



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

# INTERCAMBIO DE ENTRELAZAMIENTO DETERMINISTA Y PARCIALMENTE DETERMINISTA

Por: **Camila Guznara Huerta Paredes**

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la  
Universidad de Concepción para optar al grado académico de Magíster en  
Ciencias con Mención en Física

Enero 2022

Concepción, Chile

**Profesor Guía: Dr. Luis Roa Oppliger**  
**Profesora Co-Guía: Dra. Ariana Muñoz Espinoza**  
**Comisión: Dr. Claudio Faúndez Araya**



© 2022, Camila Guznara Huerta Paredes

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.



A mi familia

## AGRADECIMIENTOS

En esta época de pandemia en la que me ví inserta al trabajar en esta tesis, hay algunas personas que han estado conmigo desde el primer día y me gustaría dedicarles un lugar en este trabajo, pues indirectamente formaron parte de él.

Primero que todo me gustaría agradecer a mi familia, en especial a mis padres, Jessica y Christian, por su apoyo incondicional en este proceso y por sus numerosas enseñanzas a lo largo de los años, muchas gracias por todos los abrazos y palabras de aliento, se que nada de lo que escriba será suficiente para agradecerles todo lo que me han dado, pero espero en un futuro poder retribuírselos. También me gustaría agradecer a mis hermanos perrunos, Max y Dory, los cuales más que un apoyo han sido una distracción, que me ayudó a sobrellevar de mejor forma esta pandemia. Sin querer se convirtieron en una parte fundamental de mi vida, así que muchas gracias por existir.

Quiero agradecer enormemente a todos los docentes del departamento de Astronomía y Física de la Universidad de Concepción, por alimentar mi curiosidad y lograr que mi amor e interés por la ciencia crezca cada día más, en especial me gustaría dar las gracias a mi tutor, Dr Luis Roa, por aceptarme como estudiante en este camino llamado magíster, por su enorme paciencia, agradecer todos sus consejos, comentarios y recomendaciones. También me gustaría agradecer a la Dra. Ariana Muñoz por su dedicación y numerosas sugerencias las cuales ayudaron a nutrir gran parte de este trabajo. Me gustaría hacer una mención especial a mis amigos y compañeros de generación, pues con ellos pasé gran parte de mis días durante el pregrado, en especial agradecer a Isabella Toro por estar mano a mano calculando conmigo durante estos dos años.

Por último, este trabajo no hubiera existido sin el apoyo financiero entregado por las becas CONICYT-PCHA/Magíster Nacional/año 2020 - folio 22201554 y articulación, otorgadas por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile (ANID) y la Universidad de Concepción respectivamente.

## Resumen

Si se consideran dos pares iniciales de partículas que están maximalmente entrelazadas, al realizar una medición conjunta tipo von Neumann en la base de Bell sobre una partícula de cada par, las otras partículas se proyectan a un estado entrelazado incluso estando espacialmente distantes. Esto se conoce como protocolo de intercambio de entrelazamiento, pues de cierta forma el entrelazamiento se redistribuye entre los diferentes pares de partículas iniciales.

En esta tesis se propone una realización del protocolo con dos estados parcialmente entrelazados y una base de medición general con amplitudes reales, esto con la intención de obtener un intercambio de entrelazamiento determinista, en otras palabras que las cuatro salidas obtenidas, luego del procedimiento de medición, posean la misma cantidad de entrelazamiento. El protocolo realizado muestra resultados positivos cuando se considera una situación parcialmente determinista, en particular, con tres salidas con igual concurrencia, este caso muestra ganancia asociada al recurso de entrelazamiento y además presenta una alta probabilidad asociada. Además, la situación completamente determinista también es lograda con éxito, sin embargo, al exhibir una pérdida en concurrencia se convierte en un protocolo menos óptimo. Finalmente se desarrolla un análisis de la influencia de la decoherencia generada por factores externos al sistema y se estudia como se modifican los resultados obtenidos. Para esto se emplea un estado de Werner y una expansión en serie de Taylor hasta el orden de perturbación en el cual el sistema no se ve afectado.

## Abstract

If two initial pairs of particles that are maximally entangled are considered, by performing a joint Von Neumann-type measurement in the Bell basis on one particle of each pair, the other particles are projected to an entangled state even if they are separated. This protocol is known as entanglement swapping since in a way the entanglement is redistributed between the different pairs of initial particles.

In this thesis, a realization of the protocol with two partially entangled states and a general measurement basis with real amplitudes is proposed, with the intention of obtaining a deterministic entanglement swapping. In other words, the four outputs obtained, after the measurement process, have the same amount of entanglement. The protocol performed shows successful results when considering a partially deterministic situation, in particular, with three outputs with equal concurrence, this case shows improvement associated with the Entanglement resource and presents a highly associated probability. Additionally, the fully deterministic situation is also successfully achieved; however, by displaying a loss in concurrence it becomes a less optimal protocol. Finally, an analysis of the influence of the decoherence generated by external factors to the system is developed and it is studied how the obtained results are modified. For this purpose, a Werner state and a Taylor series expansion up to the perturbation order in which the system is not affected are used.

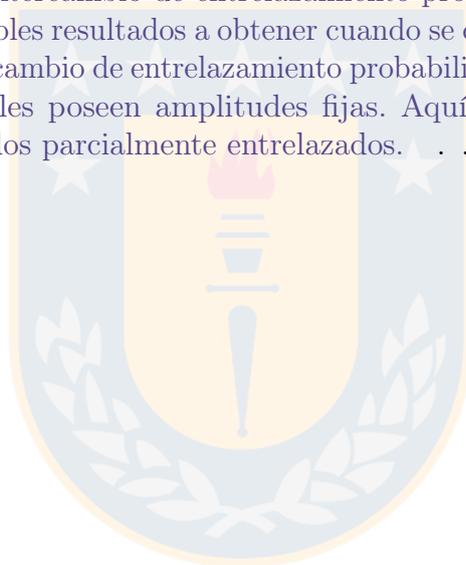
# Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	II
Abstract	III
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Marco Teórico</b>	<b>4</b>
2.1 Historia de la Comunicación . . . . .	4
2.1.1 Teoría de la Información Clásica . . . . .	7
2.1.2 Ley de Moore . . . . .	13
2.2 Nociones y álgebra de la Mecánica Cuántica . . . . .	14
2.2.1 Espacio de Hilbert . . . . .	15
2.2.1.1 Ortogonalidad y Ortonormalidad . . . . .	18
2.2.2 Operadores lineales en espacios de Hilbert . . . . .	19
2.2.2.1 Operadores Adjuntos y Hermíticos . . . . .	22
2.2.2.2 Operador Proyector . . . . .	24
2.2.2.3 Operador Normal . . . . .	24
2.2.2.4 Operador Unitario . . . . .	24
2.2.2.5 Operador Positivo . . . . .	25
2.2.2.6 Operadores de Pauli . . . . .	25
2.2.3 Postulados de la Mecánica Cuántica . . . . .	27
2.3 Teoría de la Información Cuántica . . . . .	30
2.3.1 Qubits y Qudits . . . . .	31
2.3.1.1 Representación geométrica de un qubit . . . . .	32
2.3.2 Matriz de densidad . . . . .	33
2.3.2.1 Formalismo de vectores estados . . . . .	33
2.3.2.2 Formalismo de matriz de densidad . . . . .	35
2.3.2.3 Algunas propiedades de la matriz de densidad . . . . .	37
2.3.3 Entropía de un sistema cuántico . . . . .	39
2.3.3.1 Propiedades de la entropía de Von Neumann . . . . .	41
2.3.4 Matriz de densidad reducida . . . . .	41
2.3.5 Estados puros y mixtos . . . . .	42
2.3.5.1 Estados de Werner . . . . .	43
2.3.6 Entrelazamiento Cuántico . . . . .	44

2.3.6.1	Estados entrelazados y separables . . . . .	47
2.3.7	Cuantificadores de Entrelazamiento . . . . .	48
2.3.7.1	Entropía de Entrelazamiento . . . . .	49
2.3.7.2	Axiomas para un buen cuantificador de entrelazamiento . . . . .	50
2.3.7.3	Entrelazamiento de Formación . . . . .	51
2.4	Intercambio de Entrelazamiento (ES) . . . . .	53
2.4.1	Protocolo Estándar de ES . . . . .	54
2.4.2	Protocolo Probabilista de ES . . . . .	57
2.4.3	Usos prácticos del ES . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Intercambio de Entrelazamiento Determinista y Parcialmente Determinista</b>	<b>64</b>
3.1	Protocolo de Intercambio de Entrelazamiento . . . . .	65
3.1.1	Intercambio de Entrelazamiento Determinista . . . . .	67
3.1.1.1	<b>Caso 1:</b> $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . . . . .	68
3.1.1.2	<b>Caso 2:</b> $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge  \alpha ^2  \eta ^2 =  \beta ^2  \gamma ^2$ . . . . .	69
3.1.1.3	<b>Caso 3:</b> $ \alpha ^2  \gamma ^2 =  \beta ^2  \eta ^2 \wedge y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . . . . .	70
3.1.2	Intercambio de Entrelazamiento Parcialmente Determinista . . . . .	72
3.1.2.1	Tres Concurrencias Iguales ( <b>Caso A:</b> $C_{ac}^{\phi^\pm} = C_{ac}^{\psi^+}$ ) . . . . .	72
3.1.2.2	Tres Concurrencias Iguales ( <b>Caso B:</b> $C_{ac}^{\psi^\pm} = C_{ac}^{\phi^+}$ ) . . . . .	75
3.1.2.3	Dos Concurrencias Iguales . . . . .	84
3.2	Estudio de Decoherencia Caso Parcialmente Determinista . . . . .	86
3.2.1	Primera Salida . . . . .	90
3.2.2	Segunda Salida . . . . .	94
3.2.3	Tercera Salida . . . . .	95
3.2.4	Cuarta Salida . . . . .	98
3.2.5	Análisis de los resultados . . . . .	99
<b>4</b>	<b>Conclusión</b>	<b>105</b>
	<b>Apéndices</b>	<b>107</b>
	<b>Referencias</b>	<b>107</b>

## Índice de cuadros

2.4.1	Tabla con los posibles resultados a obtener cuando se desarrolla un protocolo de intercambio de entrelazamiento general y estándar.	57
2.4.2	Tabla con los posibles resultados a obtener cuando se desarrolla un protocolo de intercambio de entrelazamiento probabilista. . .	59
2.4.3	Tabla con los posibles resultados a obtener cuando se desarrolla un protocolo de intercambio de entrelazamiento probabilista en donde los estados iniciales poseen amplitudes fijas. Aquí los estados iniciales son estados parcialmente entrelazados. . . . .	62



# Índice de figuras

2.1.1	Diagrama esquemático del sistema de comunicación. . . . .	7
2.1.2	Dos posibles descomposiciones (a y b) de una elección de tres posibilidades. Este ejemplo fue empleado en el libro de Shannon y Weaver [1]. . . . .	9
2.3.1	Representación geométrica de un qubit, conocida como esfera de Bloch. . . . .	33
2.4.1	Esquema o diagrama del protocolo de intercambio de entrelazamiento. Aquí Alice y Bob pueden corresponder a dos laboratorios independientes, cada uno con un par de partículas. El estado $ \pi_{14}\rangle$ puede corresponder a cualquiera de los estados de Bell, es decir: $ \phi^\pm\rangle$ o $ \psi^\pm\rangle$ . BSM corresponde a un procedimiento de medición de Bell. . . . .	55
2.4.2	Concurrencia para los estados: $\{ \xi_{12}\rangle,  \xi_{34}\rangle\}$ (estados iniciales, curva azul), $ \tilde{\xi}_{13}^\pm\rangle$ (curva morada) y $ \psi_{13}\rangle$ (curva roja). Cabe mencionar que la concurrencia de ambos estados iniciales es la misma y es igual a $C^\xi = 2 ab $ , por otro lado las concurrencias de los otros estados son: $C^{\tilde{\xi}} = \frac{2 a^2b^2 }{ a ^4+ b ^4}$ y $C^{\psi^\pm} = 1$ . . . . .	59
2.4.3	(a) Situación sin intercambio de entrelazamiento. (b) Situación en donde se lleva a cabo el protocolo de intercambio de entrelazamiento. Cada estrella representa una partícula que viaja con velocidad $v$ . Imagen basada en el esquema desarrollado por Bose et al. [2]. . . . .	61
3.1.1	Gráfico que representa la concurrencia $C_{bd}^{\phi^\pm}$ cuando el eje x posee la variable $x$ y $C_{bd}^{\psi^\pm}$ cuando el eje x posee la variable $y$ . De aquí podemos ver que ambas concurrencias son cóncavas en $ x ^2 =  y ^2 = 1/2$ , en donde adquieren el valor de $C = 1$ . . . . .	66
3.1.2	Gráfico para la concurrencia de cada caso en el protocolo de intercambio de entrelazamiento totalmente determinista. $C_1$ y $C_{2-3}$ representan la concurrencia del <b>Caso 1</b> , <b>Caso 2</b> y <b>Caso 3</b> respectivamente. La concurrencia del <b>Caso 2</b> y <b>Caso 3</b> es la misma. . . . .	71
3.1.3	Superficie que representa la concurrencia del <b>Caso A</b> , es decir: $C_{ac}^{\phi^\pm} = C_{ac}^{\psi^\pm} = \frac{2 \alpha\gamma\beta\eta }{ \alpha\gamma ^2+ \beta\eta ^2}$ . . . . .	73

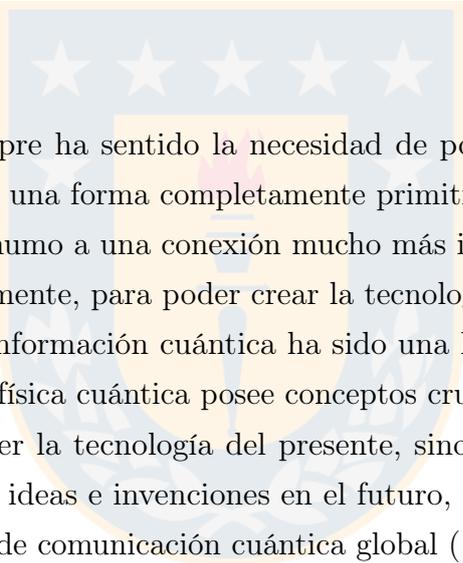
3.1.4	Superficie que representa la concurrencia de la salida que es diferente a la tríada del <b>Caso A</b> , es decir: $C_{ac}^{\psi^-} = \frac{2 \gamma\eta  \alpha\beta ^3}{ \eta ^2 \alpha ^6+ \gamma ^2 \beta ^6}$ .	74
3.1.5	Superficie que representa la distribución de probabilidad del <b>Caso A</b> , es decir: $p_{ac}^{\phi^\pm = \psi^+}$ .	74
3.1.6	Superficie que representa la concurrencia de la tríada del <b>Caso B</b> .	75
3.1.7	Superficie que representa la concurrencia de la salida que es diferente a la tríada del <b>Caso B</b> .	76
3.1.8	Superficie que representa la distribución de probabilidad del <b>Caso B</b> , es decir: $p_{ac}^{\psi^\pm = \phi^+}$ .	77
3.1.9	Superficie que ayuda a comparar los comportamientos de la concurrencia para el <b>Caso A</b> (color naranja) y <b>Caso B</b> (color azul).	77
3.1.10	Solución otorgada por el software <i>Wolfram Mathematica</i> para el <b>Caso A</b> , en donde $a = \alpha$ y $c = \gamma$ .	80
3.1.11	Solución otorgada por el software <i>Wolfram Mathematica</i> para el <b>Caso B</b> , en donde $a = \alpha$ y $c = \gamma$ .	80
3.1.12	Región de solución para: <b>Caso II</b> (Izquierda), <b>Caso <math>\Omega</math></b> (Medio) y <b>Caso <math>\Gamma</math></b> (Derecha). Los tres gráficos superiores e inferiores son para el <b>Caso A</b> , y <b>Caso B</b> respectivamente. La línea negra discontinua muestra los valores $ \alpha  = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $ \gamma  = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .	81
3.1.13	Distribución de probabilidad para las condiciones dadas por $C_{ac}^{\psi^\pm} = C_{ac}^{\phi^+} > (C_{ab} \wedge C_{cd})$ , en particular corresponde a la primera desigualdad mostrada en 3.1.11.	82
3.1.14	Gráfico que representa los posibles valores de $ \alpha $ y $ \gamma $ para el <b>Caso A</b> que generan una probabilidad alta: $0,6 < P < 0,75$ .	82
3.1.15	Gráfico que representa los posibles valores de $ \alpha $ y $ \gamma $ para el <b>Caso B</b> que generan una probabilidad alta: $0,6 < P < 0,75$ .	82
3.1.16	Soluciones para los casos: <b>Caso II</b> (Izquierda), <b>Caso <math>\Omega</math></b> (Medio) y <b>Caso <math>\Gamma</math></b> (Derecha), todos con $0,6 < P < 0,75$ . Los tres gráficos superiores e inferiores son para el <b>Caso A</b> y <b>Caso B</b> respectivamente. La línea negra discontinua muestra los valores $ \alpha  = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $ \gamma  = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .	83
3.1.17	Distribución de probabilidad para las condiciones dadas por $C_{ac}^{\psi^\pm} > (C_{ab} \wedge C_{cd})$ , en particular corresponde a la primera desigualdad mostrada en 3.1.11, la misma para el caso de los tríos, pues la expresión de concurrencia es idéntica.	85
3.1.18	Soluciones para los casos: $C_{ac}^j > C_{ab}$ (Izquierda), $C_{ac}^j > C_d$ (Medio) y $C_{ac}^j > (C_{ab} \wedge C_{cd})$ (Derecha), todos con $0,4 < P < 0,5$ . Los tres gráficos superiores e inferiores son para el caso $C_{ac}^{\phi^\pm}$ , y para el caso $C_{ac}^{\psi^\pm}$ respectivamente. La línea negra discontinua muestra los valores $ \alpha  = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $ \gamma  = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .	86
3.2.1	Concurrencia inicial del estado de Werner $\rho_{ab}^w$ .	89
3.2.2	Concurrencia inicial del estado de Werner $\rho_{cd}^w$ .	89

3.2.3	Concurrencia inicial del estado de Werner $\rho_{ab}^w$ (cuando el eje $x$ posee la amplitud $ \alpha $ ) y $\rho_{cd}^w$ (cuando el eje $x$ posee la amplitud $ \gamma $ ) cuando $\varepsilon = 1$ . . . . .	90
3.2.4	Concurrencia al considerar $x = 1/\sqrt{2}$ (condición para la igualdad de la tríada del <b>Caso A</b> ), las tres variables de los estados de Werner se muestran en cada eje y el valor de la concurrencia se representa por colores según la barra de la derecha. . . . .	93
3.2.5	Concurrencia cuando $x = 1/\sqrt{2}$ y $\varepsilon = 1$ , esto, como era de esperar, recupera la superficie anterior realizada para los estados puros (pues empleamos la condición de la tríada del <b>Caso A</b> ), esto se muestra en la figura 3.1.3. . . . .	93
3.2.6	Probabilidad cuando $x = 1/\sqrt{2}$ , las tres variables de los estados de Werner se muestran en cada eje y la probabilidad total se representa por colores según la barra de la derecha. . . . .	94
3.2.7	Probabilidad de la primera salida, cuando $x = 1/\sqrt{2}$ y $\varepsilon = 1$ . El gráfico posee un máximo de probabilidad de 0,5. . . . .	94
3.2.8	Concurrencia cuando se considera $y = 1/\sqrt{2}$ (condición para la igualdad de la tríada del <b>Caso B</b> ), las tres variables de los estados de Werner se muestran en cada eje y el valor de la concurrencia se representa por colores según la barra del lado derecho. . . . .	97
3.2.9	Concurrencia cuando $y = 1/\sqrt{2}$ y $\varepsilon = 1$ , esto, como es de esperar, recupera la superficie anterior realizada para los estados puros (pues empleamos la condición de la tríada del <b>Caso B</b> ), como se aprecia en la figura 3.1.6. . . . .	97
3.2.10	Probabilidad al considerar $y = 1/\sqrt{2}$ , las tres variables de los estados de Werner se muestran en cada eje y la probabilidad total se representa por colores según la barra del lado derecho. . . . .	97
3.2.11	Probabilidad cuando $y = 1/\sqrt{2}$ y $\varepsilon = 1$ , el máximo valor alcanzado es de 0,5. . . . .	97
3.2.12	Concurrencia de los resultados $C_{ac}^{\phi^\pm}$ en el lado izquierdo y $C_{ac}^{\psi^\pm}$ en el lado derecho, para diferentes valores de $\varepsilon$ . Agrupamos $C_{ac}^{\phi^\pm}$ pues $C_{ac}^{\phi^+}$ y $C_{ac}^{\phi^-}$ son iguales cuando $x = 1/\sqrt{2}$ . En el caso de $C_{ac}^{\psi^\pm}$ , cuando $y = \pm \frac{ \beta ^2}{\sqrt{ \alpha ^4 +  \beta ^4}}$ presenta ligeras diferencias para distintos valores de $\varepsilon$ , excepto cuando este es igual a 1, en dicho caso las tres concurrencias son exactamente iguales. . . . .	99
3.2.13	Concurrencia de los resultados $C_{ac}^{\psi^\pm}$ en el lado izquierdo y $C_{ac}^{\phi^\pm}$ en el lado derecho, para diferentes valores de $\varepsilon$ . Agrupamos $C_{ac}^{\psi^\pm}$ pues $C_{ac}^{\psi^+}$ y $C_{ac}^{\psi^-}$ son iguales cuando $y = 1/\sqrt{2}$ . En el caso de $C_{ac}^{\phi^\pm}$ cuando $x = \pm \frac{ \beta ^2}{\sqrt{ \alpha ^4 +  \beta ^4}}$ presenta ligeras diferencias para distintos valores de $\varepsilon$ , excepto cuando este es igual a 1, en dicho caso las tres concurrencias son exactamente iguales. . . . .	100
3.2.14	Probabilidad para el primer trío ( <b>Caso A</b> ) en el lado izquierdo y para el segundo trío ( <b>Caso B</b> ) en el lado derecho, para diferentes valores de $\varepsilon$ . . . . .	100

- 3.2.15 Gráfico de contorno para diferentes valores de  $\varepsilon$ . El eje horizontal representa la amplitud  $|\alpha|$  y el eje vertical la amplitud  $|\gamma|$ , la barra de color corresponde a la concurrencia de la salida  $C^{r\psi^+}$  del **Caso A**. (a) Corresponde a la expansión de Taylor de primer orden alrededor de  $\varepsilon = 1$ , (b) la expansión de segundo orden, (c) la expansión de tercer orden y (d) la expansión de cuarto orden. 101
- 3.2.16 Gráfico de contorno para diferentes valores de  $\varepsilon$ . El eje horizontal representa la amplitud  $|\alpha|$  y el eje vertical la amplitud  $|\gamma|$ , la barra de color corresponde a la probabilidad de la tríada  $C^{\phi^\pm} = C^{r\psi^+}$ . (a) Es la expansión de Taylor de primer orden alrededor de  $\varepsilon = 1$ , (b) la expansión de segundo orden. . . . . 102
- 3.2.17 Gráfico de contorno para diferentes valores de  $\varepsilon$ . El eje horizontal representa la amplitud  $|\alpha|$  y el eje vertical la amplitud  $|\gamma|$ , la barra de color corresponde a la concurrencia de la salida  $C^{\phi^+}$  del **Caso B**. (a) Es la expansión de Taylor de primer orden alrededor de  $\varepsilon = 1$ , (b) la expansión de segundo orden, (c) la expansión de tercer orden y (d) la expansión de cuarto orden. . . . . 102
- 3.2.18 Gráfico de contorno para diferentes valores de  $\varepsilon$ . El eje horizontal representa la amplitud  $|\alpha|$  y el eje vertical la amplitud  $|\gamma|$ , la barra de color corresponde a la probabilidad de la tríada  $C^{\psi^\pm} = C^{\phi^+}$ . (a) Es la expansión de Taylor de primer orden alrededor de  $\varepsilon = 1$ , (b) la expansión de segundo orden. . . . . 103

# Capítulo 1

## Introducción



El ser humano siempre ha sentido la necesidad de poder comunicarse con sus semejantes ya sea de una forma completamente primitiva, mediante grabados en piedra o señales de humo a una conexión mucho más inteligente desarrollada en la actualidad. Claramente, para poder crear la tecnología que conocemos hoy en día, la teoría de la información cuántica ha sido una herramienta fundamental, pues esta área de la física cuántica posee conceptos cruciales que no sólo ayudan a mejorar y fortalecer la tecnología del presente, sino que serán claves para el desarrollo de nuevas ideas e invenciones en el futuro, un ejemplo de ello será la creación de una red de comunicación cuántica global ([3], [4], [5], [6], [7]).

Esta área de la física cuántica surge muchos años después de la famosa discusión entre Niels Bohr y Albert Einstein, la cual ocurre en pleno siglo 20, siglo en el cual se llevarían a cabo muchas teorías vigentes hasta el día de hoy, como lo son la relatividad y la mecánica cuántica, siendo esta última el pilar fundamental de esta tesis. La teoría de la física cuántica trae consigo muchos fenómenos y comportamientos contraintuitivos (como lo son, la superposición y el entrelazamiento), es decir, algo completamente contrario al razonamiento que hasta la fecha otorgaba la física clásica. Aún así, esta rama de la física logra explicar muchos de los fenómenos que ocurren a nivel microscópico, por lo que ha sido de vital importancia para entender lo que ocurre a estas escalas. Tal como mencionó Niels Bohr: “Si alguien dice que puede pensar en la física cuántica sin marearse, eso sólo demuestra que no ha entendido lo más mínimo sobre ella.”

Ahora que nos encontramos en el medio de la segunda revolución cuántica [8],

es importante entender como se pueden usar las leyes de la mecánica cuántica para poder mejorar el procesamiento de la información, pues esto promete un gran número de nuevas tecnologías en el futuro. Es por ello que en esta tesis se abordará uno de los fenómenos de la información cuántica que cada vez cobra más fuerza gracias al surgimiento de los repetidores cuánticos [9], dicho fenómeno es conocido como intercambio de entrelazamiento o *entanglement swapping*, el cual ha logrado importantes realizaciones experimentales con una alta fidelidad y concurrencia durante los últimos años ([10], [11]). Este protocolo, es uno de los componentes principales de un repetidor cuántico, pues permite conservar o mantener la cantidad de entrelazamiento entre memorias cuánticas. De ser posible la realización de un repetidor cuántico, la distribución de entrelazamiento gracias al fenómeno de la teleportación cuántica alcanzaría distancias cada vez más grandes permitiendo la posibilidad de establecer una red cuántica global, la cual tendría una multitud de aplicaciones, tales como establecer una mayor seguridad a nuestros datos y la posibilidad de establecer un supercomputador cuántico, el cual permitiría hallar solución a algunos problemas que hoy en día son complejos de resolver. Un avance importante para el futuro de los repetidores cuánticos fue realizado este año por Xiao Liu et al. [12], publicación en la cual se muestra por primera vez la realización experimental de la distribución de entrelazamiento entre dos memorias cuánticas separadas por 3.5 metros.

Para lograr una mayor comprensión del fenómeno del intercambio de entrelazamiento, esta tesis comienza desde los cimientos de la física cuántica dando a conocer el formalismo matemático de la teoría clásica y la teoría cuántica, para luego estudiar la interpretación de de esta última en el área de la información. Se termina el marco teórico de esta tesis mencionando el protocolo de intercambio de entrelazamiento en su versión estándar y en su versión probabilística, la primera considera estados puros iniciales maximalmente entrelazados y la segunda estados parcialmente entrelazados iguales, en conjunto con una base de medición de Bell para ambos casos.

En el capítulo 3 se introduce y desarrolla en profundidad la investigación realizada en esta tesis, esta consistirá en analizar el protocolo de intercambio de entrelazamiento en forma general considerando estados iniciales parcialmente entrelazados diferentes y una base de medición con coeficientes arbitrarios, con estos recursos se buscará llevar a cabo un protocolo óptimo (donde se genere un

aumento del entrelazamiento en los estados deseados) y de manera determinista. El estudio se verá fortalecido con un posterior análisis de los efectos causados por la presencia de decoherencia que podría afectar a nuestro sistema.

Finalmente en el capítulo 4 se mencionarán algunas conclusiones importantes asociadas al protocolo de intercambio de entrelazamiento estudiado.



# Capítulo 2

## Marco Teórico

### 2.1. Historia de la Comunicación

La información de esta sección esta basada en los siguientes libros: [13], [14], [15], [16] y [17].

Comunicarse o transmitir información es algo inherente al ser humano, esto que en principio puede sonar algo bastante sencillo de resolver, termina convirtiéndose en un desafío a lo largo de la historia de la humanidad, con el paso de los años se van desarrollando soluciones tecnológicas para poder superar el mayor obstáculo de la comunicación: la distancia y la seguridad de la información transmitida.

Algunos ejemplos primitivos de como el ser humano transmitía información son los siguientes: aproximadamente treinta mil años antes, el ser humano practicaba una expresión de arte conocida como manifestación rupestre o arte rupestre, el cual consistía en tallados realizados en cuevas principalmente de figuras, se cree que este tipo de expresión correspondía a prácticas rituales realizadas durante esos tiempos, otros creen que eran realizadas con fines puramente estéticos, por otra parte muchos historiadores sospechan que este tipo de pinturas correspondía a una forma o más específicamente, a una necesidad de comunicación, especialmente de ciertos conocimientos y mitos que no se podían transmitir de forma oral. Otro ejemplo en el cual la transmisión de información lo más rápido posible era de vital importancia, se sitúa en la antigua China específicamente durante la creación de la famosa muralla china, en ella los soldados de la Gran Muralla usaban el humo de las hogueras que prendían en sus torres para alertar de la posible presencia

enemiga, mensajes que viajaban de torre en torre, de esta forma, en tan sólo unas horas el mensaje de peligro lograba avanzar centenares de kilómetros. Estos dos ejemplos buscan evidenciar la importancia que el ser humano le ha dado al proceso de comunicación durante la historia de la humanidad.

En el pasado, algo muy fundamental para la historia de la comunicación que permitió crear conexiones de información mucho más complejas fue la creación del lenguaje, acerca de esto Linares et al. [18] dice: “La articulación de sonidos origina el surgimiento de la palabra y con esto, el origen del lenguaje” (228-229).

Mucho más tarde, alrededor del siglo XIX se consolidó la comunicación entre largas distancias, gracias al desarrollo de la escritura, un nuevo método que permitiría la conservación y transmisión de información.

Entre los siglos XVII y XVIII el intercambio de correspondencia entre los diferentes países se regulaba por acuerdos entre las naciones implicadas, pero en el siglo XIX esta red de acuerdos se hizo demasiado compleja, lo cual se resolvería años después. El 15 de septiembre de 1874, Heinrich von Stephan convocó a una conferencia en Berna en la cual propuso una organización reguladora del correo a escala mundial. Con esto el día 9 de octubre de 1874, nace la Unión Postal General (en 1878 cambiaría su nombre a Unión Postal Universal) y con ello se agilizan las comunicaciones.

En paralelo a lo anterior, surge una nueva herramienta que también permitiría la transmisión de información a grandes distancias, junto con una considerable ventaja en la rapidez de la comunicación, pues el mensaje transmitido lo haría de forma casi inmediata, el telégrafo, el cual consiste en un dispositivo eléctrico que permite transmitir mensajes de texto mediante señales eléctricas que viajan a través de cables empleando la codificación por medio del código morse<sup>1</sup>. En particular en el año 1836, Samuel Morse y Alfred Vail demostraron que era posible transmitir información con señales eléctricas.

Años más tarde, durante los primeros meses de 1876, el científico británico Alexander Graham Bell patentó el teléfono en Nueva York, consagrando al joven escocés como el padre del teléfono. Este invento empleaba la electricidad para hablar a distancia sin la necesidad de usar un código y permitía iniciar una red

---

<sup>1</sup>El código morse consiste en una combinación de puntos y rayas en donde la duración del punto es una unidad y la de la raya es de tres unidades. Cada letra del alfabeto o número es una combinación particular de puntos y rayas.

telefónica en tiempo real que lograba conectar a personas separadas espacialmente.

Dos décadas después, en 1896 el italiano Guglielmo Marconi mejoraría el famoso telégrafo y terminaría diseñando el radiotelégrafo. El mayor cambio o modificación sería la ausencia de cables, pues el radiotelégrafo permitiría el envío de mensajes a través de ondas de radio. En 1901 se realizaría la primera comunicación usando ondas de radio a través del océano Atlántico (entre Inglaterra y Canadá).

En el siglo XX, se llevaría a cabo una de las mayores revoluciones de la sociedad moderna, particularmente en el año 1969 nace el Internet, cuyo surgimiento se desarrolla en el contexto de la Guerra Fría. Dicha herramienta fue creada por ARPA (Agencia de Proyectos de Investigación Avanzada), quien corresponde al Organismo del Departamento de Defensa de Estados Unidos creado en 1958. La creación del Internet permitió establecer redes globales capaces de conectar a diferentes usuarios. El uso de la red se limitó al intercambio de correos y como fuente de almacenaje de la información global, con el paso de los años se terminaría convirtiendo en el Internet que conocemos hoy en día.

Durante la primera mitad del siglo XX, debido a la rápida difusión que experimentan todos los medios de comunicación existentes, en relación al procesamiento y transmisión de información, se desarrolla el primer modelo científico del proceso de comunicación, el cual se conoce como **Teoría de la Información o Teoría Matemática de la Comunicación**<sup>2</sup>. La primera formulación de las leyes matemáticas que gobiernan a los sistemas de comunicación se desarrolló en el año 1928 por el americano Ralph Hartley [20]. Más adelante, en el año 1949, dichas leyes serían mejoradas y se establecerían los principios de la teoría de la información a manos de Claude Shannon y Warren Weaver ([21], [22]).

Tal como menciona Burgin [23], la información se ha convertido en un concepto clave tanto en áreas como la sociología, la ciencia política y la economía de la llamada sociedad de la información. Por lo tanto, si queremos comprender mejor la vida, la sociedad, la tecnología, entre otros, necesitamos saber qué es la información y cómo se comporta (p. 1).

Por esta razón, en la siguiente sección hablaremos de la teoría de la información, concentrándonos en la teoría de Claude Shannon, para ello usaremos como

---

<sup>2</sup>Es importante mencionar que con teoría de la información nos referimos al “tratamiento matemático de los conceptos, parámetros y reglas que gobiernan la transmisión de mensajes a través de sistemas de comunicación” [19]

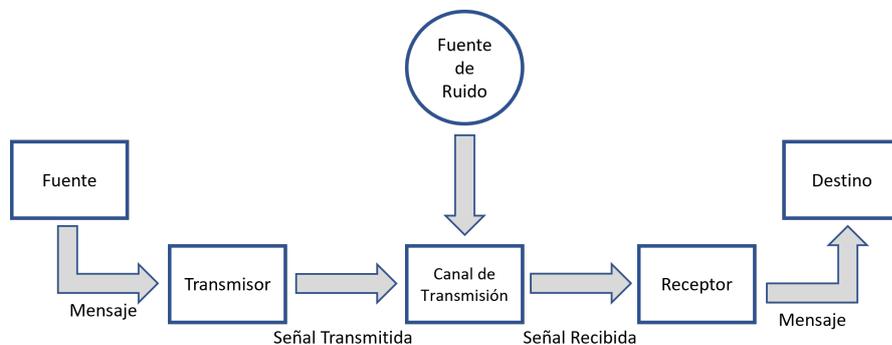
referencia principal las publicaciones de Shannon realizadas en los años 1948 y 1949 ([21], [22]), también se empleará el libro desarrollado por Shannon y Weaver [1], en conjunto con el trabajo de Marcello Delgado [24].

### 2.1.1. Teoría de la Información Clásica

La base de la teoría de la información de Shannon y Weaver queda representada por algunos de sus componentes tales como lo son el emisor y el receptor. Por otro lado, el mensaje que se desea transmitir va del emisor al receptor a través de un canal elegido para transportar la información. La idea principal de esta teoría es proporcionar una definición rigurosa de la noción de información, tal que nos permita investigarla y cuantificarla. Esta teoría sirve por diversos motivos, algunos de ellos son:

- Estudiar aspectos destacados en el proceso informativo, como lo son los canales de comunicación, el ruido que se puede presentar durante el proceso de comunicación, entre otros.
- Estudiar los elementos que pueden perjudicar o impedir el proceso comunicativo, es decir, que un mensaje no logre llegar a su destino de forma eficiente, con esto nos referimos a la presencia de ruido en el canal.
- Analizar la codificación y decodificación de los mensajes.
- Determinar la manera más eficiente, rápida y económica de transmitir un mensaje.

