



Universidad de Concepción  
Dirección de Postgrado  
Facultad de Ingeniería - Programa de Magíster

## **Diseño de un Observador para Sistemas con Estructura Wiener**



TOMÁS ÁNGEL GLARÍA LÓPEZ  
CONCEPCIÓN-CHILE  
2012

Profesor Guía: Daniel Sbarbaro  
Dpto. de Ingeniería Eléctrica, Facultad de Ingeniería  
Universidad de Concepción



*La presente tesis fue realizada con el financiamiento de CONICYT*

# Resumen

## Diseño de Observadores para Sistemas con Estructura Wiener

Tomás Á. Glaría López

Universidad de Concepción, Mayo 2012

Por muchos años, diversos métodos de diseño de observadores han sido investigados para diferentes tipos de modelos no lineales. En particular, modelos Wiener, que se componen de un modelo dinámico lineal y un mapa de salida no lineal, pueden representar un amplio rango de procesos industriales. En este documento, se propone un nuevo enfoque en el diseño de observadores para este tipo de sistemas. Éstos consideran una estructura Wiener que contengan una perturbación no lineal de tipo Lipschitz y un mapa no lineal que defina la salida de manera explícita o implícita. La ganancia de los observadores se obtienen al resolver un conjunto de inecuaciones de matrices lineales, o LMI por su sigla en inglés (Linear Matrix Inequalities), que toman en cuenta la constante de Lipschitz asociada a la perturbación no lineal y el conjunto convexo asociado a la derivada del mapa de salida no lineal.

Problemas de seguimiento de conductividad y un problema de neutralización de pH sirven para ilustrar las características principales del proceso de diseño de observadores y el rendimiento conseguido del enfoque propuesto.

El método presentado es un avance frente a métodos existentes al considerar simultáneamente no linealidades en la dinámica y en el mapa de salida sin requerir de un alto poder de cómputo, permitiendo, además, garantizar una tasa de convergencia al agregar una restricción a las LMI.

# Abstract

## Observer Design for Systems with Wiener Structure

Tomás Á. Glaría López

Universidad de Concepción, May 2012

For several years, various methods of observer design have been investigated for different types of nonlinear models. In particular, Wiener models, which consider a linear dynamical model and a nonlinear output map, can represent a wide range of industrial processes. In this document, new observer design approaches are proposed for such systems. These approaches consider a Wiener structure having a Lipschitz nonlinear perturbation term and explicit and implicit nonlinear output maps. The observers gain are obtained by solving a set of LMIs (Linear Matrix Inequality) which consider the Lipschitz constant associated to the nonlinear perturbation and the convex hull associated to the output map derivative.

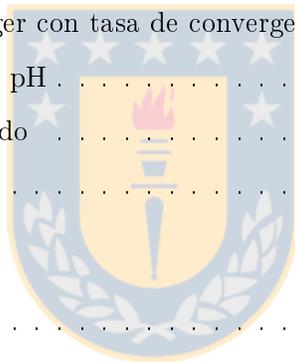
A conductivity tracking problem and pH neutralization processes illustrate the main features of the design process and the performance obtained with the proposed design approach.

The proposed method shows an advantage over existing alternatives since it considers the presence of nonlinearities at the same time in the dynamics and in the output map with a low computational cost. It also allows to guarantee a convergence rate by simple adding a restriction to the LMI system.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción General . . . . .	1
1.2. Trabajos Previos . . . . .	2
1.3. Objetivos . . . . .	3
1.3.1. Objetivo principal . . . . .	3
1.3.2. Objetivo secundario . . . . .	3
1.4. Hipótesis de trabajo . . . . .	3
1.5. Alcances y Limitaciones . . . . .	3
1.6. Organización y metodología . . . . .	3
<b>2. Descripción del modelo</b>	<b>5</b>
2.1. Descripción de la dinámica del modelo . . . . .	5
2.1.1. Salida Explícita . . . . .	6
2.1.2. Salida Implícita . . . . .	6
2.2. Condición menos conservadora de Lipschitz . . . . .	7
<b>3. Desarrollo de Algoritmo</b>	<b>8</b>
3.1. Propiedades Previas . . . . .	8
3.2. Observador de proceso con salida explícita . . . . .	9
3.2.1. Observador del tipo Luenberger . . . . .	9

3.2.2. Observador con realimentación con peso . . . . .	12
3.3. Observador de proceso con salida implícita . . . . .	15
3.4. Constante menos conservadora: OSL . . . . .	18
3.4.1. Observador de proceso con salida explícita . . . . .	18
3.4.1.1. Observador del tipo Luenberger . . . . .	18
3.4.1.2. Observador con realimentación con peso . . . . .	21
3.4.2. Observador de proceso con salida implícita . . . . .	23
<b>4. Simulaciones</b>	<b>26</b>
4.1. Problema seguimiento de conductividad . . . . .	26
4.1.1. Observador Luenberger . . . . .	29
4.1.2. Observador con realimentación con peso . . . . .	31
4.1.3. Observador Luenberger con tasa de convergencia $\beta$ . . . . .	32
4.2. Proceso de neutralización de pH . . . . .	33
4.2.1. Dos variables de estado . . . . .	35
4.3. Estimación de admitancia . . . . .	41
<b>5. Conclusión</b>	<b>45</b>
5.1. Sumario . . . . .	45
5.2. Conclusiones . . . . .	45
5.3. Trabajos Futuros . . . . .	46
<b>Bibliografía</b>	<b>49</b>
<b>Publicaciones</b>	<b>50</b>
Conferencias . . . . .	50
Revistas . . . . .	50



# Índice de figuras

4.1. Columna con celdas para medir conductividad . . . . .	27
4.2. Circuito equivalente de las celdas sensoras de conductividad . . . . .	28
4.3. Valores de la conductividad y del valor estimado por el observador Luenberger . . . . .	30
4.4. Valores del error de la salida . . . . .	30
4.5. Valores de la conductividad y del valor estimado por el observador con realimentación nolineal . . . . .	31
4.6. Valores del error de la salida al usar el observador con realimentación nolineal . . . . .	32
4.7. Valores de la conductividad y del valor estimado por el observador Luenberger con- siderando diferentes tasas de convergencia $\beta$ . . . . .	33
4.8. Proceso de neutralización de pH . . . . .	33
4.9. Variables de estado y sus estimados para proceso de neutralización de pH para va- riación en escalón en la entrada . . . . .	37
4.10. Entradas para la simulación de la figura 4.9 . . . . .	37
4.11. Variables de estado y sus estimados para proceso de neutralización de pH para va- riación en rampa en la entrada . . . . .	38
4.12. Entradas para la simulación de la figura 4.11 . . . . .	38
4.13. Variables de estado y sus estimados para proceso de neutralización de pH para va- riación en escalón en la entrada considerando diferentes tasas de convergencia $\beta$ . . . . .	39
4.14. Variables de estado y sus estimados para proceso de neutralización de pH para va- riación en rampa en la entrada considerando diferentes tasas de convergencia $\beta$ . . . . .	40
4.15. Arreglo de electrodos . . . . .	41
4.16. Admitancias del sistema y sus estimaciones para diferentes valores de $\beta$ . . . . .	44

# Índice de cuadros

4.1. Valores de parámetros en condiciones nominales de operación para el proceso de neutralización de pH . . . . . 35



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Introducción General

En el último tiempo, ha existido un considerable interés en el estudio de sistemas no lineales y en la modelación, identificación y control de ellos. Esto, pues la mayoría de los sistemas reales pueden ser representados de mejor manera por modelos no lineales en vez de modelos lineales que sólo son capaces de representar estos sistemas en torno a un punto de operación. Un problema en el control de un sistema es cuando una o más de las variables necesarias para éste no son medibles, si no que se deben estimar. Dentro de este contexto, toma importancia el desarrollo de un observador de estados que permita realizar precisamente esto: estimar aquellas variables que no se pueden medir.

El proceso de neutralización de pH [15], el caso de un brazo robótico accionado por un motor DC [6] o el proceso de conversión de acero [8] son ejemplos de un amplio rango de procesos industriales que pueden ser representados por modelos Wiener y en los que es común encontrarse con no linealidades del tipo Lipschitz en su proceso. Lo cual explica el interés que existe por este tipo de sistemas. Los modelos de este tipo se componen de un modelo dinámico lineal y un mapa de salida no lineal y se diferencian de los modelos no lineales Lipschitz en que estos últimos abarcan un abanico de sistemas más amplio como aquellos en que su modelo dinámico es también no lineal. Técnicas estándar de diseño de observadores para este tipo de procesos han sido considerados como el uso del filtro de Kalman Extendido [1] y métodos geométricos [4].

---

## 1.2. Trabajos Previos

Diversos métodos se han utilizado en el pasado en la estimación de estado de sistemas no lineales, como por ejemplo el uso de un filtro Kalman para calcular los valores estimados de la distribución de conductividad en un sistema de Tomografía de Impedancia Eléctrica [1], en el cual las estimaciones son obtenidas utilizando métodos recursivos.

Centrándose en las no linealidades de tipo Lipschitz, que se encuentran en un amplio rango de procesos industriales, se han considerado enfoques más simples como el uso de Parámetros Lineales Variantes (Linear Varying Parameters). En uno de sus documentos, Ibrir [2] propone un método de diseño de observadores para sistemas con no linealidades de tipo Lipschitz utilizando para esto parámetros lineales variables. El uso de la constante de Lipschitz ha sido ampliamente utilizado en diversos trabajos, en [4, 14] se considera una no linealidad Lipschitz en la dinámica del sistema y una mapa de salida lineal, y se presentan una serie de condiciones basándose en las constantes de Lipschitz para el diseño de observadores para los sistemas propuestos.

Se han desarrollado diversas alternativas al uso de la constante de Lipschitz para obtener condiciones menos conservadoras como, por ejemplo, el reescribir la condición de Lipschitz en una forma matricial [6] para lograr disminuir las restricciones sobre esta condición; en este caso, basta resolver una ecuación de Riccati para diseñar el observador. Otra alternativa que se desarrolló fue el uso de la constante de Lipschitz One-Sided con la cual se obtienen condiciones menos conservadoras que el uso de la constante de Lipschitz tradicional. Diversos autores [9, 11, 12, 13] han considerado este enfoque en el diseño de observadores de sistemas con no linealidades Lipschitz en su dinámica. Una ventaja de esta constante, es que puede ser negativa lo que permite diseñar un observador cuando la parte lineal del sistema no es estabilizada por la ganancia tradicional del observador.

Ahondando en el tema de la búsqueda de resultados menos conservadores, también se ha desarrollado la condición de Lipschitz Quasi-One-Sided [10] la cual permite obtener resultados con esta cualidad, reduciendo las restricciones aún más que la condición de Lipschitz One-Sided.

Si bien en general se ha considerado la estructura tradicional de observadores, conocidos como observadores de tipo Luenberger, otra alternativa se presenta en [8] en donde, basándose en el filtro de Kalman extendido, se propone un observador con realimentación no lineal para tomar en cuenta un sistema con dinámicas y salida no lineales. Esta propuesta, sin embargo, se encuentra limitada a tener como máximo un valor propio de la matriz de transición de estados en el eje imaginario.

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. Objetivo principal

Desarrollar un algoritmo para el diseño de observadores para sistemas con estructura Wiener con un número arbitrario de valores propios en el eje imaginario, con perturbaciones no lineales de tipo Lipschitz y que posean mapa de salida no lineal definido explícitamente o implícitamente.

### 1.3.2. Objetivo secundario

Diseñar observadores para algunos modelos de sistemas y validar los resultados mediante simulación.

## 1.4. Hipótesis de trabajo

- Es posible diseñar un observador para sistemas con no linealidades en su dinámica y en su salida, sin limitación con respecto al número de valores propios de la matriz de transición de estados que se encuentre sobre el eje imaginario.
- La salida del sistema puede estar definida de manera explícita como función de las variables de estado del sistema, o de manera implícita como una variable más de una función.

## 1.5. Alcances y Limitaciones

- Se consideran los sistemas con estructura Wiener con no linealidades de tipo Lipschitz y salida no lineal derivable en todo su dominio y de derivada acotada. La función de Lipschitz puede no ser acotada en  $\mathbb{R}^n$ , pero basta con que lo sea en el rango de operación del proceso a modelar.
- La validación se realizará mediante simulación, y no es parte de este documento la implementación en un sistema físico.

## 1.6. Organización y metodología

El desarrollo de este documento se divide en 5 capítulos, los que a continuación se describen de manera general.

---

En el capítulo 2 se describe la estructura de los modelos a considerar. Aquí se detallan la forma de las ecuaciones dinámicas de cada modelo y las perturbaciones no lineales que las afectan. Además se presentan los dos casos a considerar del mapa de salida no lineal que son el caso en que la salida se define explícitamente y aquél en que es definida implícitamente como variable dentro de una función.

En el capítulo 3, se presentan las condiciones a satisfacer para el diseño de un observador para los sistemas presentados en este documento. Primero se presentan algunas propiedades matemáticas necesarias para el desarrollo de la demostración del método de diseño propuesto. Posteriormente, se presenta el desarrollo de la proposición obteniendo como resultado las condiciones necesarias para el diseño de un observador para luego exponer el cómo agregar una restricción a las LMI para lograr una tasa de convergencia dada. Esto se realiza para dos observadores para el caso de sistemas con salida no lineal definida explícitamente y para un observador para sistemas con salida no lineal definida implícitamente. Finalmente, para cada uno de los métodos de diseño propuestos, se presenta una alternativa al utilizar la condición OSL en lugar de la condición Lipchitz.

