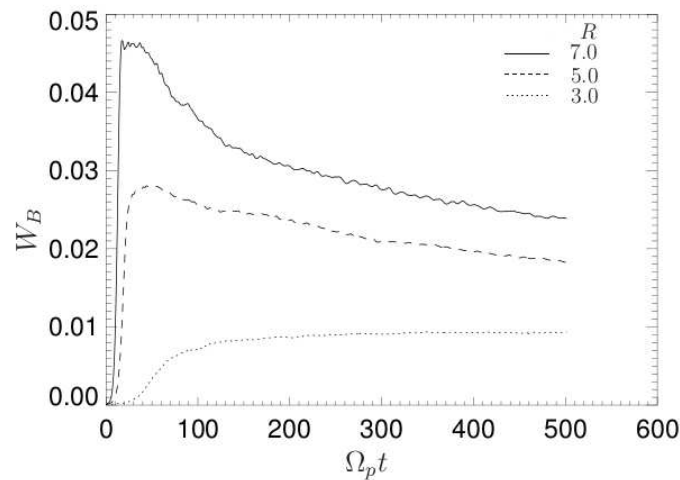


Figura 5.5: **Evolución temporal de la energía magnética:** Evolución temporal de la energía magnética de ondas electromagnéticas ión-ciclotrón en un régimen inestable, para inestabilidad electromagnética ión-ciclotrón, para diferentes valores de anisotropía inicial y beta de plasma inicial fijo para todos los casos. Las curvas continuas, discontinuas y punteadas corresponden a Anisotropías iniciales 7.0, 5.0 y 3.0, respectivamente. El valor de  $\beta_{pz0}$  se fija en 0.35 para todos los casos. Fuente: Elaboración propia.

## 5.2. Energía magnética saturada

En la sección anterior pudimos concluir que la energía disponible que posee un plasma es una relación entre las energías cinéticas de los protones y la energía magnética de las ondas electromagnéticas ión-ciclotrón, de manera que la energía total podemos interpretarla como

$$\begin{aligned} E &= E_p + E_w \\ &= K_{\perp} + K_z + W_B, \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde  $E_p$  es la energía asociada a los protones,  $E_w$  a la onda y  $E$  denota la energía total [43]. Recurrimos nuevamente a las simulaciones, ahora utilizando las condiciones indicadas al comienzo del capítulo, esto es, tiempo máximo correspondiente a  $t\Omega_p = 80$  y  $dt = 0,0025$ . Bajo estas condiciones, la evolución de la energía magnética se presenta como muestra la Figura (5.6). Desde ahora nos enfocaremos en estudiar la saturación de la energía magnética, de ahí el corto tiempo de simulación, pero con un alto número de partículas y así concentrar la densidad en la etapa de excitación y saturación, obviando los procesos no-lineales de la etapa de relajación.

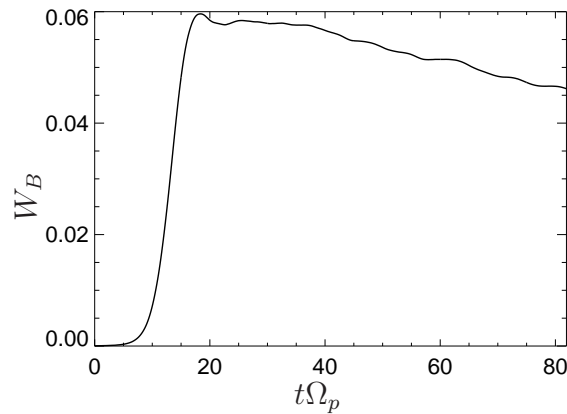


Figura 5.6: **Evolución temporal energía magnética:** Evolución temporal de la energía magnética de ondas electromagnéticas ión-ciclotrón en un régimen inestable, para inestabilidad electromagnética ión-ciclotrón, anisotropía inicial  $R = 7.0$  y beta de plasma inicial  $\beta_{zp} = 0.45$ . Fuente: Elaboración propia.

La Figura (5.7) presenta un gráfico de espectro de potencia  $\omega - k$  de campo magnético para el caso estable ( $R = 1.0$ ), donde nos muestra la intensidad del campo magnético para una onda con frecuencia  $\omega_r$  y número de onda  $k_z$  en algún punto dentro del plano  $\omega_r - k_z$ . Observamos que las mayores intensidades de campo magnético se presentan en las ramas de ión y magnetosónicas, ramas que en la Figura (2.6) se encuentran justo sobre  $\gamma = 0$ . De la misma figura, y de la Figura (5.7) los modos de orden superior no juegan ningún rol en este estudio, por lo que serán dejados de lado desde ahora.

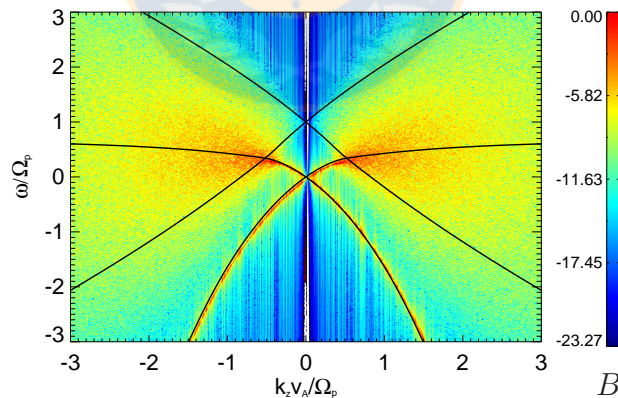


Figura 5.7: **Espectro de potencia  $\omega - k$  de campo magnético caso estable:** Espectro de potencia de las intensidades del campo magnético para una simulación y su comportamiento asociado a la solución de la relación de dispersión para el caso estable,  $R = 1.0$ . Fuente: Elaboración propia.

Si bien un gráfico de espectro de potencia  $\omega - k$  solo es válido para el caso estable, en la Figura (5.8) se presenta un caso inestable. En esta figura podemos notar claramente que las ramas de ión no se sitúan sobre las mayores intensidades de campo magnético, donde se presentan casos con  $R=7.0$  (curva continua), la anisotropía correspondiente al tiempo final de la simulación  $t\Omega_p = 80$  (línea discontinua), y la anisotropía correspondiente al tiempo de saturación (curva café discontinua-punteada). Ninguna de las ramas de ión queda superpuesta sobre los máximos de intensidad de campo magnético, sino más bien lo encierran. Lo único realmente útil que podemos observar en la Figura (5.8) corresponde a que en un caso inestable las ramas magnetosónicas presentan intensidades de campo muy bajas, en correspondencia a lo que observamos en la Figura (2.6) (ramas magnetosónicas se sitúan siempre en  $\gamma = 0$ ). Si bien estas ramas presentan una tasa de crecimiento nula, esto es, se mantienen sobre la estabilidad, ondas con pequeñas amplitudes crecen de todas maneras en estas ramas [28].

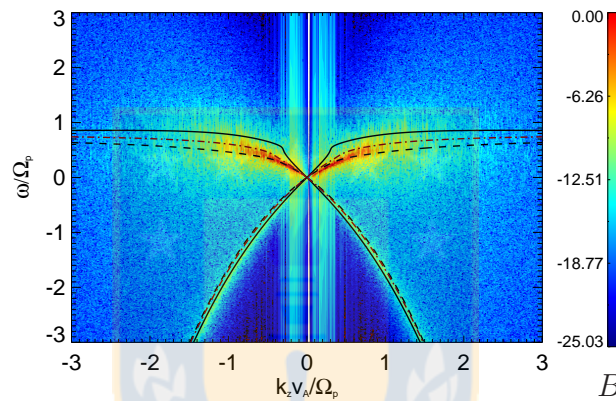


Figura 5.8: **Espectro de potencia  $\omega - k$  de campo magnético caso inestable:** Espectro de potencia de las intensidades del campo magnético para una simulación y su comportamiento asociado a la solución de la relación de dispersión para un caso inestable,  $R = 7.0$ . Fuente: Elaboración propia.

### 5.2.1. Identificando la saturación de la energía magnética

De (5.2) podemos tener una idea de como se comporta la energía total. Dado que las energías cinéticas evolucionan de manera inversa (una crece mientras la otra decrece), la diferencia que falta para que sus tasas de cambio sean iguales la entrega la energía magnética, la cual inicialmente crece para después de alcanzar el estado de saturación, decrecer. Así, para que la energía total del sistema se conserve, la relación que presenta la energía magnética en función de ambas cinéticas se presenta en la Figura (5.9).

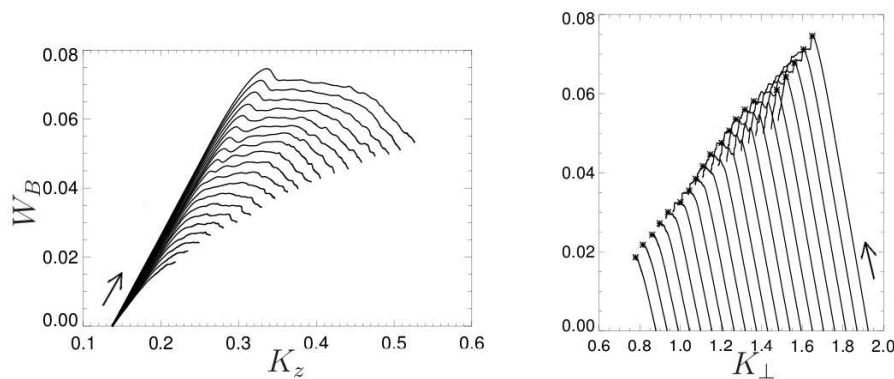


Figura 5.9: **Energía magnética vs. Energías cinéticas:** Transferencia entre la energía magnética y la energía cinética de la distribución de partículas paralela (izquierda) y perpendicular (derecha). Cada curva corresponde a una simulación, con  $\beta_{pz} = 0.55$  fijo y anisotropías iniciales desde 3.0 a 7.0, de izquierda a derecha, respectivamente, con aumento de 0.2 por cada simulación. Las condiciones iniciales se ubican gráficamente sobre  $W_B = 0$ , con el tiempo avanzando de derecha a izquierda para el gráfico de arriba y de izquierda a derecha para el de abajo. Los asteriscos indican la posición donde se encuentra el máximo de la energía magnética, es decir, donde la energía magnética satura. Fuente: Elaboración propia.

Podemos notar que ambas gráficas en la Figura (5.9) presentan una etapa de crecimiento lineal, donde el tiempo avanza de izquierda a derecha para el caso  $W_B$  vs.  $K_z$  (energía magnética media vs. energía cinética paralela, Figura (5.9, izquierda)) y de derecha a izquierda para  $W_B$  vs.  $K_{\perp}$  (Figura ((5.9), derecha)). Se observa claramente que la energía cinética perpendicular decrece en directo favor de la energía magnética y cinética paralela. Cada una de las curvas representa una simulación con parámetros iniciales diferentes, los cuales varían en anisotropía entre  $R=3.2-7.0$ , pero manteniendo el beta de plasma inicial  $\beta_{zp}=0.55$ , fijo. Los asteriscos en la Figura (5.9, derecha) se ubican justo donde la energía magnética se hace máxima, en otras palabras, donde la energía magnética satura.