Esquemáticamente se puede representar el sistema de comunicación de la siguiente forma:



**Figura 2.1.1:** Diagrama esquemático del sistema de comunicación.

En la figura anterior se representan los siguientes componentes de la teoría de la información: La fuente de información, la cual selecciona un mensaje de un conjunto de posibilidades que puede consistir en palabras escritas o habladas como también en imágenes, música, entre otros. El transmisor, quien cambia este mensaje en la señal para ser enviada a través del canal de comunicación. Un ejemplo de esto ocurre en el habla oral, aquí la fuente de información es el cerebro y el transmisor es el mecanismo de voz que produce la presión sonora variable (la señal) que se transmite a través del aire (el canal).

Antes de estudiar y analizar la teoría de Shannon es importante definir algunos conceptos que formarán la base de lo que se mostrará más adelante:

- **Bit clásico:** Corresponde a la unidad binaria de la información en la computación clásica. Toma dos valores posibles, típicamente se utiliza el 0 y el 1. En general se pueden implementar con dispositivos o sistemas físicos que son capaces de estar en dos estados posibles. Si se desea comunicar y procesar la información clásica se pueden utilizar  $n$ -bits de forma tal que tengamos acceso a  $2^n$  números ó símbolos.
- **Cadena o *String*:** Sea  $\mathcal{X}$  un conjunto finito o contable. Entonces tenemos que  $\mathcal{X}^*$  denota el conjunto de cadenas o secuencias finitas sobre  $\mathcal{X}$ . Las cadenas binarias son los elementos de  $\{0, 1\}^* = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\}$ . Cada letra de una cadena se llama bit, abreviatura de dígito binario.

Como se mencionó anteriormente una de las ventajas que otorga esta teoría es la posibilidad de responder a la siguiente pregunta planteada por Shannon [21]: “¿Podemos definir una cantidad que medirá, en algún sentido, cuánta información es “producida” por tal proceso, o mejor, ¿a qué ritmo se produce la información?” (p. 392).

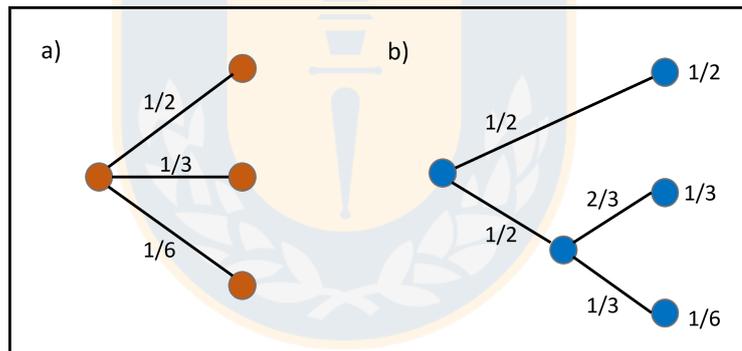
Para ello supongamos lo siguiente: tenemos un set de posibles eventos cuyas probabilidades de ocurrencia son  $p_i$  con  $i \in \{1, n\}$ , estas probabilidades diremos que son conocidas ¿Es posible encontrar una medida de cuán inciertos estamos del resultado? Si existe tal medida, digamos  $H(p_i)$ , es razonable exigirle las siguientes propiedades:

- $H$  debería ser continua en los  $p_i$ .
- Si todos los  $p_i$  son iguales,  $p_i = \frac{1}{n}$ , luego  $H$  debería ser una función creciente

monótona de  $n$ . Cuando tenemos eventos igualmente probables, hay más incertidumbre en los casos donde existen más eventos posibles.

- Si una elección se descompone en dos opciones sucesivas, la  $H$  original debe ser la suma ponderada de los valores individuales de  $H$ . Para entender de mejor forma lo anterior, supongamos el siguiente ejemplo, a la izquierda de la figura 2.1.2 tenemos tres posibilidades  $p_1 = \frac{1}{2}$ ,  $p_2 = \frac{1}{3}$  y  $p_3 = \frac{1}{6}$ . A la derecha elegimos primero entre dos posibilidades cada una con probabilidad  $\frac{1}{2}$ , si ocurre la segunda posibilidad, hacemos otra elección con probabilidades  $\frac{2}{3}$  y  $\frac{1}{3}$ . Los resultados finales tienen las mismas probabilidades que antes. Entonces, necesitamos que

$$H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) = H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}H\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$



**Figura 2.1.2:** Dos posibles descomposiciones (a y b) de una elección de tres posibilidades. Este ejemplo fue empleado en el libro de Shannon y Weaver [1].

De aquí surge el siguiente teorema:

**Teorema:** El único  $H$  que satisface las tres condiciones anteriores es de la forma:

$$H = -K \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i \quad (2.1.1)$$

donde  $K$  es una constante positiva.

Las cantidades de la forma  $H = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$  (en donde la constante  $K$  no es más que la elección de una unidad de medida) desempeñan un papel importante en

la teoría de la información como medidas de información, elección e incertidumbre. Este  $H$  es la famosa **Entropía de Neumann**.

La cantidad  $H$  tiene una serie de propiedades interesantes, tales como:

1.  $H = 0$ , sólo si todos los  $p_i$  menos uno son cero, teniendo este el valor 1. Esto significa que sólo cuando estamos seguros del resultado,  $H = 0$ , en caso contrario  $H$  es positivo. Para entender de mejor manera, supongamos que lanzamos una moneda la cual tiene igual probabilidad (50%) de salir cara o sello, si consideramos un lanzamiento no aleatorio, es decir modificamos el experimento de forma tal que siempre salga sello una vez lanzada la moneda, la entropía de Shannon es cero, pues la información que se posee es completa (tenemos total certeza del resultado).
2. Para un  $n$  dado,  $H$  es un máximo e igual a  $\log n$  cuando todos los  $p_i$  son iguales, es decir,  $\frac{1}{n}$ . Esta es también la situación más incierta posible, pues desconocemos totalmente la salida del experimento o situación. En el ejemplo de la moneda significaría tener nulo conocimiento de si la salida será cara o sello, en este caso decimos que la distribución de probabilidades es homogénea.
3. Consideremos dos espacios muestrales  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  con variables aleatorias asociadas  $x$  e  $y$ . De aquí surge la siguiente pregunta ¿Cuánto nos dice un resultado o salida  $x = i$  sobre el valor que tomará  $y$ ? Para ello supongamos que tenemos dos eventos,  $x$  e  $y$ , con  $m$  posibilidades para el primero y  $n$  para el segundo. Sea  $p(i, j)$  la probabilidad de que ocurra conjuntamente  $i$  para el primero y  $j$  para el segundo. La entropía del suceso conjunto corresponde a:

$$H(x, y) = - \sum_{i,j} p(i, j) \log_2 p(i, j)$$

mientras,

$$H(x) = - \sum_{i,j} p(i, j) \log_2 \sum_j p(i, j)$$

$$H(y) = - \sum_{i,j} p(i, j) \log_2 \sum_i p(i, j)$$

Se puede mostrar que,

$$H(x, y) \leq H(x) + H(y) \quad (2.1.2)$$

la incertidumbre de un suceso conjunto es menor o igual a la suma de las incertidumbres individuales. En particular la igualdad de la expresión anterior (2.1.2) sólo ocurre si los eventos son independientes, es decir,  $p(i, j) = p(i)p(j)$ .

4. Cualquier cambio hacia la igualación de las probabilidades  $p_i$  con  $i \in \{1, n\}$  aumenta  $H$ . Por ende, si  $p_1 < p_2$  y aumentamos  $p_1$  disminuyendo  $p_2$  una cantidad igual para que  $p_1$  y  $p_2$  sean casi iguales, entonces  $H$  aumenta. De forma más general, si realizamos cualquier operación de “promediar” sobre  $p_i$  de la forma,

$$p'_i = \sum_j a_{ij} p_j$$

donde  $\sum_i a_{ij} = \sum_j a_{ij} = 1$  y todos los elementos  $a_{ij} > 0$  harán que  $H$  aumente.

5. Supongamos que hay dos sucesos fortuitos  $x$  e  $y$  no necesariamente independientes. Para cualquier valor particular  $i$  que  $x$  puede asumir hay una probabilidad condicional  $p_i(j)$  de que  $y = j$ , esta viene dada por

$$p_i(j) = \frac{p(i, j)}{\sum_j p(i, j)}$$

Con esto definimos la **entropía condicional** de  $y$ ,  $H_x(y)$ , como el promedio de la entropía de  $y$  para cada valor de  $x$  ponderada según la probabilidad de obtener ese valor de  $x$  en particular, es decir:

$$H_x = - \sum_{i,j} p(i, j) \log_2 p_i(j)$$

Esta cantidad mide la incertidumbre que tenemos sobre  $y$  en el promedio

cuando conocemos  $x$ . Si sustituimos el valor de  $p_i(j)$  obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} H_x(y) &= - \sum_{i,j} p(i,j) \log_2 p(i,j) + \sum_{i,j} p(i,j) \log_2 \sum_j p(i,j) \\ &= H(x,y) - H(x) \\ H(x,y) &= H(x) + H_x(y) \end{aligned}$$

En resumen, la incertidumbre (o entropía) del evento conjunto  $(x, y)$  es la incertidumbre de  $x$  más la incertidumbre de  $y$  cuando conocemos  $x$  (entropía condicional).

6. De los puntos 3 y 5 tenemos la siguiente relación,

$$\begin{aligned} H(x) + H(y) &\geq H(x,y) \geq H(x) + H_x(y) \\ &\Rightarrow H(y) \geq H_x(y) \end{aligned}$$

lo cual nos dice que la incertidumbre de  $y$  nunca aumenta por el conocimiento del evento  $x$ . Vemos que dicha incertidumbre sólo disminuye a menos que  $x$  e  $y$  sean eventos independientes, en cuyo caso no se modifica.

Con lo anterior también podemos extraer la siguiente conclusión, si estas dos variables aleatorias de cierta forma dependen una de la otra, el conocimiento de una puede otorgarnos conocimiento sobre el resultado de la otra, esto puede ser cuantificado utilizando el concepto de **información**.

**Información:** Para dos variables aleatorias  $x$  e  $y$  la información en el resultado o salida  $x = i$  sobre  $y$  se define como:

$$I(x = i : y) = H(y) - H_{x=i}(y) \quad (2.1.3)$$

Esta definición mide el cambio en la incertidumbre sobre  $y$  que se produce cuando conocemos el resultado  $x = i$ . A partir de aquí también podemos ver que  $I(x = i : x) = H(x)$ , ya que  $H_{x=i}(x) = 0$ , esto se debe a que toda la incertidumbre ha sido eliminada pues conocemos el resultado de la salida. También podemos ver que  $I(x = i : y)$  e  $I(y = j : x)$  no son directamente comparables, pero sí podemos

comparar directamente sus valores esperados.

$$E(I(x = i : y)) = \sum_i p_1(i)I(x = i : y)$$

$$E(I(y = j : x)) = \sum_j p_2(j)I(y = j : x)$$

con  $p_1(i)$  la probabilidad de que un evento  $x = i$  ocurra y  $p_2(j)$  la probabilidad de que un evento  $y = j$  ocurra.

$$p_1(i) = \sum_j p(i, j), \quad p_2(j) = \sum_i p(i, j)$$

**Información Mutua:** Definimos la información mutua entre variables aleatorias  $x$  e  $y$  como el valor común,

$$I(x; y) = E(I(x = i : y))$$

$$= E(I(y = j : x))$$

también,

$$I(x; y) = H(x) + H(y) - H(x, y)$$

$$= H(x) - H_y(x) = H(y) - H_x(y)$$

$$= \sum_i \sum_j p(i, j) \log_2 \frac{p(i, j)}{p_1(i)p_2(j)}$$

A pesar de que la teoría de la información clásica es conocida y ampliamente estudiada, con el paso de los años van surgiendo problemas computacionales cada vez más complejos de resolver, junto con la necesidad de una mayor seguridad asociada a nuestros datos que permita una conexión confiable entre las personas que forman parte de un canal de comunicación. Es por ello que podemos decir que la tecnología actual está alcanzando un límite. Una forma de ver esto es con la conocida Ley de Moore.

### 2.1.2. Ley de Moore

La ley de Moore surge en el año 1965 por Gordon Moore [25] y corresponde a un término utilizado para referirse a la observación o predicción realizada por Moore,

la cual nos dice que el número de transistores en un circuito integrado denso se duplica aproximadamente cada dos años.

Hoy en día sabemos que no sólo está aumentando el número de transistores en un chip, sino que también el tamaño de estos está disminuyendo, una referencia a esto último es que para el año 2021 el tamaño de los chips ha alcanzado los 2 nm aproximadamente [26], es decir un tamaño microscópico en donde las leyes de la física cuántica comienzan a cobrar fuerza.

Con esto vemos claramente que estamos llegando a un punto en el cual la tecnología actual está alcanzando los límites de lo clásico/cuántico. De aquí surge la necesidad de implementar una información/computación cuántica capaz de resolver las problemáticas que deja la física clásica.

## 2.2. Nociones y álgebra de la Mecánica Cuántica

Tal como se menciona en el libro de Rainer Dick [27], la mecánica cuántica se formuló con la intención de lograr explicar ciertos sucesos o fenómenos que la mecánica, la termodinámica y la electrodinámica clásica no eran capaces de resolver o entender, de esta forma, la mecánica cuántica proporciona medios para explicar las propiedades de los átomos, los electrones y la radiación electromagnética. Además, una vez que se introdujo la famosa ecuación de Schrödinger y la cuantización de las ecuaciones de Maxwell quedó claro para la historia de la física que la mecánica cuántica es una herramienta fundamental e imprescindible, ya que no podemos explicar ninguna propiedad física de la materia y la radiación sin el uso de esta.

La primera prueba de que la física clásica estaba incompleta apareció cuando se estudiaron ciertas propiedades asociadas a los espectros electromagnéticos. En efecto los gases finos de átomos o moléculas emiten espectros lineales, esto contradice el hecho de que un sistema clásico de cargas eléctricas puede emitir radiación de cualquier frecuencia. Por el contrario, un cuerpo caliente sí emite un espectro continuo, aún así la forma de dichos espectros de radiación no podía ser explicada por la termodinámica y la electrodinámica clásica.

La solución a las problemáticas generadas por los espectros electromagnéticos llegó cuando Max Planck descubrió la manera de calcular los espectros de las

fuentes de calor, bajo la suposición de que la energía en la radiación térmica de frecuencia  $f$  está cuantizada en múltiplos enteros de un cuanto de energía mínima  $hf$ ,

$$E = nhf, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.2.1)$$

siendo  $h$  la constante de Planck con un valor aproximado de  $h \approx 6,626 \times 10^{-34} J \cdot s$  y puede ser medida a partir de la forma del espectro de radiación térmica.

Albert Einstein se da cuenta de que la ecuación anterior postulada por Planck también es capaz de explicar el efecto fotoeléctrico, fenómeno que lo llevaría a recibir el premio nobel en el año 1921. Einstein propuso que la condición de cuantización de Planck corresponde a una propiedad intrínseca de las ondas electromagnéticas. Sin embargo, una vez que la ecuación 2.2.1 se acepta como una propiedad intrínseca de las ondas electromagnéticas, es un pequeño paso para hacer la conexión con los espectros de línea de átomos y moléculas, y concluir que estos espectros de línea implican la existencia de niveles de energía discretos. Esto quiere decir que los átomos y moléculas parecen ser capaces de emitir radiación sólo saltando de un estado o nivel energético discreto a otro estado energético inferior. Esta línea de razonamiento combinada con la dinámica clásica entre los electrones y los núcleos atómicos conduce naturalmente a la teoría de Bohr-Sommerfeld de la estructura atómica. Esto se conoce como la antigua teoría cuántica.

Con esto podemos ver que una de las principales motivaciones para el surgimiento y desarrollo de la mecánica cuántica, fue explicar los niveles de energía discretos en los átomos, moléculas y radiación electromagnética. Más tarde sería Schrödinger quien encontraría o daría una explicación para la discretización de los niveles de energía en átomos y moléculas a través de su famosa ecuación de onda,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{x}, t) + V(\vec{x}) \psi(\vec{x}, t), \quad \text{con } \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

### 2.2.1. Espacio de Hilbert

Para poder definir un espacio de Hilbert emplearemos el libro de Isaac Chuang y Michael Nielsen [28], principalmente para estudiar el álgebra y algunos conceptos claves.

El concepto de espacio vectorial es algo esencial y fundamental del álgebra lineal. Un ejemplo de espacio vectorial es el espacio  $\mathbb{C}^n$ , el cual corresponde al espacio de n-tuplas de números complejos, los cuales denotaremos de la siguiente forma:  $(z_1, \dots, z_n)$ . Los elementos de un espacio vectorial son conocidos como vectores y generalmente se representan en notación matricial a través de una matriz columna. Dicho espacio tiene definida las siguientes operaciones:

- Operación de Adición

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} z_1 + z'_1 \\ \vdots \\ z_n + z'_n \end{bmatrix}$$

la cual toma dos pares de vectores y los convierte en otros dentro del mismo espacio  $\mathbb{C}^n$ .

- Multiplicación por un escalar:

$$z \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} zz_1 \\ \vdots \\ zz_n \end{bmatrix}$$

donde  $z$  corresponde a un escalar complejo.

En adición a lo anterior, un espacio vectorial también contiene un vector cero especial, el cual denotaremos como  $0$ , este satisface la propiedad de que para cualquier otro vector  $|v\rangle$ <sup>3</sup>,  $|v\rangle + 0 = |v\rangle$ .

Con las características y operaciones mencionadas podemos introducir la siguiente definición,

**Definición:** Un subespacio vectorial corresponde a un subconjunto  $W$  de  $V$ , siendo  $V$  el espacio vectorial, tal que  $W$  también corresponde a un espacio vectorial, es decir,  $W$  debe ser cerrado bajo la multiplicación por escalar y la adición.

También, en relación a los espacios vectoriales, es importante hacer mención de lo que son las bases de un espacio vectorial. Un *spanning set* para un espacio vectorial

<sup>3</sup>Durante el desarrollo de esta tesis usaremos la notación estándar de la mecánica cuántica para los conceptos de álgebra lineal. Un vector en el espacio vectorial se representa con un ket:  $|\psi\rangle$ , donde  $\psi$  es la etiqueta del vector y el símbolo  $|\cdot\rangle$  es usado para indicar que el objeto corresponde a un vector.

corresponde a una colección o conjunto de vectores:  $|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle$  tal que cualquier vector  $|v\rangle$  del espacio vectorial puede escribirse como una combinación lineal  $|v\rangle = \sum_i a_i |v_i\rangle$  de vectores en ese conjunto. Generalmente un espacio vectorial puede tener diferentes *spanning sets*.

**Definición:** Un set o conjunto de vectores diferentes de cero  $|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle$  se dice que son linealmente dependientes si existe un conjunto de números complejos  $a_1, \dots, a_n$  con  $a_i \neq 0$  para al menos un valor de  $i$ , tal que,

$$a_1 |v_1\rangle + a_2 |v_2\rangle + \dots + a_n |v_n\rangle = 0$$

**Definición:** Un conjunto de vectores es linealmente independiente si no es linealmente dependiente.

**Definición:** Se puede demostrar que dos conjuntos cualesquiera de vectores linealmente independientes que abarcan un espacio vectorial  $V$  contienen el mismo número de elementos. Llamamos a este conjunto una base de  $V$ . El número de elementos de la base se define como la dimensión de  $V$ .

Finalmente, la última herramienta que necesitamos para definir lo que es un espacio de Hilbert es el concepto de producto interno.

**Definición:** Un producto interno es una función que toma como entrada dos vectores  $|v\rangle$  y  $|w\rangle$  de un espacio vectorial y produce o genera como salida un número complejo.

Una notación que representa dicha operación y es usada en el texto de Nielsen y Chuang [28] es la siguiente:  $(|v\rangle, |w\rangle)$ , que corresponde al producto interno entre los vectores  $|v\rangle$  y  $|w\rangle$ . En general la notación estándar del producto interno es el bra-ket cerrado, es decir, cuando se establece algo de la forma:  $\langle v|w\rangle$ , donde  $|v\rangle$  y  $|w\rangle$  son vectores en el espacio de producto interno.

En general tenemos que una función  $(\cdot, \cdot)$  de  $V \times V$  a  $\mathbf{C}$  es un producto interior si satisface las siguientes condiciones:

1.  $(\cdot, \cdot)$  es lineal en el segundo argumento,

$$\left( |v\rangle, \sum_i \lambda_i |w_i\rangle \right) = \sum_i \lambda_i (|v\rangle, |w_i\rangle)$$

2.  $(|v\rangle, |w\rangle) = (|w\rangle, |v\rangle)^*$ .
3.  $(|v\rangle, |v\rangle) \geq 0$ , la igualdad se cumple cuando  $|v\rangle = 0$ .

Un ejemplo de lo anterior corresponde al espacio  $\mathbb{C}^n$ , el cual posee el siguiente producto interno:

$$((y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n)) \equiv \sum_i y_i^* z_i = [y_1^* \dots y_n^*] \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

**Definición:** Se denomina espacio de producto interno a un espacio vectorial equipado con un producto interno. Los espacios vectoriales complejos dotados de un producto interno que surgen en la computación cuántica y la información cuántica reciben el nombre de espacio de Hilbert.

Es importante mencionar que en dimensiones infinitas los espacios de Hilbert satisfacen restricciones técnicas adicionales más allá de los espacios de producto interno. Un ejemplo de un espacio de Hilbert infinito-dimensional es  $L^2$ , que corresponde al conjunto de todas las funciones  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ , tal que la integral de  $f^2$  sobre toda la recta real es finita. En este caso el producto interior es

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

### 2.2.1.1. Ortogonalidad y Ortonormalidad

Una vez entendido el concepto de producto interno podemos estudiar la definición de ortogonalidad y ortonormalidad [28].

**Definición:** Los vectores  $|w\rangle$  y  $|v\rangle$  se dice que son ortogonales si su producto interno o interior es cero.

**Definición:** La norma de un vector  $|v\rangle$  viene dada por:

$$\| |v\rangle \| \equiv \sqrt{\langle v|v\rangle}$$

de la definición anterior vemos que un **vector unitario o vector normalizado** es aquel vector  $|v\rangle$  que cumple:  $\| |v\rangle \| = 1$ . Cuando hablamos de normalizar un

vector nos referimos a dividir por su norma, luego la siguiente expresión

$$\frac{|v\rangle}{\| |v\rangle \|}$$

es la forma normalizada del vector  $|v\rangle$  (para cualquier vector diferente de cero, pues hay que tener cuidado con las indeterminaciones).

**Definición:** Un conjunto  $|i\rangle$  de vectores con índice  $i$  es ortonormal si cada vector es un vector unitario y los vectores distintos del conjunto son ortogonales, es decir,  $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ , donde  $i$  y  $j$  se eligen del conjunto índice.

Un conocido método que permite generar una base ortonormal  $|v_1\rangle, \dots, |v_d\rangle$  para el espacio vectorial  $V$  es el **Método de Gram-Schmidt**.

### 2.2.2. Operadores lineales en espacios de Hilbert

Para explicar y definir los distintos tipos de operadores se utilizaron como referencia los siguientes textos: [28], [29] y [30].

**Definición:** Se define un operador lineal entre los espacios vectoriales  $V$  y  $W$  como cualquier función  $A : V \rightarrow W$  que es lineal en sus entradas,

$$A \left( \sum_i a_i |v_i\rangle \right) = \sum_i a_i A(|v_i\rangle)$$

de esta ecuación podemos ver que una vez especificada la acción de un operador lineal  $A$  sobre una base, la acción de  $A$  está completamente determinada sobre todas las entradas.

Un operador lineal importante en cualquier espacio vectorial  $V$  es el **operador identidad**,  $I_V$ , definido por la ecuación,

$$I_V |v\rangle \equiv |v\rangle$$

para todos los vectores  $|v\rangle$ . Otro importante operador lineal es el **operador cero o nulo** (lo denotaremos por  $0$ ), este operador mapea todos los vectores al vector cero,

$$0 |v\rangle \equiv 0$$

Supongamos que  $V$ ,  $W$  y  $X$  son espacios vectoriales y que  $A : V \rightarrow W$  y  $B : W \rightarrow X$  son operadores lineales. Entonces utilizaremos la notación  $BA$  para denotar la composición de  $B$  con  $A$ , definida por  $(BA)(|v\rangle) \equiv B(A(|v\rangle))$ .

Habiendo estudiado de manera general algunos operadores lineales, podemos hacer mención de una forma conveniente de escritura, la cual nos ayudará a comprender de mejor forma dichos operadores, esta escritura corresponde a la representación matricial. Para entender como funciona esta representación, supongamos que  $A : V \rightarrow W$  es un operador lineal entre los espacios vectoriales  $V$  y  $W$ , también supongamos que  $|v_1\rangle, \dots, |v_m\rangle$  y  $|w_1\rangle, \dots, |w_n\rangle$  son bases para  $V$  y  $W$  respectivamente. Luego, para cada  $j$  en el rango  $1, \dots, m$ , existen números complejos  $A_{ij}$  a través de  $A_{nj}$  tal que,

$$A|v_j\rangle = \sum_i A_{ij}|w_i\rangle$$

La matriz cuyas entradas son los valores  $A_{ij}$  se dice que forma una representación matricial del operador  $A$ .

Como estudiamos la ortogonalidad y ortonormalidad de los vectores en la sección anterior, podemos mencionar que cada vez que hablemos de una representación matricial para un operador lineal nos referiremos a una representación matricial con respecto a las bases ortonormales de entrada y salida. También utilizamos la convención de que si los espacios de entrada y salida de un operador lineal son los mismos, entonces las bases de entrada y salida son las mismas, a menos que se indique lo contrario.

Con esto podemos redefinir el producto interno en un espacio de Hilbert, para ello, sean  $|w\rangle = \sum_i w_i |i\rangle$  y  $|v\rangle = \sum_j v_j |j\rangle$  representaciones de los vectores  $|w\rangle$  y

$|v\rangle$  con respecto a una base ortonormal  $|i\rangle$ . Luego<sup>4</sup>,

$$\begin{aligned}\langle v|w\rangle &= \left( \sum_i v_i |i\rangle, \sum_j w_j |j\rangle \right) \\ &= \sum_{ij} v_i^* w_j \delta_{ij} = \sum_i v_i^* w_i \\ &= [v_1^* \dots v_n^*] \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Hay una forma útil de representar los operadores lineales que hace uso del producto interno, conocida como la representación del producto externo. Para ello supongamos que  $|v\rangle$  y  $|w\rangle$  son dos vectores que pertenecen a los espacios de producto interno  $V$  y  $W$ , respectivamente. Definimos  $|w\rangle \langle v|$  como el operador lineal de  $V$  a  $W$  cuya acción está definida por,

$$(|w\rangle \langle v|) (|v'\rangle) \equiv |w\rangle \langle v|v'\rangle = \langle v|v'\rangle |w\rangle$$

la expresión  $|w\rangle \langle v|v'\rangle$  la usaremos para denotar el resultado cuando el operador  $|w\rangle \langle v|$  actúa sobre  $|v'\rangle$ .

También podemos emplear combinaciones lineales de operadores de producto externo  $|w\rangle \langle v|$ , de esta forma  $\sum_i a_i |w_i\rangle \langle v_i|$  es el operador lineal, el cual, actuando sobre  $|v'\rangle$  produce como salida,

$$\sum_i a_i |w_i\rangle \langle v_i|v'\rangle$$

Consideremos lo siguiente, sea  $|i\rangle$  cualquier base ortonormal para el espacio vectorial  $V$ , tal que un vector arbitrario del mismo espacio puede escribirse como:

---

<sup>4</sup>Recordar que,

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$$

$|v\rangle = \sum_i v_i |i\rangle$  para algún conjunto de números complejos  $v_i$ <sup>5</sup>,

$$\left( \sum_i |i\rangle \langle i| \right) |v\rangle = \sum_i |i\rangle \langle i|v\rangle = \sum_i v_i |i\rangle = |v\rangle$$

de lo anterior obtenemos la conocida relación de completitud (*completeness relation*),

$$\sum_i |i\rangle \langle i| = I$$

Ahora, teniendo esta herramienta podemos analizar una forma de representar cualquier operador en la notación del producto exterior. Para ello, supongamos el operador lineal  $A : V \rightarrow W$ ,  $|v_i\rangle$  y  $|w_j\rangle$  son bases ortonormales para  $V$  y  $W$ , respectivamente. Usando la relación de completitud anterior dos veces,

$$A = I_W A I_V = \sum_{ij} |w_j\rangle \langle w_j| A |v_i\rangle \langle v_i| = \sum_{ij} \langle w_j| A |v_i\rangle |w_j\rangle \langle v_i|$$

lo cual corresponde a la representación de producto externo del operador  $A$ . Con esto también podemos extraer que  $A$  tiene elemento de matriz  $\langle w_j| A |v_i\rangle$  en la  $i$ -ésima columna y  $j$ -ésima fila con respecto a la base de entrada  $|v_i\rangle$  y la base de salida  $|w_j\rangle$

### 2.2.2.1. Operadores Adjuntos y Hermíticos

Supongamos que  $A$  es un operador lineal en un espacio de Hilbert  $V$ . Resulta que existe un único operador lineal  $A^\dagger$  en  $V$  tal que para todos los vectores  $|v\rangle, |w\rangle \in V$ ,

$$(|v\rangle, A |w\rangle) = (A^\dagger |v\rangle, |w\rangle)$$

este operador se conoce como el adjunto o conjugado hermítico del operador  $A$ . Algunas peculiaridades de la definición anterior son las siguientes:

- $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ .

---

<sup>5</sup>Es importante notar que:

$$\langle i|v\rangle = v_i$$

- $(A|v\rangle)^\dagger = \langle v|A^\dagger$ .
- Si  $|w\rangle$  y  $|v\rangle$  son dos vectores cualesquiera, se cumple que  $(|w\rangle\langle v|)^\dagger = |v\rangle\langle w|$ . Para ver esto, supongamos que  $|\psi\rangle$  y  $|\phi\rangle$  son vectores en  $V$ ,

$$(|\psi\rangle, (|w\rangle\langle v|)|\phi\rangle)^* = \left( (|w\rangle\langle v|)^\dagger|\psi\rangle, |\phi\rangle \right)^* = \left( |\phi\rangle, (|w\rangle\langle v|)^\dagger|\psi\rangle \right) = \langle\phi| (|w\rangle\langle v|)^\dagger |\psi\rangle$$

por otro lado,

$$(|\psi\rangle, (|w\rangle\langle v|)|\phi\rangle)^* = (\langle\psi|w\rangle\langle v|\phi\rangle)^* = \langle\phi|v\rangle\langle w|\psi\rangle$$

luego,

$$\begin{aligned} \langle\phi| (|w\rangle\langle v|)^\dagger |\psi\rangle &= \langle\phi|v\rangle\langle w|\psi\rangle \text{ para vectores arbitrarios } |\psi\rangle, |\phi\rangle \\ \therefore (|w\rangle\langle v|)^\dagger &= |v\rangle\langle w| \end{aligned}$$

- La operación adjunta es anti-lineal,

$$\begin{aligned} \left( (a_i A_i)^\dagger |\phi\rangle, |\psi\rangle \right) &= (|\phi\rangle, a_i A_i |\psi\rangle) \\ &= a_i (|\phi\rangle, A_i |\psi\rangle) \\ &= a_i \left( A_i^\dagger |\phi\rangle, |\psi\rangle \right) \\ &= \left( a_i^* A_i^\dagger |\phi\rangle, |\psi\rangle \right) \\ \therefore (a_i A_i)^\dagger &= a_i^* A_i^\dagger \end{aligned}$$

- $(A^\dagger)^\dagger = A$ ,

$$\begin{aligned} \left( (A^\dagger)^\dagger |\psi\rangle, |\phi\rangle \right) &= (|\psi\rangle, A^\dagger |\phi\rangle) = \left( A^\dagger |\phi\rangle, |\psi\rangle \right)^* = (|\phi\rangle, A |\psi\rangle)^* = (A |\psi\rangle, |\phi\rangle) \\ \therefore (A^\dagger)^\dagger &= A \end{aligned}$$

En una representación matricial de un operador  $A$ , la acción de la conjugación hermítica lleva la matriz de  $A$  a la matriz transpuesta conjugada,  $A^\dagger \equiv (A^*)^T$ , donde  $*$  indica la conjugación compleja y  $T$  indica la operación de transposición o transpuesta.

Un operador  $A$  cuyo adjunto es  $A$  se conoce como **operador hermítico o autoadjunto**.

### 2.2.2.2. Operador Proyector

Son un tipo de operador hermítico. Supongamos que  $W$  es un subespacio vectorial  $k$ -dimensional de un espacio vectorial  $V$  que es  $d$ -dimensional. Usando el procedimiento de Gram-Schmidt es posible construir bases ortonormales  $|1\rangle, \dots, |d\rangle$  para  $V$ , tal que  $|1\rangle, \dots, |k\rangle$  es una base ortonormal para  $W$ . Por definición,

$$P \equiv \sum_{i=1}^k |i\rangle \langle i| \quad (2.2.2)$$

es el proyector en el subespacio  $W$ .

Una propiedad importante de los proyectores es que satisfacen lo siguiente:  $P^2 = P$ , para probar esto, consideramos la expresión vista en 2.2.2

$$P^2 = \left( \sum_i |i\rangle \langle i| \right) \left( \sum_j |j\rangle \langle j| \right) = \sum_{i,j} |i\rangle \langle i|j\rangle \langle j| = \sum_{i,j} |i\rangle \langle j| \delta_{ij} = \sum_i |i\rangle \langle i| = P$$

### 2.2.2.3. Operador Normal

Un operador  $A$  se dice que es normal si cumple que:  $AA^\dagger = A^\dagger A$ , es decir que es un operador que conmuta con su adjunto. Algunas curiosidades de este tipo de operador son:

- Un operador hermítico también es un operador normal.
- Existe un teorema de representación para los operadores normales, conocido como la descomposición espectral, que afirma que un operador es un operador normal si y sólo si este es diagonalizable.
- Una matriz normal es hermítica si y sólo si posee autovalores reales.

### 2.2.2.4. Operador Unitario

Una matriz  $U$  se dice que es unitaria si  $U^\dagger U = I$ <sup>6</sup>. En general, un operador es unitario si y sólo si cada una de sus representaciones matriciales es unitaria. Un operador unitario también satisface:  $UU^\dagger = I$  y por tanto  $U$  es normal (pues conmuta con su adjunto) y tiene una descomposición espectral.

<sup>6</sup>Esta expresión quiere decir que la adjunta es igual a su inversa,  $U^\dagger = U^{-1}$

Geoméricamente, los operadores unitarios son importantes porque son capaces de preservar los productos internos entre vectores. Para entender esto, supongamos que tenemos dos vectores  $|v\rangle$  y  $|w\rangle$ , luego el producto interno de  $U|v\rangle$  y  $U|w\rangle$  es el mismo que el producto interno de  $|v\rangle$  y  $|w\rangle$ , pues

$$(U|v\rangle, U|w\rangle) = \langle v|U^\dagger U|w\rangle = \langle v|I|w\rangle = \langle v|w\rangle$$

En general tenemos que el producto escalar es invariante bajo transformaciones unitarias, en consecuencia, un operador unitario no modifica la norma de un vector, de este modo, los operadores unitarios actúan en el espacio de Hilbert de una manera análoga a las rotaciones en el espacio euclídeo las cuales mantienen el módulo de un vector y el ángulo entre dos vectores.

Otra característica importante de los operadores unitarios es que permiten transformar una base ortonormal en otra base ortonormal.

### 2.2.2.5. Operador Positivo

Los operadores positivos corresponden a una subclase de operadores hermíticos. Un operador positivo  $A$  se define como un operador tal que para cualquier vector  $|v\rangle$ ,  $(|v\rangle, A|v\rangle)$  es un número real no negativo. Si  $(|v\rangle, A|v\rangle)$  es estrictamente mayor que cero para todo  $|v\rangle \neq 0$ , entonces decimos que  $A$  es definida positiva.

Otra peculiaridad de los operadores positivos es que para cualquier operador  $A$ ,  $A^\dagger A$  es también positivo, esto pues

$$\langle \psi | A^\dagger A | \psi \rangle = \|A|\psi\rangle\|^2 \geq 0 \text{ para todo } |\psi\rangle$$

### 2.2.2.6. Operadores de Pauli

Los operadores de Pauli vienen dados por,

$$\begin{aligned} I &= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|, & \sigma_x &= |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \\ \sigma_y &= i(|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|), & \sigma_z &= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \end{aligned}$$

los cuales corresponden al operador identidad y a las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  del momento angular [31], este tipo de operadores suele usarse cuando trabajamos con el espín de una partícula.

