Universidad de Concepción
Campus Los Ángeles

Escuela de Educación

Diseño de un plan de acompañamiento para profesores de matemática que imparten las asignaturas de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas e Integrales en un establecimiento municipal de la comuna de Los Ángeles

---

Trabajo de Título para optar al Grado de Licenciada o Licenciado en Educación
y al Título Profesional de Profesora o Profesor de Matemática

Francisca Lourdes Albornoz Inostroza
Nicolás Ignacio Castro Castro
Ellen Chris Zúñiga Cid

Docente guía:
Mg. Salvador Alarcón Godoy

Comisión Evaluadora:
Dra. Marianela Castillo Fernández
Mg. Sixto Martínez Hernández

Los Ángeles, febrero de 2023

Dedicatoria

A todas las personas que se interesan por construir un mundo mejor. Especialmente a los diversos actores que participan activamente en la comunidad educativa, que se esfuerzan cada día por entregar un espacio acogedor, transparente y lleno de cariño, para que todos y cada uno de los niños y adolescentes tengan un espacio seguro en donde desenvolverse, expresarse y experimentar de manera libre y sana.

Agradecimientos

A mi mamá y abuelita, quienes me han apoyado de manera incondicional y siempre se han esforzado por entregarme lo mejor, creyendo en mí e impulsándome desde pequeña a lograr ser una profesional. Gracias por todo.

A todas las profesoras que creyeron en mi desde niña y que me apoyaron durante todo mi proceso educativo, motivándome siempre a dar lo mejor. Asimismo, agradezco a los docentes de la carrera, quienes siempre estuvieron dispuestos a ayudarme y orientarme cuando lo necesité.

A mis compañeros de tesis, por esforzarse constantemente y lograr terminar juntos esta última etapa que tanto nos estresó. A nuestro profesor guía, quien desde el principio aceptó guiarnos en este proceso.

Y a todas las personas que han estado presente de alguna manera apoyándome y motivándome a seguir adelante y cumplir mis metas.

Francisca Albornoz Inostroza

En primer lugar, agradezco a Dios, por permitir llegar hasta el termino de este camino y poder lograr el sueño de ser profesional.

A mi hijo y pareja, a Fernan y Karin, quienes fueron un pilar fundamental en el transcurso de mi formación inicial docente, brindando el apoyo, motivación y palabras de aliento para hoy poder finalizar esta etapa.

A mi madrina Ahydee, que sin su infinita ayuda nada de esto sería posible.

A mis compañeras de tesis que son personas increíbles, por ser responsables y querer siempre dar lo mejor de sí mismas.

Y a todas aquellas personas que, de alguna forma, fueron parte y estuvieron presente a lo largo de este proceso.

Nicolás Castro Castro

A Dios, al Universo y a cada uno de los profesores y profesoras que me inspiraron a querer ser como ellos. A mi familia, especialmente a mi mamá y mi hermano, por cuidarme siempre. También a mis amigos, que soportaron las conversaciones eternas sobre cualquier cosa que implicara pedagogía. Y a todas aquellas personas que estuvieron presente en este largo proceso.

Por último, a mis compañeros de tesis y a nuestro profesor guía, por intentar comprender mis puntos de vista y mis ideas raras (pero maravillosas), además de mi mal humor en días estresantes.

Ellen Chris Zúñiga Cid

Tabla de contenidos

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Resumen

La presente investigación muestra el diseño y validación de un plan de acompañamiento docente en un establecimiento municipal de la comuna de Los Ángeles, que aborda las dificultades manifestadas en el conocimiento disciplinar para impartir las asignaturas de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas e Integrales, de acuerdo con las Bases Curriculares para 3º y 4º medio (Ministerio de Educación [MINEDUC], 2019a).

Su enfoque es cualitativo y de tipo exploratorio-descriptivo, con diseño de estudio de caso, de corte transversal, realizado en dos fases: primero, se aplica un cuestionario de autorreporte seguido de un grupo focal a cuatro docentes; posteriormente se realiza el diseño y validación de dichos planes, abordando las dificultades disciplinares identificadas.

Estos planes se diseñan de acuerdo con el Programa Educativo Institucional del establecimiento, siguiendo una estructura similar al Plan Local de Formación Docente, dado que, la evidencia muestra que los docentes aprenden preferentemente en sus escuelas y a partir de la reflexión de su propia práctica (Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas [CPEIP], 2020b). Están organizados en un máximo de 8 sesiones teóricas-prácticas, de duración de dos horas cada una, que se proponen implementar dos veces por semana durante aproximadamente 2 meses.

Palabras Claves: Límites, Derivadas e Integrales - Dificultades docentes - Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial - Acompañamiento docente – Habilidades del Siglo XXI.

Abstract

The aim of this present research is to express the design and validation of a teaching accompaniment plan/program in a public school located in Los Ángeles, Chile which establishes the difficulties teachers have teaching subjects such as probability and descriptive statistics, inferential statistics and limits, derivatives and integrals due to math literacy which are based on the National School Curriculum for or Students in the Third and Fourth Grade in high school. (Ministerio de Educación [MINEDUC], 2019a).

This qualitative study has an exploratory- descriptive, cross-sectional study divided into two consecutive phases: in the first phase, a self-report questionnaire was used and in the second phase four teachers were exposed to a focus group interview; after the analysis of data, the design and validation of teaching accompaniment plans are developed including all the difficulties related to math literacy.

The teaching accompaniment plans are designed accordance with the school's Institutional Educational Program, which are similar to the Local Teacher Training Plan due to some evidences ground in the idea that teachers learn preferably in their schools and from their own teaching practice (Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas [CPEIP], 2020b). These plans are organized in a maximum of 8 theoretical-practical sessions, with a duration of two hours each, which are proposed to be implemented twice a week for approximately 2 months.

Key words: Limits, derivatives and integrals, difficulties for teaching, probability and descriptive and inferential statistics, teaching accompaniment, 21st Century Skills.

Introducción

En la siguiente investigación se presenta el diseño y validación de un plan de acompañamiento docente, que aborda las dificultades presentadas en las dimensiones del conocimiento disciplinar, por docentes de matemática que imparten las asignaturas de profundización de Límites, Derivadas e Integrales y Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial para 3° y 4° Medio, propuestas en las Bases Curriculares del 2019, en un establecimiento municipal de la comuna de Los Ángeles.

La relevancia de este estudio radica en que las Bases Curriculares mencionadas anteriormente promueven el desarrollo de las Habilidades del Siglo XXI en el estudiantado, por lo que se hace necesario que los docentes también posean dichas habilidades para responder a los diversos requerimientos de un mundo global, multicultural y en constante cambio, en donde se han determinado nuevos modos de acceso al conocimiento, aplicación de los aprendizajes y participación en la sociedad (MINEDUC, 2019a). En este caso, el eje central del plan de acompañamiento es abordar estas habilidades desde el rol de la aplicación de cada contenido en diversas situaciones y fenómenos contextualizados.

La investigación es de tipo cualitativa y consta de dos fases: en la primera se recolectaron datos a través de un cuestionario de respuesta cerrada con escala de Likert, las cuales fueron profundizadas posteriormente mediante la aplicación de un grupo focal; la segunda corresponde al diseño y validación del plan de acompañamiento que abordó las dificultades manifestadas en la fase 1. La validación de los planes de acompañamiento docentes fue realizada por académicas y académicos expertos en la materia, pertenecientes a la Universidad de Concepción, Campus Los Ángeles y a otras instituciones académicas.

Entre los hallazgos encontrados destaca que, de acuerdo con lo manifestado por los docentes en la fase 1, existe una inconsistencia entre la información recopilada, donde en las respuestas del cuestionario se puede evidenciar dificultades en la dimensión tecnológica para ambas asignaturas de profundización; mientras que el grupo focal evidencia dificultades en la dimensión del conocimiento disciplinar. Para efectos de este trabajo, la información predominante proviene del grupo focal para la confección del plan de acompañamiento docente, abordando las dificultades manifestadas en él, dado que este permitió profundizar en las respuestas entregadas en el cuestionario de autorreporte, facilitando la discusión entre pares.

Por esto, tanto el plan de acompañamiento para Límites, Derivadas e Integrales y el de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial se enfocan en la dimensión del conocimiento disciplinar, con énfasis en la aplicación e interpretación de contenidos, promoviendo el uso de herramientas tecnológicas.

De acuerdo con la revisión bibliográfica realizada, no podemos dar cuenta de estudios que reporten las dificultades presentadas por los docentes que imparten las nuevas asignaturas de profundización, por lo cual, se invita a extender el estudio a la investigación de las dificultades que manifiestan los docentes al impartir las asignaturas correspondientes a Pensamiento Computacional y Programación y Geometría 3D.

El siguiente trabajo consta de 6 capítulos. En el primero se presenta el tema a investigar con la respectiva definición, planteamiento y justificación del problema; en el segundo se muestra el marco teórico respectivo; en el tercero se da a conocer el marco metodológico para la investigación; en el cuarto capítulo se realiza el análisis y discusión de resultados obtenidos del cuestionario de autorreporte y grupo focal; el quinto, contiene el diseño y validación del plan de acompañamiento docente que aborda las dificultades manifestadas; en el sexto se presentan las limitaciones, proyecciones y conclusiones del estudio; finalmente se presentan las referencias bibliográficas y los anexos correspondientes.