En el capítulo 4, se valida el método mediante simulaciones de los diferentes observadores en diferentes ejemplos. Primeramente se presenta un problema de seguimiento de conductividad, el cual consiste en un sistema cuya salida se encuentra definida explícitamente y con el cual se prueban los dos observadores propuestos para este tipo de sistemas. El siguiente ejemplo consiste en un proceso de neutralización de pH el cual posee su salida definida implícitamente mediante una ecuación de titulación de pH. En él se prueba el observador propuesto para este tipo de sistemas. El tercer y último ejemplo consiste en un problema de estimación de admitancia, cuya salida también es definida implícitamente. En este caso, un observador del tipo Luenberger es diseñado con el método propuesto con diferentes tasas de convergencia requeridas.

El documento finaliza con el capítulo 5 en el cual se exponen algunas conclusiones.

---

## Capítulo 2

# Descripción del modelo

*En esta sección se describe la estructura de los modelos a utilizar en el diseño de observadores, la perturbación no lineal en la dinámica del sistema y los dos mapas de salida no lineal a considerar: explícita e implícita.*

### 2.1. Descripción de la dinámica del modelo

Los sistemas representados por modelos Wiener y con una perturbación no lineal del tipo Lipschitz poseen la estructura siguiente. (2.1).

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x, u) \quad (2.1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas,  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función no lineal del tipo Lipschitz con respecto a  $x$ ; i.e.

$$\|f(x_1, u) - f(x_2, u)\| \leq \gamma_f \|x_1 - x_2\| \quad (2.2)$$

donde  $\gamma_f$  corresponde a la constante de la condición Lipschitz. Esta ecuación (2.2) puede escribirse como

$$\frac{1}{\gamma_f^2} \bar{f}^T \bar{f} \leq \bar{x}^T \bar{x} \quad (2.3)$$

Por último, los valores  $n \in \mathbb{N}$  y  $m \in \mathbb{N}$  corresponden a la dimensión del vector de estado y del vector de entradas, respectivamente.

---

Se consideran dos casos para el mapa de salida, aquél en que la salida está explícitamente definida como una función de los vectores de estado y aquél en que la salida está definida implícitamente como una variable de una función no lineal.

### 2.1.1. Salida Explícita

En este caso, la salida  $y$  es definida como una función del vector de estado

$$y = h(x) \quad (2.4)$$

La función  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  es una función continua cuyas derivadas con respecto a  $x$  son acotadas y  $p \in \mathbb{N}$  es la dimensión del vector de salida  $y$ .

Luego, al combinar las ecuaciones (2.1) y (2.4) se tiene que el modelo de un sistema con esta estructura tiene la forma siguiente

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.5)$$

### 2.1.2. Salida Implícita

En este caso, la salida  $y$  es definida implícitamente como una variable de una función no lineal.

$$0 = h(x, y) \quad (2.6)$$

Al igual que el caso anterior, la función  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  es una función continua y cuyas derivadas con respecto a  $x$  están acotadas,

$$\max_i \left\| \frac{\partial f(x, u)}{\partial x_i} \right\| < \infty \quad (2.7)$$

donde  $p \in \mathbb{N}$  es la dimensión del vector de salida  $y$  y  $q \in \mathbb{N}$  es la dimensión del recorrido de la función de salida  $h(x, y)$ .

Luego, al combinar las ecuaciones (2.1) y (2.6) se tiene que el modelo de un sistema con esta estructura tiene la forma siguiente

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f(x, u) \\ 0 = h(x, y) \end{cases} \quad (2.8)$$

## 2.2. Condición menos conservadora de Lipschitz

El uso de la condición de one-sided Lipschitz (OSL), que ha sido presentada en diferentes artículos [9, 11, 12, 13], aparece como alternativa a la condición de Lipschitz presentada en la ecuación (2.2). Ella es, por un lado, una generalización del uso de la condición de Lipschitz; ya que la continuidad one-sided Lipschitz abarca un abanico de funciones no lineales que incluyen a los sistemas Lipschitz. Por otro lado, se presenta como una alternativa menos conservadora dado que el uso de la condición de Lipschitz garantiza la estabilidad sólo para pequeños valores de constante de Lipschitz siendo que los observadores obtenidos podrían funcionar para valores grandes de ella, [12].

### OSL: Condición One-Sided Lipschitz

Tomando en consideración la ecuación del modelo (2.1), se considera en este caso que  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  es una función no lineal que posee una constante One-Sided Lipschitz (OSL)  $\gamma_o$  tal que

$$\langle f_o(x_1, u) - f_o(x_2, u), x_1 - x_2 \rangle \leq \gamma_o \|x_1 - x_2\|^2 \quad (2.9)$$

donde

$$f_o(x_u) = R \cdot f(x, u) \quad (2.10)$$

con  $R = R^T > 0, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Cabe destacar que no hay restricción con respecto al signo de la constante OSL, por lo que  $\gamma_o$  puede ser negativa.

## Capítulo 3

# Desarrollo de Algoritmo

*En este capítulo se exponen teoremas que sirven para el diseño de observadores para los sistemas mostrados en el capítulo anterior. Primero se presentan algunas propiedades matemáticas, luego se muestran las condiciones para satisfacer la estabilidad de una función de Lyapunov y se finaliza con la demostración de los teoremas correspondientes a cada uno de los sistemas propuestos.*



### 3.1. Propiedades Previas

#### Definición de $Co(\cdot, \cdot)$

Sean  $x, y \in \mathbb{R}^{n'}$ ,  $n' \in \mathbb{N}$ , se define  $Co(x, y)$  como el espacio convexo definido por el conjunto  $\{x, y\}$ , i.e.

$$Co(x, y) = \{\lambda x + (1 - \lambda) y, \lambda \in [0, 1]\} \quad (3.1)$$

#### Definición de $\Omega_{i,j}$

Sean  $n', p' \in \mathbb{N}$ , se define  $\Omega_{i,j} \in \mathbb{R}^{n' \times p'}$  como una matriz de números reales tales que el término  $(i, j)$  es 1 mientras que todo el resto es 0.

---

### Teorema del Valor Medio Diferencial para Vectores

Sean  $n', p' \in \mathbb{N}$ , el teorema del Valor Medio Diferencial para Vectores (Differential Mean Value Theorem, DMVT) [21, 7] es una propiedad que dice que dados dos vectores  $a, b \in \mathbb{R}^{n'}$  y una función  $\varphi : \mathbb{R}^{n'} \rightarrow \mathbb{R}^{p'}$  diferenciable en  $Co(a, b)$ , entonces existe un conjunto de vectores constantes  $z_1, \dots, z_{p'} \in Co(a, b)$  tal que

$$\varphi(a) - \varphi(b) = \left( \sum_{i,j=1}^{p',n'} \Omega_{i,j} \frac{\partial \varphi_i(z_i)}{\partial x_j} \right) (a - b) \quad (3.2)$$

### 3.2. Observador de proceso con salida explícita

Se consideran dos observadores para el caso de la salida explícita, el observador tradicional Luenberger, y un segundo que toma en consideración la realimentación con peso.

#### 3.2.1. Observador del tipo Luenberger

El observador en este primer caso sigue la estructura tradicional, el llamado tipo Luenberger, definido como:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(h(\hat{x}) - y) + f(\hat{x}, u) \quad (3.3)$$

Luego, definiendo el error como  $e = \hat{x} - x$ , se tiene que la dinámica del error es

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} \\ &= Ae + K(h(\hat{x}) - h(x)) + (f(\hat{x}, u) - f(x, u)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ahora, utilizando el teorema del Valor Medio Diferencial para vectores (3.2), se puede reescribir la ecuación (3.4) como

$$\dot{e} = Ae + K \left( \sum_{i,j=1}^{p,n} \Omega_{i,j} \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} \Big|_{x=z_i} \right) e + (f(\hat{x}, u) - f(x, u)) \quad (3.5)$$

donde  $z_1, \dots, z_p \in Co(\hat{x}, x)$

Para simplificar la notación, se reescribe

$$C = \sum_{i,j=1}^{p,n} \Omega_{i,j} \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} \Big|_{x=z_i} \quad (3.6)$$

Ahora, para continuar se considera una función de Lyapunov  $V(e) = e^T P e$ , donde  $e = \hat{x} - x$  es el error,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definida positiva, i.e.,  $P = P^T > 0$ . Considerando el observador definido en (3.3) se tiene que la derivada de la función de Lyapunov es

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \\ &= e^T [A + KC]^T P e + e^T P [A + KC] e + 2e^T P [f(\hat{x}, u) - f(x, u)] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Esto puede reescribirse de forma matricial como

$$\dot{V}(e) = \begin{bmatrix} e \\ \bar{f} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [A + KC]^T P + P [A + KC] & P \\ & P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \bar{f} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

donde  $\bar{f} = f(\hat{x}, u) - f(x, u)$

Ahora, al tomar en cuenta la condición de Lipschitz (2.3), ésta también puede ser escrita de forma matricial, por lo que se tiene

$$\begin{bmatrix} e \\ \bar{f} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_f^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \bar{f} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.9)$$

Ahora, usando las ecuaciones (3.8) y (3.9) y el “procedimiento S” [3], se tiene una condición suficiente para que la derivada de la función de Lyapunov sea siempre negativa para cualquier valor de  $x$ , es decir, el error del observador tienda a cero. Esta condición está dada por

$$\begin{bmatrix} [A + KC]^T P + P [A + KC] + I & P \\ & P & -\frac{1}{\gamma_f^2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.10)$$

$$\underline{C}_{i,j} \leq C_{i,j} \leq \overline{C}_{i,j} \quad \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$$

donde  $C_{i,j}$  corresponde al elemento  $(i, j)$  de la matriz  $C$  y  $\underline{C}_{i,j}$  y  $\overline{C}_{i,j}$  corresponden, respectivamente, al mínimo y máximo valor que puede tomar el elemento  $(i, j)$  de la matriz  $C$ .

Dado que los valores de la matriz  $C$  son reales y acotados, existe un espacio convexo que la contiene, luego, si consideramos a  $(C_i)_{1 \leq i \leq v}$  como el conjunto de las matrices de este espacio convexo tal que

$$C \in \{C_1, \dots, C_v\} \quad (3.11)$$

donde  $v$  corresponde al número de matrices que definen este espacio, entonces el conjunto de ecuaciones (3.10) puede ser transformado en un problema de optimización de inecuaciones matriciales

lineales reemplazando los parámetros variables en el tiempo por las matrices definidas en (3.11), de modo que el problema ahora es resolver un sistema de inecuaciones definido por

$$\begin{bmatrix} [A + KC_i]^T P + P[A + KC_i] + I & P \\ P & -\frac{1}{\gamma_f^2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.12)$$

$$\forall 1 \leq i \leq v$$

En el presente documento, el espacio convexo utilizado corresponde al generado por las matrices obtenidas por todas las combinaciones posibles por los valores de  $\underline{C}_{i,j}$  y  $\overline{C}_{i,j}$  en las respectivas posiciones  $(i, j)$ . Otros métodos existen para el cálculo de las matrices del espacio convexo, por ejemplo en [23] o [24], sin embargo la implementación de estos métodos no forma parte de los alcances de esta tesis.

Ahora ya es posible definir el teorema para el diseño de observadores para modelos con perturbaciones no lineales y salida no lineal.

**Teorema 1.** *Observador de tipo Luenberger*

**Si existe una matriz  $K$  tal que  $A + KC_i, \forall 1 \leq i \leq v$  son estables y  $P = P^T > 0$  es una solución del sistema de inecuaciones**

$$\begin{bmatrix} [A + KC_i]^T P + P[A + KC_i] + I & P \\ P & -\frac{1}{\gamma_f^2} I \end{bmatrix} < 0$$

$$\forall 1 \leq i \leq v$$

**satisfaciendo la condición Lipschitz, entonces el observador propuesto (3.3) entrega estimaciones asintóticamente estables del sistema observado (2.5).**

Para resolver este problema, basta con resolver un sistema de optimización de LMI, para lo cual existen diversas aplicaciones que lo solucionan y a un bajo costo computacional.

A lo largo del desarrollo del algoritmo, en ningún momento existe alguna restricción sobre los valores propios de la matriz de transición de estados  $A$ , por lo que más de alguno puede ser un complejo puro. A diferencia de lo presentado en [8], en el presente teorema no hay restricción con respecto al número de valores propios de la matriz  $A$  que puedan encontrarse en el eje imaginario.

**Nota**

Una ventaja de las LMI, es que es posible agregar una restricción al sistema para garantizar una tasa de convergencia  $\beta$ , [22]. Para ello, la ganancia del observador debe satisfacer las inecuaciones siguientes

$$\begin{bmatrix} [A + KC_i]^T P + P [A + KC_i] + I + \beta P & P \\ P & -\frac{1}{\gamma_f^2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.13)$$

$$\forall 1 \leq i \leq v$$

así como las condiciones  $P > 0$  y  $\beta > 0$ .