Cuando representamos el estado de una partícula  $c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$  como un vector columna,

$$\psi = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

es conveniente escribir a los operadores de Pauli en su notación matricial, la cual viene dada por:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

los últimos tres operadores ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ ) que usualmente se asocian a las tres componentes del espín, no conmutan entre ellas, pero el conmutador de cualquier par es proporcional al tercer operador,

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$$

$$[\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x$$

$$[\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y$$

El hecho de que los operadores de Pauli no conmuten, nos dice que tienen diferentes vectores propios o autovectores. En particular, sabemos que los tres operadores poseen los mismos autovalores:  $\pm 1$ , con los correspondientes vectores propios siendo,

$$|0\rangle \text{ y } |1\rangle \quad \text{para el operador } \sigma_z,$$

$$\frac{(|0\rangle \pm i|1\rangle)}{\sqrt{2}} \quad \text{para } \sigma_y,$$

$$\frac{(|0\rangle \pm |1\rangle)}{\sqrt{2}} \quad \text{para } \sigma_x.$$

Todas las matrices de Pauli son hermíticas y cumplen con la siguiente relación:  $\sigma_j^2 = I$ . También, tenemos que su forma exponencial toma la siguiente configuración

[32],

$$\begin{aligned}
 e^{i\theta\sigma_j} &= I + i\theta\sigma_j + \frac{1}{2}(i\theta)^2\sigma_j^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3\sigma_j^3 + \dots \\
 &= I + i\theta\sigma_j - \frac{1}{2}\theta^2 I - i\frac{1}{3!}\theta^3\sigma_j + \dots \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \dots\right) I + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \dots\right) \sigma_j \\
 &= (\cos \theta)I + i\sigma_j(\sin \theta)
 \end{aligned}$$

A medida que  $\theta$  va de  $\theta = 0 \rightarrow 2\pi$ , esta exponencial traza un círculo en el espacio de matrices unitarias de  $2 \times 2$  empezando y terminando en la matriz unitaria. Este círculo es un grupo, isomorfo al grupo  $U(1)$ .

Finalmente, tenemos que la acción de estos operadores sobre los vectores de la base lógica o computacional ( $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ ) es

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x|0\rangle &= |1\rangle \\
 \sigma_x|1\rangle &= |0\rangle
 \end{aligned} \right\} \text{ para } \sigma_x$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_y|0\rangle &= i|1\rangle \\
 \sigma_y|1\rangle &= -i|0\rangle
 \end{aligned} \right\} \text{ para } \sigma_y$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_z|0\rangle &= |0\rangle \\
 \sigma_z|1\rangle &= -|1\rangle
 \end{aligned} \right\} \text{ para } \sigma_z$$

de lo anterior vemos que el operador  $\sigma_x$  al actuar sobre la base lógica genera un cambio de estado, lo que se conoce como *bit flip* (al estado  $|0\rangle$  lo cambia por  $|1\rangle$ , lo mismo ocurre en el sentido contrario, al estado  $|1\rangle$  lo cambia por  $|0\rangle$ ),  $\sigma_y$  intercambia los estados y además introduce una fase, la cual esta asociada al número imaginario  $i$ . Finalmente el operador de Pauli  $\sigma_z$  introduce un cambio de fase al estado  $|1\rangle$ , mientras que al estado  $|0\rangle$  lo deja invariante.

### 2.2.3. Postulados de la Mecánica Cuántica

Ahora presentamos los postulados básicos de la mecánica cuántica, esto es útil para asegurarnos de que tenemos una comprensión común de cómo funciona la mecánica cuántica en general. Este capítulo fue basado en los siguientes textos: [28], [33] y [34].

#### 1. Primer postulado:

A cada sistema físico  $S$  le corresponde un espacio de Hilbert adecuado  $\mathcal{H}_S$ . Cada estado de  $S$  es representado por un vector normalizado  $\psi \in \mathcal{H}_S$  llamado vector de estado, el cual contiene toda la información posible sobre el sistema. La evolución temporal de  $\psi$  se rige por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo;

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = H\psi$$

donde  $H$  es un operador esencialmente autoadjunto en  $\mathcal{H}_S$ .

Los espacios de Hilbert son espacios vectoriales complejos (posiblemente  $\infty$ -dimensionales) que admiten un producto escalar (que permite definir la norma de un vector) así como una base completa ortonormal.

## 2. Segundo postulado:

Todo atributo observable de un sistema físico es descrito por un operador que actúa sobre los “kets” (vectores  $\psi$ ) que describen el sistema.

Un sistema (una partícula en un potencial, por ejemplo) se describe mediante una función de onda  $\psi(x)$  en la mecánica ondulatoria. Algunos atributos observables simples de dicho sistema son su posición, su momento y su energía. Estos están representados en la mecánica ondulatoria por operadores diferenciales,  $X = x$ ,  $P = -i\hbar \frac{d}{dx}$  y  $H = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$  (El operador Hamiltoniano en una dimensión) respectivamente.

Para cada operador hay estados especiales que no son cambiados por la acción de un operador,

$$A|\psi_\alpha\rangle = \alpha|\psi_\alpha\rangle$$

Estos son los estados propios o funciones propias y los números  $\alpha$  son los valores propios del operador, normalmente son números complejos.

## 3. Tercer Postulado:

El único resultado posible de la medición de un observable  $A$  es uno de los valores propios del operador correspondiente  $A$ .

En física son relevantes los operadores (esencialmente) autoadjuntos, tales

operadores admiten una base ortonormal de vectores propios con valores propios reales. Este postulado tiene que ver con el hecho de que en los experimentos medimos “números reales”.

#### 4. Cuarto postulado:

Cuando se realiza una medida de un observable  $A$  sobre un estado genérico  $|\psi\rangle$  que no es un estado propio de  $A$ , la probabilidad de obtener un valor propio  $a_n$  viene dada por el cuadrado del producto interior de  $|\psi\rangle$  con el estado propio  $|a_n\rangle$ , es decir:  $|\langle a_n|\psi\rangle|^2$ .

Es importante tener en cuenta que,

- El número complejo,  $\langle a_n|\psi\rangle$  se conoce como “amplitud de probabilidad”, para medir  $a_n$  como el valor de  $A$  en el estado  $|\psi\rangle$ .
- La probabilidad de obtener algún resultado es la unidad. Si consideramos que cualquier estado puede expandirse como una superposición de estados propios  $A$

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle$$

Para estados normalizados a la unidad,

$$|\langle \psi|\psi\rangle|^2 = \sum_m \sum_n c_m^* c_n \langle a_m|a_n\rangle$$

porque normalizamos nuestros estados a la unidad, tenemos que  $|\langle \psi|\psi\rangle|^2 = 1$  y  $\langle a_m|a_n\rangle = \delta_{mn}$ , luego

$$\sum_n |c_n|^2 = 1$$

#### 5. Quinto postulado:

Inmediatamente después de que la medición de un observable  $A$  haya dado un valor  $a_n$ , el estado del sistema corresponde al estado propio normalizado  $|a_n\rangle$ .

Analícemos algunas cosas,

- Si una muestra experimental se prepara en un estado  $|\psi\rangle$  entonces se observa que una medición de  $A$  puede producir una variedad de resultados  $a_n$  con probabilidades  $|\langle a_n|\psi\rangle|^2$ . Sistemas idénticamente preparados pueden dar resultados experimentales diferentes. Sin embargo, si se mide  $A$  con el resultado  $a_n$  en un sistema dado y luego se vuelve a medir inmediatamente, los resultados de la segunda medición no se distribuyen estadísticamente, el resultado es siempre  $a_n$ .
- El colapso del paquete de ondas preserva la normalización del estado. Si  $|\psi\rangle$  y  $|a_n\rangle$  están normalizados a la unidad, entonces el proceso de medición sustituye  $|\psi\rangle$  por  $|a_n\rangle$ , no por  $|\langle a_n|\psi\rangle|^2 \cdot |a_n\rangle$ .

#### 6. Sexto postulado:

La evolución temporal de un sistema cuántico preserva la normalización del ket asociado (esto significa que la evolución de un sistema es generada por un operador unitario que vamos a llamar  $U$ ). La evolución temporal del estado de un sistema cuántico se describe por  $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$ , para algún operador unitario  $U$ .

Ahora que ya estudiamos, en esta sección, algunos conceptos asociados al álgebra de la mecánica cuántica en conjunto con sus postulados, podemos comenzar a ver la teoría de la información cuántica y las ventajas que posee en comparación con la teoría de información clásica.

## 2.3. Teoría de la Información Cuántica

Al comienzo de esta tesis, cuando estudiamos la historia de la comunicación, vimos que la tecnología de los últimos años está alcanzando el límite de lo que puede ser descrito por la física clásica. De aquí, surge la necesidad de definir un nuevo tipo de comunicación: la comunicación cuántica. Las nuevas tecnologías que emplean la física cuántica como herramienta se caracterizan por beneficiarse de ciertos fenómenos del mundo cuántico o el mundo de lo microscópico en donde comienzan a ocurrir situaciones completamente contraintuitivas a la lógica o razonamiento humano. Algunos de los fenómenos que nos regala la mecánica cuántica son: la superposición cuántica, la cual nos dice que una partícula posee simultáneamente dos o más estados (un ejemplo de esto es la famosa paradoja

del gato de Schrödinger [35]). Por otro lado tenemos el conocido fenómeno del entrelazamiento cuántico, este nos dice que dos partículas sin importar cuan lejanas estén una de la otra pueden estar correlacionadas de manera que, si interactuamos con una (por ejemplo, realizamos un procedimiento de medición en una de ellas), la otra también cambiará o se verá alterada por dicha interacción. Todos estos fenómenos nos permiten construir una tecnología altamente disruptiva y la posibilidad de generar avances considerables en varias áreas de la física cuántica, tales como: la computación cuántica [36], la criptografía cuántica ([37], [38]), los relojes atómicos [39], la óptica cuántica, la metrología cuántica y los sensores cuánticos [40].

### 2.3.1. Qubits y Qudits

Se trata de estados mecánico-cuánticos de partículas individuales, como átomos, fotones o núcleos, por esto mismo decimos que corresponde a la unidad básica de información en la computación cuántica ([28], [41], [42]). Un qubit utiliza los fenómenos de la superposición cuántica para lograr una combinación lineal de dos estados, esta característica lo diferencia de un bit clásico, pues éste último sólo puede representar un único valor binario, como 0 o 1, lo que significa que sólo puede estar en uno de dos estados posibles. Sin embargo, gracias a la superposición, un qubit puede representar combinaciones de 0 y 1 en diferentes proporciones cada uno, es decir, con una probabilidad determinada de ser un 0 y una probabilidad determinada de ser un 1.

Si usamos la notación de Dirac para etiquetar los estados cuánticos correspondientes a 0 y 1 (bits clásicos) como  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  (los cuales se conocen como los estados de base computacional) respectivamente, luego tenemos que el estado general de un qubit puede ser escrito de la siguiente forma;

$$|\psi\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle \quad (2.3.1)$$

donde por condición de normalización, tenemos que

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1 \quad (2.3.2)$$

Las amplitudes  $c_0$  y  $c_1$  son amplitudes complejas, podemos entender esto pues el estado de un qubit es un vector en un espacio vectorial complejo de dos

dimensiones.

De la expresión para un qubit (2.3.1), podemos notar que a diferencia del caso clásico en donde podemos examinar un bit para determinar si este se encuentra en el estado 0 o 1, en el caso cuántico no podemos examinar un qubit para determinar su estado cuántico, es decir, los valores  $c_0$  y  $c_1$ . En su lugar, la física cuántica nos dice que sólo podemos adquirir información mucho más restringida sobre el estado cuántico. En particular, cuando medimos un qubit obtenemos el resultado  $|0\rangle$  con probabilidad  $c_0$  o el resultado  $|1\rangle$  con probabilidad  $c_1$ .

### 2.3.1.1. Representación geométrica de un qubit

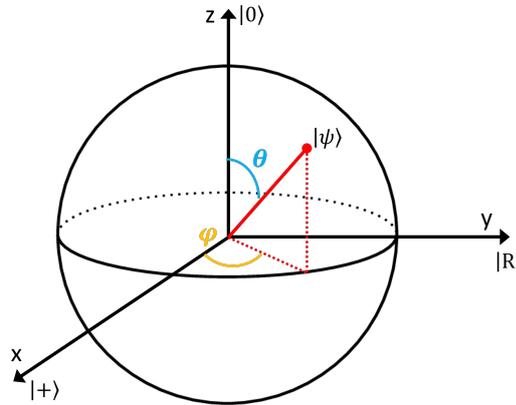
La condición de normalización 2.3.2 sugiere que podemos representar el estado de un sólo qubit como un vector [41]. Este vector se conoce como vector de Bloch. Dicho vector traza una esfera de radio unitario famosamente conocida como esfera de Bloch, los puntos de la esfera de Bloch se especifican por sus ángulos polares  $\theta$  y  $\varphi$ . El polo norte ( $\theta = 0$ ) corresponde al estado puro  $|1\rangle$  y el polo sur ( $\theta = \pi$ ) corresponde al estado puro  $|0\rangle$ . Todos los demás valores de  $\theta$  corresponden a estados de superposición, como los mostrados en 2.3.1.

Debido a la normalización del qubit podemos reescribir la ecuación 2.3.1 como [28],

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \right)$$

de la expresión anterior podemos ignorar el factor de  $e^{i\gamma}$  porque no tiene efectos observables, de esta forma, tenemos lo siguiente

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle$$



**Figura 2.3.1:** Representación geométrica de un qubit, conocida como esfera de Bloch.

Cuando tenemos sistemas de más de 2 niveles, es decir de dimensiones mayores, los qubits adquieren el nombre de qudits, esto pues, ahora son vectores en un espacio d-dimensional, matemáticamente se representan de la siguiente forma,

$$|\psi\rangle = \sum_{j=0}^d c_j |j\rangle$$

nuevamente tenemos que las amplitudes  $c_j$  son amplitudes complejas que cumplen con la condición de normalización. El estado  $|j\rangle$  representa el estado de la partícula.

Es importante mencionar que los qudits no poseen una representación geométrica como los qubits.

## 2.3.2. Matriz de densidad

Para trabajar los sistemas cuánticos existen dos formalismos basados en espacios de Hilbert: el formalismo de vectores de estado y el de matrices de densidad. Hasta ahora hemos formulado la mecánica cuántica utilizando el lenguaje de los vectores de estado, pero veremos que formular la mecánica cuántica desde otra perspectiva trae consigo ventajas que son importantes de mencionar y destacar ([28], [43]).

### 2.3.2.1. Formalismo de vectores estados

En este formalismo tenemos que el estado de un sistema cuántico es descrito por un vector normalizado que pertenece a su correspondiente espacio de Hilbert,

anteriormente vimos que la normalización viene dada por:  $\|\psi\rangle\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = 1$ . Dicha normalización está relacionada con la interpretación probabilista de la física cuántica [43].

Aquí tenemos que la evolución temporal de un sistema cuántico es descrito por un operador unitario. En ausencia de cualquier proceso de medición, el estado  $|\psi_0\rangle$  en el tiempo  $t_0$  evoluciona en el tiempo  $t_1$  a través del operador unitario  $U$  al estado,

$$|\psi_1\rangle = U |\psi_0\rangle$$

Un observable es una propiedad de un sistema físico que puede medirse, es decir una cantidad física como la energía, la posición, entre otros. Los observables se describen mediante operadores hermíticos. Suponiendo que no hay degeneración<sup>7</sup>, un operador hermítico  $A$  puede descomponerse como,

$$A = \sum_{i=1}^n a_i |\phi_i\rangle \langle\phi_i|$$

donde las amplitudes  $a_i$  son los autovalores del operador  $A$  y las cantidades  $|\phi_i\rangle$  son sus respectivos autovectores o vectores propios.

Supongamos que tenemos un sistema en un estado  $|\psi\rangle$ , el resultado de una medición del observable  $A$  es uno de sus valores propios  $a_i$  y el vector de estado del sistema después de la medición es,

$$|\psi_{\text{Final}}\rangle = \frac{(|\phi_i\rangle \langle\phi_i|\psi\rangle)}{\|(|\phi_i\rangle \langle\phi_i|)\psi\|}$$

con una probabilidad,

$$\begin{aligned} p(a_i) &= \|(|\phi_i\rangle \langle\phi_i|)\psi\|^2 \\ &= \langle\psi| (|\phi_i\rangle \langle\phi_i|) |\psi\rangle \end{aligned}$$

La medida definida anteriormente se denomina **medida de von Neumann o medida proyectiva**. Una definición más general de medida (mediciones generalizadas o POVM) se utiliza en el caso de los sistemas cuánticos abiertos.

<sup>7</sup>En física cuántica, la degeneración se produce cuando para un autovalor de un operador determinado hay más de un autoestado asociado.

Tenemos que el proceso de medición perturba el estado de un sistema llevándolo a un estado propio del observable medido. En particular, si  $A$  y  $B$  son dos observables que no conmutan, entonces una medición de  $A$  influirá necesariamente en el resultado de una medición posterior de  $B$ . De aquí podemos apreciar una gran diferencia entre la teoría de la información clásica y cuántica, pues en el último caso tenemos un comportamiento probabilista y el hecho de que la adquisición de información sobre un sistema cuántico perturba el estado del sistema ([44], [45]).

### 2.3.2.2. Formalismo de matriz de densidad

Esta formulación es matemáticamente equivalente al enfoque de los vectores de estado, pero proporciona un lenguaje mucho más conveniente en algunos escenarios de la mecánica cuántica [28].

Resulta que los estados “puros” descritos por los vectores de estado  $|\psi\rangle$  son descripciones idealizadas, es decir poco realistas, que no pueden caracterizar las mezclas estadísticas que a menudo se dan en los experimentos. Es por esto mismo que, estos objetos son muy importantes para la teoría de la información y comunicación cuántica.

Hasta ahora, hemos considerado sólo un tipo de incertidumbre en la mecánica cuántica que proviene del principio de Heisenberg. Sin embargo, en la práctica la situación puede ser más complicada. El vector de estado a menudo no está perfectamente determinado, decimos que en estos casos la información es incompleta. Por ejemplo, podemos saber que el sistema está en un estado elegido al azar del conjunto  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$  con probabilidades  $p_1, p_2, \dots, p_n$  donde  $p_n \geq 0, \forall n$  y  $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ . En estos casos decimos que tenemos una mezcla estadística (**Estado Mixto**) de los estados  $|\psi_k\rangle$  con pesos  $p_k$ . El operador de densidad se define como:

$$\rho \equiv \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|$$

donde  $|\psi_k\rangle$  son todos los posibles estados y  $p_k$  sus respectivas probabilidades.

Si vamos a representar al operador  $\rho$  como una matriz, debemos seleccionar una

base ortonormal,

$$\rho = \sum_{ij} \rho_{ij} |i\rangle \langle j|$$

donde  $|i\rangle$  y  $|j\rangle$  son elementos de un conjunto de vectores de base ortonormal. Podemos encontrar el elemento de la matriz de  $\rho$  en esta base por:

$$\rho_{ij} = \langle i|\rho|j\rangle = \sum_k p_k \langle i|\psi_k\rangle \langle \psi_k|j\rangle$$

Dado que  $\rho$  es un operador hermítico, existe alguna base en la que su representación matricial es diagonal. Los elementos diagonales son entonces las probabilidades de que el sistema esté en el estado de la base correspondiente, luego la suma de los elementos diagonales debe ser uno (cuando hablamos de sumar elementos de la diagonal nos referimos a calcular la traza de una matriz).

Como se menciona en el texto de Nielsen y Chuang [28], las mediciones también se describen fácilmente en el lenguaje del operador de densidad. Supongamos que realizamos una medición descrita por los operadores de medición  $M_m$ . Si el estado inicial corresponde a  $|\psi_i\rangle$ , entonces la probabilidad de obtener el resultado  $m$  es

$$p(m|i) = \langle \psi_i|M_m^\dagger M_m|\psi_i\rangle = \text{Tr}(M_m^\dagger M_m|\psi_i\rangle \langle \psi_i|) \quad (2.3.3)$$

Por la ley de la probabilidad total, la probabilidad de obtener el resultado  $m$  es,

$$\begin{aligned} p(m) &= \sum_i p(m|i)p_i \\ &= \sum_i p_i \text{Tr}(M_m^\dagger M_m|\psi_i\rangle \langle \psi_i|) \\ &= \text{Tr}(M_m^\dagger M_m\rho) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Si el estado inicial de nuestro sistema era  $|\psi_i\rangle$ , entonces el estado después de obtener el resultado  $m$  es,

$$|\psi_i^m\rangle = \frac{M_m|\psi_i\rangle}{\sqrt{\langle \psi_i|M_m^\dagger M_m|\psi_i\rangle}} \quad (2.3.5)$$

Por lo tanto, después de una medición que produce el resultado  $m$  tenemos un

conjunto de estados  $|\psi_i^m\rangle$  con probabilidades respectivas  $p(i|m)$ . El operador de densidad correspondiente  $\rho_m$  es por tanto,

$$\begin{aligned}\rho_m &= \sum_i p(i|m) |\psi_i^m\rangle \langle \psi_i^m| \\ &= \sum_i p(i|m) \frac{M_m |\psi_i\rangle \langle \psi_i| M_m^\dagger}{\langle \psi_i| M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle}\end{aligned}$$

Pero por la teoría elemental de la probabilidad [46], tenemos que,

$$p(i|m) = \frac{p(m, i)}{p(m)} = \frac{p(m|i)p_i}{p(m)}$$

Sustituyendo esto, junto con 2.3.3 y 2.3.4, obtenemos

$$\begin{aligned}\rho_m &= \sum_i p(i|m) |\psi_i^m\rangle \langle \psi_i^m| \\ &= \sum_i \frac{p(m|i)p_i}{p(m)} |\psi_i^m\rangle \langle \psi_i^m| \\ &= \sum_i \frac{\text{Tr}(M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle \langle \psi_i|) p_i}{\text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho)} |\psi_i^m\rangle \langle \psi_i^m|\end{aligned}$$

y gracias a lo que vimos en la ecuación 2.3.5, tenemos que

$$\begin{aligned}\rho_m &= \sum_i \frac{\text{Tr}(M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle \langle \psi_i|) p_i}{\text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho)} \frac{M_m |\psi_i\rangle}{\sqrt{\langle \psi_i| M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle}} \frac{M_m^\dagger \langle \psi_i|}{\sqrt{\langle \psi_i| M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle}} \\ &= \sum_i p_i \frac{M_m |\psi_i\rangle \langle \psi_i| M_m^\dagger}{\text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}\end{aligned}$$

### 2.3.2.3. Algunas propiedades de la matriz de densidad

Los operadores de densidad presentan las siguientes características, estas propiedades serán muy útiles para el desarrollo del trabajo investigativo [28],

- **Teorema:** Un operador  $\rho$  es el operador de densidad asociado a algún conjunto  $(p_i, |\psi_i\rangle)$  si y sólo si satisface las siguientes condiciones:

1. **Condición de la traza:**  $\rho$  tiene una traza igual a uno.
2. **Condición de la positividad:**  $\rho$  es un operador positivo.

Otra particularidad de las matrices de densidad es que nos ayudan a describir tanto estados puros como mixtos, por ejemplo tenemos que  $\rho$  describe un estado puro si y sólo si se cumple que:  $\rho^2 = \rho$  y esto implica que

$$\text{Tr}(\rho^2) = \text{Tr}(\rho) = 1$$

Podemos probar lo anterior haciendo uso de las propiedades de una matriz de densidad (condición de la traza y positividad), para ello consideramos la siguiente descomposición espectral para  $\rho$ ,

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle \langle i|, \quad \text{con} \quad \sum_i p_i = 1$$

y considerando que  $p_i \geq 0$  porque  $\rho$  es una matriz positiva. Ahora veamos la descomposición espectral de  $\rho^2$

$$\rho^2 = \sum_{i,j} p_i p_j |i\rangle \underbrace{\langle i|j\rangle}_{\delta_{i,j}} \langle j| = \sum_{i,j} p_i p_j \delta_{i,j} |i\rangle \langle j| = \sum_i p_i^2 |i\rangle \langle i|$$

Si calculamos la traza de  $\rho^2$ , tenemos lo siguiente

$$\text{Tr}(\rho^2) = \text{Tr} \left( \sum_i p_i^2 |i\rangle \langle i| \right) = \sum_i p_i^2 \underbrace{\text{Tr}(|i\rangle \langle i|)}_{\langle i|i\rangle=1}$$

luego,

$$\text{Tr}(\rho^2) = \sum_i p_i^2$$

dado que  $\rho$  es una matriz positiva y  $\sum_i p_i = 1$ , con  $0 \leq p_i \leq 1$ , entonces tenemos,

$$\text{Tr}(\rho^2) = \sum_i p_i^2 \leq \sum_i p_i \rightarrow p_i^2 \leq p_i$$

de aquí vemos que  $\sum_i p_i^2 \leq 1$ , donde la igualdad sólo se produce si  $\rho$  es un estado puro, es decir  $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$ , por lo tanto,

$$\text{Tr}(\rho^2) = \text{Tr}(|\psi\rangle \langle \psi| \langle \psi| \psi\rangle \langle \psi|) = \text{Tr}(|\psi\rangle \langle \psi|) = \langle \psi| \psi\rangle = 1$$

Por otro lado, cuando  $\rho^2 \neq \rho$  tenemos una mezcla estadística. Más adelante

estudiaremos con mayor profundidad a que nos referimos cuando hablamos de un estado puro y un estado mixto.

### 2.3.3. Entropía de un sistema cuántico

Anteriormente, cuando estudiamos la teoría de la información clásica nos encontramos con un concepto fundamental conocido como la entropía de Shannon, el cual nos ayuda a medir o cuantificar la cantidad de información de una fuente. Es natural pensar que si tenemos dicha herramienta en la teoría clásica debiera existir su contraparte en la teoría cuántica de la información, es así como Von Neumann introduce la entropía de von Neumann, la cual es una generalización de la entropía de Shannon. Algo interesante a mencionar es el hecho de que Von Neumann presentó su entropía (1932) 20 años antes de la entropía de Shannon (1948) [47].

Von Neumann definió la entropía de un estado cuántico  $\rho$  mediante la siguiente expresión ([28], [48]),

$$S(\rho) \equiv -Tr(\rho \log_2 \rho)$$

Por simplicidad escribiremos los logaritmos sin el subíndice 2, pero es importante considerar que estamos trabajando siempre con logaritmos de base 2. Si  $\lambda_x$  corresponde a los autovalores de  $\rho$  (donde la matriz de densidad viene dada por:  $\rho = \sum_x \lambda_x |\psi_x\rangle \langle \psi_x|$ , con  $|\psi_x\rangle$  vectores ortonormales), podemos reescribir la entropía de von Neumann de la siguiente forma,

$$S(\rho) = - \sum_x \lambda_x \log \lambda_x$$

Así como lo hace la entropía de Shannon en la teoría clásica, la entropía de von Neumann cuantifica la cantidad de información en un sistema, así como la cantidad de correlaciones entre sistemas cuánticos.

Otra de las funciones de esta entropía es que nos ayuda a medir la ignorancia sobre el sistema cuántico (lo que desconocemos), esto de cierta forma va de la mano con la naturaleza de los sistemas cuánticos, pues sabemos que nuestros sistemas se encuentran en constante contacto con el entorno, es decir, que estos interactúan con los alrededores, lo que implica que exista cierto desconocimiento

o incertidumbre de lo que está ocurriendo al interior de nuestro sistema físico. Por ejemplo, que  $S = 0$  implica que nuestra matriz de densidad  $\rho$  describe un estado puro, por lo que tenemos el máximo conocimiento sobre el sistema (es decir, ignorancia mínima).

Por otro lado si tenemos una mezcla estadística, esto implica que  $Tr(\rho^2) < 1$ , entonces  $S > 0$ . Esto lo podemos demostrar de la siguiente forma, sabemos que como  $\rho$  es hermítico podemos diagonalizarlo, de esta forma,

$$\rho = \sum_k \lambda_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|$$

de la condición de la traza tenemos que

$$tr(\rho) = 1 \rightarrow \sum_j \lambda_j = 1$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} tr(\rho^2) &= \sum_n \langle \psi_n | \rho^2 | \psi_n \rangle \\ &= \sum_n \langle \psi_n | \left[ \sum_k \lambda_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \sum_l \lambda_l |\psi_l\rangle \langle \psi_l| \right] | \psi_n \rangle \\ &= \sum_n \langle \psi_n | \left[ \sum_k \lambda_k^2 |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \right] | \psi_n \rangle \\ &= \sum_n \lambda_n^2 \end{aligned}$$

luego,

$$tr(\rho^2) < 1 \Rightarrow \sum_n \lambda_n^2 < 1$$

y dado que todos los  $\lambda_n$  son reales y no negativos, tenemos que  $0 \leq \lambda_n < 1$  para cada  $\lambda_n$ . Con esto en mente, recordamos que  $\log(x) < 0$  cuando  $x < 1$ , entonces cada término dentro de la suma de la entropía de Von Neumann será negativo

$$\begin{aligned} S &= -tr(\rho \log \rho) \\ &= -\sum_n \lambda_n \log \lambda_n \end{aligned}$$

y con el factor global menos, la entropía es entonces estrictamente positiva ( $S > 0$ ).

### 2.3.3.1. Propiedades de la entropía de Von Neumann

Algunas de las propiedades de la entropía de von Neumann son [47]:

- **Negatividad nula:** Para los operadores de densidad, tenemos que la entropía es no-negativa, es decir

$$S(\rho) \geq 0$$

- **Valor mínimo y máximo:** La entropía de von Neumann está acotada tanto por abajo como por arriba, su límite inferior es cero si estamos en presencia de un estado puro. Su límite superior es alcanzado cuando estamos en presencia de un estado maximalmente mixto (máximo desconocimiento de nuestro sistema físico). Un estado maximalmente mixto viene dado por la matriz identidad con dimensión dependiente del espacio de Hilbert, es decir:  $\rho = \frac{I}{d}$ , donde  $d$  es la dimensión del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

La entropía de von Neumann está acotada superiormente por,

$$S(\rho) \leq \log d$$

la igualdad se consigue si y sólo si  $\rho$  es un estado maximalmente mixto.

### 2.3.4. Matriz de densidad reducida

Muchas veces nos encontramos con situaciones en las cuales no tenemos acceso directo a un sistema en su totalidad, en estos casos tenemos que el espacio de Hilbert corresponde al producto tensorial de dos subespacios:  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . Una posible situación es que sólo tengamos acceso a un subespacio, en este tipo de casos lo que debemos hacer es tomar la traza sobre la parte del sistema que no conocemos, por lo tanto, aunque el sistema completo esté descrito por un estado puro, si tomamos la traza sobre un subsistema, el resultado puede ser una mezcla estadística, es decir, un estado mixto.

Este tipo de aplicación se conoce como matriz de densidad reducida, pues sólo trabajamos o realizamos la traza en un subsistema de un sistema cuántico compuesto. Este tipo de herramientas es muy útil, pues es lo más realista al momento de trabajar con sistemas cuánticos compuestos.

Para entender de mejor forma como funciona este tipo de operador o matriz, supongamos que tenemos dos sistemas físicos en nuestro laboratorio [28], digamos el sistema A y B, cuyo estado está descrito por un operador de densidad  $\rho_{AB}$ . El operador de densidad reducido para el sistema A está definido por

$$\rho_A \equiv Tr_B(\rho_{AB})$$

Aquí podemos ver claramente que estamos realizando la traza sobre el sistema que desconocemos, es decir el sistema B. La traza parcial se define como:

$$Tr_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) \equiv |a_1\rangle\langle a_2| Tr(|b_1\rangle\langle b_2|) \quad (2.3.6)$$

donde  $Tr(|b_1\rangle\langle b_2|) = \langle b_1|b_2\rangle$ , además tenemos que  $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$  son dos vectores en el espacio de estados de A y  $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$  son dos vectores en el espacio de estados de B.

En general, la razón del por qué se utiliza la traza parcial para describir una parte de un sistema cuántico mayor o compuesto, es porque la operación de traza parcial es la única operación que da lugar a la descripción correcta de las cantidades observables para los subsistemas de un sistema compuesto.

### 2.3.5. Estados puros y mixtos

Para entender de mejor forma toda la información que ya vimos, en este apartado estudiaremos con más detalle los estados puros y mixtos ([49], [50]).

Consideremos un conjunto de objetos dados en los estados  $|\psi_i\rangle$ . Si todos los objetos están en el mismo estado, el conjunto está representado por un **Estado Puro**. El operador de densidad para un estado puro viene dado por:

$$\rho \equiv |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

En caso contrario, es decir cuando no todos los sistemas del conjunto están en el mismo estado, por ejemplo,  $N_i$  sistemas están en el estado  $|\psi_i\rangle$ , tal que  $\sum N_i = N$ , con  $N$  el total de objetos. La probabilidad  $p_i$  de encontrar un sistema individual

del conjunto descrito por el estado  $|\psi_i\rangle$  viene dada por

$$p_i = \frac{N_i}{N}, \quad \text{donde} \quad \sum_i p_i = 1$$

Así, podemos escribir el estado mixto como una suma convexa, es decir, una suma ponderada de estados puros escritos en su representación de matriz de densidad,

$$\rho_{mixto} = \sum_i p_i \rho_i^{puro} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

En síntesis, tenemos lo siguiente,

- Un estado puro es el estado cuántico en el que tenemos información exacta sobre el sistema cuántico. Una particularidad de estos estados es que en la esfera de Bloch están representados por puntos en la superficie.
- Un estado mixto representa un conocimiento limitado o nulo sobre el estado del sistema. En una esfera de Bloch están representados por puntos al interior, en particular, el centro de la esfera representa al estado maximalmente mixto de un solo qubit  $\frac{I_2}{2}$ .
- La matriz de densidad puede representar tanto estados puros como mixtos.

$$\rho = \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \tag{2.3.7}$$

### 2.3.5.1. Estados de Werner

Un ejemplo particular de estado mixto que presenta correlaciones no clásicas es el estado de Werner, fue introducido por Reinhard Werner en 1989 [51]. En general, un estado de Werner es una matriz de densidad de un estado cuántico bipartito que pertenece a un espacio compuesto  $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$  que permanece inalterado cuando las dos partes aplican la misma operación unitaria [52],

$$\rho_{AB} = (U \otimes U) \rho_{AB} (U \otimes U)^\dagger$$

Por ejemplo un estado de Werner puede ser escrito de la siguiente forma [53],

$$\rho_{ab} = \frac{1-\varepsilon}{4} I_{4 \times 4} + \varepsilon |\psi^-\rangle \langle \psi^-| \quad (2.3.8)$$

es importante mencionar que aquí estamos considerando sistemas en dos dimensiones. En la expresión anterior,  $|\psi^-\rangle$  corresponde a un estado de Bell<sup>8</sup> y  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  corresponde a una amplitud de decaimiento. El estado mostrado en la ecuación anterior tiene las siguientes particularidades:

- Si  $\varepsilon = 0$  tenemos un estado completamente mixto:

$$\rho_{ab} = \frac{I_{4 \times 4}}{4}$$

- Si  $\varepsilon = 1$  tenemos un estado completamente puro:

$$\rho_{ab} = |\psi^-\rangle \langle \psi^-|$$

- Se puede probar que los estados de Werner son separables cuando  $\varepsilon \leq \frac{1}{3}$  y entrelazados cuando  $\varepsilon > \frac{1}{3}$ .

### 2.3.6. Entrelazamiento Cuántico

El estudio de este concepto, en este apartado de la tesis, está basado en los siguientes trabajos: [28], [31], [41], [54] y [55].

El entrelazamiento es una consecuencia de la superposición cuántica<sup>9</sup>. Corresponde a una característica de la mecánica cuántica mediante la cual dos o más sistemas cuánticos muestran correlaciones en sus propiedades medidas, esto sin importar que tan alejado se encuentre un sistema del otro.

Esta recurso de la mecánica cuántica es empleado en diversas áreas de la física, tales como: teleportación cuántica [56], codificación densa [57], criptografía cuántica

<sup>8</sup>Los estados de Bell vienen dados por:

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \quad |\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle) \quad (2.3.9)$$

<sup>9</sup>La superposición nos dice que podemos describir un sistema cuántico como una combinación lineal de dos o más estados.

[58], intercambio de entrelazamiento (*entanglement swapping*) [59], presición de los relojes atómicos [60], entre otros.

