

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE EDUCACIÓN
PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN



ESTRATEGIAS Y ERRORES DE ESCOLARES CHILENOS
EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ÁREA DE
REGIONES RECTANGULARES.

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN

Prof. Guía: Dr. César Flores Solar

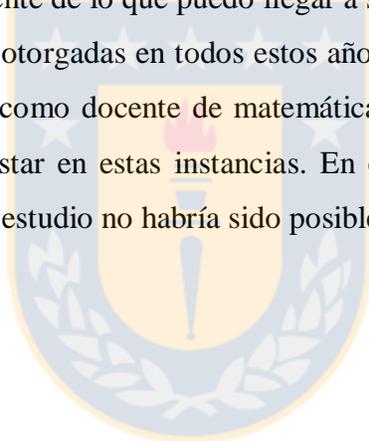
Seminarista: Estefanía Macarena Caamaño Bello

CONCEPCIÓN, 2016

Agradecimientos.

La vida se encuentra plagada de retos y caminos a seguir de los cuales algo más importante que llegar al final, es la forma en que los enfrentamos. La Universidad puede llegar a ser uno de los procesos más complicados dentro de la vida académica de las personas si no se cuenta con la ayuda adecuada.

Ahora que llego al final de un camino, y tomando en cuenta todo el proceso que constituyó el llegar al final de mi formación universitaria de pregrado, quiero agradecer a mis padres por el apoyo otorgado en todos estos años, por confiar en mí, por recordarme constantemente lo orgullosos que se encontraban de mi persona; a mis hermanos por la comprensión en los momentos difíciles y por motivarme a ser mejor cada día; a mis amigos por recordarme constantemente de lo que puedo llegar a ser capaz, sin declinar su fe en mis capacidades, y por las risas otorgadas en todos estos años; a mis profesores que estuvieron presentes en mi formación como docente de matemática, ya que sin sus conocimientos y consejos no sería posible estar en estas instancias. En especial, agradezco a mi profesor guía, sin el cual, el presente estudio no habría sido posible.



Resumen.

En el presente trabajo de seminario de grado se examinan las estrategias de resolución de problema y patrones de errores de una muestra de alumnos chilenos, enfrentados a la tarea de resolver por escrito problemas que involucran la medición del área de regiones rectangulares. Se examinan los registros escritos de 212 alumnos, 100 de quinto básico y 112 de tercero medio, provenientes de 42 establecimientos educacionales de las 4 provincias de la Región del Biobío.

El porcentaje de alumnos que resolvió satisfactoriamente los problemas planteados es de alrededor del 40%. Se distinguen 2 tipos principales de estrategias de resolución. Una de ellas se basa en el uso de la fórmula para el cálculo del área de una región rectangular (seguida de una división). La otra consiste en la adopción de un proceso de subdivisión de la región involucrada.

Se observa una mayor preferencia por el uso de estrategias en que se aplica la fórmula, las cuales, además, resultan tener un mayor porcentaje de éxito.

En lo referente a la estrategia de subdivisión, ésta es más utilizada en los alumnos de enseñanza básica que en los de enseñanza media. Además, el porcentaje de soluciones satisfactorias que usan esta estrategia es inferior al 15%, y el principal error asociado a ella es confundir una unidad de área con una unidad de longitud.

Los errores más comunes asociados a estrategias que hacen uso de la fórmula para el cálculo del área son, en el caso de los alumnos de 3° medio, errores de conversión de cm^2 a m^2 (o viceversa). En el caso de los alumnos de 5° básico, se observa un aumento de errores de cálculo, de confusión de las operaciones adecuadas al contexto (por ejemplo, sumar en lugar de multiplicar en la fórmula del área) y de errores técnicos.

Índice.

I.	Introducción.....	4
II.	Marco Teórico.....	5
III.1.	La enseñanza de mediciones.....	13
III.2.	La enseñanza de la medición de área en regiones rectangulares.....	16
III.3.	Medición de área de regiones rectangulares y de longitud en el currículum chileno.....	18
III.4.	Esquema iterativo de Resolución de Problemas y Errores asociados.....	23
III.	Metodología.....	25
IV.1.	La muestra.....	25
IV.2.	El instrumento y su administración.....	26
IV.3.	Método de Análisis.....	27
IV.	Resultados y Análisis.....	29
V.1.	Resultados y Análisis por Rendimiento.....	29
V.2.	Resultados y Análisis por Estrategias.....	31
V.3.	Resultados y Análisis por Errores.....	43
V.	Conclusiones.....	58
VI.	Bibliografía.....	60
VII.	Anexos.....	62
Anexo 1:	Tabla de Establecimientos.....	62
Anexo 2:	Prueba fecha 5 CEMAT 2012.....	65
Anexo 3:	Prueba fecha 5 CEMAT 2015.....	66

I. **Introducción.**

El presente seminario de grado tiene por objetivos (a) establecer las principales estrategias de resolución de problemas y patrones de errores que cometen estudiantes chilenos al enfrentarse a problemas que involucran la medición del área de regiones rectangulares, y (b) analizar los hechos o circunstancias que pudieron contribuir a lo anterior, así como la relación con el rendimiento de los estudiantes y la relación entre éstas variables.

Para lograr estos objetivos se analizan las respuestas de una muestra de alumnos chilenos provenientes de la Región del Biobío al resolver problemas de medición de área de regiones rectangulares.

En la literatura internacional especializada se hallan resultados peculiarmente interesantes respecto a este tema, en especial en el estudio por edades o niveles de los estudiantes. En Chile, no se hallaron referencias, y lo establecido respecto a la medición de área de regiones rectangulares en documentos dados como base para la enseñanza de la matemática en nuestro país, lleva a la formulación de interrogantes relacionadas con los objetivos del presente seminario de grado.

Este tema tiene importancia debido a las diferencias en el tratamiento para su enseñanza, la forma en que los estudiantes enfrentan problemas relacionados con el tema en cuestión, y porque es una de las primeras circunstancias en que los estudiantes trabajan con el uso de fórmulas para facilitar algún cálculo.

II. Marco Teórico.

La medición del área de regiones rectangulares es un tema que permite conectar los contenidos de la matemática escolar con el mundo real y, frecuentemente, es utilizada por profesores y textos de estudio para explicar la multiplicación de números enteros (Hirstein, Lamb, & Osborne, 1978). Un ejemplo de este uso consiste en lo siguiente: se consideran los dos factores del producto que se quiere realizar como las medidas de las longitudes de los lados de una región rectangular y a continuación, se subdividen los lados de la superficie rectangular originando una red cuadriculada. Para, finalmente, contar la cantidad de cuadrados resultantes, lo que equivale a calcular la cantidad de veces que se repiten las filas de un lado formadas por la cantidad de cuadrados determinada por la medida del otro lado. Esta cantidad equivale al resultado del producto de los factores considerados como las medidas de la región rectangular. El siguiente esquema ilustra este método.

- Ejemplo: El resultado de multiplicar 5 por 8.

8 unidades

5 unidades

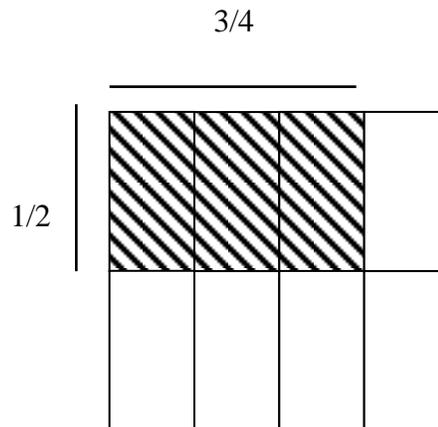


- El rectángulo se subdivide en 40 cuadrados. Por lo tanto, $5 \cdot 8 = 40$.

Esquema N°1: Uso del área de una región rectangular para el cálculo de $5 \cdot 8$.

Otro tema para el cual el área de regiones rectangulares se puede utilizar es la multiplicación de dos fracciones impropias (Freudenthal, 1983). Se emplea un rectángulo, que representa la unidad. Sus lados se dividen en partes iguales, de acuerdo al denominador de cada fracción, generando una red de rectángulos congruentes, cuya cantidad es el denominador de la fracción resultante. A continuación, se consideran los numeradores de las fracciones a multiplicar, y se cuenta en cada lado correspondiente el número de espacios asociado a cada numerador: estos son los lados de un rectángulo contenido en el rectángulo original y que indica el numerador de la fracción resultante del producto.

- Ejemplo: El resultado de multiplicar $\frac{1}{2}$ por $\frac{3}{4}$.

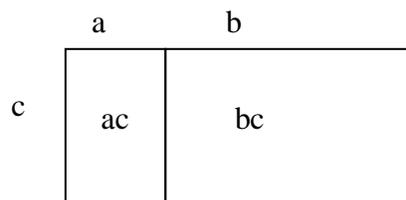


- En el rectángulo hay 8 unidades, 3 de ellas forman el rectángulo cuyos lados son las fracciones que se multiplican. Por lo tanto, $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.

Esquema N°2: Uso del área de una región rectangular para el cálculo de $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$.

En niveles más avanzados el área de figuras rectangulares se utiliza para explicar la multiplicación algebraica (Schultz, 1991). El siguiente esquema muestra la distributividad de la multiplicación algebraica.

Ejemplo: El resultado de multiplicar c por $a+b$:



- El área total del rectángulo corresponde al producto entre c y $a+b$. Está conformado por los rectángulos de área ac y bc . Por lo tanto, $c(a+b) = ac + bc$.

Esquema N°3: Uso del área de una región rectangular para el cálculo de $c(a+b)$.

Para efectos de medición de áreas, la forma de la superficie que se intenta medir influye directamente en la complejidad de esta tarea. Las regiones rectangulares son las regiones de forma más simple. Más aun, al medir el área de otro tipo de región se suele

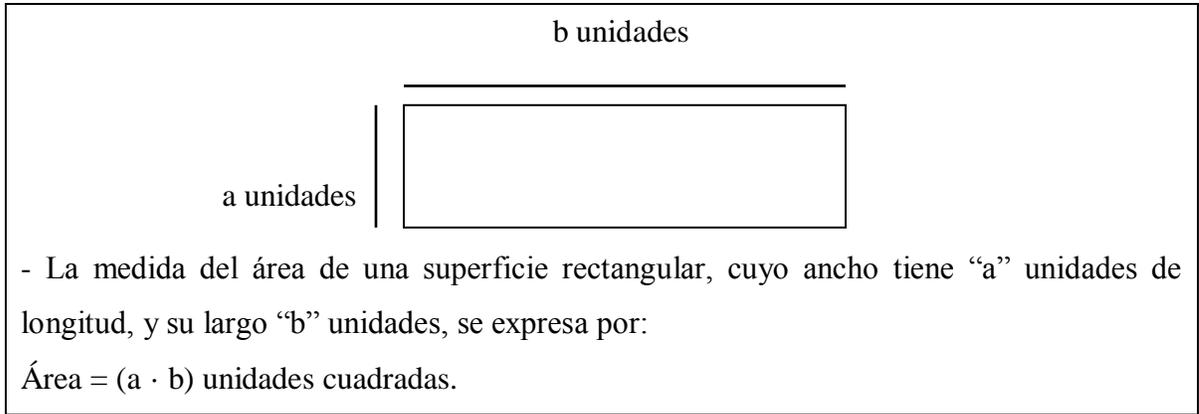
intentar “rectificarla”, es decir, transformarla en un rectángulo. Por ejemplo, el área de un triángulo se puede analizar, en primer lugar, considerando un triángulo rectángulo, el cual es la mitad de un rectángulo, lo que permite calcular su área. Luego, se puede continuar con el caso de triángulos más generales trazando una de sus alturas, lo cual remite al caso de los triángulos rectángulos.

Existen abundantes estudios sobre la medida de áreas en la literatura internacional especializada en educación matemática (Battista, Clements, Arnoff, Battista, & Borrow, 1998; Dickson, 1989; Heraud, 1987; Outhred & Mitchelmore, 2000; Kamii & Kysh, 2006).

Algunos de los resultados de Carpenter, Lindquist, Brown, Kouba, Silver, & Swafford (1988) muestran que, si bien la mitad de los estudiantes de séptimo año de Estados Unidos son capaces de calcular el área de un rectángulo cuando se les da los valores de las medidas de sus 2 lados, sólo el 13% de estos alumnos responde correctamente cuando se le pide calcular el área de un cuadrado dada la medida de su lado. Esto ilustra las dificultades de razonamiento adaptativo que tienen los alumnos para el tema de área de regiones rectangulares.

Dos errores comunes que se reportan habitualmente en la literatura especializada son: la confusión de los conceptos de área y perímetro, y la aplicación de la fórmula de área de un rectángulo a figuras planas que no lo son (Outhred & Mitchelmore, 2000).

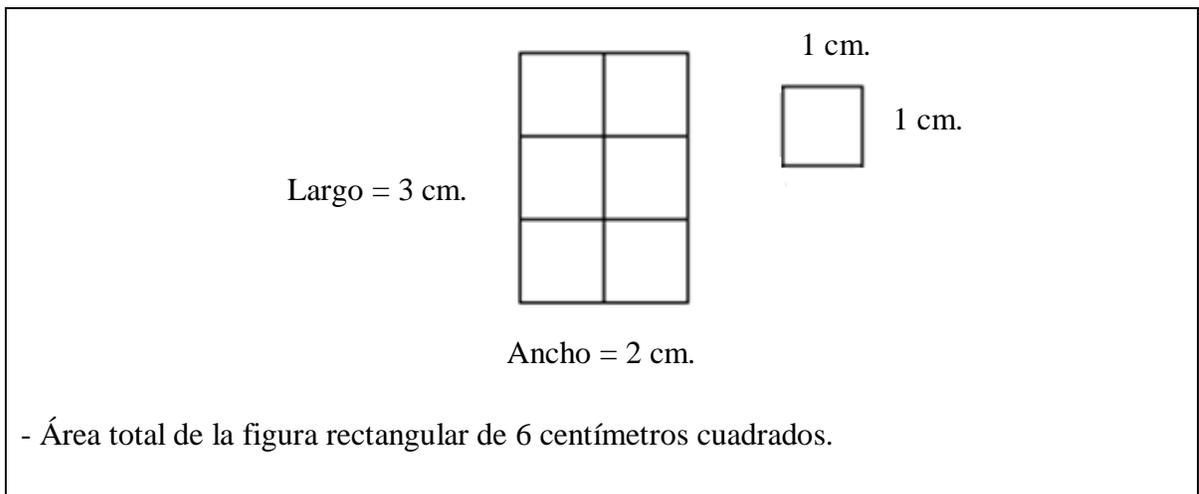
Las dificultades de los escolares en el tema de área de regiones rectangulares se atribuyen, en gran medida, a una tendencia a aprender la fórmula de área por memorización (Martin & Strutchens, 2000). Al hablar de fórmula de área, se hace referencia a la fórmula para calcular la medida del área de una región rectangular. Esta fórmula dice que la medida del área de una región rectangular es igual al producto de las medidas de las longitudes de su largo y ancho.



Esquema N°4: Fórmula de área.

La fórmula para calcular el área de una región rectangular es una de las primeras ocasiones en que los estudiantes se topan con una “fórmula matemática” en su desarrollo cognitivo. Al aprender dicha fórmula por rutina, los estudiantes continúan su aprendizaje sin entender qué significa o representa exactamente. Específicamente, los jóvenes no se explican cómo dos longitudes (largo y ancho) pueden producir un área cuando son multiplicadas (Kamii & Kysh, 2006).

Una unidad cuadrada es un cuadrado cuyos lados miden 1 unidad, y la acción de cubrir una región rectangular con unidades cuadradas es fundamental en la comprensión del área. Así, por ejemplo, si se quiere medir el área de una región rectangular con ancho igual a 2 centímetros y largo 3 centímetros, se recubre dicha figura con cuadrados de lado 1 centímetro. La región rectangular queda, así, cubierta por 6 cuadrados, lo que significa que su área mide 6 centímetros cuadrados.



Esquema N°5: Ejemplo explicativo de cálculo del área por recubrimiento.

La fórmula evita el tener que contar uno a uno los cuadrados, pues, como se forma un arreglo rectangular, basta con realizar una multiplicación para saber cuántos son. Así, la fórmula tiene como requisito una comprensión profunda del significado de la multiplicación. En el Esquema N°5 se debe ser capaz de (1) observar que hay 3 filas de 2 cuadrados cada una, es decir, que hay 3 veces 2 cuadrados y de (2) asociar este hecho con una multiplicación.