De esta forma tenemos una referencia para identificar la saturación de la energía magnética para diferentes simulaciones con variados parámetros iniciales. Lo que buscamos ahora es poder encontrar esta saturación en función de los parámetros iniciales  $R$  y  $\beta_{zp}$ . Para ello, recurrimos primero a la teoría cinética lineal. Bortnik *et. al* en su trabajo [20] fue capaz de demostrar que existe una relación entre la saturación de la energía magnética en plasmas protón-electrón y el máximo de la tasa de crecimiento. En base a esto, realizamos un gráfico de anisotropía vs. beta del plasma, ambos en función del tiempo, como muestra la Figura (5.10). Las condiciones iniciales de cada simulación corresponden a la parte izquierda de cada curva, mientras que las curvas negras corresponden a los umbrales de estabilidad para valores de  $\gamma$  entre  $10^{-1}-10^{-5}$ , de arriba hacia abajo, respectivamente. Por otro lado las cruces grises indican donde se ubica la saturación de la energía magnética, los cuales se sitúan en torno al umbral de estabilidad  $\gamma = 10^{-1}$ , para  $\beta_{zp}$  con valor inicial (a) 0.35, (b) 0.40, (c) 0.45 y (d) 0.50. El tiempo avanza de izquierda a derecha.



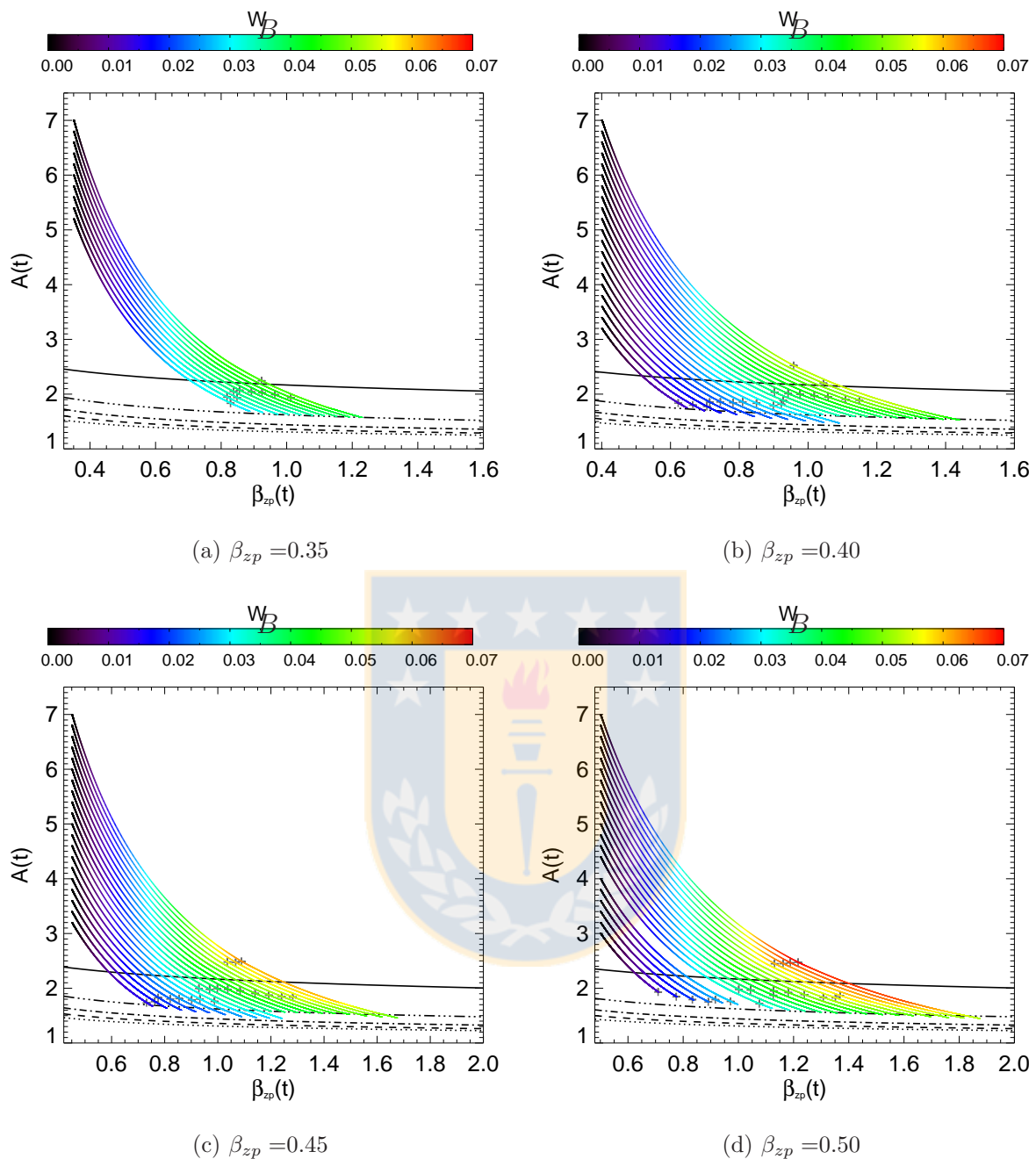


Figura 5.10: **Espectro de potencia de la energía magnética del umbral de estabilidad:** Evolución temporal de la anisotropía térmica en función de la evolución temporal del beta de plasma. Las condiciones iniciales de cada simulación corresponden a la parte izquierda de cada curva, mientras que las curvas negras corresponden a los umbrales de estabilidad para valores de  $\gamma$  entre  $10^{-1}$ - $10^{-5}$ , de arriba hacia abajo, respectivamente. Por otro lado las cruces grises indican donde se ubica la saturación de la energía magnética, los cuales se sitúan en torno al umbral de estabilidad  $\gamma = 10^{-1}$  para  $\beta_{zp}$  con valor inicial (a) 0.35, (b) 0.40, (c) 0.45 y (d) 0.50. El tiempo avanza de izquierda a derecha. Fuente: Elaboración propia.

De lo observado en la Figura (5.10), estudiamos como se comporta la energía magnética saturada en función de la anisotropía térmica y beta del plasma. Nos restringimos solamente al régimen inestable; para esto, restaremos entonces el valor de la anisotropía del umbral de estabilidad para  $\gamma = 10^{-1}$  a cada una de las anisotropías iniciales, respecto al beta del plasma asociado usando la ecuación y valores descritos por Hellinger *et al.* de la forma [15]

$$R^* = 1 + \frac{a}{(\beta_{zp} - \beta_0)^b}. \quad (5.3)$$

La Figura (5.11) muestra claramente un comportamiento lineal de la saturación de la energía magnética en función de la anisotropía inicial, donde cada asterisco corresponde a una simulación. Cada simulación presenta condiciones iniciales donde los asteriscos de color negro, rojo, verde, celeste, dorado y rosa, corresponden a casos con  $\beta_{pz}$  0.55, 0.50, 0.45, 0.40, 0.35 y 0.30 respectivamente. Las anisotropías iniciales varían entre 3.2-7.0 para  $\beta_{zp} = 0.55$ , 0.45 y 0.40, 5.0-7.0 para  $\beta_{zp} = 0.35$ , 0.30 y 3.0-7.0 para  $\beta_{zp} = 0.50$  saltando  $R = 4.2$  simplemente con la intención de ser predicho más adelante, para comprobar nuestros resultados.

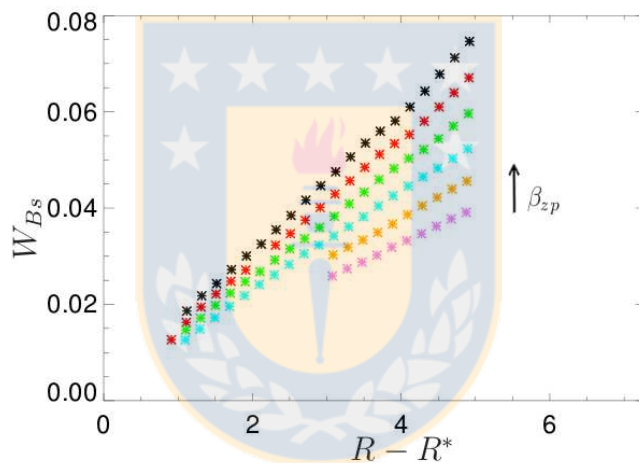


Figura 5.11: **Energía magnética saturada:** Comportamiento lineal de la saturación de la energía magnética en función de la Anisotropía inicial, donde cada asterisco corresponde a una simulación. Cada simulación presenta condiciones iniciales donde los asteriscos de color negro, rojo, verde, celeste, dorado y rosa, corresponden a casos con  $\beta_{pz}$  0.55, 0.50, 0.45, 0.40, 0.35 y 0.30 respectivamente. Las anisotropías iniciales varían entre 3.2-7.0 para  $\beta_{zp} = 0.55$ , 0.45 y 0.40, 5.0-7.0 para  $\beta_{zp} = 0.35$ , 0.30 y 3.0-7.0 para  $\beta_{zp} = 0.50$  saltando  $R = 4.2$ . Fuente: Elaboración propia.

Podemos suponer que la relación lineal entre la saturación y la anisotropía inicial muestra un comportamiento suficiente como para satisfacer leyes de escala. Para corroborar esta idea y convencernos que es así, analizamos la pendiente de cada una de las posibles rectas que se observan para cada  $\beta_{zp}$  inicial asociado. La Figura (5.12) nos muestra que la relación entre las pendientes de las curvas de la Figura (5.11) y  $\beta_{zp}$  también presentan un carácter marcadamente lineal, aclarando nuestra suposición ya que se infiere directamente que una ley de escala se hace presente en la la energía magnética saturada, saturaciones que presentan

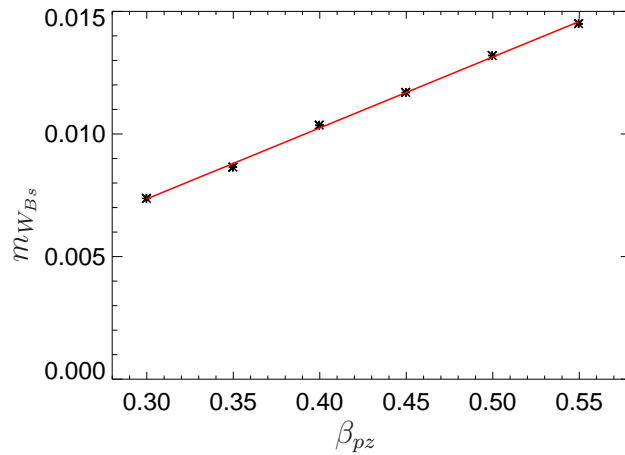


Figura 5.12: **Pendiente energía magnética saturada:** Comportamiento lineal de la pendiente comprendido por la saturación de la energía magnética en función de la Anisotropía inicial, respecto a  $\beta_{pz}$ . Fuente: Elaboración propia.

dependencia de los parámetros anisotropía térmica  $R$  y beta de plasma  $\beta_{zp}$  iniciales.

