



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

TELEPORTACIÓN PROBABILISTA: PROBABILIDAD Y FIDELIDAD COMO DOS VARIABLES COMPLEMENTARIAS

Por: Isabella Ignacia Toro Trujillo

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la
Universidad de Concepción para optar al grado académico de Magíster en
Ciencias con Mención en Física

Enero 2022

Concepción, Chile

Profesor Guía: Luis Roa Oppliger



© 2022, Isabella Ignacia Toro Trujillo

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento



A mi familia

AGRADECIMIENTOS

Siempre los agradecimientos comienzan agradeciendo a la familia por el apoyo incondicional, y esta no será la excepción aunque tengo tanto mas por lo que agradecerles. Mis padres y hermano son las únicas personas que día a día creen en mi, creen que lo que hago y lo que soy está bien, y por eso no podría estar mas agradecida. Siempre desde su humor y cariño han sido un rincón donde encuentro una fuente inagotable de cosas increíbles; de ellos he podido aprender y sigo aprendiendo una infinidad, y cuando las cosas han sido difíciles poder ver con sus ojos ha sido un alivio.

Agradecer a aquellos compañeros de clase que con su amistad y compañerismo, hicieron ligera la carga de maneras que muchas veces no eran obvias a simple vista. En particular quiero agradecer a Camila Huerta por ser una gran compañera de estudio y apoyo durante estos últimos años, nunca fui mucho de disfrutar trabajar en equipo pero con ella ha sido siempre un gusto; doble agradecimiento ya que también fue un pilar fundamental en el desarrollo de esta tesis y sus aportes fueron invaluable. También agradecer a los profesores del Departamento de Astronomía y del Departamento de Física, no solo por la formación que me brindaron pero por el toque personal de cada uno que hizo de mi experiencia algo único, en especial quiero agradecer al Dr. Luis Roa por su paciencia y aceptarme como su alumna durante estos dos años.

Finalmente agradecer a la Universidad de Concepción por financiar mis estudios dentro del programa de magíster a través de la beca de Articulación y a CONICYT-PFCHA/Magíster Nacional/2020-22201553 por brindarme financiamiento durante estos dos años.

Resumen

Se analiza el comportamiento del protocolo de teleportación probabilista cuando el canal cuántico es un estado maximalmente entrelazado $|\phi^+\rangle$ y la base de medición es un estado general de dos qubits $|m\rangle$ con coeficientes reales, para valores conocidos este estado es equivalente a un estado de Bell tal que la probabilidad de teleportación es igual a $1/4$. El objetivo principal es encontrar si es posible teleportar probabilísticamente en el esquema propuesto con probabilidad mayor a $1/4$, para esto se aplican condiciones sobre la base de medición relacionando los subespacios $\mathcal{H}_{00,11}$, $\mathcal{H}_{01,10}$ y los subespacios $\mathcal{H}_{00,01}$, $\mathcal{H}_{10,11}$, para luego determinar la fidelidad de la salida y su probabilidad. Se repite este procedimiento con un estado α, β y Werner como canal cuántico de comunicación encontrándose que para todos los canales cuánticos empleados siempre es posible teleportar con probabilidad mayor a $1/4$, pero inevitablemente la fidelidad promedio de la salida se encontrará entre $2/3 < f < 1$. Algunos resultados destacables son (1) Cuando se usan condiciones sobre $\mathcal{H}_{00,01}$ y $\mathcal{H}_{10,11}$, una compuerta de Hadamard mejora la fidelidad promedio, (2) Para estados puros cuando hay condiciones sobre $\mathcal{H}_{00,11}$ y $\mathcal{H}_{01,10}$, la fidelidad siempre supera el límite clásico $f > 2/3$ y probabilidad mayor a $1/4$, (3) La probabilidad de éxito al usar un canal tipo X es independiente del parámetro de decoherencia en cada estado, (4) En estados mixtos, incrementos en la concurrencia del canal cuántico están vinculados a incrementos en fidelidad promedio, pero una fidelidad $f > 2/3$ puede ser lograda incluso cuando la concurrencia es menor a $0,5$.

Keywords – Información cuántica, teleportación probabilista, fidelidad, entrelazamiento, estados X

Abstract

The behaviour of the probabilistic quantum teleportation protocol is studied when the quantum channel is a maximally entangled state $|\phi^+\rangle$ and the measurement basis is a general two qubit state $|m\rangle$ with real coefficients, for known values the state is equivalent to a Bell state such that teleportation probability is $1/4$. The goal is to find if it's possible in the proposed scheme to teleport with probability higher than $1/4$. To begin, conditions on the measurement basis are applied relating subspaces $\mathcal{H}_{00,11}$, $\mathcal{H}_{01,10}$ and $\mathcal{H}_{00,01}$, $\mathcal{H}_{10,11}$, then the fidelity and probability for such outcomes are determined. The procedure is repeated but with α , β and Werner states as quantum channels, thus it was found that for every quantum channel studied, it's always possible to teleport with probability higher than $1/4$, but inevitably the fidelity of the outcome will be within $2/3 < f < 1$. Some remarkable results are (1) When using conditions on $\mathcal{H}_{00,01}$ y $\mathcal{H}_{10,11}$, a Hadamard gate improves the average fidelity, (2) For pure states, conditions on $\mathcal{H}_{00,11}$ y $\mathcal{H}_{01,10}$ make the fidelity always above the classical limit $f > 2/3$ and probability higher than $1/4$, (3) Success probability when using an X state as a channel, is independent of the coherence parameter in each state, (4) In mixed states, increments on the channel concurrence are linked to increments on average fidelity, but a fidelity $f > 2/3$ can be achieved even when concurrence is lower than 0,5.

Keywords – Quantum information, Probabilistic teleportation, fidelity, entanglement, X states

Índice general

| | |
|--------------------------------------------------------------|------------|
| AGRADECIMIENTOS | I |
| Resumen | II |
| Abstract | III |
| 1 Introducción | 1 |
| 2 Fundamentos de mecánica cuántica | 4 |
| 2.1 Espacios vectoriales | 4 |
| 2.2 Bases, operadores lineales y matrices | 6 |
| 2.2.1 Operadores adjuntos y hermíticos | 9 |
| 2.2.2 Operadores de Pauli | 10 |
| 2.3 Espacio de Hilbert | 11 |
| 2.3.1 Producto tensorial entre espacios de Hilbert | 13 |
| 2.4 Postulados de la Mecánica Cúantica | 14 |
| 2.5 Estados cuánticos | 18 |
| 2.5.1 Operador densidad | 19 |
| 2.5.2 Estados Puros | 21 |
| 2.5.3 Estados Mixtos | 21 |
| 3 Teoría de la información cuántica | 23 |
| 3.1 Bits cuánticos | 23 |
| 3.2 Clasificación de estados cuánticos | 25 |
| 3.2.1 Estados producto | 25 |
| 3.2.2 Estado separable | 26 |
| 3.2.3 Estado entrelazado | 26 |
| 3.3 Operaciones cuánticas | 28 |
| 3.3.1 Compuertas Cuánticas | 28 |
| 3.3.2 Operaciones locales | 29 |
| 3.3.3 Mediciones tipo von Neumann | 30 |
| 3.4 Entrelazamiento | 31 |
| 3.4.1 Separabilidad | 31 |
| 3.4.2 Entropía de von Neumann | 32 |
| 3.4.3 Entrelazamiento de formación | 33 |
| 3.4.4 Concurrencia | 33 |
| 3.5 Teleportación cuántica | 34 |

| | | |
|----------|------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.5.1 | Teleportación cuántica determinista | 35 |
| 3.5.2 | Teleportación cuántica probabilista | 38 |
| 3.6 | Fidelidad | 44 |
| 4 | Teleportación cuántica probabilista con canal puro | 47 |
| 4.1 | Aspectos generales | 47 |
| 4.2 | Probabilidad promedio | 52 |
| 4.3 | Relación entre fidelidad promedio y probabilidad | 55 |
| 5 | Teleportación cuántica probabilista con canal mixto | 57 |
| 5.1 | Estado de Werner | 59 |
| 5.2 | Estado α | 65 |
| 5.3 | Estado β | 72 |
| 5.4 | Fidelidad promedio, puridad y concurrencia | 78 |
| 6 | Conclusión | 84 |
| | Referencias | 87 |



Índice de tablas

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.5.1 Resumen protocolo de teleportación cuántica determinista. | 37 |
| 3.5.2 Resumen protocolo de teleportación cuántica probabilista con medición en la base de Bell. | 42 |
| 4.1.1 Fidelidades y probabilidades asociadas a cada conjunto de condiciones impuestas sobre $ m\rangle$ en el esquema de teleportación propuesto. | 50 |



Índice de figuras

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.3.1 Representación gráfica del producto interno en un espacio de Hilbert con $ \psi\rangle$ y $ \phi\rangle$ vectores miembros del espacio. | 11 |
| 3.1.1 Representación geométrica de un qubit con la esfera de Bloch. . . | 24 |
| 3.3.1 Compuertas cuánticas comunes. | 29 |
| 3.5.1 Representación del esquema de teleportación determinista. | 38 |
| 3.5.2 Representación del esquema de teleportación probabilista con medición en la base de Bell. | 40 |
| 3.5.3 Comparación entre la concurrencia de un canal cuántico parcialmente entrelazado y la probabilidad de extracción en un esquema de teleportación probabilista. | 43 |
| 4.1.1 Fidelidades para cada caso en en análisis, la figura (a) muestra el resultado para el Caso 1, la figura (b) el Caso 2 y (c) el Caso 3. La expresión para estos tres resultados se ve en la tabla 4.1.1 . . . | 51 |
| 4.1.2 Comparación entre las fidelidades promedio de cada caso de estudio. | 52 |
| 4.2.1 Dos distribuciones de probabilidad características en el protocolo probabilista propuesto cuando el canal es un estado puro. | 53 |
| 4.2.2 (a) Probabilidad promedio cuando la condición sobre $ m\rangle$ es $ a = b $ y $ c = - d $ es constante e igual a 0,25, se compara con la fidelidad promedio del Caso 1 siendo f^1 y la del Caso 2 es f^2 . (b) La probabilidad promedio para el Caso 3 con condiciones $ a = d $ y $ b = c $ tiene un valor máximo de 0,89 cuando $ a = 0,5$. En línea punteada se muestra el valor del límite clásico de fidelidad y el límite auto impuesto de probabilidad 1/4. | 54 |
| 4.3.1 Variación e la probabilidad promedio $\langle P \rangle$ con respecto a la fidelidad promedio f cuando $ a = d $ and $ b = c $ | 55 |
| 4.3.2 Probabilidad mayor a 1/4 en el rango donde la fidelidad promedio supera el límite clásico para el Caso 1. | 56 |
| 5.0.1 Comparación entre las concurrencias de tres tipos de estado X . . . | 59 |
| 5.1.1 Diferentes valores de fidelidad F para un estado de Werner como canal en función del color para diferentes valores fijos de decoherencia p con las condiciones dadas por el caso 1. | 61 |
| 5.1.2 Diferentes valores de fidelidad F para un estado de Werner como canal en función del color para diferentes valores fijos de decoherencia p con las condiciones dadas por el caso 2. | 62 |

| | | |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5.1.3 | Diferentes valores de fidelidad F para un estado de Werner como canal son representados en función del color para diferentes valores fijos de decoherencia p con las condiciones dadas por el caso 3. | 63 |
| 5.1.4 | Fidelidades promedio para cada caso en en análisis, la figura (a) muestra el resultado para el Caso 1, la figura (b) el Caso 2 y (c) el Caso 3. | 64 |
| 5.1.5 | Valores para los cuales la fidelidad promedio supera los $2/3$ usando un estado de Werner como canal cuántico. | 65 |
| 5.2.1 | Diferentes valores de fidelidad F son representados en función del color para diferentes valores fijos de decoherencia p con las condiciones dadas por el Caso 1 y canal cuántico estado α | 67 |
| 5.2.2 | Diferentes valores de fidelidad F son representados en función del color para diferentes valores fijos de decoherencia p con las condiciones dadas por el Caso 2 y canal cuántico estado α | 69 |
| 5.2.3 | Diferentes valores de fidelidad F son representados en función del color para diferentes valores fijos de decoherencia p con las condiciones dadas por el Caso 3 y canal cuántico estado α | 70 |
| 5.2.4 | Fidelidades promedio cuando el canal cuántico es un estado α para los tres casos de estudio | 71 |
| 5.2.5 | Valores para los cuales la fidelidad promedio supera $2/3$ usando un estado α como canal cuántico. | 71 |
| 5.3.1 | Diferentes valores de fidelidad F en función del color para diferentes valores de β con las condiciones dadas por el Caso 1 y canal cuántico estado β | 74 |
| 5.3.2 | Fidelidad para diferentes valores de β cuando el canal cuántico es un estado β y se aplica el Caso 2. | 75 |
| 5.3.3 | Diferentes valores de fidelidad F son representados en función del color para diferentes valores de β para el Caso 3 y canal cuántico estado β | 76 |
| 5.3.4 | Fidelidades promedio cuando el canal cuántico es un estado β | 77 |
| 5.3.5 | Valores para los cuales la fidelidad promedio supera los $2/3$ usando un estado β como canal cuántico. | 77 |
| 5.4.1 | Variación de fidelidad con puridad y concurrencia para un estado de Werner. | 79 |
| 5.4.2 | Variación de fidelidad con puridad y concurrencia para un estado α | 80 |
| 5.4.3 | Variación de fidelidad con puridad y concurrencia para un estado β | 81 |

Capítulo 1

Introducción

Una de las metas de la computación cuántica e información cuántica es desarrollar herramientas que agudizan nuestra intuición sobre la mecánica cuántica y hacer mejores predicciones. En los años 80 hubo gran interés por saber si era posible usar propiedades cuánticas para enviar información a velocidades superiores a la velocidad de la luz, algo que en principio está prohibido de acuerdo a la teoría de la relatividad general de Einstein.

En esta exploración de lo posible e imposible para la mecánica cuántica, se descubre del Teorema de No-Cloning en 1982 [1]; más tarde, en 1994 el famoso algoritmo de Shor propuesto por Peter Shor [2], y Lov Grover en 1996 propone un algoritmo de búsqueda [3], con un desempeño impresionante. Algoritmos que funcionaban en una computadora cuántica, una idea tremendamente revolucionaria para aquella época en la cual aún no se conocían si quiera supercomputadores clásicos como las que conocemos hoy. En 1982 Richard Feynman señaló que parecían haber dificultades inevitables cuando se simulan sistemas cuánticos en computadoras clásicas y una posibilidad para solucionar este problema era construir computadoras basadas en los principios de la mecánica cuántica [4]; esto generaría un foco de atención importante en el área de la información y computación cuántica donde el desarrollo de nuevos y mejores algoritmos iría en auge en los años siguientes. Este aumento en el interés una vez acabados los años 90, no ha decaído principalmente por la posibilidad de implementar la teoría cuántica de la información en sistemas y dispositivos de comunicación modernos [5, 6, 7].

En la actualidad pequeñas computadoras cuánticas son capaces de realizar

operaciones en pocos qubits, aunque empresas como Google o IBM, los líderes de grandes proyectos en el área, prometen llegar a 1000 qubits en los próximos años. Dentro de las operaciones que nos permite realizar la tecnología cuántica actual, esta la teleportación cuántica, un protocolo que transmite información encapsulada en estados cuánticos de un lugar a otro; este es un protocolo que teóricamente fue propuesto en el año 1993 por Charles Bennet [8], verificado por primera vez experimentalmente en 1997 [9]. A pesar de su origen antes de los años 2000, la teleportación cuántica ha sido posteriormente realizada experimentalmente en años recientes utilizando diferentes sistemas cuánticos como fotones, campos de luz coherente, el spin de partículas y trampas de iones; y la razón por la que debemos seguir estudiándola es porque promete ser un bloque fundamental en el área de procesamiento con aplicaciones en comunicaciones, como por ejemplo en el desarrollo de un internet cuántico [10].

En general cualquier protocolo de teleportación se vale de un canal cuántico de comunicación, canal clásico de comunicación, una base de medición y un estado cuántico que almacena la información que se quiere transportar [11]. Cuando un proceso de transferencia de información unidireccional se logra puramente empleando procesos y propiedades clásicas, se puede garantizar una fidelidad promedio igual a $2/3$ [12, 13]. Así un proceso de transferencia de información que presente propiedades cuánticas exhibe una fidelidad promedio superior a $2/3$ [14]. En cuanto a la probabilidad de transmisión en un esquema probabilista, nos encontramos con un límite de probabilidad igual a $1/4$ cuando el canal cuántico es parcialmente entrelazado y la medida aplicada es maximalmente entrelazada. Dejando a un lado estados puros, existen muchos beneficios al usar un estado mixto como canal cuántico de comunicación [15, 16, 17, 18], en protocolos de teleportación, en esta tesis el interés cae en particular sobre los estados X , ya que presentan una medida de entrelazamiento bien definida [19, 20, 21], y son una generalización de estados maximalmente entrelazados.

A continuación se estudia una variación del protocolo de teleportación probabilista y sus posibles beneficios, se propone explorar los efectos que tiene el uso de un canal cuántico puro maximalmente entrelazado y tres canales cuántico mixtos tipo X diferentes cuando empleamos una base de medición general para realizar la teleportación. El objetivo principal es optimizar la fidelidad promedio de la comunicación y la probabilidad de transmisión exitosa. Esto se logrará en primera

instancia a través de diferentes conjuntos de condiciones sobre la base de medición propuesta, para luego determinar fidelidad y probabilidad en cada caso. Se espera que exigir fidelidades diferentes a la unidad pero mayores al límite clásico, tenga efectos positivos o alguna relación con la probabilidad; una vez reunidos todos los resultados se analizarán los comportamientos para cada conjunto de condiciones y se compararán entre ellos, este análisis se extenderá tanto al caso donde la teleportación se logra con un canal puro como con uno mixto.

El contenido se distribuirá de la siguiente manera: En el capítulo 2 se presentan los fundamentos de la mecánica abordando conceptos básicos de álgebra lineal fundamentales para el desarrollo del trabajo presentado, luego se detalla el significado físico de los objetos matemáticos a usar y se enmarcan en el contexto específico de la mecánica cuántica gracias a los Postulados de la Mecánica Cuántica . Después en el capítulo 3 se presenta una revisión de las ideas y características principales de la información y computación cuántica, como los bits cuánticos, operaciones cuánticas, entrelazamiento y como estas conforman el protocolo de teleportación en sus dos implementaciones, una determinista y otra probabilista. Finalmente en los capítulos 4 y 5 se encuentran los resultados obtenidos en esta investigación y respectivos análisis para la teleportación con canal cuántico puro y mixto respectivamente. En el capítulo 4 se presentan los aspectos generales del protocolo con la variación propuesta y se introduce una probabilidad promedio tal que haya una cantidad comparable con la fidelidad promedio. En el capítulo 5 se muestran los resultados principales para el protocolo cuando se emplea un estado α , β y Werner como canal cuántico, y en la sección final del capítulo se profundiza en la posible relación que tiene la fidelidad promedio con el entrelazamiento y puridad de los estados en cada caso.

Capítulo 2

Fundamentos de mecánica cuántica

2.1. Espacios vectoriales

El bloque básico en álgebra lineal son los espacios vectoriales, que son simplemente colecciones de objetos. En la mecánica cuántica el espacio vectorial de mayor interés es el espacio conformado por la *n-tupla* de números complejos,

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n.$$

Los elementos que conforman un espacio vectorial son los vectores, usualmente son representados como una matriz columna,

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Dentro de un espacio vectorial están bien definidas las operaciones de adición entre dos vectores que pertenezcan al espacio, donde la adición no es más que la suma ordinaria entre elementos complejos,

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} z_1 + z'_1 \\ \vdots \\ z_n + z'_n \end{bmatrix}.$$

Otra operación definida dentro del espacio vectorial, es la multiplicación por un escalar, donde la multiplicación entre elementos corresponde a la multiplicación ordinaria.

$$z \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} zz_1 \\ \vdots \\ zz_n \end{bmatrix}.$$

Sean \mathbf{v} , \mathbf{u} , \mathbf{w} vectores que pertenecen a un espacio vectorial cualquiera V dotado de la suma y multiplicación, se tiene que este espacio satisface los siguiente axiomas:

1. Conmutatividad $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.
2. Asociatividad $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
3. Existe un vector especial, llamado vector cero o *vector nulo* tal que $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in V$.
4. Para todo vector que pertenezca al espacio vectorial, existe otro vector diferente tal que $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$.
5. Existe una identidad multiplicativa $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.
6. Asociatividad multiplicativa

$$(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

donde α, β son escalares cualquiera.

7. Propiedad distributiva

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

y para α un escalar cualquiera.

8. Propiedad distributiva

$$(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

y para α, β escalares cualesquiera.

Notamos que los axiomas 7 y 8 son los únicos que conectan ambas operaciones de las cuales el espacio vectorial está dotado.

En el caso de que los escalares en los axiomas anteriores sean números reales, el espacio vectorial V del ejemplo es un espacio vectorial real. Por el contrario en el caso de que aquellos escalares sean números complejos, el espacio vectorial V es un espacio vectorial complejo.

En mecánica cuántica la notación para un vector en un espacio vectorial es $|\psi\rangle$, donde ψ es una etiqueta que puede ser cambiada sin alterar el objeto en sí, genéricamente $|\cdot\rangle$ representa que el objeto es un vector. Este elemento algebraico representado de esa manera recibe el nombre de *ket* y el vector dual de $|\psi\rangle$ recibe el nombre de *bra*, cuya notación es $\langle\psi|$.¹ Cabe notar que la representación de vectores en notación *bracket* no es usada para el vector cero o *vector nulo*.

2.2. Bases, operadores lineales y matrices

Un conjunto generador para un espacio vectorial es un conjunto de vectores

$$|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_n\rangle. \quad (2.2.1)$$

tales que cualquier vector $|v\rangle$ que pertenezca al espacio vectorial pueda ser escrito como una combinación lineal de los vectores en el anterior conjunto,

$$|v\rangle = \sum_i a_i |v_i\rangle.$$

Un conjunto como el de la ecuación 2.2.1 se dice *linealmente dependiente* si existe un conjunto de números complejos a_1, \dots, a_n con $a_i \neq 0$ para al menos un valor de i , tal que se cumple que

$$a_1 |v_1\rangle + a_2 |v_2\rangle + \dots + a_n |v_n\rangle = 0. \quad (2.2.2)$$

Por el contrario, un set de vectores como el de 2.2.1 puede ser *linealmente independiente* si es que no satisface la condición 2.2.2. En este caso si dos conjuntos de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial contienen la misma cantidad de elementos, se dice que dicho conjunto forma una base de

¹Este estilo de notación se conoce como notación de Dirac.

dicho espacio vectorial.

Otra manera de entender las bases es analizar un conjunto de vectores dado que cualquier vector $|v\rangle \in V$ admite una representación única en la siguiente combinación lineal

$$a_1 |v_1\rangle + a_2 |v_2\rangle + \cdots + a_n |v_n\rangle = \sum_{k=1}^n a_k |v_k\rangle, \quad (2.2.3)$$

Si el set de vectores satisface dicha condición, entonces este corresponde a una base. El número de elementos en la base define la dimensión del espacio vectorial, al menos cuando tratamos con espacios vectoriales finito dimensionales.

Una función cualquiera $A : V \rightarrow W$ define un *operador lineal* entre los espacios vectoriales V y W ,

$$A \left(\sum_i a_i |v_i\rangle \right) = \sum_i a_i A(|v_i\rangle). \quad (2.2.4)$$

Cuando un operador lineal está definido sobre un espacio vectorial, lo que esto quiere decir es que dicho operador lineal actúa sobre el espacio vectorial y llega a elementos dentro del mismo espacio. En todo espacio vectorial existe un operador identidad I ,

$$I |v\rangle = |v\rangle \quad \forall |v\rangle;$$

y un operador cero o nulo,

$$0 |v\rangle = 0 \quad \forall |v\rangle,$$

Ambos operadores son los más básicos que poseen los espacios vectoriales. Estas estructuras en general pueden ser representadas convenientemente a través de matrices, esto se vuelve claro si en 2.2.4 interpretamos la operación como una multiplicación entre A y vectores columna. En general si A es una matriz compleja de $m \times n$ dimensiones con elementos A_{ij} , esta lleva vectores desde un espacio vectorial complejo \mathbf{C}^n a otro \mathbf{C}^m , simplemente al multiplicando la matriz A con un elemento en el espacio \mathbf{C}^n .

Como ya habíamos propuesto, supongamos el operador lineal $A : V \rightarrow W$ donde $|v_1\rangle, \dots, |v_m\rangle$ es una base del espacio vectorial V y $|\omega_1\rangle, \dots, |\omega_n\rangle$ es una base del espacio vectorial W . Luego para un $j = 1, \dots, m$, existirán números complejos

que van desde a_{1j} hasta el A_{nj} de la siguiente manera,

$$A|v_j\rangle = \sum_i A_{ij}|w_i\rangle. \quad (2.2.5)$$

Así la matriz cuyos elementos son los valores A_{ij} es la representación matricial del operador A y es equivalente al operador A . Para poder hacer la relación entre un operador lineal y su forma matricial, se debe especificar un conjunto de estados bases de entrada y de salida para el vector de entrada y salida del espacio vectorial del operador lineal en cuestión.

En el contexto de operadores comunes en mecánica cuántica que poseen una forma matricial encontramos por ejemplo, las matrices de Pauli, cuya dimensión es de 2×2 como se ve a continuación,

$$\begin{aligned} \sigma_0 \equiv I &\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \sigma_1 \equiv \sigma_x \equiv X &\equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma_2 \equiv \sigma_y \equiv Y &\equiv \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} & \sigma_3 \equiv \sigma_z \equiv Z &\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Estos operadores y otros más, serán claves en el formalismo de la teoría de información cuántica y sus aplicaciones, esto y más sobre sus propiedades es contenido de futuras secciones.

Entre cualquier par de vectores $|\cdot\rangle$ dentro de un espacio vectorial, se define el producto interno, del cual resulta un número complejo. Esta operación se puede denotar como (\cdot, \cdot) pero al usar la notación de Dirac como es usual en mecánica cuántica, se denotará como $\langle \cdot | \cdot \rangle$ donde $\langle \cdot |$ es un vector dual. Esta operación debe satisfacer las siguientes tres condiciones:

- (\cdot, \cdot) es lineal

$$\left(|v\rangle, \sum_i \lambda_i |w_i\rangle \right) = \sum_i \lambda_i (|v\rangle, |w_i\rangle). \quad (2.2.7)$$

- $(|v\rangle, |w\rangle) = (|w\rangle, |v\rangle)^*$.
- $(|v\rangle, |v\rangle) \geq 0$, donde la igualdad se cumple solamente cuando $|v\rangle = 0$.

Luego un espacio vectorial dotado de producto interno que cumpla las tres condiciones, es un espacio producto interno.

2.2.1. Operadores adjuntos y hermíticos

Para un operador lineal A en un espacio de Hilbert V existe un operador A^\dagger en el mismo espacio vectorial de modo tal que

$$(|v\rangle, A|w\rangle) = (A^\dagger|v\rangle, |w\rangle).$$

donde $|v\rangle$ y $|w\rangle \in V$. En este caso se dice que el operador A^\dagger es el operador adjunto o hermítico conjugado de A . Análogamente podemos definir operadores adjuntos como $|v\rangle^\dagger = \langle v|$. En el caso de que el operador A este siendo representando de forma matricial, su operador adjunto o hermitico conjugado será la matriz traspuesta conjugada $A^\dagger \equiv (A^*)^T$.

En el caso de que el operador A y su adjunto A^\dagger sean iguales, se dice que el operador A es hermítico. Dentro de esta clase de operadores se encuentran los proyectores

$$P_n \equiv \sum_{i=1}^n |i\rangle \langle i|,$$

este elemento es un proyector en un subespacio del espacio de Hilbert, donde sus elementos son construidos con una base ortonormal del subespacio. En particular, tiene la propiedad $P^2 = P$, que se verifica cuando consideramos $P = |a\rangle \langle a|$, donde debido a la normalización se cumple $\langle a|a\rangle = 1$ y luego

$$P^2 = |a\rangle \langle a|a\rangle \langle a| = |a\rangle \langle a| = P.$$

Esta es una propiedad intuitiva, y nos ayuda a entender el proyector como un objeto cuyo rol es filtrar un componente de un estado total. A continuación se enumeran cuatro propiedades claves de los proyectores:

1. Son operadores hermíticos, $P_n^\dagger = P_n$.
2. Son operadores positivos $P_n \geq 0$.
3. Son completos $\sum_n P_n = I$.
4. Son ortonormales $P_i P_j = P_i \delta_{ij}$.

Un operador se dice normal en el caso de que se satisfaga la condición $AA^\dagger = A^\dagger A$, es claro entonces que un operador que sea hermítico también será normal. Operadores de estas características pueden ser representados utilizando

descomposición espectral.

En el caso de la representación matricial, una matriz B puede ser unitaria cuando satisface $BB^\dagger = I$, dada la equivalencia entre representaciones, un operador B satisface la misma condición, lo que indica que sería normal y que presenta descomposición espectral. La relevancia de los operadores con estas características es que preservan la unitariedad de las operaciones. En el caso de vectores unitarios en un espacio vectorial con producto interno, el producto interno es preservado,

$$(B|v\rangle, B|w\rangle) = \langle v | B^\dagger B | w \rangle = \langle v | I | w \rangle = \langle v | w \rangle.$$

2.2.2. Operadores de Pauli

Los operadores de Pauli ya habían sido introducidos brevemente en su representación matricial. Ahora ahondaré en representaciones de estos y cómo son aplicados a sistemas cuánticos. Es común tratar un qubit como si fuese una partícula de spin $1/2$, es en este contexto donde los operadores de Pauli corresponden a la componente x-, y- y z- del momento angular en unidades de $\hbar/2$,

$$\begin{aligned}\hat{I} &= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|, \\ \hat{\sigma}_x &= |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|, \\ \hat{\sigma}_y &= i(|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|), \\ \hat{\sigma}_z &= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|.\end{aligned}\tag{2.2.8}$$

Estos operadores asociados a las tres componentes del spin no conmutan, pero el conmutador de dos de ellos es proporcional a un tercero,

$$\begin{aligned}[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] &= 2i\hat{\sigma}_z, \\ [\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z] &= 2i\hat{\sigma}_x, \\ [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x] &= 2i\hat{\sigma}_y.\end{aligned}\tag{2.2.9}$$

El hecho de que los operadores de Pauli no conmuten es un indicador de que poseen diferentes autovectores. Los operadores $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ y $\hat{\sigma}_z$ tienen como autovalores ± 1 pero los autovectores son $(|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$ para $\hat{\sigma}_x$, $(|0\rangle \pm i|1\rangle)/\sqrt{2}$ para $\hat{\sigma}_y$ y $|0\rangle$ y $|1\rangle$ para $\hat{\sigma}_z$.

Cualquier operador unitario de un solo qubit, puede ser escrito como

$$\hat{U} = \exp\left(i\alpha\hat{I} + i\beta\vec{a} \cdot \vec{\sigma}\right), \quad (2.2.10)$$

donde α y β son números reales, \vec{a} es un vector unitario y $\vec{\sigma}$ es el vector operador $(\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$.

2.3. Espacio de Hilbert

El espacio de Hilbert es un espacio vectorial dotado de producto interno o espacio producto interno. En este espacio vectorial, si los vectores $|w\rangle$ y $|v\rangle$ son ortogonales, su producto interno $\langle w|v\rangle$ es igual a cero.