La acción de recubrir un rectángulo con cuadrados es unidimensional y emplea un proceso aditivo o de conteo, mientras que la fórmula es bidimensional y multiplicativa (Outhred & Mitchelmore, 2000). En este punto, se presentan varias dificultades. Una de ellas es que los estudiantes no comprenden la relación entre el proceso aditivo y la multiplicación (Mulligan & Mitchelmore, 1997). Otra dificultad es que para los niños más pequeños, la estructura de una malla rectangular, es decir, la subdivisión de una región rectangular en unidades cuadradas, no es del todo obvia ni intuitiva, lo cual ha sido puesto en evidencia en varios artículos de investigación (Battista, Clements, Arnoff, Battista, & Borrow, 1998).

Otra causal de las dificultades en el área de regiones rectangulares se remonta a fallas en la comprensión de la medida de longitudes. Obviamente, si los estudiantes no comprenden la medición de longitudes, no se puede esperar que entiendan la fórmula de área o que trabajen a cabalidad con ella. Existe abundante literatura que revela las dificultades de los alumnos en la medición de longitudes. Por ejemplo, en Carpenter, Kepner, Corbitt, Lindquist, & Reys(1980), se analiza la respuesta a la siguiente pregunta:

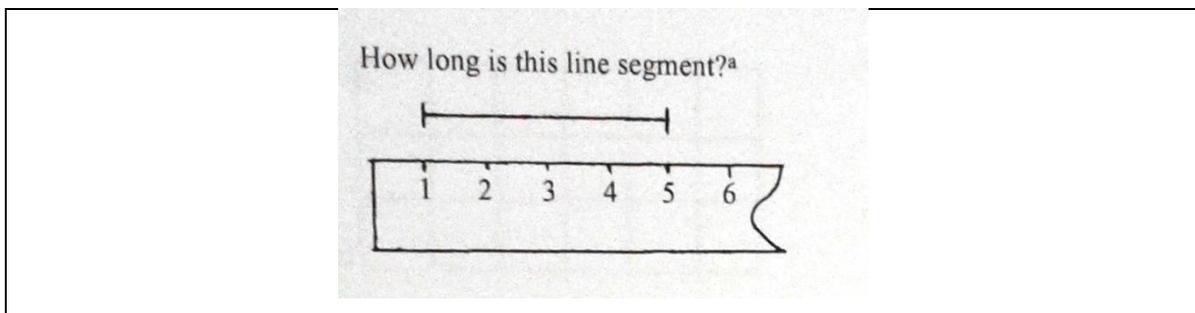


Figura N°1: Pregunta Segunda NAEP.

Esta pregunta, apareció en la Segunda NAEP (Evaluación Nacional del Progreso Educativo, que se realiza en Estados Unidos desde 1969 con el objetivo de medir el logro

académico de los estudiantes de dicho país). En ella, se solicitó a los jóvenes determinar la longitud del segmento indicado en la regla, entre el 1 y el 5. Sólo el 59% de los estudiantes de 13 años de edad respondió correctamente. En la cuarta NAEP, se produjo un evento similar con otro ítem que buscó evaluar la misma habilidad.

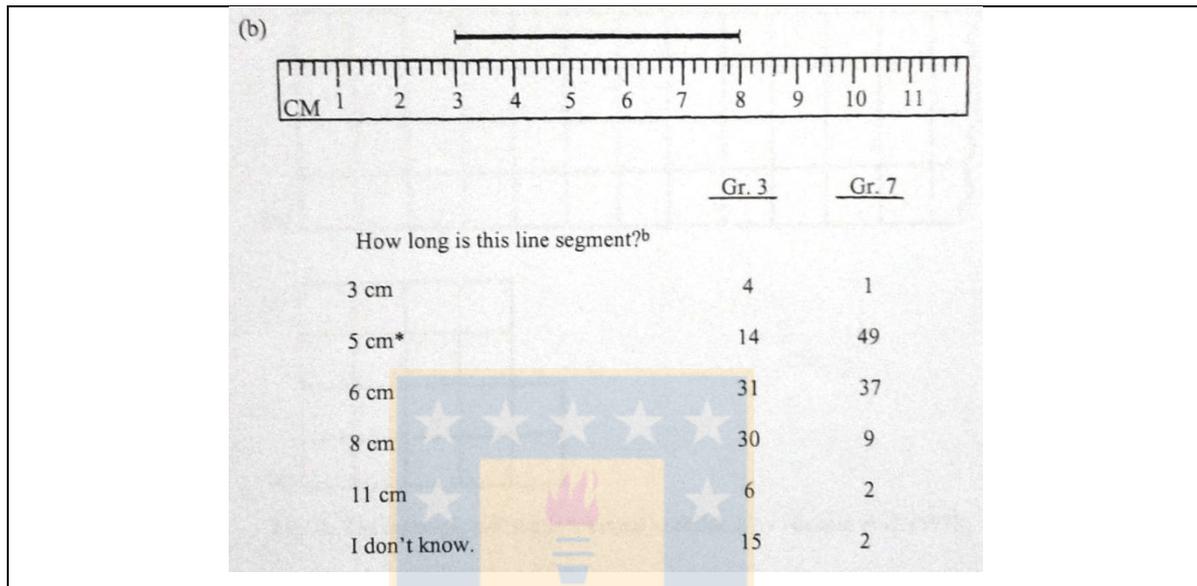


Figura N°2: Pregunta Cuarta NAEP. Respuestas de los estudiantes y porcentajes respectivos en tercer y séptimo grado.

En esta pregunta se solicitó a los jóvenes, de tercer y séptimo año, determinar la longitud del segmento indicado en la regla, entre el 3 y el 8. Tan sólo el 14% y el 49% de ellos, respectivamente, llegaron a la respuesta correcta (5 centímetros). Sin embargo, el 31% de los alumnos de tercer año y el 37% de séptimo año, llegaron a la respuesta de 6 centímetros, pues, probablemente, en lugar de contar los espacios, contaron los números de la regla (Lindquist & Kouba, Measurement, 1989). Esto evidencia que los estudiantes no comprenden adecuadamente qué es lo que se debe contar al medir la longitud, a saber, la cantidad de veces que se repite la unidad de 1 centímetro. Tal deficiencia está relacionada con el principio de repetición de la unidad para las mediciones en Koay (2014). Si este tipo de falla se comete al momento de medir longitudes, es de esperar que se produzca un evento similar al momento de trabajar con área y su medición con unidades cuadradas.

Estos resultados, además, evidencian que los estudiantes tienen dificultades al realizar la subdivisión de una longitud de acuerdo a su unidad de medida. Para trabajar con

arreglos rectangulares, es necesario realizar esta subdivisión con los lados de la región rectangular, para luego obtener el cuadrículado. Si esto no se hace adecuadamente, la matriz cuadriculada no será la apropiada.

En la siguiente figura se observa un ítem incluido reiteradamente en las Segunda, Tercera y Cuarta NAEP (Lindquist, Carpenter, Silver, & Matthews, 1983; Lindquist & Kouba, 1989).

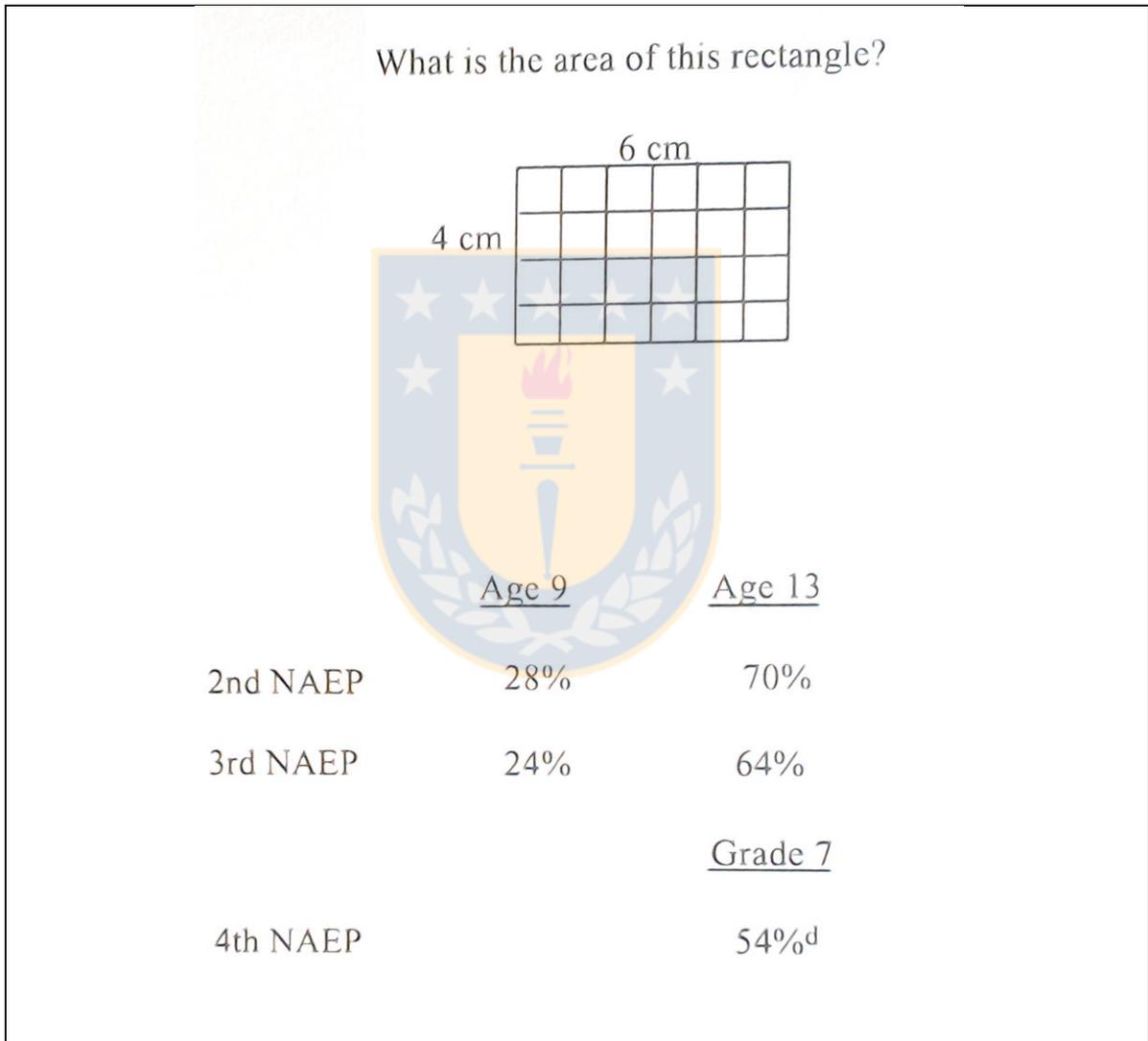


Figura N°3: Pregunta incluida en la Segunda, Tercera y Cuarta NAEP, y porcentajes de respuestas correctas por edad.

En el problema se pide calcular el área de la región rectangular indicada en la figura, lo cual podía hacerse mediante un simple conteo. Sin embargo, los porcentajes de respuestas correctas son de a lo más un 70% para los niños de 13 años y de menos de un tercio para los de 9 años. Estos resultados sugieren, según Kamii & Kysh (2006), que los estudiantes no consideran una unidad cuadrada como unidad de medición de área. Según las mismas autoras, una causa de la complejidad cognitiva de reconocer que la cantidad de cuadrados que se cuentan en el cuadrículado es igual al área de la figura recubierta por ellos, es que el número de cuadrados es una cantidad discreta y el área de la superficie de la figura es una cantidad continua.

También, debe explorarse el rol de los docentes en el origen de las dificultades de los estudiantes. Sus ideas respecto a los contenidos que deben impartir a los jóvenes y las percepciones que poseen de éstos influyen directamente en la forma en que llevan a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Los profesores perciben que la subdivisión de una superficie rectangular en unidades cuadradas es evidente, sin notar o tomar en cuenta las dificultades que presentan los niños (Outhred & Mitchelmore, 2000). Varios estudios han dado cuenta de las dificultades de los niños para realizar esta subdivisión al momento de calcular el área de una superficie rectangular, dada la unidad cuadrada a utilizar. Los niños no comprenden la necesidad de mantener la forma de la unidad cuadrada para completar el rectángulo, así como tampoco parecen percibir que no se debe dejar brechas o realizar superposiciones, ver por ejemplo (Outhred & Mitchelmore, 2000).

También, existe evidencia de que los docentes en formación tienen problemas con el área de regiones rectangulares, tales como el uso de unidades lineales en lugar de unidades cuadradas y la creencia de que duplicar las longitudes de los lados de un cuadrado duplica su área (Simon & Blume, 1994).

III.1. La enseñanza de mediciones.

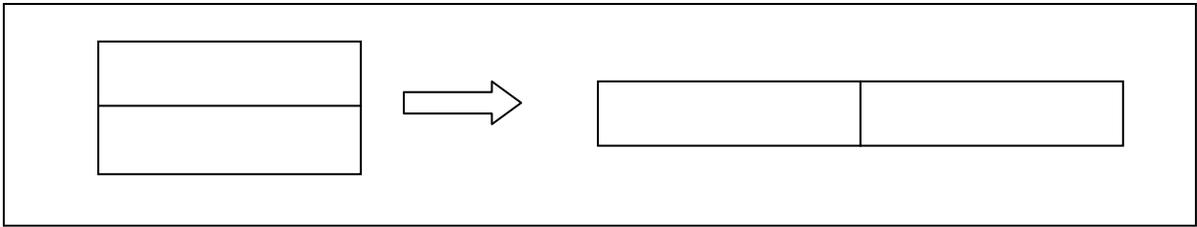
El tema de área de regiones rectangulares se enmarca dentro de la enseñanza de las mediciones y resulta necesario hacer una discusión general sobre tal tema. Medir una cualidad de un objeto significa compararlo con cierta unidad para cuantificar la cantidad de veces que la unidad está contenida en el objeto. Así, al medir se deben realizar las siguientes 3 acciones básicas (Koay, 2014):

1. Decidir cuál es el atributo o cualidad que se medirá en el objeto como, por ejemplo, su longitud, superficie, volumen, peso, entre otros.
2. Seleccionar la unidad de medición que se utilizará, la cual depende del atributo a medir y del contexto.
3. Utilizar la unidad de manera reiterada, contando la cantidad de veces que se necesita hasta medir totalmente el atributo.

En particular, medir el área de una región rectangular requiere (1) identificar que el atributo que se considera es la superficie que cubre (no su largo, ni su color, por ejemplo), luego (2) seleccionar una unidad adecuada (si se quiere medir el área de la superficie de una mesa rectangular, se puede usar como unidad un cuaderno, por ejemplo), para, finalmente, (3) determinar la cantidad de veces que se necesita repetir la unidad para cubrir la superficie del objeto (recubrir la superficie con copias de la unidad).

La medición, para llegar a ser precisa y que tenga sentido, debe respetar 3 principios fundamentales:

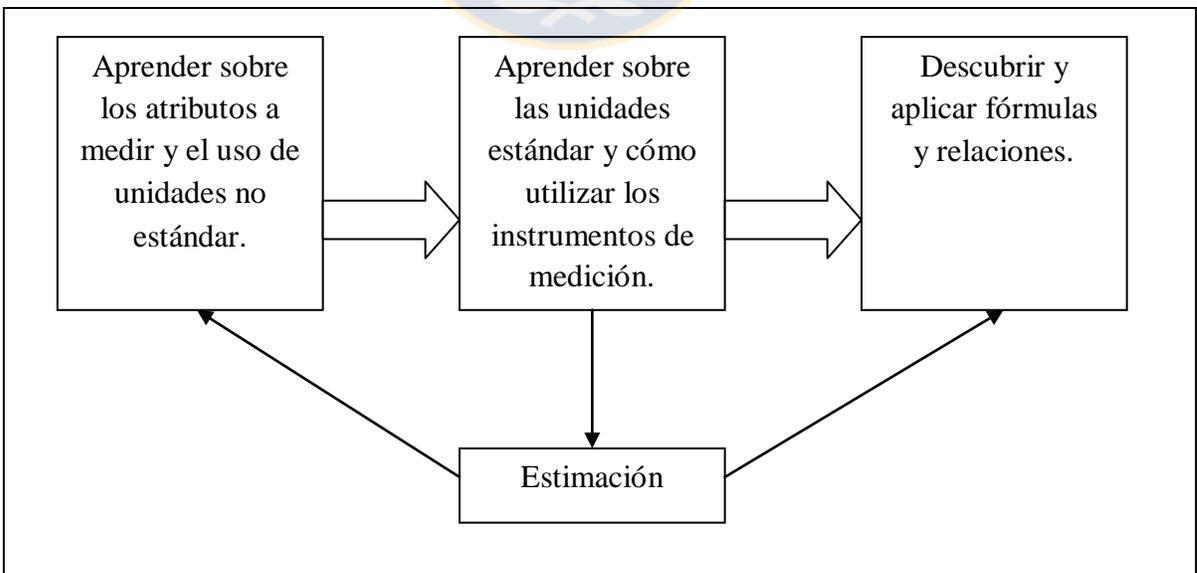
1. **Conservación.** Si se reordenan las partes de una región el área se mantiene. Por ejemplo, si una región rectangular se divide por la mitad mediante una paralela a dos lados del rectángulo, y luego las partes, se reordenan formando otro rectángulo, entonces el área se mantiene.