De lo anterior, somos capaces de realizar un ajuste lineal de las saturaciones de la energía magnética, ajuste que cumpla con las condiciones de presentar una dependencia directa respecto a los parámetros iniciales, y presentar al mismo tiempo una ley de escala. Podemos entonces representar el comportamiento de cada conjunto de simulaciones dependientes de un mismo  $\beta_{zp}$  inicial fijo, como una relación lineal de la forma

$$W_{B_s}(R) = W_B^* + m_{W_{B_s}}(R - R^*), \quad (5.4)$$

con  $W_B^*$  el valor de la energía magnética sobre el umbral de estabilidad  $R^*$ . Así, considerando el hecho que las pendientes de cada conjunto de simulaciones  $m_{W_{B_s}}$  se presentan como una recta en la Figura (5.12), tenemos que la pendiente en (5.4) se reescribe en función del parámetro  $\beta_{zp}$  como

$$m_{W_{B_s}}(\beta_{zp}) = c\beta_{zp} + d, \quad (5.5)$$

donde las constante  $c = -0.00132328$  y  $d = 0.0289289$  presentan valores independientes de los parámetros iniciales, esto es, el ajuste lineal debe incluir si o si estos valores, ya que son estas constantes las que presentan la verdadera forma de la ley de escala en el comportamiento de la energía magnética saturada. Finalmente, el ajuste lineal que encontramos presenta la forma

$$W_{B_s}(R, \beta_{zp}) = W_B^* + (-0,00132328\beta_{zp} + 0,0289289)(R - R^*), \quad (5.6)$$

ajuste que corresponde a las líneas de colores en la Figura (5.13).

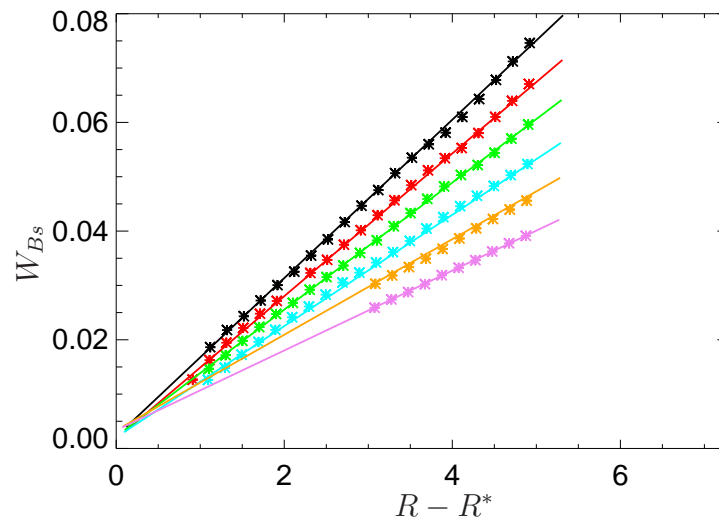


Figura 5.13: **Ajuste de la energía magnética saturada:** Comportamiento lineal de la saturación de la energía magnética en función de la Anisotropía inicial. Una ley de escala se hace presente en la relación de las saturaciones en función la anisotropía inicial  $R$  y beta de plasma  $\beta_{zp}$ . Fuente: Elaboración propia.

El hecho de encontrar una ley de escala para la saturación de la energía magnética en función de los parámetros iniciales indica que dentro de todo el proceso de inestabilidad y perturbaciones, el sistema presenta un orden, de forma que el sistema que se quiera estudiar, independiente de las condiciones que se puedan dar, tal como plasmas en laboratorio o espaciales, la energía magnética saturada de ondas electromagnéticas ión-ciclotrón en plasmas protón-electrón puede ser conocida con solo saber los valores de anisotropía térmica y beta del plasma iniciales.

Por otro lado, hacemos un comparativo con el método realizado por Bortnik *et al.* en [20], método que como describimos anteriormente, utiliza soluciones de la relación de dispersión para llegar al mismo cometido que realizamos nosotros de encontrar los valores de saturación de la energía magnética, donde Bortnik utiliza el máximo de la tasa de crecimiento, en comparación a nuestro trabajo donde teoría cinética lineal solo fue usada para obtener los valores del umbral de estabilidad. Un trabajo nosotros utilizando los mismos fundamentos que lo hecho en [20] fue realizado, donde lo que encontramos fue una ecuación de la forma

$$W_{B_s} = 12 \left( \gamma_g + 0,002 \sqrt{(\gamma_g)} \right)^2 + 20(\gamma_g)^3, \quad (5.7)$$

donde  $\gamma_g = \gamma_m/v_g$  es la razón entre el valor máximo de la tasa de crecimiento máxima  $\gamma_m$  y la velocidad de grupo  $v_g = d\omega/dk$ .

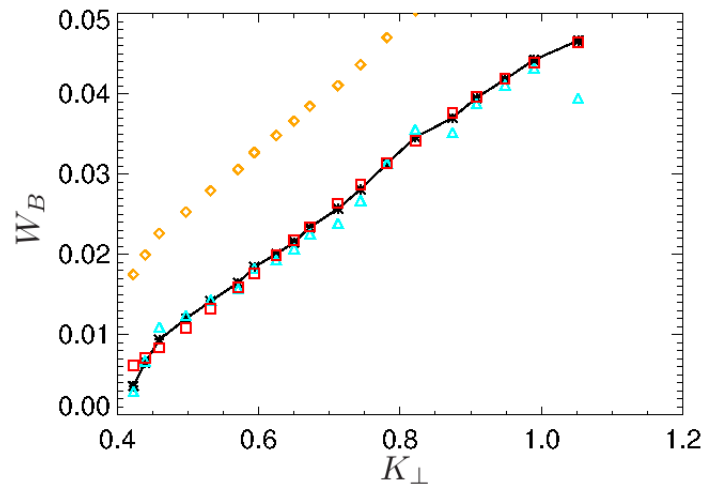


Figura 5.14: **Métodos de Bortnik y Davidson:** Comparativo entre los resultados obtenidos usando nuestro método basado en el trabajo de Bortnik (triángulos celestes) y los bordes termodinámicos que predice el trabajo de Davidson (cuadrados rojos y rombos naranjos) considerando para este caso valores arbitrarios que dependen de datos de la simulación misma. Estos dos métodos los comparamos respecto a valores de saturación obtenidos para un conjunto de simulaciones, identificados por los asteriscos negros. Fuente: Elaboración propia.

La relación (5.7) es bastante más complicada que la encontrada en (5.6), dado que presenta un polinomio de grado 3, mucho más difícil de resolver que una relación lineal como la que logramos encontrar realizando este estudio. Por otro lado, también realizamos otro análisis similar guiándonos por el trabajo de Davidson y Tsai en [21], el cual si bien no trata específicamente de encontrar los valores de la energía magnética saturada, si entrega información de los rangos o bordes entre los cuales la energía electromagnética variará. La Figura (5.14) muestra un comparativo entre los resultados obtenidos usando nuestro método basado en el trabajo de Bortnik (triángulos celestes) y los bordes termodinámicos que predice el trabajo de Davidson (cuadrados rojos y rombos naranjos) considerando para este caso valores arbitrarios que finalmente dependen de datos de la simulación misma. Estos dos métodos los comparamos respecto a valores de saturación obtenidos para un conjunto de simulaciones, identificados por los asteriscos negros.

### 5.3. Evoluciones temporales

Hasta ahora hemos trabajado prácticamente en estados estacionarios, salvo para justificar el uso de los valores de la energía magnética y anisotropía respecto al umbral de estabilidad para  $\gamma = 10^{-1}$ , esto en el hecho que el valor de la energía magnética saturada se sitúa en un punto en específico de la evolución de esta energía. Sin embargo, la energía magnética presenta cambios en el tiempo, tal como observamos en la Figura (5.6), de aquí el interés de encontrar una relación que prediga el tiempo que requiere el sistema en evolucionar hasta el estado de saturación de la energía magnética.

Recurrimos nuevamente a simulaciones con  $\Omega_p t = 600$  solo con la necesidad de conocer como evolucionan las energías involucradas. Las Figuras (5.15), (5.16) y (5.17) presentan la evolución temporal de las energías involucradas para valores de parámetros iniciales  $\beta_{zp} = 0.35$  y  $R = 3.0, 5.0$  y  $7.0$  respectivamente. Las rectas rojas en cada gráfica indican el tiempo correspondiente a la energía magnética saturada. De estas figuras, podemos observar que, tal como podíamos esperar de la Figura (5.9), las energías cinéticas presentan evoluciones inversas, esto es, la energía cinética perpendicular disminuye asintóticamente en el tiempo, mientras que la paralela aumenta de la misma manera, esto para llevar al plasma hasta el equilibrio térmico. Así mismo, podemos observar que el tiempo que requiere el sistema para saturar depende directamente de la energía libre que posee el sistema, donde a mayor valor de anisotropía inicial menor será el tiempo que demora la energía magnética en maximizarse, por lo que esto nos da un indicativo de que el tiempo de saturación se encuentra relacionado con los parámetros iniciales.

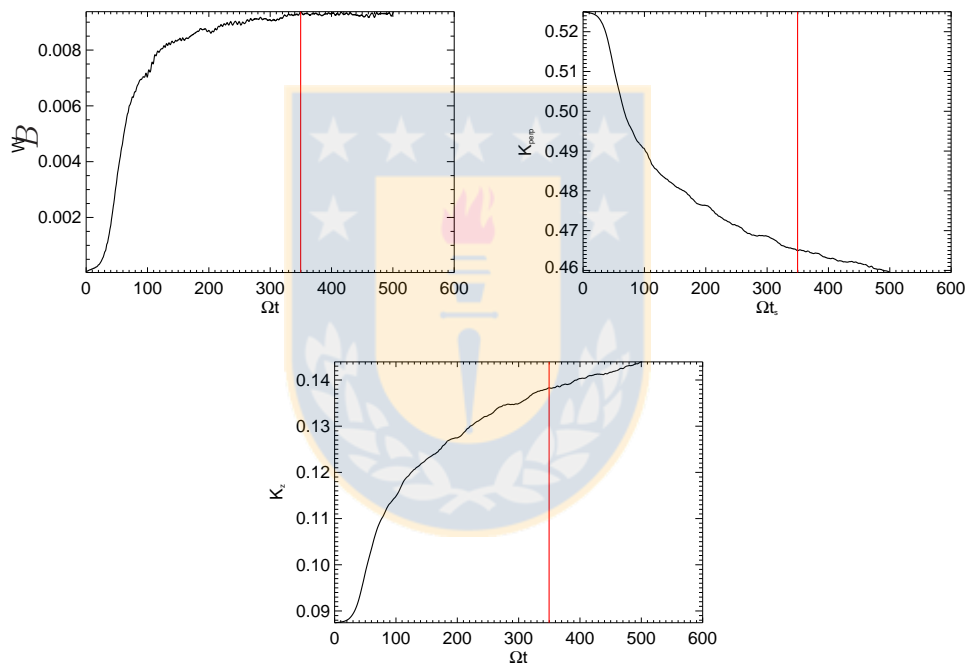


Figura 5.15: **Evolución temporal de las energías 1:** Evolución temporal de las energías involucradas para valores de parámetros iniciales  $R = 3.0$  y  $\beta_{zp} = 0.35$ . Las rectas rojas indican el tiempo correspondiente a la energía magnética saturada. Fuente: Elaboración propia.