En 1935, diez años tras la invención de la teoría cuántica desarrollada por Heisenberg [61] y Schrödinger [62], surgieron tres publicaciones que se convertirían en las semillas de un nuevo concepto en la historia de la mecánica cuántica, dicho concepto sería el entrelazamiento ([63], [64], [65]). El artículo de Einstein, Podolsky y Rosen ([64], EPR) fue una paradoja formulada como un *gedankenexperiment* (experimento pensado o mental), en el cual se dieron cuenta de que si dos partículas interactuaban en el pasado, sus propiedades seguirán conectadas en el futuro, es decir, que la observación de una partícula determina el estado cuántico de la otra sin importar la distancia en la que se encuentren ambas partículas. Einstein, Podolsky y Rosen desde un comienzo buscaban responder a las siguientes preguntas, las cuales son necesarias si queremos establecer una teoría física exitosa y completa:

“(1) ¿Es la teoría correcta?” y (2) “¿Es la descripción dada por la teoría completa?”. Sólo en el caso de que se pueda responder positivamente a estas dos preguntas se puede decir que los conceptos de la teoría son satisfactorios. ([64], p. 777).

y esto sólo es posible de realizar mediante experimentos y mediciones. Su conclusión fue que la mecánica cuántica es incompleta.

En general, el argumento principal de la paradoja EPR se basa en tres requisitos: **Completitud, Realidad y Localidad.**

- **Completitud:** Cada elemento de la realidad física debe tener una contraparte en la teoría física para que esta sea completa.
- **Realidad:** Si el valor de una cantidad física puede predecirse con certeza, es decir una probabilidad igual a uno, sin perturbar el sistema, entonces la cantidad tiene realidad física.
- **Localidad:** No hay acción a distancia (*“Spooky action at a distance”*). Las mediciones en un subsistema no afectan a las mediciones en los subsistemas lejanos. Esto significa que, si dos sistemas están realmente desconectados, el resultado de cualquier medición realizada en un sistema no puede influir en el resultado de una medición en el otro sistema.

Tiempo después, Niels Bohr [63] responde a la publicación realizada por Einstein, Podolsky y Rosen mencionando que para él, la mecánica cuántica “aparecería

como una descripción completamente racional de los fenómenos físicos como los que encontramos en los procesos atómicos.” (p. 696), es decir, Bohr estaba en desacuerdo con lo planteado por Einstein y, en particular, con el criterio de la realidad, pues dicho criterio contiene una ambigüedad esencial cuando se aplica a los problemas en cuestión (mundo microscópico).

Tal como menciona Rosen [66], años después de la famosa paradoja EPR, la gran discusión de ambos artículos se centra en el concepto de la realidad, pues

Einstein creía en la realidad objetiva, independiente del observador. Con la ayuda de las mediciones se puede obtener información sobre esta realidad, pero esta existe independientemente de estas mediciones (siempre que las mediciones no la perturben o cambien) y seguiría existiendo en ausencia de observadores humanos. Partiendo de este punto de vista y aplicando el criterio de un elemento de la realidad física, el artículo llega a la conclusión de que la descripción mecánico-cuántica es incompleta. Por otro lado, Bohr, veía la realidad de forma totalmente diferente. Según él los elementos de la realidad en un sistema dado están determinados por los arreglos experimentales que se establecen para investigar el sistema. Las disposiciones experimentales determinan los posibles resultados de las mediciones que se van a realizar y, por lo tanto, se podría decir que moldean la realidad en una forma que corresponde a estos posibles resultados. Si se ha montado un aparato para medir la posición de una partícula, esta posición es un elemento de la realidad, mientras que el momentum no lo es, y viceversa. Según Bohr, la descripción ofrecida por la mecánica cuántica es completa porque corresponde exactamente a lo que es posible determinar en una situación dada, es decir, con un arreglo experimental dado. Lo que parece equivaler a que la descripción de la realidad por la mecánica cuántica es completa porque la realidad es lo que la mecánica cuántica es capaz de describir. (65-66)

Algo importante a mencionar es que, Schrödinger acuñó el término de “entrelazamiento” en su artículo sobre la famosa paradoja del gato ([65], [67]), tiempo después de publicada la paradoja EPR.

El argumento EPR fue posteriormente reformulado por David Bohm en 1952 [68] para el sistema cuántico simple de dos partículas de espín  $1/2$ .

Con el paso de los años, en particular en el año 1964, se propuso una prueba experimental para determinar si la paradoja EPR era correcta o no, dicho experimento fue realizado por John Bell [69]. El resultado clave de Bell fue

la derivación de una desigualdad llamada: **Desigualdad de Bell**<sup>10</sup>. El teorema de Bell afirma que la desigualdad se cumple siempre si la imagen LHV (modelo de variables locales ocultas) del mundo microscópico es correcta. La mecánica cuántica, por el contrario, predice violaciones de la desigualdad de Bell y así tenemos una forma de distinguir entre los dos enfoques en el laboratorio. Por ejemplo, al considerar estados maximalmente entrelazados no se cumple la desigualdad de Bell, lo que está en completo acuerdo con las predicciones que realiza la Teoría Cuántica y en contradicción con la paradoja EPR. Gracias al trabajo de Bell se puede concluir que: “No existe una teoría física sobre variables ocultas que reproduzca todas las predicciones de la Mecánica Cuántica” [54].

### 2.3.6.1. Estados entrelazados y separables

Tenemos que la base más natural de  $\mathcal{H}$  (espacio de Hilbert) se construye a partir del producto tensorial de las bases de los subespacios  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$ . Por ejemplo, si los subespacios  $\mathcal{H}_j$  son bi-dimensionales con bases  $|0_1\rangle, |1_1\rangle, |0_2\rangle, |1_2\rangle$ , luego la base del espacio completo  $\mathcal{H}$  es:

$$|0_1\rangle \otimes |0_2\rangle, |1_1\rangle \otimes |0_2\rangle, |1_1\rangle \otimes |1_2\rangle, |0_1\rangle \otimes |1_2\rangle$$

también conocida como la base lógica.

Del principio de superposición, tenemos que el estado más general en  $\mathcal{H}$  es una superposición arbitraria de los elementos de la base, es decir

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 C_{ij} |i_1\rangle \otimes |j_2\rangle \\ &= \sum_{ij} C_{ij} |ij\rangle \end{aligned}$$

- **Observación importante:**

En general, un vector  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  no puede ser escrito como un producto

<sup>10</sup>La primera desigualdad de Bell fue publicada en el año 1964 por John Bell [69]. En general, el objetivo de este trabajo era capturar la paradoja de Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) de forma cuantitativa [70].

tensorial de estados, es decir  $|\psi\rangle \neq |A_1\rangle \otimes |B_2\rangle$ , donde,

$$\begin{aligned} |A_1\rangle &= \alpha_1|0_1\rangle + \alpha_2|1_1\rangle, & \in \mathcal{H}_1 \\ |B_2\rangle &= \beta_1|0_2\rangle + \beta_2|1_2\rangle, & \in \mathcal{H}_2 \end{aligned}$$

este es el caso de un: **Estado Entrelazado**.

Entonces, se dice que un estado en  $\mathcal{H}$  está entrelazado si no puede escribirse como un producto tensorial de un estado de  $\mathcal{H}_1$  y un estado de  $\mathcal{H}_2$ .

En el caso de que podamos escribir el estado de un sistema como un producto tensorial de estados, entonces hablamos de un: **Estado Separable o Estado Producto**. Por ejemplo, si denotamos una base de vectores de estado  $\mathcal{H}_1$  por  $|A_1\rangle$  y una base de vectores de estado en  $\mathcal{H}_2$  por  $|B_2\rangle$ , y podemos escribir el estado conjunto del sistema de la siguiente forma,

$$|\psi\rangle = |A_1\rangle \otimes |B_2\rangle$$

luego decimos que el estado  $|\psi\rangle$  es separable, pues en este caso,  $|\psi\rangle$  puede expresarse como un producto tensorial entre dos estados, cada uno de los cuales describe uno de los subsistemas y está restringido al correspondiente subespacio del espacio de Hilbert total. Cuando el sistema compuesto se encuentra en un estado separable no hay entrelazamiento cuántico entre el subsistema 1 y el subsistema 2. Los estados separables son estados en los que, en cierto sentido, la medición en el subsistema 1 no afecta a la medición en el subsistema 2.

### 2.3.7. Cuantificadores de Entrelazamiento

Para este apartado de la tesis se emplearán las siguientes publicaciones como referencia: [54], [71], [72], [73] y [74]. Además sólo se considerarán sistemas compuestos de dos partes, es decir sistemas bipartitos.

Sabemos que el entrelazamiento cuántico es un recurso o actúa como tal en la teoría de la información cuántica, tal como la energía lo es en la física general. Es por ello que es importante estudiar cómo cuantificar esta herramienta, pues a nivel experimental es muy compleja la realización o elaboración de estados maximalmente entrelazados, generalmente obtenemos estados parcialmente entrelazados (estados con un menor grado de entrelazamiento). La intención de

esta sección es poder conocer algunas alternativas que nos permitan calcular el grado de entrelazamiento de un estado, ya sea puro o mixto, ambos casos serán de mucha utilidad para el desarrollo de la investigación.

Un posible criterio que nos permite distinguir entre los estados separables (nulo entrelazamiento) de los estados entrelazados es la desigualdad de Bell [69], históricamente ha demostrado ser un buen detector de entrelazamiento para estados entrelazados puros bipartitos. Sin embargo, este criterio no siempre es válido, pues se han encontrado casos que no satisfacen esta desigualdad, aún siendo estados entrelazados. Un ejemplo de ello son los ya mencionados, estados de Werner [51], los cuales violan la desigualdad de Bell cuando  $\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , pero existe un rango en el cual no se viola la desigualdad de Bell, aún cuando el estado de Werner sigue estando entrelazado, dicho rango es  $\frac{1}{3} < \varepsilon \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Es por esta razón, que necesitamos nuevos métodos para cuantificar el entrelazamiento de manera óptima y efectiva.

### 2.3.7.1. Entropía de Entrelazamiento

La entropía de entrelazamiento se define como la entropía de von Neumann que vimos anteriormente ([48], [73], [75])

$$S(\rho) \equiv -Tr(\rho \log_2 \rho)$$

del operador de densidad reducido asociado al subsistema  $A$  o  $B$ ,

$$E_S(\psi) = S(\rho_A) = S(\rho_B)$$

La definición anterior la podemos encontrar en el artículo de Charles Bennett [75], en donde se menciona lo siguiente:

El entrelazamiento de un estado puro parcialmente entrelazado puede ser naturalmente parametrizado por su entropía de entrelazamiento, definida como la entropía de von Neumann de  $\rho_A$  o  $\rho_B$ , o equivalentemente como la entropía de Shannon de los cuadrados de los coeficientes de Schmidt (p. 2047).

De aquí, podemos ver que mediante los coeficientes de Schmidt<sup>11</sup> también es posible visualizar la definición de la entropía de entrelazamiento, de la siguiente forma,

$$E_S(\psi) = -\text{Tr } \rho_A \log_2 \rho_A = -\text{Tr } \rho_B \log_2 \rho_B = -\sum_{i=1}^d c_i^2 \log_2 c_i^2 \quad (2.3.10)$$

Dado que la entropía de Shannon de una distribución de probabilidad clásica es una medida de la información contenida en la distribución, la ecuación anterior proporciona un primer vistazo a la relación entre las correlaciones cuánticas y la información [73].

### 2.3.7.2. Axiomas para un buen cuantificador de entrelazamiento

Antes de mencionar el Entrelazamiento de Formación, es importante estudiar una lista de posibles postulados o axiomas que deben cumplir los cuantificadores para ser un buen candidato como objeto de medida del grado de entrelazamiento de un estado. En [71], [72] y [74] se menciona que una función no negativa  $E$  definida en todos los estados bipartitos  $\rho_{AB}$ , es un buen candidato como cuantificador de entrelazamiento si satisface los siguientes axiomas:

1. Para todo estado separable  $\rho_{AB}$ ,  $E(\rho_{AB}) = 0$ .
2. Para un estado bipartito puro  $|\psi\rangle\langle\psi|$ ,  $E$  es exactamente igual a la entropía de von Neumann de una de sus matrices de densidad reducida.
3. Bajo operaciones locales unitarias, el entrelazamiento sigue siendo el mismo y bajo cualquier protocolo LOCC (operaciones locales y comunicación clásica)  $E$  es una función monótona. Para cualquier operación  $\Omega$ , tenemos que

$$E(\Omega(\rho_{AB})) \leq E(\rho_{AB})$$

<sup>11</sup>La descomposición de Schmidt viene dada por [76],

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d c_i |a_i\rangle \otimes |b_i\rangle$$

en donde  $c_i$  son los coeficientes de expansión, reales y positivos, los conjuntos  $\{|a_i\rangle\}$  y  $\{|b_i\rangle\}$  corresponden a estados ortonormales para los subsistemas  $A$  y  $B$ , respectivamente. Finalmente  $d = \min\{D_A, D_B\}$ , es decir la menor dimensión entre los dos subespacios.

4. Convexidad: para un estado bipartito  $\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_i$ ,

$$E(\rho_{AB}) \leq \sum_i p_i E(\rho_i)$$

5. Aditividad: Para dos estados bipartitos cualesquiera  $\rho_{AB}, \sigma_{AB}$ ,

$$E(\rho_{AB} \otimes \sigma_{AB}) = E(\rho_{AB}) + E(\sigma_{AB})$$

6. Continuidad: El entrelazamiento debe converger a cero en el límite cuando la distancia entre diferentes operadores densidad ( $\rho_{AB}$  y  $\sigma_{AB}$ ) tiende a cero, es decir, cuando  $\|\rho_{AB} - \sigma_{AB}\| \rightarrow 0$  tenemos que:

$$E(\rho_{AB}) - E(\sigma_{AB}) \rightarrow 0$$

En la práctica se ha comprobado que la mayoría de los cuantificadores de entrelazamiento, sin incluir los primeros tres axiomas, no satisfacen los demás axiomas mencionados. Sin embargo, hay candidatos que logran cumplir con cada uno de los axiomas anteriores [72]. Cabe destacar que a veces, dependiendo del autor que está tratando el problema, se suelen considerar algunos axiomas extras.

### 2.3.7.3. Entrelazamiento de Formación

En [77] Willian Wootters menciona que:

Para un estado mixto de un sistema bipartito, la entropía de von Neumann de un subsistema ya no es una buena medida del entrelazamiento, porque cada subsistema puede tener ahora una entropía distinta de cero por sí mismo, incluso si no hay entrelazamiento (p. 29).

El **Entrelazamiento de Formación** se define como sigue [78]: Dada una matriz de densidad de un par de sistemas cuánticos  $A$  y  $B$ , consideramos las posibles descomposiciones de estado puro de  $\rho$ , es decir, todos los ensambles de estados  $|\psi_i\rangle$  con probabilidades  $p_i$  tal que,

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

Para cada estado puro, el entrelazamiento se define como la entropía de cualquiera

de los dos subsistemas  $A$  y  $B$  dadas en la ecuación 2.3.10. Luego, la entropía de formación de un estado mixto  $\rho$  se define como el entrelazamiento promedio de los estados puros de la descomposición, minimizado sobre todas las descomposiciones de  $\rho$ , es decir,

$$E_F(\rho) = \min_{\{p_i, \psi_i\}} \sum_i p_i E_S(\psi_i)$$

Wooters, en su publicación de 1997 [78] derivó una expresión para el Entrelazamiento de Formación<sup>12</sup> de un par de qubits en un estado arbitrario (derivó un valor mínimo expresado como una función explícita de  $\rho$ ). Para poder obtener una expresión útil, Wooters introdujo una expresión conocida como **Concurrencia**. Para estados puros de dos qubits, la concurrencia viene dada por,

$$C(\psi) \equiv |\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle|$$

donde  $|\tilde{\psi}\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y |\psi^*\rangle$  representa el “*spin-flip*”<sup>13</sup> de  $|\psi\rangle$ ,  $|\psi^*\rangle$  es el conjugado complejo de  $|\psi\rangle$  y  $\sigma_y$  es una de las matrices de Pauli.

Se puede mostrar que este entrelazamiento, definido en 2.3.10, puede ser escrito como [79],

$$E_S(\psi) = \xi(C(\psi))$$

donde la función  $\xi$  se define de la siguiente forma,

$$\xi(C) \equiv h\left(\frac{1 - \sqrt{1 - C^2}}{2}\right)$$

$$h(x) \equiv -x \log_2 x - (1 - x) \log_2(1 - x)$$

aquí,  $h(x)$  corresponde a la entropía binaria del parámetro  $x$ . Además tenemos que la función  $\xi$  es monótonamente creciente y va de 0 a 1 a medida que  $C$  va de 0 a 1, por lo que se puede tomar la concurrencia como una medida de entrelazamiento en sí misma.

<sup>12</sup>El entrelazamiento de formación funciona tanto para estados puros como mixtos. Anteriormente, la entropía de entrelazamiento sólo funcionaba para estados puros.

<sup>13</sup>La operación de *spin-flip* (inversión de espín) mapea el estado de cada qubit a su correspondiente estado ortogonal.

La generalización de la concurrencia a estados mixtos de dos qubits procede de la siguiente forma,

$$C(\rho) \equiv \min_{\{\psi_i\}} \sum_i p_i C(\psi_i) = \min_{\{\psi_i\}} \sum_i p_i |\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle|$$

La solución analítica de este procedimiento de minimización implica encontrar los valores propios del operador no-Hermítico  $\rho\tilde{\rho}$ , es decir de la matriz,

$$\zeta = \rho\tilde{\rho} = \rho(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$$

donde  $\rho^*$  es el complejo conjugado de  $\rho$  en la base estándar  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|10\rangle$  y  $|11\rangle$ .

En concreto, la solución para la concurrencia de un estado mixto de dos qubits viene dada por,

$$C(\rho) = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\} \quad (2.3.11)$$

donde las cantidades  $\lambda_i$  son los autovalores en orden decreciente de la matriz  $\zeta$ .

Dado que siempre existe una descomposición óptima de  $\rho$  para un par de qubits en la que todos los estados puros que componen la descomposición tienen el mismo entrelazamiento, Wootters pudo demostrar la siguiente relación entre el entrelazamiento de formación y la concurrencia [78]:

$$E_F(\rho) = \xi(C(\rho))$$

En resumen, el criterio de concurrencia nos dice que si  $C(\psi) = 0$ , entonces el estado es separable y no está entrelazado; si  $C(\psi) > 0$ , el estado está entrelazado y, en particular, cuando  $C(\psi) = 1$  la concurrencia alcanza su valor máximo, en este caso decimos que el estado es maximalmente entrelazado.

## 2.4. Intercambio de Entrelazamiento (ES)

Para que se puedan llevar a cabo los protocolos de comunicación cuántica en la vida real, es necesario distribuir el entrelazamiento a largas distancias<sup>14</sup>.

<sup>14</sup>La distribución de estados cuánticos a largas distancias es esencial para aplicaciones futuras como la distribución de claves cuánticas y las redes cuánticas.

Desafortunadamente, el entrelazamiento es un recurso extremadamente frágil, el cual puede decaer o perderse rápidamente debido a las propiedades del medio de transporte [80]. Por ejemplo, sabemos que en el espacio los fotones pueden viajar cientos y cientos de kilómetros con una baja probabilidad de perderse. Por otro lado, en el caso de una fibra óptica esto no ocurre así, las señales ópticas transmitidas a través de la atmósfera o las fibras ópticas sufren una disminución exponencial en la probabilidad de éxito de transmisión con la distancia<sup>15</sup>.

Un método que puede utilizarse para ampliar la distancia entre dos estados entrelazados es el llamado **Intercambio de Entrelazamiento (ES)**, el cual fue introducido en el año 1993 por Żukowski [59], aunque en realidad la idea principal tras el intercambio de entrelazamiento surge en el año 1992 por Yurke y Stoler [83], en donde muestran que “los efectos EPR pueden surgir incluso si las partículas no provienen de una fuente central inestable que decae en un estado entrelazado” (p. 1251), es decir que el entrelazamiento puede surgir o nacer a partir de partículas que provienen de fuentes independientes. Experimentalmente se han podido desarrollar protocolos de intercambio de entrelazamiento, por lo que este fenómeno cuántico es una realidad ([84], [85], [86], [87], [88]).

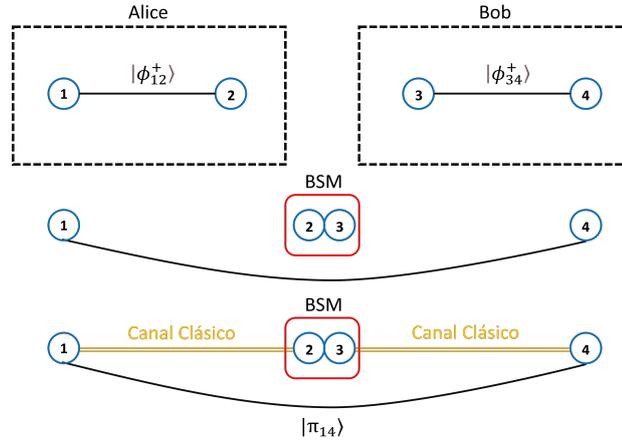
El intercambio de entrelazamiento también ha encontrado importantes aplicaciones en la creación de estados entrelazados multipartitos [2] y en los protocolos de los repetidores cuánticos [9], la idea de estos últimos es crear secciones de línea de transmisión sin pérdidas sobre las que se puede teleportar un estado cuántico [12]. Dichos repetidores cuánticos también poseen una alternativa como arreglos o redes de satélite ([4], [3]). El uso de satélites es ventajoso debido a que la mayor parte del camino recorrido por un par de fotones entrelazados se encuentra en el espacio libre, esto implica una menor pérdida en comparación con la distribución de entrelazamiento en tierra. La idea de poder implementar estos repetidores cuánticos surge por la necesidad de crear o diseñar una red cuántica.

### 2.4.1. Protocolo Estándar de ES

En general, el intercambio de entrelazamiento corresponde a la transferencia de correlaciones no locales entre sistemas cuánticos [89]. Para comprender de mejor forma como funciona el intercambio de entrelazamiento, supongamos lo siguiente:

---

<sup>15</sup>La distancia de distribución de entrelazamiento se limita aproximadamente a unos 140 kilómetros en tierra ([81], [82]).



**Figura 2.4.1:** Esquema o diagrama del protocolo de intercambio de entrelazamiento. Aquí Alice y Bob pueden corresponder a dos laboratorios independientes, cada uno con un par de partículas. El estado  $|\pi_{14}\rangle$  puede corresponder a cualquiera de los estados de Bell, es decir:  $|\phi^\pm\rangle$  o  $|\psi^\pm\rangle$ . BSM corresponde a un procedimiento de medición de Bell.

Alice y Bob poseen los siguientes pares de partículas entrelazadas:

$$|\phi_{12}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle|0_2\rangle + |1_1\rangle|1_2\rangle), \quad |\phi_{34}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_3\rangle|0_4\rangle + |1_3\rangle|1_4\rangle)$$

El estado total correspondiente a los cuatro qubits es:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\phi_{12}^+\rangle \otimes |\phi_{34}^+\rangle \\ &= \frac{1}{2}(|0000_{1234}\rangle + |0011_{1234}\rangle + |1100_{1234}\rangle + |1111_{1234}\rangle) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Podemos reescribir este estado en función de los estados de Bell<sup>16</sup>, para ello

<sup>16</sup>Recordemos que los estados de Bell son:

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \quad |\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$$

reescribimos la base lógica de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 |00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi^+\rangle + |\phi^-\rangle) \\
 |01\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi^+\rangle + |\psi^-\rangle) \\
 |10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi^+\rangle - |\psi^-\rangle) \\
 |11\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi^+\rangle - |\phi^-\rangle)
 \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

así, la ecuación 2.4.1 queda escrita,

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= \frac{1}{2}(|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle + |1111\rangle) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} [ |0\rangle (|\phi^+\rangle + |\phi^-\rangle) |0\rangle + |0\rangle (|\psi^+\rangle + |\psi^-\rangle) |1\rangle + |1\rangle (|\psi^+\rangle - |\psi^-\rangle) |0\rangle \\
 &\quad + |1\rangle (|\phi^+\rangle - |\phi^-\rangle) |1\rangle ] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} [ (|\phi^+\rangle + |\phi^-\rangle) |00\rangle + (|\psi^+\rangle + |\psi^-\rangle) |01\rangle + (|\psi^+\rangle - |\psi^-\rangle) |10\rangle \\
 &\quad + (|\phi^+\rangle - |\phi^-\rangle) |11\rangle ]
 \end{aligned}$$

finalmente,

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} [ |\phi_{23}^+\rangle (|00\rangle_{14} + |11\rangle_{14}) + |\psi_{23}^+\rangle (|01\rangle_{14} + |10\rangle_{14}) + |\psi_{23}^-\rangle (|01\rangle_{14} - |10\rangle_{14}) \\
 &\quad + |\phi_{23}^-\rangle (|00\rangle_{14} - |11\rangle_{14}) ] \\
 &= \frac{1}{2} ( |\phi_{23}^+\rangle |\phi_{14}^+\rangle + |\psi_{23}^+\rangle |\psi_{14}^+\rangle + |\psi_{23}^-\rangle |\psi_{14}^-\rangle + |\phi_{23}^-\rangle |\phi_{14}^-\rangle )
 \end{aligned}$$

Algunas conclusiones importantes que podemos extraer del protocolo anterior son:

- Si medimos los qubits 23 y obtenemos  $|\phi_{23}^+\rangle$ , luego estamos proyectando a los qubits 1 y 4 en el estado  $|\phi_{14}^+\rangle$ . Esto implica que se estableció un entrelazamiento entre los qubits 1 y 4. Lo mismo ocurre si al medir obtenemos  $|\phi_{23}^-\rangle$ ,  $|\psi_{23}^+\rangle$  ó  $|\psi_{23}^-\rangle$ . Los qubits 1 y 4 terminan en un estado maximalmente entrelazado.
- Alice y Bob deben saber que el procedimiento se realizó con éxito, esto implica la existencia de un *time delay*, de esta forma el protocolo no es

superlumínico<sup>17</sup>.

En general, tenemos lo siguiente para el protocolo estándar (los estados iniciales y la base de medición son estados de Bell) del intercambio de entrelazamiento:

Medición	Estado Final	Probabilidad
$ \phi_{23}^+\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle_{14} +  11\rangle_{14}) =  \phi_{14}^+\rangle$	$\frac{1}{4}$
$ \phi_{23}^-\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle_{14} -  11\rangle_{14}) =  \phi_{14}^-\rangle$	$\frac{1}{4}$
$ \psi_{23}^+\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 01\rangle_{14} +  10\rangle_{14}) =  \psi_{14}^+\rangle$	$\frac{1}{4}$
$ \psi_{23}^-\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 01\rangle_{14} -  10\rangle_{14}) =  \psi_{14}^-\rangle$	$\frac{1}{4}$

**Cuadro 2.4.1:** Tabla con los posibles resultados a obtener cuando se desarrolla un protocolo de intercambio de entrelazamiento general y estándar.

De aquí vemos que existe una correlación uno a uno entre los estados de Bell del par  $\{23\}$  y los estados del par  $\{14\}$ . Este protocolo decimos que es determinista, pues todas las salidas poseen la misma concurrencia, como son estados de Bell presentan el máximo valor de concurrencia el cual es igual a uno.

Experimentalmente se ha logrado realizar este protocolo con una alta fidelidad y concurrencia asociada a los estados finales o de salida ( $[10]$ ,  $[11]$ ).

## 2.4.2. Protocolo Probabilista de ES

Para comprender el caso probabilista del intercambio de entrelazamiento, consideremos dos pares de qubits  $\{1,2\}$  y  $\{3,4\}$ , ambos inicialmente en estados puros parcialmente entrelazados,

$$\begin{aligned} |\xi_{12}\rangle &= a |0_1\rangle |0_2\rangle + b |1_1\rangle |1_2\rangle \\ |\xi_{34}\rangle &= a |0_3\rangle |0_4\rangle + b |1_3\rangle |1_4\rangle \end{aligned}$$

de manera que el estado de los cuatro qubits corresponde al producto tensorial del estado asociado a los qubits  $\{12\}$  y el estado asociado a los qubits  $\{34\}$ ,

$$\begin{aligned} |\xi_{12}\rangle |\xi_{34}\rangle &= (a |0_1\rangle |0_2\rangle + b |1_1\rangle |1_2\rangle) \otimes (a |0_3\rangle |0_4\rangle + b |1_3\rangle |1_4\rangle) \\ &= a^2 |0_1\rangle |0_3\rangle |0_2\rangle |0_4\rangle + ab |0_1\rangle |1_3\rangle |0_2\rangle |1_4\rangle + ab |1_1\rangle |0_3\rangle |1_2\rangle |0_4\rangle \\ &\quad + b^2 |1_1\rangle |1_3\rangle |1_2\rangle |1_4\rangle \end{aligned}$$

<sup>17</sup>Superlumínico se refiere a un fenómeno en el cual la propagación de información o materia se realiza a una velocidad superior a la velocidad de la luz.

con estos estados podemos reescribir la base lógica  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  como vimos en 2.4.2, de esta forma tenemos lo siguiente;

$$\begin{aligned}
|\xi_{12}\rangle |\xi_{34}\rangle &= a^2 |0_1\rangle |0_3\rangle |0_2\rangle |0_4\rangle + ab |0_1\rangle |1_3\rangle |0_2\rangle |1_4\rangle + ab |1_1\rangle |0_3\rangle |1_2\rangle |0_4\rangle \\
&\quad + b^2 |1_1\rangle |1_3\rangle |1_2\rangle |1_4\rangle \\
&= ab (|\psi_{13}^+\rangle |\psi_{24}^+\rangle + |\psi_{13}^-\rangle |\psi_{24}^-\rangle) \\
&\quad + a^2 \left( \frac{|\phi_{13}^+\rangle |\phi_{24}^+\rangle + |\phi_{13}^+\rangle |\phi_{24}^-\rangle + |\phi_{13}^-\rangle |\phi_{24}^+\rangle + |\phi_{13}^-\rangle |\phi_{24}^-\rangle}{2} \right) \\
&\quad + b^2 \left( \frac{|\phi_{13}^+\rangle |\phi_{24}^+\rangle - |\phi_{13}^+\rangle |\phi_{24}^-\rangle + |\phi_{13}^-\rangle |\phi_{24}^+\rangle - |\phi_{13}^-\rangle |\phi_{24}^-\rangle}{2} \right)
\end{aligned}$$

Para reducir lo anterior, definimos el siguiente estado normalizado [90],

$$|\tilde{\xi}_{13}^\pm\rangle = \frac{a^2 |0_1\rangle |0_3\rangle \pm b^2 |1_1\rangle |1_3\rangle}{\sqrt{|a|^4 + |b|^4}}$$

De esta forma tenemos que

$$\begin{aligned}
|\xi_{12}\rangle |\xi_{34}\rangle &= ab (|\psi_{13}^+\rangle |\psi_{24}^+\rangle + |\psi_{13}^-\rangle |\psi_{24}^-\rangle) \\
&\quad + a^2 \left( \frac{|\phi_{13}^+\rangle |\phi_{24}^+\rangle + |\phi_{13}^+\rangle |\phi_{24}^-\rangle + |\phi_{13}^-\rangle |\phi_{24}^+\rangle + |\phi_{13}^-\rangle |\phi_{24}^-\rangle}{2} \right) \\
&\quad + b^2 \left( \frac{|\phi_{13}^+\rangle |\phi_{24}^+\rangle - |\phi_{13}^+\rangle |\phi_{24}^-\rangle + |\phi_{13}^-\rangle |\phi_{24}^+\rangle - |\phi_{13}^-\rangle |\phi_{24}^-\rangle}{2} \right) \\
&= \frac{\sqrt{|a|^4 + |b|^4}}{\sqrt{2}} (|\tilde{\xi}_{13}^+\rangle |\phi_{24}^+\rangle + |\tilde{\xi}_{13}^-\rangle |\phi_{24}^-\rangle) + ab (|\psi_{13}^+\rangle |\psi_{24}^+\rangle + |\psi_{13}^-\rangle |\psi_{24}^-\rangle)
\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

pues,

$$\begin{aligned}
|\tilde{\xi}_{13}^+\rangle |\phi_{24}^+\rangle &= \left( \frac{a^2 |0_1\rangle |0_3\rangle + b^2 |1_1\rangle |1_3\rangle}{\sqrt{|a|^4 + |b|^4}} \right) \left( \frac{|0_2\rangle |0_4\rangle + |1_2\rangle |1_4\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{a^2 |0_1\rangle |0_3\rangle (|0_2\rangle |0_4\rangle + |1_2\rangle |1_4\rangle) + b^2 |1_1\rangle |1_3\rangle (|0_2\rangle |0_4\rangle + |1_2\rangle |1_4\rangle)}{\sqrt{2}\sqrt{|a|^4 + |b|^4}} \\
|\tilde{\xi}_{13}^-\rangle |\phi_{24}^-\rangle &= \left( \frac{a^2 |0_1\rangle |0_3\rangle - b^2 |1_1\rangle |1_3\rangle}{\sqrt{|a|^4 + |b|^4}} \right) \left( \frac{|0_2\rangle |0_4\rangle - |1_2\rangle |1_4\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{a^2 |0_1\rangle |0_3\rangle (|0_2\rangle |0_4\rangle - |1_2\rangle |1_4\rangle) + b^2 |1_1\rangle |1_3\rangle (|1_2\rangle |1_4\rangle - |0_2\rangle |0_4\rangle)}{\sqrt{2}\sqrt{|a|^4 + |b|^4}}
\end{aligned}$$

luego,

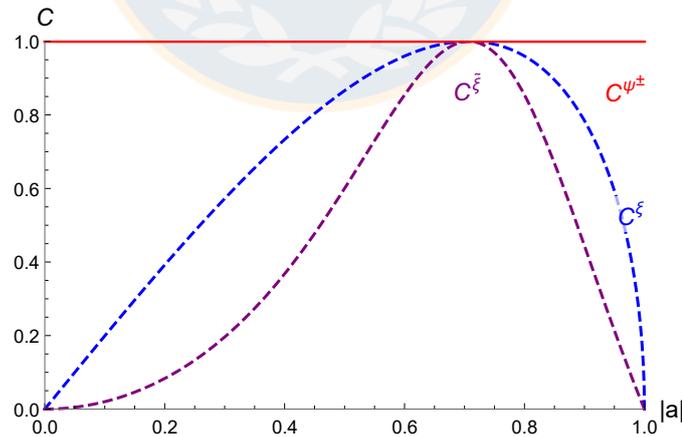
$$\left| \tilde{\xi}_{13}^+ \right\rangle \left| \phi_{24}^+ \right\rangle + \left| \tilde{\xi}_{13}^- \right\rangle \left| \phi_{24}^- \right\rangle = \frac{\sqrt{2}(a^2 |0_1\rangle |0_3\rangle |0_2\rangle |0_4\rangle + b^2 |1_1\rangle |1_3\rangle |1_2\rangle |1_4\rangle)}{\sqrt{|a|^4 + |b|^4}}$$

Del resultado obtenido en 2.4.3, podemos ver que si medimos los qubits {24}, los qubits {13} se proyectarán a los siguientes estados,

Medición	Estado Final	Probabilidad
$ \phi_{24}^+\rangle$	$ \tilde{\xi}_{13}^+\rangle$	$\frac{ a ^4 +  b ^4}{2}$
$ \phi_{24}^-\rangle$	$ \tilde{\xi}_{13}^-\rangle$	$\frac{ a ^4 +  b ^4}{2}$
$ \psi_{24}^+\rangle$	$ \psi_{13}^+\rangle$	$ ab ^2$
$ \psi_{24}^-\rangle$	$ \psi_{13}^-\rangle$	$ ab ^2$

**Cuadro 2.4.2:** Tabla con los posibles resultados a obtener cuando se desarrolla un protocolo de intercambio de entrelazamiento probabilista.

Es decir que existe una correlación uno a uno entre los estados de Bell del par {24} y los estados del par {13}.



**Figura 2.4.2:** Concurrencia para los estados:  $\{|\xi_{12}\rangle, |\xi_{34}\rangle\}$  (estados iniciales, curva azul),  $|\tilde{\xi}_{13}^\pm\rangle$  (curva morada) y  $|\psi_{13}\rangle$  (curva roja). Cabe mencionar que la concurrencia de ambos estados iniciales es la misma y es igual a  $C^\xi = 2|ab|$ , por otro lado las concurrencias de los otros estados son:  $C^{\tilde{\xi}} = \frac{2|a^2b^2|}{|a|^4 + |b|^4}$  y  $C^{\psi^\pm} = 1$ .

