

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE EDUCACIÓN
PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN



**RENDIMIENTO, ESTRATEGIAS Y ERRORES DE
ESTUDIANTES DE QUINTO BÁSICO A PRIMERO MEDIO
EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE VELOCIDAD**

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN.

Prof. Guía : Dr. César Flores Solar

Seminaristas : Catherine Martínez Navarrete
Ignacio Ortega Yáñez

Concepción, 2016



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE EDUCACIÓN
PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN



**RENDIMIENTO, ESTRATEGIAS Y ERRORES DE
ESTUDIANTES DE QUINTO BÁSICO A PRIMERO MEDIO
EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE VELOCIDAD**

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN.

Prof. Guía : Dr. César Flores Solar

Seminaristas : Catherine Martínez Navarrete
Ignacio Ortega Yáñez

Concepción, 2016



“Quien se atreve a enseñar nunca debe dejar de aprender”

A los profesores de nuestro país, a nuestros profesores y a nuestros compañeros de carrera.

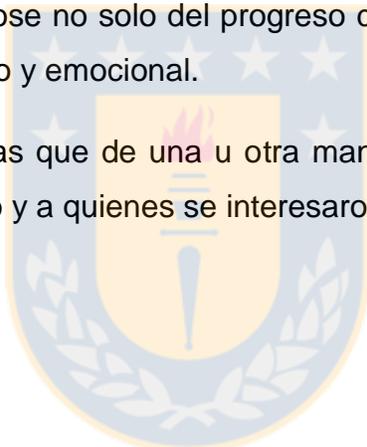
Agradecimientos

A nuestra familia por su apoyo durante toda nuestra enseñanza escolar, media y en nuestra formación profesional. Por su apoyo incondicional durante todo el periodo de esta investigación. Agradecemos todo su esfuerzo y trabajo para cubrir nuestras necesidades.

Al Doctor Cesar Flores Solar en su condición de profesor guía, quién nos apoyó incondicionalmente y nos guio en la gestación, desarrollo, elaboración y posterior corrección de este trabajo.

A la Sra. Jaqueline Escobar, secretaria de la Unidad de Enriquecimiento Matemático de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemática, quién nos acompañó durante todo este proceso, interesándose no solo del progreso de nuestro trabajo sino también de nuestro bienestar físico y emocional.

A todas aquellas personas que de una u otra manera colaboraron y apoyaron el desarrollo de este estudio y a quienes se interesaron por nuestro trabajo, bienestar y resultados.



Resumen

En este trabajo de seminario se analizan las siguientes preguntas de investigación, referentes a los alumnos de la región del Biobío, Chile: Ante la tarea de resolver problemas de matemática que involucran el concepto de velocidad: ¿Cuál es su rendimiento?, ¿Cuáles son realmente sus estrategias de resolución?, ¿Pueden extraerse patrones de errores típicos?

Se examina el registro escrito de 2377 estudiantes con nivel de escolaridad en el rango de quinto básico hasta primero medio. Tales estudiantes pertenecen a colegios municipales, particulares subvencionados y particulares pagados de las provincias de Arauco, Biobío, Concepción y Ñuble.

Un alto porcentaje de alumnos responde correctamente a problemas de velocidad *simples*, es decir, que involucran el movimiento de un solo objeto con una velocidad fija, en donde la incógnita es solo la velocidad, el tiempo o la distancia. El rendimiento baja ostensiblemente cuando se consideran problemas de velocidad que no son simples, tales como, problemas donde la velocidad no es fija o problemas que involucran el movimiento de dos objetos.

En cuanto a las estrategias, se distinguieron, definieron e investigaron en detalle las 3 estrategias principales que usaron los estudiantes en los problemas revisados. No se observan estrategias que utilicen álgebra y menos del 10% de los alumnos utiliza estrategias óptimas, en el sentido que reducen la cantidad de cálculos a realizar. Las estrategias más utilizadas (sobre 40%) son de tipo intuitivo y se basan fuertemente en la idea concreta de un objeto que se mueve a cierta velocidad y que va realizando avances sucesivos en intervalos de tiempo determinados hasta llegar a su objetivo.

El análisis de errores realizado muestra que estos no solo se centran en operaciones aritméticas, en efecto, más del 70 % de los errores cometidos no son de cálculo y evidencian dificultades de interpretación de conceptos matemáticos, de comprensión de problemas con enunciado escrito, y de identificación de datos e incógnitas.

Índice

Contenido

Introducción.....	11
Capítulo I: Marco teórico	12
1.1. Problema Matemático	12
1.2. Problemas sobre velocidad.....	12
1.1.1. Clasificación de los problemas de velocidad.....	13
1.3. Resolución de problemas.....	14
1.3.1. Antecedentes	14
1.3.2. Resolución de problemas en el curriculum.....	16
1.4 Conceptos claves.....	17
Capitulo II: Metodología de la Investigación.....	18
2.1. Objetivos de la investigación	18
2.1.1 Objetivo general.....	18
2.1.2 Objetivos específicos.....	18
2.2. Participantes y muestra	18
2.3. Diseño de investigación.....	20
2.4. Planeamiento del estudio.....	20
2.5. Instrumentos	21
2.5.1. Problemas	21
2.5.2. Pruebas	24
2.5.3. Recolección de los datos.....	24
2.5.3.1. Rendimiento	24
2.5.3.2. Estrategias	25
2.5.3.3. Errores.....	25
Capítulo III: Análisis de los datos.	26
3.1. Procedimiento de análisis	26
3.1.1. Primer objetivo específico.....	26
3.1.1.1. Primera etapa: Problemas Distancia, Tiempo y Velocidad	26
Quinto básico	27

Sexto básico	28
Séptimo básico	29
Octavo básico	30
3.1.1.2. Segunda etapa: Problema “Cambio de Velocidad”, forma 1, 2 y 3. 31	
Forma 1.....	31
Forma 2.....	32
Forma 3.....	32
3.1.1.3. Quinta etapa y final: Problemas Persecución y Encuentro.	33
Persecución	33
Encuentro.....	34
3.1.2. Segundo objetivo específico.....	35
3.1.2.1. Problema Persecución.....	35
3.1.2.2. Problema Encuentro.	39
3.1.3. Tercer objetivo específico.....	43
3.1.3.1. Persecución	43
3.1.3.2. Problema Encuentro.	46
Capítulo IV: Discusión de los resultados.....	50
4.1. Conclusiones	50
Referencias.....	52
Anexos	54
Anexo n°1-Tabla colegios CEMAT	54
Anexo n° 2- Problemas de investigación	56
Anexo n° 3 – Pruebas CEMAT – etapa 1.....	58
Anexo n°4 – Pruebas CEMAT – etapa 2.....	59
Anexo n°5 – Pruebas CEMAT – final.....	60
Anexo n°6: Ejemplo de estrategia “no reconocible”, problema Persecución.....	61
Anexo n°7: Ejemplo de estrategia “1P”, problema Persecución.	62
Anexo n°8: Ejemplo de estrategia “P2”, problema Persecución.	63
Anexo n°9: Ejemplo de estrategia “P3”, problema Persecución.	64
Anexo n° 10: Ejemplo de estrategia “E1”, problema Encuentro.....	64

Anexo n° 11: Ejemplo de estrategia “E2”, problema Encuentro..... 65
Anexo n°12: Ejemplo de estrategia “E3”, problema Encuentro..... 66
Anexo n°13: Ejemplo de estrategia “no reconocible”, problema Encuentro.
Estudiante que respondió correctamente. 67



Índice de Tablas

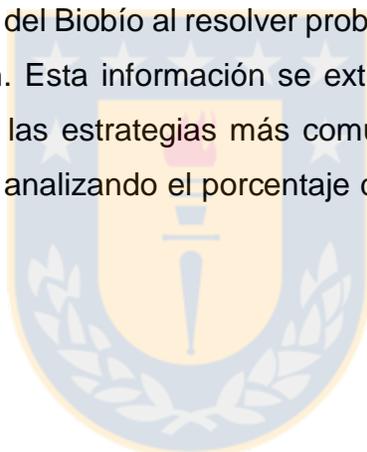
Tabla 1: Ejemplos de las proposiciones de Mayer (1981).....	13
Tabla 2: Categorías para problemas con contexto de Velocidad.....	14
Tabla 3: pasos para la resolución de problemas Polya (1945).....	15
Tabla 4: Muestra de estudiantes.....	19
Tabla 5: Cantidad de estudiantes de cada nivel por problema.....	20
Tabla 6: Resultados problemas Distancia, Tiempo y Velocidad.....	27
Tabla 7: Desempeño general quinto básico problemas Distancia y Tiempo.....	28
Tabla 8: Desempeño general de sexto básico en problemas Distancia y Tiempo.....	28
Tabla 9: Desempeño general séptimo básico, problemas Distancia, Tiempo y Velocidad.....	29
Tabla 10: Desempeño general octavo básico, Tiempo y Velocidad.....	31
Tabla 11: Desempeño general problema Cambio de Velocidad.....	31
Tabla 12: Desempeño general, problema Persecución C: cantidad de respuestas correctas. I: cantidad de respuestas incorrectas.....	33
Tabla 13: Desempeño general problema Encuentro C: cantidad de respuestas correctas. I: cantidad de respuestas incorrectas.....	34
Tabla 14: Estrategias problema Persecución.....	36
Tabla 15: Resultado estrategias problema Persecución.....	39
Tabla 16: Estrategias problema Encuentro.....	40
Tabla 17: Resultados estrategias problema Encuentro.....	42
Tabla 18: Tipos de errores del problema "persecución".....	44
Tabla 19: Porcentaje por error de la pregunta persecución.....	44
Tabla 20: Tipos de errores en el problema "Encuentro".....	46
Tabla 21: Porcentaje de error, problema Encuentro.....	47

Introducción

La resolución de problemas ha sido y sigue siendo un tema central en Educación Matemática (Stanic, G. M. A & Kilpatrick, J., 1988). Uno de los objetivos de las investigaciones en esta línea es lograr una mejor comprensión de los métodos y razonamientos que realmente usan los escolares al resolver problemas.

El propósito de este estudio es conocer el rendimiento, sondear las estrategias adoptadas y los errores que cometen los estudiantes chilenos al enfrentar tareas de resolución de problemas que involucran el concepto de velocidad.

Se obtiene información sobre importantes aspectos cognitivos de los procesos de los escolares de la región del Biobío al resolver problemas matemáticos, en relación a qué estrategias utilizan. Esta información se extrae de los datos, identificando, definiendo y clasificando las estrategias más comunes que utilizan los escolares para resolver problemas, analizando el porcentaje de éxito y los errores asociados a cada estrategia.



Capítulo I: Marco teórico

1.1. Problema Matemático

La noción de problema depende del área del conocimiento bajo consideración. Así, la definición de la Real Academia Española para problema es la siguiente: “planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos”.

Desde la perspectiva matemática hay varias definiciones de problema, citamos dos de ellas que nos parecen particularmente representativas. Según Kantowski (1980) “un problema es una situación para la cual el individuo que la confronta no dispone de un algoritmo que garantice la obtención de una solución. El conocimiento de la persona debe utilizarse de manera novedosa para resolver el problema”. Otra definición, señala que: “una actividad matemática es un problema cuando el resolutor no conoce un procedimiento que le lleve de forma directa a la solución, en caso contrario se dirá que dicha actividad matemática es un ejercicio” (Felmer, y otros, 2014, pág. 4). Ambas definiciones tienen en común que el calificar una situación matemática como problema depende fuertemente de los conocimientos de la persona que lo intenta resolver. En efecto, el problema debe plantear un desafío a quien lo enfrenta (Schoenfel, 1985). Además, el hecho que un problema adquiera la dimensión de problema matemático o ejercicio matemático no depende del contexto en que se enuncie, sino de la dificultad matemática de éste (Felmer, y otros, 2014).

1.2. Problemas sobre velocidad

Los problemas matemáticos frecuentemente involucran el concepto de velocidad, el cual permite conectar de manera natural los contenidos disciplinares con el mundo real (Chunlian, J, Hwang, S, & Cai, J, 2014). Así, por ejemplo, una de las maneras más sencillas de conectar con el mundo real los contenidos asociados a *razones* y *proporciones*, es mediante la resolución de problemas de velocidad, ya que la velocidad se obtiene formando la razón entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido. Por otro lado, el concepto de velocidad es central en la matemática del

movimiento, el Álgebra Elemental y el Cálculo Infinitesimal (Bowers, J. S. & Nickerson, S. N, 2000). Existen, además, varias investigaciones en educación matemática que incluyen problemas de velocidad, como modelos para la multiplicación y la división, ver por ejemplo el artículo de Lamón (2007). Ver también los problemas Distancia, Tiempo y Velocidad de este seminario (Anexo N°2).

1.1.1. Clasificación de los problemas de velocidad.

Mayer (1981) clasificó los problemas sobre velocidad en 13 categorías, basándose en el tipo de historia que se deduce del enunciado y en las proposiciones que forman el problema. Fue capaz de encontrar 3 tipos de proposiciones para problemas en cualquier contexto, proposiciones de asignación, proposiciones de relación y proposiciones de interrogación (Mayer, 1981). En la siguiente tabla se presenta un ejemplo de cada una de estas proposiciones.

Proposición de	Ejemplos
Asignación	Juan conduce a una velocidad de 90Km/h. Benedicto recorrió una distancia de 5km.
Relación	Juan conduce al doble de velocidad que Benedicto. Ximena recorre un tercio de distancia que Juan.
Interrogación	Encuentra la distancia recorrida por Juan. Encuentra la velocidad de conducción de Miguel.