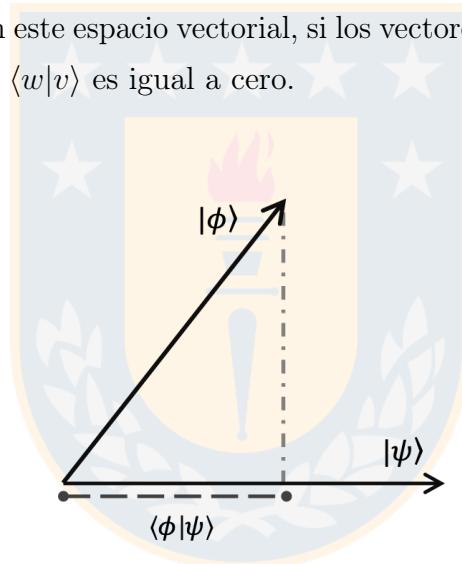


Figura 2.3.1: Representación gráfica del producto interno en un espacio de Hilbert con $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ vectores miembros del espacio.

Podemos definir la norma de un vector $|v\rangle$ como

$$\| |v\rangle \| \equiv \sqrt{\langle v|v\rangle},$$

si la norma es igual a 1, es decir $\| |v\rangle \| = 1$, se dice que el vector $|v\rangle$ es un vector unitario, también podemos decir que este vector está normalizado. En caso de que se tenga un vector no nulo que no es unitario o que no está normalizado, se puede aplicar la normalización simplemente dividiéndolo por su norma

$$|v_{unitario}\rangle = \frac{|v\rangle}{\| |v\rangle \|}.$$

En general dado que el espacio de Hilbert es un espacio producto interno, un conjunto de vectores $|i\rangle$ se dice ortonormal si cada vector del conjunto es unitario, y entre algunos vectores de este conjunto se puede dar que sean ortogonales entre cuando se satisface,

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}.$$

Dado todo lo anterior, en un espacio de Hilbert la representación matricial de un operador lineal corresponde a una representación con respecto a una base ortonormal. En estas convención, el producto interior también tiene su representación matricial. Sean dos vectores en el espacio de Hilbert $|w\rangle$ y $|v\rangle$ con representaciones

$$\begin{aligned} |w\rangle &= \sum_i w_i |i\rangle, \\ |v\rangle &= \sum_j v_j |j\rangle \end{aligned}$$

respectivamente, donde $|i\rangle$ es una base ortogonal. Se puede ver una equivalencia entre la representación de producto interno para dos vectores $\langle v|w\rangle$ y la representación matricial, donde cada vector representa una matriz,

$$\begin{aligned} \langle v | w \rangle &= \left(\sum_i v_i |i\rangle, \sum_j w_j |j\rangle \right) = \sum_{ij} v_i^* w_j \delta_{ij} = \sum_i v_i^* w_i, \\ &= [v_1^* \dots v_n^*] \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Cabe notar que en esta operación se esta empleando el vector dual de $|v\rangle$ que a diferencia de $|v\rangle$, es una matriz fila y no una matriz columna, donde los elementos son los complejos conjugados.

Así como se puede definir en un espacio vectorial un producto interno, se tiene el producto externo. Su utilidad radica en la representación de operadores lineares. Si se tiene un vector $|v\rangle$ en un espacio vectorial con producto interno V y otro vector $|w\rangle$ en un espacio vectorial de las mismas características W , se puede definir un operador lineal puede tener la forma $|w\rangle \langle v|$ que actúa sobre otro vector $|v'\rangle$

del espacio V de la siguiente forma

$$(|w\rangle\langle v|)(|v'\rangle) \equiv |w\rangle\langle v|v'\rangle = \langle v|v'\rangle|w\rangle,$$

así lo que se realiza es una operación que lleva un elemento del espacio vectorial V a un elemento del espacio W . Como ya se discutió el producto interno genera un número complejo, y en esta operación el resultado es la multiplicación de una matriz por un número complejo. Para representar operadores lineales, se pueden tener casos en los que un operador este representado por una superposición de operadores de producto interno.

2.3.1. Producto tensorial entre espacios de Hilbert

El producto tensorial es una manera de formar espacios vectoriales de dimensiones superiores al colocar dos espacios vectoriales juntos, esto cobra importancia cuando queremos tratar un problema con dos o más sistemas físicos.

Supongamos entonces dos espacios de Hilbert, el primero \mathcal{H}_1 con dimension m y el otro \mathcal{H}_2 con dimensión n . Luego $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ es el producto tensorial entre ambos espacios vectoriales que resulta en un espacio de Hilbert de dimensión mn .

Los elementos en el espacio $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ son combinaciones lineales de productos tensoriales, por ejemplo si $|a\rangle \in \mathcal{H}_1$ y $|b\rangle \in \mathcal{H}_2$ un elemento del espacio producto sería $|a\rangle \otimes |b\rangle$. Si $|a\rangle \in \mathcal{H}_1$ y $|b\rangle \in \mathcal{H}_2$ son bases en los respectivos espacios vectoriales, luego $|a\rangle \otimes |b\rangle$ es una base en el espacio producto $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.² Algunas propiedades que satisface el producto tensorial son:

1. Sea z un escalar y los elementos $|a\rangle \in \mathcal{H}_1$ y $|b\rangle \in \mathcal{H}_2$, se cumple que

$$z(|a\rangle \otimes |b\rangle) = (z|a\rangle) \otimes |b\rangle = |a\rangle \otimes (z|b\rangle).$$

2. Para elementos $|a_1\rangle, |a_2\rangle \in \mathcal{H}_1$ y $|b\rangle \in \mathcal{H}_2$, se cumple que

$$(|a_1\rangle + |a_2\rangle) \otimes |b\rangle = |a_1\rangle \otimes |b\rangle + |a_2\rangle \otimes |b\rangle.$$

²Es común omitir el símbolo \otimes , de modo que el producto tensorial se puede escribir $|a\rangle|b\rangle$ o incluso como $|ab\rangle$.

3. Para elementos $|b_1\rangle, |b_2\rangle \in \mathcal{H}_2$ y $|a\rangle \in \mathcal{H}_1$, se cumple que

$$|a\rangle \otimes (|b_1\rangle + |b_2\rangle) = |a\rangle \otimes |b_1\rangle + |a\rangle \otimes |b_2\rangle. \quad (2.3.1)$$

En un espacio compuesto de esta manera, se puede definir un operador lineal $A \otimes B$ que actúa sobre $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ de la siguiente manera

$$(A \otimes B)(|a\rangle \otimes |b\rangle) \equiv A|a\rangle \otimes B|b\rangle,$$

o de manera análoga sobre cualquier elemento que pertenezca al espacio producto tensorial $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$,

$$(A \otimes B) \left(\sum_i a_i |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle \right) \equiv \sum_i a_i A|\alpha_i\rangle \otimes B|\beta_i\rangle.$$

El espacio producto tensorial o compuesto al ser una composición de espacios vectoriales con propiedades bien definidas, como la equivalencia entre representación vectorial y matricial de operadores, un operador $A \otimes B$ tiene una representación matricial llamada producto Kronocker,

$$A \otimes B \equiv \overbrace{\left[\begin{array}{cccc} A_{11}B & A_{12}B & \dots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \dots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \dots & A_{mn}B \end{array} \right]}^{nq}.$$

2.4. Postulados de la Mecánica Cúantica

Los postulados de la mecánica cuántica entregan una relación directa entre la física y el formalismo matemático anterior donde se encuadra la mecánica cuántica. Este conjunto de reglas ayudan a mapear el comportamiento de dichos sistemas físicos o más certeramente, nuestros métodos para describir aquel comportamiento.

Los aspectos principales que son de interés al describir un sistema físico son: cómo es el estado en un tiempo t , cuales son las variables medibles y cómo anticipamos el resultado de aquellas mediciones, cómo evoluciona un sistema dado un estado inicial conocido de este en un tiempo arbitrario. Motivando respuestas para estas

preguntas fue que surgieron los siguientes postulados.

Postulado 1. *El estado de un sistema físico puede ser representado por un vector normalizado $|\psi\rangle$ en un espacio de Hilbert, este estado provee toda la información del sistema físico, desde una perspectiva geométrica $|\psi\rangle$ es dirección bien determinada en el espacio.*

Dado que el espacio de Hilbert donde se encuentra el estado $|\psi\rangle$ es un espacio vectorial se mantiene vigente el principio de superposición, es decir que una combinación lineal de vectores o estados resulta en otro vector o estado; esto genera una variedad fenómenos cuánticos que han sido observados experimentalmente como el entrelazamiento [22, 23, 9], no-localidad [24, 25, 26], interferencia [27, 28], y correlaciones cuánticas en general [29].

Postulado 2. *Si el sistema es descrito por un vector $|\phi\rangle$ y se tiene otro estado $|\psi\rangle$, existe una probabilidad de hallar al sistema en el estado $|\psi\rangle$. Esta amplitud de probabilidad está dada por el producto interior entre $\langle\psi|\phi\rangle$, definido en el espacio de Hilbert. Más precisamente la probabilidad corresponde al valor absoluto al cuadrado de la amplitud de probabilidad $|\langle\psi|\phi\rangle|^2$.*

Este postulado es conocido como la regla de Born. Una manera de asegurar consistencia, es imponer que los vectores sean normalizados, de esta manera la probabilidad también estará normalizada siempre teniendo un rango de $[0, 1]$.

Cabe notar que la noción de amplitud de probabilidad y probabilidad asociada a los estados de un sistema introduce una idea fundamental, no toda la información de un sistema físico estará completamente disponible. Esto ha dado espacio a extensas discusiones sobre la completitud de la teoría cuántica [30, 31, 32], y al surgimiento de diferentes corrientes como la teoría de las variables ocultas [33, 34].

Postulado 3. *Cada cantidad física que puede ser medida, es descrita por un operador Hermítico A en un espacio de Hilbert, así el operador es un observable. Al medir una cantidad física el resultado será un autovalor del observable correspondiente.*

El resultado de la medición de una cantidad física siempre serán valores reales. También es relevante saber que no todas las cantidades físicas que puedan ser medidas están asociadas necesariamente a un operador no trivial como ocurre con la masa o carga eléctrica.

Ahora supongamos que se aplica una medida A a un sistema físico cuyo estado inicial era $|\phi\rangle$ y esta medición arroja el valor a_n .

Postulado 4. *Luego de la medición, el estado del sistema será la proyección normalizada de $|\phi\rangle$ en el autoespacio de a_n . En general para una medida proyectiva P_n esto correspondería a*

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{P_n |\phi\rangle}{\sqrt{\langle\phi|P_n|\phi\rangle}}, \\ P_n |\phi\rangle^2 &= \langle\phi|P_n^\dagger P_n|\phi\rangle = \langle\phi|P_n|\phi\rangle. \end{aligned}$$

Este postulado trata de mediciones ideales, donde el único cambio que ocurre en el sistema luego de la medición, es el colapso de la ecuación de onda. Este tipo de transición desde un estado superposición a un estado singlete se denomina reducción de estado o colapso de la ecuación de onda y es un proceso irreversible. Luego de una medición sobre un estado, este queda irremediamente en un estado, que no podrá ser alterado por mediciones posteriores. Este comportamiento recibe el nombre de efecto cuántico Zeno.

La generalidad de este postulado indica que estamos lidiando con mediciones generales que pueden ser consideradas como una caja negra, ya que no se conoce en detalle el proceso de medición.

Esta descripción permite establecer una comparación con la mecánica clásica para entender el proceso de medición en más profundidad. De manera clásica, una cantidad física está descrita por una cantidad única de modo que al medir se obtiene como resultado un valor ya existente y disponible, por el contrario, cuánticamente no tenemos acceso a los valores de posibles resultados antes de medir y estos tampoco pueden ser perturbados, el único caso donde se podría saber esta información es cuando el sistema tiene un estado inicial que coincida con un autoestado del observable que se quiere medir.

El efecto Zeno ya permitía, gracias a las mediciones, establecer un orden temporal para sucesos o aplicaciones diferentes sobre un estado inicial de un sistema. El sistema entonces si se ve, naturalmente, sujeto al paso del tiempo y el quinto postulado de la mecánica cuántica detalla esta evolución temporal cuando el vector de estado describe un sistema cuántico aislado.

Postulado 5. *La evolución temporal se encuentra descrita por la ecuación de Schrödinger,*

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad (2.4.1)$$

donde H es un operador hermítico Hamiltoniano asociado a la energía total del sistema.

Como este es un operador Hermitico, la evolución temporal es unitaria, reversible y preserva la norma; al contrario del proceso de medición descrito por el postulado anterior donde era necesario normalizar el estado luego de medir. Otra diferencia que tiene este procedimiento con la medición, es que en este caso el sistema es asilado y no presenta acoplamiento.

Postulado 6. *El vector de estado inicial $|\phi(t_0)\rangle$ es transferido al estado $|\phi(t)\rangle$ en un tiempo t gracias a un operador unitario $U(t, t_0)$ que recibe el nombre de operador de evolucion temporal o propagador,*

$$|\phi(t)\rangle = U(t, t_0) |\phi(t_0)\rangle. \quad (2.4.2)$$

Para un propagador unitario, la norma es conservada. Para un hamiltoniano independiente del tiempo el propagador puede ser representado como,

$$U = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}.$$

Así como en la ecuación 2.4.2 se define la evolución temporal en un sentido, se puede escribir el proceso inverso ya que la evolución temporal es reversible,

$$|\phi(t_0)\rangle = U^{-1}(t, t_0) |\phi(t)\rangle.$$

Ante una primera inspección es correcto decir que ambos postulados 5 y 6 son equivalentes. Pero hay una diferencia sutil, esta diferencia reside en el hecho de que el propagador U está acotado para cualquier tipo de Hamiltoniano, lo que le brinda un carácter fundamental.

Postulado 7. *El espacio del estado de un sistema físico compuesto corresponde al producto tensorial de los estados de los espacios que lo componen. Por ejemplo, si se tiene un estado $|\psi_i\rangle$ compuesto por subsistemas enumerados de 1 hasta n , el estado conjunto del sistema será $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle$.*

Todos los postulados anteriores son pilares claves dentro de la teoría cuántica pero no proveen una descripción completa de todos los componentes de esta. Es fácil notar que las descripciones anteriores están adaptadas para ajustarse a aquellos estados que pueden ser representados como un vector y sistemas físicos aislados. Pero existen estados mixtos que podemos manipular a través de operadores densidad y sistemas físicos acoplados o que interactúan con otros sistemas o subsistemas.

De todos modos, aún si se trata con sistemas simples, los postulados no corresponden a instrucciones para una realización práctica de un problema físico, ya que para esto antes se necesitaría determinar el espacio donde está el vector de estado y el Hamiltoniano del sistema.

2.5. Estados cuánticos

Como ya había sido señalado, el estado de un sistema físico en la teoría cuántica está completamente determinado por su vector de estado, el ket $|\psi\rangle$ que en ocasiones es referido como el estado del sistema. Si tenemos dos estados posibles $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ de un sistema la superposición también será un estado del sistema,

$$|\psi\rangle = a_1 |\psi_1\rangle + a_2 |\psi_2\rangle, \quad (2.5.1)$$

y a_1, a_2 son números complejos que corresponden a amplitudes de probabilidad. La ecuación 2.5.1 ejemplifica el principio de superposición, fundamental en la teoría cuántica. De manera análoga se tiene el bra equivalente al estado superposición $\langle\psi|$,

$$\langle\psi| = a_1^* \langle\psi_1| + a_2^* \langle\psi_2|,$$

donde ahora a_1^* y a_2^* son el complejo conjugado de a_1, a_2 respectivamente. Al generar una intersección entre estados a través del producto interior obtenemos números que representan amplitudes de probabilidad. Por ejemplo si se tiene el par de estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$, la coincidencia entre ambos estará determinada por $\langle\psi|\phi\rangle$ que dará como resultado un número complejo o de manera inversa, $\langle\phi|\psi\rangle$ dará su complejo conjugado. En el caso de que $\langle\psi|\phi\rangle$ sea igual a cero, es decir, que no haya coincidencia entre ambos estados, se puede concluir que son ortogonales.

El producto interno de un estado $|\psi\rangle$ consigo mismo siempre es positivo $\langle\psi|\psi\rangle > 0$.

Y si se cumple que es igual a la unidad $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, entonces se dice que el estado está normalizado, de esta condición se desprende que ante un estado $|\psi\rangle$ que no esté normalizado, este se torna normalizado al multiplicar por $\langle\psi|\psi\rangle^{-1/2}$

Si $|\psi\rangle$, como se definió en la ecuación 2.5.1, corresponde a un estado normalizado, se tiene que

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1,$$

donde $|a_1|^2$ y $|a_2|^2$ son las probabilidades de que al medir sobre el estado $|\psi\rangle$, encontremos al sistema en el estado $|\psi_1\rangle$ o $|\psi_2\rangle$ respectivamente. Esto ya que

$$\begin{aligned}\langle\psi_1|\psi\rangle &= a_1 = \langle\psi|\psi_1\rangle^*, \\ \langle\psi_2|\psi\rangle &= a_2 = \langle\psi|\psi_2\rangle^*.\end{aligned}$$

Esto es válido en el caso de tener una superposición entre solo dos estados posibles del sistema, pero en el caso de una n superposición

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n |\psi_n\rangle,$$

donde los estados $|\psi_n\rangle$ son ortogonales y el estado completo $|\psi\rangle$ es un estado normalizado. En dicho caso la condición que satisfacen las amplitudes de probabilidad a_n es la siguiente,

$$\sum_n |a_n|^2 = 1.$$

2.5.1. Operador densidad

El operador densidad o matriz densidad ρ es un operador hermítico que representa una alternativa a la formulación de vectores de estado que se ha presentado hasta ahora. Ambas formulaciones son equivalentes.

A través de un operador densidad se puede describir un sistema cuántico cuyo estado no es completamente conocido. Supongamos que un sistema cuántico está en una cantidad de estados $|\psi_i\rangle$, cada uno con probabilidad p_i . Luego el sistema se puede describir a través de un ensamble de estados puros $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ a través del

operador densidad,

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.5.2)$$

Empleando esta definición para el estado de un sistema cuántico se pueden reformular los postulados de la mecánica cuántica de manera adecuada. Algunas propiedades que satisface el operador densidad son,

- La traza de ρ debe ser igual a 1, esta condición se corresponde con la condición de normalización en la formulación de vectores de estado,

$$\text{Tr}(\rho) = 1.$$

- El operador ρ es un operador positivo,

$$\langle \varphi | \rho | \varphi \rangle \geq 0,$$

donde $|\varphi\rangle$ es cualquier vector en el espacio de Hilbert.

Dado que se cumplan ambas condiciones, el operador ρ tiene la siguiente descomposición espectral,

$$\rho = \sum_j \lambda_j |j\rangle \langle j|,$$

donde los vectores $|j\rangle$ son ortogonales y los elementos λ_j son autovalores reales no negativos de ρ .

El operador densidad entonces es una herramienta para describir ensambles de estados, donde cada estado miembro del ensamble $|\psi_i\rangle$ ha sido preparado con una probabilidad asociada p_i . De todos modos, esta interpretación no es única ya que un único operador densidad puede representar diferentes ensambles de estados y probabilidades.

Una aplicación del operador densidad es el operador densidad reducido, que cumple su función en subsistemas de un sistema cuántico compuesto. Supongamos un sistema A y B descrito por el operador densidad ρ^{AB} , luego el operador densidad reducido se define como

$$\rho^A \equiv \text{Tr}_B(\rho^{AB}),$$

donde Tr_B es la traza parcial sobre el sistema B, que esta definida como

$$\text{tr}_B (|a_1\rangle \langle a_2| \otimes |b_1\rangle \langle b_2|) \equiv |a_1\rangle \langle a_2| \text{tr} (|b_1\rangle \langle b_2|),$$

donde $|a_1\rangle$ y $|a_2\rangle$ son dos vectores cualquiera en el espacio vectorial de A, y $|b_1\rangle$ y $|b_2\rangle$ son otros dos vectores cualquiera en el espacio B. La traza parcial es la operación traza usual pero aplicada sobre solo uno de los sistemas que compone el sistema compuesto y debe ser lineal.

La traza parcial es útil en la descripción de sistemas cuánticos compuesto ya que es la única operación que da como resultado una descripción correcta de las cantidades observables de un subsistema que pertenecen a un sistema compuesto.

2.5.2. Estados Puros

A partir de la definición de operador densidad dada en la ecuación 2.5.2, si ocurre que una de las probabilidades p_i es igual a la unidad, entonces el operador densidad se reduce a,

$$\rho = |\psi_i\rangle \langle \psi_i|.$$

Un operador densidad que posee esta forma se denomina operador densidad puro o estado puro.³

2.5.3. Estados Mixtos

Estados de la forma dada por la ecuación 2.5.2 representan una mixtura de estados, por lo que reciben el nombre de estado mixto. Dada la condición de normalización para los operadores densidad y la descomposición espectral de estos se puede establecer que

$$\text{Tr}(\rho^2) = \sum_j \lambda_j \langle j| \left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| \right) |j\rangle = \sum_j \lambda_j^2.$$

Los autovalores de ρ pueden ser interpretados como probabilidades, lo que significa que son positivos, luego

$$\text{Tr}(\rho^2) = \sum_j \lambda_j^2 \leq \sum_j \sum_i \lambda_j \lambda_i = 1.$$

³Un estado puro satisface $\text{Tr}(\rho^2) = 1$.

La igualdad solo se cumple cuando un λ_j es igual a 1 y el resto es igual a cero. De esto surge la puridad, que es un indicador de la pureza de un estado. Para los estados mezcla se cumple que $Tr(\rho^2) < 1$.



Capítulo 3

Teoría de la información cuántica

3.1. Bits cuánticos

El bit en la teoría de información clásica, es la unidad de información asociada con el uso de logaritmos de base 2. Extendiendo esta idea a sistemas físicos es útil en la descripción de dos estados físicos distintos donde la cantidad máxima que puede almacenar un bit físico es un bit de información.

Así como usualmente la mecánica clásica y la mecánica cuántica tienen constantes paralelas entre ellas, el concepto de información no es una excepción a esto. De esta manera surge el concepto de qubit, abreviación para *quantum bit*, que corresponde a un sistema cuántico que posee dos estados distintos ortogonales entre ellos. Estos serán los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$.

A priori, un qubit puede contener solo un bit de información, que estará determinado al momento de preparar el estado en cuestión. La particularidad surge al momento de emplear el principio de superposición que nos permite no solo tener los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ de manera independiente, pero también es un posible estado del sistema $a_1 |0\rangle + a_2 |1\rangle$.

La dualidad que tiene un qubit permite que sea empleado para representar sistemas de dos niveles como estados de polarización, la orientación de partículas con spin $-1/2$, niveles atómicos, o trayectorias de la luz. Una formalización geométrica de un qubit se logra a través de la esfera de Bloch.

La condición de normalización $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$, es posible escribir el estado

$|\psi\rangle = a_1 |0\rangle + a_2 |1\rangle$ como

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right), \quad (3.1.1)$$

donde θ , φ y γ son números reales. El factor $e^{i\gamma}$ no tiene efectos que sean observables, luego el estado se ve reducido a

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (3.1.2)$$

Las cantidades θ y φ definen un punto sobre una esfera tridimensional llamada esfera de Bloch. Esta es una herramienta geométrica que brinda una forma de visualizar el estado de un qubit y poder probar diferentes operaciones de manera intuitiva. Esta representación geométrica está limitada a la representación de sistemas de un sólo qubit, no hay extensión de la esfera de Bloch para sistemas multipartitos.

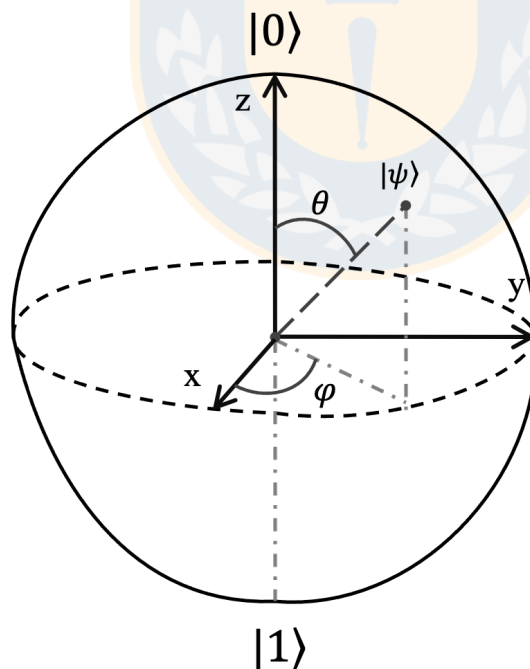


Figura 3.1.1: Representación geométrica de un qubit con la esfera de Bloch.

Desde la representación en la esfera de Bloch, podemos interpretar que es posible almacenar infinita información ya que hay infinitos puntos en la esfera unitaria, esta afirmación no es falsa pero sí engañosa, ya que si bien la capacidad de

almacenamiento de información es potencialmente infinita eso no quiere decir que sea accesible. Basta recordar el postulado sobre las mediciones para entender que solo extraemos información luego de aplicar una medida, cuyo carácter al ser proyectivo destruye el estado e irremediabilmente lo hace colapsar al estado $|0\rangle$ o $|1\rangle$.

Así como existen sistemas descritos por un solo qubit, también se puede tener un sistema multipartito. Supongamos que en vez de un solo qubit, tenemos dos qubits. En el caso de 2 bits clásicos se generan cuatro estados posibles diferentes: 00, 01, 10 y 11; estos estados reciben el nombre de base computacional que en el caso de los dos qubits son escritos como $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$ y el estado bipartito existe en cualquier superposición de esos estados de la siguiente manera,

$$|\psi\rangle = a_{00} |00\rangle + a_{01} |01\rangle + a_{10} |10\rangle + a_{11} |11\rangle.$$

Sobre un estado de esta forma se puede aplicar una medición sobre un subconjunto de qubits, donde las probabilidades de los resultados estarán determinadas por los coeficientes $|a_x|$ donde $x = (00, 01, 10, 11)$; un ejemplo de estados en sistemas multipartitos son los estados de Bell.

3.2. Clasificación de estados cuánticos

Para entender las diferentes maneras en las que se pueden clasificar los estados cuánticos, supongamos un sistema cuántico compuesto por N subsistemas $1, 2, 3 \dots N$ con operador densidad $\rho_{1,2,3\dots N}$.

3.2.1. Estados producto

Si el estado $\rho_{1,2,3\dots N}$ del sistema compuesto se puede escribir como el producto tensorial de los operadores densidad reducidos de sus subsistemas, se dice que $\rho_{1,2,3\dots N}$ es un estado producto,

$$\rho_{1,2,3\dots N} = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \rho_3 \otimes \dots \rho_N.$$

Cabe notar que estados de este tipo no presentan correlación alguna y que la mezcla de estados productos corresponde a un estado separable. No ser un estado producto podría indicar la presencia de entrelazamiento, como en el ejemplo a

continuación

Veamos el siguiente estado de dos qubits,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_1\rangle |0_2\rangle + |1_1\rangle |1_2\rangle).$$

Este estado no puede ser descompuesto como el producto del estado del sistema 1 y el sistema 2, como $|\psi\rangle = |\varphi_1\rangle |\phi_2\rangle$, donde $|\varphi_1\rangle$ representaría el estado del sistema 1 y $|\phi_2\rangle$ representaría el estado del sistema 2. De esta manera el estado no es un estado producto.

3.2.2. Estado separable

Un estado se denomina como estado separable cuando el operador densidad del sistema compuesto puede ser escrito como una mezcla de estados productos,

$$\rho_{1,2,3\dots N} = \sum_i p_i \rho_1^i \otimes \rho_2^i \otimes \rho_3^i \dots \otimes \rho_N^i, \quad (3.2.1)$$

donde $\rho_1^i, \rho_2^i, \rho_3^i \dots \rho_N^i$ son los operadores densidad de los subsistemas 1, 2, 3, \dots , N . La preparación de estos estados es realizada utilizando operaciones locales y comunicación clásica. Este tipo de descomposición es no trivial y no existe aún una generalización ampliamente aceptada para esto.

3.2.3. Estado entrelazado

En este punto se puede entender entrelazamiento simplemente como una correlación entre los estados de subsistemas que componen un sistema compuesto mayor. Dada la definición de estado producto, es claro que un operador densidad

$$\rho_{12} = |\lambda\rangle \langle \lambda| \otimes |\phi\rangle \langle \phi|$$

no presenta correlación entre los estados del subsistema A y B , por lo que es no entrelazado. Para un sistema compuesto $N = 2$, siempre es posible escribir un estado entrelazado de la forma,

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n |\lambda_n\rangle_A |\phi_n\rangle_B, \quad (3.2.2)$$

donde el conjunto de estados $\{|\lambda_n\rangle\}$ y $\{|\phi_n\rangle\}$ son conjuntos ortogonales de los sistemas A y B respectivamente. La descomposición 3.2.2 muestra que cada estado $|\lambda_n\rangle \in A$ está asociado con un único estado $|\phi_n\rangle \in B$.¹ El interés en el caso de un sistema compuesto tal que $N = 2$, es principalmente para ilustrar el comportamiento que causa el entrelazamiento y por su relación con los estados de Bell.

En el caso de un estado bipartito en un espacio de Hilbert de dimensión N , un estado entrelazado es definido como,

$$|\psi_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} |i, i\rangle.$$

Dentro de la categoría de estados entrelazados, para el caso de dos qubits, destacan los estados de Bell o en ocasiones llamados por Einstein-Podolsky-Rosen (EPR)

$$\begin{aligned} |\psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \\ |\psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \\ |\phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), \\ |\phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Estos estados son extremadamente importantes para la teleportación cuántica, tienen la propiedad de que al medir el primer qubit se tiene dos casos. El primer caso es que se obtenga 0 como resultado de la medición con probabilidad $1/2$ y estado post medición

$$|\phi^*\rangle = |00\rangle,$$

y el segundo caso es obtener 1 tras la medición con probabilidad $1/2$ dejando al sistema en un estado

$$|\phi^*\rangle = |11\rangle.$$

De lo anterior notamos que el segundo qubit siempre queda en el mismo estado que el primer qubit sobre el cual se ha aplicado la medición. Esto significa que las salidas de la medición aplicada se encuentran correlacionadas. No solo esto, pero

¹Esta descomposición es conocida como descomposición de Schmidt.

independiente del tipo de medición que se aplique sobre el par EPR, la correlación entre sus qubits no se pierde.

El aparente cambio instantáneo en un qubit que una medición en otro qubit lejano genera, causó que Einstein, Podolsky y Rosen cuestionaran la validez de la mecánica cuántica como teoría fundamental. El comportamiento no local ha sido desde entonces un foco activo de discusión [35, 36, 37, 30].

3.3. Operaciones cuánticas

Como se ha establecido en secciones anteriores, los estados de un sistema en mecánica cuántica se definen sobre un espacio de Hilbert y cambios sobre estos estados son causados por operadores, cambios como evoluciones temporales, o la selección de ciertos estados sobre uno más general. Los operadores y las operaciones que estos efectúan sobre un estado son un pilar central de la mecánica cuántica, a continuación se muestran algunas operaciones que serán de gran relevancia para entender los problemas desarrollados en esta tesis.

3.3.1. Compuertas Cuánticas

Una manera práctica de entender los cambios que sufre un sistema físico descrito por un estado cuántico es a través del lenguaje computacional. La manera en que se puede entender esta relación es haciendo un paralelo directo entre los circuitos de computación clásica que se valen de compuertas lógicas y cables, mientras que en un circuito cuántico se emplean compuertas lógicas con características cuánticas para manipular la información que es almacenada en qubits.

La mecánica cuántica permite que se actúe con cualquier transformación unitaria sobre un qubit. Desde la analogía con el computador clásico, una transformación unitaria cuántica puede ser imaginada como un dispositivo diseñado para actuar de manera unitaria sobre un qubit.

Algunas de las compuertas de un qubit más utilizadas son la compuerta de Hadamard, las compuertas de Pauli, la compuerta fase y $\pi/8$. Cada una de estas compuertas se corresponde a un operador unitario que a su vez presenta una representación matricial.