De aquí podemos ver que existe una probabilidad de obtener una salida con máximo entrelazamiento (concurrencia máxima), dicho estado corresponde a un estado de

Bell  $|\psi_{13}^{\pm}\rangle$  y la probabilidad asociada a esta salida es:  $P^{\psi^{\pm}} = 2|ab|^2$ . Por otro lado, también hay una posibilidad de obtener un estado menos entrelazado  $|\tilde{\xi}_{13}^{\pm}\rangle$  que los estados iniciales  $\{|\xi_{12}\rangle, |\xi_{34}\rangle\}$  con una probabilidad de:  $P^{\tilde{\xi}^{\pm}} = |a|^4 + |b|^4$ .

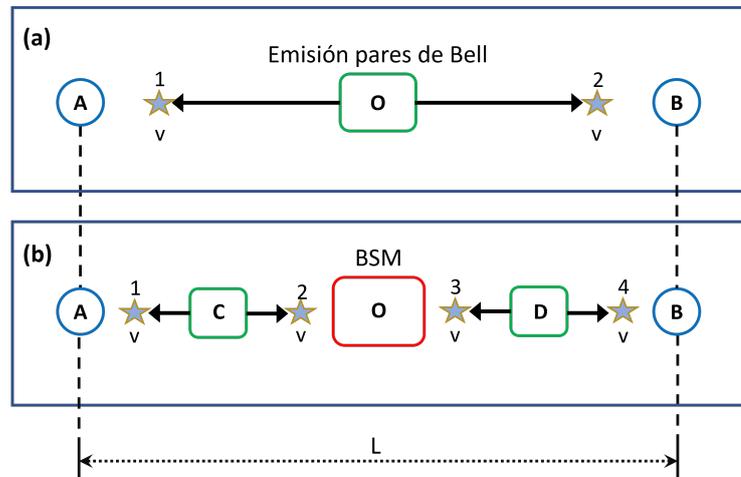
También es importante mencionar que [90]:  $2|ab|^2 \leq |a|^4 + |b|^4$ , esto quiere decir que la probabilidad de obtener un estado menos entrelazado que los estados iniciales es mayor que la probabilidad de obtener un estado final con más entrelazamiento. En resumen, hay más probabilidad de perder entrelazamiento que de ganarlo. Sólo cuando  $|a| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , tenemos que todos los estados involucrados poseen la misma concurrencia y esta es igual a 1.

### 2.4.3. Usos prácticos del ES

Algunas ventajas del protocolo de intercambio de entrelazamiento se muestran en la publicación de Bose et al. [2], estas se detallarán a continuación:

#### 1. Acelerar la distribución de entrelazamiento

Consideremos dos laboratorios  $A$  y  $B$  los cuales están separados por una distancia  $L$ , en medio de ambos tenemos la estación  $O$ , la cual corresponde a una fuente que produce pares de Bell (ver figura (a) de 2.4.3). En esta situación, tenemos que el tiempo necesario para que las partículas alcancen  $A$  y  $B$  es al menos  $t_1 = L/2v$ , con  $v$  siendo la velocidad de las partículas (igual para las dos).



**Figura 2.4.3:** (a) Situación sin intercambio de entrelazamiento. (b) Situación en donde se lleva a cabo el protocolo de intercambio de entrelazamiento. Cada estrella representa una partícula que viaja con velocidad  $v$ . Imagen basada en el esquema desarrollado por Bose et al. [2].

Ahora, consideremos dos estaciones de producción de pares de Bell  $C$  y  $D$ , en este caso  $O$  es sólo una estación de medición de estados de Bell. En  $t_0$ , tanto  $C$  como  $D$  envían pares de Bell (1,2) y (3,4), respectivamente (ver figura (b) de 2.4.3). Las partículas 2 y 3 llegan a  $O$ , 1 llega a  $A$  y 4 llega a  $B$ . En general, todos llegan a sus destinos exactamente en  $t = L/4v$ . En este instante una medición del estado de Bell se realiza en las partículas 2 y 3 en  $O$ . Esta medida proyecta a las partículas 1 y 4 a un estado de Bell.

Si el tiempo de medición corresponde a  $t_m$ , entonces el tiempo necesario para suministrar un par de Bell a las estaciones  $A$  y  $B$  con las dos subestaciones adicionales  $C$  y  $D$  en la ruta es,  $t_2 = L/4v + t_m$ .

En particular, tenemos que:  $t_2$  es menor que  $t_1$  si  $t_m < L/4v$ . Entonces, para los fotones en estados de Bell este procedimiento realmente no puede ahorrar tiempo, pues estos viajan a la velocidad de la luz y por ende para que el protocolo fuese óptimo necesitaríamos un tiempo de medición menor a cero, lo cual carece de sentido físico. Sin embargo, para las partículas que poseen masa, esta es definitivamente una forma de reducir el tiempo necesario para suministrar a usuarios distantes con un par de Bell.

## 2. Posibilidad de corregir errores de amplitud debido a la propagación

Para este caso supongamos que en la figura (b) de 2.4.3, los pares de Bell emitidos por  $C$  y  $D$  adquieren errores de amplitud y se convierten en estados menos entrelazados del tipo:

$$|\eta\rangle = \cos\theta |01\rangle + \sin\theta |10\rangle$$

Luego, el estado de los dos pares entrelazados cuando las partículas 2 y 3 alcanzan  $O$  es

$$\begin{aligned} |\xi\rangle_{1234} &= |\eta_{12}\rangle \otimes |\eta_{34}\rangle \\ &= (\cos\theta |01\rangle_{12} + \sin\theta |10\rangle_{12}) \otimes (\cos\theta |01\rangle_{34} + \sin\theta |10\rangle_{34}) \\ &= \cos^2\theta |0101\rangle + \sin\theta \cos\theta (|1001\rangle + |0110\rangle) + \sin^2\theta |1010\rangle \end{aligned}$$

Si una medición de Bell se realiza en las partículas 2 y 3, la probabilidad de que se hayan proyectado a un estado de Bell ( $|00\rangle + |11\rangle$ ) o ( $|00\rangle - |11\rangle$ ) es de  $\sin^2(2\theta)/2$ . Por otro lado, la probabilidad de que se proyecten a los otros estados de Bell es de  $(1 + \cos^2(2\theta))/2$ . La siguiente tabla resume todas las posibles salidas o estados finales para las partículas 1 y 4 con sus respectivas probabilidades.

Medición	Estado Final	Probabilidad
$ \phi_{23}^+\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle_{14} +  11\rangle_{14})$	$\sin^2\theta \cos^2\theta$
$ \phi_{23}^-\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle_{14} -  11\rangle_{14})$	$\sin^2\theta \cos^2\theta$
$ \psi_{23}^+\rangle$	$\sin^2\theta  10\rangle_{14} + \cos^2\theta  01\rangle_{14}$	$\frac{\cos^4\theta + \sin^4\theta}{2}$
$ \psi_{23}^-\rangle$	$\sin^2\theta  10\rangle_{14} - \cos^2\theta  01\rangle_{14}$	$\frac{\cos^4\theta + \sin^4\theta}{2}$

**Cuadro 2.4.3:** Tabla con los posibles resultados a obtener cuando se desarrolla un protocolo de intercambio de entrelazamiento probabilista en donde los estados iniciales poseen amplitudes fijas. Aquí los estados iniciales son estados parcialmente entrelazados.

En conclusión, a pesar de los errores de amplitud debido a la propagación de las partículas,  $A$  y  $B$  finalmente pueden compartir un estado Bell ( $|\phi_{14}^\pm\rangle$ ). Por supuesto, en el caso de los otros estados para las partículas 2 y 3, las partículas 1 y 4 van a estados incluso menos entrelazados que el estado inicial, pues la concurrencia de estos estados menos entrelazados es de:

$$C(\sin^2\theta |10\rangle_{14} \pm \cos^2\theta |01\rangle_{14}) = 2|\sin^4(\theta) \cos^4(\theta)|$$

mientras que la concurrencia de los estados iniciales es:

$$C(|\eta\rangle) = 2|\cos(\theta)\sin(\theta)|$$

y tenemos que  $2|\sin^4(\theta)\cos^4(\theta)| < 2|\cos(\theta)\sin(\theta)|$ .

En resumen, podemos realizar el protocolo con una cierta probabilidad de ganar entrelazamiento (estado de Bell maximalmente entrelazado), pero también existe una probabilidad asociada a una pérdida de entrelazamiento. Es por esto que podemos considerar adecuado el intercambio de entrelazamiento para la corrección de errores de amplitud sólo de manera probabilística.



## Capítulo 3

# Intercambio de Entrelazamiento Determinista y Parcialmente Determinista

En general, si consideramos dos pares iniciales de partículas que están máximamente entrelazadas:  $ab$  y  $cd$ . Al realizar una medición conjunta en la base de Bell en una partícula de cada par, digamos  $b$  y  $c$ , las otras partículas caen en un estado entrelazado, aunque nunca estuvieron en contacto ni antes ni durante el proceso de medición. Este procedimiento se denomina protocolo de **intercambio de entrelazamiento en su forma estándar**. En el caso de tener estados iniciales parcialmente entrelazados, vimos que al realizar la medición en la base de Bell, los estados resultantes pueden ser máximamente o parcialmente entrelazados, este protocolo lleva por nombre, **intercambio de entrelazamiento probabilista**. En este capítulo se propone una realización del protocolo con dos estados parcialmente entrelazados y una base de medición general<sup>1</sup> con amplitudes reales.

---

<sup>1</sup>Base de medición distinta a la base de estados de Bell utilizadas para el protocolo de intercambio de entrelazamiento estándar o probabilista.

### 3.1. Protocolo de Intercambio de Entrelazamiento

Consideremos el siguiente par de estados iniciales entrelazados diferentes uno del otro,

$$|\phi_{ab}\rangle = \alpha |0_a\rangle |0_b\rangle + \beta |1_a\rangle |1_b\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (3.1.1)$$

$$|\phi_{cd}\rangle = \gamma |0_c\rangle |0_d\rangle + \eta |1_c\rangle |1_d\rangle, \quad |\gamma|^2 + |\eta|^2 = 1 \quad (3.1.2)$$

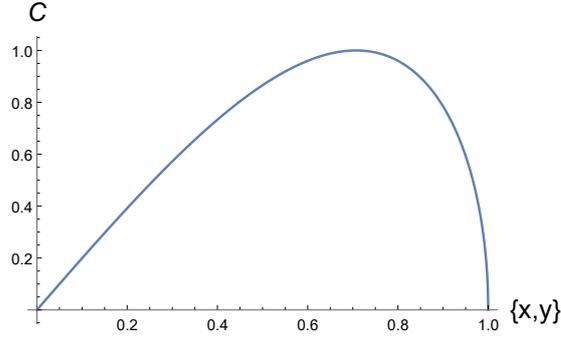
con concurrencias  $C_{ab} = 2|\alpha\beta|$  y  $C_{cd} = 2|\gamma\eta|$  respectivamente. Para encontrar el estado compuesto de nuestro sistema, multiplicamos ambos estados,

$$\begin{aligned} |\phi_{ab}\rangle |\phi_{cd}\rangle &= (\alpha |0_a\rangle |0_b\rangle + \beta |1_a\rangle |1_b\rangle) \otimes (\gamma |0_c\rangle |0_d\rangle + \eta |1_c\rangle |1_d\rangle) \\ &= (\alpha\gamma |0_a\rangle |0_c\rangle |0_b\rangle |0_d\rangle + \alpha\eta |0_a\rangle |1_c\rangle |0_b\rangle |1_d\rangle + \beta\gamma |1_a\rangle |0_c\rangle |1_b\rangle |0_d\rangle \\ &\quad + \beta\eta |1_a\rangle |1_c\rangle |1_b\rangle |1_d\rangle) \end{aligned}$$

Además, consideraremos la siguiente base de medición parcialmente entrelazada,

$$\begin{aligned} |\phi_{bd}^+\rangle &= x |0_b\rangle |0_d\rangle + \sqrt{1-x^2} |1_b\rangle |1_d\rangle, \\ |\phi_{bd}^-\rangle &= \sqrt{1-x^2} |0_b\rangle |0_d\rangle - x |1_b\rangle |1_d\rangle, \\ |\psi_{bd}^+\rangle &= y |0_b\rangle |1_d\rangle + \sqrt{1-y^2} |1_b\rangle |0_d\rangle, \\ |\psi_{bd}^-\rangle &= \sqrt{1-y^2} |0_b\rangle |1_d\rangle - y |1_b\rangle |0_d\rangle. \end{aligned}$$

Aquí se han introducido dos grados independientes de entrelazamiento, caracterizados por las amplitudes reales  $x$  e  $y$  en dos subespacios ortogonales, asociados a las bases:  $\{|0_b\rangle |0_d\rangle, |1_b\rangle |1_d\rangle\}$  y  $\{|0_b\rangle |1_d\rangle, |1_b\rangle |0_d\rangle\}$ . Sus respectivas concurrencias son  $C_{bd}^{\phi^\pm} = 2|x|\sqrt{1-x^2}$  y  $C_{bd}^{\psi^\pm} = 2|y|\sqrt{1-y^2}$ . Las concurrencias  $C_{bd}^{\phi^\pm}$  y  $C_{bd}^{\psi^\pm}$  en principio no son lo mismo, excepto cuando  $|x| = |y|$ .



**Figura 3.1.1:** Gráfico que representa la concurrencia  $C_{bd}^{\phi^{\pm}}$  cuando el eje  $x$  posee la variable  $x$  y  $C_{bd}^{\psi^{\pm}}$  cuando el eje  $x$  posee la variable  $y$ . De aquí podemos ver que ambas concurrencias son cóncavas en  $|x|^2 = |y|^2 = 1/2$ , en donde adquieren el valor de  $C = 1$ .

Podemos escribir nuestro estado compuesto en función de la base de medición,

$$\begin{aligned}
|\phi_{ab}\rangle |\phi_{cd}\rangle &= \sqrt{|\alpha\gamma|^2 x^2 + |\beta\eta|^2 (1-x^2)} \left( \frac{\alpha\gamma x |0_a\rangle |0_c\rangle + \beta\eta\sqrt{1-x^2} |1_a\rangle |1_c\rangle}{\sqrt{|\alpha\gamma|^2 x^2 + |\beta\eta|^2 (1-x^2)}} \right) |\phi_{bd}^+\rangle \\
&+ \sqrt{|\alpha\gamma|^2 (1-x^2) + |\beta\eta|^2 x^2} \left( \frac{\alpha\gamma\sqrt{1-x^2} |0_a\rangle |0_c\rangle - \beta\eta x |1_a\rangle |1_c\rangle}{\sqrt{|\alpha\gamma|^2 (1-x^2) + |\beta\eta|^2 x^2}} \right) |\phi_{bd}^-\rangle \\
&+ \sqrt{|\alpha\eta|^2 y^2 + |\beta\gamma|^2 (1-y^2)} \left( \frac{\alpha\eta y |0_a\rangle |1_c\rangle + \beta\gamma\sqrt{1-y^2} |1_a\rangle |0_c\rangle}{\sqrt{|\alpha\eta|^2 y^2 + |\beta\gamma|^2 (1-y^2)}} \right) |\psi_{bd}^+\rangle \\
&+ \sqrt{|\alpha\eta|^2 (1-y^2) + |\beta\gamma|^2 y^2} \left( \frac{\alpha\eta\sqrt{1-y^2} |0_a\rangle |1_c\rangle - \beta\gamma y |1_a\rangle |0_c\rangle}{\sqrt{|\alpha\eta|^2 (1-y^2) + |\beta\gamma|^2 y^2}} \right) |\psi_{bd}^-\rangle
\end{aligned}$$

Entonces, proyectando sobre nuestra base de medición, los estados y probabilidades resultantes serán,

$$\begin{aligned}
|\phi_{ac}^+\rangle &= \frac{x\alpha\gamma |0_a\rangle |0_c\rangle + \beta\eta\sqrt{1-x^2} |1_a\rangle |1_c\rangle}{\sqrt{x^2|\alpha\gamma|^2 + |\beta\eta|^2 (1-x^2)}}, & p_{ac}^+ &= x^2|\alpha\gamma|^2 + |\beta\eta|^2 (1-x^2), \\
|\phi_{ac}^-\rangle &= \frac{\alpha\gamma\sqrt{1-x^2} |0_a\rangle |0_c\rangle - \beta\eta x |1_a\rangle |1_c\rangle}{\sqrt{|\alpha\gamma|^2 (1-x^2) + x^2|\beta\eta|^2}}, & p_{ac}^- &= |\alpha\gamma|^2 (1-x^2) + x^2|\beta\eta|^2, \\
|\psi_{ac}^+\rangle &= \frac{\alpha\eta y |0_a\rangle |1_c\rangle + \beta\gamma\sqrt{1-y^2} |1_a\rangle |0_c\rangle}{\sqrt{y^2|\alpha\eta|^2 + |\beta\gamma|^2 (1-y^2)}}, & p_{ac}^{\psi^+} &= y^2|\alpha\eta|^2 + |\beta\gamma|^2 (1-y^2), \\
|\psi_{ac}^-\rangle &= \frac{\alpha\eta\sqrt{1-y^2} |0_a\rangle |1_c\rangle - \beta\gamma y |1_a\rangle |0_c\rangle}{\sqrt{|\alpha\eta|^2 (1-y^2) + y^2|\beta\gamma|^2}}. & p_{ac}^{\psi^-} &= |\alpha\eta|^2 (1-y^2) + y^2|\beta\gamma|^2.
\end{aligned}$$

con las siguientes concurrencias

$$C_{ac}^{\phi^+} = \frac{2|\alpha\gamma\beta\eta| |x| \sqrt{1-x^2}}{|\alpha\gamma|^2 x^2 + |\beta\eta|^2 (1-x^2)} \quad (3.1.3)$$

$$C_{ac}^{\phi^-} = \frac{2|\alpha\gamma\beta\eta| |x| \sqrt{1-x^2}}{|\alpha\gamma|^2 (1-x^2) + |\beta\eta|^2 x^2} \quad (3.1.4)$$

$$C_{ac}^{\psi^+} = \frac{2|\alpha\gamma\beta\eta| |y| \sqrt{1-y^2}}{|\alpha\eta|^2 y^2 + |\beta\gamma|^2 (1-y^2)} \quad (3.1.5)$$

$$C_{ac}^{\psi^-} = \frac{2|\alpha\gamma\beta\eta| |y| \sqrt{1-y^2}}{|\alpha\eta|^2 (1-y^2) + |\beta\gamma|^2 y^2} \quad (3.1.6)$$

### 3.1.1. Intercambio de Entrelazamiento Determinista

Al imponer que todas las concurrencias de las salidas sean iguales, podemos convertir el protocolo de intercambio de entrelazamiento en uno totalmente determinista. El primer enfoque es la comparación de concurrencias por pares, para ello comparamos 3.1.3 con 3.1.4 y la concurrencia 3.1.5 con 3.1.6. El primer y segundo par nos entrega las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} C_{ac}^{\phi^+} &= C_{ac}^{\phi^-} \\ \Rightarrow x &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \vee |\alpha|^2 |\gamma|^2 = |\beta|^2 |\eta|^2 \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

y,

$$\begin{aligned} C_{ac}^{\psi^+} &= C_{ac}^{\psi^-} \\ \Rightarrow y &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \vee |\alpha|^2 |\eta|^2 = |\beta|^2 |\gamma|^2 \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Si queremos realizar un protocolo determinista, necesitamos que las cuatro concurrencias sean iguales, es decir, debemos emplear combinaciones de lo obtenido en 3.1.7 y 3.1.8, con esto, observamos que cuando se trabaja con condiciones que implican amplitudes iniciales (es decir,  $|\alpha\gamma| = |\beta\eta|$  y  $|\alpha\eta| = |\beta\gamma|$ ), las restricciones que surgen cuando pedimos que las cuatro concurrencias sean iguales son problemáticas a la hora de realizar un análisis gráfico, ya que todas las restricciones mezclan las variables  $x$  e  $y$  que corresponden a las amplitudes de los estados de medición, cada una asociada a un par de estados ortogonales entre sí ( $\{|00\rangle, |11\rangle\}$  y  $\{|01\rangle, |10\rangle\}$ ), es decir surge un problema relacionado con el

subespacio en el que viven los coeficientes. De aquí en adelante ignoraremos ese tipo de condiciones, entonces la igualdad de las cuatro concurrencias se puede lograr en tres situaciones diferentes:

- **Caso 1:** Cuando  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ .
- **Caso 2:** Cuando  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $|\alpha|^2|\eta|^2 = |\beta|^2|\gamma|^2$ .
- **Caso 3:** Cuando  $|\alpha|^2|\gamma|^2 = |\beta|^2|\eta|^2$  y  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Es importante mencionar que en cada caso conseguimos una probabilidad igual a la unidad, pues estamos analizando una situación completamente determinista.

### 3.1.1.1. Caso 1: $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Analicemos el caso:  $\left[ C_{ac}^{\phi^\pm} \right]_{x=\pm \frac{1}{\sqrt{2}}} = \left[ C_{ac}^{\psi^\pm} \right]_{y=\pm \frac{1}{\sqrt{2}}}$ , esto significa que todos los estados que componen la base de medición son estados de Bell. También tenemos que,

$$\begin{aligned} \left[ C_{ac}^{\phi^\pm} \right]_{x=\pm \frac{1}{\sqrt{2}}} &= \left[ C_{ac}^{\psi^\pm} \right]_{y=\pm \frac{1}{\sqrt{2}}} \\ \frac{2|\alpha\gamma\beta\eta|}{|\alpha\gamma|^4 + |\beta\eta|^4} &= \frac{2|\alpha\gamma\beta\eta|}{|\alpha\eta|^4 + |\beta\gamma|^4} \\ \Rightarrow |\alpha|^2 &= |\beta|^2 \vee |\gamma|^2 = |\eta|^2 \end{aligned}$$

Así que, en resumen, si utilizamos una base de medición de Bell y uno de los dos estados iniciales también está en un estado de Bell, entonces obtendremos un intercambio de entrelazamiento determinista con cuatro concurrencias iguales para los estados de salida. En este caso, la concurrencia para los cuatro estados de salida es,

$$\begin{aligned} C_{ac}^{\phi^\pm} = C_{ac}^{\psi^\pm} &= \left[ \frac{2\sqrt{(\alpha\gamma\beta\eta) \cdot (\alpha\gamma\beta\eta)^*}}{(\alpha\gamma)(\alpha\gamma)^* + (\beta\eta)(\beta\eta)^*} \right]_{|\alpha|^2=|\beta|^2} \\ &= \frac{2|\alpha|^2|\gamma\eta|}{|\alpha|^2(|\gamma|^2 + |\eta|^2)}, \text{ con } |\gamma|^2 + |\eta|^2 = 1 \\ &= 2|\gamma|\sqrt{1 - |\gamma|^2} \end{aligned}$$

esto corresponde a la concurrencia inicial del par de partículas  $cd$ , pues la concurrencia inicial del estado de Bell, asociado al par  $ab$  será 1. Si hubiéramos

sustituido la otra condición para que las cuatro concurrencias fueran iguales ( $|\gamma|^2 = |\eta|^2$ ), entonces obtendríamos la misma concurrencia inicial del par de partículas  $ab$  y una concurrencia de 1 para el par inicial  $cd$ .

Con estos resultados, vemos que esta situación implica grandes restricciones al protocolo en general, pues para que se cumpla el determinismo necesitamos que toda la base de medición y al menos uno de los estados iniciales sea un estado de Bell. Con todo esto, el estado de salida tendrá la misma concurrencia del estado inicial parcialmente entrelazado, es decir, que el protocolo no posee ganancia de entrelazamiento.

### 3.1.1.2. Caso 2: $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge |\alpha|^2 |\eta|^2 = |\beta|^2 |\gamma|^2$

En este caso, consideramos que dos de los estados de la base de medición son un estado de Bell (pues,  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ) y además la siguiente restricción,

$$\begin{aligned} |\alpha\eta|^2 &= |\beta\gamma|^2 \text{ para } C_{ac}^{\psi^+} = C_{ac}^{\psi^-} \\ |\alpha\eta| &= |\beta\gamma| \Rightarrow |\alpha| = \frac{|\beta\gamma|}{|\eta|} \end{aligned}$$

Con la restricción de las amplitudes de los estados iniciales, podemos ver que los estados asociados a cada par de partículas poseen la misma concurrencia, pues

$$\begin{aligned} |\phi_{ab}\rangle &= \frac{\beta\gamma}{\eta} |0_a\rangle |0_b\rangle + \beta |1_a\rangle |1_b\rangle, \text{ normalizando tenemos,} \\ &= \sqrt{\left|\frac{\beta\gamma}{\eta}\right|^2 + |\beta|^2} \frac{\left(\frac{\beta\gamma}{\eta} |0_a\rangle |0_b\rangle + \beta |1_a\rangle |1_b\rangle\right)}{\sqrt{\left|\frac{\beta\gamma}{\eta}\right|^2 + |\beta|^2}} \\ &= \sqrt{\left|\frac{\beta\gamma}{\eta}\right|^2 + |\beta|^2} (\gamma |0_a\rangle |0_b\rangle + \eta |1_a\rangle |1_b\rangle) \\ |\phi_{cd}\rangle &= \gamma |0_c\rangle |0_d\rangle + \eta |1_c\rangle |1_d\rangle, \quad |\gamma|^2 + |\eta|^2 = 1. \end{aligned}$$

con estos estados, las concurrencias iniciales son:

$$C_{ab} = 2 |\gamma\eta| = 2 |\gamma| \sqrt{1 - |\gamma|^2} = C_{cd} \quad (3.1.9)$$

Vamos a calcular las condiciones que surgen de la siguiente igualdad  $\left[ C_{ac}^{\phi^\pm} \right]_{x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left[ C_{ac}^{\psi^\pm} \right]_{|\alpha\eta|^2=|\beta\gamma|^2}$  para que las cuatro concurrencias finales sean iguales,

$$\begin{aligned} \left[ C_{ac}^{\phi^\pm} \right]_{x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}} &= \left[ C_{ac}^{\psi^\pm} \right]_{|\alpha\eta|^2=|\beta\gamma|^2} \\ \left[ \frac{2|\alpha\gamma\beta\eta| |x| \sqrt{1-x^2}}{|\alpha\gamma|^2 x^2 + |\beta\eta|^2 (1-x^2)} \right]_{x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}} &= \left[ \frac{2|\alpha\gamma\beta\eta| |y| \sqrt{1-y^2}}{|\alpha\eta|^2 y^2 + |\beta\gamma|^2 (1-y^2)} \right]_{|\alpha\eta|^2=|\beta\gamma|^2} \\ \Rightarrow y = \pm \frac{|\alpha\gamma|}{\sqrt{|\alpha\gamma|^2 + |\beta\eta|^2}} \vee y = \pm \frac{|\beta\eta|}{\sqrt{|\alpha\gamma|^2 + |\beta\eta|^2}} \end{aligned}$$

Con la nueva restricción obtenida y recordando que se cumple lo siguiente  $|\alpha\eta|^2 = |\beta\gamma|^2$  para las amplitudes iniciales<sup>2</sup>, la concurrencia para las cuatro salidas tendrá la siguiente forma:

$$C_{ac}^{\phi^\pm} = C_{ac}^{\psi^\pm} = \frac{2|\gamma|^2 |\eta|^2}{|\eta|^4 + |\gamma|^4} = \frac{2|\gamma|^2 (1-|\gamma|^2)}{(1-|\gamma|^2)^2 + |\gamma|^4}$$

### 3.1.1.3. Caso 3: $|\alpha|^2 |\gamma|^2 = |\beta|^2 |\eta|^2 \wedge y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

En este caso, tal como ocurrió en el **Caso 2**, estamos considerando que dos de los cuatro estados de la base de medición sean estados de Bell (pues  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ), junto con la siguiente restricción,

$$\begin{aligned} |\alpha\gamma|^2 &= |\beta\eta|^2 \text{ para } C_{ac}^{\phi^+} = C_{ac}^{\phi^-} \\ |\alpha\gamma| &= |\beta\eta| \Rightarrow |\alpha| = \frac{|\beta\eta|}{|\gamma|} \end{aligned}$$

tal como ocurre en el caso anterior, las concurrencias de los estados iniciales son iguales y tienen el siguiente valor

$$C_{ab} = 2|\gamma\eta| = 2|\gamma| \sqrt{1-|\gamma|^2} = C_{cd}$$

<sup>2</sup>Como es una restricción asociada a las amplitudes iniciales, afecta a las cuatro concurrencias de salida.

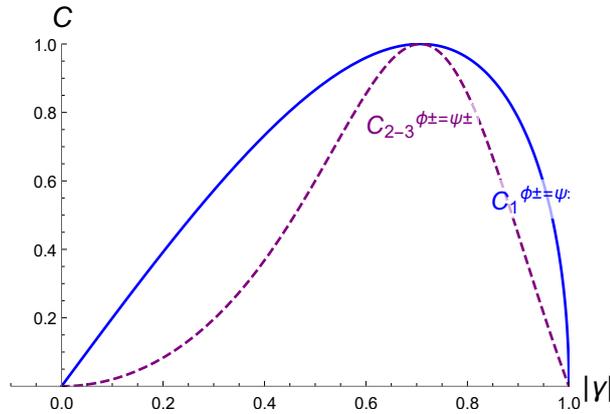
Calculemos las restricciones que surgen de la siguiente condición  $\left[ C_{ac}^{\phi^\pm} \right]_{|\alpha\gamma|^2=|\beta\eta|^2} = \left[ C_{ac}^{\psi^\pm} \right]_{y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$  para que las cuatro concurrencias sean iguales,

$$\begin{aligned} \left[ C_{ac}^{\phi^\pm} \right]_{|\alpha\gamma|^2=|\beta\eta|^2} &= \left[ C_{ac}^{\psi^\pm} \right]_{y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ \left[ \frac{2|\alpha\gamma\beta\eta| |x| \sqrt{1-x^2}}{|\alpha\gamma|^2 x^2 + (\beta\eta) |\beta\eta|^2 (1-x^2)} \right]_{|\alpha\gamma|^2=|\beta\eta|^2} &= \left[ \frac{2|\alpha\gamma\beta\eta| |y| \sqrt{1-y^2}}{|\alpha\eta|^2 y^2 + \beta\gamma|^2 (1-y^2)} \right]_{y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ \Rightarrow x = \pm \frac{|\beta\gamma|}{\sqrt{|\beta\gamma|^2 + |\alpha\eta|^2}} \vee x = \pm \frac{|\alpha\eta|}{\sqrt{|\beta\gamma|^2 + |\alpha\eta|^2}} \end{aligned}$$

esta restricción, junto con la condición de las amplitudes iniciales:  $|\alpha|^2|\gamma|^2 = |\beta|^2|\eta|^2$ , produce que la concurrencia para los cuatro estados de salida tome la siguiente forma,

$$C_{ac}^{\phi^\pm} = C_{ac}^{\psi^\pm} = \frac{2|\gamma|^2|\eta|^2}{|\gamma|^4 + |\eta|^4}$$

Como se puede ver en la figura 3.1.2, para el **Caso 1** la concurrencia final es la misma que la concurrencia de uno de los estados iniciales (recordemos que el otro estado inicial correspondía a un estado de Bell con concurrencia 1). Por otro lado, el **Caso 2** y **Caso 3** tienen la misma concurrencia, ligeramente por debajo de la concurrencia inicial, excepto cuando  $|\gamma| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .



**Figura 3.1.2:** Gráfico para la concurrencia de cada caso en el protocolo de intercambio de entrelazamiento totalmente determinista.  $C_1$  y  $C_{2-3}$  representan la concurrencia del **Caso 1**, **Caso 2** y **Caso 3** respectivamente. La concurrencia del **Caso 2** y **Caso 3** es la misma.

Como podemos ver de la figura anterior, ninguno de los casos supera la concurrencia inicial, pero podemos imponer un umbral de concurrencia que consideremos adecuado. Por ejemplo,  $C > 0,75$  se cumple para el **Caso 1** cuando  $0,41 < |\gamma| < 0,91$ , por otro lado, para el **Caso 2** y **Caso 3** cuando  $0,55769 < |\gamma| < 0,83005$ .

### 3.1.2. Intercambio de Entrelazamiento Parcialmente Determinista

Debido a la gran cantidad de restricciones que surgen al momento de pedirle al problema una salida completamente determinista, esto junto con la pérdida de entrelazamiento que produce el protocolo, estudiaremos un caso con más grados de libertad y veremos si es posible obtener una ganancia, esto con el costo de tener un intercambio de entrelazamiento parcialmente determinista y por ende un coste en la probabilidad asociada. Para ello analizaremos dos posibilidades, un intercambio de entrelazamiento con tres salidas con igual concurrencia y uno con dos salidas deterministas.

#### 3.1.2.1. Tres Concurrencias Iguales (Caso A: $C_{ac}^{\phi^\pm} = C_{ac}^{\psi^+}$ )

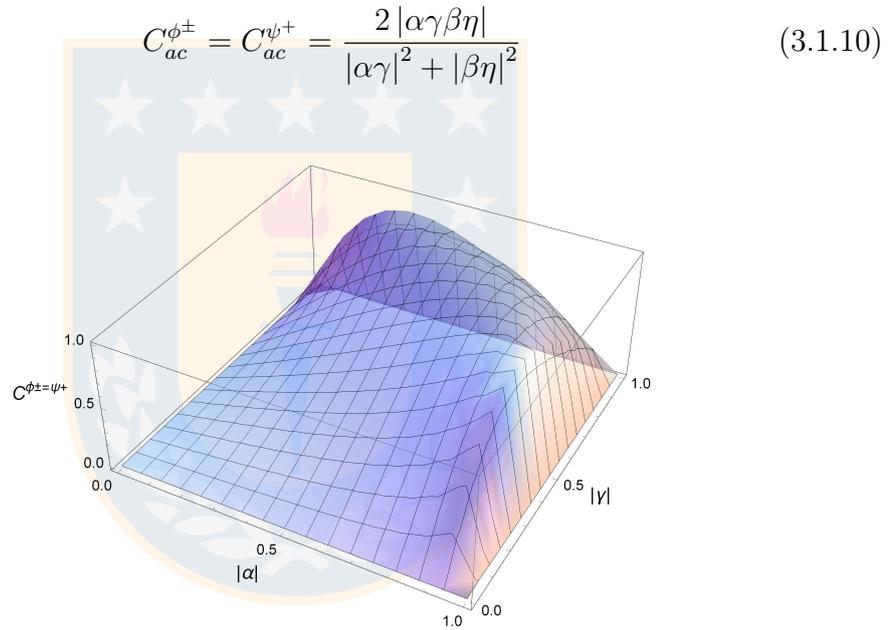
Consideramos dos posibles combinaciones de tríos: **Caso A** en la que  $C_{ac}^{\phi^\pm} = C_{ac}^{\psi^+}$  y **Caso B** en la que  $C_{ac}^{\psi^\pm} = C_{ac}^{\phi^+}$ . Se puede establecer una relación entre los resultados de estas tríadas con las otras dos posibilidades  $C_{ac}^{\phi^\pm} = C_{ac}^{\psi^-}$  y  $C_{ac}^{\psi^\pm} = C_{ac}^{\phi^-}$ , en función de las restricciones elegidas a la hora de emparejar las concurrencias (esto se puede entender porque para establecer la relación entre las tríadas primero realizamos una comparación por pares, que coinciden para cada caso, ya que en un caso elegimos el par  $C_{ac}^{\phi^\pm}$  y en el otro caso elegimos el par  $C_{ac}^{\psi^\pm}$ ). Así, por simplicidad analizamos en profundidad sólo el **Caso A** y el **Caso B**, ya que incluyen los cuatro casos posibles de coincidencia para las tríadas.

Un punto importante a considerar es que en cada trío se seleccionó el primer caso que se analizó anteriormente (3.1.7 y 3.1.8), con esto nos referimos a la elección de  $x, y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ , esto debido a que cuando trabajamos con los casos donde imponemos condiciones a las amplitudes iniciales (es decir,  $|\alpha\gamma| = |\beta\eta|$  y  $|\alpha\eta| = |\beta\gamma|$ ) recuperamos el problema del subespacio (las restricciones resultantes mezclan las amplitudes de subespacios diferentes y ortogonales) que mencionamos cuando estudiamos la situación completamente determinista.