Tabla 1: Ejemplos de las proposiciones de Mayer (1981)

Para esta investigación, utilizaremos 4 de las categorías expuestas por Mayer (1981) y que se describen en la siguiente tabla.

Categoría	Descripción
Problemas Simples	Problemas en donde un móvil se desplaza a una velocidad fija. La incógnita es la velocidad, la distancia o el tiempo. En el enunciado viene explícita la información necesaria para encontrar el valor incógnito.

Problemas de persecución	Problemas en donde hay dos móviles que salen del mismo lugar con igual sentido y con velocidades diferentes (fijas), pero parten en momentos distintos. Generalmente, la incógnita se refiere al momento o lugar en que el segundo móvil alcanza al que salió primero.
Problemas de encuentro	Problemas en donde hay dos móviles que salen de lugares opuestos al mismo tiempo y en sentido contrario, con una velocidad diferente (fija). La incógnita se refiere, generalmente, al momento o lugar en que se encuentran.
Problemas de velocidad variable.	Problemas en donde un móvil se desplaza variando su velocidad durante un trayecto fijo. Típicamente, la incógnita es el momento en el que se produce el cambio de velocidad.

Tabla 2: Categorías para problemas con contexto de Velocidad

1.3. Resolución de problemas

1.3.1. Antecedentes

La resolución de problemas lleva tiempo siendo tema de estudio. En 1910, Dewey describe las etapas del pensamiento en la resolución de problema. Hecho que es abordado posteriormente por Polya en 1945, en su libro *How to solve it (Cómo resolverlo)*, en donde entrega una serie de herramientas para el profesor que busca ayudar a sus alumnos a resolver problemas. Aquí Polya (1945) propone una serie de cuatro pasos a seguir para resolver problemas y las preguntas que el profesor debe realizar al alumno para el desarrollo de este.

Paso para la resolución de problemas	preguntas
Paso 1: Comprender el problema	¿Entiendes todo lo que dice? ¿Puedes replantear el problema en tus propias palabras? ¿Distingues cuáles son los datos? ¿Sabes a que quieres llegar? ¿Hay suficiente información?

Paso 2: Elaborar un plan	¿Haz resuelto antes un problema similar? ¿Conoces algún problema relacionado con este?
Paso 3: Ejecutar el plan y resolver el problema	¿Se han empleado todos los datos? ¿Puedes resolver una parte del problema? ¿Se han considerado todas las nociones relativas al problema?
Paso 4: Mirar hacia atrás, revisar el problema y su solución	¿Los cálculos están correctos? ¿Es tu solución correcta? ¿Tu respuesta satisface lo establecido por el problema? ¿Existe alguna solución más sencilla? ¿Se puede extender una solución para un caso general?

Tabla 3: pasos para la resolución de problemas Polya (1945)

Pero no fue hasta la década de los 60, en donde la preocupación por incorporar la resolución de problemas aumenta de forma exponencial. Se realizan estudios sobre la resolución de problemas, en donde se concluye que la implementación en el aula de actividades de resolución de problemas permite al estudiante establecer conexiones entre distintas áreas de la matemática y promueve el desarrollo de variadas competencias. También permite el desarrollo del razonamiento matemático avanzado, como abstraer, analizar, conjeturar, generalizar y sintetizar (Kilpatrick, 1967). En este marco, se hizo un gran esfuerzo por una innovación curricular y se comienza a hablar de un nuevo método de enseñanza, basado en la resolución de problemas (Martines, 2008). Posteriormente en 1980, el NCTM norteamericano, sitúa como primer ítem en su lista de recomendaciones que la resolución de problemas debe ser el eje principal a desarrollar por la educación matemática ((NCTM), 1980).

Schoenfeld cree que existe un problema con las heurísticas de Polya. Pues, muestra que las heurísticas propuestas por Polya (1945) son muy generales y por ende, cuesta que sean implementadas. Así, dice por ejemplo que no en todos los problemas se puede realizar un dibujo para lograr una mejor comprensión por parte del resolutor. Posteriormente, propone que las heurísticas se deben conocer, saber cómo usarlas y tener habilidad para ello. Además, dice que para poder resolver problemas, no solo se necesita de heurísticas. También hacen falta otros elementos como *Recursos* y *Control* (Schoenfeld, 1985). Los *Recursos* se refieren a los conocimientos previos de quien resuelve problemas. Estos conocimientos varían desde conceptos, formulas, algoritmos, estrategias y en general cualquier elemento que sea necesario para la resolución de un problema. En cuanto al *Control*, Schoenfeld (1985) dice que el resolutor debe controlar su trabajo, ser capaz de decidir el camino que tomara para resolver el problema y decidir cuándo cambiar dicho camino a tiempo, si es que el primero no lo lleva a la solución.

1.3.2. Resolución de problemas en el currículum

En las actuales bases curriculares de matemáticas (MINEDUC, 2011), se plantean cuatro habilidades básicas a desarrollar. Estas habilidades son: Resolver Problemas, Argumentar y Comunicar, Modelar, y Representar. Las actividades de resolución de problemas permiten mejorar las otras tres habilidades básicas. En primer lugar, es común el usar representaciones para enfrentar problemas, desarrollando tal habilidad fundamental. En segundo lugar, se desarrolla la habilidad de modelamiento, pues para dar solución a un problema, se debe llevar el problema a un contexto matemático mucho más simplificado. Finalmente, se encuentra la habilidad de argumentar y comunicar ya que, cuando un alumno resuelve un problema, debe fundamentar su respuesta para estar seguro de ella.

1.4 Conceptos claves

En este estudio, se mencionaran algunos conceptos que es importante que el lector conozca, para ello presentamos las siguientes definiciones para efectos de este estudio. Si estos conceptos se encuentran en un contexto distinto, pueden tener otra definición.

1) Registro escrito

Es la prueba del estudiante, con todo lo que él ha escrito, dibujado, tabulado y esquematizado en ella.

2) Método

Es el conjunto de procedimientos o pasos que el estudiante considera necesarios para encontrar la solución del problema.

3) Estrategia

Es el método que de ser llevado a cabo de forma correcta, permite obtener la solución del problema.

4) Error

Es la acción cometida por el estudiante antes, durante y después de llevar a cabo su método, que impide que este llegue a la solución correcta del problema.

5) Patrón de error

Es la tendencia de apareamiento de un error en más de un registro escrito, consiste en hallar errores similares cometidos por los estudiantes.

6) Tipo de error

Es una categoría creada con el fin de clasificar a la mayor cantidad de patrones de errores.

Capítulo II: Metodología de la Investigación

2.1. Objetivos de la investigación

2.1.1 Objetivo general

Como objetivo general planteamos “Conocer cómo resuelven problemas sobre velocidad estudiantes de la región del Biobío, observando, registrando y describiendo el rendimiento, las estrategias adoptadas y errores cometidos”

2.1.2 Objetivos específicos

Para lograr el fin del objetivo general planteado en la presente investigación, hemos definido los siguientes objetivos específicos:

- 1) Revisar las respuestas de los estudiantes para los distintos problemas planteados, en las tres fechas del campeonato.
- 2) Conocer los procedimientos de resolución de los estudiantes, revisando sus registros escritos y así definir las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver problemas sobre velocidad.
- 3) Identificar los errores cometidos por los estudiantes, revisando sus registros escritos y así definir los tipos de errores que comenten los estudiantes al resolver problemas velocidad.

2.2. Participantes y muestra

Participaron de este estudio un total de 2377 estudiantes desde quinto básico a primero medio, cuyas edades varían entre los 9 y 15 años. En la siguiente tabla se detalla el número de alumnos de cada nivel educativo.

Nivel	Hombres	Mujeres	N° de estudiantes
5° básico	214	227	441
6° básico	261	237	498
7° básico	246	227	473
8° básico	264	261	525

1° medio	221	219	440
Total	1206	1171	2377

Tabla 4: Muestra de estudiantes

Los estudiantes provienen de establecimientos educacionales de todas las dependencias administrativas: municipales, particulares subvencionados y particulares. La muestra de colegios incluye establecimientos de las cuatro provincias de la región e incluye variadas realidades socioeconómicas (Anexo n°1. Tabla colegios).

Los establecimientos participantes en esta investigación lo hicieron en el marco del Campeonato Escolar de Matemáticas (CEMAT) de la región del Biobío. En esta actividad, los alumnos que participan son determinados por su propio establecimiento. En algunos de ellos, participan todos los estudiantes del nivel, sin ningún tipo de selección. En otros, en cambio, se selecciona los alumnos mediante diversos criterios, que van desde una selección por rendimiento a una participación de carácter voluntario del alumno. Estos alumnos participan de las 4 primeras pruebas del CEMAT, las cuales están conformadas por problemas de respuesta cerrada. Para la quinta prueba la muestra se reduce a alumnos de rendimiento destacado, que son los seleccionados como representantes de cada colegio para rendir esta prueba final, pues corresponden a los de mejor rendimiento en las 4 pruebas anteriores. Además, esta última prueba está conformada por problemas de desarrollo en los que los alumnos deben escribir sus argumentos.

El número de estudiantes que enfrentó cada problema se muestra en la siguiente tabla.

Problema	5° básico	6° básico	7° básico	8° básico	1° medio	Total
Distancia	441	498	473			1412
Tiempo	441	498	473	525		1937
Velocidad			473	525		998
Cambio de velocidad - 1					199	199

Cambio de velocidad - 2					21	21
Cambio de velocidad - 3					220	220
Persecución (*)			58	111		169
Encuentro (*)				111	43	154

Tabla 5: Cantidad de estudiantes de cada nivel por problema.

(*)Sub-muestra de alumnos de rendimiento destacado.

2.3. Diseño de investigación

El método de análisis para el estudio de los datos recogidos en esta investigación se basa en un modelo de carácter descriptivo, pues no sólo describe los participantes de este estudio, si no que se busca describir el rendimiento de éstos, saber y mostrar cómo responden a problemas matemáticos, en particular, sobre velocidad, qué estrategias utilizan y qué errores comenten en la búsqueda la solución.

2.4. Planeamiento del estudio

Buscamos información sobre la resolución de problemas y existe bastante teoría sobre ello, pero se enfoca en qué es la resolución de problema, qué habilidades potencia y las consecuencias favorables de ella, no hay mayor información de cómo resuelven problemas los estudiantes. Junto con ello se revisó y analizó un estudio en el que se analizan las estrategias de resolución de problemas que utilizan los estudiantes de China versus los estudiantes de Singapur, y encontramos que en Chile no se ha hecho algo similar, entonces se evaluó la idea de realizarlo y era factible gracias a la realización del campeonato de matemática CEMAT que se realiza en nuestro país. Así establecida la mirada que le daremos a nuestro estudio, la de averiguar cómo resuelven problemas los estudiantes chilenos, hemos procedido con los siguientes pasos:

-- Búsqueda de la fundamentación teórica de los aspectos y conceptos relacionados con nuestro estudio.

- Selección y ajuste de redacción de los problemas que se plantearon a los estudiantes, y los niveles educativos que se consideraron.
- Aplicación de los primeros 4 problemas seleccionados, en las fecha 1 y 2 del campeonato.
- Revisión y registro de las respuestas de los estudiantes participantes. Análisis cuantitativo.
- Aplicación de los últimos 2 problemas seleccionados, a la muestra seleccionada de estudiantes con mejor rendimiento.
- Registro de las respuestas y procedimiento de los estudiantes, definición de estrategias utilizadas y errores cometidos en la resolución de los problemas.
- Análisis de los resultados obtenidos en el paso anterior.

2.5. Instrumentos

Para conocer el rendimiento de los estudiantes en resolución de problema, las estrategias que ellos utilizan y qué errores comenten, hemos planteado 8 problemas acerca de velocidad, a través de las pruebas aplicadas en tres de las fechas del campeonato de matemática de la región.

2.5.1. Problemas

Se utilizaron en esta investigación ocho problemas acerca de velocidad (Anexo n°2: Problemas). Los problemas son variaciones de un test aplicado a estudiantes de China y Singapur en un estudio comparativo del desempeño de ambos países (Chunlian, J, Hwang, S, & Cai, J, 2014). Cada uno de los problemas fue adaptado a la realidad nacional; se cambiaron nombres y se ajustó la redacción.

En una primera etapa se presentaron los problemas: “Distancia”, “Tiempo” y “Velocidad”, que corresponden a problemas en contextos de velocidad de categoría *simple*, en los que los estudiantes debían completar el enunciado del problema con

una respuesta numérica. Los tres problemas son similares, pues se presentan como dato dos de las siguientes tres variables: la distancia, la velocidad o el tiempo, quedando la variable restante como incógnita. El nombre de cada uno de estos tres problemas indica la variable considerada como incógnita. El problema *Distancia* puede resolverse mediante una multiplicación. Los otros dos pueden resolverse mediante una división exacta.

- **Distancia:** Si un hombre conduce a 72 kilómetros por hora por 2 horas, entonces la distancia que recorre es de ____ kilómetros.
- **Tiempo:** Un conductor se demora ____ horas en viajar 136 kilómetros a una velocidad de 68 kilómetros por hora.
- **Velocidad:** En su bicicleta, Camila anduvo 45 kilómetros en 3 horas, así que su velocidad fue de ____ kilómetros por hora.

En la siguiente etapa se presentó el problema “Cambio de velocidad”, donde los estudiantes debían dar una respuesta numérica. Se trata de un problema de mayor dificultad que los de la primera etapa y está dentro de la categoría *problemas de velocidad variable*. Este problema se presentó en tres versiones. Dos versiones, “forma 1” y “forma 2”, sólo varían en uno de los datos: el tiempo. Esto hace que en la forma 2 aparezcan cantidades fraccionarias, a diferencia de la forma 1 que involucra sólo cantidades enteras. La otra versión, “forma 3”, sólo cambia el contexto y mantiene las cantidades y procedimientos de la forma 1.