**3.2.2. Observador con realimentación con peso**

El observador en este primer caso sigue la estructura tradicional Luenberger, pero con un término agregado correspondiente a la realimentación con peso de la salida:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + f(\hat{x}, u) + K_1(h(\hat{x}) - y) + K_2\nabla h(\hat{x})^T (h(\hat{x}) - y) \quad (3.14)$$

El término no lineal  $K_2\nabla h(\hat{x})^T (h(\hat{x}) - y)$  toma en en consideración la sensibilidad de la salida para ajustar la ganancia de la realimentación. Definiendo el error como  $e = \hat{x} - x$ , se tiene que la dinámica del error es

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} \\ &= Ae + (f(\hat{x}, u) - f(x, u)) + K_1(h(\hat{x}) - y) + K_2\nabla h(\hat{x})^T (h(\hat{x}) - y) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ahora, utilizando el teorema del Valor Medio Diferencial para vectores (3.2), se puede reescribir la ecuacion (3.15) como

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ae + (f(\hat{x}, u) - f(x, u)) \\ &+ K_1 \left( \sum_{i,j=1}^{p,n} \Omega_{i,j} \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} \Big|_{x=z_i} \right) e + K_2 \frac{\partial h(x)}{\partial x}^T \left( \sum_{i,j=1}^{p,n} \Omega_{i,j} \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} \Big|_{x=z_i} \right) e \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde  $z_1, \dots, z_p \in Co(\hat{x}, x)$

Para simplificar la notación, se reescribe

$$C = \sum_{i,j=1}^{p,n} \Omega_{i,j} \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} \Big|_{x=z_i} \quad (3.17)$$

Ahora, para continuar se considera una función de Lyapunov  $V(e) = e^T P e$ , donde  $e = \hat{x} - x$  es el error,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definida positiva, i.e.,  $P = P^T > 0$  y  $K_2 = -P^{-1}$ . Considerando el observador definido en (3.14) se tiene que la derivada de la función de Lyapunov es

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \\ &= e^T [A + K_1 C]^T P e + e^T P [A + K_1 C] e \\ &\quad - 2e^T \frac{\partial h(x)}{\partial x}^T C e + 2e^T P [f(\hat{x}, u) - f(x, u)] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Esto puede reescribirse de forma matricial como

$$\dot{V}(e) = \begin{bmatrix} e \\ \bar{f} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [A + K_1 C]^T P + P [A + K_1 C] - 2 \frac{\partial h(x)}{\partial x}^T C & P \\ & P \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \bar{f} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

donde  $\bar{f} = f(\hat{x}, u) - f(x, u)$

Ahora, al tomar en cuenta la condición de Lipschitz (2.3), ésta también puede ser escrita de forma matricial, por lo que se tiene

$$\begin{bmatrix} e \\ \bar{f} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_f^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \bar{f} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.20)$$

Ahora, usando las ecuaciones (3.19) y (3.20) y el “procedimiento S” [3], se tiene una condición suficiente para que la derivada de la función de Lyapunov sea siempre negativa para cualquier valor de  $x$ , es decir, el error del observador tienda a cero. Esta condición está dada por

$$\begin{bmatrix} [A + K_1 C]^T P + P [A + K_1 C] + I - 2 \frac{\partial h(x)}{\partial x}^T C & P \\ & P \\ & & -\frac{1}{\gamma_f^2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.21)$$

$$\underline{C}_{i,j} \leq C_{i,j} \leq \overline{C}_{i,j} \quad \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$$

donde  $C_{i,j}$  corresponde al elemento  $(i, j)$  de la matriz  $C$  y  $\underline{C}_{i,j}$  y  $\overline{C}_{i,j}$  corresponden, respectivamente, al mínimo y máximo valor que puede tomar el elemento  $(i, j)$  de la matriz  $C$ .

Dado que los valores de la matriz  $C$  son reales y acotados, existe un espacio convexo que la contiene, luego, si consideramos a  $(C_i)_{1 \leq i \leq v}$  como el conjunto de las matrices del espacio convexo de  $C$  tal que

$$C \in \{C_1, \dots, C_v\} \quad (3.22)$$

donde  $v$  corresponde al número de matrices que definen este espacio, entonces el conjunto de ecuaciones (3.21) puede ser transformado en un problema de optimización de inecuaciones matriciales lineales reemplazando los parámetros variables en el tiempo, entre ellos el término  $\frac{\partial h(x)}{\partial x}$  que también se encuentra dentro de este espacio convexo, por las matrices definidas en (3.22), de modo que el problema ahora es resolver un sistema de inecuaciones definido por

$$\begin{bmatrix} [A + K_1 C_i]^T P + P [A + K_1 C_i] + I - 2C_i^T C_i & P \\ P & -\frac{1}{\gamma_j^2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.23)$$

$$\forall 1 \leq i \leq v$$

En el presente documento, el espacio convexo utilizado corresponde al generado por las matrices obtenidas por todas las combinaciones posibles por los valores de  $\underline{C_{i,j}}$  y  $\overline{C_{i,j}}$  en las respectivas posiciones  $(i, j)$ . Otros métodos existen para el cálculo de las matrices del espacio convexo, por ejemplo en [23] o [24], sin embargo la implementación de estos métodos no forma parte de los alcances de esta tesis.

Ahora ya es posible definir el teorema para el diseño de observadores con realimentación con peso para modelos con perturbaciones no lineales y salida no lineal.

**Teorema 2.** *Observador de tipo Luenberger con realimentación no lineal por peso*

**Si existe una matriz  $K_1$  tal que  $A + K_1 C_i, \forall 1 \leq i \leq v$  son estables y  $P = P^T > 0$  es una solución del sistema de inecuaciones**

$$\begin{bmatrix} [A + K_1 C_i]^T P + P [A + K_1 C_i] + I - 2C_i^T C_i & P \\ P & -\frac{1}{\gamma_j^2} I \end{bmatrix} < 0$$

$$\forall 1 \leq i \leq v$$

**satisfaciendo la condición Lipschitz, entonces el observador propuesto (3.14) entrega estimaciones asintóticamente estables del sistema observado (2.5) con  $K_2 = -P^{-1}$**

Para resolver este problema, basta con resolver un sistema de optimización de LMI, para lo cual existen diversas aplicaciones que lo solucionan y a un bajo costo computacional.

A lo largo del desarrollo del algoritmo, en ningún momento existe alguna restricción sobre los valores propios de la matriz de transición de estados  $A$ , por lo que más de alguno puede ser un complejo puro. A diferencia de lo presentado en [8], en el presente teorema no hay restricción con respecto al número de valores propios de la matriz  $A$  que puedan encontrarse en el eje imaginario.

### Nota

Una ventaja de las LMI, es que es posible agregar una restricción al sistema para garantizar una tasa de convergencia  $\beta$ , [22]. Para ello, la ganancia del observador debe satisfacer las inecuaciones siguientes

$$\begin{bmatrix} [A + K_1 C_i]^T P + P [A + K_1 C_i] + I - 2C_i^T C_i + \beta P & P \\ P & -\frac{1}{\gamma_f^2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.24)$$

así como las condiciones  $P > 0$  y  $\beta > 0$ .

### 3.3. Observador de proceso con salida implícita

En este caso, se considera un modelo de un sistema cuya salida está definida implícitamente como en (2.6). El observador propuesto es el tradicional de tipo Luenberger

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(h(\hat{x}, y) - h(x, y)) + f(\hat{x}, u) \quad (3.25)$$

Luego, definiendo el error como  $e = \hat{x} - x$ , se tiene que la dinámica del error es

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} \\ &= Ae + K(h(\hat{x}, y) - h(x, y)) + (f(\hat{x}, u) - f(x, u)) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Repitiendo los pasos de los casos anteriores se tiene que, utilizando el teorema del Valor Medio Diferencial para vectores (3.2), se puede reescribir la ecuación (3.26) como

$$\dot{e} = Ae + K \left( \sum_{i,j=1}^{p,n} \Omega_{i,j} \frac{\partial h_i(x, y)}{\partial x_j} \Big|_{x=z_i} \right) e + (f(\hat{x}, u) - f(x, u)) \quad (3.27)$$

donde  $z_1, \dots, z_p \in Co(\hat{x}, x)$

Para simplificar la notación, se reescribe

$$C_y = \sum_{i,j=1}^{p,n} \Omega_{i,j} \left. \frac{\partial h_i(x,y)}{\partial x_j} \right|_{x=z_i} \quad (3.28)$$

Ahora, para continuar se considera una función de Lyapunov  $V(e) = e^T P e$ , donde  $e = \hat{x} - x$  es el error,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definida positiva, i.e.,  $P = P^T > 0$ . Considerando el observador definido en (3.25) se tiene que la derivada de la función de Lyapunov es

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \\ &= e^T [A + K C_y]^T P e + e^T P [A + K C_y] e + 2e^T P [f(\hat{x}, u) - f(x, u)] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Esto puede reescribirse de forma matricial como

$$\dot{V}(e) = \begin{bmatrix} e \\ \bar{f} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [A + K C_y]^T P + P [A + K C_y] & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \bar{f} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

donde  $\bar{f} = f(\hat{x}, u) - f(x, u)$

Ahora, al tomar en cuenta la condición de Lipschitz (2.3), ésta también puede ser escrita de forma matricial, por lo que se tiene

$$\begin{bmatrix} e \\ \bar{f} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_{\bar{f}}} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \bar{f} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.31)$$

Ahora, usando las ecuaciones (3.30) y (3.31) y el “procedimiento S” [3], se tiene una condición suficiente para que la derivada de la función de Lyapunov sea siempre negativa para cualquier valor de  $x$ , es decir, el error del observador tienda a cero. Esta condición está dada por

$$\begin{bmatrix} [A + K C_y]^T P + P [A + K C_y] + I & P \\ P & -\frac{1}{\gamma_{\bar{f}}} I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.32)$$

$$\underline{C}_{y_{i,j}} \leq C_{y_{i,j}} \leq \overline{C}_{y_{i,j}} \quad \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$$

donde  $C_{y_{i,j}}$  corresponde al elemento  $(i, j)$  de la matriz  $C_y$  y  $\underline{C}_{y_{i,j}}$  y  $\overline{C}_{y_{i,j}}$  corresponden, respectivamente, al mínimo y máximo valor que puede tomar el elemento  $(i, j)$  de la matriz  $C_y$ .

Dado que los valores de la matriz  $C$  son reales y acotados, existe un espacio convexo que la contiene, luego, si consideramos a  $(C_{y_i})_{1 \leq i \leq v}$  como el conjunto de las matrices del espacio convexo de  $C_y$  tal que

$$C_y \in \{C_{y_1}, \dots, C_{y_v}\} \quad (3.33)$$

donde  $v$  corresponde al número de matrices que definen este espacio, entonces el conjunto de ecuaciones (3.32) puede ser transformado en un problema de optimización de inecuaciones matriciales lineales reemplazando los parámetros variables en el tiempo por las matrices definidas en (3.33), de modo que el problema ahora es resolver un sistema de inecuaciones definido por

$$\begin{bmatrix} [A + KC_{y_i}]^T P + P[A + KC_{y_i}] + I & P \\ P & -\frac{1}{\gamma_f^2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.34)$$

$$\forall 1 \leq i \leq v$$

En el presente documento, el espacio convexo utilizado corresponde al generado por las matrices obtenidas por todas las combinaciones posibles por los valores de  $\underline{C}_{y_{i,j}}$  y  $\overline{C}_{y_{i,j}}$  en las respectivas posiciones  $(i, j)$ . Otros métodos existen para el cálculo de las matrices del espacio convexo, por ejemplo en [23] o [24], sin embargo la implementación de estos métodos no forma parte de los alcances de esta tesis.

Ahora ya es posible definir el teorema para el diseño de observadores para modelos con perturbaciones no lineales y salida no lineal.

**Teorema 3.** *Observador de tipo Luenberger para sistema con salida implícita*

Si existe una matriz  $K$  tal que  $A + KC_{y_i}, \forall 1 \leq i \leq v$  son estables y  $P = P^T > 0$  es una solución del sistema de inecuaciones

$$\begin{bmatrix} [A + KC_{y_i}]^T P + P[A + KC_{y_i}] + I & P \\ P & -\frac{1}{\gamma_f^2} I \end{bmatrix} < 0$$

$$\forall 1 \leq i \leq v$$

satisfaciendo la condición Lipschitz, entonces el observador propuesto (3.25) entrega estimaciones asintóticamente estables del sistema observado (2.8).

Para resolver este problema, basta con resolver un sistema de optimización de LMI, para lo cual existen diversas aplicaciones que lo solucionan y a un bajo costo computacional.

A lo largo del desarrollo del algoritmo, en ningún momento existe alguna restricción sobre los valores propios de la matriz de transición de estados  $A$ , por lo que más de alguno puede ser un

complejo puro. A diferencia de lo presentado en [8], en el presente teorema no hay restricción con respecto al número de valores propios de la matriz  $A$  que puedan encontrarse en el eje imaginario.

### Nota

Una ventaja de las LMI, es que es posible agregar una restricción al sistema para garantizar una tasa de convergencia  $\beta$ , [22]. Para ello, la ganancia del observador debe satisfacer las inecuaciones siguientes

$$\begin{bmatrix} [A + KC_{y_i}]^T P + P [A + KC_{y_i}] + I + \beta P & P \\ P & -\frac{1}{\gamma_f^2} I \end{bmatrix} < 0$$

$$\forall 1 \leq i \leq v$$

así como las condiciones  $P > 0$  y  $\beta > 0$ .

## 3.4. Constante menos conservadora: OSL

Es posible el utilizar la constante OSL en el diseño de observadores obteniendo así un resultado menos conservador que el obtenido mediante el uso de la constante de Lipschitz. A continuación se detallan los pasos para el diseño de observadores utilizando esta constante.

### 3.4.1. Observador de proceso con salida explícita

Al igual que en la sección anterior de este capítulo, se consideran dos tipos de observadores para los sistemas cuya salida se define explícitamente: el observador tradicional tipo Luenberger y un segundo que toma en consideración la realimentación con peso, y se considera el de tipo Luenberger para los sistemas cuya salida se define implícitamente.