Comenzamos analizando el **Caso A**, para ello, consideramos:  $\left[ C_{ac}^{\phi^\pm} \right]_{x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}} = C_{ac}^{\psi^+}$ , a partir de esta igualdad surgen las siguientes restricciones,

$$\left[ C_{ac}^{\phi^\pm} \right]_{x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}} = C_{ac}^{\psi^+} \Rightarrow y = \pm \frac{|\beta|^2}{\sqrt{|a|^4 + |\beta|^4}} \vee y = \pm \frac{|\gamma|^2}{\sqrt{|\gamma|^4 + |\eta|^4}}$$

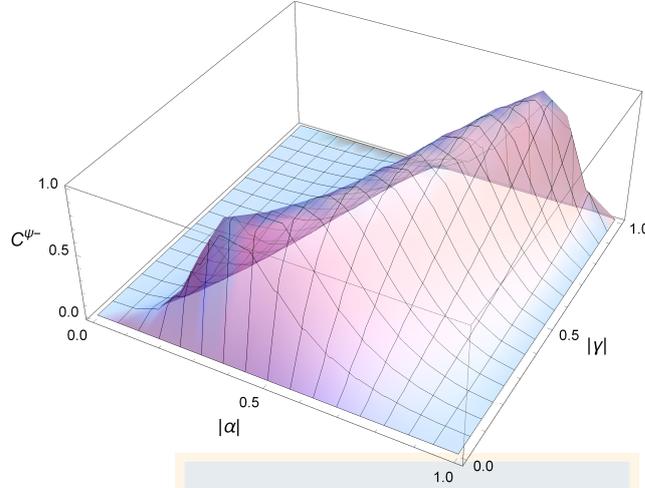
Considerando ambas condiciones, la concurrencia del resultado después de realizar el *matching* de la tríada se muestra en la figura 3.1.3 y en la siguiente expresión,



**Figura 3.1.3:** Superficie que representa la concurrencia del **Caso A**, es decir:  $C_{ac}^{\phi^\pm} = C_{ac}^{\psi^+} = \frac{2|\alpha\gamma\beta\eta|}{|\alpha\gamma|^2 + |\beta\eta|^2}$ .

Por otro lado, si sustituimos en el otro resultado de concurrencia posible  $C_{ac}^{\psi^-}$  el valor obtenido para  $y$  obtenemos lo siguiente,

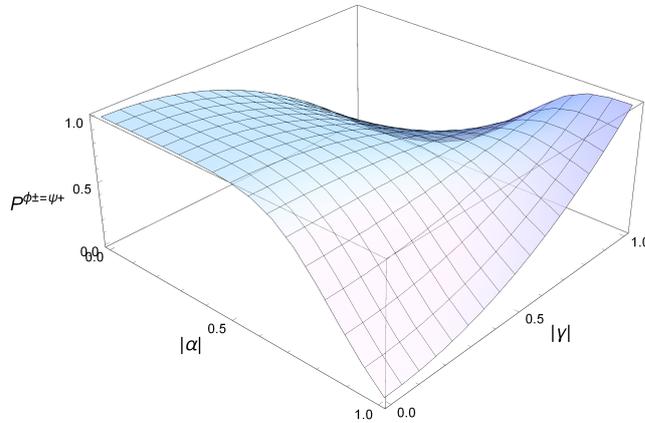
$$\begin{aligned} \left[ C_{ac}^{\psi^-} \right]_{y=\pm\frac{|\beta|^2}{\sqrt{|a|^4 + |\beta|^4}}} &= \left[ \frac{2\sqrt{(\alpha\gamma\beta\eta) \cdot (\alpha\gamma\beta\eta)^*} |y| \sqrt{1-y^2}}{(\alpha\eta)(\alpha\eta)^* (1-y^2) + (\beta\gamma)(\beta\gamma)^* y^2} \right]_{y=\pm\frac{|\beta|^2}{\sqrt{|a|^4 + |\beta|^4}}} \\ &= \frac{2|\gamma\eta| |\alpha\beta|^3}{|\eta|^2 |\alpha|^6 + |\gamma|^2 |\beta|^6} \end{aligned}$$



**Figura 3.1.4:** Superficie que representa la concurrencia de la salida que es diferente a la tríada del **Caso A**, es decir:  $C_{ac}^{\psi^-} = \frac{2|\gamma\eta||\alpha\beta|^3}{|\eta|^2|\alpha|^6 + |\gamma|^2|\beta|^6}$ .

Si sumamos todas las probabilidades asociadas a las concurrencias que son iguales del **Caso A** ( $C_{ac}^{\phi^+} = C_{ac}^{\phi^-} = C_{ac}^{\psi^+}$ ) obtenemos la siguiente distribución,

$$\begin{aligned}
 p_{ac}^{\phi^\pm = \psi^+} &= ((|\alpha\gamma|^2 x^2 + |\beta\eta|^2 (1 - x^2)) + (|\alpha\gamma|^2 (1 - x^2) + |\beta\eta|^2 x^2) \\
 &+ (|\alpha\eta|^2 y^2 + |\beta\gamma|^2 (1 - y^2))) \\
 &= \frac{|\gamma|^2 |\alpha|^4 + |\alpha|^2 (1 - |\alpha|^2)^2 + (1 - |\alpha\gamma|^2) (1 - |\alpha|^2) (|\alpha|^4 + (1 - |\alpha|^2)^2)}{|\alpha|^4 + (1 - |\alpha|^2)^2}
 \end{aligned} \tag{3.1.11}$$



**Figura 3.1.5:** Superficie que representa la distribución de probabilidad del **Caso A**, es decir:  $p_{ac}^{\phi^\pm = \psi^+}$ .

Por otro lado, la expresión para la probabilidad del otro resultado posible es,

$$\begin{aligned} p_{ac}^{\psi^-} &= |\alpha\eta|^2 (1 - y^2) + |\beta\gamma|^2 y^2 \\ &= \frac{(1 - |\gamma|^2) |\alpha|^6 + |\gamma|^2 (1 - |\alpha|^2)^3}{|\alpha|^4 + (1 - |\alpha|^2)^2} \end{aligned}$$

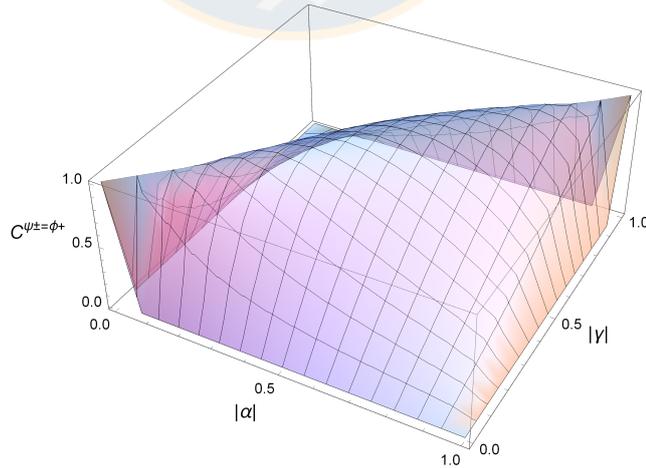
### 3.1.2.2. Tres Concurrencias Iguales (Caso B: $C_{ac}^{\psi^\pm} = C_{ac}^{\phi^+}$ )

Ahora estudiaremos lo que ocurre cuando se cumple la siguiente igualdad de concurrencias:  $C_{ac}^{\psi^\pm} = C_{ac}^{\phi^+}$ , para ello emplearemos la primera solución obtenida en 3.1.8 cuando igualamos los pares de concurrencia, es decir:  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$C_{ac}^{\phi^+} = \left[ C_{ac}^{\psi^\pm} \right]_{y=\pm \frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow x = \pm \frac{|\beta|^2}{\sqrt{|\alpha|^4 + |\beta|^4}} \vee x = \pm \frac{|\eta|^2}{\sqrt{|\gamma|^4 + |\eta|^4}}$$

si sustituimos los valores anteriores obtenemos el valor correspondiente para las tres concurrencias:

$$C_{ac}^{\psi^\pm} = C_{ac}^{\phi^+} = \frac{2 |\alpha\gamma\beta\eta|}{|\alpha\eta|^2 + |\beta\gamma|^2} \quad (3.1.12)$$

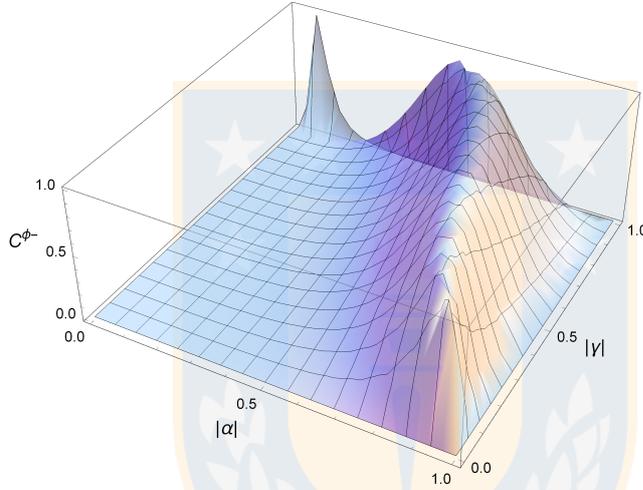


**Figura 3.1.6:** Superficie que representa la concurrencia de la tríada del **Caso B**.

Por otro lado, la expresión de la concurrencia para la salida que es diferente a la

tríada del **Caso B**, viene dada por:

$$\begin{aligned} \left[ C_{ac}^{\phi^-} \right]_{x=\pm \frac{|\beta|^2}{\sqrt{|\alpha|^4+|\beta|^4}}} &= \left[ \frac{2\sqrt{(\alpha\gamma\beta\eta) \cdot (\alpha\gamma\beta\eta)^*} |x| \sqrt{1-x^2}}{(\alpha\gamma)(\alpha\gamma)^*(1-x^2) + (\beta\eta)(\beta\eta)^*x^2} \right]_{x=\pm \frac{|\beta|^2}{\sqrt{|\alpha|^4+|\beta|^4}}} \\ &= \frac{2|\gamma\eta| |\alpha\beta|^3}{|\gamma|^2 |\alpha|^6 + |\eta|^2 |\beta|^6} \end{aligned}$$

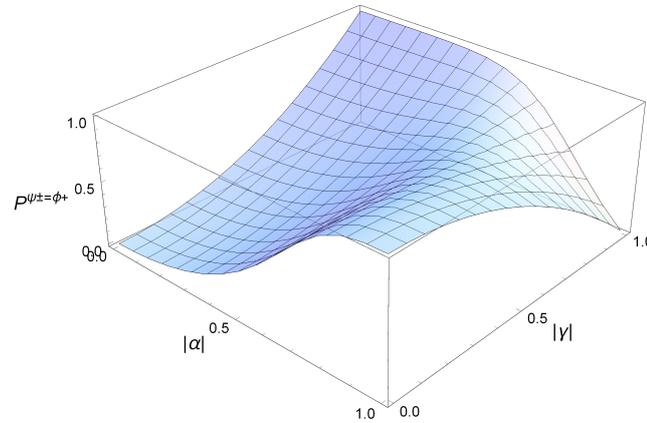


**Figura 3.1.7:** Superficie que representa la concurrencia de la salida que es diferente a la tríada del **Caso B**.

Hasta aquí podemos ver que el resultado obtenido es muy similar al **Caso A**, pero con  $\gamma$  y  $\eta$  intercambiados en el denominador, así como en las restricciones sobre  $x$  e  $y$  dependiendo del caso.

Si sumamos todas las probabilidades asociadas a las concurrencias que son iguales en el **Caso B**, obtenemos (considerando,  $x = \pm \frac{|\beta|^2}{\sqrt{|\alpha|^4+|\beta|^4}}$  e  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ )

$$\begin{aligned} p_{ac}^{\psi^\pm=\phi^+} &= (|\alpha\eta|^2 y^2 + |\beta\gamma|^2 (1-y^2) + |\alpha\eta|^2 (1-y^2) + |\beta\gamma|^2 y^2 + |\alpha\gamma|^2 x^2 \\ &\quad + |\beta\eta|^2 (1-x^2)) \\ &= \frac{\left( |\alpha\gamma|^2 (1-|\alpha|^2)^2 + (1-|\gamma|^2) |\alpha|^6 + |\alpha|^2 (1-|\gamma|^2) (1-|\alpha|^2)^2 \right. \\ &\quad \left. + |\gamma|^2 |\alpha|^4 (1-|\alpha|^2) + |\gamma|^2 (1-|\alpha|^2)^3 + |\alpha|^4 (1-|\alpha|^2) (1-|\gamma|^2) \right)}{|\alpha|^4 + (1-|\alpha|^2)^2} \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

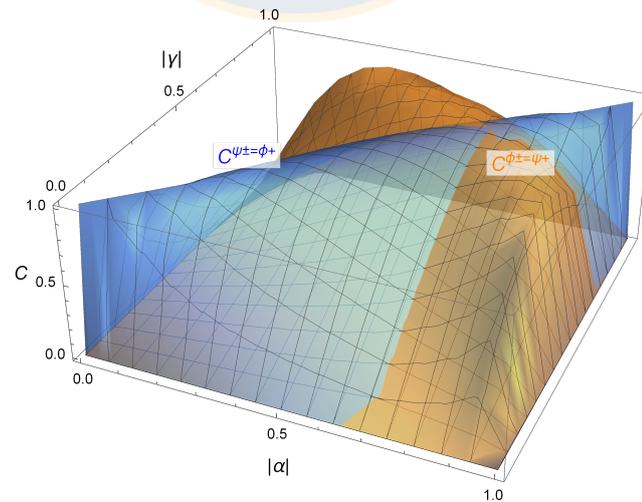


**Figura 3.1.8:** Superficie que representa la distribución de probabilidad del **Caso B**, es decir:  $p_{ac}^{\psi^{\pm}=\phi^{\pm}}$ .

por otro lado,

$$\begin{aligned} p_{ac}^{\phi^-} &= |\alpha\gamma|^2 (1 - x^2) + |\beta\eta|^2 x^2 \\ &= \frac{|\alpha\gamma|^2 |\alpha|^4 + (1 - |\alpha|^2)^3 (1 - |\gamma|^2)}{|\alpha|^4 + |\beta|^4} \end{aligned}$$

Finalmente, en la siguiente imagen podemos ver como se comportan ambas superficies de concurrencia para diferentes valores de  $|\alpha|$  y  $|\gamma|$ ,



**Figura 3.1.9:** Superficie que ayuda a comparar los comportamientos de la concurrencia para el **Caso A** (color naranja) y **Caso B** (color azul).

Tal como hicimos para el caso completamente determinista veremos si el protocolo parcialmente determinista con tres concurrencias iguales es óptimo o no, para

ello podemos comparar con un valor que estimemos conveniente como umbral de concurrencia, en el caso determinista empleamos un valor de 0.75, pues en dicho caso no se lograba superar la concurrencia inicial. En el caso parcialmente determinista, primero que todo, debemos analizar y estudiar la posibilidad de una concurrencia final superior a la inicial. Cuando la concurrencia de las tríadas supera las concurrencias iniciales, significa que a través del protocolo de intercambio, aumentamos la cantidad de entrelazamiento que teníamos al principio; si es el caso que este evento tiene una alta probabilidad, estos resultados podrían tener más impacto y en este tipo de situaciones decimos que el protocolo es óptimo.

Tenemos tres situaciones posibles, **Caso II** cuando  $C_{ac}^k > C_{ab}$ , **Caso  $\Omega$**  cuando  $C_{ac}^k > C_{cd}$  y por último **Caso  $\Gamma$**  cuando se satisfacen simultáneamente las dos condiciones anteriores<sup>3</sup>, es decir,  $C_{ac}^k > (C_{ab} \wedge C_{cd})$ .

- La primera condición que analizamos es el **Caso II** para los dos tríos (**Caso A** y **Caso B**), es decir cuando:  $C_{ac}^{\phi^\pm} = C_{ac}^{\psi^+} > C_{ab}$  y  $C_{ac}^{\psi^\pm} = C_{ac}^{\phi^+} > C_{ab}$ <sup>4</sup>. Para el **Caso A** tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 C_{ac}^{\phi^\pm} = C_{ac}^{\psi^+} &> C_{ab} \\
 \frac{2|\alpha\gamma\beta\eta|}{|\alpha\gamma|^2 + |\beta\eta|^2} &> 2|\alpha|\sqrt{1-|\alpha|^2} \\
 \Rightarrow 0 < |\alpha| < \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge \frac{1}{\sqrt{2}} < |\gamma| < \sqrt{\frac{1-2|\alpha|^2+|\alpha|^4}{1-2|\alpha|^2+2|\alpha|^4}} & (3.1.14)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < |\alpha| < 1 \wedge \sqrt{\frac{1-2|\alpha|^2+|\alpha|^4}{1-2|\alpha|^2+2|\alpha|^4}} < |\gamma| < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.1.15)$$

<sup>3</sup>La variable  $k$  corresponde a las dos posibles combinaciones de tríadas, es decir:  $\phi^\pm = \psi^+$  y  $\psi^\pm = \phi^+$ .

<sup>4</sup>Las concurrencias iniciales poseen la siguiente forma:

$$C_{ab} = 2|\alpha|\sqrt{1-|\alpha|^2}, \quad C_{cd} = 2|\gamma|\sqrt{1-|\gamma|^2}$$

Para el **Caso B**,

$$C_{ac}^{\psi^\pm} = C_{ac}^{\phi^+} > C_{ab}$$

$$\frac{2|\alpha\gamma\beta\eta|}{|\alpha\eta|^2 + |\beta\gamma|^2} > 2|\alpha|\sqrt{1-|\alpha|^2}$$

$$\Rightarrow 0 < |\alpha| < \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge \sqrt{\frac{|\alpha|^4}{1-2|\alpha|^2+2|\alpha|^4}} < |\gamma| < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.1.16)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < |\alpha| < 1 \wedge \frac{1}{\sqrt{2}} < |\gamma| < \sqrt{\frac{|\alpha|^4}{1-2|\alpha|^2+2|\alpha|^4}} \quad (3.1.17)$$

- Para la segunda condición o **Caso  $\Omega$** , analizamos nuevamente ambos tríos, es decir:  $C_{ac}^{\phi^\pm} = C_{ac}^{\psi^+} > C_{cd}$  y  $C_{ac}^{\psi^\pm} = C_{ac}^{\phi^+} > C_{cd}$ . Para el **Caso A**,

$$C_{ac}^{\phi^\pm} = C_{ac}^{\psi^+} > C_{cd}$$

$$\frac{2|\alpha\gamma\beta\eta|}{|\alpha\gamma|^2 + |\beta\eta|^2} > 2|\gamma|\sqrt{1-|\gamma|^2}$$

$$\Rightarrow 0 < |\gamma| < \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge \frac{1}{\sqrt{2}} < |\alpha| < \sqrt{\frac{1-2|\gamma|^2+|\gamma|^4}{1-2|\gamma|^2+2|\gamma|^4}} \quad (3.1.18)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < |\gamma| < 1 \wedge \sqrt{\frac{1-2|\gamma|^2+|\gamma|^4}{1-2|\gamma|^2+2|\gamma|^4}} < |\alpha| < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.1.19)$$

Para el **Caso B**,

$$C_{ac}^{\psi^\pm} = C_{ac}^{\phi^+} > C_{cd}$$

$$\frac{2|\alpha\gamma\beta\eta|}{|\alpha\eta|^2 + |\beta\gamma|^2} > 2|\gamma|\sqrt{1-|\gamma|^2}$$

$$\Rightarrow 0 < |\gamma| < \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge \sqrt{\frac{|\gamma|^4}{1-2|\gamma|^2+2|\gamma|^4}} < |\alpha| < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.1.20)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < |\gamma| < 1 \wedge \frac{1}{\sqrt{2}} < |\alpha| < \sqrt{\frac{|\gamma|^4}{1-2|\gamma|^2+2|\gamma|^4}} \quad (3.1.21)$$

- Para la tercera condición o **Caso  $\Gamma$** , estudiamos ambos casos:  $C_{ac}^{\phi^\pm} = C_{ac}^{\psi^+} > (C_{ab} \wedge C_{cd})$  y  $C_{ac}^{\psi^\pm} = C_{ac}^{\phi^+} > (C_{ab} \wedge C_{cd})$ , comenzando por el **Caso A**,

$$\left( 0 < c < \frac{1}{\sqrt{2}} \ \&\& \ \text{Root}[-1 + c^2 + (2 - 2c^2)\sqrt{1^2 + (-1 + 2c^2)\sqrt{1^4}}, 3] < a < \sqrt{\frac{1 - 2c^2 + c^4}{1 - 2c^2 + 2c^4}} \right) \parallel$$

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2}} < c < 1 \ \&\& \ \sqrt{\frac{1 - 2c^2 + c^4}{1 - 2c^2 + 2c^4}} < a < \text{Root}[-1 + c^2 + (2 - 2c^2)\sqrt{1^2 + (-1 + 2c^2)\sqrt{1^4}}, 2] \right)$$

**Figura 3.1.10:** Solución otorgada por el software *Wolfram Mathematica* para el **Caso A**, en donde  $a = \alpha$  y  $c = \gamma$ .

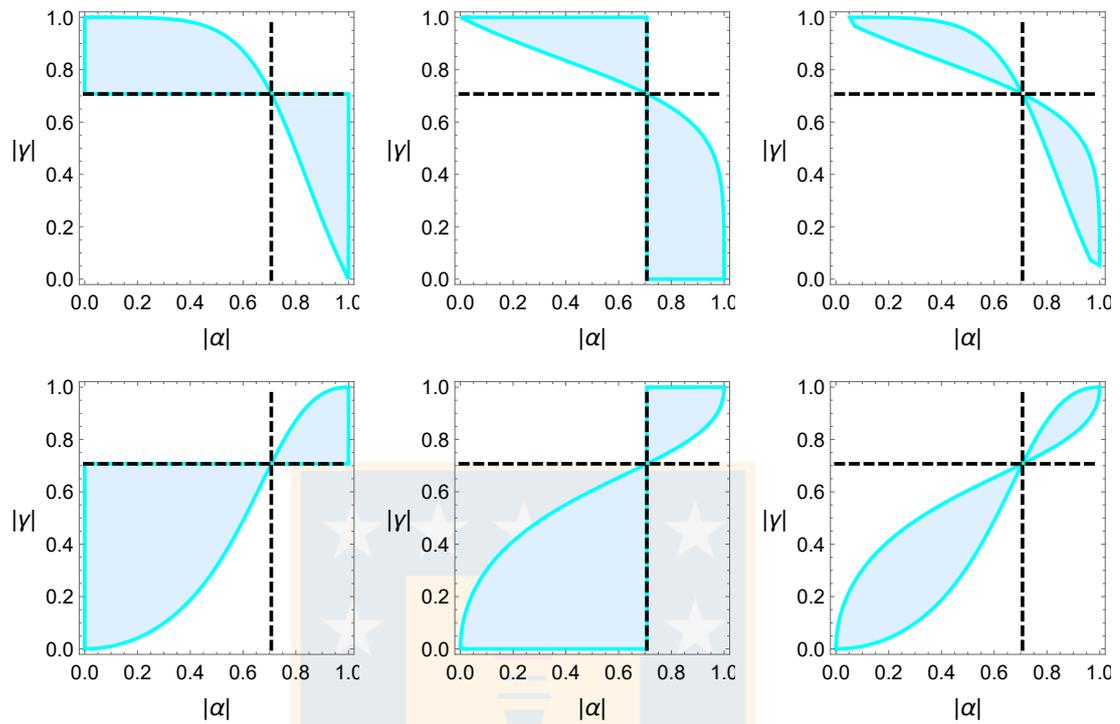
Para el caso **Caso B**,

$$\left( 0 < c < \frac{1}{\sqrt{2}} \ \&\& \ \sqrt{\frac{c^4}{1 - 2c^2 + 2c^4}} < a < \text{Root}[c^2 - 2c^2\sqrt{1^2 + (-1 + 2c^2)\sqrt{1^4}}, 2] \right) \parallel$$

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2}} < c < 1 \ \&\& \ \text{Root}[c^2 - 2c^2\sqrt{1^2 + (-1 + 2c^2)\sqrt{1^4}}, 3] < a < \sqrt{\frac{c^4}{1 - 2c^2 + 2c^4}} \right)$$

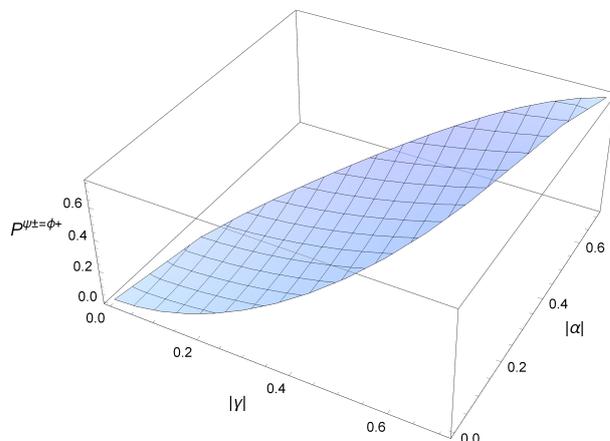
**Figura 3.1.11:** Solución otorgada por el software *Wolfram Mathematica* para el **Caso B**, en donde  $a = \alpha$  y  $c = \gamma$ .

Ahora, para comparar las tres condiciones anteriores y sus efectos sobre los posibles valores de  $|\alpha|$  y  $|\gamma|$ , en la figura 3.1.12 vemos las regiones de solución, las cuales encontramos estudiando los tríos del **Caso A** y **Caso B**,



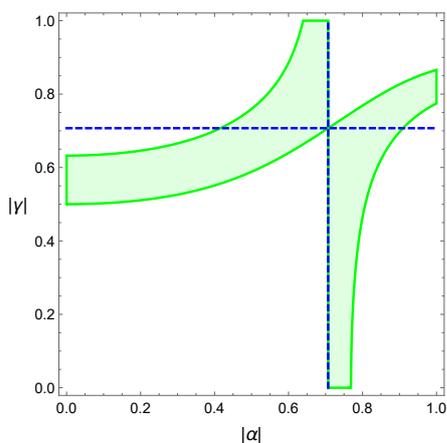
**Figura 3.1.12:** Región de solución para: **Caso II** (Izquierda), **Caso  $\Omega$**  (Medio) y **Caso  $\Gamma$**  (Derecha). Los tres gráficos superiores e inferiores son para el **Caso A**, y **Caso B** respectivamente. La línea negra discontinua muestra los valores  $|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $|\gamma| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Una vez estudiado cada caso, podemos ver que sí es posible obtener valores de  $|\alpha|$  y  $|\gamma|$  para los cuales se logra superar la concurrencia inicial. Pero aún queda estudiar lo que ocurre con la probabilidad asociada a nuestras salidas. Si reemplazamos los rangos obtenidos (para los cuales se supera la concurrencia inicial) en las distribuciones de probabilidad calculadas anteriormente y mostradas en las ecuaciones 3.1.11 y 3.1.13, vemos que el máximo valor posible es igual a 0,75. Esto último se puede apreciar en el siguiente gráfico, en donde se muestra la probabilidad asociada al **Caso B** cuando se superan ambas concurrencias iniciales (**Caso  $\Gamma$** ).

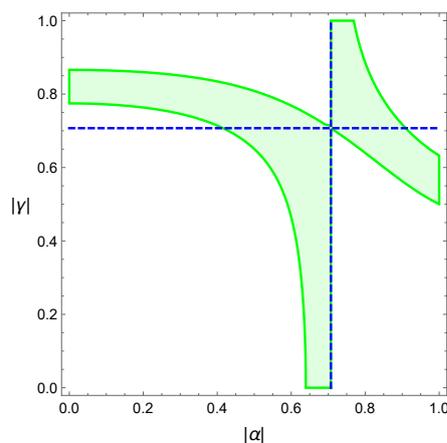


**Figura 3.1.13:** Distribución de probabilidad para las condiciones dadas por  $C_{ac}^{\psi^{\pm}} = C_{ac}^{\phi^+} > (C_{ab} \wedge C_{cd})$ , en particular corresponde a la primera desigualdad mostrada en 3.1.11.

No importa si queremos superar una de las concurrencias iniciales o las dos simultáneamente, esto no puede realizarse con una probabilidad superior a 0,75. Gracias a que conocemos el valor umbral de probabilidad ( $P = 0,75$ ) de cada caso, podemos buscar los posibles valores de  $|\alpha|$  y  $|\gamma|$ , que hacen que nuestro problema tenga una probabilidad alta, es decir, que la probabilidad de obtener uno de los estados de salida que cumpla la concurrencia que pedimos, sea alta. Para ello definimos una probabilidad alta como:  $0,6 < P < 0,75^5$  y vemos que valores de  $|\alpha|$  y  $|\gamma|$  cumplen con este requisito,



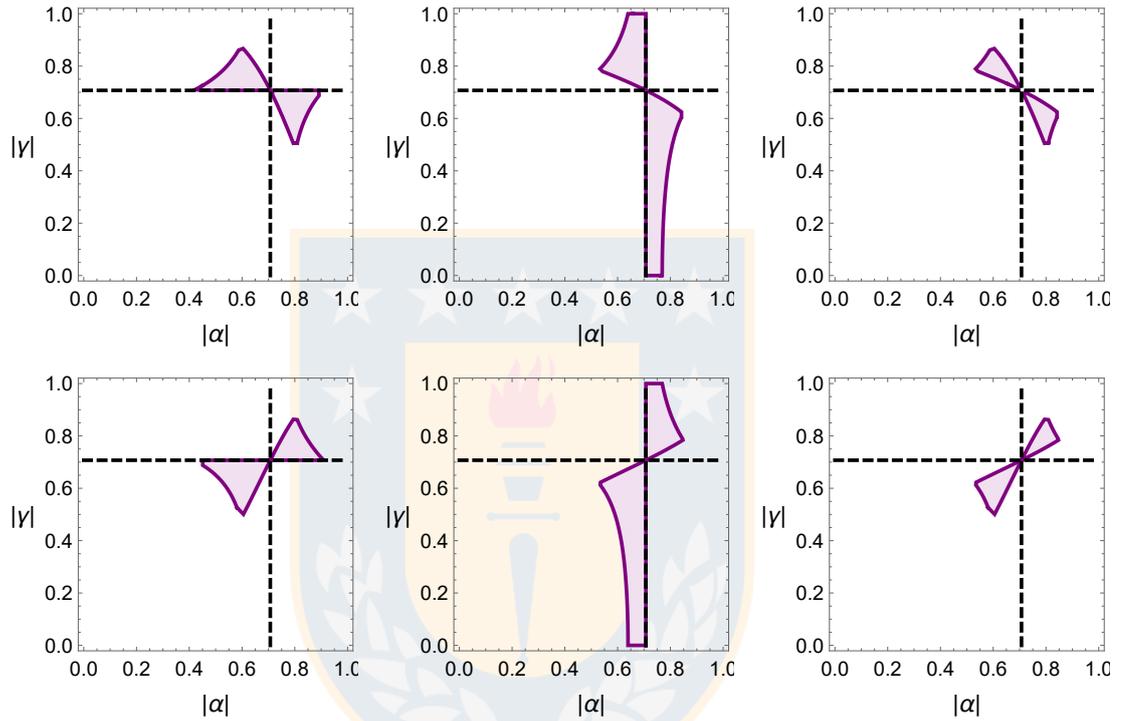
**Figura 3.1.14:** Gráfico que representa los posibles valores de  $|\alpha|$  y  $|\gamma|$  para el **Caso A** que generan una probabilidad alta:  $0,6 < P < 0,75$ .



**Figura 3.1.15:** Gráfico que representa los posibles valores de  $|\alpha|$  y  $|\gamma|$  para el **Caso B** que generan una probabilidad alta:  $0,6 < P < 0,75$ .

<sup>5</sup>El límite inferior de probabilidad es arbitrario y puede adaptarse a un contexto específico.

Debido a que los gráficos anteriores nos muestran que sí existe solución cuando imponemos una probabilidad alta, ahora podemos estudiar los posibles valores de  $|\alpha|$  y  $|\gamma|$  que cumplen con ambas restricciones que solicitamos (conurrencia y probabilidad alta).



**Figura 3.1.16:** Soluciones para los casos: **Caso  $\Pi$**  (Izquierda), **Caso  $\Omega$**  (Medio) y **Caso  $\Gamma$**  (Derecha), todos con  $0,6 < P < 0,75$ . Los tres gráficos superiores e inferiores son para el **Caso A** y **Caso B** respectivamente. La línea negra discontinua muestra los valores  $|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $|\gamma| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Del gráfico anterior (figura 3.1.16), podemos concluir que existen valores posibles para las amplitudes iniciales  $|\alpha|$  y  $|\gamma|$ , que hacen posible que el protocolo sea óptimo, pues se logra una ganancia de entrelazamiento con la realización de éste, y dichas salidas que otorgan la ganancia se pueden obtener con una alta probabilidad. A diferencia del caso completamente determinista, las restricciones que se realizan a la base de medición no son tan estrictas, pues estas poseen más grados de libertad al no requerir que los elementos de la base de medición sean por completo estados de Bell.

### 3.1.2.3. Dos Concurrencias Iguales

Otro enfoque parcialmente determinista que podemos adoptar es el emparejamiento por pares, en este caso el interés se centra en los pares  $C_{ac}^{\phi^\pm}$  y  $C_{ac}^{\psi^\pm}$ . Las concurrencias de estos casos ya están contenidas en las tríadas (específicamente en los resultados obtenidos en 3.1.10 y 3.1.12), por ende las regiones de solución, las podemos encontrar en la figura 3.1.12. Por otro lado, las probabilidades dejan de ser iguales a los tríos y cambian, ya que sólo estamos sumando probabilidades en los respectivos pares. Para  $p_{ac}^{\phi^\pm}$  tenemos lo siguiente,

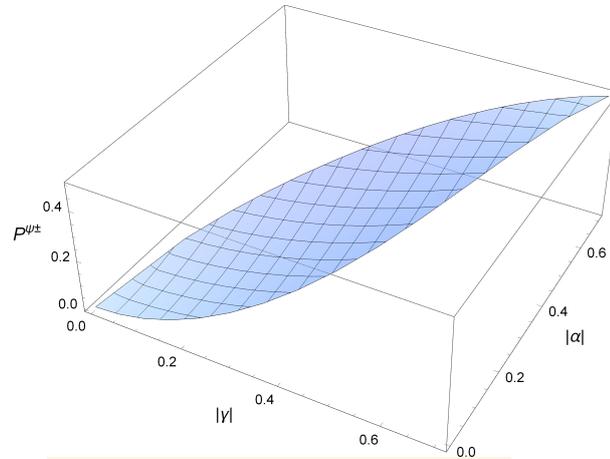
$$\begin{aligned}
 p_{ac}^{\phi^\pm} &= |x|^2|\alpha|^2|\gamma|^2 + |\beta|^2|\eta|^2(1 - |x|^2) + |\alpha|^2|\gamma|^2(1 - |x|^2) + |x|^2|\beta|^2|\eta|^2 \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 |\alpha|^2|\gamma|^2 + |\beta|^2|\eta|^2 \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) + |\alpha|^2|\gamma|^2 \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \\
 &\quad + |x|^2|\beta|^2|\eta|^2 \\
 &= \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\eta^2 = \alpha^2\gamma^2 + (1 - \alpha^2)(1 - \gamma^2)
 \end{aligned}$$

por otro lado, para  $p_{ac}^{\psi^\pm}$

$$\begin{aligned}
 p_{ac}^{\psi^\pm} &= |y|^2|\alpha|^2|\eta|^2 + |\beta|^2|\gamma|^2(1 - |y|^2) + (1 - |y|^2)|\alpha|^2|\eta|^2 + |y|^2|\beta|^2|\gamma|^2 \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 |\alpha|^2|\eta|^2 + |\beta|^2|\gamma|^2 \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) + \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)|\alpha|^2|\eta|^2 \\
 &\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 |\beta|^2|\gamma|^2 \\
 &= -2\alpha^2\gamma^2 + \alpha^2 + \gamma^2
 \end{aligned}$$

De forma similar, pretendemos comparar las concurrencias de los resultados con las concurrencias iniciales, esto da las mismas regiones que en la figura 3.1.12. Pero la probabilidad para los resultados cuando:  $C_{ac}^j > C_{ab}$ ,  $C_{ac}^j > C_{cd}$  ó  $C_{ac}^j > (C_{ab} \wedge C_{cd})$ <sup>6</sup>, nunca supera el umbral de 0,5. Esto último se puede apreciar en el siguiente gráfico, en donde se muestra la probabilidad asociada al par  $C_{ac}^{\psi^\pm}$  cuando se superan ambas concurrencias iniciales.