- **Cambio de velocidad, forma 1:** El domingo Jimena visitó a sus abuelos, que viven a 150 km. Después de partir en bicicleta a una velocidad promedio de 15 km/h, siguió en el camión del abuelo que la recogió, pues la encontró casualmente en el camino. La velocidad promedio del camión por el resto del viaje fue de 75 km/h. Al llegar a casa de sus abuelos, notó que habían transcurridos exactamente 6 horas desde que salió de su casa. ¿Cuánto tiempo anduvo en bicicleta?

- **Cambio de velocidad, forma 2:** El domingo Jimena visitó a sus abuelos, que viven a 150 km. Después de partir en bicicleta a una velocidad promedio de 15 km/h, siguió en el camión del abuelo que la recogió, pues la encontró casualmente en el camino. La velocidad promedio del camión por el resto del viaje fue de 75 km/h. Al llegar a casa de sus abuelos, notó que habían transcurridos exactamente 8 horas desde que salió de su casa. ¿Cuánto tiempo anduvo en bicicleta?
- **Cambio de velocidad, forma 3:** El domingo Jimena leyó un libro de 150 páginas para la prueba del lunes. Comenzó a leer con la TV encendida y leyó a una razón promedio de 15 páginas por hora. Apagó la TV, se concentró mejor, y leyó el resto del libro a una razón promedio de 75 páginas por hora. Al terminar, notó que habían pasado exactamente 6 horas desde que comenzó a leer. ¿Cuánto tiempo leyó con la TV apagada?

En la etapa final, con la muestra de alumnos participantes seleccionada por rendimiento, se presentaron los problemas “Persecución” y “Encuentro”. En estos problemas, los alumnos debían argumentar por escrito su respuesta. Ambos problemas son más complejos que los de las etapas anteriores.

- **Persecución:** Dos piloto de moto, Claudio y Eduardo, compiten en una carrera de persecución. Claudio sale primero. Media hora más tarde, Edmundo comienza a perseguirlo. La velocidad de Claudio es de 84 kilómetros por hora y la de Edmundo es 90 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo demora Edmundo en atrapar a Claudio?

Respuesta: Edmundo atrapa a Claudio en _____ horas, _____ minutos y _____ segundos. Explicación de la respuesta

- **Encuentro:** Dos lugares, R y S, están a 300 kilómetros de distancia el uno del otro. Gonzalo parte de R y conduce a 84 kilómetros por hora en dirección

a S. Al mismo tiempo, Humberto parte de S y conduce hacia R a 60 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo demoran en encontrarse?

Respuesta: Gonzalo y Humberto se cruzan transcurrido un tiempo de ____ horas, ____ minutos y ____ segundos. Explicación de la respuesta.

2.5.2. Pruebas

La administración de los problemas se realizó en el marco de las distintas fechas del Campeonato Escolar de Matemáticas CEMAT-2015, a través de tres de las pruebas de éste. Las pruebas fueron enviadas en formato digital a cada establecimiento, siendo los equipos de profesores encargados de cada establecimiento los responsables de su aplicación y del posterior envío de las pruebas respondidas por escrito en papel. Ver los anexos 3, 4 y 5 para el formato de aplicación de estos instrumentos. Las pruebas tienen un formato establecido, en cuanto al espacio destinado para responder y al tiempo para responder.

2.5.3. Recolección de los datos

Una vez recopiladas las pruebas de los, se comenzó a hacer el registro de ellos. En este instrumento se registraron los estudiantes (nombre, sexo, curso, colegio, e-mail) y cada una de sus respuestas. El instrumento es un documento, libro de cálculo, en el software Excel, se registraba en cada hoja un nivel y sus resultados de acuerdo a los enfoques del estudio. Posteriormente se realizan análisis de los datos bajo esos tres enfoques: el rendimiento de los estudiantes, las estrategias utilizadas y los errores cometidos.

2.5.3.1. Rendimiento

Consideramos como *rendimiento*, para este estudio, la cantidad de respuestas correctas que presenta la muestra seleccionada respecto de los problemas planteados. Así, cuando decimos que un nivel tiene un alto rendimiento, nos estamos refiriendo a que el número de estudiante de ese nivel que respondió correctamente es alto.

Se asignó puntaje 1 ó 0 a las respuestas de los estudiantes de acuerdo a si se consideraban correctas o incorrectas. Las respuestas en blanco también tienen puntaje 0. Una vez obtenidos los puntajes por cada problema en los niveles en los que se aplicó, fue posible realizar los análisis de datos que se describirán en los resultados.

2.5.3.2. Estrategias

Las estrategias se analizaron sólo para los problemas Persecución y Encuentro en octavo básico. En primer lugar, se registró el conjunto de procedimientos utilizado en cada respuesta escrita. A continuación se definieron las estrategias asociadas a los conjuntos de procedimientos registrados, entendiendo por *estrategia* al conjunto organizado de cálculos, procedimientos y argumentos que se realizan para resolver el problema y que, en caso de ejecutarse sin errores, permiten obtener la solución.

Luego de definidas las estrategias, se obtuvo la frecuencia de uso de cada una de ellas. Las estrategias que son usadas por menos del 3% de la muestra se categorizan como “Otra Estrategia”. Los registros escritos con poco argumento o con argumentaciones no coherentes con el enunciado, fueron categorizados como “Sin Estrategia”. Los registros escritos que contienen argumentos aislados a los que no fue posible dar coherencia se categorizaron como “Estrategia no reconocible”.

Además de definir las estrategias y contabilizar la cantidad de estudiantes que la utilizó, se calculó el porcentaje de éxito de cada una y los patrones de error asociados.

2.5.3.3. Errores

Los errores se analizaron sólo para los problemas Persecución y Encuentro en octavo básico, pues se consideran asociados a las estrategias determinadas.

En primer lugar, se registró los errores cometidos en cada respuesta escrita. A continuación se definieron los tipos de error que permiten agrupar los registros de la etapa anterior. Luego de definidos los tipos de error, se obtuvo la frecuencia de cada uno de ellos contando cuántos estudiantes cometen tal tipo de error (si un

estudiante comete 2 veces el mismo tipo de error se contabiliza una sola vez). Los tipos de error con una frecuencia menor al 3% de la muestra se tipifican como “Otro Error”. Los registros escritos que no muestran errores se tipifican como “Sin Errores”.

Capítulo III: Análisis de los datos.

3.1. Procedimiento de análisis

La exploración de los datos obtenidos se apoya, en su primera parte, en un estudio descriptivo en base a las respuestas de los estudiantes a cada problema. Se continúa, en una segunda parte, con la descripción de las estrategias utilizadas por los estudiantes, los porcentajes de éxito asociadas a ellas. Finalmente el enfoque se encuentra en los errores, que comenten los estudiantes dentro de sus procedimientos. En cada uno de los apartados se infiere, además, sobre las posibles causales sobre estos resultados.

3.1.1. Primer objetivo específico.

Partiremos por describir el rendimiento de los estudiantes en los problemas planteados en cada una de las etapas del campeonato. Esta descripción se basa en las respuestas de los estudiantes, si éstas son correctas, incorrectas u omitidas y se describe por problema y posteriormente por nivel educativo. Además se realiza una inferencia de las posibles causas de tales resultados.

3.1.1.1. Primera etapa: Problemas Distancia, Tiempo y Velocidad

Se planteó el problema *Distancia* 1412 estudiantes, repartidos en los niveles quinto, sexto y séptimo básicos. El desempeño logrado por los estudiantes es alto, superando en los tres niveles el 80% de respuestas correctas. El nivel con mayor éxito en este problema es séptimo básico con un 84,57% de éxito, mientras que el nivel de quinto básico es el que obtiene menor éxito con un 80,95%. El problema *Tiempo* fue presentado a 1937 estudiantes desde quinto a octavo básico. El desempeño logrado por los estudiantes supera el 60% de éxito, aumentando según el nivel de escolaridad llegando hasta un 87,81% en octavo básico. Se planteó el

problema *Velocidad* 998 estudiantes de los niveles séptimo y octavo básico. El porcentaje de éxito en ambos niveles es similar llegando cerca del 85% en el nivel mayor.

En la siguiente tabla es posible observar y comparar los desempeños de cada nivel en cada problema presentado. Se encuentran incluidas dentro de los porcentajes de respuestas incorrectas las respuestas omitidas.

Problema	Quinto (n=441)		Sexto (n=498)		Séptimo(n=473)		Octavo (n=525)	
	C	I	C	I	C	I	C	I
Distancia	80.95	19.05	79.72	20.28	84.57	15.43	-	-
Tiempo	61.68	38.32	77.31	22.69	86.47	13.53	87.81	12.19
Velocidad	-	-	-	-	82.45	17.55	84.57	15.43

Tabla 6: Resultados problemas Distancia, Tiempo y Velocidad.

C: porcentaje de respuestas correctas. I: porcentaje de respuestas incorrectas.

En cada problema el mejor rendimiento lo obtiene el nivel mayor, esto es de suponer, ya que a medida que los estudiantes avanzan en los niveles educativos ha de esperarse que desarrollen mayores habilidades y adquieran mayor conocimiento lo que les permite abordar mejor un problema matemático. Consecuentemente, ocurre que el porcentaje de éxito en el problema, aumenta a medida que aumenta el nivel, con una excepción en el caso del problema *Distancia* en quinto y sexto básico.

A continuación se presentan los resultados obtenidos en los niveles de quinto a octavo básico por cada problema planteado

Quinto básico

Los problemas presentados en quinto básico fueron *Distancia* y *Tiempo*. La tabla que se encuentra a continuación muestra el desempeño de los estudiantes de este nivel por cada problema y en conjunto.

Problema	correctas	%	incorrectas	%	omitidas	%	total
Distancia	357	80,95	72	16,33	12	2,72	441
Tiempo	272	61,68	159	36,05	10	2,27	441
Ambos	246	55,78	48	10,88	10	2,27	441

Tabla 7: Desempeño general quinto básico problemas Distancia y Tiempo

Existe gran diferencia entre los resultados obtenidos, la cantidad de alumnos que se equivocaron en el problema Tiempo supera en más del doble a los estudiantes que se equivocaron en el problema Distancia. Debido al nivel del que se trata, es posible que la gran diferencia se deba a la operación de la cual dependía llegar al resultado, el problema Distancia se resuelve mediante una multiplicación, mientras que la respuesta del problema Tiempo se obtiene gracias a una división. Más aún, se trata de una división cuyo divisor (número por el cual se divide) es de dos dígitos, lo que en niños de ese nivel representa mayor complejidad. Además la manera en que es expuesto el problema (orden de los datos) puede facilitar o complejizar la comprensión del problema.

Sexto básico

Se presentaron en este nivel los problemas Distancia y Tiempo. En la siguiente tabla se encuentra el detalle de la cantidad y el porcentaje de los tipos de respuestas obtenidas.

Problema	correctas	%	incorrectas	%	omitidas	%	total
Distancia	397	79,72	87	17,47	14	2,81	498
Tiempo	385	77,31	104	20,88	9	1,81	498
Ambos	329	66,06	36	7,23	9	1,81	498

Tabla 8: Desempeño general de sexto básico en problemas Distancia y Tiempo

El logro de los estudiantes de este nivel es similar para los dos problemas, bordeando el 80% de éxito, sin embargo el mejor desempeño se alcanza en el problema Distancia superando en 12 el número de estudiantes que respondieron correctamente y disminuyendo en 17 quienes respondieron erróneamente. El gran éxito en este problema puede atribuirse al dominio que tienen los estudiantes de este nivel en las operaciones básicas multiplicación y división, que son de las que

depende la respuesta de cada problema, respectivamente. Respecto de la omisión de las respuestas, es el problema Distancia quien obtiene una cifra más alta, superando en 5 el número de estudiantes respecto del problema Tiempo. La omisión de las respuestas de los estudiantes puede deberse a una falta de comprensión del enunciado, aunque la cifras son muy pequeñas considerando el gran número de estudiantes a los que se planteó el problema.

Séptimo básico

A diferencia de los otros tres niveles, en este nivel se presentaron los tres problemas: Distancia, Tiempo y Velocidad. En la siguiente tabla, además de ver el detalle de los resultados por cada problema, es posible observar cómo fue el desempeño de los estudiantes agrupando los problemas.

Problema	correctas	%	incorrectas	%	omitidas	%	Total
Distancia	400	84,57	64	13,53	9	1,90	473
Tiempo	409	86,47	43	9,09	21	4,44	473
Velocidad	390	82,45	63	13,32	20	4,23	473
Distancia y Tiempo	364	76,96	103	21,78	6	1,27	473
Distancia y Velocidad	351	74,21	115	24,31	7	1,48	473
Tiempo y Velocidad	363	76,74	98	20,72	12	2,54	473
Todos	331	69,98	7	1,48	6	1,27	344

Tabla 9: Desempeño general séptimo básico, problemas Distancia, Tiempo y Velocidad

El desempeño de este nivel es alto, superando el 82% de respuestas correctas en cada problema. Se alcanzó el mejor rendimiento en el problema Tiempo, marcando una diferencia de 20 estudiantes más que respondieron correctamente en comparación con el problema Velocidad que obtuvo el desempeño más bajo. Ambos problemas se resuelven mediante una división, pero era de esperarse que tuviera mejores resultados el problema Velocidad considerando que el divisor (número por

el cual se divide es de un solo dígito, a diferencia del problema tiempo en que el divisor es de dos dígitos. Esto puede explicarse por una, suponemos, deficiente comprensión lectora en donde los estudiantes no fueron capaces de comprender qué relación tenían los datos con la pregunta realizada, o cómo utilizar para dar respuesta al problema. Otra explicación para este resultado es que es probable que los estudiantes hayan utilizado la operación inversa, es decir, realizar multiplicaciones sucesivas hasta dar con el resultado, en el caso del problema Tiempo calcular los múltiplos de 68 hasta obtener 136, y en problema Velocidad calcular los múltiplos de 3 hasta obtener 45, de ser así claramente era más fácil llegar al resultado del primer problema. Situación similar ocurre al comparar el problema Distancia con el problema Tiempo, para los estudiantes, generalmente, es más fácil multiplicar que dividir, y pese a que el problema distancia se resuelve mediante una multiplicación, el rendimiento de los estudiantes fue mayor en el problema Tiempo, seguramente esto también radica en la comprensión lectora de los estudiantes.