#### 3.4.1.1. Observador del tipo Luenberger

El observador se define como en la ecuación (3.3)

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(h(\hat{x}) - y) + f(\hat{x}, u) \quad (3.35)$$

Para el cual, la dinámica del error es la de la ecuación (3.4)

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} \\ &= Ae + K(h(\hat{x}) - h(x)) + (f(\hat{x}, u) - f(x, u))\end{aligned}\quad (3.36)$$

Luego, utilizando el teorema del Valor Medio Diferencial para vectores (3.2), reescribiendo según

$$C = \sum_{i,j=1}^{p,n} \Omega_{i,j} \left. \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} \right|_{x=z_i} \quad (3.37)$$

de modo de simplificar la notación y considerando una función de Lyapunov  $V(e) = e^T P e$ , donde  $e = \hat{x} - x$  es el error,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definida positiva, i.e.,  $P = P^T > 0$ ; se tiene que la derivada de la función de Lyapunov es

$$\begin{aligned}\dot{V}(e) &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \\ &= e^T [A + KC]^T P e + e^T P [A + KC] e + 2e^T P [f(\hat{x}, u) - f(x, u)]\end{aligned}\quad (3.38)$$

De la definición de la función  $f_o$  (2.10), si se considera que  $R = P$  se tiene que

$$2e^T P [f(\hat{x}, u) - f(x, u)] = 2e^T [f_o(\hat{x}, u) - f_o(x, u)] \quad (3.39)$$

luego, de la inecuación de OSL (2.9) se tiene que

$$2e^T [f_o(\hat{x}, u) - f_o(x, u)] < 2\gamma_o \|\hat{x} - x\|^2 = 2\gamma_o e^T e \quad (3.40)$$

Ahora, usando las ecuaciones (3.38), (3.39) y (3.40) se tiene una condición suficiente para que la derivada de la función de Lyapunov sea siempre negativa para cualquier valor de  $x$ , es decir, que el error del observador tienda a cero, la cual está dada por

$$\begin{aligned}[A + KC]^T P + P [A + KC] + 2\gamma_o I &< 0 \\ C_{i,j} &\leq C_{i,j} \leq \overline{C}_{i,j} \\ \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p\end{aligned}\quad (3.41)$$

donde  $C_{i,j}$  corresponde al elemento  $(i, j)$  de la matriz  $C$  y  $\underline{C}_{i,j}$  y  $\overline{C}_{i,j}$  corresponden, respectivamente, al mínimo y máximo valor que puede tomar el elemento  $(i, j)$  de la matriz  $C$ .

Dado que los valores de la matriz  $C$  son reales y acotados, existe un espacio convexo que la contiene, luego, si consideramos a  $(C_i)_{1 \leq i \leq v}$  como el conjunto de las matrices del espacio convexo de  $C$  tal que

$$C \in \{C_1, \dots, C_v\} \quad (3.42)$$

donde  $v$  corresponde al número de matrices que definen este espacio, entonces el conjunto de ecuaciones (3.41) puede ser transformado en un problema de optimización de inecuaciones matriciales lineales reemplazando los parámetros variables en el tiempo por las matrices definidas en (3.42), de modo que el problema ahora es resolver un sistema de inecuaciones definido por

$$\begin{aligned} [A + KC_i]^T P + P [A + KC_i] + 2\gamma_o I < 0 \\ \forall 1 \leq i \leq v \end{aligned} \quad (3.43)$$

En el presente documento, el espacio convexo utilizado corresponde al generado por las matrices obtenidas por todas las combinaciones posibles por los valores de  $\underline{C}_{i,j}$  y  $\overline{C}_{i,j}$  en las respectivas posiciones  $(i, j)$ . Otros métodos existen para el cálculo de las matrices del espacio convexo, por ejemplo en [23] o [24], sin embargo la implementación de estos métodos no forma parte de los alcances de esta tesis.

Ahora ya es posible definir el teorema para el diseño de observadores para modelos con perturbaciones no lineales y salida no lineal considerando la condición de one-sided Lipschitz.

**Teorema 4.** *Observador de tipo Luenberger para condición OSL*

**Si existe una matriz  $K$  tal que  $A + KC_i, \forall 1 \leq i \leq v$  son estables y  $R = P = P^T > 0$  es una solución del sistema de inecuaciones**

$$\begin{aligned} [A + KC_i]^T P + P [A + KC_i] + 2\gamma_o I < 0 \\ \forall 1 \leq i \leq v \end{aligned}$$

**satisfaciendo la condición one-sided Lipschitz para  $R = P$ , entonces el observador propuesto (3.3) entrega estimaciones asintóticamente estables del sistema observado (2.5).**

Para resolver este problema, basta con resolver un sistema de optimización de LMI, para lo cual existen diversas aplicaciones que lo solucionan y a un bajo costo computacional.

Al igual que en los casos en que se usa la condición Lipschitz, es posible agregar una restricción al sistema para garantizar una tasa de convergencia  $\beta$ , [22]. Para ello, la ganancia del observador debe satisfacer las inecuaciones siguientes

$$[A + KC_i]^T P + P[A + KC_i] + 2\gamma_o I + \beta P < 0$$

$$\forall 1 \leq i \leq v$$

así como las condiciones  $P > 0$  y  $\beta > 0$ .

### 3.4.1.2. Observador con realimentación con peso

El observador se define como en la ecuación (3.14)

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + f(\hat{x}, u) + K_1(h(\hat{x}) - y) + K_2\nabla h(\hat{x})^T (h(\hat{x}) - y) \quad (3.44)$$

Para el cual, la dinámica del error es la de la ecuación (3.15)

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} \\ &= Ae + (f(\hat{x}, u) - f(x, u)) + K_1(h(\hat{x}) - h(x)) + K_2\nabla h(\hat{x})^T (h(\hat{x}) - y) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Luego, utilizando el teorema del Valor Medio Diferencial para vectores (3.2), reescribiendo según

$$C = \sum_{i,j=1}^{p,n} \Omega_{i,j} \left. \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} \right|_{x=z_i} \quad (3.46)$$

de modo de simplificar la notación y considerando una función de Lyapunov  $V(e) = e^T P e$ , donde  $e = \hat{x} - x$  es el error,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definida positiva, i.e.,  $P = P^T > 0$  y  $K_2 = -P^{-1}$ ; se tiene que la derivada de la función de Lyapunov es como en (3.18)

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \\ &= e^T [A + K_1 C]^T P e + e^T P [A + K_1 C] e - 2e^T \frac{\partial h(x)}{\partial x}^T C e + 2e^T P [f(\hat{x}, u) - f(x, u)] \end{aligned} \quad (3.47)$$

De la definición de la función  $f_o$  (2.10) y si se considera que  $R = P$  se tienen las ecuaciones (3.39) y (3.40). Con estas ecuaciones, se tiene una condición suficiente para que la derivada de la función de Lyapunov sea siempre negativa para cualquier valor de  $x$ , es decir, que el error del observador

tienda a cero, la cual está dada por

$$\begin{aligned}
 [A + K_1 C]^T P + P [A + K_1 C] - 2 \frac{\partial h(x)}{\partial x}^T C + 2\gamma_o I &< 0 \\
 C_{i,j} \leq C_{i,j} \leq \overline{C_{i,j}} & \\
 \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p &
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

donde  $C_{i,j}$  corresponde al elemento  $(i, j)$  de la matriz  $C$  y  $\underline{C_{i,j}}$  y  $\overline{C_{i,j}}$  corresponden, respectivamente, al mínimo y máximo valor que puede tomar el elemento  $(i, j)$  de la matriz  $C$ .

Dado que los valores de la matriz  $C$  son reales y acotados, existe un espacio convexo que la contiene, luego, si consideramos a  $(C_i)_{1 \leq i \leq v}$  como el conjunto de las matrices del espacio convexo de  $C$  tal que

$$C \in \{C_1, \dots, C_v\}$$

donde  $v$  corresponde al número de matrices que definen este espacio, entonces el conjunto de ecuaciones (3.48) puede ser transformado en un problema de optimización de inecuaciones matriciales lineales reemplazando los parámetros variables en el tiempo, entre ellos el término  $\frac{\partial h(x)}{\partial x}$  que también se encuentra dentro de este espacio convexo, de modo que el problema ahora es resolver un sistema de inecuaciones definido por

$$\begin{aligned}
 [A + K_1 C_i]^T P + P [A + K_1 C_i] - 2 C_i^T C_i + 2\gamma_o I &< 0 \\
 \forall 1 \leq i \leq v &
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

En el presente documento, el espacio convexo utilizado corresponde al generado por las matrices obtenidas por todas las combinaciones posibles por los valores de  $\underline{C_{i,j}}$  y  $\overline{C_{i,j}}$  en las respectivas posiciones  $(i, j)$ . Otros métodos existen para el cálculo de las matrices del espacio convexo, por ejemplo en [23] o [24], sin embargo la implementación de estos métodos no forma parte de los alcances de esta tesis.

Ahora ya es posible definir el teorema para el diseño de observadores para modelos con perturbaciones no lineales y salida no lineal considerando la condición de one-sided Lipschitz y el observador con realimentación no lineal.

**Teorema 5.** *Observador de tipo Luenberger para condición OSL*

Si existe una matriz  $K_1$  tal que  $A + K_1 C_i, \forall 1 \leq i \leq v$  son estables y  $R = P = P^T > 0$  es una solución del sistema de inecuaciones

$$\begin{aligned} [A + K_1 C_i]^T P + P [A + K_1 C_i] - 2C_i^T C_i + 2\gamma_o I < 0 \\ \forall 1 \leq i \leq v \end{aligned}$$

satisfaciendo la condición one-sided Lipschitz para  $R = P$ , entonces el observador propuesto (3.14) entrega estimaciones asintóticamente estables del sistema observado (2.5) con  $K_2 = -P^{-1}$ .

Para resolver este problema, basta con resolver un sistema de optimización de LMI, para lo cual existen diversas aplicaciones que lo solucionan y a un bajo costo computacional.

Al igual que en los casos en que se usa la condición Lipschitz, es posible agregar una restricción al sistema para garantizar una tasa de convergencia  $\beta$ , [22]. Para ello, la ganancia del observador debe satisfacer las inecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} [A + K_1 C_i]^T P + P [A + K_1 C_i] - 2C_i^T C_i + 2\gamma_o I + \beta P < 0 \\ \forall 1 \leq i \leq v \end{aligned}$$

así como las condiciones  $P > 0$  y  $\beta > 0$ .

### 3.4.2. Observador de proceso con salida implícita

Siguiendo los pasos de la sección 3.3, el observador se define como en la ecuación (3.25)

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(h(\hat{x}) - y) + f(\hat{x}, u) \quad (3.50)$$

cuya dinámica del error es la de la ecuación (3.26)

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} \\ &= Ae + K(h(\hat{x}, y) - h(x, y)) + (f(\hat{x}, u) - f(x, u)) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Luego, utilizando el teorema del Valor Medio Diferencial para vectores (3.2), reescribiendo según

$$C_y = \sum_{i,j=1}^{p,n} \Omega_{i,j} \left. \frac{\partial h_i(x, y)}{\partial x_j} \right|_{x=z_i} \quad (3.52)$$

de modo de simplificar la notación y considerando una función de Lyapunov  $V(e) = e^T P e$ , donde  $e = \hat{x} - x$  es el error y  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definida positiva, i.e.,  $P = P^T > 0$ ; se tiene que la derivada de la función de Lyapunov es como en (3.29)

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \\ &= e^T [A + K C_y]^T P e + e^T P [A + K C_y] e + 2e^T P [f(\hat{x}, u) - f(x, u)] \end{aligned} \quad (3.53)$$

De la definición de la función  $f_o$ , (2.10), y si se considera que  $R = P$ , se tienen las ecuaciones (3.39) y (3.40). Con estas ecuaciones, se tiene una condición suficiente para que la derivada de la función de Lyapunov sea siempre negativa para cualquier valor de  $x$ , es decir, que el error del observador tienda a cero. Esta condición corresponde a

$$[A + K C_y]^T P + P [A + K C_y] - 2 \frac{\partial h(x, y)}{\partial x}^T C + 2\gamma_o I < 0 \quad (3.54)$$

$$C_{y_{i,j}} \leq C_{y_{i,j}} \leq \overline{C_{y_{i,j}}}$$

$$\forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$$

donde  $C_{y_{i,j}}$  corresponde al elemento  $(i, j)$  de la matriz  $C_y$  y  $\underline{C_{y_{i,j}}}$  y  $\overline{C_{y_{i,j}}}$  corresponden, respectivamente, al mínimo y máximo valor que puede tomar el elemento  $(i, j)$  de la matriz  $C_y$ .

Dado que los valores de la matriz  $C$  son reales y acotados, existe un espacio convexo que la contiene, luego, si consideramos a  $(C_{y_i})_{1 \leq i \leq v}$  como el conjunto de las matrices del espacio convexo de  $C_y$  tal que

$$C_y \in \{C_{y_1}, \dots, C_{y_v}\}$$

donde  $v$  corresponde al número de matrices que definen este espacio convexo, entonces el conjunto de ecuaciones (3.54) puede ser transformado en un problema de optimización de inecuaciones matriciales lineales reemplazando los parámetros variables en el tiempo de modo que el problema ahora es resolver un sistema de inecuaciones definido por

$$[A + K C_{y_i}]^T P + P [A + K C_{y_i}] - 2 C_i^T C_i + 2\gamma_o I < 0 \quad (3.55)$$

$$\forall 1 \leq i \leq v$$

En el presente documento, el espacio convexo utilizado corresponde al generado por las matrices obtenidas por todas las combinaciones posibles por los valores de  $\underline{C_{y_{i,j}}}$  y  $\overline{C_{y_{i,j}}}$  en las respectivas posiciones  $(i, j)$ . Otros métodos existen para el cálculo de las matrices del espacio convexo, por

ejemplo en [23] o [24], sin embargo la implementación de estos métodos no forma parte de los alcances de esta tesis.

Ahora ya es posible definir el teorema para el diseño de observadores para modelos con perturbaciones no lineales y salida no lineal considerando la condición de one-sided Lipschitz y el observador tradicional de tipo Luenberger.