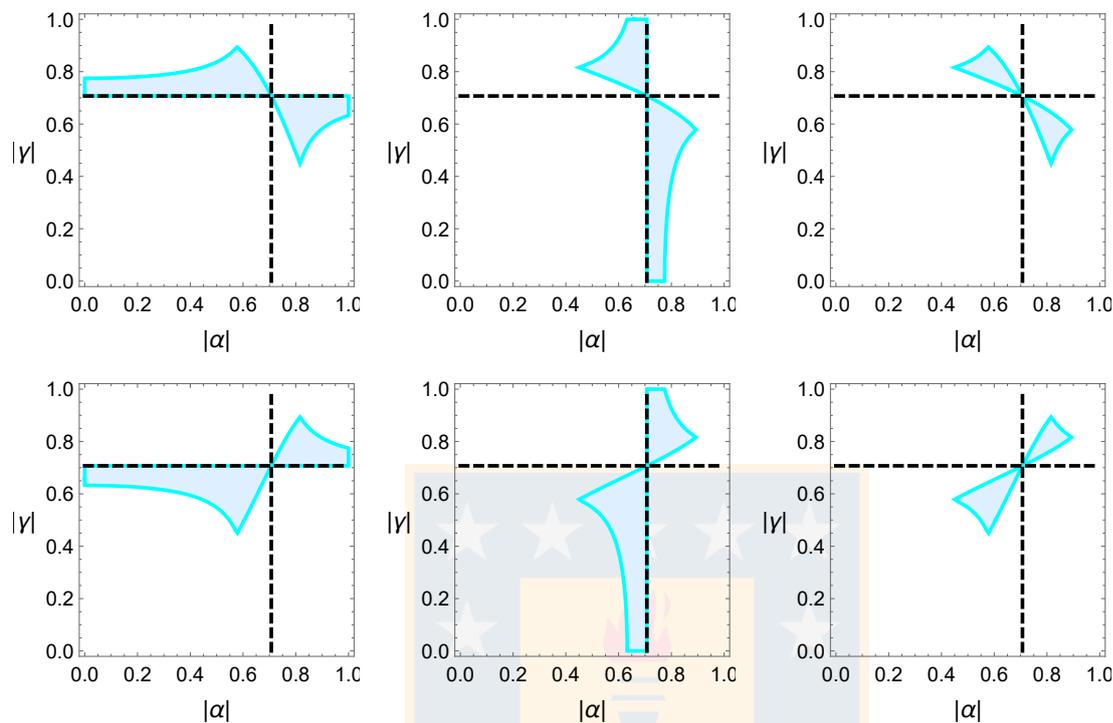
<sup>6</sup>La variable  $j$  corresponde a las dos posibles combinaciones de pares, es decir:  $\phi^\pm$  y  $\psi^\pm$ .



**Figura 3.1.17:** Distribución de probabilidad para las condiciones dadas por  $C_{ac}^{\psi^\pm} > (C_{ab} \wedge C_{cd})$ , en particular corresponde a la primera desigualdad mostrada en 3.1.11, la misma para el caso de los tríos, pues la expresión de concurrencia es idéntica.

Con esto podemos concluir, que este protocolo a pesar de lograr superar la concurrencia inicial, nunca lo hará con una alta probabilidad.

Aunque la probabilidad máxima es baja ( $P = 0,5$ ), podemos tratar de encontrar los posibles valores de  $|\alpha|$  y  $|\gamma|$  que permitan obtener una probabilidad entre  $0,4 < P < 0,5$ . Siendo el límite inferior nuevamente un valor elegido de forma arbitraria. En la imagen 3.1.18 podemos ver la intersección de las posibles soluciones que hacen que el problema tenga una probabilidad en el rango:  $0,4 < P < 0,5$  y una alta concurrencia, es decir:  $C_{ac}^j > C_{ab}$ ,  $C_{ac}^j > C_{cd}$  y  $C_{ac}^j > (C_{ab} \wedge C_{cd})$ , donde  $j = \{\phi^\pm, \psi^\pm\}$ .



**Figura 3.1.18:** Soluciones para los casos:  $C_{ac}^j > C_{ab}$  (Izquierda),  $C_{ac}^j > C_d$  (Medio) y  $C_{ac}^j > (C_{ab} \wedge C_{cd})$  (Derecha), todos con  $0,4 < P < 0,5$ . Los tres gráficos superiores e inferiores son para el caso  $C_{ac}^{\phi^\pm}$ , y para el caso  $C_{ac}^{\psi^\pm}$  respectivamente. La línea negra discontinua muestra los valores  $|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $|\gamma| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Con el análisis realizado en esta sección podemos ver que el protocolo de intercambio de entrelazamiento cuando dos de las salidas poseen la misma concurrencia no es el caso más óptico, pues a pesar de poder superar la concurrencia inicial, estas salidas no son logradas con una alta probabilidad.

## 3.2. Estudio de Decoherencia Caso Parcialmente Determinista

Como se vio anteriormente, los estados de Werner introducidos por primera vez en 1989 [51] con la intención de distinguir entre las correlaciones clásicas y la violación de la desigualdad de Bell, son ampliamente utilizados en la ciencia de la información cuántica [91]. Algunos de sus múltiples usos se encuentran en la descripción de canales cuánticos ruidosos [92] y también como ejemplos en el estudio de la purificación determinista [93]. Dado que los estados de Werner se

encuentran entre los que exhiben la llamada muerte súbita de entrelazamiento<sup>7</sup> [95], este tipo de estados son muy útiles para estudiar la presencia de decoherencia en los sistemas físicos. Experimentalmente se han logrado producir usando fotones polarizados generados por una fuente de entrelazamiento de alto brillo (“*Parametric Down Conversion*”) [96].

Como nuestro mayor interés es evitar las situaciones en donde exista pérdida de entrelazamiento, pues este recurso es esencial para la información cuántica, así como la característica central de la paradoja EPR [97], prolongar este recurso es esencial para la realización de determinados protocolos de información y computación cuántica. Es por ello que en esta sección estudiaremos la presencia de decoherencia en nuestro sistema físico<sup>8</sup> y veremos que tan resistentes son los resultados obtenidos anteriormente, este tipo de estudio nos sirve para describir la pérdida o desaparición de ciertas correlaciones en los sistemas debido a la interacción de estos con el entorno. Para la realización de este análisis consideraremos dos estados de Werner iniciales para cada par de partículas y veremos como se ve afectado nuestro problema, considerando las mismas restricciones obtenidas para el caso puro. Es decir, estudiaremos como afecta la presencia de decoherencia, en forma de estados de Werner, a nuestro protocolo parcialmente determinista.

Consideramos los siguientes estados normalizados,

$$\rho_{ab} = \frac{1 - \varepsilon}{4} I + \varepsilon |\phi_{ab}\rangle \langle \phi_{ab}|$$

$$\rho_{cd} = \frac{1 - \varepsilon}{4} I + \varepsilon |\phi_{cd}\rangle \langle \phi_{cd}|$$

donde  $|\phi_{ab}\rangle$  y  $|\phi_{cd}\rangle$  corresponden a los estados puros iniciales estudiados en el protocolo anterior, en particular se encuentran en 3.1.1 y 3.1.2, por otro lado,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . Escribiendo explícitamente la matriz de densidad para cada uno de los

<sup>7</sup>La muerte súbita de entrelazamiento se define como un fenómeno en donde se lleva a cabo una pérdida de entrelazamiento en un tiempo finito [94], es decir que de cierta forma los estados que exhiben este tipo de comportamiento sufren de la disipación de entrelazamiento.

<sup>8</sup>Es importante realizar este estudio debido a que los estados puros que estudiamos anteriormente nos dan resultados idealizados, que no necesariamente representan situaciones experimentales reales.

estados de Werner tenemos,

$$\begin{aligned}\rho_{ab}^w &= \left(\frac{1-\varepsilon}{4}\right) I_{4x4} + \varepsilon |\phi_{ab}\rangle \langle \phi_{ab}| \\ &= \left(\frac{1-\varepsilon}{4}\right) I + \begin{pmatrix} \varepsilon |\alpha|^2 & 0 & 0 & \varepsilon \alpha \beta^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon \beta \alpha^* & 0 & 0 & \varepsilon |\beta|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}a_1 &= \varepsilon |\alpha|^2 - \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}, \\ a_4 &= \alpha \beta^* \varepsilon, \\ b_2 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\varepsilon, \\ c_3 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\varepsilon, \\ d_1 &= \beta \alpha^* \varepsilon, \\ d_4 &= \varepsilon |\beta|^2 - \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

es fácil ver que  $b_2 = c_3$  y  $a_4 = d_1^*$ . Por otro lado, el segundo estado de Werner se puede escribir como sigue,

$$\begin{aligned}\rho_{cd}^w &= \left(\frac{1-\varepsilon}{4}\right) I_{4x4} + \varepsilon |\phi_{cd}\rangle \langle \phi_{cd}| \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1-\varepsilon}{4}\right) + \varepsilon |\gamma|^2 & 0 & 0 & \varepsilon \gamma \eta^* \\ 0 & \left(\frac{1-\varepsilon}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1-\varepsilon}{4}\right) & 0 \\ \varepsilon \eta \gamma^* & 0 & 0 & \left(\frac{1-\varepsilon}{4}\right) + \varepsilon |\eta|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

con elementos matriciales que definimos de forma más compacta como,

$$a_1 = \left( \frac{1 - \varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\gamma|^2,$$

$$a_4 = \varepsilon \eta \gamma^*,$$

$$b_2 = \left( \frac{1 - \varepsilon}{4} \right),$$

$$c_3 = \left( \frac{1 - \varepsilon}{4} \right),$$

$$d_1 = \varepsilon \gamma \eta^*,$$

$$d_4 = \left( \frac{1 - \varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\eta|^2$$

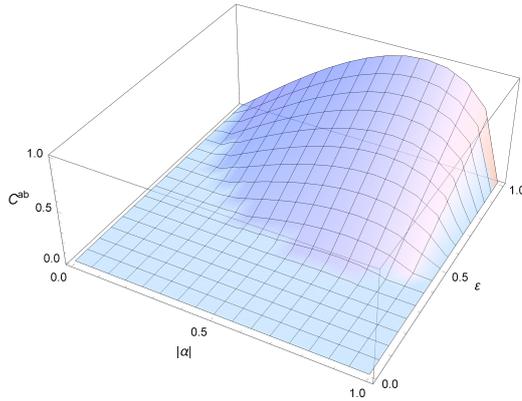
Nuevamente, es fácil ver que  $b_2 = c_3$  y  $a_4 = d_1^*$ .

Ambos estados de Werner poseen una concurrencia diferente a la de su contraparte pura,

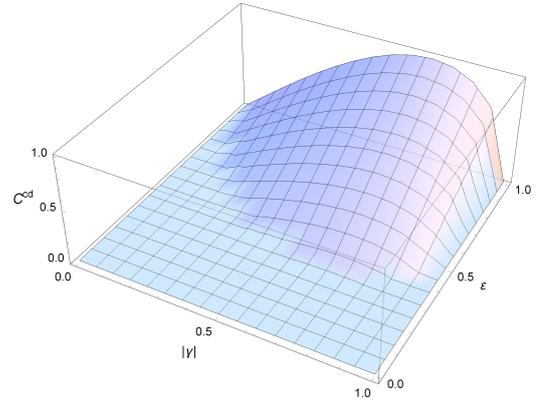
$$C_i(\rho_{ab}^w) = 2 \left( |d_1| - \sqrt{b_2 c_3} \right) = 2 \left( |d_1| - |b_2| \right)$$

$$C_i(\rho_{cd}^w) = 2 \left( |d_1| - |b_2| \right)$$

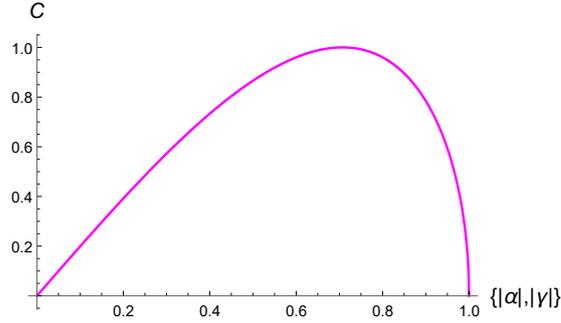
con su respectiva definición del elemento  $d_1$  y  $b_2$ , dependiendo si el estado corresponde al par  $ab$  o  $cd$ .



**Figura 3.2.1:** Concurrencia inicial del estado de Werner  $\rho_{ab}^w$ .



**Figura 3.2.2:** Concurrencia inicial del estado de Werner  $\rho_{cd}^w$ .



**Figura 3.2.3:** Concurrencia inicial del estado de Werner  $\rho_{ab}^w$  (cuando el eje  $x$  posee la amplitud  $|\alpha\rangle$ ) y  $\rho_{cd}^w$  (cuando el eje  $x$  posee la amplitud  $|\gamma\rangle$ ) cuando  $\varepsilon = 1$ .

A partir de estas figuras podemos verificar fácilmente que cuando el término de decoherencia o decaimiento se acerca a 1, recuperamos el protocolo de intercambio de entrelazamiento para los estados puros y las concurrencias iniciales bidimensionales son las mismas que analizamos antes. Esto nos ayuda a verificar que la concurrencia calculada para los nuevos estados de Werner es correcta.

Al igual que en el caso sin decoherencia, para realizar el protocolo de intercambio de entrelazamiento, aplicamos una medida sobre los qubits  $bd$  de los estados de Werner, proyectando sobre cada uno de los siguientes estados:

$$\begin{aligned} |\phi_{bd}^+\rangle &= x |0_b\rangle |0_d\rangle + \sqrt{1 - |x|^2} |1_b\rangle |1_d\rangle, \\ |\phi_{bd}^-\rangle &= \sqrt{1 - |x|^2} |0_b\rangle |0_d\rangle - x |1_b\rangle |1_d\rangle, \\ |\psi_{bd}^+\rangle &= y |0_b\rangle |1_d\rangle + \sqrt{1 - |y|^2} |1_b\rangle |0_d\rangle, \\ |\psi_{bd}^-\rangle &= \sqrt{1 - |y|^2} |0_b\rangle |1_d\rangle - y |1_b\rangle |0_d\rangle. \end{aligned}$$

### 3.2.1. Primera Salida

En primer lugar, realizamos la medición proyectando sobre  $|\phi_{bd}^+\rangle$ . Como recordatorio, las dos ecuaciones siguientes muestran la matriz de densidad escrita

término por término en forma expandida,

$$\begin{aligned}
\rho_{ab}^w &= \left[ \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\alpha|^2 \right] |0_a\rangle |0_b\rangle \langle 0_a| \langle 0_b| + \varepsilon \alpha \beta^* |0_a\rangle |0_b\rangle \langle 1_a| \langle 1_b| \\
&+ \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) |0_a\rangle |1_b\rangle \langle 0_a| \langle 1_b| + \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) |1_a\rangle |0_b\rangle \langle 1_a| \langle 0_b| \\
&+ \varepsilon \beta \alpha^* |1_a\rangle |1_b\rangle \langle 0_a| \langle 0_b| + \left[ \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\beta|^2 \right] |1_a\rangle |1_b\rangle \langle 1_a| \langle 1_b| \\
\rho_{cd}^w &= \left[ \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\gamma|^2 \right] |0_c\rangle |0_d\rangle \langle 0_c| \langle 0_d| + \varepsilon \gamma \eta^* |0_c\rangle |0_d\rangle \langle 1_c| \langle 1_d| \\
&+ \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) |0_c\rangle |1_d\rangle \langle 0_c| \langle 1_d| + \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) |1_c\rangle |0_d\rangle \langle 1_c| \langle 0_d| \\
&+ \varepsilon \eta \gamma^* |1_c\rangle |1_d\rangle \langle 0_c| \langle 0_d| + \left[ \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\eta|^2 \right] |1_c\rangle |1_d\rangle \langle 1_c| \langle 1_d|
\end{aligned}$$

Aplicamos una medida conjunta sobre los qubits  $bd$ , es decir, aplicamos una medida proyectiva de von Neumann sobre los estados  $\rho_{ab}^w \otimes \rho_{cd}^w$ ,

$$\begin{aligned}
\rho_{ac}^{\phi^+} &= \langle \phi_{bd}^+ | \rho_{ab}^w \otimes \rho_{cd}^w | \phi_{bd}^+ \rangle \\
&= \left( x \langle 0_b | \langle 0_d | + \sqrt{1-x^2} \langle 1_b | \langle 1_d | \right) \rho_{ab}^w \otimes \rho_{cd}^w \left( x |0_b\rangle |0_d\rangle + \sqrt{1-x^2} |1_b\rangle |1_d\rangle \right) \\
&= \left( \begin{aligned}
&\left\{ x^2 \left[ \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\alpha|^2 \right] \left[ \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\gamma|^2 \right] + (1-x^2) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \right\} |0_a\rangle |0_c\rangle \langle 0_a| \langle 0_c| \\
&\quad + x \sqrt{1-x^2} \varepsilon^2 \alpha \gamma (\eta \beta)^* |0_a\rangle |0_c\rangle \langle 1_a| \langle 1_c| \\
&+ \left\{ x^2 \left[ \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\alpha|^2 \right] \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + (1-x^2) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left[ \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\eta|^2 \right] \right\} |0_a\rangle |1_c\rangle \langle 0_a| \langle 1_c| \\
&+ \left\{ x^2 \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left[ \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\gamma|^2 \right] + (1-x^2) \left[ \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\beta|^2 \right] \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \right\} |1_a\rangle |0_c\rangle \langle 1_a| \langle 0_c| \\
&\quad + x \sqrt{1-x^2} \varepsilon^2 \beta \eta (\gamma \alpha)^* |1_a\rangle |1_c\rangle \langle 0_a| \langle 0_c| \\
&+ \left\{ x^2 \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + (1-x^2) \left[ \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\beta|^2 \right] \left[ \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\eta|^2 \right] \right\} |1_a\rangle |1_c\rangle \langle 1_a| \langle 1_c|
\end{aligned} \right) \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Podemos definir:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left( x^2 \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\alpha|^2 \right) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\gamma|^2 \right) (1-x^2) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \right) \\
a_4 &= x \sqrt{1-x^2} \varepsilon^2 \beta \eta (\gamma \alpha)^* \\
b_2 &= \left( x^2 \left[ \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\alpha|^2 \right] \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + (1-x^2) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left[ \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\eta|^2 \right] \right) \\
c_3 &= \left( x^2 \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left[ \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\gamma|^2 \right] + (1-x^2) \left[ \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\beta|^2 \right] \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \right) \\
d_1 &= x \sqrt{1-x^2} \varepsilon^2 \alpha \gamma (\eta \beta)^* \\
d_4 &= \left( x^2 \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + (1-x^2) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\beta|^2 \right) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\eta|^2 \right) \right)
\end{aligned}$$

con  $a_4^* = d_1$ , si normalizamos (recordemos que  $Tr(\rho_{ac}^{\phi^+}) = 1$ )

$$\begin{aligned}
Tr(\rho_{ac}^{\phi^+}) &= \left( \begin{array}{c} x^2 \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\alpha|^2 \right) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\gamma|^2 \right) \\ + (1-x^2) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + x^2 \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\alpha|^2 \right) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \\ + (1-x^2) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\eta|^2 \right) + x^2 \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\gamma|^2 \right) \\ + (1-x^2) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\beta|^2 \right) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + x^2 \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \\ + (1-x^2) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\beta|^2 \right) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\eta|^2 \right) \end{array} \right) \\
&= (a_1 + b_2 + c_3 + d_4) \\
N_{\phi^+} &= \frac{1}{Tr(\rho_{ac}^{\phi^+})}
\end{aligned}$$

luego

$$\rho_{ac}^{\phi^+} = N_{\phi^+} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}, \text{ con } d_1^* = a_4$$

con autovalores:

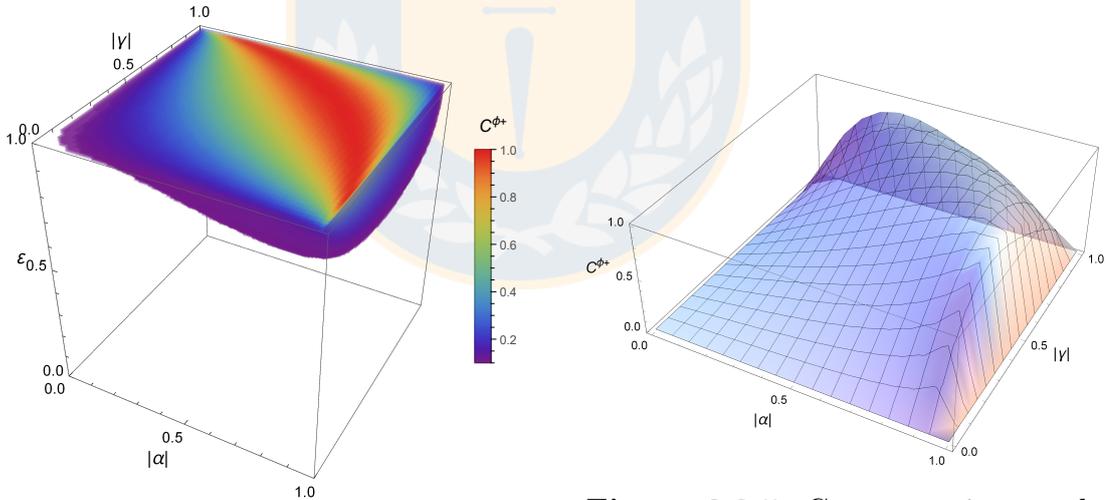
$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= N_{\phi^+} \left( \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} d_4 + \frac{1}{2} \sqrt{(a_1 - d_4)^2 + 4a_4 d_1} \right) \geq 0 \\
\lambda_2 &= N_{\phi^+} \left( \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} d_4 - \frac{1}{2} \sqrt{(a_1 - d_4)^2 + 4a_4 d_1} \right) \\
\lambda_3 &= N_{\phi^+} b_2 \geq 0 \\
\lambda_4 &= N_{\phi^+} c_3 \geq 0
\end{aligned}$$

ya que la matriz de densidad se define como positiva tenemos que,

$$\begin{aligned} \lambda_2 &\geq 0 \\ \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}d_4 - \frac{1}{2}\sqrt{(a_1 - d_4)^2 + 4a_4d_1} &\geq 0 \\ |a_4| &\leq \sqrt{a_1d_4} \vee |d_1| \leq \sqrt{a_1d_4} \end{aligned}$$

Con esto y calculando los autovalores de la matriz  $\rho_{ac}^{\phi^+} \tilde{\rho}_{ac}^{\phi^+}$ , obtenemos una concurrencia o cantidad de entrelazamiento diferente de cero si (este resultado se puede verificar en [98], en donde el cálculo se realiza para un estado tipo X<sup>9</sup>)

$$\begin{aligned} C^{\phi^+} &= 2N_{\phi^+} \max \left\{ 0, |d_1| - \sqrt{b_2c_3}, -\sqrt{a_1d_4} \right\} \\ &\Rightarrow 2N_{\phi^+} \left( |d_1| - \sqrt{b_2c_3} \right) > 0 \vee -2N_{\phi^+} \sqrt{a_1d_4} > 0 \end{aligned}$$



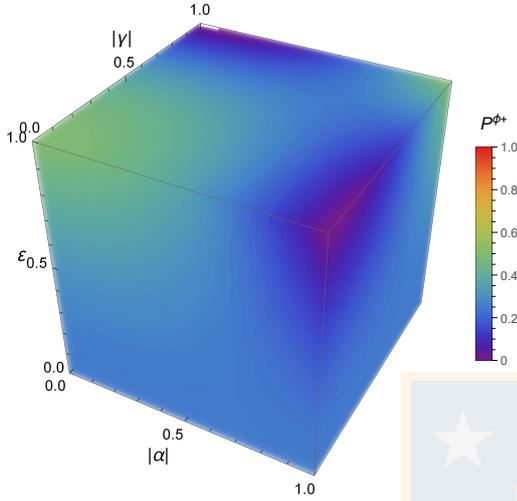
**Figura 3.2.4:** Concurrencia al considerar  $x = 1/\sqrt{2}$  (condición para la igualdad de la tríada del **Caso A**), las tres variables de los estados de Werner se muestran en cada eje y el valor de la concurrencia se representa por colores según la barra de la derecha.

**Figura 3.2.5:** Concurrencia cuando  $x = 1/\sqrt{2}$  y  $\varepsilon = 1$ , esto, como era de esperar, recupera la superficie anterior realizada para los estados puros (pues empleamos la condición de la tríada del **Caso A**), esto se muestra en la figura 3.1.3.

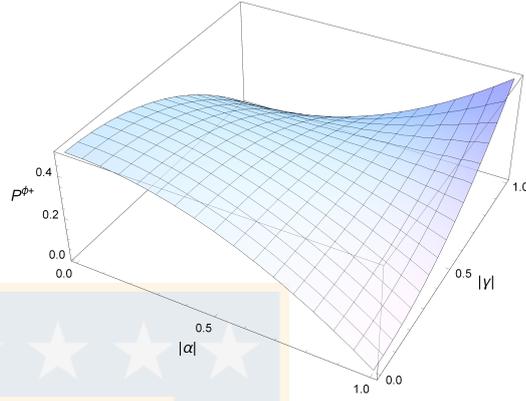
También tenemos que considerar la probabilidad del primer resultado de medición,

<sup>9</sup>El estado de Werner es un caso particular de un estado “X”.

dada por  $1/N$ , donde  $N$  es la traza de la matriz producto.



**Figura 3.2.6:** Probabilidad cuando  $x = 1/\sqrt{2}$ , las tres variables de los estados de Werner se muestran en cada eje y la probabilidad total se representa por colores según la barra de la derecha.



**Figura 3.2.7:** Probabilidad de la primera salida, cuando  $x = 1/\sqrt{2}$  y  $\epsilon = 1$ . El gráfico posee un máximo de probabilidad de 0,5.

### 3.2.2. Segunda Salida

La segunda salida la obtenemos empleando el siguiente estado de la base de medición,

$$|\phi_{bd}^-\rangle = \sqrt{1-x^2}|0_b\rangle|0_d\rangle - x|1_b\rangle|1_d\rangle$$

Aplicamos una medida conjunta sobre los qubits  $bd$ , es decir, aplicamos una medida proyectiva de von Neumann sobre los estados  $\rho_{ab}^w \otimes \rho_{cd}^w$  y realizamos el mismo cálculo empleado para la primera salida, así, el estado final tendrá la siguiente forma

$$\rho_{ac}^{\phi^-} = N_{\phi^-} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}, \text{ con } d_1^* = a_4$$

con,

$$\begin{aligned}
a_1 &= (1-x^2) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\alpha|^2 \right) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\gamma|^2 \right) + x^2 \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \\
a_4 &= -x \sqrt{1-x^2} \varepsilon^2 \beta \eta (\alpha \gamma)^* \\
b_2 &= (1-x^2) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\alpha|^2 \right) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + x^2 \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\eta|^2 \right) \\
c_3 &= (1-x^2) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\gamma|^2 \right) + x^2 \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\beta|^2 \right) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \\
d_1 &= -x \sqrt{1-x^2} \varepsilon^2 \gamma \alpha (\eta \beta)^* \\
d_4 &= (1-x^2) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + x^2 \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\beta|^2 \right) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\eta|^2 \right)
\end{aligned}$$

tambi3n por normalizaci3n se debe cumplir:

$$\begin{aligned}
Tr(\rho_{ac}^{\phi^-}) &= a_1 + b_2 + c_3 + d_4 \\
N_{\phi^-} &= \frac{1}{Tr(\rho_{ac}^{\phi^-})}
\end{aligned}$$

dado que la matriz es definida positiva tenemos que se cumplen las siguientes desigualdades

$$|a_4| \leq \sqrt{a_1 d_4} \vee |d_1| \leq \sqrt{a_1 d_4}$$

y para obtener una concurrencia diferente de cero necesitamos que,

$$\begin{aligned}
C^{\phi^-} &= -2N_{\phi^-} \max \left\{ 0, |d_1| + \sqrt{b_2 c_3}, \sqrt{a_1 d_4} \right\} \\
&\Rightarrow -2N_{\phi^-} \left( |d_1| + \sqrt{b_2 c_3} \right) > 0 \vee -2N_{\phi^-} \sqrt{a_1 d_4} > 0
\end{aligned}$$

### 3.2.3. Tercera Salida

La tercera salida la obtenemos empleando el siguiente estado de la base de medici3n,

$$|\psi_{bd}^+\rangle = y |0_b\rangle |1_d\rangle + \sqrt{1-y^2} |1_b\rangle |0_d\rangle$$

Tal como hicimos para la primera y segunda salida, aplicamos una medida proyectiva sobre los estados  $\rho_{ab}^w \otimes \rho_{cd}^w$  y realizamos el mismo c3lculo anterior,

así, el estado final tendrá la siguiente forma,

$$\rho_{ac}^{\psi^+} = N_{\psi^+} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} a_1 &= \left( y^2 \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\alpha|^2 \right) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + (1-y^2) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\gamma|^2 \right) \right) \\ b_2 &= \left( y^2 \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\alpha|^2 \right) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\eta|^2 \right) + (1-y^2) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \right) \\ b_3 &= y \sqrt{1-y^2} \varepsilon^2 \beta \gamma (\alpha \eta)^* \\ c_2 &= y \sqrt{1-y^2} \varepsilon^2 \alpha \eta (\beta \gamma)^* \\ c_3 &= \left( y^2 \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + (1-y^2) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\beta|^2 \right) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\gamma|^2 \right) \right) \\ d_4 &= \left( y^2 \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\eta|^2 \right) + (1-y^2) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\beta|^2 \right) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \right) \end{aligned}$$

de aquí vemos que,  $b_3 = c_2^*$ . El factor  $N_{\psi^+}$  corresponde a la normalización, pues

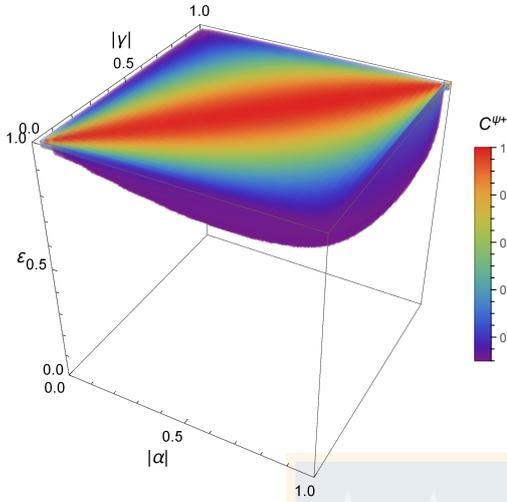
$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho_{ac}^{\psi^+}) &= (a_1 + b_2 + c_3 + d_4) \\ N_{\psi^+} &= \frac{1}{\text{Tr}(\rho_{ac}^{\psi^+})} \end{aligned}$$

Dado que la matriz densidad se define como positiva, tenemos que

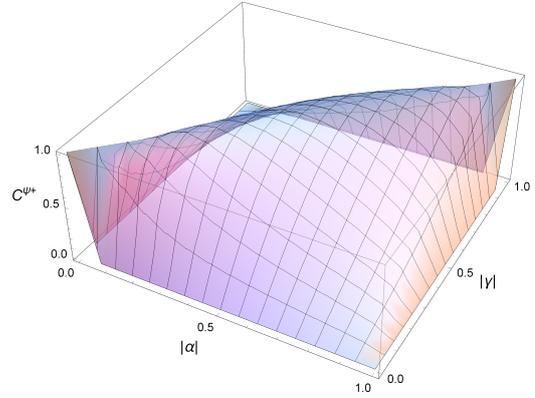
$$|b_3| \leq \sqrt{b_2 c_3} \vee |c_2| \leq \sqrt{b_2 c_3}$$

Con esto, y calculando los autovalores de la matriz  $\rho_{ac}^{\psi^+} \tilde{\rho}_{ac}^{\psi^+}$ , obtenemos concurrencias diferentes de cero si se cumple que:

$$\begin{aligned} C^{\psi^+} &= 2N_{\psi^+} \text{máx} \left\{ 0, |c_2| - \sqrt{a_1 d_4}, -\sqrt{b_2 c_3} \right\} \\ &\Rightarrow 2N_{\psi^+} \left( |c_2| - \sqrt{a_1 d_4} \right) > 0 \vee -2N_{\psi^+} \sqrt{b_2 c_3} > 0 \end{aligned}$$

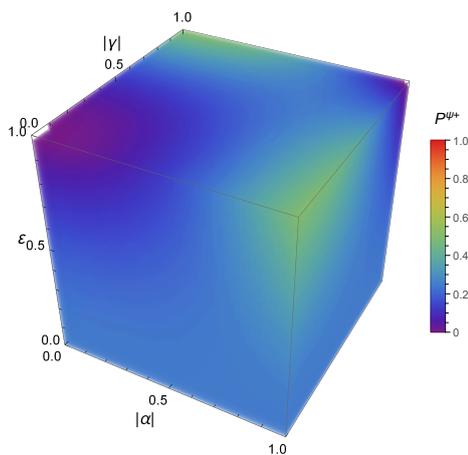


**Figura 3.2.8:** Concurrencia cuando se considera  $y = 1/\sqrt{2}$  (condición para la igualdad de la tríada del **Caso B**), las tres variables de los estados de Werner se muestran en cada eje y el valor de la concurrencia se representa por colores según la barra del lado derecho.

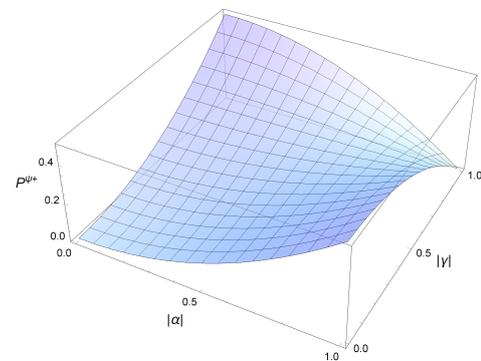


**Figura 3.2.9:** Concurrencia cuando  $y = 1/\sqrt{2}$  y  $\varepsilon = 1$ , esto, como es de esperar, recupera la superficie anterior realizada para los estados puros (pues empleamos la condición de la tríada del **Caso B**), como se aprecia en la figura 3.1.6.

También tenemos que analizar la probabilidad de este tercer resultado de medición, la probabilidad viene dada por el factor  $1/N$ , donde  $N$  es la traza de la matriz producto,



**Figura 3.2.10:** Probabilidad al considerar  $y = 1/\sqrt{2}$ , las tres variables de los estados de Werner se muestran en cada eje y la probabilidad total se representa por colores según la barra del lado derecho.