Octavo básico

Para este nivel se plantearon los problemas Tiempo y Velocidad. Es en este nivel donde se obtienen los mejores resultados en cada uno de estos problemas. Además entre los niveles que respondieron ambos problemas es este el nivel con el porcentaje de respuestas correctas más alto, lo que es de esperarse considerando que es el nivel mayor, por ende los estudiantes han de tener mayores habilidades para realizar cálculos y resolver problemas. Sólo un número de 15 estudiantes se equivocó en ambos problemas, superando así el desempeño de séptimo básico con 98 estudiantes en el mismo criterio. Entre los dos problemas, el que presentó resultados más bajos es el problema Velocidad, con una diferencia de 14 estudiantes en preguntas incorrectas respecto del problema Tiempo y con una diferencia de 10 estudiantes entre quienes omitieron su respuesta. Nuevamente, al igual que en séptimo básico, es el problema Tiempo en el que se obtienen resultados más altos, lo que ha de deberse a la técnica utilizada por los estudiantes para realizar la operación.

Problema	correctas	%	incorrectas	%	omitidas	%	Total
Tiempo	461	87,81	43	8,19	21	4,00	525
Velocidad	444	84,57	57	10,86	24	4,57	525
Ambos	416	79,24	15	2,86	14	2,67	445

Tabla 10: Desempeño general octavo básico, Tiempo y Velocidad

3.1.1.2. Segunda etapa: Problema “Cambio de Velocidad”, forma 1, 2 y 3.

El análisis realizado al problema Cambio de Velocidad, pregunta n°11 de la prueba, corresponde sólo al nivel primer medio. Este problema se diferencia de los anteriores, por la presentación que tiene, por lo que requiere que los estudiantes realicen para responderlo, es decir, grado de complejidad que podría presentar a los estudiantes. De este problema, pese a sólo considerar un nivel, se tienen tres resultados distintos, ya que como se mencionó con anterioridad, el problema se presentó en tres formas.

En la siguiente tabla es posible observar el rendimiento de los estudiantes en el problema, el que posteriormente se describe por separado por cada una de las formas.

Forma	correctas	%	incorrectas	%	omitidas	%	total
1	96	48,2	37	18,59	66	33,17	199
2	4	19	9	42,86	8	38,1	21
3	116	52,7	27	12,27	77	35	220

Tabla 11: Desempeño general problema Cambio de Velocidad.

Forma 1

El problema fue presentado en la forma 1 a 199 estudiantes de primero medio. El logro alcanzado por los estudiantes no es alto, si bien la cantidad de respuestas correctas superó en más del doble al número de respuestas erróneas, menos de la mitad de los estudiantes contestó correctamente. Además, la cantidad de respuestas omitidas asciende a casi un tercio del total. En el grupo de estudiantes que respondieron incorrectamente, se encuentran no solo quienes se equivocaron

en sus respuestas y/o procedimientos, sino también quienes pese a resolver correctamente el problema respondieron a la pregunta contraria, es decir, responden la cantidad de horas que Jimena anduvo en el camión y no en bicicleta como lo pide el problema, lo que evidencia desconcentración o falta de comprensión lectora.

Forma 2

Los resultados de la forma 2 son poco alentadores, y los más bajos de las tres formas. Si bien el número de alumnos a los cuales se planteó el problema fue muy pequeño (21), la mayoría de ellos no logró responder correctamente el problema, y más aún, la cantidad de estudiantes que omitió el problema sólo resta 1 de los que respondieron equivocadamente y que doblan la cantidad de estudiantes que respondió correctamente. Dentro de quienes respondieron correctamente, hubo dos estudiantes que respondieron “7:30” que, si bien no corresponde el formato de su respuesta, de todas maneras se consideraron dentro de los 4 estudiantes (19%) que contestaron correctamente. Este bajo resultado se atribuye principalmente al cálculo que debían realizar los estudiantes para llegar al problema, el cual no daba un número entero como respuesta, a diferencia de las otras formas. Creemos que, o los estudiantes no supieron realizar el cálculo, o una vez realizado no supieron interpretarlo.

Forma 3

El problema en su forma 3 de presentación fue la que obtuvo los mejores resultados de las tres. De los estudiantes que respondieron el problema en esta forma más de la mitad de ellos respondió correctamente y la cifra aumenta si se considera a quienes realizaron un procedimiento correcto, ya que alrededor de un 5% de los estudiantes resolvió correctamente pero respondió a la pregunta contraria, es decir respondieron la cantidad de horas que Jimena leyó con la televisión encendida y, por lo tanto, entran en el porcentaje de estudiantes que respondió equivocadamente.

3.1.1.3. Quinta etapa y final: Problemas Persecución y Encuentro.

En la quinta etapa del campeonato, que corresponde a la tercera en nuestro estudio, se presentaron los problemas Persecución y Encuentro, que corresponden a los problemas de mayor complejidad y donde los conceptos asociados al contexto de velocidad se ponen mayormente a prueba. Se esperó hasta la etapa final para poder tener una muestra seleccionada de estudiantes, que corresponden a los estudiantes con mejor rendimiento en las cuatro etapas anteriores.

Persecución

El problema se planteó en dos niveles, séptimo y octavo básico. En la siguiente tabla es posible observar el desempeño de ambos niveles en el problema.

Problema	Séptimo básico (n=58)				Octavo básico (n=111)			
	C	%	I	%	C	%	I	%
Persecución	14	24,14	44	75,86	38	34,23	73	65,77

Tabla 12: Desempeño general, problema Persecución

C: cantidad de respuestas correctas. I: cantidad de respuestas incorrectas.

Son los estudiantes de octavo básico quienes logran un mayor desempeño, superando en un 10%, aproximadamente, el porcentaje de respuestas correctas de los estudiantes del otro nivel. Respecto a las respuestas incorrectas se consideran dentro de este criterio también las respuestas omitidas y nuevamente es octavo quien obtiene mejores resultados. Más aún, en séptimo básico la cantidad de estudiantes que se equivoca es más del triple que la cantidad de estudiantes que responde correctamente, mientras que en octavo, las respuestas incorrectas no alcanzan a doblar las respuestas correctas. Estos resultados se pueden justificar, primeramente por la diferencia en los niveles. Como se ha dicho antes, se espera que de dos niveles enfrentados a un mismo problema se obtengan mejores resultados en el nivel mayor. Otra aspecto al que se puede atribuir esta diferencia en los desempeños es la ubicación de los problemas en cada prueba, en séptimo básico el problema Persecución es el problema n°5, último problema de la prueba, es posible que los estudiantes se encuentren cansados, aburridos o desconcentrados al momento de enfrentarlo o también que hayan dedicado mucho

tiempo a los problemas anteriores y se vean más apurados al responder lo que se traduce en no comprender bien el problema o responderlo sin mucha dedicación.

Encuentro

El problema “encuentro” se planteó en los niveles de octavo básico y primero medio. Los resultados obtenidos en el segundo nivel son muy alentadores y sobrepasan ostensiblemente a los obtenidos en octavo, no sólo por la diferencia de respuestas correctas en cada uno, sino por cómo se distribuyeron los estudiantes en las categorías (correctas, incorrectas y omitidas) de cada nivel. En la tabla es posible observar las cifras en detalle.

Problema	Octavo básico (n=111)				Primero medio (n=43)			
	C	%	I	%	C	%	I	%
Encuentro	30	27,03	81	72,97	30	69,77	13	30,23

Tabla 13: Desempeño general problema Encuentro

C: cantidad de respuestas correctas. I: cantidad de respuestas incorrectas.

En octavo básico el desempeño de los estudiantes es bajo, la cantidad de estudiantes que respondieron equivocadamente al problema supera en más del doble a quienes lo hicieron correctamente. En primero medio los resultados son muy diferentes, aquí es la cantidad de respuestas correctas la que supera en más del doble a quienes respondieron erróneamente. La cantidad de estudiantes que tuvieron éxito en el nivel primero medio es prácticamente el 70% de la muestra, sólo 13 estudiantes no lograron responder correctamente al problema, una cifra baja considerando que dentro de este grupo no sólo están quienes se equivocaron si no también quienes no respondieron. Es este nivel quien obtiene el desempeño más alto entre los dos problemas de la última etapa. Los buenos resultados del nivel primero medio y la diferencia con los obtenidos en octavo básico, ha de deberse a los mismos motivos expuestos en el problema Persecución, es decir, la diferencia de los niveles y la ubicación del problema dentro de la prueba. El problema Encuentro es el último problema de la prueba de octavo básico, mientras que en la prueba de primero medio es el tercero.

Otro factor que puede influir en los resultados de ambos problemas es el dominio sobre el concepto de velocidad. Como bien se mencionó anteriormente el concepto de velocidad y todo lo relacionado es un contenido no abordado en los planes y programas educativos de nuestro país, tampoco en los textos de estudios se utilizan ejemplos sobre ello (salvo unas ínfimas excepciones), es por ello que creemos que cuando los estudiantes se enfrentan a un problema en el que se expone este concepto y en que ellos debe comprenderlo bien para poder entender qué significa la información entregada y cómo abordarla, es que se ven entrampados en la mayoría de los casos. Notemos que los problemas Persecución y Encuentro son los con peores resultados, justamente los problemas en donde se requiere más dominio sobre el concepto de velocidad.

3.1.2. Segundo objetivo específico.

Las estrategias utilizadas por los estudiantes en los problemas *Persecución* y *Encuentro* sólo se analizaron para el nivel octavo básico. En ambos problemas la gran mayoría de los estudiantes no utilizó una estrategia óptima, es decir, una estrategia que le permitiera resolver el problema en menos pasos. Las estrategias con mayor uso son de tipo intuitivo y se basan en ir registrando distancias por intervalos de tiempo.

3.1.2.1. Problema Persecución

Fueron tres las estrategias utilizadas por los estudiantes para intentar resolver el problema *Persecución*, las que se muestran en la siguiente tabla.

Estrategia	Descripción
P1	Se hace un registro de los avances sucesivos de los 2 móviles involucrados cada cierto intervalo de tiempo hasta que el avance acumulado de ambos coincide.
P2	Calcula la distancia inicial entre ambos pilotos y la diferencia entre sus velocidades. El problema se reduce entonces a determinar el tiempo en que tal distancia se recorre con la diferencia de velocidad determinada.

P3	Calcula la distancia inicial entre ambos pilotos. Se hace un registro de las disminuciones sucesivas de esta distancia cada cierto intervalo de tiempo hasta que se reduce a 0.
----	---

Tabla 14: Estrategias problema Persecución

- Ejemplo de estrategia P1

4. Persecución (B8)

Problema 4. Dos pilotos de moto, Claudio y Eduardo, compiten en una carrera de persecución. Claudio sale primero. Media hora más tarde, Eduardo comienza a perseguirlo. La velocidad de Claudio es 84 kilómetros por hora y la de Eduardo es 90 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo demora Eduardo en atrapar a Claudio?