Esquema N°6: Conservación del área.

2. **Transitividad.** Para comparar dos objetos se puede usar un tercero como referencia. Así, dados tres objetos distintos, se puede decir que A se relaciona con C, si A está relacionado con B y B con C. La condición es que la relación debe ser la misma. Por ejemplo, si el área del rectángulo A es mayor que la del rectángulo B y la del B es mayor que la del rectángulo C, se deduce que el área de A es mayor que el área de C.
3. **Repetición de unidad.** Este principio hace referencia al uso reiterado de una unidad única de medición para encontrar la medida requerida. Un error típico asociado a este principio en la medición de regiones rectangulares es la superposición de la unidad y el dejar espacios vacíos al recubrir la superficie (Outhred & Mitchelmore, 2000).

Se sugiere en la referencia ya citada de Koay (2014) la siguiente secuencia pedagógica de 3 etapas, la que debería respetarse en la enseñanza de cualquier sistema de medición.



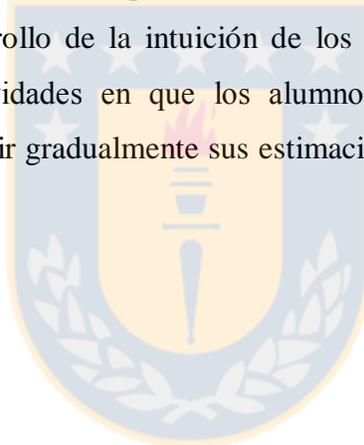
Esquema N°7: Secuencia pedagógica para la enseñanza de un sistema de medición.

La primera etapa, consiste en identificar claramente el atributo a medir, el vocabulario que se le asocia (longitud, área, volumen) y la realización de actividades de medición y estimación con unidades no estándar para comparar el tamaño del atributo en distintos objetos.

En la segunda etapa, a los niños se les instruye sobre el uso de unidades de medida estándar para realizar mediciones (centímetros, centímetros cuadrados, metros, etc.), el empleo correcto de instrumentos de medición asociados y la realización de actividades de medición y estimación con unidades estándar.

En la tercera y última etapa, se pone énfasis en el descubrimiento y aplicación de fórmulas y/o relaciones que faciliten el cálculo de mediciones, típicamente la fórmula del producto de las longitudes de los lados en el caso del área de regiones rectangulares.

Una actividad que debe estar presente en las 3 etapas de la secuencia pedagógica tiene que ver con el desarrollo de la intuición de los escolares mediante actividades de estimación, es decir, actividades en que los alumnos conjeturan “al ojo” la medida requerida para luego corregir gradualmente sus estimaciones de acuerdo a los datos que se van acumulando.



III.2. La enseñanza de la medición de área en regiones rectangulares.

Existe una evidente interacción entre la medición del área de regiones rectangulares y la medición de la longitud, que se manifiesta al utilizar la fórmula para el cálculo del área de una región rectangular. Antes que nada, podemos ver cómo se aplicaría la secuencia pedagógica para la enseñanza del área en regiones rectangulares.

- Como primer paso, se necesita llegar a que los estudiantes se familiaricen con el atributo que se está considerando al medir el área de una superficie rectangular, consistente en la superficie abarcada por la región encerrada o delimitada por un rectángulo. Que realicen actividades de comparación del tamaño de formas rectangulares, respondiendo cuestiones tales como cuál tiene más área (sin confundir con cuestiones como cuál es más largo o más ancho). Que realicen estimaciones y luego las comprueben recubriendo las regiones con unidades de medida no estándar.
- En la segunda etapa, se espera lograr que los estudiantes comprendan cuáles son las unidades de medida estándar para área, tales como centímetros cuadrados, metros cuadrados y lo que éstos representan. En específico, se les debe instruir acerca de cómo se forman tales unidades, qué significan, cómo se realiza el cubrimiento de una superficie rectangular con ellas, y cómo se interpreta este cubrimiento. Nótese que en el caso de la medición de áreas no se dispone de instrumentos de medición, a diferencia de la longitud o el peso.
- Finalmente, en la tercera etapa, se espera que a través del cubrimiento con unidades cuadradas los estudiantes lleguen a comprender la fórmula para calcular el área de una región rectangular como el producto de las longitudes de los lados. Nótese la complejidad cognitiva de este paso para los escolares, pues, hasta ahora, la medición del área se podía realizar solamente recubriendo la superficie o realizando la subdivisión en unidades de área. En esta tercera etapa se obtiene una manera alternativa y menos trabajosa en general para calcular el área, ya que no es necesario recubrir, y basta con medir las longitudes de los lados y multiplicarlas.

Podemos observar que durante las dos primeras etapas de la enseñanza de la medición del área de regiones rectangulares se conforma la base intuitiva del estudiante para este concepto. Estas etapas iniciales se basan, principalmente, en actividades de

estimación y de recubrimiento de la figura mediante repeticiones de la unidad. En particular, la medición de longitudes no es fundamental en ellas y adquiere real importancia cuando se realiza la deducción de la fórmula (tercera etapa). La no realización adecuada de estas etapas iniciales puede ocasionar deficiencias de base en la comprensión del concepto de área e incluso en el origen mismo de la fórmula. Este fenómeno ha sido indicado en varios estudios, ver, por ejemplo, Martin & Strutchens (2000).



III.3. Medición de área de regiones rectangulares y de longitud en el currículum chileno.

En el sistema escolar chileno las *Bases Curriculares* indican cuáles son los aprendizajes comunes para todos los alumnos y alumnas del país. Tienen un carácter obligatorio para todos los establecimientos y son el referente respecto del cual se construyen los programas del Ministerio de Educación, los programas de estudio propios de cada establecimiento y los estándares de aprendizaje. Las Bases Curriculares establecen *Objetivos de Aprendizaje* (OA) que definen los desempeños mínimos que se espera que todos los estudiantes logren en cada asignatura y en cada nivel de enseñanza.

El análisis de los Programas de Estudio nacionales, indica que la primera vez que se incluye el contenido de área de regiones rectangulares es en cuarto básico, con el Objetivo de Aprendizaje 23: “Demostrar que comprenden el concepto de área de un rectángulo y de un cuadrado: reconociendo que el área de una superficie se mide en unidades cuadradas; seleccionando y justificando la elección de la unidad estandarizada (cm^2 y m^2); determinando y registrando el área en cm^2 y m^2 en contextos cercanos; construyendo diferentes rectángulos para un área dada (cm^2 y m^2) para mostrar que distintos rectángulos pueden tener la misma área; usando software geométrico” (Ministerio de Educación de Chile, 2013).

La segunda aparición del contenido de área de regiones rectangulares, es en quinto básico con los Objetivos de Aprendizaje 21 y 22, los que establecen que los estudiantes deben lograr : “Diseñar y construir diferentes rectángulos, dados el perímetro, el área, o ambos, y sacar conclusiones”; y “Calcular área de triángulos, de paralelogramos y de trapecios, y estimar áreas de figuras irregulares, aplicando las siguientes estrategias: conteo de cuadrículas, comparación con el área de un rectángulo, y completar figuras por traslación”, respectivamente (Ministerio de Educación de Chile, 2013).

Finalmente, el contenido de área de regiones rectangulares se extiende en sexto básico a la superficie de algunos cuerpos, lo que se explicita en los Objetivos de Aprendizaje 13 y 18: “Demostrar que comprenden el concepto de área de una superficie en cubos y paralelepípedos, calculando el área de sus redes (plantillas) asociadas”; y “Calcular la superficie de cubos y paralelepípedos, expresando el resultado en cm^2 y m^2 ” (Ministerio de Educación de Chile, 2013).

Comparando lo establecido en estos Objetivos de Aprendizaje con la Secuencia pedagógica antes planteada para la enseñanza de la medición del área de regiones rectangulares, podemos encontrar inmediatamente dos puntos de divergencia. El primero, es que en los objetivos de aprendizaje nacionales no se menciona de manera explícita el trabajo inicial de comparación de áreas mediante el uso de unidades de medida no estándar, utilizando de inmediato unidades estándar, principalmente con actividades pictóricas de cuadrículado de áreas rectangulares. El segundo punto es que no se explicita la enseñanza de la fórmula para calcular el área de regiones rectangulares como el producto de las longitudes de sus lados (no se encontró mención alguna a esta fórmula en los OA), siendo que éste es el tercer y último paso para la enseñanza-aprendizaje de la medición de áreas. En otras palabras, en los aprendizajes mínimos y comunes propuestos para los estudiantes chilenos, referentes a la medición de área de regiones rectangulares, no se encuentran en forma completa las etapas de la Secuencia Pedagógica planteada para la enseñanza de mediciones.

Dada su relación con la fórmula para el cálculo del área de una región rectangular mediante el cálculo del producto de las longitudes de sus lados, conviene hacer también una revisión de los contenidos relacionados con medición de longitudes en las Bases Curriculares nacionales. En primera instancia, se trabaja este tema con los niños de primero básico, los cuales, según el Objetivo de Aprendizaje 18, deben: “Identificar y comparar la longitud de objetos, usando palabras como largo, corto” (Ministerio de Educación de Chile, 2013).

A continuación, en segundo básico, el OA 19 de las Bases Curriculares, establece que los estudiantes deben conseguir: “Determinar la longitud de objetos, usando unidades de medida no estandarizadas y unidades estandarizadas (cm y m) en el contexto de la resolución de problemas” (Ministerio de Educación de Chile, 2013).

En cuarto año, se encuentra la tercera aparición del trabajo con longitud, donde el OA 22 insta lo siguiente: “Medir longitudes con unidades estandarizadas (m, cm) y realizar transformaciones entre estas unidades (m a cm y viceversa) en el contexto de la resolución de problemas” (Ministerio de Educación de Chile, 2013).

Por último, es en quinto básico donde se establece el último Objetivo de Aprendizaje relacionado con longitud, dentro de las Bases Curriculares chilenas.

Corresponde al OA 19 y determina que los estudiantes de este nivel deben ser capaces de: “Medir longitudes con unidades estandarizadas (m, cm, mm) en el contexto de la resolución de problemas” (Ministerio de Educación de Chile, 2013).

A continuación se presenta una tabla, en la cual se ordenan los Objetivos de Aprendizajes relacionados con el área de regiones rectangulares y también con la longitud, de acuerdo a las Bases Curriculares, por cada año escolar, de primero a sexto básico.

Nivel Escolar	Área	Longitud
1° Básico.	-	- Objetivo de Aprendizaje 18: Identificar y comparar la longitud de objetos, usando palabras como largo, corto.
2° Básico.	-	- Objetivo de Aprendizaje 19: Determinar la longitud de objetos, usando unidades de medida no estandarizadas y unidades estandarizadas (cm y m) en el contexto de la resolución de problemas.
4° Básico.	<p>- Objetivo de Aprendizaje 23: Demostrar que comprende el concepto de área de un rectángulo y de un cuadrado:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Reconociendo que el área de una superficie se mide en unidades cuadradas. ➤ Seleccionando y justificando la elección de la unidad estandarizada (cm² y m²). ➤ Determinando y registrando el área en cm² y m² en contextos cercanos. 	- Objetivo de Aprendizaje 22: Medir longitudes con unidades estandarizadas (m, cm) y realizar transformaciones entre estas unidades (m a cm y viceversa) en el contexto de la resolución de problemas.

	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Construyendo diferentes rectángulos para un área dada (cm^2 y m^2), para mostrar que distintos rectángulos pueden tener la misma área. ➤ Usando software geométrico. 	
5° Básico.	<p>- Objetivo de Aprendizaje 21: Diseñar y construir diferentes rectángulos, dados el perímetro, el área o ambos, y sacar conclusiones.</p> <p>- Objetivo de Aprendizaje 22: Calcular área de triángulos, de paralelogramos y de trapecios, y estimar área de figuras irregulares aplicando las siguientes estrategias:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Conteo de cuadrículas. ➤ Comparación con el área de un rectángulo. ➤ Completar figuras por traslación. 	<p>- Objetivos de Aprendizaje 19: Medir longitudes con unidades estandarizadas (m, cm, mm) en el contexto de la resolución de problemas.</p>
6° Básico.	<p>- Objetivo de Aprendizaje 13: Demostrar que comprenden el concepto de área de una superficie en cubos y paralelepípedos, calculando el área de sus redes (plantillas) asociadas.</p> <p>- Objetivo de Aprendizaje 18: Calcular la superficie de cubos y paralelepípedos, expresando el resultado en cm^2 y m^2.</p>	-

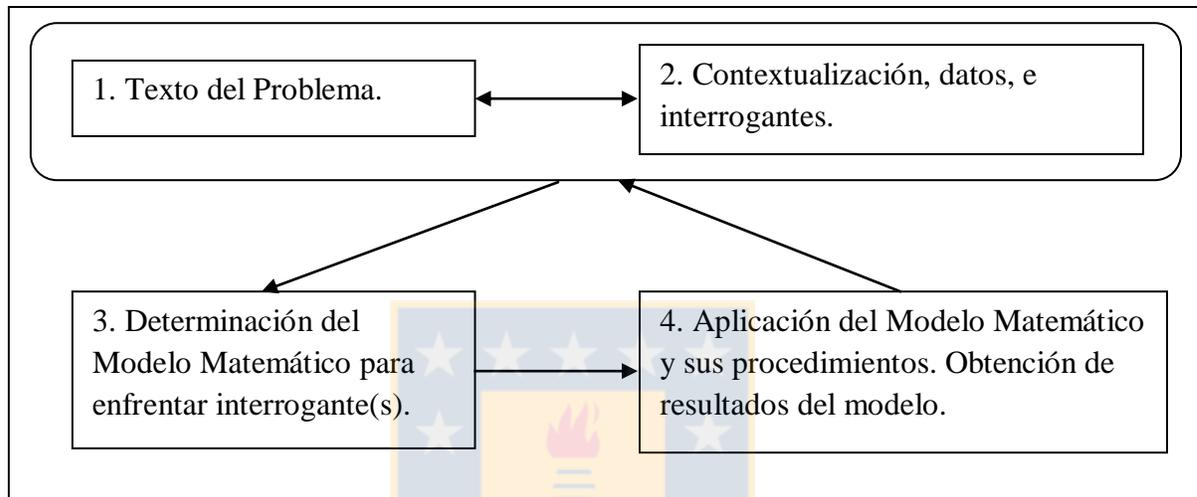
Tabla N°1: Área de regiones rectangulares y longitud en el currículo chileno.

A diferencia de la enseñanza de la medición del área de regiones rectangulares, en la enseñanza de la medición de longitud sí se incluyen explícitamente en los Objetivos de Aprendizaje las tres etapas de la Secuencia pedagógica para la enseñanza de las mediciones, propuesta por Koay (2014).



III.4. Esquema iterativo de Resolución de Problemas y Errores asociados.

En el análisis de errores asociados a la resolución de un problema, se puede realizar una clasificación general de acuerdo a un esquema iterativo de resolución de problemas basado en uno propuesto por Silver, E. A., Shapiro, L.J., Deutsch, A., (1993), para problemas de división con resto.



Esquema 8: Proceso iterativo de Resolución de un Problema.