Capítulo 1: Planteamiento del problema

En una sociedad en constante cambio, la relación existente entre esta y la educación es bidireccional, ya que una responde a las demandas propuestas por la otra, y viceversa. En esta investigación en particular, se aborda la relación desde la perspectiva de cómo las demandas presentadas por la sociedad del siglo XXI intentan ser respondidas por la educación, para así lograr el desarrollo de seres humanos íntegros, mediante el desarrollo de habilidades y competencias necesarias para insertarse plenamente en dicha sociedad.

En Chile, a partir del año 2009, se da inicio a la mayor reforma educativa de las últimas décadas, donde se han reestructurado y publicado las Bases Curriculares para los diversos niveles educativos del sistema escolar, siendo la última para 3° y 4° año del nivel de educación media, correspondiente al año 2019. En estas, se plantean asignaturas de profundización organizadas por disciplinas y áreas del Plan Diferenciado Humanístico- Científico y dado que dichas asignaturas son nuevas, es necesario explorar las posibles dificultades que han presentado los docentes de matemática para impartir las asignaturas propuestas en las Bases Curriculares del año 2019 para los niveles de 3° y 4° año medio, con la finalidad de diseñar y validar un plan de acompañamiento docente en Límites, Derivadas e Integrales y Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial.

Definición del problema

La educación es un tema que siempre ha estado presente dentro de la sociedad y dado su dinamismo, se ha visto enfrentada a diversos desafíos que deben responder a las demandas que se presentan en un determinado momento. En este sentido, González y Sanz (2016), mencionan que la educación en España, por ejemplo, se ha visto enfrentada a una serie de retos, tensiones y desafíos a los que debe dar respuesta, con la finalidad de formar personas que sean capaces de adaptarse a las nuevas realidades sociales, profesionales, productivas y culturales que demanda una realidad internacional en constante cambio. De la Fuente (2012) señala que indiscutiblemente la sociedad ha cambiado, especialmente en las últimas décadas, trayendo consigo una serie de transformaciones que no solo influyen en la manera de pensar y vivir, sino que también generan cambios en el sistema educativo. Podemos mencionar el caso de México, en donde el nuevo planteamiento curricular pretende enfocar la enseñanza en la formación de estudiantes capaces de adaptarse a los nuevos cambios sociales, con conocimientos críticos, responsables, reflexivos, innovadores y creativos; es decir, focalizada en el contexto del Siglo

XXI, donde existe un mundo en constante cambio, más globalizado y pluricultural (Frías, 2019).

Chile no es la excepción en este ámbito, pues los cambios y ajustes realizados en la educación han surgido a partir del análisis de diversos estudios y la mayor manifestación social por parte de los estudiantes conocida como La Revolución Pingüina. Desde entonces se propone una política de desarrollo curricular con una visión más dinámica y compleja de los procesos de diseño y desarrollo curricular, en que los cambios al currículo se entienden como procesos cíclicos que se actualizan a la luz de las evidencias de la implementación, de la investigación educativa y de las demandas del contexto local y global (Espinoza, 2016).

Así, las reformas educacionales que se han implementado recientemente en Chile, han sido de manera paulatina, las cuales implican "[...] una serie de cambios sistémicos que apuntan a construir un sistema educacional inclusivo que efectivamente promueva una educación de calidad, entendida y aplicada comprensivamente y que promueva la formación de las personas en un sentido integral" (MINEDUC, s.f, p.3), de modo de dar respuesta a las nuevas demandas.

En el año 2009 se da inicio a un cambio curricular en el sistema educativo chileno, el cual se implementa de manera gradual a partir de la promulgación de la Ley General de Educación (Ley N°20370), en donde uno de los puntos de inflexión más importantes que introduce es la modificación de la matriz curricular establecida en la Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza, transitando de un marco curricular que presentaba Objetivos Fundamentales y contenidos mínimos obligatorios al establecimiento de Bases Curriculares, en donde se determinan Objetivos de Aprendizaje que definen los desempeños mínimos que se espera que sean logrados por los estudiantes en sus distintos niveles de enseñanza, los cuales integran habilidades, conocimientos y actitudes que son considerados de mayor importancia para el desarrollo integral y armónico de los estudiantes. (Ruz-Fuenzalida, 2020; CNED, s.f.a)

En el año 2010 se comienza la elaboración de las Bases Curriculares de 1° a 6° Básico, las que son implementadas a partir del año 2012, dando inicio a una Reforma Curricular que traería consigo posteriormente las promulgaciones de las Bases Curriculares de 7° Básico a 2° Medio y finalmente 3° y 4° Medio, en los años 2015 y 2019 respectivamente.

En efecto, se evidencia que en la actualidad las demandas presentes en el siglo XXI tienen relación con la globalización, las nuevas tecnologías, la mayor cantidad de información, entre otros. Por esto, las Bases Curriculares de los distintos niveles educativos contemplan dichas demandas, buscando que su implementación dé respuesta a las necesidades de la sociedad actual a través del desarrollo de nuevas habilidades en los estudiantes que son pertinentes al presente contexto, conocidas a nivel internacional como habilidades para el siglo XXI, tales como "[...] el aprendizaje de nuevas maneras de pensar, de aprender, de relacionarse con los demás, de usar la tecnología, de trabajar, de participar en el mundo, de desarrollarse personalmente, de comunicarse y de desarrollar la creatividad, entre otras" (MINEDUC, 2019a, p.27).

Sin embargo, las actualizaciones de las Bases Curriculares se han realizado en años dispares: Educación Parvularia (2018), 1° a 6° básico (2012), 7° a 2° medio (2015) y 3° y 4° medio (2019), siendo estas últimas las únicas que se enmarcan explícitamente en la promoción del desarrollo de estas habilidades. Para esto, el MINEDUC (2019b) dispone de una serie de asignaturas de profundización para la modalidad Humanístico - Científico en su Formación Diferenciada (Decreto Supremo 193, 2019), organizadas de la siguiente manera:

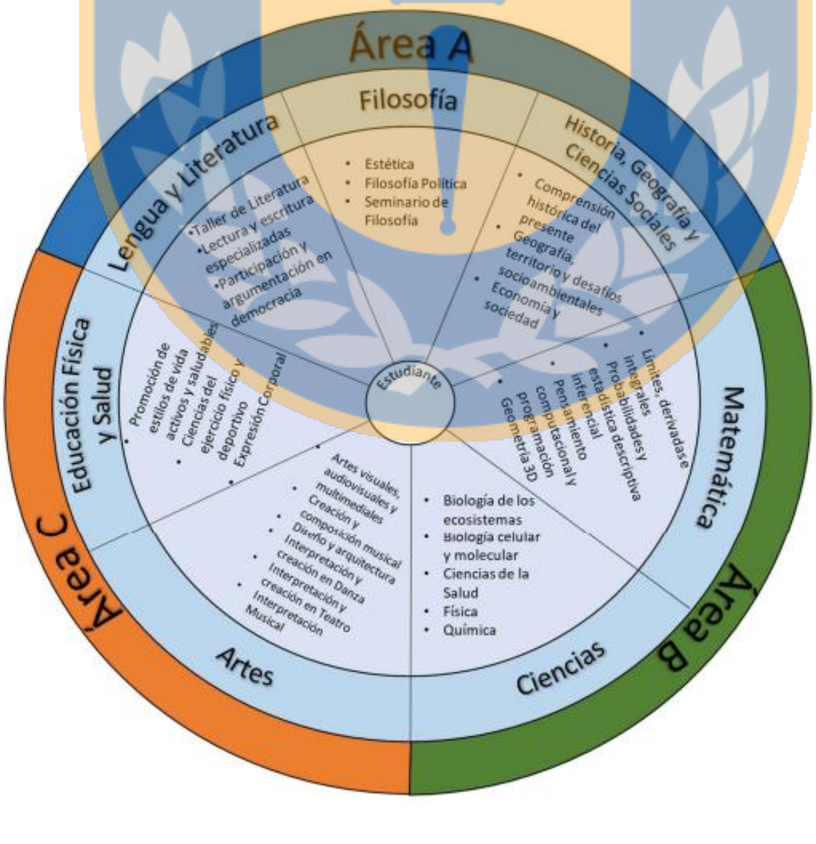


Figura 1: Organización de las asignaturas por disciplina y área del Plan Diferenciado HC (MINEDUC, 2019b).

Así, se proponen las asignaturas de Probabilidades y Estadística Descriptiva, Pensamiento Computacional y Programación, Límites, Derivadas e Integrales y Geometría 3D.

Planteamiento del problema

La implementación de estas asignaturas de profundización conlleva nuevos desafíos para los docentes de matemática y bajo esta perspectiva, Calderón y Loja (2018) señalan que un docente del siglo XXI debe comprender la realidad actual y construir nuevas formas de concebir el aprendizaje a través de la comprensión de nuevas tecnologías y/o la adaptación de las metodologías empleadas, con un grado de responsabilidad social, crítico y a la vez reflexivo.