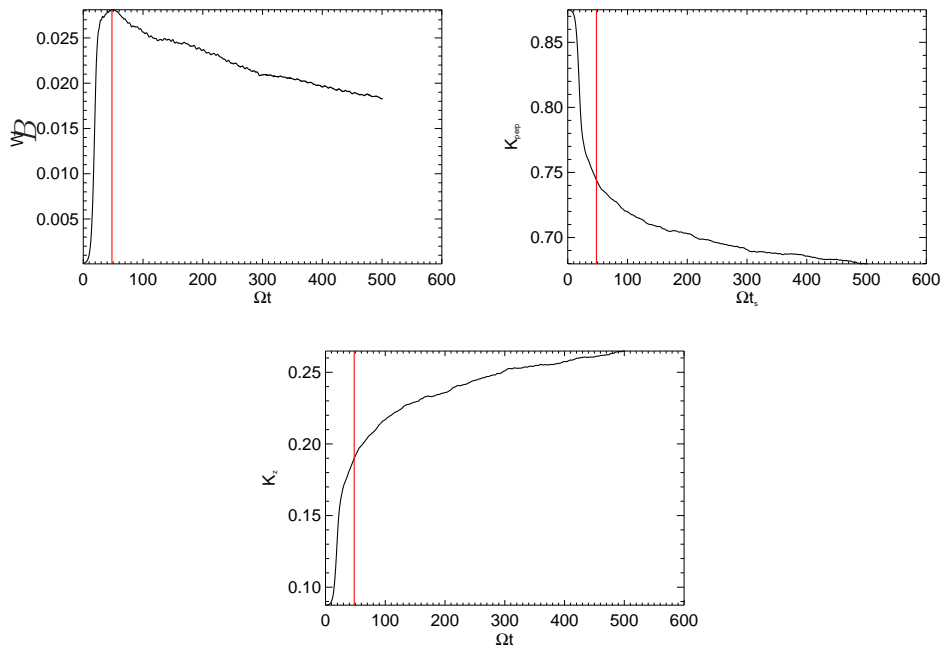


Figura 5.16: **Evolución temporal de las energías 2:** Evolución temporal de las energías involucradas para valores de parámetros iniciales  $R=5.0$  y  $\beta_{zp}=0.35$ . Las rectas rojas indican el tiempo correspondiente a la energía magnética saturada. Fuente: Elaboración propia.

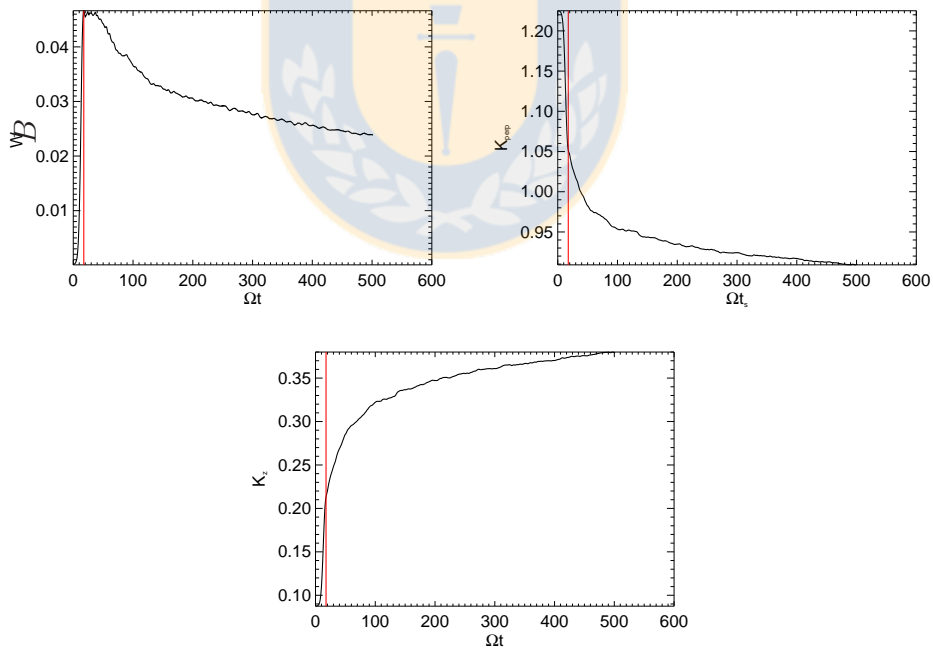


Figura 5.17: **Evolución temporal de las energías 3:** Evolución temporal de las energías involucradas para valores de parámetros iniciales  $R=7.0$  y  $\beta_{zp}=0.35$ . Las rectas rojas indican el tiempo correspondiente a la energía magnética saturada. Fuente: Elaboración propia.

Al realizar la derivada temporal de la energía cinética total, de las Figuras (5.18) y (5.19) observamos que entre  $\Omega_p t = 0$  y el próximo tiempo donde la energía cinética total vuelve a cero la evolución es representada por una gaussiana, mientras que el resto de la evolución la representamos por un polinomio de grado dos. Así, la evolución de la derivada temporal de la energía cinética total de los protones la ajustamos por una ecuación de la forma

$$\frac{dK}{d\tau} = A_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau - A_1}{A_2}\right)^2\right) + A_3 + A_4\tau + A_5\tau^2, \quad (5.8)$$

donde  $\tau = \Omega_p t$ ,  $A_0$  corresponde a la amplitud,  $A_1$  al centro y  $A_2$  al ancho de la gaussiana. En las Figuras (5.18) y (5.19) las curvas negras son los datos obtenidos tras las simulaciones numéricas, mientras que las curvas rojas discontinuas muestran el ajuste escogido.

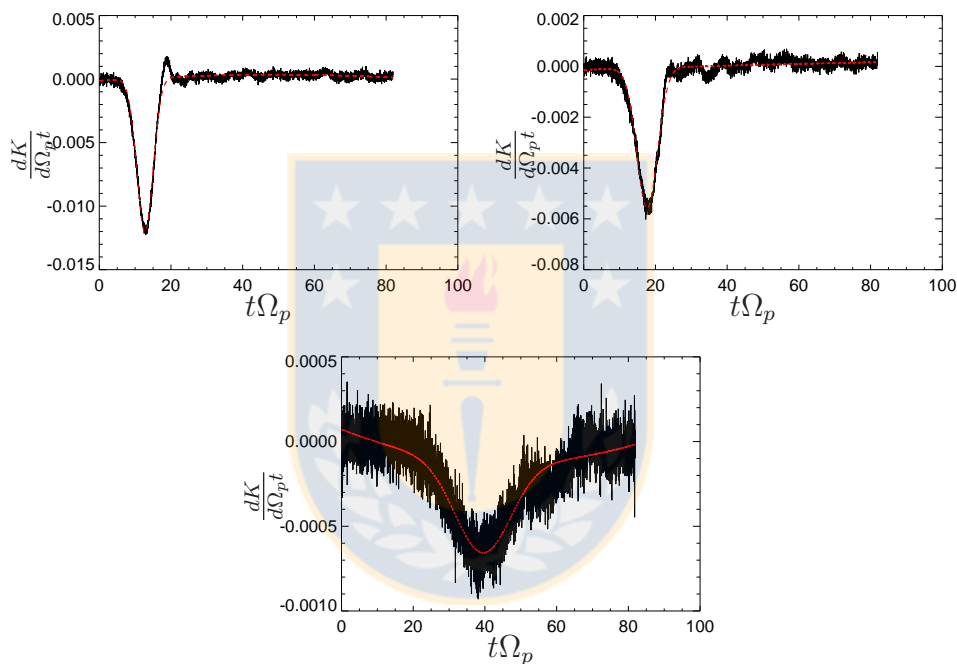


Figura 5.18: **Derivada temporal de la energía cinética total 1:** Cambio temporal de la energía cinética total para  $\beta_{zp} = 0.50$  y (arriba)  $R = 7.0$  (medio)  $R = 5.2$  y (abajo)  $R = 3.2$ . Las curvas rojas representan el ajuste gaussiano sumado a un arreglo polinomial. Fuente: Elaboración propia.



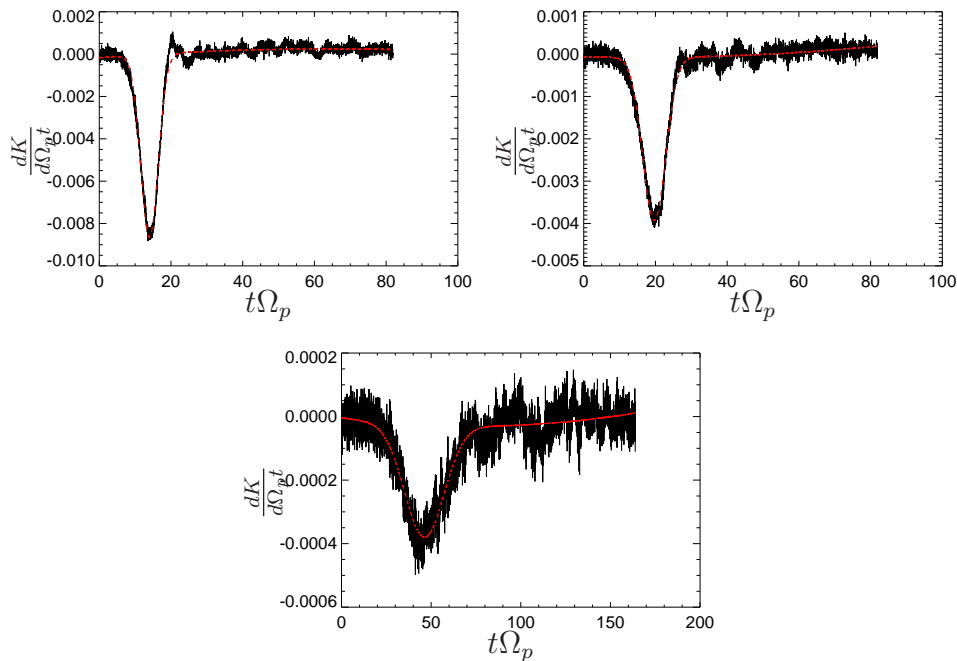


Figura 5.19: **Derivada temporal de la energía cinética total 2:** Cambio temporal de la energía cinética total para  $\beta_{zp} = 0.40$  y (arriba)  $R = 7.0$  (medio)  $R = 5.2$  y (abajo)  $R = 3.2$ . Las curvas rojas representan el ajuste gaussiano sumado a un arreglo polinomial. Fuente: Elaboración propia.