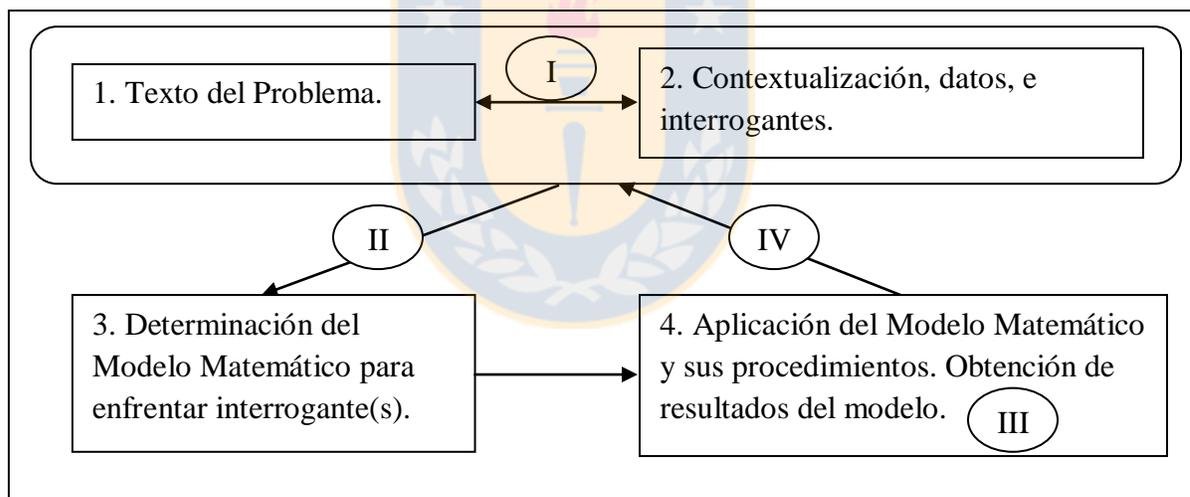
En el esquema se ilustra cómo, luego de leer el texto del problema, el alumno concibe el contexto en el cual éste adquiere sentido, y extrae los datos e interrogantes relevantes. Para responder una o más de las interrogantes, determina un Modelo Matemático. Aplica el modelo, el cual arroja resultados. A continuación, interpreta los resultados del modelo para incorporarlos al enunciado del problema, generando un nuevo conjunto de datos e interrogantes, iterando tal proceso hasta resolver el problema.

Se consideran 4 tipos de errores según la etapa del proceso iterativo recién descrito en la que se producen.

- Error Tipo I: Se produce en caso de traspasar mal la información dada en el enunciado del problema, es decir, hay un mal mapeo entre las etapas 1 y 2 del esquema iterativo. Se incluye aquí cuando el alumno no logra dar sentido al texto o le da un sentido equivocado, y también cuando recoge mal los datos y/o las interrogantes.
- Error Tipo II: Se produce en caso de escoger un modelo matemático inadecuado, es decir, hay un mal mapeo entre las etapas 1-2 y la etapa 3 del esquema iterativo. Por

ejemplo, sumar en lugar de multiplicar las dimensiones de la región rectangular para obtener su área.

- Error Tipo III: Se produce al cometer errores procedimentales en la aplicación del modelo matemático determinado, es decir, al ejecutar la etapa 4 del esquema iterativo. Por ejemplo, se pudo haber decidido realizar una multiplicación con dos datos numéricos del problema, pero dicha operación aritmética se realizó mal.
- Error Tipo IV: Se produce al interpretar mal los resultados del modelo, es decir, hay un mal mapeo entre la etapa 4 y las etapas 1-2 al iniciar la siguiente iteración del esquema iterativo. De este modo, es posible señalar que no basta con determinar un modelo matemático adecuado a la situación y los datos, y aplicarlo sin equivocación, sino que los resultados de este proceso deben llevarse al contexto de la situación con la cual se trabaja, sumando este nuevo resultado a los datos que ya se tenían del problema.



Esquema 9: Proceso iterativo de Resolución de un Problema con los errores asociados.

III. Metodología.

Se utiliza una investigación de tipo descriptiva, basándose en un diseño no experimental para lograr los objetivos del presente estudio. De tipo descriptiva ya que se realiza una observación de los hechos hallados. No experimental porque no se diseña algún experimento a priori con los estudiantes que conforman la muestra, si no que se analizan los datos hallados en base a la situación contemplada.

IV.1. La muestra.

Para determinar las estrategias y los errores de escolares chilenos en la resolución de problemas que involucran el área de regiones rectangulares, se trabajó con una muestra de estudiantes de quinto año básico y tercer año de enseñanza media de la Región del Biobío. El grupo de quinto básico consiste en 100 y los estudiantes de tercero medio son 112 en total. Los alumnos provienen de establecimientos educacionales de las 4 provincias de la región y de diversas realidades socioculturales (ver Anexo 1: Tabla de Establecimientos).

La participación de estos alumnos se enmarcó en el Campeonato Escolar de Matemática, CEMAT, que se realiza anualmente en la Región del Biobío. Los estudiantes de quinto básico participaron en el CEMAT 2015, en tanto que los jóvenes de tercero medio participaron en el CEMAT 2012.

El CEMAT consta de 5 pruebas escritas que se aplican durante el año, en 5 fechas distintas. Los alumnos participantes son determinados por el propio establecimiento mediante mecanismos internos, los cuales son, generalmente, uno de los que siguen: la selección por rendimiento, la participación voluntaria sin tener en cuenta el rendimiento y la participación de todos los alumnos del nivel inscrito. Estos alumnos participan en las 4 primeras fechas del CEMAT. En la fecha 5, y final, se seleccionan los alumnos que representan a cada establecimiento de acuerdo a su rendimiento en las 4 pruebas anteriores. La muestra de alumnos que se analiza en este trabajo corresponde a los seleccionados para la fecha final de los años respectivos.

IV.2. El instrumento y su administración.

El instrumento de medición consistió, en cada nivel, en una prueba escrita aplicada en la fecha 5 de cada CEMAT. De estas pruebas, sólo se consideró el problema de área de regiones rectangulares incluidos en cada una, para su análisis y determinación de los objetivos.

El problema que se analizó para los alumnos de tercero medio, se incluyó en la quinta fecha del CEMAT 2012, en Septiembre de tal año y correspondía al Problema 1 de la prueba (ver Anexo 2: Prueba fecha 5 CEMAT 2012). El problema que se analizó para los alumnos de Quinto Básico se incluyó en la quinta fecha del CEMAT 2015, en Noviembre de ese año y correspondía al problema 5 de la prueba (ver Anexo 3: Prueba fecha 5 CEMAT 2015).

El segundo problema es una adaptación simplificada del primero, en la que se mantuvo la situación contextual, se eliminó la necesidad de realizar conversiones de unidad de medida y se utilizaron cantidades más pequeñas.

En el CEMAT 2015, la administración de la prueba fue realizada en el propio establecimiento de los escolares participantes y estuvo a cargo de los Profesores de Matemática del mismo, a diferencia del CEMAT 2012, donde la prueba se realizó a todos los alumnos finalistas en un solo recinto, diferente a su establecimiento, y estuvo a cargo de monitores integrantes del equipo organizador del CEMAT de ese año.

En ambas pruebas se instruyó a los estudiantes para que sus respuestas fueran justificadas lo más detalladamente posible. El tiempo máximo para responder las pruebas fue de 120 minutos en el CEMAT 2012 y de 70 minutos en el CEMAT 2015.

IV.3. Método de Análisis.

En primera instancia, se analizó el rendimiento de los estudiantes ante los problemas presentados. Para esto, a cada respuesta escrita se le asignó un puntaje: 1 si la solución dada era la considerada correcta, y 0 si no lo era o estaba en blanco. Para el problema aplicado en el CEMAT 2012, la respuesta era que había 2400 chanchitos de tierra y para el CEMAT 2015 era que había 240. En base a esto, se analizó el porcentaje de respuestas correctas por cada grupo considerado.

Además del rendimiento, se analizaron las estrategias usadas por los alumnos. Para determinar las estrategias, primero, se examinó cada respuesta escrita de los estudiantes, dejando un registro de los procedimientos que realizaron, mediante una breve descripción. A continuación, estos conjuntos de procedimientos fueron agrupados en estrategias, entendiendo por estrategia un conjunto coherente de procedimientos y argumentos que, en caso de realizarse adecuadamente, permiten obtener la respuesta al problema. La agrupación se realizó mediante el establecimiento de procedimientos principales y la presencia común de éstos en las diversas respuestas halladas de los estudiantes. Cada estrategia fue, por lo tanto, definida a posteriori, a partir de los procedimientos hallados en las respuestas de los estudiantes, y no se trabajó con estrategias definidas a priori. Luego de definidas las estrategias se analizó el porcentaje de alumnos que utilizó cada una de ellas. Los alumnos que adoptaron una estrategia poco común, con porcentaje de uso inferior al 3%, fueron incluidos en el ítem “Otra Estrategia”. Los estudiantes de cuya respuesta no fue posible deducir la estrategia utilizada o que no la indicaron, fueron incluidos en el ítem “Sin Estrategia”. Con esto, se analizó, además, el porcentaje de respuestas correctas por cada estrategia.

Finalmente, también se hizo un análisis de los errores cometidos por los estudiantes. Para determinar los errores, en primera instancia, se examinó cada respuesta escrita, para dejar un registro del error hallado en cada una, si es que cometió alguno. A partir de esto, se definieron las *categorías* de errores, y se analizó el porcentaje de alumnos incluido en cada una de ellas. También fueron analizadas las relaciones entre las estrategias y cada una de las categorías de errores definidas.

Adicionalmente, se consideró la clasificación de tipos de errores asociados al esquema iterativo de resolución de problemas basado en el propuesto por Silver, Shapiro, & Deutsch (1993). Al igual que con las categorías de errores propios de los problemas, se analizó el porcentaje de alumnos en cada tipo de error y las relaciones de cada tipo con las estrategias.



IV. Resultados y Análisis.

V.1. Resultados y Análisis por Rendimiento.

Para analizar el rendimiento de los estudiantes de quinto básico y tercero medio al momento de resolver los problemas correspondientes, se determinó si llegaron o no a la solución correcta del problema, para lo cual se designó un puntaje de 1 o 0, respectivamente. En el caso de los alumnos de quinto básico, el 35% respondió adecuadamente el problema, mientras que un 50% de los jóvenes de tercero medio resolvió exitosamente el correspondiente a este nivel. Estos resultados se ilustran en la siguiente tabla:

Puntaje Asignado	Porcentaje de alumnos de 5° básico (n=100).	Porcentaje de alumnos de 3° medio (n=112).	Porcentaje de alumnos totales (n=212).
Puntaje 0	65%	50%	57,1%
Puntaje 1	35%	50%	42,9%
Totales	100%	100%	100%

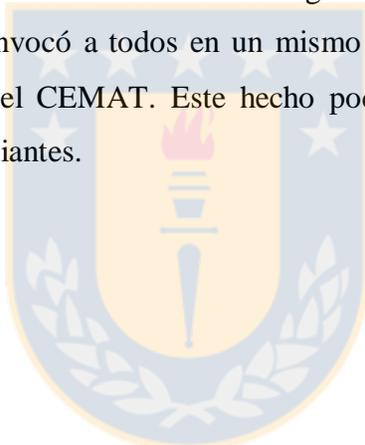
Tabla N°2: Porcentaje de alumnos de cada nivel por Puntaje asignado.

Hubo un 15% de diferencia de éxito entre los estudiantes que conforman cada grupo por nivel. Este hecho se puede asociar a distintos factores:

- Los alumnos de quinto básico tienen menos experiencia que los estudiantes de tercero medio en la resolución de problemas, por lo que es normal que hayan revelado un menor porcentaje de respuestas correctas.
- Hubo una gran diferencia en el tiempo otorgado para realizar las pruebas de cada CEMAT en que se incluían los problemas analizados. Los alumnos de quinto básico contaron con 50 minutos menos para realizar una prueba con una mayor cantidad de preguntas que los alumnos de tercero medio. En promedio, los estudiantes de tercero medio contaron con 40 minutos para desarrollar cada problema de la prueba, en tanto que los niños de quinto básico contaron con 14 minutos por problema. Se suma a este

factor, el orden en que se incluyeron los problemas en cada prueba: en el CEMAT 2012 el problema de los chanchitos de tierra era el primero de la lista y en el CEMAT 2015 era el último. Por estas circunstancias, los alumnos de quinto básico podrían haber prestado una atención menor al problema analizado por ser el último a realizar. Así también, debido al tiempo que se les otorgó para realizar la totalidad de la prueba, los estudiantes de este nivel podrían no haber alcanzado a desarrollar el problema, no haber contado con el tiempo suficiente para revisar el procedimiento llevado a cabo (en busca de alguna falla a corregir), o no haber puesto toda su concentración en él por tener que desarrollarlo en forma algo más apresurada que los alumnos de tercero medio.

- El ambiente en el que debió trabajar cada grupo no fue el mismo: los alumnos de quinto básico trabajaron en las dependencias de sus respectivos establecimientos con el asesoramiento de profesores de los mismos lugares, mientras que a los alumnos de tercero medio se les convocó a todos en un mismo lugar trabajando bajo la tutela de monitores encargados del CEMAT. Este hecho podría haber influido en el nivel de nerviosismo de los estudiantes.



V.2. Resultados y Análisis por Estrategias.

En primer lugar, se trabajó con el análisis de los conjuntos de Procedimientos utilizados por los alumnos de tercero medio. La descripción de tales procedimientos es la que sigue:

- Procedimiento 1: Se calcula el área total del terreno en metros cuadrados. Luego, se realiza la conversión de la medida de la superficie del terreno de metros cuadrados a centímetros cuadrados. Finalmente, se divide la superficie total del terreno, por la medida del espacio que ocupa cada chanchito, obteniendo el total de éstos.
- Procedimiento 2: Se calcula el área total del terreno en metros cuadrados. Luego, se realiza la conversión de la medida de superficie que ocupa cada chanchito de tierra, de centímetros cuadrados a metros cuadrados. Por último, se divide la superficie total del terreno, por la medida del espacio que ocupa cada chanchito, obteniendo el total de éstos.
- Procedimiento 3: Se convierten las medidas de los lados del terreno rectangular, de metros a centímetros. Luego, se calcula el área total del terreno en centímetros cuadrados. Finalmente, se divide la superficie total del terreno, por la medida del espacio que ocupa cada chanchito, obteniendo el total de éstos.
- Procedimiento 4: Se convierten las medidas de los lados del terreno rectangular, de metros a centímetros. A continuación, se subdivide el terreno total en superficies rectangulares de 5 cm^2 , dividiendo las medidas de los lados. Por último, se multiplica la cantidad de subdivisiones resultantes por lado, obteniendo la cantidad total de chanchitos.
- Procedimiento 5: Se calcula el área total del terreno en metros cuadrados. Luego, se divide la región rectangular en 12 cuadrados de 1 m^2 de área, para, a continuación, subdividir estos cuadrados en regiones rectangulares de 5 cm^2 . Por último, se calcula el resultado total de superficies rectangulares por cada cuadrado y esto se multiplica por el total de cuadrados de 1 m^2 , obteniendo el total de chanchitos.
- Procedimiento 6: Se calcula el área total del terreno en metros cuadrados. Luego, se divide la superficie rectangular en 12 cuadrados de 1 m^2 de área. A continuación, se realiza la conversión del equivalente de 1 m^2 a centímetros cuadrados. Se divide este

último resultado por la medida de la superficie que ocupa cada chanchito. Finalmente, se multiplica este último resultado por el total de cuadrados en que se subdividió el terreno, obteniendo el total de chanchitos.

- Procedimiento 7: Se convierten las medidas de los lados del terreno rectangular, de metros a centímetros. Luego, se divide la superficie en 48 cuadrados de 50 cm de lado, para subdividir estos cuadrados en superficies rectangulares de 5 cm² de área. Se multiplica la cantidad total de subdivisiones resultantes por lado en los cuadrados, para obtener la cantidad de chanchitos de tierra en cada uno. Finalmente, se multiplica este último resultado por el total de cuadrados, obteniendo el total de chanchitos.
- Procedimiento 8: Se convierten las medidas de los lados del terreno rectangular, de metros a centímetros. Luego, se subdivide el terreno en 12 cuadrados de lado 100 cm, y éstos, a su vez, en 100 cuadrados de lado 10 cm. Los cuadrados de lado 10 cm, se subdividen en superficies cuadradas de área 1 cm², y se suman de 5 en 5, obteniendo el total de chanchitos por cada cuadrado de lado 10 cm. Se multiplica esta última cantidad por el total de cuadrados de lado 10 cm que hay en cada cuadrado de lado 100 cm y esto se multiplica, a su vez, por el total de cuadrados de lado 100 cm, obteniendo el total de chanchitos.
- Procedimiento 9: Se convierten las medidas de los lados del terreno rectangular, de metros a centímetros. Luego, se subdivide el terreno en 3 cuadrados de lado 100 cm, y uno de lado 300 cm. A continuación, se calcula, mediante proporciones, la cantidad de chanchitos de tierra en cada cuadrado, y suma los resultados para obtener el total de éstos.