Para hacer posible lo anterior se hace necesario que el MINEDUC adecue el currículum de acuerdo con las necesidades que la sociedad demanda en un determinado momento, plasmando en él aquellos aprendizajes que esta considera relevante en la formación de los estudiantes (MINEDUC, 2019a), permitiendo que mediante la educación se formen ciudadanos activos y partícipes de la sociedad, contribuyendo a un cambio positivo y potenciando el desarrollo de esta.

Ahora bien, dado que una de las tareas que corresponden al Consejo Nacional de Educación (CNED) es formular observaciones fundadas con respecto a las propuestas relativas al diseño y definición del currículum escolar (CNED, 2019a) emanadas desde el MINEDUC, en la sesión especial llevada a cabo el 11 de junio de 2019 en la Cámara de Diputadas y Diputados, previo a la publicación formal de las Nuevas Bases Curriculares para 3° y 4° año medio, el Presidente de esta institución expuso que en las decisiones adoptadas por el Consejo se tuvo siempre a la vista determinar un currículum "justo para todos los estudiantes", restando la excesiva especialización, diversificando las opciones, fomentando la elección (CNED, 2019b), aprobando un currículum nacional que integra habilidades, conocimientos y actitudes que responden a estas demandas.

Por otro lado, el CPEIP, dependiente del MINEDUC, publicó en agosto del año 2021 el nuevo Marco para la Buena Enseñanza, que articula los estándares pedagógicos y disciplinares de la Formación Inicial Docente, conformando una perspectiva de desarrollo que integra la formación con el ejercicio de la profesión, vinculándolos como una trayectoria profesional que fortalece la relación entre la formación y la práctica, que permita hacer accesible, comprensible y significativo el contenido a la diversidad estudiantil (MINEDUC, 2021).

Sin embargo, Esperidón (2020) señala que en todos los procesos de diseño curricular en Chile, ha existido una visión centralizada, en la que el docente y la escuela no participan de ellos, siendo un grupo de expertos el que crea el currículum nacional y el rol de las instituciones educativas es reducido simplemente a la implementación de este, en donde los profesores cumplen un rol secundario, siendo más bien ejecutores de estos nuevos planes y programas, aun cuando Murillo y Romano (2008, como se citó en Escribano, 2018) indican que "los docentes son actores claves y relevantes para la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje". (p.4)

Esta situación no solo ha afectado a nuestro país. Bolívar (1992) da cuenta que las actualizaciones curriculares llevadas a cabo en diversos países a través de las décadas, se logra evidenciar que el papel que recae en los docentes es precisamente de ejecutor de estas innovaciones. Por ejemplo, en España se ha visto al profesor como un mero ejecutor de currículos que son diseñados por expertos externos. Ahora bien, tomando como modelo las instituciones educativas mexicanas de la última década, se ha evidenciado al docente como "el responsable último de concretar los modelos educativos innovadores en el aula" (Díaz-Barriga, 2010, p. 37).

Debido a lo mencionado previamente, los docentes podrían presentar dificultades en su ejercicio profesional, al no ser partícipes activos en la construcción de las actualizaciones curriculares. La revisión bibliográfica realizada hasta la elaboración de esta investigación no da cuenta de estudios que aborden esta problemática; sin embargo, desde los Estándares de la profesión docente - Marco para la Buena Enseñanza y los Estándares Orientadores para la Formación Inicial Docente (2021) se podría suponer que, de existir, estarían asociadas tanto con el quehacer del docente como con los saberes específicos de la disciplina, en este caso, la matemática.

Pregunta de Investigación

En concordancia con lo expuesto en los párrafos anteriores, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué dificultades han presentado los profesores en ejercicio desde el ámbito tecnológico, didáctico y disciplinar del contenido, para impartir las nuevas asignaturas de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límite, Derivadas e Integrales para 3° y 4° medio propuestos en las nuevas Bases Curriculares por el MINEDUC, y cómo abordarlas?

Justificación del problema

Es de gran relevancia conocer las dificultades que presenta el profesorado para efectuar su labor como docentes en el aula, dado que la continua evolución de la sociedad del conocimiento implica una mejora de las prácticas pedagógicas de forma permanente, y en consecuencia, se considera necesaria la revisión y reflexión de las competencias docentes requeridas para llevar a cabo un proceso de enseñanza-aprendizaje adecuado (Martínez, Álvarez y Villardón, 2018) que permita subsanar las dificultades presentadas por los profesores.

Por lo anterior, la investigación realizada tiene como objetivo diseñar un plan de acompañamiento que aborde las dificultades manifestadas por los docentes de matemática en ejercicio, para impartir las asignaturas de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas e Integrales para 3° y 4° medio, establecidas en las Bases Curriculares del año 2019, teniendo la estructura de un Plan Local de Formación para el Desarrollo Profesional Docente, definido por la Ley 20.903 que crea el Sistema de Desarrollo Profesional Docente.

Ahora bien, en las Bases Curriculares para 3° y 4° medio publicadas el año 2019 se estipulan asignaturas de profundización para diversas áreas, las cuales son nuevas para los docentes que se encuentran en ejercicio, por lo que cabe pensar en nuevos desafíos y retos que se presenten para ellos en la incorporación de las nuevas tecnologías, el conocimiento disciplinar y la didáctica para implementar estas asignaturas de manera adecuada. Los profesores deben ser impulsados a desarrollar la capacidad para aprender a renovarse en su ejercicio docente (Consejo de Rectores de las Universidades Chilenas [CRUCH], 2012), por lo que el perfeccionamiento docente no debe limitarse solo a capacitaciones sobre metodologías de enseñanza o incorporación de tecnología en el aula, sino que se debe crear un enfoque integral que les permita a los profesores en ejercicio la oportunidad de reflexionar sobre su práctica.

Objetivos de investigación

Objetivo general

Diseñar y validar un plan de acompañamiento para docentes de matemática pertenecientes a un establecimiento municipal de la comuna de Los Ángeles que aborde las dificultades de conocimiento disciplinar, didácticas o tecnológicas manifestadas al impartir las asignaturas de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas e Integrales.

Objetivos específicos

- Identificar y categorizar las dificultades presentadas por docentes de matemática en ejercicio en los ámbitos de conocimiento disciplinar, didácticos o tecnológicos al impartir las asignaturas de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas e Integrales, para 3° y 4° medio en las Bases Curriculares de 2019 promulgadas por el MINEDUC, en un establecimiento municipal de Los Ángeles.

- Diseñar un plan de acompañamiento que aborde las dificultades de conocimiento disciplinar presentadas por docentes de matemática en ejercicio que pertenecen a un establecimiento municipal de Los Ángeles, al impartir las asignaturas de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas e Integrales.

- Validar el plan de acompañamiento docente diseñado a partir del análisis de las dificultades de conocimiento disciplinar presentadas por los docentes de matemática en ejercicio pertenecientes a un establecimiento municipal de Los Ángeles, al impartir las asignaturas de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas e Integrales.

Capítulo 2: Marco teórico

En la actualidad se promueve el desarrollo de habilidades del Siglo XXI, por lo que se requiere de docentes de matemática que posean competencias necesarias para promover dichas habilidades en sus estudiantes. Para esto el MINEDUC, en el año 2021, publicó los nuevos Estándares de la Profesión Docente, en donde se explicitan las competencias que deben poseer los profesores en el presente siglo, complementando su desempeño para llevar a cabo las Bases Curriculares para 3° y 4° medio, publicadas en el año 2019, en las cuales se promueve en el estudiantado el desarrollo de las habilidades mencionadas, principalmente en las asignaturas de profundización. En este sentido, para comprender a quienes imparten dichas asignaturas es necesario definir tres dimensiones: conocimiento disciplinar, didáctica y tecnológica, las cuales deben ser dominadas por los profesores para implementar dichas asignaturas de forma exitosa en el aula.

Bajo la Ley 20.903, que crea el Sistema de Desarrollo Profesional Docente, se promueve en establecimientos educativos el perfeccionamiento constante de los docentes a través del Plan Local de Formación, el cual es diseñado por cada colegio atendiendo a su propia realidad educativa y recursos disponibles. En este caso, se considera la estructura del Plan de Formación Local para la propuesta de un plan de acompañamiento docente en “Límites, Derivadas e Integrales” y “Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial”, considerando las dificultades, en las dimensiones mencionadas anteriormente, que han presentado los profesores para impartir dichas asignaturas.

1. Competencias de los docentes de matemática para la promoción de habilidades del Siglo XXI

Actualmente la sociedad necesita de docentes aptos para fomentar las habilidades del Siglo XXI en el estudiantado. En este sentido, Fondo (2019) manifiesta que para lograrlo se requiere que los profesores posean ciertas competencias, entendiendo que estas son la suma de conocimientos, habilidades y actitudes; englobando el saber, el saber hacer y el saber ser, lo que se desarrolla y perfecciona a través de toda la vida profesional.

La función principal del docente en el aula debe ser promover y desarrollar los procesos de aprendizaje de los alumnos para hacerlos pensar, reflexionar, investigar, comprender y ser estratégicos; contextualizando el conocimiento para que el estudiante pueda relacionarlo con su entorno inmediato, logrando de esta manera un aprendizaje significativo (Rojas, 2016). Sumado a lo anterior el rol del docente se revela como fundamental en el nuevo contexto educativo que se plantea desde una sociedad del conocimiento, considerando que el reciente enfoque implica la formación y validación de habilidades mediante el enseñar a pensar, el aprendizaje autónomo y la aplicación de los contenidos a contextos y desafíos de la vida real. (Valencia-Molina, T., Serna-Collazos, A., Ochoa-Angrino, S., Caicedo-Tamayo, A. M., Montes-González, J. A., y Chávez-Vescance, J. D., 2016).