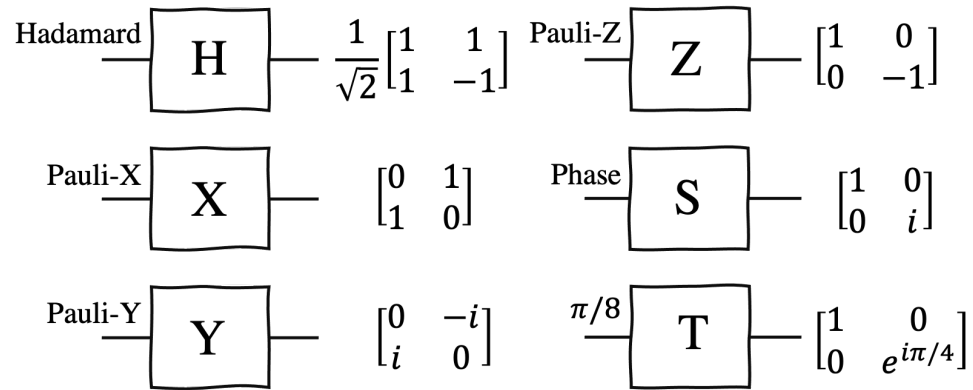


Figura 3.3.1: Compuertas cuánticas de uso frecuente, se muestra el símbolo de cada transformación unitaria utilizado en el diseño de circuitos y la matriz asociada al operador.

Una propiedad importante de estas compuertas es que se pueden utilizar superposiciones de algunas para representar a otra, destacan dentro de esta categoría la compuerta Hadamard y $\pi/8$ que reciben la categoría de compuertas universales; esto quiere decir que con una secuencia de largo suficiente de alguna de ellas se puede aplicar cualquier transformación unitaria.

En particular y para fines de futuras secciones, es de interés ahondar en la acción de la compuerta Hadamard. La acción de esta operación de manera explícita es,

$$H |0\rangle \longrightarrow \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$H |1\rangle \longrightarrow \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Su acción en la representación geométrica de la esfera de Bloch, es una rotación en torno al eje y en 90° seguida de una rotación en torno al eje x en 180° . Cabe destacar la propiedad $H^2 = I$.

3.3.2. Operaciones locales

Cuando el estado de un sistema cuántico está compuesto de dos subsistemas ρ_{AB} . Los observadores Alice y Bob podrán aplicar transformaciones sobre el subsistema al que tienen acceso, es decir que Alice puede realizar operaciones de manera local en su qubit que lucirán como $A \otimes I$, y por otro lado Bob realizará operaciones

locales $I \otimes B$,

$$\rho_{AB} \rightarrow (A \otimes I)\rho_{AB}(I \otimes B).$$

3.3.3. Mediciones tipo von Neumann

Un caso especial del postulado de medición son las mediciones proyectivas, en realidad son equivalentes al postulado pero se les dota además de la capacidad de aplicar transformaciones unitarias. Este tipo de mediciones son utilizadas ampliamente en computación cuántica e información cuántica, comunmente llamadas medidas de von Neumann.

Una medida proyectiva esta descrita por un observable A , un operador unitario que pertenece al espacio vectorial donde se encuentra determinado el vector de estado del sistema cuántico en cuestión. El observable esta representado por un operador hermítico cuyos autovalores son los posibles resultados de la medición, como indica la ecuación

$$A|\lambda_n\rangle = \lambda_n|\lambda_n\rangle.$$

Los autoestados forman un conjunto ortonormal, de modo que el observable A tiene descomposición espectral,

$$A = \sum_n \lambda_n |\lambda_n\rangle \langle \lambda_n|.$$

donde $|\lambda_n\rangle \langle \lambda_n|$ es el proyector en el auto espacio de A con autovalor λ_n . Los posibles resultados de la medición de A son sus autovalores con probabilidad

$$p(\lambda_n) = \langle \lambda_n | \rho | \lambda_n \rangle = \text{Tr}(\rho |\lambda_n\rangle \langle \lambda_n|),$$

donde ρ es el operador densidad que representa el estado del sistema que se esta observando inmediatamente justo antes de la medición. Inevitablemente, el estado cambia luego de la medición y renombrando el proyector como $P_n = |\lambda_n\rangle \langle \lambda_n|$, el estado post medida es

$$\rho' = \frac{P_n \rho P_n}{\text{Tr}(\rho |\lambda_n\rangle \langle \lambda_n|)},$$

en el denominador el término $\text{Tr}(\rho |\lambda_n\rangle \langle \lambda_n|)$ asegura la normalización de la nueva matriz densidad post medición.

En el caso de aplicar una medición proyectiva sobre uno de los subsistemas en un

sistema compuesto $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ cuyo estado es ρ_{AB} , esta se puede simular a través de un proyector $P_a = P_{AB}^a \otimes I_B$ aplicado sobre ρ_{AB} , donde P_{AB}^a es un proyector como P_n . Esto corresponde a una operación local.

3.4. Entrelazamiento

El entrelazamiento es una propiedad de las correlaciones entre dos o más sistemas cuánticos. Estas correlaciones desafían la descripción clásica de sistemas físicos y se asocian a fenómenos intrínsecamente cuánticos [38], razón por la cual el entrelazamiento ha sido una propiedad de gran interés para explorar en profundidad la teoría cuántica además de cumplir un rol fundamental en protocolos de comunicación [39].

En general el entrelazamiento es un recurso que si bien no lleva información por si solo, es una herramienta en tareas de comunicación. Pero tiene una estructura frágil ante interacciones con su entorno y no es posible aumentar las cantidades de entrelazamiento cuando los sistemas involucrados no están en contacto directo.

Una definición explícita sobre qué tipo de correlación cae en la categoría de entrelazamiento, es explicada y ejemplificada en la sección 3.2.3. A continuación se explican algunos criterios y medidas de entrelazamiento que serán relevantes en futuras secciones.

3.4.1. Separabilidad

El entrelazamiento para estados mixtos multipartitos no es equivalente simplemente a no ser estados productos. En cambio, se denomina un estado mixto de n sistemas como entrelazado, si no es posible escribirlo como una combinación convexa de estados productos.

En la sección 3.2.2 se definió un estado separable. En si la definición dada por la ecuación 3.2.1 en su negación conforma un criterio de entrelazamiento,

$$\rho_{1,2,3\dots N} \neq \sum_i p_i \rho_1^i \otimes \rho_2^i \otimes \rho_3^i \dots \otimes \rho_N^i. \quad (3.4.1)$$

Este es el criterio de separabilidad donde estados entrelazados serán aquellos que satisfacen el criterio dado por la ecuación anterior.

3.4.2. Entropía de von Neumann

La entropía de von Neumann es una medida de entrelazamiento adecuada para estados puros $|\phi_{AB}\rangle$, y no solo eso, entropías en mecánica cuántica primero son una medida de incertidumbre o falta de conocimiento de un vector de estado.

Para un estado puro la incertidumbre o entropía debería ser cero y para estados mixtos distinta de cero. Una entropía que describe este comportamiento es la entropía de von Neumann,

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho).$$

Se puede escribir también en función de los autovalores λ_i de una matriz como ρ ,

$$S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i.$$

Un operador densidad mixto en un espacio d dimensional, tiene entropía $\log d$. Y esta a su vez se reduce a la entropía de Shannon cuando el estado mixto esta compuesto de estados cuánticos ortogonales.

Para un sistema compuesto ρ_{AB} , la entropía del sistema conjunto es [40],

$$S(A|B) = -\text{Tr}(\rho_{AB} \log_2 \rho_{A|B}),$$

donde $\rho_{A|B}$ es un operador Hermítico definido positivamente sobre ρ_{AB} . Esta entropía condicional mide la cantidad de comunicación cuántica necesaria para transferir el estado completo a uno de los subsistemas. En el caso de que la entropía condicional sea positiva, esa será la cantidad de qubits que un remitente necesitará comunicar a su receptor. Si la entropía es negativa, el remitente y receptor ganan ese potencial para emplear comunicación cuántica en el futuro [41].

La condición de negatividad $S(A|B) < 0$ implica que $\rho_{A|B}$ es un estado entrelazado. Esto ya que los autovalores de $\rho_{A|B}$ pueden ser mayores a 1 [42].

3.4.3. Entrelazamiento de formación

Sea una matriz densidad ρ de los sistemas cuánticos A y B , consideramos todas las descomposiciones posibles de ρ en estados puros,

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (3.4.2)$$

donde cada estado $|\psi_i\rangle$ del ensamble tiene una probabilidad asociada p_i . Para cada estado puro el entrelazamiento E será definido como la entropía de cualquiera de los dos subsistemas, A o B ,

$$E(\psi) = -\text{Tr}(\rho_A \log_2 \rho_A) = -\text{Tr}(\rho_B \log_2 \rho_B),$$

donde ρ_A y ρ_B es la traza parcial de $|\psi\rangle \langle \psi|$ sobre los subsistemas A y B respectivamente. Luego el entrelazamiento de formación de un estado mixto como ρ , es el entrelazamiento promedio de los estados puros en la descomposición 3.4.2 minimizado sobre todas las descomposiciones,

$$E(\rho) = \min \sum_i p_i E(\psi_i).$$

Esta cantidad fue en un comienzo una de las medidas más básicas de entrelazamiento, que cuantifica la cantidad de recursos necesarios para crear un estado entrelazado. En general, medidas de entrelazamiento son necesarias en áreas como el estudio de decoherencia en computadoras cuánticas o protocolos criptográficos. Un problema con las medidas de entrelazamiento es que usualmente son el resultado de extremar una cantidad, esto difícilmente es manejado de manera analítica [43].

3.4.4. Concurrencia

Así para encontrar una formula explicita para en entrelazamiento, se propuso una medida de entrelazamiento para sistemas bipartitos llamada concurrencia [44]. Partiendo por el entrelazamiento de formación,

$$E(\psi) = \mathcal{E}(C(\rho)),$$

donde $C(\rho)$ es la concurrencia del sistema bipartito de dos qubits. La función \mathcal{E} está dada por

$$\mathcal{E}(C) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C(\rho)^2}}{2}\right),$$

$$h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2(1 - x),$$

que corresponde a una función monótonamente creciente que se encuentra definida entre 0 y 1, al igual que la concurrencia. La concurrencia por otro lado, se define como

$$C(\rho) = \text{máx}\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (3.4.3)$$

donde los elementos λ_i son los autovalores en orden decreciente de la matriz Hermítica

$$R = \sqrt{\sqrt{\rho} \tilde{\rho} \sqrt{\rho}},$$

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y),$$

ρ^* es el complejo conjugado de ρ y σ_y la matriz de Pauli en la componente señalada. Notar que cada autovalor λ_i es un número real no negativo. La expresión 3.4.3 es válida para cualquier matriz densidad de dos qubit que tenga no más de dos autovalores igual a cero.

3.5. Teleportación cuántica

Teleportación se entiende como un proceso por el cual materia es transportada desde un punto a otro sin necesidad de que la materia en cuestión tenga que desplazarse físicamente en el espacio. Muchas veces en la ciencia ficción se habla de teleportación y es un proceso que dista mucho de la teleportación cuántica, ya que en este último es la información contenida en un estado cuántico la que se transmite y no la materia. Para que este procedimiento se lleve a cabo se utilizan herramientas como estados entrelazados y canales clásicos de comunicación, y es de clave importancia recursos como el entrelazamiento. En las siguientes secciones se ahonda en detalle sobre dos maneras para realizar teleportación cuántica de información.

3.5.1. Teleportación cuántica determinista

Uno de los protocolos más relevantes en la comunicación cuántica sin ruido, es el protocolo de teleportación cuántica. Este fue propuesto por primera vez en el año 1993, por un grupo de 6 investigadores incluyendo Charles H. Bennett, en esa época investigador de IBM. Bennett et al. [8], establecieron los pilares fundamentales de lo que sería la teleportación, un protocolo inverso al *super-dense coding*.

La teleportación cuántica nos dice que un estado desconocido $|\psi\rangle$ puede ser descompuesto y luego reconstruido desde información puramente clásica y correlaciones Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) que son puramente no clásicas. Para lograr esto, primero que todo se necesita un estado que contenga la información que deseamos enviar, esta información estará contenida en un estado desconocido $|\psi\rangle$,

$$|\psi\rangle = \alpha |0_a\rangle + \beta |1_a\rangle, \quad (3.5.1)$$

este es un estado normalizado, tal que se satisface la condición de normalización

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (3.5.2)$$

Luego es necesario establecer las correlaciones no clásicas, para esto el remitente Alice y el receptor Bob deben preparar un par de partículas entrelazadas con anterioridad. Este par entrelazado corresponde a un estado de Bell en el que se encuentra el sistema A y B².

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A\rangle \otimes |0_B\rangle + |1_A\rangle \otimes |1_B\rangle). \quad (3.5.3)$$

Esto genera un espacio de Hilbert compuesto $\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_{AB}$, donde $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_a$ y el par EPR $|\phi^+\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$. Entonces el estado producto $|\psi\rangle |\phi^+\rangle$ que describe el sistema conjunto de Alice y Bob, pertenece a $\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_{AB}$.

El estado $|\psi\rangle |\phi^+\rangle$ puede ser representado en la base de Bell de los sistemas a y A,

²A es el sistema en manos de Alice y B es el sistema en manos de Bob.

ambos en posesión de Alice.

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle |\phi^+\rangle &= (\alpha |0_1\rangle + \beta |1_1\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A\rangle \otimes |0_B\rangle + |1_A\rangle \otimes |1_B\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha |0_a 0_A 0_B\rangle + \alpha |0_a 1_A 1_B\rangle + \beta |1_a 0_A 0_B\rangle + \beta |1_a 1_A 1_B\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha \frac{|\phi^+\rangle + |\phi^-\rangle}{\sqrt{2}} |0_B\rangle + \alpha \frac{|\psi^+\rangle + |\psi^-\rangle}{\sqrt{2}} |1_B\rangle + \beta \frac{|\psi^+\rangle - |\psi^-\rangle}{\sqrt{2}} |0_B\rangle + \beta \frac{|\phi^+\rangle - |\phi^-\rangle}{\sqrt{2}} |1_B\rangle \right) \\
&= \frac{1}{2} (|\phi^+\rangle (\alpha |0_B\rangle + \beta |1_B\rangle) + |\phi^-\rangle (\alpha |0_B\rangle - \beta |1_B\rangle) \\
&\quad + |\psi^+\rangle (\alpha |1_B\rangle + \beta |0_B\rangle) + |\psi^-\rangle (\alpha |1_B\rangle - \beta |0_B\rangle)
\end{aligned}$$

Podemos identificar una correlación entre los estados de Bell en \mathcal{H}_{aA} y los posibles estados del sistema de Bob en \mathcal{H}_B . Si en los sistemas aA se mide un observable que proyecte el estado a uno de los estados de Bell $|\phi_{aA}^\pm\rangle, |\psi_{aA}^\pm\rangle$, entonces la información α, β del sistema a es transferida al sistema B .

Posteriormente a la aplicación de la medida sobre aA , Alice enviará su resultado clásico de la medición a Bob vía 2 bits clásicos. Esta medición en los estados de Bell sobre el sistema a acopla miembros del sistema que no estaban entrelazados en un principio y permite traspasar la información del sistema a al sistema B .

Bob ahora puede convertir el estado de su partícula EPR en una réplica exacta del estado desconocido $|\psi\rangle$ aplicando uno de los operadores de Pauli, dependiendo del resultado de la medición de Alice,

$$|\psi_a\rangle |\phi_{AB}^+\rangle = \frac{1}{2} (|\phi_{aA}^+\rangle (|\psi_B\rangle) + |\phi_{aA}^-\rangle (\sigma_z^B |\psi_B\rangle) + |\psi_{aA}^+\rangle (\sigma_x^B |\psi_B\rangle) + |\psi_{aA}^-\rangle (\sigma_x^B \sigma_z^B |\psi_B\rangle)).$$

Así el traspaso de información desde el sistema de Alice al sistema de Bob ha sido completado. Algunos puntos importantes a destacar son:

- Una vez que Alice realiza una medición en el sistema que pertenece a \mathcal{H}_{aA} , sabe cual es el estado de Bob. En este punto no ocurre teleportación ya que el estado local de Bob es independiente del qubit en \mathcal{H}_a . Esto quiere decir que la teleportación no es instantánea, por ende no ocurre traspaso de información a velocidades superluminales en concordancia con lo que prescribe la teoría de la relatividad .
- La teleportación es un protocolo que se dice universal, ya que ambas partes del proceso, Alice y Bob, no poseen conocimiento alguno sobre el estado cuántico que se quiere teleportar y a pesar de esto la comunicación es posible.

- No hay violación del teorema de no clonación, ya que al aplicar una medición en la base de Bell, Alice destruye la información del estado original que tenía en su posesión. Lo que ocurre en el proceso no es una copia de un estado, por el contrario, el estado a teleportar es completamente destruido y reconstruido en una locación distante.

Los resultados del protocolo de teleportación cuántica según su prescripción original [8], se ven resumidos en la tabla 3.5.1.

| Resultado medición en aA | Probabilidad | Proyección en B | Comunicación Clásica |
|----------------------------|---------------|------------------------------------------|----------------------|
| $ \phi^+\rangle$ | $\frac{1}{4}$ | $\alpha 0_B\rangle + \beta 1_B\rangle$ | 00 |
| $ \phi^-\rangle$ | $\frac{1}{4}$ | $\alpha 0_B\rangle - \beta 1_B\rangle$ | 01 |
| $ \psi^+\rangle$ | $\frac{1}{4}$ | $\alpha 1_B\rangle + \beta 0_B\rangle$ | 10 |
| $ \psi^-\rangle$ | $\frac{1}{4}$ | $\alpha 1_B\rangle - \beta 0_B\rangle$ | 11 |

| Resultado medición en aA | Corrección | Salida |
|----------------------------|--------------------|----------------|
| $ \phi^+\rangle$ | \mathcal{I} | $ \psi\rangle$ |
| $ \phi^-\rangle$ | σ_z | $ \psi\rangle$ |
| $ \psi^+\rangle$ | σ_x | $ \psi\rangle$ |
| $ \psi^-\rangle$ | $\sigma_z\sigma_x$ | $ \psi\rangle$ |

Tabla 3.5.1: Resumen protocolo de teleportación cuántica determinista.

Este protocolo se dice determinista ya que a pesar de que cada resultado de la medición en la base de Bell es diferente con probabilidad $1/4$, bajo cierta operación unitaria siempre es posible recuperar el estado a teleportar en la locación de destino. Luego la probabilidad de teleportación es igual a la unidad.

Dentro de esta descripción identificamos los elementos claves que se repetirán en todas las posibles implementaciones de este protocolo. El principal es el canal

cúantico de comunicación que corresponde al par entrelazado o par EPR que comparten Alice y Bob, un canal clásico de comunicación y una base de medición preexistente de mutuo acuerdo entre las partes que quieren comunicarse (Ver figura 3.5.1).

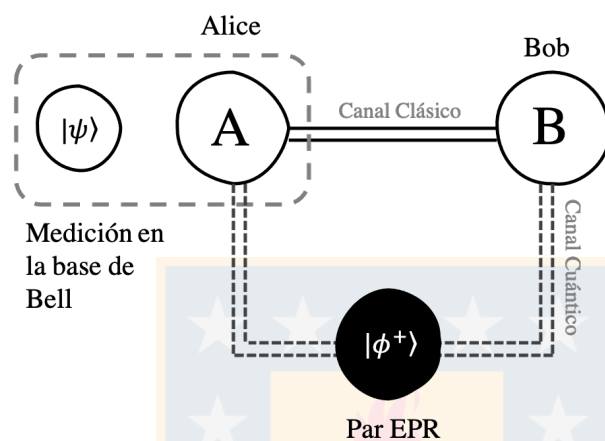


Figura 3.5.1: Representación del esquema de teleportación determinista.

3.5.2. Teleportación cuántica probabilista

En la descripción determinista anterior, nos valíamos de un recurso con correlaciones fuertes, el canal cuántico empleado era un estado maximalmente entrelazado del tipo Bell. Estos estados representan gran ventaja al ser empleados en protocolos de comunicación y transferencia de información pero representan una idealización importante sobre el nivel de correlación del estado que deben preparar emisor y receptor en conjunto [45]. Con aquello en mente, basta con un estado parcialmente entrelazado para realizar teleportación cuántica [46], pero será necesario complementar con un proceso de extracción para complementar la transferencia de información [47].

El paso a paso del protocolo probabilista se mantiene igual que en el caso de la teleportación cuántica determinista, pero ahora para teleportar el estado desconocido $|\psi\rangle$ en el sistema de Alice hasta el sistema de Bob, las mediciones

sobre el qubit que pertenece al espacio \mathcal{H}_{aA} serán las siguientes:

$$\begin{aligned} |\phi_+\rangle &= x|0\rangle|0\rangle + y|1\rangle|1\rangle, \\ |\phi_-\rangle &= y|0\rangle|0\rangle - x|1\rangle|1\rangle, \\ |\psi_+\rangle &= x|0\rangle|1\rangle + y|1\rangle|0\rangle, \\ |\psi_-\rangle &= y|0\rangle|1\rangle - x|1\rangle|0\rangle. \end{aligned}$$

Donde x e y son números reales no negativos y $x \leq y$. Ahora la base de medición tiene similitudes con la base de medición de Bell, pero su entrelazamiento es parcial

$$C_{aA} = 2|x||y|.$$

Luego el estado producto de los sistemas aA y B puede escribirse como sigue

$$\begin{aligned} |\psi\rangle |\phi_{AB}\rangle &= \sqrt{p_{\phi_+}} |\phi_+\rangle |p_{\phi_+}\rangle + \sqrt{p_{\phi_-}} |\phi_-\rangle \sigma_z |p_{\phi_-}\rangle + \sqrt{p_{\psi_+}} |\psi_+\rangle \sigma_x |p_{\psi_+}\rangle \\ &\quad + \sqrt{p_{\psi_-}} |\psi_-\rangle \sigma_z \sigma_x |p_{\psi_-}\rangle. \end{aligned}$$

Tal que el sistema de Bob puede encontrarse en uno de estos cuatro estados,

$$\begin{aligned} |p_{\phi_+}\rangle &= \frac{x\alpha\langle 0|\psi\rangle|0\rangle + y\beta\langle 1|\psi\rangle|1\rangle}{\sqrt{p_{\phi_+}}}, \\ |p_{\phi_-}\rangle &= \frac{y\alpha\langle 0|\psi\rangle|0\rangle + x\beta\langle 1|\psi\rangle|1\rangle}{\sqrt{p_{\phi_-}}}, \\ |p_{\psi_+}\rangle &= \frac{x\beta\langle 0|\psi\rangle|0\rangle + y\alpha\langle 1|\psi\rangle|1\rangle}{\sqrt{p_{\psi_+}}}, \\ |p_{\psi_-}\rangle &= \frac{y\beta\langle 0|\psi\rangle|0\rangle + x\alpha\langle 1|\psi\rangle|1\rangle}{\sqrt{p_{\psi_-}}}. \end{aligned}$$

Cada estado con una probabilidad

$$\begin{aligned} p_{\phi_+} &= x^2\alpha^2|\langle 0|\psi\rangle|^2 + y^2\beta^2|\langle 1|\psi\rangle|^2, \\ p_{\phi_-} &= y^2\alpha^2|\langle 0|\psi\rangle|^2 + x^2\beta^2|\langle 1|\psi\rangle|^2, \\ p_{\psi_+} &= x^2\beta^2|\langle 0|\psi\rangle|^2 + y^2\alpha^2|\langle 1|\psi\rangle|^2, \\ p_{\psi_-} &= y^2\beta^2|\langle 0|\psi\rangle|^2 + x^2\alpha^2|\langle 1|\psi\rangle|^2. \end{aligned}$$

Nuevamente, podemos notar que existe una correlación entre los estados ortonormales de los qubits aA $|\phi_+\rangle, |\phi_-\rangle, |\psi_+\rangle, |\psi_-\rangle$ y los estados del qubit B que tiene Bob $|p_{\phi_+}\rangle, \sigma_z |p_{\phi_-}\rangle, \sigma_x |p_{\psi_+}\rangle, \sigma_z \sigma_x |p_{\psi_-}\rangle$.

Donde se puede recuperar el estado a teleportar en una locación distante bajo

una corrección unitaria como lo es un operador de Pauli. Pero también en este esquema, que la teleportación se lleve a cabo de manera correcta o no, depende fuertemente de los coeficientes del canal y bases de medición.

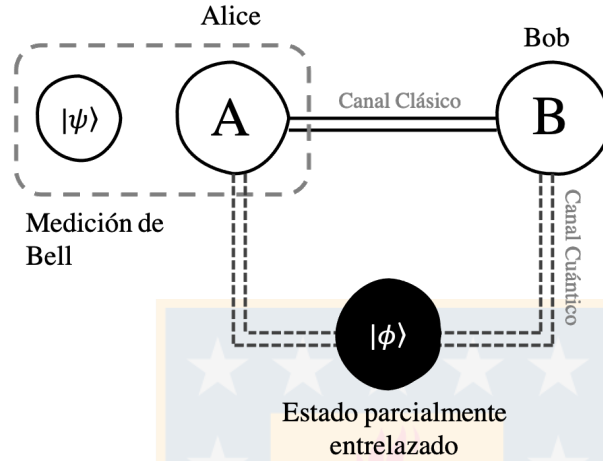


Figura 3.5.2: Representación del esquema de teleportación probabilista con medición en la base de Bell.

Con un grado menor de generalidad, analizamos el caso de teleportación probabilista pero empleando mediciones en la base de Bell [11], (Ver figura 3.5.2). Sea el estado conocido ϕ_{AB} parcialmente entrelazado nuestro canal cuántico,

$$|\phi_{AB}\rangle = u |0_A\rangle |0_B\rangle + v |1_A\rangle |1_B\rangle,$$

$$|u|^2 + |v|^2 = 1,$$

con concurrencia $C(|\phi_{AB}\rangle) = 2|u||v|$. Y el estado desconocido que se quiere teleportar

$$|\psi_a\rangle = \alpha |0_a\rangle + \beta |1_a\rangle,$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

El estado tripartito $|\psi_a\rangle |\phi_{AB}\rangle$ se proyecta en la base de Bell de los sistemas aA

con las siguientes componentes

$$\begin{aligned}
\langle \phi_{aA}^{\pm} | \psi_a \rangle | \phi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 0_a | \langle 0_A | \pm \langle 1_a | \langle 1_A | | \psi_a \rangle (u | 0_A \rangle | 0_B \rangle + v | 1_A \rangle | 1_B \rangle)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 0_a | \psi_a \rangle \langle 0_A | \pm \langle 1_a | \psi_a \rangle \langle 1_A | | (u | 0_A \rangle | 0_B \rangle + v | 1_A \rangle | 1_B \rangle)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha \langle 0_A | (u | 0_A \rangle | 0_B \rangle + v | 1_A \rangle | 1_B \rangle) \pm \beta \langle 1_A | (u | 0_A \rangle | 0_B \rangle + v | 1_A \rangle | 1_B \rangle)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (u\alpha | 0_B \rangle \pm v\beta | 1_B \rangle)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{aA}^{\pm} | \psi_a \rangle | \phi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 0_a | \langle 1_A | \pm \langle 1_a | \langle 0_A | | \psi_a \rangle (u | 0_A \rangle | 0_B \rangle + v | 1_A \rangle | 1_B \rangle)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 0_a | \psi_a \rangle \langle 1_A | \pm \langle 1_a | \psi_a \rangle \langle 0_A | | (u | 0_A \rangle | 0_B \rangle + v | 1_A \rangle | 1_B \rangle)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha \langle 1_A | (u | 0_A \rangle | 0_B \rangle + v | 1_A \rangle | 1_B \rangle) \pm \beta \langle 0_A | (u | 0_A \rangle | 0_B \rangle + v | 1_A \rangle | 1_B \rangle)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (v\alpha | 1_B \rangle \pm u\beta | 0_B \rangle)
\end{aligned}$$

Así el estado tripartito $|\psi_a\rangle |\phi_{AB}\rangle$ en la base de Bell de los sistemas aA , quedará descompuesto como

$$\begin{aligned}
|\psi_a\rangle |\phi_{AB}\rangle &= \sqrt{p_{\phi^+}} |\phi_{aA}^+\rangle \frac{u\alpha | 0_B \rangle + v\beta | 1_B \rangle}{N_{\phi^+}} + \sqrt{p_{\phi^-}} |\phi_{aA}^-\rangle \frac{u\alpha | 0_B \rangle - v\beta | 1_B \rangle}{N_{\phi^-}} \\
&\quad + \sqrt{p_{\psi^+}} |\psi_{aA}^+\rangle \frac{v\alpha | 1_B \rangle + u\beta | 0_B \rangle}{N_{\psi^+}} + \sqrt{p_{\psi^-}} |\psi_{aA}^-\rangle \frac{v\alpha | 1_B \rangle - u\beta | 0_B \rangle}{N_{\psi^-}},
\end{aligned}$$

donde las probabilidades de cada salida corresponden a

$$\begin{aligned}
p_{\phi^+} &= \frac{|u|^2 |\alpha|^2 + |v|^2 |\beta|^2}{2}, \\
p_{\phi^-} &= \frac{|u|^2 |\alpha|^2 + |v|^2 |\beta|^2}{2}, \\
p_{\psi^+} &= \frac{|v|^2 |\alpha|^2 + |u|^2 |\beta|^2}{2}, \\
p_{\psi^-} &= \frac{|u|^2 |\alpha|^2 + |v|^2 |\beta|^2}{2}.
\end{aligned}$$

Y $N_{\phi^+}, N_{\phi^-}, N_{\psi^+}, N_{\psi^-}$ corresponden a la normalización del estado que se proyecta en el qubit B en cada caso. Cabe notar que el estado que se proyecta en el qubit B no en todos los casos corresponde al estado a teleportar, no solo por su dependencia en los coeficientes u y v , si no también por que hay que aplicar una transformación unitaria para corregir la salida.

Los resultados del protocolo hasta este punto se ven resumidos en la siguiente

tabla.

| Estados sistema aA | Probabilidad | Estado sistema B | Corrección |
|----------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| $ \phi^+\rangle$ | $\frac{ u ^2 \alpha ^2+ v ^2 \beta ^2}{2}$ | $\frac{u\alpha 0_B\rangle+v\beta 1_B\rangle}{\sqrt{ u ^2 \alpha ^2+ v ^2 \beta ^2}}$ | I |
| $ \phi^-\rangle$ | $\frac{ u ^2 \alpha ^2+ v ^2 \beta ^2}{2}$ | $\frac{u\alpha 0_B\rangle-v\beta 1_B\rangle}{\sqrt{ u ^2 \alpha ^2+ v ^2 \beta ^2}}$ | σ_z |
| $ \psi^+\rangle$ | $\frac{ v ^2 \alpha ^2+ u ^2 \beta ^2}{2}$ | $\frac{v\alpha 1_B\rangle+u\beta 0_B\rangle}{\sqrt{ v ^2 \alpha ^2+ u ^2 \beta ^2}}$ | σ_x |
| $ \psi^-\rangle$ | $\frac{ v ^2 \alpha ^2+ u ^2 \beta ^2}{2}$ | $\frac{v\alpha 1_B\rangle-u\beta 0_B\rangle}{\sqrt{ v ^2 \alpha ^2+ u ^2 \beta ^2}}$ | $\sigma_z\sigma_x$ |

| Estados sistema aA | Corrección | Estado sistema B final |
|----------------------|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $ \phi^+\rangle$ | I | $\frac{u\alpha 0_B\rangle+v\beta 1_B\rangle}{\sqrt{ u ^2 \alpha ^2+ v ^2 \beta ^2}}$ |
| $ \phi^-\rangle$ | σ_z | $\frac{u\alpha 0_B\rangle+v\beta 1_B\rangle}{\sqrt{ u ^2 \alpha ^2+ v ^2 \beta ^2}}$ |
| $ \psi^+\rangle$ | σ_x | $\frac{v\alpha 0_B\rangle+u\beta 1_B\rangle}{\sqrt{ v ^2 \alpha ^2+ u ^2 \beta ^2}}$ |
| $ \psi^-\rangle$ | $\sigma_z\sigma_x$ | $\frac{v\alpha 0_B\rangle+u\beta 1_B\rangle}{\sqrt{ v ^2 \alpha ^2+ u ^2 \beta ^2}}$ |

Tabla 3.5.2: Resumen protocolo de teleportación cuántica probabilista con medición en la base de Bell.