A partir de esta descripción, se optó por: establecer en una sola categoría de Estrategias aquellos procedimientos con pasos comunes, incluir en “Otra Estrategia” los que fueron utilizados por menos de un 3% de los estudiantes, e incluir en el ítem “Sin Estrategia” a los estudiantes de cuya respuesta no fue posible deducir la estrategia utilizada o que no la indicaron. Los ítems de la clasificación de Estrategias son los que a continuación se describen:

- Estrategia A: Utiliza la fórmula de área para calcular la medida de la región rectangular que representa el terreno. Divide dicha cantidad por la medida de la superficie que ocupa cada chanchito de tierra, obteniendo el total de éstos. Incluye las Procedimientos 1, 2 y 3 anteriores.

Un ejemplo de este tipo de Estrategia es lo realizado por el Estudiante N°100.

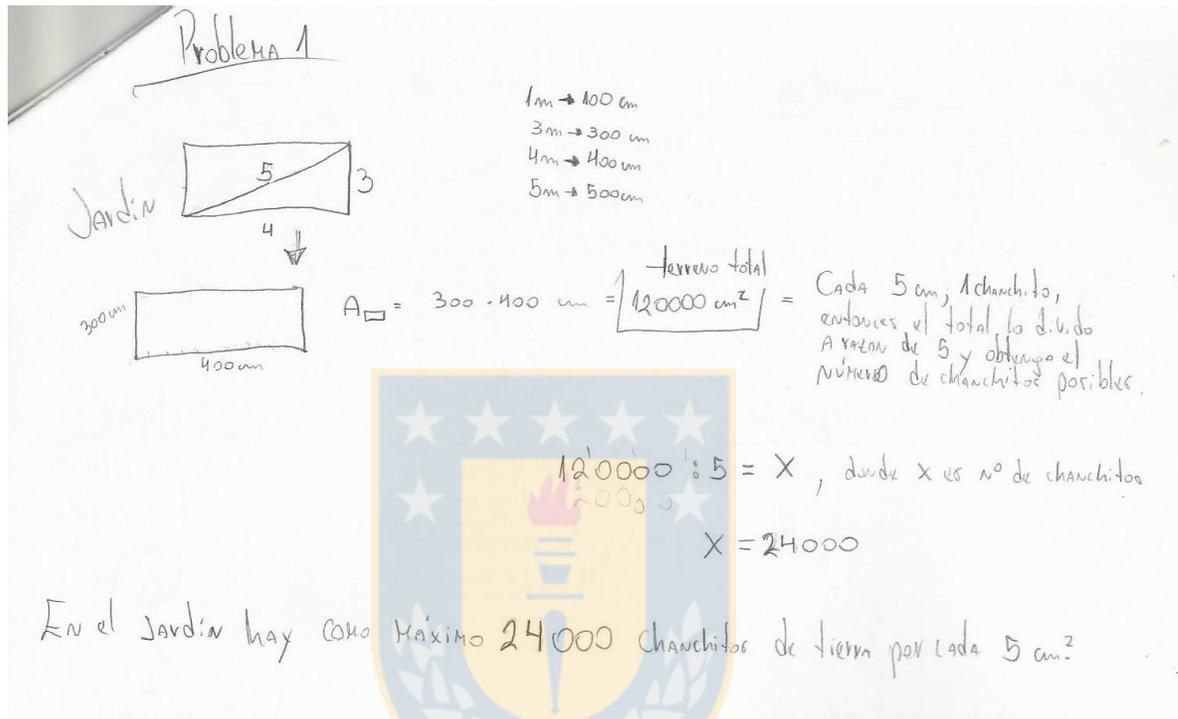


Imagen N°1: Respuesta estudiante número 100.

- Estrategia B: Subdivide la región rectangular que representa el terreno, de acuerdo a la superficie que ocupa cada chanchito de tierra, dividiendo las medidas de los lados de la región rectangular. Incluye el Procedimiento 4 anterior.

Un ejemplo de la estrategia descrita, es la segunda solución dada por el alumno número 66.

$3 \text{ m} \rightarrow 300 \text{ cm}$
 $4 \text{ m} \rightarrow 400 \text{ cm}$
 $\frac{300 \cdot 400}{120.000 \text{ cm}^2}$

$\frac{120.000}{5} = 24.000$
cm² de terreno cada 5 cm² de terreno vive un chanchito de tierra

• En el jardín del abuelo Anacleto hay 24.000 chanchitos de tierra.

Otro modo de calcularlo sería:

$400 \text{ cm} : 5 \text{ cm} = 80$
 Por lo tanto serían 80 columnas
 $300 \text{ cm} : 1 \text{ cm} = 300$
 y 300 filas.

Si tenemos en cuenta que cada 5 cm² de terreno vive un chanchito de tierra, debemos multiplicar $80 \cdot 300$ lo que nos da como resultado 24.000

Por lo tanto, efectivamente hay 24.000 chanchitos de tierra

Imagen N°2: Respuesta estudiante número 66.

- Otra Estrategia: Incluye los Procedimientos 5, 6, 7, 8 y 9 anteriores, que fueron usados por menos del 3% de la muestra.

Un ejemplo de una de las Estrategias incluidas en este ítem, es el desarrollo llevado a cabo por el alumno N° 39.

1

400	400	400	400
400	400	400	400
400	400	400	400

3

2000000

4

1 chanchito

$\frac{1200 \cdot 4}{4800}$

$\Rightarrow 4800$ chanchitos

EN SU JARDIN HAY 4800 CHANCHITOS

PRIMERO DIVIDI LOS METROS CUADRADOS Y ME QUEDARON 12 CUADRADOS ($1m^2$) Y ESO LOS DIVIDI NUEVAMENTE EN LOS ($5cm^2$) LO CUAL RESULTO QUE EN ($1m^2$) HAY 400 CHANCHITOS Y ESOS 400 LO MULTIPLIQUE POR LOS 12 RESULTANDOME 4800 (ENTONCES EN EL ~~PATIO DEL ABUELO ANACETO~~ HAY JARDIN DEL ABUELO ANACETO VIVEN 4800 CHANCHITOS)

Imagen N°3: Respuesta estudiante número 39.

- Sin Estrategia: Procedimientos incoherentes o Estrategia imposible de deducir. Desarrollos sin Estrategia alguna. Un ejemplo de esto, fue lo realizado por el estudiante N°4.

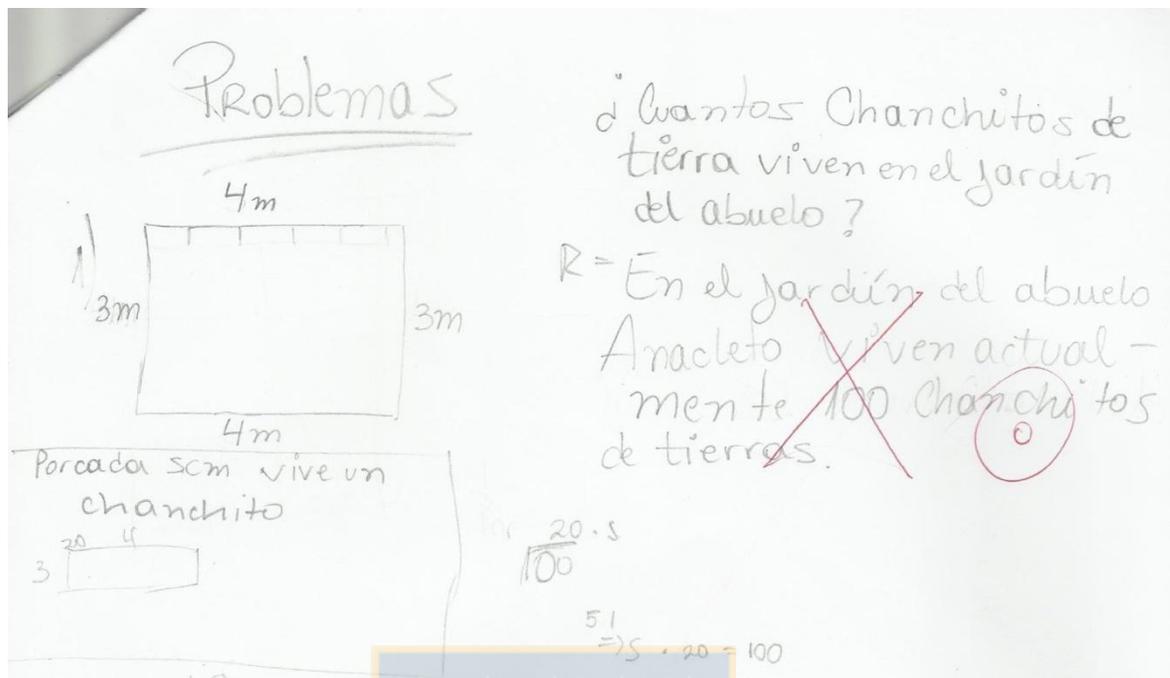


Imagen N°4: Respuesta estudiante número 4.

Para establecer las Estrategias utilizadas por los alumnos de quinto básico en el CEMAT 2015, se trabajó con las descripciones de los procedimientos realizados por éstos. Con esto, se pudo denotar que la gran mayoría utilizó alguna de las dos principales Estrategias descritas a partir de las respuestas de los estudiantes de tercero medio. El resto, no realizó alguna Estrategia que se pudiera deducir o no especificó procedimiento alguno. Por este motivo, para los alumnos de quinto básico, se utilizaron los mismos ítems de Estrategias establecidos para los jóvenes de tercero medio. No se hallaron respuestas donde los estudiantes de quinto básico utilizaran alguna Estrategia diferente de las Estrategias A y B.

Algunos ejemplos de respuestas de alumnos de quinto básico, para cada ítem, son los siguientes:

- Estrategia A: Un ejemplo de este tipo de Estrategia, es la respuesta del estudiante N° 187.

Respuesta: En el cajón viven 24 chanchitos de tierra.

Explicación de la respuesta: hay que calcular el area y luego contar de 5 en 5.

$$30 \times 40 = 120$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95 100

21 22 23 24
105 110 115 120

4
10
10

Imagen N°5: Respuesta estudiante número 187.

- Estrategia B: Esta estrategia de ejemplifica claramente con la respuesta del estudiante N° 168.

Respuesta: En el cajón viven 48 chanchitos de tierra.

Explicación de la respuesta:

Porque dividi el largo por los 5 centímetros
y después dividi el ancho por cinco
y después multiplique los 2 resultados
que me dio 48.

5	5	5	5	5	5	
1	2	3	4	5	6	5
7	8	9	10	11	12	5
13	14	15	16	17	18	5
19	20	21	22	23	24	5
25	26	27	28	29	30	5
31	32	33	34	35	36	5
37	38	39	40	41	42	5
43	44	45	46	47	48	5

$30 : 5 = 6$ $40 : 5 = 8$

Imagen N°6: Respuesta estudiante número 168.

- Sin Estrategia: Un ejemplo de procedimientos con los cuales no se puede deducir una Estrategia, es la respuesta del alumno N° 141.

Respuesta: En el cajón viven 6 chanchitos de tierra.
 Explicación de la respuesta:

$$30 - 5 = 25 \quad \text{---} \quad 1$$

$$40 - 5 = 35 \quad \text{---} \quad 1$$

$$25 = 20 \quad \text{---} \quad 2$$

$$35 = 30 \quad \text{---} \quad 2$$

$$20 = 15 \quad \text{---} \quad 3$$

$$30 = 25 \quad \text{---} \quad 3$$

$$15 = 10 \quad \text{---} \quad 4$$

$$25 = 20 \quad \text{---} \quad 4$$

$$10 = 5 \quad \text{---} \quad 5$$

$$20 = 10 \quad \text{---} \quad 5$$

$$5 = 0 \quad \text{---} \quad 6$$

$$10 = 5 \quad \text{---} \quad 6$$

Imagen N°7: Respuesta estudiante número 141.

De acuerdo a estos ítems de Estrategias, se tienen los siguientes resultados del porcentaje de alumnos por nivel clasificados en cada una de ellas.

Ítem de Estrategia	Porcentaje de alumnos de 5° básico (n=100).	Porcentaje de alumnos de 3° medio (n=112).	Porcentaje de alumnos totales (n=212).
Estrategia A	52%	77,7%	65,6%
Estrategia B	33%	17,9%	25%
Otra Estrategia	0%	7,1%	3,8%
Sin Estrategia	15%	0,9%	7,5%
Totales	100%	103,6%	101,9%

Tabla N°3: Porcentaje de alumnos de cada nivel por Estrategia utilizada.

Es posible observar que el porcentaje total de alumnos de tercero medio establecidos en esta clasificación, supera el 100%. Este hecho se debe a que hubo estudiantes de este nivel que utilizaron más de una Estrategia, lo cual no ocurrió con los alumnos de quinto básico. Este fenómeno puede explicarse por los siguientes motivos: los alumnos de tercero medio contaban con más tiempo para desarrollar la prueba, por lo que algunos de ellos (un 3,6%) decidió complementar su procedimiento principal con algún otro para corroborar su respuesta; los alumnos de tercero medio cuentan con un mayor repertorio cognitivo para llevar a cabo el desarrollo de problemas que involucran el cálculo de área de regiones rectangulares; o que los estudiantes de tercero medio, por alguna razón, se encontraron inseguros de las explicaciones llevadas a cabo por lo que se vieron en la necesidad de dar alguna otra, debido a las exigencias de la pruebas del CEMAT de que las explicaciones fueran lo más claras posibles.

La Estrategia A, basada en el uso de la fórmula para el cálculo del área de una región rectangular, es la más utilizada al momento de trabajar con este tipo de problemas en la enseñanza escolar. En las Bases Curriculares chilenas no se especifica la enseñanza de la fórmula para calcular el área de regiones rectangulares, pese a lo cual un 65,6% del total de estudiantes de la muestra trabajó con ella.

La Estrategia B, consistente en la subdivisión de una región rectangular de acuerdo a una medida de área dada, se basa en la forma en que se enseña el cálculo de área por su subdivisión en unidades cuadradas, formando cuadrículas. Este tipo de trabajo es el que se realiza previo a la enseñanza de la fórmula de área, como una forma de comprender este concepto y el origen de la fórmula. Por esto, los alumnos de quinto año, los cuales se encuentran más cercanos a este tipo de trabajo debido a que están en los inicios del aprendizaje del área de regiones rectangulares, mostraron una tendencia a utilizar en mayor medida este tipo de Estrategia, en comparación a los estudiantes de tercero medio. Sin embargo, a pesar de ser la forma de trabajar con área de regiones rectangulares en las Bases Curriculares chilenas, del total de alumnos de la muestra sólo un cuarto se basó en la subdivisión por unidades cuadradas para desarrollar el problema.

En ambos niveles la Estrategia más utilizada fue la basada en la fórmula para el cálculo de área de regiones rectangulares. La utilizaron un 52% de los alumnos de quinto básico y un 77,7% de los jóvenes de tercero medio. La Estrategia B, por otro lado, tuvo un nivel de preferencia de un 33% en los estudiantes de quinto básico y de un 17,9% en los alumnos de tercero medio.

Se observa que el uso de la fórmula de área es aún mayor en los alumnos de tercero medio. Como ya se mencionó, la fórmula de área es una de las primeras con las que debieran trabajar los estudiantes en su enseñanza escolar. Por esto, quizás, muchos de los alumnos de educación básica que ya han iniciado con el trabajo de área de regiones rectangulares no están familiarizados con el uso de fórmulas por lo que optan por trabajar con el método inicial que se utiliza para la comprensión de este tema: la subdivisión en unidades cuadradas. De esta forma, es de esperarse que la aplicación de la fórmula de área aumente con la edad de los estudiantes, ya que están más familiarizados con este tipo de trabajo.