Es decir, en el siglo XXI los profesores deben conocer y emplear los modelos metodológicos adecuados y acordes a las últimas tendencias, manejar las mejores estrategias de enseñanza para alcanzar las habilidades que se van a desarrollar, seleccionar, adaptar y usar los recursos didácticos y tecnológicos más apropiados para generar aprendizajes significativos (Criollo, 2018).

A partir de los Estándares de la Profesión Docente (2021), conformados por los Estándares para Carreras de Pedagogía y el Marco para la Buena Enseñanza (MBE); las Bases Curriculares para 3° y 4° Medio (MINEDUC, 2019a), en las cuales se promueven las habilidades del Siglo XXI en los estudiantes; y la revisión sistemática de la bibliografía, podemos determinar cuáles son las competencias que deben poseer los docentes de matemática en el Siglo XXI.

2. Estándares de la Profesión Docente

El concepto de Estándares de la Profesión Docente, definido como tal, por primera vez relaciona explícitamente los instrumentos que orientan la formación de los futuros profesores con el ejercicio mismo de la profesión. Este es un cambio paradigmático que invita a resignificar la formación inicial, la inducción y el ejercicio profesional como partes de un mismo proceso de desarrollo, y por tanto a fortalecer el vínculo entre la academia y el sistema escolar y el concepto de trayectoria y aprendizaje docente (CPEIP, 2020a).

Los nuevos estándares se hacen cargo de los desafíos que enfrenta actualmente la docencia, promoviendo y valorando una pedagogía que responde a seis aspectos fundamentales para el aprendizaje (CPEIP, 2020a):

1. Una pedagogía con competencias para que todos y todas aprendan, con altas expectativas en sus estudiantes.

2. Una pedagogía que promueva el desarrollo del pensamiento autónomo, que invite a las y los estudiantes a reflexionar sobre su propio aprendizaje (metacognición) y a ser protagonistas de él.

3. Una pedagogía con competencias para atender al desarrollo socioemocional de las y los estudiantes, con el objetivo de formar personas íntegras, con habilidades para convivir en sociedad.

4. Una pedagogía en permanente actualización y desarrollo, que se adapte a los nuevos desafíos a través del aprendizaje continuo; con capacidad de innovar y aprender de la propia práctica para transformar la realidad.

5. Una pedagogía en constante relación con su entorno, que potencia la experiencia de enseñanza-aprendizaje a través del trabajo con sus pares, con apoderados y con la comunidad en que se inserta, formando a sus estudiantes para la vida.

6. Una pedagogía que se responsabilice por los resultados de sus estudiantes.

Estos estándares son el resultado de un intenso trabajo, que recogió los aportes y miradas de universidades, profesores, educadores, directivos, académicos, investigadores, expertos e instituciones gubernamentales y no gubernamentales (CPEIP, 2020a), conformándose por los estándares para la Formación Inicial Docente y el Marco para la Buena Enseñanza (MBE):

2.1 Estándares de la Profesión Docente: Formación Inicial Docente (FID)

Los Estándares para Carreras de Pedagogía son definidos como “aquellas pautas que explicitan y definen el conjunto de habilidades, conocimientos y disposiciones que debe tener un profesional de la educación una vez finalizada su Formación Inicial” (Decreto 309, 2017). Estos buscan relevar la importancia de la Formación Inicial Docente (FID) en el logro de aprendizajes significativos, complejos y desafiantes de todos los estudiantes del sistema escolar chileno (CPEIP, 2021b).

Los Estándares para Carreras de Pedagogía están conformados por estándares pedagógicos y disciplinarios. Los primeros "[...] se conciben como descripciones específicas de los conocimientos, habilidades y disposiciones que se espera que los profesores demuestren [...]" (CPEIP, 2021b, p.9); mientras que los segundos se "[...] refieren a lo que el/la docente recién egresado/a debe demostrar en el manejo de los conocimientos propios de su disciplina, la epistemología e historia desde donde ésta se constituye, y el saber didáctico específico para su enseñanza." (CPEIP, 2021b, p.9)

A. *Estándares Pedagógicos*

Los estándares pedagógicos son comunes para todas las carreras de pedagogía, se organizan según los dominios del MBE donde cada uno especifica un conjunto de conocimientos, habilidades y disposiciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, los cuales deben ser reinterpretados por los profesores mediante la reflexión sobre su práctica docente en el contexto en el que estén inmersos. Dichos estándares son doce, cada uno con un número determinado de descriptores que especifican lo que se espera que demuestren todos los estudiantes egresados de pedagogía (CPEIP, 2021b).

B. *Estándares Disciplinarios*

Los estándares disciplinarios se centran en el concepto de Conocimiento Pedagógico del Contenido (CPC) de Shulman (1986, 1987) y sus desarrollos en el campo de la investigación sobre formación de docentes en el mundo (Abell, 2008; Loughran, 2013; Berry, Depaepe y van Driel 2016; Carlson y Daehler 2018). Estos estándares integran cuatro componentes que conforman el CPC (CPEIP, 2021b, p.71):

1. Conocimiento de la comprensión de comprensión de los/as alumnos/as de un tópico disciplinar, sus posibles interpretaciones y grado de dificultad.

2. Conocimiento de los materiales curriculares y medios de enseñanza en relación con los contenidos y estudiantes.

3. Estrategias didácticas y procesos instructivos, representaciones para la enseñanza de tópicos particulares y posibles actividades.

4. Conocimiento de los propósitos o fines de la enseñanza de la disciplina o las concepciones de lo que significa enseñar un determinado tema (ideas relevantes, prerrequisitos, justificación).

Cada estándar se conforma por una definición que busca ser concisa e inequívoca del conocimiento disciplinar que el docente debe comprender, el desempeño didáctico comprometido en su enseñanza y aprendizaje, y el propósito de tal desempeño. Además, cada estándar se detalla a través de dos conjuntos de descriptores: disciplinares y didácticos (CPEIP, 2021b):

- Los descriptores referidos al conocimiento disciplinar explicitan las dimensiones del conocimiento que debe ser adquirido en la formación inicial, necesarios para una docencia competente en el nivel y área en que se enseña. Estos abarcan el conocimiento de conceptos, hechos y herramientas, formas de indagación y pensamiento, y formas de representación características de una disciplina o área de conocimientos.

- Los descriptores referidos a la didáctica disciplinar especifican las dimensiones de saber y de saber hacer de la docencia, necesarias para la transformación de la comprensión en la comprensión en los/as estudiantes de los contenidos propios de la disciplina. Son complementarios a los estándares pedagógicos generales y replican el núcleo del MBE, recogiendo los elementos de planificación, ejecución y evaluación, pero desde el punto de vista de las necesidades de la enseñanza de una cierta disciplina y del contenido particular de los distintos niveles educativos.

C. *Estándares Disciplinarios de Pedagogía en Matemática*

Los Estándares Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática, han sido elaborados con el fin de que los programas de pedagogía de dicha disciplina, y sus estudiantes, tengan un referente que les permita abordar los desafíos que impone el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, considerando las habilidades del Siglo XXI que promueven las Bases Curriculares actuales, ya que se considera que el aprendizaje de la matemática ocupa un lugar central en la formación integral contemporánea, brindando contenidos y habilidades cruciales para el desarrollo y participación plena de los ciudadanos en la sociedad actual (CPEIP, 2021b).

Estos estándares consideran los requerimientos para implementar el currículo escolar en sus contenidos, habilidades y actitudes. Se espera que los profesores egresados de Pedagogía en Matemática, de las distintas instituciones formadoras a nivel nacional, posean los conocimientos y competencias para liderar los aprendizajes establecidos. Se sustentan en una visión de la matemática que involucra a los estudiantes en un aprendizaje significativo a través de diversas experiencias individuales y colaborativas, de tal manera que se fomente el desarrollo de habilidades para dar sentido a ideas matemáticas y al razonamiento matemático (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2015; citado por el CPEIP, 2021b). De esta manera, lo que buscan los estándares es que los futuros docentes posean un conocimiento especializado de la matemática escolar para que sus estudiantes logren desarrollar una comprensión profunda de las matemáticas escolares, tanto en contenidos conceptuales y procedimentales, como en habilidades y actitudes (CPEIP, 2021b).

Los Estándares Disciplinarios para Pedagogía en Matemática se dividen en seis, los cuales permiten desplegar los conocimientos, habilidades y actitudes que deberían tener los docentes recién egresados para incorporarse al sistema educativo (CPEIP, 2021b). Estos corresponden a:

- *Estándar A: Números y álgebra.* Comprende los conjuntos numéricos, sus estructuras algebraicas, las funciones reales y álgebra lineal para construir actividades de aprendizaje que le permitan a sus estudiantes comprender y aplicar estos conceptos en la resolución de problemas y modelación.

- *Estándar B: Geometría.* Comprende los elementos de la geometría sintética, analítica y vectorial para concebir estrategias de enseñanza y aprendizaje que permitan a sus estudiantes construir, visualizar y transformar figuras 2D y 3D en forma manual y digital. Lo anterior permitirá que los educandos puedan plantear conjeturas, demostrar teoremas y resolver problemas.

