Universidad de Concepción
Facultad de ciencias físicas y matemáticas
Departamento de física

GRAVEDAD EN 4D A PARTIR DE SIMETRÍAS DE POINCARÉ GENERALIZADAS

Tesis presentada para optar al grado académico de Magíster en Ciencias con Mención en Física

Por: Leonardo Felipe Cárdenas Moraga

Profesor Guía: Patricio Salgado Arias

Concepción, Chile.
5 de abril de 2023.

Guía de tesis	:	Dr. Patricio Salgado A.
Comisión		
(Interno)	:	Dr. Fernando Izaurieta A.
(Interno)	:	Dr. Julio Oliva Z.
(Externo)	:	Dr. Luis Roa O.
Director(S) del programa	:	Dr. Esteban Sepulveda G.

Dedicado a los grandes maestros de mi vida, de quienes obtengo todo lo que soy: Las aves, las nubes, la musica, las plantas y sus flores, las personas que caminan por las calles de Concepción, los automovilistas apurados y el ruido de la ciudad, los amigos, los silencios, las tardes tristes, la compañía de regreso a casa, y al tiempo que marcha y se escapa entre mis manos.

Agradecimientos

No tengo forma de agradecer lo suficiente a todas las personas que han compartido junto a mi a lo largo de estos años de estudio, son muchas las personas que de forma directa o indirecta me han transmitido su apoyo, sabiduría, y entusiasmo. Quiero agradecer en primer lugar a mi profesor guía, Dr. Patricio Salgado por su apoyo y paciencia, sus concejos y el entusiasmo por la física que lo caracteriza. Quiero agradecer también a los docentes, y a todo el personal que forma parte de la facultad de ciencias físicas y matemáticas quienes nos enseñan cada día con cada labor que desempeñan. Quiero agradecer a mis compañeros con quienes compartimos alegrías y tristezas, tardes de conversación, discusiones y risas. Por ultimo y no menos importante agradecer a mi familia que me apoya en cada cosa que hago.

Este fue un periodo de muchas dificultades y fue coronado con una pandemia terrible que nos puso contra las cuerdas, pero concluye y a pesar de todo, fue agradable.

Índice general

Agradecimientos I

Resumen V

Introducción VII

1. Preliminares matemáticos **1**
- 1.1. Formalismo de Cartan: Vielbein y conexión de espin . . . 1
- 1.2. Bases ortonormales . . . 2
- 1.3. Notación y convenciones . . . 4

2. Álgebras de Poincaré generalizadas y álgebras AdS-Lorentz **5**
- 2.1. Introducción . . . 5
- 2.2. Álgebras $AdS\mathcal{L}_4$, $AdS\mathcal{L}_5$ y $AdS\mathcal{L}_6$ . . . 7
- 2.3. Álgebras $\mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{B}_5$ y $\mathfrak{B}_6$ . . . 8

3. Relatividad general con formas diferenciales **10**
- 3.1. Gravedad como teoría de gauge . . . 10
- 3.2. Formas de Maurer-Cartan Valuadas en el álgebra de Poincaré . . . 11
- 3.3. Formas de Maurer-Cartan evaluadas en el álgebra de Maxwell . . . 14
- 3.4. Acción de Einstein-Hilbert . . . 16
- 3.5. Extensión de Maxwell para gravedad de Einstein con término cosmológico generalizado . . . 17

4. Gravedad en $4D$ con simetrías $AdS\mathcal{L}_4$ **21**
- 4.1. Ecuaciones de estructura . . . 21
- 4.2. Identidades de Bianchi . . . 23
- 4.3. Transformaciones de los campos de gauge . . . 23
- 4.4. Transformación de las intensidades de campo $\mathbf{F}$ . . . 25
- 4.5. Lagrangiano para gravedad con simetrías $AdS\mathcal{L}_4$ . . . 27
- 4.6. Ecuaciones de campo para la extensión $AdS\mathcal{L}_4$ . . . 28

5. Gravedad en $4D$ con simetrías $AdS\mathcal{L}_5$ **32**
- 5.1. Ecuaciones de estructura . . . 32
- 5.2. Identidades de Bianchi . . . 34
- 5.3. Transformaciones de los campos A . . . 35

5.4. Transformación de las intensidades de campo $\mathbf{F}$ 37
5.5. Lagrangiano para gravedad con simetrías $AdS\mathcal{L}_5$ 40
5.6. Ecuaciones de campo para la extensión $AdS\mathcal{L}_5$ 41

6. Gravedad en $4D$ con simetrías $AdS\mathcal{L}_6$ 45
6.1. Ecuaciones de estructura 45
6.2. Identidades de Bianchi 49
6.3. Trasformación de los campos de gauge 49
6.4. Transformación de las intensidades de campo $\mathbf{F}$ 53
6.5. Lagrangiano para gravedad en $4D$ con simetrías $AdS\mathcal{L}_6$ 56
6.6. Ecuaciones de campo para la extensión $AdS\mathcal{L}_6$ 57

7. Extensión $\mathfrak{B}_{4,5,6}$ de la gravedad a partir de contracción Inonu-Wigner 61
7.1. Contracción de Inonu Wigner para acciones para la gravedad con simetrías AdS-Lorentz 61
7.2. Contracción del lagrangiano con simetrías $AdS\mathcal{L}_4$ 62
7.3. Contracción del lagrangiano con simetrías $AdS\mathcal{L}_5$ 63
7.4. Contracción acción con simetrías $AdS\mathcal{L}_6$ 64

Conclusiones 66

A. Álgebras (A)dS, Poincaré y Lorentz 67

B. Identidades de Bianchi 69

C. Calculo de transformaciones 71

D. Procedimiento de expansión de álgebras 77

Resumen

Construiremos gravedades cuadri-dimensionales a partir de las simetrías de Poincaré generalizadas $AdS\mathcal{L}_n$ y $\mathfrak{B}_n$ con $n = 4, 5, 6$. En el capitulo 1 se presentarán los elementos matemáticos básicos necesarios para el desarrollo de esta tesis. En el capitulo 2 se presentará el mecanismo de construcción de las álgebras de Poincaré generalizadas y álgebras AdS-Lorentz, mediante el procedimiento de S-expansión y contracción generalizada de Inonu Wigner. En el capitulo 3 se presentará el formalismo para construir una teoría de la gravedad como teoría de gauge, en particular, relatividad general como una teoría de gauge del álgebra de Poincaré y del álgebra de Maxwell como extensión de la anterior. En los capítulos 4, 5, y 6 se presentará la construcción de acciones gravitacionales que involucran simetrías AdS-Lorentz. Finalmente en el capitulo 7 se estudiarán las acciones obtenidas por medio de contracciones de Inonu-Wigner que generalizan la gravedad de Einstein. En el apéndice A se presenta una breve descripción de las álgebras AdS, Poincaré y Lorentz, en el apéndice B se presenta una introducción al calculo de las identidades de Bianchi, en el apéndice C se muestra la contribución de cada conmutador para las transformaciones de los campos A y $\mathbf{F}$ y finalmente en apéndice D se presenta brevemente el procedimiento de expansión de álgebras.

Introducción

Las teorías de gauge han sido ampliamente estudiadas y de variadas formas. Estas teorías tienen su origen en la teoría electromagnética de James Clerk Maxwell. En 1918 Herman Weyl propone la idea de invariancia de gauge, Weyl conjeturo que si el efecto de un campo gravitacional puede ser descrito por una conexión, la cual da la orientación relativa de los sistemas de referencia locales, entonces podría ser posible que otras interacciones existentes en la naturaleza sean descritas por conexiones similares. A lo largo de los años se han construido teorías de la gravedad invariantes de gauge con grupos de simetrías de Poincaré, AdS, AdS-Lorentz, y simetrías de Poincaré generalizadas (álgebras $\mathcal{B}$), las cuales han sido construidas a partir de formas Chern-Simons, y/o términos Wess-Zumino-Witten, etc. La gran mayoría de estas construcciones han sido llevadas a cabo en dimensiones impares, con algunas excepciones (términos Wess-Zumino-Witten, gravedades Born Infeld). Las implicaciones de la existencia de espacios-tiempo con simetrías dadas tanto por álgebras de Poincaré generalizadas como por álgebras de AdS generalizadas, fueron estudiadas, en el caso de las dimensiones impares, en las referencias [17] [18], [10], y en las dimensiones pares, en el contexto de WZW en las Referencias [20], [21], [22], [23], [24]. Las consecuencias de considerar un espacio-tiempo con simetrías de Maxwell en la descripción del campo gravitatorio han sido estudiadas, en el contexto de gravedad de Chern-Simons, en las Referencias [11], [16],[19], y en el contexto de la gravedad cuadridimensional, en las Referencias [1], [2], donde se amplió el marco geométrico estándar de la gravedad de Einstein mediante una teoría de gauge del álgebra de Maxwell que condujo a un término cosmológico generalizado que incluye una contribución de los seis campos de cuadri-vectores k_μ^{ab} que introducen un nuevo conjunto de curvaturas denotadas por F_μ^{ab} además de las conocidas torsión T^a y la curvatura de Lorentz R^{ab} que permiten construir generalizaciones de la acción de Einstein.

Sumado a esto el estudio de los grupos y álgebras de Lie ha tenido innumerables aplicaciones tanto en la física Newtoniana como en la física moderna. La razón principal del éxito de la teoría de grupos en física es que captura de forma elegante el concepto de simetría. Establecido en el teorema de Noether, las leyes de conservación de un sistema físico están directamente relacionados con el grupo de simetría que posee dicho sistema. Esto conduce a importantes propiedades de los sistemas físicos que subyacen en el álgebra de simetría de la acción. Las álgebras de Lie son una herramienta esencial tanto en teoría cuántica de campos como en la teoría general de la relatividad. Además se han desarrollado mecanismos que permiten obtener relaciones no triviales entre distintas álgebras de Lie, es decir, estos mecanismos nos permiten obtener nuevas álgebras que no son isomorfas a la original. Entre estos mecanismos tenemos las contracciones, deformaciones y las extensiones de álgebras. Un ejemplo de esto es la relación entre el álgebra de Poincaré y el álgebra $(A)dS$, las cuales tienen igual dimensión pero poseen propiedades distintas y están relacionadas mediante una contracción de Inonu-Wigner [5] [6] , mecanismo que sera utilizado en el capitulo 7. Otro ejemplo es el álgebra de Maxwell [3], [4] que puede obtenerse a partir del álgebra $(A)dS$ utilizando el procedimiento de expansión del álgebra de Lie desarrollado en las Referencias [6], [7], [8], [9]. Este procedimiento permite obtener dos familias de álgebras, que se conocen como álgebras de Poincaré generalizadas (también llamadas álgebras $\mathfrak{B}_n$, donde el álgebra de Maxwell corresponde al caso particular conocido como álgebra $\mathfrak{B}_4$) y álgebras AdS generalizadas (también llamadas álgebras $AdS\mathcal{L}_n$) [11], [12], [13].

Haciendo uso del mecanismos estudiado en [1] construiremos acciones invariantes para gravedad en 4 dimensiones, que resultan en extensiones de la gravedad de Einstein. Ya que la geometría del espacio-tiempo basada en álgebras de Poincaré generalizadas $\mathfrak{B}$ y AdS-Lorentz implican nuevos campos gauge y, por tanto, nuevas curvaturas tensoriales, podemos construir nuevas acciones gravitacionales que conducen a modificaciones de la gravedad estándar, objetivo principal de esta tesis. Obtener una comprensión del campo gravitatorio a partir de la construcción directa de acciones invariantes de 4-dimensiones tanto bajo las álgebras de Poincaré generalizadas como bajo las álgebras de $AdS\mathcal{L}_n$ es interesante problema abierto y se espera que los resultados obtenidos en esta tesis nos permitan abordar temas como cosmología y agujeros negros, y obtener correspondientes generalizaciones.

Capítulo 1

Preliminares matemáticos

El uso del lenguaje de las formas diferenciales es indispensable para el desarrollo de esta tesis, por lo que en este capitulo se recordara brevemente propiedades y convenciones. Puede ser encontrada en la literatura, diversos textos con un desarrollo mas acabado de los conceptos presentados como en [31], [33].

Se define una p-forma o forma diferencial de grado p, función multilineal totalmente antisimétrica, definida para un espacio de dimensión n, como

$$\alpha = \frac{1}{p!}\alpha_{\mu_1\cdots\mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}, \tag{1.1}$$

donde $\wedge$ denota el producto cuña, el cual es un producto antisimétrico que satisface lo siguiente

Sean α y β una p-forma y q-forma respectivamente, el producto exterior entre ambos objetos estará dado por

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq}\, \beta \wedge \alpha. \tag{1.2}$$

La derivada exterior d es una operación que aumenta el grado de la forma en uno, es decir $d : T^p(P) \rightarrow T^{p+1}(P)$ y satisface la regla de Leibnitz graduada

$$d\,(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p\, \alpha \wedge \beta, \tag{1.3}$$

y satisface el lema de Poincaré

$$d\,(d\alpha) = 0. \tag{1.4}$$

Estas propiedades se asumen conocidas y el uso del símbolo $\wedge$ para el producto entre formas se omite por razones de comodidad, ya que todo producto, salvo que se indique lo contrario, será antisimétrico.

1.1. Formalismo de Cartan: Vielbein y conexión de espin

El formalismo de Cartan enfatiza la noción de localidad e independencia entre la estructura métrica y afín del espaciotiempo, manteniendo la idea de una cantidad invariante bajo transformaciones locales de Lorentz. Se puede definir un espacio tangente $T_P(\mathcal{M})$ en cada punto de una variedad d-dimensional. Considerando el sistema coordenado x^λ definimos una base coordenada para $T_P(\mathcal{M})$ como

$$\partial_\mu = \partial_\mu (P) \,, \tag{1.5}$$

base que en general no es ortonomal, puesto que

$$\partial_\mu \cdot \partial_\nu = g_{\mu\nu}. \tag{1.6}$$

Considerando que para cada punto P siempre puede escogerse un conjunto de vectores base $\{e_a\}$ ortonormales, tal que

$$e_a \cdot e_b = e_a^{\ \mu} e_b^{\ \nu} g_{\mu\nu} = \eta_{ab}, \tag{1.7}$$

donde $\eta_{ab} = diag(-1,+1,+1,+1)$ es la métrica de Minkwoski. Esto permite establecer en el espacio tangente una base ortonormal que denotaremos por $\{e_a\}$ y su dual por $\{e^a\}$. Las bases coordenadas y ortonormales se relacionan por medio de

$$\partial_\mu = e^a_{\ \mu} e_a \Longleftrightarrow e_a = e^\mu_{\ a} \partial_\mu, \tag{1.8}$$
$$dx^\mu = e^\mu_{\ a} e^a \Longleftrightarrow e^a = e^a_{\ \mu} dx^\mu. \tag{1.9}$$

Donde

- $\{e_a\}$ denotará una base ortonormal de vectores.
- $\{e^a\}$ denotará una base ortonormal de 1-formas.
- $\{\omega^a_{\ b}\}$ denotará la 1-forma conexión en una base ortonormal.
- $\{T^a\}$ denotará la 2-forma torsión en una base ortonormal.
- $\{R^a_{\ b}\}$ denotará la 2-forma curvatura en una base ortonormal.

1.2. Bases ortonormales

Podemos introducir un campo de vectores bases unitarios y ortogonales, los cuales satisfacen

$$e_a \cdot e_b = \eta_{ab} \ = \begin{cases} \pm 1 & ,\textit{si } a = b, \\ 0 & ,\textit{si } a \neq b. \end{cases} \tag{1.10}$$

En el caso de la teoría de la relatividad general bajo una transformación de coordenadas

- Las bases cambian como $\bar{e}^a(x) = \Lambda^a_{\ b}(x) e^b(x)$.
- La 1-forma conexión cambia como $\bar{\omega} = \Lambda \omega \Lambda^{-1} - d\Lambda \Lambda^{-1}$.
- La 2-forma curvatura cambia como tensor $\bar{R} = \Lambda R \Lambda^{-1}$.

Sabemos que en una base arbitraria es válida la ecuación $dg_{\mu\nu} = \Omega_{\mu\nu} + \Omega_{\nu\mu}$. En una base ortonormal se tiene que

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{ab} \; ; \qquad \Omega_{\mu\nu} \equiv \omega_{ab}, \tag{1.11}$$

de modo que en una base ortonormal siempre se cumplirá

$$d\eta_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{ba} = 0. \tag{1.12}$$

entonces $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$. Esto significa que en 4-dimensiones $\omega \in SO(3,1)$. Es decir es un elemento del álgebra de Lie del grupo de Lorentz. Esto significa a su vez que para campos vierbein e^a, la ecuación $\bar{e}^a = \Lambda^a_{\ b} e^b$ es una transformación de Lorentz dependiente de la posición, por lo tanto podemos escribir

$$\bar{e}^a(x) = \Lambda^a_{\ b}(x) e^b(x), \qquad \Lambda^a_{\ b}(x) \in SO(3,1), \tag{1.13}$$

$$\bar{\omega}^a_{\ b}(x) = \Lambda^a_{\ c}(x)\omega^c_{\ d}(x)\Lambda^{-1\, d}_{\quad\ b} - d\Lambda^a_{\ c}(x)\Lambda^{-1\, c}_{\quad\ b}(x). \tag{1.14}$$

De la segunda ecuación vemos que para algún punto x_0 siempre es posible elegir un $\Lambda(x)$ de manera tal que se cumpla que $\bar{\omega}(x_0) = 0$. Esto significa que

$$\bar{\omega}(x_0) = \Lambda(x_0)\omega(x_0)\Lambda^{-1}(x_0) - d\Lambda(x_0)\Lambda^{-1}(x_0) = 0. \tag{1.15}$$

Luego tenemos

$$\Lambda(x_0)\omega(x_0)\Lambda^{-1} = d\Lambda(x_0)\Lambda^{-1}(x_0). \tag{1.16}$$

Multiplicando por $\Lambda^{-1}(x_0)\Lambda(x_0)$ fácilmente se obtiene

$$\omega(x_0) = \Lambda^{-1}(x_0) d\Lambda(x_0). \tag{1.17}$$

Si $\omega^a_{\ b}(x_0) = 0$, y si la conexión es nula en un punto, entonces $e^a(x)$ describe un sistema inercial en x_0. Esto significa que en el punto x_0 , la derivada covariante exterior D coincide con la derivada exterior d.

***Teorema* 1.2.1** *La métrica $g = \eta_{ab} e^a e^b$ es invariante bajo la transformación $\bar{e} = \Lambda^a_{\ b} e^b$ donde $\eta_{cd} = \bar{\eta}_{ab} \Lambda^a_{\ c} \Lambda^b_{\ d}$. Por analogía con las transformaciones de gauge de la electrodinámica y de las teorías de Yang-Mills, las transformaciones de Lorentz $\bar{e} = \Lambda^a_{\ b} e^b$ son llamadas transformaciones de gauge.*

La teoría general de la relatividad es invariante bajo estas transformaciones por lo que se dice que la relatividad general es una muy particular teoría de gauge no abeliana. El campo vierbein puede ser considerado como el potencial del campo gravitacional debido a que variaciones de e^a inducen variaciones en la métrica.

En una base ortonormal tenemos que

(a) $d\eta_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{ba}$, donde $d\eta_{ab} = 0$.

(b) $T^a = de^a + \omega^a_{\ b} \wedge e^b$.

(c) $R^a_{\ b} = d\omega^a_{\ b} + \omega^a_{\ c} \wedge \omega^c_{\ d}$.

1.3. Notación y convenciones

Para comenzar el estudio de acciones invariantes establecemos las bases sobre las cuales trabajaremos, entonces vamos a definir la variedad $\mathcal{M}$ espaciotemporal, de dimensión d con signatura Lorentziana. La notación para los índices es la siguiente

- Índices de una base coordenada en variedad $\mathcal{M}$ $(\mu, \nu, \ldots)$.
- Índices del espacio tangente $(a, b, c, \ldots)$.

Es conveniente escribir la relatividad general en términos de un vierbein $e^{a}_{\ \mu}$ y una conexión de espín $\omega^{ab}_{\ \ \mu}$. La variedad $\mathcal{M}$ tiene su espacio tangente en un punto P, $T_P(\mathcal{M})$ y su dual $T^*_P(\mathcal{M})$ con grupo de estructura $SO(D-1,1)$. En esta tesis vamos a trabajar en $d=4$. $T_P(\mathcal{M})$ y $T^*_P(\mathcal{M})$ tienen la misma topología. Esto quiere decir que el vierbein corresponde a un isomorfismo entre estos dos espacios. El isomorfismo $e^{a}_{\ \mu}$ y la conexión de espín $\omega^{ab}_{\ \ \mu}$ pueden ser consideradas como variables dinámicas de la relatividad general. En lo que respecta a constantes y letras se establece lo siguiente

Símbolo	Descripción
$\mathcal{M}$	Variedad diferenciable d-dimensional
$T_P(\mathcal{M})$	Espacio tangente en cada punto de $\mathcal{M}$
x^μ	Sistema de coordenadas arbitrario de la variedad $\mathcal{M}$.
dx^μ	Vector base del espacio tangente a $\mathcal{M}$.
λ	Constante cosmológica estándar $[\lambda]=M^2$.
κ	Constante de gravitación de Einstein $[\kappa]=M^{-2}$.
l	Parámetro con unidades de distancia.
$\Lambda=\frac{1}{l^2}$	Constante de dimensión $[\Lambda]=M^2$,
μ	Constante definida como $\frac{\lambda}{\Lambda}$.
$A=A^A_\mu T_A dx^\mu$	Campos de gauge.
$\mathbf{F}$	Curvatura general.
$D=d+\omega$	Derivada covariante de Lorentz.
$\{e_a\}$	Base ortonormal de vectores.
$\{e^a\}$	Base ortonormal de 1-formas.
$\omega^a_{\ b}$	1-forma conexión en una base ortonormal.
η_{ab}	Métrica de Minkowsky
T^a	Usual 2-forma torsión en una base ortonormal.
$R^a_{\ b}$	Usual 2-forma curvatura en una base ortonormal.
S	Semigrupo.
λ_α	Elemento de un semigrupo.
$\mathfrak{g}$	Álgebra de Lie.
$K_{\alpha_1\cdots\alpha_n}{}^{\rho}$	n-selector.

Cuadro 1.1: Tabla de símbolos

Capítulo 2

Álgebras de Poincaré generalizadas y álgebras AdS-Lorentz

2.1. Introducción

El procedimiento de expansión de álgebras de Lie vía semigrupos, o S-expansión, consiste en la generación de nuevas álgebras de Lie a partir de una original. Esto se logra multiplicando los generadores de un álgebra con elementos de un semigrupo abeliano, obteniendo nuevos generadores, los cuales dan lugar a una nueva álgebra de Lie con un número de generadores mayor al del álgebra original. Una expansión es, en general, un proceso de cambio de dimensión de un álgebra, es decir, es una forma de obtener nuevas álgebras de dimensiones cada vez más altas a partir de una dada. Una motivación física para aumentar la dimensión de las álgebras de Lie es que aumentar el número de generadores de un álgebra es una forma no trivial de ampliar las simetrías del espaciotiempo Ejemplos de esto se pueden encontrar en [1], [2], [14], [15].

La primera noción de expansión de álgebras surge en el año 2003 en el trabajo de Hatsuda y sakaguchi [6], los trabajos de De Azcarraga, Izquierdo, Picón y Varela [7] y luego en 2006 Izaurieta, Rodriguez y Salgado proponen la generalización de método que conocemos como S-expansión. En el apéndice D se presentan algunos de los principales aspectos del procedimiento. Las álgebras de Poincaré generalizadas son estudiadas con mas detalle en [8], [9] y [11]. Algunas conclusiones de importancia son discutidos a continuación.

El álgebra generalizada de Poincaré $\mathfrak{B}_n$ puede obtenerse a partir del álgebra de anti-de-Sitter y del semigrupo $S_E^{2n-1} = \{\lambda_0, \cdots, \lambda_{2n}\}$, cuya ley de multiplicación viene dada por

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_{\alpha+\beta} \quad \textit{cuando} \quad \alpha + \beta \leq 2n, \tag{2.1}$$

y

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_{2n} \quad \textit{cuando} \quad \alpha + \beta > 2n, \tag{2.2}$$

donde λ_{2n} corresponde al elemento cero del semigrupo. Los generadores de $\mathfrak{B}_n$ denotados por $\left(P_a, J_{ab}, Z_{ab}^{(i)}, Z_a^{(i)}\right)$ satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$
\begin{aligned}
[P_a, P_b] &= Z_{ab}^{(i)}, \quad [J_{ab}, P_c] = \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b, \\
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{bc}J_{ad} + \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac}, \\
\left[J_{ab}, Z_c^{(i)}\right] &= \eta_{bc}Z_a^{(i)} - \eta_{ac}Z_b^{(i)}, \\
\left[Z_{ab}^{(i)}, P_c\right] &= \eta_{bc}Z_a^{(i)} - \eta_{ac}Z_b^{(i)}, \\
\left[Z_{ab}^{(i)}, Z_c^{(j)}\right] &= \eta_{bc}Z_a^{(i+j)} - \eta_{ac}Z_b^{(i+j)}, \\
\left[J_{ab}, Z_{cd}^{(i)}\right] &= \eta_{bc}Z_{ad}^{(i)} + \eta_{ad}Z_{bc}^{(i)} - \eta_{ac}Z_{bd}^{(i)} - \eta_{bd}Z_{ac}^{(i)}, \\
\left[Z_{ab}^{(i)}, Z_{cd}^{(j)}\right] &= \eta_{bc}Z_{ad}^{(i+j)} + \eta_{ad}Z_{bc}^{(i+j)} - \eta_{ac}Z_{bd}^{(i+j)} - \eta_{bd}Z_{ac}^{(i+j)}, \\
\left[P_a, Z_b^{(i)}\right] &= Z_{ab}^{(i+1)}, \\
\left[Z_a^{(i)}, Z_b^{(j)}\right] &= Z_{ab}^{(i+j+1)},
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

donde, $\tilde{J}_{ab}$ y $\tilde{P}_a$ son los generadores del álgebra de anti-de-Sitter y $J_{ab} = \lambda_0 \otimes \tilde{J}_{ab}$, $Z_{ab}^{(i)} = \lambda_{2i} \otimes \tilde{J}_{ab}$, $P_a = \lambda_1 \otimes \tilde{P}_a$ y $Z_a^{(i)} = \lambda_{2i+1} \otimes \tilde{P}_a$, con $i, j = 0, 1, \cdots, n-1$. A partir de las relaciones de conmutación (2.3) vemos que el conjunto $\mathfrak{B}_n^I = \left(P_a, Z_{ab}^{(i)}, Z_a^{(i)}\right)$ satisface las condiciones

$$
\left[\mathfrak{B}_n^I, \mathfrak{B}_n^I\right] \subset \mathfrak{B}_n^I, \qquad \left[so(3,1), \mathfrak{B}_n^I\right] \subset \mathfrak{B}_n^I, \tag{2.4}
$$

es decir, $\mathfrak{B}_n^I$ es un ideal del álgebra de Poincaré generalizada $\mathfrak{B}_n$ cuyos generadores son $\left(P_a, Z_{ab}^{(i)}, Z_a^{(i)}\right)$. Esto significa que el álgebra de Poincaré generalizada $\mathfrak{B}_n$ es la suma semidirecta del álgebra de Lorentz $so(3,1)$ y el ideal $\mathfrak{B}_n^I$, esto es

$$
\mathfrak{B}_n = so(3,1) \uplus \mathfrak{B}_n^I. \tag{2.5}
$$

A partir de (2.3) también es posible ver que para $i = 0$, $n = 1$ tenemos el álgebra de Poincaré que en esta nomenclatura llamaremos $\mathfrak{B}_1$, también llamado $\mathfrak{B}_3$; para $i = 1$, $n = 2$ tenemos el álgebra de Maxwell que en esta nomenclatura llamaremos $\mathfrak{B}_2$, también llamado $\mathfrak{B}_4$; para $i = 2$, $n = 3$ tenemos el álgebra, $\mathfrak{B}_3$, también llamada $\mathfrak{B}_5$; para $i = 3$, $n = 4$ tenemos el álgebra $\mathfrak{B}_4$ (también llamada $\mathfrak{B}_6$), etc. Por otro lado, las álgebras $AdS\mathcal{L}_n$, pueden obtenerse a partir del álgebra de anti-de-Sitter y el semigrupo $S_{\mathcal{M}}^{(N)} = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha=0}^N$ cuya ley de multiplicación viene dada por

$$
\lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_{\alpha+\beta} \quad \textit{donde} \quad \alpha + \beta \leq N, \tag{2.6}
$$

y

$$
\lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_{\alpha+\beta-2[(N+1)/2]} \quad \alpha + \beta > N, \tag{2.7}
$$

donde $[x]$ es la parte entera de x. Notamos que para N impar el semigrupo $S_M^{(N)}$ coincide con el grupo cíclico $\mathbb{Z}_{N+1}$ de $(N+1)$ elementos. Puede ser de interés mencionar para las álgebras AdS$\mathcal{L}_n$ con $n = 3, 4, 5, 6$ se encuentra que en los casos $n = 3$ y 5 no pueden ser expresados como una suma semidirecta del álgebra de Lorentz y un ideal, mientras que para los casos $n = 4$ y 6 es directo ver que pueden ser escritos como suma semidirecta del álgebra de Lorentz y un ideal .

A partir del método de la S-expansión podemos obtener entonces las llamadas álgebras de Poincaré generalizadas y álgebras AdS Lorentz, las cuales utilizaremos para construir nuestra teoría de la gravedad.

2.2. Álgebras $AdS\mathcal{L}_4$, $AdS\mathcal{L}_5$ y $AdS\mathcal{L}_6$

A continuación se presentarán definiciones de las álgebras de interés para esta tesis

***Definición* 2.2.1 (Álgebra $AdS\mathcal{L}_4$)** *El álgebra $AdS\mathcal{L}_4$ se obtiene al aplicar el método de S-expansión al álgebra de Lie AdS usando como semigrupo $S_M^{(2)} = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ dotado de la regla de multiplicación $\lambda_\alpha\lambda_\beta = \lambda_{\alpha+\beta}$, si $\alpha + \beta \leqslant 2$, y $\lambda_\alpha\lambda_\beta = \lambda_{\alpha+\beta-2}$ si $\alpha + \beta > 2$. Esta álgebra satisface las siguientes reglas de conmutación*

$$[P_a, P_b] = Z_{ab}, \tag{2.8a}$$
$$[Z_{ab}, P_c] = \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b, \tag{2.8b}$$
$$[J_{ab}, P_c] = \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b, \tag{2.8c}$$
$$[Z_{ab}, Z_{cd}] = \eta_{bc}Z_{ad} + \eta_{ad}Z_{bc} - \eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{bd}Z_{ac}, \tag{2.8d}$$
$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{bc}J_{ad} + \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac}, \tag{2.8e}$$
$$[J_{ab}, Z_{cd}] = \eta_{bc}Z_{ad} + \eta_{ad}Z_{bc} - \eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{bd}Z_{ac}. \tag{2.8f}$$

***Definición* 2.2.2 (Álgebra $AdS\mathcal{L}_5$)** *Aplicando el método de la S-expansión al álgebra de Lie AdS usando como semigrupo $S_M^{(3)} = \mathbb{Z}_4 = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ dotado de la regla de multiplicación $\lambda_\alpha\lambda_\beta = \lambda_{\alpha+\beta}$, si $\alpha + \beta \leqslant 3$, y $\lambda_\alpha\lambda_\beta = \lambda_{\alpha+\beta-3}$ si $\alpha + \beta > 3$ después de extraer la subálgebra resonante, se encuentra que los generadores del álgebra $AdS\mathcal{L}_5$, satisfacen las siguientes relaciones de conmutación*

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{bc}J_{ad} + \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac}, \tag{2.9a}$$
$$[J_{ab}, Z_{cd}] = \eta_{bc}Z_{ad} + \eta_{ad}Z_{bc} - \eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{bd}Z_{ac}, \tag{2.9b}$$
$$[Z_{ab}, Z_{cd}] = \eta_{bc}Z_{ad} + \eta_{ad}Z_{bc} - \eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{bd}Z_{ac}, \tag{2.9c}$$
$$[J_{ab}, P_c] = \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b, \tag{2.9d}$$
$$[J_{ab}, Z_c] = \eta_{bc}Z_a - \eta_{ac}Z_b, \tag{2.9e}$$
$$[Z_{ab}, P_c] = \eta_{bc}Z_a - \eta_{ac}Z_b, \tag{2.9f}$$
$$[Z_{ab}, Z_c] = \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b, \qquad [P_a, P_b] = Z_{ab}, \tag{2.9g}$$
$$[Z_a, P_b] = J_{ab}, \qquad [Z_a, Z_b] = Z_{ab}, \qquad [Z_a, P_b] = J_{ab}. \tag{2.9h}$$

***Definición* 2.2.3 (Álgebra $AdS\mathcal{L}_6$)** *Al aplicar el método de S-expansión de álgebras de Lie al álgebra AdS usando como semigrupo $S_M^{(4)} = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ dotado de la regla de multiplicación $\lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_{\alpha+\beta}$, si $\alpha + \beta \leqslant 4$, y $\lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_{\alpha+\beta-4}$ si $\alpha + \beta > 4$ y después de extraer una subálgebra resonante, se encuentra el álgebra $AdS\mathcal{L}_6$, cuyos generadores satisfacen las siguientes relaciones de conmutación*

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{bc} J_{ad} + \eta_{ad} J_{bc} - \eta_{ac} J_{bd} - \eta_{bd} J_{ac}, \tag{2.10a}$$

$$[J_{ab}, Z_{cd}] = \eta_{bc} Z_{ad} + \eta_{ad} Z_{bc} - \eta_{ac} Z_{bd} - \eta_{bd} Z_{ac}, \tag{2.10b}$$

$$\left[J_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right] = \eta_{bc} \hat{Z}_{ad} + \eta_{ad} \hat{Z}_{bc} - \eta_{ac} \hat{Z}_{bd} - \eta_{bd} \hat{Z}_{ac}, \tag{2.10c}$$

$$[Z_{ab}, Z_{cd}] = \eta_{bc} Z_{ad} + \eta_{ad} Z_{bc} - \eta_{ac} Z_{bd} - \eta_{bd} Z_{ac}, \tag{2.10d}$$

$$\left[Z_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right] = \eta_{bc} Z_{ad} + \eta_{ad} Z_{bc} - \eta_{ac} Z_{bd} - \eta_{bd} Z_{ac}, \tag{2.10e}$$

$$\left[\hat{Z}_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right] = \eta_{bc} \hat{Z}_{ad} + \eta_{ad} \hat{Z}_{bc} - \eta_{ac} \hat{Z}_{bd} - \eta_{bd} \hat{Z}_{ac}, \tag{2.10f}$$

$$[J_{ab}, P_c] = \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b, \qquad [J_{ab}, Z_c] = \eta_{bc} Z_a - \eta_{ac} Z_b, \tag{2.10g}$$

$$[Z_{ab}, P_c] = \eta_{bc} Z_a - \eta_{ac} Z_b, \qquad [Z_{ab}, Z_c] = \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b, \tag{2.10h}$$

$$\left[\hat{Z}_{ab}, P_c\right] = \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b, \qquad \left[\hat{Z}_{ab}, Z_c\right] = \eta_{bc} Z_a - \eta_{ac} Z_b, \tag{2.10i}$$

$$[P_a, P_b] = Z_{ab}, \qquad [P_a, Z_b] = \hat{Z}_{ab}, \qquad [Z_a, Z_b] = Z_{ab}. \tag{2.10j}$$