Realizamos ahora una integración de la ecuación (5.9) respecto al tiempo

$$\int_0^{\tau_f} dK = \int_0^{\tau_f} \left[ A_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau - A_1}{A_2}\right)^2\right) + A_3 + A_4\tau + A_5\tau^2 \right] d\tau, \quad (5.9)$$

y lo que obtenemos es una ecuación de la forma

$$K(\tau) = K(0) - A_0 A_2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{A_1 - \tau}{\sqrt{2}A_2}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{A_1}{\sqrt{2}A_2}\right) \right] + A_3\tau + \frac{1}{2}A_4\tau^2 + \frac{1}{3}A_5\tau^3, \quad (5.10)$$

Lo que hacemos es reescribir los términos  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  en función de los parámetros macroscópicos iniciales, de la misma forma que lo realizado para encontrar la energía magnética saturada en la sección pasada. Así, lo que encontramos entonces es

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \left[ 0,00468047\beta^2 - 0,00506403\beta + 0,00102232 \right] (R - R^*)^2 \\
 &+ \left[ -0,0381927\beta^2 + 0,0312405\beta - 0,00711628 \right] (R - R^*) \\
 &+ \left[ 0,0629556\beta^2 - 0,0552089\beta + 0,0129512 \right], \\
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \left[ 4,13643 - 20,3342\beta + 20,7892\beta^2 \right] (R - R^*)^3 \\
 &+ \left[ -40,9595 + 207,770\beta - 212,844\beta^2 \right] (R - R^*)^2 \\
 &+ \left[ 120,166 - 661,867\beta + 683,478\beta^2 \right] (R - R^*) \\
 &+ \left[ -63,4074 + 590,593\beta - 637,441\beta^2 \right], \\
 A_2 &= \left[ -108,943\beta + 71,1003 \right] \exp \{ (1,93348\beta - 1,85179)(R - R^*) \} \\
 &+ \left[ -2,14896\beta + 3,12791 \right], \\
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

que corresponden a los términos que acompañan a la función error, y

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \left[ -0,00140501 + 0,00979363\beta - 0,0219505\beta^2 + 0,0161118\beta^3 \right] (R - R^*)^3 \\
 &+ \left[ 0,0169540 - 0,119009\beta + 0,268818\beta^2 - 0,198240\beta^3 \right] (R - R^*)^2 \\
 &+ \left[ -0,0659507 + 0,465193\beta - 1,05790\beta^2 + 0,783693\beta^3 \right] (R - R^*) \\
 &+ \left[ 0,0827172 - 0,584824\beta + 1,33626\beta^2 - 0,994002\beta^3 \right], \\
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}
 A_4 &= \left[ 0,000128493 - 0,000951680\beta + 0,00229252\beta^2 - 0,00179349\beta^3 \right] (R - R^*)^2 \\
 &+ \left[ -0,00105926 + 0,00784573\beta - 0,0187939\beta^2 + 0,0146502\beta^3 \right] (R - R^*) \\
 &+ \left[ 0,00209162 - 0,0155508\beta + 0,0371644\beta^2 - 0,0288638\beta^3 \right], \\
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
 A_5 &= \left[ -1,41400e - 06 + 1,04850e - 05\beta - 2,52900e - 05\beta^2 + 1,97264e - 05\beta^3 \right] (R - R^*)^2 \\
 &+ \left[ 1,18675e - 05 - 8,77960e - 05\beta + 0,000210366\beta^2 - 0,000163574\beta^3 \right] (R - R^*) \\
 &+ \left[ -2,40196e - 05 + 0,000178072\beta - 0,000425102\beta^2 + 0,000329462\beta^3 \right], \\
 \end{aligned}$$

que corresponden a los términos del polinomio.

Las relaciones (5.11)-(5.15) en conjunto, correspondientes a los términos de la ecuación (5.10), representan la evolución temporal de la energía cinética total para diferentes conjuntos de  $R$  y  $\beta_{zp}$ , con rangos de validez para  $\beta_{zp} = 0.30$  y  $0.35$  con  $R=5.2 - 7.0$  y  $\beta_{zp} = 0.40 - 0.55$  con  $R=3.2 - 7.0$ . La Figura (5.20) muestra los ajustes realizados con la ecuación (5.10) utilizando las relaciones (5.11)-(5.15). Las curvas negras muestran los datos obtenidos de las simulaciones, mientras que las curvas discontinuas púrpuras representan el ajuste obtenido. Los parámetros iniciales que utilizamos para estos casos son  $R=7.0$  para todos los casos y (izquierda)  $\beta_{zp} = 0.55$  (derecha)  $\beta_{zp} = 0.45$  y (abajo)  $\beta_{zp} = 0.35$ .

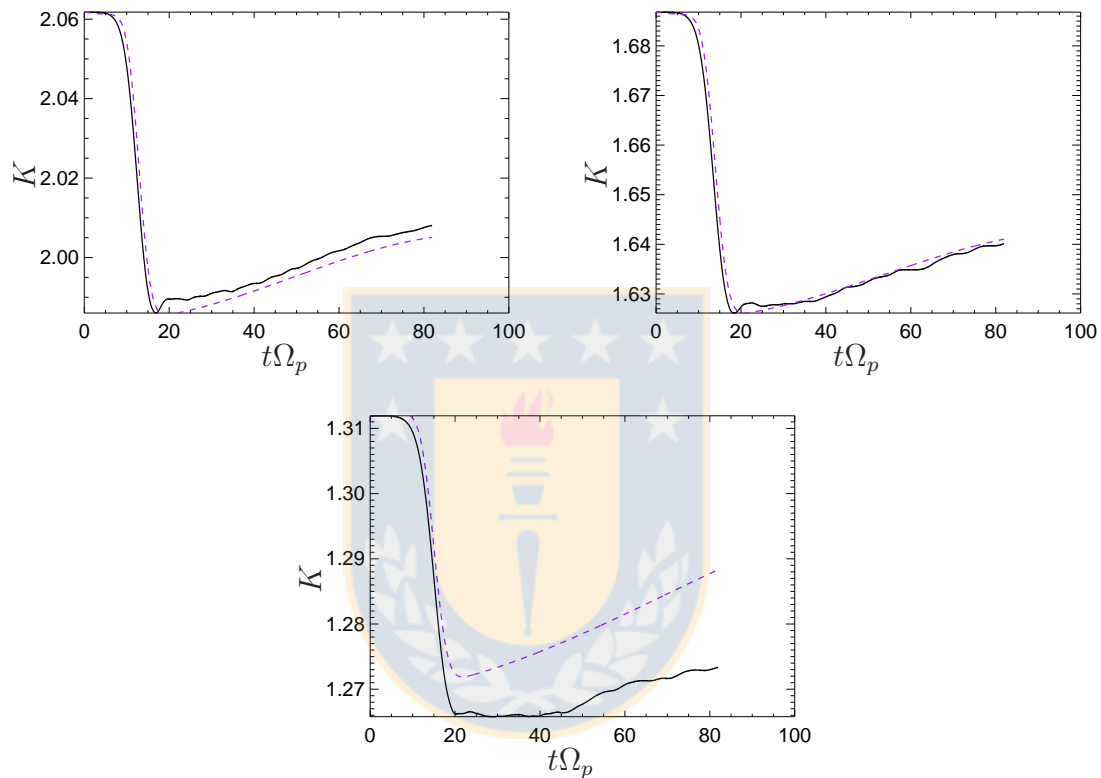


Figura 5.20: **Ajuste evolución energía cinética total:** Ajustes realizados con la ecuación (5.10) utilizando las relaciones (5.11)-(5.15). Las curvas negras muestran los datos obtenidos de las simulaciones, mientras que las curvas discontinuas púrpuras representan el ajuste obtenido. Los parámetros iniciales están dados para  $R=7.0$  y (izquierda)  $\beta_{zp} = 0.55$  (derecha)  $\beta_{zp} = 0.45$  y (abajo)  $\beta_{zp} = 0.35$ . Fuente: Elaboración propia.

Ya tenemos una expresión que nos permite representar la evolución de la energía cinética total de los protones, de manera que ahora es imperioso buscar la forma de poder representar la evolución temporal de la energía magnética; para realizar esto, utilizamos las constantes del movimiento (3.37) y (3.38), donde encontramos que para  $\Omega_p t = 0$ ,  $C_{\perp} = K_{\perp}(0)$  y  $C_z = K_z(0)$ , esto debido a que en  $\Omega_p t = 0$  la energía magnética inicial es despreciable, por lo que los otros términos en (3.37) y (3.38) que dependen de  $W_B(t)$  los despreciamos, dando entonces que las constantes del movimiento tienen por valor los correspondientes valores iniciales de las energías cinéticas de los protones. Lo último presenta concordancia con lo que mostramos en la primera sección de este capítulo, donde inferimos que la energía libre que posee el sistema

inicialmente se almacena en las partículas. Si sumamos ambas constantes

$$\begin{aligned} C_{\perp} + C_z &= K_{\perp}(0) + K_z(0) = K_{\perp}(\tau) + K_z(\tau) + W_b(\tau) \\ &= K(\tau) + W_B(\tau) \end{aligned} \quad (5.15)$$

encontramos que la energía magnética queda expresada por

$$\begin{aligned} W_B(t) &= C_{\perp} + C_z - K(\tau) \\ &= A_0 A_2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{A_1 - \tau}{\sqrt{2} A_2} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{A_1}{\sqrt{2} A_2} \right) \right] + A_3 \tau + \frac{1}{2} A_4 \tau^2 + \frac{1}{3} A_5 \tau^3 \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde la representación de la ecuación (5.16) la observamos en la Figura (5.21) para los mismos casos utilizados para la energía cinética total.

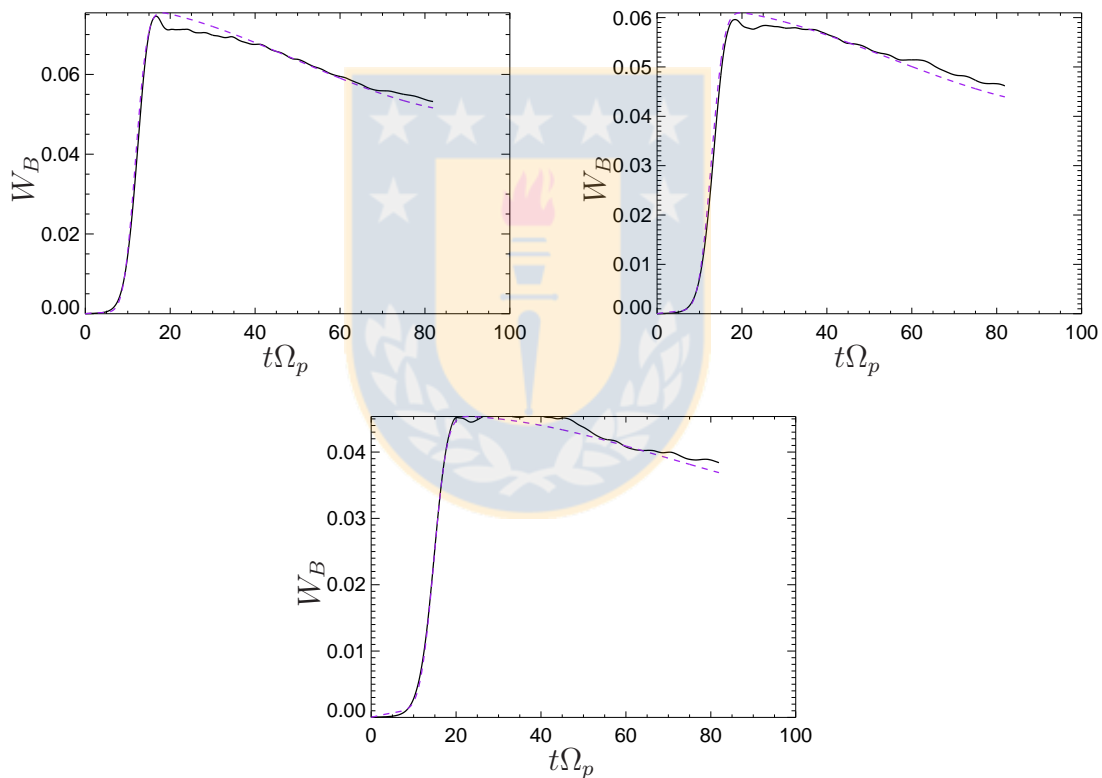


Figura 5.21: **Ajuste de la evolución de la energía magnética:** Ajustes realizados con la ecuación (5.16). Las curvas negras muestran los datos obtenidos de las simulaciones, mientras que las curvas discontinuas púrpuras representan el ajuste obtenido. Los parámetros iniciales están dados para  $R=7.0$  y (izquierda)  $\beta_{zp} = 0.55$  (derecha)  $\beta_{zp} = 0.45$  y (abajo)  $\beta_{zp} = 0.35$ . Fuente: Elaboración propia.