- *Estándar C: Probabilidades y Estadística.* Comprende las probabilidades, la estadística descriptiva e inferencial para planificar y gestionar actividades de aprendizaje, lo cual les permite a los alumnos diseñar y efectuar estudios estadísticos, haciendo inferencias sobre la población en contextos de incertidumbre, atendiendo a la variabilidad de los datos.

- *Estándar D: Límites, Derivadas e Integrales.* Comprende las nociones de cálculo diferencial e integral, permitiéndole planificar y gestionar actividades de aprendizaje para que sus estudiantes adquieran estos conocimientos y los apliquen en la resolución de problemas y modelamiento de fenómenos naturales y sociales.

- *Estándar E: Pensamiento Computacional y Programación.* Comprende los fundamentos de la ciencia de la computación, el pensamiento computacional y la programación moderna, desarrollando algoritmos y programas que le permiten implementar el currículo de matemática, creando un ambiente donde los estudiantes son capaces de resolver problemas de programación y diseñar aplicaciones para dispositivos digitales.

- *Estándar F: Habilidades y actitudes matemáticas.* Comprende el conocimiento, habilidades y actitudes fundamentales del quehacer matemático para desarrollar estrategias pedagógicas y crear situaciones de aprendizaje, promoviendo el desarrollo de estas habilidades y actitudes en todos sus estudiantes, manteniendo altas expectativas de aprendizaje en ellos, respetando las diversidades socioculturales existentes.

Cabe mencionar que los Estándares Disciplinarios se entienden en conjunto con los Estándares Pedagógicos, de tal manera que los docentes al egresar de su formación inicial deben ser capaces de dominar los conocimientos, habilidades y actitudes planteados en los

Estándares Pedagógicos y, al mismo tiempo, poner estos conocimientos al servicio de los propios contenidos que plantean los Estándares Disciplinarios (CPEIP, 2021b).

2.2 Estándares de la Profesión Docente: Marco para la Buena Enseñanza

El Marco para la Buena Enseñanza (MBE) (2021) forma parte de una arquitectura global que se ha querido otorgar a la profesión docente. En ella, a partir de una mirada de trayectoria, se conecta de manera intencionada con los Estándares para Carreras de Pedagogía, brindando a la profesión una perspectiva de desarrollo docente que integra la formación con el ejercicio de la profesión. Esta articulación se traduce en que los estándares de desempeño profesional del MBE, que buscan orientar el desempeño de todo docente, independientemente del nivel o asignatura que enseña, equivalen a los Estándares Pedagógicos que debe lograr todo futuro docente al egreso de su carrera, aunque con algunas variaciones en sus descriptores (CPEIP, 2021a).

La actualización del MBE busca responder a los nuevos desafíos que la sociedad actual, a nivel general, y los/as estudiantes, en particular, le plantean a la docencia. Para esto, se adhiere a una pedagogía que mira las habilidades del siglo XXI, promoviendo un desarrollo educativo que permita el equilibrio de la cognición profunda del estudiante con el desarrollo personal y social de este, en entornos de aprendizaje más participativos, atentos al desarrollo emocional y enriquecidos con herramientas de la sociedad digital (CPEIP, 2021a), permitiendo que las y los docentes identifiquen el conjunto de prácticas pedagógicas necesarias para generar aprendizaje en los educandos, explicitando lo que todo docente debe saber, saber hacer y el modo de ser, abordando tanto las responsabilidades que la o el profesor asume en el aula, como aquellas que debe cumplir en su comunidad escolar (CPEIP, s.f.a).

El MBE está estructurado en doce estándares de desempeño, los cuales se dividen en cuatro dominios (CPEIP, 2021a):

a) *Dominio A: Preparación del proceso de enseñanza y aprendizaje.* Consiste en la preparación de la enseñanza que realizan los docentes, considerando el conjunto de conocimientos, habilidades y actitudes pertinentes a cada disciplina, la cual implica analizar, comparar, explicar, producir evidencias (evaluaciones), buscar y generar ejemplos; contemplando los diversos contextos en los cuales se encuentran inmersos los estudiantes para hacer accesible los contenidos de manera significativa y desafiante.

Este dominio se compone de los siguientes estándares:

- Estándar 1: Aprendizaje y desarrollo de los/as estudiantes.
- Estándar 2: Conocimiento disciplinar, didáctico y del currículum escolar.
- Estándar 3: Planificación de la enseñanza.
- Estándar 4: Planificación de la evaluación.

b) *Dominio B: Creación de un ambiente propicio para el aprendizaje.* Dice relación con las acciones de las y los docentes para propiciar ambientes inclusivos en clases, en donde todos los estudiantes se sientan cómodos, seguros, respetados, valorados, desafiados y apoyados, fomentando así interacciones que promuevan relaciones y competencias personales positivas y de buena convivencia en el aula y la comunidad educativa, que posibiliten el desarrollo de valores democráticos y, en términos generales, la formación de estudiantes responsables que cuiden de sí mismos, de su entorno y que entiendan la ciudadanía como un valor, es decir, el desarrollo de competencias personales y sociales necesarias para que los alumnos se desenvuelvan de manera activa y propositiva, propiciando un desarrollo integral en estos.

Este dominio se compone de los siguientes estándares:

- Estándar 5: Ambiente respetuoso y organizado.
- Estándar 6: Desarrollo personal y social.

c) *Dominio C: Enseñanza para el aprendizaje de todos/as los/as estudiantes.* Este dominio busca que los docentes lleven a cabo experiencias de aprendizaje planificadas, logrando interacciones mediadas por la comunicación fluida entre ellos y sus estudiantes respecto de sus avances y/u obstáculos y lo significativas e interesantes que resultan dichas experiencias; la fluidez y oportunidad de las interacciones comunicativas que suceden en el aula, realizando retroalimentaciones constantemente a sus estudiantes y ajustando su práctica pedagógica in situ. Para lograr lo anterior, los docentes deben involucrar y apoyar a los alumnos brindándoles amplias oportunidades para implementar sus conocimientos, habilidades y actitudes acerca del currículum nacional y desarrollar habilidades de pensamiento en situaciones relevantes según el contexto educativo y desafíos propios de la disciplina.

Este dominio se compone de los siguientes estándares:

- Estándar 7: Estrategias de enseñanza para el logro de aprendizajes profundos.
- Estándar 8: Estrategias para el desarrollo de habilidades del pensamiento.
- Estándar 9: Evaluación y retroalimentación para el aprendizaje.

d) *Dominio D: Responsabilidades profesionales.* Este dominio se compone de elementos que implican el cuestionamiento constante de los profesores acerca de su práctica pedagógica para que, mediante la reflexión individual y colaborativa, reconceptualicen el cómo, el por qué y el para qué de su práctica, comprometiéndose tanto con su aprendizaje, así como también con el desarrollo profesional docente de la comunidad educativa que integra.

Este dominio se compone de los siguientes estándares:

- Estándar 10: Ética profesional.
- Estándar 11: Aprendizaje profesional continuo.
- Estándar 12: Compromiso con el mejoramiento continuo de la comunidad escolar.

Los estándares mencionados permiten incorporar descripciones más específicas de lo que se espera que los docentes sepan para lograr aprendizajes de calidad en sus estudiantes, es decir, buscan orientar el desempeño de todo docente, independientemente del nivel o asignatura que enseña. En este sentido, este nuevo MBE pretende ser un aporte para todo el cuerpo docente del país, como un conjunto de buenas prácticas pedagógicas que orientan el aprendizaje profesional de los docentes, quienes desde su contexto y su saber, deben ser impulsadas (CPEIP, 2021a).

3. Bases Curriculares para 3° y 4° Medio - Habilidades para el Siglo XXI

Los Estándares de la Profesión Docente se adhieren a una pedagogía que está enfocada a que los docentes perfeccionen sus competencias pertinentes al desarrollo de las Habilidades del Siglo XXI, para posteriormente dar paso a un proceso de enseñanza - aprendizaje centrado en la adquisición y desarrollo de dichas habilidades por parte de sus estudiantes. Sumado a esto, en las Bases Curriculares para 3° y 4° Medio que fueron actualizadas el año 2019, se explicita que "[...] consideran estas habilidades para el siglo XXI como un foco formativo central que propende a la formación integral de los estudiantes [...]" (MINEDUC, 2019, p.25).

En este sentido, el conjunto de habilidades seleccionadas para integrar el currículum de 3° y 4° medio corresponden a una adaptación de distintos modelos (Binkley et al., 2012; Fadel et al., 2016), las cuales son organizadas en cuatro categorías: Maneras de pensar, Maneras de trabajar, Herramientas para trabajar y Maneras de vivir en el mundo (MINEDUC, 2019, p.35):

1. Maneras de pensar:
    - Creatividad e innovación.
    - Pensamiento crítico.
    - Metacognición.

2. Maneras de trabajar:
    - Comunicación.
    - Colaboración.

3. Herramientas para trabajar:
    - Alfabetización digital.
    - Uso de la información.

4. Maneras de vivir en el mundo:
    - Ciudadanía local y global.
    - Vida y carrera.
    - Responsabilidad personal y social.

Por lo anterior, para promover aún más el desarrollo de estas habilidades, el MINEDUC propone 27 asignaturas de profundización para el Plan de Formación Diferenciada Humanístico-Científica, las cuales permiten a los estudiantes explorar y profundizar en áreas de su interés. En consecuencia, dichas asignaturas se basan en los principios de electividad, profundización y exploración (MINEDUC, 2019).

El desafío es preparar a los estudiantes para el trabajo, la ciudadanía y la vida en el siglo XXI. La mundialización, las nuevas tecnologías, las migraciones, la competencia internacional, la evolución de los mercados y los desafíos medioambientales y políticos transnacionales son todos ellos factores que rigen la adquisición de las competencias y los conocimientos que las y los estudiantes necesitan para sobrevivir y salir airosos en el siglo XXI (Luna, 2015a).

Sin embargo, Reimers y Chung (2016) indican que estas habilidades que se consideran necesarias para desenvolverse en el Siglo XXI no son nuevas, pero lo que sí se ha identificado como único en nuestro tiempo es que no son necesarias solo para una élite de elegidos, sino que para todos. En efecto, estas competencias son cada vez más importantes tanto para el bienestar económico individual y nacional como para la promoción de esferas cívicas estimulantes, la resolución de problemas angustiantes y el desarrollo de organizaciones colaborativas efectivas, todo lo cual es necesario, para los tiempos turbulentos del nuevo siglo (Reimers y Chung, 2016).

En específico, el MINEDUC (2019) señala que en las asignaturas de profundización de matemática para 3° y 4° medio se promueven las habilidades para el siglo XXI mediante un conjunto de objetivos de aprendizaje centrados en habilidades, conocimiento y comprensión; de modo que la articulación de estos en el proceso de enseñanza-aprendizaje permite a los estudiantes nuevos modos de acceso al conocimiento, de aplicación de los aprendizajes y de participación en la sociedad, dando énfasis al modelamiento y la resolución de problemas enfocados en la propia disciplina, relacionados con otras asignatura y/o con la vida real, propiciando un aprendizaje para la vida.

4. Comprendiendo al profesor que se desempeña en asignaturas de profundización del área matemática humanístico-científica

En la sociedad actual se hace necesario contar con docentes que promuevan el desarrollo de las habilidades del siglo XXI en sus estudiantes, mediante una enseñanza que logre aprendizajes significativos, de manera efectiva y equitativa (Reimers y Chung, 2016; como se citó en CPEIP, 2021b). Es decir, se considera que más que enseñar un cierto contenido, los profesores deben dotar a sus alumnos de habilidades que les permita la construcción de saberes (Espinoza-Freire, Tinoco-Izquierdo y Sánchez-Barreto, 2017). "En esta línea, el reto de la educación para el docente del siglo XXI es enfatizar el aprendizaje activo y participativo del sujeto, adquiriendo las herramientas competenciales necesarias para integrarse en una sociedad que demanda individuos creativos y autorrealizables." (Rico-Gómez y Ponce, 2022, p.78)

Los docentes del siglo XXI deben implementar una pedagogía que implique estrategias innovadoras y respaldadas por la investigación, por las tecnologías del aprendizaje y por las aplicaciones tomadas de la vida real (Saavedra y Opfer, 2012; citado por Luna, 2015b). Para llevar a cabo una enseñanza de calidad se requiere de profesores muy competentes y dedicados, que empleen pedagogías activas. Es por esto que las naciones deben, por un lado "asegurarse de que exista un número suficiente de docentes y directores de centros educativos, bien formados y motivados; y por otro, mejorar la formación de las y los profesores, sus condiciones de trabajo y su distribución geográfica; y ofrecer amplias oportunidades de desarrollo profesional" (UNESCO y UNICEF, 2013a; como se citó en Luna, 2015, p.4b).

El sistema escolar requiere docentes con actitud analítica, reflexiva y crítica (Brady, 2020), con habilidades de búsqueda, selección y análisis de la información; capaces de trabajar en colaboración e interacción social, asumiendo responsabilidad y compromiso, tomando decisiones, así como desarrollando actitudes y habilidades comunicativas y de civismo desde una perspectiva democrática y de apertura sociocultural, de compromiso de justicia social como parte del ejercicio profesional y ciudadano (Montero, 2002; Palomares, 2009), y con la finalidad de ayudar al discente en la búsqueda personal de su madurez cognitiva y afectiva en esta dinámica social de aprendizaje (Ribosa, 2020).

Así, podemos afirmar que los docentes promuevan de manera adecuada las habilidades del siglo XXI en sus estudiantes, es necesario que ellos también las desarrollen. Es por esto que, a partir de la revisión bibliográfica presentada, se conjugarán los elementos anteriores para comprender el desempeño esperado del profesor de matemática que ofrece las asignaturas de profundización para 3° y 4° medio.

En este sentido y de acuerdo con los propósitos investigativos de los autores, las competencias del profesor de matemática que se desempeña en las asignaturas de profundización serán estudiadas y entendidas considerando las siguientes premisas:

1. Se realizará una categorización de ciertas dimensiones que los docentes deben dominar para poder ejercer una pedagogía centrada en el desarrollo de habilidades del Siglo XXI. Para esto, se tomaron como referencia los documentos ministeriales citados anteriormente para definir dichas dimensiones, entre ellos los Estándares para Carreras de Pedagogía y las Bases Curriculares vigentes, considerando las habilidades para el Siglo XX. Lo que permite tener una visión amplia e integral de los diversos factores que influyen en el proceso educativo.

2. En particular, desde los Estándares para la Carrera de Pedagogía en Matemática, serán considerados elementos de las asignaturas de profundización, que ofrecen la oportunidad de lograr una comprensión a cabalidad de contenidos aprendidos en la asignatura de matemática del plan de formación general, de tal manera que los estudiantes tengan la posibilidad de aumentar la aplicación de dichos contenidos y además, tener una primera aproximación a temas que se encuentran en currículos de carreras de nivel superior. “Así, por una parte, se profundiza en funciones, geometría 3D y pensamiento estadístico-probabilístico y, por otra, se introduce pensamiento computacional, programación, y los conceptos fundamentales de cálculo infinitesimal, límites, derivadas e integrales” (MINEDUC, 2019, p.262).

3. Las competencias específicas de cada dimensión serán entendidas desde lo que el CPEIP (2021b) establece en los estándares para la formación inicial docente. Para este efecto, se señala que los estándares “[...] detallan de manera específica

los conocimientos disciplinares y didácticos, junto con las habilidades y actitudes fundamentales para preparar profesores que puedan asumir con responsabilidad el desafío que presenta la enseñanza de la matemática, considerando los niveles de 7° básico a 4° Medio” (p.70). En particular, “se incorporan los conocimientos necesarios para implementar los cursos del Plan de Formación Diferenciada Humanístico-Científica introducidos en las bases curriculares de 3° y 4° Medio” (MINEDUC, 2019; como se citó en CPEIP, 2021b, p.70).

De acuerdo con lo anterior, es necesario entender al profesor de matemática que dicta las asignaturas de profundización de Límites, Derivadas e Integrales y Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, desde 3 dimensiones:

- **Dimensión de Conocimiento Disciplinar:** “El/la docente egresado/a demuestra un amplio dominio de los conocimientos, habilidades y actitudes que caracterizan la disciplina que enseña.” (CPEIP, 2021b, p. 31), lo cual permite una adecuada relación del proceso de enseñanza aprendizaje entre docente-estudiante, profundizando la conexión entre las habilidades intelectuales y el aprendizaje del educando, pues “son producto de la interacción entre la persona y el contexto en el que vive” (Sánchez-Acero y García-Martín, 2021, p. 167).

Es decir, si el docente de matemática tiene un buen dominio del conocimiento disciplinar, este podrá articular las diferentes áreas de la matemática y el nivel de desarrollo cognitivo del estudiante, para contribuir a desarrollar un aprendizaje significativo, y en consonancia con lo anterior, Gamboa y Borrero (2017) mencionan que:

> Es necesario que el proceso enseñanza-aprendizaje de la Matemática se caracterice por una contextualización a los involucrados en él, de manera que exista una coherencia curricular tal que tanto objetivos, contenidos, métodos, medios, formas de organización y evaluación estén en correspondencia con sus niveles reales y potenciales de desarrollo. (p. 94)

- **Dimensión Didáctica: "**El/la docente egresado/a demuestra un dominio del proceso de enseñanza y aprendizaje de la disciplina y es capaz de emplear un repertorio diverso de estrategias didácticas y teorías pedagógicas para hacer el contenido disciplinar accesible, comprensible y significativo para la diversidad de sus estudiantes" (CPEIP, 2021b, p. 31).

Por otro lado, también es necesario que en el proceso de enseñanza- aprendizaje de la matemática exista una coherencia entre la dimensión didáctica y disciplinar. Varios autores (Cabrera y Cantoral, 2013; Gamboa y Borrero, 2017; Chavarría-Arroyo y Albanese, 2021) sostienen que si bien existe una contextualización de los objetivos de aprendizaje y el contenido, la metodología y la evaluación están descontextualizadas, lo cual afecta directamente el aprendizaje significativo y en consecuencia, al desarrollo de Habilidades del Siglo XXI por parte de los estudiantes.

Así, se considera necesario que el docente domine diversas estrategias didácticas en donde se contextualice el conocimiento en todo el proceso de enseñanza - aprendizaje de la matemática generando así un aprendizaje significativo y llegando a una comprensión a cabalidad de los diversos contenidos por parte de los educandos, pues "[...] un "adecuado" proceso de enseñanza no genera necesariamente aprendizajes" (Cabrera y Cantoral, 2013, p. 1599), pues además, "es necesario lograr que los alumnos no solo aprendan lo que han de evitar para no equivocarse sino también lo que han de hacer para llegar al conocimiento correcto." (Gamboa y Borrero, 2017, p. 96)

- **Dimensión Tecnológica:** Si bien la dimensión tecnológica no está declarada explícitamente en un apartado en los Estándares para la Profesión Docente, esta es transversal, pues al revisar las Bases Curriculares para 3° y 4° Medio, se encuentra la Alfabetización Digital, la cual:

> Promueve el desarrollo del pensamiento computacional, la autonomía y el trabajo en equipo, la creatividad, la participación en redes de diversa índole, y la motivación por ampliar los propios intereses y horizontes culturales, por medio del uso responsable de la tecnología para hacer frente a nuevos desafíos, como la ciberseguridad y el autocuidado. La utilización de la tecnología como

herramienta de trabajo implica dominar las posibilidades que ofrece, como asimismo darle un uso creativo e innovador. A partir de esto, la alfabetización digital apunta también a la resolución de problemas en el marco de la cultura digital que caracteriza al siglo XXI, aprovechando las herramientas que nos dan la programación, el pensamiento computacional, la robótica e internet, entre otros, para desarrollar habilidades que permitan crear contenidos digitales, informarnos y vincularnos con los demás utilizando la tecnología. (MINEDUC, 2019, p. 26)

En efecto, las habilidades de alfabetización digital mencionadas anteriormente y de uso de tecnologías que se promueve en las Bases Curriculares de 3° y 4° medio, como parte de las habilidades para el siglo XXI, "son fundamentales para generar instancias de colaboración, comunicación, creación e innovación en los estudiantes mediante el uso de TIC. También contribuyen a que desarrollen la capacidad de utilizarlas con criterio, prudencia y responsabilidad" (MINEDUC, 2019, p. 46).

Asimismo, para que los educandos tengan dominio en dicha área, el docente debe desarrollar competencias en la utilización de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC). Para ello, el MINEDUC diseñó un documento denominado Competencias y Estándares TIC para la profesión docente (2011), el cual se dividió en diversas dimensiones para indicar las competencias que deben ser desarrolladas por los docentes para desenvolverse en las TIC en el aula. En específico, la dimensión pedagógica:

> [...] apunta a integrar las TIC a los procesos de enseñanza y aprendizaje con el fin de agregar valor al proceso mismo y para apoyar el desarrollo de los estudiantes. Para efecto de esta dimensión, se han considerado tres competencias, la primera de ellas relacionada con la incorporación de las TIC al diseño de experiencias de aprendizaje; la segunda a su implementación y la tercera relacionada con la incorporación de sistemas de información en línea y de comunicación mediada por computadores en la implementación de experiencias. (p. 36)

Por otro lado, para la actualización del MBE (2021) se consideraron los Estándares de Competencia en TIC para Docentes (UNESCO, 2019). En este sentido, en el MBE, se mencionan descriptores que apuntan a esta dimensión, asociada a comprender cómo las herramientas digitales permiten apoyar los procesos de aprendizaje de la disciplina que enseña, promover experiencias formativas virtuales y presenciales vinculadas al desarrollo de los valores de la vida democrática y el respeto por los derechos humanos, apoyar el desarrollo de los estudiantes para transitar gradualmente desde un trabajo guiado a uno autónomo, utilizando diversos recursos educativos e incluyendo las tecnologías digitales, para posibilitar la aplicación y reelaboración de los conocimientos adquiridos y el logro de nuevos aprendizajes (CPEIP, 2021a), entre otros.

Ante esto, se promueve el desempeño docente desde un enfoque innovador, con el uso de las tecnologías de la información y la comunicación, pero siempre en un ambiente cooperativo de trabajo de toda la comunidad educativa, para que el alumnado sea el que construya el conocimiento, involucrándose de forma significativa, cognitiva y emocionalmente (Cortés, 2016; Cortés, 2019).

A partir de las definiciones dadas para las tres dimensiones mencionadas anteriormente, como lineamiento general para todos los docentes de matemática en ejercicio, podemos organizar las competencias de dichos docentes para impartir las asignaturas de profundización de 3° y 4° Medio, específicamente Límites, Derivadas e Integrales junto a Probabilidades y Estadística Descriptiva. Esto es:

- **El/ la docente que imparte la asignatura de Límites, Derivadas e Integrales** (CPEIP, 2021b)**:**

    1. Profundiza en el conocimiento de las funciones e integra conceptos de límites, continuidad, derivabilidad y cálculo integral, diseñando instancias de aprendizaje para que los estudiantes resuelvan problemas que impliquen tasa de cambio, maximización, minimización y acumulación.
    2. Utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo en la determinación de integrales, de longitudes, áreas y volúmenes.
    3. Fomenta la discusión matemática, el razonamiento y la toma de decisiones por parte de los educandos, en el modelamiento de fenómenos naturales y sociales, utilizando diversos softwares educativos.

4. Genera evidencias de aprendizaje sobre los contenidos abordados en la asignatura utilizando herramientas manuales y/o tecnológicas, en evaluaciones individuales y grupales.

- **El/ la docente que imparte la asignatura de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial** (CPEIP, 2021b)**:**

1. Realiza experimentos aleatorios y calcular probabilidades teóricas y experimentales
2. Vincula la estadística descriptiva con la inferencial, expresando conclusiones y reportando e interpretando el nivel de confianza
3. Promueve en las y los alumnos la realización de estudios estadísticos que requieran de la recolección datos de una muestra, su representación y análisis de variabilidad, para así realizar inferencias sobre la población.
4. Diseña e implementa instancias de evaluación, autoevaluación y coevaluación en el estudiantado que evidencien el ejercicio de una ciudadanía crítica que toma decisiones informadas y basadas en evidencias.

De esta manera, podemos definir los siguientes descriptores para las dimensiones disciplinar y didáctica, basados en los Estándares de la Profesión Docente: Carrera de Pedagogía en Matemática Educación Media (2021), junto a diversos documentos mencionados anteriormente, permitiendo además, definir los descriptores en la dimensión tecnológica enfocada a las asignaturas de profundización *Límites, Derivadas e Integrales* y Probabilidad *y Estadística Descriptiva*.

En consecuencia de lo anterior, los descriptores se pueden desglosar de la siguiente manera:

Dimensión	Límites, Derivadas e Integrales	Probabilidad y Estadística Descriptiva e Inferencial
Dimensión del conocimiento disciplinar	Explica correctamente la relación entre las nociones de límite de sucesiones y de funciones, utilizándolas posteriormente en la resolución de problemas que involucran el cálculo de límites empleando casos conocidos y sus propiedades.	Utiliza medidas de centro, posición y dispersión para resumir y comparar conjuntos de datos provenientes de varias poblaciones, en diversos contextos y disciplinas, y explica el significado de los estadísticos para responder preguntas de interés sobre las poblaciones.
	Resuelve problemas que involucran las relaciones lógicas entre la noción de continuidad y derivabilidad de funciones, usando los teoremas del valor intermedio y del valor medio.	Vincula la estadística descriptiva y la inferencial, usando los datos como evidencia, generalizando más allá de la descripción de los datos, y expresando conclusiones con cierto grado de incertidumbre para conectar con la inferencia formal.
	Utiliza las nociones de límite, continuidad y derivabilidad para analizar funciones, en particular sus puntos críticos, de inflexión y su comportamiento asintótico, conectando sus representaciones gráficas y algebraicas.	Utiliza datos de muestras aleatorias para inferir sobre la población de que provienen, y cuantifica la incertidumbre de las inferencias, considerando el rol de la distribución muestral de los estadísticos.
	Modela fenómenos que involucran tasas de cambio instantáneo, maximización o minimización de funciones.	Describe el comportamiento de datos uni y bivariados, usando estadísticos, representaciones gráficas y tabulares, para el desarrollo de habilidades de análisis exploratorio de datos.
	Aplica la integral de Riemann y comprende el Teorema Fundamental del Cálculo en el cálculo de integrales usando funciones primitivas.	Determina los principios básicos del cálculo de probabilidades a partir de experimentos aleatorios, y estudia el desarrollo de modelos de probabilidad, distinguiendo entre la probabilidad teórica y la experimental.
	Aplica el cálculo integral a la determinación de longitudes, superficies y volúmenes, y en la resolución de problemas y la modelación.	Utiliza el principio multiplicativo para desarrollar técnicas de conteo de resultados en experimentos aleatorios simples y compuestos, como permutaciones, combinaciones y variaciones, y las aplica para el cálculo de probabilidades.
	Estudia la convergencia de series numéricas y series de potencias utilizando métodos del cociente, raíz y de comparación, y modela diversos fenómenos con ellas, en particular, el cálculo de interés.	Interpreta la probabilidad condicional como una medida de incertidumbre a la luz de nueva información, relacionándola con el concepto de independencia, y la utiliza como herramienta para argumentar decisiones con base en su cuantificación.
	Modela fenómenos que requieren conocimientos de límites, derivadas e integrales y de otras áreas.	Define variables aleatorias y las utiliza para modelar fenómenos aleatorios, describiendo el comportamiento de la variable a través de funciones de probabilidad o densidad, como la Binomial y la Normal, y evalúa la pertinencia del modelo en situaciones de incertidumbre de índole