Así también, debido a la poca experiencia que poseen los alumnos de quinto básico con este tipo de problemas, era de esperarse que el porcentaje de éstos en el ítem “Sin Estrategia” fuese mayor que el de los estudiantes de tercero medio (un 15% de los alumnos de quinto básico versus un 0,9% de los estudiantes de tercero medio). Esto se traduce en que, por una menor experiencia con el trabajo de problemas relacionados con el cálculo de área de regiones rectangulares, los estudiantes de quinto año presentan mayores

incoherencias en sus explicaciones y un mayor porcentaje de respuestas sin desarrollo. Este último fenómeno de respuestas “en blanco” no se presentó entre los alumnos de tercero medio, donde todos especificaron algún tipo de explicación para sus respuestas.

Sólo los estudiantes de tercero medio presentaron respuestas donde se utilizaron Estrategias distintas de las principales descritas (Estrategias A y B). Esta situación puede deberse a que ellos cuentan con más herramientas cognitivas que los estudiantes de quinto básico, debido a sus experiencias de años posteriores, por lo que son capaces de improvisar en base a procedimientos menos convencionales.

Se estableció, además, el rendimiento de los estudiantes por cada ítem de Estrategia.

Ítem de Estrategia	Porcentaje de alumnos de 5° básico con Puntaje 1.	Porcentaje de alumnos de 3° medio con Puntaje 1.	Porcentaje de alumnos totales con Puntaje 1.
Estrategia A	65,4%	62,1%	63,3%
Estrategia B	3%	15%	7,5%
Otra Estrategia	-	25%	25%
Sin Estrategia	0%	0%	0%

Tabla N°4: Porcentaje de alumnos que respondió correctamente el problema de cada nivel, por Estrategia utilizada.

En cuanto al nivel de éxito por Estrategia, la más exitosa en ambos niveles fue la Estrategia A (uso de la fórmula de área). Del total de alumnos que utilizó la Estrategia A, un 63,3% llegó a la respuesta del problema considerada como correcta, mientras que de aquellos que utilizaron la Estrategia B, un 7,5% (menos de un décimo de ese total) tuvo éxito en la resolución del problema correspondiente a su nivel. Esto quiere decir que, a pesar de que según las Bases Curriculares chilenas se trabaja con la subdivisión de regiones rectangulares de acuerdo a unidades cuadradas, y no se señala como obligatorio el trabajo con la fórmula de área, los estudiantes tienen más éxito al trabajar con éste último método.

Analizando el nivel de éxito por nivel de acuerdo a las Estrategias utilizadas, a pesar de que los porcentajes fueron similares, los alumnos de quinto básico que trabajaron con la Estrategia A tuvieron un mayor índice de respuestas correctas que los estudiantes de tercero

medio que utilizaron la misma Estrategia. Sin embargo, al momento de trabajar con la Estrategia de subdivisiones (Estrategia B), fueron los alumnos de tercero medio los que obtuvieron un mejor rendimiento que los niños de quinto básico. Este hecho sorprende si se tiene en cuenta que los alumnos de tercero medio están más habituados al trabajo basado en la fórmula de área, mientras que los estudiantes de quinto básico se encuentran más familiarizados con el trabajo de subdividir una región rectangular en unidades cuadradas.

Por otro lado, los estudiantes de tercero medio que utilizaron Otra Estrategia, tuvieron un mayor porcentaje de respuestas correctas que aquellos del mismo nivel que utilizaron la Estrategia B. Cabe destacar además, que de los estudiantes cuya Estrategia no fue posible ser deducida (Sin Estrategia), ninguno logró dar con la solución considerada como correcta en cada problema.



V.3. Resultados y Análisis por Errores.

En una primera instancia, se trabajó con el análisis de las respuestas de los estudiantes de tercero medio para identificar los Errores cometidos por éstos. Se hallaron 8 Errores diferentes:

- Error 1: Conversión de m^2 a cm^2 y viceversa. Hace referencia a una mala elección del método para realizar conversiones de medidas de área.
- Error 2: Conversión de m a cm. Hace referencia a una mala elección del método para realizar conversiones de medidas de longitud.
- Error 3: Cálculo de área mediante la fórmula. Errores en el planteamiento de la fórmula para el cálculo de área de regiones rectangulares.
- Error 4: Confusión de una unidad de área con una unidad de longitud. Referencia al tratamiento equívoco de una medida de área como una medida de longitud de alguna figura.
- Error 5: Realización de una operación aritmética. Fallos cometidos en la realización de algún cálculo.
- Error 6: Elección de operación aritmética a realizar. Equívoco cometido al momento de seleccionar el cálculo a realizar con los datos con que se cuenta, dependiendo del contexto o lo que se espera obtener.
- Error 7: Traspaso de información del enunciado. Hace referencia a errores cometidos por escribir mal alguna cantidad, registro u otro tipo de dato que se especifica en el enunciado del problema, al momento de trabajar con éstos.
- Error 8: Mala comprensión del problema. Se incluyen los casos en que los estudiantes no pudieron realizar una estrategia coherente con la situación del problema. No se sabe si esta situación se debe en realidad a una mala comprensión del problema, sin embargo, se opta por esta denominación para facilitar el tratamiento de las categorías de errores (por ejemplo, también podría tratarse de una falta de conocimiento por parte de los estudiantes, o algún otro factor).

Al trabajar, luego, con los Errores cometidos por los estudiantes de quinto básico se pudo notar que en su gran mayoría correspondían a los mismos hallados en las respuestas de los alumnos de tercero medio. Por esto, se decidió continuar con la misma clasificación

establecida para éstos últimos, agregando nuevos Errores cometidos por los niños de quinto básico:

- Error 9: Mala subdivisión de la región rectangular. Fallos por subdividir mal los lados de la región rectangular involucrada, realizar mal la cuadrícula, o escoger mal los datos para realizar la subdivisión.
- Error 10: Mal conteo de subdivisiones. Equívocos cometidos por contar mal la cantidad de espacios resultantes al realizar una subdivisión.

En vista de las categorías de Errores hallados, se tiene los siguientes resultados de acuerdo al porcentaje de alumnos por nivel que cometió cada uno de ellos.

Categoría de Error	Porcentaje de alumnos de 5° básico (n=100).	Porcentaje de alumnos de 3° medio (n=112).	Porcentaje de alumnos totales (n=212).
Error 1	0%	21,4%	11,3%
Error 2	0%	3,6%	1,9%
Error 3	6%	1,8%	3,8%
Error 4	31%	17,9%	24,1%
Error 5	13%	10,7%	11,8%
Error 6	4%	1,8%	2,8%
Error 7	0%	1,8%	0,9%
Error 8	7%	0,9%	3,8%
Error 9	5%	0%	2,4%
Error 10	2%	0%	0,9%
Totales	68%	59,9%	63,7%

Tabla N°5: Porcentaje de alumnos de cada nivel por categoría de Error cometido.

Al analizar las respuestas de los alumnos de tercero medio se hallaron 8 categorías de Errores diferentes, entre los que se cuentan errores por conversión de unidades de medida (de área y de longitud), cálculo de área, confusión de una unidad de área con una de longitud, mala realización de una operación aritmética y una mala elección de algunas de

éstas, mal traspaso de información del enunciados, y la no comprensión del problema planteado. Para los estudiantes de quinto básico, se utilizaron las mismas categorías de errores, agregando los nuevos hallados entre sus respuestas: mala subdivisión de una región rectangular y un mal conteo de estas subdivisiones.

En el caso de los alumnos de quinto básico, además de haber cometido nuevos errores distintos de los ya establecidos para los estudiantes de tercero medio, se denotó el hecho de que 3 de las primeras categorías no fueron halladas entre los errores cometidos por éstos: los Errores 1, 2 y 7. Los Errores 1 y 2, por tratarse de equívocos en la conversión de unidades de medida de área y de longitud, respectivamente, era de esperarse que no se encontraran en las respuestas de los alumnos de quinto básico. Esta situación se debe al hecho de que el problema aplicado en el CEMAT 2012 fue modificado para incluirse en el CEMAT 2015, de tal forma que se eliminó la necesidad de realizar conversiones de unidad para resolver el problema. En cuanto al Error 7, el cual trataba de fallos en el traspaso de información del enunciado del problema, pudo haberse hallado sólo en los alumnos de tercero medio debido al formato de las pruebas de cada año: en las pruebas del CEMAT 2012 se incluían todos los problemas en una primera página, dejando espacio para sus desarrollos en hojas en blanco adjuntas, mientras que en las pruebas del CEMAT 2015 el espacio otorgado para desarrollar cada problema estaba a continuación de cada enunciado.

La aparición de nuevas categorías de Errores en las respuestas de los alumnos de quinto básico, en específico los Errores 9 y 10 relativos a un mal trabajo con la subdivisión de una región rectangular y un mal conteo de las subdivisiones resultantes, lleva a pensar en el hecho de que no saben utilizar este método, pese a que debiesen estar más acostumbrados a trabajar con este tipo de procedimientos debido a que los primeros trabajos de área de regiones rectangulares se realizan en cuarto básico.

En cuanto a las categorías de Errores con un porcentaje de incidencia superior al 10% por cada nivel, se encuentran los Errores 4 y 5 en el caso de los alumnos de quinto básico, y los Errores 1, 4 y 5 en los estudiantes de tercero medio.

Para los estudiantes de tercero medio, la categoría con un mayor porcentaje corresponde al Error 1, con un 21,4% de incidencia. Esta categoría hace referencia a fallos cometidos al momento de realizar conversiones de m^2 a cm^2 y viceversa. Era de esperarse que este error fuese uno de los más cometidos, debido a la poca o nula experiencia de los

estudiantes con este trabajo. En las Bases Curriculares chilena no se especifica el tratamiento de este tipo de conversiones de unidades de medida, por lo cual no es obligatoria su enseñanza.

El Error 4 fue el segundo más incurrido por los alumnos de tercero medio, donde un 17,9% de ellos lo cometió, mientras que para los estudiantes de quinto básico fue el que obtuvo un mayor nivel de incidencia, donde un 31% de ellos fue clasificado aquí. Se recalca el hecho de que los alumnos de quinto básico, al parecer, tienden a confundir más una unidad de área con una unidad de longitud.

El Error 4 podía deberse a dos razones. La más sencilla, es que los estudiantes en lugar de leer, en el enunciado del problema, que los chanchitos de tierra habitaban cada “5 centímetros cuadrados”, hubiesen leído o entendido que este hecho ocurría cada “5 centímetros”. De ser así, es de esperarse que los alumnos consideraran esa medida de área dada como una medida de longitud. Sin embargo, ¿tiene sentido hablar de que un animal habita cada cierta unidad de longitud? Este tipo de unidades de medida son lineales, y los animales, como cualquier otro objeto real, ocupa área, ya que no son figuras unidimensionales. En este sentido, los estudiantes que cometieron este fallo por una mala lectura del enunciado, si hubiesen analizado más a fondo lo que representaba, se habrían detenido en una lectura más atenta, evitando quizás el error.

Por otro lado, el Error 4 podía deberse a otro motivo muy diferente que un fallo en la lectura del enunciado del problema. Los alumnos consideraron el dato de la superficie que ocupaba cada chanchito de tierra, como la medida del área de un sector rectangular o cuadrado, en donde habitaba cada oniscídeo. Cuando consideraban esta superficie como una región cuadrada, era cuando tendían a cometer el fallo clasificado como Error 4. Los estudiantes valoraron la medida de los lados de estas superficies cuadradas en 5 centímetros, siendo que su área debía ser de 5 centímetros cuadrados. No repararon en el hecho de que, de esta forma, estaban trabajando con superficies cuya área medía 25 centímetros cuadrados. Usualmente incurrían en este hecho porque dividían las medidas de los lados del terreno rectangular, por las correspondientes medidas de los lados del sector que ocupaba cada chanchito de tierra.

El Error 5 fue el tercero más cometido por los alumnos de tercero medio, donde un 10,7% de ellos incurrió en él, mientras que para los estudiantes de quinto básico fue el que

obtuvo un segundo mayor nivel de incidencia, donde un 13% de ellos fue clasificado aquí. Aunque por una baja diferencia, los estudiantes de quinto básico presentan más fallos al realizar cálculos u operaciones aritméticas que los alumnos de tercero medio. Este hecho podría haberse hecho más notorio si se hubiesen trabajado con las mismas cantidades en ambos niveles, ya que en el problema del año 2015 se utilizaron cantidades más pequeñas.

Por otro lado, en los resultados de los alumnos de quinto básico hubo un aumento de incidencia en errores técnicos, tales como los Errores 3 y 6, referentes al cálculo de área mediante la fórmula y la elección de operaciones aritméticas a realizar, respectivamente. En ambos casos, se trata de fallos cometidos al momento de establecer algún tipo de modelo matemático a seguir. Esto quiere decir, que los alumnos de tercero medio poseen menos problemas con trabajos procedimentales.

A continuación, se estableció el porcentaje de alumnos de cada nivel que cometió cada categoría de Error por Estrategia utilizada.

Porcentaje de alumnos de 5° Básico.	Estrategia A (n=52).	Estrategia B (n=33).	Otra Estrategia (n=0).	Sin Estrategia (n=15).
Error 1	-	-	-	-
Error 2	-	-	-	-
Error 3	11,5%	0%	-	0%
Error 4	0%	93,9%	-	0%
Error 5	23,1%	3%	-	0%
Error 6	1,9%	9,1%	-	0%
Error 7	0%	0%	-	0%
Error 8	0%	0%	-	46,7%
Error 9	0%	15,2%	-	0%
Error 10	0%	6,1%	-	0%

Tabla N°6: Porcentaje de alumnos de 5° básico por Estrategia utilizada y categoría de Error cometido.

De esta forma, por ejemplo, de la tabla anterior es posible señalar que un 15,2% de los estudiantes de quinto básico que utilizaron la Estrategia B, cometió un Error 9, correspondiente a una mala subdivisión de la región rectangular.



Porcentaje de alumnos de 3° medio.	Estrategia A (n=87).	Estrategia B (n=20).	Otra Estrategia (n=8).	Sin Estrategia (n=1).
Error 1	25,3%	0%	25%	0%
Error 2	2,3%	10%	0%	0%
Error 3	1,1%	5%	0%	0%
Error 4	2,3%	75%	50%	0%
Error 5	8%	30%	0%	0%
Error 6	2,3%	0%	0%	0%
Error 7	1,1%	5%	0%	0%
Error 8	0%	0%	0%	100%
Error 9	-	-	-	-
Error 10	-	-	-	-

Tabla N°7: Porcentaje de alumnos de 3° medio por Estrategia utilizada y categoría de Error cometido.

De la tabla anterior, se puede asegurar que un 8% de los alumnos de tercer medio que utilizaron la Estrategia A, cometió un Error 5, correspondiente a una mala realización de una operación aritmética.

En base a estos hechos es posible establecer los errores propios de cada Estrategia. Para la Estrategia A se encuentran los Errores del 1 al 7, mientras que para la Estrategia B se hallan los Errores del 2 al 7, además del 9 y el 10. El Error 8 no está presente en ninguna de las respuestas de los estudiantes que utilizaron alguna de estas Estrategias, ya que de lo contrario, no se habría logrado determinar el procedimiento que utilizaron por haber realizado pasos que poca o nada relación pudieron haber guardado con el problema. En el caso de la Estrategia A, no se presentaron errores relativos a las subdivisiones de una región rectangular (Errores 9 y 10), debido a que no utilizaba este procedimiento. Mientras tanto, para la Estrategia B no hubo fallos de conversión de unidades de área (lo cual sólo podía estar presente entre las respuestas de los alumnos de tercer medio), debido a que, previo a la subdivisión de los lados para realizar la cuadrícula o calcular los espacios que

ésta debía contener, los estudiantes se aseguraban de tener las medidas de los lados de la región rectangular expresadas en centímetros.

Desde el punto de vista de las Estrategias utilizadas por los alumnos, en las respuestas de los estudiantes de quinto básico que utilizaron la Estrategia A los errores más cometidos fueron los Errores 3 y 5. Al momento de trabajar con la Estrategia basada en la fórmula para calcular el área de regiones rectangulares, los estudiantes de quinto básico tienden a cometer más errores relacionados con el establecimiento de ésta y la realización de operaciones aritméticas. El primer hecho puede estar relacionado con la poca familiarización de los estudiantes con la fórmula de área, la confusión de ésta con la correspondiente para calcular el perímetro de una región rectangular (ya que muchos calcularon el perímetro en lugar del área), o por una mala comprensión de ésta al sumar las medidas de los lados en lugar de multiplicarlos. Los fallos en la realización de operaciones aritméticas se deben en su gran mayoría a errores al realizar multiplicaciones o divisiones. Este último hecho se puede relacionar a una falta de práctica que poseen los alumnos de quinto básico con este tipo de cálculos, debido a que, según las Bases Curriculares chilenas, la multiplicación debe ser estudiada en tercer año.