Ya hemos encontrado expresiones que nos permiten representar el comportamiento de las evoluciones temporales de las energías cinética total de los protones y magnética de las ondas ión-ciclotrón. Ahora debemos encontrar una expresión que nos permita predecir los tiempos

$\beta_{zp}$	0.35	0.45	0.55
$\tau_s$ simulaciones	27.7868	18.3445	16.7041
$\tau_s \text{ erf}(x)$	21.792662	20.812681	18.823677

Cuadro 5.1: **Tiempos de saturación simulaciones vs. método función error:** Cuadro de comparación entre los tiempos de saturación obtenidos por medio de simulaciones ( $\tau_s$  simulaciones) y el tiempo de saturación obtenido utilizando la expresión obtenida ( $\tau_s \text{ erf}(x)$ ) con  $R = 7.0$ . Fuente: Elaboración propia.

en que la energía magnética saturará, tal como lo hicimos con las expresiones anteriores, esto es, el tiempo en función de  $R$  y  $\beta_{zp}$ . Para esto, tomamos nuevamente la ecuación (5.9) e igualamos a cero, de manera que por criterio de puntos críticos [25], si la energía magnética saturada es el máximo de  $W_B$ , ese mismo tiempo corresponde al mínimo de  $K$ . Así,

$$\frac{dK}{d\tau} = A_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau - A_1}{A_2}\right)^2\right) + A_3 + A_4\tau + A_5\tau^2 = 0 \quad (5.17)$$

despejamos el tiempo de saturación correspondiente, donde hacemos  $\tau_s = \Omega_p t_s$ , de manera que obtenemos

$$\tau_s = \left[ 2A_1\tau_s - A_1^2 + 2A_2^2 \ln\left(\frac{|A_0|}{A_5\tau_s^2 + A_4\tau_s + A_3}\right) \right]^{1/2} \quad (5.18)$$

ecuación que nos permite predecir el tiempo que tarde el sistema en llegar a la etapa de saturación. La ecuación (5.18) es una ecuación trascendental, la que sólo podemos resolver por medio de métodos numéricos, en nuestro caso, utilizando el método de Müller para la iteración.

El Cuadro (5.1) muestra la diferencia que existe entre los tiempos de saturación encontrados bajo simulaciones y utilizando la relación (5.18). La diferencia existente entre ambos pares de datos se debe a que en nuestro método, encontramos el tiempo correspondiente al primer máximo, siendo que en las simulaciones se observa que en casos con menor energía libre después del primer máximo hay una energía remanente que no es posible de representar utilizando el arreglo polinomial. Por lo tanto, nuestro método corresponde a una representación aproximada de la evolución temporal de las energías presentes en la dinámica de excitación y relajación para sistemas que se encuentren dentro del rango de validez dicho anteriormente.

# Capítulo 6

## Conclusiones y Discusión

En el Capítulo 2 se derivó la relación de dispersión cinética para ondas electromagnéticas en plasmas que se propagan a lo largo de un campo magnético de fondo usando funciones de distribución de velocidades ‘arbitrarias’, dada por la ecuación (2.34). Tras linealizar las ecuaciones de Vlasov-Maxwell se encontró una expresión generalizada para la relación de dispersión. Las soluciones que entrega esta relación para una distribución particular se pueden hallar en la literatura [3, 5, 7, 9, 10, 22, 24, 44, 45]. En la sección (2.1.1) se consideró una función de distribución de velocidades bi-maxwelliana, encontrando las tasas de crecimiento para ondas electromagnéticas ión-ciclotrón, tasas exponenciales que indican si las ondas se excitan o se amortiguan. Por otro lado, se sentaron las bases de este trabajo identificando en detalle la inestabilidad utilizada a lo largo de esta tesis. En particular, se verificó que el único modo que se excita en todos los casos corresponde a la rama ión-ciclotrón [27, 35], mientras que los modos de orden superior (MOS 1 y MOS 2) están todos amortiguados [23, 28].

Debido al hecho que la teoría cinética lineal sólo entrega información de si el plasma es estable o inestable, y asociado a esto, el tipo de inestabilidades, en el Capítulo 3 se encontraron constantes del movimiento que permitieron constatar que el crecimiento de las amplitudes de las ondas está acotado, y en consecuencia, el crecimiento de la energía electromagnética limitado por la energía libre almacenada en la anisotropía térmica de la distribución de protones.

Dado que la evolución temporal de un plasma inestable es en general no-lineal, se procedió al uso de simulaciones numéricas para estudiar la evolución de las cantidades físicas de interés. Estas simulaciones fueron realizadas con un código híbrido, el que se describió en el Capítulo 4. Este código es similar al que se presenta en la literatura [34-38, 46], pero con modificaciones como las usadas por Araneda en varios de sus trabajos [28, 47]. Se describieron además las funciones de forma que representan las superpartículas en la grilla, indicando la relación con el cálculo de los campos electromagnéticos [36] y cómo se determinan numéricamente la velocidad y posición de las partículas (protones) en cada iteración.

En el Capítulo 5 se describieron gráficamente los resultados de las simulaciones. Se corroboraron las bases del modelo físico planteado en el Capítulo 2, como la inestabilidad y las perturbaciones asociadas a ésta. Se definió el concepto de energía libre para distribuciones bi-maxwellianas, donde se comprobó la relación que existe con la anisotropía térmica de las distribuciones, tras observar cómo se deforman estas distribuciones de velocidades debido a

efectos anisotrópicos. Se explicó el mecanismo que utilizó el plasma para llegar a un estado estable por transferencia entre las energías cinética de los protones y la energía magnética de las ondas ión-ciclotrón, proceso que fue representado en la Figura (5.9). Se observó también que la energía magnética de las ondas presenta tres etapas distinguibles (excitación, saturación y relajación) identificando la saturación que representa el valor máximo que alcanza la energía magnética [20]. Se restringió el análisis a regiones inestables, al considerar sistemas que se encuentran por encima del umbral de estabilidad, hallado mediante el uso de la teoría cinética lineal, utilizando como referencia la ecuación (5.3), señalada por Hellinger [15].

Se obtuvieron resultados satisfactorios respecto a los objetivos de esta tesis. Se encontró una relación lineal entre la energía magnética saturada y los parámetros macroscópicos iniciales  $R$  y  $\beta_{zp}$ , expresión que posee un rango de validez para  $R$  entre 3.0-7.0 y para  $\beta_{zp}$  entre 0.30-0.55. Esta relación lineal satisface leyes de escalas como muestra la ecuación (5.6); al mismo tiempo se encontró que a mayor energía libre, el valor de la energía magnética de saturación es más grande, dentro del rango de validez de la ecuación. La expresión (5.6) es bastante más sencilla que la relación (5.7), relación que se obtuvo de manera análoga a los trabajos de Bortnik *et al.* [20] y Davidson y Tsai [21]. Por otro lado, el trabajo de Davidson y Tsai [21] se enfoca en encontrar cotas a la energía electromagnética. El problema que presenta este último método, tal como lo informan en [21], es que los resultados pueden variar hasta en un orden de magnitud; además, el trabajo de Davidson requiere información de simulaciones numéricas, lo que va justamente en contra del propósito de este trabajo, ya que la meta era lograr predecir la energía magnética saturada para valores de los parámetros macroscópicos iniciales ( $R$  y  $\beta_{zp}$ ) sin la necesidad de recurrir a las simulaciones para ello.

Por otro lado, utilizando las constantes del movimiento obtenidas en el Capítulo 3, se encontraron expresiones que entregan una descripción aproximada de la evolución temporal de las energías cinética total de los protones y magnética de las ondas ión-ciclotrón. Estas expresiones dependen, al igual que la encontrada para la energía magnética saturada (véase ecuación (5.6)), de los parámetros macroscópicos iniciales. Finalmente, se encontró una expresión que permite predecir el tiempo que le toma a un plasma con parámetros iniciales dados, llegar a la etapa de saturación.

# Apéndice A

## Función de dispersión de plasmas

La función de dispersión de plasmas,  $Z(\xi)$  [48] es una función que se define como

$$Z(\xi) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{-t^2}}{t - \xi} \quad , \quad \text{Im}(\xi) > 0 \quad (\text{A.1})$$

Está relacionada con la función error de argumento complejo (ver apéndice B de [5]) y aparece recurrentemente en la descripción cinética de plasmas con ciertas funciones de distribuciones de velocidades, tales como bi-Maxwellianas. Además, la región  $\text{Im}(\xi) \leq 0$  definida por continuidad analítica como

$$Z(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P dt \frac{e^{-t^2}}{t - \xi} + i\pi^{1/2} e^{-\xi^2} & \text{Im}(\xi) = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{-t^2}}{t - \xi} + 2i\pi^{1/2} e^{-\xi^2} & \text{Im}(\xi) < 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

donde  $P$  corresponde al valor principal de Cauchy [49], donde el contorno de  $\text{Im}(\xi)$  vs.  $\text{Re}(\xi)$  encierra al polo  $t = \xi$ .

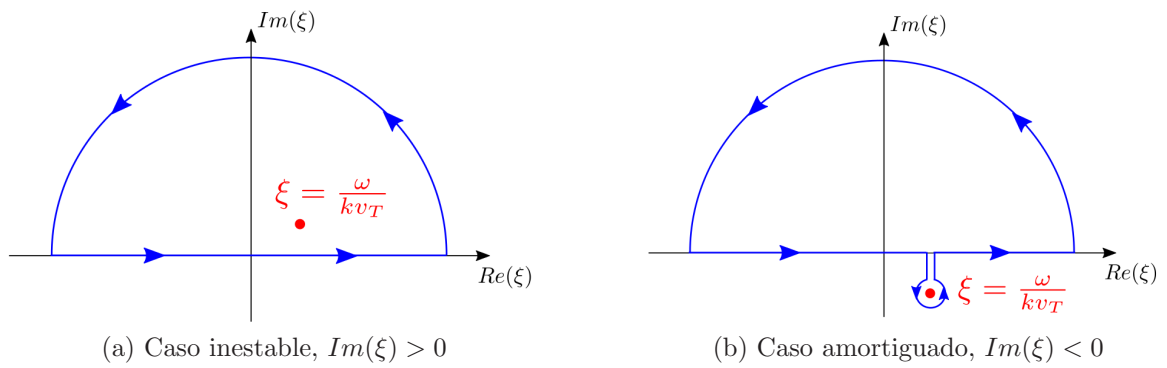


Figura A.1: **Continuidad analítica de la función de dispersión de plasma,  $Z$** : Continuación analítica por deformación del camino de integración para  $\text{Re}(\xi) > 0$  e (izquierda)  $\text{Im}(\xi) > 0$ , (derecha)  $\text{Im}(\xi) < 0$ .

A continuación se explicitarán algunas de las propiedades de la función de dispersión de plasma que son de utilidad dentro de esta tesis.



## A.1. Propiedades

La función de dispersión de plasma posee las siguientes propiedades:

- Diferenciación

$$\begin{aligned} Z'(\xi) = \frac{dZ(\xi)}{d\xi} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{-t^2}}{(t^2 - \xi)^2} \\ &= -2[1 + \xi Z(\xi)] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

- Ecuación diferencial

$$\frac{d^2 Z(\xi)}{d\xi^2} + 2\xi \frac{dZ(\xi)}{d\xi} + 2Z(\xi) = 0 \quad (\text{A.4})$$

- Separación de variables

Argumento real,  $Im(\xi) = 0$

$$Z(\xi) = e^{-x^2} \left( i\sqrt{\pi} - 2 \int_0^{Re(x)} dx e^{x^2} \right), \quad (\text{A.5})$$

Argumento imaginario,  $Re(\xi) = 0$

$$Z(\xi) = i\sqrt{\pi} e^{Im(x)^2} [1 - \text{erf}(\xi)], \quad (\text{A.6})$$

con  $\text{erf}(x)$  la función error [49].