**Teorema 6.** *Observador de tipo Luenberger para condición OSL para sistemas con salida implícita*

**Si existe una matriz  $K$  tal que  $A + KC_{y_i}, \forall 1 \leq i \leq v$  son estables y  $R = P = P^T > 0$  es una solución del sistema de inecuaciones**

$$[A + KC_{y_i}]^T P + P [A + KC_{y_i}] + 2\gamma_o I < 0$$

$$\forall 1 \leq i \leq v$$

**satisfaciendo la condición one-sided Lipschitz para  $R = P$ , entonces el observador propuesto (3.25) entrega estimaciones asintóticamente estables del sistema observado (2.8).**

Para resolver este problema, basta con resolver un sistema de optimización de LMI, para lo cual existen diversas aplicaciones que lo solucionan y a un bajo costo computacional.

Al igual que en los casos en que se usa la condición Lipschitz, es posible agregar una restricción al sistema para garantizar una tasa de convergencia  $\beta$ , [22]. Para ello, la ganancia del observador debe satisfacer las inecuaciones siguientes

$$[A + KC_{y_i}]^T P + P [A + KC_{y_i}] + 2\gamma_o I + \beta P < 0$$

$$\forall 1 \leq i \leq v$$

así como las condiciones  $P > 0$  y  $\beta > 0$ .

## Capítulo 4

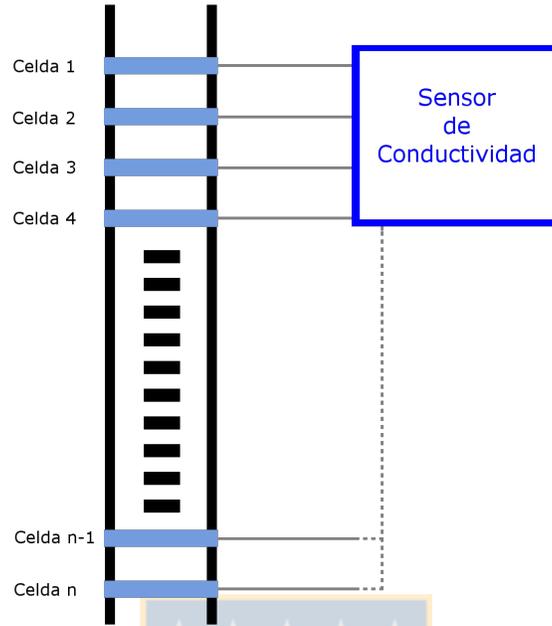
# Simulaciones

*En este capítulo se simulan los resultados del diseño de observadores obtenidos con los métodos propuestos en este documento. Tres ejemplos son utilizados para los diferentes algoritmos, el primero consiste en el seguimiento del valor de conductividad en un sistema con sensores de conductividad. El segundo ejemplo es un proceso de neutralización de pH en que la salida es definida implícitamente por la ecuación de titulación del pH. El tercer ejemplo corresponde a un problema de estimación de admitancias en un arreglo de electrodos.*

### 4.1. Problema seguimiento de conductividad

Sensores de conductividad pueden ser usados en aquellas aplicaciones en que la conductividad del sólido, líquido y/o gas entrega información valiosa para el monitoreo de procesos industriales [1, 16]. Los métodos eléctricos tienen la ventaja de no requerir estanques o columnas transparentes, figura 4.1. En espesadores, por ejemplo, concentraciones de sólido, perfiles de sólidos e interfaces de nivel claro/oscuro pueden ser determinados por mediciones de conductividad [18]. En varios casos, se encuentra que la estimación automática de la altura de la interfaz en columnas resulta difícil a causa del ruido de medición [17]. Para enfrentar el problema de señales ruidosas y el de variaciones dinámicas de la conductividad, se propone el uso de observadores. Una sonda simple de conductividad consiste en una fuente de poder bipolar y una celda sensora conectada a la fuente a través de una resistencia.

---

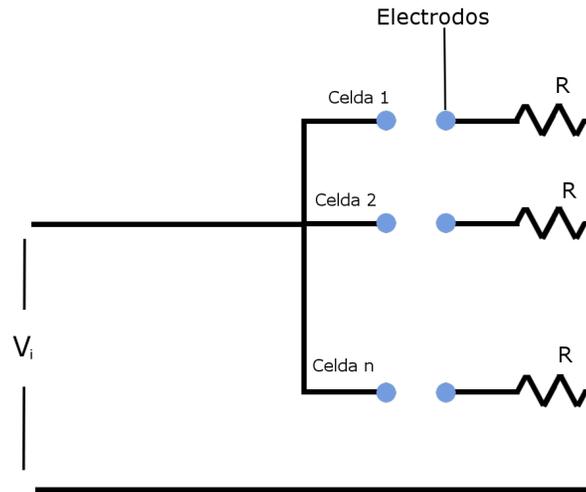


**Figura 4.1:** Columna con celdas para medir conductividad

La celda sensora, cuyo circuito equivalente se puede apreciar en la figura 4.2, utiliza unos electrodos y un sistema de adquisición para la recolección y procesamiento de las señales de voltaje. Como la relación entre la conductividad y el voltaje es no lineal, el valor de cada resistencia asociada a cada celda debe ser cuidadosamente seleccionado de modo de evitar problemas de resolución [16]. Un enfoque basado en redes neuronales fue propuesto para tratar con esta no linealidad característica en el cual se entrenó la red para aprender la función inversa de la no linealidad [16].

En este documento, se propone una solución diferente basada en modelos dinámicos y observadores. El primer paso es modelar el electrodo o variación del voltaje de la celda por un modelo dinámico simple. Una de las opciones más sencillas es modelar la variación dinámica del voltaje por el modelo de estados de tiempo continuo presentado a continuación, donde las variables de estado  $x$  corresponden a valores reales que representan un modelo estocástico descrito por el modelo de Markov:

$$\dot{x} = Ax + B\omega_t \quad (4.1)$$



**Figura 4.2:** Circuito equivalente de las celdas sensoras de conductividad

en el que  $A$  es la matriz de transición de estados,  $\omega$  corresponde a la evolución del ruido del proceso, que posee un valor medio cero y una covarianza de  $\Gamma_\omega$ , y  $B$  es la matriz de transición del ruido del proceso. La matriz  $A$  define el tipo de evolución supuesto para las variables de estado. Por ejemplo, si  $A=0$ , entonces se obtiene un modelo simple “random-walk”. Adicionalmente, se supone que los valores de conductividad pertenecen a un conjunto cerrado  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  donde  $n$  es la dimensión del vector  $x$ .

Para señales variantes en el tiempo, un modelo cinemático Newtoniano resulta más adecuado, en cuyo caso las ecuaciones que representan estas variaciones poseen la matriz de transición de estados siguiente

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Para el sensor de conductividad, las mediciones pueden ser descritas por una función continua no lineal  $h(\cdot)$  que representa la relación entre la conductividad y el voltaje medido

$$y_t = h(x_t) + \varepsilon_t \quad (4.3)$$

donde  $y_t$  es el vector de voltajes medidos y  $\varepsilon_t$  es un ruido gaussiano aleatorio de media cero y

covarianza  $\Gamma_\varepsilon$ . Se supone que el Jacobiano de  $h(\cdot)$  posee valores acotados, i.e.,

$$a_{i,j} \leq \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \leq b_{i,j} \quad (4.4)$$

Ahora, se considera una aplicación de conductividad donde el proceso y el sistema de medición puede ser descrito por el modelo

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4.5)$$

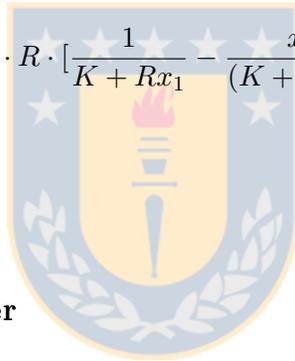
donde  $A$  se define como en (4.2),  $x$  corresponde a la conductividad, y el voltaje es la salida descrita por la función  $h(\cdot)$  definida como

$$h(x) = \frac{V_i \cdot R \cdot x_1}{K + R \cdot x_1} \quad (4.6)$$

con  $V_i = 15[V]$ ,  $R = 50[\Omega]$  y  $K = 1,5$  y cuyo jacobiano es

$$0 < \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} = V_i \cdot R \cdot \left[ \frac{1}{K + Rx_1} - \frac{x_1}{(K + Rx_1)^2} \right] \leq \frac{V_i \cdot R}{K} \quad (4.7)$$

puesto que la conductividad  $x_1 > 0$

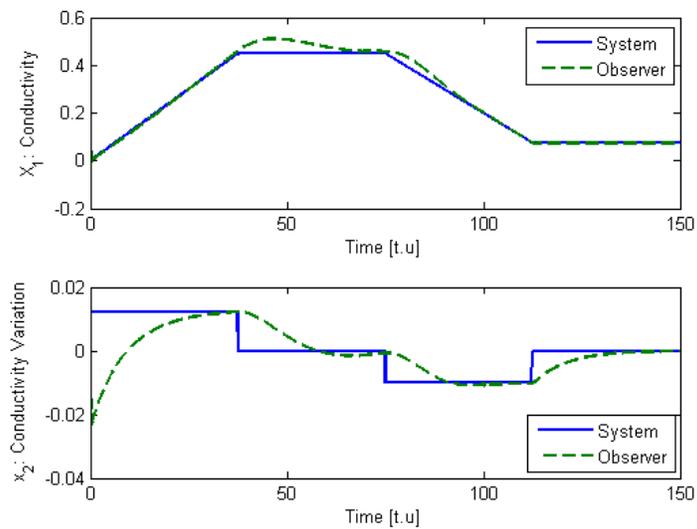


#### 4.1.1. Observador Luenberger

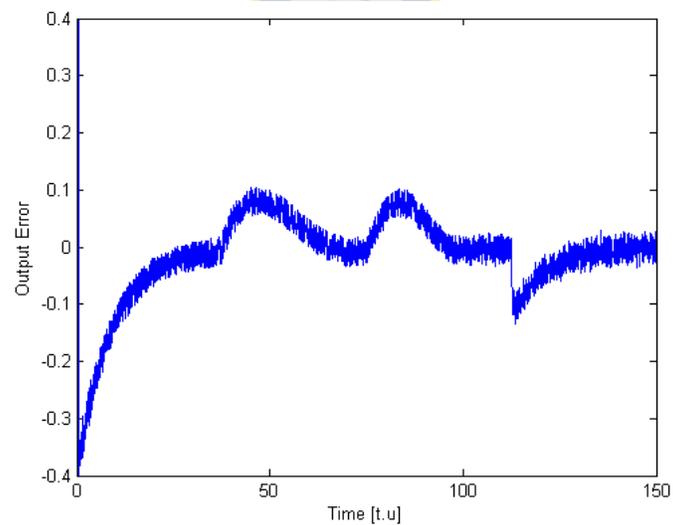
Usando el toolbox de Matlab, se resolvió el problema de LMI al considerar el observador tradicional de tipo Luenberger. El valor obtenido para  $K$  fue de

$$K = \begin{bmatrix} -0,08713 \\ -0,01018 \end{bmatrix}$$

Los valores dinámicos de la conductividad y sus valores estimados por el observador tradicional de tipo Luenberger se muestran en la figura 4.3. En la figura 4.4 se muestra el error de la salida  $\tilde{y} = \hat{y} - y$ .



**Figura 4.3:** Valores de la conductividad y del valor estimado por el observador Luenberger



**Figura 4.4:** Valores del error de la salida

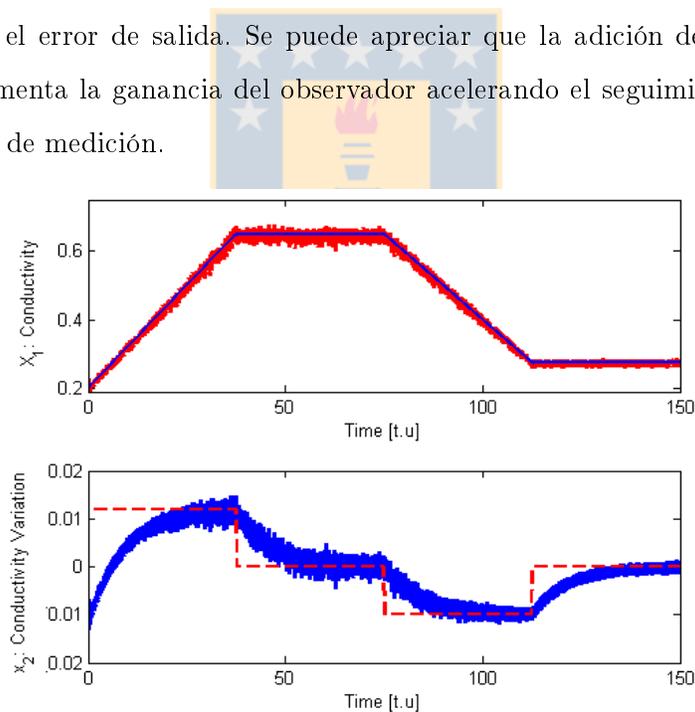
### 4.1.2. Observador con realimentación con peso

Usando el toolbox de Matlab, se resolvió el problema de LMI al considerar el observador con la realimentación no lineal por peso. El valor obtenido para  $K_1$  y  $K_2$  fueron

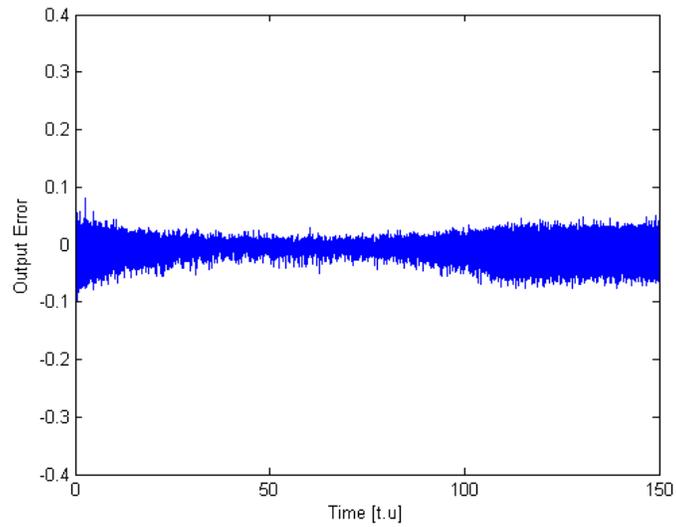
$$K_1 = \begin{bmatrix} -0,08713 \\ -0,01018 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -42,0752 & -4,8493 \\ -4,8493 & -1,3607 \end{bmatrix}$$

En la figura 4.5 se muestran los valores dinámicos de la conductividad y su estimación al utilizar el observador de tipo Luenberger con la realimentación no lineal con peso, mientras que en la figura 4.6 se aprecia el error de salida. Se puede apreciar que la adición del término no lineal en la realimentación aumenta la ganancia del observador acelerando el seguimiento, pero siendo más afectado por el ruido de medición.