2.3. Álgebras $\mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{B}_5$ y $\mathfrak{B}_6$

***Definición* 2.3.1 (Álgebra $\mathfrak{B}_4$)** *Esta álgebra llamada normalmente álgebra de Maxwell puede ser obtenida del álgebra AdS$\mathcal{L}_4$ a través de una contracción de Inönü-Wigner. De hecho, reescalando $P_a \to \xi P_a$, $Z_{ab} \to \xi^2 Z_{ab}$ en (2.8) y tomando el limite $\xi \to \infty$ obtenemos el álgebra de Maxwell.*

$$[P_a, P_b] = \Lambda Z_{ab}, \tag{2.11a}$$

$$[P_a, Z_{bc}] = 0, \tag{2.11b}$$

$$[Z_{ab}, Z_{cd}] = 0, \tag{2.11c}$$

$$[J_{ab}, P_c] = \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b, \tag{2.11d}$$

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{cb} J_{ad} - \eta_{ca} J_{bd} + \eta_{db} J_{ca} - \eta_{da} J_{cb}, \tag{2.11e}$$

$$[J_{ab}, Z_{cd}] = \eta_{cb} Z_{ad} - \eta_{ca} Z_{bd} + \eta_{db} Z_{ca} - \eta_{da} Z_{cb}. \tag{2.11f}$$

***Definición* 2.3.2 (Álgebra $\mathfrak{B}_5$)** *Esta álgebra puede ser obtenida a partir del álgebra $AdS\mathcal{L}_5$ reescalando $P_a \to \xi P_a$, $Z_{ab} \to \xi^2 Z_{ab}$, $Z_a \to \xi^3 Z_a$ en la ecuación (2.9) y luego tomando el limite $\xi \to \infty$. Esta álgebra satisface las siguientes reglas de conmutación*

$$
\begin{aligned}
[J_{ab}, J_{cd}] =& \eta_{cb}J_{ad} - \eta_{ca}J_{bd} + \eta_{db}J_{ca} - \eta_{da}J_{cb}, && (2.12a)\\
[J_{ab}, Z_{cd}] =& \eta_{cb}Z_{ad} - \eta_{ca}Z_{bd} + \eta_{db}Z_{ca} - \eta_{da}Z_{cb}, && (2.12b)\\
[J_{ab}, P_{c}] =& \eta_{bc}P_{a} - \eta_{ac}P_{b}, && (2.12c)\\
[J_{ab}, Z_{c}] =& \eta_{bc}Z_{a} - \eta_{ac}Z_{b}, && (2.12d)\\
[Z_{ab}, P_{c}] =& \eta_{bc}Z_{a} - \eta_{ac}Z_{b}, && (2.12e)\\
[P_{a}, P_{b}] =& Z_{ab}, \qquad [Z_{ab}, Z_{c}] = 0, && (2.12f)\\
[Z_{ab}, Z_{cd}] =& 0, \qquad [P_{a}, Z_{b}] = 0, \qquad [Z_{a}, Z_{b}] = 0. && (2.12g)
\end{aligned}
$$

***Definición* 2.3.3 (Álgebra $\mathfrak{B}_6$)** *El álgebra $\mathcal{B}_6$ puede ser obtenida a partir del álgebra $AdS\mathcal{L}_6$ a través de una contracción de Inonu-Wigner generalizada. Utilizando el reescalamiento $P_a \to \xi P_a$, $Z_a \to \xi^3 Z_a$, $Z_{ab} \to \xi^2 Z_{ab}$, $\hat{Z}_{ab} \to \xi^4 \hat{Z}_{ab}$ en la ecuación (2.10) y tomando el limite $\xi \to \infty$ obtenemos*

$$
\begin{aligned}
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{bc}J_{ad} + \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac}, && (2.13a)\\
[J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{bc}Z_{ad} + \eta_{ad}Z_{bc} - \eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{bd}Z_{ac}, && (2.13b)\\
\left[J_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right] &= \eta_{bc}\hat{Z}_{ad} + \eta_{ad}\hat{Z}_{bc} - \eta_{ac}\hat{Z}_{bd} - \eta_{bd}\hat{Z}_{ac}, && (2.13c)\\
[J_{ab}, P_{c}] &= \eta_{bc}P_{a} - \eta_{ac}P_{b}, && (2.13d)\\
[J_{ab}, Z_{c}] &= \eta_{bc}Z_{a} - \eta_{ac}Z_{b}, && (2.13e)\\
[Z_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{bc}\hat{Z}_{ad} + \eta_{ad}\hat{Z}_{bc} - \eta_{ac}\hat{Z}_{bd} - \eta_{bd}\hat{Z}_{ac}, && (2.13f)\\
[Z_{ab}, P_{c}] &= \eta_{bc}Z_{a} - \eta_{ac}Z_{b}, && (2.13g)\\
[P_{a}, P_{c}] &= Z_{ab}, \qquad [P_{a}, Z_{b}] = \hat{Z}_{ab}, && (2.13h)\\
\left[Z_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right] &= 0, \qquad [Z_{ab}, Z_{c}] = 0, \qquad \left[\hat{Z}_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right] = 0, && (2.13i)\\
\left[\hat{Z}_{ab}, P_{c}\right] &= 0, \qquad \left[\hat{Z}_{ab}, Z_{c}\right] = 0, \qquad [Z_{a}, Z_{c}] = 0. && (2.13j)
\end{aligned}
$$

Capítulo 3

Relatividad general con formas diferenciales

"El Espacio actúa sobre la Materia, indicándole como moverse...
a su vez, la Materia reacciona contra el espacio indicándole como curvarse"

John Archibald Wheeler.

3.1. Gravedad como teoría de gauge

El formalismo estándar de las teorías de gauge puede ser expresado en el lenguaje de las formas exteriores. Para ello vamos a utilizar las definiciones usuales de grupo de Lie, álgebra de Lie
Sea G un grupo de Lie cuyos generadores T_A satisfacen el álgebra

$$[T_A, T_B] = C^C{}_{AB} T_C, \tag{3.1}$$

donde $C^C{}_{AB}$ son las constantes de estructura, y las letras mayúsculas denotan índices en la variedad del grupo. El formalismo estándar de las teorías de gauge puede ser expresado en el lenguaje de las formas exteriores. Para formular una teoría de gauge con grupo de simetría G, se introduce en correspondencia con cada generador, los campos compensantes A^A_μ. Los potenciales de gauge son definidos como las 1-formas

$$A = A^A T_A, \qquad A^A = A^A_\mu dx^\mu, \qquad A = A^A_\mu T_A dx^\mu. \tag{3.2}$$

La derivada exterior covariante de gauge D es definida como

$$D = dx^\mu D_\mu, \tag{3.3}$$

donde

$$D \;=\; d + A. \tag{3.4}$$

La 2-forma curvatura es dada por

$$\mathbf{F} = dA + A \wedge A, \tag{3.5}$$

y dado que $\mathbf{F} = F^A T_A$ y $A = A^A T_A$, podemos escribir

$$F^A T_A = \left[dA^A + \frac{1}{2} A^B A^C C_{BC}^{\ \ A} \right] T_A. \tag{3.6}$$

Por lo tanto

$$F^A = dA^A + \frac{1}{2} C_{BC}^{\ \ A} A^B A^C. \tag{3.7}$$

$\mathbf{F}$ también puede ser escrito como

$$\mathbf{F} = dA + \frac{1}{2} \left[A, A \right]. \tag{3.8}$$

El conjunto de ecuaciones $F^{ab} = 0$ y $dF^{ab} = 0$ son equivalentes a las ecuaciones de Maurer-Cartan y las identidades de Jacobi del álgebra de Lie del grupo G respectivamente.

3.2. Formas de Maurer-Cartan Valuadas en el álgebra de Poincaré

El grupo de simetrías en relatividad general es el grupo de Poincaré $ISO(3,1)$. Los generadores vienen dados por $T_A = (P_a, J_{ab})$, donde P_a es el generador de las traslaciones y J_{ab} el generador de las rotaciones de Lorentz ($J_{ab} = -J_{ba}$). Los índices $A, B, \ldots$ corren sobre $\{a, (ab)\}$ y los correspondientes campos de gauge son la 1-forma vielbein e^a y la 1-forma conexión de spin $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$ así tenemos

$$A^A = \left\{ e^a, \frac{1}{2} \omega^{ab} \right\}, \tag{3.9}$$

donde

$$e^a = e^a_\mu dx^\mu, \tag{3.10}$$
$$\omega^{ab} = \omega^{ab}_\mu dx^\mu. \tag{3.11}$$

Escribiendo $F = F^A T_A = T^a P_a + \frac{1}{2} R^{ab} J_{ab}$, podemos identificar las intensidades de campo correspondientes a las traslaciones de Poincaré y a las rotaciones de Lorentz T^a y R^{ab} respectivamente. Así tenemos que

a) La curvatura valuada en el álgebra de Lorentz es la intensidad de campo de la conexión de espín.

b) La curvatura valuada vectorialmente conocida como torsión es la intensidad de campo del Vielbein.

Los generadores del grupo de Poincaré satisfacen la siguiente álgebra de Lie

$$[P_a, P_b] = 0, \tag{3.12a}$$
$$[J_{ab}, P_c] = \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b, \tag{3.12b}$$
$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{ad} J_{bc} + \eta_{bc} J_{ad} - \eta_{ac} J_{bd} - \eta_{bd} J_{ac}. \tag{3.12c}$$

Ahora vamos a valuar el álgebra en la curvatura

- La única contribución a T^a viene de (3.12b)

$$[J_{ab}, P_c] = C_{ab,c}{}^{d} P_d, \tag{3.13}$$

donde $C_{ab,c}{}^{d} = \eta_{bc}\delta^d_a - \eta_{ac}\delta^d_b$.

- La única contribución a R^{ab} viene de (3.12c)

$$[J_{ab}, J_{cd}] = C_{ab,cd}{}^{ik} J_{ik}, \tag{3.14}$$

donde $C_{ab,cd}{}^{ik} = \eta_{ad}\delta^{ik}_{bc} + \eta_{bc}\delta^{ik}_{ad} - \eta_{ac}\delta^{ik}_{bd} - \eta_{bd}\delta^{ik}_{ac}$.

Puesto que $F^A = dA^A + \frac{1}{2} C_{BC}^{\ A} A^B A^C$ donde $A^A = \{A^a, A^{ab}\} = \{e^a, \frac{1}{2}\omega^{ab}\}$, y

$$F^A = \left\{ T^a, \frac{1}{2} R^{ab} \right\}, \tag{3.15}$$

Estas funciones $C_{ab,c}{}^{d}$ y $C_{ab,cd}{}^{ik}$ corresponden a las constantes de estructura[1]. Al evaluar las contribuciones de (3.12b) y (3.12c) obtenemos respectivamente

$$T^a = de^a + \omega^a_{\ c} e^c, \tag{3.16}$$
$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_{\ c}\omega^{cd}. \tag{3.17}$$

Llamadas ecuaciones de estructura[2]. Podemos notar lo siguiente

- Torsión: Corresponde a la intensidad de campo relacionada a las traslaciones.
- Curvatura: Corresponde a la intensidad de campo relacionada a rotaciones de Lorentz.

Las ecuaciones (3.16) y (3.17) fueron obtenidas como consecuencia directa de las relaciones de conmutación del álgebra de Lie del grupo de Poincaré $ISO(3,1)$. El formalismo muestra explícitamente, la estrecha relación entre la estructura geométrica de la variedad y el álgebra del grupo de simetrías fundamental.

[1] Son constantes porque están escritas en términos de η y δ

[2] Describen la estructura geométrica de la variedad

Trasformación de los campos de gauge

La forma en que transforman los campos A^A depende de como sea exponenciado el grupo de invariancia, esto significa, que Si G es un grupo cuyos elementos U son dados por $U = e^{-\epsilon} = e^{-\epsilon^A T_A}$, donde ϵ es el parámetro del grupo, entonces

- A transforma bajo el grupo de transformaciones como

$$A \longrightarrow A' = UAU^{-1} + UdU^{-1}. \tag{3.18}$$

- De igual forma, para la curvatura, tenemos que bajo el grupo de transformaciones $\mathbf{F}$ cambia como tensor

$$\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}' = U\mathbf{F}U^{-1}, \tag{3.19}$$

expandiendo en serie y tomando solo términos a primer orden tenemos

$$U = e^{-\epsilon} = 1 - \epsilon. \tag{3.20}$$
$$U^{-1} = e^{\epsilon} = 1 + \epsilon. \tag{3.21}$$

Donde obtenemos que las transformaciones están dadas por

$$\delta A = d\epsilon + [A, \epsilon], \tag{3.22}$$

$$\delta \mathbf{F} = [\mathbf{F}, \epsilon]. \tag{3.23}$$

El parámetro de la transformación puede ser escrito como

$$\epsilon = \epsilon^A T_A, \tag{3.24}$$
$$= \epsilon^a P_a + \frac{1}{2}\epsilon^{ab} J_{ab}, \tag{3.25}$$
$$\epsilon \equiv \rho^a P_a + \frac{1}{2}k^{ab} J_{ab}. \tag{3.26}$$

Entonces utilizando las ecuaciones anteriores tenemos que

$$\delta e^a = d\rho^a + \omega^a_{\ b}\rho^b - k^{ac} e_c, \tag{3.27}$$
$$\delta \omega^{ab} = dk^{ab} + \omega^{ac} k^{\ b}_{c} - \omega^{cd} k^{a}_{\ c}. \tag{3.28}$$

Por lo tanto tenemos que los campos e^a y ω^{ab} cambian de la siguiente forma

- **Bajo traslaciones**

$$\delta e^a = d\rho^a + \omega^a_{\ b}\rho^b = D\rho^a, \tag{3.29}$$
$$\delta \omega^{ab} = 0. \tag{3.30}$$

- **Bajo rotaciones de Lorentz**

$$\delta e^a = k^a_{\ c} e^c, \tag{3.31}$$
$$\delta \omega^{ab} = dk^{ab} + \omega^{ac} k^{\ b}_{c} - \omega^{cd} k^{a}_{\ c} = Dk^{ab}. \tag{3.32}$$

3.3. Formas de Maurer-Cartan evaluadas en el álgebra de Maxwell

El álgebra de Maxwell es el resultado de agrandar o añadir nuevas simetrías al álgebra de Poincaré, incorporamos seis nuevos generadores abelianos tensoriales que tienen la particularidad de hacer que los cuadrimomentum no sean conmutativos. Esta álgebra satisface las siguientes reglas de conmutación

$$
\begin{aligned}
[P_a, P_b] &= Z_{ab}, && (3.33)\\
[P_a, Z_{bc}] &= 0, && (3.34)\\
[Z_{ab}, Z_{cd}] &= 0, && (3.35)\\
[J_{ab}, P_c] &= \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b, && (3.36)\\
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{cb}J_{ad} - \eta_{ca}J_{bd} + \eta_{db}J_{ca} - \eta_{da}J_{cb}, && (3.37)\\
[J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{cb}Z_{ad} - \eta_{ca}Z_{bd} + \eta_{db}Z_{ca} - \eta_{da}Z_{cb}. && (3.38)
\end{aligned}
$$

Introducimos el conjunto de formas de Maurer-Cartan valuadas en el álgebra de Maxwell

$$
\begin{aligned}
A &= A^A T_A,\\
&= \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}e^a P_a + \frac{1}{2}k^{ab}Z_{ab}, && (3.39)
\end{aligned}
$$

donde $a, b = 0, 1, 2, 3$ son los índices del espacio tangente que suben y bajan con la métrica de Minkowski. Los campos de gauge asociados están definidos por un campo de 1-formas

$$e^a = e^a_\mu dx^\mu, \quad \omega^{ab} = \omega^{ab}_\mu dx^\mu, \quad k^{ab} = k^{ab}_\mu dx^\mu.$$

Los generadores del álgebra satisfacen las relaciones de conmutación. Luego, la curvatura genérica de lo campos de gauge asociados es dado por

$$\mathbf{F} = dA + \frac{1}{2}\left[A, A\right]. \tag{3.40}$$

Sustituyendo (3.39) en (3.40) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} &= dA + \frac{1}{2}\left[A, A\right], && (3.41)\\
&= \frac{1}{l}de^a P_a + \frac{1}{2}d\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{2}dk^{ab}Z_{ab}\\
&+ \frac{1}{2l^2}e^a e^c\left[P_a, P_c\right] + \frac{1}{4l}\omega^{ab}e^c\left[J_{ab}, P_c\right] + \frac{1}{4l}k^{ab}e^c\left[Z_{ab}, P_c\right]\\
&\frac{1}{4l}e^a\omega^{cd}\left[P_a, J_{cd}\right] + \frac{1}{8}\omega^{ab}\omega^{cd}\left[J_{ab}, J_{cd}\right] + \frac{1}{8}k^{ab}\omega^{cd}\left[Z_{ab}, J_{cd}\right]\\
&+ \frac{1}{4l}e^a k^{cd}\left[P_a, Z_{cd}\right] + \frac{1}{8}\omega^{ab}k^{cd}\left[J_{ab}, Z_{cd}\right], && (3.42)
\end{aligned}
$$

utilizando las relaciones de conmutación obtenemos que la 2-forma de curvatura es dada por

$$\mathbf{F} = \frac{1}{l} T^a P_a + \frac{1}{2} R^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2} \left(Dk^{ab} + \frac{1}{l^2} e^a e^b \right) Z_{ab}, \tag{3.43}$$

donde

$$\begin{aligned} T^a &= de^a + \omega^a_{\ c} e^c, && (3.44) \\ R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega^a_{\ e} \omega^{eb}, && (3.45) \\ F^{ab} &= dk^{ab} + \omega^{[a}_{\ e} k^{e|b]} + \frac{1}{l^2} e^a e^b = Dk^{ab} + \frac{1}{l^2} e^a e^b. && (3.46) \end{aligned}$$

Identidades de Bianchi

Las identidades de Bianchi se pueden obtener fácilmente puesto que

$$D\mathbf{F} = d\mathbf{F} + [A, \mathbf{F}], \tag{3.47}$$

tenemos que usando las ecuaciones (3.40) y (3.39) obtenemos las siguientes tres expresiones

$$\begin{aligned} DT^a &= dT^a + \omega^a_{\ c} T^c = R^{ac} e_c, \\ DR^{ab} &= dR^{ab} + \omega^a_{\ e} R^{eb} + \omega^b_{\ e} R^{ea} = 0, \\ DF^{ab} &= R^{[a|c} k_c^{\ b]} + \frac{1}{l^2} T^{[a} e^{b]}. && (3.48) \end{aligned}$$

Transformaciones de los campos de gauge

Ahora vamos a obtener las transformaciones de los campos de gauge. Bajo transformaciones locales de gauge con el parámetro $\epsilon(x)$

$$\begin{aligned} \epsilon(x) &= \epsilon(x)^A T_A, \\ &= \frac{1}{l} \rho^a P_a + \frac{1}{2} \pi^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2} \xi^{ab} Z_{ab}, && (3.49) \end{aligned}$$

el campo de gauge A transforma como

$$\delta A = d\epsilon + [A, \epsilon], \tag{3.50}$$

de donde es directo ver que

$$\begin{aligned} \delta\omega^{ab} &= d\pi^{ab} + \omega^{[a}_{\ c} \pi^{c|b]}, && (3.51) \\ \delta e^a &= d\rho^a + \pi^a_{\ c} e^c + \omega^a_{\ c} \rho^c, && (3.52) \\ \delta k^{ab} &= d\xi^{ab} + k^{[a}_{\ c} \pi^{c|b]} + \omega^{[a}_{\ c} \xi^{c|b]} + \frac{1}{l^2} e^{[a} \rho^{b]}. && (3.53) \end{aligned}$$

Transformaciones de las intensidades de campo

Bajo las transformaciones (3.49) las intensidades de campo transforman como

$$\delta \mathbf{F} = [\mathbf{F}, \epsilon] , \tag{3.54}$$

de modo que

$$\delta R^{ab} = R^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}, \tag{3.55}$$
$$\delta \mathcal{T}^{a} = \pi^{a}{}_{c}\mathcal{T}^{c} + R^{a}{}_{c}\rho^{c}, \tag{3.56}$$
$$\delta F^{ab} = F^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]} + R^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]} + \frac{1}{l^{2}}\mathcal{T}^{[a}\rho^{b]}. \tag{3.57}$$

3.4. Acción de Einstein-Hilbert

La acción de Einstein-Hilbert-Cartan es dada por

$$S = \int_{\mathcal{M}} \varepsilon_{abcd} e^{a} e^{b} R^{cd}. \tag{3.58}$$

El cual puede ser escrito como

$$S = \int_{\mathcal{M}} \varepsilon_{abcd} \left(e^{a}{}_{\mu} dx^{\mu} \right) \left(e^{b}{}_{\nu} dx^{\nu} \right) R^{cd}, \tag{3.59}$$

donde $R^{cd} = \frac{1}{2} dx^{\sigma} dx^{\rho} R^{cd}{}_{\sigma\rho}$, es decir

$$S = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \varepsilon_{abcd} dx^{\mu} dx^{\nu} dx^{\sigma} dx^{\rho} e^{a}{}_{\mu} e^{b}{}_{\nu} R^{cd}{}_{\sigma\rho}, \tag{3.60}$$

de modo que

$$S = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \varepsilon_{abcd} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} e^{a}{}_{\mu} \wedge e^{b}{}_{\nu} \wedge R^{cd}{}_{\sigma\rho}. \tag{3.61}$$

La expresión $e \wedge e \wedge R$ es una 4-forma sobre $\mathcal{M}$ con valores en $T_{P}^{*} \otimes T_{P}^{*} \otimes \wedge^{2} T_{P}^{*}$. La métrica η_{ab} sobre $T_{P}^{*}(\mathcal{M})$, junto con el isomorfismo $e^{a}{}_{\mu}$ entre $T_{P}(\mathcal{M})$ y $T_{P}^{*}(\mathcal{M})$ da una métrica $g_{\mu\nu} = e^{a}{}_{\mu} e^{b}{}_{\nu} \eta_{ab}$ sobre $T_{P}(\mathcal{M})$. Esta es la misma métrica ordinaria sobre la variedad $\mathcal{M}$. La conexión ω, que tiene grupo de estructura $SO(d-1,1)$, es métrica compatible.

Invariancia de la acción de Einstein-Hilbert

En $4D$ la acción de Einstein-Hilbert es invariante "on-shell". En el contexto de Cartan la acción de E-H, por construcción, es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas y bajo transformaciones locales de Lorentz. Sin embargo no es invariante bajo traslaciones locales de Poincaré, es decir bajo transformaciones del tipo.

$$\delta e^a = d\rho^a + \omega^a_{\ b}\rho^b, \tag{3.62}$$
$$\delta\omega = 0. \tag{3.63}$$

3.5. Extensión de Maxwell para gravedad de Einstein con término cosmológico generalizado

Siguiendo el método de la referencia [1] vamos a construir una acción que contenga la acción de Einstein-Hilbert y el término cosmológico usual utilizando 4-formas invariantes.

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}R^{ab}R^{cd}, \tag{3.64}$$
$$\mathcal{L}_2 = \varepsilon_{abcd}R^{ab}F^{cd}, \tag{3.65}$$
$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}F^{ab}F^{cd}, \tag{3.66}$$
$$\mathcal{L}_4 = \frac{1}{2}R^{ab}R_{ab}, \tag{3.67}$$
$$\mathcal{L}_5 = R^{ab}F_{ab}, \tag{3.68}$$
$$\mathcal{L}_6 = \frac{1}{2}F^{ab}F_{ab}. \tag{3.69}$$

A partir de ellos podemos construir la acción de Einstein-Hilbert y el término cosmológico usual. Multiplicando $\mathcal{L}_2$ por $-\frac{1}{2\kappa\Lambda}$

$$-\frac{1}{2\kappa\Lambda}\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}R^{ab}F^{cd}, \tag{3.70}$$
$$= -\frac{1}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}R^{ab}Dk^{cd} - \frac{1}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}R^{ab}e^ce^d. \tag{3.71}$$

Integrando por partes el término $\varepsilon_{abcd}R^{ab}Dk^{cd}$ y usando la identidad de Bianchi $DR^{ab} = 0$, es fácil ver que

$$-\frac{1}{2\kappa\Lambda}\mathcal{L}_2 \approx -\frac{1}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}R^{ab}e^ce^d. \tag{3.72}$$

Consideremos ahora $\mathcal{L}_3$. Recordamos que el término cosmológico estándar es dado por la 4-forma

$$\mathcal{L}_{cosm} = \frac{\lambda}{4\kappa}\varepsilon_{abcd}e^a e^b e^c e^d, \tag{3.73}$$

tenemos

$$\frac{\lambda}{2\kappa\Lambda^2}\mathcal{L}_3 = \frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}F^{ab}\wedge F^{cd}, \tag{3.74}$$

$$= \frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}\left\{Dk^{ab}Dk^{cd} + \Lambda Dk^{ab}e^c e^d + \Lambda e^a e^b Dk^{cd} + \Lambda^2 e^a e^b e^c e^d\right\}, \tag{3.75}$$

$$= \frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}Dk^{cd} + \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^c e^d + \frac{\lambda}{4\kappa}\varepsilon_{abcd}e^a e^b e^c e^d. \tag{3.76}$$

Finalmente, se propone la siguiente 4-forma lagrangeana para la gravedad de Maxwell

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2\kappa\lambda}\left(-\mathcal{L}_2 + \mu\mathcal{L}_3\right), \tag{3.77}$$

donde $\mu \equiv \frac{\lambda}{\Lambda}$ que puede ser escrito en la forma

$$\mathcal{L}_{\textsf{Maxwell}} = \mathcal{L}_{E-H} + \mathcal{L}_{cosm} + \frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^c e^d + \frac{\mu^2}{4\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}Dk^{cd}, \tag{3.78}$$

donde

$$\mathcal{L}_{E-H} = -\frac{1}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}R^{ab}e^c e^d, \tag{3.79}$$

$$\mathcal{L}_{cosm} = \frac{\lambda}{4\kappa}\varepsilon_{abcd}e^a e^b e^c e^d. \tag{3.80}$$

Ecuaciones de campo

Ahora vamos a obtener las ecuaciones del movimiento.

- Variamos respecto de ω^{ab} $(\delta_\omega\mathcal{L})$

$$\delta_{\omega^{ab}}\mathcal{L}_{\textsf{Maxwell}} = \delta\mathcal{L}_{E-H} + \frac{\mu}{2\kappa}\delta\left(\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^c e^d\right) + \frac{\mu^2}{4\kappa\lambda}\delta\left(\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}Dk^{cd}\right), \tag{3.81}$$

$$= d\left(-\frac{1}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}e^c e^d\right) - \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}De^c e^d$$

$$+ \frac{\mu}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\delta\omega^a{}_f k^{fb}e^c e^d + \frac{\mu^2}{2\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}\delta^a_e k^{eb}Dk^{ca}, \tag{3.82}$$

$$= [L]_{\omega^{ab}}\,\delta\omega^{ab}. \tag{3.83}$$

luego tenemos

$$\delta_\omega \mathcal{L}_{\textsf{Maxwell}} = \delta\omega^{ab}\left\{-\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left[De^c e^d - \frac{\mu^2}{2\lambda}k^c{}_e\left(Dk^{ce} + \frac{\lambda}{\mu}e^c e^d\right)\right]\right\}, \tag{3.84}$$

$$= \delta\omega^{ab}\left\{-\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left[De^c e^d - \frac{\mu^2}{2\lambda}k^c{}_e F^{ce}\right]\right\}, \tag{3.85}$$

donde

$$[L]_{\omega^{ab}} = \delta\omega^{ab}\left\{-\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left[De^c e^d - \frac{\mu^2}{2\lambda}k^c{}_e F^{ce}\right]\right\} = 0. \tag{3.86}$$

Esta ecuación pude ser escrita finalmente como

$$T^{[a}e^{b]} + \frac{\mu^2}{\lambda}F^{[a}_c k^{c|b]} = 0. \tag{3.87}$$

Esta ecuación se utilizará como la ecuación algebraica que determina la conexión de espin en función del vielbein y los nuevos campos de gauge, $\omega^{ab}_{\ \ \mu} = \omega^{ab}_{\ \ \mu}(e,k)$.

- Variación respecto de e^a

$$\delta_e \mathcal{L}_{\textsf{Maxwell}} = \delta\mathcal{L}_{E-H} + \delta\mathcal{L}_{cosm} + \frac{\mu}{2\kappa}\delta\left(\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^c e^d\right), \tag{3.88}$$

$$= -\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}R^{ab}e^c\delta e^d + \frac{\lambda}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\delta e^a e^b e^c e^d,$$

$$+ \frac{\mu}{\kappa}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^c\delta e^c, \tag{3.89}$$

$$= [L]_{e^a}\,\delta e^a, \tag{3.90}$$

donde

$$[L]_{e^a} = -\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left\{R^{ab}e^c - \mu F^{ab}e^c\right\}, \tag{3.91}$$

$$= -\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}e^d\left\{R^{ab} - \lambda e^a e^c - \mu Dk^{ab}\right\} = 0. \tag{3.92}$$

- Variación respecto de k^{ab}

$$\delta_{k^{ab}} \mathcal{L}_{\textsf{Maxwell}} = \frac{\mu}{2\kappa}\delta\left(\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^c e^d\right) + \frac{\mu^2}{4\kappa\lambda}\delta\left(\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}Dk^{cd}\right), \tag{3.93}$$

$$= d\left(\frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}\delta k^{ab}e^c e^d + \frac{\mu^2}{4\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}\delta k^{ab}Dk^{cd}\right)$$

$$+ \frac{\mu}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\delta k^{ab}De^c e^d + \frac{\mu^2}{4\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}\delta k^{ab}DDk^{cd}, \tag{3.94}$$

$$= [L]_{k^{ab}}\,\delta k^{ab}, \tag{3.95}$$

donde

$$[L]_{k^{ab}} = \frac{\mu}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left[De^c e^d + \frac{\mu}{4\lambda}DDk^{cd}\right], \tag{3.96}$$

$$= \frac{\mu}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left[T^c e^d + \frac{\mu}{\lambda}R^c{}_e k^{ed}\right] = 0, \tag{3.97}$$

esta ecuación puede ser escrita alternativamente como

$$T^{[a}e^{b]} + \frac{\mu}{\lambda}R^{[a}_{\ e}k^{e|b]} = 0. \tag{3.98}$$

Una solución especial de la ecuación

$$\varepsilon_{abcd}e^b\left\{R^{cd} - \lambda e^c e^d - \mu Dk^{cd}\right\} = 0, \tag{3.99}$$

es dada por

$$R^{ab} = \mu Dk^{ab} + \lambda e^a e^b = \mu F^{ab}. \tag{3.100}$$

Si esta ecuación es válida, después de utilizar las identidades de Bianchi $DR^{ab} = 0$, podemos escribir

$$T^{[a}e^{b]} + \frac{\mu^2}{\lambda}F^{[a}_{\ e}k^{e|b]} = 0. \tag{3.101}$$

Esto significa que el conjunto de ecuaciones del movimiento

$$T^{[a}e^{b]} + \frac{\mu^2}{\lambda}F^{[a}_{\ e}k^{e|b]} = 0, \tag{3.102}$$

$$\varepsilon_{abcd}e^b\left\{R^{cd} - \lambda e^c e^d - \mu Dk^{cd}\right\} = 0, \tag{3.103}$$

$$T^{[a}e^{b]} + \frac{\mu}{\lambda}R^{[a}_{\ e}k^{e|b]} = 0, \tag{3.104}$$

se satisfacen si las conexiones de Lorentz y gauge están relacionadas por

$$R^{ab} = \mu Dk^{ab} + \lambda e^a e^b = \mu F^{ab}. \tag{3.105}$$

Capítulo 4

Gravedad en $4D$ con simetrías $AdS\mathcal{L}_4$

4.1. Ecuaciones de estructura

Consideremos el potencial de gauge evaluado en el álgebra $AdS\mathcal{L}_4$

$$
\begin{aligned}
A &= A^A T_A, \\
&= \frac{1}{2}\omega^{ab} J_{ab} + \frac{1}{l} e^a P_a + \frac{1}{2} k^{ab} Z_{ab},
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

donde $a, b = 0, 1, 2, 3$, son los índices del espacio tangente que suben y bajan con la métrica de Minkowski donde

$$
e^a = e^a_\mu dx^\mu, \quad \omega^{ab} = \omega^{ab}_\mu dx^\mu, \quad k^{ab} = k^{ab}_\mu dx^\mu.
$$

Usando las relaciones de conmutación del álgebra (2.8) tenemos que la 2-forma de curvatura es dada por

$$
\mathbf{F} = dA + \frac{1}{2}[A, A]. \tag{4.2}
$$

Sustituyendo (4.1) en (4.2) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \frac{1}{l} de^a P_a + \frac{1}{2} d\omega^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2} dk^{ab} Z_{ab} \\
&+ \frac{1}{2l^2} e^a e^c [P_a, P_c] + \frac{1}{4l}\omega^{ab} e^c [J_{ab}, P_c] + \frac{1}{4l} k^{ab} e^c [Z_{ab}, P_c] \\
&\frac{1}{4l} e^a \omega^{cd} [P_a, J_{cd}] + \frac{1}{8}\omega^{ab}\omega^{cd} [J_{ab}, J_{cd}] + \frac{1}{8} k^{ab}\omega^{cd} [Z_{ab}, J_{cd}] \\
&+ \frac{1}{4l} e^a k^{cd} [P_a, Z_{cd}] + \frac{1}{8}\omega^{ab} k^{cd} [J_{ab}, Z_{cd}] + \frac{1}{8} k^{ab} k^{cd} [Z_{ab}, Z_{cd}].
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Utilizando las relaciones de conmutación y con un poco de álgebra obtenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} = & \frac{1}{l} de^a P_a + \frac{1}{2} d\omega^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2} dk^{ab} Z_{ab} \\
& + \frac{1}{2l^2} e^a e^c Z_{ab} + \frac{1}{2l} \omega^a{}_c e^c P_a + \frac{1}{2l} k^a{}_c e^c P_a \\
& + \frac{1}{2l} \omega^a{}_c e^c P_a + \frac{1}{2} \omega^{[a}{}_c \omega^{c|b]} J_{ab} + \frac{1}{2} \omega^{[a}{}_c k^{c|b]} Z_{ab} \\
& + \frac{1}{2l} k^a{}_c e^c P_a + \frac{1}{2} \omega^{[a}{}_c k^{c|b]} Z_{ab} + \frac{1}{2} k^{[a}{}_c k^{c|b]} Z_{ab}.
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

- De la ecuación (4.4) vemos que los términos con P_a

$$
\frac{1}{l} de^a P_a + \frac{1}{2l} \omega^a{}_c e^c P_a + \frac{1}{2l} k^a{}_c e^c P_a + \frac{1}{2l} \omega^a{}_c e^c P_a + \frac{1}{2l} k^a{}_c e^c P_a \tag{4.5}
$$

$$
= \frac{1}{l} \left(de^a + \omega^a{}_c e^c + k^a{}_c e^c \right) P_a, \tag{4.6}
$$

$$
= \frac{1}{l} \left(De^a + k^a{}_c e^c \right) P_a, \tag{4.7}
$$

$$
= \frac{1}{l} \left(T^a + k^a{}_c e^c \right) P_a. \tag{4.8}
$$

Donde tenemos que $\mathcal{T}^a = T^a + k^a{}_c e^c$, y $T^a = de^a + \omega^a{}_c e^c$ es la torsión usual. Aquí notamos que el término $k^a{}_b e^b$ proviene del conmutador $[P_a, Z_{cd}]$, el cual, para el álgebra de Maxwell es cero. Luego, de la ecuación (4.4) vemos que,

- los términos con J_{ab} conducen a

$$
\frac{1}{2} d\omega^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2} \omega^a{}_c \omega^{cb} J_{ab} = \frac{1}{2} \left(d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \omega^{cb} \right) J_{ab}, \tag{4.9}
$$

$$
= \frac{1}{2} R^{ab} J_{ab}, \tag{4.10}
$$

donde $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \omega^{cb}$.

- Ahora tomamos los términos con Z_{ab}

$$
\frac{1}{2} dk^{ab} Z_{ab} + \frac{1}{2l^2} e^a e^c Z_{ab} + \frac{1}{4} \omega^{[a}{}_c k^{c|b]} Z_{ab} + \frac{1}{4} \omega^{[a}{}_c k^{c|b]} Z_{ab} + \frac{1}{2} k^{[a}{}_c k^{c|b]} Z_{ab}, \tag{4.11}
$$

$$
= \frac{1}{2} \left(dk^{ab} + \omega^{[a}{}_c k^{c|b]} + k^{[a}{}_c k^{c|b]} + \frac{1}{l^2} e^a e^c \right) Z_{ab}, \tag{4.12}
$$

$$
= \frac{1}{2} F^{ab} Z_{ab}, \tag{4.13}
$$

donde $F^{ab} = Dk^{ab} + k^{[a}{}_c k^{c|b]} + \frac{1}{l^2} e^a e^b$ corresponde a la 2-forma curvatura asociada a los campos de gauge k^{ab} para el álgebra $AdS\mathcal{L}_4$. El término $k^{[a}{}_c k^{c|b]}$ proviene del conmutador $[Z_{ab}, Z_{cd}]$, el cual es cero para el álgebra de Maxwell.

Luego, la curvatura dada por

$$\mathbf{F} = \frac{1}{l}\mathcal{T}^a P_a + \frac{1}{2}R^{ab}J_{ab} + \frac{1}{2}F^{ab}Z_{ab}, \tag{4.14}$$

donde

$$\mathcal{T}^a = T^a + k^a_{\ c}e^c, \tag{4.15}$$
$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_{\ e}\omega^{eb}, \tag{4.16}$$
$$\begin{aligned} F^{ab} &= dk^{ab} + \omega^{[a}_{\ e}k^{e|b]} + k^{[a}_{\ c}k^{c|b]} + \frac{1}{l^2}e^a e^b, \\ &= Dk^{ab} + k^{[a}_{\ c}k^{c|b]} + \frac{1}{l^2}e^a e^b. \end{aligned} \tag{4.17}$$

4.2. Identidades de Bianchi

A continuación vamos a obtener las identidades de Bianchi (Apéndice B), las cuales se obtendrán de la forma usual utilizando la expresión

$$D\mathbf{F} = d\mathbf{F} + [A, \mathbf{F}]\,. \tag{4.18}$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.1) y (4.14) en (4.18) tenemos

$$D\mathbf{F} = \frac{1}{2}DR^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}D\mathcal{T}^a P_a + \frac{1}{2}DF^{ab}Z_{ab}, \tag{4.19}$$

donde

$$d\mathcal{T}^a + \omega^a_{\ b}\mathcal{T}^b + k^a_{\ b}\mathcal{T}^b = R^a_{\ b}e^b + F^a_{\ b}e^b, \tag{4.20}$$
$$DR^{ab} = 0, \tag{4.21}$$
$$DF^{ab} + k^{[a}_{\ c}F^{c|b]} + R^{[a}_{\ c}k^{c|b]} + \frac{1}{l^2}e^{[a}\mathcal{T}^{b]} = 0. \tag{4.22}$$

4.3. Transformaciones de los campos de gauge

Bajo transformaciones locales de gauge con parámetro $\epsilon(x)$

$$\begin{aligned} \epsilon(x) &= \epsilon(x)^A T_A, \\ &= \frac{1}{l}\rho^a P_a + \frac{1}{2}\pi^{ab}J_{ab} + \frac{1}{2}\xi^{ab}Z_{ab}, \end{aligned} \tag{4.23}$$

tenemos

$$\delta A = d\epsilon + [A, \epsilon]\,. \tag{4.24}$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.1), (4.23) en (4.24) tenemos

$$\begin{aligned}
\delta A &= d\left(\frac{1}{2}\pi^{ab}J_{ab}+\frac{1}{l}\rho^{a}P_{a}+\frac{1}{2}\xi^{ab}Z_{ab}\right)\\
&+\left[\frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab}+\frac{1}{l}e^{a}P_{a}+\frac{1}{2}k^{ab}Z_{ab},\frac{1}{2}\pi^{cd}J_{cd}+\frac{1}{l}\rho^{c}P_{c}+\frac{1}{2}\xi^{cd}Z_{cd}\right], \qquad (4.25)\\
&=\frac{1}{2}d\pi^{ab}J_{ab}+\frac{1}{l}d\rho^{a}P_{a}+\frac{1}{2}d\xi^{ab}Z_{ab}\\
&+\frac{1}{4}\omega^{ab}\pi^{cd}\left[J_{ab},J_{cd}\right]+\frac{1}{2l}e^{a}\pi^{cd}\left[P_{a},J_{cd}\right]+\frac{1}{4}k^{ab}\pi^{cd}\left[Z_{ab},J_{cd}\right]\\
&+\frac{1}{2l}\omega^{ab}\rho^{c}\left[J_{ab},P_{c}\right]+\frac{1}{l^{2}}e^{a}\rho^{c}\left[P_{a},P_{c}\right]+\frac{1}{2l}k^{ab}\rho^{c}\left[Z_{ab},P_{c}\right]\\
&+\frac{1}{4}\omega^{ab}\xi^{cd}\left[J_{ab},Z_{cd}\right]+\frac{1}{2l}e^{a}\xi^{cd}\left[P_{a},Z_{cd}\right]+\frac{1}{4}k^{ab}\xi^{cd}\left[Z_{ab},Z_{cd}\right], \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\delta A=\frac{1}{2}\delta\omega^{ab}J_{ab}+\frac{1}{l}\delta e^{a}P_{a}+\frac{1}{2}\delta k^{ab}Z_{ab}, \qquad (4.27)$$

nuevamente utilizando las relaciones de conmutación y un poco de álgebra obtenemos los siguientes resultados (ver apéndice C para el detalle de la contribución de cada conmutador)

- Agrupando términos con J_{ab}

$$\frac{1}{2}d\pi^{ab}J_{ab}+\frac{1}{2}\omega^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}J_{ab}=\frac{1}{2}\left(d\pi^{ab}+\omega^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}\right)J_{ab}, \qquad (4.28)$$

  tenemos

$$\delta\omega^{ab}=d\pi^{ab}+\omega^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}. \qquad (4.29)$$

- Agrupando términos con P_a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{l}d\rho^{a}P_{a}+\frac{1}{l}\pi^{a}{}_{c}e^{c}P_{a}+\frac{1}{l}\omega^{a}{}_{c}\rho^{c}P_{a}+\frac{1}{l}k^{a}{}_{c}\rho^{c}P_{a}+\frac{1}{l}\xi^{a}{}_{c}e^{c}P_{a},\\
&=\frac{1}{l}\left(d\rho^{a}+\pi^{a}{}_{c}e^{c}+\omega^{a}{}_{c}\rho^{c}+k^{a}{}_{c}\rho^{c}+\xi^{a}{}_{c}e^{c}\right)P_{a}. \qquad (4.30)
\end{aligned}$$

  Encontramos

$$\delta e^{a}=d\rho^{a}+\pi^{a}{}_{c}e^{c}+\omega^{a}{}_{c}\rho^{c}+k^{a}{}_{c}\rho^{c}+\xi^{a}{}_{c}e^{c}. \qquad (4.31)$$

  Notemos que los términos $k^{a}{}_{c}\rho^{c}$ y $\xi^{a}{}_{c}e^{c}$ vienen de $[Z_{ab},P_c]$ y $[P_a,Z_{cd}]$ respectivamente, que para el álgebra de Maxwell son cero. El término $\pi^{a}{}_{c}e^{c}$ viene de $[P_a,J_{cd}]$, y $\omega^{a}{}_{c}\rho^{c}$ viene de $[J_{ab},P_c]$

- Agrupando términos con Z_{ab}

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}d\xi^{ab}Z_{ab}+\frac{1}{2}k^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}Z_{ab}+\frac{1}{2}\omega^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}Z_{ab}\\
&+\frac{1}{l^2}e^a\rho^bZ_{ab}+\frac{1}{2}k^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}Z_{ab},\\
&=\frac{1}{2}\left(d\xi^{ab}+k^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}+\omega^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}+k^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}+\frac{2}{l^2}e^a\rho^b\right)Z_{ab},
\end{aligned} \tag{4.32}$$

tenemos

$$\delta k^{ab}=d\xi^{ab}+k^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}+\omega^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}+k^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}+\frac{1}{l^2}e^{[a}\rho^{b]}. \tag{4.33}$$

Notemos que el término $k^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}$ viene de $[Z_{ab},Z_{cd}]$ que para el álgebra de Maxwell es cero. El término $k^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}$ viene de $[Z_{ab},J_{cd}]$, $\omega^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}$ viene de $[J_{ab},Z_{cd}]$, y $\frac{1}{l^2}e^{[a}\rho^{b]}$ viene de $[P_a,P_b]$.

En resumen, las transformaciones de los campos de gauge vienen dadas por

$$\delta\omega^{ab}=d\pi^{ab}+\omega^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}, \tag{4.34}$$
$$\delta e^a=d\rho^a+\pi^a{}_ce^c+\omega^a{}_c\rho^c+k^a{}_c\rho^c+\xi^a{}_ce^c, \tag{4.35}$$
$$\delta k^{ab}=d\xi^{ab}+k^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}+\omega^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}+k^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}+\frac{1}{l^2}e^{[a}\rho^{b]}. \tag{4.36}$$

4.4. Transformación de las intensidades de campo F

Puesto que

$$\delta\mathbf{F}=[\mathbf{F},\epsilon]\,, \tag{4.37}$$

tenemos

$$\delta\mathbf{F}=\left[\frac{1}{2}R^{ab}J_{ab}+\frac{1}{l}\mathcal{T}^aP_a+\frac{1}{2}F^{ab}Z_{ab},\frac{1}{2}\pi^{cd}J_{cd}+\frac{1}{l}\rho^cP_c+\frac{1}{2}\xi^{cd}Z_{cd}\right], \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{4}R^{ab}\pi^{cd}\left[J_{ab},J_{cd}\right]+\frac{1}{2l}\mathcal{T}^a\pi^{cd}\left[P_a,J_{cd}\right]+\frac{1}{4}F^{ab}\pi^{cd}\left[Z_{ab},J_{cd}\right]\\
&+\frac{1}{2l}R^{ab}\rho^c\left[J_{ab},P_c\right]+\frac{1}{l^2}\mathcal{T}^a\rho^c\left[P_a,P_c\right]+\frac{1}{2l}F^{ab}\rho^c\left[Z_{ab},P_c\right]\\
&+\frac{1}{4}R^{ab}\xi^{cd}\left[J_{ab},Z_{cd}\right]+\frac{1}{2l}\mathcal{T}^a\xi^{cd}\left[P_a,Z_{cd}\right]+\frac{1}{4}F^{ab}\xi^{cd}\left[Z_{ab},Z_{cd}\right].
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Por otro lado

$$\delta F = \frac{1}{2}\delta R^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}\delta \mathcal{T}^{a}P_{a} + \frac{1}{2}\delta F^{ab}Z_{ab}. \tag{4.40}$$

Desarrollamos y agrupando términos, tenemos

- Para J_{ab}

$$\frac{1}{2}\delta R^{ab}J_{ab} = \frac{1}{2}R^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}J_{ab}, \tag{4.41}$$

tenemos

$$\delta R^{ab} = R^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}. \tag{4.42}$$

- Para P_a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{l}\pi^{a}{}_{c}\mathcal{T}^{c}P_{a} + \frac{1}{l}R^{a}{}_{c}\rho^{c}P_{a} + \frac{1}{l}F^{a}{}_{c}\rho^{c}P_{a} + \frac{1}{l}\xi^{a}{}_{c}\mathcal{T}^{c}P_{a},\\ &= \frac{1}{l}\left(\pi^{a}{}_{c}\mathcal{T}^{c} + R^{a}{}_{c}\rho^{c} + F^{a}{}_{c}\rho^{c} + \xi^{a}{}_{c}\mathcal{T}^{c}\right)P_{a},\end{aligned} \tag{4.43}$$

de modo que

$$\delta \mathcal{T}^{a} = \pi^{a}{}_{c}\mathcal{T}^{c} + R^{a}{}_{c}\rho^{c} + F^{a}{}_{c}\rho^{c} + \xi^{a}{}_{c}\mathcal{T}^{c}. \tag{4.44}$$

Notemos que los términos $F^{a}{}_{c}\rho^{c}$ y $\xi^{a}{}_{c}\mathcal{T}^{c}$ vienen de $[Z_{ab}, P_c]$ y $[P_a, Z_{cd}]$ respectivamente, que para el álgebra de Maxwell son cero. El término $\pi^{a}{}_{c}\mathcal{T}^{c}$ viene de $[P_a, J_{cd}]$, y $R^{a}{}_{c}\rho^{c}$ viene de $[J_{ab}, P_c]$

- Para Z_{ab}

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}F^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}Z_{ab} + \frac{1}{2}R^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}Z_{ab} + \frac{1}{l^{2}}\mathcal{T}^{a}\rho^{b}Z_{ab} + \frac{1}{2}F^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}Z_{ab},\\ &= \frac{1}{2}\left(F^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]} + R^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]} + F^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]} + \frac{2}{l^{2}}\mathcal{T}^{a}\rho^{b},\right)Z_{ab},\end{aligned} \tag{4.45}$$

de manera que

$$\delta F^{ab} = F^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]} + R^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]} + F^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]} + \frac{1}{l^{2}}\mathcal{T}^{[a}\rho^{b]}. \tag{4.46}$$

Notemos que el término $F^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}$ viene de $[Z_{ab}, Z_{cd}]$ que para el álgebra de Maxwell es cero. El término $F^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}$ viene de $[Z_{ab}, J_{cd}]$, $R^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}$ viene de $[J_{ab}, Z_{cd}]$, y $\frac{1}{l^{2}}\mathcal{T}^{[a}\rho^{b]}$ viene de $[P_a, P_b]$.

En resumen tenemos que las transformaciones de las intensidades de campo vienen dadas por

$$\delta R^{ab} = R^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}, \tag{4.47}$$
$$\delta \mathcal{T}^{a} = \pi^{a}{}_{c}\mathcal{T}^{c} + R^{a}{}_{c}\rho^{c} + F^{a}_{c}\rho^{c} + \xi^{a}{}_{c}\mathcal{T}^{c}, \tag{4.48}$$
$$\delta F^{ab} = F^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]} + R^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]} + F^{[a}_{c}\xi^{c|b]} + \frac{1}{l^2}\mathcal{T}^{[a}\rho^{b]}. \tag{4.49}$$

4.5. Lagrangiano para gravedad con simetrías $AdS\mathcal{L}_4$

Para construir un lagrangiano que contenga la acción de Einstein-Hilbert, un termino cosmológico y términos que dependan de los nuevos campos k^{ab}, utilizamos el mecanismo usado en [1], donde consideramos las siguientes 4-formas invariantes

$$\mathcal{L}_1 = \varepsilon_{abcd}R^{ab}F^{cd}, \tag{4.50}$$
$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}F^{ab}F^{cd}, \tag{4.51}$$

con lo cual el lagrangiano estará dado por

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2\kappa\Lambda}\left(-\mathcal{L}_1 + \mu\mathcal{L}_2\right). \tag{4.52}$$

Introducimos $\mu = \frac{\lambda}{\Lambda}$, donde λ corresponde a la constante cosmológica estándar, y $\Lambda = \frac{1}{l^2}$, la constante de gravitación de Einstein convencional es denotada por κ. Estudiaremos la forma de $\mathcal{L}_1$ multiplicando por $\frac{-1}{2\kappa\Lambda}$ y utilizando las correspondientes ecuaciones para R^{ab} y $\tilde{F}^{ab}$

$$-\frac{1}{2\kappa\Lambda}\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}R^{ab}F^{cd}, \tag{4.53}$$
$$= -\frac{1}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}R^{ab}Dk^{cd} - \frac{1}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}R^{ab}k^{[c}{}_{e}k^{e|d]} - \frac{1}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}R^{ab}e^{c}e^{d}. \tag{4.54}$$

Integrando por partes, utilizando la identidad $DR^{ab} = 0$, vemos fácilmente que el término $\varepsilon_{abcd}R^{ab}Dk^{cd}$ corresponde a un término de borde. De manera que el lagrangiano de Einstein Hilbert $\mathcal{L}_{E-H}$ más un término que depende de R^{ab} y de los campos k^{ab} es dado por

$$-\frac{1}{2\kappa\Lambda}\mathcal{L}_1 \approx -\frac{1}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}R^{ab}e^{c}e^{d} - \frac{1}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}R^{ab}k^{[a}{}_{c}k^{c|b]}, \tag{4.55}$$
$$\approx \mathcal{L}_{E-H} - \frac{1}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}R^{ab}k^{[a}{}_{c}k^{c|b]}. \tag{4.56}$$

Ahora consideramos $\mathcal{L}_2$, la cual nos proporciona el término cosmológico. De la curvatura F^{ab} observamos que $\mathcal{L}_2$ incluye el término cosmológico estándar más cinco términos adicionales que dependen de k^{ab}. Multiplicando $\mathcal{L}_2$ por $\frac{\lambda}{2\kappa\Lambda^2}$, obtenemos

$$\frac{\lambda}{2\kappa\Lambda^2}\mathcal{L}_2 = \frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}F^{ab}F^{cd}, \tag{4.57}$$

$$= \frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}\left\{Dk^{ab}Dk^{cd} + 2Dk^{ab}k^{[c}{}_{e}k^{e|d]} + 2\Lambda^2 Dk^{ab}e^c e^d + k^{[a}{}_{c}k^{c|b]}k^{[c}{}_{e}k^{e|d]}\right.$$
$$\left. +2\Lambda^2 k^{[a}{}_{e}k^{e|b]}e^c e^d + \Lambda^4 e^a e^b e^c e^d\right\}, \tag{4.58}$$

así tenemos que

$$\frac{\lambda}{2\kappa\Lambda^2}\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{cosm} + \frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}Dk^{cd} + \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}k^{[c}{}_{e}k^{e|d]}$$
$$+ \frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^c e^d + \frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}k^{[a}{}_{f}k^{f|b]}k^{[c}{}_{e}k^{e|d]} + \frac{\mu}{2k}k^{[a}{}_{e}k^{e|b]}e^c e^d, \tag{4.59}$$

con

$$\mathcal{L}_{cosm} = \frac{\lambda}{4\kappa}\varepsilon_{abcd}e^a e^b e^c e^d. \tag{4.60}$$

Finalmente utilizando (4.52) el lagrangiano que buscamos y que llamaremos $\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_4}$ es dado por

$$\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_4} = -\frac{1}{2\kappa\Lambda}\mathcal{L}_1 + \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda^2}\mathcal{L}_2, \tag{4.61}$$

$$\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_4} = \mathcal{L}_{E-H} + \mathcal{L}_{cosm} - \frac{1}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}R^{ab}k^{[c}{}_{e}k^{e|d]} + \frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}Dk^{cd}$$
$$+ \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}k^{[c}{}_{e}k^{e|d]} + \frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^c e^d + \frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}k^{[a}{}_{f}k^{f|b]}k^{[c}{}_{e}k^{e|d]}$$
$$+ \frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}k^{[a}{}_{e}k^{e|b]}e^c e^d, \tag{4.62}$$

4.6. Ecuaciones de campo para la extensión $AdS\mathcal{L}_4$

Vamos a continuar de la forma usual, utilizando el principio de acción, para obtener las ecuaciones de campo para la extensión $AdS\mathcal{L}_4$ de la gravedad de Einstein .

La variación de (4.62) con respecto de e^a es

$$\delta_{e^a}\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_4} = \delta_{e^a}\mathcal{L}_{E-H} + \delta_{e^a}\mathcal{L}_{cosm} + \delta_{e^a}\left(\frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^c e^d\right)$$
$$+ \delta_{e^a}\left(\frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}Dk^{cd}\right) - \delta_{e^a}\left(\frac{\mu}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}R^{ab}k^{[c}{}_{e}k^{e|d]}\right)$$
$$+ \delta_{e^a}\left(\frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}k^{[a}{}_{f}k^{f|b]}k^{[c}{}_{e}k^{e|d]}\right) + \delta_{e^a}\left(\frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}k^{a}{}_{e}k^{eb}e^c e^d\right). \tag{4.63}$$

Utilizando las propiedades del operador δ_e obtenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\delta_{e^a}\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_4} &= -\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}R^{ab}e^c\delta e^d + \frac{\lambda}{\kappa}\varepsilon_{abcd}e^a e^b e^c \delta e^d + \frac{\mu}{\kappa}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^c\delta e^d + \frac{\mu}{\kappa}\varepsilon_{abcd}k^{[a}{}_e k^{e|b]}e^c\delta e^d, \\
&= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(-R^{ab}e^c + \lambda e^a e^b e^c + \mu Dk^{ab}e^c + \mu k^{[a}{}_e k^{e|b]}e^c\right)\delta e^d, \qquad (4.64)\\
&= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(\mu\left(Dk^{ab} + \Lambda e^a e^b + k^{[a}{}_e k^{e|b]}e^c\right)e^c - R^{ab}e^c\right)\delta e^c, \qquad (4.65)
\end{aligned}
$$

donde

$$\delta_{e^a}\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_4} = [L]_{e^a}\,\delta e^d, \qquad (4.66)$$

y dado que $\delta_{e^a}\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_4} = 0$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\mu\left(Dk^{ab} + \Lambda e^a e^b + k^{[a}{}_e k^{e|b]}e^c\right)e^c - R^{ab}e^c &= 0, \qquad (4.67)\\
\mu F^{ab}e^c - R^{ab}e^c &= 0, \qquad (4.68)
\end{aligned}
$$

es decir

$$\mu F^{ab}e^c = R^{ab}e^c. \qquad (4.69)$$

La variación de (4.62) con respecto de ω^{ab} nos conduce a

$$
\begin{aligned}
\delta_{\omega^{ab}}\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_4} &= \delta_{\omega^{ab}}\mathcal{L}_{E-H} + \delta_{\omega^{ab}}\mathcal{L}_{cosm} + \delta_{\omega^{ab}}\left(\frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^c e^d\right)\\
&+ \delta_{\omega^{ab}}\left(\frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}Dk^{cd}\right) - \delta_{\omega^{ab}}\left(\frac{\mu}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}R^{ab}k^{[c}{}_e k^{e|d]}\right)\\
&+ \delta_{\omega^{ab}}\left(\frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}k^{[a}{}_f k^{f|b]}k^{[c}{}_e k^{e|d]}\right) + \delta_{\omega^{ab}}\left(\frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}k^a{}_e k^{eb}e^c e^d\right)\\
&+ \delta_{\omega^{ab}}\left(\frac{\lambda}{2\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}k^{[c}{}_e k^{e|d]}\right). \qquad (4.70)
\end{aligned}
$$

Es decir

$$
\begin{aligned}
\delta_{\omega^{ab}}\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_4} &= -\frac{1}{2\kappa}d\left(\varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}e^c e^d\right) - \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}De^a e^b\delta\omega^{cd} - \frac{\mu}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ae}k^b{}_e e^c e^d\\
&- \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ae}k^b{}_e Dk^{cd} + d\left(-\frac{\mu}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}k^{[c}{}_e k^{e|d]}\right)\\
&- \frac{\mu}{\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}k^{[c}{}_e Dk^{e|d]} + \frac{\lambda}{\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}\delta\omega^a{}_f k^{fb}k^{[c}{}_e k^{e|d]}. \qquad (4.71)
\end{aligned}
$$

Las derivadas exteriores no proporcionan información a las ecuaciones de movimiento, entonces

$$\begin{aligned}
\delta_{\omega^{ab}}\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_4} &= -\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}De^ae^b\delta\omega^{cd} - \frac{\mu}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ae}k^b{}_e e^c e^d - \frac{\lambda}{\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ae}k^b{}_e Dk^{cd} \\
&+ \frac{\lambda}{\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}\delta\omega^a{}_f k^{fb}k^{[c}{}_e k^{e|d]}, \qquad (4.72)\\
&= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(-De^ae^b\delta\omega^{cd} - \mu\delta\omega^{ae}k^b{}_e e^c e^d - \frac{\lambda}{\Lambda^2}\delta\omega^{ae}k^b{}_e Dk^{cd} + \frac{\lambda}{\Lambda^2}\delta\omega^a{}_f k^{fb}k^{[c}{}_e k^{e|d]}\right), \qquad (4.73)\\
&= \delta\omega^{ab}\left\{-\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left[De^ce^d - \frac{\mu}{\Lambda}k^c{}_e\left(Dk^{ed} + k^{[e}{}_f k^{f|d]} + \Lambda e^c e^d\right)\right]\right\}, \qquad (4.74)
\end{aligned}$$

donde

$$\delta_{\omega^{ab}}\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_4} = \delta\omega^{ab}\,[L]_{\omega^{ab}}\,, \qquad (4.75)$$

y dado que $\delta_{\omega^{ab}}\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_4} = 0$ tenemos

$$\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(T^ce^d - \frac{\mu}{\Lambda}k^c{}_e F^{ce}\right) = 0, \qquad (4.76)$$

o bien

$$T^{[a}e^{b]} + \frac{\mu}{\Lambda}F^{[a}{}_c k^{c|b]} = 0. \qquad (4.77)$$

La variación de (4.62) con respecto de k^{ab} conduce a

$$\begin{aligned}
\delta_{k^{ab}}\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_4} &= \delta_{k^{ab}}\mathcal{L}_{E-H} + \delta_{k^{ab}}\mathcal{L}_{cosm} + \delta_{k^{ab}}\left(\frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^ce^d\right) \\
&+ \delta_{k^{ab}}\left(\frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}Dk^{cd}\right) - \delta_{k^{ab}}\left(\frac{\mu}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}R^{ab}k^{[c}{}_e k^{e|d]}\right) \\
&+ \delta_{k^{ab}}\left(\frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}k^{[a}{}_f k^{f|b]}k^{[c}{}_e k^{e|d]}\right) + \delta_{k^{ab}}\left(\frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}k^a{}_e k^{eb}e^ce^d\right) \\
&+ \delta_{k^{ab}}\left(\frac{\lambda}{2\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}k^{[c}{}_e k^{e|d]}\right), \qquad (4.78)
\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}
\delta_{k^{ab}}\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_4} &= -\frac{\mu}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\delta k^{ab}De^ce^d - \frac{\mu}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}DDk^{ab}\delta k^{cd} \\
&- \frac{2\mu}{\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}R^{ab}k^c{}_e\delta k^{ed} + \frac{2\mu}{\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}k^{[a}{}_f k^{f|b]}k^c{}_e\delta k^{ed} \\
&+ \frac{2\mu}{\kappa}\varepsilon_{abcd}k^a{}_e\delta k^{eb}e^ce^d + \frac{2\mu}{\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}k^c{}_e\delta k^{ed}, \qquad (4.79)\\
&= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\delta k^{ab}\left(T^ce^d - \frac{3}{2}\frac{\mu}{\Lambda}R^{ce}k^d{}_e - \frac{2\mu}{\Lambda}k^c{}_e\tilde{F}^{ed}\right), \qquad (4.80)
\end{aligned}$$

donde

$$\delta_{k^{ab}}\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_4} = \delta k^{ab}\left[L\right]_{k^{ab}}, \tag{4.81}$$

y dado que $\delta_{k^{ab}}\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_4} = 0$ tenemos

$$\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(T^c e^d - \frac{3}{2}\frac{\mu}{\Lambda}R^{ce}k^d{}_e - \frac{2\mu}{\Lambda}k^c{}_e F^{ed}\right) = 0. \tag{4.82}$$

En resumen las ecuaciones del movimiento vienen dadas por

$$\mu F^{ab}e^c = R^{ab}e^c, \tag{4.83a}$$

$$T^{[a}e^{b]} + \frac{\mu^2}{\lambda}F^{[a}{}_c k^{c|b]} = 0, \tag{4.83b}$$

$$\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(T^c e^d - \frac{3}{2}\frac{\mu}{\Lambda}R^{ce}k^d{}_e - \frac{2\mu}{\Lambda}k^c{}_e F^{ed}\right) = 0. \tag{4.83c}$$

Capítulo 5

Gravedad en $4D$ con simetrías $AdS\mathcal{L}_5$

5.1. Ecuaciones de estructura

Consideremos el potencial de gauge evaluado en el álgebra $AdS\mathcal{L}_5$

$$\begin{aligned} A &= A^A T_A, \\ &= \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}e^a P_a + \frac{1}{2}k^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}h^a Z_a, \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde $a, b = 0, 1, 2, 3$, son los índices de espacio tangente que suben y bajan con la métrica de Minkowski, donde

$$e^a = e^a_\mu dx^\mu, \quad \omega^{ab} = \omega^{ab}_\mu dx^\mu, \quad k^{ab} = k^{ab}_\mu dx^\mu, \quad h^a = h^a_\mu dx^\mu.$$

Usando las relaciones de conmutación del álgebra (2.9) tenemos que la 2-forma curvatura es dada por

$$\mathbf{F} = dA + \frac{1}{2}[A, A]. \tag{5.2}$$

Sustituyendo la ecuación (5.1) en (5.2) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{2}d\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{2}dk^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}de^a P_a + \frac{1}{l}dh^a Z_a \\ &+ \frac{1}{8}\omega^{ab}\omega^{cd}[J_{ab}, J_{cd}] + \frac{1}{4}k^{ab}\omega^{cd}[Z_{ab}, J_{cd}] + \frac{1}{8}k^{ab}k^{cd}[Z_{ab}, Z_{cd}] + \frac{1}{2l}\omega^{ab}e^c[J_{ab}, P_c] \\ &+ \frac{1}{2l}k^{ab}e^c[Z_{ab}, P_c] + \frac{1}{2l^2}e^a e^c[P_a, P_c] + \frac{1}{2l}\omega^{ab}h^c[J_{ab}, Z_c] + \frac{1}{2l}k^{ab}h^c[Z_{ab}, Z_c] \\ &+ \frac{1}{l^2}e^a h^c[P_a, Z_c] + \frac{1}{2l^2}h^a h^c[Z_a, Z_c]. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Utilizando las relaciones de conmutación y con un poco de álgebra obtenemos

- Para términos con P_a

$$\frac{1}{l}\mathcal{T}^a P_a = \frac{1}{l}de^a P_a - \frac{1}{l}e^a\omega^c_{\ a}P_c - \frac{1}{l}h^a k^c_{\ a}P_c, \tag{5.4}$$
$$= \frac{1}{l}\left(de^a + \omega^a_{\ c}e^c + k^a_{\ c}h^c\right)P_a, \tag{5.5}$$
$$= \frac{1}{l}\left(De^a + k^a_{\ c}h^c\right)P_a, \tag{5.6}$$

tenemos

$$\tilde{\mathcal{T}}^a = T^a + k^a_{\ c}h^c. \tag{5.7}$$

Donde $\tilde{T}^a$ corresponde a la 2-forma torsión, y T^a la torsión usual. El término $k^a_{\ c}h^c$ viene del conmutador $[Z_{ab}, Z_c]$.

- Para términos con J_{ab}

$$\frac{1}{2}\mathcal{R}^{ab}J_{ab} = \frac{1}{2}d\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{4}\omega^{[a}_{\ \ c}\omega^{c|b}J_{ab} + \frac{1}{4}k^{[a}_{\ \ c}k^{c|b}J_{ab} + \frac{1}{l^2}e^a h^b J_{ab}, \tag{5.8}$$
$$= \frac{1}{2}\left(d\omega^{ab} + \frac{1}{2}\omega^{[a}_{\ \ c}\omega^{c|b]} + \frac{1}{2}k^{[a}_{\ \ c}k^{c|b]} + \frac{2}{l^2}e^a h^b\right)J_{ab}, \tag{5.9}$$

tenemos

$$\mathcal{R}^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_{\ \ c}\omega^{cb} + k^a_{\ \ c}k^{cb} + \frac{2}{l^2}e^a h^b, \tag{5.10}$$
$$= R^{ab} + k^a_{\ \ c}k^{cb} + \frac{2}{l^2}e^a h^b. \tag{5.11}$$

Donde el término $k^a_{\ \ c}k^{cb}$ viene del conmutador $[Z_{ab}, Z_{cd}]$ y el término $e^a h^b$ viene de $[P_a, Z_b]$.

- Agrupamos términos con Z_{ab}

$$\frac{1}{2}dk^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{2}\omega^{[a}_{\ \ c}k^{c|b]}Z_{ab} + \frac{1}{2l^2}e^a e^b Z_{ab} + \frac{1}{2l^2}h^a h^b Z_{ab},$$
$$= \frac{1}{2}\left(dk^{ab} + \omega^{[a}_{\ \ c}k^{c|b]} + \frac{1}{l^2}e^a e^b + \frac{1}{l^2}h^a h^b\right)Z_{ab}. \tag{5.12}$$

Podemos definir $\tilde{F}^{ab}$ como la intensidad de campo asociada al campo de 1-formas k^{ab} para $AdS\mathcal{L}_5$, entonces

$$\tilde{F}^{ab} = dk^{ab} + \omega^{[a}_{\ \ c}k^{c|b]} + \frac{1}{l^2}e^a e^b + \frac{1}{l^2}h^a h^b, \tag{5.13}$$
$$= Dk^{ab} + \frac{1}{l^2}e^a e^b + \frac{1}{l^2}h^a h^b, \tag{5.14}$$

donde el término $h^a h^b$ viene de $[Z_a, Z_b]$.

- Agrupamos términos con Z_a

$$\frac{1}{l}H^aZ_a = \frac{1}{l}dh^aZ_a + \frac{1}{l}\omega^c_{\ a}h^aZ_c + \frac{1}{l}k^a_{\ c}e^cZ_a, \tag{5.15}$$
$$= \frac{1}{l}\left(Dh^a + k^a_{\ c}e^c\right)Z_a, \tag{5.16}$$

tenemos

$$H^a = Dh^a + k^a_{\ c}e^c. \tag{5.17}$$

Donde el término $k^a_{\ c}e^c$ viene del conmutador $[Z_{ab}, P_c]$.

La curvatura $\mathbf{F}$ es dada por

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}\mathcal{R}^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}\tilde{\mathcal{T}}^aP_a + \frac{1}{2}\tilde{F}^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}H^aZ_a, \tag{5.18}$$

con

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega^a_{\ c}\omega^{cb} + k^a_{\ c}k^{cb} + \frac{2}{l^2}e^ah^b, \\
&= R^{ab} + k^a_{\ c}k^{cb} + \frac{2}{l^2}e^ah^b, && (5.19)\\
\tilde{\mathcal{T}}^a &= De^a + k^a_{\ b}h^b, \\
&= T^a + k^a_{\ b}h^b, && (5.20)\\
\tilde{F}^{ab} &= Dk^{ab} + \frac{1}{l^2}h^ah^b + \frac{1}{l^2}e^ae^b, && (5.21)\\
H^a &= Dh^a + k^a_{\ b}e^b. && (5.22)
\end{aligned}$$

5.2. Identidades de Bianchi

A continuación vamos a obtener las identidades de Bianchi para las 2-formas de curvatura. Para esto vamos a utilizamos la expresión

$$D\mathbf{F} = d\mathbf{F} + [A, \mathbf{F}]. \tag{5.23}$$

Sustituyendo las expresiones (5.1) y (5.18) en (5.23) tenemos

$$D\mathbf{F} = \frac{1}{2}D\mathcal{R}^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}D\tilde{\mathcal{T}}^aP_a + \frac{1}{2}D\tilde{F}^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}DH^aZ_a, \tag{5.24}$$

donde

$$D\mathcal{R}^{ab} + k^{[a}{}_{c}\tilde{F}^{c|b]} + \frac{1}{l^2}h^{[a}\tilde{\mathcal{T}}^{b]} + \frac{1}{l^2}e^{[a}H^{b]} = 0, \tag{5.25}$$

$$D\tilde{\mathcal{T}}^{a} + \mathcal{R}^{a}{}_{b}e^{b} + \tilde{F}^{a}{}_{b}h^{b} + k^{a}{}_{b}H^{b} = 0, \tag{5.26}$$

$$D\tilde{F}^{ab} + \mathcal{R}^{[a}{}_{c}k^{c|b]} + \frac{1}{l^2}e^{[a}\tilde{\mathcal{T}}^{b]} + \frac{1}{l^2}h^{[a}H^{b]} = 0, \tag{5.27}$$

$$DH^{a} + \mathcal{R}^{a}{}_{b}h^{b} + k^{a}_{b}\tilde{\mathcal{T}}^{b} + \tilde{F}^{a}_{b}e^{b} = 0. \tag{5.28}$$

5.3. Transformaciones de los campos A

Bajo transformaciones locales de gauge con el parámetro $\epsilon = \epsilon(x)$

$$\begin{aligned}\epsilon(x) &= \epsilon(x)^{A}T_{A},\\ &= \frac{1}{2}\pi^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}\rho^{a}P_{a} + \frac{1}{2}\xi^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}\sigma^{a}Z_{a},\end{aligned} \tag{5.29}$$

tenemos

$$\delta_{\epsilon}A = d\epsilon + [A,\epsilon]\,. \tag{5.30}$$

Sustituyendo (5.1) y (5.29) en (5.30) tenemos

$$\begin{aligned}\delta_{\epsilon}A &= d\left(\frac{1}{2}\pi^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}\rho^{a}P_{a} + \frac{1}{2}\xi^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}\sigma^{a}Z_{a}\right)\\
&+ \left[\frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}e^{a}P_{a} + \frac{1}{2}k^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}h^{a}Z_{a}, \frac{1}{2}\pi^{cd}J_{cd} + \frac{1}{l}\rho^{c}P_{c} + \frac{1}{2}\xi^{cd}Z_{cd} + \frac{1}{l}\sigma^{c}Z_{c}\right],\\
&= \frac{1}{2}d\pi^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}d\rho^{a}P_{a} + \frac{1}{2}d\xi^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}d\sigma^{a}Z_{a}\\
&+ \frac{1}{4}\omega^{ab}\pi^{cd}\left[J_{ab},J_{cd}\right] + \frac{1}{2l}e^{a}\pi^{cd}\left[P_{a},J_{cd}\right] + \frac{1}{4}k^{ab}\pi^{cd}\left[Z_{ab},J_{cd}\right] + \frac{1}{2l}h^{a}\pi^{cd}\left[Z_{a},J_{cd}\right]\\
&+ \frac{1}{2l}\omega^{ab}\rho^{c}\left[J_{ab},P_{c}\right] + \frac{1}{l^2}e^{a}\rho^{c}\left[P_{a},P_{c}\right] + \frac{1}{2l}k^{ab}\rho^{c}\left[Z_{ab},P_{c}\right] + \frac{1}{l^2}h^{a}\rho^{c}\left[Z_{a},P_{c}\right]\\
&+ \frac{1}{4}\omega^{ab}\xi^{cd}\left[J_{ab},Z_{cd}\right] + \frac{1}{2l}e^{a}\xi^{cd}\left[P_{a},Z_{cd}\right] + \frac{1}{4}k^{ab}\xi^{cd}\left[Z_{ab},Z_{cd}\right] + \frac{1}{2l}h^{a}\xi^{cd}\left[Z_{a},Z_{cd}\right]\\
&+ \frac{1}{2l}\omega^{ab}\sigma^{c}\left[J_{ab},Z_{c}\right] + \frac{1}{l^2}e^{a}\sigma^{c}\left[P_{a},Z_{c}\right] + \frac{1}{2l}k^{ab}\sigma^{c}\left[Z_{ab},Z_{c}\right] + \frac{1}{l^2}h^{a}\sigma^{c}\left[Z_{a},Z_{c}\right].\end{aligned} \tag{5.31}$$

Por otro lado

$$\delta A = \frac{1}{2}\delta\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}\delta e^{a}P_{a} + \frac{1}{2}\delta k^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}\delta h^{a}Z_{a}. \tag{5.32}$$

Nuevamente utilizando las relaciones de conmutación y un poco de álgebra obtenemos los siguientes resultados

- Para términos con J_{ab}

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}d\pi^{ab}J_{ab}+\frac{1}{2}\omega^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}J_{ab}+\frac{1}{2}k^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}J_{ab}+\frac{1}{l^2}e^a\sigma^bJ_{ab}+\frac{1}{l^2}h^a\rho^bJ_{ab},\\
&=\frac{1}{2}\left(d\pi^{ab}+\omega^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}+k^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}+\frac{2}{l^2}e^a\sigma^b+\frac{2}{l^2}h^a\rho^b\right)J_{ab},
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

tenemos

$$
\delta\omega^{ab}=d\pi^{ab}+\omega^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}+k^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}+\frac{1}{l^2}e^{[a}\sigma^{b]}+\frac{1}{l^2}h^{[a}\rho^{b]}.
\tag{5.34}
$$

Notemos que el término $k^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}$ viene del conmutador $[Z_{ab}, Z_{cd}]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_5$ es cero, el término $\frac{1}{l^2}e^{[a}\sigma^{b]}$ viene del conmutador $[P_a, Z_b]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_5$ es cero y el término $\frac{1}{l^2}h^{[a}\rho^{b]}$ viene del conmutador $[Z_a, P_b]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_5$ es cero.

- Para términos con P_a

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{l}d\rho^aP_a+\frac{1}{l}\pi^a{}_ce^cP_a+\frac{1}{l}\omega^a{}_c\rho^cP_a+\frac{1}{l}\xi^a{}_ch^cP_a+\frac{1}{l}k^a{}_c\sigma^cP_a,\\
&=\frac{1}{l}\left(d\rho^a+\pi^a{}_ce^c+\omega^a{}_c\rho^c+\xi^a{}_ch^c+k^a{}_c\sigma^c\right)P_a,
\end{aligned}
\tag{5.35}
$$

tenemos

$$
\delta e^a=d\rho^a+\pi^a{}_ce^c+\omega^a{}_c\rho^c+\xi^a{}_ch^c+k^a{}_c\sigma^c.
\tag{5.36}
$$

Notemos que el término $\pi^a{}_ce^c$ viene del conmutador $[P_a, J_{cd}]$, el término $\omega^a{}_c\rho^c$ viene del conmutador $[J_{ab}, P_c]$, el término $\xi^a{}_ch^c$ viene del conmutador $[Z_a, Z_{cd}]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_5$ es cero, y el término $k^a{}_c\sigma^c$ viene del conmutador $[Z_{ab}, Z_c]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_5$ es cero.

- Para términos con Z_{ab}

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}d\xi^{ab}Z_{ab}+\frac{1}{2}k^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}Z_{ab}+\frac{1}{2}\omega^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}Z_{ab}+\frac{1}{l^2}e^a\rho^bZ_{ab}+\frac{1}{l^2}h^a\sigma^bZ_{ab}\\
&=\frac{1}{2}\left(d\xi^{ab}+k^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}+\omega^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}+\frac{2}{l^2}e^a\rho^b+\frac{2}{l^2}h^a\sigma^b\right)Z_{ab},
\end{aligned}
\tag{5.37}
$$

tenemos

$$\delta k^{ab} = d\xi^{ab} + k^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]} + \omega^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]} + \frac{2}{l^2}e^a\rho^b + \frac{2}{l^2}h^a\sigma^b. \tag{5.38}$$

Notemos que el término $k^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}$ viene del conmutador $[Z_{ab}, J_{cd}]$, el término $\omega^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}$ viene del conmutador $[J_{ab}, Z_{cd}]$, el término $\frac{2}{l^2}e^a\rho^b$ viene del conmutador $[P_a, P_b]$, y finalmente el término $\frac{2}{l^2}h^a\sigma^b$ viene del conmutador $[Z_a, Z_b]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_5$ es cero.

- Para términos con Z_a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{l}d\sigma^a Z_a + \frac{1}{l}h^c\pi^a{}_c Z_a + \frac{1}{l}k^a{}_c\rho^c Z_a + \frac{1}{l}\xi^a{}_c e^c Z_a + \frac{1}{l}\omega^a{}_c\sigma^c Z_a \\ &= \frac{1}{l}\left(d\sigma^a + h^c\pi^a{}_c + k^a{}_c\rho^c + \xi^a{}_c e^c + \omega^a{}_c\sigma^c\right) Z_a,\end{aligned} \tag{5.39}$$

tenemos

$$\delta h^a = d\sigma^a + h^c\pi^a{}_c + k^a{}_c\rho^c + \xi^a{}_c e^c + \omega^a{}_c\sigma^c. \tag{5.40}$$

Notemos que el término $h^c\pi^a{}_c$ viene del conmutador $[Z_a, J_{cd}]$, el término $k^a{}_c\rho^c$ viene del conmutador $[Z_{ab}, P_c]$, el término $\xi^a{}_c e^c$ viene del conmutador $[P_a, Z_{cd}]$, y finalmente el término $\omega^a{}_c\sigma^c$ viene del conmutador $[J_{ab}, Z_c]$.

En resumen, las transformaciones de los campos de gauge están dados por

$$\delta\omega^{ab} = d\pi^{ab} + \omega^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]} + k^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]} + \frac{1}{l^2}e^{[a}\sigma^{b]} + \frac{1}{l^2}h^{[a}\rho^{b]}, \tag{5.41}$$

$$\delta e^a = d\rho^a + \pi^a{}_c e^c + \omega^a{}_c\rho^c + \xi^a{}_c h^c + k^a{}_c\sigma^c, \tag{5.42}$$

$$\delta k^{ab} = d\xi^{ab} + k^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]} + \omega^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]} + \frac{1}{l^2}e^{[a}\rho^{b]} + \frac{1}{l^2}h^{[a}\sigma^{b]}, \tag{5.43}$$

$$\delta h^a = d\sigma^a + h^c\pi^a{}_c + k^a{}_c\rho^c + \xi^a{}_c e^c + \omega^a{}_c\sigma^c. \tag{5.44}$$

5.4. Transformación de las intensidades de campo F

Puesto que

$$\delta\mathbf{F} = [\mathbf{F}, \epsilon], \tag{5.45}$$

luego sustituyendo (5.18), y (5.29) en (5.45) tenemos

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{F} = &\left[\frac{1}{2}\mathcal{R}^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}\tilde{\mathcal{T}}^{a}P_{a} + \frac{1}{2}\tilde{F}^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}H^{a}Z_{a}\ ,\right. \\
&\left.\frac{1}{2}\pi^{cd}J_{cd} + \frac{1}{l}\rho^{c}P_{c} + \frac{1}{2}\xi^{cd}Z_{cd} + \frac{1}{l}\sigma^{c}Z_{c}\right], \qquad (5.46) \\
= &\frac{1}{4}\mathcal{R}^{ab}\pi^{cd}\left[J_{ab},J_{cd}\right] + \frac{1}{2l}\tilde{\mathcal{T}}^{a}\pi^{cd}\left[P_{a},J_{cd}\right] + \frac{1}{4}\tilde{F}^{ab}\pi^{cd}\left[Z_{ab},J_{cd}\right] + \frac{1}{2l}H^{a}\pi^{cd}\left[Z_{a},J_{cd}\right] \\
&+ \frac{1}{2l}\mathcal{R}^{ab}\rho^{c}\left[J_{ab},P_{c}\right] + \frac{1}{l^{2}}\tilde{\mathcal{T}}^{a}\rho^{c}\left[P_{a},P_{c}\right] + \frac{1}{2l}\tilde{F}^{ab}\rho^{c}\left[Z_{ab},P_{c}\right] + \frac{1}{l^{2}}H^{a}\rho^{c}\left[Z_{a},P_{c}\right] \\
&+ \frac{1}{4}\mathcal{R}^{ab}\xi^{cd}\left[J_{ab},Z_{cd}\right] + \frac{1}{2l}\tilde{\mathcal{T}}^{a}\xi^{cd}\left[P_{a},Z_{cd}\right] + \frac{1}{4}\tilde{F}^{ab}\xi^{cd}\left[Z_{ab},Z_{cd}\right] + \frac{1}{2l}H^{a}\xi^{cd}\left[Z_{a},Z_{cd}\right] \\
&+ \frac{1}{2l}\mathcal{R}^{ab}\sigma^{c}\left[J_{ab},Z_{c}\right] + \frac{1}{l^{2}}\tilde{\mathcal{T}}^{a}\sigma^{c}\left[P_{a},Z_{c}\right] + \frac{1}{2l}\tilde{F}^{ab}\sigma^{c}\left[Z_{ab},Z_{c}\right] + \frac{1}{l^{2}}H^{a}\sigma^{c}\left[Z_{a},Z_{c}\right]. \qquad (5.47)
\end{aligned}$$

por otro lado

$$\delta F = \frac{1}{2}\delta\mathcal{R}^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}\delta\tilde{\mathcal{T}}^{a}P_{a} + \frac{1}{2}\delta\tilde{\mathcal{F}}^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}\delta H^{a}Z_{a}. \qquad (5.48)$$

Desarrollando y agrupando términos tenemos

- Para J_{ab}

$$\frac{1}{2}\mathcal{R}^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}J_{ab} + \frac{1}{2}\tilde{F}^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}J_{ab} + \frac{1}{l^{2}}H^{a}\rho^{b}J_{ab} + \frac{1}{l^{2}}\tilde{\mathcal{T}}^{a}\sigma^{b}J_{ab}, \qquad (5.49)$$

  tenemos

$$\delta\mathcal{R}^{ab} = \mathcal{R}^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]} + \tilde{F}^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]} + \frac{1}{l^{2}}H^{[a}\rho^{b]} + \frac{1}{l^{2}}\tilde{\mathcal{T}}^{[a}\sigma^{b]}. \qquad (5.50)$$

  Notemos que el término $\mathcal{R}^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}$ viene del conmutador $[J_{ab}, J_{cd}]$, el término $\tilde{F}^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}$ viene del conmutador $[Z_{ab}, Z_{cd}]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_5$ es cero, el término $\frac{1}{l^2}H^{[a}\rho^{b]}$ viene del conmutador $[Z_a, P_b]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_5$ es cero, y finalmente el término $\frac{1}{l^2}\tilde{\mathcal{T}}^{[a}\sigma^{b]}$ viene del conmutador $[P_a, Z_b]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_5$ es cero.

- Para P_a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{l}\pi^{a}{}_{c}\tilde{\mathcal{T}}^{c}P_{a} + \frac{1}{l}\mathcal{R}^{a}{}_{c}\rho^{c}P_{a} + \frac{1}{l}\xi^{a}{}_{c}H^{c}P_{a} + \frac{1}{l}\tilde{F}^{a}{}_{c}\sigma^{c}P_{a}, \\
&= \frac{1}{l}\left(\pi^{a}{}_{c}\tilde{\mathcal{T}}^{c} + \mathcal{R}^{a}{}_{c}\rho^{c} + \xi^{a}{}_{c}H^{c} + \tilde{F}^{a}{}_{c}\sigma^{c}\right)P_{a}, \qquad (5.51)
\end{aligned}$$

  tenemos

$$\delta\tilde{\mathcal{T}}^{a}=\pi^{a}_{\ c}\tilde{\mathcal{T}}^{c}+\mathcal{R}^{a}_{\ c}\rho^{c}+\xi^{a}_{\ c}H^{c}+\tilde{F}^{a}_{\ c}\sigma^{c}. \tag{5.52}$$

Notemos que el término $\pi^{a}_{\ c}\tilde{\mathcal{T}}^{c}$ viene del conmutador $[P_a, J_{cd}]$, el término $\mathcal{R}^{a}_{\ c}\rho^{c}$ viene del conmutador $[J_{ab}, P_c]$, el término $\xi^{a}_{\ c}H^{c}$ viene del conmutador $[Z_a, Z_{ab}]$, y finalmente el término $\tilde{F}^{a}_{\ c}\sigma^{c}$ viene del conmutador $[Z_{ab}, Z_c]$.

- Para términos con Z_{ab}

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\tilde{F}^{[a}_{\ c}\pi^{c|b]}Z_{ab}+\frac{1}{2}\mathcal{R}^{[a}_{\ c}\xi^{c|b]}Z_{ab}+\frac{1}{l^{2}}\tilde{\mathcal{T}}^{a}\rho^{b}Z_{ab}+\frac{1}{l^{2}}H^{a}\sigma^{b}Z_{ab},\\ &=\frac{1}{2}\left(\tilde{F}^{[a}_{\ c}\pi^{c|b]}+\mathcal{R}^{[a}_{\ c}\xi^{c|b]}+\frac{2}{l^{2}}\tilde{\mathcal{T}}^{a}\rho^{b}+\frac{2}{l^{2}}H^{a}\sigma^{b}\right)Z_{ab},\end{aligned} \tag{5.53}$$

tenemos

$$\delta\tilde{F}^{ab}=\tilde{F}^{[a}_{\ c}\pi^{c|b]}+\mathcal{R}^{[a}_{\ c}\xi^{c|b]}+\frac{1}{l^{2}}\tilde{\mathcal{T}}^{[a}\rho^{b]}+\frac{1}{l^{2}}H^{[a}\sigma^{b]}. \tag{5.54}$$

Notemos que el término $\tilde{F}^{[a}_{\ c}\pi^{c|b]}$ viene del conmutador $[Z_{ab}, J_{cd}]$, el término $\mathcal{R}^{[a}_{\ c}\xi^{c|b]}$ viene del conmutador $[J_{ab}, Z_{cd}]$, el término $\frac{1}{l^2}\tilde{\mathcal{T}}^{[a}\rho^{b]}$ viene del conmutador $[P_a, P_b]$, y finalmente el término $\frac{1}{l^2}H^{[a}\sigma^{b]}$ viene del conmutador $[Z_a, Z_b]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_5$ es cero.

- Para términos con Z_a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{l}H^{c}\pi^{a}_{\ c}Z_{a}+\frac{1}{l}\tilde{F}^{a}_{\ c}\rho^{c}Z_{a}+\frac{1}{l}\xi^{a}_{\ c}\tilde{\mathcal{T}}^{c}Z_{a}+\frac{1}{l}\mathcal{R}^{a}_{\ c}\sigma^{c}Z_{a},\\ &=\frac{1}{l}\left(H^{c}\pi^{a}_{\ c}+\tilde{F}^{a}_{\ c}\rho^{c}+\xi^{a}_{\ c}\tilde{\mathcal{T}}^{c}+\mathcal{R}^{a}_{\ c}\sigma^{c}\right)Z_{a},\end{aligned} \tag{5.55}$$

tenemos

$$\delta H^{a}=H^{c}\pi^{a}_{\ c}+\tilde{F}^{a}_{\ c}\rho^{c}+\xi^{a}_{\ c}\tilde{\mathcal{T}}^{c}+\mathcal{R}^{a}_{\ c}\sigma^{c}. \tag{5.56}$$

Notemos que el término $H^{c}\pi^{a}_{\ c}$ viene del conmutador $[Z_a, J_{cd}]$, el término $\tilde{F}^{a}_{\ c}\rho^{c}$ viene del conmutador $[Z_{ab}, P_c]$, el término $\xi^{a}_{\ c}\tilde{\mathcal{T}}^{c}$ viene del conmutador $[P_a, Z_{cd}]$, el término $\mathcal{R}^{a}_{\ c}\sigma^{c}$ viene del conmutador $[J_{ab}, Z_c]$.

En resumen, las transformaciones de las intensidades de campo están dadas por

$$\delta\mathcal{R}^{ab}=\mathcal{R}^{[a}_{\ c}\pi^{c|b]}+\tilde{F}^{[a}_{\ c}\xi^{c|b]}+\frac{1}{l^{2}}H^{[a}\rho^{b]}+\frac{1}{l^{2}}\tilde{\mathcal{T}}^{[a}\sigma^{b]}, \tag{5.57}$$

$$\delta\tilde{\mathcal{T}}^{a}=\pi^{a}_{\ c}\tilde{\mathcal{T}}^{c}+\mathcal{R}^{a}_{\ c}\rho^{c}+\xi^{a}_{\ c}H^{c}+\tilde{F}^{a}_{\ c}\sigma^{c}, \tag{5.58}$$

$$\delta\tilde{F}^{ab}=\tilde{F}^{[a}_{\ c}\pi^{c|b]}+\mathcal{R}^{[a}_{\ c}\xi^{c|b]}+\frac{1}{l^{2}}\tilde{\mathcal{T}}^{[a}\rho^{b]}+\frac{1}{l^{2}}H^{[a}\sigma^{b]}, \tag{5.59}$$

$$\delta H^{a}=H^{c}\pi^{a}_{\ c}+\tilde{F}^{a}_{\ c}\rho^{c}+\xi^{a}_{\ c}\tilde{\mathcal{T}}^{c}+\mathcal{R}^{a}_{\ c}\sigma^{c}. \tag{5.60}$$

5.5. Lagrangiano para gravedad con simetrías $AdS\mathcal{L}_5$

Para construir un lagrangiano que contenga la acción de Einstein-Hilbert, un termino cosmológico y términos que dependan de los nuevos campos k^{ab}, h^a, utilizamos el mecanismo usado en [1], donde consideramos las siguientes 4-formas invariantes

$$\mathcal{L}_1 = \varepsilon_{abcd}\mathcal{R}^{ab}\tilde{F}^{cd}, \tag{5.61}$$
$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}\tilde{F}^{ab}\tilde{F}^{cd}, \tag{5.62}$$

con lo cual el lagrangiano estará dado por

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2\kappa\lambda}\left(-\mathcal{L}_1 + \mu\mathcal{L}_2\right). \tag{5.63}$$

Introducimos, $\mu = \frac{\lambda}{\Lambda}$, donde λ corresponde a la constante cosmológica estándar, y $\Lambda = \frac{1}{l^2}$, la constante de gravitación de Einstein convencional es denotada por κ. Estudiaremos la forma de $\mathcal{L}_1$ multiplicando por $\frac{-\mu}{2\kappa\lambda}$ y utilizando las correspondientes ecuaciones para $\mathcal{R}^{ab}$ y $\tilde{F}^{ab}$

$$-\frac{\mu}{2\kappa\lambda}\mathcal{L}_1 = -\frac{\mu}{2\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}\mathcal{R}^{ab}\tilde{F}^{cd}. \tag{5.64}$$

Integrando por partes, utilizando la identidad $DR^{ab} = 0$, vemos fácilmente que el término $\varepsilon_{abcd}R^{ab}Dk^{cd}$ corresponde a un término de borde. De manera que el lagrangiano de Einstein Hilbert $\mathcal{L}_{E-H}$ más un término que depende de R^{ab} y de los campos k^{ab}, y h^a es dado por

$$\begin{aligned}
-\frac{\mu}{2\kappa\lambda}\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{E-H} &- \frac{1}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}R^{ab}h^ch^d + \frac{\mu}{2\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}k^a{}_ek^{eb}Dk^{cd} - \frac{1}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}k^a{}_ek^{eb}e^ce^d, \\
&- \frac{1}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}k^a{}_ek^{eb}h^ch^d - \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}e^ah^bDk^{cd} - \frac{\Lambda}{\kappa}\varepsilon_{abcd}e^ah^be^ce^d, \\
&- \frac{\Lambda}{\kappa}\varepsilon_{abcd}e^ah^bh^ch^d.
\end{aligned} \tag{5.65}$$

Consideramos $\mathcal{L}_2$, el cual nos proporciona el término cosmológico. De la curvatura $\tilde{F}^{ab}$ vemos que $\mathcal{L}_2$ incluye el término cosmológico estándar mas términos que dependen de k^{ab} y h^a. Multiplicamos $\mathcal{L}_2$ por $\frac{\mu^2}{2\kappa\lambda}$

$$\begin{aligned}
\frac{\mu^2}{2\kappa\lambda}\mathcal{L}_2 = \frac{\mu^2}{4\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}Dk^{cd} &+ \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^ce^d + \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}h^ch^d \\
&+ \frac{\lambda}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}e^ae^bh^ch^d + \frac{\lambda}{4\kappa}\varepsilon_{abcd}h^ah^bh^ch^d + \frac{\lambda}{4\kappa}\varepsilon_{abcd}e^ae^be^ce^d.
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Finalmente utilizando (5.63) el lagrangiano que buscamos y que llamaremos $\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_5}$ es dado por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_5} = {} & \mathcal{L}_{E-H} + \mathcal{L}_{cosm} - \frac{1}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}R^{ab}h^c h^d - \frac{\mu}{2\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}k^a{}_e k^{eb}Dk^{cd} - \frac{1}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}k^a{}_e k^{eb}e^c e^d \\
& - \frac{1}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}k^a{}_e k^{eb}h^c h^d - \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}e^a h^b Dk^{cd} - \frac{\Lambda}{\kappa}\varepsilon_{abcd}e^a h^b e^c e^d - \frac{\Lambda}{\kappa}\varepsilon_{abcd}e^a h^b h^c h^d \\
& + \frac{\mu^2}{4\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}Dk^{cd} + \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^c e^d + \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}h^c h^d + \frac{\lambda}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}e^a e^b h^c h^d \\
& + \frac{\lambda}{4\kappa}\varepsilon_{abcd}h^a h^b h^c h^d. \qquad (5.67)
\end{aligned}
$$

5.6. Ecuaciones de campo para la extensión $AdS\mathcal{L}_5$

Utilizando el principio de acción, vamos a obtener las ecuaciones de campo para la extensión $AdS\mathcal{L}_5$ de la gravedad de Einstein
La variación de (5.67) con respecto a e^a es

$$
\begin{aligned}
\delta_e\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_5} = {} & \delta_e\mathcal{L}_{E-H} + \delta_e\mathcal{L}_{cosm} - \frac{1}{2\kappa}\delta_e\left(\varepsilon_{abcd}k^a{}_e k^{eb}e^c e^d\right) - \frac{1}{\kappa}\delta_e\left(\varepsilon_{abcd}e^a h^b Dk^{cd}\right) \\
& - \frac{\Lambda}{\kappa}\delta_e\left(\varepsilon_{abcd}e^a h^b e^c e^d\right) - \frac{\Lambda}{\kappa}\delta_e\left(\varepsilon_{abcd}e^a h^b h^c h^d\right) + \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda}\delta_e\left(\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^c e^d\right) \\
& + \frac{\lambda}{2\kappa}\delta_e\left(\varepsilon_{abcd}e^a e^b h^c h^d\right). \qquad (5.68)
\end{aligned}
$$

Utilizando las propiedades del operador δ_ϵ obtenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\delta_e\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_5} = {} & \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left\{-\left(R^{ab} + k^a{}_e k^{eb} + 2\Lambda e^a h^b\right)e^c - \Lambda e^a h^b e^c + \lambda e^a e^b e^c\right. \\
& \left. - Dk^{ab}h^c - \Lambda h^a h^b h^c + \mu Dk^{ab}e^c + \lambda e^a h^b h^c\right\}\delta e^d, \qquad (5.69) \\
= {} & \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left\{-\mathcal{R}^{ab}e^c - \left(Dk^{ab} + \Lambda e^a e^b + \Lambda h^a h^b\right)h^c\right. \\
& \left. + \mu\left(Dk^{ab} + \Lambda h^a h^b + \Lambda e^a e^b\right)e^c\right\}\delta e^d, \qquad (5.70) \\
= {} & \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left\{-\mathcal{R}^{ab}e^c - \tilde{F}^{ab}h^c + \mu\tilde{F}^{ab}e^c\right\}\delta e^d, \qquad (5.71)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\delta_e\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_5} = \left[L_{AdS\mathcal{L}_5}\right]_{e^a}\delta e^d, \qquad (5.72)
$$

y dado que $\delta_e\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_5} = 0$ tenemos

$$
\left[L_{AdS\mathcal{L}_5}\right]_{e^a} = \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left\{-\mathcal{R}^{ab}e^c - \tilde{F}^{ab}h^c + \mu\tilde{F}^{ab}e^c\right\}. \qquad (5.73)
$$

La variación de (5.67) con respecto a h^a nos conduce a

$$\begin{aligned}\delta_h \mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_5} &= -\frac{1}{2\kappa}\delta_h\left(\varepsilon_{abcd}R^{ab}h^ch^d\right) - \frac{1}{2\kappa}\delta_h\left(\varepsilon_{abcd}k^a{}_ek^{eb}h^ch^d\right) - \frac{1}{\kappa}\delta_h\left(\varepsilon_{abcd}e^ah^bDk^{cd}\right) \\ &- \frac{\Lambda}{\kappa}\delta_h\left(\varepsilon_{abcd}e^ah^be^ce^d\right) - \frac{\Lambda}{\kappa}\delta_h\left(\varepsilon_{abcd}e^ah^bh^ch^d\right) + \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda}\delta_h\left(\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}h^ch^d\right) \\ &+ \frac{\lambda}{2\kappa}\delta_h\left(\varepsilon_{abcd}e^ae^bh^ch^d\right) + \frac{\lambda}{4\kappa}\delta_h\left(\varepsilon_{abcd}h^ah^bh^ch^d\right). \end{aligned} \tag{5.74}$$

Utilizando las propiedades del operador δ_h obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\delta_h \mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_5} &= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left\{-\left(R^{ab} + k^a{}_ek^{eb} + 2\Lambda e^ah^b\right)h^c - \left(Dk^{ab} + \Lambda e^ae^b + \Lambda h^ah^b\right)e^c\right. \\ &\left.+\mu\left(Dk^{ab} + \Lambda e^ae^b + \Lambda h^ah^b\right)h^c\right\}\delta h^d, \qquad (5.75) \\ &= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(-\mathcal{R}^{ab}h^c - \tilde{F}^{ab}e^c + \mu\tilde{F}^{ab}h^c\right)\delta h^d, \qquad (5.76)\end{aligned}$$

luego

$$\delta_h \mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_5} = \left[L_{AdS\mathcal{L}_5}\right]_{h^a}\delta h^d, \tag{5.77}$$

y dado que $\delta_h \mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_5} = 0$ tenemos

$$\left[L_{AdS\mathcal{L}_5}\right]_{h^a} = \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(-\mathcal{R}^{ab}h^c - \tilde{F}^{ab}e^c + \mu\tilde{F}^{ab}h^c\right). \tag{5.78}$$

La variación de (5.67) con respecto a ω^{ab} es dada por

$$\begin{aligned}\delta_\omega \mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_5} &= \delta_\omega \mathcal{L}_{E-H} - \frac{1}{2\kappa}\delta_\omega\left(\varepsilon_{abcd}R^{ab}h^ch^d\right) - \frac{\mu}{2\kappa\lambda}\delta_\omega\left(\varepsilon_{abcd}k^a{}_ek^{eb}Dk^{cd}\right) \\ &-\frac{1}{\kappa}\delta_\omega\left(\varepsilon_{abcd}h^ae^bDk^{cd}\right) + \frac{\mu^2}{4\kappa\lambda}\delta_\omega\left(\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}Dk^{cd}\right) + \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda}\delta_\omega\left(\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^ce^d\right) \\ &+\frac{\lambda}{2\kappa\Lambda}\delta_\omega\left(\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}h^ch^d\right). \end{aligned} \tag{5.79}$$

Utilizando las propiedades del operador δ_ω obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\delta_\omega \mathcal{L}_{AdS_{\mathcal{L}_5}} &= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}\left(-De^ce^d - Dh^ch^d - \frac{\mu}{\lambda}k^c{}_ek^e{}_fk^{fd} - 2k^c{}_ee^eh^d - \frac{\mu^2}{\lambda}k^c{}_eDk^{ed}\right. \\ &\left.-\frac{\lambda}{\Lambda}k^c{}_ee^ee^d - \frac{\lambda}{\Lambda}k^c{}_eh^eh^d\right), \qquad (5.80) \\ &= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}\left\{-De^ce^d - Dh^ch^d - \frac{\mu^2}{\lambda}k^c{}_e\left(Dk^{ed} + \Lambda e^ee^d + \Lambda h^eh^d\right)\right. \\ &\left.-\frac{\mu}{\lambda}k^c{}_ek^e{}_fk^{fd} - 2k^c{}_ee^eh^d\right\}, \qquad (5.81) \\ &= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}\left\{-De^ce^d - Dh^ch^d - \frac{\mu^2}{\lambda}k^c{}_e\tilde{F}^{ed} - \frac{\mu}{\lambda}k^c{}_e\left(k^e{}_fk^{fd} + 2\Lambda e^eh^d\right)\right\}, \\ &\qquad (5.82)\end{aligned}$$

donde

$$\delta_\omega \mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_5} = \delta\omega^{ab} \left[L_{AdS\mathcal{L}_5}\right]_{\omega^{ab}} , \tag{5.83}$$

y dado que $\delta_\omega \mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_5} = 0$ tenemos

$$\left[L_{AdS\mathcal{L}_5}\right]_{\omega^{ab}} = \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left\{-T^c e^d - Dh^c h^d - \frac{\mu^2}{\lambda}k^c{}_e \tilde{F}^{ed} - \frac{\mu}{\lambda}k^c{}_e\left(k^e{}_f k^{fd} + 2\Lambda e^e h^d\right)\right\} , \tag{5.84}$$

donde

$$\varepsilon_{abcd}k^c{}_e\left(k^e{}_f k^{fd} + 2e^e h^d\right) = \varepsilon_{abcd}k^c{}_e\left(\mathcal{R}^{ed} - R^{ed}\right) , \tag{5.85}$$

sustituyendo tenemos

$$\left[L_{AdS\mathcal{L}_5}\right]_{\omega^{ab}} = \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(-T^c e^d - Dh^c h^d - \frac{\mu}{\lambda}k^c{}_e\left(\mathcal{R}^{ed} - R^{ed}\right) - \frac{\mu^2}{\lambda}k^c{}_e\tilde{F}^{ed}\right) , \tag{5.86}$$

$$= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(-T^c e^d - Dh^c h^d - \frac{\mu}{\lambda}k^c{}_e\mathcal{R}^{ed} + \frac{\mu}{\lambda}k^c{}_e R^{ed} - \frac{\mu^2}{\lambda}k^c{}_e\tilde{F}^{ed}\right) . \tag{5.87}$$

La variación de (5.67) con respecto a k^{ab} es dada por

$$\begin{aligned}\delta_k \mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_5} = &-\frac{\mu}{2\kappa\lambda}\delta_k\left(\varepsilon_{abcd}k^a{}_e k^{eb}Dk^{cd}\right) - \frac{1}{2\kappa}\delta_k\left(\varepsilon_{abcd}k^a{}_e k^{eb}e^c e^d\right) - \frac{1}{2\kappa}\delta_k\left(\varepsilon_{abcd}k^a{}_e k^{eb}h^c h^d\right) \\ &- \frac{1}{\kappa}\delta_k\left(\varepsilon_{abcd}h^a e^b Dk^{cd}\right) + \frac{\mu^2}{4\kappa\lambda}\delta_k\left(\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}Dk^{cd}\right) + \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda}\delta_k\left(\varepsilon_{abcd}DK^{ab}e^c e^d\right) \\ &+ \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda}\delta_k\left(\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}h^c h^d\right) .\end{aligned} \tag{5.88}$$

Utilizando las propiedades del operador δ_k obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\delta_k \mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_5} = \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\Big(&\frac{2\mu}{\lambda}\delta k^{ab}k^c{}_e Dk^{ed} + \delta k^{ab}k^c{}_e e^e e^d + \delta k^{ab}k^c{}_e h^e h^d + Dh^a e^b \delta k^{cd} \\ &- h^a De^b \delta k^{cd} + \frac{\mu^2}{2\lambda}DDk^{ab}\delta k^{cd} + \mu\delta k^{ab}De^c e^d + \mu\delta k^{ab}Dh^c h^d\Big) ,\end{aligned} \tag{5.89}$$

$$\begin{aligned}= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\delta k^{ab}\Big(&\frac{2\mu}{\lambda}k^c{}_e Dk^{ed} + k^c{}_e e^e e^d + k^c{}_e h^e h^d + Dh^c e^d \\ &- De^c h^d + \mu De^c e^d + \mu Dh^c h^d - \frac{\mu^2}{2\lambda}R^c{}_e k^{ed}\Big) ,\end{aligned} \tag{5.90}$$

donde

$$\delta_k \mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_5} = \left[L_{AdS\mathcal{L}_5}\right]_{\delta k^{ab}} \delta k^{ab}, \tag{5.91}$$

y dado que $\left[L_{AdS\mathcal{L}_5}\right]_{\delta k^{ab}} = 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left[L_{AdS\mathcal{L}_5}\right]_{\delta k^{ab}} &= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(\frac{\mu}{\lambda}k^c{}_e\tilde{F}^{ed} + \frac{\mu}{\lambda}k^c{}_e Dk^{ed} - \frac{\mu^2}{2\lambda}R^c{}_e k^{ed}\right.\\
&\left.-Dh^c e^d - De^c h^d + \mu De^c e^d + \mu Dh^c h^d\right), \qquad (5.92)\\
&= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(\frac{\mu}{\lambda}k^c{}_e\tilde{F}^{ed} + \frac{\mu}{\lambda}k^c{}_e Dk^{ed} - \frac{\mu^2}{2\lambda}k^c{}_e R^{ed}\right.\\
&\left.+Dh^c\left(\mu h^d - e^d\right) + De^c\left(\mu e^d - h^d\right)\right). \qquad (5.93)
\end{aligned}$$

En resumen, las ecuaciones de campo están dadas por

$$\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(-\tilde{F}^{ab}h^c + \mu\tilde{F}^{ab}e^c - \mathcal{R}^{ab}e^c\right) = 0, \tag{5.94}$$

$$\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(-\mathcal{R}^{ab}h^c - \tilde{F}^{ab}e^c + \mu\tilde{F}^{ab}h^c\right) = 0, \tag{5.95}$$

$$\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(-T^c e^d - Dh^c h^d + \frac{\mu}{\lambda}k^c{}_e\mathcal{R}^{ed} - \frac{\mu}{\lambda}k^c{}_e R^{ed} - \frac{\mu^2}{\lambda}k^c{}_e\tilde{F}^{ed}\right) = 0, \tag{5.96}$$

$$\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(\frac{\mu}{\lambda}k^c{}_e\tilde{F}^{ed} + \frac{\mu}{\lambda}k^c{}_e Dk^{ed} - \frac{\mu^2}{2\lambda}k^c{}_e R^{ed} + Dh^c\left(\mu h^d - e^d\right) + T^c\left(\mu e^d - h^d\right)\right) = 0. \tag{5.97}$$

Capítulo 6

Gravedad en $4D$ con simetrías $AdS\mathcal{L}_6$

6.1. Ecuaciones de estructura

Consideremos el potencial de gauge evaluadas en el álgebra $AdS\mathcal{L}_6$

$$\begin{aligned} A &= A^A T_A, \\ &= \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}e^a P_a + \frac{1}{2}k^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}h^a Z_a + \frac{1}{2}q^{ab}\hat{Z}_{ab}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde $a, b = 0, 1, 2, 3$ son los índices de espacio tangente que suben y bajan con la métrica de Minkowski η_{ab}. Donde

$$e^a = e^a_\mu dx^\mu, \qquad \omega^{ab} = \omega^{ab}_\mu dx^\mu, \qquad k^{ab} = k^{ab}_\mu dx^\mu, \qquad h^a = h^a_\mu dx^\mu, \qquad q^{ab} = q^{ab}_\mu dx^\mu.$$

Usando las relaciones de conmutación del álgebra (2.10) tenemos que la 2-forma curvatura es dada por

$$\mathbf{F} = dA + \frac{1}{2}\left[A, A\right]. \tag{6.2}$$

Sustituyendo (6.1) en (6.2) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= d\left(\frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}e^a P_a + \frac{1}{2}k^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}h^a Z_a + \frac{1}{2}q^{ab}\hat{Z}_{ab}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}e^a P_a + \frac{1}{2}k^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}h^a Z_a + \frac{1}{2}q^{ab}\hat{Z}_{ab}\right., \\ &\left.\frac{1}{2}\omega^{cd}J_{cd} + \frac{1}{l}e^c P_c + \frac{1}{2}k^{cd}Z_{cd} + \frac{1}{l}h^c Z_c + \frac{1}{2}q^{cd}\hat{Z}_{cd}\right]. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Obtenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} = &\frac{1}{2}d\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}de^{a}P_{a} + \frac{1}{2}dk^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}dh^{a}Z_{a} + \frac{1}{2}dq^{ab}\hat{Z}_{ab} \\
&+ \frac{1}{8}\omega^{ab}\omega^{cd}\left[J_{ab}, J_{cd}\right] + \frac{1}{4l}e^{a}\omega^{cd}\left[P_{a}, J_{cd}\right] + \frac{1}{8}k^{ab}\omega^{cd}\left[Z_{ab}, J_{cd}\right] + \frac{1}{8}q^{ab}\omega^{cd}\left[\hat{Z}_{ab}, J_{cd}\right] \\
&+ \frac{1}{4l}h^{a}\omega^{cd}\left[Z_{a}, J_{cd}\right] + \frac{1}{4l}\omega^{ab}e^{c}\left[J_{ab}, P_{c}\right] + \frac{1}{2l^{2}}e^{a}e^{c}\left[P_{a}, P_{c}\right] + \frac{1}{4l}k^{ab}e^{c}\left[Z_{ab}, P_{c}\right] \\
&\frac{1}{4l}q^{ab}e^{c}\left[\hat{Z}_{ab}, P_{c}\right] + \frac{1}{2l^{2}}h^{a}e^{c}\left[Z_{a}, P_{c}\right] + \frac{1}{8}\omega^{ab}k^{cd}\left[J_{ab}, Z_{cd}\right] + \frac{1}{4l}e^{a}k^{cd}\left[P_{a}, Z_{cd}\right] \\
&\frac{1}{8}k^{ab}k^{cd}\left[Z_{ab}, Z_{cd}\right] + \frac{1}{8}q^{ab}k^{cd}\left[\hat{Z}_{ab}, Z_{cd}\right] + \frac{1}{4l}h^{a}k^{cd}\left[Z_{a}, Z_{cd}\right] + \frac{1}{8}\omega^{ab}q^{cd}\left[J_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right] \\
&+ \frac{1}{4l}e^{a}q^{cd}\left[P_{a}, \hat{Z}_{cd}\right] + \frac{1}{8}k^{ab}q^{cd}\left[Z_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right] + \frac{1}{8}q^{ab}q^{cd}\left[\hat{Z}_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right] + \frac{1}{4l}h^{a}q^{cd}\left[Z_{a}, \hat{Z}_{cd}\right] \\
&+ \frac{1}{4l}\omega^{ab}h^{c}\left[J_{ab}, Z_{c}\right] + \frac{1}{2l^{2}}e^{a}h^{c}\left[P_{a}, Z_{c}\right] + \frac{1}{4l}k^{ab}h^{c}\left[Z_{ab}, Z_{c}\right] + \frac{1}{4l}q^{ab}h^{c}\left[\hat{Z}_{ab}, Z_{c}\right] \\
&+ \frac{1}{2l^{2}}h^{a}h^{c}\left[Z_{a}, Z_{c}\right]. \qquad (6.4)
\end{aligned}
$$

Utilizando las relaciones de conmutación y agrupando términos obtenemos

- Para términos con P_a

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{l}de^{a}P_{a} - \frac{1}{l}e^{b}\omega^{a}_{\ b}P_{a} + \frac{1}{l}q^{a}_{\ b}e^{b}P_{a} + \frac{1}{4l}k^{a}_{\ b}h^{b}P_{a}, &(6.5)\\
&= \frac{1}{l}\left(de^{a} + \omega^{a}_{\ b}e^{b} + q^{a}_{\ b}e^{b} + k^{a}_{\ b}h^{b}\right)P_{a}, &(6.6)\\
&= \frac{1}{l}\left(De^{a} + q^{a}_{\ b}e^{b} + k^{a}_{\ b}h^{b}\right)P_{a}, &(6.7)\\
&= \frac{1}{l}\left(T^{a} + q^{a}_{\ b}e^{b} + k^{a}_{\ b}h^{b}\right)P_{a}, &(6.8)
\end{aligned}
$$

tenemos

$$\bar{\mathcal{T}}^{a} = T^{a} + q^{a}_{\ b}e^{b} + k^{a}_{\ b}h^{b}. \qquad (6.9)$$

Donde el término $q^{a}_{\ b}e^{b}$ viene de $\left[\hat{Z}_{ab}, P_{c}\right]$ y el término $k^{a}_{\ b}h^{b}$ viene de $\left[Z_{ab}, Z_{c}\right]$.

- Para términos con J_{ab}

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}d\omega^{ab}J_{ab} - \frac{1}{8}\omega^{ab}\omega^{d}_{\ b}J_{ad} + \frac{1}{8}\omega^{ab}\omega^{c}_{\ a}J_{bc} + \frac{1}{8}\omega^{ab}\omega^{d}_{\ a}J_{bd} - \frac{1}{8}\omega^{ab}\omega^{c}_{\ b}J_{ac}, &(6.10)\\
&= \frac{1}{2}d\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{4}\omega^{ab}\omega^{c}_{\ a}J_{bc} + \frac{1}{4}\omega^{ab}\omega^{d}_{\ a}J_{bd}, &(6.11)\\
&= \frac{1}{2}d\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{2}\omega^{ab}\omega^{c}_{\ a}J_{bc}, &(6.12)\\
&= \frac{1}{2}\left(d\omega^{ab} + \omega^{ca}\omega^{b}_{\ c}\right)J_{ab}, &(6.13)
\end{aligned}
$$

tenemos

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^{a}{}_{c}\omega^{cb}. \tag{6.14}$$

- Para términos con Z_{ab}

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}dk^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{4}\omega^{[a}{}_{c}k^{c|b]}Z_{ab} + \frac{1}{4}\omega^{[a}{}_{c}k^{c|b]}Z_{ab} + \frac{1}{4}q^{[a}{}_{c}k^{c|b]}Z_{ab} + \frac{1}{4}\omega^{[a}{}_{c}k^{c|b]}Z_{ab} \\
&+ \frac{1}{2l^2}e^a e^b Z_{ab} + \frac{1}{2l^2}h^a h^b Z_{ab}, \\
&= \frac{1}{2}\left(dk^{ab} + \omega^{[a}{}_{c}k^{c|b]} + q^{[a}{}_{c}k^{c|b]} + \frac{1}{l^2}e^a e^b + \frac{1}{l^2}h^a h^b \right) Z_{ab}, \qquad (6.15)
\end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\bar{F}^{ab} &= dk^{ab} + \omega^{[a}{}_{c}k^{c|b]} + q^{[a}{}_{c}k^{c|b]} + \frac{1}{l^2}e^a e^b + \frac{1}{l^2}h^a h^b, \qquad (6.16)\\
&= Dk^{ab} + q^{[a}{}_{c}k^{c|b]} + \frac{1}{l^2}e^a e^b + \frac{1}{l^2}h^a h^b. \qquad (6.17)
\end{aligned}$$

Donde el término $q^{[a}{}_{c}k^{c|b]}$ viene del conmutador $\left[\hat{Z}_{ab}, Z_{cd}\right]$ y el término $h^a h^b$ viene de $[Z_a, Z_b]$.

- Para términos con $\hat{Z}_{ab}$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}dq^{ab}\hat{Z}_{ab} + \frac{1}{4}\omega^{[a}{}_{c}q^{c|b]}\hat{Z}_{ab} + \frac{1}{4}\omega^{[a}{}_{c}q^{c|b]}\hat{Z}_{ab} + \frac{1}{4}k^{[a}{}_{c}k^{c|b]}\hat{Z}_{ab} \\
&+ \frac{1}{4}q^{[a}{}_{c}q^{c|b]}\hat{Z}_{ab} + \frac{1}{2l^2}h^a e^b \hat{Z}_{ab} + \frac{1}{2l^2}e^a h^b \hat{Z}_{ab}, \qquad (6.18)\\
&= \frac{1}{2}\left(dq^{ab} + \omega^{[a}{}_{c}q^{c|b]} + k^{a}{}_{c}k^{cb} + q^{a}{}_{c}q^{cb} + \frac{2}{l^2}e^a h^b \right)\hat{Z}_{ab}, \qquad (6.19)\\
&= \frac{1}{2}\left(dq^{ab} + \omega^{[a}{}_{c}q^{c|b]} + k^{a}{}_{c}k^{cb} + q^{a}{}_{c}q^{cb} + \frac{1}{l^2}e^{[a}h^{b]} \right)\hat{Z}_{ab}, \qquad (6.20)
\end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
Q^{ab} &= dq^{ab} + \omega^{[a}{}_{c}q^{c|b]} + k^{a}{}_{c}k^{cb} + q^{a}{}_{c}q^{cb} + \frac{1}{l^2}e^{[a}h^{b]}, \qquad (6.21)\\
&= Dq^{ab} + k^{a}{}_{c}k^{cb} + q^{a}{}_{c}q^{cb} + \frac{1}{l^2}e^{[a}h^{b]}. \qquad (6.22)
\end{aligned}$$

Donde el término $k^{a}{}_{c}k^{cb}$ viene de $[Z_{ab}, Z_{cd}]$, el término $q^{a}{}_{c}q^{cb}$ de $\left[\hat{Z}_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right]$ y el término $e^a h^b$ de $[P_a, Z_b]$.

- Para términos con Z_a

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{l}dh^aZ_a-\frac{1}{4l}h^a\omega^c{}_aZ_c+\frac{1}{4l}h^a\omega_a{}^dZ_d+\frac{1}{4l}k^a{}_ce^cZ_a-\frac{1}{4l}k_c{}^be^cZ_b+\frac{1}{4l}k^a{}_ce^cZ_a\\
&-\frac{1}{4l}k_c{}^be^cZ_b-\frac{1}{4l}e^ak^c{}_aZ_c+\frac{1}{4l}e^ak_a{}^dZ_d-\frac{1}{4l}h^aq^c{}_aZ_c+\frac{1}{4l}h^aq_a{}^dZ_d-\frac{1}{4l}h^c\omega^a{}_cZ_a\\
&+\frac{1}{4l}h^c\omega_c{}^bZ_b+\frac{1}{4l}q^a{}_ch^cZ_a-\frac{1}{4l}q_c{}^bh^cZ_b,
\end{aligned}
$$

$$
=\frac{1}{l}dh^aZ_a-\frac{1}{l}h^c\omega^a{}_cZ_a-\frac{1}{l}e^ck^a{}_cZ_a-\frac{1}{l}h^cq^a{}_cZ_a, \tag{6.23}
$$

$$
=\frac{1}{l}\left(dh^a+\omega^a{}_ch^c+k^a{}_ce^c+q^a{}_ch^c\right)Z_a, \tag{6.24}
$$

tenemos

$$
\bar{H}^a=dh^a+\omega^a{}_ch^c+k^a{}_ce^c+q^a{}_ch^c, \tag{6.25}
$$

$$
=Dh^a+k^a{}_ce^c+q^a{}_ch^c. \tag{6.26}
$$

Donde el término $k^a{}_ce^c$ viene de $[Z_{ab},P_c]$ y el término $q^a{}_ch^c$ de $\left[\hat{Z}_{ab},Z_c\right]$.

la curvatura es dada por

$$
\mathbf{F}=\frac{1}{2}R^{ab}J_{ab}+\frac{1}{l}\bar{\mathcal{T}}^aP_a+\frac{1}{2}\bar{F}^{ab}Z_{ab}+\frac{1}{l}\bar{H}^aZ_a+\frac{1}{2}Q^{ab}\hat{Z}_{ab}. \tag{6.27}
$$

Donde

$$
\bar{\mathcal{T}}^a=T^a+q^a{}_be^b+k^a{}_bh^b, \tag{6.28}
$$

$$
R^{ab}=d\omega^{ab}+\omega^a{}_c\omega^{cb}, \tag{6.29}
$$

$$
\bar{F}^{ab}=dk^{ab}+\omega^{[a}{}_ck^{c|b]}+q^{[a}{}_ck^{c|b]}+\frac{1}{l^2}e^ae^b+\frac{1}{l^2}h^ah^b,
$$

$$
=Dk^{ab}+q^{[a}{}_ck^{c|b]}+\frac{1}{l^2}e^ae^b+\frac{1}{l^2}h^ah^b, \tag{6.30}
$$

$$
Q^{ab}=dq^{ab}+\omega^{[a}{}_cq^{c|b]}+k^a{}_ck^{cb}+q^a{}_cq^{cb}+\frac{1}{l^2}h^ae^b+\frac{1}{l^2}e^ah^b,
$$

$$
=Dq^{ab}+k^a{}_ck^{cb}+q^a{}_cq^{cb}+\frac{1}{l^2}h^ae^b+\frac{1}{l^2}e^ah^b, \tag{6.31}
$$

$$
\bar{H}^a=Dh^a+k^a{}_ce^c+q^a{}_ch^c. \tag{6.32}
$$

6.2. Identidades de Bianchi

A continuación vamos a calcular las identidades de Bianchi de las 2-formas de curvatura. Para esto vamos a utilizar las siguiente expresión

$$D\mathbf{F} = d\mathbf{F} + [A, \mathbf{F}] \, . \tag{6.33}$$

Sustituyendo (6.1) y (6.27) en (6.33) obtenemos

$$D\mathbf{F} = \frac{1}{2} DR^{ab} J_{ab} + \frac{1}{l} D\bar{\mathcal{T}}^{a} P_{a} + \frac{1}{2} D\bar{F}^{ab} Z_{ab} + \frac{1}{l} D\bar{H}^{a} Z_{a} + \frac{1}{2} DQ^{ab} \hat{Z}_{ab}. \tag{6.34}$$

Donde

$$DR^{ab} = 0, \tag{6.35}$$

$$D\bar{\mathcal{T}}^{a} + R^{a}{}_{b} e^{b} + q^{a}{}_{b} \bar{\mathcal{T}}^{b} + \bar{F}^{a}{}_{b} h^{b} + Q^{a}{}_{b} e^{b} + k^{a}_{c} \bar{H}^{c} = 0, \tag{6.36}$$

$$D\bar{F}^{ab} + k^{[a}{}_{c} R^{c|b]} + q^{[a}{}_{c} \bar{F}^{c|b]} + k^{[a}{}_{c} Q^{c|b]} + \frac{2}{l^{2}} e^{a} \bar{\mathcal{T}}^{b} + \frac{2}{l^{2}} h^{a} \bar{H}^{b} = 0, \tag{6.37}$$

$$D\bar{H}^{a} + R^{a}{}_{b} h^{b} + k^{a}_{b} \bar{\mathcal{T}}^{b} + \bar{F}^{a}_{b} e^{b} + q^{a}_{b} \bar{H}^{b} + Q^{a}_{b} h^{b} = 0, \tag{6.38}$$

$$DQ^{ab} + q^{a}{}_{c} R^{c|b]} + k^{a}{}_{c} \bar{F}^{c|b]} + q^{a}{}_{c} Q^{c|b]} + \frac{2}{l^{2}} h^{a} \bar{\mathcal{T}}^{b} + \frac{2}{l^{2}} e^{a} \bar{H}^{b} = 0. \tag{6.39}$$

6.3. Trasformación de los campos de gauge

Bajo transformaciones locales de gauge con el parámetro $\epsilon = \epsilon(x)$

$$\begin{aligned} \epsilon(x) &= \epsilon(x)^{A} T_{A}, \\ &= \frac{1}{2} \pi^{ab} J_{ab} + \frac{1}{l} \rho^{a} P_{a} + \frac{1}{2} \xi^{ab} Z_{ab} + \frac{1}{l} \sigma^{a} Z_{a} + \frac{1}{2} \chi^{ab} \hat{Z}_{ab}, \end{aligned} \tag{6.40}$$

tenemos

$$\delta A = d\epsilon + [A, \epsilon] \, . \tag{6.41}$$

Sustituyendo (6.1) y (6.40) en (6.41) tenemos

$$
\begin{aligned}
\delta A = & \frac{1}{2} d\pi^{ab} J_{ab} + \frac{1}{l} d\rho^{a} P_{a} + \frac{1}{2} d\xi^{ab} Z_{ab} + \frac{1}{l} d\sigma^{a} Z_{a} + \frac{1}{2} d\chi^{ab} \hat{Z}_{ab} \\
& + \frac{1}{4}\omega^{ab}\pi^{cd}\left[J_{ab}, J_{cd}\right] + \frac{1}{2l} e^{a}\pi^{cd}\left[P_{a}, J_{cd}\right] + \frac{1}{4} k^{ab}\pi^{cd}\left[Z_{ab}, J_{cd}\right] + \frac{1}{2l} h^{a}\pi^{cd}\left[Z_{a}, J_{cd}\right] \\
& + \frac{1}{4} q^{ab}\pi^{cd}\left[\hat{Z}_{ab}, J_{cd}\right] + \frac{1}{2l}\omega^{ab}\rho^{c}\left[J_{ab}, P_{c}\right] + \frac{1}{l^{2}} e^{a} e^{c}\left[P_{a}, P_{c}\right] + \frac{1}{2l} k^{ab}\rho^{c}\left[Z_{ab}, P_{c}\right] \\
& \frac{1}{l^{2}} h^{a}\rho^{c}\left[Z_{a}, P_{c}\right] + \frac{1}{2l} q^{ab}\rho^{c}\left[\hat{Z}_{ab}, P_{c}\right] + \frac{1}{4}\omega^{ab}\xi^{cd}\left[J_{ab}, Z_{cd}\right] + \frac{1}{2l} e^{a}\xi^{cd}\left[P_{a}, Z_{cd}\right] \\
& + \frac{1}{4} k^{ab}\xi^{cd}\left[Z_{ab}, Z_{cd}\right] + \frac{1}{2l} h^{a}\xi^{cd}\left[Z_{a}, Z_{cd}\right] + \frac{1}{4} q^{ab}\xi^{cd}\left[\hat{Z}_{ab}, Z_{cd}\right] + \frac{1}{2l}\omega^{ab}\sigma^{c}\left[J_{ab}, Z_{c}\right] \\
& + \frac{1}{l^{2}} e^{a}\sigma^{c}\left[P_{a}, Z_{c}\right] + \frac{1}{2l} k^{ab}\sigma^{c}\left[Z_{ab}, Z_{c}\right] + \frac{1}{l^{2}} h^{a}\sigma^{c}\left[Z_{a}, Z_{c}\right] + \frac{1}{2l} q^{ab}\sigma^{c}\left[\hat{Z}_{ab}, Z_{c}\right] \\
& + \frac{1}{4}\omega^{ab}\chi^{cd}\left[J_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right] + \frac{1}{2l} e^{a}\chi^{cd}\left[P_{a}, \hat{Z}_{cd}\right] + \frac{1}{4} k^{ab}\chi^{cd}\left[Z_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right] + \frac{1}{2l} h^{a}\chi^{cd}\left[Z_{a}, \hat{Z}_{cd}\right] \\
& + \frac{1}{4} q^{ab}\chi^{cd}\left[\hat{Z}_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right].
\end{aligned} \tag{6.42}
$$

Por otro lado

$$
\delta A = \frac{1}{2}\delta\omega^{ab} J_{ab} + \frac{1}{l}\delta e^{a} P_{a} + \frac{1}{2}\delta k^{ab} Z_{ab} + \frac{1}{l}\delta h^{a} Z_{a} + \frac{1}{2}\delta q^{ab}\hat{Z}_{ab}. \tag{6.43}
$$

Utilizando las relaciones de conmutación y un poco de álgebra obtenemos lo siguiente

- Para términos con J_{ab}

$$
\frac{1}{2} d\pi^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2}\omega^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]} J_{ab} = \frac{1}{2}\left(d\pi^{ab} + \omega^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}\right) J_{ab}, \tag{6.44}
$$

  tenemos

$$
\delta\omega^{ab} = d\pi^{ab} + \omega^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}. \tag{6.45}
$$

- Para términos con P_{a}

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{l} d\rho^{a} P_{a} + \frac{1}{l}\pi^{a}{}_{c} e^{c} P_{a} + \frac{1}{l}\omega^{a}{}_{c}\rho^{c} P_{a} + \frac{1}{l} q^{a}{}_{c}\rho^{c} P_{a} \\
& + \frac{1}{l}\xi^{a}{}_{c} h^{c} P_{a} + \frac{1}{l} k^{a}{}_{c}\sigma^{c} P_{a} + \frac{1}{l}\chi^{a}{}_{c} e^{c} P_{a}, \\
& = \frac{1}{l}\left(d\rho^{a} + \pi^{a}{}_{c} e^{c} + \omega^{a}{}_{c}\rho^{c} + q^{a}{}_{c}\rho^{c} + \xi^{a}{}_{c} h^{c} + k^{a}{}_{c}\sigma^{c} + \chi^{a}{}_{c} e^{c}\right) P_{a},
\end{aligned} \tag{6.46}
$$

  tenemos

$$\delta e^{a} = d\rho^{a} + \pi^{a}_{\ c} e^{c} + \omega^{a}_{\ c}\rho^{c} + q^{a}_{\ c}\rho^{c} + \xi^{a}_{\ c} h^{c} + k^{a}_{\ c}\sigma^{c} + \chi^{a}_{\ c} e^{c}. \tag{6.47}$$

Notemos que el término $\pi^{a}_{\ c} e^{c}$ viene del conmutador $[P_a, J_{cd}]$, el término $\omega^{a}_{\ c}\rho^{c}$ viene del conmutador $[J_{ab}, P_c]$, el término $q^{a}_{\ c}\rho^{c}$ viene del conmutador $\left[\hat{Z}_{ab}, P_c\right]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_6$ es cero, el término $\xi^{a}_{\ c} h^{c}$ viene del conmutador $[Z_a, Z_{cd}]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_6$ es cero, el término $k^{a}_{\ c}\sigma^{c}$ viene del conmutador $[Z_{ab}, Z_c]$, y por ultimo el término $\chi^{a}_{\ c} e^{c}$ viene del conmutador $\left[P_a, \hat{Z}_{cd}\right]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_6$ es cero.

- Para términos con Z_{ab}

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} d\xi^{ab} Z_{ab} + \frac{1}{2} k^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]} Z_{ab} + \frac{1}{2}\omega^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]} Z_{ab} + \frac{1}{2} q^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]} Z_{ab} \\
&+ \frac{1}{2} k^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]} Z_{ab} + \frac{1}{l^2} e^{a}\rho^{b} Z_{ab} + \frac{1}{l^2} h^{a}\sigma^{b} Z_{ab}, \\
&= \frac{1}{2}\left(d\xi^{ab} + k^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]} + \omega^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]} + q^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]} + k^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]}\right. \\
&\left. + \frac{2}{l^2} e^{a}\rho^{b} + \frac{2}{l^2} h^{a}\sigma^{b}\right) Z_{ab},
\end{aligned} \tag{6.48}$$

tenemos

$$\delta k^{ab} = d\xi^{ab} + k^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]} + \omega^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]} + q^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]} + k^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]} + \frac{2}{l^2} e^{a}\rho^{b} + \frac{2}{l^2} h^{a}\sigma^{b}. \tag{6.49}$$

Notemos que el término $k^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]}$ viene del conmutador $[Z_{ab}, J_{cd}]$, el término $\omega^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]}$ viene del conmutador $[J_{ab}, Z_{cd}]$, el término $q^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]}$ viene del conmutador $\left[\hat{Z}_{ab}, Z_{cd}\right]$, el término $k^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]}$ viene del conmutador $\left[Z_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right]$, el término $\frac{2}{l^2} e^{a}\rho^{b}$ viene del conmutador $[P_a, P_b]$, y finalmente el término $\frac{2}{l^2} h^{a}\sigma^{b}$ viene del conmutador $[Z_a, Z_b]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_6$ es cero.

- Para términos con Z_a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{l} d\sigma^{a} Z_a + \frac{1}{l} h^{c}\pi^{a}_{\ c} Z_a + \frac{1}{l} k^{a}_{\ c}\rho^{c} Z_a + \frac{1}{l}\xi^{a}_{\ c} e^{c} Z_a \\
&+ \frac{1}{l}\omega^{a}_{\ c}\sigma^{c} Z_a + \frac{1}{l} q^{a}_{\ c}\sigma^{c} Z_a + \frac{1}{l}\chi^{a}_{\ c} h^{c} Z_a, \\
&= \frac{1}{l}\left(d\sigma^{a} + h^{c}\pi^{a}_{\ c} + k^{a}_{\ c}\rho^{c} + \xi^{a}_{\ c} e^{c} + \omega^{a}_{\ c}\sigma^{c} + q^{a}_{\ c}\sigma^{c} + \chi^{a}_{\ c} h^{c}\right) Z_a,
\end{aligned} \tag{6.50}$$

tenemos

$$\delta h^a = d\sigma^a + h^c\pi^a_{\ c} + k^a_{\ c}\rho^c + \xi^a_{\ c}e^c + \omega^a_{\ c}\sigma^c + q^a_{\ c}\sigma^c + \chi^a_{\ c}h^c. \tag{6.51}$$

Notemos que el término $h^c\pi^a_{\ c}$ viene del conmutador $[Z_a, J_{cd}]$, el término $k^a_{\ c}\rho^c$ viene del conmutador $[Z_{ab}, P_c]$, el término $\xi^a_{\ c}e^c$ viene del conmutador $[P_a, Z_{cd}]$, el término $\omega^a_{\ c}\sigma^c$ viene del conmutador $[J_{ab}, Z_c]$, el término $q^a_{\ c}\sigma^c$ viene del conmutador $\left[\hat{Z}_{ab}, Z_c\right]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_6$ es cero, y por ultimo el término $\chi^a_{\ c}h^c$ viene del conmutador $\left[\hat{Z}_{ab}, Z_c\right]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_6$ es cero.

- Para términos con $\hat{Z}_{ab}$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}d\chi^{ab}\hat{Z}_{ab} + \frac{1}{2}q^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]}\hat{Z}_{ab} + \frac{1}{2}k^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]}\hat{Z}_{ab} + \frac{1}{2}\omega^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]}\hat{Z}_{ab} \\
&+\frac{1}{2}q^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]}\hat{Z}_{ab} + \frac{1}{l^2}h^a\rho^b\hat{Z}_{ab} + \frac{1}{l^2}e^a\sigma^b\hat{Z}_{ab}, \\
&= \frac{1}{2}\left(d\chi^{ab} + q^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]} + k^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]} + \omega^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]} + q^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]}\right. \\
&\left.+\frac{2}{l^2}h^a\rho^b + \frac{2}{l^2}e^a\sigma^b\right)\hat{Z}_{ab},
\end{aligned} \tag{6.52}$$

tenemos

$$\delta q^{ab} = d\chi^{ab} + q^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]} + k^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]} + \omega^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]} + q^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]} + \frac{2}{l^2}h^a\rho^b + \frac{2}{l^2}e^a\sigma^b. \tag{6.53}$$

Notemos que el término $q^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]}$ viene del conmutador $\left[\hat{Z}_{ab}, J_{cd}\right]$, el término $k^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]}$ viene del conmutador $\left[Z_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_6$ es cero, el término $\omega^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]}$ viene del conmutador $\left[J_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right]$, el término $q^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]}$ viene del conmutador $\left[\hat{Z}_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_6$ es cero, el término $\frac{2}{l^2}h^a\rho^b$ viene del conmutador $[Z_a, P_b]$, el término $\frac{2}{l^2}e^a\sigma^b$ viene del conmutador $[P_a, Z_b]$.

En resumen, las transformaciones de los campos de gauge están dados por

$$\delta\omega^{ab} = d\pi^{ab} + \omega^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]}, \tag{6.54}$$

$$\delta e^a = d\rho^a + \pi^a_{\ c}e^c + \omega^a_{\ c}\rho^c + q^a_{\ c}\rho^c + \xi^a_{\ c}h^c + k^a_{\ c}\sigma^c + \chi^a_{\ c}e^c, \tag{6.55}$$

$$\delta k^{ab} = d\xi^{ab} + k^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]} + \omega^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]} + q^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]} + k^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]} + \frac{1}{l^2}e^{[a}\rho^{b]} + \frac{1}{l^2}h^{[a}\sigma^{b]}, \tag{6.56}$$

$$\delta h^a = d\sigma^a + h^c\pi^a_{\ c} + k^a_{\ c}\rho^c + \xi^a_{\ c}e^c + \omega^a_{\ c}\sigma^c + q^a_{\ c}\sigma^c + \chi^a_{\ c}h^c, \tag{6.57}$$

$$\delta q^{ab} = d\chi^{ab} + q^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]} + k^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]} + \omega^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]} + q^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]} + \frac{1}{l^2}h^{[a}\rho^{b]} + \frac{1}{l^2}e^{[a}\sigma^{b]}. \tag{6.58}$$

6.4. Transformación de las intensidades de campo F

Puesto que

$$\delta_\epsilon \mathbf{F} = [\mathbf{F}, \epsilon]\,. \tag{6.59}$$

Sustituyendo (6.27) y (6.40) en (6.59) tenemos

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{F} = &\left[\frac{1}{2}R^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}\bar{\mathcal{T}}^{a}P_{a} + \frac{1}{2}\bar{F}^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}\bar{H}^{a}Z_{a} + \frac{1}{2}Q^{ab}\hat{Z}_{ab}\,,\right.\\ &\left.\frac{1}{2}\pi^{cd}J_{cd} + \frac{1}{l}\rho^{c}P_{c} + \frac{1}{2}\xi^{cd}Z_{cd} + \frac{1}{l}\sigma^{c}Z_{c} + \frac{1}{2}\chi^{cd}\hat{Z}_{cd}\right],\end{aligned} \tag{6.60}$$

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{F} = &\frac{1}{4}R^{ab}\pi^{cd}\left[J_{ab},J_{cd}\right] + \frac{1}{2l}\bar{\mathcal{T}}^{a}\pi^{cd}\left[P_{a},J_{cd}\right] + \frac{1}{4}\bar{F}^{ab}\pi^{cd}\left[Z_{ab},J_{cd}\right] + \frac{1}{2l}\bar{H}^{a}\pi^{cd}\left[Z_{a},J_{cd}\right]\\ &+\frac{1}{4}Q^{ab}\pi^{cd}\left[\hat{Z}_{ab},J_{cd}\right] + \frac{1}{2l}R^{ab}\rho^{c}\left[J_{ab},P_{c}\right] + \frac{1}{l^2}\bar{\mathcal{T}}^{a}\rho^{c}\left[P_{a},P_{c}\right] + \frac{1}{2l}\bar{F}^{ab}\rho^{c}\left[Z_{ab},P_{c}\right]\\ &+\frac{1}{l^2}\bar{H}^{a}\rho^{c}\left[Z_{a},P_{c}\right] + \frac{1}{2l}Q^{ab}\rho^{c}\left[\hat{Z}_{ab},P_{c}\right] + \frac{1}{4}R^{ab}\xi^{cd}\left[J_{ab},Z_{cd}\right] + \frac{1}{2l}\bar{\mathcal{T}}^{a}\xi^{cd}\left[P_{a},Z_{cd}\right]\\ &+\frac{1}{4}\bar{F}^{ab}\xi^{cd}\left[Z_{ab},Z_{cd}\right] + \frac{1}{2l}\bar{H}^{a}\xi^{cd}\left[Z_{a},Z_{cd}\right] + \frac{1}{4}Q^{ab}\xi^{cd}\left[\hat{Z}_{ab},Z_{cd}\right] + \frac{1}{2l}R^{ab}\sigma^{c}\left[J_{ab},Z_{c}\right]\\ &+\frac{1}{l^2}\bar{\mathcal{T}}^{a}\sigma^{c}\left[P_{a},Z_{c}\right] + \frac{1}{2l}\bar{F}^{ab}\sigma^{c}\left[Z_{ab},Z_{c}\right] + \frac{1}{l^2}\bar{H}^{a}\sigma^{c}\left[Z_{a},Z_{c}\right] + \frac{1}{2l}Q^{ab}\sigma^{c}\left[\hat{Z}_{ab},Z_{c}\right]\\ &+\frac{1}{4}R^{ab}\chi^{cd}\left[J_{ab},\hat{Z}_{cd}\right] + \frac{1}{2l}\bar{\mathcal{T}}^{a}\chi^{cd}\left[P_{a},\hat{Z}_{cd}\right] + \frac{1}{4}\bar{F}^{ab}\chi^{cd}\left[Z_{ab},\hat{Z}_{cd}\right] + \frac{1}{2l}\bar{H}^{a}\chi^{cd}\left[Z_{a},\hat{Z}_{cd}\right]\\ &+\frac{1}{4}Q^{ab}\chi^{cd}\left[\hat{Z}_{ab},\hat{Z}_{cd}\right].\end{aligned} \tag{6.61}$$

Por otro lado

$$\delta\mathbf{F} = \frac{1}{2}\delta R^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}\delta\bar{\mathcal{T}}^{a}P_{a} + \frac{1}{2}\delta\bar{F}^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}\delta\bar{H}^{a}Z_{a} + \frac{1}{2}\delta Q^{ab}\hat{Z}_{ab}. \tag{6.62}$$

Desarrollando y agrupando cada término tenemos

- Para términos con J_{ab}

$$\frac{1}{2}\delta R^{ab}J_{ab} = \frac{1}{2}R^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}J_{ab}, \tag{6.63}$$

tenemos

$$\delta R^{ab} = R^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}. \tag{6.64}$$

- Para términos con P_a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{l}\pi^a_{\ c}\bar{\mathcal{T}}^c P_a + \frac{1}{l}R^a_{\ c}\rho^c P_a + \frac{1}{l}Q^a_{\ c}\rho^c P_a + \frac{1}{l}\xi^a_{\ c}\bar{H}^c P_a + \frac{1}{l}\bar{F}^a_{\ c}\sigma^c P_a + \frac{1}{l}\chi^a_{\ c}\bar{\mathcal{T}}^c P_a,\\
&= \frac{1}{l}\left(\pi^a_{\ c}\bar{\mathcal{T}}^c + R^a_{\ c}\rho^c + Q^a_{\ c}\rho^c + \xi^a_{\ c}\bar{H}^c + \bar{F}^a_{\ c}\sigma^c + \chi^a_{\ c}\bar{\mathcal{T}}^c\right) P_a, \qquad (6.65)
\end{aligned}$$

tenemos

$$\delta\bar{\mathcal{T}}^a = \pi^a_{\ c}\bar{\mathcal{T}}^c + R^a_{\ c}\rho^c + Q^a_{\ c}\rho^c + \xi^a_{\ c}\bar{H}^c + \bar{F}^a_{\ c}\sigma^c + \chi^a_{\ c}\bar{\mathcal{T}}^c. \qquad (6.66)$$

Notemos que el término $\pi^a_{\ c}\bar{\mathcal{T}}^c$ viene del conmutador $[P_a, J_{cd}]$, el término $R^a_{\ c}\rho^c$ viene del conmutador $[J_{ab}, P_c]$, el término $Q^a_{\ c}\rho^c$ viene del conmutador $\left[\hat{Z}_{ab}, P_c\right]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_6$ es cero, el término $\xi^a_{\ c}\bar{H}^c$ viene del conmutador $[Z_a, Z_{cd}]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_6$ es cero, el término $\bar{F}^a_{\ c}\sigma^c$ viene del conmutador $[Z_{ab}, Z_c]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_6$ es cero, y por ultimo el término $\chi^a_{\ c}\bar{\mathcal{T}}^c$ viene del conmutador $\left[P_a, \hat{Z}_{cd}\right]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_6$ es cero.

- Para términos con Z_{ab}

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\bar{F}^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]}Z_{ab} + \frac{1}{2}R^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]}Z_{ab} + \frac{1}{2}Q^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]}Z_{ab} + \frac{1}{2}\bar{F}^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]}Z_{ab} + \frac{1}{l^2}\bar{\mathcal{T}}^a\rho^b Z_{ab} + \frac{1}{l^2}\bar{H}^a\sigma^b Z_{ab},\\
&= \frac{1}{2}\left(\bar{F}^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]} + R^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]} + Q^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]} + \bar{F}^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]} + \frac{2}{l^2}\bar{\mathcal{T}}^a\rho^b + \frac{2}{l^2}\bar{H}^a\sigma^b\right)Z_{ab}, \qquad (6.67)
\end{aligned}$$

tenemos

$$\delta\bar{F}^{ab} = \bar{F}^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]} + R^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]} + \bar{Q}^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]} + \bar{F}^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]} + \frac{2}{l^2}\bar{\mathcal{T}}^a\rho^b + \frac{2}{l^2}\bar{H}^a\sigma^b. \qquad (6.68)$$

Notemos que el término $\bar{F}^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]}$ viene del conmutador $[Z_{ab}, J_{cd}]$, el término $R^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]}$ viene del conmutador $[J_{ab}, Z_{cd}]$, el término $\bar{Q}^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]}$ viene del conmutador $\left[\hat{Z}_{ab}, Z_{cd}\right]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_6$ es cero, el término $\bar{F}^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]}$ viene del conmutador $\left[Z_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_6$ es cero, el término $\frac{2}{l^2}\bar{\mathcal{T}}^a\rho^b$ viene del conmutador $[P_a, P_b]$, y por ultimo el término $\frac{2}{l^2}\bar{H}^a\sigma^b$ viene del conmutador $[Z_a, Z_b]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_6$ es cero.

- Para términos con Z_a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{l}\bar{H}^c\pi^a_{\ c}Z_a + \frac{1}{l}\bar{F}^a_{\ c}\rho^c Z_a + \frac{1}{l}\xi^a_{\ c}\bar{\mathcal{T}}^c Z_a + \frac{1}{l}R^a_{\ c}\sigma^c Z_a + \frac{1}{l}Q^a_{\ c}\sigma^c Z_a + \frac{1}{l}\chi^a_{\ c}\bar{H}^c Z_a,\\
&= \frac{1}{l}\left(\bar{H}^c\pi^a_{\ c} + \bar{F}^a_{\ c}\rho^c + \xi^a_{\ c}\bar{\mathcal{T}}^c + R^a_{\ c}\sigma^c + Q^a_{\ c}\sigma^c + \chi^a_{\ c}\bar{H}^c\right)Z_a, \qquad (6.69)
\end{aligned}$$

tenemos

$$\delta\bar{H}^a = \bar{H}^c\pi^a_{\ c} + \bar{F}^a_{\ c}\rho^c + \xi^a_{\ c}\bar{\mathcal{T}}^c + R^a_{\ c}\sigma^c + Q^a_{\ c}\sigma^c + \chi^a_{\ c}\bar{H}^c. \tag{6.70}$$

Notemos que el término $\bar{H}^c\pi^a_{\ c}$ viene del conmutador $[Z_a, J_{cd}]$, el término $\bar{F}^a_{\ c}\rho^c$ viene del conmutador $[Z_{ab}, P_c]$, el término $\xi^a_{\ c}\bar{\mathcal{T}}^c$ viene del conmutador $[P_a, Z_{cd}]$, el término $R^a_{\ c}\sigma^c$ viene del conmutador $[J_{ab}, Z_c]$, el término $Q^a_{\ c}\sigma^c$ viene del conmutador $\left[\hat{Z}_{ab}, Z_c\right]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_6$ es cero, y por ultimo el término $\chi^a_{\ c}\bar{H}^c$ viene del conmutador $\left[Z_a, \hat{Z}_{cd}\right]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_6$ es cero.

- Para términos con $\hat{Z}_{ab}$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}Q^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]}\hat{Z}_{ab} + \frac{1}{2}\bar{F}^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]}\hat{Z}_{ab} + \frac{1}{2}R^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]}\hat{Z}_{ab} \\
&+ \frac{1}{2}Q^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]}\hat{Z}_{ab} + \frac{1}{l^2}\bar{H}^a\rho^b\hat{Z}_{ab} + \frac{1}{l^2}\bar{\mathcal{T}}^a\sigma^b\hat{Z}_{ab}, \\
&= \frac{1}{2}\left(Q^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]} + \bar{F}^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]} + R^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]} + Q^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]} + \frac{2}{l^2}\bar{H}^a\rho^b + \frac{2}{l^2}\bar{\mathcal{T}}^a\sigma^b\right)\hat{Z}_{ab},
\end{aligned} \tag{6.71}$$

tenemos

$$\delta Q^{ab} = Q^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]} + \bar{F}^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]} + R^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]} + Q^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]} + \frac{2}{l^2}\bar{H}^a\rho^b + \frac{2}{l^2}\bar{\mathcal{T}}^a\sigma^b. \tag{6.72}$$

Notamos que el término $Q^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]}$ viene del conmutador $\left[\hat{Z}_{ab}, J_{cd}\right]$, el término $\bar{F}^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]}$ viene del conmutador $[Z_{ab}, Z_{cd}]$, el término $R^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]}$ viene del conmutador $\left[J_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right]$, el término $Q^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]}$ viene del conmutador $\left[\hat{Z}_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right]$ que para el álgebra $\mathfrak{B}_6$ es cero, el término $\frac{2}{l^2}\bar{H}^a\rho^b$ viene del conmutador $[Z_a, P_b]$, y finalmente el término $\frac{2}{l^2}\bar{\mathcal{T}}^a\sigma^b$ viene del conmutador $[P_a, Z_b]$.

En resumen, las transformaciones de las intensidades de campo están dadas por

$$\delta R^{ab} = R^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]}, \tag{6.73}$$

$$\delta\bar{\mathcal{T}}^a = \pi^a_{\ c}\bar{\mathcal{T}}^c + R^a_{\ c}\rho^c + Q^a_{\ c}\rho^c + \xi^a_{\ c}\bar{H}^c + \bar{F}^a_{\ c}\sigma^c + \chi^a_{\ c}\bar{\mathcal{T}}^c, \tag{6.74}$$

$$\delta\bar{F}^{ab} = \bar{F}^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]} + R^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]} + Q^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]} + \bar{F}^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]} + \frac{1}{l^2}\bar{\mathcal{T}}^{[a}\rho^{b]} + \frac{1}{l^2}\bar{H}^{[a}\sigma^{b]}, \tag{6.75}$$

$$\delta\bar{H}^a = \bar{H}^c\pi^a_{\ c} + \bar{F}^a_{\ c}\rho^c + \xi^a_{\ c}\bar{\mathcal{T}}^c + R^a_{\ c}\sigma^c + Q^a_{\ c}\sigma^c + \chi^a_{\ c}\bar{H}^c, \tag{6.76}$$

$$\delta Q^{ab} = Q^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]} + \bar{F}^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]} + R^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]} + Q^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]} + \frac{1}{l^2}\bar{H}^{[a}\rho^{b]} + \frac{1}{l^2}\bar{\mathcal{T}}^{[a}\sigma^{b]}. \tag{6.77}$$

6.5. Lagrangiano para gravedad en $4D$ con simetrías $AdS\mathcal{L}_6$

Para construir un lagrangiano que contenga la acción de Einstein-Hilbert, un término cosmológico y términos que dependan de los nuevos campos k^{ab}, h^a, y q^{ab} utilizamos el mecanismo usado en [1], donde consideramos las siguientes 4-formas invariantes

$$\mathcal{L}_1 = \varepsilon_{abcd} R^{ab} \bar{F}^{cd}, \tag{6.78}$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} \bar{F}^{ab} \bar{F}^{cd}. \tag{6.79}$$

Con lo cual el lagrangiano estará dado por

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2\kappa\Lambda} \left(-\mathcal{L}_1 + \mu \mathcal{L}_2 \right). \tag{6.80}$$

Introducimos $\mu = \frac{\lambda}{\Lambda}$, donde λ corresponde a la constante cosmológica estándar, y $\Lambda = \frac{1}{l^2}$, la constante de gravitación de Einstein convencional es denotada por κ. Estudiaremos la forma de $\mathcal{L}_1$ multiplicando por $\frac{-1}{2\kappa\Lambda}$ y utilizando las correspondientes ecuaciones para R^{ab} y $\bar{F}^{ab}$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\kappa\Lambda} \mathcal{L}_1 &= -\frac{1}{2\kappa\Lambda} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \bar{F}^{cd}, \\ &= -\frac{1}{2\kappa\Lambda} \varepsilon_{abcd} R^{ab} D k^{cd} - \frac{1}{2\kappa\Lambda} \varepsilon_{abcd} R^{ab} q^{[c}{}_{e} k^{e|d]} - \frac{1}{2\kappa} \varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d + \frac{1}{2\kappa} \varepsilon_{abcd} R^{ab} h^c h^d. \end{aligned} \tag{6.81}$$

Integrando por partes, utilizando la identidad $DR^{ab} = 0$, vemos fácilmente que el término $\varepsilon_{abcd} R^{ab} D k^{cd}$ corresponde a un término de borde. De manera que el lagrangiano de Einstein Hilbert $\mathcal{L}_{E-H}$ más un término que depende de R^{ab} y de los campos k^{ab}, h^a, y q^{ab} es dado por

$$-\frac{1}{2\kappa\Lambda} \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{E-H} - \frac{1}{2\kappa} \varepsilon_{abcd} R^{ab} h^c h^d - \frac{1}{2\kappa\Lambda} \varepsilon_{abcd} R^{ab} q^{[c}{}_{e} k^{e|d]}. \tag{6.82}$$

Consideramos $\mathcal{L}_2$, el cual nos proporciona el término cosmológico. De la curvatura $\bar{F}^{ab}$ vemos que $\mathcal{L}_2$ incluye el término cosmológico estándar mas términos que dependen de k^{ab}, h^a, y q^{ab}. Multiplicamos $\mathcal{L}_2$ por $\frac{\mu^2}{2\kappa\lambda}$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda^2} \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{cosm} + \frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2} \varepsilon_{abcd} \{ & D k^{ab} D k^{cd} + 2 D k^{ab} q^{[c}{}_{e} k^{e|d]} + 2\Lambda D k^{ab} e^c e^d \\ & + 2\Lambda D k^{ab} h^c h^d + 2\Lambda q^{[a}{}_{e} k^{e|b]} e^c e^d + 2\Lambda q^{[a}{}_{e} k^{e|b]} h^c h^d + 2\Lambda^2 e^a e^b h^c h^d \\ & + q^{[a}{}_{e} k^{e|b]} q^{[c}{}_{e} k^{e|d]} + \Lambda^2 h^a h^b h^c h^d \} . \end{aligned} \tag{6.83}$$

Finalmente utilizando (6.80) el lagrangiano que buscamos y que llamaremos $\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6}$ es dado por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} = \mathcal{L}_{E-H} + \mathcal{L}_{cosm} - \frac{1}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}R^{ab}h^c h^d - \frac{1}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}R^{ab}q^{[c}{}_e k^{e|d]} \\
+ \frac{\mu^2}{4\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}Dk^{cd} + \frac{\mu^2}{2\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}q^{[c}{}_e k^{e|d]} \\
+ \frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^c e^d + \frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}h^c h^d \\
+ \frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}q^{[a}{}_e k^{e|b]}e^c e^d + \frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}q^{[a}{}_e k^{e|b]}h^c h^d \\
+ \frac{\lambda}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}e^a e^b h^c h^d + \frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}q^{[a}{}_e k^{e|b]}q^{[c}{}_e k^{e|d]} + \frac{\lambda}{4\kappa}\varepsilon_{abcd}h^a h^b h^c h^d.
\end{aligned} \tag{6.84}
$$

6.6. Ecuaciones de campo para la extensión $AdS\mathcal{L}_6$

Vamos a continuar de la forma usual, utilizando el principio de acción, para obtener las ecuaciones de campo para la extensión $AdS\mathcal{L}_4$ de la gravedad de Einstein . La variación de (6.84) con respecto a e^a es dado por

$$
\begin{aligned}
\delta_{e^a}\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} &= \delta_{e^a}\mathcal{L}_{E-H} + \delta_{e^a}\mathcal{L}_{cosm} + \tfrac{\mu}{2\kappa}\delta_{e^a}\left(\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^c e^d\right) \\
&-\tfrac{\mu}{2\kappa}\delta_{e^a}\left(\varepsilon_{abcd}q^{[a}{}_e k^{e|b]}e^c e^d\right) + \tfrac{\lambda}{2\kappa}\delta_{e^a}\left(\varepsilon_{abcd}e^a e^b h^c h^d\right).
\end{aligned} \tag{6.85}
$$

Utilizando las propiedades del operador δ_e obtenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\delta_e\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} = -\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}R^{ab}e^c\delta e^d + \frac{\lambda}{\kappa}\varepsilon_{abcd}e^a e^b e^c\delta e^d + \frac{\mu}{\kappa}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^e\delta e^d \\
+ \frac{\lambda}{\kappa}\varepsilon_{abcd}e^a h^b h^c\delta e^d + \frac{\mu}{\kappa}\varepsilon_{abcd}q^{[a}{}_e k^{e|b]}e^c\delta e^d,
\end{aligned} \tag{6.86}
$$

donde

$$
\delta_e\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_5} = \left[L_{AdS\mathcal{L}_6}\right]_{e^a}\delta e^d, \tag{6.87}
$$

y dado que $\delta_e\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} = 0$ tenemos

$$
[L]_{e^a} = \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(-R^{ab}e^c + \lambda e^a e^b e^c + \mu Dk^{ab}e^c + \lambda e^a h^b h^c + \mu q^{[a}{}_e k^{e|b]}e^c\right), \tag{6.88}
$$

$$
= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(\mu\left(Dk^{ab} + q^{[a}{}_e k^{e|b]} + \Lambda h^a h^b + \Lambda e^a e^b\right)e^c - R^{ab}e^c\right), \tag{6.89}
$$

$$
= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(\mu\bar{F}^{ab}e^c - R^{ab}e^c\right), \tag{6.90}
$$

$$
\mu\bar{F}^{ab} = R^{ab}. \tag{6.91}
$$

La variación de (6.84) con respecto a h^a nos conduce a

$$\begin{aligned}\delta_h\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} &= -\frac{1}{2\kappa}\delta\left(\varepsilon_{abcd}R^{ab}h^ch^d\right) + \frac{\mu}{2\kappa}\delta\left(\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}h^ch^d\right) + \frac{\mu}{2\kappa}\delta\left(\varepsilon_{abcd}q^{[a}{}_ek^{e|b]}h^ch^d\right)\\ &\quad + \frac{\lambda}{2\kappa}\delta\left(\varepsilon_{abcd}e^ae^bh^ch^d\right) + \frac{\lambda}{4\kappa}\delta\left(\varepsilon_{abcd}h^ah^bh^ch^d\right).\end{aligned} \tag{6.92}$$

Utilizando las propiedades del operador δ_h obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\delta_{h^a}\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} &= -\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}R^{ab}h^c\delta h^d + \frac{\mu}{\kappa}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}h^c\delta h^d + \frac{\mu}{\kappa}\varepsilon_{abcd}q^{[a}{}_ek^{e|b]}h^c\delta h^d\\ &\quad + \frac{\lambda}{\kappa}\varepsilon_{abcd}e^ae^bh^c\delta h^d + \frac{\lambda}{\kappa}\varepsilon_{abcd}h^ah^bh^c\delta h^d,\end{aligned} \tag{6.93}$$

donde

$$\delta_h\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} = \left[L_{AdS\mathcal{L}_6}\right]_{h^a}\delta h^d, \tag{6.94}$$

y dado que $\delta_h\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} = 0$ tenemos

$$[L]_{h^a} = \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(-R^{ab}h^c + \mu\left\{Dk^{ab}h^c + q^{[a}{}_ek^{e|b]}h^c + \Lambda e^ae^bh^c + \Lambda h^ah^bh^c\right\}\right), \tag{6.95}$$

$$= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(-R^{ab}h^c + \mu\left\{Dk^{ab} + q^{[a}{}_ek^{e|b]} + \Lambda e^ae^b + \Lambda h^ah^b\right\}h^c\right), \tag{6.96}$$

$$= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(-R^{ab}h^c + \mu\bar{F}^{ab}h^c\right), \tag{6.97}$$

así obtenemos

$$\mu\bar{F}^{ab} = R^{ab}. \tag{6.98}$$

La variación de (6.84) con respecto a ω^{ab} nos conduce a

$$\begin{aligned}\delta_\omega\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} &= \delta\mathcal{L}_{E-H} - \frac{1}{2\kappa}\delta\left(\varepsilon_{abcd}R^{ab}h^ch^d\right) - \frac{1}{2\kappa\Lambda}\delta\left(\varepsilon_{abcd}R^{ab}q^{[a}{}_ek^{e|b]}\right)\\ &\quad + \frac{\mu^2}{4\kappa\lambda}\delta\left(\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}Dk^{cd}\right) + \frac{\mu^2}{2\kappa\lambda}\delta\left(\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}q^{[a}{}_ek^{e|b]}\right) + \frac{\mu}{2\kappa}\delta\left(\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^ce^d\right)\\ &\quad + \frac{\mu}{2\kappa}\delta\left(\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}h^ch^d\right).\end{aligned} \tag{6.99}$$

Utilizando las propiedades del operador δ_ω obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\delta_\omega\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} &= -\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}De^ce^d\delta\omega^{ab} - \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}Dh^ch^d\delta\omega^{ab} + \frac{1}{\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}Dq^c{}_ek^{ed}\\ &\quad - \frac{1}{\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}q^c{}_eDk^{ed} - \frac{\mu^2}{\kappa\lambda}\delta\omega^{ab}k^c{}_eDk^{ed} - \frac{\mu^2}{\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}k^c{}_fq^{[f}{}_ek^{e|d]}\\ &\quad - \frac{\mu}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}k^c{}_ee^ee^d - \frac{\mu}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}k^c{}_eh^eh^d,\end{aligned} \tag{6.100}$$

reagrupando los términos tenemos

$$
\begin{aligned}
\delta_\omega \mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} &= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left\{-\frac{\mu^2}{\lambda}k^c{}_e\left[Dk^{ed}+q^e{}_f k^{f|d]}+\Lambda e^e e^d+\Lambda h^e h^d\right]+\frac{1}{\Lambda}D\left(q^{[c}{}_e k^{e|d]}\right)\right. \\
&\quad \left. -De^c e^d - Dh^c h^d\right\}\delta\omega^{ab}, \qquad (6.101) \\
&= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left\{-\frac{\mu^2}{\lambda}k^c{}_e \bar{F}^{ab}+\frac{1}{\Lambda}D\left(q^{[c}{}_e k^{e|d]}\right)-T^c e^d - Dh^c h^d\right\}\delta\omega^{ab}, \qquad (6.102)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\delta_\omega \mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} = \left[L_{AdS\mathcal{L}_6}\right]_{\omega^{ab}}\delta\omega^{ab}, \tag{6.103}
$$

y dado que $\delta_\omega \mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} = 0$ tenemos

$$
\frac{\mu^2}{\lambda}k^c{}_e \bar{F}^{ab} - \frac{1}{\Lambda}D\left(q^{[c}{}_e k^{e|d]}\right) + T^c e^d + Dh^c h^d = 0. \tag{6.104}
$$

La variación de (6.84) con respecto a k^a es dado por

$$
\begin{aligned}
\delta_k \mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} &= \frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}\delta\left(Dk^{ab}e^c e^d\right)+\frac{\mu^2}{4\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}\delta\left(Dk^{ab}Dk^{cd}\right)+\frac{\mu^2}{2\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}\delta\left(Dk^{ab}q^{[c}{}_e k^{e|b]}\right) \\
&\quad +\frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}\delta\left(Dk^{ab}h^c h^d\right)+\frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}\delta\left(q^{[a}{}_e k^{e|b]}e^c e^d\right)+\frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}\delta\left(q^{[a}{}_e k^{e|b]}h^c h^d\right) \\
&\quad +\frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}\delta\left(q^{[a}{}_e k^{e|b]}q^{[c}{}_f k^{f|d]}\right). \qquad (6.105)
\end{aligned}
$$

Utilizando las propiedades del operador δ_k obtenemos lo siguiente

$$
\delta_k \mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} = \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(\mu T^c e^d + \mu Dh^c h^d + \frac{\mu^2}{2\lambda}R^c{}_e k^{ed} + \frac{\mu^2}{\lambda}Dq^c{}_e k^{ed} + \frac{\mu^2}{\lambda}q^c{}_e \tilde{F}^{ed} - \frac{\mu^2}{\lambda}q^c{}_e Dk^{ed}\right)\delta k^{ab}, \tag{6.106}
$$

donde

$$
\delta_k \mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} = \left[L_{AdS\mathcal{L}_6}\right]_{k^{ab}}\delta k^{ab}, \tag{6.107}
$$

y dado que $\delta_k \mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} = 0$ tenemos

$$
\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(\mu T^c e^d + \mu Dh^c h^d + \frac{\mu^2}{2\lambda}R^c{}_e k^{ed} + \frac{\mu^2}{\lambda}q^c{}_e \tilde{F}^{ed} + \frac{\mu^2}{\lambda}D\left(q^c{}_e k^{ed}\right)\right) = 0. \tag{6.108}
$$

La variación de (6.84) con respecto a q^{ab} es dado por

$$
\begin{aligned}
\delta_q \mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} = & -\frac{1}{2\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}\delta\left(R^{ab}q^{[c}{}_{e}k^{e|d]}\right) + \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd}\delta\left(Dk^{ab}q^{[c}{}_{e}k^{e|d]}\right), \\
& + \frac{\lambda}{4\kappa\lambda^2}\varepsilon_{abcd}\delta\left(q^{[a}{}_{f}k^{f|b]}q^{[c}{}_{e}k^{e|d]}\right) + \frac{\lambda}{2\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}\delta\left(q^{[a}{}_{f}k^{f|b]}e^{c}e^{d}\right), \\
& + \frac{\lambda}{2\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}\delta\left(q^{[a}{}_{f}k^{f|b]}h^{c}h^{d}\right).
\end{aligned} \tag{6.109}
$$

Utilizando las propiedades del operador δ_q obtenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\delta_q \mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} &= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left\{k^{c}{}_{e}R^{ed} - \frac{\mu^2}{\lambda}k^{c}{}_{e}\left[Dk^{ed} + q^{[e}{}_{f}k^{f|d]} + \Lambda e^{e}e^{d} + \Lambda h^{e}h^{d}\right]\right\}\delta q^{ab}, && (6.110)\\
&= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left\{k^{c}{}_{e}R^{ed} - \frac{\mu^2}{\lambda}k^{c}{}_{e}\bar{F}^{ed}\right\}\delta q^{ab}, && (6.111)\\
&= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}k^{ce}\left\{R^{ed} - \frac{\mu^2}{\lambda}\bar{F}^{ed}\right\}\delta q^{ab}, && (6.112)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\delta_q \mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} = \left[L_{AdS\mathcal{L}_6}\right]_{q^{ab}}\delta q^{ab}, \tag{6.113}
$$

y dado que $\delta_q \mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} = 0$ tenemos

$$
k^{c}{}_{e}R^{ed} - \frac{\mu^2}{\lambda}k^{c}{}_{e}\bar{F}^{ed} = 0. \tag{6.114}
$$

En resumen, las ecuaciones de campo están dadas por

$$
\mu\bar{F}^{ab} = R^{ab}, \tag{6.115}
$$

$$
\frac{\mu^2}{\lambda}k^{c}{}_{e}\bar{F}^{ab} - \frac{1}{\Lambda}D\left(q^{[c}{}_{e}k^{e|d]}\right) + T^{c}e^{d} + Dh^{c}h^{d} = 0, \tag{6.116}
$$

$$
\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(\mu T^{c}e^{d} + \mu Dh^{c}h^{d} + \frac{\mu^2}{2\lambda}R^{c}{}_{e}k^{ed} + \frac{\mu^2}{\lambda}q^{c}{}_{e}\bar{F}^{ed} + \frac{\mu^2}{\lambda}D\left(q^{c}{}_{e}k^{ed}\right)\right) = 0, \tag{6.117}
$$

$$
k^{c}{}_{e}R^{ed} - \frac{\mu^2}{\lambda}k^{c}{}_{e}\bar{F}^{ed} = 0. \tag{6.118}
$$

Capítulo 7

Extensión $\mathfrak{B}_{4,5,6}$ de la gravedad a partir de contracción Inonu-Wigner

En 1951 E. I. Segal introdujo la noción de contracción de álgebras de Lie, si dos teorías físicas tales como la teoría especial de la relatividad y la mecánica Newtoniana están relacionados por un proceso límite, entonces los correspondientes grupos de invariancia asociados, grupo de Poincaré y grupo de Galileo respectivamente, también deberían estar relacionados por algún proceso límite. Esta idea fue estudiada por Inonu y Wigner en 1953, quienes introdujeron la llamada contracción de Inonu-Wigner, y posteriormente en 1991 Evelin Weimar-Woods introdujo la definición de las contracciones generalizadas de Inonu-Wigner, demostrando que cualquier contracción es equivalente a una contracción generalizada de Inonu-Wigner.

7.1. Contracción de Inonu Wigner para acciones para la gravedad con simetrías AdS-Lorentz

En este capitulo vamos a obtener las contracciones de Inonu-Wigner de las acciones para gravedad en $4D$ obtenidas en los capítulos anteriores. Recordamos que la acción para gravedad con constante cosmológica generalizada en el contexto de las simetrías de Maxwell es dada por

$$\mathcal{L}_{\mathsf{Maxwell}} = \mathcal{L}_{E-H} + \mathcal{L}_{cosm} + \frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^{c}e^{d} + \frac{\mu^{2}}{4\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}Dk^{cd}, \tag{7.1}$$

donde los campos de 1-formas k^{ab} son los campos de gauge asociados a los generadores Z_{ab}, κ es la constante de gravitación, λ es la constante cosmológica y $\Lambda = \frac{1}{l^2}$ un parámetro con unidades de longitud $[\Lambda] = [\frac{1}{L^2}]$. Las curvaturas R^{ab} y F^{ab} son las usuales vistas en el capitulo 3 y los términos $\mathcal{L}_{E-H}$ y $\mathcal{L}_{cosm}$ están dados por

$$\mathcal{L}_{E-H} = -\frac{1}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}R^{ab}e^{c}e^{d}, \tag{7.2}$$

$$\mathcal{L}_{cosm} = \frac{\lambda}{4\kappa}\varepsilon_{abcd}e^{a}e^{b}e^{c}e^{d}. \tag{7.3}$$

Queremos obtener los lagrangianos correspondientes a las extensiones $\mathcal{B}_4$, $\mathcal{B}_5$ y $\mathcal{B}_6$ para esto utilizaremos el mecanismo conocido como contracción generalizada de Inonu-Wigner. Reescalamos los campos e^a, k^{ab}, h^a, y q^{ab} usando diferentes potencias de un parámetro que llamaremos ξ en vez de reescalar solo los generadores correspondientes a cada álgebra como se realiza usualmente.

7.2. Contracción del lagrangiano con simetrías $AdS\mathcal{L}_4$

Para obtener el álgebra de Maxwell a partir de $AdS\mathcal{L}_4$ realizamos una contracción de Inonu-Wigner a través del reescalamiento $P_a \to \xi P_a$, $Z_{ab} \to \xi^2 Z_{ab}$ y considerando el limite $\xi \to \infty$. De forma equivalente podemos realizar el reescalamiento sobre los campos e^a y k^{ab} directamente en un lagrangiano como sigue

$$e^a \longrightarrow \xi^{-1} e^a \qquad\qquad k^{ab} \longrightarrow \xi^{-2} k^{ab}, \tag{7.4}$$

$$P_a \longrightarrow \xi P_a, \qquad\qquad Z_{ab} \longrightarrow \xi^2 Z_{ab}. \tag{7.5}$$

Consideramos la acción $\mathcal{L}_{AdSL_4}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{AdSL_4} = {} & \mathcal{L}_{E-H} + \mathcal{L}_{cosm} - \frac{1}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd} R^{ab} k^{[c}{}_e k^{e|d]} + \frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd} Dk^{ab} Dk^{cd} \\ & + \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd} Dk^{ab} k^{[c}{}_e k^{e|d]} + \frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd} Dk^{ab} e^c e^d + \frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd} k^{[a}{}_f k^{f|b]} k^{[c}{}_e k^{e|d]} \\ & + \frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd} k^{[a}{}_e k^{e|b]} e^c e^d. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Sustituyendo (7.4) y (7.5) y tomando el limite $\xi \to \infty$ obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathfrak{B}_4} &= \mathcal{L}_{Maxwell}, & (7.7)\\ &= \mathcal{L}_{E-H} + \mathcal{L}_{cosm} + \frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd} Dk^{ab} e^c e^d + \frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd} Dk^{ab} Dk^{cd}. & (7.8)\end{aligned}$$

Es decir, al realizar una contracción sobre los campos de gauge obtenemos la acción para el álgebra de Maxwell. La contracción de IW en el sentido de Weimar-Woods conduce desde el lagrangiano $AdS\mathcal{L}_4$ al lagrangiano de Maxwell. Notemos que el lagrangiano $\mathcal{L}_{AdSL_4}$ difiere del lagrangiano $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}_4}$ por cuatro términos que dependen de los campos e^a, k^{ab} y R^{ab}, Dk^{ab}

$$-\frac{1}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd} R^{ab} k^{[c}{}_e k^{e|d]},\ \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd} Dk^{ab} k^{[c}{}_e k^{e|d]},\ \frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\varepsilon_{abcd} k^{[a}{}_f k^{f|b]} k^{[c}{}_e k^{e|d]},\ \frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd} k^{[a}{}_e k^{e|b]} e^c e^d. \tag{7.9}$$

Estos son parte de la contribución de los conmutadores $[J_{ab}, J_{cd}]$, $[P_a, P_B]$, y $[Z_{ab}, Z_{cd}]$. Para obtener las ecuaciones de campo podemos contraer las ecuaciones (4.83) usando el mismo procedimiento, y podemos ver sin mucho trabajo que las ecuaciones serán idénticas a las obtenidas para $\mathcal{L}_{Maxwell}$

$$R^{ab} = \mu Dk^{ab} + \lambda e^a e^b = \mu F^{ab}, \tag{7.10}$$

$$T^{[a}e^{b]} + \frac{\mu^2}{\lambda} F^{[a}_{\ e} k^{e|b]} = 0, \tag{7.11}$$

$$\varepsilon_{abcd} e^b \left\{ R^{cd} - \lambda e^c e^d - \mu Dk^{cd} \right\} = 0, \tag{7.12}$$

7.3. Contracción del lagrangiano con simetrías $AdS\mathcal{L}_5$

Realizamos el reescalamiento sobre los campos e^a, h^a y k^{ab} y los generadores del álgebra, donde

$$e^a \longrightarrow \xi^{-1} e^a, \qquad k^{ab} \longrightarrow \xi^{-2} k^{ab}, \qquad h^a \longrightarrow \xi^{-3} h^a, \tag{7.13}$$

$$P_a \longrightarrow \xi P_a, \qquad Z_{ab} \longrightarrow \xi^2 Z_{ab}, \qquad Z_a \longrightarrow \xi^3 Z_a. \tag{7.14}$$

Consideramos el lagrangiano $\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_5}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_5} &= \mathcal{L}_{E-H} + \mathcal{L}_{cosm} - \frac{1}{2\kappa}\varepsilon_{abcd} R^{ab} h^c h^d - \frac{\mu}{2\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd} k^a_{\ e} k^{eb} Dk^{cd} - \frac{1}{2\kappa}\varepsilon_{abcd} k^a_{\ e} k^{eb} e^c e^d \\
&- \frac{1}{2\kappa}\varepsilon_{abcd} k^a_{\ e} k^{eb} h^c h^d - \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd} h^a e^b Dk^{cd} - \frac{\Lambda}{\kappa}\varepsilon_{abcd} h^a e^b e^c e^d - \frac{\Lambda}{\kappa}\varepsilon_{abcd} e^a h^b h^c h^d \\
&+ \frac{\mu^2}{4\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd} Dk^{ab} Dk^{cd} + \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd} Dk^{ab} e^c e^d + \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd} Dk^{ab} h^c h^d + \frac{\lambda}{2\kappa}\varepsilon_{abcd} e^a e^b h^c h^d \\
&+ \frac{\lambda}{4\kappa}\varepsilon_{abcd} h^a h^b h^c h^d.
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Sustituyendo (7.4) y (7.5) en (5.67) y tomando el limite $\xi \rightarrow \infty$ tenemos que la contracción de IW de la acción $AdS\mathcal{L}_5$ en el sentido de Weimar-Woods nos lleva a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathfrak{B}_5} &= \mathcal{L}_{E-H} + \mathcal{L}_{cosm} - \frac{1}{2\kappa}\varepsilon_{abcd} R^{ab} h^c h^d \\
&- \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd} h^a e^b Dk^{cd} - \frac{\Lambda}{\kappa}\varepsilon_{abcd} h^a e^b e^c e^d - \frac{\Lambda}{\kappa}\varepsilon_{abcd} e^a h^b h^c h^d \\
&+ \frac{\mu^2}{4\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd} Dk^{ab} Dk^{cd} + \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd} Dk^{ab} e^c e^d + \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd} Dk^{ab} h^c h^d \\
&+ \frac{\lambda}{2\kappa}\varepsilon_{abcd} e^a e^b h^c h^d + \frac{\lambda}{4\kappa}\varepsilon_{abcd} h^a h^b h^c h^d.
\end{aligned} \tag{7.16}$$

La contracción de IW en el sentido de Weimar-Woods conduce desde el lagrangiano $AdS\mathcal{L}_5$ al lagrangiano que llamaremos $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}_5}$. Notemos que el lagrangiano $\mathcal{L}_{AdSL_5}$ difiere del lagrangiano $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}_5}$ por siete términos que dependen de los campos e^a, k^{ab}, h^a y R^{ab}, Dk^{ab}

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\mu}{2\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}R^{ab}h^ch^d,\; -\frac{\mu}{\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^ch^d,\; -\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}e^ah^be^ce^d,\\
&-\frac{\mu}{\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}e^ah^bh^ch^d,\; \frac{\mu^2}{2\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}h^ch^d,\; \frac{\mu^2}{4\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}h^ah^bh^ch^d,\\
&\frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}e^ae^bh^ch^d. \qquad (7.17)
\end{aligned}
$$

Estos son parte de la contribución de los conmutadores $[J_{ab}, J_{cd}]$, $[Z_a, P_b]$, y $[Z_a, Z_b]$. A partir del mismo mecanismo podemos obtener las ecuaciones de campo. Podemos obtener fácilmente lo siguiente

$$\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left\{-R^{ab}e^c - 2\Lambda e^ah^be^c - \tilde{F}^{ab}h^c + \mu\tilde{F}^{ab}e^c\right\}\delta e^d = 0, \qquad (7.18)$$

$$\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(-R^{ab}h^c - 2\Lambda e^ah^bh^c - \tilde{F}^{ab}e^c + \mu\tilde{F}^{ab}h^c\right) = 0, \qquad (7.19)$$

$$\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left\{-T^ce^d - Dh^ch^d - \frac{\mu^2}{\lambda}k^c{}_e\tilde{F}^{ed} - 2\Lambda^2k^c{}_ee^eh^d\right\} = 0, \qquad (7.20)$$

$$\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left(Dh^c\left(\mu h^d - e^d\right) + De^c\left(\mu e^d - h^d\right) - \frac{\mu^2}{2\lambda}R^c{}_ek^{ed}\right) = 0. \qquad (7.21)$$

7.4. Contracción acción con simetrías $AdS\mathcal{L}_6$

Realizamos el reescalamiento sobre los campos e^a, h^a, k^{ab}, y q^{ab} y los generadores del álgebra, donde

$$e^a \longrightarrow \xi^{-1}e^a, \qquad h^a \longrightarrow \xi^{-3}h^a, \qquad k^{ab} \longrightarrow \xi^{-2}k^{ab}, \qquad q^{ab} \longrightarrow \xi^{-4}q^{ab}, \qquad (7.22)$$

$$P_a \longrightarrow \xi P_a, \qquad Z_{ab} \longrightarrow \xi^2 Z_{ab}, \qquad Z_a \longrightarrow \xi^3 Z_a, \qquad \hat{Z} \longrightarrow \xi^4\hat{Z}_{ab}. \qquad (7.23)$$

Consideramos el lagrangiano $\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6} = {} & \mathcal{L}_{E-H} + \mathcal{L}_{cosm} - \frac{1}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}R^{ab}h^ch^d - \frac{1}{2\kappa\Lambda}\varepsilon_{abcd}R^{ab}q^{[c}{}_ek^{e|d]}\\
&+\frac{\mu^2}{4\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}Dk^{cd} + \frac{\mu^2}{2\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}q^{[c}{}_ek^{e|d]}\\
&+\frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^ce^d + \frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}h^ch^d\\
&+\frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}q^{[a}{}_ek^{e|b]}e^ce^d + \frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}q^{[a}{}_ek^{e|b]}h^ch^d\\
&+\frac{\lambda}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}e^ae^bh^ch^d + \frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}q^{[a}{}_ek^{e|b]}q^{[c}{}_ek^{e|d]} + \frac{\lambda}{4\kappa}\varepsilon_{abcd}h^ah^bh^ch^d. \qquad (7.24)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo (7.22) y (7.23) en (6.84) y tomando el limite $\xi \to \infty$ tenemos que la contracción de IW de la acción $AdS\mathcal{L}_6$ en el sentido de Weismar-Woods nos lleva a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathfrak{B}_6} &= \mathcal{L}_{E-H} + \mathcal{L}_{cosm} + \frac{\mu^2}{4\kappa\lambda}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}Dk^{cd} + \frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}e^c e^d \\ &- \frac{1}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}R^{ab}h^c h^d + \frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}h^c h^d + \frac{\lambda}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}e^a e^b h^c h^d \\ &+ \frac{\lambda}{4\kappa}\varepsilon_{abcd}h^a h^b h^c h^d. \end{aligned} \tag{7.25}$$

La contracción de IW en el sentido de Weimar-Woods conduce desde el lagrangiano $AdS\mathcal{L}_6$ al lagrangiano que llamaremos $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}_6}$. Notemos que el lagrangiano $\mathcal{L}_{AdSL_6}$ difiere del lagrangiano $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}_6}$ por cuatro términos que dependen de los campos e^a, k^{ab}, h^a y R^{ab}, Dk^{ab}

$$\begin{aligned}&- \frac{1}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}R^{ab}h^c h^d,\ \frac{\mu}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}Dk^{ab}h^c h^d,\ \frac{\lambda}{2\kappa}\varepsilon_{abcd}e^a e^b h^c h^d, \\ &\frac{\lambda}{4\kappa}\varepsilon_{abcd}h^a h^b h^c h^d. \end{aligned} \tag{7.26}$$

Estos son parte de la contribución de los conmutadores $[J_{ab}, J_{cd}]$, $[Z_{ab}, Z_{cd}]$, $[P_a, P_b]$. Las ecuaciones de campo para este lagrangiano, que pueden obtenerse aplicando el principio variacional a (7.25) o aplicando una contracción de Inonu-Wigner directamente a las ecuaciones de campo para el lagrangiano $\mathcal{L}_{AdS\mathcal{L}_6}$. Estas son

$$\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left\{-R^{ab}e^c + \lambda e^a e^b e^c + \mu Dk^{ab}e^c + \lambda e^a h^b h^c\right\} = 0, \tag{7.27}$$

$$\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left\{-R^{ab}h^c + \mu Dk^{ab}h^c + \lambda e^a e^b h^c + \lambda h^a h^b h^c\right\} = 0, \tag{7.28}$$

$$\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left\{-\frac{\mu^2}{\lambda}k^c{}_e\left[Dk^{ed} + \Lambda e^e e^d + \Lambda h^e h^d\right] - De^c e^d - Dh^c h^d\right\} = 0, \tag{7.29}$$

$$\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left\{\mu T^c e^d + \mu Dh^c h^d + \frac{\mu^2}{2\lambda}R^c{}_e k^{ed} + \frac{\mu^2}{\lambda}q^c{}_e\left(Dk^{ed} + \Lambda e^e e^d + \Lambda h^e h^d\right)\right\} = 0, \tag{7.30}$$

$$\frac{1}{\kappa}\varepsilon_{abcd}\left\{k^c{}_e R^{ed} - \frac{\mu^2}{\lambda}k^c{}_e\left[\Lambda e^e e^d + \Lambda h^e h^d\right]\right\} = 0. \tag{7.31}$$

Conclusiones

Hemos considerado teorías de gauge locales basados en álgebras $AdS\mathcal{L}_4$, $AdS\mathcal{L}_5$, $AdS\mathcal{L}_6$ con vierbein, conexión de espin y seis campos de gauge geométricos no abelianos adicionales $k^{ab}_{\ \ \mu}$ para el primer caso, diez para el segundo caso $k^{ab}_{\ \ \mu}$, $h^{a}_{\ \mu}$ y catorce para el tercer caso $k^{ab}_{\ \ \mu}$, $h^{a}_{\ \mu}$, $q^{ab}_{\ \ \mu}$

La geometría del espacio-tiempo basada en las álgebras mencionadas implica nuevos tensores de curvatura que permiten construir nuevas acciones gravitatorias que conducen a modificaciones de la gravedad de Einstein.

Hemos construido las 2-formas de curvatura de las álgebras $AdS\mathcal{L}_4$, $AdS\mathcal{L}_5$, y $AdS\mathcal{L}_6$ que nos permiten construir gravedades cuatridimensionales que generalizan la gravedad de Einstein Hilbert. A partir de estas acciones gravitacionales encontramos que la extensión de Maxwell, así como la extensión $\mathfrak{B}_5$, y $\mathfrak{B}_6$ de la gravedad de Einstein pueden obtenerse utilizando el método de contracción de Inonu-Wigner, mecanismo que nos permite establecer una relación entre las correspondientes teorías.

Las ecuaciones de campo (4.83) nos permiten expresar la conexión de espín en función del vierbein e^a y de los nuevos campos gauge no abelianos k^{ab}_{μ}. Esto nos permitiría obtener una formulación de segundo orden para la gravedad AdS$\mathcal{L}_4$, con campos independientes e^a y k^{ab}_{μ}. De forma similar, a partir de las ecuaciones (5.6) podría ser posible expresar la conexión de espín como una función de los campos e^a, k^{ab}_{μ} y h^{a}_{μ} y obtener una formulación de segundo orden para la gravedad AdS$\mathcal{L}_5$, con campos independientes e^a, k^{ab}_{μ} y h^{a}_{μ}. De igual forma con las ecuaciones de campo (6.115). En el capitulo 7 no solo obtenemos las extensiones $\mathfrak{B}_{4,5,6}$ para la gravedad de Einstein sino que también obtenemos las ecuaciones de campo, las cuales nos permitirán obtener una formulación de segundo orden para la gravedad. Estos resultados pueden ser aplicados en una amplia variedad de tópicos entre los cuales son de interés la cosmología y agujeros negros.

Apéndice A

Álgebras (A)dS, Poincaré y Lorentz

Álgebras (A)ds

El álgebra de De sitter o dS en d dimensiones es denotada por $\mathfrak{so}(d-2,1)$ y el álgebra Anti-De sitter o AdS en d dimensiones es denotada por $\mathfrak{so}(d-1,2)$. Tanto la dimensión del álgebra dS, como de AdS es

$$\mathit{dim}\,(\mathfrak{so}(d-2,1)) = \mathit{dim}\,(\mathfrak{so}(d-1,2)) = \frac{d(d+1)}{2}, \tag{A.1}$$

es decir, poseen la misma cantidad de generadores. Satisfacen los siguientes conmutadores

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{ad}J_{bc} + \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac}, \tag{A.2}$$
$$[J_{ab}, P_c] = \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b, \tag{A.3}$$
$$[P_a, P_b] = -\frac{1}{l^2}\sigma J_{ab}. \tag{A.4}$$

cuando $\sigma = +1$ decimos que esta es álgebra de De Sitter, y cuando $\sigma = -1$ decimos que esta es el álgebra de Anti-De Sitter. Es importante notar que ambas álgebras son semi-simples, igual que todos los grupos SO. Aquí es usual tomar el limite cuando $l \longrightarrow \infty$. Este procedimiento llamado contracción de Inonu-Wigner nos entrega el álgebra de Poincaré en d dimensiones $\mathfrak{iso}(3,1)$

Álgebra de Poincaré

En el caso del espacio de Minkowski el álgebra del grupo de isometrías es dada por $\mathfrak{iso}(d-1,1)$ conocida como el álgebra de Poincaré. En $d = 4$ el álgebra de Poincaré o $\mathfrak{iso}(3,1)$ es dada por las siguientes relaciones de conmutación

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{ad}J_{bc} + \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac}, \tag{A.5}$$
$$[J_{ab}, P_c] = \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b, \tag{A.6}$$
$$[P_a, P_b] = 0. \tag{A.7}$$

notamos que su dimensión es dada por

$$\mathit{dim}\left(\mathfrak{iso}(d-1,1)\right)=\frac{d(d+1)}{2}, \tag{A.8}$$

y es igual a la dimensión de las álgebras $(A)dS$, pero a diferencia de estas, el álgebra de Poincaré no es semisimple, los generadores P_a constituyen la base de un ideal abeliano. Para $d=4$ tenemos que $dim\left(\mathfrak{iso}(3,1)\right)=10$.

Álgebra de Lorentz

El álgebra de Lorentz en d dimensiones $\mathfrak{so}(d-1,1)$ corresponde a una subálgebra del álgebra de Poincaré donde el número de generadores es dado por

$$\mathit{dim}\left(\mathfrak{so}(d-1,1)\right)=\frac{d(d-1)}{2}, \tag{A.9}$$

y es generado por J_{ab} y en $d=4$ tenemos $\mathfrak{so}(3,1)$ con $dim\left(\mathfrak{so}(3,1)\right)=6$.

Apéndice B

Identidades de Bianchi

Primera identidad de Bianchi

La primera ecuación de estructura es dada por la derivada covariante del Vielbein

$$T^a = De^a = de^a + \omega^a_{\ b} e^b. \tag{B.1}$$

La primera identidad de Bianchi es obtenida aplicando la derivada exterior sobre la torsión

$$\begin{aligned} dT^a &= dDe^a = dde^a + d\left(\omega^a_{\ b} e^b\right), && \text{(B.2)} \\ &= d\left(\omega^a_{\ b}\right) e^b - \omega^a_{\ b}(de^b) && \text{(B.3)} \end{aligned}$$

Puesto que $R^a_{\ b} = d\omega^a_{\ b} + \omega^a_{\ c}\omega^c_{\ d}$ tenemos que $d\omega^a_{\ b} = R^a_{\ b} - \omega^a\omega^c_{\ d}$. Entonces

$$\begin{aligned} dT^a &= \left(R^a_{\ b} - \omega^a_{\ c}\omega^c_{\ d}\right) e^b - \omega^a_{\ b}(T^b - \omega^b_{\ c} e^c), && \text{(B.4)} \\ &= R^a_{\ b} e^b - \omega^a_{\ c}\omega^c_{\ d} e^b - \omega^a_{\ b} T^b - \omega^a_{\ b}\omega^b_{\ c} e^c, && \text{(B.5)} \\ &= R^a_{\ b} e^b - \omega^a_{\ b} T^b. && \text{(B.6)} \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned} dT^a + \omega^a_{\ b} T^b &= R^a_{\ b} e^b, && \text{(B.7)} \\ DT^a &= R^a_{\ b} e^b. && \text{(B.8)} \end{aligned}$$

Segunda identidad de Bianchi

La segunda identidad se obtiene aplicando la derivada exterior al tensor de curvatura

$$\begin{aligned} dR^a_{\ b} &= d\left(d\omega^a_{\ b}\right) + d\left(\omega^a_{\ c}\omega^c_{\ d}\right), && \text{(B.9)} \\ &= d\left(\omega^a_{\ c}\omega^c_{\ d}\right), && \text{(B.10)} \\ &= \left(d\omega^a_{\ c}\right)\omega^c_{\ d} + \omega^a_{\ c}\left(d\omega^c_{\ d}\right), && \text{(B.11)} \\ &= \left(R^a_{\ c} - \omega^a_{\ d}\omega^d_{\ b}\right)\omega^c_{\ d} + \omega^a_{\ c}\left(R^{cb} - \omega^c_{\ d}\omega^{db}\right), && \text{(B.12)} \\ &= R^a_{\ c}\omega^c_{\ d} - \omega^a_{\ d}\omega^d_{\ b}\omega^c_{\ d} - R^{cb}\omega^a_{\ c} + \omega^c_{\ d}\omega^{db}\omega^a_{\ c}, && \text{(B.13)} \\ &= R^a_{\ c}\omega^c_{\ d} - \omega^a_{\ c} R^{cb}, && \text{(B.14)} \end{aligned}$$

luego

$$dR^{a}_{\ b} + \omega^{a}_{\ c} R^{cb} - R^{a}_{\ c} \omega^{c}_{\ d} = 0, \tag{B.15}$$

es decir

$$DR^{ab} = 0. \tag{B.16}$$

***Teorema* B.0.1 (Teorema de Dragon)** *La segunda identidad de Bianchi puede ser obtenida a partir de la primera identidad de Bianchi*

***Definición* B.0.1 (Derivada covariante)** *Sea A una 1-forma evaluada en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y sea F una F-forma también evaluada en la misma álgebra de Lie, es decir $A = A^a T_a$, $F = F^a T_a$. Se define la derivada covariante de F como*

$$DF = dF + [A, F], \tag{B.17}$$

donde

$$DF = d\left(F^a T_a\right) + \left[A^a T_a, F^b T_b\right], \tag{B.18}$$

$$= dF^a T_a + A^a F^b \left[T_a, T_b\right], \tag{B.19}$$

$$= dF^a T_a + A^a F^b C_{ab}^{\ \ f} T_f. \tag{B.20}$$

***Notación* B.0.1** *La derivada covariante esta definida como*

$$D = d + [A,], \tag{B.21}$$

y corresponde a la derivada covariante completa del grupo de gauge la cual cumple con las identidades de Bianchi para el grupo completo, $DF = 0$. Pero hay otra derivada covariante que aparece en los cálculos que es puramente de Lorentz

$$D = d + [\omega,], \tag{B.22}$$

y ambos operadores no son equivalentes. Esta segunda derivada solo cumple con las identidades de Bianchi para la curvatura de Lorentz, pero no para el álgebra completa, es decir, $DR^{ab} = 0$ y $DF \neq 0$.

Apéndice C

Calculo de transformaciones

A continuación se muestra la contribución de cada conmutador a las transformaciones de los campos de gauge e intensidades de campo, calculo que se obtiene al utilizar las relaciones de conmutación de las respectivas álgebras

Contribuciones del álgebra $AdS\mathcal{L}_4$

***Contribuciones* C.0.1 (Transformaciones de los campos de gauge)**

$$\frac{1}{4}\omega^{ab}\pi^{cd}\left[J_{ab},J_{cd}\right]=\frac{1}{2}\omega^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}J_{ab}, \tag{C.1}$$

$$\frac{1}{2l}e^{a}\pi^{cd}\left[P_{a},J_{cd}\right]=\frac{1}{l}\pi^{a}{}_{c}e^{a}P_{c}, \tag{C.2}$$

$$\frac{1}{4}k^{ab}\pi^{cd}\left[Z_{ab},J_{cd}\right]=\frac{1}{2}k^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}Z_{ab}, \tag{C.3}$$

$$\frac{1}{2l}\omega^{ab}\rho^{c}\left[J_{ab},P_{c}\right]=\frac{1}{l}\omega^{a}{}_{c}\rho^{c}P_{a}, \tag{C.4}$$

$$\frac{1}{l^{2}}e^{a}\rho^{c}\left[P_{a},P_{c}\right]=\frac{1}{l^{2}}e^{a}\rho^{c}Z_{ac}, \tag{C.5}$$

$$\frac{1}{2l}k^{ab}\rho^{c}\left[Z_{ab},P_{c}\right]=\frac{1}{l}k^{a}{}_{c}\rho^{c}P_{a}, \tag{C.6}$$

$$\frac{1}{4}\omega^{ab}\xi^{cd}\left[J_{ab},Z_{cd}\right]=\frac{1}{2}\omega^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}Z_{ab}, \tag{C.7}$$

$$\frac{1}{2l}e^{a}\xi^{cd}\left[P_{a},Z_{cd}\right]=\frac{1}{l}\xi^{a}{}_{c}e^{c}P_{a}, \tag{C.8}$$

$$\frac{1}{4}k^{ab}\xi^{cd}\left[Z_{ab},Z_{cd}\right]=\frac{1}{2}k^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}Z_{ab}. \tag{C.9}$$

***Contribuciones* C.0.2 (Transformaciones de las intensidades de campos)**

$$\frac{1}{4}R^{ab}\pi^{cd}\left[J_{ab},J_{cd}\right]=\frac{1}{2}R^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}J_{ab}, \tag{C.10}$$

$$\frac{1}{2l}\mathcal{T}^{a}\pi^{cd}\left[P_{a},J_{cd}\right]=\frac{1}{l}\pi^{a}{}_{c}\mathcal{T}^{a}P_{c}, \tag{C.11}$$

$$\frac{1}{4}F^{ab}\pi^{cd}\left[Z_{ab},J_{cd}\right]=\frac{1}{2}F^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}Z_{ab}, \tag{C.12}$$

$$\frac{1}{2l}R^{ab}\rho^{c}\left[J_{ab},P_{c}\right]=\frac{1}{l}R^{a}{}_{c}\rho^{c}P_{a}, \tag{C.13}$$

$$\frac{1}{l^{2}}\mathcal{T}^{a}\rho^{c}\left[P_{a},P_{c}\right]=\frac{1}{l^{2}}\mathcal{T}^{a}\rho^{c}Z_{ac}, \tag{C.14}$$

$$\frac{1}{2l}F^{ab}\rho^{c}\left[Z_{ab},P_{c}\right]=\frac{1}{l}F^{a}{}_{c}\rho^{c}P_{a}, \tag{C.15}$$

$$\frac{1}{4}R^{ab}\xi^{cd}\left[J_{ab},Z_{cd}\right]=\frac{1}{2}R^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}Z_{ab}, \tag{C.16}$$

$$\frac{1}{2l}\mathcal{T}^{a}\xi^{cd}\left[P_{a},Z_{cd}\right]=\frac{1}{l}\xi^{a}{}_{c}\mathcal{T}^{c}P_{a}, \tag{C.17}$$

$$\frac{1}{4}F^{ab}\xi^{cd}\left[Z_{ab},Z_{cd}\right]=\frac{1}{2}F^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}Z_{ab}. \tag{C.18}$$

Contribuciones del álgebra $AdS\mathcal{L}_5$

***Contribuciones* C.0.3 (Transformaciones de los campos de gauge)**

$$\frac{1}{4}\omega^{ab}\pi^{cd}\left[J_{ab},J_{cd}\right]=\frac{1}{2}\omega^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}J_{ab}, \tag{C.19}$$

$$\frac{1}{2l}e^{a}\pi^{cd}\left[P_{a},J_{cd}\right]=\frac{1}{l}\pi^{a}{}_{c}e^{a}P_{c}, \tag{C.20}$$

$$\frac{1}{4}k^{ab}\pi^{cd}\left[Z_{ab},J_{cd}\right]=\frac{1}{2}k^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}Z_{ab}, \tag{C.21}$$

$$\frac{1}{2l}h^{a}\pi^{cd}\left[Z_{a},J_{cd}\right]=\frac{1}{l}h^{c}\pi^{a}{}_{c}Z_{a}, \tag{C.22}$$

$$\frac{1}{2l}\omega^{ab}\rho^{c}\left[J_{ab},P_{c}\right]=\frac{1}{l}\omega^{a}{}_{c}\rho^{c}P_{a}, \tag{C.23}$$

$$\frac{1}{l^{2}}e^{a}\rho^{c}\left[P_{a},P_{c}\right]=\frac{1}{l^{2}}e^{a}e^{c}Z_{ac}, \tag{C.24}$$

$$\frac{1}{2l}k^{ab}\rho^{c}\left[Z_{ab},P_{c}\right]=\frac{1}{l}k^{a}{}_{c}\rho^{c}Z_{a}, \tag{C.25}$$

$$\frac{1}{l^{2}}h^{a}\rho^{c}\left[Z_{a},P_{c}\right]=\frac{1}{l^{2}}h^{a}\rho^{c}J_{ac}, \tag{C.26}$$

$$\frac{1}{4}\omega^{ab}\xi^{cd}\left[J_{ab},Z_{cd}\right]=\frac{1}{2}\omega^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}Z_{ab}, \tag{C.27}$$

$$\frac{1}{2l}e^{a}\xi^{cd}\left[P_{a},Z_{cd}\right]=\frac{1}{l}\xi^{a}{}_{c}e^{c}Z_{a}, \tag{C.28}$$

$$\frac{1}{4}k^{ab}\xi^{cd}\left[Z_{ab},Z_{cd}\right]=\frac{1}{2}k^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}J_{ab}, \tag{C.29}$$

$$\frac{1}{2l}h^{a}\xi^{cd}\left[Z_{a},Z_{cd}\right]=\frac{1}{l}\xi_{\ c}^{a}h^{c}P_{a}, \tag{C.30}$$
$$\frac{1}{2l}\omega^{ab}\sigma^{c}\left[J_{ab},Z_{c}\right]=\frac{1}{l}\omega_{\ c}^{a}\sigma^{c}Z_{a}, \tag{C.31}$$
$$\frac{1}{l^{2}}e^{a}\sigma^{c}\left[P_{a},Z_{c}\right]=\frac{1}{l^{2}}e^{a}\sigma^{c}J_{ac}, \tag{C.32}$$
$$\frac{1}{2l}k^{ab}\sigma^{c}\left[Z_{ab},Z_{c}\right]=\frac{1}{l}k_{\ c}^{a}\sigma^{c}P_{a}, \tag{C.33}$$
$$\frac{1}{l^{2}}h^{a}\sigma^{c}\left[Z_{a},Z_{c}\right]=\frac{1}{l^{2}}h^{a}\sigma^{c}Z_{ac}. \tag{C.34}$$

Contribuciones **C.0.4 (Transformaciones de las intensidades de campo)**

$$\frac{1}{4}\mathcal{R}^{ab}\pi^{cd}\left[J_{ab},J_{cd}\right]=\frac{1}{2}\mathcal{R}^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]}J_{ab}, \tag{C.35}$$
$$\frac{1}{2l}\tilde{\mathcal{T}}^{a}\pi^{cd}\left[P_{a},J_{cd}\right]=\frac{1}{l}\pi_{\ c}^{a}\tilde{\mathcal{T}}^{a}P_{c}, \tag{C.36}$$
$$\frac{1}{4}\tilde{F}^{ab}\pi^{cd}\left[Z_{ab},J_{cd}\right]=\frac{1}{2}\tilde{F}^{[a}_{\ \ c}\pi^{c|b]}Z_{ab}, \tag{C.37}$$
$$\frac{1}{2l}H^{a}\pi^{cd}\left[Z_{a},J_{cd}\right]=\frac{1}{l}H^{c}\pi_{\ c}^{a}Z_{a}, \tag{C.38}$$
$$\frac{1}{2l}\mathcal{R}^{ab}\rho^{c}\left[J_{ab},P_{c}\right]=\frac{1}{l}\mathcal{R}_{\ c}^{a}\rho^{c}P_{a}, \tag{C.39}$$
$$\frac{1}{l^{2}}\tilde{\mathcal{T}}^{a}\rho^{c}\left[P_{a},P_{c}\right]=\frac{1}{l^{2}}\tilde{\mathcal{T}}^{a}\rho^{c}Z_{ac}, \tag{C.40}$$
$$\frac{1}{2l}\tilde{F}^{ab}\rho^{c}\left[Z_{ab},P_{c}\right]=\frac{1}{l}\tilde{F}_{\ c}^{a}\rho^{c}Z_{a}, \tag{C.41}$$
$$\frac{1}{l^{2}}H^{a}\rho^{c}\left[Z_{a},P_{c}\right]=\frac{1}{l^{2}}H^{a}\rho^{c}J_{ac}, \tag{C.42}$$
$$\frac{1}{4}\mathcal{R}^{ab}\xi^{cd}\left[J_{ab},Z_{cd}\right]=\frac{1}{2}\mathcal{R}^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]}Z_{ab}, \tag{C.43}$$
$$\frac{1}{2l}\tilde{\mathcal{T}}^{a}\xi^{cd}\left[P_{a},Z_{cd}\right]=\frac{1}{l}\xi_{\ c}^{a}\tilde{\mathcal{T}}^{c}Z_{a}, \tag{C.44}$$
$$\frac{1}{4}\tilde{F}^{ab}\xi^{cd}\left[Z_{ab},Z_{cd}\right]=\frac{1}{2}\tilde{F}^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]}J_{ab}, \tag{C.45}$$
$$\frac{1}{2l}H^{a}\xi^{cd}\left[Z_{a},Z_{cd}\right]=\frac{1}{l}\xi_{\ c}^{a}H^{c}P_{a}, \tag{C.46}$$
$$\frac{1}{2l}\mathcal{R}^{ab}\sigma^{c}\left[J_{ab},Z_{c}\right]=\frac{1}{l}\mathcal{R}_{\ c}^{a}\sigma^{c}Z_{a}, \tag{C.47}$$
$$\frac{1}{l^{2}}\tilde{\mathcal{T}}^{a}\sigma^{c}\left[P_{a},Z_{c}\right]=\frac{1}{l^{2}}\tilde{\mathcal{T}}^{a}\sigma^{c}J_{ac}, \tag{C.48}$$
$$\frac{1}{2l}\tilde{F}^{ab}\sigma^{c}\left[Z_{ab},Z_{c}\right]=\frac{1}{l}\tilde{F}_{\ c}^{a}\sigma^{c}P_{a}, \tag{C.49}$$
$$\frac{1}{l^{2}}H^{a}\sigma^{c}\left[Z_{a},Z_{c}\right]=\frac{1}{l^{2}}H^{a}\sigma^{c}Z_{ac}. \tag{C.50}$$

Contribuciones del álgebra $AdS\mathcal{L}_6$

***Contribuciones* C.0.5 (Transformaciones de los campos de gauge)**

$$\frac{1}{4}\omega^{ab}\pi^{cd}\left[J_{ab},J_{cd}\right]=\frac{1}{2}\omega^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}J_{ab}, \tag{C.51}$$

$$\frac{1}{2l}e^{a}\pi^{cd}\left[P_{a},J_{cd}\right]=\frac{1}{l}\pi^{a}{}_{c}e^{a}P_{c}, \tag{C.52}$$

$$\frac{1}{4}k^{ab}\pi^{cd}\left[Z_{ab},J_{cd}\right]=\frac{1}{2}k^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}Z_{ab}, \tag{C.53}$$

$$\frac{1}{2l}h^{a}\pi^{cd}\left[Z_{a},J_{cd}\right]=\frac{1}{l}h^{c}\pi^{a}{}_{c}Z_{a}, \tag{C.54}$$

$$\frac{1}{4}q^{ab}\pi^{cd}\left[\hat{Z}_{ab},J_{cd}\right]=\frac{1}{2}q^{[a}{}_{c}\pi^{c|b]}\hat{Z}_{ab}, \tag{C.55}$$

$$\frac{1}{2l}\omega^{ab}\rho^{c}\left[J_{ab},P_{c}\right]=\frac{1}{l}\omega^{a}{}_{c}\rho^{c}P_{a}, \tag{C.56}$$

$$\frac{1}{l^{2}}e^{a}\rho^{c}\left[P_{a},P_{c}\right]=\frac{1}{l^{2}}e^{a}\rho^{c}Z_{ac}, \tag{C.57}$$

$$\frac{1}{2l}k^{ab}\rho^{c}\left[Z_{ab},P_{c}\right]=\frac{1}{l}k^{a}{}_{c}\rho^{c}Z_{a}, \tag{C.58}$$

$$\frac{1}{l^{2}}h^{a}\rho^{c}\left[Z_{a},P_{c}\right]=\frac{1}{l^{2}}h^{a}\rho^{c}\hat{Z}_{ac}, \tag{C.59}$$

$$\frac{1}{2l}q^{ab}\rho^{c}\left[\hat{Z}_{ab},P_{c}\right]=\frac{1}{l}q^{a}{}_{c}\rho^{c}P_{a}, \tag{C.60}$$

$$\frac{1}{4}\omega^{ab}\xi^{cd}\left[J_{ab},Z_{cd}\right]=\frac{1}{2}\omega^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}Z_{ab}, \tag{C.61}$$

$$\frac{1}{2l}e^{a}\xi^{cd}\left[P_{a},Z_{cd}\right]=\frac{1}{l}\xi^{a}{}_{c}e^{c}Z_{a}, \tag{C.62}$$

$$\frac{1}{4}k^{ab}\xi^{cd}\left[Z_{ab},Z_{cd}\right]=\frac{1}{2}k^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}\hat{Z}_{ab}, \tag{C.63}$$

$$\frac{1}{2l}h^{a}\xi^{cd}\left[Z_{a},Z_{cd}\right]=\frac{1}{l}\xi^{a}{}_{c}h^{c}P_{a}, \tag{C.64}$$

$$\frac{1}{4}q^{ab}\xi^{cd}\left[\hat{Z}_{ab},Z_{cd}\right]=\frac{1}{2}q^{[a}{}_{c}\xi^{c|b]}Z_{ab}, \tag{C.65}$$

$$\frac{1}{2l}\omega^{ab}\sigma^{c}\left[J_{ab},Z_{c}\right]=\frac{1}{l}\omega^{a}{}_{c}\sigma^{c}Z_{a}, \tag{C.66}$$

$$\frac{1}{l^{2}}e^{a}\sigma^{c}\left[P_{a},Z_{c}\right]=\frac{1}{l^{2}}e^{a}\sigma^{c}\hat{Z}_{ac}, \tag{C.67}$$

$$\frac{1}{2l}k^{ab}\sigma^{c}\left[Z_{ab},Z_{c}\right]=\frac{1}{l}k^{a}{}_{c}\sigma^{c}P_{a}, \tag{C.68}$$

$$\frac{1}{l^{2}}h^{a}\sigma^{c}\left[Z_{a},Z_{c}\right]=\frac{1}{l^{2}}h^{a}\sigma^{c}Z_{ac}, \tag{C.69}$$

$$\frac{1}{2l}q^{ab}\sigma^{c}\left[\hat{Z}_{ab},Z_{c}\right]=\frac{1}{l}q_{\ c}^{a}\sigma^{c}Z_{a},\tag{C.70}$$
$$\frac{1}{4l}\omega^{ab}\chi^{cd}\left[J_{ab},\hat{Z}_{cd}\right]=\frac{1}{2}\omega_{\ c}^{[a}\chi^{c|b]}\hat{Z}_{ab},\tag{C.71}$$
$$\frac{1}{2l}e^{a}\chi^{cd}\left[P_{a},\hat{Z}_{cd}\right]=\frac{1}{l}\chi_{\ c}^{a}e^{c}P_{a},\tag{C.72}$$
$$\frac{1}{4}k^{ab}\chi^{cd}\left[Z_{ab},\hat{Z}_{cd}\right]=\frac{1}{2}k_{\ c}^{[a}\chi^{c|b]}Z_{ab},\tag{C.73}$$
$$\frac{1}{2l}h^{a}\chi^{cd}\left[Z_{a},\hat{Z}_{cd}\right]=\frac{1}{l}\chi_{\ c}^{a}h^{c}Z_{a},\tag{C.74}$$
$$\frac{1}{4}q^{ab}\chi^{cd}\left[\hat{Z}_{ab},\hat{Z}_{cd}\right]=\frac{1}{2}q_{\ c}^{[a}\chi^{c|b]}\hat{Z}_{ab}.\tag{C.75}$$

Contribuciones **C.0.6 (Transformaciones de las intensidades de campo)**

$$\frac{1}{4}R^{ab}\pi^{cd}\left[J_{ab},J_{cd}\right]=\frac{1}{2}R_{\ c}^{[a}\pi^{c|b]}J_{ab},\tag{C.76}$$
$$\frac{1}{2l}\bar{\mathcal{T}}^{a}\pi^{cd}\left[P_{a},J_{cd}\right]=\frac{1}{l}\pi_{\ c}^{a}\bar{\mathcal{T}}^{a}P_{c},\tag{C.77}$$
$$\frac{1}{4}\bar{F}^{ab}\pi^{cd}\left[Z_{ab},J_{cd}\right]=\frac{1}{2}\bar{F}_{\ c}^{[a}\pi^{c|b]}Z_{ab},\tag{C.78}$$
$$\frac{1}{2l}\bar{H}^{a}\pi^{cd}\left[Z_{a},J_{cd}\right]=\frac{1}{l}\bar{H}^{c}\pi_{\ c}^{a}Z_{a},\tag{C.79}$$
$$\frac{1}{4}Q^{ab}\pi^{cd}\left[\hat{Z}_{ab},J_{cd}\right]=\frac{1}{2}Q_{\ c}^{[a}\pi^{c|b]}\hat{Z}_{ab},\tag{C.80}$$
$$\frac{1}{2l}R^{ab}\rho^{c}\left[J_{ab},P_{c}\right]=\frac{1}{l}R_{\ c}^{a}\rho^{c}P_{a},\tag{C.81}$$
$$\frac{1}{l^{2}}\bar{\mathcal{T}}^{a}\rho^{c}\left[P_{a},P_{c}\right]=\frac{1}{l^{2}}\bar{\mathcal{T}}^{a}\rho^{c}Z_{ac},\tag{C.82}$$
$$\frac{1}{2l}\bar{F}^{ab}\rho^{c}\left[Z_{ab},P_{c}\right]=\frac{1}{l}\bar{F}_{\ c}^{a}\rho^{c}Z_{a},\tag{C.83}$$
$$\frac{1}{l^{2}}\bar{H}^{a}\rho^{c}\left[Z_{a},P_{c}\right]=\frac{1}{l^{2}}\bar{H}^{a}\rho^{c}\hat{Z}_{ac},\tag{C.84}$$
$$\frac{1}{2l}Q^{ab}\rho^{c}\left[\hat{Z}_{ab},P_{c}\right]=\frac{1}{l}Q_{\ c}^{a}\rho^{c}P_{a},\tag{C.85}$$
$$\frac{1}{4}R^{ab}\xi^{cd}\left[J_{ab},Z_{cd}\right]=\frac{1}{2}R_{\ c}^{[a}\xi^{c|b]}Z_{ab},\tag{C.86}$$
$$\frac{1}{2l}\bar{\mathcal{T}}^{a}\xi^{cd}\left[P_{a},Z_{cd}\right]=\frac{1}{l}\xi_{\ c}^{a}\bar{\mathcal{T}}^{c}Z_{a},\tag{C.87}$$
$$\frac{1}{4}\bar{F}^{ab}\xi^{cd}\left[Z_{ab},Z_{cd}\right]=\frac{1}{2}\bar{F}_{\ c}^{[a}\xi^{c|b]}\hat{Z}_{ab},\tag{C.88}$$

$$\frac{1}{2l}\bar{H}^a\xi^{cd}\left[Z_a, Z_{cd}\right] = \frac{1}{l}\xi^a_{\ c}\bar{H}^c P_a, \tag{C.89}$$

$$\frac{1}{4}Q^{ab}\xi^{cd}\left[\hat{Z}_{ab}, Z_{cd}\right] = \frac{1}{2}Q^{[a}_{\ \ c}\xi^{c|b]}Z_{ab}, \tag{C.90}$$

$$\frac{1}{2l}R^{ab}\sigma^c\left[J_{ab}, Z_c\right] = \frac{1}{l}R^a_{\ c}\sigma^c Z_a, \tag{C.91}$$

$$\frac{1}{l^2}\bar{\mathcal{T}}^a\sigma^c\left[P_a, Z_c\right] = \frac{1}{l^2}\bar{\mathcal{T}}^a\sigma^c\hat{Z}_{ac}, \tag{C.92}$$

$$\frac{1}{2l}\bar{F}^{ab}\sigma^c\left[Z_{ab}, Z_c\right] = \frac{1}{l}\bar{F}^a_{\ c}\sigma^c P_a, \tag{C.93}$$

$$\frac{1}{l^2}\bar{H}^a\sigma^c\left[Z_a, Z_c\right] = \frac{1}{l^2}\bar{H}^a\sigma^c Z_{ac}, \tag{C.94}$$

$$\frac{1}{2l}Q^{ab}\sigma^c\left[\hat{Z}_{ab}, Z_c\right] = \frac{1}{l}Q^a_{\ c}\sigma^c Z_a, \tag{C.95}$$

$$\frac{1}{4l}R^{ab}\chi^{cd}\left[J_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right] = \frac{1}{2}R^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]}\hat{Z}_{ab}, \tag{C.96}$$

$$\frac{1}{2l}\bar{\mathcal{T}}^a\chi^{cd}\left[P_a, \hat{Z}_{cd}\right] = \frac{1}{l}\chi^a_{\ c}\bar{\mathcal{T}}^c P_a, \tag{C.97}$$

$$\frac{1}{4}\bar{F}^{ab}\chi^{cd}\left[Z_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right] = \frac{1}{2}\bar{F}^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]}Z_{ab}, \tag{C.98}$$

$$\frac{1}{2l}\bar{H}^a\chi^{cd}\left[Z_a, \hat{Z}_{cd}\right] = \frac{1}{l}\chi^a_{\ c}\bar{H}^c Z_a, \tag{C.99}$$

$$\frac{1}{4}Q^{ab}\chi^{cd}\left[\hat{Z}_{ab}, \hat{Z}_{cd}\right] = \frac{1}{2}Q^{[a}_{\ \ c}\chi^{c|b]}\hat{Z}_{ab}. \tag{C.100}$$

Apéndice D

Procedimiento de expansión de álgebras

Definiciones previas

Vamos a revisar algunas definiciones de conceptos importantes que se utilizaran a lo largo de esta tesis,

***Definición* D.0.1 (n-selector)** *Sean $\lambda_{\alpha_1}, \ldots, \lambda_{\alpha_n} \in S$, donde $S = \{\lambda_\alpha\}$ un semi-grupo finito y discreto, cuyo producto viene dado por*

$$\lambda_{\alpha_1} \cdot \lambda_{\alpha_2} \cdots \lambda_{\alpha_n} = \lambda_{\gamma(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}$$

entonces, se define el n-selector $K_{\alpha_1\cdots\alpha_n}{}^{\rho}$ como

$$K_{\alpha_1\cdots\alpha_n}{}^{\rho} = \begin{cases} 1, & \text{cuando } \rho = \gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De esta definición vemos que el n-selector codifica toda la información contenida en la tabla de multiplicación del semigrupo. Además, siempre es posible escribir un n-selector en términos de 2-selectores[1]. Una importante propiedad de los selectores puede ser encontrada haciendo uso de la propiedad asociativa del semigrupo. En efecto, la ley asociativa es expresada como $(\lambda_\alpha \lambda_\beta)\, \lambda_\gamma = \lambda_\alpha\, (\lambda_\beta \lambda_\gamma)$ de donde vemos que

$$K_{\alpha\beta}{}^{\rho} K_{\rho\gamma}{}^{\sigma} = K_{\alpha\rho}{}^{\sigma} K_{\rho\gamma}{}^{\rho}. \tag{D.1}$$

De forma análoga a la definición de 2-selector se define el 3-selector

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma = K_{\alpha\beta\gamma}{}^{\sigma} \lambda_\sigma. \tag{D.2}$$

De (D.1) y (D.2) tenemos

$$K_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma} = K_{\alpha\beta}{}^{\rho} K_{\rho\gamma}{}^{\sigma} = K_{\alpha\rho}{}^{\sigma} K_{\beta\gamma}{}^{\rho} \tag{D.3}$$

[1]El hecho que el semigrupo sea abeliano implica $K_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = K_{\beta\alpha}{}^{\gamma}$

de estos resultados podemos ver que los 2-selectores pueden proporcionar una representación matricial para el semigrupo, en forma análoga a como las constantes de estructura de un álgebra de Lie proporcionan la representación adjunta. En efecto, definiendo

$$[\lambda_\alpha]_\gamma{}^\rho = K_{\alpha\gamma}^\rho, \tag{D.4}$$

tenemos

$$[\lambda_\alpha]_\mu{}^\sigma [\lambda_\beta]_\sigma{}^\nu = K_{\alpha\beta}^\sigma [\lambda_\sigma]_\mu{}^\nu = \left[\lambda_{\gamma(\alpha\beta)}\right]_\mu{}^\nu, \tag{D.5}$$

Por inducción podemos probar que

$$K_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}{}^\sigma K_{\sigma\alpha_n}{}^\rho = K_{\alpha_1\sigma}{}^\rho K_{\alpha_2\ldots\alpha_n}{}^\sigma = K_{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}^\sigma. \tag{D.6}$$

Esto significa que es posible expresar un n-selector en términos de 2-selector.

Definición **D.0.2 (Álgebra de Lie)** *Sea $\mathfrak{g}$ un espacio vectorial finito dimensional sobre un campo K. Si el grupo del espacio vectorial es extendido a un anillo, donde la operación multiplicativa del anillo es dada por $x \diamond y \longrightarrow [x, y]$ (operación antisimétrica), entonces $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie. Sean M y N subconjuntos del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Denotaremos por $[M, N]$ al conjunto de la forma $[x, y]$ donde $x \in M$ e $y \in N$. Si M y N son sub-espacios lineales de un álgebra $\mathfrak{g}$, entonces son validas las siguientes relaciones*

$$[M_1 + M_2, N] \subset [M_1, N] + [M_2, N]. \tag{D.7}$$
$$[M, N] = -[N, M]. \tag{D.8}$$
$$[\mathfrak{g}, [M, N]] \subset [M, [N, \mathfrak{g}]] + [N, [\mathfrak{g}, M]]. \tag{D.9}$$

Definición **D.0.3 (Sub-álgebra)** *Un sub-espacio N del álgebra $\mathfrak{g}$ es una sub-álgebra si*

$$[N, N] \subset N \tag{D.10}$$

Definición **D.0.4 (Ideal)** *Un sub-espacio N del álgebra es un ideal si*

$$[\mathfrak{g}, N] \subset N \tag{D.11}$$

Esto significa que un ideal es una sub-álgebra.

Definición **D.0.5 (Centro de un álgebra)** *Un ideal N que satisface la condición $[\mathfrak{g}, N] = 0$ es llamado centro de $\mathfrak{g}$. dado que $[N, N] = 0$ se tiene que un centro es siempre conmutativo.*

Expansión vía el mecanismo de semigrupos

El método de expansión de álgebras de Lie es un procedimiento para obtener nuevas álgebras de Lie a partir de una dada. La idea es generalizar en una manera natural el procedimiento de contracción de Inonu-Wigner, donde en lugar de multiplicar los generadores por un parámetro numérico, dichos generadores sean multiplicados por elementos de un semigrupo abeliano.

S-expansión

***Teorema* D.0.1** *Sea $S = \{\lambda_\alpha\}$ un semigrupo abeliano, sea $K_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$ un 2-selector y sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de base $\{T_A\}$ y constantes de estructura $C_{AB}^{\ \ C}$. Un elemento de la base del espacio producto directo $S \otimes \mathfrak{g}$ será denotado por $T_{(A,\alpha)} = \lambda_\alpha T_A$. Si se define el producto algebraico en el espacio $S \otimes \mathfrak{g}$ como*

$$\left[T_{(A,\alpha)}, T_{(B,\beta)}\right] = \lambda_\alpha \lambda_\beta \left[T_A, T_B\right] \tag{D.12}$$

Entonces $S \otimes \mathfrak{g}$ será un álgebra de Lie cuyas constantes de estructura vienen dadas por

$$C_{(A,\alpha)(B,\beta)}^{\qquad\quad (C,\gamma)} = K_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} C_{AB}^{\ \ C}. \tag{D.13}$$

***Demostración* D.0.1** *De la ley de multiplicación del semigrupo*

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_{\rho(\alpha,\beta)}, \tag{D.14}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\left[T_{(A,\alpha)}, T_{(B,\beta)}\right] &= \lambda_\alpha \lambda_\beta \left[T_A, T_B\right], && \text{(D.15)}\\
&= \lambda_{\rho(\alpha,\beta)} \left[T_A, T_B\right], && \text{(D.16)}\\
&= \lambda_{\rho(\alpha,\beta)} C_{AB}^{\ \ C} T_C, && \text{(D.17)}\\
&= C_{AB}^{\ \ C} \left(\lambda_{\rho(\alpha,\beta)} T_C\right), && \text{(D.18)}\\
&= C_{AB}^{\ \ C} T_{(C,\rho(\alpha,\beta))}. && \text{(D.19)}
\end{aligned}$$

De la definición de 2-selector

$$K_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} = \begin{cases} 1, & \textit{cuando } \gamma = \rho(\alpha,\beta). \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

tenemos

$$\left[T_{(A,\alpha)}, T_{(B,\beta)}\right] = C_{AB}^{\ \ C} T_{(C,\rho(\alpha,\beta))} = C_{AB}^{\ \ C} K_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} T_{(C,\gamma)}. \tag{D.20}$$

De manera que

$$\begin{aligned}
\left[T_{(A,\alpha)}, T_{(B,\beta)}\right] &= K_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} C_{AB}^{\ \ C} T_{(C,\gamma)}, && \text{(D.21)}\\
\left[T_{(A,\alpha)}, T_{(B,\beta)}\right] &= C_{(A,\alpha)(B,\beta)}^{\qquad\quad (C,\gamma)} T_{(C,\gamma)}. && \text{(D.22)}
\end{aligned}$$

Lo cual prueba que el álgebra $S \otimes \mathfrak{g}$ se cierra.

Debemos notar que debido a que S es abeliano se tiene que las constantes de estructura $C_{(A,\alpha)(B,\beta)}^{\qquad\quad (C,\gamma)}$ heredan la simetría de $C_{AB}^{\ \ C}$. En efecto

$$C_{(A,\alpha)(B,\beta)}^{\qquad\quad (C,\gamma)} = -C_{(B,\beta)(A,\alpha)}^{\qquad\quad (C,\gamma)}. \tag{D.23}$$

Usando el hecho que C_{AB}^{C} satisface la identidad de Jacobi es posible probar que $C_{(A,\alpha)(B,\beta)}^{(C,\gamma)}$ satisfacen la identidad de Jacobi

$$C_{(A,\alpha)(B,\beta)}^{(C,\gamma)} C_{(C,\gamma)(D,\delta)}^{(E,\varepsilon)} + C_{(D,\delta)(A,\alpha)}^{(C,\gamma)} C_{(C,\gamma)(B,\beta)}^{(E,\varepsilon)} + C_{(B,\beta)(D,\delta)}^{(C,\gamma)} C_{(C,\gamma)(A,\alpha)}^{(E,\varepsilon)} = 0. \tag{D.24}$$

Esto prueba que $S \otimes \mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie. Este teorema induce a la siguiente definición.

***Definición* D.0.6 (Álgebra S-expandida de $\mathfrak{g}$)** *Si S es un semigrupo abeliano y si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, entonces el álgebra de Lie definida como $\mathfrak{h} = S \otimes \mathfrak{g}$ es llamada "álgebra expandida de $\mathfrak{g}$" o "álgebra S-expandida de $\mathfrak{g}$".*

En general, para obtener un álgebra a partir de otra, tal como en el caso de la contracción de Inonu-Wigner, es usual multiplicar los generadores por un cierto parámetro y después llevar a cabo un proceso como el de tomar un limite. La S-expansión puede ser vista como la generalización natural de esta idea donde en lugar de multiplicar los generadores por un parámetro numérico, los generadores se multiplican con elementos de un semigrupo abeliano. Un álgebra S-expandida puede ser entendida como una copia del álgebra original $\mathfrak{g}$ para cada elemento del semigrupo. Para poder encontrar estructuras mas complejas debemos obtener álgebras mas pequeñas a partir del álgebra S-expandida, es decir subálgebras y álgebras reducidas.

Grupo SO(D-1,1) y tensores invariantes

El grupo $SO(D-1,1)$ tiene dos tensores invariantes, la métrica de Minkowsky, η_{ab}, y el tensor de Levi-Civita totalmente antisimétrico, $\varepsilon_{a_1 a_2 \cdots a_D}$. Estos tensores están definidos por la estructura algebraica del grupo de Lorentz y por lo tanto, son los mismos en cada espacio tangente. Consecuentemente, éstos deben ser también constantes covariantemente,

$$d\eta_{ab} = D\eta_{ab} = 0, \tag{D.25}$$
$$d\varepsilon_{a_1 a_2 \cdots a_D} = D\varepsilon_{a_1 a_2 \cdots a_D} = 0, \tag{D.26}$$

donde

$$D\eta_{ab} = d\eta_{ab} - \omega^c{}_b \eta_{ac} - \omega^c{}_a \eta_{cb}, \tag{D.27}$$

esto implica que la conexión de espin satisface las siguientes identidades

$$\eta_{ac}\omega^c{}_b = -\eta_{cb}\omega^c{}_a, \tag{D.28}$$
$$\varepsilon_{b_1 a_2 \cdots a_D}\omega^{b_1}{}_{a_1} + \varepsilon_{a_1 b_2 \cdots a_D}\omega^{b_2}{}_{a_2} + \ldots + \varepsilon_{a_1 a_2 \cdots b_D}\omega^{b_D}{}_{a_D} = 0. \tag{D.29}$$

La ecuación (D.28) restringe a la conexión de espin a ser antisimétrica en sus índices de Lorentz, $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$.

Tensores invariantes para álgebras S-expandidas

Un problema de carácter físico y matemático es hallar todos los tensores invariantes para una cierta álgebra. Un procedimiento estándar que nos permite obtener un tensor invariante es hacer uso de la traza de alguna representación matricial de los generadores del álgebra. Sin embargo, este método tiene limitaciones para el caso de álgebras 0_S-reducidas. Por otro lado, una de las ventajas del método de S-expansión es que éste nos proporciona un tensor invariante para el álgebra S-expandida $\mathfrak{G} = S \times \mathfrak{g}$ en términos de un tensor invariante para $\mathfrak{g}$

***Teorema* D.0.2** *Sea S un semigrupo abeliano, $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de base $\{T_A\}$, y sea $\langle T_{(A_1,\alpha_1)} \ldots T_{(A_n,\alpha_n)} \rangle$ un tensor invariante para $\mathfrak{g}$. Entonces, la expresión*

$$\langle T_{(A_1,\alpha_1)} \cdots T_{(A_n,\alpha_n)} \rangle = \alpha_\gamma K_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}{}^{\gamma} \langle T_{A_1}, \cdots T_{A_n} \rangle \tag{D.30}$$

donde α_γ son constantes arbitrarias y $K_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}{}^{\gamma}$ es el n-selector para S, corresponde a un tensor invariante para el álgebra S-expandida $\mathfrak{G} = S \times \mathfrak{g}$.

Por otro lado, dado un tensor invariante para el álgebra, sus componentes valuadas en una subálgebra son por si mismas un tensor invariante para la subálgebra. Para el caso de subálgebras resonantes, y siempre que todos los α_γ sean distintos de cero, el tensor invariante para la subálgebra resonante nunca se anula. De hecho, dada una partición resonante $S = \bigcup_{p \in I} S_p$ y denotando la base de V_p como $\{T_{\alpha_p}\}$, las componentes $\mathfrak{G}_R$-valuadas de (D.30) son dadas por

$$\langle T_{(\alpha_{p1},\alpha_{p1})} \cdots T_{(\alpha_{pn},\alpha_{pn})} \rangle = \alpha_\gamma K_{\alpha_{p1}\ldots\alpha_{pn}}{}^{\gamma} \langle T_{\alpha_{p1}}, \cdots T_{\alpha_{pn}} \rangle \,, \quad \textit{con} \quad \lambda_{\alpha_p} \in S_p \tag{D.31}$$

Estas componentes forman parte del un tensor invariante para la subálgebra resonante $\mathfrak{G}_R = \bigoplus_{p\in I} S_p \times V_p$.

Como se menciono anteriormente un álgebra 0_S-reducida no es una subálgebra, por lo tanto, las componentes valuadas en el álgebra 0_S-reducida de las expresiones (D.30) o (D.31),no conducen a un tensor invariante. El siguiente teorema, nos proporciona una solución entregándonos una expresión general para un tensor invariante para un álgebra 0_S-reducida.

***Teorema* D.0.3** *Sea S un semigrupo abeliano con elementos no nulos λ_i, con $i = 0, \ldots, N$ y $\lambda_{N+1} = 0_s$. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de base $\{T_A\}$, y sea $\langle T_{A_a} \cdots T_{A_n} \rangle$ un tensor invariante para $\mathfrak{g}$. Entonces la expresión*

$$\langle T_{(A_1,i_1)} \cdots T_{(A_n,i_n)} \rangle = \alpha_j K_{i_1\ldots i_n}{}^{j} \langle T_{A_1,\cdots T_{A_n}} \rangle \,, \tag{D.32}$$

donde α_j son constantes arbitrarias, corresponde a un tensor invariante para el álgebra 0_S-reducida obtenida desde $\mathfrak{G} = S \times \mathfrak{g}$.

Para la 0_S-reducción de una subálgebra resonante, obtenemos que

$$\langle T_{(\alpha_{p1},i_{p1})} \cdots T_{(\alpha_{pn},i_{pn})} \rangle = \alpha_j K_{i_{p1}\ldots i_{pn}}{}^{j} \langle T_{i_{p1}}, \cdots T_{i_{pn}} \rangle \,, \quad \textit{con} \quad \lambda_{i_p} \in S_p \tag{D.33}$$

es un tensor invariante para el álgebra 0_S-reducida de $\mathfrak{G}_R = \bigoplus_{p\in I} S_p \times V_p$.

Bibliografía

[1] J.A. de Azcárraga, K. Kamimura and J. Lukierski, "Generalized cosmological term from Maxwell symmetries", Phys. Rev. D 83 (2011) 124036.

[2] J.A. de Azcarraga, K. Kamimura and J. Lukierski, "Maxwell symmetries and some applications" , Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser. 23 (2013) 01160.

[3] H. Bacry, P. Combe and J. L. Richard, "Group-theoretical analysis of elementary particles in an external electromagnetic field. 1. the relativistic particle in a constant and uniform field," Nuovo Cim. A 67 (1970) 267.

[4] R. Schrader, "The Maxwell group and the quantum theory of particles in classical homogeneous electromagnetic fields," Fortsch. Phys. 20 (1972) 701.

[5] E. Weimar-Woods, "contractions, generalized Inonu and Wigner contractions and deformationf of finite-dimensional lie algebras, "Rev. Math. Phys. 12, 1505-1529 (2000).

[6] M. Hatsuda, M. Sakaguchi, "Wess-Zumino Term for the AdS Superstring and Generalized Inönü- Wigner Contraction". Prog. Theor. Phys. 109 (2003) 853. arXiv:hep-th/0106114.

[7] J. A. de Azcárraga, J. M. Izquierdo, M. Picón, O. Varela, "Generating Lie and Gauge Free Differential (Super)Algebras by Expanding Maurer-Cartan Forms and Chern-Simons Supergravity". Nucl. Phys. B 662 (2003) 185. arXiv: hep-th/0212347.

[8] F. Izaurieta, E. Rodríguez, P. Salgado, "Expanding Lie (Super)Algebras through Abelian Semigroups". Jour. Math. Phys. 47 (2006) 123512. arXiv: hep-th/0606215.

[9] F. Izaurieta, A. Pérez, E. Rodríguez, P. Salgado, Dual Formulation of the Lie Algebra S-expansion Procedure. Jour. Math. Phys. 50 (2009) 073511 arXiv:0903.4712 [hep-th].

[10] F. Izaurieta, P. Minning, A. Pérez, E. Rodríguez, P. Salgado, "Standard general relativity from Chern-Simons gravity", Phys.Lett.B 678 (2009) 213-217.

[11] P. Salgado, S. Salgado, "$\mathfrak{so}(D-1,1) \oplus \mathfrak{so}(D-1,2)$ algebras and gravity", Phys. Lett. B 728 (2014) 5.

[12] D.V.Soroka,V.A.Soroka,Phys.Lett.B607(2005)302.

[13] D.V.Soroka,V.A.Soroka,Adv.High Energy Phys. 2009 (2009) 234147.

[14] S. Bonanos, J. Gomis, K. Kamimura and J. Lukierski, Phys. Rev. Lett. 104 (2010) 090401

[15] J. Gomis, K. Kamimura, J. Lukierski, JHEP 0908 (2009) 039 [arXiv:0906.4464]

[16] P.K. Concha, D.M. Penafiel, E.K. Rodriguez and P. Salgado, "Chern-Simons and Born-Infeld gravity theories and Maxwell algebras type", Eur.Phys.J.C 74 (2014) 2741.

[17] F. Izaurieta, E. Rodríguez, P. Salgado, Eleven-Dimensional Gauge Theory for the M Algebra as an Abelian Semigroup Expansion of osp(32—1). Eur. Phys. J. C 54 (2008) 675. arXiv: hep-th/0606225.

[18] F. Izaurieta, E. Rodríguez, P. Salgado, The Extended Cartan Homotopy Formula and a Subspace Separation Method for Chern-Simons Theory. Lett. Math. Phys. 80 (2007) 127.

[19] J. Lukierski, *Generalized Wigner-Inonu Contractions and Maxwell (Super)Algebras*, Proc. Steklov Inst. Math. **272** (2011) 183, arXiv:1007.3405 [hep-th].

[20] N. Merino, A. Perez, P. Salgado, "Even-dimensional topological gravity from Chern-Simons gravity", Phys.Lett.B 681 (2009) 85-88.

[21] N. Merino, A. Perez, P. Salgado, O. Valdivia, "Topological gravity from a transgression gauge fieldTheory", Phys.Lett.B 693 (2010) 600-604

[22] P.K. Concha, D.M. Peñafiel, E.K. Rodríguez, P. Salgado, P, "Even-dimensional General Relativity from Born-infeld gravity", Phys.Lett.B 725 (2013) 419.

[23] P. Salgado, P. Salgado-Rebolledo, O. Valdivia, "Topological gravity and gauged Wess-Zumino-Witten term", Phys.Lett.B 728 (2014) 99-104.

[24] R. Díaz, F. Gómez, F. Pinilla, P. Salgado, "Brane gravity in 4D from Chern–Simons gravity theory, Eur.Phys.J.C 80 (2020) 546.

[25] P.K. Concha, R. Durka, N. Merino, E.K. Rodríguez, *New family of Maxwell like algebras* arXiv:1601.06443[hep-th]

[26] P. L. Huddleston *Inönü–Wigner contractions of the real fourdimensional Lie algebras* Journal of Mathematical Physics 19, 1645 (1978)

[27] P.K.Concha, R. Durka, C. Inostroza, N. Merino, and E. K. Rodríguez *Pure Lovelock gravity and Chern-Simons theory* PHYSICAL REVIEW D 94, 024055 (2016)

[28] Ricardo Caroca *Generalization of extended Lie algebras by expansions of extended de Sitter algebra, in four dimensions.*

[29] Mokhtar Hassaine, Jorge Zanelli, *(100 Years of General Relativity) Vol. 2 Chern Simons (Super)Gravity-World* Scientific Publishing Company (2016)

[30] Pietro Giuseppe Fré, *Gravity, a Geometrical Course Volume 2: Black Holes, Cosmology and Introduction to Supergravity* Dipartimento di Fisica Teorica University of Torino. Torino, Italy

[31] Eric Poisson, *An advanced coure in general relativity* University of Guelph. january 2002.

[32] Øyvind Grøn, Sigbjørn Hervik, *Einstein's General Theory of Relativity.* Springer, 2007.

[33] David Lovelock and Hanno Rund, *Tensors, Differential Forms and Variational Principles*