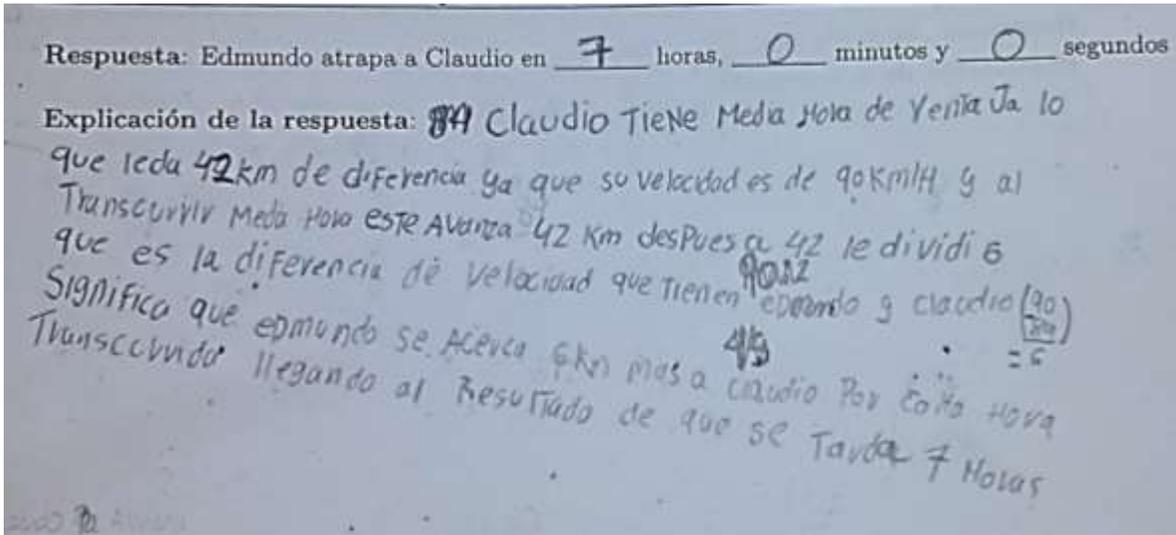
Respuesta: Eduardo atrapa a Claudio en 7 horas, 0 minutos y 0 segundos

Explicación de la respuesta:

	1	1 1/2	2	2 1/2	3	3 1/2	4	4 1/2	5	5 1/2	6	6 1/2	7	7 1/2
Claudio	84	126	168	210	252	294	336	378	420	462	504	546	588	630
Eduardo	45	90	135	180	225	270	315	360	405	450	495	540	585	630
	2	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10	1/11	1/12	1/13

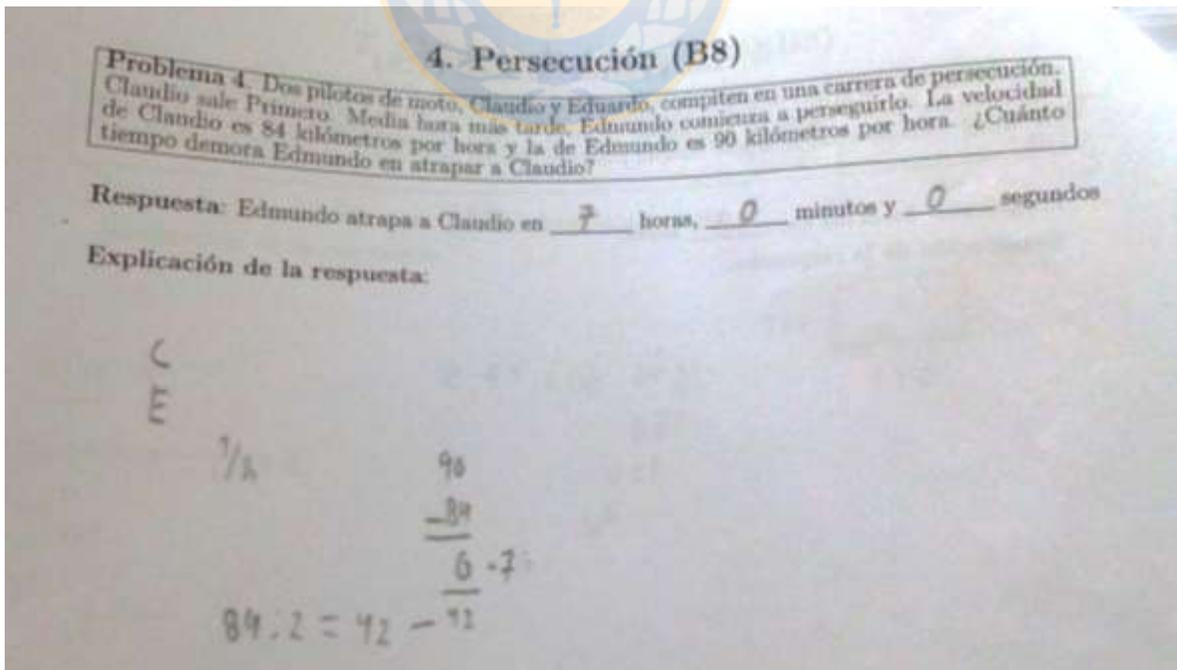
El estudiante escribe los nombres de ambos pilotos y registra la cantidad de kilómetros que avanza cada uno en intervalos de tiempo de media hora. Obtiene que ambos han recorrido la misma cantidad de kilómetros cuando el primero lleva 7 ½ horas y el segundo 7 horas. Como se trata de una persecución, en donde se pregunta cuando se demora el segundo piloto (Eduardo) en alcanzar al primero (Claudio), responde correctamente 7 horas.

- Ejemplos de estrategia P2



En la imagen, el alumno describe su razonamiento que consiste en identificar la diferencia en cuanto a la ventaja del primer piloto y la diferencia en cuanto a la velocidad del segundo piloto. Escribe un razonamiento y realiza un cálculo y finalmente obtiene la respuesta.

Otro ejemplo de la estrategia P2, es el que se muestra en la siguiente imagen:



Si bien, esta respuesta es muy distinta en cuanto a forma respecto de la anterior, ambas siguen la misma estrategia. Aquí el estudiante calcula la ventaja en distancia del primer piloto realizando una división y, mediante una sustracción, calcula la ventaja del segundo piloto en cuanto a las velocidades. Luego multiplica por 7 el segundo resultado y observa que coincide con el primero, es decir, ha obtenido el tiempo que se demora el segundo piloto en alcanzar al primero y con ello la solución del problema.

- **Ejemplo de estrategia P3**

En el ejemplo de la imagen, es posible observar los cálculos realizados por el estudiante, además de leer la explicación de su razonamiento. Él calcula la ventaja del primer piloto en cuanto a distancia y luego realiza descuentos sucesivos hasta que esa distancia es 0, que es cuando se produce el alcance.

Respuesta: Edmundo atrapa a Claudio en 7 horas, 0 minutos y 0 segundos

Explicación de la respuesta:

$84 : 2 = 42 \text{ km}$ → resto de por Claudio cuando sale Edmundo

$42 - 84$
 $- 6$
 36 06 ✓
 $- 6$
 30
 $- 6$
 24
 $- 6$
 18
 $- 6$
 12
 $- 6$
 6
 $- 6$
 0

1h → 6km → 36km
 2h → 12km → 30km
 3h → 18km → 24km
 4h → 24km → 18km
 5h → 30km → 12km
 6h → 36km → 6km
 7h → 42km → 0km

1º Sacar la diferencia entre Claudio y Edmundo
 2º Calcular el tiempo que tarda Edmundo en alcanzarlo.

En otro grupo están quienes utilizaron otro procedimiento, que no fue posible reconocer debido a que no se entendía la idea que perseguían en la realización de los pasos o el desarrollo de estos estaba muy desordenado, todo ellos entran en la categoría de “no reconocible” (ver por ejemplo Anexo n°6).

En la siguiente tabla es posible observa los resultados de estas estrategias.

Estrategia	uso	%	éxito	%
P1	53	47,75	21	39,62
P2	12	10,81	11	91,67
P3	7	6,31	4	57,14
No reconocible	13	11,71	2	15,38
Sin estrategia	26	23,42	0	0
	111	100	38	

Tabla 15: Resultado estrategias problema Persecución

La estrategia más utilizada es la estrategia “P1” (ver por ejemplo Anexo n°7); sin embargo, de quienes utilizaron este método menos de la mitad de ellos obtuvo éxito. La estrategia con mayor éxito fue la estrategia “P2” que se considera óptima para resolver el problema (ver por ejemplo Anexo n°8) y que era la que se esperaba que utilizaran los estudiantes, sólo un estudiante se equivocó al responder utilizando esta estrategia. La estrategia “P3” que se considera como una estrategia mixta ya que combina las estrategias P1 y P2, fue utilizada por apenas 7 estudiantes, sin embargo el porcentaje de éxito de ella es superior al 50% de quienes la utilizaron. El 23,42% de los estudiantes se ubica en la categoría “sin estrategia”, en este grupo se encuentran los estudiantes que no realizaron algún procedimiento o que el procedimiento utilizado, aunque fuera bien ejecutado, no conducía a la solución del problema.

3.1.2.2. Problema Encuentro.

En el análisis de las estrategias realizado para el problema *Encuentro* se definieron 3 estrategias.

Estrategia	Descripción
E1	Se hace un registro de los avances sucesivos de los 2 pilotos involucrados cada cierto intervalo de tiempo, los cuales se van sumando. En los avances finales se consideran intervalos de tiempo más pequeños, hasta que se produce el encuentro cuando se completan los 300 kilómetros de distancia.
E2	Se hace un registro de los descuentos sucesivos de la distancia entre los 2 pilotos involucrados cada cierto intervalo de tiempo. En los avances finales se consideran intervalos de tiempo más pequeños, hasta que la distancia se reduce a 0.
E3	Calcula la suma de las velocidades de los 2 pilotos. Luego, se determina el tiempo en que se recorren los 300 km de distancia entre ellos a tal velocidad, haciendo una división con resto cuyo resultado debe interpretarse adecuadamente.

Tabla 16: Estrategias problema Encuentro

- Ejemplos estrategia E1:

5. Encuentro (B8)

Problema 5. Dos figuras, R y S, están a 300 kilómetros de distancia el uno del otro. R conduce a 84 kilómetros por hora en dirección a S. Al mismo tiempo, S conduce hacia R a 60 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo encuentran?

Respuesta: Gonzalo y Humberto se cruzan transcurrido un tiempo de 2 minutos y 0 segundos.

Explicación de la respuesta:

R 84 km/h
S 60 km/h
Suma de velocidades: 84 + 60 = 144 km/h

Distancia total: 300 km

Calculación del tiempo: $\frac{300}{144} = 2.0833$ horas

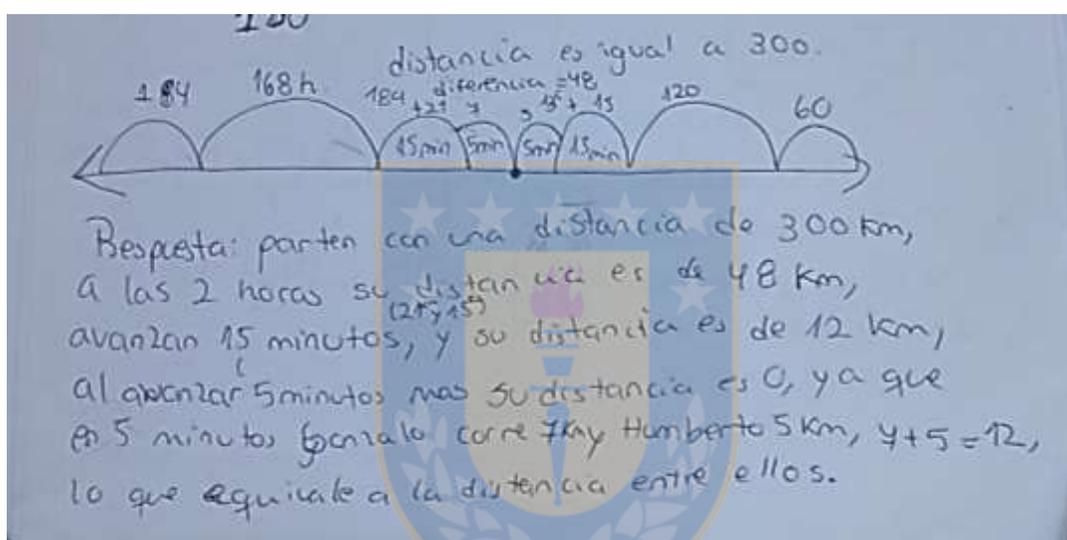
2.0833 horas = 2 horas + 0.0833 horas

0.0833 horas $\times 60$ minutos = 4.998 minutos ≈ 5 minutos

Resultado: 2 horas y 5 minutos.

En las imágenes se observan las respuestas de dos estudiantes. En la imagen de la izquierda el estudiante registra en esquema y calculándola suma de la cantidad de kilómetros que recorren juntos cada una hora. Luego reduce los intervalos de tiempo cada 30, 15 y 5 minutos, y obtiene la solución del problema. En la imagen de la derecha el estudiante comienza de manera similar al de la primera foto, pero luego calcula la cantidad de kilómetros que recorren juntos por cada minuto hasta que han completado los 300 kilómetros.

- **Ejemplo estrategia E2:**



En la imagen el estudiante considera la distancia a la que se encuentran los dos pilotos que es proporcionada por el enunciado. Luego considera las velocidades de los pilotos y calcula la distancia a la que se encuentra uno del otro transcurridos cierto intervalos de tiempo. Precisamente en este ejemplo hay errores de cálculos que no permiten obtener la solución del problema, sin embargo, la estrategia es correcta.

- Ejemplo estrategia E3:

5. Encuentro (B8)

Problema 5. Dos lugares, R y S, están a 300 kilómetros de distancia el uno del otro. Gonzalo parte de R y conduce a 84 kilómetros por hora en dirección a S. Al mismo tiempo, Humberto parte de S y conduce hacia R a 60 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo demoran en encontrarse?

Respuesta: Gonzalo y Humberto se cruzan transcurrido un tiempo de 2 horas, 7 minutos y 30 segundos.

Explicación de la respuesta:
 Las dos velocidades se suman y así da la velocidad total, la distancia dividida en la velocidad da el tiempo en el que se encuentran, entonces se encuentran en 2 horas y 0,07 horas es igual a 7 minutos con 30 segundos.

En la imagen, el estudiante explica su estrategia. Señala que sumó las velocidades de los pilotos y así obtuvo la velocidad total, luego divide la distancia a la que se encuentra por tal velocidad, así obtiene el tiempo que se demoran en encontrarse. El error está en no saber interpretar el decimal periódico.

Además de las categorías anteriores, se estableció una categoría de “otra estrategia” cuyo porcentaje de uso no supera el 3% y por lo tanto no se puede definir como una estrategia aparte. En la siguiente tabla es posible observar los resultados de cada una de estas estrategias.