**Figura 4.5:** Valores de la conductividad y del valor estimado por el observador con realimentación no lineal



**Figura 4.6:** Valores del error de la salida al usar el observador con realimentación no lineal

#### 4.1.3. Observador Luenberger con tasa de convergencia $\beta$

Se repite el diseño del observador tradicional adicionando un término a las inecuaciones del problema de optimización LMI tal como en (3.13) de modo que las inecuaciones a resolver tienen la estructura

$$\begin{bmatrix} [A + KC_i]^T P + P [A + KC_i] + I + \beta P & P \\ P & -\frac{1}{\gamma_f^2} I \end{bmatrix} < 0$$

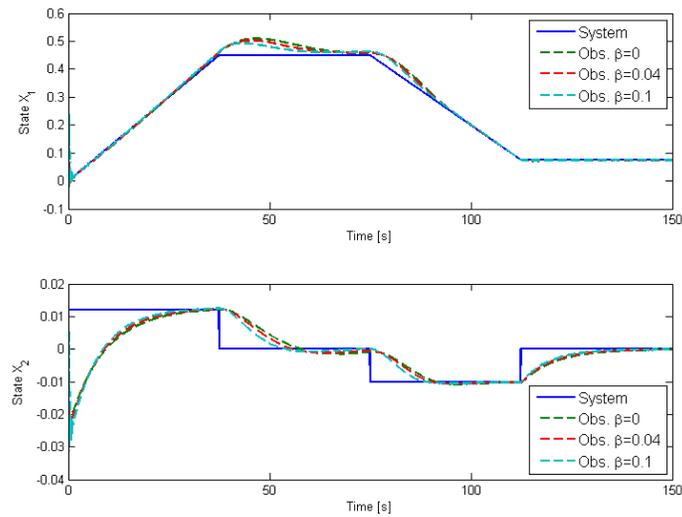
$$\forall 1 \leq i \leq v$$

En la figura 4.7 se observa cómo a medida que se aumentan los valores de  $\beta$ , la velocidad de convergencia aumenta.

Los valores de ganancia  $K$  de los observadores obtenidos al utilizar diferentes valores de  $\beta$  son

$$K_{\beta=0,04} = \begin{bmatrix} -0,1071 \\ -0,0137 \end{bmatrix}$$

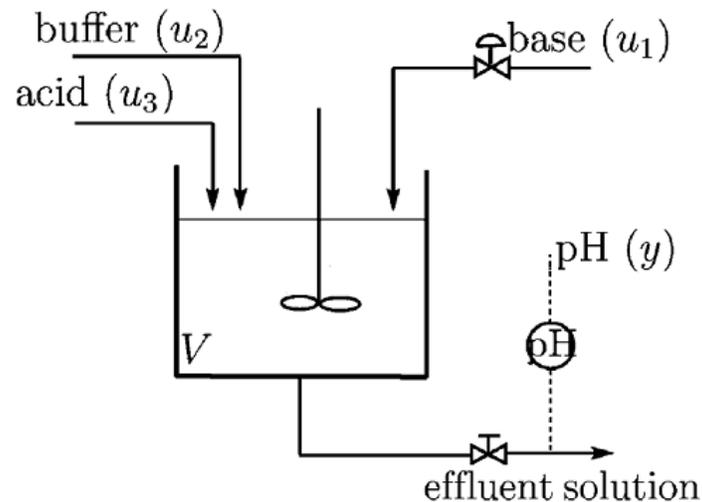
$$K_{\beta=0,1} = \begin{bmatrix} -0,1467 \\ -0,0209 \end{bmatrix}$$



**Figura 4.7:** Valores de la conductividad y del valor estimado por el observador Luenberger considerando diferentes tasas de convergencia  $\beta$

## 4.2. Proceso de neutralización de pH

Este ejemplo trata de un proceso de neutralización de pH el cual posee tres entradas, ( $u_1$ ) un flujo de base,  $NaOH$ , ( $u_2$ ) un flujo de buffer,  $NaHCO_3$ , y ( $u_3$ ) un flujo de ácido,  $HNO_3$ , los cuales son mezclados en un estanque de volumen constante ( $V$ ), como se aprecia en la figura 4.8. Se supone



**Figura 4.8:** Proceso de neutralización de pH

que el flujo de ácido y el volumen del estanque son constantes; el objetivo de control es usualmente controlar la salida, el pH del flujo de salida, manipulando el flujo base,  $u_1$ , a pesar de los cambios en el flujo de buffer sin medir,  $u_2$ .

Las reacciones químicas asociadas al sistema son



Las constantes de equilibrio para estas reacciones son

$$\begin{aligned} K_{a1} &= \frac{[HCO_3^-][H^+]}{[H_2CO_3]} \\ K_{a2} &= \frac{[CO_3^{2-}][H^+]}{[HCO_3^-]} \\ K_w &= [H^+][OH^-] \end{aligned} \quad (4.9)$$

El equilibrio químico es modelado usando el concepto de ‘reactivos invariantes’. Para este sistema dos de estos son asociados a cada flujo ( $i = 1, \dots, 4$ )

$$\begin{aligned} W_{ai} &= [H^+]_i - [OH^-]_i - [HCO_3^-]_i - 2[CO_3^{2-}]_i \\ W_{bi} &= [H_2CO_3]_i + [HCO_3^-]_i + [CO_3^{2-}]_i \end{aligned}$$

El término invariante  $W_a$  es una cantidad relacionada con la carga y el término  $W_b$  es la concentración del ion carbonato. Estos términos son independientes del grado de la reacción. Una relación entre la concentración de iones de hidrógeno y los ‘reactivos invariantes’, puede escribirse con las ecuaciones (4.8) y (4.9)

$$W_{bi} \frac{K_{a1}/[H^+] + 2K_{a1}K_{a2}/[H^+]^2}{1 + K_{a1}/[H^+] + K_{a1}K_{a2}/[H^+]^2} + W_{ai} + \frac{K_w}{[H^+]}$$

El valor del pH no se define como la concentración de iones de hidrógeno sino como la actividad iónica. Sin embargo, se puede suponer que esta actividad iónica es la misma que la concentración de iones para una solución infinitamente diluida. Luego, el valor del pH puede determinarse usando las ecuaciones anteriormente mencionadas y el negativo del logaritmo de la concentración de iones de hidrógeno si  $W_{ai}$  y  $W_{bi}$  son conocidos

$$pH = -\log([H^+]) \quad (4.10)$$

## 4.2.1. Dos variables de estado

Considerando dos variables de estado, se tiene que el modelo de este ejemplo queda expresado como

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} u_1(W_{a1} - x_1) + u_2(W_{a2} - x_1) + u_3(W_{a3} - x_1) \\ u_1(W_{b1} - x_2) + u_2(W_{b2} - x_2) + u_3(W_{b3} - x_2) \end{bmatrix} \\ h(x, y) = x_1 + 10^{y-14} - 10^{-y} + x_2 \frac{1 + 2 \cdot 10^{y-pK_2}}{1 + 10^{pK_1-y} + 10^{y-pK_2}} = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

donde  $pK_1$  y  $pK_2$  son la primera y segunda constante de disociación del ácido débil  $H_2CO_3$

$$pK_1 = -\log(K_{a1})$$

$$pK_2 = -\log(K_{a2})$$

y las variables de estado  $x_1$  y  $x_2$  corresponden a términos  $W_a$  y  $W_b$  del flujo de salida.

La tabla 4.1 muestra los valores de cada variable del proceso en el punto de operación nominal, los cuales fueron utilizados en el diseño del observador.

$u_1 = 15,55 \text{ ml/s}$	$V = 2,900 \text{ ml}$	$u_3 = 16,66 \text{ ml/s}$
$W_{a1} = -3,05 \cdot 10^{-3} \text{ M}$	$u_2 = 0,55 \text{ ml/s}$	$W_{a3} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ M}$
$W_{b1} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ M}$	$W_{a2} = -3 \cdot 10^{-2} \text{ M}$	$W_{b3} = 0 \text{ M}$
$W_a = -4,32 \cdot 10^{-4} \text{ M}$	$W_{b2} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ M}$	$W_b = 5,28 \cdot 10^{-4} \text{ M}$
$pK_1 = 6,35$		$pK_2 = 10,25$
	$y_{nom} = 7,0$	

**Cuadro 4.1:** Valores de parámetros en condiciones nominales de operación para el proceso de neutralización de pH

Las ecuaciones de las dinámicas del sistema (4.11), pueden ser reescritas como

$$\dot{x} = Ax + Bu_o + f(x, \Delta u)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} -u_{1o} - u_{2o} - u_{3o} & 0 \\ 0 & -u_{1o} - u_{2o} - u_{3o} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} W_{a1} & W_{a2} & W_{a3} \\ W_{b1} & W_{b2} & W_{b3} \end{bmatrix}$$

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} -(\Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3)x_1 \\ -(\Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3)x_2 \end{bmatrix}$$

y  $u_i = u_{io} + \Delta u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  donde  $u_{io}$  son los valores nominales de operación de  $u_i$  como se muestran en la tabla 4.1. Los valores de las matrices correspondientes del espacio convexo como se define en (3.33) son

$$C_1 = [11, 1577 \cdot 10^{-3}]$$

$$C_2 = [11, 5798]$$

Usando el toolbox de Matlab para la resolución del problema de LMI, se encontró el siguiente valor para  $K$ :

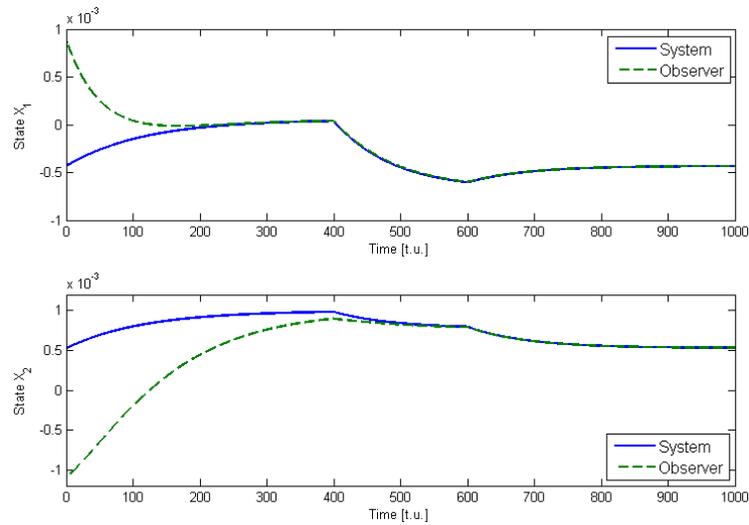
$$K = \begin{bmatrix} -10, 1972 \\ -8, 9423 \end{bmatrix}$$

Para las simulaciones, la condición inicial de las variables de estado del proceso corresponden a los valores en el punto de operación. Para el observador se escogió como valor inicial el punto  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (1 \cdot 10^{-3}, 1 \cdot 10^{-3})$ .

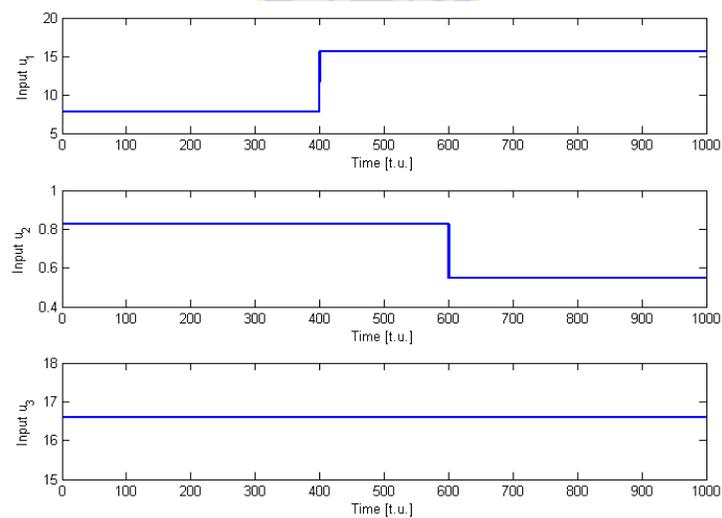
La simulación del modelo usando el observador encontrado, se muestra en la figura 4.9, en ella se aprecia la evolución de las variables de estado  $x_1$  y  $x_2$  así como sus estimados  $\hat{x}_1$  y  $\hat{x}_2$  para las entradas mostradas en la figura 4.10.