### A.1.1. Aproximaciones asintóticas

- $|\xi| \ll 1$

Para estos casos, donde los procesos térmicos no predominan, se cumple que  $|\omega_r + i\gamma| < |kv_T|$ , de manera que la función  $Z$  presenta una expansión asintótica de la forma siguiente

$$Z(\xi) \approx -2\xi + \frac{4}{3}\xi^3 + \dots \quad (\text{A.7})$$

- $|\xi| \gg 1$

Para estos casos, donde los procesos térmicos son ahora predominantes, se cumple que  $|\omega_r + i\gamma| > |kv_T|$ , y su expansión correspondiente toma la forma

$$Z(\xi) \approx -\frac{1}{\xi} - \frac{1}{2\xi^3} - \frac{3}{4\xi^5} \quad (\text{A.8})$$

### Propiedades de simetría

De su definición, es fácil determinar las siguientes relaciones de simetría de la función  $Z$  [5]

- Simetrías

$$Z(\xi^*) = \left[ Z(\xi) - 2i\sqrt{\pi}e^{-\xi^2} \right] \quad (\text{A.9})$$

$$Z(-\xi) = 2i\sqrt{\pi}e^{-\xi^2} - Z(\xi) = -[Z(\xi^*)]^* \quad (\text{A.10})$$

$$\tilde{Z}(\xi) = Z(\xi) - 2i\sqrt{\pi}e^{-\xi^2}, \quad \text{Im}(\xi) < 0 \quad (\text{A.11})$$

con  $\xi^*$  el conjugado del complejo  $\xi$  ( $\xi^* = \text{Re}(\xi) - i\text{Im}(\xi)$ ), y  $\tilde{Z}(\xi)$  el conjugado de  $Z(\xi)$



## Apéndice B

### Polarización de ondas ión-cilotrón

En esta tesis se ha trabajado con ondas circularmente polarizadas, por lo que conviene definir bien la convención usada para etiquetar los dos sentidos de polarización existentes. Se denotará que una onda es circularmente polarizada izquierda/derecha como aquella cuyo campo eléctrico rota en sentido horario/antihorario al observarla a lo largo de la dirección del campo magnético estático de fondo  $B_0\hat{e}_z$ , con frecuencia positiva  $\omega > 0$ , y que se propaga hacia el observador, tal como se muestra en la Figura (B.1)

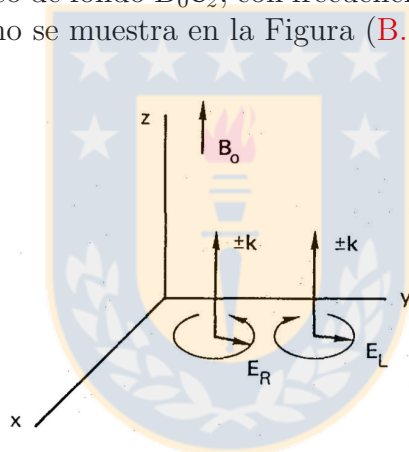


Figura B.1: **Polarización circular:** Geometría de ondas circularmente polarizadas izquierda (L) y derecha (R) con vector de propagación a lo largo de  $\mathbf{B}_0$ . Fuente: [3].

Debido al campo magnético del ambiente  $\mathbf{B}_0$ , los iones/electrones giran con movimiento ciclotrónico en el mismo sentido horario/antihorario que una onda izquierda/derecha, observando a la onda. Es decir, una onda L/R puede ser resonante con los iones/electrones [3]. Además, la corriente generada por el movimiento ciclotrónico de los iones/electrones,  $\mathbf{J}_i/q_i$ , va en sentido horario/antihorario (en el mismo/opuesto sentido que ellos), como es necesario para generar un campo magnético inducido contrario al campo del ambiente  $\mathbf{B}_0$  de acuerdo a la ley de Lenz [44].

La Figura (B.2) muestra la forma en que se desplaza una onda tipo ión en el espacio y tiempo.

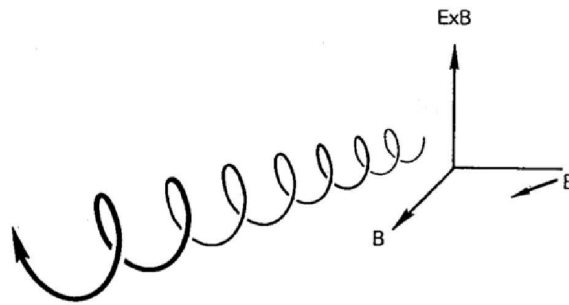


Figura B.2: **Desplazamiento helicoidal de una partícula:** Movimiento real de una partícula (protón) Movimiento real de una onda circularmente polarizada en torno al campo magnético, desplazándose en dirección paralela al campo. Fuente: [3].

### B.0.2. Representación de ondas circularmente polarizadas

Una onda de polarización circular propagándose a lo largo de un campo magnético estático en dirección  $\hat{e}_z$  positiva y con  $\omega > 0$ , se supondrá representada por un campo magnético complejo  $\mathbf{B}(z, t) = B_k(k_z, \omega)e^{i(kz - \omega t)}$  con  $\mathbf{B}_k(k_z, \omega)$  la transformada de Fourier del campo  $\mathbf{B}$ , de modo que la parte real de sus componentes sea

$$\text{Re}(B_x) = B \cos(k_z z - \omega t) = \text{Re}(B e^{i(kz - \omega t)}) \quad (\text{B.1})$$

$$\text{Re}(B_y) = \pm B \text{sen}(k_z z - \omega t) = \text{Re}(\mp i B e^{i(kz - \omega t)}) \quad (\text{B.2})$$

donde el campo magnético mantendrá una magnitud constante  $B$  y girará en la forma indicada en la Figura (polar) conforme avanza el tiempo [3, 5, 9, 44, 45]. Luego, para la fase de una onda L/R tenemos la relación

$$B_y = \mp i B_x \quad (\text{B.3})$$

Lo anterior permite justificar la elección de la forma en que las componentes transversales del campo magnético se suman. Se tiene que  $B^+ = B_x + i B_y$  representa ondas de polarización izquierda y  $B^- = B_x - i B_y$  aquellas con polarización derecha. En efecto, dado que cualquier campo magnético transversal real  $\mathbf{B}$  puede expresarse como una combinación apropiada de  $B^+$  y  $B^-$ ; si se tiene  $B^- = 0$ , entonces se satisface la condición del primer signo de (B.3), con lo cual la onda, descrita únicamente por  $B^+$ , será izquierda. La justificación de  $B^-$  como onda derecha es análoga.

# Apéndice C

## Normalización de la relación de dispersión

Tomamos la relación de dispersión general para el caso de una distribución del tipo bi-Maxwelliana

$$D^\pm(k_z, \omega) = 1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2} \left[ \frac{\omega}{k_z v_{Tj}} Z(\xi_j^\pm) - (1 - A) [1 + \xi_j^\pm Z(\xi_j^\pm)] \right] \quad (\text{C.1})$$

Para nuestro caso, la distribución esta compuesta solo por 2 especies diferentes de partículas, electrones y protones, de modo que la relación de dispersión queda expresada como

$$\begin{aligned} D^\pm(k_z, \omega) &= 1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left[ \frac{\omega}{k_z v_{Te}} Z(\xi_e^\pm) - (1 - A_e) [1 + \xi_e^\pm Z(\xi_e^\pm)] \right] \\ &\quad + \frac{\omega_{pp}^2}{\omega^2} \left[ \frac{\omega}{k_z v_{Tp}} Z(\xi_p^\pm) - (1 - A_p) [1 + \xi_p^\pm Z(\xi_p^\pm)] \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Si tomamos el caso donde los electrones son fríos, esto es

$$|\xi_e^\pm| \gg 1, \quad Z(\xi_e^\pm) \approx -\frac{1}{\xi_e^\pm} \quad (\text{C.3})$$

tomando en cuenta la cuasineutralidad  $n_e = \sum n_i$ , esto es, la densidad de electrones debe ser igual a la suma de las densidades de todas las especies de iones que interactúan en la distribución, y las definiciones donde

$$\omega_{pi}^2 = \frac{4\pi n q_i^2}{m_i} \quad (\text{C.4})$$

es la frecuencia de plasma para el ión  $i$ .

Por otro lado, la frecuencia de ciclotrón de un ión esta dado por

$$\Omega_i = \frac{q_i B_0}{cm_i} \quad (\text{C.5})$$

Consideramos además que la velocidad de ión esta dada por

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi n_i m_i}} \quad (\text{C.6})$$

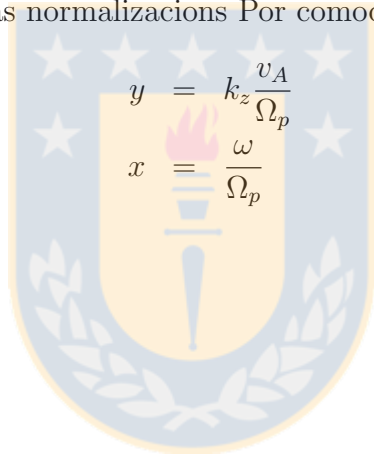
además, es sabido que el beta de plasma  $\beta_{zp}$  bajo ciertas consideraciones, es proporcional al cuadrado de la razón entre la velocidad térmica de una partícula y la velocidad de ión

$$\beta_{zj} = \frac{4\pi n_j m_j v_{Tj}^2}{B_0^2} \quad (\text{C.7})$$

por lo que finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} D^\pm(k_z, \omega) &= y^2 + \frac{n_p}{n_e} \left( x - \left[ \frac{x \pm 1}{y\beta_p^{1/2}} A_p + \frac{1}{y\beta_p^{1/2}} \right] Z(\xi_p^\pm) - A_p + 1 \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

que corresponde a la relación de dispersión normalizada para el caso de una distribución para protones ( $p^+$ ), considerando las normalizacions Por comodidad, usamos las sustituciones



$$\begin{aligned} y &= k_z \frac{v_A}{\Omega_p} \\ x &= \frac{\omega}{\Omega_p} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

# Apéndice D

## Definiciones y parámetros

### D.1. Ecuaciones de Maxwell

La interacción básica que experimentan las partículas que componen a los plasmas no colisionales es de origen electromagnético, siendo esta interacción descrita entonces por los campos eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  y magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ , que obedecen las ecuaciones de Maxwell en el vacío

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{x}, t) \quad (\text{D.1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad (\text{D.2})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{D.3})$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{D.4})$$

donde  $\rho(\mathbf{x}, t)$  y  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$  representan la densidad de carga y densidad de corriente, respectivamente.

### D.2. Definiciones relevantes

Es útil definir algunas cantidades características propias de los plasmas [5], y que han sido utilizadas a lo largo de la presente tesis.