De acuerdo a los resultados resumidos en la tabla 3.5.2, identificamos que luego de hacer la corrección unitaria sobre el qubit B, el problema solo tiene dos posibilidades de estados de salida, los estados

$$|\varphi_\phi\rangle = \frac{u\alpha|0_B\rangle + v\beta|1_B\rangle}{\sqrt{|u|^2|\alpha|^2 + |v|^2|\beta|^2}},$$

$$|\varphi_\psi\rangle = \frac{v\alpha|0_B\rangle + u\beta|1_B\rangle}{\sqrt{|v|^2|\alpha|^2 + |u|^2|\beta|^2}},$$

con probabilidad $|u|^2|\alpha|^2 + |v|^2|\beta|^2$ y $|v|^2|\alpha|^2 + |u|^2|\beta|^2$ respectivamente. En general la salida ψ_a no es recuperada exactamente en el qubit B como $|\psi_B\rangle$ para ningún valor de u y v , excepto para el caso donde $u = v = \frac{1}{\sqrt{2}}$, que es el caso determinista.

[48] Como las amplitudes u y v son conocidas, la probabilidad condicional de que el proceso de extracción del estado $|\psi_B\rangle$ a partir de $|\varphi_\phi\rangle$ corresponde a

$$P_{ext,\phi} = \frac{\min\{|u|^2, |v|^2\}}{p_\phi},$$

y la probabilidad condicional de extraer $|\psi_B\rangle$ desde $|\varphi_\psi\rangle$, análogamente es

$$P_{ext,\psi} = \frac{\min\{|u|^2, |v|^2\}}{p_\psi}.$$

Luego la probabilidad total de extracción estará definida como sigue,

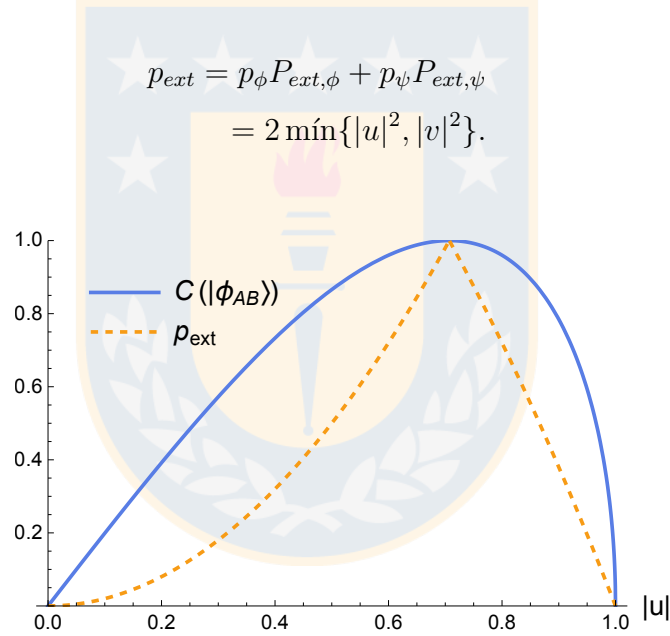


Figura 3.5.3: Comparación entre la concurrencia de un canal cuántico parcialmente entrelazado y la probabilidad de extracción en un esquema de teleportación probabilista.

La probabilidad de extracción del estado $|\psi_B\rangle$ es igual a 1 solo cuando el canal cuántico de comunicación $|\phi_{AB}\rangle$ es un estado de Bell maximalmente entrelazado. La figura 3.5.3 muestra que el entrelazamiento es un recurso fundamental para tener teleportación con probabilidad distinta de cero.

Finalmente, para poder obtener el estado a teleportar en la locación del qubit B, se necesita implementar un proceso de extracción al estado de salida, esto da el aspecto probabilista, ya que podemos extraer uno de dos estados posibles mencionados anteriormente. Pero finalmente tanto la probabilidad como la fidelidad

de teleportación dependerá de los valores con que se prepare el canal cuántico de comunicación parcialmente entrelazado.

3.6. Fidelidad

Dentro de cualquier protocolo de comunicación la fidelidad es una medida cuantitativa de la precisión de transmisión. La fidelidad corresponde a una medida de distancia entre estados cuánticos que cobra importancia en el almacenamiento, procesamiento y comunicación de información cuántica en qubits cuánticos, trampas de iones, experimentos NMR entre otros [49].

Sean ρ_1 y ρ_2 estados cuánticos en un espacio de Hilbert finito dimensional, en el caso de que ambos estados sean puros, la probabilidad de transición es una buena definición de fidelidad que se encuentra entre 0 y 1,

$$F(|\psi_1\rangle\langle\psi_2|, |\psi_2\rangle\langle\psi_2|) = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2. \quad (3.6.1)$$

Esta definición correspondería entonces al nivel de cercanía entre los estados en la geometría del espacio de Hilbert y es sencillo extenderla al caso en el que uno de los estados no es puro,

$$F(|\psi_1\rangle\langle\psi_2|, |\rho_2\rangle\langle\rho_2|) = \langle\psi_1|\rho_2|\psi_1\rangle, \quad (3.6.2)$$

donde esta expresión es el promedio de la ecuación 3.6.1 sobre el ensamble de todos los estados puros cuya matriz densidad corresponde a ρ_2 . De alguna manera esta definición se puede entender como la probabilidad de que ρ_2 sea un estado puro ψ_1 si entendemos $|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ como un observable [50].

Para el caso donde ambos estados son no puros, se tiene la expresión de Uhlmann para la probabilidad de transición en estos casos

$$F = \left(\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1}} \right)^2. \quad (3.6.3)$$

En el caso de que ρ_1 y ρ_2 pertenezcan a un espacio de Hilbert de dos dimensiones, equivalentemente se puede definir la fidelidad

$$F = \text{Tr}(\rho_1 \rho_2) + \sqrt{(1 - \text{Tr} \rho_1^2)(1 - \text{Tr} \rho_2^2)}. \quad (3.6.4)$$

Fijando nuestra atención en la definición de la ecuación 3.6.3, ya que es la más general, notamos algunas propiedades:

- $0 \leq F(\rho_1, \rho_2) \leq 1$.
- Cuando $F(\rho_1, \rho_2) = 1$ se tendrá que $\rho_1 = \rho_2$.
- La fidelidad es una medida simétrica de distancia, es decir $F(\rho_1, \rho_2) = F(\rho_2, \rho_1)$.
- La fidelidad $F(\rho_1, \rho_2)$ es invariante ante transformaciones unitarias.

Al introducir esta medida de distancia, se nombro brevemente su importancia en aplicaciones de comunicación cuántica, donde el objetivo común es disminuir al máximo posible las perdidas de información, esto va directamente vinculado a una mayor fidelidad. Tomemos como ejemplo la teleportación cuántica, donde el objetivo es enviar la información de un estado desconocido ψ . Un estado desconocido como ψ puede ser cualquier estado dentro de un espacio de Hilbert, todos con una misma densidad de probabilidad $\wp = 1/2\pi^2$, así es posible definir una fidelidad promedio f que corresponde al promedio de F sobre todos los estados posibles $|\psi\rangle$,

$$\begin{aligned} f &= \int \wp F d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \langle \psi | \rho | \psi \rangle | \langle 0 | \psi \rangle | d | \langle 0 | \psi \rangle | d\theta_1 d\theta_2, \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

donde θ_i son las dos fases del estado $|\psi\rangle$ y $| \langle 0 | \psi \rangle | d | \langle 0 | \psi \rangle | d\theta_1 d\theta_2$ es un elemento de volumen infinitesimal en el espacio de Hilbert. Cuando consideramos la representación de un único qubit en la esfera de Bloch, la comparación entre dos qubit se puede escribir explícitamente como una integración sobre el ángulo solido [51],

$$f = \frac{1}{4\pi} \int \text{Tr}(\rho_1 \rho_2) d\Omega. \quad (3.6.6)$$

Cuando un proceso de transferencia de información unidireccional se logra puramente empleando procesos y propiedades clásicas, se puede garantizar una fidelidad promedio igual a 2/3 [12, 13]. Así un proceso de transferencia de información que presente propiedades cuánticas exhibe una fidelidad promedio superior a 2/3 [14]. En particular para la teleportación cuántica probabilista con

canal cuántico puro, se satisface la siguiente relación para la fidelidad promedio,

$$f_p = \frac{2}{3} + \frac{C_{aA}C_{AB}}{3}, \quad (3.6.7)$$

donde C_{aA} corresponde a la concurrencia de la base de medición y C_{AB} a la concurrencia del canal cuántico de comunicación.



Capítulo 4

Teleportación cuántica probabilista con canal puro

4.1. Aspectos generales

Al usar un estado parcialmente entrelazado como canal cuántico, es necesario complementar el proceso de teleportación con un proceso de extracción cuántico, esta sería la única manera de poder transferir información de un laboratorio a otro distante. Dentro de un esquema probabilista de teleportación, hay una probabilidad de teleportar exitosamente un estado desconocido ψ con fidelidad 1 pero hay evidencia de que para cualquier protocolo de transferencia de qubits, propiedades cuánticas comienzan a aparecer cuando la fidelidad promedio es mayor que $2/3$.

En esta sección esta idea es explorada en mayor profundidad, pero con un ligero cambio ya que se considerara una base general de medición y no la usual medición en la base de Bell para proyectar el estado inicial del sistema compuesto por los tres laboratorios.

Antes de detallar los cambios en el protocolo, revisaremos los componentes iniciales nuevamente. Se necesita un estado normalizado que contenga la información que deseamos enviar, esta información estará contenida en un estado desconocido $|\psi\rangle = \alpha|0_a\rangle + \beta|1_a\rangle$; el canal cuántico será un estado de Bell $|\phi_{AB}^+\rangle$. Esto genera un espacio de Hilbert compuesto $\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_{AB}$, donde $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_a$ y el par maximalmente entrelazado $|\phi^+\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$; entonces el estado producto $|\psi\rangle|\phi^+\rangle$ que describe el

sistema conjunto de Alice y Bob, pertenece a $\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_{AB}$. Luego al medir al estado $|\psi_1\rangle|\phi^+\rangle$ sobre la base de Bell para el sistema a y A , la información es transferida con una probabilidad igual a $1/4$ para cada salida, así el uso de un canal maximalmente entrelazado genera una transferencia determinista de información con fidelidad máxima e igual a la unidad. Pero se propone explorar una implementación probabilista al cambiar la base de medición a un estado parcialmente entrelazado.

La base de medición será un estado desconocido $|m\rangle \in \mathcal{H}_{12}$. Definimos $|m\rangle$ como un estado general en \mathcal{H}_{12} con coeficientes reales sin pérdida de generalidad,

$$|m\rangle = a|0\rangle|0\rangle + b|0\rangle|1\rangle + c|1\rangle|0\rangle + d|1\rangle|1\rangle, \quad (4.1.1)$$

$$|m\rangle = a \left(\frac{|\phi^+\rangle + |\phi^-\rangle}{\sqrt{2}} \right) + b \left(\frac{|\psi^+\rangle + |\psi^-\rangle}{\sqrt{2}} \right) + c \left(\frac{|\psi^+\rangle - |\psi^-\rangle}{\sqrt{2}} \right) + d \left(\frac{|\phi^+\rangle - |\phi^-\rangle}{\sqrt{2}} \right).$$

Este estado esta normalizado, es decir se satisface la condición $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$. Proyectando $|\psi\rangle|\phi^+\rangle$ sobre la base $|m\rangle$,

$$\begin{aligned} \langle m|\psi_1\rangle|\phi_{23}^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [au|0_3\rangle + bu|1_3\rangle + cv|0_3\rangle + dv|1_3\rangle] \\ \langle m|\psi_1\rangle|\phi_{23}^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(au + cv)|0_3\rangle + (bu + dv)|1_3\rangle] \\ \langle m|\psi_1\rangle|\phi_{23}^+\rangle &= \frac{\sqrt{|au + cv|^2 + |bu + dv|^2} [(au + cv)|0_3\rangle + (bu + dv)|1_3\rangle]}{\sqrt{2} \sqrt{|au + cv|^2 + |bu + dv|^2}}. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

De este estado salida, notamos que cuando $b = c = 0$ y $a = d = \frac{1}{\sqrt{2}}$, el estado proyectado en \mathcal{H}_B corresponde a $|\psi\rangle$, este resultado tiene una probabilidad igual a $1/4$ y es equivalente a la teleportación determinista de la sección 3.5.1.

Hemos encontrado que es posible teleportar el estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_a$, usando un canal cuántico $|\phi^+\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$ y un estado general de medición $|m\rangle \in \mathcal{H}_{12}$ como base, con probabilidad igual a $1/4$. Este resultado es positivo pero no novedoso, notamos que ocurre una igualación entre los coeficientes de $|\phi^+\rangle$ y la base $|m\rangle$, lo que significa que el entrelazamiento de un estado fue transferido a otro. Este caso de aquí en adelante será un resultado de calibración, contra el cual compararemos otros resultados.

En vista de lo anterior, es que surge la motivación principal, descubrir si es posible que un estado como $|m\rangle \in \mathcal{H}_{aA}$ que se emplea como base de medición sobre $|\psi\rangle|\phi^+\rangle$, sirva para transferir información hasta $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_B$ de manera probabilista, pero con probabilidad mayor al resultado de calibración $1/4$ ¹.

Se proponen tres conjuntos de condiciones distintas que se aplicaran al estado de salida en la ecuación 4.1.2, para luego analizar el comportamiento de la fidelidad y probabilidad:

- La primera condición o Caso 1 será $|a| = |b|$ y $|c| = -|d|$.
- La segunda condición o Caso 2 será $|a| = |b|$ y $|c| = -|d|$ y la aplicación de una compuerta Hadamard.
- La tercera condición o Caso 3 será $|a| = |d|$ y $|c| = |b|$.

Cuando observamos un conjunto base como la base de Bell, se puede notar inmediatamente que $\{|01\rangle, |10\rangle\}$ forman un sub espacio $\mathcal{H}_{01,10}$ y los elementos $\{|00\rangle, |11\rangle\}$ forman otro $\mathcal{H}_{00,11}$. En Ambos sub espacios se generan estados entrelazados. Un estado que mezcla un elemento de cada base del sub espacio, nos da un estado separable con concurrencia cero. La medición en la base $|m\rangle$ es una combinación entre todas las bases de ambos sub espacios de la base de Bell, de este modo, una condición como $|a| = |b|$ y $|c| = |d|$ esta relacionando coeficientes de bases que juntas solo pueden generar estados separables; por ejemplo para $|a| = |b|$ los elementos son $\{|00\rangle, |01\rangle\}$. Por otro lado, condiciones como $|a| = |d|$ y $|c| = |b|$ relacionan elementos que son la base de sub espacios con entrelazamiento $\mathcal{H}_{00,11}$ y $\mathcal{H}_{01,10}$. Esto probará ser una distinción importante en los resultados que se obtengan más adelante.

Para cada conjunto de condiciones que se apliquen sobre el estado de salida 4.1.2, determinaremos la fidelidad F de acuerdo a la definición dada en 3.6.1. Esta fidelidad nos dará un primer indicio de las similitudes entre el estado de salida luego de la medición en $|m\rangle$ y el estado $|\psi\rangle$ que es el que se quiere recuperar.

- En el Caso 1, las condiciones implican una fidelidad de teleportación como sigue,

$$F = \frac{(|a| |u|^2 - |c| |v|^2 + |a| |u| |v| + |c| |u| |v|)^2}{4 (|a|^2 |u|^2 + |c|^2 |v|^2)}. \quad (4.1.3)$$

¹La cual es la probabilidad obtenida cuando se aplica una medición de Bell, la cual es maximalmente entrelazada.

- Para el Caso 2, la fidelidad de teleportación es

$$F = \frac{|au^2 + cv^2|^2}{|au|^2 + |cv|^2}. \quad (4.1.4)$$

- La fidelidad de teleportación del Caso 3,

$$F = \frac{1}{2} \frac{(|a||u|^2 + 2|c||u||v| + |a||v|^2)^2}{|a|^2|u|^2 + |a|^2|v|^2 + 4|a||c||u||v| + |c|^2|u|^2 + |c|^2|v|^2}. \quad (4.1.5)$$

Los resultados obtenidos en cada caso se encuentran resumidos en la tabla 4.1.1.

| | Fidelidad F | Probabilidad |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| Caso 1 | $\frac{(a u ^2 - c v ^2 + a u v + c u v)^2}{4(a ^2 u ^2 + c ^2 v ^2)}$ | $ a ^2 u ^2 + c ^2 v ^2$ |
| Caso 2 | $\frac{ au^2 + cv^2 ^2}{ au ^2 + cv ^2}$ | $ a ^2 u ^2 + c ^2 v ^2$ |
| Caso 3 | $\frac{1}{2} \frac{(a u ^2 + 2 c u v + a v ^2)^2}{ a ^2 u ^2 + a ^2 v ^2 + 4 a c u v + c ^2 u ^2 + c ^2 v ^2}$ | $ a ^2 u ^2 + a ^2 v ^2 + c ^2 v ^2 + c ^2 u ^2 + 4 a c u v $ |

Tabla 4.1.1: Fidelidades y probabilidades asociadas a cada conjunto de condiciones impuestas sobre $|m\rangle$ en el esquema de teleportación propuesto.

Las dos propiedades donde se concentra nuestro interés, son la fidelidad promedio y la probabilidad. Primero, la fidelidad promedio esta determinada directamente en base a los resultados obtenidos para la fidelidad, luego aplicando la definición en la ecuación 3.6.6 se obtienen los resultados en la figura 4.1.2 para esta cantidad.

Para aplicar la definición 3.6.6 directamente, es necesario representar un estado desconocido como $|\psi\rangle$, como una función de θ y φ ,

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle,$$

esto simplemente es un estado en su representación geométrica de la esfera de Bloch.

La figura 4.1.2 muestra la comparación entre cada fidelidad promedio donde la línea verde muestra el resultado para la condición $|a| = |b|$ y $|c| = -|d|$ con la aplicación de una compuerta Hadamard, la curva roja muestra la fidelidad promedio para la condición $|a| = |b|$ y $|c| = -|d|$ y la curva azul para $|a| = |d|$ y $|b| = |c|$; la línea naranja muestra el límite clásico de fidelidad $f = 2/3$. Un

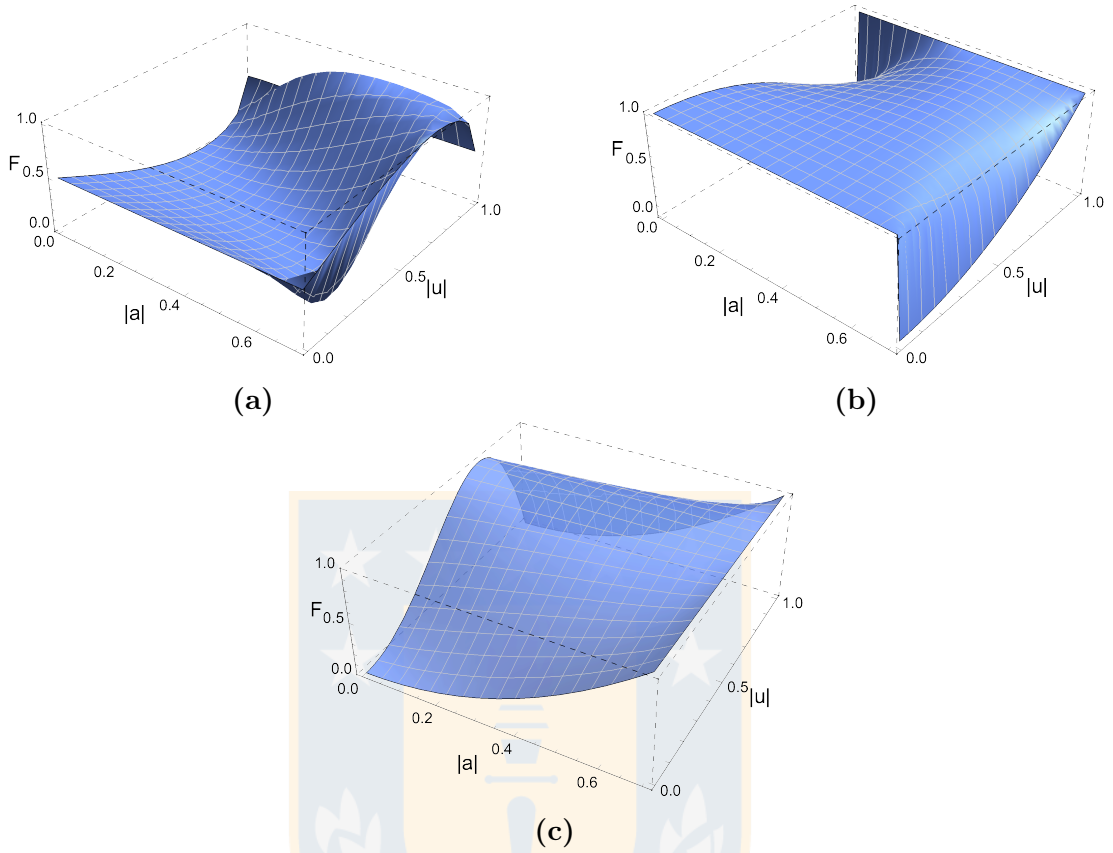


Figura 4.1.1: Fidelidades para cada caso en el análisis, la figura (a) muestra el resultado para el Caso 1, la figura (b) el Caso 2 y (c) el Caso 3. La expresión para estos tres resultados se ve en la tabla 4.1.1

resultado particular que podemos observar en la fidelidad promedio del Caso 1 es cuando la fidelidad promedio alcanza su valor máximo en $a = 1/2$. Así la probabilidad de teleportación exitosa es de $1/4$. Este resultado vale la pena mencionarlo ya que a pesar de que se mantiene la probabilidad de nuestro caso de calibración, se exhibe un comportamiento anómalo. No se presenta el igualamiento de los coeficientes de la base con el canal cuántico, es interesante ya que esta probabilidad se puede alcanzar con una medida maximalmente entrelazada pero diferente a un estado de Bell,

$$|m\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle|0\rangle + \frac{1}{2}|0\rangle|1\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle|1\rangle. \quad (4.1.6)$$

Comparando el Caso 1 con el Caso 2, vemos que sin implementar una compuerta Hadamard el intervalo de posibles valores para los cuales $f > 2/3$ es considerablemente menor, y no solo eso, también sin esta compuerta no es posible

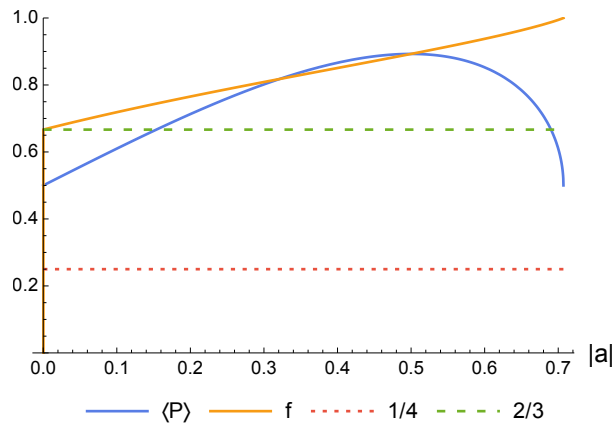


Figura 4.1.2: Comparación entre las fidelidades promedio de cada caso de estudio.

alcanzar fidelidad máxima 1. Comparativamente entre Caso 1 y 2, donde solo se emplean condiciones que relaciones sub espacios no entrelazados, la compuerta Hadamard claramente es un recurso clave. Ambos casos de todos modos tienen un desempeño inferior al Caso 3, donde las condiciones empleadas permiten que la fidelidad promedio de teleportación siempre este por sobre el límite clásico, esto se atribuye a la naturaleza de las correlaciones entre los subespacios que se están relacionando en este caso.

4.2. Probabilidad promedio

Respecto a la probabilidad, notamos que no hay diferencia entre el Caso 1 y el Caso 2 ya que las operaciones unitarias no afectan la probabilidad de las salidas respectivas. Así en cuanto a probabilidad solo se tienen dos distribuciones características dependiendo de las condiciones aplicadas sobre los coeficientes del estado $|m\rangle$, una para el Caso 1 y 2, y otra diferente para el Caso 3.

En 4.2.1 se muestra las dos distribuciones de probabilidad características en el protocolo probabilista propuesto cuando el canal es un estado puro; en (a) distribución de probabilidad para el Caso 1 y 2 cuando $|a| = |b|$ y $|c| = -|d|$ y en (b) la distribución de probabilidad para el Caso 3, cuando $|a| = |d|$ y $|b| = |c|$. En la figura 4.2.1a se encuentran dos valores máximos de probabilidad iguales a 0,5, esto ocurre cuando $\{|a| = 0, |u| = 0\}$ y $\{|a| = 0,707, |u| = 1\}$. La probabilidad mínima es 0 para $\{|a| = 0,707, |u| = 0\}$ y $\{|a| = 0, |u| = 1\}$. En la figura 4.2.1b se encuentra un valor máximo de probabilidad igual a 1, esto ocurre cuando

$\{|a| = 0,5, |u| = 0,707\}$ y la probabilidad mínima en esta segunda distribución es igual a 0.5, pero no hay único valor para el cual $|a|$ y $|u|$ implican tal probabilidad, por lo mismo para más detalle sobre esto referimos la figura.

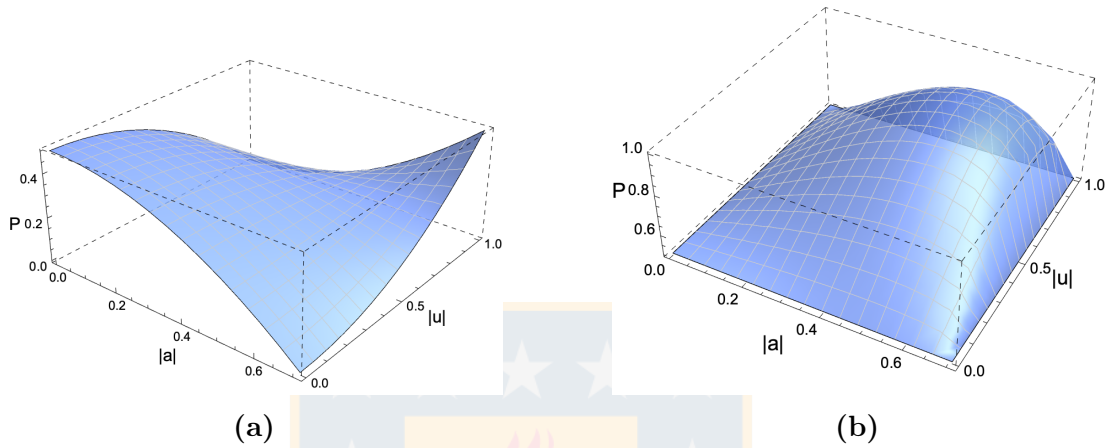


Figura 4.2.1: Dos distribuciones de probabilidad características en el protocolo probabilista propuesto cuando el canal es un estado puro.

El problema de la teleportación se reduce a la optimización de dos cantidades, fidelidad y probabilidad, en cuanto a la fidelidad ya tenemos un análisis sólido para los diferentes casos de estudio pero es fundamental entender las probabilidades que los casos de estudio acarrearán. En este contexto se vuelve complicado comparar directamente fidelidades promedio con las distribuciones de probabilidad por lo que se propone usar la misma interpretación que se utiliza al definir la fidelidad promedio, es decir, definir una probabilidad promedio. Esto significa que integraremos ambas distribuciones de probabilidad sobre todos los posibles estados desconocidos $|\psi\rangle$ de manera tal que probabilidad y fidelidad promedio puedan ser comparadas de manera directa.

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4\pi} \int P d\Omega \quad \text{con} \quad d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$$

Para las condiciones dadas por el Caso 1 y 2, $|a| = |b|$ y $|c| = -|d|$, se tiene una

probabilidad promedio definida como,

$$\begin{aligned}
 P &= |a|^2|u|^2 + |c|^2|v|^2 \\
 P &= |a|^2 \cos^2 + \frac{\theta}{2} \left(\frac{1}{2} - |a|^2 \right) \left(1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\
 \langle P \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int \left(|a|^2 \cos \frac{\theta^2}{2} + \left(\frac{1}{2} - |a|^2 \right) \left(1 - \cos \frac{\theta^2}{2} \right) \right) d\Omega \\
 \langle P \rangle &= \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Para las condiciones dadas por el Caso 3, $|a| = |d|$ y $|b| = |c|$, la probabilidad promedio,

$$\begin{aligned}
 P &= |a|^2|u|^2 + |a|^2|v|^2 + |c|^2|v|^2 + |c|^2|u|^2 + 4|a||c||u||v| \\
 P &= \frac{1}{2} + 2|a|\sqrt{1 - 2|a|^2} \cos \frac{\theta}{2} \sqrt{1 - \cos \theta} \\
 \langle P \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int P d\omega \\
 \langle P \rangle &= \frac{1}{2} + \frac{\pi|a|}{2} \sqrt{\frac{1}{2} - |a|^2}.
 \end{aligned}$$

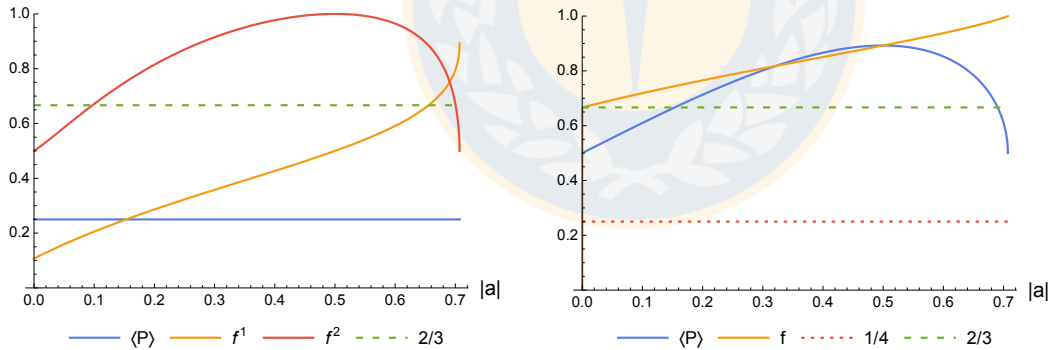


Figura 4.2.2: (a) Probabilidad promedio cuando la condición sobre $|m\rangle$ es $|a| = |b|$ y $|c| = -|d|$ es constante e igual a 0,25, se compara con la fidelidad promedio del Caso 1 siendo f^1 y la del Caso 2 es f^2 . (b) La probabilidad promedio para el Caso 3 con condiciones $|a| = |d|$ y $|b| = |c|$ tiene un valor máximo de 0,89 cuando $|a| = 0,5$. En línea punteada se muestra el valor del límite clásico de fidelidad y el límite auto impuesto de probabilidad 1/4.

La probabilidad promedio asociada a las condiciones de los sub espacios $\mathcal{H}_{00,01}$ y $\mathcal{H}_{10,11}$ resultó ser constante e igual a 1/4. Este resultado no aporta valor real al problema de estudio ya que no se supera la probabilidad 1/4, de todos modos, este resultado no resulta tan sorprendente al considerar el tipo de correlaciones que poseen los sub espacios involucrados. Por otro lado, la segunda probabilidad

promedio muestra un comportamiento complementario, donde fidelidad promedio y probabilidad promedio solo son iguales en $|a| = 0,3$ y $|a| = 0,5$. La probabilidad promedio no alcanza la unidad pero si supera $1/4$ con creces con un máximo de 0,89.

4.3. Relación entre fidelidad promedio y probabilidad

Al analizar la probabilidad promedio se pudo ver como el Caso 1 y Caso 2 dejaban de proveer información nueva sobre esta cantidad al encontrarse en un valor constante, es en este contexto que se enfoca el interés en el Caso 3 con las condiciones $|a| = |d|$ y $|b| = |c|$ que relacionan los subespacios $\mathcal{H}_{00,11}$ y $\mathcal{H}_{01,10}$. Lo interesante de la probabilidad promedio para el Caso 3 es que la probabilidad promedio muestra la complementariedad que se esperaba ver, osea que variaciones en fidelidad promedio tienen efectos en la probabilidad promedio para bien o para mal, la relación entre las dos variables se muestra en la figura 4.3.1.

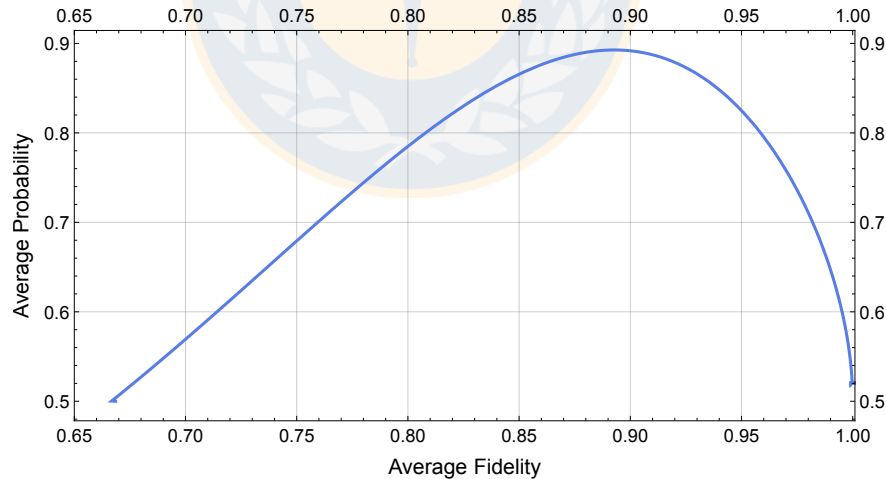


Figura 4.3.1: Variación de la probabilidad promedio $\langle P \rangle$ con respecto a la fidelidad promedio f cuando $|a| = |d|$ and $|b| = |c|$.

En base a lo anterior se ve que es posible tener alta probabilidad promedio y alta fidelidad promedio de manera simultánea. En general, es destacable que en este caso hasta los valores mínimos tanto en probabilidad promedio como fidelidad promedio, superan los dos límites impuestos de $1/4$ y $2/3$ respectivamente. En el mejor de los casos si quisiéramos una fidelidad promedio entre 0,90 y 1 la

probabilidad va en disminución desde 0,89 hasta 0,5, incluso considerando que la probabilidad baja. Vemos así los beneficios de usar una base de medición general como $|m\rangle$ tras aplicar las condiciones definidas como Caso 3 en un esquema de teleportación probabilista.

Es natural querer ahondar en la relación entre fidelidad promedio con la probabilidad usual y ver si es que hay una relación algebraica explícita. A pesar de que ambas cantidades dependen de un número de variables diferentes, podemos analizar el comportamiento de la probabilidad para aquellos intervalos de la fidelidad promedio donde $f > 2/3$. Partiendo por el Caso 1, la fidelidad promedio supera $2/3$ cuando $|a| \in [2/3, 1/\sqrt{2}]$, intervalo en el cual la probabilidad es la que muestra la figura 4.3.2. Para el Caso 2, se supera el límite clásico cuando $|a| \in [0,095, 1/\sqrt{2}]$, esto es ligeramente menor al intervalo completo de $|a|$ por lo que la distribución de probabilidad 4.2.1a sigue siendo una representación válida. Para el Caso 3 el límite clásico es superado para cualquier valor de $|a|$ por lo que la distribución de probabilidad de la figura 4.2.1b es válida.

Entonces podemos interpretar que si es posible teleportar proyectando sobre $|m\rangle$ con probabilidad mayor a $1/4$ pero será necesario suavizar condiciones sobre la fidelidad tal que la fidelidad promedio puede ser inferior a la unidad. Si bien como se relacionan las propiedades para que esto se de en los Casos 1 y 2, si es claro ver cómo esto ocurre para el Caso 3.

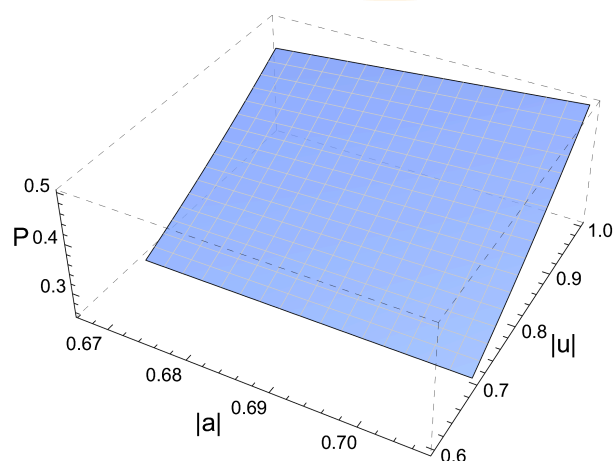


Figura 4.3.2: Probabilidad mayor a $1/4$ en el rango donde la fidelidad promedio supera el límite clásico para el Caso 1.

Capítulo 5

Teleportación cuántica probabilista con canal mixto

En este capítulo se exploran los muchos beneficios que trae usar un estado mixto como canal cuántico de comunicación [15, 16, 17, 18], específicamente nos concentraremos en diferentes tipos de estados X, este tipo de estado son de interés ya que presentan una medida de entrelazamiento bien definida [20, 21], y corresponden a una generalización de estados maximalmente entrelazados. Además de esto tienen aplicaciones en áreas como el estudio de mecanismos de decoherencia [19] o la interacción de dos átomos de dos niveles en una cavidad [52].

Un estado X de dos qubits puede ser representado como

$$\rho_{a,b} \equiv \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (5.0.1)$$

donde los elementos del anterior operador densidad deben satisfacer su condición de normalización

$$\sum_{j=1}^4 \rho_{ij} = 1.$$

Y la condición de positividad que implica lo siguiente

$$|\rho_{14}| \leq \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} \quad y \quad |\rho_{23}| \leq \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}$$

Los elementos fuera de la diagonal principal indican el grado de coherencia dentro de los subespacios ortogonales, aquellos cuyas bases son $\{|00\rangle, |11\rangle\}$ y $\{|01\rangle, |10\rangle\}$. Cuando el elemento ρ_{14} es igual a cero, la decoherencia en su correspondiente subespacio es total, significado similar tiene el elemento ρ_{23} . Así estos elementos fuera de la diagonal afectan directamente la mixtura del estado X como lo son ρ_{14} y ρ_{23} , que puede describir desde un sistema completamente incoherente hasta una superposición de estados puros con entrelazamiento parcial.

Como ya se había nombrado brevemente, el entrelazamiento en este tipo de estados esta bien definido. En especial, observamos la concurrencia que viene dada por,

$$C = 2 \max \{0, |\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}, |\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}\}. \quad (5.0.2)$$

Así el entrelazamiento será no nulo solo cuando se cumple una de las siguientes condiciones para los elementos de la matriz 5.0.1,

- $|\rho_{14}| > \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}$.
- $|\rho_{23}| > \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}$.

Además de esto surgen otras desigualdades a partir de la combinación con la condición de positividad definida anteriormente [53], pero no son realmente relevantes para el análisis presentado en esta tesis.

En este capítulo, el protocolo de teleportación probabilista implementado con la base de medición $|m\rangle$ se mantiene, solo se cambiará el par entrelazado o canal cuántico por un estado de Werner, α y β respectivamente. El objetivo principal de esta sección, es ver si un canal cuántico mixto trae beneficios comparado con un canal puro en cuanto a fidelidad y probabilidad, también será posible ver que tan robusto es el protocolo en la prescripción propuesta ante diferentes grados de decoherencia. En la figura 5.0.1 se muestra una comparación del entrelazamiento en los estados X que se utilizaran.

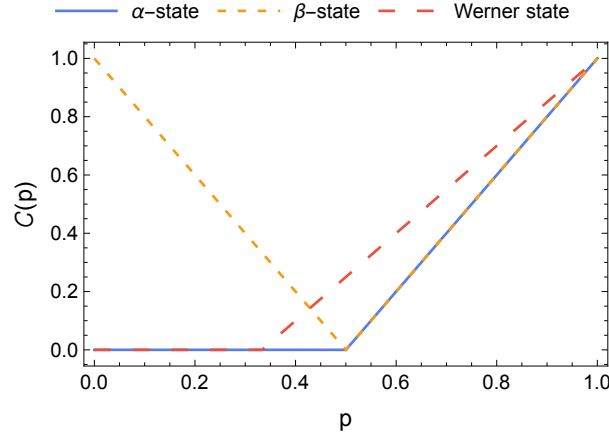


Figura 5.0.1: Comparación entre las concurrencias de tres tipos de estado X .

5.1. Estado de Werner

Consideremos el siguiente estado de Werner como canal cuántico de comunicación en el esquema probabilista de teleportación,

$$\rho_w = \left(\frac{1-p}{4} \right) I + p |\phi^+\rangle \langle \phi^+|, \quad (5.1.1)$$

$$\rho_w = \begin{pmatrix} \left(\frac{1-p}{4} + \frac{p}{2} \right) & 0 & 0 & \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{1-p}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-p}{4} & 0 \\ \frac{p}{2} & 0 & 0 & \left(\frac{1-p}{4} + \frac{p}{2} \right) \end{pmatrix}.$$

donde $0 \leq p \leq 1$. El estado es no separable para todos los $p > 1/3$, estos estados presentan un entrelazamiento parcial.

El estado del sistema compuesto es $\rho_\psi \otimes \rho_w \in \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_{AB}$, donde $\rho_\psi = |\psi\rangle \langle \psi|$. Cuando se aplica una medición $|m\rangle$ sobre el sistema aA , se obtiene el siguiente

estado de salida,

$$\rho_{out} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}|a|^2|u|^2 + \frac{1}{4}|b|^2|u|^2 + \frac{1}{4}|c|^2|v|^2 + \frac{1}{4}|d|^2|v|^2 + \frac{1}{4}p|a|^2|u|^2 - \frac{1}{4}p|b|^2|u|^2 + \frac{1}{4}p|c|^2|v|^2 - \frac{1}{4}p|d|^2|v|^2 + \frac{1}{2}|a||c||u||v| + \frac{1}{2}|b||d||u||v| - \frac{1}{2}p|a||c||u||v| - \frac{1}{2}p|b||d||u||v| & \frac{1}{2}p(|a||u| + |c||v|)(|b||u| + |d||v|) \\ \frac{1}{2}p(|a||u| + |c||v|)(|b||u| + |d||v|) & \frac{1}{4}|a|^2|u|^2 + \frac{1}{4}|b|^2|u|^2 + \frac{1}{4}|c|^2|v|^2 + \frac{1}{4}|d|^2|v|^2 - \frac{1}{4}p|a|^2|u|^2 + \frac{1}{4}p|b|^2|u|^2 - \frac{1}{4}p|c|^2|v|^2 + \frac{1}{4}p|d|^2|v|^2 + \frac{1}{2}|a||c||u||v| + \frac{1}{2}|b||d||u||v| - \frac{1}{2}p|a||c||u||v| - \frac{1}{2}p|b||d||u||v| \end{pmatrix}. \quad (5.1.2)$$

El estado salida no esta normalizado por lo que multiplicamos por $1/N$, donde N es la constante de normalización,

$$N = \frac{1}{2}|a|^2|u|^2 + \frac{1}{2}|b|^2|u|^2 + \frac{1}{2}|c|^2|v|^2 + \frac{1}{2}|d|^2|v|^2 + \frac{1}{2}|a||v||c||u| + \frac{1}{2}|c||u||a||v| + \frac{1}{2}|b||v||d||u| + \frac{1}{2}|d||u||b||v|.$$

Replicando el análisis realizado para el protocolo con canal puro, aplicaremos sobre el estado de salida normalizado ρ_{out}^N , las condiciones dadas por los Casos 1, 2 y 3 definidos en el capítulo anterior. Las condiciones dadas en por el Caso 1 dejan el estado de salida como,

$$\rho_{out}^N = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}|a|^2|u|^2 + p|a||c||u||v| + \frac{1}{2}|c|^2|v|^2 & \frac{1}{2}p|a|^2|u|^2 - \frac{1}{2}p|c|^2|v|^2 \\ \frac{1}{2}p|a|^2|u|^2 - \frac{1}{2}p|c|^2|v|^2 & \frac{1}{2}|a|^2|u|^2 - p|a||c||u||v| + \frac{1}{2}|c|^2|v|^2 \end{pmatrix},$$

$$N = (|a|^2|u|^2 + |c|^2|v|^2).$$

Para determinar la fidelidad de teleportación en este caso donde el canal cuántico es un estado mixto, la definición es dada por la ecuación 3.6.2. En el Caso 1 la fidelidad de teleportación corresponderá a

$$F = \frac{\left(|a|^2|u|^4 + 2p|a|^2|u|^3|v| + |a|^2|u|^2|v|^2 + 2p|a||c||u|^3|v| - 2p|a||c||u||v|^3 + |c|^2|u|^2|v|^2 - 2p|c|^2|u||v|^3 + |c|^2|v|^4 \right)}{2(|a|^2|u|^2 + |c|^2|v|^2)}. \quad (5.1.3)$$

El estado normalizado ρ_{out}^N para las condiciones dadas por el Caso 2 tiene la

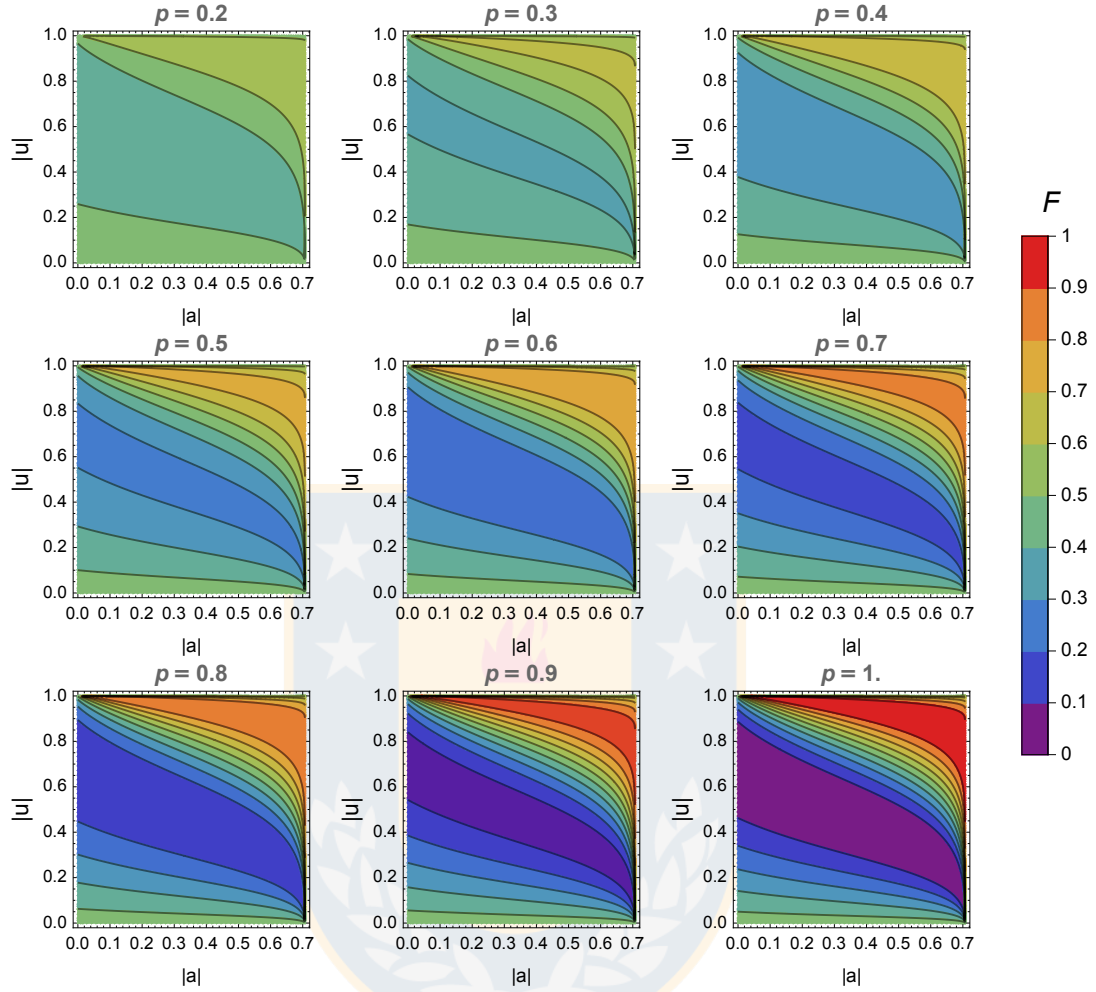


Figura 5.1.1: Diferentes valores de fidelidad F para un estado de Werner como canal en función del color para diferentes valores fijos de decoherencia p con las condiciones dadas por el caso 1.

siguiente forma,

$$\rho_{out}^N = \begin{pmatrix} \frac{(|a|^2|u|^2 + |c|^2|v|^2 + p|a|^2|u|^2 - p|c|^2|v|^2)}{2(|a|^2|u|^2 + |c|^2|v|^2)} & \frac{p|a||c||u||v|}{|a|^2|u|^2 + |c|^2|v|^2} \\ \frac{p|a||c||u||v|}{|a|^2|u|^2 + |c|^2|v|^2} & \frac{(|a|^2|u|^2 + |c|^2|v|^2 - p|a|^2|u|^2 + p|c|^2|v|^2)}{2(|a|^2|u|^2 + |c|^2|v|^2)} \end{pmatrix},$$

$$N = (|a|^2|u|^2 + |c|^2|v|^2).$$

Para este estado de salida, la fidelidad es

$$F = \frac{\left(|a|^2|u|^4 + |c|^2|v|^4 + |a|^2|u|^2|v|^2 + |c|^2|u|^2|v|^2 + p|a|^2|u|^4 + p|c|^2|v|^4 - p|a|^2|u|^2|v|^2 - p|c|^2|u|^2|v|^2 + 4p|a||c||u|^2|v|^2 \right)}{2(|a|^2|u|^2 + |c|^2|v|^2)}. \quad (5.1.4)$$

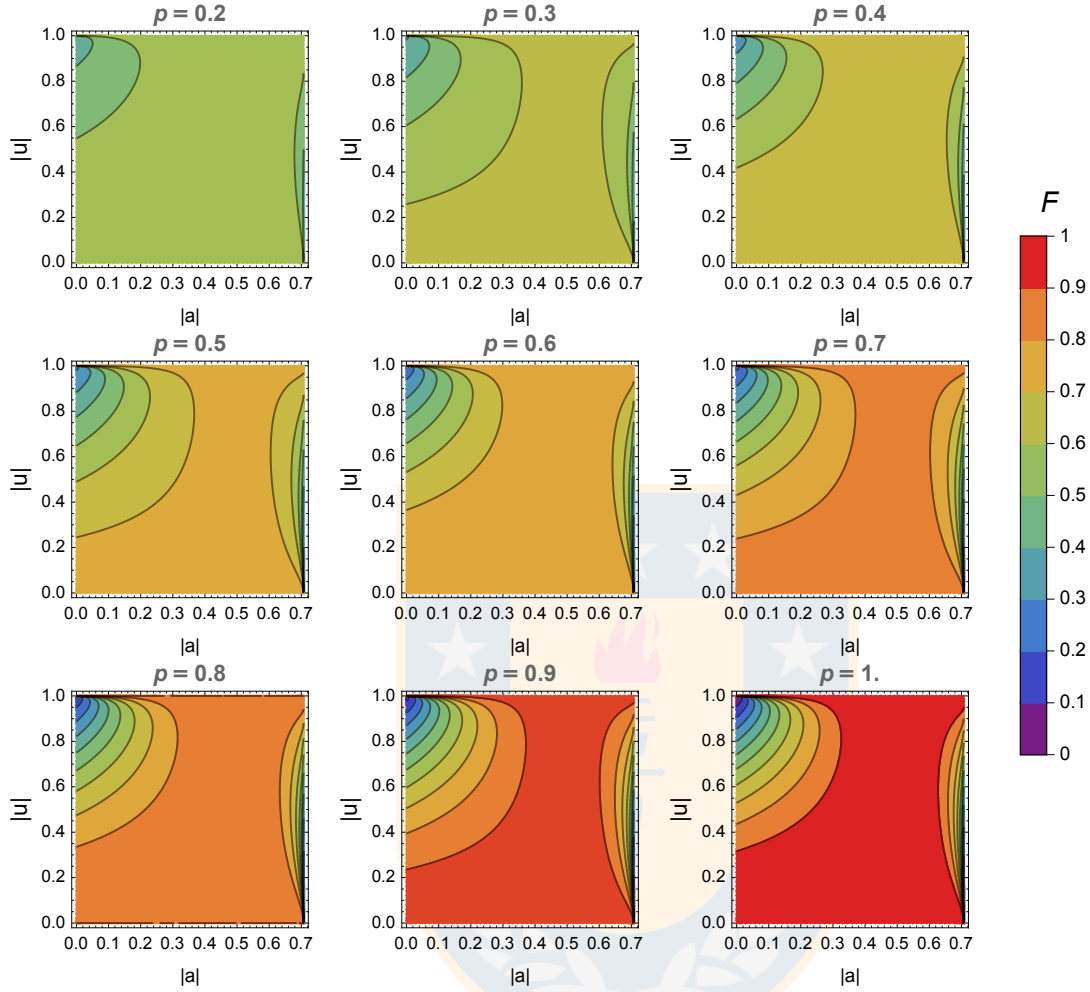


Figura 5.1.2: Diferentes valores de fidelidad F para un estado de Werner como canal en función del color para diferentes valores fijos de decoherencia p con las condiciones dadas por el caso 2.

Finalmente, el tercer conjunto de condiciones implica que el estado de salida normalizado ρ_{out}^N es

$$\rho_{out} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}|a|^2|u|^2 + \frac{1}{4}|a|^2|v|^2 + \frac{1}{4}|c|^2|u|^2 + \frac{1}{4}|c|^2|v|^2 + \frac{1}{4}p|a|^2|u|^2 - \frac{1}{4}p|a|^2|v|^2 - \frac{1}{4}p|c|^2|u|^2 + \frac{1}{4}p|c|^2|v|^2 + |a||c||u||v| & \frac{1}{2}p|a|^2|u||v| + \frac{1}{2}p|a||c||u|^2 + \frac{1}{2}p|a||c||v|^2 + \frac{1}{2}p|c|^2|u||v| \\ \frac{1}{2}p|a|^2|u||v| + \frac{1}{2}p|a||c||u|^2 + \frac{1}{2}p|a||c||v|^2 + \frac{1}{2}p|c|^2|u||v| & \frac{1}{4}|a|^2|u|^2 + \frac{1}{4}|a|^2|v|^2 + \frac{1}{4}|c|^2|u|^2 + \frac{1}{4}|c|^2|v|^2 - \frac{1}{4}p|a|^2|u|^2 + \frac{1}{4}p|a|^2|v|^2 + \frac{1}{4}p|c|^2|u|^2 - \frac{1}{4}p|c|^2|v|^2 + |a||c||u||v| \end{pmatrix}, \quad (5.1.5)$$

con constante de normalización N

$$N = \frac{1}{2} |a|^2 |u|^2 + \frac{1}{2} |a|^2 |v|^2 + 2 |a| |c| |u| |v| + \frac{1}{2} |c|^2 |u|^2 + \frac{1}{2} |c|^2 |v|^2.$$

Finalmente para este caso, la fidelidad es

$$F = \frac{\left(\begin{aligned} &|a|^2 |u|^4 + |a|^2 |v|^4 + |c|^2 |u|^4 + |c|^2 |v|^4 + 2 |a|^2 |u|^2 |v|^2 + 2 |c|^2 |u|^2 |v|^2 \\ &+ p |a|^2 |u|^4 + p |a|^2 |v|^4 - p |c|^2 |u|^4 - p |c|^2 |v|^4 + 2p |a|^2 |u|^2 |v|^2 + 6p |c|^2 |u|^2 |v|^2 \\ &+ 4 |a| |c| |u| |v|^3 + 4 |a| |c| |u|^3 |v| + 4p |a| |c| |u| |v|^3 + 4p |a| |c| |u|^3 |v| \end{aligned} \right)}{2 \left(|a|^2 |u|^2 + |a|^2 |v|^2 + 4 |a| |c| |u| |v| + |c|^2 |u|^2 + |c|^2 |v|^2 \right)}. \quad (5.1.6)$$

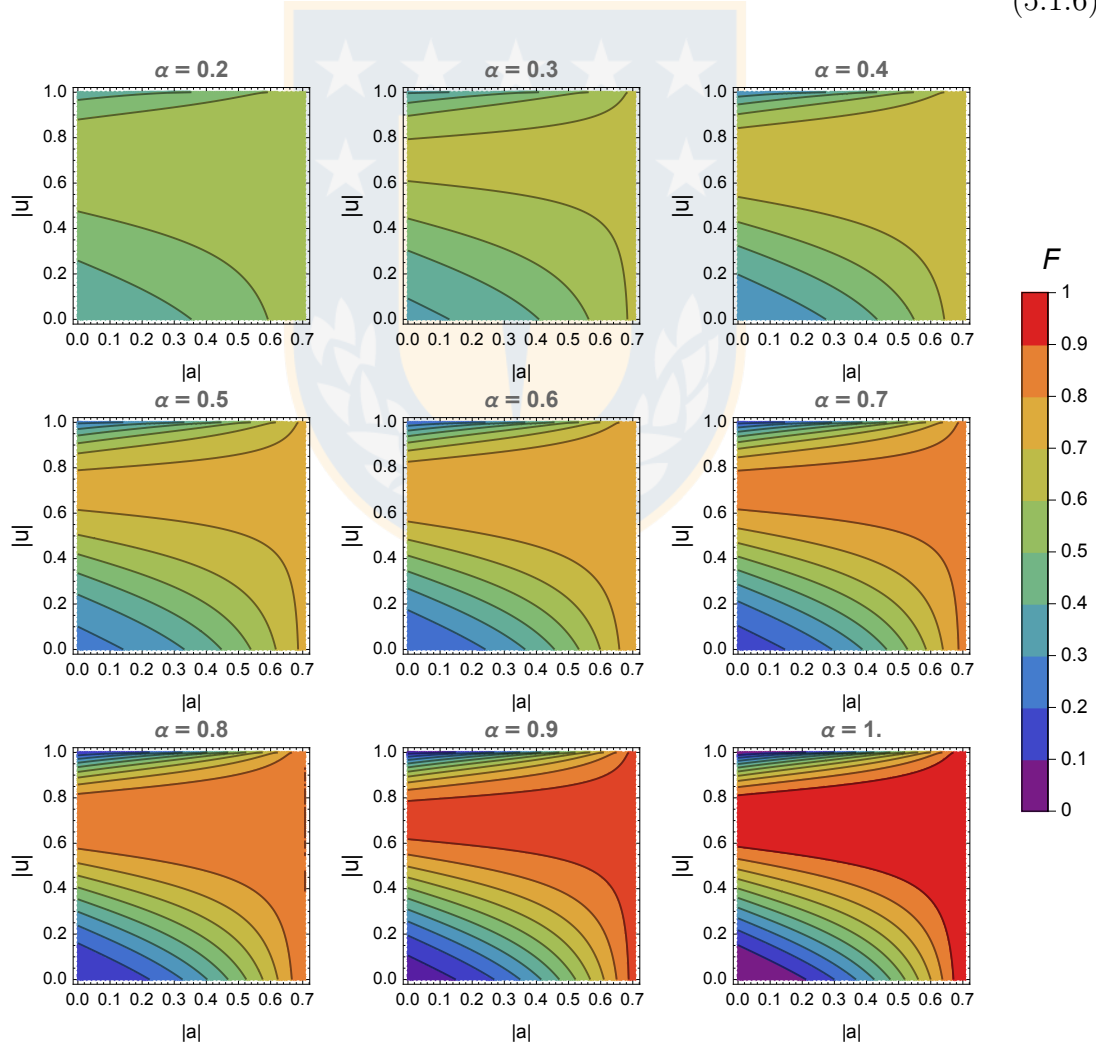


Figura 5.1.3: Diferentes valores de fidelidad F para un estado de Werner como canal son representados en función del color para diferentes valores fijos de decoherencia p con las condiciones dadas por el caso 3.

Con las fidelidades ya conocidas, se puede obtener la fidelidad promedio a través

de la definición 3.6.6. Los resultados se muestran en la figura 5.1.4.

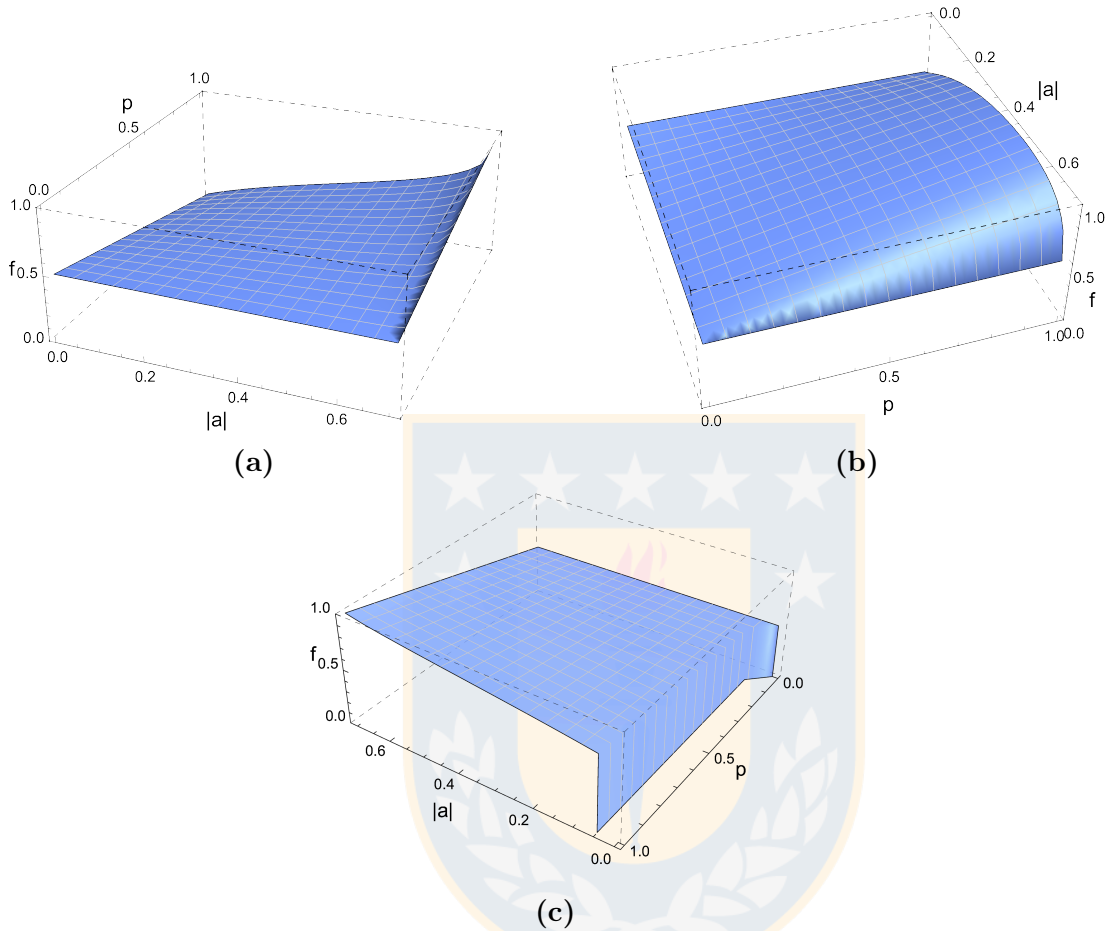


Figura 5.1.4: Fidelidades promedio para cada caso en en análisis, la figura (a) muestra el resultado para el Caso 1, la figura (b) el Caso 2 y (c) el Caso 3.

El foco principal es en la fidelidad promedio respecto al límite clásico $f = 2/3$, para que el esquema propuesto siga siendo un protocolo con propiedades cuánticas se debe cumplir $f > 2/3$. Para cada caso de estudio, existen posibles valores para los cuales esta condición se satisface; los resultados se muestran en la figura 5.1.5 de izquierda a derecha se muestran los resultados para el Caso 1, Caso 2 y Caso 3, la línea punteada indica el valor 0,5 en cada eje.

Algunos resultados importantes a destacar son:

- Las probabilidades en ninguno de los casos de estudio presentan una dependencia con el parámetro que introduce decoherencia p . Son exactamente las mismas que en el protocolo de teleportación probabilista con canal de comunicación cuántico puro en sus casos respectivos. Así las distribuciones

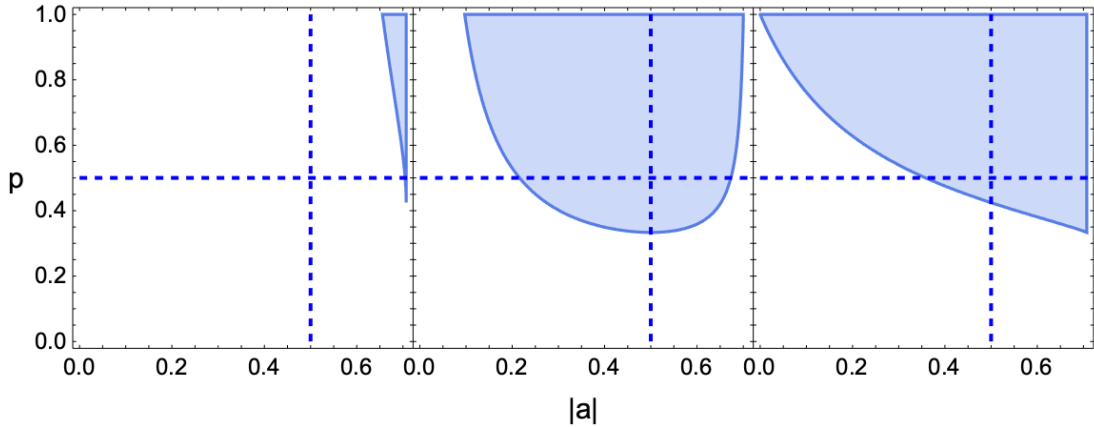


Figura 5.1.5: Valores para los cuales la fidelidad promedio supera los $2/3$ usando un estado de Werner como canal cuántico.

de probabilidad para el caso 1 y 2 son las mostradas en la figura 4.2.1a, y la probabilidad para el caso 3 es la de la figura 4.2.1b.

- De acuerdo a la figura 5.1.5, las condiciones dadas por el Caso 2 y Caso 3 son las que dan regiones más grandes para las cuales $f > 2/3$. Ambas regiones son similares entre ellas y amplias respecto al Caso 1 donde claramente solo se supera $2/3$ para valores cercanos a un estado de Bell.
- Estos resultados son consistentes con lo desarrollado en el capítulo anterior, es decir que cuando $p = 1$, recuperamos la teleportación probabilista con canal puro y sus características propias en cuanto a fidelidad y, obviamente, probabilidad.

5.2. Estado α

Ahora se analizan los resultados que se obtienen con una configuración diferente de estado X en el mismo esquema propuesto. Para esto usamos un estado α

$$\rho_\alpha = \frac{1-\alpha}{2} (|\psi^+\rangle\langle\psi^+| + |\psi^-\rangle\langle\psi^-|) + \alpha|\phi^+\rangle\langle\phi^+|,$$

$$\rho_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \frac{1-\alpha}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix},$$

donde α es un parámetro real tal que $0 \geq \alpha \geq 1$, en particular, cuando $\alpha = 0$ el estado ρ_α es un estado clásico e incoherente y cuando $\alpha = 1$ es un estado de Bell maximalmente entrelazado.

El estado del sistema compuesto es $\rho_\psi \otimes \rho_\alpha \in \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_{AB}$, donde $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$. Cuando se aplica una medición $|m\rangle$ sobre el sistema aA , se obtiene el siguiente estado de salida normalizado,

$$\rho_{out}^N = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} |a|^2 |u|^2 \frac{\alpha}{2} + |a| |c| |u| |v| \frac{\alpha}{2} + |b|^2 |u|^2 \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) & |a| |b| |u|^2 \frac{\alpha}{2} + |b| |c| |u| |v| \frac{\alpha}{2} \\ + |b| |d| |u| |v| \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) + |a| |c| |u| |v| \frac{\alpha}{2} + & + |d| |a| |u| |v| \frac{\alpha}{2} + |d| |c| |v|^2 \frac{\alpha}{2} \\ |c|^2 |v|^2 \frac{\alpha}{2} + |d| |b| |u| |v| \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) + |d|^2 |v|^2 \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) & \\ \\ |a| |b| |u|^2 \frac{\alpha}{2} + |a| |d| |u| |v| \frac{\alpha}{2} & |a|^2 |u|^2 \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) + |a| |c| |u| |v| \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) + |b|^2 |u|^2 \frac{\alpha}{2} + \\ + |b| |c| |u| |v| \frac{\alpha}{2} + |c| |d| |v|^2 \frac{\alpha}{2} & |b| |d| |u| |v| \frac{\alpha}{2} + |a| |c| |u| |v| \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) + |c|^2 |v|^2 \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \\ & + |d| |b| |u| |v| \frac{\alpha}{2} + |d|^2 |v|^2 \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix},$$

con la constante de normalización N igual a

$$N = \frac{1}{2} |a|^2 |u|^2 + |a| |c| |u| |v| + \frac{1}{2} |b|^2 |u|^2 + |b| |d| |u| |v| + \frac{1}{2} |c|^2 |v|^2 + \frac{1}{2} |d|^2 |v|^2. \quad (5.2.1)$$

Inmediatamente notamos que en este tipo de estado X, la constante de normalización y por ende la probabilidad, nuevamente son independientes del parámetro de decoherencia α al igual que ocurría para los estados de Werner, por ende las distribuciones de probabilidades para los diferentes casos de estudio serán las mismas que cuando se emplearon canales cuánticos puros.

Continuando con la aplicación de las condiciones definidas como Caso 1, 2 y 3. Partiendo por las condiciones $|a| = |b|$ y $|c| = -|d|$ o Caso 1, el estado de salida normalizado queda de la siguiente forma

$$\rho_{out} = \begin{pmatrix} \frac{(|a|^2 |u|^2 + |c|^2 |v|^2 - 2|a||c||u||v| + 4\alpha |a||c||u||v|)}{2|a|^2 |u|^2 + 2|c|^2 |v|^2} & \frac{\frac{1}{2}\alpha |a|^2 |u|^2 - \frac{1}{2}\alpha |c|^2 |v|^2}{|a|^2 |u|^2 + |c|^2 |v|^2} \\ \frac{\frac{1}{2}\alpha |a|^2 |u|^2 - \frac{1}{2}\alpha |c|^2 |v|^2}{|a|^2 |u|^2 + |c|^2 |v|^2} & \frac{(|a|^2 |u|^2 + |c|^2 |v|^2 + 2|a||c||u||v| - 4\alpha |a||c||u||v|)}{2|a|^2 |u|^2 + 2|c|^2 |v|^2} \end{pmatrix}, \quad (5.2.2)$$

$$N = |a|^2 |u|^2 + |c|^2 |v|^2.$$

Estado que esta asociado a una fidelidad de teleportación de

$$F = \frac{\left(\begin{array}{l} |a|^2 |u|^4 + |c|^2 |v|^4 + |a|^2 |u|^2 |v|^2 + |c|^2 |u|^2 |v|^2 \\ + 2\alpha |a|^2 |u|^3 |v| - 2\alpha |c|^2 |u| |v|^3 + 2 |a| |c| |u| |v|^3 - 2 |a| |c| |u|^3 |v| \\ - 4\alpha |a| |c| |u| |v|^3 + 4\alpha |a| |c| |u|^3 |v| \end{array} \right)}{2 (|a|^2 |u|^2 + |c|^2 |v|^2)}.$$

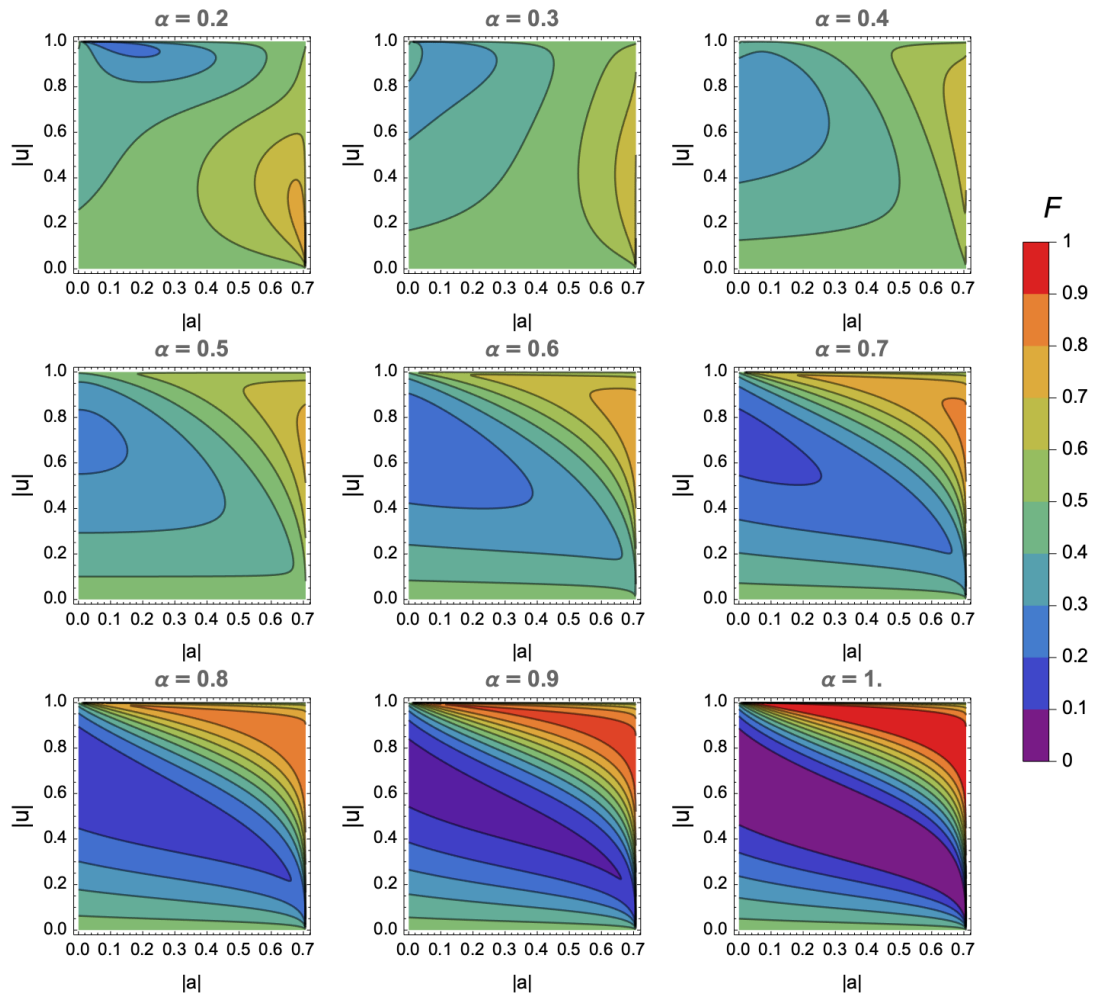


Figura 5.2.1: Diferentes valores de fidelidad F son representados en función del color para diferentes valores fijos de decoherencia p con las condiciones dadas por el Caso 1 y canal cuántico estado α .

Si al estado 5.2.2 le aplicamos una compuerta Hadamard, las condiciones sobre el estado de salida normalizado corresponden a las definidas como Caso 2. De esta

manera el estado normalizado queda como

$$H\rho_{out}H^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{(|a|^2|u|^2+|c|^2|v|^2+\alpha|a|^2|u|^2-\alpha|c|^2|v|^2)}{2(|a|^2|u|^2+|c|^2|v|^2)} & \frac{|a||c||u||v|(2\alpha-1)}{|a|^2|u|^2+|c|^2|v|^2} \\ \frac{|a||c||u||v|(2\alpha-1)}{|a|^2|u|^2+|c|^2|v|^2} & \frac{(|a|^2|u|^2+|c|^2|v|^2-\alpha|a|^2|u|^2+\alpha|c|^2|v|^2)}{2(|a|^2|u|^2+|c|^2|v|^2)} \end{pmatrix},$$

caso en el cual la expresión para la fidelidad corresponde a

$$F = \frac{\begin{pmatrix} |a|^2|u|^4 + |c|^2|v|^4 + \alpha|a|^2|u|^4 + \alpha|c|^2|v|^4 + |a|^2|u|^2|v|^2 \\ + |c|^2|u|^2|v|^2 - \alpha|a|^2|u|^2|v|^2 - \alpha|c|^2|u|^2|v|^2 \\ - 4|a||c||u|^2|v|^2 + 8\alpha|a||c||u|^2|v|^2 \end{pmatrix}}{2(|a|^2|u|^2 + |c|^2|v|^2)}.$$

Finalmente, el último caso de estudio, el Caso 3 donde aplicamos las condiciones $|a| = |d|$ and $|b| = |c|$, implica que el estado de salida es tiene la siguiente forma,

$$\rho_{out} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} |a|^2|u|^2 \frac{\alpha}{2} + |a||c||u||v| \frac{\alpha}{2} + |c|^2|u|^2 \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) & |a||c||u|^2 \frac{\alpha}{2} + |c||c||u||v| \frac{\alpha}{2} \\ + |c||a||u||v| \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) + |a||c||u||v| \frac{\alpha}{2} + |c|^2|v|^2 \frac{\alpha}{2} & + |a||a||u||v| \frac{\alpha}{2} + |a||c||v|^2 \frac{\alpha}{2} \\ + |a||c||u||v| \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) + |a|^2|v|^2 \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) & \\ |a||c||u|^2 \frac{\alpha}{2} + |a||a||u||v| \frac{\alpha}{2} & |a|^2|u|^2 \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) + |a||c||u||v| \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) + |c|^2|u|^2 \frac{\alpha}{2} \\ + |c||c||u||v| \frac{\alpha}{2} + |c||a||v|^2 \frac{\alpha}{2} & + |c||a||u||v| \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) + |c|^2|v|^2 \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \\ & + |a||c||u||v| \frac{\alpha}{2} + |a|^2|v|^2 \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix},$$

con constante de normalización

$$N = \frac{1}{2}|a|^2|u|^2 + \frac{1}{2}|a|^2|v|^2 + 2|a||c||u||v| + \frac{1}{2}|c|^2|u|^2 + \frac{1}{2}|c|^2|v|^2.$$

La fidelidad para aquel estado corresponderá a

$$F = \frac{\begin{pmatrix} |c|^2|u|^4 + |c|^2|v|^4 + \alpha|a|^2|u|^4 + \alpha|a|^2|v|^4 - \alpha|c|^2|u|^4 - \alpha|c|^2|v|^4 \\ + 2|a|^2|u|^2|v|^2 + 2|a||c||u||v|^3 + 2|a||c||u|^3|v| + 4\alpha|c|^2|u|^2|v|^2 \\ + 2\alpha|a||c||u||v|^3 + 2\alpha|a||c||u|^3|v| \end{pmatrix}}{|a|^2|u|^2 + |a|^2|v|^2 + 4|a||c||u||v| + |c|^2|u|^2 + |c|^2|v|^2}.$$

Luego con las fidelidades ya determinadas, se puede obtener la fidelidad promedio a través de la definición 3.6.6. Los resultados se muestran en la figura 5.2.4 donde (a) muestra el resultado para el Caso 1, la figura (b) el Caso 2 y (c) el Caso 3.

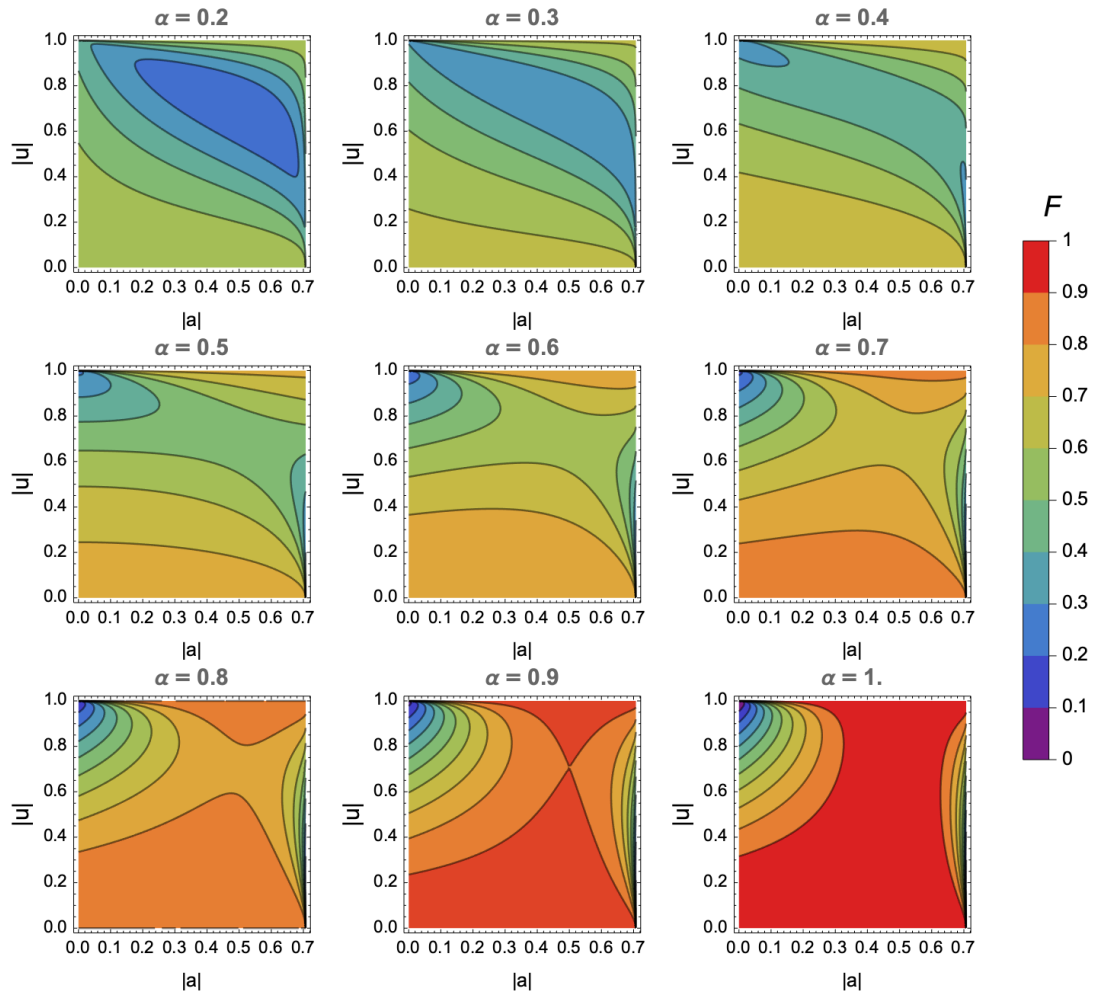


Figura 5.2.2: Diferentes valores de fidelidad F son representados en función del color para diferentes valores fijos de decoherencia p con las condiciones dadas por el Caso 2 y canal cuántico estado α .

Concentrándonos en la fidelidad promedio respecto al límite clásico $f = 2/3$. Para cada caso de estudio, existen posibles valores para los cuales esta condición se satisface, los resultados se muestran en la figura 5.2.5, de izquierda a derecha se encuentra el Caso 1, Caso 2 y Caso 3, la línea punteada indica el valor 0,5 en cada eje.

De los anteriores resultados cabe destacar que:

- Cuando el canal cuántico es un estado α y la medición aplicada para teleportar es $|m\rangle$, la probabilidad asociada al estado salida es independiente del parámetro α . Este comportamiento es idéntico al observado con un estado de Werner.

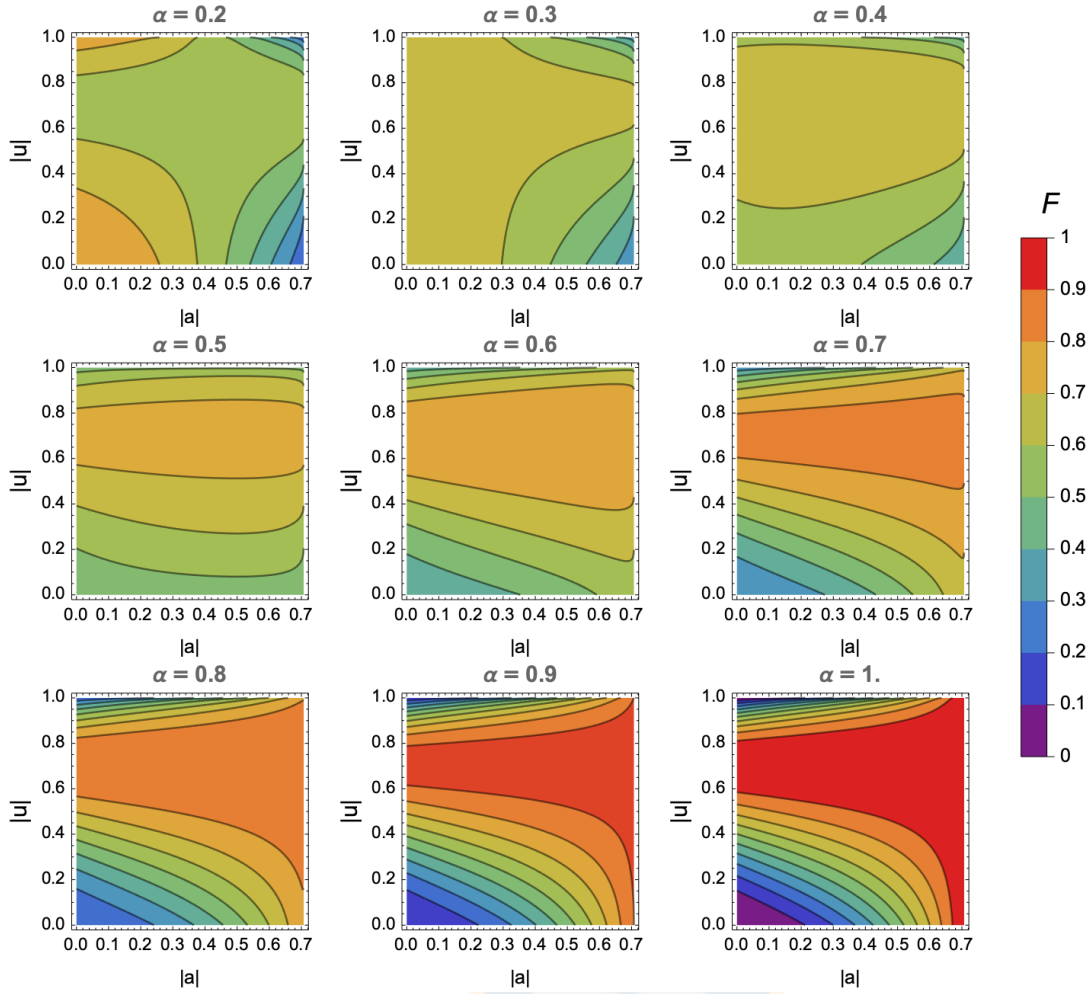


Figura 5.2.3: Diferentes valores de fidelidad F son representados en función del color para diferentes valores fijos de decoherencia p con las condiciones dadas por el Caso 3 y canal cuántico estado α .

- Comparando las regiones para las cuales se cumplía $f > 2/3$, el estado α representa mejor desempeño para los Casos 1 y 3 que el estado de Werner. En cuando al Caso 2, el estado de Werner presenta un mejor rango de valores que nos permiten sobrepasar el límite clásico. A pesar de esto, se mantiene la tendencia que existía en el estado de Werner, de que las regiones donde $f > 2/3$ van creciendo desde el Caso 1, al Caso 2 y finalmente Caso 3, donde se encuentra la región más amplia. En este sentido para el Caso 3 con estado α es comparativamente mejor que el Caso 1 y 2.
- Los resultados son consistentes con lo obtenido para el caso puro.

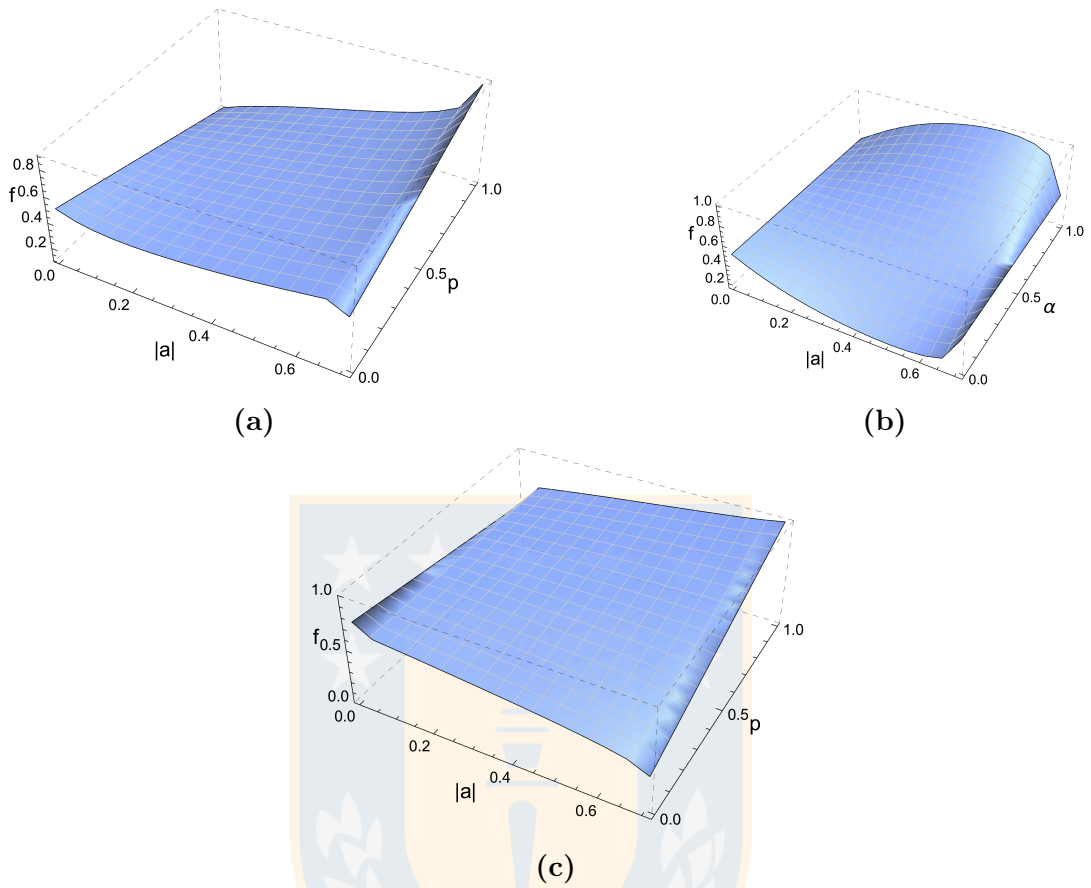


Figura 5.2.4: Fidelidades promedio cuando el canal cuántico es un estado α para los tres casos de estudio

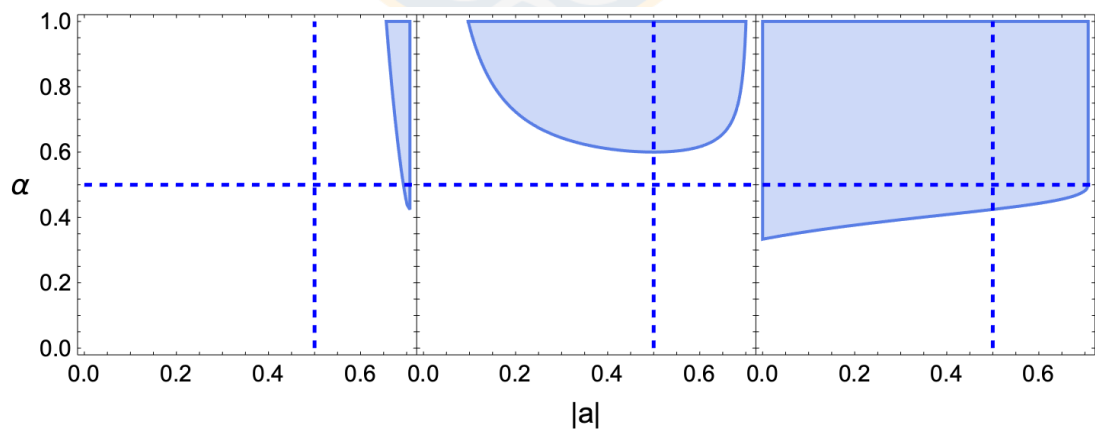


Figura 5.2.5: Valores para los cuales la fidelidad promedio supera $2/3$ usando un estado α como canal cuántico.

5.3. Estado β

La última configuración de estado X que se analizará son los estados β , que no son nada más que un caso particular de esta familia de estados. Están definidos como

$$\rho_\beta = \beta |\phi^+\rangle \langle \phi^+| + (1 - \beta) |\psi^+\rangle \langle \psi^+|, \quad (5.3.1)$$

$$\rho_\beta = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2} & 0 & 0 & \frac{\beta}{2} \\ 0 & \frac{1-\beta}{2} & \frac{1-\beta}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\beta}{2} & \frac{1-\beta}{2} & 0 \\ \frac{\beta}{2} & 0 & 0 & \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}.$$

donde β es un número real tal que $0 \leq \beta \leq 1$. Cuando β es igual a 0 o 1 el estado es un estado de Bell, y cuando $\beta = 1/2$ el estado es separable. Tras aplicar la medida $|m\rangle$ en los sistemas aA , se obtiene el siguiente estado de salida,

$$\rho_{out}^N = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} |b|^2 |u|^2 + \frac{1}{2} |d|^2 |v|^2 + \frac{1}{2} \beta |a|^2 |u|^2 & \frac{1}{2} |a| |b| |u|^2 + \frac{1}{2} |c| |d| |v|^2 \\ -\frac{1}{2} \beta |b|^2 |u|^2 + \frac{1}{2} \beta |c|^2 |v|^2 - \frac{1}{2} \beta |d|^2 |v|^2 & +\frac{1}{2} uv |a| |d| + \frac{1}{2} uv |b| |c| \\ +uv |b| |d| + uv \beta |a| |c| - uv \beta |b| |d| & \\ \frac{1}{2} |a| |b| |u|^2 + \frac{1}{2} |c| |d| |v|^2 & \frac{1}{2} |a|^2 |u|^2 + \frac{1}{2} |c|^2 |v|^2 - \frac{1}{2} \beta |a|^2 |u|^2 \\ +\frac{1}{2} uv |a| |d| + \frac{1}{2} uv |b| |c| & +\frac{1}{2} \beta |b|^2 |u|^2 - \frac{1}{2} \beta |c|^2 |v|^2 + \frac{1}{2} \beta |d|^2 |v|^2 + uv |a| |c| \\ & -uv \beta |a| |c| + uv \beta |b| |d| \end{pmatrix},$$

con constante de normalización definida como,

$$N = \frac{1}{2} |a|^2 |u|^2 + uv |a| |c| + \frac{1}{2} |b|^2 |u|^2 + uv |b| |d| + \frac{1}{2} |c|^2 |v|^2 + \frac{1}{2} |d|^2 |v|^2.$$

Por simple inspección, nuevamente la constante de normalización y por ende la probabilidad de las salidas, es completamente independiente del parámetro de mixtura β ; este comportamiento se presenta incluso antes de aplicar cualquier tipo de condición sobre el estado de salida.

Nuevamente, las condiciones a aplicar serán las ya definidas. Partiendo por el

Caso 1,

$$\rho_{out} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} |a|^2 |u|^2 + \frac{1}{2} |c|^2 |v|^2 & \frac{1}{2} |a|^2 |u|^2 - \frac{1}{2} |c|^2 |v|^2 \\ -uv |a| |c| + 2uv\beta |a| |c| & \frac{1}{2} |a|^2 |u|^2 + \frac{1}{2} |c|^2 |v|^2 \\ \frac{1}{2} |a|^2 |u|^2 - \frac{1}{2} |c|^2 |v|^2 & +uv |a| |c| - 2uv\beta |a| |c| \end{pmatrix}, \quad (5.3.2)$$

$$N = |a|^2 |u|^2 + |c|^2 |v|^2.$$

De estas condiciones recuperamos la misma probabilidad que se obtuvo en el Caso 1 pero con canal puro. Respecto a la fidelidad de esta salida, se tiene

$$F = \frac{\begin{pmatrix} |a|^2 |u|^4 + |c|^2 |v|^4 + |a|^2 |u|^2 |v|^2 + |c|^2 |u|^2 |v|^2 + 2 |a|^2 |u|^3 |v| - 2 |c|^2 |u| |v|^3 \\ -2uv |a| |c| |u|^2 + 2uv |a| |c| |v|^2 + 4uv\beta |a| |c| |u|^2 - 4uv\beta |a| |c| |v|^2 \end{pmatrix}}{2 (|a|^2 |u|^2 + |c|^2 |v|^2)}.$$

Aplicando una compuerta Hadamard al estado 5.3.2, se recuperan las condiciones definidas en el Caso 2,

$$H\rho_{out}H^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{|a|^2 |u|^2}{|a|^2 |u|^2 + |c|^2 |v|^2} & \frac{uv |a| |c| (2\beta - 1)}{|a|^2 |u|^2 + |c|^2 |v|^2} \\ \frac{uv |a| |c| (2\beta - 1)}{|a|^2 |u|^2 + |c|^2 |v|^2} & \frac{|c|^2 |v|^2}{|a|^2 |u|^2 + |c|^2 |v|^2} \end{pmatrix}.$$

Para tal caso la fidelidad de teleportación es

$$F = \frac{(|a|^2 |u|^4 + |c|^2 |v|^4 - 2uv |a| |c| |u| |v| + 4uv\beta |a| |c| |u| |v|)}{|a|^2 |u|^2 + |c|^2 |v|^2}.$$

Finalmente, para el último caso, la salida se convierte en el siguiente estado tras aplicar las condiciones del Caso 3

$$\rho_{out} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} |a|^2 |v|^2 + \frac{1}{2} |b|^2 |u|^2 + \frac{1}{2} \beta |a|^2 |u|^2 & \frac{1}{2} uv |a|^2 + \frac{1}{2} |a| |b| |u|^2 \\ -\frac{1}{2} \beta |a|^2 |v|^2 - \frac{1}{2} \beta |b|^2 |u|^2 + \frac{1}{2} \beta |b|^2 |v|^2 & +\frac{1}{2} |a| |b| |v|^2 + \frac{1}{2} uv |b|^2 \\ +uv |a| |b| & \\ \frac{1}{2} uv |a|^2 + \frac{1}{2} |a| |b| |u|^2 & \frac{1}{2} |a|^2 |u|^2 + \frac{1}{2} |b|^2 |v|^2 - \frac{1}{2} \beta |a|^2 |u|^2 \\ +\frac{1}{2} |a| |b| |v|^2 + \frac{1}{2} uv |b|^2 & +\frac{1}{2} \beta |a|^2 |v|^2 + \frac{1}{2} \beta |b|^2 |u|^2 - \frac{1}{2} \beta |b|^2 |v|^2 \\ +uv |a| |b| & \end{pmatrix}$$

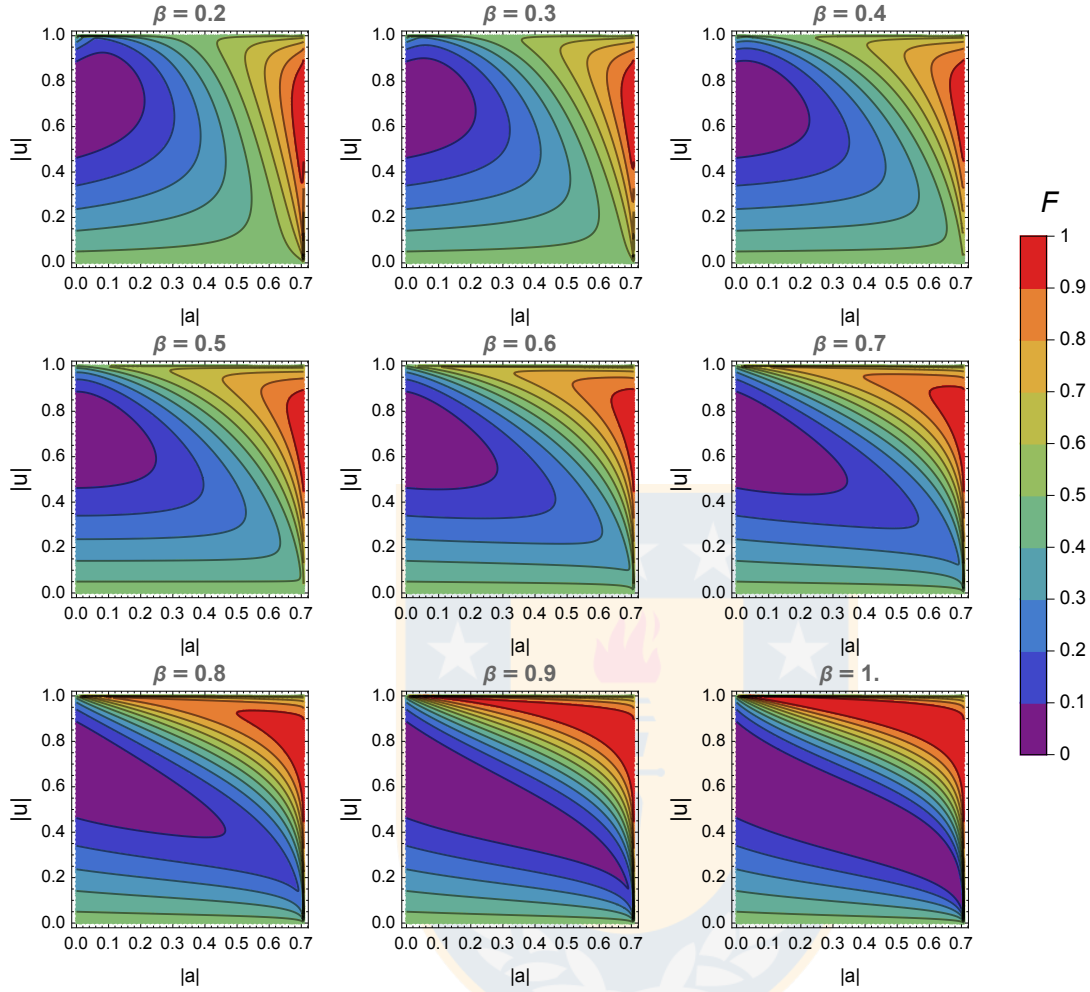


Figura 5.3.1: Diferentes valores de fidelidad F en función del color para diferentes valores de β con las condiciones dadas por el Caso 1 y canal cuántico estado β .

con la constante de normalización definida como

$$N = \frac{1}{2} |a|^2 |u|^2 + \frac{1}{2} |a|^2 |v|^2 + 2uv |a| |b| + \frac{1}{2} |b|^2 |u|^2 + \frac{1}{2} |b|^2 |v|^2.$$

La fidelidad resulta ser

$$F = \frac{\begin{pmatrix} |b|^2 |u|^4 + |b|^2 |v|^4 + \beta |a|^2 |u|^4 + \beta |a|^2 |v|^4 - \beta |b|^2 |u|^4 \\ -\beta |b|^2 |v|^4 + 4 |a|^2 |u|^2 |v|^2 + 2 |b|^2 |u|^2 |v|^2 + 4 |a| |b| |u| |v|^3 \\ + 4 |a| |b| |u|^3 |v| - 2\beta |a|^2 |u|^2 |v|^2 + 2\beta |b|^2 |u|^2 |v|^2 \end{pmatrix}}{|a|^2 |u|^2 + |a|^2 |v|^2 + 4 |a| |b| |u| |v| + |b|^2 |u|^2 + |b|^2 |v|^2}.$$

Con las cantidades obtenidas para la fidelidad de teleportación en cada caso y aplicando la definición 3.6.6, se obtienen las fidelidades promedio mostradas en la

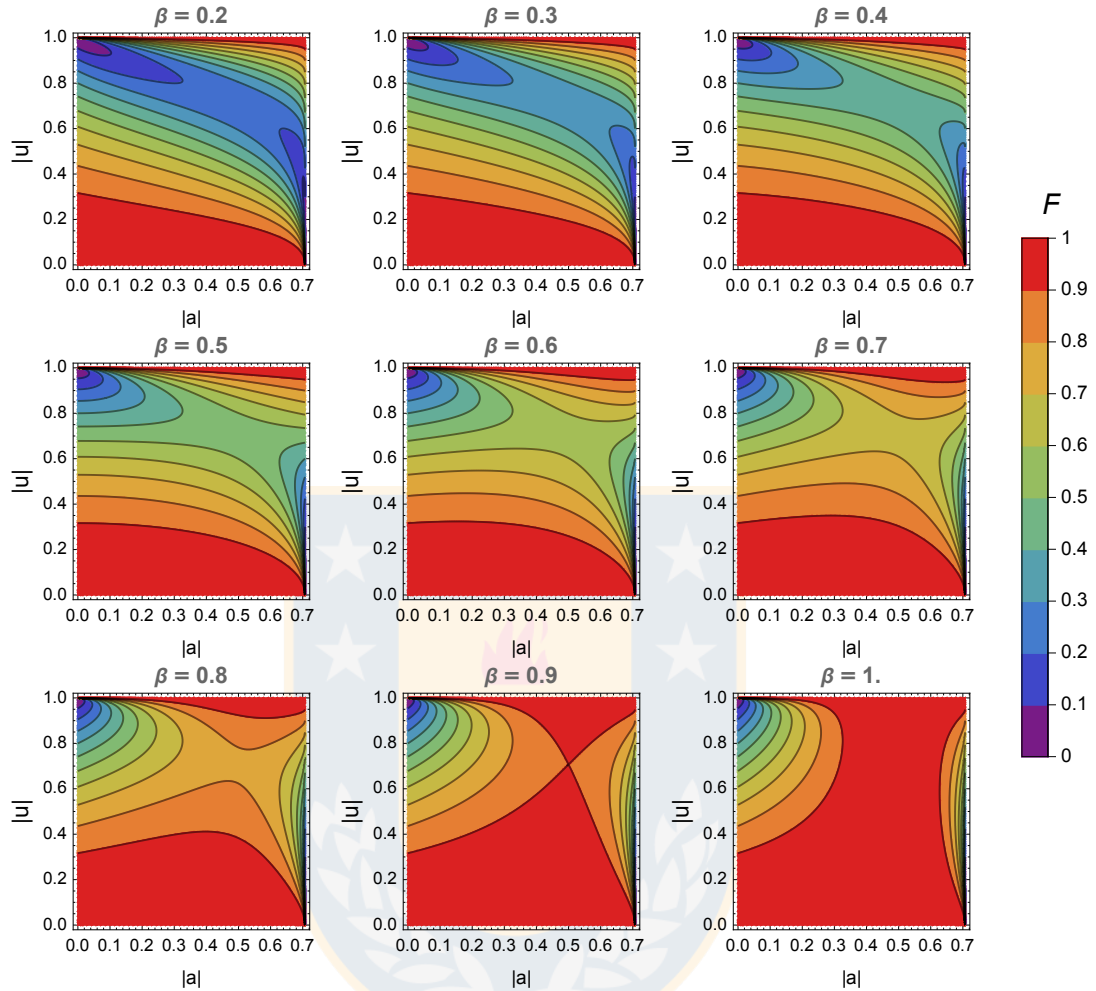


Figura 5.3.2: Diferentes valores de fidelidad F son representados en función del color para diferentes valores fijos de decoherencia β con las condiciones dadas por el Caso 2 y canal cuántico estado β .

figura 5.3.4 para cada caso en análisis, la figura (a) muestra el resultado para el Caso 1, la figura (b) el Caso 2 y (c) el Caso 3.

Al aplicar la restricción de la fidelidad promedio $f > 2/3$, nos restringimos a observar el comportamiento puramente cuántico del protocolo. Los valores para los cuales la fidelidad promedio satisface la condición de anterior se muestran en la figura 5.3.5, de izquierda a derecha se muestran los resultados para el Caso 1, Caso 2 y Caso 3, la línea punteada indica el valor 0,5 en cada eje.

En este tipo de estados, es aún mas evidente los beneficios de usar una condición que promueve el entrelazamiento como la definida en el Caso 3. Esto es claro en el tercer panel de la figura 5.3.5 que nos indica que el límite clásico para la fidelidad

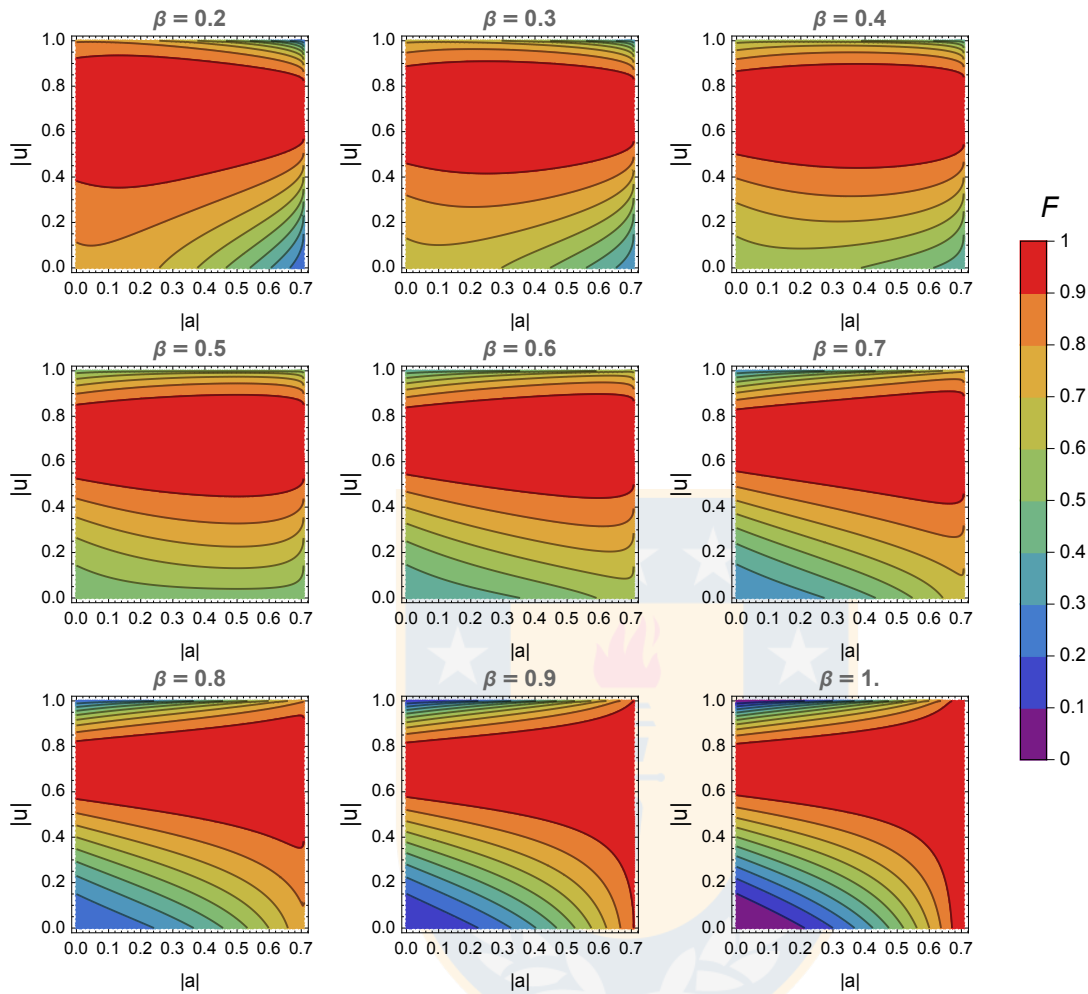


Figura 5.3.3: Diferentes valores de fidelidad F son representados en función del color para diferentes valores de β para el Caso 3 y canal cuántico estado β .

promedio es sobrepasado para todos los valores posibles de las variables β y $|a|$. Algunas conclusiones importantes que obtenemos del protocolo de teleportación usando un estado β son:

- El estado β presenta la misma independencia del parámetro β en la probabilidad del estado de salida tras aplicar la medición $|m\rangle$. Ya que este comportamiento se ha observado en tres diferentes estados X, se intuye que este podría ser un comportamiento propio de esta familia de estados cuando la teleportación se realiza en conjunto con una base general de medición, como lo es $|m\rangle$, en un esquema probabilista.
- Comparativamente el estado β da mejores resultados en las regiones donde $f > 2/3$ (figura 5.3.5) que el estado α , aunque para las condiciones dadas

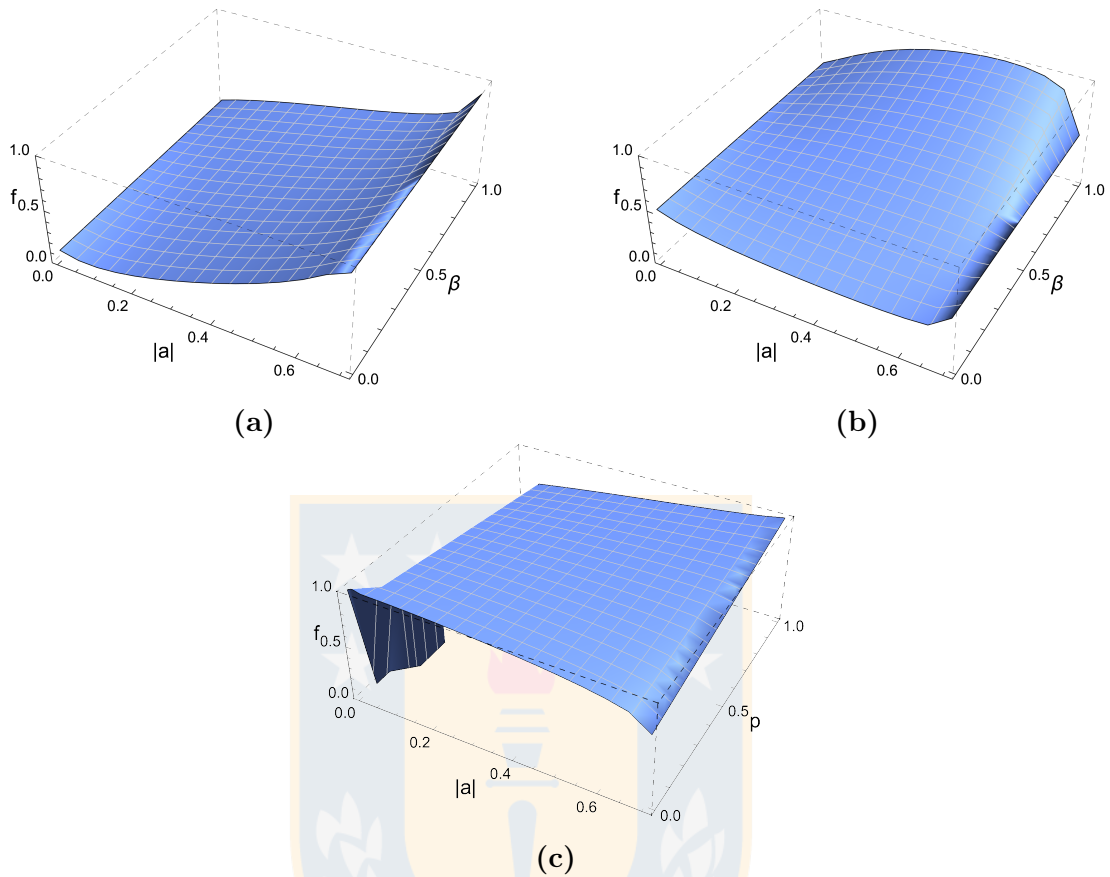


Figura 5.3.4: Fidelidades promedio cuando el canal cuántico es un estado β

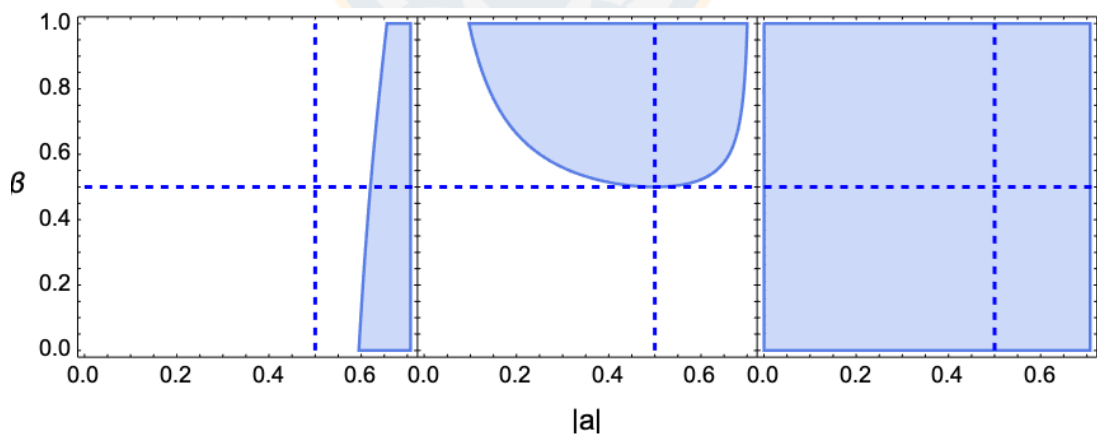


Figura 5.3.5: Valores para los cuales la fidelidad promedio supera los $2/3$ usando un estado β como canal cuántico.

por el Caso 2, los mejores resultados siguen ocurriendo para el estado de Werner. El Caso 1 y Caso 3 son mejores que cuando se emplea un estado α y Werner.

- Nuevamente los resultados son consistentes con los resultados de canal puro,

de manera tal que cuando consideramos $\beta = 0$ o $\beta = 1$ estos últimos son recuperados.

5.4. Fidelidad promedio, puridad y concurrencia

Frecuentemente lo clásico de un estado esta caracterizado por la puridad del mismo. Por clasicidad de un estado, usualmente se refiere a las correlaciones clásicas que presenta el estado debido a la mezcla de sus parámetros. La puridad fue definida en la sección 2.5, por otro lado propiedades cuánticas ligadas a la no localidad pueden ser caracterizadas por medidas de entrelazamiento como aquellas en la sección 3.4 o la negatividad.

Es esperable entonces que la fidelidad de teleportación dependa del entrelazamiento del estado que se use pero también de sus correlaciones clásicas. Nandi et al. [54] estudiaron la relación entre la teleportación de fidelidad con puridad y concurrencia, probando que existen estados con baja puridad y/o concurrencia pero fidelidad de teleportación alta. Otros autores también han estudiado relaciones entre la fidelidad de teleportación con medidas de correlación tanto clásicas como cuánticas [55, 56, 57].

En esta sección se analiza si en el protocolo propuesto en esta tesis hay alguna relación observable como la ya estudiada por otros autores o si el comportamiento para el protocolo propuesto presenta algo excepcional; para esto se observa la variación de la fidelidad promedio para los tres estados X que hemos estudiado en su rol de canal cuántico de comunicación, con la puridad y concurrencia. Esto nos permitirá saber los rangos que hay para cada cantidad y observar directamente tendencias de crecimiento o decrecimiento en la relación de ambas propiedades.

La figura 5.4.1 muestra la variación de fidelidad con puridad y concurrencia para un estado de Werner donde (a) es la relación entre fidelidad promedio versus concurrencia y (b) versus puridad; diferentes curvas representan la relación para diferentes valores de $|a|$ y cada panel ordenado verticalmente muestra cada uno de los tres casos de análisis. De acuerdo a la figura 5.4.1, vemos que para las condiciones $|a| = |b|$ y $|c| = -|d|$ con compuerta de Hadamard (panel del medio) y $|a| = |d|$ y $|b| = |c|$ (panel inferior) un incremento en tanto concurrencia como en puridad implica mayores valores de fidelidad promedio. Cabe notar que a mayor valor de $|a|$ dentro del intervalo $|a| \in [0, 1/\sqrt{2}]$, mayor pendiente del las curvas lo

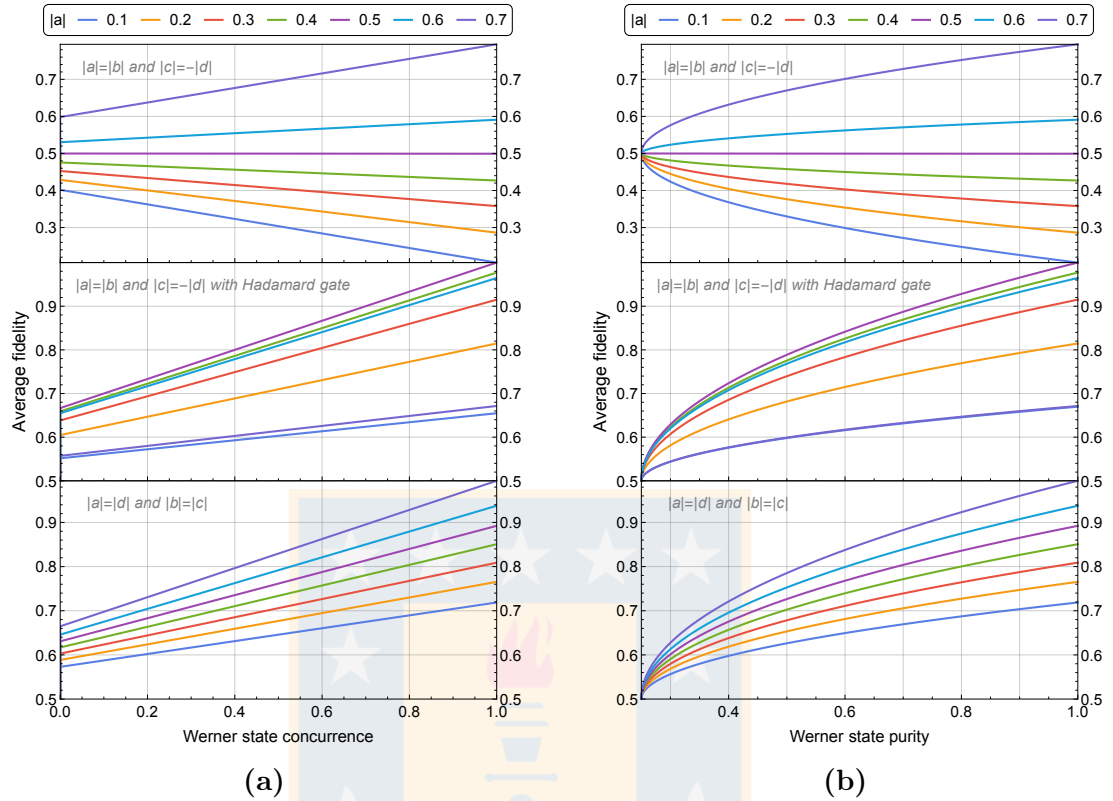


Figura 5.4.1: Variación de fidelidad con puridad y concurrencia para un estado de Werner.

que implica un crecimiento mas rápido en la fidelidad para pequeños incrementos de concurrencia o puridad.

Diferente es lo que ocurre para la condición $|a| = |b|$ y $|c| = -|d|$ sin la compuerta de Hadamard. Estas gráficas tienen un comportamiento dual donde el valor pivotal es $|a| = 0,5$. Para valores $|a| > 0,5$ a mayor concurrencia o puridad se relacionan con una mayor fidelidad. Cuando $|a| = 0,5$ la fidelidad se mantiene constante independiente de la cantidad de entrelazamiento o puridad del estado, en este caso la base de medición corresponde al estado

$$|m\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle|0\rangle + \frac{1}{2}|0\rangle|1\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle|1\rangle. \quad (5.4.1)$$

Para $|a| < 0,5$, hallamos que alta concurrencia y puridad se vinculan a valores cada vez más pequeños de fidelidad promedio.

Para el estado α la figura 5.4.2a muestra en (a) la variación de fidelidad promedio versus concurrencia y en (b) versus puridad cuando el canal cuántico es un estado α ,

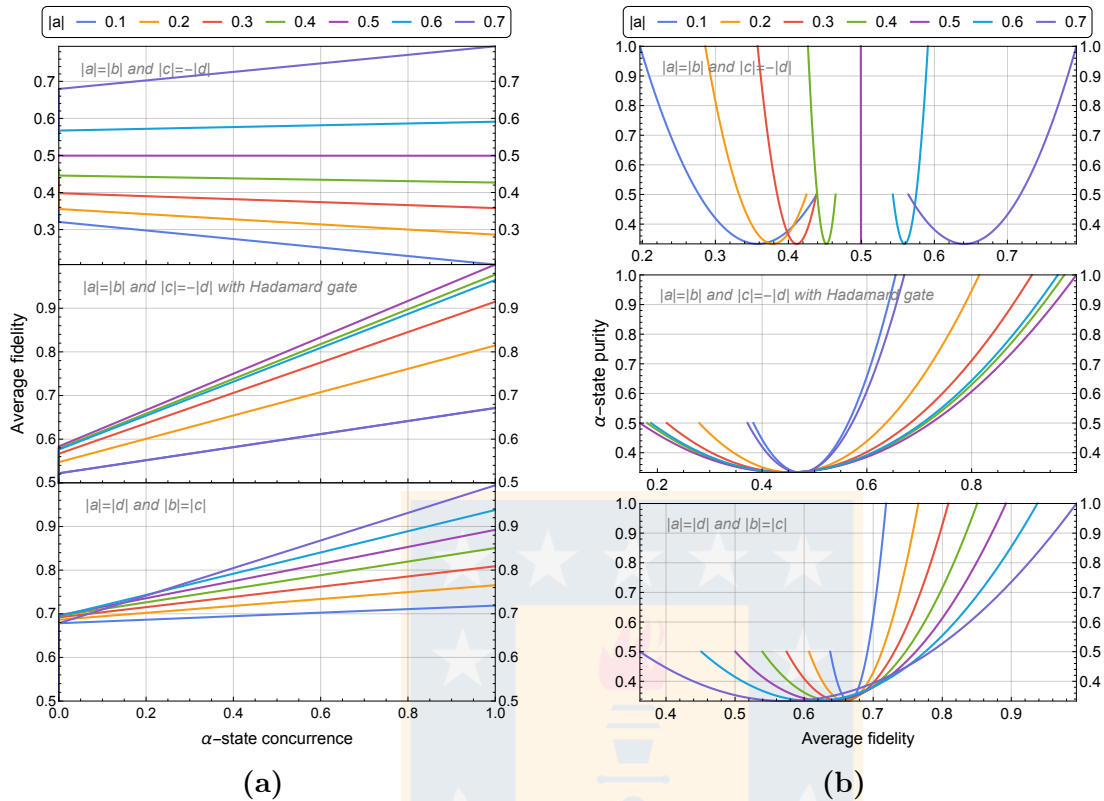


Figura 5.4.2: (a) Variación de fidelidad promedio versus concurrencia y (b) versus puridad cuando el canal cuántico es un estado α . Diferentes curvas representan la relación para diferentes valores de $|a|$ y cada panel ordenado verticalmente muestra cada uno de los tres casos de análisis.

diferentes curvas representan la relación para diferentes valores de $|a|$ y cada panel ordenado verticalmente muestra cada uno de los tres casos de análisis. Comenzando por la relación entre fidelidad y concurrencia en la figura 5.4.2a, el panel superior ($|a| = |b|$ y $|c| = -|d|$) muestra que para $|a| < 0,5$ alta concurrencia se vincula a alta fidelidad pero las pendientes son considerablemente bajas, de modo que para incrementos grandes de concurrencia la fidelidad no hay incrementos significativos. Nuevamente en $|a| = 0,5$ la fidelidad promedio es constante. El panel del medio en contraste con el superior, muestra curvas con pendientes elevadas, de modo que ahora incrementos de concurrencia conllevan un aumento rápido en fidelidad promedio. Considerando el orden que tienen las curvas se logra entender que dentro del rango $|a| \in [0, 1]$ las pendientes crecen, alcanzan su peak en $|a| = 0,5$ y luego decrecen para valores extremos. El panel inferior $|a| = |d|$ y $|b| = |c|$ muestra una relación entre el valor de $|a| \in [0, 1]$ y la pendiente de la relación, de modo que valores altos de $|a|$ cercanos a $1/\sqrt{2}$ muestran un crecimiento mayor de fidelidad

promedio para pequeños incrementos de concurrencia.