**Figura 3.2.11:** Probabilidad cuando  $y = 1/\sqrt{2}$  y  $\varepsilon = 1$ , el máximo valor alcanzado es de 0,5.

### 3.2.4. Cuarta Salida

La cuarta salida la obtenemos empleando el siguiente estado de la base de medición,

$$|\psi_{bd}^-\rangle = \sqrt{1-y^2} |0_b\rangle |1_d\rangle - y |1_b\rangle |0_d\rangle$$

Tal como hicimos para las salidas anteriores, aplicamos una medida proyectiva sobre los estados  $\rho_{ab}^w \otimes \rho_{cd}^w$ , y realizamos el mismo cálculo empleado para la primera salida, así, el estado final tendrá la siguiente forma,

$$\rho_{ac}^{\psi^-} = N_{\psi^-} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} a_1 &= \left( (1-y^2) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\alpha|^2 \right) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + y^2 \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\gamma|^2 \right) \right) \\ b_2 &= \left( (1-y^2) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\alpha|^2 \right) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\eta|^2 \right) + y^2 \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \right) \\ b_3 &= -y \sqrt{1-y^2} \varepsilon^2 \beta \gamma (\alpha \eta)^* \\ c_2 &= -y \sqrt{1-y^2} \varepsilon^2 \alpha \eta (\beta \gamma)^* \\ c_3 &= \left( (1-y^2) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + y^2 \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\beta|^2 \right) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\gamma|^2 \right) \right) \\ d_4 &= \left( (1-y^2) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\eta|^2 \right) + y^2 \left( \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) + \varepsilon |\beta|^2 \right) \left( \frac{1-\varepsilon}{4} \right) \right) \end{aligned}$$

podemos ver que:  $b_3 = c_2^*$ . También es importante mencionar que la normalización se llevó a cabo de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left( \rho_{ac}^{\psi^-} \right) &= (a_1 + b_2 + c_3 + d_4) \\ N_{\psi^-} &= \frac{1}{\text{Tr} \left( \rho_{ac}^{\psi^-} \right)} \end{aligned}$$

dado que la matriz se define como positiva,

$$|b_3| \leq \sqrt{b_2 c_3} \vee |c_2| \leq \sqrt{b_2 c_3}$$

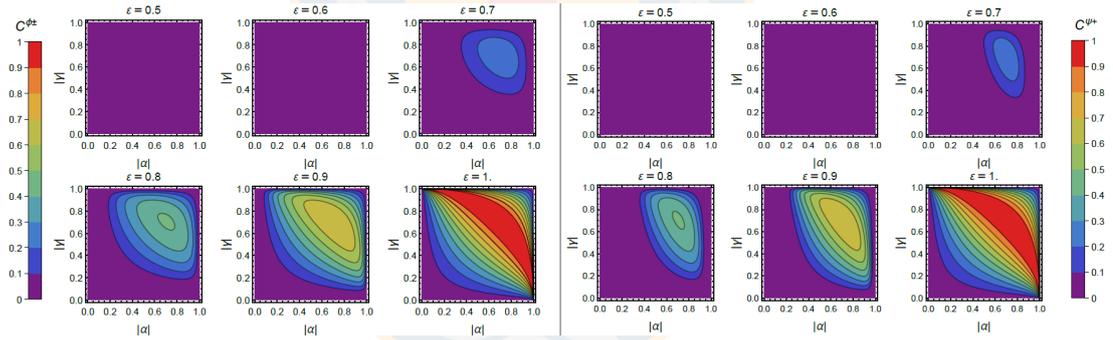
Tenemos una concurrencia diferente de cero si se cumple lo siguiente:

$$C^{r\psi^-} = -2N_{\psi^-} \max \left\{ 0, |c_2| + \sqrt{a_1 d_4}, \sqrt{b_2 c_3} \right\}$$

$$\Rightarrow -2N_{\psi^-} \left( |c_2| + \sqrt{a_1 d_4} \right) > 0 \vee -2N_{\psi^+} \sqrt{b_2 c_3} > 0$$

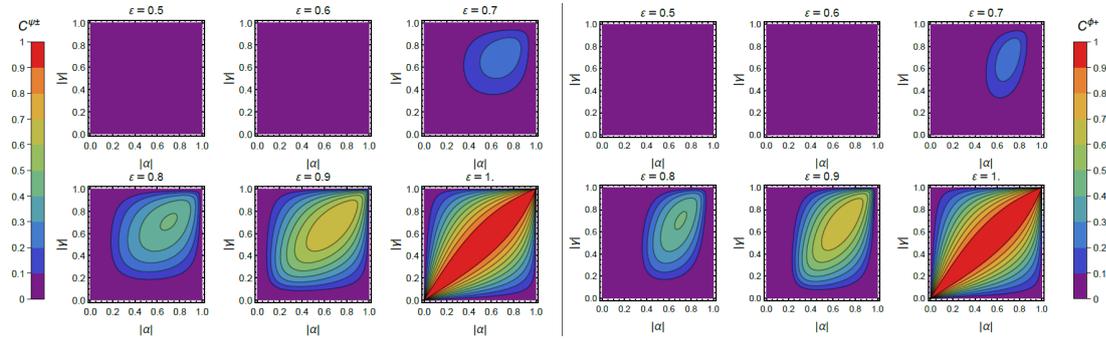
### 3.2.5. Análisis de los resultados

Si efectuamos el mismo estudio realizado para el caso de estados puros, podemos emplear las mismas condiciones de igualdad de cada tríada y ver como se comportan los nuevos estados, para ello analizamos los gráficos obtenidos anteriormente en cada salida y efectuamos cortes transversales para ver como se comporta la superficie cuando el valor de  $\varepsilon$  cambia. Para el **Caso A**,



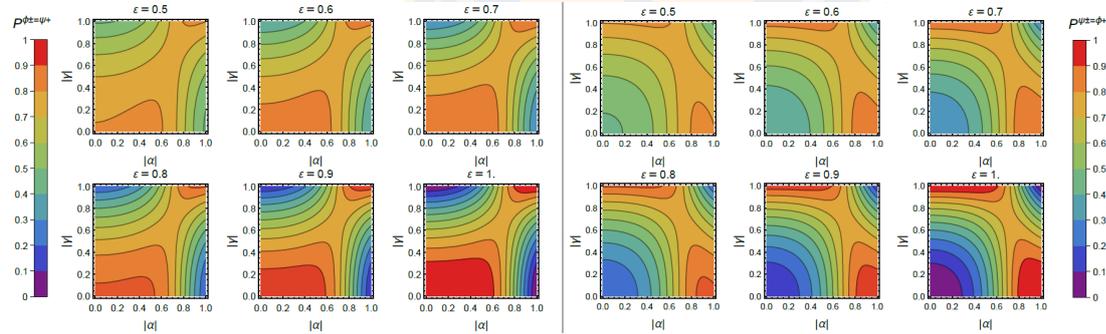
**Figura 3.2.12:** Concurrencia de los resultados  $C_{ac}^{\phi^\pm}$  en el lado izquierdo y  $C_{ac}^{r\psi^\pm}$  en el lado derecho, para diferentes valores de  $\varepsilon$ . Agrupamos  $C_{ac}^{\phi^\pm}$  pues  $C_{ac}^{\phi^+}$  y  $C_{ac}^{\phi^-}$  son iguales cuando  $x = 1/\sqrt{2}$ . En el caso de  $C_{ac}^{r\psi^+}$ , cuando  $y = \pm \frac{|\beta|^2}{\sqrt{|\alpha|^4 + |\beta|^4}}$  presenta ligeras diferencias para distintos valores de  $\varepsilon$ , excepto cuando este es igual a 1, en dicho caso las tres concurrencias son exactamente iguales.

Por otro lado, para el **Caso B**,



**Figura 3.2.13:** Concurrencia de los resultados  $C_{ac}^{\psi^{\pm}}$  en el lado izquierdo y  $C_{ac}^{\phi^{\pm}}$  en el lado derecho, para diferentes valores de  $\varepsilon$ . Agrupamos  $C_{ac}^{\psi^{\pm}}$  pues  $C_{ac}^{\psi^+}$  y  $C_{ac}^{\psi^-}$  son iguales cuando  $y = 1/\sqrt{2}$ . En el caso de  $C_{ac}^{\phi^+}$  cuando  $x = \pm \frac{|\beta|^2}{\sqrt{|\alpha|^4 + |\beta|^4}}$  presenta ligeras diferencias para distintos valores de  $\varepsilon$ , excepto cuando este es igual a 1, en dicho caso las tres concurrencias son exactamente iguales.

para el caso de las probabilidades, tenemos los siguientes resultados para cada tríada:



**Figura 3.2.14:** Probabilidad para el primer trío (**Caso A**) en el lado izquierdo y para el segundo trío (**Caso B**) en el lado derecho, para diferentes valores de  $\varepsilon$ .

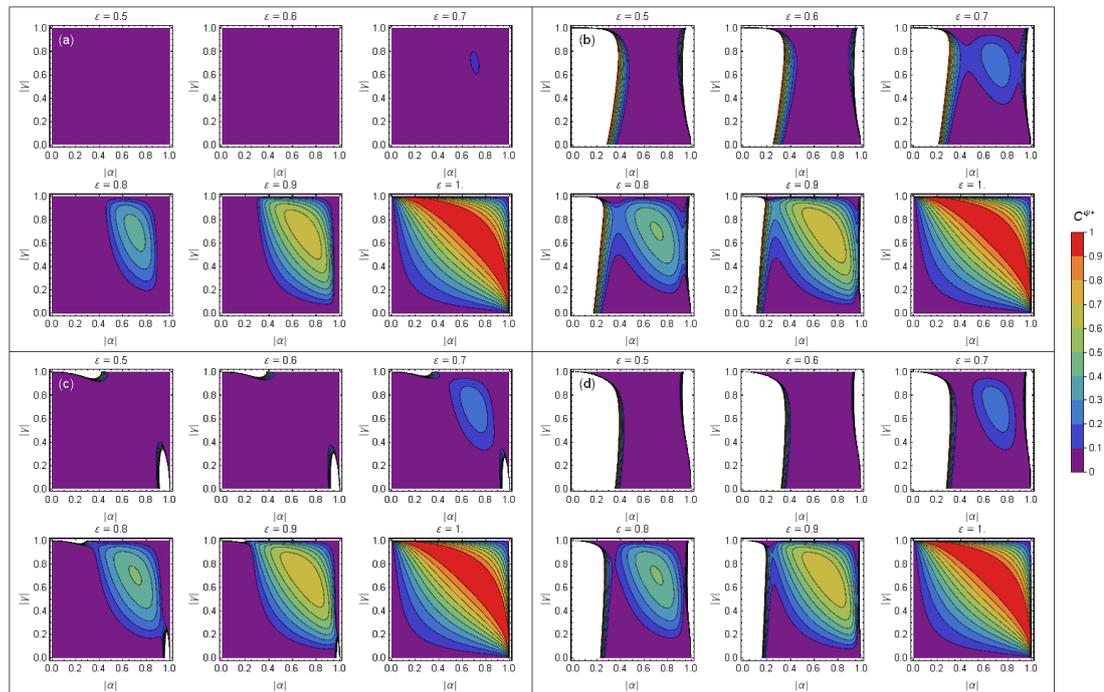
Diferentes grados de perturbación en el estado de Werner nos darán una buena idea de cuán resistentes son los estados resultantes a la decoherencia. Para el siguiente análisis sólo consideramos un elemento de cada tríada, en particular desarrollaremos las salidas:  $C^{\psi^+}$  del **Caso A** y  $C^{\phi^+}$  del **Caso B**. Esto nos da automáticamente una idea del efecto de la decoherencia en los casos de coincidencia de cada trío.

A continuación, se estudiarán los efectos del parámetro de decoherencia  $\varepsilon$  aplicando

una expansión en serie de Taylor alrededor de  $\varepsilon = 1$  [99]:

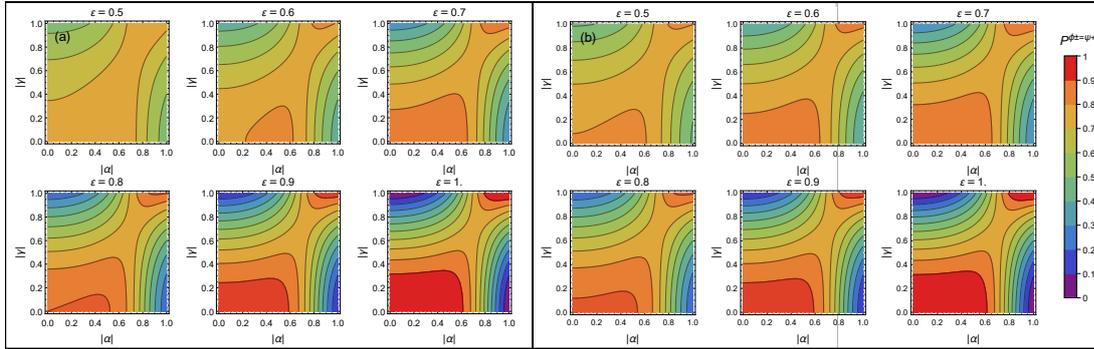
$$f(\varepsilon) = f(1) + f'(1)(\varepsilon - 1) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(1)}{(n-1)!}(\varepsilon - 1)^{n-1} + \dots$$

sobre las concurrencias resultantes y la probabilidad. Los resultados se muestran en las figuras 3.2.15, 3.2.16, 3.2.17 y 3.2.18. Para las concurrencias tenemos los siguientes resultados. Para el **Caso A**,



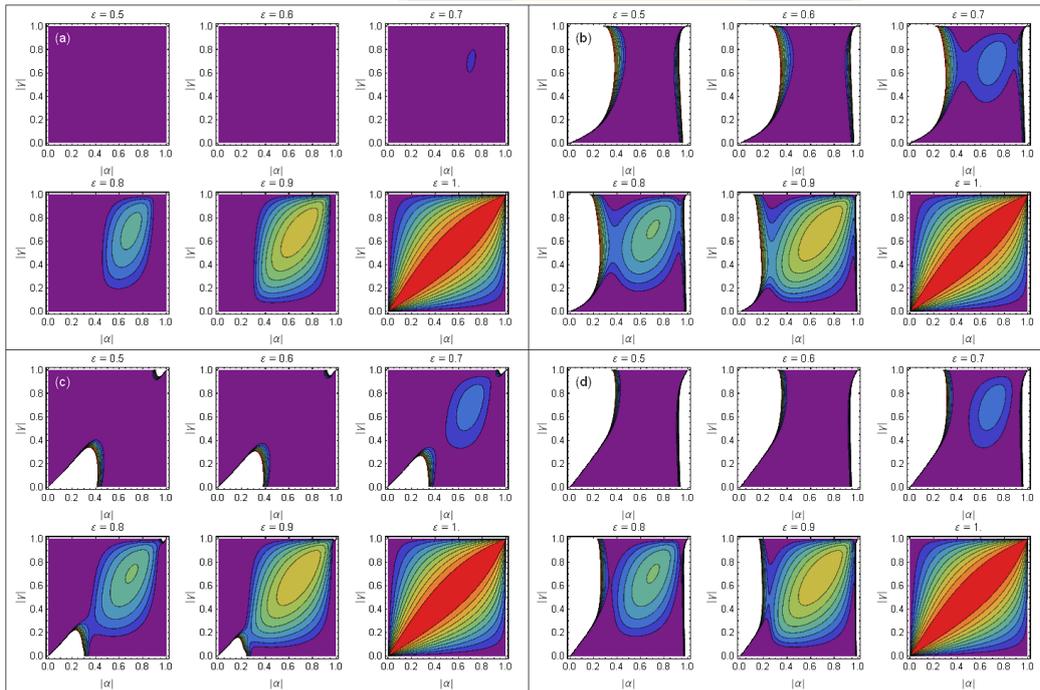
**Figura 3.2.15:** Gráfico de contorno para diferentes valores de  $\varepsilon$ . El eje horizontal representa la amplitud  $|\alpha|$  y el eje vertical la amplitud  $|\gamma|$ , la barra de color corresponde a la concurrencia de la salida  $C^{\psi^+}$  del **Caso A**. (a) Corresponde a la expansión de Taylor de primer orden alrededor de  $\varepsilon = 1$ , (b) la expansión de segundo orden, (c) la expansión de tercer orden y (d) la expansión de cuarto orden.

con una probabilidad,



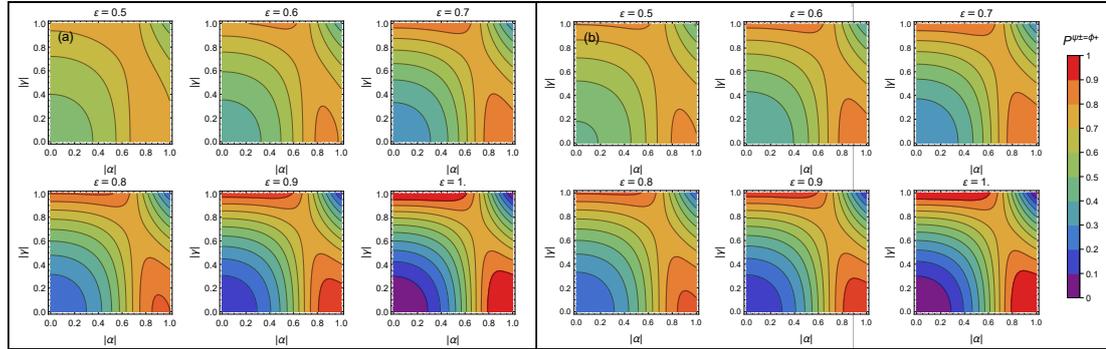
**Figura 3.2.16:** Gráfico de contorno para diferentes valores de  $\varepsilon$ . El eje horizontal representa la amplitud  $|\alpha|$  y el eje vertical la amplitud  $|\gamma|$ , la barra de color corresponde a la probabilidad de la tríada  $C^{\phi^{\pm}} = C^{\psi^{\pm}}$ . (a) Es la expansión de Taylor de primer orden alrededor de  $\varepsilon = 1$ , (b) la expansión de segundo orden.

Para el **Caso B**,



**Figura 3.2.17:** Gráfico de contorno para diferentes valores de  $\varepsilon$ . El eje horizontal representa la amplitud  $|\alpha|$  y el eje vertical la amplitud  $|\gamma|$ , la barra de color corresponde a la concurrencia de la salida  $C^{\phi^{\pm}}$  del **Caso B**. (a) Es la expansión de Taylor de primer orden alrededor de  $\varepsilon = 1$ , (b) la expansión de segundo orden, (c) la expansión de tercer orden y (d) la expansión de cuarto orden.

con probabilidad,



**Figura 3.2.18:** Gráfico de contorno para diferentes valores de  $\varepsilon$ . El eje horizontal representa la amplitud  $|\alpha|$  y el eje vertical la amplitud  $|\gamma|$ , la barra de color corresponde a la probabilidad de la tríada  $C^{\psi^\pm} = C^{\phi^\pm}$ . (a) Es la expansión de Taylor de primer orden alrededor de  $\varepsilon = 1$ , (b) la expansión de segundo orden.

En el caso de las probabilidades para cada tríada (figura 3.2.16 y 3.2.18) sólo se estudió hasta la expansión de orden 2, pues a mayor orden se repetían los resultados obtenidos para dicho orden.

Algunas conclusiones importantes que se pueden extraer de los gráficos anteriores: 3.2.15, 3.2.16, 3.2.17 y 3.2.18 son:

- Una aproximación de primer orden da resultados muy sólidos en términos de concurrencia para todos los valores de  $\varepsilon$ , pero funciona excepcionalmente bien en valores altos de esta variable. Lo mismo ocurre para la probabilidad, pues la aproximación es precisa, pero difiere en los valores medios de  $\varepsilon$  (de 0,5 a 0,6 aproximadamente). Es importante recordar que para valores mayores a  $\varepsilon \approx 0,6$  obtuvimos concurrencias superiores a cero.
- Una aproximación de segundo orden, tiene problemas para describir el comportamiento de la concurrencia para los valores límite de las variables  $\alpha$  y  $\gamma$ , cuando estas variables se acercan a 1 o 0, la aproximación no logra describir la concurrencia con precisión. También se observa que el trío del **Caso A** es mucho más sólido que el trío del **Caso B**, la tríada  $C^{\psi^\pm} = C^{\phi^\pm}$  (bajo el estudio de la salida  $C^{\phi^\pm}$ ) tiene regiones más grandes donde la aproximación falla en describir la concurrencia (esto se puede apreciar de mejor forma en los gráficos de expansión a orden 3). En el caso de la probabilidad, esta parece mostrar una mejora respecto a la aproximación de primer orden, pues parecen ser casi idénticas para todo valor de  $\varepsilon$ .

- A partir del orden 2, la probabilidad está perfectamente descrita por la aproximación, por esta razón sólo se presentaron las expansiones de Taylor hasta orden 2.
- En el caso de la tercera aproximación, nuevamente vemos que el comportamiento de la tercera salida para cada trío presenta problemas en su representación, pues siguen apareciendo discontinuidades, pero estas son menores en comparación a las expansiones de orden 2 y 4. En el caso de la probabilidad, esta queda perfectamente representada con la aproximación.



## Capítulo 4

### Conclusión

En base al estudio del protocolo estándar de intercambio de entrelazamiento se ha propuesto una realización determinista y parcialmente determinista con condiciones generales, capaz de conservar y en algunos casos superar la cantidad de entrelazamiento inicial.

De la investigación desarrollada podemos concluir lo siguiente: Al realizar el protocolo de intercambio de entrelazamiento general con estados puros (primera situación estudiada), el caso más óptimo resultó ser aquel en el que emparejamos tres concurrencias de resultados, es decir, un intercambio de entrelazamiento parcialmente determinista, ya que este caso mostró una ganancia en concurrencia y probabilidad (para la probabilidad se obtuvo un valor máximo de 0,75). Por otro lado, cuando estudiamos el determinismo en dos salidas, a pesar de conservar los valores obtenidos para las concurrencias de los tríos, la probabilidad máxima asociada a las salidas fue baja ( $P = 0,5$ ). Por último, es importante mencionar que a pesar de todo se logró establecer un intercambio de entrelazamiento totalmente determinista, pero este implicó un costo considerable en la concurrencia además de la necesidad de establecer una gran cantidad de condiciones para los estados iniciales y la base de medición, sin embargo, como se trabaja con las cuatro salidas, si o sí existe una ganancia significativa en la probabilidad, ya que es siempre igual a uno. Luego, dependiendo del contexto, es posible decidir que caso es más ventajoso, ya que por un lado tenemos una ganancia de entrelazamiento, pero un coste en probabilidad (emparejamiento de concurrencia de tríadas) y en la otra situación tenemos pérdida de entrelazamiento, pero máxima probabilidad

asociada (intercambio determinista).

Gracias al análisis mediante expansiones de Taylor, nos damos cuenta de que una aproximación de primer orden resulta muy sólida para la concurrencia en el rango de  $\varepsilon$  y funciona excepcionalmente bien para valores superiores de esta amplitud, las cuales son de especial interés, pues la concurrencia presenta soluciones diferentes de cero aproximadamente cuando  $\varepsilon > 0,6$ . Al estudiar las expansiones de orden superior, pudimos notar la aparición de un patrón entre las aproximaciones de orden par e impar para las concurrencias, pues las expansiones de orden par presentaban mayor cantidad de discontinuidades al momento de representar una de las salidas de cada trío (**Caso A** y **Caso B**). Por ejemplo, los contornos de concurrencia para el resultado de la tríada que analizamos en las aproximaciones de orden 1 y 3 son extremadamente similares y esperamos que este comportamiento se repita si determinamos una aproximación de orden 5. Mientras tanto, las aproximaciones de orden 2 y 4 muestran estrechas similitudes entre ellas, con muchas discontinuidades en su representación gráfica.

En términos de probabilidad, la aproximación a orden 1 también es bastante precisa, sobretodo cuando  $\varepsilon > 0,6$  lo cual sigue siendo un resultado favorable, pues tal como se mencionó anteriormente, en este rango de valores, cuando se estudiaron las salidas para el caso de estados mixtos sin haber aplicado la expansión en serie, la concurrencia era superior a cero. A partir del orden dos, la probabilidad está perfectamente descrita por la aproximación en serie, incluyendo los casos en donde  $\varepsilon < 0,6$ .

Una conclusión global para esta última parte sería que los estados que analizamos para el protocolo de intercambio de entrelazamiento mixto son resistentes a pequeñas decoherencias.

## Bibliografía

- [1] Claude Shannon and Warren Weaver. *The Mathematical Theory of Communication*. University of Illinois Press, 1964.
- [2] S. Bose, V. Vedral, and P. L. Knight. Multiparticle generalization of entanglement swapping. *Physical Review A*, 57:822–829, 1998.
- [3] Sumeet Khatri, Anthony J. Brady, Renée A. Desporte, Manon P. Bart, and Jonathan P. Dowling. Spooky action at a global distance: analysis of space-based entanglement distribution for the quantum internet. *npj Quantum Information*, 7, 2021.
- [4] M. Gündogan, J.S. Sidhu, and V. et al. Henderson. Proposal for space-borne quantum memories for global quantum networking. *npj Quantum Information*, 7, 2021.
- [5] Christoph Simon. Towards a global quantum network. *Nature Photonics*, 11, 2017.
- [6] Yu-Ao Chen, Qiang Zhang, Teng Chen, Wen-Qi Cai, Liao Shengkai, Jun Zhang, Kai Chen, Juan Yin, Jianyu Wang, Zhu Chen, Sheng-Long Han, Qing Yu, Ken Liang, Fei Zhou, Xiao Yuan, Mei-Sheng Zhao, Tian-Yin Wang, Xiao Jiang, Liang Zhang, and Jian-Wei Pan. An integrated space-to-ground quantum communication network over 4,600 kilometres. *Nature*, 589, 2021.
- [7] M. Pompili, S. L. N. Hermans, S. Baier, H. K. C. Beukers, P. C. Humphreys, R. N. Schouten, R. F. L. Vermeulen, M. J. Tiggelman, L. dos Santos Martins, B. Dirkse, and et al. Realization of a multinode quantum network of remote solid-state qubits. *Science*, 372:259–264, 2021.
- [8] Lars Jaeger. *The Second Quantum Revolution*. Springer, 2018.
- [9] H.-J. Briegel, W. Dür, J. I. Cirac, and P. Zoller. Quantum repeaters: The role of imperfect local operations in quantum communication. *Phys. Rev. Lett.*, 81:5932–5935, 1998.
- [10] Mark Riebe, T. Monz, Kihwan Kim, A. Villar, Philipp Schindler, M. Chwalla, Markus Hennrich, and R. Blatt. Deterministic entanglement swapping with an ion-trap quantum computer. *Nature Physics*, 4:839–842, 2012.
- [11] Wen Ning, Xin-Jie Huang, Pei-Rong Han, Hekang Li, Hui Deng, zhen-biao

- Yang, Zhirong Zhong, Yan Xia, Kai Xu, Dongning Zheng, and Shi-Biao Zheng. Deterministic entanglement swapping in a superconducting circuit. *Physical Review Letters*, 123, 2019.
- [12] Xiao Liu, Jun Hu, Zong-Feng Li, Xue Li, Pei-Yun Li, Peng-Jun Liang, Zong-Quan Zhou, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo. Heralded entanglement distribution between two absorptive quantum memories. *Nature*, 594:41–45, 2021.
- [13] Philip Loubere. *A History of Communication Technology*. Routledge, 2021.
- [14] John Naughton. *A Brief History of the Future: From Radio Days to Internet Years in a Lifetime*. Overlook Books, 2001.
- [15] Benjamin Peters. A history of communications: Media and society from the evolution of speech to the internet. *New Media & Society*, 2011.
- [16] Johnny Ryan. *A History of the Internet and the Digital Future*. Reaktion Books, 2013.
- [17] Alejandro López, Andrea Parada, and Franco Simonetti. *Introducción a la psicología de la comunicación*. Ediciones Universidad Católica de Chile, 1995.
- [18] Radamés Linares, Mariela Patterson, and Larisa Viciedo. La información a través del tiempo. *ACIMED*, 8(3):228,229, 2000.
- [19] N. J. Smelser and P. B. Baltes. *International Encyclopedia of Social & Behavioral Sciences*, volume 20. Pergamon, 2001.
- [20] Ralph Hartley. Transmission of information. *Bell System Technical Journal*, 7:535–563, 1928.
- [21] Claude Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27:379–423, 623–656, 1948.
- [22] Claude Shannon. Communication theory of secrecy systems. *Bell System Technical Journal*, 28:656–715, 1949.
- [23] Mark Burgin. *Theory of Information Fundamentality, Diversity and Unification*, volume 1. World Scientific, 2009.
- [24] Marcello Delgado. Shannon information and the mutual information of two random variables. 2008.
- [25] G. Moore. Cramming more components onto integrated circuits. *Electronics Magazine*, 38, 1965.
- [26] Julien Frougier and Dechao Guo. Our 2 nm chip: the sum of several “aha!” moments. Recuperado en <https://research.ibm.com/blog/2-nm-chip> [2021, 23 de noviembre], 2021.
- [27] Rainer Dick. *Advanced Quantum Mechanics: Materials and Photons*, pages 1–23. Springer, 2016.

- [28] Michael Nielsen and Isaac Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2010.
- [29] Lokenath Debnath and Piotr Mikusinski. *Introduction to Hilbert spaces with applications*. Academic Press, 2005.
- [30] Bryan Rynne and M.A. Youngson. *Linear Functional Analysis*. Springer, 2007.
- [31] Stephen Barnett. *Quantum Information*. Oxford University Press, 2009.
- [32] Peter Woit. *Quantum Theory, Groups and Representations*, pages 25–33. Springer International Publishing, 2021.
- [33] F. Levin. *An Introduction to Quantum Theory*, pages 129 – 173. Cambridge University Press, 2001.
- [34] R. L. Jaffe. Supplementary notes on dirac notation, quantum states, etc., 2007.
- [35] Yakir Aharonov and Daniel Rohrlich. *Quantum Paradoxes: Quantum Theory for the Perplexed*, pages 121–124. Wiley-VCH, 2005.
- [36] Richard P. Feynman. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, 21, 1982.
- [37] Charles H. Bennett and Giles Brassard. Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. *Theoretical Computer Science*, 1984.
- [38] Stephen Wiesner. Conjugate coding. *ACM SIGACT News*, 15, 1983.
- [39] H. Lyons. The atomic clock. *The American Scholar*, 19:159–168, 1949.
- [40] Jonathan P. Dowling. Quantum sensors, computing, metrology, and imaging. *Optical Society of America*, 2011.
- [41] Mark Fox. *Quantum Optics: An Introduction*. Oxford University Press, 2006.
- [42] Gregg Jaeger. *Quantum Information: An Overview*. Springer-Verlag New York, 2007.
- [43] Linda Anticoli, Carla Piazza, Leonardo Tagliacarne, and Paolo Zuliani. Verifying quantum programs: From quipper to qPMC. *CoRR*, 2017.
- [44] Richard Jozsa. Quantum information and computation: Lecture notes., 2019. DAMTP Cambridge.
- [45] Yong Zhang. Lecture notes on quantum information and computation, 2015. School of Physics and Technology, Wuhan University.
- [46] B. Gnedenko and A. Khinchin. *An Elementary Introduction to the Theory of Probability*. Dover Publications, 2013.
- [47] Sarah Chehade and Anna Vershynina. Quantum entropies. *Scholarpedia*, 14, 2019.

- [48] J. Von Neumann. “Measurement and reversibility and the measuring process.” in *Quantum Theory and Measurement*, edited by J. A. Wheeler and W. H. Zurek, pages 549–647. Princeton U. Press, 1983.
- [49] Reinhold Bertlmann. Course of lectures: Theoretical physics t2, quantum mechanics, 2008.
- [50] A. Neumaier. *Coherent Quantum Physics: A Reinterpretation of the Tradition*, pages 239–246. De Gruyter, 2019.
- [51] R. Werner. Quantum states with einstein-podolsky-rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Physical Review*, 1989.
- [52] A. Acín. *Werner States*. In: Greenberger D., Hentschel K., Weinert F. (eds) *Compendium of Quantum Physics*. Springer, 2009.
- [53] Valerio Scarani. The device-independent outlook on quantum physics (lecture notes on the power of bell’s theorem), page 26, 2015.
- [54] Omar Jiménez. *Aplicaciones de la discriminación de estados cuánticos*. PhD thesis, Universidad de Concepción, 2009.
- [55] A. Zeilinger. *Essential quantum entanglement*. In G. Fraser (Ed.), *The New Physics: For the Twenty-First Century*, pages 257–267. Cambridge University Press, 2006.
- [56] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres, and William K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 70, 1993.
- [57] Charles H. Bennett and Stephen J. Wiesner. Communication via one- and two-particle operators on einstein-podolsky-rosen states. *Phys. Rev. Lett.*, 69, 1992.
- [58] Nicolas Gisin, Grégoire Ribordy, Wolfgang Tittel, and Hugo Zbinden. Quantum cryptography. *Rev. Mod. Phys.*, 74, 2002.
- [59] M. Żukowski, A. Zeilinger, M. A. Horne, and A. K. Ekert. “event-ready-detectors” bell experiment via entanglement swapping. *Phys. Rev. Lett.*, 71, 1993.
- [60] Ebubechukwu Ilo-Okeke, Louis Tessler, Jonathan Dowling, and Tim Byrnes. Entanglement-based quantum clock synchronization. volume 2241, 2020.
- [61] W. Heisenberg. Quantum-theoretical reinterpretation of kinematic and mechanical relations. *Zeitschrift fuer Physik*, 1925.
- [62] E. Schrödinger. An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. *Phys. Rev.*, 28, Dec 1926.
- [63] N. Bohr. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 48, 1935.

- [64] A Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, 1935.
- [65] E. Schrödinger. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik (the present situation in quantum mechanics). *Naturwissenschaften*, 23, 1935.
- [66] Nathan Rosen. *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*. In: Aichelburg P.C., Sexl R.U. (eds) *Albert Einstein*, pages 57–67. Vieweg+Teubner Verlag, 1979.
- [67] J. D. Trimmer. The present situation in quantum mechanics: A translation of schrödinger’s “cat paradox” paper. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 124:323–338, 1980.
- [68] D. Bohm. *Quantum Theory*. Prentice-Hall, 1951.
- [69] J. S. Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, 1, 1964.
- [70] Otfried Gühne and Géza Tóth. Entanglement detection. *Physics Reports*, 474:1–75, 2009.
- [71] Martin B. Plenio and Shashank Virmani. An Introduction to entanglement measures. *Quant. Inf. Comput.*, 7:1–51, 2007.
- [72] Debasis Sarkar. On measures of quantum entanglement — a brief review. *International Journal of Quantum Information*, 14, 2016.
- [73] Tracey Tessier. *Complementarity and Entanglement in Quantum Information Theory*. PhD thesis, The University of New Mexico, 2005.
- [74] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki, and Karol Horodecki. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, 81:865–942, 2009.
- [75] Charles H. Bennett, Herbert J. Bernstein, Sandu Popescu, and Benjamin Schumacher. Concentrating partial entanglement by local operations. *Phys. Rev. A*, 53, 1996.
- [76] A. Ekert and P. L. Knight. “entangled quantum systems and the schmidt decomposition”. *American Journal of Physics*, 63:415–423, 1995.
- [77] William Wootters. Entanglement of formation and concurrence. *Quantum Information & Computation*, 1:27–44, 2001.
- [78] William K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, 80:2245–2248, 1998.
- [79] Scott Hill and William K. Wootters. Entanglement of a pair of quantum bits. *Phys. Rev. Lett.*, 78, 1997.
- [80] Brian T. Kirby, Siddhartha Santra, Vladimir S. Malinovsky, and Michael Brodsky. The utility of entanglement swapping in quantum communications.

- In *Quantum Communications and Quantum Imaging XIV*, volume 9980, pages 95–100. SPIE, 2016.
- [81] Thomas Herbst, Thomas Scheidl, Matthias Fink, Johannes Handsteiner, Bernhard Wittmann, Rupert Ursin, and Anton Zeilinger. Teleportation of entanglement over 143 km. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112:14202–14205, 2015.
- [82] J. Yin, JG. Ren, and H. et al. Lu. Quantum teleportation and entanglement distribution over 100-kilometre free-space channels. *Nature*, 488:185–188, 2012.
- [83] D. Yurke, B. & Stoler. Einstein-podolsky-rosen effects from independent particle sources. *Physical review letters*, 68:1251–1254, 1992.
- [84] N. Boulant, K. Edmonds, J. Yang, M. A. Pravia, and D. G. Cory. Experimental demonstration of an entanglement swapping operation and improved control in nmr quantum-information processing. *Phys. Rev. A*, 68, 2003.
- [85] H. de Riedmatten, I. Marcikic, J. A. W. van Houwelingen, W. Tittel, H. Zbinden, and N. Gisin. Long-distance entanglement swapping with photons from separated sources. *Phys. Rev. A*, 71, 2005.
- [86] Thomas Jennewein, Gregor Weihs, Jian-Wei Pan, and Anton Zeilinger. Experimental nonlocality proof of quantum teleportation and entanglement swapping. *Phys. Rev. Lett.*, 88, 2001.
- [87] Rainer Kaltenbaek, Robert Prevedel, Markus Aspelmeyer, and Anton Zeilinger. High-fidelity entanglement swapping with fully independent sources. *Phys. Rev. A*, 79, 2009.
- [88] Jian-Wei Pan, Dik Bouwmeester, Harald Weinfurter, and Anton Zeilinger. Experimental entanglement swapping: Entangling photons that never interacted. *Phys. Rev. Lett.*, 80:3891–3894, 1998.
- [89] C. Branciard, N. Gisin, and S. Pironio. Characterizing the nonlocal correlations created via entanglement swapping. *Phys. Rev. Lett.*, 104, 2010.
- [90] Ariana Muñoz-Espinoza. Swapping de correlaciones cuánticas. Master’s thesis, Universidad de Concepción, Chile, 2014.
- [91] David W. Lyons, Abigail M. Skelton, and Scott N. Walck. Werner state structure and entanglement classification. *Advances in Mathematical Physics*, 2012.
- [92] J. Lee and M. S. Kim. Entanglement teleportation via werner states. *Physical Review Letter*, 84:4236–4239, 2000.
- [93] A. J. Short. No deterministic purification for two copies of a noisy entangled state. *Physical Review Letter*, 102, 2009.

- [94] Ashutosh Singh, Siva Pradyumna, A. R. P. Rau, and Urbasi Sinha. Manipulation of entanglement sudden death in an all-optical setup. *J. Opt. Soc. Am. B*, 34:681–690, 2017.
- [95] Hermann Albrecht, Douglas Mundarain, and Mario Caicedo. Local available quantum correlations for bell diagonal states and markovian decoherence. *Revista Mexicana de Física*, 64, 2018.
- [96] M. Barbieri, F. De Martini, G. Di Nepi, and P. Mataloni. Generation and characterization of werner states and maximally entangled mixed states by a universal source of entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 92, 2004.
- [97] Ting Yu and J. H. Eberly. Sudden death of entanglement. *Science*, 323: 598–601, 2009.
- [98] Ting Yu and J. H. Eberly. Evolution from entanglement to decoherence of bipartite mixed “x” states. *Quantum Info. Comput.*, 7:459–468, 2007.
- [99] Brook Taylor. *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*. 1715.