- **Longitud de Debye**

Como se mencionó anteriormente, el plasma es macroscópicamente neutro. Sin embargo, esto no excluye la posibilidad de que las partículas cargadas pueden diferir significativamente de una distribución uniforme en una escala microscópica. La distancia crítica hasta qué punto el desequilibrio de carga puede extenderse, se define por uno de los parámetros más importantes de la física de plasmas denominada longitud de Debye, donde se cumple

$$\lambda_{Dj}^2 = \frac{k_B T_j}{4\pi n_0 q_j^2} \quad (\text{D.5})$$

La longitud de Debye determina hasta qué punto el desequilibrio de carga debido al movimiento térmico puede extenderse.

- **Esfera de Debye**

La esfera de Debye es una esfera de plasma de radio  $\lambda_{Dj}$ . La esfera de Debye contiene solo a las partículas de plasma con la que una partícula objetivo puede estar en un comportamiento colectivo. El número de partículas que puede contener la esfera de Debye viene dado por

$$N_D = \frac{4}{3}\pi n \lambda_{Dj}^3$$

Para toda partícula que se encuentre a una distancia mayor al radio  $\lambda_{Dj}$ , esto es, fuera de la esfera, éstas se encontrarán *apantalladas*. El apantallamiento se refiere a que el campo eléctrico está restringido para permanecer esencialmente dentro de la distancia de la longitud de Debye.

- **Velocidad térmica**

$$v_{thj}^2 = \frac{2k_B T_j}{m_j} \quad (\text{D.6})$$

Representa la velocidad típica del movimiento aleatorio de una partícula en el plasma, y es la velocidad más probable de la distribución.

- **Frecuencia de plasma de la especie  $j$**

$$\omega_{pj}^2 = \frac{4\pi n_0 q_j^2}{m_j} \quad (\text{D.7})$$

Frecuencia típica de oscilaciones de partículas de la especie  $j$  en un plasma (completamente ionizado) frente a una perturbación local de su cuasineutralidad. Representa el inverso del tiempo que tarda la partícula, moviéndose a su velocidad térmica característica, en recorrer una longitud de Debye.

- **Frecuencia de ciclotrón de la especie  $j$**

$$\Omega_j = \frac{q_j B}{m_j c} \quad (\text{D.8})$$

describe el módulo de la velocidad angular de las partículas cargadas de la especie  $j$  moviéndose en un plano perpendicular respecto a  $B$  por efecto de la fuerza de Lorentz, donde  $B$  es la amplitud del campo magnético a su movimiento.

- **Velocidad de Alfvén**

$$v_A^2 = \frac{B_0^2}{4\pi n_0 m_p} \quad (\text{D.9})$$

La velocidad de Alfvén es un parámetro de velocidad característico de los plasmas.



- **Presión magnética**

$$P_{\text{mag}} = \frac{8\pi}{B_0^2} \quad (\text{D.10})$$

presión magnética en un plasma por efectos de la presencia de un campo magnético de fondo  $|\mathbf{B}_0|$ .

- **Beta del plasma**

$$\beta_j = \frac{P_{\text{cin}}}{P_{\text{mag}}} \simeq \frac{v_{thj}^2}{v_A^2} \quad (\text{D.11})$$

parámetro de razón entre la presión cinética  $P_{\text{cin}}$  de la especie  $j$  y la presión magnética  $P_{\text{mag}}$ .

- **Anisotropía térmica**

$$R = \frac{T_{\perp j}}{T_{\parallel j}} \quad (\text{D.12})$$

En el caso de considerar una función de distribución de velocidades tal que permita la existencia de 2 direcciones de propagación, el sistema se verá comprendido por 2 diferentes velocidades térmicas,  $v_{thj}$ , medidas para cada una de las direcciones. El resultado directo de estas mediciones será la presencia de 2 temperaturas independientes medidas a lo largo de cada dirección de propagación,  $T_{\perp}$  y  $T_{\parallel}$ . Se define como anisotropía térmica cuando el cociente entre las temperaturas medidas, para una especie  $j$ , es mayor o menor a 1. En caso de que la razón resulte en el valor 1, el sistema se considera isotrópico térmicamente.

Es importante tener en consideración que, en el caso que el plasma no presente colisiones, la anisotropía térmica se mantendrá por un largo período de tiempo en comparación a un plasma colisional, puesto que el contacto es el mecanismo natural por el que 2 temperaturas se equilibran [6].

# Bibliografía

- [1] E. Mazzucato, *Electromagnetic Waves for Thermonuclear Fusion Research*. World Scientific, 2014.
- [2] A. O. Benz, *Plasma Astrophysics. Kinetic Processes in Solar and Stellar Coronae*. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [3] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics*. Plenum Press, 1976.
- [4] W. Greiner, S. Schramm, and E. Stein, *Quantum Chromodynamics*. Springer, 2002.
- [5] D. G. Swanson, *Plasma Waves*. IoP. Series in Plasma Physics, 2003.
- [6] P. M. Bellan, *Fundamentals of Plasma Physics*. Cambridge University Press, 2006.
- [7] W. Baumjohann and R. A. Treumann, *Basic Space Plasma Physics*. Imperial College Press, 1997.
- [8] H. F. Astudillo, S. Livi, E. Marsch, and H. Rosenbauer, “Evidence for nongyrotropic alpha particle and proton distribution functions: Taus solar wind measurements,” *J. Geophys. Res.*, vol. 101, p. A11, 1996.
- [9] S. Ichimaru, *Statistical Plasma Physics. Volume I: Basic Principles*. Addison-Wesley Publishing Company, 2003.
- [10] P. S. Gary, *Theory of Space Plasma Microinstabilities*. Cambridge Atmospheric and Space Science Series, 1993.
- [11] J. Bergman, “The magnetized plasma permittivity tensor,” *Physics of Plasmas*, vol. 7, p. 3476, 2000.
- [12] R. C. Davidson and J. M. Ogden, “Electromagnetic ion cyclotron instability driven by ion energy anisotropy in high-beta plasmas,” *Physics of Fluids*, vol. 18, p. 1045, 1975.
- [13] S. P. Gary, “Short-wavelength plasma turbulence and temperature anisotropy instabilities: recent computational progress,” *Phil. Trans. R. Soc. A*, vol. 373, 2014.
- [14] J. Seough and P. H. Yoon, “Quasilinear theory of anisotropy-beta relations for proton cyclotron and parallel firehose instabilities,” *J. Geophys. Res.*, vol. 117, 2012.
- [15] P. Hellinger *et al.*, “Solar wind proton temperature anisotropy: Linear theory and wind/swe observations,” *J. Geophys. Res.*, vol. 33, 2006.

- [16] S. P. Gary and D. Winske, "Simulations of ion cyclotron anisotropy instabilities in the terrestrial magnetosheath," *J. Geophys. Res.*, vol. 98, 1993.
- [17] S. P. Gary *et al.*, "The proton cyclotron instability and the anisotropy/ $\beta$  inverse correlation," *J. Geophys. Res.*, vol. 99, 1994.
- [18] S. P. Gary and M. A. Lee, "The ion cyclotron anisotropy instability and the inverse correlation between proton anisotropy and proton beta," *J. Geophys. Res.*, vol. 99, 1994.
- [19] S. D. Bale *et al.*, "Magnetic fluctuation power near proton temperature anisotropy instability thresholds in the solar wind," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 103, 2009.
- [20] J. Bortnik *et al.*, "Saturation characteristics of electromagnetic ion cyclotron waves," *J. Geophys. Res.*, vol. 116, 2011.
- [21] R. C. Davidson and S. T. Tsai, "Thermodynamyc bounds of the magnetic fluctuation energy in unstable anisotropic plasmas," *J. Plasma Physics*, vol. 9, 1973.
- [22] A. A. Galeev and R. N. Sudan, *Basic Plasma Physics: Selected Chapters*. North-Holland Personal Library, 1989.
- [23] H. F. Astudillo, "High-order modes of left-handed electromagnetic waves in a solar-wind-like plasma," *J. Geophys. Res.*, vol. 101, 1996.
- [24] R. E. Navarro, *Tesis Doctoral*. Universidad de Chile, Chile, 2014.
- [25] R. E. Larson and R. P. Hostetler, *Calculus Volume I*. McGraw Hill, 2010.
- [26] D. E. Muller, "A method for solving algebraic equations using an automatic computer," *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, vol. 10, 1956.
- [27] T. Tajima, K. Mima, and J. M. Dawson, "Alfvén ion-cyclotron instability: Its physical mechanism and observation in computer simulation," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 39, 1977.
- [28] J. A. Araneda, H. Astudillo, and E. Marsh, "Interactions of alfvén-cyclotron waves with ions in the solar wind," *Space Sci. Rev.*, vol. 172, 2011.
- [29] H. J. Pain, *The Physics of Vibrations and Waves*. Wiley, 2005.
- [30] H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 1980.
- [31] D. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*. Reed College, 1995.
- [32] R. C. Davidson and D. A. Hammer, "Nonequilibrium energy constants associated with largeamplitude electron whistlers," *Phys. Fluids*, vol. 15, 1972.
- [33] J. G. Thomas, *C'alculo Varias Variables*. Pearson Educaci'on, 2005.
- [34] C. K. Birdsall and A. B. Langdon, *Plasma Physics via Computer Simulation*. Institute of Physics, 1993.

- [35] Y. Omura, H. Usui, and H. Matsumoto, "Alfvén ion-cyclotron instability: Its physical mechanism and observation in computer simulation," *J. Geomag. Geoelectr.*, vol. 40, 1988.
- [36] A. P. Matthews, "Current advance method and cyclic leapfrog for 2d multispecies hybrid plasma simulations," *Journal of Computational Physics*, vol. 112, 1994.
- [37] E. J. Horowitz, D. E. Shumaker, and D. V. Anderson, "Qn3d: A three-dimensional quasi-neutral hybrid particle-in-cell code with applications to the tilt mode instability in field reversed configurations," *Journal of Computational Physics*, vol. 84, 1989.
- [38] H. Matsumoto and Y. Omura, *Computer Space Plasma Physics: Simulation Techniques and Software*. Terra Tokio, 1993.
- [39] H. Böhmer *et al.*, "Ion fluctuations and velocity distribution in the presence of ion cyclotron waves," *Phys. Fluids*, vol. 21, 1978.
- [40] C. B. Wang, C. S. Wu, and P. H. Yoon, "Heating of ions by alfvén waves via nonresonant interactions," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, 2006.
- [41] L. Chen, Z. Lin, and R. White, "On resonant heating below the cyclotron frequency," *Phys. Plasmas*, vol. 8, 2001.
- [42] C. Dong and N. Singh, "Ion pseudoheating by low-frequency alfvén waves revisited," *Physics of Plasmas*, vol. 20, 2013.
- [43] T. K. Nakamura, "Limit of temperature anisotropy relaxation by ion cyclotron waves: A statistical theory," *Phys. Plasmas*, vol. 7, 2000.
- [44] T. H. Stix, *Waves in Plasmas*. American Institute of Physics, 1992.
- [45] R. Fitzpatrick, *Introduction to Plasma Physics*. 1998.
- [46] R. H. Landau, M. J. Páez, and C. C. Bordeianu, *Computational Physics: Problem Solving with Computers*. WILEY-VCH, 2007.
- [47] J. A. Araneda, E. Marsh, and A. F. V. nas, "Collisionless damping of parametrically unstable alfvén waves," *J. Geophys. Res.*, vol. 112, 2007.
- [48] B. D. Fried. and S. D. Conte, *The plasma dispersion function: the Hilbert transform of the Gaussian*. Academic Press, 1961.
- [49] R. V. Churchill and J. W. Brown, *Variable Compleja y Aplicaciones*. McGraw-Hill, 2004.