En las respuestas de los jóvenes de tercero medio que utilizaron la misma Estrategia (relacionada con la fórmula de área), el error más común fue el Error 1. Ésta categoría trata de una mala elección del método para realizar conversiones de medidas de área, en específico, al convertir metros cuadrados a centímetros cuadrados y viceversa. El gran porcentaje de incidencia (un 25,3% de los jóvenes que utilizaron la Estrategia A) puede relacionarse al hecho de que la enseñanza de este tipo de trabajo no está reflejada como obligatoria en las Bases Curriculares chilenas, por lo que puede haber estudiantes que, aún cursando tercero medio, no hayan realizado jamás una conversión de unidades de medida de área. Pese a esto, aquellos estudiantes podrían haber evitado tal situación apoyándose inicialmente en una conversión de unidades de medida de longitud, para luego calcular el área de la región rectangular. Este Error destaca por sobre el resto en esta Estrategia debido a que el siguiente con un alto nivel de incidencia se trata del Error 5, donde sólo un 8% de los jóvenes lo cometió.

Por otro lado, en las respuestas de los alumnos de quinto básico que utilizaron la Estrategia B de subdivisión en unidades cuadradas, los errores más frecuentes fueron los

Errores 4 y 9. El primero trata de la confusión de una unidad de área con una unidad de longitud y fue cometido por el 93,9% de los estudiantes de quinto año que usaron dicha Estrategia, mientras que el segundo hace referencia a una mala subdivisión de la región rectangular y el porcentaje de incidencia de estos casos fue de un 15,2%. Lo cierto es que la cifra alcanzada por el Error 4 en este tipo de respuestas es exorbitante, ya que lo cometió casi la totalidad de los estudiantes de quinto básico que usaron la Estrategia B. Este hecho destaca una mala comprensión de los conceptos y/o unidades de medidas de área y longitud en las etapas iniciales de los escolares en este tema. En cuanto al Error 9, si bien el porcentaje de alumnos que lo cometieron utilizando esta Estrategia no fue tan elevado, se asocia a problemas de entendimiento que poseen los alumnos de esta etapa escolar al realizar cuadrículas, tal y como se puso en evidencia en varios artículos de investigación (Battista, Clements, Arnoff, Battista, & Borrow, 1998).

En el caso de los alumnos de tercero medio que utilizaron la Estrategia B, los errores más cometidos fueron los Errores 2, 4 y 5, relacionados con la conversión de unidades de longitud, la confusión de una unidad de área con una de longitud y la realización de operaciones aritméticas, respectivamente. De éstos, el que tuvo un mayor nivel de incidencia fue el Error 4 tal y como sucedió con los alumnos de quinto básico; lo cometieron tres cuartos de los jóvenes que utilizaron la Estrategia B. Esto quiere decir que, a pesar de las experiencias con el trabajo de área de regiones rectangulares que debieran poseer los estudiantes de tercero medio, aún existe un alto nivel de confusión con las unidades de área y de longitud. Así también, se destaca el alto porcentaje en el Error 5 en esta Estrategia (un 30%), lo que quiere decir que la cantidad de alumnos de tercero medio que cometen errores de cálculos aumenta al trabajar con subdivisiones de regiones rectangulares.

De los alumnos que utilizaron “Otra Estrategia”, los cuales sólo se encuentran en el nivel de tercero medio, los únicos errores hallados fueron los Errores 1 y 4, con un 25% y un 50% de incidencia, respectivamente. Esto quiere decir que, al momento de utilizar procedimientos alternativos a los convencionales, los estudiantes caen en dos de los fallos más cometidos por todos los miembros de este nivel.

Por otro lado, de las respuestas de los estudiantes catalogadas en “Sin Estrategia” sólo se encuentran Errores por una mala comprensión del problema (Error 8). Esta situación

fue establecida a priori, debido a que, como en este ítem de Estrategia se encuentran aquellos alumnos que no presentaron un procedimiento coherente como respuesta, no se podían catalogar en algún otro tipo de error, a menos que fuese evidente como, por ejemplo, un error de cálculo (situación que no se halló en estos casos). Por esto, el 100% de los alumnos de tercero medio en este ítem de Estrategia cometió un Error 8, mientras que de los estudiantes de quinto básico un 46,7% presentó esta categoría de error. El resto de los alumnos de quinto básico cuya respuesta fue establecida en el ítem “Sin Estrategia” corresponden a aquellos que no presentaron explicación alguna, por lo que era imposible establecer alguna categoría de error para ellos.

Estas categorías de Errores se pueden asociar con los tipos de errores según la etapa del Proceso Iterativo de Resolución de un Problema, los cuales correspondían a:

- Error Tipo I: Se produce en caso de traspasar mal la información dada en el enunciado del problema.
- Error Tipo II: Se produce en caso de escoger un modelo matemático inadecuado.
- Error Tipo III: Se produce al cometer errores procedimentales en la aplicación del modelo matemático determinado.
- Error Tipo IV: Se produce al interpretar mal los resultados del modelo.

De esta forma, la asociación entre ambas clasificaciones de Errores es la siguiente:

- Error 1: Conversión de m^2 a cm^2 y viceversa. Corresponde a un Error Tipo II.
- Error 2: Conversión de m a cm. Corresponde a un Error Tipo II.
- Error 3: Cálculo de área mediante la fórmula. Corresponde a un Error Tipo II.
- Error 4: Confusión de una unidad de área con una unidad de longitud. Su asociación con los errores del proceso iterativo, depende de la naturaleza del fallo. Si el error se debió a una mala lectura del enunciado, entonces se trata de un Error Tipo I. Si el estudiante interpretó bien los datos, pero aún así trabajó mal con ellos, se trata de un Error Tipo II.

Por otro lado, como algunos estudiantes no incluyeron una descripción muy específica de lo realizado al momento de desarrollar el problema, hubo casos en que no se pudo definir a cuál de las dos situaciones antes descritas corresponde al motivo del Error 4.

Para estas ocasiones, se definió una categoría denominada “Error Tipo I-II”, a modo de incluir aquellos casos en que no se podía definir si era un tipo de error o el otro.

- Error 5: Realización de una operación aritmética. Corresponde a un Error Tipo III.
- Error 6: Elección de operación aritmética a realizar. Corresponde a un Error Tipo II.
- Error 7: Traspaso de información del enunciado. Corresponde a un Error Tipo I.
- Error 8: Mala comprensión del problema. Este tipo de error se definió para aquellos estudiantes cuya estrategia no fue posible deducir, debido a la poca o nula coherencia con los datos y el contexto del problema. Por esto, no es posible establecer una asociación a sólo un tipo de Error del proceso iterativo. Sin embargo, el más cercano a esta categoría de error, corresponde al Error Tipo I, ya que puede deberse a una mala interpretación de los datos del problema, la pregunta a responder y/o el contexto de éste.
- Error 9: Mala subdivisión de la región rectangular. Corresponde a un Error Tipo III.
- Error 10: Mal conteo de subdivisiones. Corresponde a un Error Tipo III.

Es posible observar que ninguna categoría de Error fue considerada como Error Tipo IV. Esto quiere decir, que no hubo estudiantes dentro de la muestra que interpretaran mal los resultados de algún modelo matemático aplicado en el proceso. Sin embargo, no es posible asegurar este hecho en forma definitiva, ya que el Error 8 podría estar incluido también en este tipo de Error.

Se tienen los siguientes resultados, en cuanto al porcentaje de alumnos por nivel que cometió cada tipo de Error del proceso iterativo.

Tipo de Error	Porcentaje de alumnos de 5° básico (n=100).	Porcentaje de alumnos de 3° medio (n=112).	Porcentaje de alumnos totales (n=212).
Error Tipo I	16%	6,3%	10,8%
Error Tipo II	13%	35,7%	25%
Error Tipo I-II	19%	5,4%	11,8%
Error Tipo III	18%	10,7%	14,2%
Error Tipo IV	0%	0%	0%
Totales	66%	58,1%	61,8%

Tabla N°8: Porcentaje de alumnos de cada nivel por tipo de Error cometido.

Como ya se hizo notar, no hubo estudiantes de la muestra que cometieran el Error Tipo IV, relativo a una mala interpretación de los resultados de algún modelo matemático aplicado. Del resto de los Tipos de Errores, los niveles de incidencia en los estudiantes de quinto básico se presentó de forma pareja y no hubo porcentajes inferiores al 10%, mientras que en los alumnos de tercero medio la situación se presentó en forma más dispar y sólo dos de éstos superaron el 10% de ocurrencia (los Errores Tipo II y III).

Lo cierto es que no se puede asegurar con certeza cuál fue el Tipo de Error más cometido por los alumnos de quinto básico, debido a la presencia del Error Tipo I-II, cuya naturaleza no se puede determinar a ciencia cierta. Sin embargo, sin tomar en cuenta este ítem, se tiene que el Tipo de Error más cometidos por los niños de este nivel corresponde al Error Tipo III. Este hecho se traduce en que los alumnos de quinto año cometen más faltas en errores al llevar a cabo los modelos matemáticos determinados a realizar, es decir, cometen más errores de cálculo o aplicación que de cualquier otro tipo al momento de trabajar con área de regiones rectangulares. Se puede asociar este Tipo de Error a factores de distracción en los estudiantes, así como a una falta de experiencia con este tipo de trabajo o problemas.

En los estudiantes de tercero medio el Tipo de Error predominante corresponde al Error Tipo II, que hace referencia a la elección de un modelo matemático inadecuado para llevar a cabo. Esto quiere decir que mientras en los alumnos más pequeños los Errores predominantes eran más bien técnicos, entre los jóvenes de más edad se cometen más fallos por establecer mal los pasos a seguir con determinados datos al momento de trabajar con área de regiones rectangulares. En particular, el alto porcentaje de este Tipo de errores en los estudiantes de tercero medio, se debe a los fallos existentes en la conversión de unidades, lo cual no estuvo presente entre los alumnos de quinto básico ya que no requerían utilizar este tipo de métodos. Tal vez, si se hubiese mantenido esa naturaleza del problema en el CEMAT 2015, el porcentaje de Error Tipo II hubiese sido más elevado también en los alumnos de quinto básico.

Analizando los datos en conjunto, de la totalidad de la muestra de estudiantes considerados en el presente estudio, el Error Tipo II fue el más cometido (por un cuarto de la muestra), seguido por el Error Tipo III (por un 14,2% del total de alumnos). Esto quiere decir que los Tipos de Errores predominantes al resolver problemas que involucran el

cálculo de área de regiones rectangulares son aquellos que involucran la selección de un modelo matemático a realizar y la aplicación de éste. En cuanto a la selección de un modelo matemático, se puede relacionar con fallas en el establecimiento de la fórmula de área (además de otros errores), mientras que entre las aplicaciones de los modelos se encuentran equívocos por realizar malas subdivisiones de una región rectangular. En otras palabras, los Tipos de Errores predominantes se relacionan con los principales procedimientos de las estrategias existentes para el cálculo de área de regiones rectangulares.

A continuación, se estableció el porcentaje de alumnos de cada nivel que cometió cada tipo de Error por Estrategia utilizada.

Porcentaje de alumnos de 5° Básico.	Estrategia A (n=52).	Estrategia B (n=33).	Otra Estrategia (n=0).	Sin Estrategia (n=15).
Error Tipo I	0%	27,3%	-	46,7%
Error Tipo II	13,5%	18,2%	-	0%
Error Tipo I-II	0%	57,6%	-	0%
Error Tipo III	23,1%	18,2%	-	0%
Error Tipo IV	0%	0%	-	0%

Tabla N°6: Porcentaje de alumnos de 5° básico por Estrategia utilizada y tipo de Error cometido.

Porcentaje de alumnos de 3° medio.	Estrategia A (n=87).	Estrategia B (n=20).	Otra Estrategia (n=8).	Sin Estrategia (n=1).
Error Tipo I	2,3%	15%	12,5%	100%
Error Tipo II	29,9%	45%	62,5%	0%
Error Tipo I-II	1,1%	30%	0%	0%
Error Tipo III	8%	30%	0%	0%
Error Tipo IV	0%	0%	0%	0%

Tabla N°7: Porcentaje de alumnos de 3° medio por Estrategia utilizada y tipo de Error cometido.

Como es posible deducir a partir de las tablas anteriores, en las respuestas de los estudiantes que utilizaron las Estrategias A y B sólo se presentaron Errores Tipo I, II, I-II y III. En los alumnos que utilizaron Otra Estrategia sólo se hallaron Errores Tipo I y II. En tanto, las respuestas clasificadas en “Sin Estrategia” sólo estuvo presente el Error Tipo I, correspondiente al mal traspaso de información del enunciado del problema, ya que la categoría de Error asociada a este tipo de respuestas (Error 8), se enmarcó en este tipo de error. En ningún caso se presentó un Error Tipo IV, referente a interpretar mal los resultados de algún modelo matemático aplicado durante la resolución del problema.

En los alumnos de quinto básico que utilizaron la Estrategia A sólo se hallaron Errores Tipo II y III, los cuales tuvieron un porcentaje de incidencia del 13,5% y 23,1%, respectivamente (de acuerdo al total de alumnos de quinto básico que utilizaron dicha estrategia). Esto quiere decir que, al momento de trabajar con la fórmula de área, los estudiantes de quinto año fallaron en establecer algún modelo matemático a utilizar y en la aplicación de éstos. El hecho de que sea mayor el porcentaje del Error Tipo III se interpreta en que los alumnos de este nivel cometen más errores de cálculo. Los fallos en la determinación de los modelos matemáticos a escoger se puede asociar a diferentes factores: (1) la falta de práctica con este tipo de problemas, (2) la poca experiencia con el uso de fórmulas (en especial con la fórmula de área, cuya mención en las Bases Curriculares es nula), o (3) una confusión entre las consecuencias de las operaciones decididas a realizar (por ejemplo, cuando en lugar de dividir el valor del área total por el valor de la superficie ocupada por los chanchitos de tierra, multiplicaban ambas cantidades).

En las respuestas de los jóvenes de tercero medio que utilizaron la misma Estrategia (relacionada con la fórmula de área), el Error Tipo II, relativo al establecimiento de un modelo matemático a aplicar, sobresalió por sobre los demás con un 29,9% de incidencia. Dentro de este Tipo de Error se encuentran fallos tales como los cometidos en la conversión de unidades de medida de área, los cuales, como ya se hizo notar anteriormente, tuvieron un alto porcentaje de incidencia.

En cuanto a los resultados relativos a la Estrategia B (de subdivisión de una región rectangular en unidades cuadradas), de los alumnos de quinto básico que la utilizaron el foco estuvo centrado en los Errores Tipo I-II (con un 57,6%) y Tipo I (con un 27,3%). El Error Tipo I hace referencia a un fallo en el traspaso de información del enunciado del

problema, mientras que el ítem de Tipo I-II puede hacer referencia a este error o a un mal planteamiento de algún modelo matemático a aplicar con los datos. Se recuerda que este ítem que incluye dos Tipos de Errores diferentes del Proceso Iterativo de Resolución de un Problema, se creó con el fin de abarcar aquellos casos en que no se pudo definir con exactitud a cuál de los dos pertenecía. En específico, se trata de respuestas en que se cometió el Error 4 (confundir una unidad de área con una unidad de longitud). Por ende, y uniendo este Tipo de Error al segundo más cometido, es posible señalar que, al momento de trabajar con el método de subdivisión de la región rectangular a partir de una medida de área, los estudiantes de quinto año cometen más errores en las primeras etapas del Proceso Iterativo, en especial en el traspaso de información, planteamiento de interrogantes, y en las decisiones de cómo trabajar con esta información. Es crucial observar las dificultades que tienen los alumnos de este nivel al trabajar con el área de regiones rectangulares mediante la subdivisión, ya que constituye la base para la comprensión de este tema.

Los estudiantes de tercero medio que utilizaron la Estrategia de subdivisión presentaron mayores fallas de Tipo II, es decir, de planteamiento de modelos matemáticos a seguir. Este hecho se puede explicar por una falta de recuerdo acerca de los procedimientos a utilizar cuando se trabaja con este método, ya que los alumnos de este nivel no lo han puesto en práctica por aproximadamente 6 años, a menos que se hubiesen encontrado en la necesidad de resolver algún problema de índole similar. Por otro lado, los alumnos de este nivel se encuentran más familiarizados con el uso de fórmulas y no con los procesos primitivos de algún tema.