Estrategia	Uso	%	Éxito	%
E1	47	42,34	25	53,19
E2	7	6,31	2	28,57
E3	6	5,41	0	0
Otro	2	1,8	1	50
No reconocible	16	14,41	1	6,25
Sin estrategia	33	29,73	1	3,03
	111	100	30	

Tabla 17: Resultados estrategias problema Encuentro

La estrategia más utilizada fue la estrategia “E1” (ver por ejemplo Anexo n°11), resultando ser la más exitosa con un porcentaje, ya que más de la mitad de los estudiantes que utilizaron esta estrategia, respondieron correctamente. La estrategia “E2” (ver por ejemplo Anexo n° 12) fue utilizado por apenas 7 estudiantes y sólo dos de ellos respondieron correctamente, era esta la estrategia que demandaba mayor comprensión del problema e interpretación de los datos obtenidos. La estrategia “E3” fue la menos utilizada y ninguno de los estudiantes que la utilizó respondió correctamente. El número de estudiantes que omitió su respuesta es de 13 alumnos, ellos son considerados en la categoría “sin estrategia”, en la que también se encuentran quienes realizaron un procedimiento que, aunque estuviera bien ejecutado, no los llevaría a la solución del problema (ver por ejemplo Anexo n°17). De 2 estudiantes que utilizaron otra estrategia, vale decir, que se entendía su razonamiento, coincidía con su respuesta, y que de estar bien ejecutada llevaría a la respuesta correcta, sólo un estudiante respondió correctamente. Por último, están quienes utilizaron un método que no fue posible definir (ver por ejemplo Anexo n° 18), dentro de este grupo sólo un estudiante logró responder correctamente al problema.

3.1.3. Tercer objetivo específico.

El análisis de errores se realizó para los problemas Persecución y Encuentro en octavo básico, al igual que el análisis de estrategia. Esto es porque los errores se consideran asociados a las estrategias de resolución de los estudiantes. Se revisaron los registros escritos de 111 estudiantes de octavo básico.

3.1.3.1. Persecución

De los registros escritos analizados, 53 presentaban errores. De estos, 4 presentaban un segundo error distinto al ya cometido, es decir, para el problema Persecución se contaron 57 errores en total. Así, 58 registros escritos se ubican en la categoría sin error.

Para el problema persecución se establecieron 5 tipos de error que se describen en la siguiente tabla.

Tipo de error	Descripción
A	Considerar que la persecución comienza desde el momento en que sale el primer piloto.
B	El alumno se equivoca en alguna operación que lo lleva al resultado
C	El alumno no considera los 42 kilómetros de ventaja que lleva el primer piloto.
D	El alumno multiplica o divide las velocidades de los pilotos
E	El alumno considera el mínimo común múltiplo como estrategia

Tabla 18: Tipos de errores del problema "persecución"

Para este problema, en la categoría *otro* se encuentran errores como:

- Considerar solo un piloto para resolver el problema.
- Al encontrar la solución al problema, sumarle un segundo.
- No completar la estrategia determinada hasta encontrar la solución o pasar de la solución del problema sin percatarse.
- Considerar una distancia distinta a 42 kilómetros para el primer piloto.
- Considerar velocidad como tiempo.

Los resultados de los errores cometidos por los estudiantes, en porcentaje, se encuentran en la siguiente tabla.

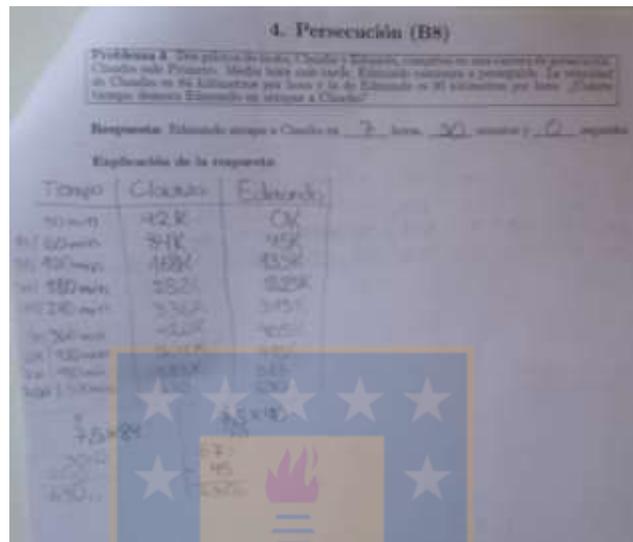
Tipo de error	A	B	C	D	E	Otro
Porcentaje	29,82	26,32	12,28	8,77	7,02	15,79

Tabla 19: Porcentaje por error de la pregunta persecución

El error de tipo A es aquel con mayor porcentaje de frecuencia y es producido por la falta de comprensión del concepto de persecución. Pues, en el enunciado del

problema, se pregunta por el tiempo que demora Edmundo en alcanzar a Claudio. Es decir, pregunta por el tiempo de conducción que lleva Edmundo.

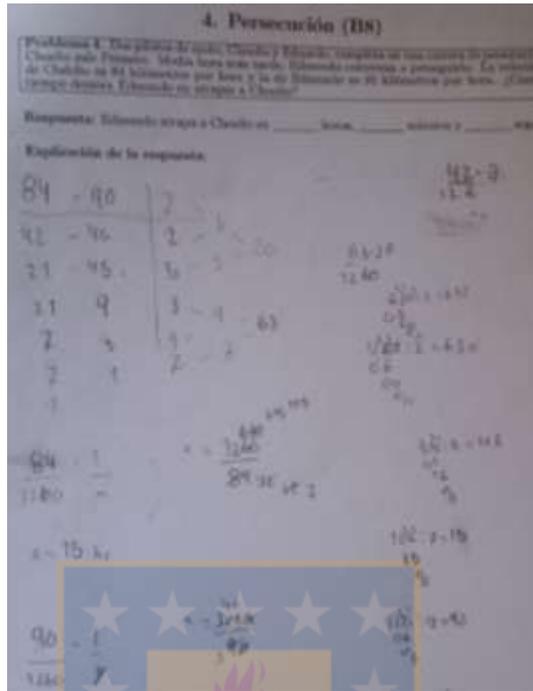
- **Ejemplo de error de “tipo A”**



El error de tipo C llama la atención por el hecho de que los alumnos no consideran toda la información entregada en el problema. Esto se evidencia en la parte del enunciado que dice: “Claudio sale primero. Media hora más tarde, Edmundo comienza a perseguirlo”, es decir, se puede deducir que Claudio lleva 42 km de ventaja. Cuando se omite esta información, el problema no tiene sentido, pues es imposible poder responder la pregunta, ya que Edmundo siempre estaría por delante de Claudio y en cada minuto que pase, este se encontrara aún más lejos. Sin embargo, este error apareció en 7 oportunidades.

Los errores del tipo D y E, son errores en la elección del método que llevara a la solución del problema. Pues, aunque el estudiante ejecute correctamente la división, multiplicación o el cálculo del mínimo común múltiplo, este, no los llevara a la solución del problema.

- Ejemplo de erro “tipo E”



3.1.3.2. Problema Encuentro.

De un total de 111 registros escritos, 54 presentaban errores en el problema *encuentro*. De estas, cinco presentaban dos errores, es decir, se encontraron 59 errores en total. Así, son 57 los registros escritos en donde no se hallaron errores.

Para el problema Encuentro se identificaron 4 tipos de error, los que se describen en la siguiente tabla.

Tipo de error	Descripción
F	El alumno considera distancias como tiempo
G	El alumno se equivoca en alguna operación que lo lleva al resultado
H	El alumno considera solo un conductor para dar la respuesta
I	El alumno divide las velocidades de los conductores

Tabla 20: Tipos de errores en el problema "Encuentro"

En la categoría *otro* de este problema, se consideraron errores tales como:

- Calcular el mínimo común múltiplo entre las velocidades.
- Considerar que mientras un conductor avanza, el otro se detiene.
- Calcular el promedio de las velocidades.
- Aproximar el resultado visualmente por medio de un diagrama.
- No considerar todos los decimales o decimales periódicos al momento de realizar las operaciones.
- Considerar la diferencia entre la distancia recorrida después de dos horas, como la distancia que separa a los conductores.
- Considerar el problema como una persecución.

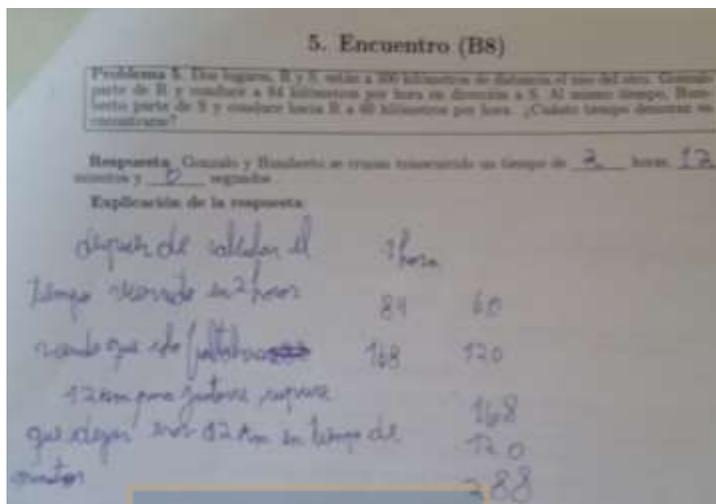
Con un total de 54 errores, la frecuencia en porcentaje se encuentra en la siguiente tabla.

Tipo de error	F	G	H	I	Otro
Porcentaje	10,17	33,90	10,17	11,86	33,90

Tabla 21: Porcentaje de error, problema Encuentro

El error de tipo F, en donde los alumnos confunden una distancia como tiempo, consiste en que una vez calculada la distancia de 288 kilómetros que recorrida por los conductores después de 2 horas, queda una diferencia de 12 kilómetros por recorrer. Los alumnos interpretan esta distancia, como los minutos faltantes para que se produzca el encuentro. Son 6 pruebas que presentaron este error, evidenciando una falta de revisión de los resultados obtenidos, pues los alumnos no se percaten de la naturaleza ni del origen de resultados obtenidos.

- Ejemplo de error “tipo F”



En este problema, también se encontraron pruebas en donde el alumno calculaba el mínimo común múltiplo. Pero, fueron categorizadas como *Otro* ya que la cantidad de alumnos que cometieron este error es menor a 4. Sin embargo, el error de tipo I, que consiste en dividir las velocidades de los pilotos si tuvo la cantidad necesaria para ser considerada como un tipo de error. Que al igual que en el problema encuentro, sería un error en la elección del método para encontrar la solución del problema.

En la categoría *otro* también se encuentra el error en donde el estudiante no considerar todos los decimales o decimales periódicos al momento de realizar las operaciones. En este caso, fueron dos las pruebas que presentaron este error que no deja de ser llamativo. Este error se produce en el momento en que los alumnos realizan la división $300 : 144$, que tiene como resultado $2,083333\dots$ a pesar que los alumnos plantean y realizan la división de forma adecuada, solo llegan hasta la centésima al momento de dividir. Este hecho es producido por el trabajo que tienen en el aula los estudiantes. Pues es común que los profesores tanto de matemática, física, química y biología, pidan a los estudiantes resultados con solo dos cifras decimales.

Capítulo IV: Discusión de los resultados

4.1. Conclusiones

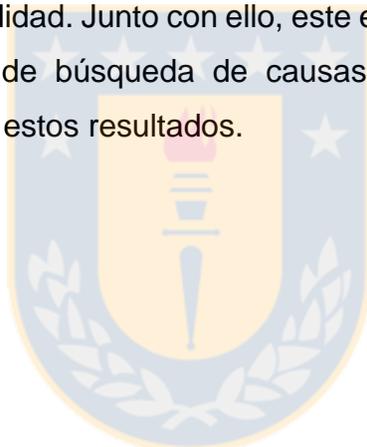
En el presente trabajo de investigación y de acuerdo a los datos obtenidos podemos concluir que, en lo referente al rendimiento que tienen los estudiantes de la región del Biobío al resolver problemas sobre velocidad, los estudiantes responden con un alto desempeño a problemas de velocidad de categoría *simple* y los mejores resultados se obtienen en los estudiantes del nivel educativo más alto, lo que es consecuente al desarrollo cognitivo y a la cobertura curricular que alcanzan los estudiantes a medida que avanzan en su etapa escolar.

En relación a nuestro segundo objetivo específico sobre conocer qué estrategias utilizan los estudiantes para resolver problemas sobre velocidad, se concluye que los estudiantes adoptan estrategias fuera de las convencionales, vale decir una estrategia aritmética o algebraica; la mayoría de los estudiantes utilizan estrategias más intuitivas, que si bien resultan más extensas en el desarrollo y tiempo empleado garantizan a su entender lograr la solución al problema. Se distinguieron tres estrategias en cada uno de los problemas analizados, siendo la más utilizada las descritas como intuitivas. Pese a lo anterior, no son estas estrategias las que obtienen un alto porcentaje de éxito, si no aquellas que se consideraban como óptimas por parte de los investigadores las que otorgan mayoritariamente la solución al problema.

Para el tercer y último objetivo específico planteado, podemos concluir que existe una amplia variedad en los errores que cometen los estudiantes que van desde los clásicos errores de cálculo, dominio de conceptos, evidencia de falta de comprensión de lectura o desconcentración al obviar información del enunciado, etc. Sin embargo, son muy pocos estudiantes los que comenten más de un error. Se definen 5 tipos de errores para cada uno de los problemas. En el problema Persecución el error de mayor frecuencia es el que se refiere a no comprender bien el concepto de persecución seguido inmediatamente por error del tipo cálculo. Para el problema Encuentro la mayoría de los estudiantes comete errores de cálculo.

En síntesis, los resultados obtenidos sólo sorprender en lo que respecta a Estrategias. En cuanto al rendimiento los resultados son esperables, lo mismo ocurre en el caso de los errores, aquí siempre se esperan errores de cálculo y amplia variedad de otro tipo. Pero en relación a las estrategias, todas las estrategias adoptadas por los estudiantes llaman la atención, en relación a que no se ajustan a las estrategias convencionales.

Finalmente, respecto de nuestro trabajo investigativo, creemos que sin duda resulta una útil fuente de información para el investigador y los profesores de matemática de nuestra región y país. Conocer cómo resuelven, realmente, problemas nuestros estudiantes nos permite comprender su razonamiento y con ello tener la oportunidad de mejorar nuestras estrategias de enseñanza para favorecer así el desarrollo y potenciación de esta habilidad. Junto con ello, este estudio puede dar pie a estudios de carácter remedial o de búsqueda de causas en los cuales se analice en profundidad el porqué de estos resultados.



Referencias

- (NCTM), N. C. (1980). *An agenda for action: recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston: National Council of Teacher of Mathematics (NCTM).
- Bowers, J. S., & Nickerson, S. N. (2000). students' changing views of rates and graphs when working with a simulation microworld. *focus on learning problems in mathematics*, 22(3-4), 10-25 .
- Chunlian, J, Hwang, S, & Cai, J. (2014). Chinese and Singaporean sixth-grade students' strategies for solving problems about speed. *Educational Studies in Mathematics*, 27-50.
- Felmer, P., Perdomo-Díaz, J., Cisterna, T., Cea, F., Randolph, V., & Medel, L. (2014). *La Resolución de Problemas en la Matemática Escolar y en la formación inicial docente*. Santiago.: Informe proyecto FONIDE 721209.
- Kantowski, M. G. (1980). Some thoughts on teaching for problem solving. En S. K. (Eds.), *Problem solving in school mathematics: 1980 yearbook*. (págs. 195-203). Reston.: NCTM.
- Kilpatrick, J. (1967). *Analysing the solution of word problems in mathematics, an exploratory study*. Unpublished doctoral dissertation, Stanford University.
- Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En F. (. Lester, *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (págs. 629-669). Charlotte: Information Age Publishing.
- Martines, E. C. (2008). Resolucion de Problemas: ideas, tendencias e influencia en España. *Investigacion en educacion matemática XII. Sociedad Española de Investigacion en Educacion Matemática, SIEM.*, 6.
- Mayer, R. E. (1981). Frequency norms and structural analysis of algebra story problemas into families, categories, and templates. *instructional science*, 135-175.
- MINEDUC. (2011). *Programa de estudio Matematica*. Santiago: Ministerio de Educación, Chile.
- Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical model*.
- Schoenfel, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Stanic, G. M. A, & Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives on problem solving in mathematics curriculum. En R. I. Charles, & E. A. Silver, *Research agenda for mathematics education* (págs. 1-22). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.



Anexos

Anexo n°1-Tabla colegios CEMAT

Establecimiento	Dependencia	Comuna	B 5	B 6	B 7	B 8	M 1	M 2	M 3	M 4
Colegio Almondale San Pedro	Part. sub.	San Pedro	1	1	1	1	1	1	1	1
Colegio Amanecer Talcahuano	Part. sub.	Talcahuano	0	1	0	1	0	1	1	1
Colegio Concepción Chiguaya.	Part. sub.	Chiguayante	0	0	0	0	1	1	0	0
Colegio Concepción Chillán	Part. sub.	Chillán	1	1	1	1	1	1	1	1
Colegio Concepción San Carlo	Part. sub.	San Carlos	1	1	1	1	1	1	1	1
Colegio Concepción San Pedro	Part.	San Pedro	0	1	1	1	1	1	1	1
Colegio Darío Salas de Chillán	Part. sub.	Chillán Viejo	1	1	1	1	1	1	0	0
Colegio de la Purísima Concep	Part. sub.	Chillán	1	1	1	1	0	1	1	1
Colegio del Sagrado Corazón	Part. sub.	Concepción	1	1	1	1	1	1	1	0
Colegio Espíritu Santo, Talcah.	Part. sub.	Talcahuano	0	0	1	1	1	1	1	1
Colegio Etchegoyen, Talcah.	Part. sub.	Talcahuano	1	1	1	1	1	1	1	0
Colegio Gran Bretaña	Mun.		1	1	1	1	1	1	1	1
Colegio Instituto San Pedro	Part. sub.	San Pedro	0	0	0	1	1	1	0	0
Colegio Madres Domínicas	Part. sub.	Concepción	1	1	1	1	1	1	1	1
Colegio Part. Laguna Redonda	Part. sub.	Concepción	1	1	1	1	0	0	0	0
Colegio San Agustín, Concep.	Part. sub.	Concepción	1	1	1	1	1	1	1	1
Colegio San Buenaventura	Part. sub.	Chillán	1	1	1	1	1	1	1	1
Colegio San Ignacio	Part. sub.	San Pedro	1	1	1	1	1	1	1	0
Colegio San Patricio	Part. sub.	Chiguayante	1	1	1	1	1	1	1	0
Colegio San Rafael Arcangel	Part. sub.	Los Ángeles	0	0	0	0	1	1	1	1

Colegio San Vicente de Paúl	Part. sub.	Chillán	1	1	1	1	1	1	1	0
Colegio Santa Luisa, Concep.	Part. sub.	Concepción	1	1	0	1	1	1	1	0
Colegio Padre Alberto Hurtad	Part. sub.	Chillán	0	0	1	1	1	1	1	0
Colegio SSCC	Part.	Concepción	0	0	1	1	1	1	1	1
Colegio TécProf "Los Acacios"	Part. sub.	Concepción	1	1	1	1	1	1	1	0
Colegio Teresiano Padre Enriq	Part. sub.	Nacimiento	0	1	1	1	1	1	0	0
Golden School	Part. sub.	Chiguayante	1	1	1	1	0	0	0	0
Inst. deHum. de Concepción	Part.	Concepción	1	1	1	1	1	1	1	0
Inst. Hum. de Coronel	Part. sub.	Coronel	1	1	1	1	1	1	1	1
INSAMACH	Part. sub.	Chillán	1	1	1	1	1	1	1	1
Kingston College	Part	Concepción	1	1	1	1	1	1	1	1
Liceo Alemán del Verbo Divino	Part.	Los Ángeles	1	1	1	1	1	1	1	0
Liceo Politécnico Caupolicán	Mun.	Los Álamos	0	0	0	0	1	1	1	1
Liceo Antonio Salamanca Mor	Mun.	Coronel	0	0	1	1	1	1	1	1
Liceo Polivalente San Nicolás	Mun.	San Nicolás	0	0	1	1	1	1	1	1
Saint Joan College	Part. sub.	Santa Juana	0	1	0	1	0	0	0	0
Saint John'sSchool	Part. sub.	Concepción	0	0	0	1	0	1	1	1
The Thomas Jefferson School	Part.	Talcahuano	1	1	1	1	1	1	1	1

Anexo n° 2- Problemas de investigación

- **Distancia.** Si un hombre conduce a 72 kilómetros por hora por 2 horas, entonces la distancia que recorre es de ____ kilómetros.

- **Tiempo.** Un conductor se demora ____ horas en viajar 136 kilómetros a una velocidad de 68 kilómetros por hora.

- **Velocidad.** En su bicicleta, Camila anduvo 45 kilómetros en 3 horas, así que su velocidad fue de ____ kilómetros por hora.

- **Cambio de velocidad – forma 1.** El domingo Jimena visitó a sus abuelos, que viven a 150 km. Después de partir en bicicleta a una velocidad promedio de 15 km/h, siguió en el camión del abuelo que la recogió, pues la encontró casualmente en el camino. La velocidad promedio del camión por el resto del viaje fue de 75 km/h. Al llegar a casa de sus abuelos, notó que habían transcurridos exactamente 6 horas desde que salió de su casa. ¿Cuánto tiempo anduvo en bicicleta?

- **Cambio de velocidad – forma 2.** El domingo Jimena visitó a sus abuelos, que viven a 150 km. Después de partir en bicicleta a una velocidad promedio de 15 km/h, siguió en el camión del abuelo que la recogió, pues la encontró casualmente en el camino. La velocidad promedio del camión por el resto del viaje fue de 75 km/h. Al llegar a casa de sus abuelos, notó que habían transcurridos exactamente 8 horas desde que salió de su casa. ¿Cuánto tiempo anduvo en bicicleta?

- **Cambio de velocidad – forma 3.** El domingo Jimena leyó un libro de 150 páginas para la prueba del lunes. Comenzó a leer con la TV encendida y leyó a una razón promedio de 15 páginas por hora. Apagó la TV, se concentró mejor, y leyó el resto del libro a una razón promedio de 75 páginas por hora. Al terminar, notó que habían pasado exactamente 6 horas desde que comenzó a leer. ¿Cuánto tiempo leyó con la TV apagada?

- **Persecución.** Dos piloto de moto, Claudio y Eduardo, compiten en una carrera de persecución. Claudio sale primero. Media hora más tarde, Edmundo comienza a

perseguirlo. La velocidad de Claudio es de 84 kilómetros por hora y la de Edmundo es 90 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo demora Edmundo en atrapar a Claudio?

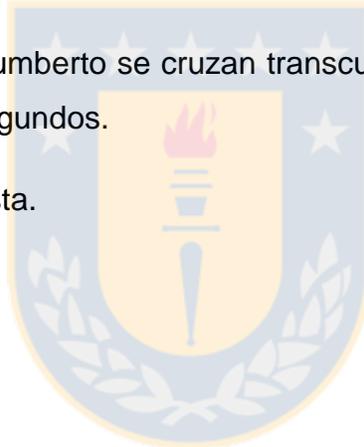
Respuesta: Edmundo atrapa a Claudio en _____ horas, _____ minutos y _____ segundos.

Explicación de la respuesta

- **Encuentro.** Dos lugares, R y S, están a 300 kilómetros de distancia el uno del otro. Gonzalo parte de R y conduce a 84 kilómetros por hora en dirección a S. Al mismo tiempo, Humberto parte de S y conduce hacia R a 60 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo demoran en encontrarse?

Respuesta: Gonzalo y Humberto se cruzan transcurrido un tiempo de _____ horas, _____ minutos y _____ segundos.

Explicación de la respuesta.



Anexo n° 3 – Pruebas CEMAT – etapa 1

CEMAT 2015. Primera Fecha: 6 de Mayo.

Nombre Completo: _____

Colegio: _____

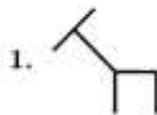
Edad: _____

Curso: _____

e-mail: _____

SÉPTIMO BÁSICO

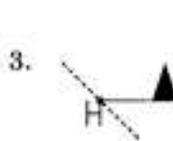
NO SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA. TIEMPO MÁXIMO: 70 MINUTOS
Estos desafíos pretenden hacerte pensar. Tómate tu tiempo, no busques adivinar (piensa) e intenta resolverlos en orden, pues la dificultad va creciendo.



Con 5 palitos de fósforo se hace la figura de la izquierda. Se puede mover UN palito para lograr que la figura cambie de posición pero conserve su forma. Dibuja en el recuadro cómo queda la figura luego de hacer esto.



2. Si son las 11 : 41, entonces en _____ minutos más serán las 14 : 02.



La bandera de la figura se rota en 180° con respecto al punto H . Luego se refleja con respecto a la recta punteada. Dibuja en el recuadro la posición exacta en que queda la bandera luego de esto.



4. Si un hombre conduce a 72 kilómetros por hora por 2 horas, entonces la distancia que recorre es de _____ kilómetros.

5. Un conductor se demora _____ horas en viajar 136 kilómetros a una velocidad de 68 kilómetros por hora.

6. En su bicicleta, Camila anduvo 45 kilómetros en 3 horas, así que su velocidad fue _____ kilómetros por hora.

7. Condorito y Garganta de Lata se tomaron entre ambos $99\frac{1}{2}$ litros de Chicha en la "Semana Pelotillehuana". Los dos tomaban en cañas de $\frac{1}{4}$ de litro. Si tomaron la misma cantidad, entonces cada uno se tomó en total _____ cañas de chicha.

8. $789789789789 \div 1001001001 = \underline{\hspace{2cm}}$

9. Entre 2 ciudades hay 9 estaciones de tren, a igual distancia una de otra. De la primera a la cuarta estación hay 120 kilómetros de distancia. Entonces, entre la primera y la octava hay _____ kilómetros de distancia.

10. Un número de un millón de dígitos comienza como sigue

2015201620172018 ...

El dígito en la décima posición (de izquierda a derecha) es el 0. El dígito en la posición 1000 de izquierda a derecha es el _____.

11. Nueve alfajores cuestan menos de 1000 pesos, pero 10 alfajores cuestan más de 1100 pesos. Luego, el costo de cada alfajor es _____ pesos.

Anexo n°5 – Pruebas CEMAT – final

CEMAT 2015. Final: 4 de Noviembre.

(Escribe tus datos con letra mayúscula, una letra en cada casilla)

Primer Apellido: _____

Segundo Apellido: _____

Nombres: _____

Colegio: _____

Edad: _____ Curso: _____ e-mail: _____

OCTAVO BÁSICO

NO SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA.

TIEMPO MÁXIMO: 70 MINUTOS

Esta es la prueba final del CEMAT 2015, la decisiva para determinar los medallistas.
Debes explicar tu solución con paciencia, claridad y detalle. Mucha suerte

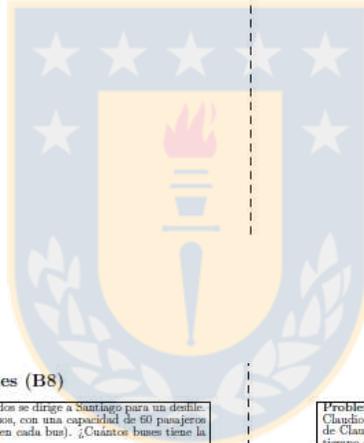
1. Papel picado (B8)

Problema 1. Una hoja de papel tiene 16 centímetros de ancho por 32 de largo. La cortas por la mitad en 2 partes iguales, las que vuelves a cortar por la mitad. Luego cortas por la mitad los 4 pedazos resultantes. Se sigue así, cortando por la mitad, hasta obtener papeletes de 1 centímetro de ancho por 2 centímetros de largo. ¿Cuántos papeletes son? (*)

(*) Este problema es muy similar a uno de la segunda fecha del Campeonato.

Respuesta: Se recortan en total _____ papeletes de 1 centímetro de ancho por 2 centímetros de largo.

Explicación de la respuesta:



3. La Fila de Buses (B8)

Problema 3. Un grupo de niños, profesores y apoderados se dirige a Santiago para un desfile. En total son 1050. Viajan en una fila de buses de 2 pisos, con una capacidad de 60 pasajeros sentados cada uno (no se aceptó ningún pasajero más en cada bus). ¿Cuántos buses tiene la fila?

Respuesta: En la fila hay _____ buses.

Explicación de la respuesta:

2. Colonia de Oniscódeos (B8)

Problema 2. Una colonia de Oniscódeos (más conocidos como chanchitos de tierra) vive en un pequeño jardín. Las medidas del jardín son 100 centímetros de ancho por 120 de largo. Hay un chanchito por cada 5 centímetros cuadrados de superficie. ¿Cuántos chanchitos viven en el jardín?

Respuesta: En el jardín viven _____ chanchitos de tierra.

Explicación de la respuesta:

4. Persecución (B8)

Problema 4. Dos pilotos de moto, Claudio y Eduardo, compiten en una carrera de persecución. Claudio sale primero. Media hora más tarde, Edmundo comienza a perseguirlo. La velocidad de Claudio es 84 kilómetros por hora y la de Edmundo es 90 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo demora Edmundo en atrapar a Claudio?

Respuesta: Edmundo atrapa a Claudio en _____ horas, _____ minutos y _____ segundos

Explicación de la respuesta:

Anexo nº6: Ejemplo de estrategia “no reconocible”, problema Persecución.

4. Persecución (B8)

Problema 4. Dos pilotos de moto, Claudio y Eduardo, compiten en una carrera de persecución. Claudio sale Primero. Media hora más tarde, Edmundo comienza a perseguirlo. La velocidad de Claudio es 84 kilómetros por hora y la de Edmundo es 90 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo demora Edmundo en atrapar a Claudio?

Respuesta: Edmundo atrapa a Claudio en 4 horas, 0 minutos y 0 segundos

Explicación de la respuesta:

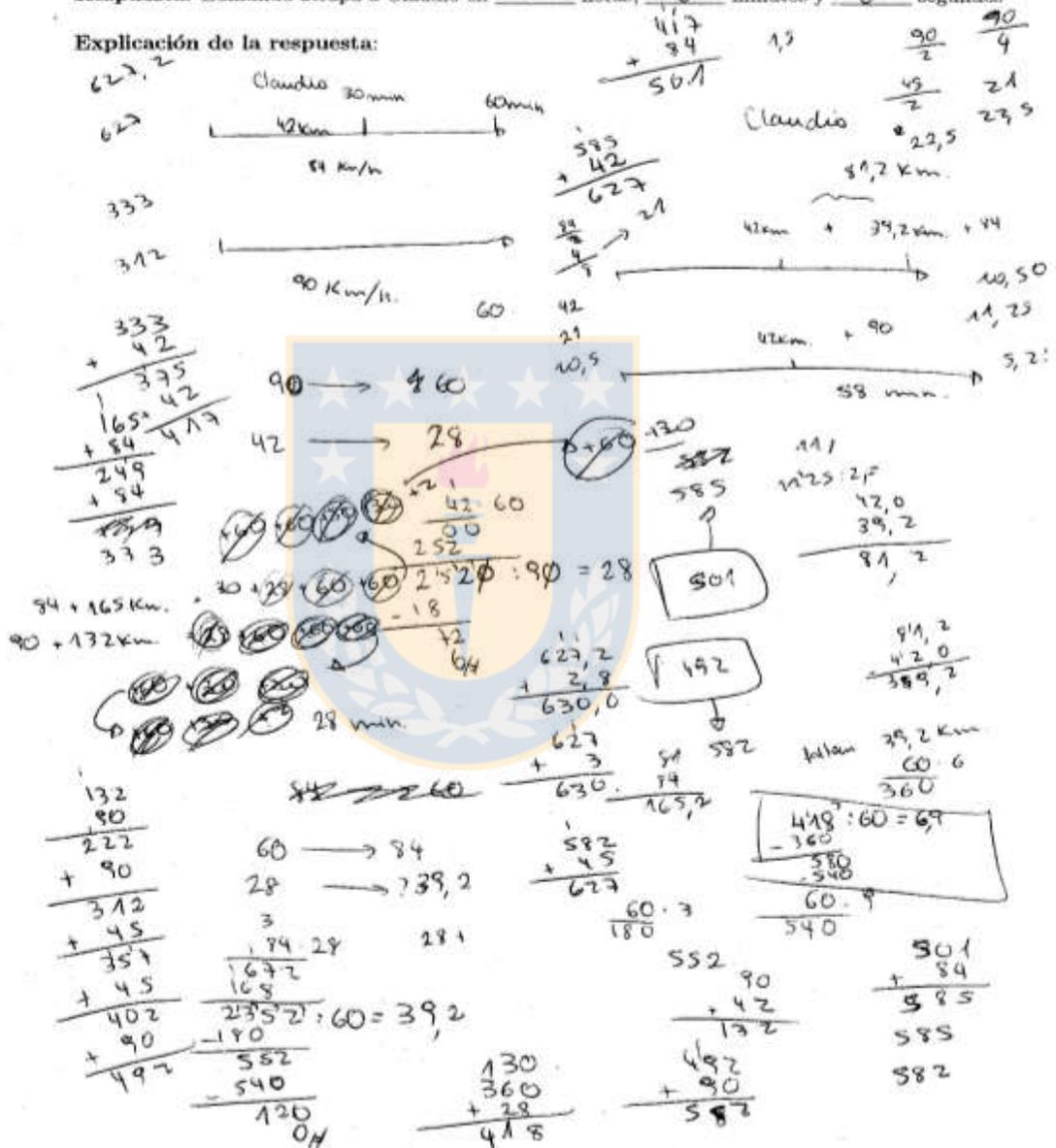


Imagen 4: Respuesta problema Persecución, estudiante 107

Anexo n°8: Ejemplo de estrategia "P2", problema Persecución.

Respuesta: Edmundo atrapa a Claudio en 7 horas, 30 minutos y 0 segundos

Explicación de la respuesta:

0 m:n = 0 km	E	0 km
30 m:n = 42 km	0 km	0 km
= 42 km + 84.7	0 km + 90.7	
450 = 630	630	

(420 + 30 = 450)

7 horas con 30 min

42 : 6 = 7

cada 1 hora la distancia entre Eduardo y Claudio se acorta 6 km

cantidad de horas

60.7

420

en las que debería alcanzar



Imagen n°7: Respuesta problema Persecución, estudiante 3.

Respuesta: Edmundo atrapa a Claudio en 7 horas, 0 minutos y 0 segundos

Explicación de la respuesta:

EN MEDIA HORA CLAUDIO SACA UNA VENTAJA DE 42 KM Y EDUARDO ES 6 km/h MAS RAPIDO OSEA QUE CADA HORA LE RESTA 6 KM DE VENTAJA ENTONCES $42 : 6 = 7$ OSEA QUE EN 7 HORAS YA LO DEBIO HABER ALCANZADO

(SUPONIENDO QUE NO PARAN N. BAJAN LA VELOCIDAD)

Imagen n°8: Respuesta problema Persecución, estudiante 83.

Anexo n°9: Ejemplo de estrategia “P3”, problema Persecución.

tiempo demora Edmundo en atrapar a Claudio:

Respuesta: Edmundo atrapa a Claudio en 7 horas, 0 minutos y 0 segundos

Explicación de la respuesta:

42 km de diferencia
 Cada hora Edmundo se acerca 6

1 hora	paso = 36 km dif.
2 horas	paso = 30 km dif.
3 "	" = 24 " "
4 "	" = 18 " "
5 "	" = 12 " "
6 "	" = 6 " "
7 "	" = 0 km dif.

Imagen n°9: Respuesta problema Persecución, estudiante 80

Anexo n° 10: Ejemplo de estrategia “E1”, problema Encuentro.

5. Encuentro (B8)

Problema 5. Dos lugares, R y S, están a 300 kilómetros de distancia el uno del otro. Gonzalo parte de R y conduce a 84 kilómetros por hora en dirección a S. Al mismo tiempo, Humberto parte de S y conduce hacia R a 60 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo demoran en encontrarse?

Respuesta: Gonzalo y Humberto se cruzan transcurrido un tiempo de 2 horas, 12 minutos y 0 segundos.

Explicación de la respuesta:

$168K = 84 \times 2$
 $120K = 60 \times 2$
 $168 + 120 = 288$
 $300 - 288 = 12$
 $84 = 12 \times 7$
 $60 = 12 \times 5$
 12 min

Imagen n°10: Respuesta problema Encuentro, estudiante 59

Anexo n° 11: Ejemplo de estrategia "E2", problema Encuentro.

Respuesta: Gonzalo y Humberto se cruzan transcurrido un tiempo de 2 horas, 5 minutos y 36 segundos.

Explicación de la respuesta:

$100 \cdot 2 = 200$
 $200 \cdot 3 = 600$

Dado d , la distancia que separa a H y G, en t , el tiempo

t	d
0	300
1 hr	156
2 hr	-12
3 hr	-132

Por cada hora que pasa están más cerca, por lo que se acerca $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$.

Cuando $d = 0$, se encuentran.
Es decir $d = 0$, se encuentran.

Handwritten calculations to the right of the diagram:

$$\begin{array}{r} 200 \\ 100 \\ \hline 300 \\ 156 \\ \hline 144 \\ -12 \\ \hline 132 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ 100 \\ \hline 200 \\ 100 \\ \hline 300 \\ 156 \\ \hline 456 \\ -144 \\ \hline 312 \end{array}$$

Imagen n° 11: Respuesta problema Encuentro, estudiante 72

5. Encuentro (B8)

Problema 5. Dos lugares, R y S, están a 300 kilómetros de distancia el uno del otro. Gonzalo parte de R y conduce a 84 kilómetros por hora en dirección a S. Al mismo tiempo, Humberto parte de S y conduce hacia R a 60 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo demoran en encontrarse?

Respuesta: Gonzalo y Humberto se cruzan transcurrido un tiempo de 2 horas, 49 minutos y 48 segundos.

Explicación de la respuesta: sabemos que en 1hr Gonzalo recorre 84 Km y Humberto recorre 60 Km, después de 1 hr se encuentran distanciados en 156 Km, porque $60 + 84 = 144$, y $300 - 144 = 156$. Entonces, repetimos el procedimiento, $156 - 144 = 12$. Es decir, después de 2 hrs, Gonzalo y Humberto están a 12 Km de distancia uno del otro. Después de eso, Gonzalo recorre 7 Km y Humberto 5 Km encontrándose (la razón 84:60 equivale a 7:5, y $7+5=12$). Para saber cuánto tiempo pasa en recorrer 7 Km a 84 Km/h, dividimos ambos valores = $0,083 \text{ hr} = 49 \text{ min y } 48 \text{ s}$.

Imagen n°12: Respuesta problema Encuentro, estudiante n°45

Anexo n°12: Ejemplo de estrategia "E3", problema Encuentro.

5. Encuentro (B8)

Problema 5. Dos lugares, R y S, están a 300 kilómetros de distancia el uno del otro. Gonzalo parte de R y conduce a 84 kilómetros por hora en dirección a S. Al mismo tiempo, Humberto parte de S y conduce hacia R a 60 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo demoran en encontrarse?

Respuesta: Gonzalo y Humberto se cruzan transcurrido un tiempo de 2 horas, 7 minutos y 30 segundos.

Explicación de la respuesta:

Las dos velocidades se suman y así dada la velocidad total, la distancia dividida en la velocidad da el tiempo en el que se encuentran, entonces se encuentran en 2 horas y 0,02 horas es igual a 7 minutos con 30 segundos.

Imagen n°12: Respuesta problema Encuentro, estudiante 54

Anexo n°13: Ejemplo de estrategia “no reconocible”, problema Encuentro. Estudiante que respondió correctamente.

5. Encuentro (B8)

Problema 5. Dos lugares, R y S, están a 300 kilómetros de distancia el uno del otro. Gonzalo parte de R y conduce a 84 kilómetros por hora en dirección a S. Al mismo tiempo, Humberto parte de S y conduce hacia R a 60 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo demoran en encontrarse?

Respuesta: Gonzalo y Humberto se cruzan transcurrido un tiempo de 2 horas, 5 minutos y 0 segundos.

Explicación de la respuesta:

R $\xrightarrow{\text{Gonzalo } 84 \text{ km/hora}}$ S
 $\xleftarrow{\text{Humberto } 60 \text{ km/hora}}$
300 Km

$$\begin{array}{r} 300 \div 84 = \cancel{3,0} \\ -252 \\ \hline 48 \\ 3,0 \\ \hline \end{array}$$
$$258 + 12 = 300$$

Imagen n° 13: Respuesta problema Encuentro, estudiante 93