Una segunda simulación de este modelo usando el mismo observador pero con una variación diferente de la entrada, se muestra en la figura 4.11, en ella se aprecia la evolución de las variables de estado  $x_1$  y  $x_2$  así como sus estimados  $\hat{x}_1$  y  $\hat{x}_2$  para las entradas mostradas en la figura 4.12.

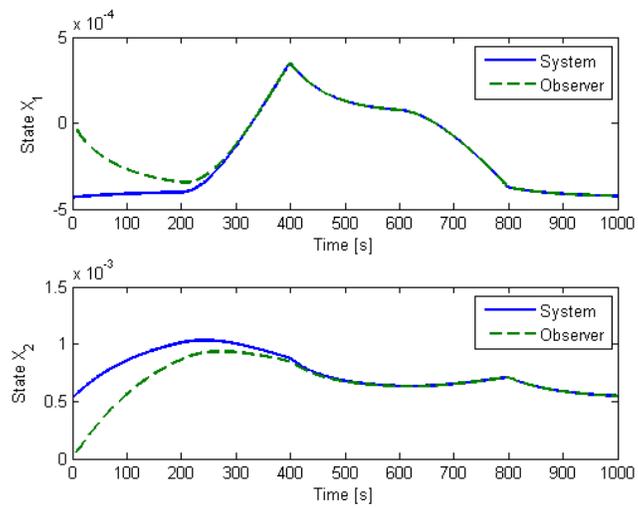
Cabe destacar que en este sistema, no es necesario el valor de la salida para implementar el observador, puesto que la función no lineal es un valor constante, simplificando de esta forma la implementación del observador para este tipo de procesos.



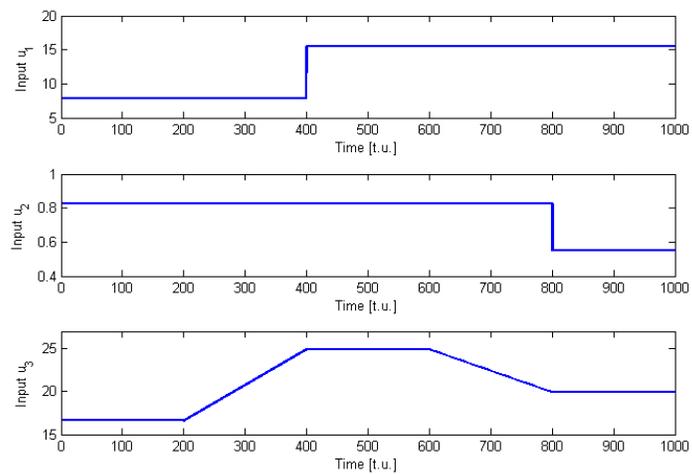
**Figura 4.9:** Variables de estado y sus estimados para proceso de neutralización de pH para variación en escalón en la entrada



**Figura 4.10:** Entradas para la simulación de la figura 4.9



**Figura 4.11:** Variables de estado y sus estimados para proceso de neutralización de pH para variación en rampa en la entrada



**Figura 4.12:** Entradas para la simulación de la figura 4.11

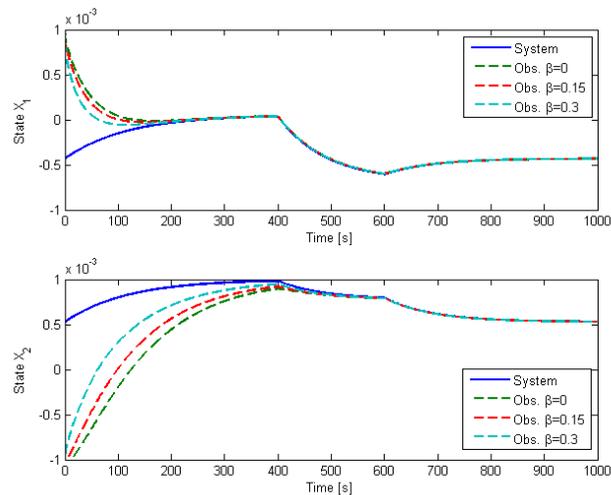
### Con tasa de convergencia $\beta$

Se repite la simulación realizada con las entradas de la figura 4.10 añadiendo el término de tasa de convergencia  $\beta$  al sistema de ecuaciones. Los valores de  $K$  obtenidos para los diferentes valores de  $\beta$  utilizados son

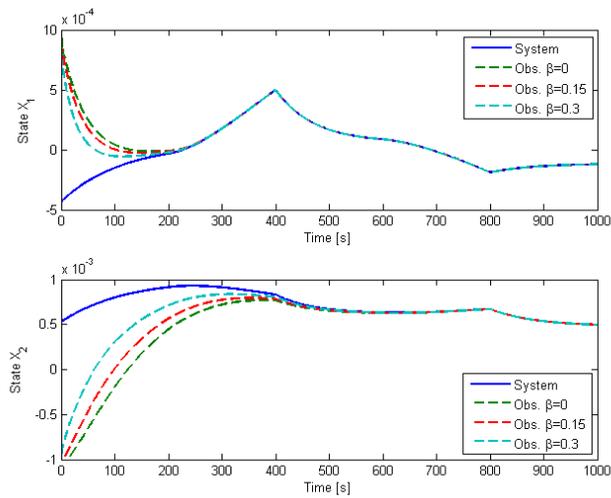
$$K_{\beta=0,15} = \begin{bmatrix} -6,6121 \\ -2,2949 \end{bmatrix}$$

$$K_{\beta=0,30} = \begin{bmatrix} -5,5266 \\ 1,5224 \end{bmatrix}$$

En la figura 4.13 se muestran los valores de las variables de estado y las estimaciones por los observadores para diferentes valores de  $\beta$  al utilizar las entradas de la figura 4.10. La figura 4.14 muestra los mismos valores al utilizar la entrada tipo rampa de la figura 4.12.



**Figura 4.13:** Variables de estado y sus estimados para proceso de neutralización de pH para variación en escalón en la entrada considerando diferentes tasas de convergencia  $\beta$



**Figura 4.14:** Variables de estado y sus estimados para proceso de neutralización de pH para variación en rampa en la entrada considerando diferentes tasas de convergencia  $\beta$

### Con condición OSL

Al volver a diseñar el observador utilizando la constante de OSL, el valor de  $P$  encontrado debe también satisfacer la condición de OSL. El valor de  $K$  y de  $P$  encontrados son

$$K = \begin{bmatrix} -2,2668 \\ -1,7766 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 10,1864 & -11,8597 \\ -11,8597 & 15,8771 \end{bmatrix}$$

Las simulaciones son similares a las obtenidas en el caso con la condición de Lipschitz, 4.9 y 4.11

### 4.3. Estimación de admitancia

Este ejemplo considera la estimación de las admitancias en un arreglo de electrodos como se muestra en la figura 4.15. Se considera un ejemplo simple compuesto de un conjunto de admitancias equivalentes  $\rho \in \mathbb{R}^p$  entre cada uno de los  $n$  electrodos, las corrientes inyectadas son  $i \in \mathbb{R}^n$  y los voltajes medidos son  $v \in \mathbb{R}^n$ , con  $n < p$  generalmente.

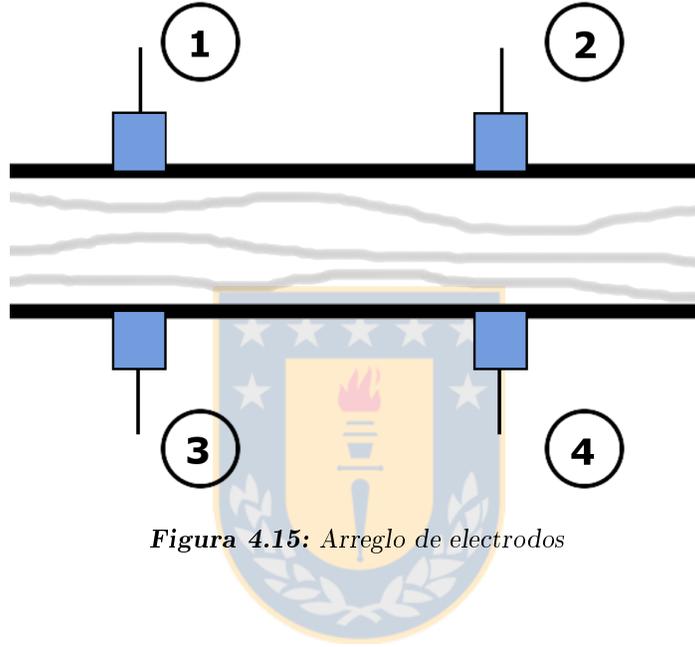


Figura 4.15: Arreglo de electrodos

El modelo directo es representado por un conjunto de ecuaciones descrito por

$$A_{\rho}v = i \quad (4.12)$$

donde  $A_{\rho}$  es una matriz de admitancias de  $n \times n$ . Para resolver la ecuación anterior, es necesario especificar el electrodo donde la corriente es inyectada y un electrodo de referencia. Por ejemplo, si la corriente es inyectada por el primer electrodo y el cuarto es considerado el de referencia, el conjunto de ecuaciones es

$$\begin{bmatrix} \rho_{12} + \rho_{13} + \rho_{14} & -\rho_{12} & -\rho_{13} \\ -\rho_{12} & \rho_{12} + \rho_{23} + \rho_{24} & -\rho_{12} \\ -\rho_{13} & -\rho_{23} & \rho_{13} + \rho_{23} + \rho_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(\omega_1) \\ v_2(\omega_1) \\ v_3(\omega_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(\omega_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Para poder maximizar la información disponible y estimar  $\rho$ , es necesario inyectar señales de corriente usando diferentes electrodos y luego demodular las señales. Si se considera que este procedimiento es tal que es posible tener una matriz  $A_v$  de rango completo  $p \times p$ , entonces la ecuación (4.12) puede ser escrita como

$$A_{v_e} \rho = i_e \quad (4.14)$$

donde  $v_e$  e  $i_e$  son los voltajes extendidos y las corrientes extendidas. Si se considera un segundo conjunto de datos obtenidos a partir de la inyección de corriente con frecuencia  $\omega_2$  en el electrodo 2, entonces se puede escoger la siguiente matriz como  $A_{v_e}$

$$\begin{bmatrix} \Delta v_{12}(\omega_1) & \Delta v_{13}(\omega_1) & \Delta v_{14}(\omega_1) & 0 & 0 \\ -\Delta v_{12}(\omega_1) & 0 & 0 & \Delta v_{23}(\omega_1) & 0 \\ 0 & \Delta - v_{13}(\omega_1) & 0 & -\Delta v_{23}(\omega_1) & \Delta v_{34}(\omega_1) \\ \Delta v_{12}(\omega_2) & \Delta v_{13}(\omega_2) & \Delta v_{14}(\omega_2) & 0 & 0 \\ -\Delta v_{12}(\omega_2) & 0 & 0 & \Delta v_{12}(\omega_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{12} \\ \rho_{13} \\ \rho_{14} \\ \rho_{23} \\ \rho_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(\omega_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ i(\omega_2) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

donde  $\Delta v_{ij} = v_i - v_j$ .

El problema, entonces, es dado un conjunto de mediciones de  $v_e$  e  $i_e$ , estimar las admitancias  $\rho$ . Se supone que las admitancias siguen un tipo modelo dinámico de paso aleatorio; i.e.

$$\dot{\rho} = 0 \quad (4.16)$$

El observador de tipo Luenberger que se propone para el sistema descrito por el modelo dinámico (4.16) y el mapa de salida implícito (4.14) es

$$\dot{\hat{\rho}} = K (A_{v_e} \hat{\rho} - i_e) \quad (4.17)$$

Dado que los valores de  $\Delta v$  son acotados, es posible encontrar los vértices de la región convexa, y generar así un problema de LMI como el del teorema 3. Las simulaciones se realizaron considerando diferentes valores de  $\beta$  obteniendo las simulaciones de la figura 4.16. Los valores de la ganancia  $K$

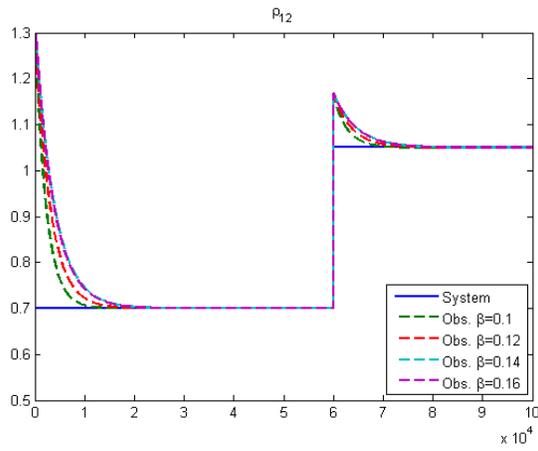
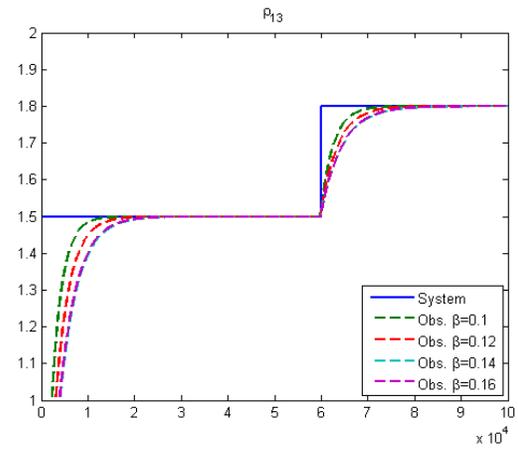
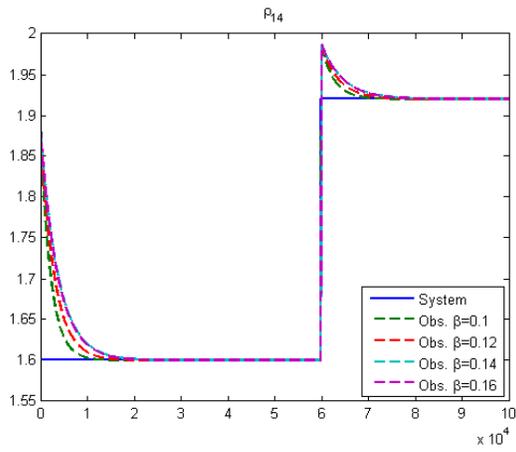
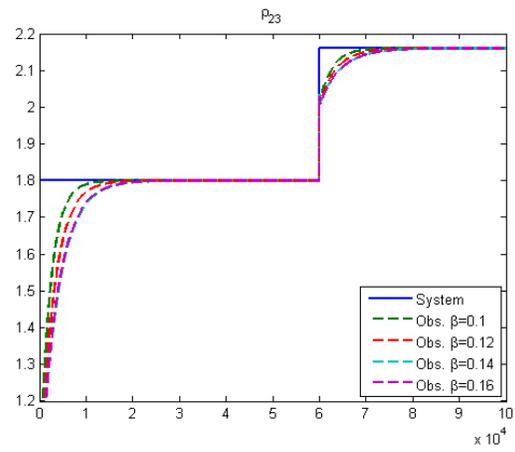
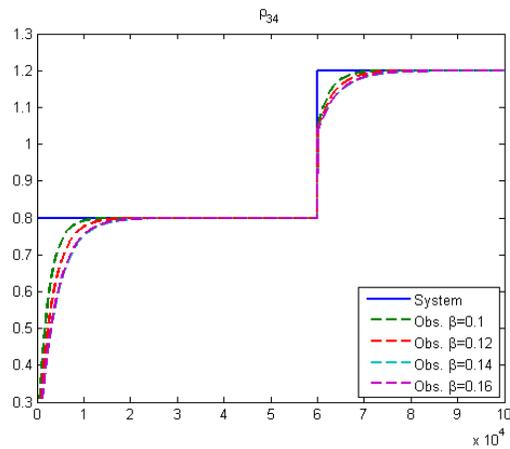
del observador para los diferentes valores de  $\beta$  son

$$K_{\beta=0,10} = \begin{bmatrix} 0,0141 & 0,0508 & 0,0033 & -1,2604 & 1,1103 \\ -0,0868 & 0,0015 & 0,0930 & -0,0352 & 0,1211 \\ -1,6016 & -0,0051 & -0,0099 & 0,0398 & -0,8225 \\ -0,0157 & -0,0137 & 0,0210 & -0,8040 & 0,0440 \\ -0,0038 & -0,0000 & -0,6158 & 0,0073 & -0,0043 \end{bmatrix}$$

$$K_{\beta=0,12} = \begin{bmatrix} -0,0106 & 0,0339 & 0,0023 & -0,8598 & 0,7636 \\ -0,0589 & 0,0002 & 0,0638 & -0,0138 & 0,0788 \\ -1,0834 & -0,0029 & -0,0057 & 0,0142 & -0,5519 \\ -0,0057 & -0,0101 & 0,0142 & -0,5604 & 0,0172 \\ -0,0023 & 0,0000 & -0,4329 & 0,0039 & -0,0016 \end{bmatrix}$$

$$K_{\beta=0,14} = \begin{bmatrix} -0,0200 & 0,0306 & 0,0008 & -0,8123 & 0,7375 \\ -0,0560 & 0,0005 & 0,0579 & -0,0087 & 0,0721 \\ -1,0262 & -0,0020 & -0,0036 & 0,0055 & -0,5209 \\ -0,0056 & -0,0086 & 0,0103 & -0,5290 & 0,0054 \\ -0,0005 & 0,0004 & -0,4097 & 0,0020 & -0,0015 \end{bmatrix}$$

$$K_{\beta=0,16} = \begin{bmatrix} -0,0256 & 0,0316 & 0,0003 & -0,9003 & 0,8231 \\ -0,0575 & 0,0007 & 0,0608 & -0,0069 & 0,0759 \\ -1,1127 & -0,0012 & -0,0049 & 0,0052 & -0,5668 \\ -0,0041 & -0,0111 & 0,0117 & -0,5729 & 0,0047 \\ -0,0025 & 0,0005 & -0,4428 & 0,0022 & -0,0016 \end{bmatrix}$$

(a) Admitancia  $\rho_{12}$ (b) Admitancia  $\rho_{13}$ (c) Admitancia  $\rho_{14}$ (d) Admitancia  $\rho_{23}$ (e) Admitancia  $\rho_{24}$ 

**Figura 4.16:** Admitancias del sistema y sus estimaciones para diferentes valores de  $\beta$

# Capítulo 5

## Conclusión

### 5.1. Sumario

En este trabajo, se han propuesto métodos simples de diseño de observadores para sistemas con estructura Wiener y mapa de salida no lineal. Estos métodos abarcan los casos en que la salida esté definida de manera explícita como función de variables del sistema, o definida implícitamente como variable de una función no lineal. En ellos se considera la condición Lipschitz de la función no lineal de la dinámica o, alternativamente, la condición menos conservadora ‘One Sided Lipchitz’. Para el cálculo de la ganancia del controlador que garantiza la estabilidad del observador, basta con resolver un problema de optimización de LMI.

### 5.2. Conclusiones

En este documento se estudió el desarrollo de un método de diseño de observadores para sistemas no lineales obteniendo como resultado un enfoque cuya solución sólo requiere resolver un sistema de inecuaciones de matrices lineales, cuya ventaja es que el cálculo de la solución de éste no genera un gran costo de cálculo.

A diferencia de varios trabajos anteriores, en este trabajo se buscó obtener resultados para sistemas que posean no linealidades tanto en sus dinámicas como en sus mapas de salida simultáneamente y sin restricciones en el número de valores propios sobre el eje imaginario.

Una ventaja del método propuesto es que durante la resolución del sistema de inecuaciones, que

---

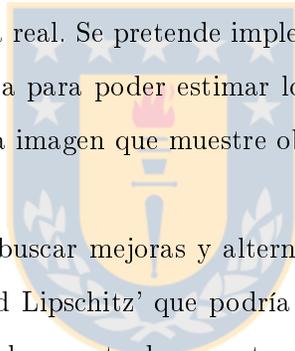
es un problema de optimización, es posible agregar restricciones y garantizar una cierta tasa de convergencia.

La principal contribución de esta tesis es el desarrollo de un nuevo observador de estados para sistemas no lineales otorgando alternativas a las ya existentes. Las alternativas propuestas en este trabajo no poseen restricción alguna en el número de valores propios de la matriz de transición de estados sobre el eje imaginario o en la existencia simultánea de no linealidades en las dinámicas o en el mapa de salida del sistema, además que el cálculo de la solución de ellas es de un bajo requerimiento computacional.

### 5.3. Trabajos Futuros

El siguiente paso esperable tras la creación del método presentado en el presente documento es la implementación de éste en un sistema real. Se pretende implementar este observador en un proceso de tomografía de impedancia eléctrica para poder estimar los valores de voltaje de los electrodos del tomógrafo y así poder recrear una imagen que muestre objetos de diferentes densidades dentro de un recipiente.

Por otro lado, a futuro queda el buscar mejoras y alternativas al método presentado, como el uso de la condición ‘Quasi One Sided Lipschitz’ que podría presentar una alternativa aún menos conservadora que las presentadas en el presente documento.



# Bibliografía

- [1] Aku Seppanen, Lasse Heikkinen, Tuomo Savolainen, Arto Voutilainen, Erkki Somersalo, Jari P. Kaipio, “*An experimental evaluation of state estimation with fluid dynamical models in process tomography*”. Chemical Engineering Journal, Volume 127, Issues 1-3, 1 March 2007, Pages 23-30
  - [2] S. Ibrir, “*LPV approach to continuous and discrete nonlinear observer design*”. Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on , vol., no., pp.8206-8211, 15-18 Dec. 2009
  - [3] D. M. Stipanović and D. D. Šiljak “*Robust stability and stabilization of discrete-time nonlinear systems: The LMI approach*”. International Journal of Control 74 (2001), pp. 873-879.
  - [4] A. Zemouche, M. Boutayeb, “*Observer Design for Lipschitz Nonlinear Systems: The Discrete-Time Case*”. Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on , vol.53, no.8, pp.777-781, Aug. 2006.
  - [5] G. Phanomchoeng, R. Rajamani, “*The bounded Jacobian approach to nonlinear observer design*”. American Control Conference (ACC), 2010 , vol., no., pp.6083-6088, June 30 2010-July 2 2010.
  - [6] G. Phanomchoeng, R. Rajamani, “*Observer design for Lipschitz nonlinear systems using Riccati equations*”. American Control Conference (ACC), 2010 , vol., no., pp.6060-6065, June 30 2010-July 2 2010
  - [7] Ali Zemouche, Mohamed Boutayeb, G. Iulia Bara, “*Observers for a class of Lipschitz systems with extension to  $H_\infty$  performance analysis*”. Systems & Control Letters, Volume 57, Issue 1, January 2008, Pages 18-27.
-

- 
- [8] Andreas Johansson, Alexander Medvedev, “*An observer for systems with nonlinear output map*”. *Automatica*, Volume 39, Issue 5, May 2003, Pages 909-918.
- [9] Guang-Da Hu, “*Observers for one-sided Lipschitz non-linear systems*”. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, Vol. 23, No. 4. (December 2006), pp. 395-401.
- [10] Guang-Da Hu, “*A note on observer for one-sided Lipschitz non-linear systems*”. *IMA J Math Control Info* first published online September 14, 2007.
- [11] Zhi-Xin Tai, Xing-Cheng Wang, “ *$H_\infty$  observers for one-sided Lipschitz nonlinear systems*”. *Intelligent Control and Automation, 2008. WCICA 2008. 7th World Congress on* , vol., no., pp.860-863, 25-27 June 2008.
- [12] Masoud Abbaszadeh, Horacio J. Marquez, “*Nonlinear Observer Design for One-Sided Lipschitz Systems*”. *American Control Conference (ACC), 2010* , vol., no., pp.5284-5289, June 30 2010-July 2 2010.
- [13] Yanbin Zhao, Jian Tao, Ning-Zhong Shi, “*A note on observer design for one-sided Lipschitz nonlinear systems*”. *Systems & Control Letters*, Volume 59, Issue 1, January 2010, Pages 66-71.
- [14] R. Rajamani, “*Observers for Lipschitz nonlinear systems*”. *Automatic Control, IEEE Transactions on* , vol.43, no.3, pp.397-401, Mar 1998.
- [15] Juan C. Gomez, Enrique Baeyens, “*Identification of block-oriented nonlinear systems using orthonormal bases*”. *Journal of Process Control*, Volume 14, Issue 6, September 2004, Pages 685-697.
- [16] R. Cardenas, S. Serpa, S. Villegas, J. Retamales, “*Conductivity sensor for mining applications*”. *IEEE Instrumentation and Measurement Technology*, 1998, 1050-1055. Minesota, USA.
- [17] J. Vergouw, C. Gomez, J. Finch, “*Estimating true level in a thickener using conductivity probe*”. *Minerals Engineering*, 2004, 17, 87-88.
- [18] M. Xu, A. Probst, J. Finch, “*Level and solids profile detection in thickeners using conductivity*”. *CIM Bul*, 1994, 1, 87.
-

- 
- [19] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, “*Iterative solution of nonlinear equations in several variables*”. SIAM ed., ser. Classics in Applied Mathematics, 2000, vol. 30.
- [20] Silvina I. Biagiola, José L. Figueroa, “*State Estimation in Nonlinear Processes*”. Application to pH Process Control, Ind. Eng. Chem. Res. 2002, 41, 4777-4785.
- [21] Ali Zemouche, Mohamed Boutayeb, G. Iulia Bara, “*Observers for nonlinear systems: An approach based on the differential mean value theorem*”. 44<sup>th</sup> IEEE CDC, Seville, Spain 6353-6358, 2005.
- [22] R. Rajamani, Y. Cho, “*Observer Design for Nonlinear Systems: Stability and Convergence*”. Decision and Control, New Orleans, December 2005.
- [23] P. Baranyi, “*Convex hull generation methods for polytopic representations of LPV models*”. Applied Machine Intelligence and Informatics, 2009. SAMI 2009. 7th International Symposium on , vol., no., pp.69-74, 30-31 Jan. 2009
- [24] Feng Guo, Xi-Zhao Wang, Yan Li, “*A new algorithm for solving convex hull problem and its application to feature selection*”. Machine Learning and Cybernetics, 2008 International Conference on , vol.1, no., pp.369-373, 12-15 July 2008
- 

# Publicaciones

Como resultado del desarrollo del presente documento, se generaron las siguientes publicaciones:

## Conferencias

- Glaria Lopez, T.A.; Sbarbaro, D.; “*Observer design for nonlinear processes with Wiener structure*”. Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on , vol., no., pp.2311-2316, 12-15 Dec. 2011
- Glaria Lopez, T.A.; Sbarbaro, D.; “*Observer design for neutralization processes with wiener structure and implicit output map*”. Control and Automation (ICCA), 2011 9th IEEE International Conference on , vol., no., pp.1287-1291, 19-21 Dec. 2011

## Revistas

- ‘*Observer design for linear processes model with implicit nonlinear output map*’ enviada a revisión en febrero del 2012.