Por otro lado, se presentó una situación similar a la anterior con aquellos estudiantes que utilizaron alguna Otra Estrategia (los cuales sólo pertenecen al nivel de tercero medio), donde un 62,5% de ellos cometió un Error Tipo II. En general, la mayoría de estos métodos alternativos trabajaba con algún tipo de subdivisión del área de la región rectangular, por lo que se explica el hecho de que también se encuentren más fallas en el planteamiento de los modelos matemáticos a utilizar.

V. Conclusiones.

De las observaciones hechas en base a los resultados de la muestra analizada, es posible señalar que los alumnos de más edad llegan a demostrar un mayor rendimiento cuando trabajan con problemas en que se involucra el trabajo con área de regiones rectangulares.

Al momento de resolver los problemas involucrados en el presente estudio, los estudiantes de la muestra presentaron dos principales Estrategias de resolución: en una se involucra el uso de la fórmula para calcular el área de regiones rectangulares, mientras la otra se basa en la realización de subdivisiones en unidades cuadradas.

A pesar de que en las Bases Curriculares chilenas no se especifica el trabajo con la fórmula de área, la Estrategia en que se utiliza parece ser la preferida por los estudiantes chilenos. Este punto es de especial importancia, ya que, según la Secuencia pedagógica para la enseñanza de un sistema de medición propuesto por Koay (2014), el aprendizaje de la fórmula de área debiese ser parte de la tercera y última etapa.

Por otro lado, además de ser la Estrategia con un mayor porcentaje de preferencia, la Estrategia que involucra el uso de la fórmula de área obtuvo un mayor porcentaje de éxito en comparación a la Estrategia de subdivisión de la región rectangular. Se destaca este hecho por lo analizado en las Bases Curriculares chilenas, en las cuales no se especifica el trabajo con la fórmula, pero sí con la subdivisión en unidades cuadradas, por lo que los resultados no son compatibles con lo que se esperaba en base a esta situación.

Los Errores más frecuentes hallados fueron la conversión de m^2 a cm^2 y viceversa, y la confusión de una medida de área con una medida de longitud. El primer error sólo se halló en las respuestas de los alumnos de tercero medio, ya que el problema fue modificado para quinto año de modo que no se vieran en la necesidad de realizar este tipo de trabajo. El alto porcentaje de incidencia es preocupante en jóvenes de este nivel, pese a lo cual no es de extrañarse ya que este tema no es obligatorio en la enseñanza escolar chilena (según lo hallado en las Bases Curriculares). El segundo error, relativo a la confusión de una medida de área por una de longitud revoca en el hecho de que, al parecer, los alumnos no analizan los datos con los cuales se trabaja a fin de detectar posibles errores en la comprensión que tuvieron al respecto. Así también, como en muchos casos que cometieron este error se

debió a una confusión entre la medida del lado de un cuadrado y la superficie que ocupa esta misma figura, se denota una falta de extrapolación de la fórmula de área para regiones cuadradas.

En cuanto a los alumnos que utilizaron la Estrategia basada en el uso de la fórmula de área, se observa un aumento de errores de cálculo en los estudiantes de quinto básico, un hecho esperable debido a la falta de familiaridad de los jóvenes de este nivel con el uso de fórmulas.

En ambos niveles, al momento de utilizar la Estrategia de subdivisión de la región rectangular, se cometieron más fallos con la confusión de una medida de área por una medida de longitud, debido a que en esta Estrategia se utiliza el procedimiento con el cual era posible llegar a cometer este error.

Del total de la muestra de estudiantes chilenos, el tipo de error más cometido de los cuatro involucrados en el Proceso Iterativo de Resolución de un problema, fue aquel que hace referencia a la elección de un modelo matemático inadecuado. Este fallo, además de ser el más cometido por toda la muestra de alumnos, es el más destacado en las dos principales Estrategias descritas. Se entiende de esta forma que, independiente de los procedimientos escogidos por los jóvenes para dar solución a los problemas de área de regiones rectangulares, los fallos más comunes son los relativos a la elección de los procesos a realizar con los datos con que se cuenta, al establecimiento de la fórmula, la elección de operaciones aritméticas, y en general a decisiones de las acciones a realizar.

VI. Bibliografía.

Battista, M., Clements, D., Arnoff, J., Battista, K., & Borrow, C. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education* 29 , 503 - 532.

Carpenter, T., Kepner, H., Corbitt, M., Lindquist, M., & Reys, R. (1980). Results and implications of the second NAEP mathematics assessment: Elementary school. *Arithmetic Teacher* 27 (8) , 10 - 12 y 44 - 47.

Carpenter, T., Lindquist, M., Brown, C., Kouba, V., Silver, E., & Swafford, J. (1988). Results of the fourth NAEP assessment of mathematics: Trends and conclusions. *Arithmetic Teacher* 36 (4) , 38 - 41.

Dickson, L. (1989). Area of a rectangle. En K. Hart, & D. J. (Eds.), *Children's mathematical frameworks 8-13: A study of classroom teaching* (págs. 89 - 125). Brekshire, UK: The NFER-NELSON Publishing Co.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Heraud, B. (1987). Conceptions of area units by 8-9 years old children. En J. Bergeron, N. Herscovics, & C. K. (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. III)* (págs. 299 - 304). Montreal.

Hirstein, J., Lamb, C., & Osborne, A. (1978). Student misconceptions about area measure. *Arithmetic Teacher*, 25 (6) , 10 - 16.

Kamii, C., & Kysh, J. (2006). The difficulty of "length x width": Is a square the unit of measurement? *Journal of Mathematical Behavior* 25 , 105 - 115.

Koay, P. (2014). La enseñanza de mediciones. En L. P. (Ed.), *La enseñanza de la matemática en educación básica* (págs. 215 - 242). Santiago: Academia Chilena de Ciencias.

Lindquist, M., & Kouba, V. (1989). Measurement. En M. (. Lindquist, *Results from the Fourth Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress* (págs. 35 - 43). Reston: NCTM.

Lindquist, M., Carpenter, T., Silver, E., & Matthews, W. (1983). The Third NAEP: Results and implications for elementary and middle schools. *Arithmetic Teacher* 31 (4) , 14 - 19.

Martin, W., & Strutchens, M. (2000). Geometry and measurement. En E. Silver, & P. K. (Eds.), *Results from the Seventh Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress* (págs. 193 - 234). Reston: NCTM.

Ministerio de Educación de Chile. (2013). *Programas de Estudio de Enseñanza Básica*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education* 28 , 309 - 330.

Outhred, L., & Mitchelmore, M. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal and Research in Mathematics Education, Vol. 31, N°2* , 144 - 167.

Schultz, J. (1991). Area models - Spanning the mathematics of grades 3-9. *Arithmetic Teacher*, 39 (2) , 42 - 46.

Silver, E. A., Shapiro, L., & Deutsch, A. (1993). Sense-making and the solution of division problems involving remainders: An examination of students solution processes and their interpretation of solutions. *Journal for Research in Mathematics Education* (24) , págs. 117-135.

Simon, M., & Blume, G. (1994). Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education* 25 , 472 - 494.



VII. Anexos.

Anexo 1: Tabla de Establecimientos.

N°	Denominación Establecimiento	Provincia	Tipo de Establecimiento	N° de Estudiantes 3° medio	N° de Estudiantes 5° básico
1	Establecimiento 1	Biobío	Particular Pagado	4	-
2	Establecimiento 2	Concepción	Particular Subvencionado	1	-
3	Establecimiento 3	Concepción	Particular Subvencionado	-	5
4	Establecimiento 4	Concepción	Particular Subvencionado	-	4
5	Establecimiento 5	Concepción	Particular Pagado	1	-
6	Establecimiento 6	Ñuble	Particular Subvencionado	15	7
7	Establecimiento 7	Concepción	Particular Pagado	2	-
8	Establecimiento 8	Ñuble	Particular Subvencionado	-	3
9	Establecimiento 9	Ñuble	Particular Subvencionado	-	10
10	Establecimiento 10	Ñuble	Particular Subvencionado	-	5
11	Establecimiento 11	Concepción	Particular Subvencionado	1	-
12	Establecimiento 12	Concepción	Particular Subvencionado	-	2
13	Establecimiento 13	Concepción	Particular Subvencionado	-	1
14	Establecimiento 14	Concepción	Particular	3	-

			Subvencionado		
15	Establecimiento 15	Concepción	Particular Subvencionado	5	-
16	Establecimiento 16	Concepción	Particular Subvencionado	6	-
17	Establecimiento 17	Arauco	Particular Subvencionado	3	-
18	Establecimiento 18	Concepción	Particular Subvencionado	-	3
19	Establecimiento 19	Ñuble	Particular Subvencionado	2	2
20	Establecimiento 20	Ñuble	Particular Subvencionado	1	-
21	Establecimiento 21	Concepción	Particular Subvencionado	8	2
22	Establecimiento 22	Concepción	Particular Subvencionado	12	7
23	Establecimiento 23	Ñuble	Particular Subvencionado	5	3
24	Establecimiento 24	Concepción	Particular Subvencionado	-	7
25	Establecimiento 25	Concepción	Particular Subvencionado	-	3
26	Establecimiento 26	Concepción	Particular Subvencionado	2	1
27	Establecimiento 27	Ñuble	Particular Subvencionado	4	-
28	Establecimiento 28	Concepción	Particular Subvencionado	1	3
29	Establecimiento 29	Concepción	Particular Subvencionado	-	1
30	Establecimiento 30	Concepción	Particular Pagado	-	5
31	Establecimiento 31	Concepción	Particular	-	9

			Subvencionado		
32	Establecimiento 32	Concepción	Particular Pagado	3	-
33	Establecimiento 33	Ñuble	Particular Subvencionado	5	6
34	Establecimiento 34	Ñuble	Particular Subvencionado	4	-
35	Establecimiento 35	Concepción	Particular Pagado	-	3
36	Establecimiento 36	Biobío	Particular Pagado	4	5
37	Establecimiento 37	Concepción	Municipal	6	-
38	Establecimiento 38	Ñuble	Municipal	1	-
39	Establecimiento 39	Arauco	Municipal	3	-
40	Establecimiento 40	Ñuble	Particular Subvencionado	4	-
41	Establecimiento 41	Arauco	Municipal	3	-
42	Establecimiento 42	Concepción	Particular Pagado	3	3

Anexo 2: Prueba fecha 5 CEMAT 2012.



Campeonato Regional Escolar de Matemáticas 2012
Universidad de Concepción
www.cemat.cfm.cl

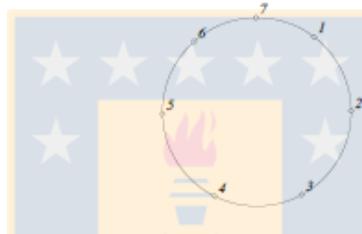


Prueba Individual – Nivel M3
Quinta fecha (recuperativa). Sábado 1 de Septiembre de 2012
Tiempo: 2 horas

Problema 1 - Chanchitos. (10pt) El jardín del abuelo Anacleto, matemático jubilado y aventurero, está plagado de chanchitos de tierra. Su jardín tiene forma rectangular, con 3 metros de ancho y 4 metros de largo. El abuelo ha estimado que cada 5 centímetros cuadrados de terreno vive un chanchito de tierra.

¿Cuántos chanchitos de tierra viven en el jardín del abuelo?

Problema 2 - Pulga. (10pt) Sobre una circunferencia se marcan los puntos del 1 al 7 como en la figura.



Una pulga se para en uno de los puntos, y comienza a saltar en el sentido de las agujas del reloj de un punto a otro. Si está en el punto 1, salta un lugar. Si está en el 2, salta 2 lugares; en el 3, salta 3 lugares, etc. Por ejemplo, si la pulga está en el 1, saltará al 2. Si está en el 2, saltará al 4, y si está en el 4, saltará al 1, etc. (los movimientos son siempre alrededor del círculo).

Si la pulga parte en el punto 3, ¿dónde queda la pulga después de realizar 2012 saltos?

Problema 3 - Área. (10pt) En un triángulo equilátero $\triangle ABC$, sean D, E y F puntos en los lados BC , AC y AB tales que $DE \perp BC$ y el $\triangle DEF$ es equilátero. Si el área del triángulo $\triangle ABC$ es 30, determinar el área del triángulo $\triangle DEF$.

Recuerda que dispones de 2 horas para resolver esta prueba. La mayoría de las personas piensa a lo más 5 minutos y luego se rinde. ¡Debes luchar hasta el final! A veces la solución llega a tu cabeza en el momento menos esperado... Recuerda también que debes explicar tus respuestas, pensando en que cualquier persona que las lea deberá ser capaz de entender porqué lo que tú propones está bien y cómo llegaste a tal solución.

Anexo 3: Prueba fecha 5 CEMAT 2015.

**CEMAT 2015.
Final: 4 de Noviembre.**

(Escribe tus datos con letra mayúscula, una letra en cada casilla)

Primer Apellido: _____

Segundo Apellido: _____

Nombres: _____

Colegio: _____

Edad: _____ Curso: _____ e-mail: _____

QUINTO BÁSICO

NO SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA.
TIEMPO MÁXIMO: 70 MINUTOS.

Esta es la prueba final del CEMAT 2015, la decisiva para determinar los medallistas.
Debes explicar tu solución con paciencia, claridad y detalle. Mucha suerte

1. Bacteria Asesina (B5)

Problema 1. Un inocente ratón de laboratorio es infectado con una bacteria mortal, que se reproduce dividiéndose en 2 cada segundo que pasa. Transcurridos 2 segundos hay 4 bacterias, a los 3 segundos hay 8 bacterias y pasados 4 segundos ya hay 16 bacterias en el organismo del ratón. La muerte del animalito ocurrió 30 segundos después del comienzo de la infección.^a ¿Cuántas bacterias había en el organismo del ratón al momento de su muerte (*)?

(*) La bacteria mortal fue exterminada incinerando al roedor después de su muerte.

Respuesta: Al morir el ratón, había en su organismo _____ bacterias.

Explicación de la respuesta:

2. La hormiga Anty (B5)

Problema 2. La hormiga Anty se gana el derecho a 75 segundos de descanso por cada 1 hora que trabaja, tiempo que se acumula si no lo usa. Trabaja sin parar desde las 6 de la mañana hasta las 8 de la tarde. "Es buen momento para un descanso largo", dice Anty. ¿Cuántos minutos y segundos de descanso se ganó Anty?(**)

(**) Este problema apareció en la primera fecha del Campeonato (no había que explicar la respuesta en esa fecha).

Respuesta: Anty se ganó _____ minutos con _____ segundos de descanso.

Explicación de la respuesta:



3. Papel picado (B5)

Problema 3. Una hoja de papel tiene 8 centímetros de ancho por 16 de largo. La cortas por la mitad en 2 partes iguales, las que vuelves a cortar por la mitad. Luego cortas por la mitad los 4 pedazos resultantes. Se sigue así, cortando por la mitad, hasta obtener papelitos de 1 centímetro de ancho por 2 centímetros de largo. ¿Cuántos papelitos son? (***)

(***) Este problema es muy similar a uno de la segunda fecha del Campeonato.

Respuesta: Se recortan en total _____ papelitos de 1 centímetro de ancho por 2 centímetros de largo.

Explicación de la respuesta:



4. Postulaciones abiertas (B5)

Problema 4. A cada agente secreto se le asigna un código de 3 dígitos que lo identifica. Todos los códigos están ya asignados, por lo que no se aceptan más postulantes. Este año jubilan todos los agentes que tienen algún 0 ó 1 en su código, como por ejemplo los agentes 000, 971, 610 o, también, el agente 007. ¿Cuántos cupos libres habrá después de eso?

Respuesta: Este año se liberarán _____ cupos para agente secreto.

Explicación de la respuesta:



5. Colonia de Oniscídeos (B5)

Problema 5. Una colonia de Oniscídeos (más conocidos como *chanchitos de tierra*) vive en un cajón lleno de tierra. Las medidas del cajón son 30 centímetros de ancho por 40 de largo. Hay un chanchito por cada 5 centímetros cuadrados de superficie. ¿Cuántos chanchitos viven en el cajón?

Respuesta: En el cajón viven _____ chanchitos de tierra.

Explicación de la respuesta:

