



Universidad de Concepción
Dirección de Postgrado
Facultad de Ingeniería - Programa de Magíster en Ciencias de la Ingeniería con mención
en Ingeniería Mecánica



Modelo de rotor vertical con descansos hidrodinámicos

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería con mención
en Ingeniería Mecánica

NICOLÁS ANDRÉS PÉREZ PÉREZ
CONCEPCIÓN-CHILE
2019

Profesor Guía: Cristian Rodríguez Godoy
Dpto. de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería
Universidad de Concepción

**UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO INGENIERÍA MECÁNICA**

Profesor Patrocinante:
Dr. Cristian Rodríguez



MODELO DE ROTOR VERTICAL CON DESCANSOS HIDRODINÁMICOS

Nicolás A. Pérez P.

Informe de Tesis de Magíster
para optar al Título de

Magíster en Ciencias de la Ingeniería con mención en Ingeniería Mecánica

Octubre 2019

RESUMEN

En las centrales hidroeléctricas la operación confiable de las unidades generadoras es un tema de suma importancia. Estas deben generar energía durante largos periodos de tiempo y en forma continua, para de este modo satisfacer la demanda eléctrica. Una detención no programada ocasionada por una falla inesperada conlleva costos económicos elevados. Por esta razón es necesario conocer la condición mecánica de las unidades sin la necesidad de detenerlas, y para ello es fundamental comprender en detalle el comportamiento dinámico de estas máquinas. Los elementos relevantes para modelar el comportamiento dinámico son los rotores de la turbina y el generador, el eje de la unidad, y los descansos. Dado el nivel de carga, los descansos de turbinas hidráulicas de mediana y alta potencia son de tipo hidrodinámico. Además, la mayoría de las unidades sobre 20 MW de potencia tienen una configuración de rotor vertical. En la literatura se han mostrado principalmente modelos para descansos hidrodinámicos operando en rotores horizontales, en los cuales el peso del rotor es la fuerza más importante en magnitud y brinda estabilidad al descanso al mantenerlo cargado en una dirección fija. Sin embargo, en configuraciones de rotor vertical los descansos radiales no soportan la carga unidireccional debido al peso del rotor, sino que soportan una carga rotatoria asociada principalmente al desbalanceamiento del rotor. Es por ello que es de interés formular un modelo matemático que simule el comportamiento dinámico del descanso bajo las condiciones particulares que presenta el rotor vertical.

El objetivo principal de este informe de tesis es plantear un modelo que caracterice el comportamiento de un descanso hidrodinámico horizontal y vertical sometido a fuerzas dinámicas y que opera en condiciones tanto estacionarias como transientes e implementarlo en un modelo de rotor vertical que represente la dinámica de una unidad generadora.

La metodología empleada para alcanzar este objetivo consiste en plantear la ecuación que gobierna el comportamiento del fluido en un descanso hidrodinámico y resolverla para encontrar la fuerza que ejerce el fluido del descanso sobre el rotor. Luego se plantean las ecuaciones del movimiento, las cuales incluyen la fuerza del desbalanceamiento del rotor, la fuerza del fluido y una fuerza de dirección y magnitud constante (que en el caso de descanso horizontal corresponde al peso del rotor y que para el caso de descanso vertical es igual a cero). Las ecuaciones del movimiento son resueltas mediante un programa desarrollado en MATLAB.

Como resultado se obtiene la trayectoria del eje, su velocidad y aceleración de traslación bajo distintas condiciones de operación: ya sea variando la velocidad de rotación, el nivel de carga o el grado de desbalanceamiento. El modelo es aplicado a casos de la literatura, y luego se aplica a un caso de estudio en que se analiza la condición mecánica de una unidad generadora.

Se concluye que el modelo planteado en este trabajo refleja en forma adecuada los resultados numéricos y experimentales de diversos autores, mediante estos resultados el modelo queda validado. Además al aplicarse a un caso real de estudio, se obtienen resultados satisfactorios con respecto a las mediciones realizadas en terreno, incluso en un caso en que los huelgos radiales de los patines eran no uniformes. Se simularon y compararon las trayectorias de los descansos en una condición de operación estacionaria y con una potencia conectada de 25 MW. Con estos resultados se calculó una diferencia máxima de 13 % en la amplitud de la órbita obtenida con respecto a los resultados medidos en terreno.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	i
TABLA DE CONTENIDO	ii
ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	iv
ÍNDICE DE TABLAS	vi
NOMENCLATURA	viii
1 Introducción	1
1.1 Descripción del Problema	1
1.2 Antecedentes Generales	1
1.3 Estado del Arte	2
1.4 Objetivo General	6
1.5 Objetivos Específicos	6
1.6 Metodología	6
2 Teoría sobre Descansos Hidrodinámicos	8
2.1 Descansos Hidrodinámicos	8
2.2 Lubricación Hidrodinámica y Ecuación de Reynolds	10
2.3 Simplificaciones de la Ecuación de Reynolds	19
2.4 Condiciones de Borde	20
2.5 Modelo de Parámetros Concentrados	21
2.6 Método de Diferencias Finitas	23
3 Desarrollo del Modelo	25
3.1 Unidad Generadora	25
3.2 Modelo del Descanso (Circular)	28
3.2.1 Presión en el Descanso Hidrodinámico	29
3.2.2 Fuerza en el Descanso Hidrodinámico	31
3.2.3 Solución de las Ecuaciones del Movimiento	32
3.3 Modelo del Descanso (Tilting Pad)	33
3.4 Solución Ecuaciones del Movimiento (Modelo Unidad Generadora)	35
4 Análisis de Resultados	38
4.1 Validación del Modelo de Descanso Hidrodinámico	38
4.1.1 Caso Rotor Horizontal	38
4.1.2 Caso Rotor Vertical	41
4.1.3 Caso Unidad Generadora	44
4.2 Evaluación del Modelo	46
4.2.1 Efecto del Desbalanceamiento del Rotor	46
4.2.2 Efecto de la Velocidad de Rotación	47

4.2.3	Efecto del Peso del Rotor en el Descanso	48
4.2.4	Variables Cinemáticas	49
4.3	Aplicación a un Caso Industrial	51
4.3.1	Antecedentes	51
4.3.2	Aplicación del Modelo y Resultados	54
5	Conclusiones	58
	Referencias	60
	ANEXO A	61
A	Algoritmos utilizados en Lenguaje MATLAB	61
A.1	Algoritmo para determinar la Presión en forma Analítica y Numérica	61
A.2	Algoritmo para Solución de Ecuaciones del Movimiento	64
A.3	Algoritmo utilizado en simulaciones de Caso Rotor Vertical	66
A.4	Algoritmo utilizado en simulaciones de Caso Unidad Generadora	67



ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Figura 1	Vista transversal de un descanso hidrodinámico.	8
Figura 2	Tipos de descansos según su sección transversal.	9
Figura 3	Película de aceite ubicada entre el descanso y el eje.	10
Figura 4	Volumen de control del film de aceite.	11
Figura 5	Elemento prismático de fluido.	13
Figura 6	Sección transversal del descanso con dimensiones relevantes	14
Figura 7	Presión adimensional en descanso corto, [Hemmati et al. 2017].	17
Figura 8	Número local de Reynolds Re^* para distintos valores de excentricidad relativa ϵ	18
Figura 9	Condiciones de borde para la presión del fluido en el eje tangencial.	20
Figura 10	Modelo de parámetros concentrados de descanso hidrodinámico.	21
Figura 11	Coefficientes directos de rigidez y amortiguamiento, [Rao 1983].	22
Figura 12	Coefficientes cruzados de rigidez y amortiguamiento, [Rao 1983].	22
Figura 13	Malla propuesta para el método de diferencias finitas	23
Figura 14	Unidad generadora de central hidroeléctrica Itaipu [Carvalho et al. 2017].	25
Figura 15	Modelo de unidad generadora planteado por [Carvalho et al. 2017].	26
Figura 16	Modelo propuesto de unidad generadora.	26
Figura 17	Alternativas para definir $\omega(t)$	28
Figura 18	Esquema del descanso hidrodinámico.	29
Figura 19	Distribución de presión en descanso para distintos valores de L/D	31
Figura 20	Representación esquemática del perfil de presión en descanso cilíndrico.	34
Figura 21	Representación esquemática del perfil de presión en descanso tilting pad.	34
Figura 22	Esquema del banco de ensayo utilizado por [Wang et al. 2006].	39
Figura 23	Comparación de trayectorias en descanso corto $S = 0,3$	39
Figura 24	Comparación de trayectorias en descanso corto para 3 condiciones de operación	40
Figura 25	Esquema del banco de ensayo utilizado por [Nässelqvist et al. 2014].	41
Figura 26	Desplazamiento del eje en el descanso con desbalanceamiento de $1,4 \times 10^{-3}$ kgm.	42
Figura 27	Desplazamiento del eje en el descanso con desbalanceamiento de $3,3 \times 10^{-3}$ kgm.	42
Figura 28	Desplazamiento del eje en el descanso con desbalanceamiento de $5,0 \times 10^{-3}$ kgm.	43
Figura 29	Comparación de mediciones experimentales [Nässelqvist et al. 2014] y simuladas	43
Figura 30	Vibración relativa en x del descanso UJB y LJB con $G4,25$ mm/s	45
Figura 31	Órbitas del eje en el descanso UJB con un desbalanceamiento de $G4,25$ mm/s	45
Figura 32	Trayectorias en descanso para distintos grados de balanceamiento.	46
Figura 33	Trayectorias en descanso para distintas velocidades de rotación ω	47
Figura 34	Trayectorias en descanso para distintos niveles de precarga W	48
Figura 35	Velocidad de rotación del muñón en el tiempo.	49
Figura 36	Velocidades de giro y vibratoria radial en ensayo de partida.	50
Figura 37	Aceleraciones centrípeta y tangencial en ensayo de partida.	50
Figura 38	Aceleración coriolis y relativa en ensayo de partida.	51
Figura 39	Esquema de la unidad generadora	52
Figura 40	Esquemas de la ubicación de los segmentos	53
Figura 41	Amplitud de la componente $1 \times \omega$ versus la potencia generada	54
Figura 41	Órbitas medidas a 300 rpm y 25 MW de potencia generada	54
Figura 42	Espectros obtenidos en cada descanso a una velocidad de operación de 300 rpm	55

Figura 42	Órbitas medidas y simuladas a 300 rpm y 25MW de potencia	56
Figura 43	Espectros de cada descanso a 300 rpm y a 25 MW de potencia	57



ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1	Constantes de turbulencia para los modelos Constantinescu y Ng–Pan–Elrod. . . .	16
Tabla 2	Características de descanso hidrodinámico [Carvalho et al. 2017].	17
Tabla 3	Parámetros de discretización en el método de diferencias finitas.	30
Tabla 4	Parámetros fijados para analizar la presión.	30
Tabla 5	Especificaciones del rotor ensayado por [Wang et al. 2006].	39
Tabla 6	Especificaciones del rotor estudiado por [Nässelqvist et al. 2014].	41
Tabla 7	Especificaciones de los descansos UJB, LJB y TJB [Carvalho et al. 2017]	44
Tabla 8	Especificaciones del rotor estudiado por [Cha et al. 2014].	46
Tabla 9	Especificaciones de los descansos UJB, LJB y TJB	52
Tabla 10	Holguras medidas en los descansos UJB y LJB	53
Tabla 11	Amplitudes de la componente $1 \times \omega$ en μm p-p	53
Tabla 12	Amplitudes de la componente $1 \times \omega$ en μm p-p (simulada)	55
Tabla 13	Amplitudes de la componente $1 \times \omega$ en μm p-p (25 MW)	56
Tabla 14	Amplitudes de la componente $1 \times \omega$ en μm p-p (25 MW simulada)	56



NOMENCLATURA

a	coeficiente de presión	[–]
b, \hat{b}	constantes de turbulencia	[–]
A	error absoluto	[–]
c	coeficiente de amortiguamiento	[N s/m]
C	huelgo radial	[m]
d	distancia de la masa desbalanceada al centro geométrico del eje	[m]
D	diámetro del descanso	[m]
e	excentricidad	[m]
f	fuerza debido a la presión del fluido	[N]
f_d	fuerza debido al desbalanceamiento residual	[N]
G	grado de calidad de balanceamiento	[mm/s]
h	espesor de la película de fluido	[m]
k	coeficiente de rigidez	[N/s]
L	largo del descanso	[m]
M	número de discretizaciones en la dirección axial	[–]
M_r	masa del rotor	[kg]
N	número de discretizaciones en la dirección circunferencial	[–]
O	centro del rotor	[–]
O_d	centro del descanso	[–]
P	presión del fluido	[Pa]
\bar{P}	presión adimensional del fluido	[–]
R	radio del muñón	[m]
R_d	radio del descanso	[m]
\overline{Re}	número de Reynolds	[–]
Re^*	número local de Reynolds	[–]
S	número de Sommerfeld	[–]
t	tiempo	[s]
Δt	paso de tiempo	[s]
T	periodo de evaluación	[s]
u, v, w	velocidad tangencial, radial y axial	[m/s]
U_i, V_i, W_i	velocidad tangencial, radial y axial del fluido	[m/s]
U	desbalanceamiento del rotor	[kg m]
W	fuerza peso soportado por el descanso	[N]
x, y, z	sistema coordenado rotatorio	[m]
\bar{x}, \bar{y}	desplazamiento relativo del muñón en X e Y	[–]
\dot{x}, \dot{y}	velocidades en X e Y	[m/s]
Δz	tamaño de elemento en la dirección z	[m]
X, Y y Z	sistema coordenado inercial	[m]
\bar{X}	vector de estado	[–]

Letras griegas

ϵ	excentricidad relativa	
$\dot{\epsilon}$	tasa de cambio de excentricidad relativa en el tiempo	[1/s]
θ	coordenada angular medida a partir de la línea de postura	[rad]
$\Delta\theta$	tamaño de elemento en la dirección θ	[rad]
μ	viscosidad dinámica	[Pa s]
ρ	densidad del fluido lubricante	[kg/m ³]
σ	esfuerzo normal	[Pa]
τ	esfuerzo de corte	[Pa]
ϕ	ángulo de postura	[rad]
$\dot{\phi}$	tasa de cambio del ángulo de postura en el tiempo	[rad/s]
φ	ángulo de inclinación entre f_d y el eje X	[rad]
ω	velocidad de rotación del eje	[rad/s]

Índices

0	inicial
1, 2	superficie del descanso y del muñón respectivamente
<i>atm</i>	atmosférica
<i>c, f, l</i>	corto, finito y largo respectivamente
<i>i, j</i>	posición del nodo de la malla en las direcciones θ y z
<i>k</i>	número de iteraciones
<i>n</i>	n-ésimo tiempo
<i>p</i>	partida
<i>r, t</i>	radial y tangencial



CAPÍTULO 1

Introducción

1.1 Descripción del Problema

En las centrales hidroeléctricas la operación confiable de las unidades generadoras es un tema de gran importancia. El funcionamiento de estas máquinas debe extenderse por largos periodos de tiempo y en forma continua, por lo que la detención no programada debido a una falla inesperada ocasiona pérdidas económicas considerables [Carvalho et al. 2017]. Los elementos relevantes para simular o modelar el comportamiento dinámico son: los rotores de la turbina y el generador; el eje de la unidad; y los descansos. Dado el nivel de carga y tamaño de las unidades los descansos de turbinas hidráulicas de mediana y alta potencia son en la mayoría de los casos de tipo hidrodinámico. Gran parte de las unidades sobre 20 MW de potencia tienen una configuración de rotor vertical. Por lo que comprender el comportamiento de las unidades generadoras implica conocer la dinámica del descanso hidrodinámico orientado verticalmente. En el afán de mejorar la confiabilidad de las unidades se hace necesario conocer en detalle el comportamiento dinámico de estas máquinas, el cual depende altamente del comportamiento de los descansos.

1.2 Antecedentes Generales

La modelación de rotores montados sobre descansos hidrodinámicos que soportan un rotor de eje horizontal es un tema que ha sido ampliamente estudiado, pues predecir el comportamiento dinámico de estas máquinas es esencial para tomar decisiones con respecto al diseño, mantenimiento y puesta en servicio, con el fin de aumentar la confiabilidad.

Los descansos con película de aceite son ampliamente usados en turbo-maquinaria gracias a su: alta capacidad de amortiguación y de carga, ausencia de desgaste debido a mecanismos de contacto y una vasta vida útil.

La modelación de estos elementos es compleja, pues en un descanso hidrodinámico las reacciones involucradas dependen del comportamiento del fluido, el cual es descrito por la teoría hidrodinámica. Describir el comportamiento de estos descansos a partir de coeficientes de rigidez y amortiguamiento equivalentes es factible. Existen gráficas de las cuales es posible estimar la rigidez y el amortiguamiento a partir del número de Sommerfeld, sin embargo, estos coeficientes suponen una precarga del descanso, que corresponde a una fuerza estática sobre el mismo. Por este motivo no es posible in-

corporar casos de baja precarga. Una alternativa para determinar la fuerza que ejerce el fluido sobre el eje es recurrir a expresiones analíticas que incorporen el comportamiento del fluido. Estas surgen como resultado de considerar aproximaciones en la geometría del descanso, las cuales simplifican la ecuación de presión de fluido en el descanso.

En rotores horizontales el eje alcanza una posición de equilibrio gracias a la acción del peso del rotor (que actúa como precarga) y en torno a ese punto describe una pequeña órbita causada por la influencia del desbalanceamiento del rotor. En cambio en máquinas verticales, el peso de la máquina es soportado por descansos axiales, mientras que en los descansos radiales se soporta sólo la fuerza debido al desbalanceamiento, es por ello que el eje alcanza una posición media centrada en estado estacionario y describe una trayectoria orbital más amplia. Los modelos existentes sobre descansos verticales suponen una precarga, la cual en realidad no existe. Es por ello que se desea desarrollar un modelo más ajustado a la realidad y que no requiera de la incorporación de una precarga.

1.3 Estado del Arte

Se han desarrollado numerosos estudios relacionados a los descansos hidrodinámicos, la mayoría de ellos operando en rotores horizontales. [Cha et al. 2014] propone un modelo numérico para un descanso horizontal y vertical tipo *tilting pad*, en el cual estudia el efecto de algunos parámetros de diseño del descanso en la órbita obtenida en servicio, algunos de estos parámetros son el factor de precarga, el huelgo radial y la inclinación del patín. Se estudia además la influencia de distintos materiales del metal blanco en la respuesta del descanso considerando las características viscoelásticas de cada uno. El modelo numérico se enfoca en describir el efecto dinámico del descanso tipo *tilting pad*. El sistema rotor-descanso se compone de un rotor rígido montado a igual distancia de 2 descansos hidrodinámicos idénticos tipo *tilting pad*. El líquido lubricante empleado en el descanso se considera Newtoniano, incompresible, isoviscoso y se asume flujo laminar, por ello se modela empleando la ecuación de Reynolds. Se desprecian los efectos térmicos justificando que en muchas unidades de generación hidroeléctrica la temperatura del descanso no supera los 50 °C, mientras que la temperatura de flujo de aceite es de 40 °C. Además una razón práctica para despreciar los efectos térmicos es la disminución de los tiempos de cálculo computacional, los cuales pueden ser de 3 – 5 horas en un caso y en el otro puede tomar de 3 – 4 días. En este estudio se concluye que un descanso sin metal blanco debe tener una precarga mayor para obtener una órbita similar a la de un descanso que cuenta con metal blanco. Además se obtuvo que la órbita obtenida en el descanso puede ser controlada en forma eficiente cambiando el ángulo del patín.

[Machado et al. 2015] plantea que los descansos hidrodinámicos cilíndricos son ampliamente usados en la industria gracias a su simplicidad, eficiencia y bajo costo. Su uso constante en maquinaria rotatoria trae consigo un desgaste inherente que se acentúa en partidas y paradas al pasar por velocidades críticas. Por ello se hace necesario detectar y modelar el desgaste en este tipo de descansos. El rotor, y el eje son modelados mediante una malla de elementos finitos. Los elementos empleados son de tipo viga Euler-Bernoulli con 4 grados de libertad por nodo, 2 traslacionales y 2 rotacionales, los cuales incluyen los efectos de inercia rotacional y traslacional, efecto giroscópico y energía elástica en flexión. Los descansos son representados mediante un modelo de parámetros concentrados. Estos parámetros provienen de la descomposición en serie de Taylor de la fuerza del fluido y son determinados a partir de diferencias finitas entre la fuerza del fluido sobre el eje y perturbaciones de desplazamiento y velocidad. La fuerza del fluido es determinada en un procesos de integración de la presión en el des-

canso. La distribución de presión se obtiene al resolver la ecuación de Reynolds mediante el método de volúmenes finitos. La ecuación de Reynolds es planteada usando los supuestos de la teoría hidrodinámica, por lo que el fluido se asume newtoniano, de viscosidad constante, sometido solo a fuerzas de origen viscoso y en régimen laminar. Por otra parte, el desgaste se modela como una discontinuidad del huelgo, la cual queda definida por una función específica. Esto hará que la distribución de presión en el descanso cambie, y con ello la fuerza asociada al fluido. En este estudio se obtuvo un método general que representa los principales parámetros del desgaste, los cuales son: la profundidad; la amplitud angular; y la posición angular. Los primeros resultados mostraron que el modelo utilizado para caracterizar el desgaste es sensible a los parámetros seleccionados. Esta sensibilidad se observó en el espesor de la película de aceite, la capacidad de carga del descanso, la distribución de la presión y, finalmente, en los coeficientes de rigidez y amortiguamiento equivalentes.

[Machado et al. 2016] aplica el modelo propuesto en [Machado et al. 2015] y evalúa la respuesta frecuencial del sistema, con el objetivo de detectar el desgaste en un descanso a partir del modelo y verificar estos resultados a partir de un banco de ensayo. El banco de ensayo consta principalmente de un rotor horizontal montado sobre 2 descansos horizontales idénticos y montados simétricamente. Se obtuvo la respuesta frecuencial utilizando el modelo completo (descansos con desgaste, eje y masas) la cual mostró correlación con los resultados experimentales obtenidos con el banco de ensayo debidamente instrumentado. Los resultados obtenidos de las pruebas experimentales mostraron que el método de búsqueda fue lo suficientemente robusto para identificar los parámetros de los diferentes patrones de desgaste, indicando que el modelo de desgaste así como el método de búsqueda mostraron eficiencia en la realización de sus respectivas funciones.

[Ebrat et al. 2010] sostiene que un elemento crítico a considerar en la simulación cada vez mas exacta en dinámica del rotor es la flexibilidad del soporte del descanso hidrodinámico. Plantea que estas deformaciones afectan la posición de las paredes del descanso cambiando el huelgo. La distribución de presión en el descanso es altamente dependiente del huelgo, por ende el comportamiento dinámico se ve afectado por la flexibilidad del soporte. En este estudio se presenta un análisis detallado teniendo en cuenta la teoría elastohidrodinámica para la evaluación exacta de las características dinámicas de la película de aceite. Las ecuaciones diferenciales gobernantes se derivan utilizando una formulación general sin limitación impuesta sobre el comportamiento estructural y elástico del descanso. El modelo para representar el descanso es de parámetros concentrados, estos se obtienen resolviendo la ecuación de Reynolds mediante el método de diferencias finitas agregando un parámetro de perturbación a cada nodo de la malla. Estos permiten cuantificar los efectos locales de deformación estructural. La ecuación de Reynolds se obtuvo considerando los supuestos propuestos en la teoría hidrodinámica, por lo que los resultados obtenidos se limitan a un fluido newtoniano, de viscosidad constante y en régimen laminar. El método de obtención de parámetros propuesto fue validado con resultados numéricos de la literatura. Se observó buena concordancia en los resultados.

[Synnegård et al. 2016] realiza un estudio numérico-experimental de la influencia de los coeficientes cruzados de rigidez y amortiguamiento en un descanso vertical *tipo tilting pad*. En máquinas verticales, las propiedades del descanso dependen de la carga y su dirección, como resultado se requiere que las propiedades del descanso sean calculadas en cada instante de tiempo utilizando las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del fluido. En este estudio por el contrario se modelan las propiedades del descanso como función de la excentricidad y su dirección. Los parámetros del descanso son los coeficientes de rigidez y amortiguamiento. Estos se obtienen a partir de un software comercial que resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes, los supuestos empleados por este software no son mencio-

nadas en el estudio. La ventaja de emplear los parámetros del descanso es la disminución en el tiempo de cálculo computacional. Para la máquina vertical investigada en este estudio, los coeficientes directos son solo 5 veces más grandes que los coeficientes cruzados en el caso más extremo. Para máquinas horizontales, donde la posición de la trayectoria está influenciada por el peso del rotor, la relación entre el coeficiente directo de rigidez y el coeficiente cruzado es alta (> 10), por lo que este último puede ser despreciado. [Synnegård et al. 2016] concluye que los coeficientes de rigidez y amortiguamiento cruzados deben ser incluidos cuando se simulan máquinas verticales sometidas a cargas elevadas o cuando se desea investigar en detalle el comportamiento dinámico. Por otro lado se observó en los espectros de la señal de fuerza simulada la presencia significativa de componentes $3 \times \Omega$ y $5 \times \Omega$, donde Ω es la velocidad de rotación estacionaria del motor. Estas componentes disminuyen en gran medida cuando se desprecian los coeficientes cruzados de rigidez y amortiguamiento, por lo que su presencia es probablemente causada por el comportamiento no lineal del fluido en el descanso. Los resultados experimentales validan la presencia de estas componentes para descansos de tipo *tilting pad*.

[Nässelqvist et al. 2014] establece que en máquinas orientadas verticalmente con descansos hidrodinámicos no hay cargas radiales estáticas predefinidas, tales como la precarga asociada al peso del rotor horizontal. La mayor parte de los software comerciales de rotodinámica se diseñan para calcular las características del descanso basados en las máquinas con un rotor orientado horizontalmente, pues las propiedades del descanso se calculan considerando una excentricidad estática. Para los descansos *tilting pad* no existen expresiones analíticas para los parámetros de rigidez y amortiguamiento y estos dependen de la excentricidad y el ángulo de la carga. En este estudio se presenta un método simplificado para realizar simulaciones numéricas sobre rotores verticales incluyendo parámetros del descanso. En vez de recalculer los parámetros del descanso en cada instante de tiempo estos son representados mediante polinomios para las excentricidades y los ángulos actuales de carga. Los parámetros del descanso se obtienen usando un software comercial que resuelve las ecuaciones de Navier-Stoke considerando efectos térmicos en el fluido, los detalles respecto de los supuestos empleados para obtener los parámetros no son expuestos en este estudio. Los resultados numéricos se comparan con los resultados obtenidos en un banco de ensayo. Este consiste en un rotor vertical montado sobre 2 descansos hidrodinámicos tipo *tilting pad* de 4 patines. Se mide el desplazamiento del eje en el descanso y la deformación del soporte del descanso para determinar las propiedades del banco de ensayo. La comparación entre las mediciones y los resultados simulados muestran pequeñas diferencias en los niveles absolutos de desplazamiento y carga, que no superan el 10 % en todos los casos analizados. Esto puede deberse a dificultades en el cálculo de los parámetros exactos de rigidez y amortiguamiento.

[Huang et al. 2017] estudia un nuevo método para la determinación de inestabilidad en descansos hidrodinámicos horizontales largos y cortos. Para ello propone un vector de estado en coordenadas polares, las cuales resultan particularmente útiles para implementar las expresiones analíticas de las fuerzas del fluido en las ecuaciones del movimiento. Estas expresiones analíticas se obtienen a partir de la ecuación de Reynolds, la cual para los casos particulares de descanso largo y corto posee una solución analítica exacta. Los resultados simulados son comparados con estudios previos en la literatura y se observa una diferencia menor al 2 %. La gran ventaja de este nuevo método es que la velocidad umbral de inestabilidad en el caso del descanso largo es una expresión analítica, mientras que en las publicaciones antes realizadas en coordenadas cartesianas la expresión de la velocidad umbral de inestabilidad debía ser calculada mediante métodos numéricos.

[Hemmati et al. 2017] realiza un análisis de estabilidad a un rotor flexible montado sobre descansos hidrodinámicos tanto cortos como largos. Para determinar la presión del fluido sobre el descanso se

emplea la ecuación modificada de Reynolds en adición a 2 modelos de turbulencia. La diferencia entre estos radica en los coeficientes de turbulencia empleados por cada uno. La mayoría de los estudios relacionados con descansos hidrodinámicos asumen régimen laminar, sin embargo, muchos descansos operan a altas velocidades de rotación y empleando fluidos lubricantes de baja viscosidad cinemática, lo que indica que el fluido trabaja en realidad en régimen turbulento. Es por ello que el análisis de estabilidad para estos casos no puede ser llevado a cabo usando la teoría clásica de lubricación, pues esta asume flujo laminar y viscosidad constante de la película lubricante. Para predecir correctamente el desempeño del descanso es necesario tomar en cuenta la naturaleza del flujo (laminar o turbulento), y determinar el efecto del flujo turbulento en las fuerzas dinámicas del fluido y en el margen de operación estable del descanso. Se simulan condiciones de operación en régimen laminar y turbulento, la respuesta dinámica se expresa como órbitas para los distintos modelos de turbulencia y valores de carga (número de Sommerfeld). Se espera que las condiciones de operación que inducen el régimen turbulento en el fluido generen una condición de inestabilidad, la cual físicamente se manifiesta como una trayectoria del eje en el descanso que crece indefinidamente en el tiempo. Este comportamiento no ocurre cuando el descanso opera en régimen laminar. Se observó que la rigidez del eje juega un importante rol en la estabilidad del descanso. Se encontró que para ejes montados sobre descansos cortos con una rigidez por encima de un valor crítico se puede evitar el peligro de inestabilidad al trabajar en un rango de condiciones de operación con una carga estática elevada. Los resultados obtenidos en este estudio fueron validados a partir de la literatura existente.

[Carvalho et al. 2017] establece a partir de la medición en 20 hidrogenadores en perfecta condición mecánica que las condiciones de funcionamiento de los descansos hidrodinámicos de estas máquinas pueden tener cambios impredecibles y significativos. Este comportamiento impide la determinación teórica de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento del descanso con una precisión adecuada, dificultando la detección de daños. Considerando que los coeficientes dinámicos tienen sensibilidad similar al daño y considerando además que es más fácil medir la rigidez del descanso que la amortiguación, el artículo citado discute un método para estimar en forma experimental los coeficientes de rigidez de descansos en unidades generadoras, usando solamente cambios en las vibraciones medidas, las cuales generalmente son monitoreadas. El modelo es validado mediante señales vibratorias sintetizadas por un modelo matemático simplificado que simula el comportamiento dinámico de grandes unidades generadoras. El método se aplicó a un descanso hidrodinámico de una unidad generadora de 700 MW, utilizando dos excitaciones diferentes: el desbalanceamiento del rotor y vórtices formados en el rotor de la turbina cuando esta máquina opera a cargas parciales.

En síntesis de lo expuesto anteriormente, se puede indicar que gran cantidad de publicaciones sitúan su atención en estudiar la dinámica de rotores horizontales montados sobre descansos hidrodinámicos. En contraste a ello, solo unos cuantos estudios han modelado la dinámica en descanso verticales operando en rotores experimentales, estos son el caso de: [Cha et al. 2014], [Synnegård et al. 2016] y [Nässelqvist et al. 2014]. Por otro lado, muchos menos estudios se refieren a máquinas verticales de uso industrial, solamente [Carvalho et al. 2017] ha expuesto un modelo aplicado a unidades generadoras. Otro factor son los métodos elegidos para calcular la dinámica de los descansos. Si bien, la interacción entre un fluido y un sólido puede ser compleja de modelar, bajo ciertas condiciones de operación algunas variables físicas permiten implementar simplificaciones en los modelos. Estas pueden ser debido a efectos térmicos, [Cha et al. 2014], particularidades geométricas del descanso, [Huang et al. 2017],[Hemmati et al. 2017] o condiciones de flexibilidad o rigidez de los soportes de los descansos, [Ebrat et al. 2010]. Se observa, en general, preferencia en utilizar estas simplificaciones, pues reducen considerablemente los tiempos de cálculo. De entre quienes han preferido realizar

modelos más completos, utilizando métodos numéricos tales como elementos finitos o diferencias finitas, han preferido garantizar la exactitud de los resultados obtenidos en desmedro del tiempo de cálculo. Otros autores se inclinan por modelos de parámetros concentrados, que consideran coeficientes de rigidez y amortiguamiento para definir las propiedades de los descansos hidrodinámicos. Según se indica en [Nässelqvist et al. 2014], los coeficientes de rigidez y amortiguamiento de los descansos hidrodinámicos operando en orientación vertical son variables, es más, cambian de valor en cada instante de tiempo. Esto puede resultar una dificultad en vista que la mayoría de los software comerciales orientados al cálculo de estos coeficientes, están basados en una geometría de rotor horizontal, donde la precarga del peso del rotor sitúa al muñón del descanso en una posición específica.

En respuesta a las problemáticas encontradas, surge la necesidad de desarrollar un modelo de rotor vertical con descansos hidrodinámicos, aprovechando en la medida de lo posible, aquellas simplificaciones que reduzcan los tiempos de cálculo y enfocarlo a aplicaciones de tipo industrial, específicamente unidades generadoras de centrales hidroeléctricas.

1.4 Objetivo General

El objetivo general es plantear un modelo simplificado que caracterice el comportamiento de un descanso hidrodinámico horizontal y vertical sometido a fuerzas dinámicas y que opera en condiciones tanto estacionarias como transientes e implementarlo en un modelo de rotor vertical que represente la dinámica de una unidad generadora.



1.5 Objetivos Específicos

- Desarrollar un algoritmo para la resolución numérica de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del fluido en un descanso hidrodinámico.
- Resolver las ecuaciones del movimiento del eje soportado en el descanso hidrodinámico.
- Hallar la trayectoria del muñón dentro del descanso.
- Validar el modelo en base a estudios disponibles en la literatura.
- Implementar los resultados anteriores en un modelo que represente el comportamiento dinámico de una unidad generadora.

1.6 Metodología

Para lograr los objetivos planteados se debe desarrollar el modelo del descanso hidrodinámico que incorpore el comportamiento vertical, en el cual las fuerzas involucradas son las del fluido y aquella debido al desbalanceamiento del rotor. La fuerza del fluido será hallada a partir de la distribución de presión generada por la película de aceite. Esta distribución de presión responde a las leyes de la dinámica de fluidos, cuyo desarrollo teórico es en general complejo, por lo que se evaluará la obtención de esta tanto en forma numérica como analítica. El método numérico más usado para obtener

la presión del fluido a partir de la ecuación de Reynolds es el de diferencias finitas, mientras que las expresiones analíticas derivan de simplificaciones de la ecuación de Reynolds para casos de geometría particular, como los son el descanso largo y corto. La ecuación de Reynolds es hallada en forma analítica realizando un balance de fuerzas y de flujo a un elemento diferencial de fluido. Los supuestos empleados son los que indica la teoría hidrodinámica, entre los cuales destacan: fluido newtoniano en régimen laminar, isoviscoso y en el que se desprecia el efecto de la inercia del fluido.

Una vez establecidas las expresiones que definen las fuerzas actuando sobre el descanso se deben plantear las ecuaciones del movimiento y resolverlas empleando un método numérico. El resultado de la trayectoria y las variables cinemáticas obtenidas deben ser analizadas para establecer su coherencia. Para ello se debe resolver en primer lugar un caso conocido, como lo es el de rotor horizontal. Luego de esto se reducirá la precarga asociada al peso del rotor para dar paso a un modelo de descanso vertical.

Finalmente se debe implementar el modelo de descanso hidrodinámico a casos de estudio donde la máquina a modelar sea una unidad generadora vertical. Para ello se considera un caso de estudio bien detallado.



CAPÍTULO 2

Teoría sobre Descansos Hidrodinámicos

En este capítulo se presentan en detalle los tipos de descansos hidrodinámicos existentes haciendo énfasis en sus aplicaciones según sus distintas geometrías. Posteriormente se presenta la teoría desarrollada por Osborne Reynolds en 1886 para caracterizar en forma analítica el perfil de presiones de un descanso hidrodinámico. Finalmente se exhiben algunos modelos analíticos existentes: descanso corto; largo; y finito; los cuales son soluciones particulares a la ecuación de Reynolds.

2.1 Descansos Hidrodinámicos

Como se observa en la Figura 1, el descanso hidrodinámico consiste en una sección específica del eje denominada *journal* o muñón, el cual se encuentra sumergido en una capa de aceite que separa al eje del apoyo. Esto es posible gracias a la distribución de presiones en el aceite. Esta distribución de presiones se origina en el movimiento del fluido, el cual se induce por el movimiento del eje. La presencia de la película de aceite aporta dos ventajas importantes, por un lado actúa como agente amortiguador, reduciendo las vibraciones provocadas por zonas resonantes o efectos transientes, y por otro lado actúa como agente lubricador evitando el desgaste por roce entre el eje y el alojamiento.

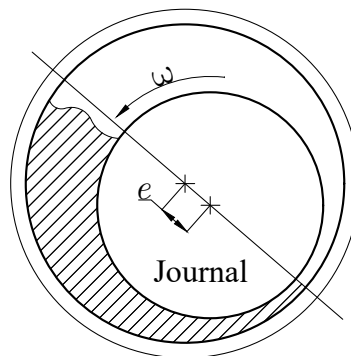


Figura 1: Vista transversal de un descanso hidrodinámico.

Los descansos hidrodinámicos pueden ser clasificados según la dirección de la carga, su sección transversal, el tipo de lubricante que usan y según su principio de operación. Respecto de la dirección de la carga se puede distinguir entre descansos radiales (*journal bearings*) y descansos axiales (*thrust*

bearings). En cuanto a su sección transversal destacan los siguientes tipos de descanso, los cuales se detallan en la Figura 2:

- i) **Descansos parciales:** Su sección transversal es un semicírculo en la zona en la que se aplica la carga. Esta configuración es usada para reducir las pérdidas por fricción al disminuir los gradientes de velocidad en el aceite. Son usados para soportar grandes cargas estáticas, Figura 2(a).
- ii) **Descansos circulares:** Son los descansos más sencillos en cuanto a formulación y los más comunes. Consiste en un muñón cilíndrico dentro de un alojamiento también cilíndrico, Figura 2(b).
- iii) **Descansos de múltiples arcos:** Su sección la conforman múltiples arcos de elipse (lóbulos). Usualmente tienen dos o tres lóbulos. Son utilizados para tener mejor estabilidad del eje, Figura 2(c) y Figura 2(d).
- iv) **Descansos tilting pad:** Consisten en varios segmentos o patines que pueden inclinarse libremente. Estos pueden mejorar la estabilidad del eje en el descanso. Son especialmente útiles para cargas livianas, velocidades de operación elevadas, condiciones en extremo inestables, Figura 2(e).
- v) **Descansos bump-foil:** Estos tienen una lamina flotante, delgada y metálica, entre el muñón y el descanso. Son utilizados para disminuir las vibraciones del eje, Figura 2(f).

Los descansos se pueden clasificar además según el tipo de lubricante. Puede ser de aceite, gas y grasa, entre otros. Además, de acuerdo al principio de operación, los descansos en película de aceite pueden ser hidrodinámicos o hidrostáticos. Los descansos hidrodinámicos soportan la carga debido a la rotación del eje dado que generan presión en la película de aceite. Por su parte, los descansos hidrostáticos reciben la presión desde una fuente externa. En este trabajo se estudia un descanso radial con sección circular, lubricación de aceite y principio de funcionamiento hidrodinámico.

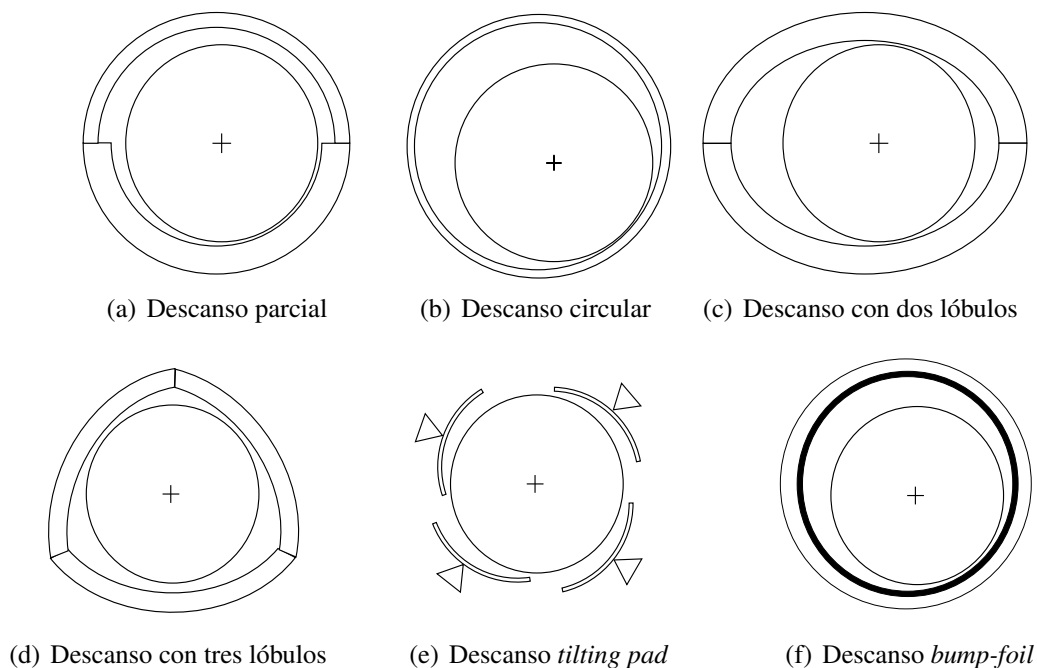


Figura 2: Tipos de descansos según su sección transversal.

2.2 Lubricación Hidrodinámica y Ecuación de Reynolds

La lubricación hidrodinámica consiste en la disminución de la fricción y del desgaste entre superficies por medio de fluidos, aceites, bajo la condición de un espesor de película de aceite h pequeño respecto al largo L o al radio de curvatura R de esta película.

Reynolds desarrolló una teoría de lubricación hidrodinámica, la cual caracteriza la presión asociada a una película de fluido entre dos superficies muy próximas con un movimiento relativo [Reynolds 1886].

La distancia entre ambas es h , la que es suficientemente gruesa para ser tratada por un análisis hidrodinámico y lo suficientemente delgada para ser analizada por los supuestos de la ecuación de Reynolds.

Para determinar el comportamiento del fluido en el descanso hidrodinámico Reynolds consideró los siguientes supuestos:

- El fluido se encuentra en régimen laminar.
- La gravedad y las fuerzas de inercia que actúan sobre el fluido pueden ser ignoradas en comparación a las fuerzas viscosas.
- El fluido es Newtoniano y los coeficientes de viscosidad constantes.
- La presión de fluido no cambia a través del ancho del film.
- La tasa de cambio de las velocidad circunferencial y axial en las direcciones x y z son despreciables respecto a la velocidad radial en la dirección y .
- No hay deslizamiento entre el fluido y la superficie en contacto con éste.

Para hallar la ecuación de Reynolds se seguirá el desarrollo mostrado en [Pinkus 1961]. En la Figura 3 se detalla el sistema coordenado de cada superficie.

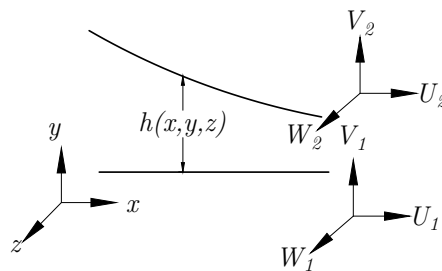


Figura 3: Película de aceite ubicada entre el descanso y el eje.

Bajo los supuestos se toma un volumen de control de la película de aceite como indica la Figura 4.

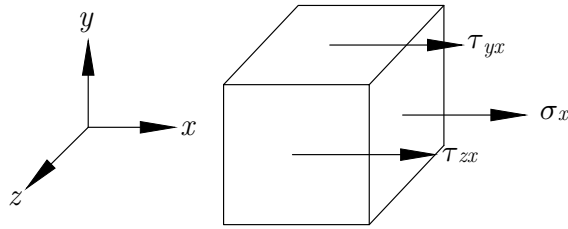


Figura 4: Volumen de control del film de aceite.

Realizando el balance de fuerzas en x se obtiene:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right) dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right) dx dy - \sigma_x dydz - \dots \quad (1)$$

$$\tau_{yx} dx dz - \tau_{zx} dx dy = 0$$

Donde σ_x es el esfuerzo normal actuando en el plano normal a x , mientras que τ_{zx} y τ_{yx} son los esfuerzos de corte actuando en los planos z e y respectivamente, en la dirección x .

Desarrollando la ecuación (1) se obtiene:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

La presión P del fluido es igual a $-\sigma_x$, por lo tanto se obtiene:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \quad (3)$$

Considerando que el fluido es Newtoniano se obtiene:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (4)$$

Donde μ es la viscosidad dinámica del fluido. Por otra parte se asumió que la tasa de cambio de la velocidad en la dirección z era despreciable respecto a la de la dirección y , por lo tanto:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (5)$$

Además se asumió que la viscosidad del fluido es constante, por lo que la expresión queda:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6)$$

Si se realiza un balance de fuerzas en la dirección z se obtendrá de forma análoga:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (7)$$

Ahora integrando dos veces las ecuaciones (6) y (7) se obtendrán expresiones que definen la velocidad u y w . Se asume que la presión P es constante en la dirección y .

Las condiciones de borde para resolver las integrales son:

$$\begin{aligned} u &= U_1, w = W_1 \quad \text{para } y = 0 \\ u &= U_2, w = W_2 \quad \text{para } y = h \end{aligned}$$

Resolviendo se obtienen las velocidades:

$$u = \left[-\frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} y(h-y) \right] + \left[\left(1 - \frac{y}{h}\right) U_1 + \frac{y}{h} U_2 \right] \quad (8)$$

$$w = \left[-\frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial z} y(h-y) \right] + \left[\left(1 - \frac{y}{h}\right) W_1 + \frac{y}{h} W_2 \right] \quad (9)$$

El primer término a la derecha es llamado flujo de presión o flujo de Poiseuille. Esta es una velocidad de flujo debida al gradiente de presión, es proporcional a esta y cambia parabólicamente a través del espesor del film de fluido. El segundo término a la derecha es llamado flujo de corte o flujo de Couette. Es una velocidad de flujo debido al movimiento relativo entre las superficies en la dirección x . Cambia linealmente en la dirección y . El caso general combina ambos tipos de flujos para cuantificar u y w .

Por otro lado se tiene la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

En la Figura 5 se observa el volumen sobre el cual se debe integrar la ecuación de continuidad.

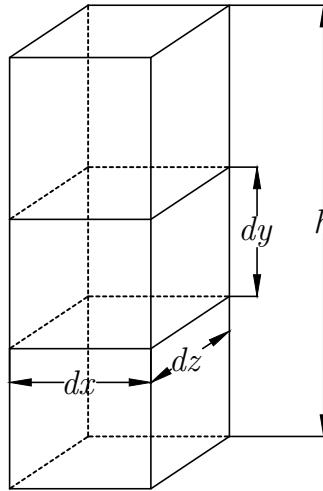


Figura 5: Elemento prismático de fluido.

Para hallar la ecuación de Reynolds se deben reemplazar las velocidades expresadas en las ecuaciones (8) y (9) en la ecuación de continuidad (10). La integración es entre $y = 0$ hasta $y = h$.

Para resolver estas integrales es necesario el uso del teorema de Leibnitz y de las hipótesis planteadas anteriormente, tanto la viscosidad como la presión son constantes en la dirección y .

Además resulta práctico tomar el eje x como la dirección del movimiento relativo de las dos superficies, en cuyo caso se tendría $V_1 = W_1 = W_2 = 0$.

De esta forma la ecuación de Reynolds se expresa como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6 \left((U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial (U_1 + U_2)}{\partial x} + 2V_2 \right) \quad (11)$$

Los términos ubicados a la izquierda de la ecuación indican aproximadamente qué tipo de curvatura tiene la presión. Los términos a la derecha de la ecuación dan cuenta de las causas de los mecanismos de generación de presión:

- El primer término a la derecha de la igualdad representa la generación de presión debido al fluido que es llevado desde la zona con más grosor de fluido a la que posee menos grosor debido al movimiento de la superficie ($U_1 \neq 0$). Este mecanismo se conoce como efecto **wedge** o efecto cuña.
- El segundo término a la derecha de la igualdad representa la generación de presión debido a la variación de la velocidad de superficie en distintos puntos del descanso. Este mecanismo es conocido como efecto **stretch** o efecto estiramiento.
- El tercer término a la derecha de la igualdad representa la generación de presión debido a la variación de superficie de holgura. Este mecanismo es conocido como efecto **squeeze** o efecto apriete.

Ahora se considera un descanso hidrodinámico operando en condiciones no estacionarias como el descrito en la Figura 6. En esta se detallan algunas dimensiones relevantes.

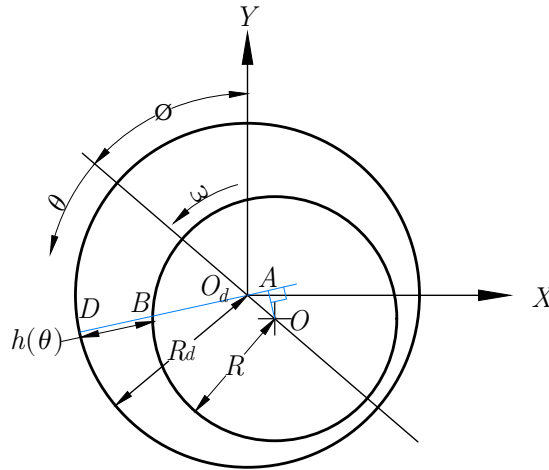


Figura 6: Sección transversal del descanso con dimensiones relevantes .

El punto O_d es el centro del descanso, R_d es el radio del descanso, O es el centro del rotor, R es el radio del rotor y ω es la velocidad de rotación del rotor. La diferencia entre los radios del descanso y del rotor es la holgura C , ($C = R_d - R$).

La distancia entre O_d y O es la excentricidad del rotor. Se define la razón entre ésta y la holgura, e/C , como razón de excentricidad ϵ . Si $\epsilon = 0$ el descanso y el rotor están concéntricos, mientras que si $\epsilon = 1$ un punto de la superficie exterior del rotor está en contacto con la superficie del descanso.

La recta que pasa a través O_d y O define la referencia para el ángulo θ según se observa en la Figura 6 y además divide al descanso simétricamente desde la zona con mayor espesor de aceite $\theta = 0$ hasta la que tiene menor espesor de aceite $\theta = \pi$. Se muestra un espesor h , en particular, representado por la distancia entre B y D . De las siguientes relaciones se puede deducir la expresión que da cuenta de h :

$$h = \overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} \quad (12)$$

Donde los segmentos \overline{AD} y \overline{AB} se definen respectivamente:

$$\overline{AD} = R_d + e \cos \theta \quad (13)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{R^2 - (e \sin \theta)^2} \quad (14)$$

Por lo tanto la altura h de la película de aceite es:

$$h = R_d + e \cos \theta - R \sqrt{1 - (e/R)^2 \sin^2 \theta} \quad (15)$$

El término $e/R \ll 1$, y al estar al cuadrado puede despreciarse en la raíz del último término de la ecuación (15). Además se puede expresar h en función de la razón de excentricidad ϵ .

$$h = C(1 + \epsilon \cos \theta) \quad (16)$$

Las velocidades tangencial U y radial V se definen respectivamente como:

$$U = R\omega + C \frac{d\epsilon}{dt} \sin \theta - C\epsilon \frac{d\phi}{dt} \cos \theta \quad (17)$$

$$V = C \frac{d\epsilon}{dt} \cos \theta + C\epsilon \frac{d\phi}{dt} \sin \theta \quad (18)$$

Ahora diferenciando U con respecto a x se obtiene:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{1}{R} \left(C \frac{d\epsilon}{dt} \cos \theta + C\epsilon \frac{d\phi}{dt} \sin \theta \right) = \frac{1}{R} V \quad (19)$$

Reemplazando lo anterior en el miembro derecho de la ecuación (11) se obtiene:

$$6 \left((U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial (U_1 + U_2)}{\partial x} + 2V_2 \right) \approx 6(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 12 \frac{h}{R} V + 12V_2 \quad (20)$$

$$\approx 6(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 12V_2 \left(\frac{h}{R} + 1 \right) \quad (21)$$

La cantidad h/R es mucho menor que 1, en descansos hidrodinámicos suele rondar la milésima por lo que se puede despreciar en el último término de la derecha. De esta manera se puede observar que el efecto **stretch** tiene una influencia despreciable en comparación con el efecto **squeeze**. De esta forma la ecuación de Reynolds queda:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 12V_2 \quad (22)$$

La velocidad normal V_2 de la superficie 2 (muñón), puede ser expresada en función de la velocidad del centro del muñón V_0 y de la velocidad normal relativa entre ambas superficies.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 12 \left(U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + V_0 \right) \quad (23)$$

Si además consideramos que en los descansos hidrodinámicos la superficie 1 se encuentra en reposo se tiene que $U_1 = 0$ y $U_2 = U$, de este modo la ecuación de Reynolds para descansos hidrodinámicos se expresa según indica la ecuación (24).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6U \frac{\partial h}{\partial x} + 12V_0 \quad (24)$$

Como el efecto de la curvatura de la película de fluido es despreciable, es válida la expresión $\partial x = R\partial\theta$. Reemplazando esta expresión en la ecuación (24) se obtiene la ecuación de Reynolds en coordenadas cilíndricas.

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{6U}{R} \frac{\partial h}{\partial\theta} + 12V_0 \quad (25)$$

La ecuación (25) describe el estado de presión de la película de fluido en régimen laminar. Sin embargo el estado del flujo de aceite en los descansos hidrodinámicos puede ser influenciado además por el número de Reynolds. Los efectos turbulentos pueden ser apreciados para un número de Reynolds \overline{Re} de aproximadamente 2000 o mayor [Hemmati et al. 2017]. La ecuación de Reynolds para flujo turbulento e incompresible en descansos hidrodinámicos puede ser escrita como:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{h^3}{k_\theta\mu} \frac{\partial P}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{k_z\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{U}{2R} \frac{\partial h}{\partial\theta} + V_0 \quad (26)$$

Los términos k_θ y k_z son los coeficientes de turbulencia en las direcciones circunferencial y longitudinal respectivamente. Estos se definen en función del número local de Reynolds Re^* y las constantes: b_1 , b_2 , \hat{b}_1 y \hat{b}_2 en las ecuaciones (27) y (28).

$$k_z = 12 + b_1(Re^*)^{b_2} \quad (27)$$

$$k_\theta = 12 + \hat{b}_1(Re^*)^{\hat{b}_2} \quad (28)$$

El número local de Reynolds Re^* varía en función de la coordenada θ como indica la ecuación (29).

$$Re^* = \frac{\rho R\omega h}{\mu} = \frac{\rho R\omega C(1 + \epsilon \cos\theta)}{\mu} \quad (29)$$

El valor de las constantes b_1 , b_2 , \hat{b}_1 y \hat{b}_2 dependerá del modelo de turbulencia escogido. En el estudio realizado por [Hemmati et al. 2017] se aplican 2 modelos de turbulencia: el modelo Constantinescu y el modelo Ng–Pan–Elrod. En la Tabla 1 se detallan los valores de las constantes de turbulencia para los modelos de Constantinescu y Ng–Pan–Elrod.

Tabla 1: Constantes de turbulencia para los modelos Constantinescu y Ng–Pan–Elrod.

Constantes	Modelos de Turbulencia	
	Modelo Constantinescu	Modelo Ng–Pan–Elrod
b_1	0,0198	0,0044
b_2	0,741	0,96
\hat{b}_1	0,026	0,0136
\hat{b}_2	0,8265	0,9

Como indica la literatura, el modelo de Constantinescu se ha validado para $2000 \leq \overline{Re} \leq 10^5$. Y los coeficientes de turbulencia k_θ y k_z solo debiesen ser incluidos en la ecuación de Reynolds si el número de Reynolds $\overline{Re} \geq 2000$, independiente del modelo de turbulencia empleado.

En la Figura 7 se compara la distribución de presión adimensional $\overline{P} = 8P\pi(C/D)^2/\mu\omega$ en un descanso corto con $L/D = 0,5$ para régimen laminar y turbulento [Hemmati et al. 2017].

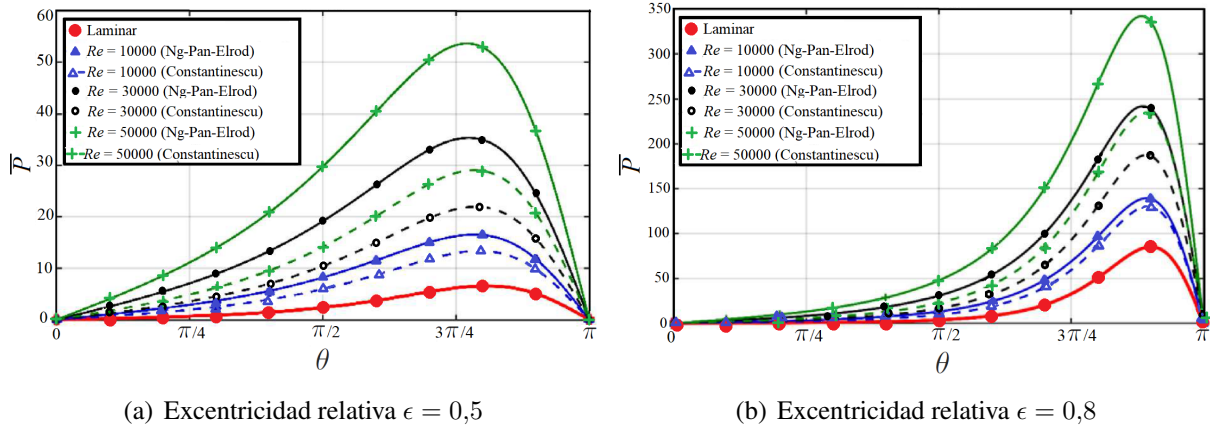


Figura 7: Presión adimensional en descanso corto, [Hemmati et al. 2017].

En la Figura 7 se observa que a medida que se incrementa el número de Reynolds, la predicción de la distribución de presión obtenida con la ecuación modificada de Reynolds, se desvía significativamente de la presión predicha empleando la ecuación de Reynolds clásica (régimen laminar). Es por ello que al simular la presión en un descanso hidrodinámico empleando la ecuación clásica de Reynolds para un caso turbulento, se obtendrán valores de presión inferiores a los reales.

Para conocer un orden de magnitud del número de Reynolds de un descanso hidrodinámico operando en una central hidroeléctrica, se considera un descanso de una unidad generadora de 700 MW, instalada en la central hidroeléctrica Itaipu, la cual se ubica en el río Paraná, Brasil.

En la Tabla 2 se detallan las características del descanso hidrodinámico considerado, las cuales son necesarias para determinar el número de Reynolds.

Tabla 2: Características de descanso hidrodinámico [Carvalho et al. 2017].

Característica	Símbolo	Valor	Unidad
Velocidad de rotación nominal	ω	90	(rpm)
Huelgo radial del descanso	C	5×10^{-4}	(m)
Radio del descanso	R	0,55	(m)
Viscosidad dinámica del fluido	μ	0,047	(Pa s)
Densidad del fluido	ρ	873	(kg/m ³)

Como se muestra en la ecuación (29), el número de Reynolds en descansos hidrodinámicos es una función de la excentricidad relativa ϵ y la coordenada θ , la cual fluctúa entre $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

En la Figura 8 se detalla el número local de Reynolds en función de la coordenada θ para distintos valores de excentricidad.

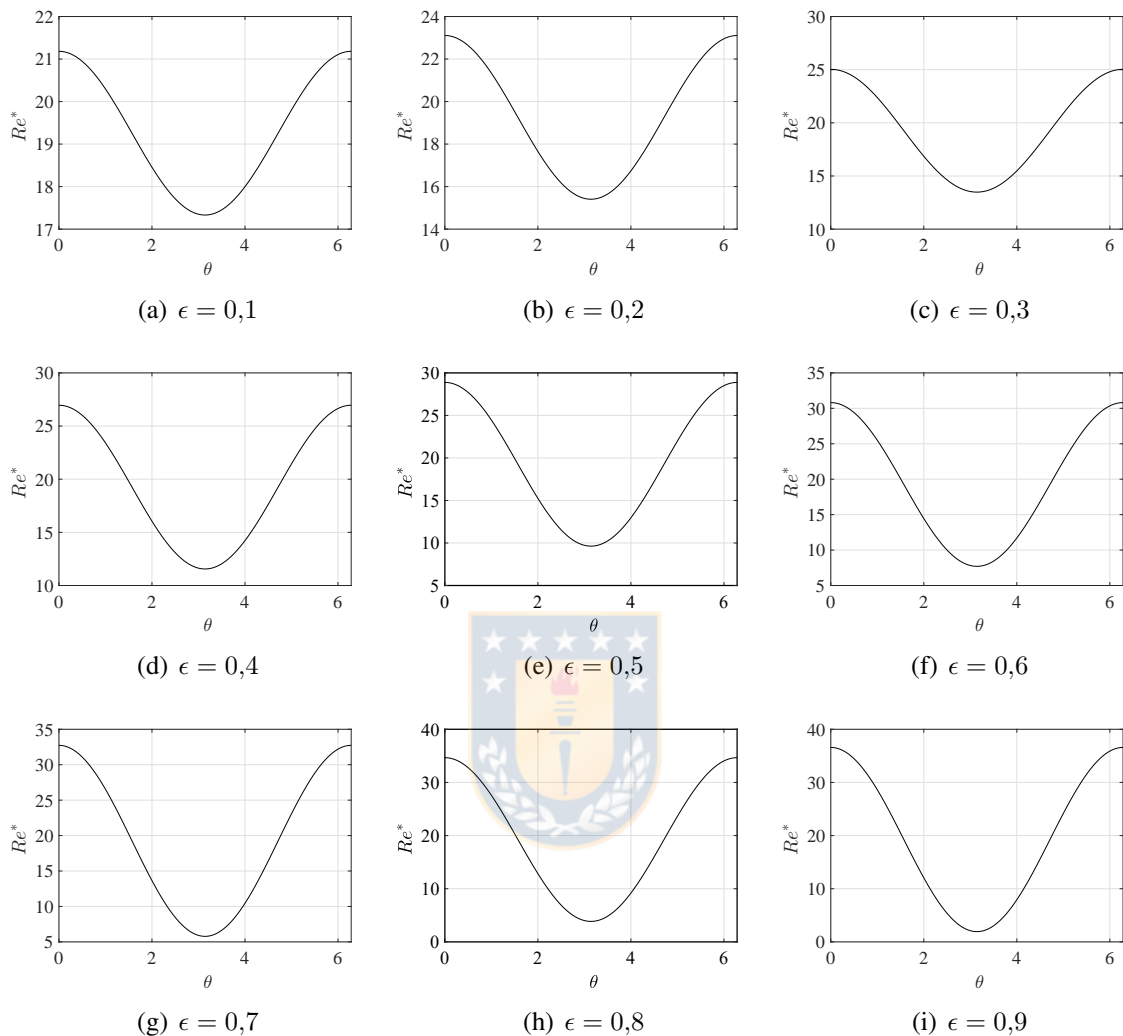


Figura 8: Número local de Reynolds Re^* para distintos valores de excentricidad relativa ϵ .

En la Figura 8 se observa que para mayores valores de excentricidad el máximo número local de Reynolds aumenta. El mayor valor alcanzado se observa en la Figura 8(i), para una excentricidad $\epsilon = 0,9$ y es de $Re^* = 36,6$. Este valor se encuentra por debajo del límite de aplicación de los modelos de turbulencia ($\overline{Re} \geq 2000$), por lo que el estudio de este descanso en particular se debe realizar empleando la ecuación clásica de Reynolds (régimen laminar).

En general, para descansos operando en turbinas hidráulicas se obtienen números de Reynolds por debajo del límite de turbulencia, pues se trata de máquinas que operan a baja velocidad de rotación. Por otra parte, las características del fluido no suelen variar considerablemente entre descansos hidrodinámicos de distintas unidades generadoras, esto implica que en la mayoría de los casos los descansos hidrodinámicos operan en régimen laminar.

2.3 Simplificaciones de la Ecuación de Reynolds

La ecuación (24) describe la distribución de presiones que ejerce el fluido sobre el descanso, mientras que la ecuación (16) detalla la altura de la película de aceite como función de θ y ϵ . Con ambas ecuaciones es posible encontrar la presión del fluido. Luego, integrando la expresión de la presión es posible encontrar la reacción f del fluido sobre el eje.

En función del largo L del descanso, se han desarrollado 3 modelos analíticos que caracterizan a los descansos hidrodinámicos

i) Aproximación de descanso corto

Es válido para aquellos descansos en los cuales $L/D < 1$, en los cuales la variación de la presión en x es mucho menor que en z . Por lo tanto la ecuación (24) queda:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6U \frac{\partial h}{\partial x} + 12V_0 \quad (30)$$

Reemplazando la expresión de h e integrando 2 veces se obtiene la presión P_c que considera un descanso corto:

$$P_c = \frac{3\mu}{C^2(1 + \epsilon \cos \theta)^3} (2\dot{\epsilon} \cos \theta + \epsilon(2\dot{\phi} - \omega) \sin \theta) \left(z^2 - \frac{L^2}{4} \right) \quad (31)$$

ii) Aproximación de descanso largo

Esta aproximación es válida para aquellos descansos en los cuales la razón $L/D > 2$, donde D es el diámetro del eje. Con esto se desprecia la variación de presión con respecto al largo del eje. Por lo tanto la ecuación (24) queda:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 6U \frac{\partial h}{\partial x} + 12V_0 \quad (32)$$

Reemplazando la expresión de h e integrando 2 veces se obtiene la presión P_l que considera un descanso largo:

$$P_l = -\frac{6\mu R^2}{C^2(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \left(\frac{\epsilon}{2 + \epsilon^2} (2\dot{\phi} - \omega) \sin \theta + \dot{\epsilon} \cos \theta \right) (2 + \epsilon \cos \theta) \quad (33)$$

iii) Aproximación de descanso finito

Para razones L/D entre 1 y 2, las aproximaciones anteriores no son adecuadas. Como se define en [Hirani 1998], la presión en un descanso finito se puede obtener combinando las aproximaciones del descanso largo y corto como indica la ecuación (34).

$$P_f = \frac{P_l P_c}{P_l + P_c} \quad (34)$$

2.4 Condiciones de Borde

Para calcular la fuerza f que ejerce el fluido es necesario integrar la presión a través de la superficie del descanso. Para ello es necesario imponer condiciones de borde sobre la presión del fluido. En la dirección axial tanto para $z = -L/2$ como para $z = L/2$, $P = P_{atm}$. En cuanto a la dirección tangencial θ usualmente se trabaja con 3 condiciones de borde.

- i) **Condición de Sommerfeld:** La distribución de presiones presenta cambio de signo en $\theta = \pi$, es positiva entre 0 y π , y negativa entre π y 2π . Esta situación ideal resulta poco realista ya que un fluido no es capaz de soportar una presión negativa de importancia sin mostrar cambios físicos. Por lo que solo es aplicable cuando las presiones en el descanso son bajas.
- ii) **Condición de Gumbel:** A diferencia de la distribución de Sommerfeld, esta no presenta presiones negativas. Entre π y 2π la presión se considera nula. Esta condición es mas realista que la anterior y es aplicable cuando la presión en el descanso es bastante alta.
- iii) **Condición de Reynolds:** Con esta condición se elimina la discontinuidad en π que presenta la condición de Gumbel. En el punto $\pi + \delta$, $\delta > 0$, se cumple que $\partial P / \partial \theta = 0$, tras el cual $P = 0$ hasta $\theta = 2\pi$. Esta metodología incorpora una incógnita más, δ , pero también una ecuación más. Debe notarse que la condición de Reynolds no pueden utilizarse cuando $L/D \rightarrow 0$ ya que la ecuación diferencial resultante (30), contiene derivadas respecto de z solamente, lo que no admite condiciones de borde sobre valores de θ para eliminar las constantes de integración.

En la Figura 9 se detalla en forma esquemática el perfil de presión obtenido para cada condición de borde.

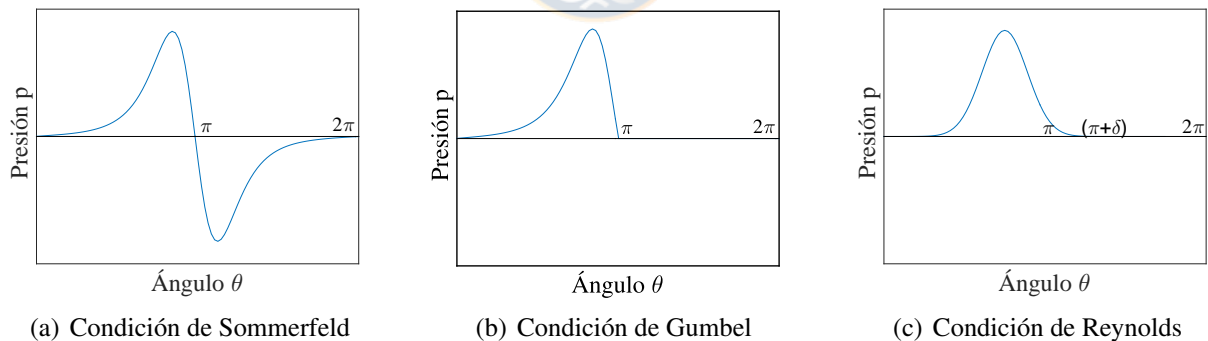


Figura 9: Condiciones de borde para la presión del fluido en el eje tangencial.

Físicamente, ninguno de estos conjuntos de condiciones de borde es totalmente correcto, y existen discrepancias sobre cuál es el que mejor ajusta a las mediciones experimentales, aunque el error que ambos producen es acotado. La diferencia de los resultados obtenidos utilizando uno u otro conjunto aumenta a medida que lo hace la excentricidad relativa ϵ [Pinkus 1961].

2.5 Modelo de Parámetros Concentrados

En el contexto del comportamiento del rotor como sistema que involucra un disco, el eje y los descansos, es común representar a los descansos hidrodinámicos mediante un modelo de parámetros concentrados. En concreto este modelo busca representar la dinámica del descanso como elemento provisto de rigidez y amortiguamiento. Sin embargo, la complejidad de las leyes físicas que gobiernan el comportamiento del fluido tienen como consecuencia la existencia de parámetros de rigidez y amortiguamiento cuyo valor cambia dependiendo de la dirección en que se aplique la carga.

En la Figura 10 se detalla el modelo de parámetros concentrados propuesto para representar el comportamiento dinámico del descanso.

Si se emplea una aproximación de Taylor de primer orden se puede hallar la fuerza que ejerce el fluido f en función de los coeficientes dinámicos de rigidez y amortiguamiento como se indica a continuación:

$$f_x = k_{xx}x + k_{xy}y + c_{xx}\dot{x} + c_{xy}\dot{y} \quad (35)$$

$$f_y = k_{yx}x + k_{yy}y + c_{yx}\dot{x} + c_{yy}\dot{y} \quad (36)$$

Determinar los coeficientes de un descanso hidrodinámico es de sumo interés pues permiten determinar la fuerza que ejerce el fluido sobre el muñón para una condición de operación específica. Estos coeficientes varían según la excentricidad relativa ϵ , y a su vez la excentricidad cambia cuando el sistema opera en estado transiente.

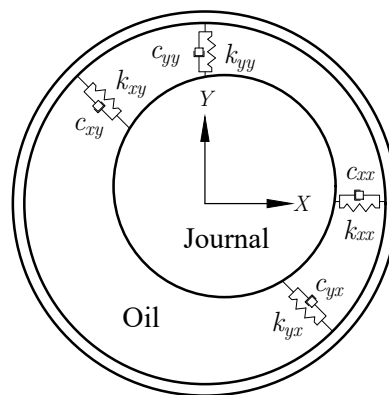


Figura 10: Modelo de parámetros concentrados de descanso hidrodinámico.

Para un rotor horizontal montado sobre descansos hidrodinámicos los coeficientes de rigidez y amortiguamiento pueden ser estimados a partir de gráficas. Algunas de estas gráficas son exhibidas en [Rao 1983] y detallan los coeficientes directos y cruzados en función del número de Sommerfeld para un descanso hidrodinámico cilíndrico.

En la Figura 11 se detallan los coeficientes directos de rigidez y amortiguamiento para un descanso hidrodinámico cilíndrico de razón entre el largo y el diámetro de $L/D = 1$ [Rao 1983].

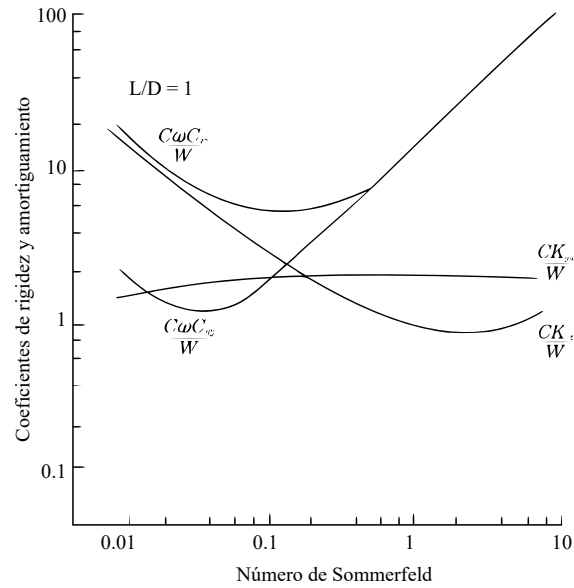


Figura 11: Coeficientes directos de rigidez y amortiguamiento, [Rao 1983].

En la Figura 12 se detallan los coeficientes cruzados de rigidez y amortiguamiento para un descanso hidrodinámico cilíndrico de razón entre el largo y el diámetro de $L/D = 0,5$ [Rao 1983].

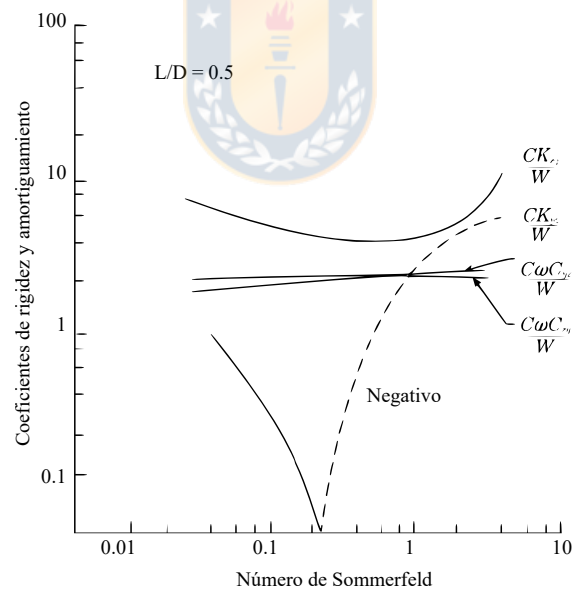


Figura 12: Coeficientes cruzados de rigidez y amortiguamiento, [Rao 1983].

Estas gráficas son solo válidas para descansos horizontales, ya que las expresiones que definen los coeficientes dependen de la precarga del peso W . En el caso del rotor vertical esta precarga es nula, y las expresiones que definen a los coeficientes se indeterminan.

2.6 Método de Diferencias Finitas

En esta sección se presenta el método de diferencias finitas como alternativa para solucionar numéricamente la ecuación de Reynolds. El descanso de interés es radial de tipo circular y de largo finito ($1 < L/D < 2$).

La ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{6U}{R} \frac{\partial h}{\partial \theta} + 12V_0 \quad (37)$$

La malla propuesta se detalla en la Figura 13. La discretización se compone por elementos de ancho $\Delta\theta$ y largo Δz . Tomando en cuenta que la condición de operación es transiente se considera también un término de discretización temporal Δt .

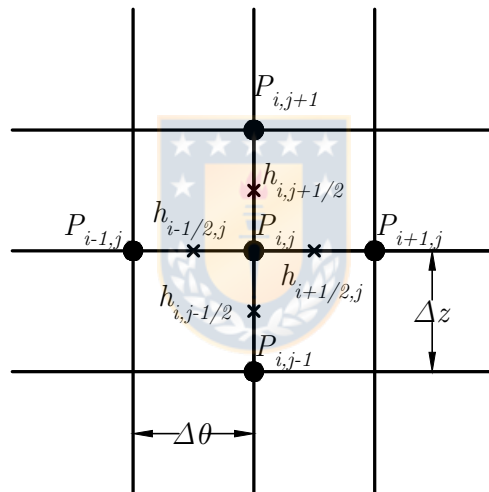


Figura 13: Malla propuesta para el método de diferencias finitas

Ahora se debe reemplazar cada término diferencial de la ecuación (37) como una diferencia finita.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) = \frac{h_{i+1/2,j}^3 (P_{i+1,j} - P_{i,j}) - h_{i-1/2,j}^3 (P_{i,j} - P_{i-1,j})}{\mu \Delta \theta^2} \quad (38)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{h_{i,j+1/2}^3 (P_{i,j+1} - P_{i,j}) - h_{i,j-1/2}^3 (P_{i,j} - P_{i,j-1})}{\mu \Delta z^2} \quad (39)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = \frac{h_{i+1/2,j} - h_{i-1/2,j}}{\Delta \theta} \quad (40)$$

$$U = R\omega_n + C \frac{(\epsilon_n - \epsilon_{n-1})}{\Delta t} \sin \theta - C\epsilon_n \frac{(\phi_n - \phi_{n-1})}{\Delta t} \cos \theta \quad (41)$$

$$V_0 = C \frac{(\epsilon_n - \epsilon_{n-1})}{\Delta t} \cos \theta + C \epsilon_n \frac{(\phi_n - \phi_{n-1})}{\Delta t} \sin \theta \quad (42)$$

Reemplazando las expresiones (38), (39), (40), (41) y (42) en (37) y despejando $P_{i,j}$ se obtiene:

$$P_{i,j} = a_0 + a_1 P_{i+1,j} + a_2 P_{i-1,j} + a_3 P_{i,j+1} + a_4 P_{i,j-1} \quad (43)$$

Las constantes a_0 , a_1 , a_2 , a_3 y a_4 dependen de $\Delta\theta$, Δz , h , ω , ϵ , ϕ y Δt . La ecuación (43) se resuelve iterativamente calculando la presión en cada punto de la malla y para cada instante de tiempo. Existirá convergencia del método en tanto se cumpla la condición de error impuesta en la ecuación (44).

$$\frac{\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N |(p_{i,j})^k - p_{i,j}^{k-1}|}{\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (p_{i,j})^k} < A \quad (44)$$

Las fuerzas $f_{x,n}$ y $f_{y,n}$ debido a la presión $P_{i,j}$ que actúa en el primer instante de iniciado el movimiento t_n , pueden ser halladas integrando numéricamente la presión a través del manto del muñón como se indica a continuación:

$$f_{x,n} = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{M+1} P_{i,j} \sin(\theta + \phi) R \Delta\theta \Delta z \quad (45)$$

$$f_{y,n} = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{M+1} -P_{i,j} \cos(\theta + \phi) R \Delta\theta \Delta z \quad (46)$$

CAPÍTULO 3

Desarrollo del Modelo

3.1 Unidad Generadora

En esta sección se presenta el modelo propuesto para representar el comportamiento dinámico de una unidad generadora. En la Figura 14 se detalla un esquema realizado por [Carvalho et al. 2017] de una de las unidades generadoras de la central hidroeléctrica Itaipu. En la parte inferior se observa la turbina y en la parte superior en color naranja se muestra el generador. Estos diseños se encuentran normalmente montados sobre 3 descansos hidrodinámicos, uno próximo a la turbina y 2 de ellos en la parte superior e inferior del generador respectivamente.

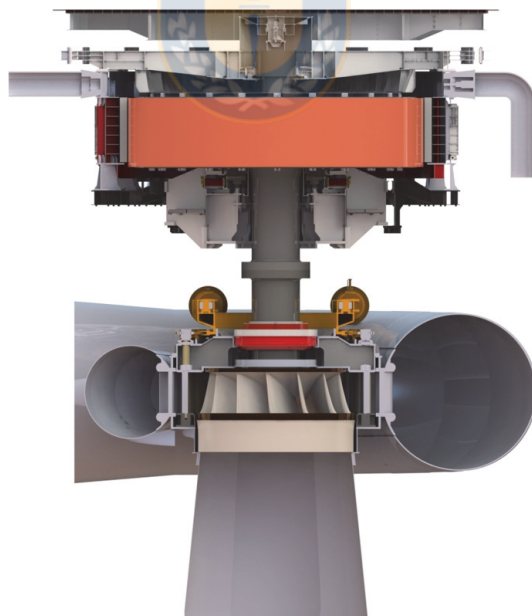


Figura 14: Unidad generadora de central hidroeléctrica Itaipu [Carvalho et al. 2017].

En la Figura 15 se detalla un modelo de parámetros concentrados propuesto para modelar el movimiento de la unidad generadora [Carvalho et al. 2017]. Este modelo cuenta con 6 grados de libertad, 2 por cada descanso hidrodinámico. Las principales fuerzas mecánicas actuando son $F_g(t)$ y $F_t(t)$ debido al desbalanceamiento del generador y la turbina respectivamente.

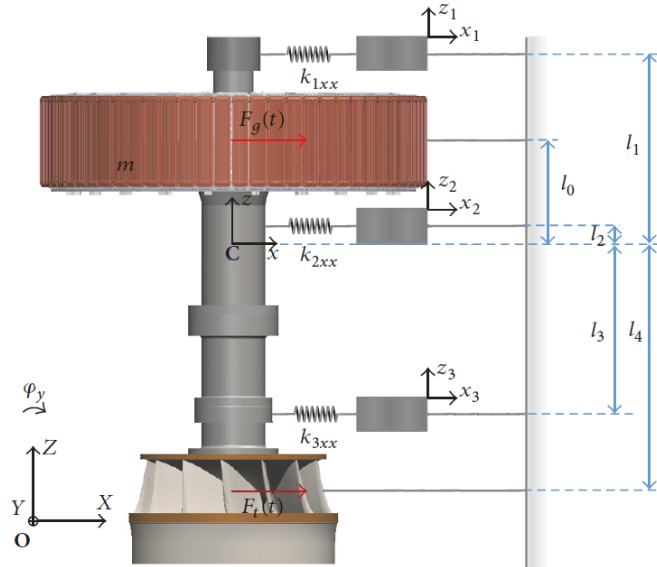


Figura 15: Modelo de unidad generadora planteado por [Carvalho et al. 2017].

El modelo considerado en este estudio para la unidad generadora es el de un cuerpo rígido y se detalla en la Figura 16.

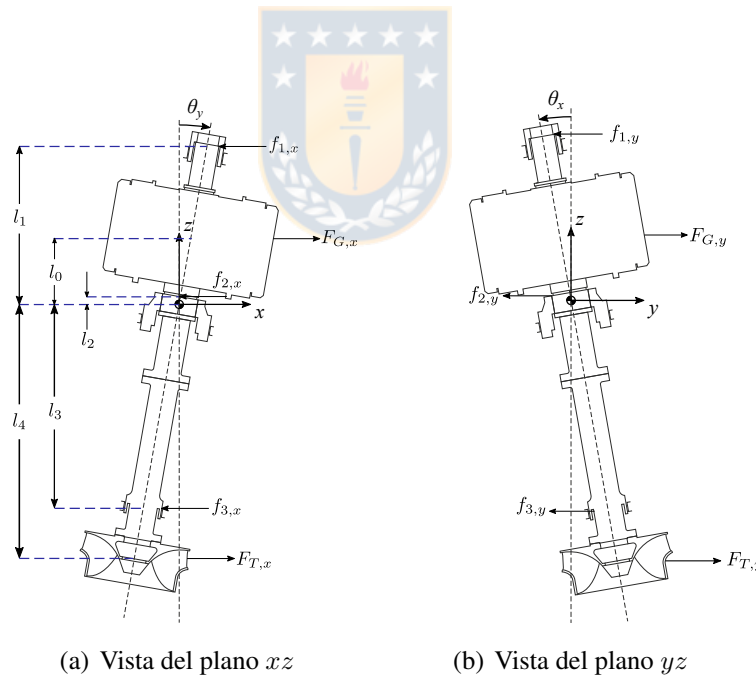


Figura 16: Modelo propuesto de unidad generadora.

El centro de masa de la unidad generadora se encuentra ubicado en la parte inferior del rotor del generador. En el modelo propuesto se consideran 4 G.L, dos de ellos en las direcciones x e y de desplazamiento y dos ángulos de giro θ_x y θ_y . Las cargas principales a las que se encuentra sometida la unidad generadora cuando se encuentra en movimiento son las aquellas debido al desbalanceamiento de sus respectivos rotores. F_G representa el la fuerza debido al desbalanceamiento del rotor del generador y F_T es la fuerza debido al desbalanceamiento del rotor de la turbina. Por otro lado las fuerzas

que ejercen los descansos hidrodinámicos son f_1 , f_2 y f_3 para los descansos superior, central e inferior respectivamente.

Las ecuaciones del movimiento de acuerdo a la Figura 16 se pueden escribir como:

$$F_{G,x} + F_{T,x} - f_{1,x} - f_{2,x} - f_{3,x} = M\ddot{x} \quad (47)$$

$$F_{G,y} + F_{T,y} - f_{1,y} - f_{2,y} - f_{3,y} = M\ddot{y} \quad (48)$$

$$-F_{G,y}l_0 + F_{T,y}l_4 + f_{1,y}l_1 + f_{2,y}l_2 - f_{3,y}l_3 = I\ddot{\theta}_x \quad (49)$$

$$F_{G,x}l_0 - F_{T,x}l_4 - f_{1,x}l_1 - f_{2,x}l_2 - f_{3,x}l_3 = I\ddot{\theta}_y \quad (50)$$

La fuerza debido al desbalanceamiento del rotor del generador F_G y La fuerza debido al desbalanceamiento del rotor de la turbina F_T , se definen respectivamente en las direcciones x e y como:

$$F_{G,x} = U_G\omega^2 \cos(\theta_d + \phi_G) \quad (51)$$

$$F_{G,y} = U_G\omega^2 \sin(\theta_d + \phi_G) \quad (52)$$

$$F_{T,x} = U_T\omega^2 \cos(\theta_d + \phi_T) \quad (53)$$

$$F_{T,y} = U_T\omega^2 \sin(\theta_d + \phi_T) \quad (54)$$

ϕ_G y ϕ_T son los ángulos de fase de los vectores F_G y F_T respecto de un sistema coordenado arbitrario, mientras que θ_d representa el ángulo que recorren los vectores F_G y F_T en el tiempo. Para un caso particular estacionario, donde la velocidad de rotación Ω es constante, se cumple que $\theta_d = \Omega t$. Por otro lado, para un caso de velocidad variable ω , el ángulo recorrido queda definido por la siguiente integral:

$$\theta_d = \int_0^t \omega(t) dt \quad (55)$$

La fuerza del desbalanceamiento es proporcional al cuadrado de la velocidad de rotación de la unidad generadora ω . Esta velocidad puede ser descrita como una función variable en el tiempo $\omega(t)$. La forma más sencilla de generar esta función es considerando un incremento lineal de la velocidad en el tiempo, el cual termina cuando se alcanza la velocidad de operación nominal Ω en el tiempo T_p . Esta función por tramos se define como se indica a continuación:

$$\omega_1(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{T_p}\right) \Omega & \text{sí } t \leq T_p \\ \Omega & \text{sí } t > T_p \end{cases} \quad (56)$$

Sin embargo, una expresión más realista de esta velocidad se obtiene al considerar un incremento cosenoidal, como se indica en la ecuación (57):

$$\omega_2(t) = \begin{cases} \left(\frac{\Omega}{2}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{t}{T_p}\right) \pi\right) & \text{sí } t \leq T_p \\ \Omega & \text{sí } t > T_p \end{cases} \quad (57)$$

En la Figura 17 se detalla un esquema en que se comparan ambas alternativas para definir $\omega(t)$.

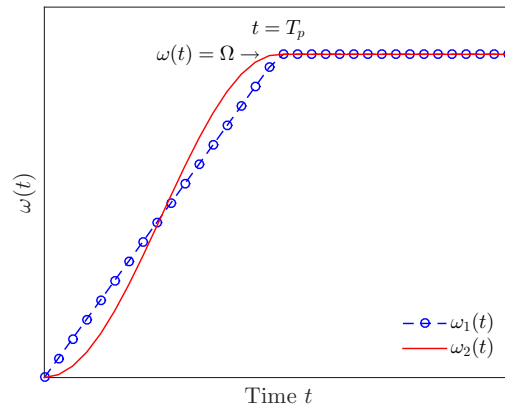


Figura 17: Alternativas para definir $\omega(t)$.

Para el modelo propuesto se evaluó el desempeño de ambas alternativas, ω_1 y ω_2 , no habiendo diferencias significativas. Es por ello que se considera finalmente la alternativa lineal por tener una estructura matemática mas sencilla.

La variable U se define como la magnitud del desbalanceamiento del rotor, $U = Md$, donde M es la masa respectiva del rotor y d es la distancia ente el centro geométrico y el centro de masa del rotor. El uso de la variable U es útil para caracterizar el desbalanceamiento de rotores de distintos tamaños y su uso se encuentra detallado en la norma ISO 1940-1.

3.2 Modelo del Descanso (Circular)

En la Figura 18 se detalla el esquema de un descanso circular. Se muestra la película de aceite y los sistemas de referencia en coordenadas cartesianas X e Y y en coordenadas locales radial r y tangencial t .

Sobre el eje actúan 3 fuerzas, f_d debido al desbalanceamiento, f debido a la presión generada por el fluido lubricante (la cual se calcula según los modelos discutidos en el capítulo 2), y W la fracción del peso del rotor que reside sobre el descanso, esta fuerza actúa solamente en rotores horizontales.

Las ecuaciones del movimiento del descanso se exhiben a continuación, y son resultado de aplicar la segunda ley de Newton en las direcciones radial r y tangencial t suponiendo un rotor horizontal simétrico montado sobre 2 descansos equidistantes e iguales. La excentricidad relativa está definida como $\epsilon = e/C$. Para el caso de rotor vertical el valor del peso W es nulo.

$$M_r C (\ddot{\epsilon} - \epsilon \dot{\phi}^2) = f_{d,r} + f_r + W \cos \phi \quad (58)$$

$$M_r C (\epsilon \ddot{\phi} + 2\dot{\epsilon} \dot{\phi}^2) = f_{d,t} + f_t - W \sin \phi \quad (59)$$

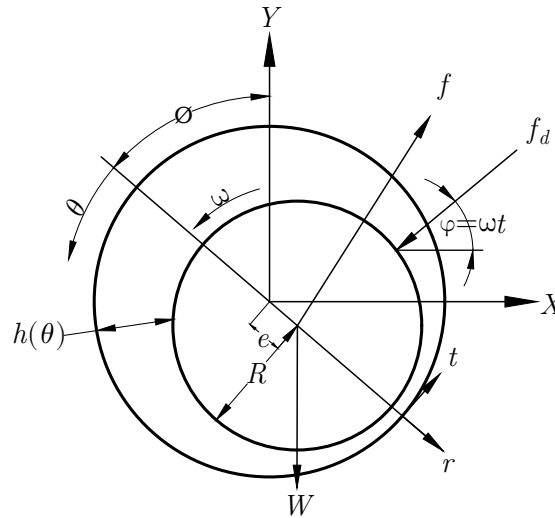


Figura 18: Esquema del descanso hidrodinámico.

La fuerza del desbalanceamiento se expresa como:

$$f_d = M_r d \omega^2 \quad (60)$$

Donde M_r es la masa del rotor y d es la distancia entre el centro de masa y el centro geométrico del rotor. Esta fuerza debido al desbalanceamiento forma un ángulo φ con respecto al eje X el cual no es otra cosa que ωt , además, el eje Y forma un ángulo ϕ con respecto al eje radial. Por otro lado, con el fin de normalizar la magnitud del desbalanceamiento de un rotor, se hará uso de la variable $U = M_r d$, la cual puede ser determinada según la norma ISO 1940-1. Así la fuerza proyectada en los ejes radial y tangencial es:

$$f_{d,r} = U \omega^2 \cos \omega t \cos \phi + U \omega^2 \sin \omega t \sin \phi \quad (61)$$

$$f_{d,t} = U \omega^2 \cos \omega t \sin \phi + U \omega^2 \sin \omega t \cos \phi \quad (62)$$

3.2.1 Presión en el Descanso Hidrodinámico

Para completar el modelo del descanso hidrodinámico es necesario caracterizar la fuerza f debido a la presión generada por el fluido en el descanso. En la revisión realizada se expusieron 3 métodos para cuantificar esta fuerza. Las aproximaciones basadas en particularidades geométricas del descanso y el modelo de parámetros concentrados son alternativas analíticas para cuantificar la fuerza f . Mientras que el método de diferencias finitas es una opción numérica para la obtención del perfil de presión en cualquier descanso independiente de sus particularidades geométricas.

Para el modelo del descanso hidrodinámico propuesto se analizan 2 alternativas para obtener la distribución de presión en el descanso hidrodinámico: mediante una aproximación de descanso corto; y mediante el método de diferencias finitas.

La distribución de presión dada por la aproximación de descanso corto es considerada cuando la razón entre el largo y el diámetro del descanso es menor a 1, ($L/D < 1$). Esta condición geométrica es muy común en unidades generadoras, por lo que se considera como opción de estudio.

Para comparar ambas alternativas se presentan las distribuciones de presión obtenidas mediante ambos métodos para distintas razones L/D . La comparativa entre ambos modelos de presión se realiza empleando una normalización de parámetros.

En la Tabla 3 se detalla el valor de los parámetros de discretización empleados para la obtención de los resultados mediante el método de diferencias finitas. En la dirección circunferencial se empleó la condición de borde de Sommerfeld, mientras que en la dirección axial la presión se considera nula en los extremos (P_{atm}).

Tabla 3: Parámetros de discretización en el método de diferencias finitas.

Característica	Símbolo	Valor
Número de elementos radiales	N	60
Número de elementos axiales	M	60
Número de iteraciones	k	7000
Error absoluto	A	1×10^{-5}

En la Tabla 4 se detallan los parámetros que se fijaron para analizar la presión. Entre ellos se encuentra la viscosidad del aceite μ , la excentricidad relativa ϵ , la tasa de cambio en la excentricidad relativa $\dot{\epsilon}$ y la velocidad de rotación ω . Estas variables fueron normalizadas para visualizar solo la influencia en el cambio de la razón L/D .

Tabla 4: Parámetros fijados para analizar la presión.

Símbolo	Valor	Unidad
C	1	(-)
μ	1	(-)
ϵ	1/2	(-)
$\dot{\epsilon}$	1/1000	(-)
ω	1	(-)

Para el modelo del descanso hidrodinámico propuesto se analizan las 2 alternativas mencionadas anteriormente, las cuales se exhiben en la Figura 19.

En la Figura 19 no se observan diferencias significativas entre ambos modelos de presión ($< 10\%$) para los casos mostrados. Sin embargo, según los cálculos realizados, dicha diferencia se vuelve considerable cuando la razón $L/D > 0,6$. Por otra parte, la diferencia en el tiempo de cálculo es de 30 veces en favor a la solución mediante la aproximación de descanso corto.

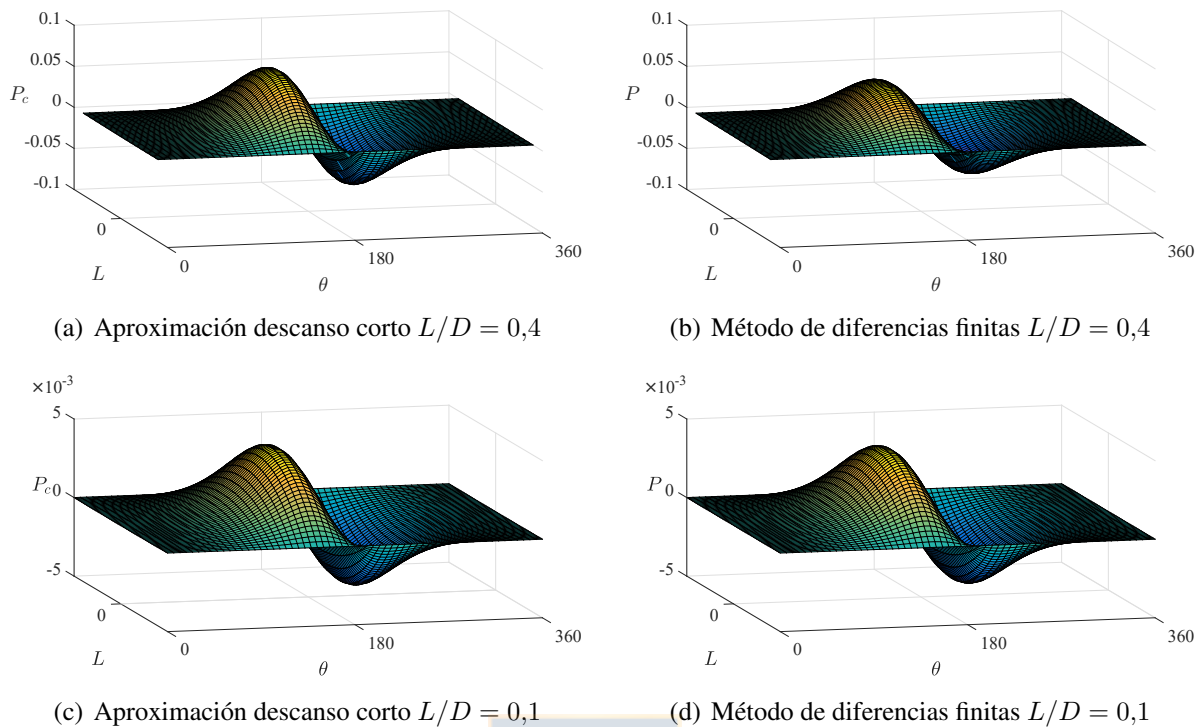


Figura 19: Distribución de presión en descanso para distintos valores de L/D .

De esta forma, resulta conveniente considerar la aproximación del descanso corto pues reduce enormemente el tiempo de cálculo, y además permite contar con una expresión analítica para la fuerza f del fluido. Esta será una buena aproximación siempre que la razón L/D sea menor a 0,6.

3.2.2 Fuerza en el Descanso Hidrodinámico

En base al resultado anterior se procede a realizar el desarrollo necesario para determinar las fuerzas en el descanso mediante la aproximación de descanso corto como modelo de presión.

La expresión de la presión mediante la aproximación de descanso corto fue determinada en el Capítulo 2 y se exhibe en la ecuación (31).

Las fuerzas radial y tangencial debido a la presión del fluido pueden ser halladas al integrar la presión como se indica en las ecuaciones (63) y (64) empleando la condición de borde de Gumbel.

$$f_r = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^\pi -P_c \cos \theta d\theta dz \quad (63)$$

$$f_t = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^\pi P_c \sin \theta d\theta dz \quad (64)$$

Reemplazando (31) en (63) y (64) se obtiene:

$$f_r = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^\pi -\frac{3\mu}{C^2(1 + \epsilon \cos \theta)^3} (2\dot{\epsilon} \cos \theta + \epsilon(2\dot{\phi} - \omega) \sin \theta) \left(z^2 - \frac{L^2}{4} \right) \cos \theta d\theta dz \quad (65)$$

$$f_t = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^\pi \frac{3\mu}{C^2(1 + \epsilon \cos \theta)^3} (2\dot{\epsilon} \cos \theta + \epsilon(2\dot{\phi} - \omega) \sin \theta) \left(z^2 - \frac{L^2}{4} \right) \sin \theta d\theta dz \quad (66)$$

Luego integrando se obtienen f_r y f_t como se indica en (67) y (68).

$$f_r = -\frac{\mu RL^3}{2C^2} \left(\frac{2\epsilon^2(\omega - 2\dot{\phi})}{(1 - \epsilon^2)^2} + \frac{\pi(1 + 2\epsilon^2)\dot{\epsilon}}{(1 - \epsilon^2)^{5/2}} \right) \quad (67)$$

$$f_t = \frac{\mu RL^3}{2C^2} \left(\frac{\pi\epsilon(\omega - 2\dot{\phi})}{2(1 - \epsilon^2)^{3/2}} + \frac{4\epsilon\dot{\epsilon}}{(1 - \epsilon^2)^2} \right) \quad (68)$$

3.2.3 Solución de las Ecuaciones del Movimiento

Las ecuaciones del movimiento (58) y (59) son diferenciales de segundo orden y pueden ser resueltas como un sistema de ecuaciones de primer orden usando la sustitución del vector de estado \bar{X} , este desarrollo es similar al utilizado en [Huang et al. 2017].

$$\bar{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \phi \\ \dot{\epsilon} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} \quad (69)$$

Reemplazando en las ecuaciones del movimiento se obtiene el siguiente sistema de 4 ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{X}_1 = X_3 \quad (70)$$

$$\dot{X}_2 = X_4 \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_3 = & \frac{W}{M_r C} \cos X_2 + \frac{U\omega^2}{M_r C} (\cos \omega t \cos X_2 + \sin \omega t \sin X_2) - \dots \\ & \dots - \frac{\mu RL^3}{2C^3 M_r} \left(\frac{2X_1^2(\omega - 2X_4)}{(1 - X_1^2)^2} + \frac{\pi(1 + 2X_1^2)X_3}{(1 - X_1^2)^{5/2}} \right) + X_1 X_4^2 \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_4 = & -\frac{W}{M_r C X_1} \sin X_2 + \frac{U\omega^2}{M_r C X_1} (\cos \omega t \sin X_2 + \sin \omega t \cos X_2) + \dots \\ & \dots + \frac{\mu RL^3}{2C^3 M_r X_1} \left(\frac{\pi X_1(\omega - 2\dot{X}_4)}{(1 - X_1^2)^{3/2}} + \frac{4X_1 X_3}{(1 - X_1^2)^2} \right) - \frac{2X_3 X_4}{X_1} \end{aligned} \quad (73)$$

Estas ecuaciones se resuelven numéricamente usando el software Matlab con el comando `ode15s`, el cual es un método implícito de orden variable más conocido como método de Gear, este se usa cuando los problemas son moderadamente rígidos. Las condiciones iniciales impuestas para un rotor horizontal son:

$$X_0 = \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \phi_0 \\ \dot{\epsilon}_0 \\ \dot{\phi}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (74)$$

Las condiciones iniciales de la ecuación (74) indican que el rotor se encuentra apoyado en la parte inferior del descanso. Para un rotor vertical las condiciones iniciales impuestas son:

$$X_0 = \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \phi_0 \\ \dot{\epsilon}_0 \\ \dot{\phi}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (75)$$

Las condiciones iniciales de la ecuación (75) indican que el rotor se encuentra centrado respecto al descanso.



3.3 Modelo del Descanso (Tilting Pad)

Los descansos hidrodinámicos tipo *tilting pad* consisten en varios segmentos o patines, que pueden inclinarse libremente y son por lo general más estables que un descanso circular. Este tipo de descansos son ampliamente usados en unidades generadoras y su tratamiento matemático es más bien complejo. Como se indica en [Cha et al. 2014] y [Nässelqvist et al. 2014] no es posible hallar la distribución exacta de presión en este tipo de descansos de forma analítica. En su lugar se emplean técnicas numéricas, como por ejemplo el método de diferencias finitas, volúmenes finitos o el uso de software especializados que basan su cálculo en la resolución de las ecuaciones de Navier Stokes.

En esta sección se propone un procedimiento sobre como incluir en el modelo los descansos tipo *tilting pad*. Este desarrollo no pretende ser una respuesta de extrema exactitud del comportamiento dinámico de este tipo de descansos, pues como se mencionó anteriormente esto sólo puede lograrse empleando técnicas numéricas, en cambio se pretende simular de una manera práctica la respuesta de este tipo de descansos con base en los resultados encontrados para los descansos circulares.

Para el caso particular de descansos tipo *tilting pad* es necesario describir de forma adecuada la respuesta del descanso con respecto a uno de tipo cilíndrico. Físicamente en el descanso cilíndrico el perfil de presiones es único y la magnitud de la presión generada por el fluido alcanza mayores magnitudes en la zona donde el huelgo radial es menor, como se indica en el esquema de la Figura 20.

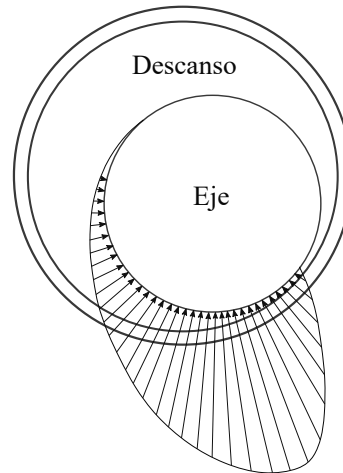


Figura 20: Representación esquemática del perfil de presión en descanso cilíndrico.

La fuerza f puede ser calculada integrando la expresión de presión del descanso corto P_c , utilizando la condición de borde de Gumbel, en las direcciones radial r y tangencial t , con ello la fuerza f se expresa como:

$$f_r = -\frac{\mu RL^3}{2C^2} \left(\frac{2\epsilon^2(\omega - 2\dot{\phi})}{(1 - \epsilon^2)^2} + \frac{\pi(1 + 2\epsilon^2)\dot{\epsilon}}{(1 - \epsilon^2)^{5/2}} \right) \quad (76)$$

$$f_t = \frac{\mu RL^3}{2C^2} \left(\frac{\pi\epsilon(\omega - 2\dot{\phi})}{2(1 - \epsilon^2)^{3/2}} + \frac{4\epsilon\dot{\epsilon}}{(1 - \epsilon^2)^2} \right) \quad (77)$$

En cambio en descansos tipo *tilting pad* el perfil de presiones es múltiple y sujeto al número de patines que este posea. Es decir que la respuesta del descanso varía en función del número de patines y la posición angular, como se indica en el esquema de la Figura 21.

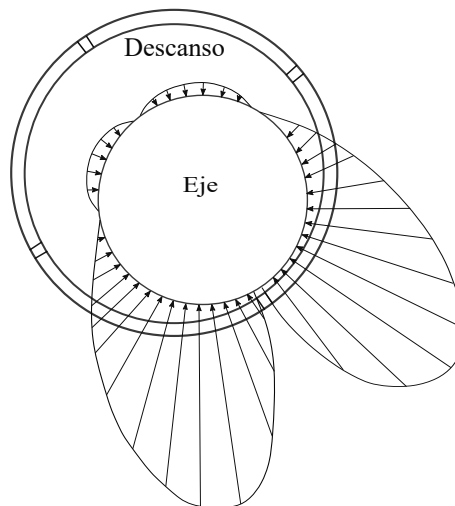


Figura 21: Representación esquemática del perfil de presión en descanso tilting pad.

Como resultado la fuerza resultante sobre eje resulta modulada N veces por vuelta, donde N es el número de patines. Para reproducir este efecto de forma analítica se propone una función armónica de la forma:

$$g = g(N, \phi(t)) = 1 + K \sin(N\phi(t) + \psi); \quad (78)$$

Con esta función se pretende simular el efecto de variación de fuerza cuando el eje se mueve dentro de un descanso con patines, por ejemplo en un descanso de 4 patines la amplitud de la fuerza del descanso variará 4 veces por vuelta, mientras que la excitación debido al desbalanceamiento es una fuerza armónica que varía 1 vez por vuelta. Como resultado la respuesta ya no es una órbita circular, si no una marcada por la influencia de 4 patines.

Por otra parte se debe considerar en descansos tipo tilting pad la existencia del huelgo nominal C , cuyo valor responde a criterios de diseño dados por el fabricante. En un caso ideal de un descanso recién montado todos los patines deben ser ajustados hasta otorgar el huelgo nominal C . Sin embargo en ocasiones existen desajustes puntuales de los patines que conllevan la aparición de distintos huelgos dentro del descanso. Estos pueden ser ocasionados por un montaje defectuoso de los patines o por una falla en el sistema de ajuste. Implementar este efecto en el modelo conlleva definir el huelgo nominal en función de la posición angular $C = h(\phi)$. Esta función no posee una expresión analítica explícita pues es de carácter discreto. Los valores de C cambian con respecto del tiempo pues dependen de la posición angular. Cada posición angular respecto de un sistema coordenado arbitrario se asocia a la ubicación física de un patín y de su huelgo intrínseco. Para el caso particular en que todos los patines otorgan el mismo huelgo radial, la función $C = h(\phi)$ es una función constante cuyo valor es igual al huelgo radial en cuestión.

Ahora considerando lo antes descrito se exhiben las fuerzas en un descanso de tipo tilting pad:

$$f_r = \frac{-\mu RL^3}{2C^2(\phi)} \left(\frac{2\epsilon^2(\omega - 2\dot{\phi})}{(1 - \epsilon^2)^2} + \frac{\pi(1 + 2\epsilon^2)\dot{\epsilon}}{(1 - \epsilon^2)^{5/2}} \right) (1 + K \sin(N\phi + \psi)) \quad (79)$$

$$f_t = \frac{\mu RL^3}{2C^2(\phi)} \left(\frac{\pi\epsilon(\omega - 2\dot{\phi})}{2(1 - \epsilon^2)^{3/2}} + \frac{4\epsilon\dot{\epsilon}}{(1 - \epsilon^2)^2} \right) (1 + K \sin(N\phi + \psi)) \quad (80)$$

3.4 Solución Ecuaciones del Movimiento (Modelo Unidad Generadora)

Las ecuaciones del movimiento (47), (48), (49) y (50) son diferenciales de segundo orden y pueden ser resueltas como un sistema de ecuaciones de primer orden usando la sustitución del vector de estado

\bar{X} , este desarrollo es similar al utilizado en [Huang et al. 2017].

$$\bar{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{Bmatrix} \quad (81)$$

Reemplazando en las ecuaciones del movimiento se obtiene el siguiente sistema de 8 ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{X}_1 = X_3 \quad (82)$$

$$\dot{X}_2 = X_4 \quad (83)$$

$$\dot{X}_3 = \frac{1}{M} (F_{G,x} + F_{T,x} - f_{1,x} - f_{2,x} - f_{3,x}) \quad (84)$$

$$\dot{X}_4 = \frac{1}{M} (F_{G,y} + F_{T,y} - f_{1,y} - f_{2,y} - f_{3,y}) \quad (85)$$

$$\dot{X}_5 = X_7 \quad (86)$$

$$\dot{X}_6 = X_8 \quad (87)$$

$$\dot{X}_7 = \frac{1}{I} (-F_{G,y}l_0 + F_{T,y}l_4 + f_{1,y}l_1 + f_{2,y}l_2 - f_{3,y}l_3) \quad (88)$$

$$\dot{X}_8 = \frac{1}{I} (F_{G,x}l_0 - F_{T,x}l_4 - f_{1,x}l_1 - f_{2,x}l_2 - f_{3,x}l_3) \quad (89)$$

En cada caso la magnitud de las fuerzas f_1 , f_2 y f_3 estará sujeta al desplazamiento de los puntos en los que se encuentran ubicados. Por ejemplo la fuerza en el punto 1 se escribe en función de los desplazamientos en coordenadas polares ϵ_1 y ϕ_1 como se indica a continuación.

$$f_{1r} = -\frac{\mu RL^3}{2C_1^2} \left(\frac{2\epsilon_1^2(\omega - 2\dot{\phi}_1)}{(1 - \epsilon_1^2)^2} + \frac{\pi(1 + 2\epsilon_1^2)\dot{\epsilon}_1}{(1 - \epsilon_1^2)^{5/2}} \right) \quad (90)$$

$$f_{1t} = \frac{\mu RL^3}{2C_1^2} \left(\frac{\pi\epsilon_1(\omega - 2\dot{\phi}_1)}{2(1 - \epsilon_1^2)^{3/2}} + \frac{4\epsilon_1\dot{\epsilon}_1}{(1 - \epsilon_1^2)^2} \right) \quad (91)$$

Los desplazamientos en cada descansos se relacionan con los desplazamientos del centro de masa según las siguientes expresiones:

$$x_1 = x + l_1\theta_y \quad x_2 = x + l_2\theta_y \quad x_3 = x - l_3\theta_y \quad (92)$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x} + l_1\dot{\theta}_y \quad \dot{x}_2 = \dot{x} + l_2\dot{\theta}_y \quad \dot{x}_3 = \dot{x} - l_3\dot{\theta}_y \quad (93)$$

$$y_1 = y - l_1\theta_x \quad y_2 = y - l_2\theta_x \quad y_3 = y + l_3\theta_x \quad (94)$$

$$\dot{y}_1 = \dot{y} - l_1\dot{\theta}_x \quad \dot{y}_2 = \dot{y} - l_2\dot{\theta}_x \quad \dot{y}_3 = \dot{y} + l_3\dot{\theta}_x \quad (95)$$

Donde se cumple:

$$x_1 = C_1\epsilon_1 \cos \phi_1 \quad x_2 = C_2\epsilon_2 \cos \phi_2 \quad x_3 = C_3\epsilon_3 \cos \phi_3 \quad (96)$$

$$y_1 = C_1\epsilon_1 \sin \phi_1 \quad y_2 = C_2\epsilon_2 \sin \phi_2 \quad y_3 = C_3\epsilon_3 \sin \phi_3 \quad (97)$$

Estas ecuaciones se resuelven numéricamente usando el software Matlab con el comando ode15s, el cual es un método implícito de orden variable mas conocido como método de Gear, este se usa cuando los problemas son moderadamente rígidos. Las condiciones iniciales impuestas son:

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \theta_{x,0} \\ \theta_{y,0} \\ \dot{\theta}_{x,0} \\ \dot{\theta}_{y,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \times 10^{-4} \\ 1 \times 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (98)$$

CAPÍTULO 4

Análisis de Resultados

En este capítulo se presenta la validación y la evaluación del modelo de descanso planteado. La validación de este modelo se realiza para los casos de rotor horizontal y vertical a partir de estudios disponibles en la literatura. La evaluación del modelo consiste en simular las órbitas de los descansos usando datos disponibles en diversos estudios con el objetivo de observar la influencia del desbalanceamiento del rotor, la velocidad de rotación y el peso del rotor en las órbitas obtenidas con el modelo propuesto.



4.1 Validación del Modelo de Descanso Hidrodinámico

4.1.1 Caso Rotor Horizontal

Para validar el modelo planteado en el caso de rotor horizontal, se simula un rotor horizontal montado sobre descansos hidrodinámicos, como el estudiado en [Hemmati et al. 2017]. En este estudio se realiza un análisis de estabilidad de los descansos para distintas condiciones de operación. La presión del fluido en los descansos se determina para 2 casos: régimen laminar empleando la ecuación clásica de Reynolds; y régimen turbulento usando la ecuación modificada de Reynolds, la cual considera los modelos de turbulencia Constantinescu y Ng–Pan–Elrod. Los resultados obtenidos por Hemmati indican en general que las órbitas predichas mediante el modelo laminar son más pequeñas que usando los modelos de turbulencia para un número de Reynolds $\overline{Re} > 10000$. El modelo planteado en esta tesis aplica solo para régimen laminar, pues está orientado a descansos hidrodinámicos operando en unidades generadoras de baja velocidad. Es por ello que solo se consideraran los resultados en régimen laminar expuestos en el estudio antes citado. [Hemmati et al. 2017] realiza la validación experimental de su modelo basado en el estudio realizado por [Wang et al. 2006]. En la Figura 22 se detalla el esquema del banco de ensayo utilizado.

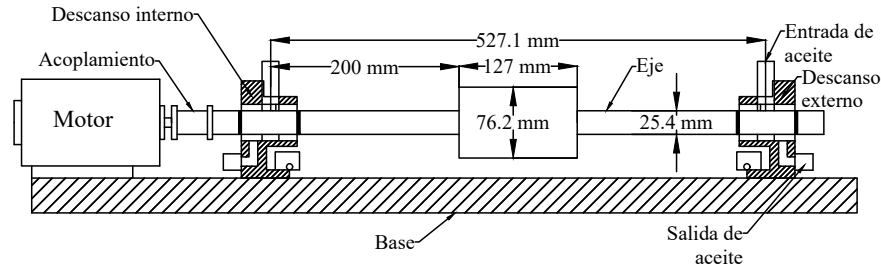


Figura 22: Esquema del banco de ensayo utilizado por [Wang et al. 2006].

En la Tabla 5 se detallan las especificaciones del rotor ensayado por [Wang et al. 2006].

Tabla 5: Especificaciones del rotor ensayado por [Wang et al. 2006].

Característica	Símbolo	Valor	Unidad
Huelgo radial	C	$50,8 \times 10^{-6}$	(m)
Viscosidad del aceite	μ	0,028	(Pa s)
Masa del rotor	M_r	5,45	(kg)
Diámetro del descanso	D	0,0254	(m)
Largo del descanso	L	0,0127	(m)

Las distintas condiciones de operación para un descanso hidrodinámico horizontal quedan definidas mediante el número adimensional de Sommerfeld S . Este se define como indica la ecuación (99).

$$S = \frac{\mu\omega LR^3}{\pi WC^2} \quad (99)$$

En la Figura 23 se detallan las órbitas obtenidas para un caso de baja carga, $S = 0,3$. Las trayectorias se expresan en función del desplazamiento relativo, $\bar{x} = x/C$ e $\bar{y} = y/C$. Se observa además que las trayectorias transientes tienen comienzo en el punto $P = (0, 0)$. Si bien este punto no representa una posición física real del eje, esta se empleó para comparar con lo calculado por [Hemmati et al. 2017].

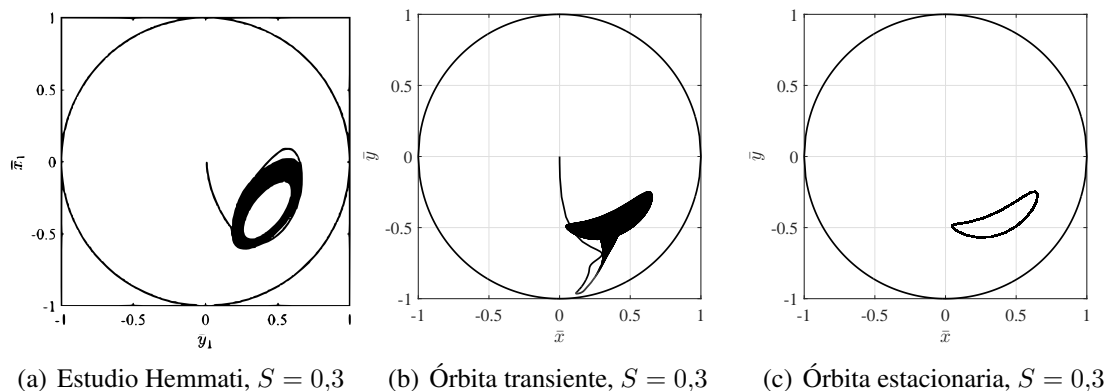


Figura 23: Comparación de trayectorias en descanso corto $S = 0,3$

En la Figura 23 (a) se muestran los resultados de [Hemmati et al. 2017]. En las Figuras 23 (b) y 23 (c) se detalla las trayectorias transientes y estacionarias obtenidas aplicando el modelo planteado en este trabajo. Se observa que para un caso de baja carga ($S = 0,3$) las órbitas exhiben un menor parecido. Esta diferencia puede ser explicada por la forma en que se incorpora la fuerza del fluido. En el estudio de Hemmati la fuerza del fluido se expresa como una sumatoria de parámetros concentrados de rigidez y amortiguamiento, mientras que en el modelo propuesto en esta memoria, la fuerza del fluido se incluye como una expresión analítica derivada de la aproximación de descanso corto.

En la Figura 24 se detallan las órbitas del descanso para 2 condiciones distintas de operación de mayor carga, ($S = 0,07$ y $S = 0,05$). Aquí se muestran los resultados obtenidos por el modelo planteado y los exhibidos por [Hemmati et al. 2017].

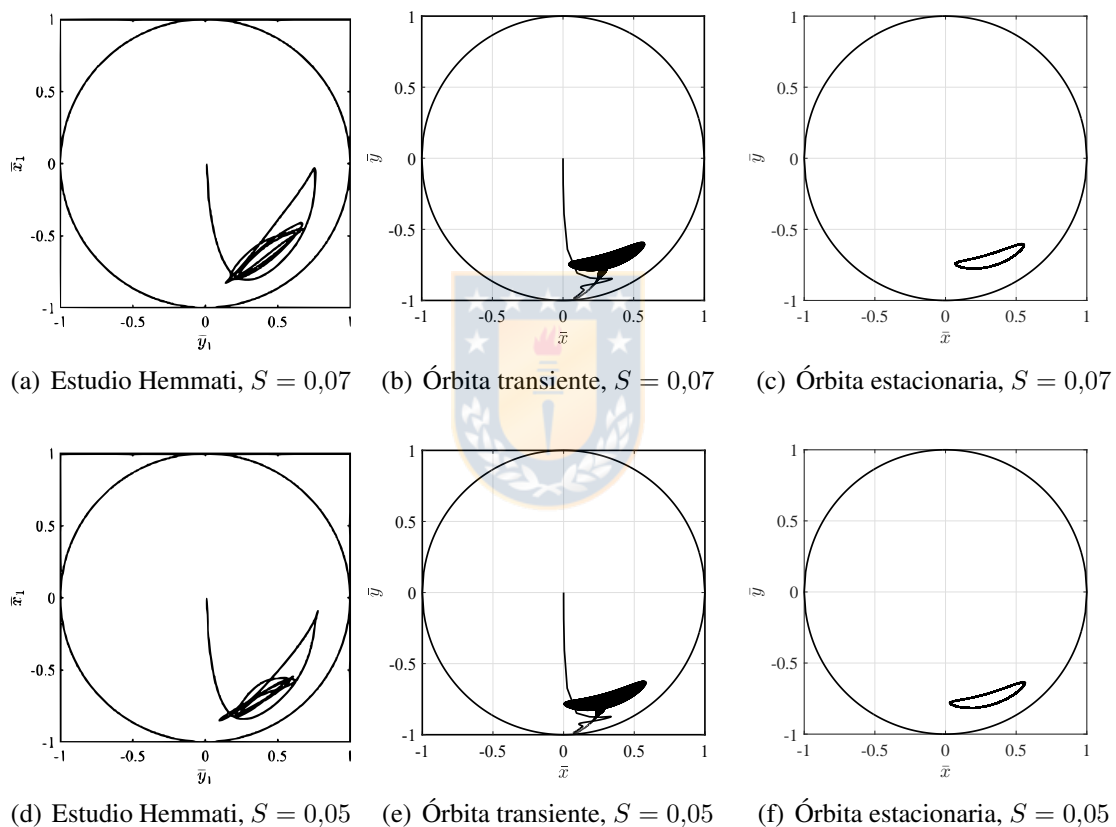


Figura 24: Comparación de trayectorias en descanso corto para 3 condiciones de operación

En las Figuras 24 (a) y 24 (d) se muestran los resultados de [Hemmati et al. 2017]. En las Figuras 24 (b), 24 (c), 24 (e) y 24 (f) se detalla las trayectorias transientes y estacionarias obtenidas aplicando el modelo planteado en este trabajo. Para ambas condiciones ($S = 0,07$ y $0,05$) se obtuvo concordancia en los resultados, tanto en la excentricidad en estado estacionario como en la forma de la órbita.

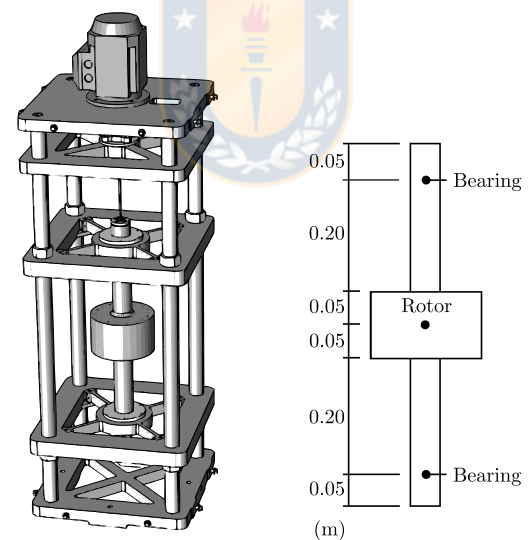
4.1.2 Caso Rotor Vertical

Para el caso de rotor vertical se considera el rotor descrito en [Nässelqvist et al. 2014]. En la Tabla 6 se detallan las características del rotor y de los descansos.

Tabla 6: Especificaciones del rotor estudiado por [Nässelqvist et al. 2014].

Característica	Símbolo	Valor	Unidad
Huelgo radial	C	0,03	(mm)
Viscosidad del aceite	μ	0,027	(Pa s)
Masa del rotor	M_r	0,96	(kg)
Diámetro del descanso	D	50,09	(mm)
Diámetro del eje	D_e	49,84	(mm)
Largo del descanso	L	20	(mm)
Número de patines	N	4	–
Velocidad de rotación	ω	2350	(rpm)

En la Figura 25 se detalla un esquema del banco de ensayo utilizado. En este estudio se consideraron 3 condiciones de operación, las cuales se diferencian en la magnitud del desbalanceamiento residual, todas ellas a una velocidad de operación $\omega = 2350$ rpm.



(a) Banco de ensayo

(b) Esquema del rotor

Figura 25: Esquema del banco de ensayo utilizado por [Nässelqvist et al. 2014].

En la Figura 26 se detalla el desplazamiento del eje en el descanso para un desbalanceamiento de $1,4 \times 10^{-3}$ kgm. Se observan los resultados experimentales y teóricos obtenidos por [Nässelqvist et al. 2014] y el resultado teórico obtenido aplicando el modelo desarrollado en esta tesis.

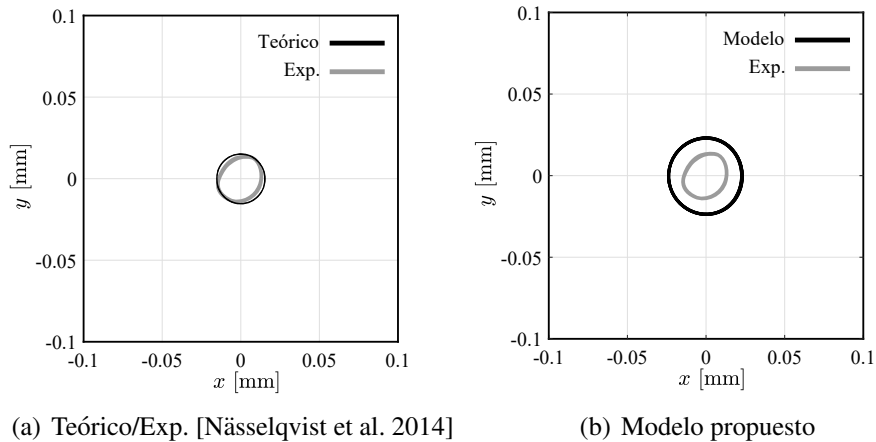


Figura 26: Desplazamiento del eje en el descanso con desbalanceamiento de $1,4 \times 10^{-3}$ kgm.

En la Figura 27 se detalla el desplazamiento del eje en el descanso para un desbalanceamiento de $3,3 \times 10^{-3}$ kgm.

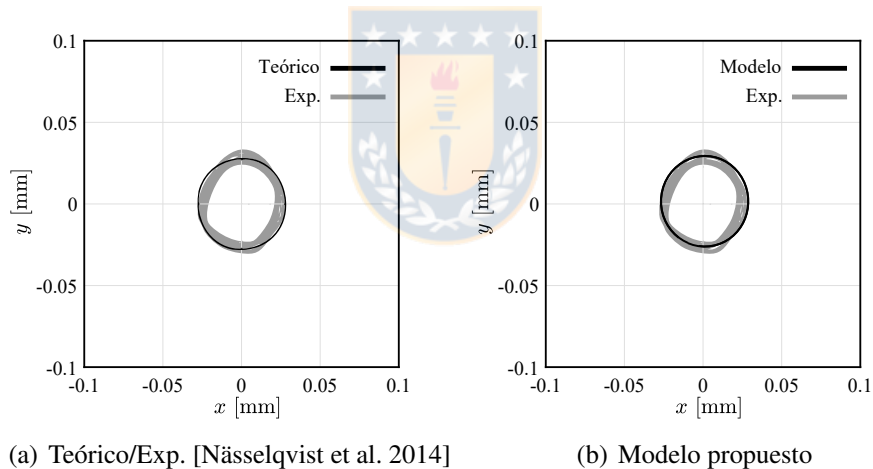


Figura 27: Desplazamiento del eje en el descanso con desbalanceamiento de $3,3 \times 10^{-3}$ kgm.

Por último, en la Figura 28 se detalla el desplazamiento del eje en el descanso para un desbalanceamiento de $5,0 \times 10^{-3}$ kgm.

Se observa concordancia entre los resultados obtenidos por Nässelqvist y los resultados obtenidos aplicando el modelo propuesto. La diferencia entre estos resultados es de alrededor de un 15 % en la amplitud de la órbita descrita por el eje en el descanso. Se constata además que a diferencia del caso del rotor horizontal, la órbita descrita no es una elipse, si no una trayectoria principalmente circular en torno al centro del descanso.

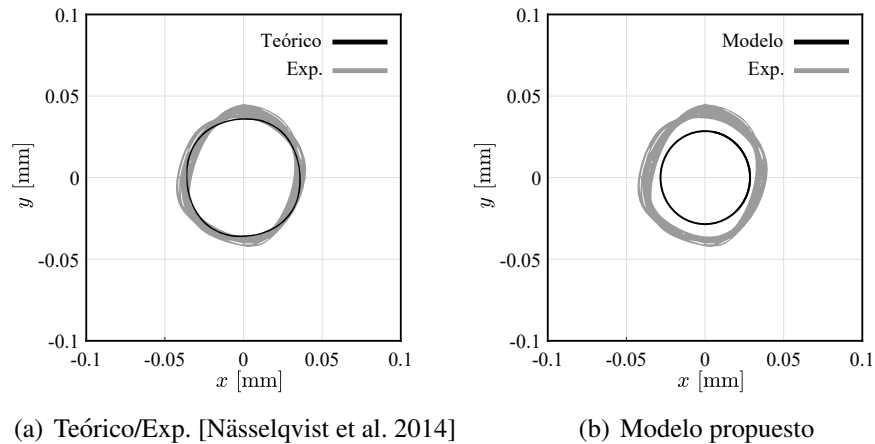


Figura 28: Desplazamiento del eje en el descanso con desbalanceamiento de $5,0 \times 10^{-3}$ kgm.

Los resultados anteriores consideran al rotor montado sobre descansos hidrodinámicos circulares. Ahora se presentan los resultados obtenidos considerando los descansos hidrodinámicos tipo *tilting pad* según el desarrollo mostrados en la sección 3.3.

Las mediciones experimentales llevadas a cabo por Nässelqvist y las cuales usó para sustentar su modelo teórico se presentan en la Figura 29 en gris. Los resultados del desplazamiento del eje calculados usando el modelo planteado en este estudio se observan en negro para los distintos valores de desbalanceamiento.

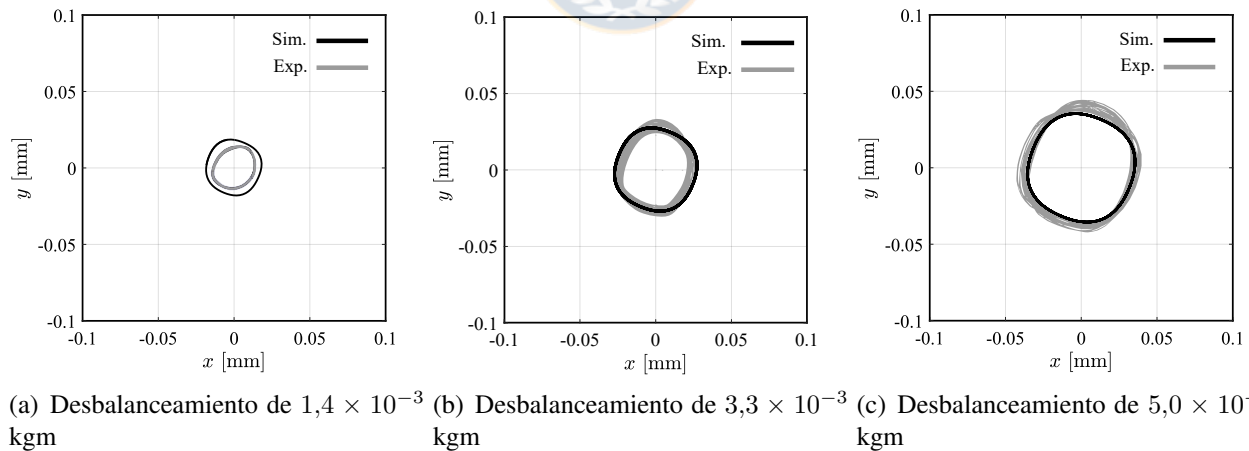


Figura 29: Comparación de mediciones experimentales [Nässelqvist et al. 2014] y simuladas

Para esta última simulación se observa alta concordancia entre los resultados obtenidos empleando el modelo adaptado para descansos tipo *tilting pad*. Esta concordancia se ve favorecida en la medida que el desbalanceamiento del rotor aumenta, alcanzando una diferencia entre las órbitas de menos del 10 %. Por otro lado, para el caso con menor desbalanceamiento del rotor ($1,4 \times 10^{-3}$ kgm) la diferencia entre las órbitas se mantiene en 15 % aproximadamente. Finalmente, la forma de las órbitas es la esperada para este tipo de descansos. En los 3 casos se observa una trayectoria casi circular, marcada por la presencia de los 4 patines del descanso.

4.1.3 Caso Unidad Generadora

[Carvalho et al. 2017] establece a partir de la medición en 20 hidrogenadores en perfecta condición mecánica que las condiciones de funcionamiento de los descansos hidrodinámicos de estas máquinas pueden tener cambios impredecibles y significativos. Este comportamiento impide la determinación teórica de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento del descanso con una precisión adecuada, dificultando la detección de daños.

Considerando que los coeficientes dinámicos tienen sensibilidad similar al daño y considerando además que es más fácil medir la rigidez del descanso que la amortiguación, el artículo citado discute un método para estimar en forma experimental los coeficientes de rigidez de descansos en unidades generadoras, usando solamente cambios en las vibraciones medidas, las cuales generalmente son monitoreadas.

El modelo es validado mediante señales vibratorias sintetizadas por un modelo matemático simplificado que simula el comportamiento dinámico de grandes unidades generadoras. El método se aplicó a un descanso hidrodinámico de una unidad generadora de 700 MW, utilizando dos excitaciones diferentes: el desbalanceamiento del rotor y vórtices formados en el rotor de la turbina cuando esta máquina opera a cargas parciales.

En la Figura 15 (previamente mostrada) se detalla un esquema del modelo simplificado de 10 grados de libertad empleado por Carvalho para simular el comportamiento dinámico de la unidad generadora.

En la Tabla 7 se detallan las características de los descansos de la unidad generadora. Estos son los descansos del generador superior (UJB) e inferior (LJB) y el descanso de la turbina (TJB).

Tabla 7: Especificaciones de los descansos UJB, LJB y TJB [Carvalho et al. 2017]

Descripción	UJB	LJB	TJB
Numero de patines	16	16	12
Radio del eje (mm)	1100	2600	1600
Radio del patín (mm)	1103	2604	1633
Huelgo del patín en operación (μm)	200	300	200
Factor de precarga	0,933	0,925	0,994
Largo del patín (mm)	350	620	500
Ancho del patín (mm)	400	310	500
Datos del lubricante			
Viscosidad a 40°C (Pa s)	0,047	0,047	0,047
Viscosidad a 100°C (Pa s)	0,0068	0,0068	0,0068
Densidad a 20°C (kg/m ³)	873	873	873
Rango de temperatura (°C)	40 – 55	40 – 55	40 – 50

Las mediciones exhibidas en el estudio antes citado se muestran a continuación. En la Figura 30 se detalla la vibración relativa del eje en la dirección x medida en el descanso UJB y LJB con el rotor sometido a un desbalance $G4,25$ mm/s.

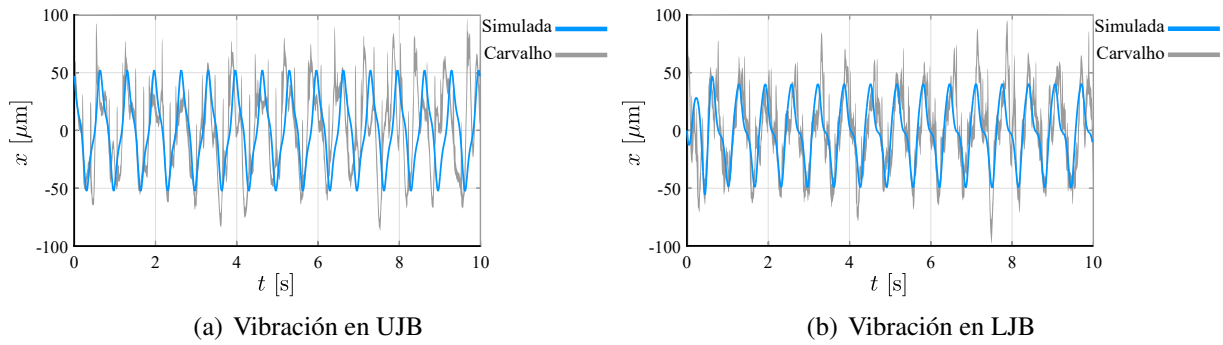


Figura 30: Vibración relativa en x del descanso UJB y LJB con $G4,25$ mm/s

En la Figura 31 se detalla la órbita del descanso UJB y LJB medida por Carvalho y simulada mediante el modelo propuesto para un grado de balanceamiento $G4,25$ mm/s.

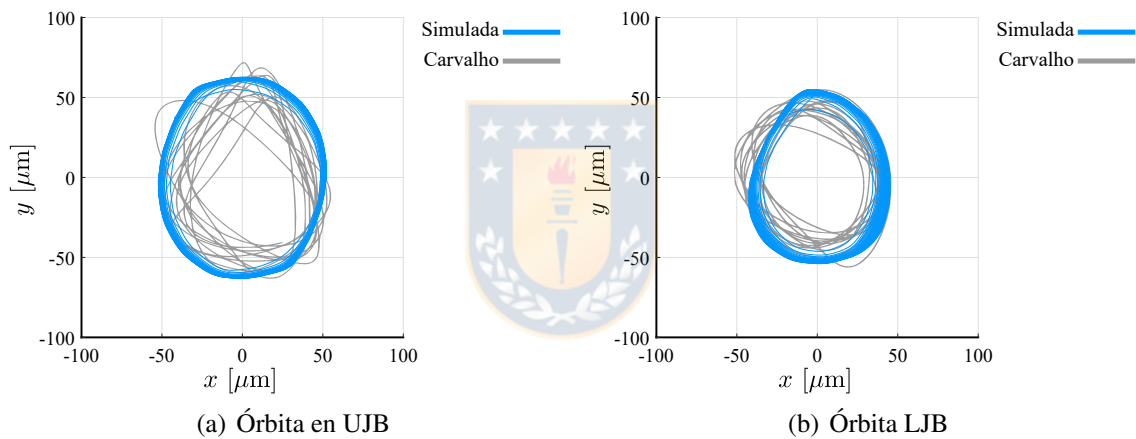


Figura 31: Órbitas del eje en el descanso UJB con un desbalanceamiento de $G4,25$ mm/s

Para este caso de estudio se observó concordancia entre los resultados obtenidos y aquellos que exhibe [Carvalho et al. 2017]. La vibración calculada empleando el modelo propuesto presenta amplitud regular que alcanza $50\mu\text{m}$, mientras que el resultado exhibido por Carvalho es menos regular en amplitud, la cual solo ronda en torno a los $50\mu\text{m}$, y en ocasiones alcanza amplitudes mayores, (Figura 30(a) y Figura 30(b)). En cuanto a la cantidad de ciclos en 10 s, en ambos casos se obtienen 15 ciclos. En cuanto a la forma de la órbita se observa similitud, ambos resultados son órbitas circulares con amplitudes de un orden magnitud similar, donde aquellas que muestra [Carvalho et al. 2017] parecen ser más erráticas que las obtenidas mediante el modelo propuesto en esta tesis, (Figura 31).

Los resultados obtenidos muestran un buen desempeño del modelo cuando es aplicado a descansos operando en una unidad generadora. Con ello se concluye la validación del modelo dando paso ahora a la evaluación de distintas variables que tienen lugar en la dinámica de los descansos.

4.2 Evaluación del Modelo

4.2.1 Efecto del Desbalanceamiento del Rotor

Es de interés conocer cómo distintos grados de balanceamiento del rotor afectan en la trayectoria del muñón en el descanso. Para simular este efecto se considera el rotor horizontal descrito en [Cha et al. 2014], el cual consta de un rotor de 510 kg montado sobre descansos hidrodinámicos, ($L/D = 0,5$). En la Tabla 8 se detallan las características del rotor considerado.

Tabla 8: Especificaciones del rotor estudiado por [Cha et al. 2014].

Característica	Símbolo	Valor	Unidad
Huelgo radial	C	1×10^{-4}	(m)
Viscosidad del aceite	μ	0,027	(Pa s)
Masa del rotor	M_r	510	(kg)
Diámetro del descanso	D	0,1	(m)
Largo del descanso	L	0,05	(m)
Velocidad de rotación	ω	3000	(rpm)

En la Figura 32 se exhiben las órbitas obtenidas aplicando el modelo propuesto para distintos grados de balanceamiento G .

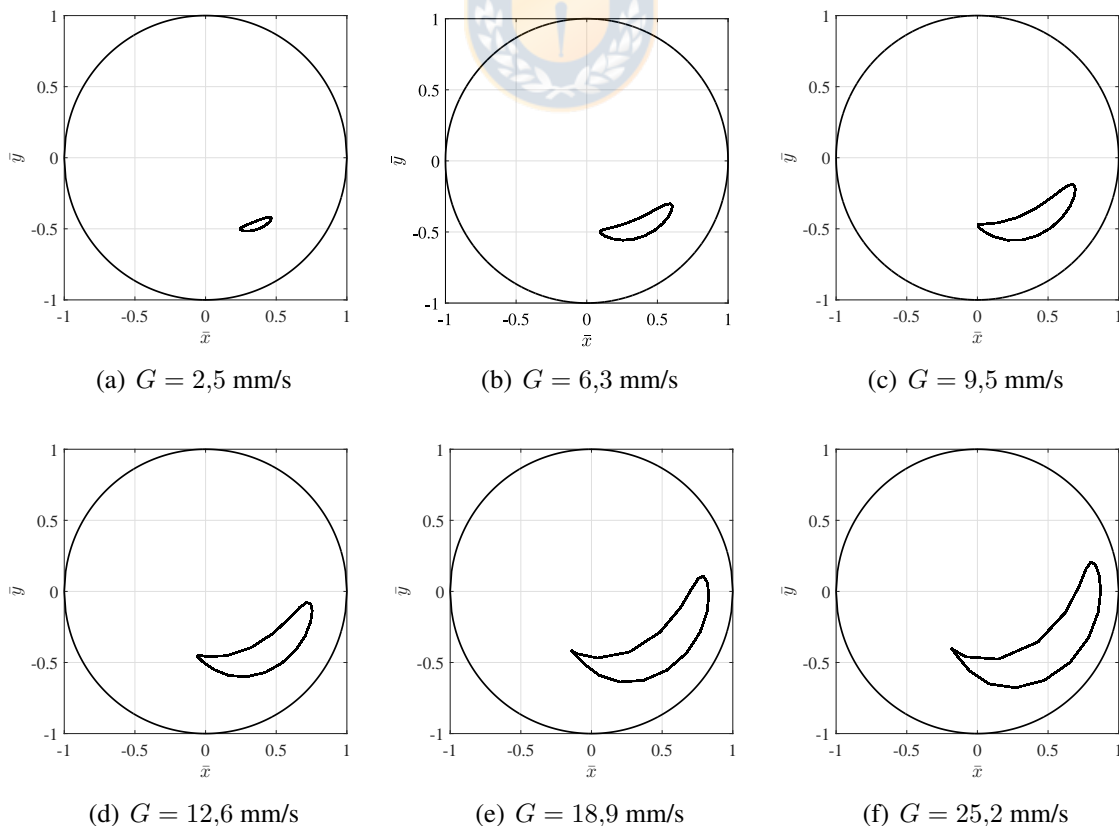


Figura 32: Trayectorias en descanso para distintos grados de balanceamiento.

En la Figura 32 (a) y 32 (b) se muestran las trayectorias en estado estacionario considerando un desbalanceamiento que cumple con la norma ISO 1940-1. En las Figuras 32 (c), 32 (d), 32 (e) y 32 (f) se muestran las trayectorias en estado estacionario para un grado de balanceamiento no admisible según norma y que pueden ser calificados como desbalanceamientos leves y severos. Se observa que a medida que aumenta el nivel de desbalanceamiento también lo hacen el tamaño de las órbitas, esto es debido a que la fuerza generada por el desbalanceamiento es un vector rotatorio, que al aumentar de magnitud induce mayores desplazamiento en torno a la posición de equilibrio, generando una trayectoria cada vez mas amplia.

4.2.2 Efecto de la Velocidad de Rotación

Para observar el efecto que tiene la velocidad de rotación sobre las trayectorias calculadas a partir del modelo, se considera nuevamente el rotor horizontal descrito en la Tabla 8 [Cha et al. 2014]. La velocidad nominal para este banco de ensayo es de 3000 rpm y se considera un grado de balanceamiento $G = 6,3 \text{ mm/s}$. En la Figura 33 se detallan las trayectorias en estado estacionario del descanso corto para distintas velocidades de rotación.

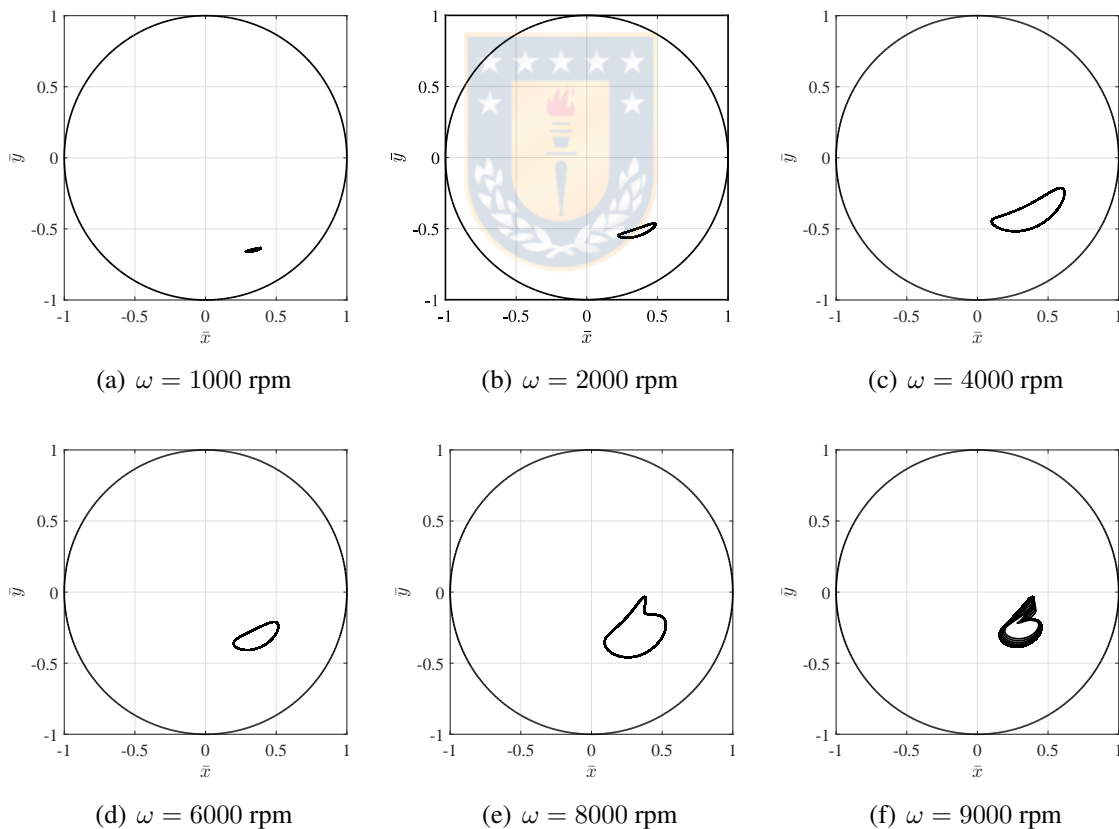


Figura 33: Trayectorias en descanso para distintas velocidades de rotación ω .

En las Figuras 33 (a) y 33 (b) se detallan las órbitas en estado estacionario para ω por debajo del valor nominal de 3000 rpm, mientras que en las Figuras 33 (c), 33 (d), 33 (e) y 33 (f) se exhiben las órbitas

para valores de ω por sobre el valor nominal. Se observa que a medida que aumenta la velocidad de rotación el tamaño de las órbitas descritas por el muñón aumenta y estas se comienzan a situar en el centro del descanso. El aumento de tamaño en las órbitas puede ser explicado gracias a la fuerza generada por el desbalanceamiento, que aumenta con el cuadrado de la velocidad de rotación mientras que la posición cada vez más centrada de la órbita puede ser atribuida a la presión generada por el fluido, la cual aumenta en forma proporcional con la velocidad de rotación e impide que el peso del rotor sitúe la órbita en un nivel mayor de excentricidad. Por otra parte, en las Figuras 33 (e) y 33 (f) para $\omega = 8000$ y $\omega = 9000$ rpm, es decir velocidades muy por encima del valor nominal, se observan órbitas erráticas en comparación con las anteriores, lo que da cuenta de algún tipo de inestabilidad en el comportamiento del descanso o puede tratarse también a problemas de origen numérico.

4.2.3 Efecto del Peso del Rotor en el Descanso

El efecto del peso del rotor es de gran interés, pues en descansos montados en rotores verticales el nivel de precarga es muy bajo y en general inexistente. Para analizar este efecto se considera el rotor descrito en la Tabla 8 [Cha et al. 2014] y un grado de balanceamiento $G = 2,5$ mm/s. En la Figura 34 se detallan las órbitas en estado estacionario obtenidas para distintos valores de W .

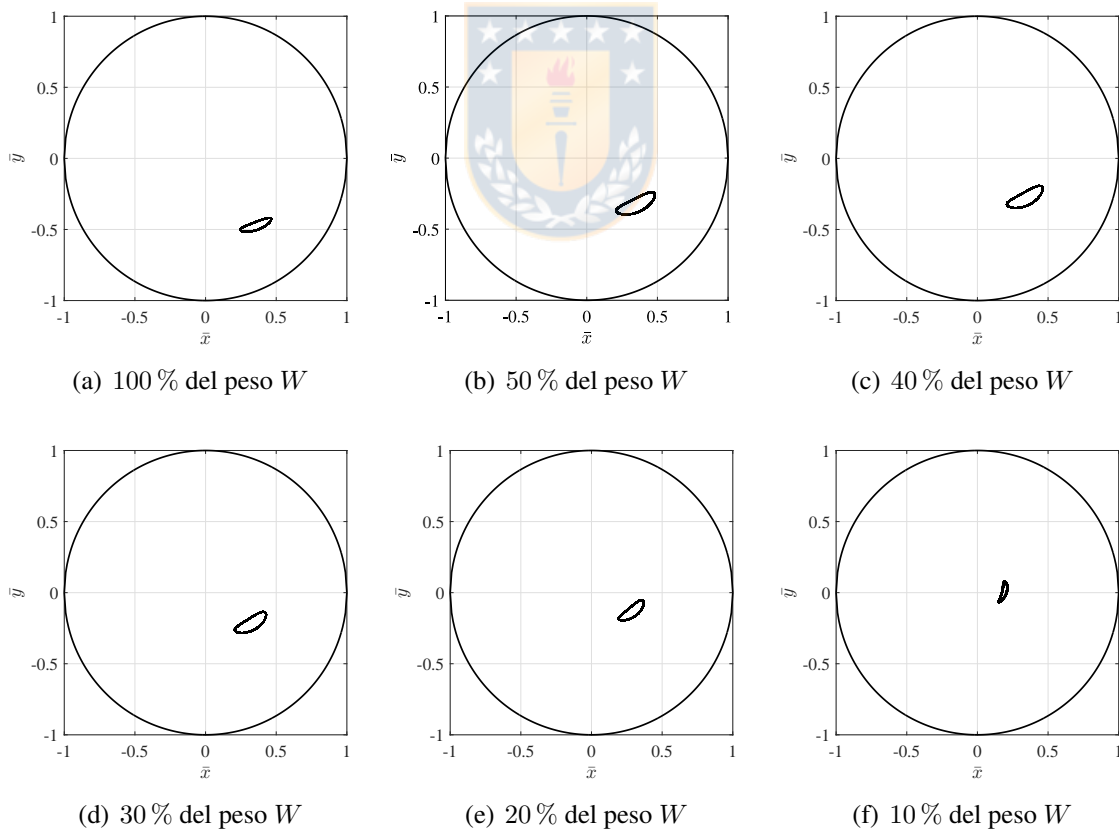


Figura 34: Trayectorias en descanso para distintos niveles de precarga W

En la Figura 34 (a) se detalla la trayectoria estacionaria del muñón en el descanso, en el cual se aplica la carga del peso W en su totalidad, es decir un rotor horizontal. En las Figuras 34 (b), 34 (c), 34 (d),

34 (e) y 34 (f) se reduce progresivamente el nivel de precarga debido al peso hasta llegar a un 10 %, lo que representa un rotor vertical. En la Figura 34 (a) se observa la órbita típica de un rotor horizontal sometido a una carga considerable, a medida que se disminuye esta carga la postura de esta órbita se sitúa cada vez al centro del descanso. Este resultado es esperado pues a medida que disminuye la fuerza asociada al peso, comienza a predominar sólo la fuerza debido al desbalanceamiento junto a la reacción ofrecida por el fluido. Como la dirección del desbalanceamiento cambia en todo momento, la condición de equilibrio estacionario será una órbita en torno al centro del descanso.

4.2.4 Variables Cinemáticas

El modelo planteado no solo permite obtener las trayectorias en el descanso. Dada la resolución de las ecuaciones del movimiento se obtienen los desplazamientos, velocidades y aceleraciones del muñón en el descanso hidrodinámico. Estos resultados pueden ser útiles para comparar con mediciones experimentales en ensayos de partida o parada. Para observar estos resultados se simula el rotor descrito en la Tabla 8 [Cha et al. 2014] considerando un grado de balanceamiento $G = 2,5 \text{ mm/s}$ y un 10 % de precarga asociada al peso W . En la Figura 35 se detalla la velocidad de rotación en el tiempo.

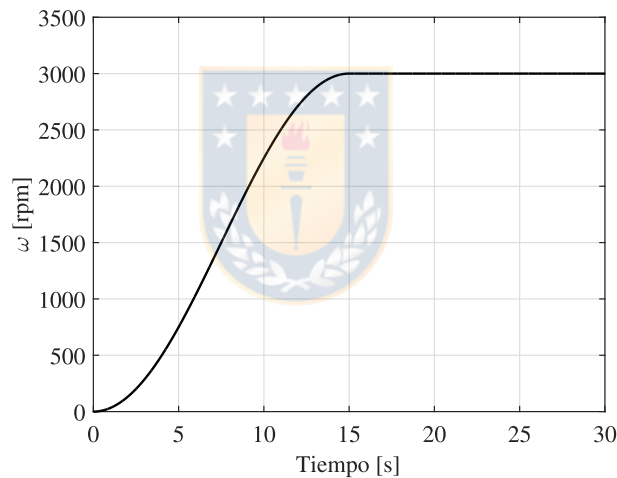


Figura 35: Velocidad de rotación del muñón en el tiempo.

La velocidad de operación alcanza las 3000 rpm en un periodo de partida de $T_p = 15 \text{ s}$. El periodo de evaluación es de $T = 30 \text{ s}$.

En la Figura 36 se detallan la velocidad de giro y radial descrita por el muñón en función del tiempo. La velocidad de giro del muñón alcanza un valor de aproximadamente 1500 rpm a partir de $t = 15 \text{ s}$, mientras que la velocidad vibratoria radial tienen un valor significativo solo mientras la velocidad de rotación va en aumento, luego de esto su valor es casi nulo.

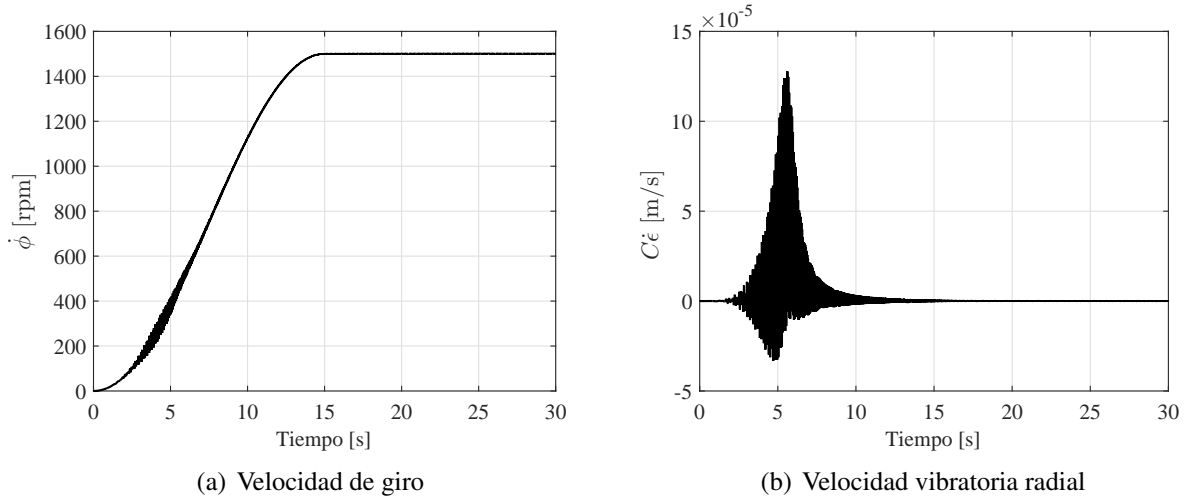


Figura 36: Velocidades de giro y vibratoria radial en ensayo de partida.

En la Figura 37 se detalla la aceleración centrípeta y tangencial del muñón en función del tiempo. Para ambas se observa que a partir de $t = 15$ s asumen un comportamiento regular, por un lado la aceleración centrípeta asume un valor constante mientras que la aceleración tangencial oscila en torno a 0.

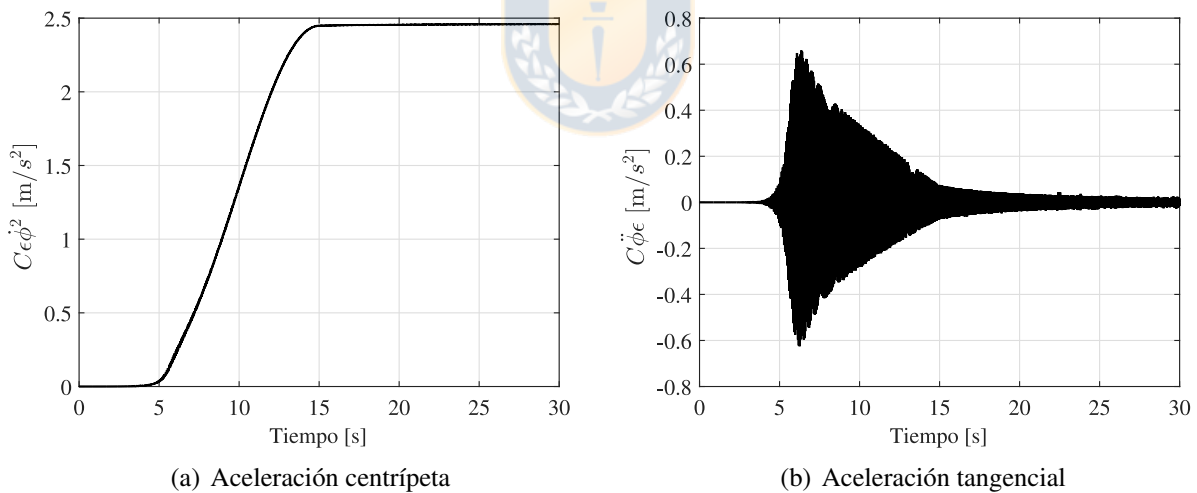


Figura 37: Aceleraciones centrípeta y tangencial en ensayo de partida.

Finalmente, en la Figura 38 se detalla la aceleración de coriolis y la aceleración relativa del muñón en función del tiempo. La aceleración de coriolis es prácticamente nula a partir de $t = 15$ s, mientras que la aceleración relativa exhibe un comportamiento variable a partir de $t = 15$ s.

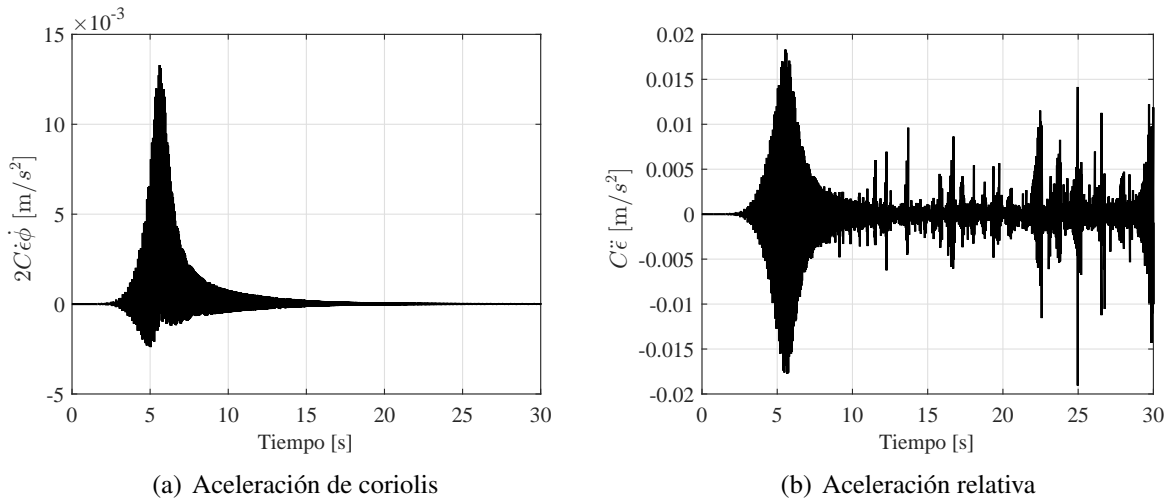


Figura 38: Aceleración coriolis y relativa en ensayo de partida.

4.3 Aplicación a un Caso Industrial

Para el caso industrial se considera un estudio realizado en 2016 en una central hidroeléctrica chilena, el cual fue motivado por los altos niveles vibratorios medidos en el descanso guía inferior (LJB), donde observó que las amplitudes vibratorias crecían aproximadamente con el cuadrado de la velocidad de rotación. Mediante sensores de desplazamiento fue posible describir las órbitas del eje en cada descanso para la condición de operación más desfavorable.

La conclusión del estudio fue que un desajuste indeseado en el huelgo de los descansos (en general mayor al nominal) ocasionó que la carga efectiva que estos resisten disminuya considerablemente. Por ello las amplitudes vibratorias crecían a medida que la carga debido al desbalanceamiento de los rotores aumenta (con el cuadrado de la velocidad de rotación).

El objetivo del actual estudio será aplicar el modelo propuesto a este caso industrial y evaluar su desempeño predictivo al establecer una correlación directa entre el origen del desperfecto, en este caso un huelgo excesivo en el descanso y los niveles vibratorios y órbitas observadas.

4.3.1 Antecedentes

En esta sección se detallan los antecedentes necesarios para realizar el estudio. En La Figura 39 se detalla el esquema de la unidad generadora objeto de estudio. Este diseño consta de 2 ejes rígidos acoplados. En el eje superior se encuentra montado el rotor del generador soportado sobre 2 descansos hidrodinámicos tipo *tilting pad*. El eje inferior porta el rotor de la turbina soportado por un único descanso hidrodinámico cilíndrico.

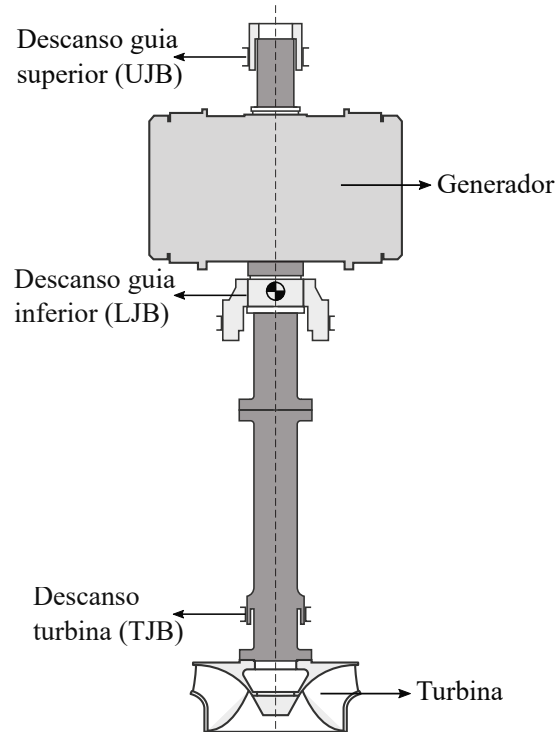


Figura 39: Esquema de la unidad generadora

En la Tabla 9 se detallan las características de los descansos de la unidad generadora, Estos son los descansos guía del generador superior (UJB) e inferior (LJB) y el descanso de la turbina (TJB).

Tabla 9: Especificaciones de los descansos UJB, LJB y TJB

Descripción	UJB	LJB	TJB
Número de patines	12	8	--
Radio del eje (mm)	200	200	200
Largo (mm)	100	120	200
Assembled pad clearance in operation (μm)	200	180	200
Datos del lubricante			
Viscosidad a 40°C (Pa s)	0,047	0,047	0,047
Viscosidad a 100°C (Pa s)	0,0068	0,0068	0,0068
Densidad a 20°C (kg/m ³)	873	873	873
Rango de temperatura (°C)	40 – 55	40 – 55	40 – 50

En la Figura 40 se detalla el esquema de segmentos de los descansos UJB y LJB. En línea segmentada se observa la posición del segmento según el huelgo nominal. En línea continua se observa la posición real medida del segmento luego de una inspección.

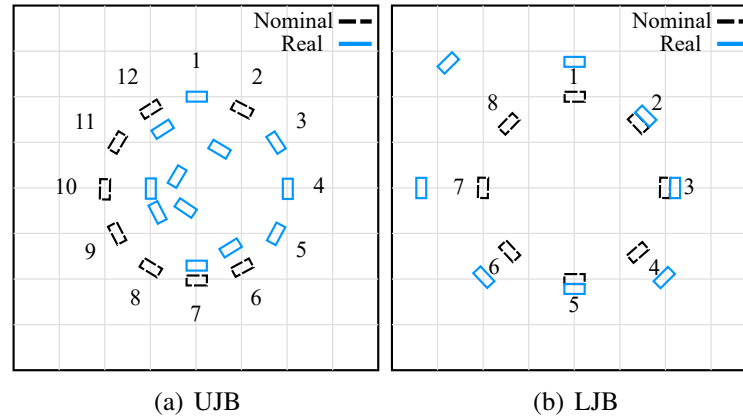


Figura 40: Esquemas de la ubicación de los segmentos

En la Tabla 10 se detallan las holguras medidas en cada descanso con respecto al huelgo nominal.

Tabla 10: Holguras medidas en los descansos UJB y LJB

UJB (nominal: 0, 20 mm)				LJB (nominal: 0, 18 mm)	
Segmento	Holgura [mm]	Segmento	Holgura [mm]	Segmento	Holgura [mm]
1	0, 20	9	0, 10	1	0, 25
2	0, 10	10	0, 10	2	0, 20
3	0, 20	11	0, 05	3	0, 20
4	0, 20	12	0, 15	4	0, 25
5	0, 20			5	0, 20
6	0, 15			6	0, 25
7	0, 15			7	0, 30
8	0, 05			8	0, 35

En las Tabla 11 se detallan las amplitudes peak to peak para $\omega = 300$ rpm y $\omega = 200$ rpm para 0 MW de potencia generada.

Tabla 11: Amplitudes de la componente $1 \times \omega$ en μm p-p

Ángulo de fase	$\omega = 300$ rpm			$\omega = 200$ rpm		
	UJB	LJB	TJB	UJB	LJB	TJB
0°	30	120	60	30	50	50
90°	80	360	60	50	100	50

Las amplitudes de la componente $1 \times \omega$ exhibidas en la Tabla 11 fueron medidas bajo las condiciones de operación antes descritas, (durante una detención). Por otra parte, se midió la amplitud de la componente $1 \times \omega$ en función de la potencia generada. Esta información se detalla en la Figura 41.

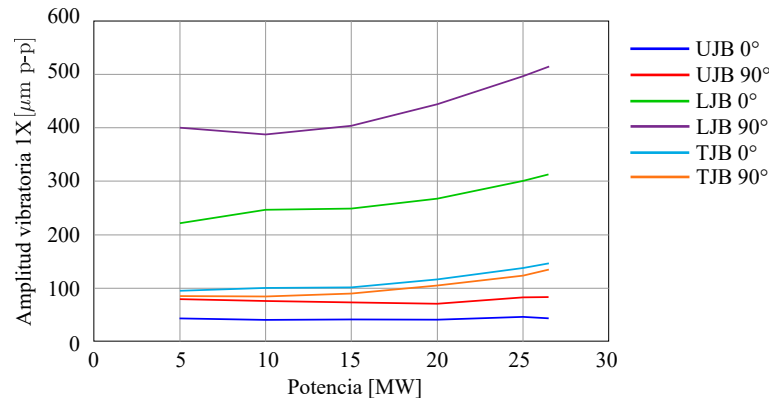


Figura 41: Amplitud de la componente $1 \times \omega$ versus la potencia generada

Finalmente, en la Figura 41 se detallan las órbitas medidas para la condición de operación más desfavorable, esto es a 25 MW de potencia.

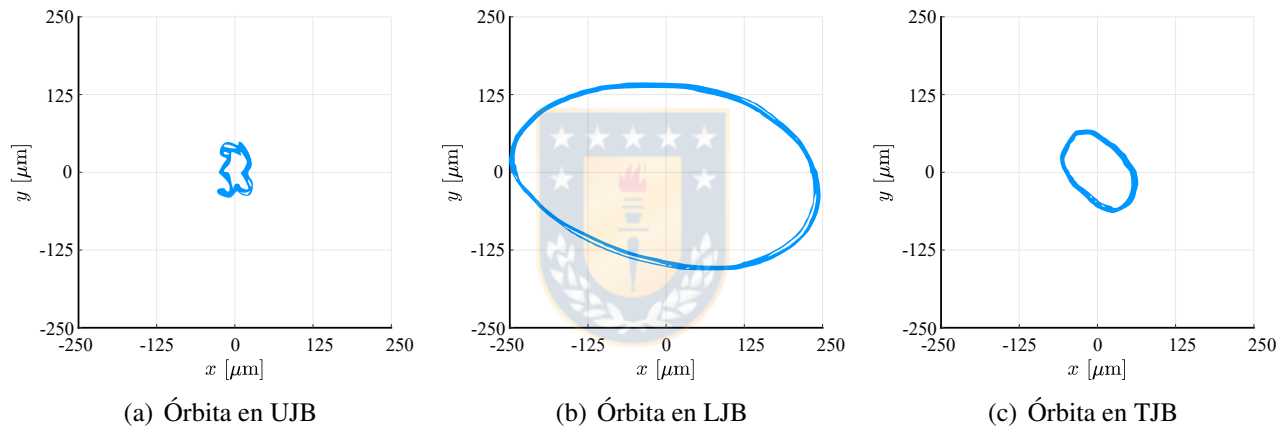


Figura 41: Órbitas medidas a 300 rpm y 25 MW de potencia generada

4.3.2 Aplicación del Modelo y Resultados

Recogiendo la información de la geometría y distribución de masa presentadas en la Figura 39 y en la Tabla 9 se resuelven las ecuaciones del movimiento incluyendo el modelo de descanso propuesto. Inicialmente es necesario calibrar la magnitud del desbalanceamiento magnético y la masa del generador. Estas son variables desconocidas en el estudio, por lo que deberán ser deducidas a partir de las mediciones experimentales. El primer paso será simular una condición de operación de partida desde 0 hasta 300 rpm a 0 MW de potencia conectada. Esto permitirá estimar la masa del generador sin la influencia del desbalanceamiento magnético, el resultado se considerará aceptable en la medida que las amplitudes de la componente $1 \times \omega$ en el espectro sean lo suficientemente parecidos a las amplitudes medidas y exhibidas en la Tabla 11. En cualquier caso se espera obtener un valor aproximado pero representativo de la masa del rotor del generador M_g .

En la Tabla 12 se resumen los resultados obtenidos de sucesivas simulaciones variando la masa del generador. Se obtuvieron resultados con una exactitud de hasta un 99,12% para una masa de del generador M_g estimada en unos 80000 kg.

Tabla 12: Amplitudes de la componente $1 \times \omega$ en μm p-p (simulada)

Ángulo de fase	$\omega = 300$ rpm			$\omega = 200$ rpm		
	UJB	LJB	TJB	UJB	LJB	TJB
0°	31,59	158,80	29,80	32,02	128,98	23,67
90°	90,40	342,22	60,53	47,52	344,67	29,13

En la Figura 42 se detallan los espectros obtenidos en cada descanso para una velocidad de operación que alcanza 300 rpm.

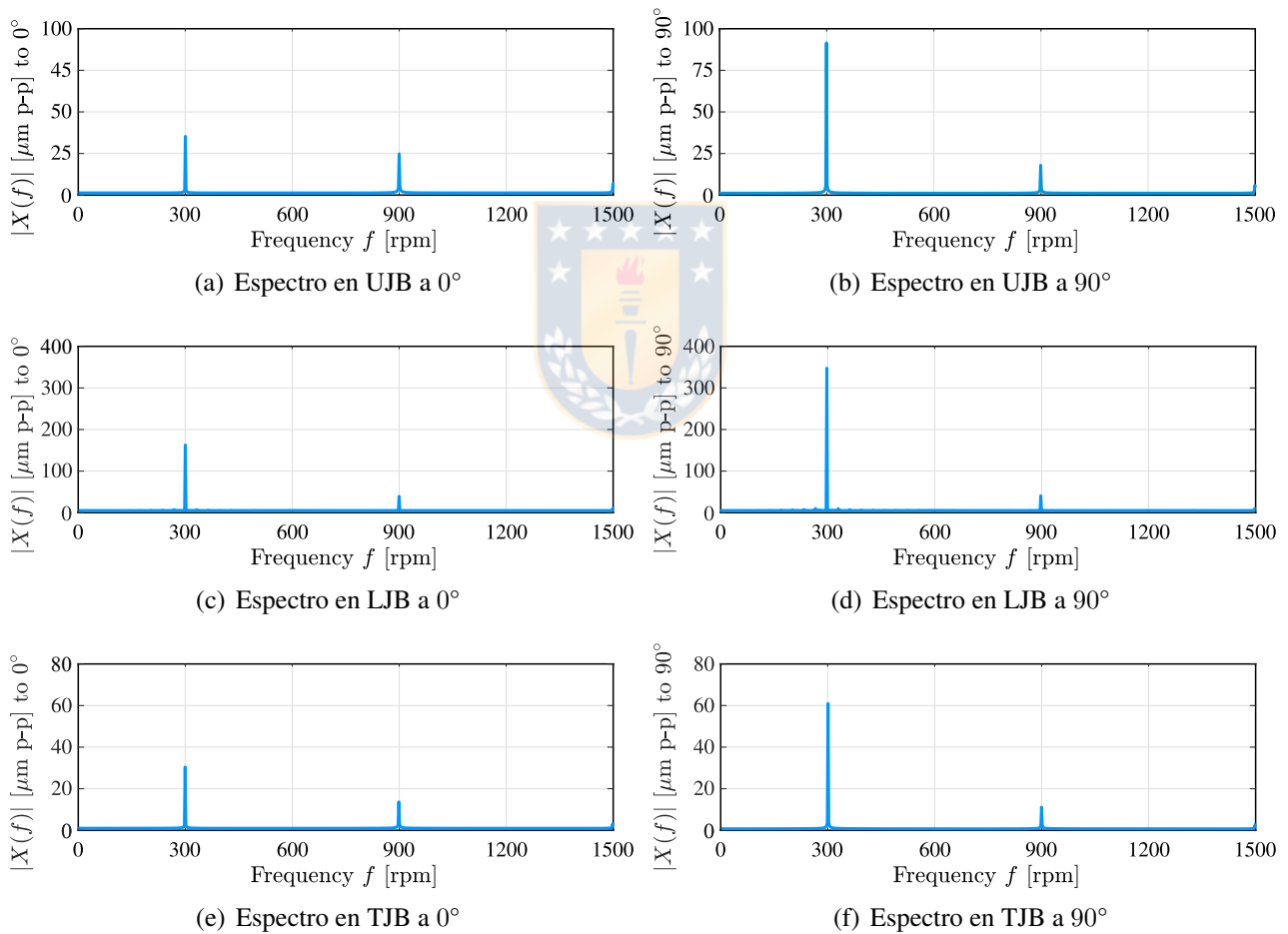


Figura 42: Espectros obtenidos en cada descanso a una velocidad de operación de 300 rpm

El siguiente paso será estimar la magnitud del desbalanceamiento magnético a partir de los diferentes amplitudes que se midieron de la componente $1 \times \omega$ y que se exhibe en la Figura 41. Para una velocidad de operación nominal $\omega = 300$ rpm y 25 MW de potencia generada se detallan las amplitudes de la componente $1 \times \omega$ en la Tabla 13.

Tabla 13: Amplitudes de la componente $1 \times \omega$ en μm p-p (25 MW)

Ángulo de fase	$\omega = 300$ rpm		
	UJB	LJB	TJB
0°	46,34	300,00	137,56
90°	85,37	495,12	121,95

Para un desbalanceamiento magnético del mismo orden de magnitud del desbalanceamiento mecánico del generador, es decir, de aproximadamente el mismo valor en unidades de fuerza se obtuvo una exactitud de hasta un 99,9 %.

En la Tabla 14 se detallan los resultados obtenidos luego de sucesivas simulaciones variando el desbalanceamiento magnético del generador.

Tabla 14: Amplitudes de la componente $1 \times \omega$ en μm p-p (25 MW simulada)

Ángulo de fase	$\omega = 300$ rpm		
	UJB	LJB	TJB
0°	57,61	312,06	140,70
90°	64,44	495,09	106,18

En la Figura 42 se detallan las órbitas simuladas versus las medidas experimentalmente, para la condición de operación de 300 rpm de velocidad de rotación nominal y 25 MW de potencia generada.

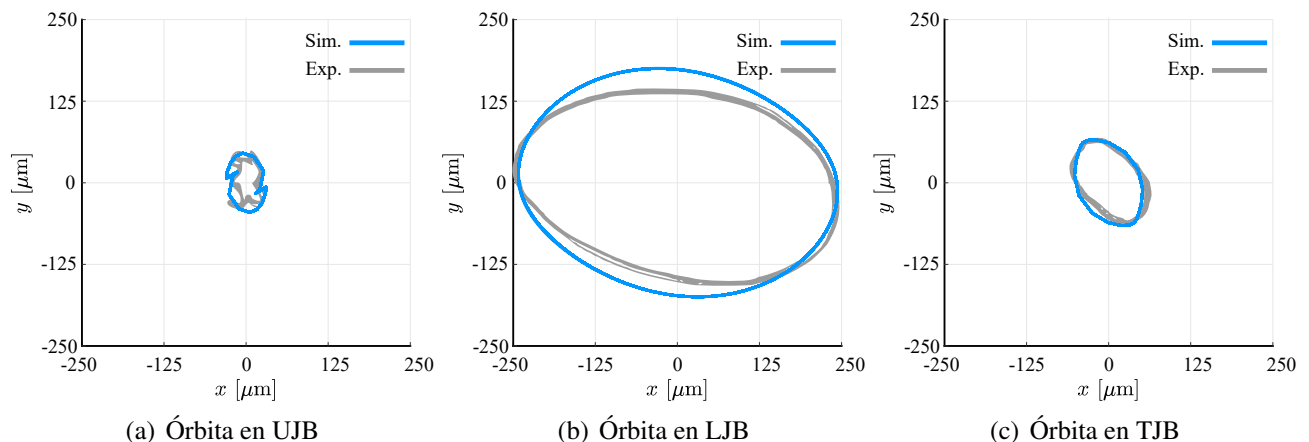


Figura 42: Órbitas medidas y simuladas a 300 rpm y 25MW de potencia

La condición de operación mostrada en la Figura 42 es la más desfavorable, debido a que el desbalanceamiento mecánico de los rotores y el desbalanceamiento magnético del generador alcanzan valores máximos en estado estacionario. Para esta condición se encontró que el tamaño de las órbitas es prácticamente invariante con respecto a la magnitud del desbalanceamiento mecánico de ambos rotores, es

decir, que al aumentar el desbalanceamiento por sobre los niveles recomendados (mayor a $G6,5$ mm/s) el incremento en las órbitas es poco significativo. Este resultado puede ser explicado por el excesivo huelgo del descanso guía inferior, la cual presenta una influencia predominante en la respuesta del descanso. Dado este resultado para esta última simulación se escogieron desbalanceamientos mecánicos típicos en este tipo de máquinas y según norma (Ambos rotores con desbalanceamiento igual a $G6,0$ mm/s).

En la Figura 43 se detallan los espectros obtenidos en cada descanso para una velocidad de operación que alcanza 300 rpm y una potencia generada de 25MW.

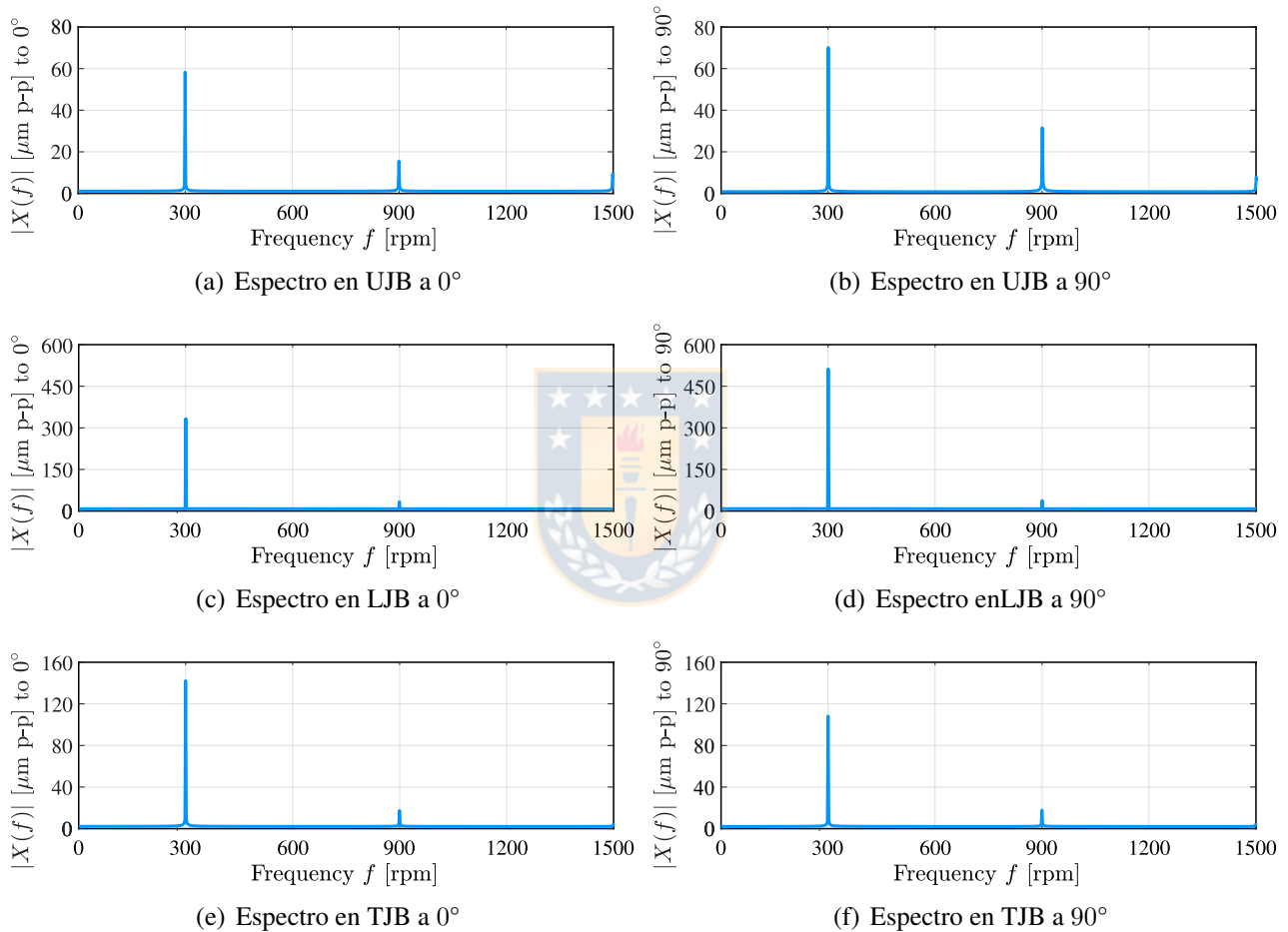


Figura 43: Espectros de cada descanso a 300 rpm y a 25 MW de potencia

Como se observa en la Figura 42 las órbitas obtenidas aplicando el modelo desarrollado en esta tesis muestran buena concordancia en comparación con las mediciones en terreno de la central (Figura 41). Se destaca en particular la órbita exhibida por el descanso LJB, la cual presenta una amplitud elevada debido al excesivo huelgo de los patines que componen este descanso, para este caso en particular los resultados del modelo presentan una exactitud del 13 %.

CAPÍTULO 5

Conclusiones

En este trabajo se presenta el desarrollo de un modelo del movimiento para un rotor vertical montado sobre descansos hidrodinámicos cortos de tipo cilíndrico o *tilting pad*. Este modelo se plantea de manera de incorporar el comportamiento en una configuración de rotor horizontal o vertical. El modelo se formula de manera de resolver el comportamiento en régimen transiente y estacionario.

El análisis de los resultados permite confirmar la validez del modelo a partir de la comparación entre los estudios disponibles en la literatura y las simulaciones realizadas. Se simularon y compararon trayectorias de un descanso corto y cilíndrico en régimen laminar, obteniéndose resultados con una diferencia máxima de 15 % en la amplitud de la órbita con los resultados expuestos en la literatura. Además se simularon y compararon trayectorias de un descanso corto y tipo *tilting pad* en régimen laminar, obteniéndose resultados con una diferencia máxima de 10 % en la amplitud de la órbita con los resultados expuestos en la literatura.

Se logra reproducir la influencia del desbalanceamiento en el tamaño de las órbitas: al aumentar la magnitud del desbalanceamiento lo hace también el tamaño de la órbita del muñón en el descanso.

Para el caso transiente se obtuvo que a medida que aumenta la velocidad de rotación en un descanso horizontal, la trayectoria del muñón se acerca cada vez más al centro del descanso. Esto debido a que la fuerza generada por el fluido es proporcional a la velocidad de rotación. Por otro lado la fuerza asociada al desbalanceamiento también aumenta en función de ω , y ambas superan en orden de magnitud a la precarga debido al peso del rotor cuando la velocidad de rotación es lo suficientemente alta. Por esta razón el equilibrio tiende a darse en una trayectoria cercana al centro del descanso.

Se obtuvo que a medida que el nivel de precarga disminuye, la órbita obtenida se ubica cada vez más lejos de las paredes del descanso. Por lo que en configuraciones de rotor vertical donde la precarga es muy baja se obtiene una trayectoria centrada en el centro del descanso hidrodinámico.

Por último, al aplicar el modelo de rotor vertical a un caso real de estudio en una unidad generadora, en que se conocía el huelgo radial de cada segmento de los descansos, se observó buena concordancia entre los resultados del modelo y las mediciones experimentales. Se simularon y compararon las trayectorias de los descansos en una condición de operación estacionaria y con una potencia conectada de 25 MW. Se calculó una diferencia máxima de 13 % en la amplitud de la órbita obtenida con respecto a los resultados medidos en terreno. Esto da cuenta de la validez del modelo al ser aplicado para el estudio de unidades generadoras cuando los descansos hidrodinámicos presentan excesivo huelgo radial o huelgos radiales no uniformes.

REFERENCIAS

- [Carvalho et al. 2017] Geraldo Carvalho Brito Jr, Roberto Dalledone Machado, Anselmo Chaves Neto, 2017. Experimental estimation of journal bearing stiffness for damage detection in large hydro-generators. Shock and Vibration Volume 2017.
- [Cha et al. 2014] Matthew Cha, Sergei Glavatskih 2014. Non linear dynamic behaviour of vertical and horizontal rotors in compliant liner tilting pad journal bearings: Some design considerations. Tribology International, 82, 142-152.
- [Ebrat et al. 2010] Omidreza Ebrat, Zissimos P. Mourelatos, Nikolas Vlahopoulos, Kumar Vaidyanathan, 2010. Calculation of journal bearing dynamic characteristics including journal misalignment and bearing structural deformation. Tribology Transactions, 47:1, 94-102.
- [Hirani 1998] Hirani, H. ,Athre, K. , & Biswas, S. 1998. Rapid and globally convergent method for dynamically loaded journal bearing design. Proc. Inst. Mech. Engrs. Part J, 212, 207-214.
- [Hemmati et al. 2017] Farzad Hemmati, Mohammad Miraskari, Mohamed S. Gadala, 2017. Dynamic analysis of short and long journal bearing in lamminar and turbulent regimes, application in critical shaft stiffness determination. Applied Mathematical Modelling, 48, 451-475.
- [Huang et al. 2017] Yu Huang, Zhuxin Tian, Runchang Chen, Haiyin Cao, 2017. A simpler method to calculate instability threshold speed of hydrodynamic journal bearing. Mechanism and Machine Theory, 108, 209-216.
- [Machado et al. 2015] Tiago H. Machado, Katia L. Cavalca 2015. Modeling of hydrodynamic bearing wear in rotor-bearing systems. Mechanics Research Communications, 69, 15-23.
- [Machado et al. 2016] Tiago H. Machado , Katia L. Cavalca 2016. Investigation on an experimental approach to evaluate a wear model for hydrodynamic cylindrical bearings. Applied Mathematical Modelling, 40, 9546-9564.
- [Nässelqvist et al. 2014] Mattias Nässelqvist, Rolf Gustavsson, Jan-Olov Aidanpää, 2014. Experimental and numerical simulation of unbalance response in vertical test rig with tilting-pad bearings. International Journal of Rotating Machinery Volume 2014.
- [Pinkus 1961] O. Pinkus & B. Sternlichtc, 1961, Theory of Hydrodynamic Lubrication. McGraw Hill.
- [Rao 1983] J. S. Rao, 1983, Rotor Dynamics. John Wiley & Sons Canada.
- [Reynolds 1886] O. Reynolds, 1886. On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. Philosophical Transactions of the Royal Society, 177, 157-234.

[Synnegård et al. 2016] Erik Synnegård, Rolf Gustavsson, Jan-Olov Aidanpää, 2016. Influence of cross-coupling stiffness in tilting pad journal bearings for vertical machines. *International Journal of Mechanical Sciences*, 111-112, 43-54.

[Wang et al. 2006] J Wang, M. Khonsari, 2006. Bifurcation analysis of a flexible rotor supported by two fluid-film journal bearings. *J. Tribol.* 128, 594-603.



ANEXO A

Algoritmos utilizados en Lenguaje MATLAB

A.1 Algoritmo para determinar la Presión en forma Analítica y Numérica

```

1  %% Solución Analítica (Descanso Corto)
2
3  clc
4  clear all
5  %----- Datos del Descanso -----
6
7  L=2;           % Largo del Descanso [m]
8  D=2/0.1;      % Diametro del Eje [m]
9  m_t=53000;    % Masa del Rotor de la Turbina [kg]
10 m_g=412000;   % Masa del Rotor del Generador [kg]
11 m_e=51000;    % Masa del eje [kg]
12 G=6.3;        % Grado de Calidad de Desbalanceamiento [mm/s]
13 w=187.5;      % Velocidad de Operación Nominal [Rpm]
14 mu=0.0408;    % Viscosidad Dinámica [Pa s]
15 c=0.50e-3/2;  % Huelgo Radial [m]
16
17 %----- Datos de Iteración -----
18
19 ITER=7000;     % Número máximo de Iteraciones
20 N=60;          % Número de discretizaciones en dirección circunferencial
21 M=60;          % Número de discretizaciones en dirección axial
22 dtheta=(360)/N; % Delta Theta [grados]
23 dz=L/M;        % Delta z [m]
24 theta=0:dtheta:360; % Vector Theta [grados]
25 z=-L/2:dz:L/2; % Vector z [m]
26 dt=0.001;     % Delta de tiempo [s]
27 T=50;         % Periodo de Evaluación [s]
28 T_p=40;       % Tiempo de Partida [s]
29 t=0:dt:T;     % Vector Tiempo [s]
30
31 %----- Datos Iniciales del Descanso -----
32
33 R=D/2;         % Radio del Eje
34 e_0=1.5e-4;    % Excentricidad inicial [-]
35 epsilon=e/c;  % Excentricidad relativa
36 psi_0=60;     % Ángulo de desbalanceamiento inicial
37 gamma_0=315;  % Ángulo inclinación eje Theta inicial c/r a X
38 phi_0=30;     % Ángulo inclinación eje Theta inicial c/r a Y
39 DELTAX=delta*sind(phi_0);
40 DELTAY=delta*cosd(phi_0);
41 V_X=DELTAX/dt;
42 V_Y=DELTAY/dt;
43
44 %----- Calculos Iniciales -----
45

```

```

46 % Velocidad Constante
47 Omega=w*(2*pi/60)*ones(size(t));
48 F_r=zeros(size(epsilon,2));
49 F_t=zeros(size(epsilon,2));
50
51 %-----Cálculo-----
52
53 for i=1:size(epsilon,2)
54
55     tic
56     e_dot(i)=0.0001;
57     phi_dot(i)=0.2;
58     epsilon_dot(i)=e_dot(i)/c;
59     for I=1:N+1
60         h(i,I)=c*(1+epsilon(i)*cosd(theta(I)));
61         for J=1:M+1
62
63             p(I,J,i)=(3*mu/(c^2*(1+epsilon(i)*cosd(theta(I)))^3))*(2*epsilon_dot(i)*,...
64                 cosd(theta(I))+epsilon(i)*(-Omega(i)+2*phi_dot(i))*sind(theta(I)))*,...
65                 ((z(J))^2-((L^2)/4));
66         end
67     end
68
69     for I=1:N+1
70         for J=1:M+1
71             F_r(i)=F_r(i)+p(I,J,i)*cosd(theta(I))*R*dtheta*(pi/180)*dz;
72             F_t(i)=F_t(i)+p(I,J,i)*sind(theta(I))*R*dtheta*(pi/180)*dz;
73         end
74     end
75     F_x(i)=-F_r(i)*sind(phi_0)+F_t(i)*cosd(phi_0);
76     F_y(i)=F_r(i)*cosd(phi_0)+F_t(i)*sind(phi_0);
77     toc
78 end
79
80 %% Solución Numérica (Descanso Corto)
81
82 clc
83 clear all
84 %----- Datos del Descanso -----
85
86 L=2;           % Largo del Descanso [m]
87 D=2/0.1;      % Diametro del Eje [m]
88 m_t=53000;    % Masa del Rotor de la Turbina [kg]
89 m_g=412000;   % Masa del Rotor del Generador [kg]
90 m_e=51000;    % Masa del eje [kg]
91 G=6.3;       % Grado de Calidad de Desbalanceamiento [mm/s]
92 w=187.5;     % Velocidad de Operación Nominal [Rpm]
93 mu=0.0408;   % Viscosidad Dinámica [Pa s]
94 c=0.50e-3/2; % Huelgo Radial [m]
95
96 %----- Datos de Iteración -----
97
98 ITER=7000;    % Número máximo de Iteraciones
99 N=60;         % Número de discretizaciones en dirección circunferencial
100 M=60;        % Número de discretizaciones en dirección axial
101 dtheta=(360)/N; % Delta Theta [grados]
102 dz=L/M;      % Delta z [m]
103 theta=0:dtheta:360; % Vector Theta [grados]
104 z=-L/2:dz:L/2; % Vector z [m]
105 dt=0.1;     % Delta de tiempo [s]
106 T=50;      % Periodo de Evaluación [s]
107 T_p=40;    % Tiempo de Partida [s]
108 t=0:dt:T;  % Vector Tiempo [s]
109
110 %----- Datos Iniciales del Descanso -----
111
112 R=D/2;      % Radio del Eje
113 e_0=1.5e-4; %Excentricidad inicial [-]
114 epsilon_0=e_0/c; % Excentricidad relativa

```




```

115 psi_0=60; % Ángulo de desbalanceamiento inicial
116 gamma_0=315; % Ángulo inclinación eje Theta inicial c/r a X
117 phi_0=30; % Ángulo inclinación eje Theta inicial c/r a Y
118 % DELTAX=delta*sind(phi_0);
119 % DELTAY=delta*cosd(phi_0);
120 % V_X=DELTAX/dt;
121 % V_Y=DELTAY/dt;
122
123 %----- Calculos Iniciales -----
124
125 % Velocidad Constante
126 Omega=w*(2*pi/60)*ones(size(t));
127 F_r=zeros(size(epsilon_0,2),1);
128 F_t=zeros(size(epsilon_0,2),1);
129 F_x=zeros(size(epsilon_0,2),1);
130 F_y=zeros(size(epsilon_0,2),1);
131 p=zeros((N+1),(M+1),size(epsilon_0,2));
132
133 %-----Cálculo-----
134
135     for I=1:N+1
136         for J=1:M+1
137             p(I,J)=0;
138         end
139     end
140
141 for i=1:size(epsilon_0,2)
142     tic
143     e_dot(i)=0.0001;
144     epsilon_dot(i)=e_dot(i)/c;
145
146     for K=1:ITER
147         sumij=0;
148
149         for I=2:N
150
151             h_1=c*(1+epsilon_0(i)*cosd(theta(I))); % h_j
152             h_3=c*(1+epsilon_0(i)*cosd(theta(I)+0.5*dtheta)); % h_{i+1/2}
153             h_4=c*(1+epsilon_0(i)*cosd(theta(I)-0.5*dtheta)); % h_{i-1/2}
154             d=(h_3^3+h_4^3)/(((dtheta*pi/180)^2)*(R^2))+(2*h_1^3)/(dz^2);
155             U=R*Omega(i)+(e_dot(i))*sind(theta(I));
156             V_0=e_dot(i)*((cosd(theta(I)))));
157
158             a_0=(-6*mu/(R*d))*(U*(h_3-h_4)/(dtheta*pi/180)-(12*mu/d)*V_0);
159             a_1=(h_3^3)/((R^2)*((dtheta*pi/180)^2)*d);
160             a_2=(h_4^3)/((R^2)*((dtheta*pi/180)^2)*d);
161             a_3=(h_1^3)/((dz^2)*d);
162             a_4=(h_1^3)/((dz^2)*d);
163
164             for J=2:M
165                 p(I,J)=(a_0+a_1*p(I+1,J)+a_2*p(I-1,J)+a_3*p(I,J+1)+a_4*p(I,J-1));
166                 sumij=sumij+p(I,J);
167             end
168         end
169         sum(K+1)=sumij;
170         porcentaje(K,i)=abs(sum(K+1)-sum(K))/abs(sum(K+1));
171
172         if porcentaje(K,i) < 0.00001
173             break
174         end
175     end
176     for I=1:N+1
177         for J=1:M+1
178             p(I,J,i)=p(I,J);
179             F_r(i)=F_r(i)+p(I,J,i)*cosd(theta(I))*R*dtheta*(pi/180)*dz;
180             F_t(i)=F_t(i)+p(I,J,i)*sind(theta(I))*R*dtheta*(pi/180)*dz;
181         end
182     end
183     F_px(i)=-F_r(i)*sind(phi_0)+F_t(i)*cosd(phi_0);

```

```

184     F_py(i)= F_r(i)*cosd(phi_0)+F_t(i)*sind(phi_0);
185     toc
186 end

```

A.2 Algoritmo para Solución de Ecuaciones del Movimiento

```

1  clc
2  clear all
3  global W w T_p U R c mu L M
4
5  %----- Datos Iniciales-----
6
7  M=255;           % Masa del Rotor [kg]
8  c=1e-4;         % Huelgo Radial [m]
9  mu=0.027;       % Viscosidad Dinámica [Pa s]
10 D=0.05*2;       % Diametro del Descanso [m]
11 L=0.05;         % Largo del Descanso [m]
12 w=3000;         % Velocidad de Rotacion Nominal [rpm]
13 W=M*9.8;        % Fuerza Peso
14 G=6.3;          % Grado de Calidad de Balanceamiento [mm/s]
15 T_p=15;         % Periodo de Partida [s]
16 U=(M*G*10^-3)/(w*(2*pi/60)); % Desbalanceamiento [kg m]
17 R=D/2;          % Radio del Descanso [m]
18 S=(mu*w*(2*pi/60)*L*R^3)/(pi*W*c^2) % Número de Sommerfeld [-]
19 dt=0.001;       % Paso de Tiempo
20 T=30;           % Periodo de Evaluación
21 t=0:dt: T_p;
22 X_0=[0.05 0 0 0];
23
24 %----- Ecuación del Movimiento Transiente-----
25
26 tic
27 [T_s,X]=ode15s(@EDO1,t,X_0);
28 toc
29 x_t=X(:,1).*sin(X(:,2));
30 y_t=-X(:,1).*cos(X(:,2));
31 s=-1:dt:1;
32 q=sqrt(1-s.^2);
33 r=-sqrt(1-s.^2);
34 Y_0=[X(length(X),1) X(length(X),2) X(length(X),3) X(length(X),4)];
35 t_2=T_p:dt: T;
36 for i=1:size(t_2,2)
37     omega2=w*(2*pi/60);
38 end
39
40 %----- Ecuación del Movimiento Estacionario-----
41
42 tic
43 [T_s2,X2]=ode15s(@EDO2,t_2,Y_0);
44 toc
45 x_e=(X2(:,1)).*sin(X2(:,2));
46 y_e=-(X2(:,1)).*cos(X2(:,2));
47 t_f=[T_s' T_s2'];
48 X_f=[X' X2'];
49 x=X_f(:,1).*sin(X_f(:,2));
50 y=X_f(:,1).*cos(X_f(:,2));
51
52 %-----Calculo Aceleraciones-----
53
54 ddotepsilon=zeros(size(X,1),1);
55 ddotphi= zeros(size(X,1),1);
56 for i=1:size(t_f,1)
57
58     if t_f(i)<T_p

```

```

59     omega(i)=(w/2)*(2*pi/60)*(1-cos((t_f(i)/T_p)*pi));    % Velocidad de Rotación [rad/s]
60     f_d(i)=(U*omega(i)^2);                                % Fuerza del Desbalanceamiento [N]
61
62     ddotepsilon(i)= W*cos(X_f(i,2))/(M*c)+ f_d(i)*(cos(omega(i)*t_f(i))*cos(X_f(i,2))+...
63                 sin(omega(i)*t_f(i))*cos(X_f(i,2)))/(M*c)-(mu*R*L^3/(2*c^3*M))*...
64                 ((2*X_f(i,1)^2*(omega(i)-2*X_f(i,4)))/(1-X_f(i,1)^2)+...
65                 (pi*(1+2*X_f(i,1)^2)*X_f(i,3))/(1-X_f(i,1)^2)^(5/2))+X_f(i,1)*X_f(i,4)^2;
66     ddotphi(i)=(-W*sin(X_f(i,2))/(M*c)+ f_d(i)*(sin(omega(i)*t_f(i))*sin(X_f(i,2))+...
67                cos(omega(i)*t_f(i))*sin(X_f(i,2)))/(M*c)+(mu*R*L^3/(2*c^3*M))*...
68                ((pi*X_f(i,1)*(omega(i)-2*X_f(i,4)))/(2*(1-X_f(i,1)^2))^(3/2))+...
69                (4*X_f(i,1)*X_f(i,3))/(1-X_f(i,1)^2)^2 -2*X_f(i,3)*X_f(i,4)*(1/X_f(1));
70
71     elseif t_f(i)>=T_p
72
73         omega(i)=(w)*(2*pi/60);
74         f_d(i)=(U*omega(i)^2);
75         ddotepsilon(i)= W*cos(X_f(i,2))/(M*c)+ f_d(i)*(cos(omega(i)*t_f(i))*cos(X_f(i,2))+...
76                 sin(omega(i)*t_f(i))*cos(X_f(i,2)))/(M*c)-(mu*R*L^3/(2*c^3*M))*...
77                 ((2*X_f(i,1)^2*(omega(i)-2*X_f(i,4)))/(1-X_f(i,1)^2)^2)+...
78                 (pi*(1+2*X_f(i,1)^2)*X_f(i,3))/(1-X_f(i,1)^2)^(5/2))+X_f(i,1)*X_f(i,4)^2;
79         ddotphi(i)=(-W*sin(X_f(i,2))/(M*c)+ f_d(i)*(sin(omega(i)*t_f(i))*sin(X_f(i,2))+...
80                cos(omega(i)*t_f(i))*sin(X_f(i,2)))/(M*c)+(mu*R*L^3/(2*c^3*M))*...
81                ((pi*X_f(i,1)*(omega(i)-2*X_f(i,4)))/(2*(1-X_f(i,1)^2))^(3/2))+...
82                (4*X_f(i,1)*X_f(i,3))/(1-X_f(i,1)^2)^2 -2*X_f(i,3)*X_f(i,4)*(1/X_f(1));
83
84     end
85     a_t(i)=ddotphi(i)*X_f(i,1)*c;                        % aceleración tangencial
86     a_r(i)=ddotepsilon(i)*c;                              % aceleración relativa
87     a_c(i)=(X_f(i,4)^2)*X_f(i,1)*c;                      % aceleración centrípeta
88     a_co(i)=2*c*X_f(i,3)*X_f(i,4);                     % aceleración de coriolis
89     f_dr(i)=f_d(i)*cos(omega(i)*t_f(i));
90     f_dt(i)=f_d(i)*sin(omega(i)*t_f(i));
91     ddotX(i)=(a_t(i)+a_co(i))*sin(X_f(i,2))+(a_r(i)-a_c(i))*cos(X_f(i,2));
92     ddotY(i)=(a_t(i)+a_co(i))*cos(X_f(i,2))+(a_r(i)-a_c(i))*sin(X_f(i,2));
93     end

```

```

1  function [dx_dt]=EDO1(t,X)
2  global W w T_p U R c mu L M
3
4  omega=(w/2)*(2*pi/60)*(1-cos((t/T_p)*pi));    % Velocidad de Rotación [rad/s]
5  f_d=(U*omega^2);                                % Fuerza del Desbalanceamiento [N]
6
7  dx_dt=zeros(4,1);
8  dx_dt(1)=X(3);
9  dx_dt(2)=X(4);
10 dx_dt(3)= W*cos(X(2))/(M*c)+ f_d*(cos(omega*t)*cos(X(2))+sin(omega*t)*cos(X(2)))/(M*c)-...
11          (mu*R*L^3/(2*c^3*M))*((2*X(1)^2*(omega-2*X(4)))/(1-X(1)^2)+...
12          (pi*(1+2*X(1)^2)*X(3))/(1-X(1)^2)^(5/2))+X(1)*X(4)^2;
13 dx_dt(4)=(-W*sin(X(2))/(M*c)+f_d*(sin(omega*t)*sin(X(2))+cos(omega*t)*sin(X(2)))/(M*c)+...
14          (mu*R*L^3/(2*c^3*M))*((pi*X(1)*(omega-2*X(4)))/(2*(1-X(1)^2))^(3/2))+...
15          (4*X(1)*X(3))/(1-X(1)^2)^2 -2*X(3)*X(4)*(1/X(1));
16 end

```

```

1 function [dx_dt]=EDO2(t,X)
2 global W w T_p U R c mu L M
3
4 omega=w*(2*pi/60); % Velocidad de Rotación [rad/s]
5 f_d=(U*omega^2); % Fuerza del Desbalanceamiento [N]
6
7 dx_dt=zeros(4,1);
8 dx_dt(1)=X(3);
9 dx_dt(2)=X(4);
10 dx_dt(3)= W*cos(X(2))/(M*c)+ f_d*(cos(omega*t)*cos(X(2))+sin(omega*t)*sin(X(2)))/(M*c)-,...
11 (mu*R*L^3/(2*c^3*M))*((2*X(1)^2*(omega-2*X(4)))/(1-X(1)^2)+,...
12 (pi*(1+2*X(1)^2)*X(3))/(1-X(1)^2)^(5/2))+X(1)*X(4)^2;
13 dx_dt(4)=(-W*sin(X(2))/(M*c)+f_d*(sin(omega*t)*sin(X(2))+cos(omega*t)*cos(X(2)))/(M*c)+,...
14 (mu*R*L^3/(2*c^3*M))*((pi*X(1)*(omega-2*X(4)))/(2*(1-X(1)^2)^(3/2))+,...
15 (4*X(1)*X(3))/(1-X(1)^2)-2*X(3)*X(4))*(1/X(1));
16 end

```

A.3 Algoritmo utilizado en simulaciones de Caso Rotor Vertical

```

1 clc
2 clear all
3 global W w T_p U R c mu L M N K
4
5 %-----Datos de entrada-----
6
7 M=0.8; % Masa del Rotor en [kg]
8 c=0.030e-3; % Huelgo Radial [m]
9 mu=0.027; % Viscosidad Dinámica [Pa s]
10 D=50e-3; % Diámetro del descanso [m]
11 L=20e-3; % Largo del descanso [m]
12 w=2350*(2*pi/60); % Velocidad de rotación nominal [rad/s]
13 W=0*M*9.8; % Fuerza Peso del rotor sobre los descansos [N]
14 N=4; % Número de segmentos de descanso [-]
15 K=0.03; % Factor de rigidez [-]
16 G=6.3; % Velocidad de Operación Nominal [Rpm]
17 T_p=40; % Periodo de partida [s]
18 U=(3.3e-3)/2; % Desbalanceamiento [kg m]
19 R=D/2; % Radio del descanso [m]
20 S=(mu*w*(2*pi/60)*L*R^3)/(pi*W*c^2); % Número de Sommerfeld
21 dt=0.001; % Paso de tiempo
22 T=45; % Periodo de evaluación
23 t=0:dt:T_p; % Vector de tiempo [s]
24 X_0=[0.05 0 0 0]; % Vector de condiciones iniciales [-]
25
26 %-----Solución ecuaciones del movimiento-----
27 [T_s,X]=ode15s(@EDO1,t,X_0);
28 x_t=X(:,1).*sin(X(:,2));
29 y_t=-X(:,1).*cos(X(:,2));
30 s=-1:dt:1;
31 q=sqrt(1-s.^2);
32 r=-sqrt(1-s.^2);
33 Y_0=[X(length(X),1) X(length(X),2) X(length(X),3) X(length(X),4)];
34 t_2=T_p:dt:T;
35 for i=1:size(t_2,2)
36 omega2=w*(2*pi/60);
37 end
38 [T_s2,X2]=ode15s(@EDO2,t_2,Y_0);

```

```

1 function [dx_dt]=EDO1(t,X)
2 global W w T_p U R c mu L M N K
3

```

```

4 omega=(w/T_p)*t;           % Velocidad de Rotación [rad/s]
5 f_d=U*omega^2;           % Fuerza del Desbalanceamiento [N]
6 theta_d=(w/(2*T_p))*t^2;
7
8 dx_dt=zeros(4,1);
9 dx_dt(1)=X(3);
10 dx_dt(2)=X(4);
11 dx_dt(3)= W*cos(X(2))/(M*c)+ f_d*(cos(theta_d)*cos(X(2))+sin(theta_d)*cos(X(2)))/(M*c)-,...
12 (1+K*sin(N*X(2)))*(mu*R*L^3/(2*c^3*M))*((2*X(1)^2*(omega-2*X(4)))/(1-X(1)^2)^2+,...
13 (pi*(1+2*X(1)^2)*X(3))/(1-X(1)^2)^(5/2))+X(1)*X(4)^2;
14 dx_dt(4)=(-W*sin(X(2))/(M*c)+ f_d*(sin(theta_d)*sin(X(2))+cos(theta_d)*sin(X(2)))/(M*c)+,...
15 (1+K*sin(N*X(2)))*(mu*R*L^3/(2*c^3*M))*((pi*X(1)*(omega-2*X(4)))/(2*(1-X(1)^2)^2+,...
16 )^(3/2)+(4*X(1)*X(3))/(1-X(1)^2)^2-2*X(3)*X(4))*(1/X(1));
17
18 end

```

```

1 function [dx_dt]=EDO2(t,X)
2 global W w T_p U R c mu L M N K
3
4 omega=w;                 % Velocidad de Rotación [rad/s]
5 f_d=(U*omega^2);        % Fuerza del Desbalanceamiento [N]
6
7
8 dx_dt=zeros(4,1);
9 dx_dt(1)=X(3);
10 dx_dt(2)=X(4);
11 dx_dt(3)= W*cos(X(2))/(M*c)+ f_d*(cos(omega*t)*cos(X(2))+sin(omega*t)*cos(X(2)))/(M*c)-,...
12 (1+K*sin(N*X(2)))*(mu*R*L^3/(2*c^3*M))*((2*X(1)^2*(omega-2*X(4)))/(1-X(1)^2)^2+,...
13 (pi*(1+2*X(1)^2)*X(3))/(1-X(1)^2)^(5/2))+X(1)*X(4)^2;
14 dx_dt(4)=(-W*sin(X(2))/(M*c)+ f_d*(sin(omega*t)*sin(X(2))+cos(omega*t)*sin(X(2)))/(M*c)+,...
15 (1+K*sin(N*X(2)))*(mu*R*L^3/(2*c^3*M))*((pi*X(1)*(omega-2*X(4)))/(2*(1-X(1)^2)^2+,...
16 )^(3/2)+(4*X(1)*X(3))/(1-X(1)^2)^2-2*X(3)*X(4))*(1/X(1));
17
18 end

```

A.4 Algoritmo utilizado en simulaciones de Caso Unidad Generadora

```

1 clc
2 clear all
3 global R_1 R_2 R_3 L_1 L_2 L_3 c_1 c_2 c_3 l_0 l_1 l_2 l_3 l_4 mu w M I_G T_p U_T U_G,...
4 psi_T psi_G f F Y
5
6 R_1=1100e-3; % Radio descanso 1 [m]
7 R_2=2600e-3; % Radio descanso 2 [m]
8 R_3=1600e-3; % Radio descanso 3 [m]
9
10 L_1=350e-3; % Largo descanso 1 [m]
11 L_2=620e-3; % Largo descanso 2 [m]
12 L_3=500e-3; % Largo descanso 3 [m]
13
14 c_1=200e-6; % Huelgo descanso 1 [m]
15 c_2=300e-6; % Huelgo descanso 2 [m]
16 c_3=200e-6; % Huelgo descanso 3 [m]
17
18 l_0=2.328; % Distancia entre el centro de masa y el centro del generador [m]
19 l_1=5.433; % Distancia entre el centro de masa y el descanso 1 [m]
20 l_2=0.088; % Distancia entre el centro de masa y el descanso 2 [m]
21 l_3=8.767; % Distancia entre el centro de masa y el descanso 3 [m]
22 l_4=12.617; % Distancia entre el centro de masa y la turbina [m]
23
24 mu=0.047; % Viscosidad dinámica (40°C, mu=0.0068 a 100°C) [Pa s]
25 w=90*(2*pi/60); % Velocidad de rotación nominal de la unidad [rad/s]

```

```

26 M=2.37e6;           % Masa total de la unidad [kg]
27 M_G=M*(5/6);
28 M_T=M*(1/6);
29 I_G=1.09e9;        % Momento de inercia diametral de la unidad [kg m2]
30 T_p=10;           % Tiempo de partida [s]
31 T=300;           % Periodo de evaluación [s]
32
33 G_G=4.25; %6.65;    % Grado de balanceamiento del generador
34 G_T=4.25; %6.3;    % Grado de balanceamiento de la turbina
35 U_G=(M_G*G_G*1e-3)/(w); % Desbalanceamiento del generador
36 U_T=(M_T*G_T*1e-3)/(w); % Desbalanceamiento de la turbina
37
38 psi_T=pi;         % Fase del desbalanceamiento de la turbina
39 psi_G=0;         % Fase del desbalanceamiento del generador
40
41 t=0:0.01:T_p;     % Vector Tiempo
42 X_0=[c_3/1000000 c_3/10 0 0 0.0000000001 0.0000000001 0 0]; % Vector Condiciones Iniciales
43
44 tic
45 [T_s,X]=ode15s(@EDO2,t,X_0);
46 toc
47 x_t=(X(:,1))/c_2;
48 y_t=(X(:,2))/c_2;
49
50 t2=T_p:0.0001:T;
51 Y_0=[X(length(X),1) X(length(X),2) X(length(X),3) X(length(X),4) X(length(X),5),...
52      X(length(X),6) X(length(X),7) X(length(X),8)];
53 tic
54 [T_s2,X_2]=ode15s(@EDO3,t2,Y_0);
55 toc
56 x_e=X_2(:,1).*sin(X_2(:,2));
57 y_e=X_2(:,1).*cos(X_2(:,2));
58 l=-1:0.01:1;
59 m=-1:0.01:1;
60 x_e=(X_2(:,1))/c_2;
61 y_e=(X_2(:,2))/c_2;
62
63 for i=1:size(T_s,1)
64 omega(i)=(w/T_p)*t(i);
65 theta_d(i)=(w/(2*T_p))*t(i)^2;
66
67 % Desplazamientos y Velocidades (Transformación de Coordenadas)
68
69 Y_1(i)=X(i,1)+l_1*X(i,6);           % x_1
70 Y_2(i)=X(i,2)-l_1*X(i,5);         % y_1
71 Y_3(i)=X(i,3)+l_1*X(i,8); %
72 Y_4(i)=X(i,4)-l_1*X(i,7); %
73 Y(3)=X(3)+X(7)*l_1*cos(X(5))*cos(X(6)); % xdot_1
74 Y(4)=X(4)-X(8)*l_1*cos(X(5))*cos(X(6)); % ydot_1
75
76 Y_5(i)=X(i,1)+l_2*X(i,6);           % x_2
77 Y_6(i)=X(i,2)-l_2*X(i,5);         % y_2
78 Y_7(i)=X(i,3)+l_2*X(i,8); %
79 Y_8(i)=X(i,4)-l_2*X(i,7); %
80 Y(7)=X(3)+X(7)*l_2*cos(X(5))*cos(X(6)); % xdot_2
81 Y(8)=X(4)-X(8)*l_2*cos(X(5))*cos(X(6)); % ydot_2
82
83 Y_9(i)=X(i,1)-l_1*X(i,6);           % x_3
84 Y_10(i)=X(i,2)+l_1*X(i,5);         % y_3
85 Y_11(i)=X(i,3)-l_3*X(i,8); %
86 Y_12(i)=X(i,4)+l_3*X(i,7); %
87 Y(11)=X(3)-X(7)*l_3*cos(X(5))*cos(X(6)); % xdot_3
88 Y(12)=X(4)+X(8)*l_3*cos(X(5))*cos(X(6)); % ydot_3
89
90 phi1(i)=(360/(2*pi))*atan2(Y_2(i),Y_1(i));
91 phi2(i)=(360/(2*pi))*atan2(Y_6(i),Y_5(i));
92 phi3(i)=(360/(2*pi))*atan2(Y_10(i),Y_9(i));
93
94 Z_1(i)=(sqrt(Y_1(i)^2+Y_2(i)^2))/c_1; % epsilon_1

```



```

95 Z_2(i)=sin(atan2(real(Y_2(i)),real(Y_1(i)))); % sin(phi_1)
96 Z_3(i)=cos(atan2(real(Y_2(i)),real(Y_1(i)))); % cos(phi_1)
97 Z_4(i)=tan(atan2(real(Y_2(i)),real(Y_1(i)))); % tan(phi_1)
98 Z_5(i)=(1/c_1)*((Z_4(i)^2/(1+Z_4(i)^2))*...
99 (Y_4(i)/Z_2(i))+1/(1+Z_4(i)^2))*...
100 (Y_3(i)/Z_3(i))); % epsilondot_1
101 Z_6(i)=(1/sqrt((Y_1(i)^2+Y_2(i)^2)))*...
102 (Z_4(i)/(1+Z_4(i)^2))*((Y_4(i),...
103 /Z_2(i))-Y_3(i)/Z_3(i)); % phidot_1
104 Z_7(i)=(sqrt(Y_5(i)^2+Y_6(i)^2))/c_2; % epsilon_2
105 Z_8(i)=sin(atan2(real(Y_6(i)),real(Y_5(i)))); % sin(phi_2)
106 Z_9(i)=cos(atan2(real(Y_6(i)),real(Y_5(i)))); % cos(phi_2)
107 Z_10(i)=tan(atan2(real(Y_6(i)),real(Y_5(i)))); % tan(phi_2)
108 Z_11(i)=(1/c_2)*((Z_10(i)^2/(1+Z_10(i)^2))*...
109 (Y_8(i)/Z_8(i))+1/(1+Z_10(i)^2))*...
110 (Y_7(i)/Z_9(i))); %epsilondot_2
111 Z_12(i)=(1/sqrt((Y_5(i)^2+Y_6(i)^2)))*...
112 (Z_10(i)/(1+Z_10(i)^2))*((Y_8(i),...
113 /Z_8(i))-Y_7(i)/Z_9(i)); %phidot_2
114 Z_13(i)=(sqrt(Y_9(i)^2+Y_10(i)^2))/c_3; % epsilon_3
115 Z_14(i)=sin(atan2(real(Y_9(i)),real(Y_10(i)))); % sin(phi_3)
116 Z_15(i)=cos(atan2(real(Y_9(i)),real(Y_10(i)))); % cos(phi_3)
117 Z_16(i)=tan(atan2(real(Y_9(i)),real(Y_10(i)))); % tan(phi_3)
118 Z_17(i)=(1/c_3)*((Z_16(i)^2/(1+Z_16(i)^2))*...
119 *(Y_12(i)/Z_14(i))+1/(1+Z_16(i)^2))*...
120 *(Y_11(i)/Z_15(i))); %epsilondot_3
121 Z_18(i)=(1/sqrt((Y_9(i)^2+Y_10(i)^2)))*...
122 (Z_16(i)/(1+Z_16(i)^2))*((Y_12(i),...
123 /Z_14(i))-Y_11(i)/Z_15(i)); %phidot_3
124
125 % Fuerzas
126
127 f_1(i)=- (mu*R_1*L_1^3)/(2*c_1^2)*( 2*(Z_1(i)^2)*abs(omega(i)-2*Z_6(i))/...
128 (1-Z_1(i)^2)^2+ pi*(1+2*Z_1(i)^2)*abs(Z_5(i))/(1-Z_1(i)^2)^(5/2)); % f_r,1
129 f_2(i)=(mu*R_1*L_1^3)/(2*c_1^2)*( pi*(Z_1(i)^2)*abs(omega(i)-2*Z_6(i))/...
130 (2*(1-Z_1(i)^2)^(3/2))+ 4*Z_1(i)*abs(Z_5(i))/(1-Z_1(i)^2)^2); % f_t,1
131 f_3(i)=- (mu*R_2*L_2^3)/(2*c_2^2)*( 2*(Z_7(i)^2)*abs(omega(i)-2*Z_12(i))/...
132 (1-Z_7(i)^2)^2+pi*(1+2*Z_7(i)^2)*abs(Z_11(i))/(1-Z_7(i)^2)^(5/2)); % f_r,1
133 f_4(i)=(mu*R_2*L_2^3)/(2*c_2^2)*( pi*(Z_7(i)^2)*abs(omega(i)-2*Z_12(i))/...
134 (2*(1-Z_7(i)^2)^(3/2))+ 4*Z_7(i)*abs(Z_11(i))/(1-Z_7(i)^2)^2); % f_t,2
135 f_5(i)=- (mu*R_3*L_3^3)/(2*c_3^2)*(2*(Z_13(i)^2)*abs(omega(i)-2*Z_18(i))/...
136 (1-Z_13(i)^2)^2+pi*(1+2*Z_13(i)^2)*abs(Z_17(i))/(1-Z_13(i)^2)^(5/2)); % f_r,3
137 f_6(i)=(mu*R_3*L_3^3)/(2*c_3^2)*(pi*(Z_13(i)^2)*abs(omega(i)-2*Z_18(i))/...
138 (2*(1-Z_13(i)^2)^(3/2))+ 4*Z_13(i)*abs(Z_17(i))/(1-Z_13(i)^2)^2); % f_t,3
139
140 %Fuerzas en los descansos
141
142 F_1(i)=f_1(i)*Z_3(i)+f_2(i)*Z_2(i); % f_1,x
143 F_2(i)=f_1(i)*Z_2(i)-f_2(i)*Z_3(i); % f_1,y
144 F_3(i)=f_3(i)*Z_9(i)+f_4(i)*Z_8(i); % f_2,x
145 F_4(i)=f_3(i)*Z_8(i)-f_4(i)*Z_9(i); % f_2,y
146 F_5(i)=f_5(i)*Z_15(i)+f_6(i)*Z_14(i); % f_3,x
147 F_6(i)=f_5(i)*Z_14(i)-f_6(i)*Z_15(i); % f_3,y
148
149 % Fuerzas debido al desbalanceamiento
150
151 F_7(i)=U_G*omega(i)^2*cos(theta_d(i)+psi_G); % f_0,x
152 F_8(i)=U_G*omega(i)^2*sin(theta_d(i)+psi_G); % f_0,y
153 F_9(i)=U_T*omega(i)^2*cos(theta_d(i)+psi_T); % f_4,x
154 F_10(i)=U_T*omega(i)^2*sin(theta_d(i)+psi_T); % f_4,y
155
156 end

```

```

1 function [dx_dt]=EDO2(t,X)
2
3 global R_1 R_2 R_3 L_1 L_2 L_3 mu w psi_T psi_G M I_G T_p U_T U_G c_1 c_2 c_3 l_0,...
4 l_1 l_2 l_3 l_4 f F Y

```

```

5
6 omega=(w/T_p)*t;
7 theta_d=(w/(2*T_p))*t^2;
8
9 dx_dt=zeros(8,1);
10
11
12 % Desplazamientos y Velocidades (Transformación de Coordemadas)
13
14 Y(1)=X(1)+l_1*X(6); %sin(X(6)); % x_1
15 Y(2)=X(2)-l_1*X(5); %sin(X(5)); % y_1
16 Y(3)=X(3)+l_1*X(8); %l_1*cos(X(6))*X(8); % xdot_1
17 Y(4)=X(4)-l_1*X(7); %-l_1*cos(X(5))*X(7); % ydot_1
18
19 Y(5)=X(1)+l_2*X(6); %sin(X(6)); % x_2
20 Y(6)=X(2)-l_2*X(5); %sin(X(5)); % y_2
21 Y(3)=X(3)+l_2*X(8); %-l_2*cos(X(6))*X(8); % xdot_2
22 Y(4)=X(4)-l_2*X(5); %l_2*cos(X(5))*X(7); % ydot_2
23
24 Y(9)=X(1)-l_3*X(6); %sin(X(6)); % x_3
25 Y(10)=X(2)+l_3*X(5); %sin(X(5)); % y_3
26 Y(11)=X(3)-l_3*X(8); %-l_3*cos(X(6))*X(8); % xdot_3
27 Y(12)=X(4)+l_3*X(7); %l_3*cos(X(5))*X(7); % ydot_3
28
29 Z(1)=(sqrt(Y(1)^2+Y(2)^2))/c_1; % epsilon_1
30 Z(2)=sin(atan2(Y(2),Y(1))); % sin(phi_1)
31 Z(3)=cos(atan2(Y(2),Y(1))); % cos(phi_1)
32 Z(4)=tan(atan2(Y(2),Y(1))); % tan(phi_1)
33 Z(5)=(1/c_1)*((Z(4)^2/(1+Z(4)^2)),...
34 (Y(4)/Z(2))+(1/(1+Z(4)^2)),...
35 (Y(3)/Z(3))); %epsilondot_1
36 Z(6)=(1/sqrt((Y(1)^2+Y(2)^2)),...
37 (Z(4)/(1+Z(4)^2))*((Y(4)/Z(2)),...
38 -(Y(3)/Z(3))); %phidot_1
39
40 Z(7)=(sqrt(Y(5)^2+Y(6)^2))/c_2; % epsilon_2
41 Z(8)=sin(atan2(Y(6),Y(5))); % sin(phi_2)
42 Z(9)=cos(atan2(Y(6),Y(5))); % cos(phi_2)
43 Z(10)=tan(atan2(Y(6),Y(5))); % tan(phi_2)
44 Z(11)=(1/c_2)*((Z(10)^2/(1+Z(10)^2),...
45 (Y(8)/Z(8))+(1/(1+Z(10)^2)),...
46 (Y(7)/Z(9))); %epsilondot_2
47 Z(12)=(1/sqrt((Y(5)^2+Y(6)^2)),...
48 (Z(10)/(1+Z(10)^2))*((Y(8)/...
49 Z(8))-(Y(7)/Z(9))); %phidot_2
50
51 Z(13)=(sqrt(Y(9)^2+Y(10)^2))/c_3; % epsilon_3
52 Z(14)=sin(atan2(Y(10),Y(9))); % sin(phi_3)
53 Z(15)=cos(atan2(Y(10),Y(9))); % cos(phi_3)
54 Z(16)=tan(atan2(Y(10),Y(9))); % tan(phi_3)
55 Z(17)=(1/c_3)*((Z(16)^2/(1+Z(16)^2),...
56 (Y(12)/Z(14))+(1/(1+Z(16)^2)),...
57 (Y(11)/Z(15))); %epsilondot_3
58 Z(18)=(1/sqrt((Y(9)^2+Y(10)^2)),...
59 (Z(16)/(1+Z(16)^2))*((Y(12),...
60 /Z(14))-(Y(11)/Z(15))); %phidot_3
61
62
63 % Fuerzas
64
65 f(1)=-((mu*R_1*L_1^3)/(2*c_1^2))*((2*(Z(1)^2)*abs(omega-2*Z(6)))/,...
66 (1-Z(1)^2)^2+ pi*(1+2*Z(1)^2)*abs(Z(5))/(1-Z(1)^2)^(5/2)); % f_r,1
67 f(2)=-((mu*R_1*L_1^3)/(2*c_1^2))*((pi*(Z(1)^2)*abs(omega-2*Z(6)))/,...
68 (2*(1-Z(1)^2)^(3/2))+ 4*Z(1)*abs(Z(5))/(1-Z(1)^2)^2); % f_t,1
69 f(3)=-((mu*R_2*L_2^3)/(2*c_2^2))*((2*(Z(7)^2)*abs(omega-2*Z(12)))/,...
70 (1-Z(7)^2)^2+ pi*(1+2*Z(7)^2)*abs(Z(11))/(1-Z(7)^2)^(5/2)); % f_r,1
71 f(4)=-((mu*R_2*L_2^3)/(2*c_2^2))*((pi*(Z(7)^2)*abs(omega-2*Z(12)))/,...
72 (2*(1-Z(7)^2)^(3/2))+ 4*Z(7)*abs(Z(11))/(1-Z(7)^2)^2); % f_t,2
73 f(5)=-((mu*R_3*L_3^3)/(2*c_3^2))*((2*(Z(13)^2)*abs(omega-2*Z(18)))/,...

```



```

74         (1-Z(13)^2)^2+ pi*(1+2*Z(13)^2)*abs(Z(17))/(1-Z(13)^2)^(5/2)); % f_r,3
75 f(6)=((mu*R_3*L_3^3)/(2*c_3^2))*(pi*(Z(13)^2)*abs(omega-2*Z(18)))/...
76         (2*(1-Z(13)^2)^(3/2))+ 4*Z(13)*abs(Z(17))/(1-Z(13)^2)^2); % f_t,3
77
78 % Fuerzas en los descansos
79
80 F(1)=f(1)*Z(3)+f(2)*Z(2); % f_1,x
81 F(2)=f(1)*Z(2)+f(2)*Z(3); % f_1,y
82 F(3)=f(3)*Z(9)+f(4)*Z(8); % f_2,x
83 F(4)=f(3)*Z(8)+f(4)*Z(9); % f_2,y
84 F(5)=f(5)*Z(15)+f(6)*Z(14); % f_3,x
85 F(6)=f(5)*Z(14)+f(6)*Z(15); % f_3,y
86
87 % Fuerzas debido al desbalanceamiento
88
89 F(7)=U_G*omega^2*cos(theta_d+psi_G); % f_0,x
90 F(8)=U_G*omega^2*sin(theta_d+psi_G); % f_0,y
91 F(9)=U_T*omega^2*cos(theta_d+psi_T); % f_4,x
92 F(10)=U_T*omega^2*sin(theta_d+psi_T); % f_4,y
93
94
95 dx_dt(1)=X(3);
96 dx_dt(2)=X(4);
97 dx_dt(3)=(1/M)*(F(7)-F(1)-F(3)-F(5)+F(9));
98 dx_dt(4)=(1/M)*(F(8)-F(2)-F(4)-F(6)+F(10));
99 dx_dt(5)=X(7);
100 dx_dt(6)=X(8);
101 dx_dt(7)=(1/I_G)*(F(2)*l_1+F(4)*l_2-F(6)*l_3-F(8)*l_0+F(10)*l_4);
102 dx_dt(8)=(1/I_G)*(-F(1)*l_1-F(3)*l_2+F(5)*l_3+F(7)*l_0-F(9)*l_4);
103
104 end

```

```

1 function [dx_dt]=EDO3(t,X)
2
3 global R_1 R_2 R_3 L_1 L_2 L_3 mu w psi_T psi_G M I_G U_T U_G c_1 c_2 c_3 l_0,...
4     l_1 l_2 l_3 l_4
5
6 omega=w;
7 dx_dt=zeros(8,1);
8
9 % Desplazamientos y Velocidades (Transformación de Coordenadas)
10
11 Y(1)=X(1)+l_1*X(6); %sin(X(6)); % x_1
12 Y(2)=X(2)-l_1*X(5); %sin(X(5)); % y_1
13 Y(3)=X(3)+l_1*X(8); %l_1*cos(X(6))*X(8); % xdot_1
14 Y(4)=X(4)-l_1*X(7); %-l_1*cos(X(5))*X(7); % ydot_1
15
16 Y(5)=X(1)+l_2*X(6); %sin(X(6)); % x_2
17 Y(6)=X(2)-l_2*X(5); %sin(X(5)); % y_2
18 Y(3)=X(3)+l_2*X(8); %-l_2*cos(X(6))*X(8); % xdot_2
19 Y(4)=X(4)-l_2*X(7); %l_2*cos(X(5))*X(7); % ydot_2
20
21 Y(9)=X(1)-l_3*X(6); %sin(X(6)); % x_3
22 Y(10)=X(2)+l_3*X(5); %sin(X(5)); % y_3
23 Y(11)=X(3)-l_3*X(8); %-l_3*cos(X(6))*X(8); % xdot_3
24 Y(12)=X(4)+l_3*X(7); %l_3*cos(X(5))*X(7); % ydot_3
25
26 Z(1)=(sqrt(Y(1)^2+Y(2)^2))/c_1; % epsilon_1
27 Z(2)=sin(atan2(Y(2),Y(1))); % sin(phi_1)
28 Z(3)=cos(atan2(Y(2),Y(1))); % cos(phi_1)
29 Z(4)=tan(atan2(Y(2),Y(1))); % tan(phi_1)
30 Z(5)=(1/c_1)*((Z(4)^2/(1+Z(4)^2))*...
31     (Y(4)/Z(2))+ (1/(1+Z(4)^2))*...
32     (Y(3)/Z(3))); %epsilondot_1
33 Z(6)=(1/sqrt((Y(1)^2+Y(2)^2))*...
34     (Z(4)/(1+Z(4)^2))*((Y(4)/Z(2)),...
35     -(Y(3)/Z(3))); %phidot_1

```

```

36
37 Z(7)=(sqrt(Y(5)^2+Y(6)^2))/c_2; % epsilon_2
38 Z(8)=sin(atan2(Y(6),Y(5))); % sin(phi_2)
39 Z(9)=cos(atan2(Y(6),Y(5))); % cos(phi_2)
40 Z(10)=tan(atan2(Y(6),Y(5))); % tan(phi_2)
41 Z(11)=(1/c_2)*((Z(10)^2/(1+Z(10)^2),...
42 )*(Y(8)/Z(8))+1/(1+Z(10)^2),...
43 *(Y(7)/Z(9))); %epsilondot_2
44 Z(12)=(1/sqrt((Y(5)^2+Y(6)^2)))*,...
45 (Z(10)/(1+Z(10)^2))*((Y(8)/,...
46 Z(8))-(Y(7)/Z(9))); %phidot_2
47
48 Z(13)=(sqrt(Y(9)^2+Y(10)^2))/c_3; % epsilon_3
49 Z(14)=sin(atan2(Y(10),Y(9))); % sin(phi_3)
50 Z(15)=cos(atan2(Y(10),Y(9))); % cos(phi_3)
51 Z(16)=tan(atan2(Y(10),Y(9))); % tan(phi_3)
52 Z(17)=(1/c_3)*((Z(16)^2/(1+Z(16)^2),...
53 *(Y(12)/Z(14))+1/(1+Z(16)^2),...
54 *(Y(11)/Z(15))); %epsilondot_3
55 Z(18)=(1/sqrt((Y(9)^2+Y(10)^2)))*,...
56 (Z(16)/(1+Z(16)^2))*((Y(12),...
57 /Z(14))-(Y(11)/Z(15))); %phidot_3
58
59
60 % Fuerzas
61
62 f(1)=-((mu*R_1*L_1^3)/(2*c_1^2))* ( 2*(Z(1)^2)*abs(omega-2*Z(6)),...
63 (1-Z(1)^2)^2+ pi*(1+2*Z(1)^2)*abs(Z(5))/(1-Z(1)^2)^(5/2)); % f_r,1
64 f(2)=((mu*R_1*L_1^3)/(2*c_1^2))* ( pi*(Z(1)^2)*abs(omega-2*Z(6)),...
65 (2*(1-Z(1)^2)^(3/2))+ 4*Z(1)*abs(Z(5))/(1-Z(1)^2)^2); % f_t,1
66 f(3)=-((mu*R_2*L_2^3)/(2*c_2^2))* (2*(Z(7)^2)*abs(omega-2*Z(12)),...
67 (1-Z(7)^2)^2+ pi*(1+2*Z(7)^2)*abs(Z(11))/(1-Z(7)^2)^(5/2)); % f_r,1
68 f(4)=((mu*R_2*L_2^3)/(2*c_2^2))* (pi*(Z(7)^2)*abs(omega-2*Z(12)),...
69 (2*(1-Z(7)^2)^(3/2))+ 4*Z(7)*abs(Z(11))/(1-Z(7)^2)^2); % f_t,2
70 f(5)=-((mu*R_3*L_3^3)/(2*c_3^2))* (2*(Z(13)^2)*abs(omega-2*Z(18)),...
71 (1-Z(13)^2)^2+ pi*(1+2*Z(13)^2)*abs(Z(17))/(1-Z(13)^2)^(5/2)); % f_r,3
72 f(6)=((mu*R_3*L_3^3)/(2*c_3^2))* (pi*(Z(13)^2)*abs(omega-2*Z(18)),...
73 (2*(1-Z(13)^2)^(3/2))+ 4*Z(13)*abs(Z(17))/(1-Z(13)^2)^2); % f_t,3
74
75 % Fuerzas en los descansos
76
77 F(1)=f(1)*Z(3)+f(2)*Z(2); % f_1,x
78 F(2)=f(1)*Z(2)+f(2)*Z(3); % f_1,y
79 F(3)=f(3)*Z(9)+f(4)*Z(8); % f_2,x
80 F(4)=f(3)*Z(8)+f(4)*Z(9); % f_2,y
81 F(5)=f(5)*Z(15)+f(6)*Z(14); % f_3,x
82 F(6)=f(5)*Z(14)+f(6)*Z(15); % f_3,y
83
84 % Fuerzas debido al desbalanceamiento
85
86 F(7)=U_G*omega^2*cos(theta_d+psi_G); % f_0,x
87 F(8)=U_G*omega^2*sin(theta_d+psi_G); % f_0,y
88 F(9)=U_T*omega^2*cos(theta_d+psi_T); % f_4,x
89 F(10)=U_T*omega^2*sin(theta_d+psi_T); % f_4,y
90
91
92 dx_dt(1)=X(3);
93 dx_dt(2)=X(4);
94 dx_dt(3)=(1/M)*(F(7)-F(1)-F(3)-F(5)+F(9));
95 dx_dt(4)=(1/M)*(F(8)-F(2)-F(4)-F(6)+F(10));
96 dx_dt(5)=X(7);
97 dx_dt(6)=X(8);
98 dx_dt(7)=(1/I_G)*(F(2)*l_1+F(4)*l_2-F(6)*l_3-F(8)*l_0+F(10)*l_4);
99 dx_dt(8)=(1/I_G)*(-F(1)*l_1-F(3)*l_2+F(5)*l_3+F(7)*l_0-F(9)*l_4);
100
101 end

```