Respecto a la relación entre la fidelidad promedio y la puridad mostradas en la figura 5.4.2b, vemos que la relación entre ambas propiedades sigue la forma de una parábola. Esto dificulta asignar una monotonicidad única ya que hay un segmento creciente y otro decreciente. De todos modos con certeza podemos decir que la mayor parte de la curva relaciona incrementos de puridad con incrementos de fidelidad.

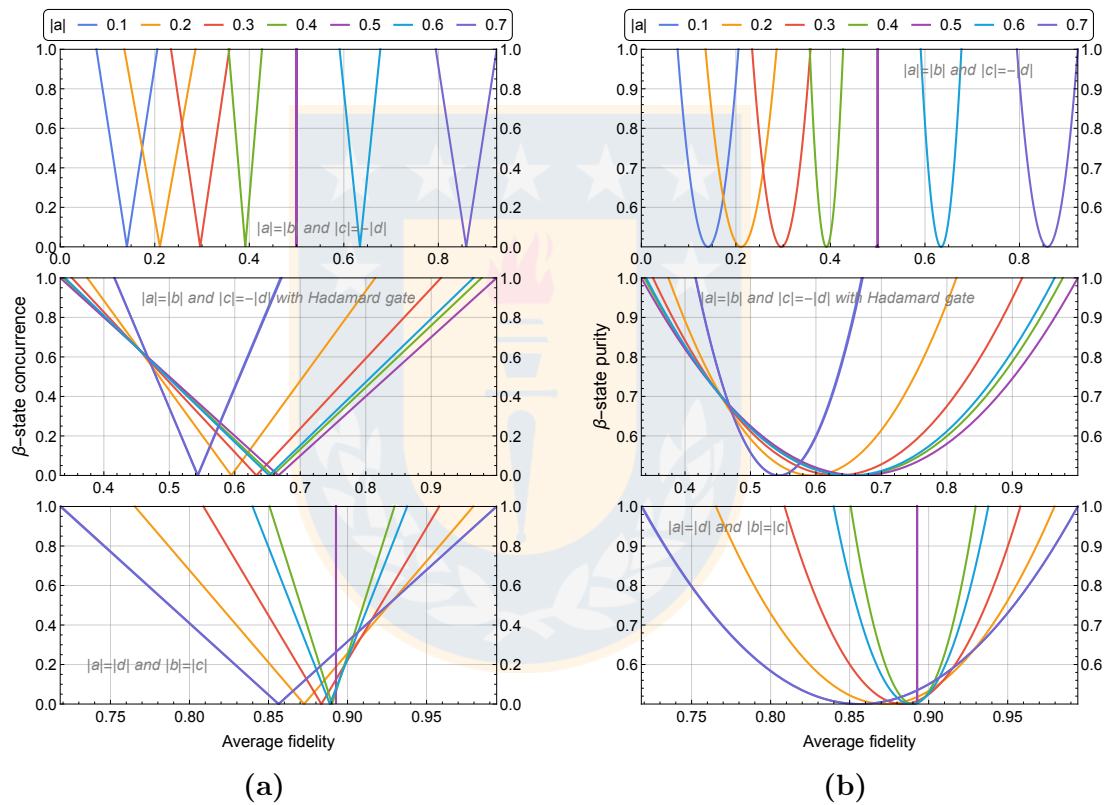


Figura 5.4.3: Variación de fidelidad con puridad y concurrencia para un estado β .

Los estados β son diferentes a los otros dos tipos de estados X presentados ya que su concurrencia y puridad son curvas que presentan una simetría vertical. Así en todo los casos que se pueden analizar, habrá un comportamiento dual. La figura 5.4.3 muestra en (a) la variación de fidelidad promedio versus concurrencia y en (b) versus puridad cuando el canal cuántico es un estado β , diferentes curvas representan la relación para diferentes valores de $|a|$ y cada panel ordenado verticalmente muestra cada uno de los tres casos de análisis.

A partir de los paneles superiores en 5.4.3, es claro que un valor alto de $|a|$ esta

ligado a un valor alto de fidelidad. El valor pivotal entre las curvas tanto para la relación de la fidelidad con la concurrencia como con la puridad, nuevamente es $|a| = 0,5$. Cuando $|a| < 0,5$ la fidelidad es mayor a 0,5. Para aquellos casos alta fidelidad se relaciona con alta puridad o concurrencia o todo lo contrario, es decir, alta concurrencia o puridad se relacionan con un valor mas bajo de fidelidad. Este comportamiento dual es debido a la simetría de las curvas tanto de concurrencia como de puridad.

En los paneles del medio, no solo hay una tendencia en el orden de las curvas pero en la apertura de estas. Una curva mas abierta se puede encontrar para valores medios en el rango $|a| \in [0, 0,707]$, especificamente en $|a| \in \{0,2, 0,3, 0,4, 0,5\}$. En estos casos especificos, encontramos que alta puridad o concurrencia implican alta fidelidad.

En los ultimos paneles, el comportamiento es similar a los paneles del medio con la diferencia uevamente de un valor pivotal en $|a| = 0,5$ y $f = 0,89$. En torno a valores centrales del rango $|a| \in [0, 0,707]$ las curvas son mas cerradas pero valores bajos de concurrencia y puridad implican una fidelidad promedio mucho mas alta. Esto es lo que se desprende de la region donde las curvas se concencentran los mínimos de las curvas, esta region muestra una mayor fidelidad que en los paneles del medio.

En general, algunas conclusiones importantes que se desprenden del análisis anterior son:

- Para el caso del estado de Werner, se mantiene el comportamiento observado por los autores citados en un comienzo. Hay una clara monotonicidad creciente para la relación entre fidelidad promedio y concurrencia y/o puridad.
 - Una excepción a la relación trivial entre fidelidad, concurrencia y puridad se observa en los paneles superiores para la condición $|a| = |b|$ y $|c| = -|d|$, donde para $|a| < 0,5$ el comportamiento es opuesto, a mayor concurrencia o puridad la fidelidad es menor. Este resultado es posible ignorarlo sin perder generalidad ya que estas curvas están por debajo del límite clásico de fidelidad $f = 2/3$, por lo que a nivel general del problema propuesto, no son de interés alguno.
- Para los estados α ocurre lo mismo que con los estados de Werner, mayor

concurrencia y/o puridad significa mayor fidelidad. Destacan los paneles inferiores de la figura 5.4.2 donde incluso para valores bajos de pureza y/o concurrencia, la fidelidad promedio supera $2/3$.

- Para los estados β , en general se tiene un comportamiento dual. Por un lado hay regiones para las cuales un aumento en concurrencia y/o pureza conllevan con un aumento en fidelidad promedio. Por el contrario también hay rangos donde un aumento en concurrencia y/o pureza conllevan a una disminución en fidelidad promedio.
 - A pesar de la doble monotonidad que muestra el estado β , al concentrarnos en los paneles medios e inferiores, fidelidades cercanas a $2/3$ o superiores a estas pueden obtenerse con cualquier cantidad de entrelazamiento que no sea nula y lo mismo para la pureza. De manera similar a los estados α , para la condición $|a| = |d|$ y $|b| = |c|$ la fidelidad promedio se encuentra siempre por sobre los $2/3$.
- El comportamiento observado en todos los casos, salvo pequeñas excepciones que ya han sido nombradas, son consistentes con lo reportado por Nandi et al. [54]. Esto es un resultado que sigue siendo destacable ya que en el caso de esta tesis el protocolo de teleportación probabilista empleado conlleva la aplicación de una serie de condiciones bastantes restrictivas. Dichas condiciones en secciones anteriores implicaban comportamientos anómalos pero en esta sección ese no fue el caso.
 - Sobre este punto, notamos que para todos los casos, siempre existen valores para la base de medición distintos de los coeficientes de Bell tal que no es necesario un entrelazamiento muy alto para obtener fidelidades promedio propias de un protocolo de comunicación cuántica. Esto es algo muy positivo ya que significa que no es necesario preparar estados perfectos con entrelazamiento máximo o fuertes correlaciones en general para aprovechar las propiedades cuánticas en comunicación.

Capítulo 6

Conclusión

Se comenzó abordando conceptos básicos de álgebra lineal fundamentales para el desarrollo del trabajo presentado luego se detalló el significado físico de los objetos matemáticos a usar y se enmarcaron en el contexto específico de la mecánica cuántica gracias a una serie de postulados, finalmente se presentó una revisión de las ideas y características principales de la información y computación cuántica, además de como estas forman parte del protocolo de teleportación en sus dos implementaciones: determinista y probabilista.

Se propuso un protocolo de teleportación probabilista donde el canal cuántico era un estado de Bell $|\phi^+\rangle$ y la medición aplicada para realizar la transferencia de información era una medición general $|m\rangle$. En esta prescripción se halló que se puede generalizar varias implementaciones del protocolo, desde el caso completamente determinista hasta diferentes casos probabilistas sobre los cuales recae el foco de atención y es en estos últimos casos probabilistas donde naturalmente surge interés por optimizar la teleportación probabilista tal que se aleje de soluciones triviales ya conocidas para los coeficientes de $|m\rangle$, así el objetivo principal se centra en estudiar si es posible teleportar vía una proyección en $|m\rangle$ con probabilidad superior a $1/4$, que es la probabilidad que se logra cuando usamos una medición del tipo Bell.

Para realizar lo anterior, se fijaron un conjunto de tres condiciones distintas que se pueden aplicar sobre la base de medición general $|m\rangle$, estas condiciones relacionan tanto sub espacios entrelazados como lo son $\mathcal{H}_{00,11}$ y $\mathcal{H}_{01,10}$, y sub espacios de estados separables como $\mathcal{H}_{00,01}$ y $\mathcal{H}_{10,11}$. Al aplicar el protocolo de teleportación

probabilista cuando el canal cuántico corresponde a un estado puro se observa lo siguiente:

- Para todos los casos estudiados es posible teleportar con probabilidad mayor a $1/4$ cuando la fidelidad promedio $2/3 < f < 1$. Aunque algunos casos presentan un desempeño mejor que otros, por ejemplo cuando hay condiciones en espacios separables como $\mathcal{H}_{00,01}$ y $\mathcal{H}_{10,11}$, la compuerta de Hadamard mejora la fidelidad promedio.
- Cuando aplicamos condiciones sobre $|m\rangle$ que relacionan los sub espacios $\mathcal{H}_{00,11}$ y $\mathcal{H}_{01,10}$, la teleportación siempre supera el límite clásico $f > 2/3$ y su probabilidad es mayor a $1/4$. En este caso la fidelidad promedio y probabilidad promedio varían de acuerdo a la figura 4.3.1.

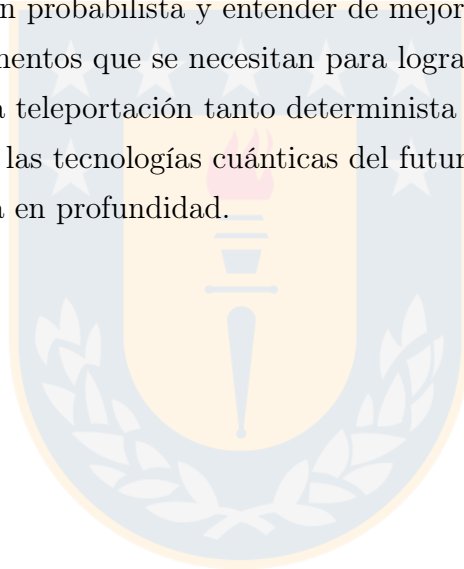
Al realizar el protocolo de teleportación probabilista con un canal cuántico mixto, específicamente tres tipos de estados X , un estado de Werner, un estado α y β , encontramos lo siguiente:

- A pesar de la mixtura de los estados, la probabilidad del estado de salida del protocolo es completamente independiente del parámetro de decoherencia en cada caso. Si bien solo se analizó para tres distribuciones de estados X , se cree que esta característica puede ser propia de esta familia de estados.
- Para todos los casos estudiados con cada uno de los canales diferentes, es posible realizar teleportación probabilista con probabilidad mayor a $1/4$ siempre y cuando la fidelidad se encuentre entre $2/3 < f < 1$. Comparativamente los rangos donde se satisface que la fidelidad promedio $2/3 < f < 1$ son mayores para el estado β .
- Un aumento en la concurrencia del canal cuántico está vinculado a un incremento de fidelidad promedio de teleportación, de manera tal que es posible tener concurrencias menores a 0,5 pero fidelidades $f > 2/3$ en algunos casos.

El esquema propuesto es robusto respecto a las pruebas auto impuestas, donde el desafío era optimizar la probabilidad para que fuese mayor al caso trivial de teleportación y este fue cumplido con diferentes tipos de canales cuánticos de comunicación, una de las consecuencias de esta optimización fue la necesidad de imponer condiciones importantes sobre la fidelidad promedio de manera tal que

no se pierdan las cualidades cuánticas del protocolo. De paso se pudo observar los efectos de correlaciones cuánticas como el entrelazamiento sobre la base de medición, donde las correlaciones que existen en los sub espacios que se manipulan afectan directamente la fidelidad promedio. Es destacable el hecho de que si bien las correlaciones cuánticas son un recurso que posibilita la comunicación cuántica con características sobresalientes respecto a la comunicación clásica, estas correlaciones parecen no necesitar ser máximas para obtener resultados exitosos.

Dentro de las proyecciones de la presente investigación se busca que los resultados obtenidos puedan posibilitar la exploración profunda de diversas implementaciones del protocolo de teleportación probabilista y entender de mejor manera el rol que cumple cada uno de los elementos que se necesitan para lograr teleportación de manera exitosa. Sin duda, la teleportación tanto determinista como probabilista jugará un rol importante en las tecnologías cuánticas del futuro por lo que es de suma importancia estudiarla en profundidad.



Bibliografía

- [1] W. Wootters and W. Zurek. A single quantum cannot be cloned. *Nature*, 299:802, 10 1982. doi: 10.1038/299802a0.
- [2] Peter Shor. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM Review*, 41, 05 1997. doi: 10.1137/S0036144598347011.
- [3] Lov Grover. Fast quantum mechanical algorithm for database search. *Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, 06 1996. doi: 10.1145/237814.237866.
- [4] Richard Feynman. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, 21, 06 1982.
- [5] Daniel Gottesman, Thomas Jennewein, and Sarah Croke. Longer-baseline telescopes using quantum repeaters. *Physical Review Letters*, 109, 07 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.109.070503.
- [6] E.T Khabiboulline, Johannes Borregaard, K. Greve, and M.D Lukin. Optical interferometry with quantum networks. *Physical Review Letters*, 123, 08 2019. doi: 10.1103/PhysRevLett.123.070504.
- [7] Jianyu Wang, Ping Xu, Hai-Lin Yong, Liang Zhang, Liao Shengkai, Juan Yin, Weiyue Liu, Wen-Qi Cai, Meng Yang, Li Li, Kui-Xing Yang, Xuan Han, Yong-Qiang Yao, Ji Li, Hai-Yan Wu, Song Wan, Lei Liu, Ding-Quan Liu, Yao-Wu Kuang, and Jian-Wei Pan. Ground-to-satellite quantum teleportation. *Nature*, 549, 02 2017. doi: 10.1038/nature23675.
- [8] Charles Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres, and William Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Physical review letters*, 70:1895–1899, 04 1993. doi: 10.1103/PhysRevLett.70.1895.
- [9] Dirk Bouwmeester, Jian-Wei Pan, Klaus Mattle, Manfred Eibl, Harald Weinfurter, and Anton Zeilinger. Experimental quantum teleportation. *Nature*, 390:575, 12 1997. doi: 10.1038/37539.
- [10] Wolfgang Duer, Raphael Lamprecht, and Stefan Heusler. Towards a quantum internet. *European Journal of Physics*, 38, 04 2017. doi: 10.1088/1361-6404/aa6df7.

- [11] Wan-Li Li, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo. Probabilistic teleportation and entanglement matching. *Physical Review A*, 61, 10 1999. doi: 10.1103/PhysRevA.61.034301.
- [12] Nicolas Gisin. Nonlocality criteria for quantum teleportation. *Physics Letters A*, 210:157–159, 01 1996. doi: 10.1016/S0375-9601(96)80002-8.
- [13] Xian-Min Jin, Jianyu Wang, Bin Yang, Zhen-Huan Yi, Fei Zhou, Xiao-Fan Xu, Shao-Kai Wang, Dong Yang, Yuan-Feng Hu, Shuo Jiang, Tao Yang, Hao Yin, Kai Chen, Cheng-Zhi Peng, and Jian-Wei Pan. Experimental free-space quantum teleportation. *Nature Photonics*, 4:376, 05 2010. doi: 10.1038/nphoton.2010.87.
- [14] Paulo Mendonca, Run Teh, Margaret Reid, Peter Drummond, Yeong-Cherng Liang, and Yu-Hao Yeh. Quantum fidelity measures for mixed states. *Reports on Progress in Physics*, 82, 04 2019. doi: 10.1088/1361-6633/ab1ca4.
- [15] Satyabrata Adhikari, Archan Majumdar, Sovik Roy, Biplab Ghosh, and N. Nayak. Teleportation via maximally and non-maximally entangled mixed states. *Quantum Information And Computation*, 10:398–419, 05 2010. doi: 10.26421/QIC10.5-6-3.
- [16] S. Campbell and M. Paternostro. Teleporting bipartite entanglement using maximally entangled mixed channels. *International Journal of Quantum Information*, 08, 11 2011. doi: 10.1142/S021974991000606X.
- [17] Raphael Fortes and Gustavo Rigolin. Probabilistic quantum teleportation in the presence of noise. *Physical Review A*, 93, 04 2016. doi: 10.1103/PhysRevA.93.062330.
- [18] Hari Prakash and Vikram Verma. Quantum teleportation of single qubit mixed information state with werner-like state as resource. *Proceedings 12th International Conference on Fiber Optics and Photonics, Photonics 2014*, 05 2013. doi: 10.1364/PHOTONICS.2014.S5A.82.
- [19] Ting Yu and J. Eberly. Evolution from entanglement to decoherence of bipartite mixed "x" states. *Quantum information & computation*, 7, 04 2005.
- [20] Seyed Mohammad Hashemi Rafsanjani and Samridhi Agarwal. X-matrices provide a lower bound of concurrence. 04 2012.
- [21] S. M. Hashemi Rafsanjani, M. Huber, C. J. Broadbent, and J. H. Eberly. Genuinely multipartite concurrence of n -qubit x matrices. *Phys. Rev. A*, 86: 062303, Dec 2012. doi: 10.1103/PhysRevA.86.062303.
- [22] Will McCutcheon, Anna Pappa, Bryn Bell, A. McMillan, André Chailloux, Tom Lawson, Mhlambululi Mafu, Damian Markham, Eleni Diamanti, Iordanis Kerenidis, J. Rarity, and M. Tame. Experimental verification of multipartite entanglement in quantum networks. *Nature Communications*, 7:13251, 11 2016. doi: 10.1038/ncomms13251.

- [23] Thomas Herbst, Thomas Scheidl, Matthias Fink, Johannes Handsteiner, Bernhard Wittmann, Rupert Ursin, and Anton Zeilinger. Teleportation of entanglement over 143 km. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112(46):14202–14205, 2015. doi: 10.1073/pnas.1517007112.
- [24] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm gedankenexperiment: A new violation of bell's inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49:91–94, Jul 1982. doi: 10.1103/PhysRevLett.49.91.
- [25] Gonzalo Carvacho, Francesco Andreoli, Luca Santodonato, Marco Bentivegna, Rafael Chaves, and Fabio Sciarrino. Experimental violation of local causality in a quantum network. *Nature Communications*, 8(1), Mar 2017. ISSN 2041-1723. doi: 10.1038/ncomms14775.
- [26] Luigi Accardi and Massimo Regoli. Non-locality and quantum theory: New experimental evidence. 07 2000. doi: 10.1007/0-306-47114-0_50.
- [27] Pei-Lun He, Zhao-Han Zhang, and Feng He. Young's double-slit interference in a hydrogen atom. *Physical Review Letters*, 124, 04 2020. doi: 10.1103/PhysRevLett.124.163201.
- [28] Wen-Rong Qi, Rui Liu, Ling-Jun Kong, Wang Zhouxiang, Shuang-Yin Huang, Chenghou Tu, Yongnan Li, and Hui-Tian Wang. Double-slit interference of single twisted photons. *Chinese Optics Letters*, 18:102601, 01 2020. doi: 10.3788/COL202018.102601.
- [29] Jin-Shi Xu, Xiao-Ye Xu, Chuan-Feng Li, Cheng-Jie Zhang, Xu-Bo Zou, and Guang-Can Guo. Experimental investigation of classical and quantum correlations under decoherence. *Nature communications*, 1:7, 04 2010. doi: 10.1038/ncomms1005.
- [30] Albert Einstein, Boris Podolsky, and Nathan Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, 47: 777–780, 01 1935. doi: 10.1103/PhysRev.48.696.
- [31] N. Bohr. *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?*, pages 291–298. 01 1996. ISBN 9780444898920. doi: 10.1016/S1876-0503(08)70375-X.
- [32] Gilles Brassard and André Méthot. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered correct? *International Journal of Quantum Information*, 40:463–468, 04 2010. doi: 10.1007/s10701-010-9411-9.
- [33] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. i. *Phys. Rev.*, 85:166–179, Jan 1952. doi: 10.1103/PhysRev.85.166.
- [34] J. Bell. Six possible worlds of quantum mechanics. *Foundations of Physics*, 22:1201–1215, 10 1992. doi: 10.1007/BF01889711.

- [35] J. S. Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, 1:195–200, Nov 1964. doi: 10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195.
- [36] Sandu Popescu and Daniel Rohrlich. Quantum nonlocality as an axiom. *Foundations of Physics*, 24:379–385, 03 1994. doi: 10.1007/BF02058098.
- [37] M. Bell and S. Gao. *Quantum Nonlocality and Reality: 50 Years of Bell's Theorem*. Cambridge University Press, 2016. ISBN 9781316692417.
- [38] Erwin Schrödinger. Discussion of probability relations between separated systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31:555 – 563, 10 1935. doi: 10.1017/S0305004100013554.
- [39] Ryszard Horodecki, Pawel Horodecki, Michal Horodecki, and Karol Horodecki. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, 81, 02 2007. doi: 10.1103/RevModPhys.81.865.
- [40] N. Cerf and Christoph Adami. Negative entropy and information in quantum mechanics. *Physical Review Letters*, 79, 12 1995. doi: 10.1103/PhysRevLett.79.5194.
- [41] Michał Horodecki, Jonathan Oppenheim, and Andreas Winter. Partial quantum information. *Nature*, 436(7051):673–676, Aug 2005. ISSN 1476-4687. doi: 10.1038/nature03909.
- [42] N. Cerf and Christoph Adami. Quantum extension of conditional probability. *Physical Review A*, 60, 08 1999.
- [43] Charles Bennett, David DiVincenzo, John Smolin, and William Wootters. Mixed state entanglement and quantum error correction. *Physical Review A*, 54, 05 1996. doi: 10.1103/PhysRevA.54.3824.
- [44] William Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, 80, 10 1997. doi: 10.1103/PhysRevLett.80.2245.
- [45] L. Roa, Robinson Gómez, Ariana Muñoz, and Gautam Rai. Entanglement thresholds for displaying the quantum nature of teleportation. *Annals of Physics*, 371, 08 2016. doi: 10.1016/j.aop.2016.05.004.
- [46] Sandu Popescu. Bell's inequalities versus teleportation: What is nonlocality? *Phys. Rev. Lett.*, 72:797–799, Feb 1994. doi: 10.1103/PhysRevLett.72.797.
- [47] Pankaj Agrawal and Arun Pati. Probabilistic quantum teleportation. *Physics Letters A*, 305:12–17, 11 2002. doi: 10.1016/S0375-9601(02)01383-X.
- [48] Li-Yi Hsu. Optimal information extraction in probabilistic teleportation. *Phys. Rev. A*, 66, 07 2002. doi: 10.1103/PhysRevA.66.012308.
- [49] Renan Cabrera and William Baylis. Average fidelity in n-qubit systems. *Physics Letters A*, 368, 01 2007. doi: 10.1016/j.physleta.2007.03.068.

- [50] Richard Jozsa. Fidelity for mixed quantum states. *J. Mod. Opt.*, 41:2315–2323, 12 1994. doi: 10.1080/09500349414552171.
- [51] Mark Bowdrey, Daniel Oi, Anthony J. Short, Konrad Banaszek, and Jonathan A. Jones. Fidelity of single qubit maps. *Physics Letters A*, 294, 02 2002. doi: 10.1016/S0375-9601(02)00069-5.
- [52] F. Lastra, C. E. López, L. Roa, and J. C. Retamal. Entanglement of formation for a family of $(2 \otimes d)$ -dimensional systems. *Phys. Rev. A*, 85:022320, Feb 2012. doi: 10.1103/PhysRevA.85.022320.
- [53] Ariana Muñoz, Gesa Grüning, and Luis Roa. Entanglement-swapping for x-states demands threshold values. *Physical Review A*, 89, 06 2014. doi: 10.1103/PhysRevA.89.064301.
- [54] Sumit Nandi, Chandan Datta, Arpan Das, and Pankaj Agrawal. Two-qubit mixed states and teleportation fidelity: Purity, concurrence, and beyond. *The European Physical Journal D*, 72, 10 2018. doi: 10.1140/epjd/e2018-90252-2.
- [55] Ling Yin-Sheng. Channel’s concurrence and quantum teleportation. *Communications in Theoretical Physics*, 43:55–58, 01 2005. doi: 10.1088/0253-6102/43/1/011.
- [56] Li Ming, Shao-Ming Fei, and Li-Jost Xianqing. Concurrence, tangle and fully entangled fraction. *Chinese Physics B*, 19:090315, 09 2010. doi: 10.1088/1674-1056/19/9/090315.
- [57] Hari Prakash and Manoj Mishra. Increasing average fidelity by using non-maximally entangled resource in teleportation of superposed coherent states. 07 2011.
- [58] Robinson Gómez Núñez. Redistribución de fidelidad promedio en teleportación cuántica. Master’s thesis, Universidad de Concepción, 2015.
- [59] Matías Soto Moscoso. *Correlaciones Cuánticas en Teleportación y Teoría Cuántica de Juegos*. PhD thesis, Universidad de Concepción, 2017.
- [60] Mark M. Wilde. *Quantum Information Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2 edition, 2013.
- [61] Ariana Muñoz Espinoza. Swapping de correlaciones cuánticas. Master’s thesis, Universidad de Concepción, 2014.
- [62] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 10 edition, 2010.
- [63] Sergei Treil. *Linear Algebra Done Wrong*. Department of Mathematics, Brown University, 5 edition, 2017.
- [64] Jochen Pade. *Quantum Mechanics for Pedestrians 1: Fundamentals*. Springer International Publishing, 2018.

- [65] Luis Roa Opplinger. *Notas de clases: Mecánica Cuántica I*. Universidad de Concepción, 2019.
- [66] Sk Sazim, Satyabrata Adhikari, Subhashish Banerjee, and Tanumoy Pramanik. Quantification of entanglement of teleportation in arbitrary dimensions. *Quantum Information Processing*, 13, 08 2012. doi: 10.1007/s11128-013-0697-3.
- [67] Michał Horodecki, Paweł Horodecki, and Ryszard Horodecki. General teleportation channel, singlet fraction, and quasidistillation. *Phys. Rev. A*, 60:1888–1898, Sep 1999. doi: 10.1103/PhysRevA.60.1888.
- [68] S. Barnett. *Quantum Information*. Oxford Master Series in Physics. OUP Oxford, 2009. ISBN 9780198527626.
- [69] Cristian Jara Figueroa. Generación y modificación de correlaciones cuánticas, 2013.
- [70] N.D. Mermin. *Quantum Computer Science: An Introduction*. Cambridge University Press, 2007. ISBN 9781139466806.
- [71] J. Pade. *Quantum Mechanics for Pedestrians 2: Applications and Extensions*. Undergraduate Lecture Notes in Physics. Springer International Publishing, 2013. ISBN 9783319008134.
- [72] Scott Hill and William Wootters. Entanglement of a pair of quantum bits. *Physical Review Letters*, 78, 04 1997. doi: 10.1103/PhysRevLett.78.5022.
- [73] Hari Prakash and Manoj Mishra. Teleportation of superposed coherent states using nonmaximally entangled resources. *JOSA B*, 29:2915–2923, 10 2012. doi: 10.1364/JOSAB.29.002915.
- [74] Jaewoo Joo, Young-Jai Park, Sangchul Oh, and Jaewan Kim. Quantum teleportation via a w state. *New J. Phys.*, 5, 06 2003. doi: 10.1088/1367-2630/5/1/136.
- [75] Arkaprabha Ghosal, Debarshi Das, Saptarshi Roy, and Somshubhro Bandyopadhyay. Fidelity deviation in quantum teleportation with a two-qubit state. *Journal of Physics A Mathematical and Theoretical*, 53:145304, 01 2020. doi: 10.1088/1751-8121/ab6ede.
- [76] Piotr Badziąg, Michał Horodecki, Paweł Horodecki, and Ryszard Horodecki. Local environment can enhance fidelity of quantum teleportation. *Physical Review A*, 62, 12 1999. doi: 10.1103/PhysRevA.62.012311.
- [77] Xy Hu, Ying Gu, Qihuang Gong, and Guangcan Guo. Noise effect on fidelity of two-qubit teleportation. *Phys. Rev. A*, 81, 05 2010. doi: 10.1103/PhysRevA.81.054302.
- [78] Arkaprabha Ghosal, Debarshi Das, Saptarshi Roy, and Somshubhro Bandyopadhyay. Optimal two-qubit states for quantum teleportation vis-

- à-vis state properties. *Physical Review A*, 101:012304, 01 2020. doi: 10.1103/PhysRevA.101.012304.
- [79] Luis Roa, Ariana Muñoz, Alice Hutin, and Matthias Hecker. Threefold entanglement matching. *Quantum Information Processing*, 14:1–17, 09 2015. doi: 10.1007/s11128-015-1118-6.
- [80] Zhuo-Liang Cao and Wei Song. Teleportation of a two-particle entangled state via w class states. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 347:177–183, 03 2005. doi: 10.1016/j.physa.2004.08.033.
- [81] Bao-Sen Shi and Akihisa Tomita. Teleportation of an unknown state by w state. *Physics Letters A*, 296:161–164, 04 2002. doi: 10.1016/S0375-9601(02)00257-8.



AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN

Quien suscribe, Isabella Ignacia Toro Trujillo, RUT 19.875.030-1, alumna de la carrera de Magíster en Ciencias mención Física, de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, de la Universidad de Concepción, declara ser autora de “Teleportación probabilista: probabilidad y fidelidad como dos variables complementarias” y conceder derecho de publicación, comunicación al público y reproducción de esa obra, en forma total o parcial en cualquier medio y bajo cualquier forma del mismo, a la Universidad de Concepción, Chile, para formar parte de la colección material o digital de cualquiera de las bibliotecas de la Universidad de Concepción y del Repositorio UDEC. Esta autorización es de forma libre y gratuita, y considera la reproducción de la obra con fines académicos y de difusión tanto nacional como internacionalmente.

Asimismo, quien suscribe declara que dicha obra no infringe derechos de autor de terceros.



.....