		social, cultural o científica.
		Aplica la Ley de los Grandes Números y el Teorema Central del Límite en la resolución de problemas, relacionando las características teóricas y/o experimentales de fenómenos contextualizados.
		Construye intervalos de confianza e interpreta su significancia estadística para el análisis crítico de información y para la realización de inferencias respecto de una población, en el contexto de proyectos colaborativos con áreas como las ciencias sociales, ciencias de la salud y educación.
		Estudia fenómenos naturales y sociales, utilizando como herramienta las Probabilidades y Estadística.
Dimensión didáctica	Planifica un proyecto contemplando distintos niveles de complejidad, que permita a todos/as sus estudiantes involucrarse activamente para conectar la derivada e integral con nociones físicas.	Implementa discusiones en clase para monitorear los diversos niveles de razonamiento y las dificultades que presentan sus estudiantes al interpretar los intervalos de confianza en problemas de inferencia estadística.
	Utiliza diversas representaciones para que todos/as sus estudiantes logren superar las dificultades más frecuentes que tienen con las nociones de convergencia de sucesiones y límite de funciones.	Diseña planes de clases que integren software dinámico para la representación y análisis de datos en la resolución de problemas estadísticos sobre poblaciones minoritarias, considerando los contextos de sus estudiantes y enriqueciendo la interpretación de los resultados.
	Anticipa preguntas para estimular el aprendizaje y para guiar a sus estudiantes en una actividad de modelación colaborativa de fenómenos naturales o sociales que involucren elementos del cálculo diferencial y el uso de herramientas digitales.	Planifica unidades didácticas que promuevan la resolución de problemas estadísticos con uso de herramientas digitales, en el marco de situaciones relevantes de la vida social, cultural y científica, para fomentar el ejercicio de una ciudadanía informada y crítica que toma decisiones basadas en evidencia.
	Gestiona actividades de resolución colaborativa de problemas matemáticos asociados a la aplicación de los teoremas del valor intermedio, valorando la diversidad de estrategias y respuestas de sus estudiantes, y fomentando la discusión y comunicación entre ellos/a.	Formula preguntas a sus estudiantes para que discutan y contrasten en grupos pequeños las concepciones teórica y experimental de probabilidad a través de medios concretos y simulaciones computacionales, e incentiva la participación de todos/as sus estudiantes.
	Diseña actividades que requieran el uso de software dinámico para graficar, derivar, integrar y/o resolver ecuaciones en la resolución de problemas o modelación de situaciones provenientes de otras áreas del conocimiento, considerando el contexto de sus	Diseña instancias de evaluación formativa en situaciones que involucren inferencia estadística, considerando el nivel de confianza, para obtener evidencias de aprendizaje que permitan adecuar la enseñanza y retroalimentar efectivamente a estudiantes.

	estudiantes.	
	Implementa estrategias de evaluación formativa en actividades de modelación de fenómenos del ámbito de la economía, reconociendo la diversidad de contextos de sus estudiantes y cómo esta diversidad aporta al proceso de modelación.	Propicia en los estudiantes el desarrollo del pensamiento crítico y otras funciones cognitivas de orden superior mediante la integración de las TIC en el desarrollo de actividades de aprendizaje de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial.
	Propicia en los estudiantes el desarrollo del pensamiento crítico y otras funciones cognitivas de orden superior mediante la integración de las TIC en el desarrollo de actividades de aprendizaje de Límites, Derivadas e Integrales.	
Dimensión tecnológica	Busca, selecciona y utiliza información fidedigna de estudios presentes en la web con el fin de mejorar la práctica docente y el propio desarrollo profesional en la asignatura de Límites, Derivadas e Integrales para diseñar e implementar ambientes y experiencias de aprendizaje acorde al contexto y los recursos tecnológicos disponibles.	Busca, selecciona y utiliza información fidedigna de estudios presentes en la web con el fin de mejorar la práctica docente y el propio desarrollo profesional en la asignatura de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, para diseñar e implementar ambientes y experiencias de aprendizaje acorde al contexto y los recursos tecnológicos disponibles
	Reflexiona sobre los resultados del uso y manejo de TIC en la asignatura de Límites, Derivadas e Integrales, diseñando e implementando acciones de mejora.	Reflexiona sobre los resultados del uso y manejo de TIC en la asignatura de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, diseñando e implementando acciones de mejora.
	Promueve el trabajo colaborativo en línea, considerando el contexto y los recursos disponibles, entre los estudiantes para la discusión y resolución de tareas enfocadas a Cálculo Diferencial e Integral, usando herramientas electrónicas de productividad y entornos virtuales de aprendizaje, protegiendo la información personal y la de los demás.	Promueve el trabajo colaborativo en línea, considerando el contexto y los recursos disponibles, entre los estudiantes para la discusión y resolución de tareas enfocadas a Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, usando herramientas electrónicas de productividad y entornos virtuales de aprendizaje protegiendo la información personal y la de los demás.
	Promueve estrategias de búsqueda, selección y almacenamiento de recursos de información disponibles en sistemas electrónicos, desarrollando experiencias para el aprendizaje en Cálculo Diferencial e Integral.	Promueve estrategias de búsqueda, selección y almacenamiento de recursos de información disponibles en sistemas electrónicos, desarrollando experiencias para el aprendizaje en Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial.
	Utiliza recursos digitales para diseñar estrategias de evaluación pertinentes a los aprendizajes esperados en Límites,	Utiliza recursos digitales para diseñar estrategias de evaluación pertinentes a los aprendizajes esperados en Probabilidades y Estadística

	Derivadas e Integrales.	Descriptiva e Inferencial.
	Usa TIC para retroalimentar los resultados de las evaluaciones en Límites, derivadas e integrales, para que los estudiantes ajusten, propongan y acuerden mejoras para sus propios procesos de aprendizaje.	Usa TIC para retroalimentar los resultados de las evaluaciones en Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, para que los estudiantes ajusten, propongan y acuerden mejoras para sus propios procesos de aprendizaje.
	Emplea herramientas digitales para realizar diversas formas de representación, argumentando acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.	Utiliza herramientas digitales para construir histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de cajón y nube de puntos, a partir del estudio de características específicas de una población o la extracción de datos presentes en situaciones dadas.
	Utiliza herramientas tecnológicas digitales para demostrar la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria.	Utiliza herramientas digitales para crear actividades que involucren los conceptos de media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables para la resolución de problemas.
	Utiliza software matemático para modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio.	Utiliza herramientas digitales para modelar fenómenos o situaciones cotidianas, en el ámbito científico y social que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.
	Implementa software matemático para crear actividades que involucren la resolución de problemas asociados a crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos, mínimos o de inflexión de una función, a partir del cálculo de la primera y segunda derivada.	Utiliza herramientas digitales, para realizar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.
	Utiliza softwares educativos para modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria.	

Tabla 1: Descriptores de las dimensiones disciplinar, didáctica y tecnológica para profesores de matemática que imparten las asignaturas de profundización "Límites, Derivadas e Integrales" y "Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial".

Fuente: Elaboración propia.

Organizar descriptores para cada una de las dimensiones definidas para nuestro estudio, orientó el diseño de instrumentos que posibiliten evidenciar las necesidades de apoyo de profesores de matemática en ejercicio y, de acuerdo con esto definir y validar un plan de acompañamiento que abordara dichas necesidades, de manera pertinente, adecuada y efectiva.

5. Promoción de competencias docentes a través del Sistema de Desarrollo Profesional Docente y su Plan de Formación Local

El año 2016 se promulga en Chile la Ley 20.903 que crea el Sistema Nacional de Desarrollo Profesional Docente (DPD), transformándose en uno de los pilares fundamentales de la Reforma Educativa emprendida bajo el alero de garantizar el derecho a una educación de calidad para todos y todas las estudiantes del país. Desde este contexto, esta nueva Ley tiene por objetivo contribuir al continuo perfeccionamiento profesional docente a través de la profundización y actualización de los conocimientos, tanto disciplinares como pedagógicos, así como también, mediante la aplicación de técnicas de colaboración entre pares, el desarrollo y fortalecimiento de competencias, por lo cual, en este sistema se establecen transformaciones para dar solución e intervenir en materias propias de la profesionalidad docente, las necesidades de apoyo a su desempeño y su valoración (CPEIP, 2020b).

Este nuevo sistema aborda a los profesores desde el ingreso a los estudios de pedagogía a través del proceso de Formación Inicial Docente (FID), hasta el desarrollo de una carrera profesional (MINEDUC, s.f.), buscando ofrecer una trayectoria laboral atractiva que permita al cuerpo docente seguir entregando lo mejor de sí mismos en las diversas aulas del país, impactando positivamente en una educación integral y de calidad para los estudiantes, desde la mejora en la calidad de las prácticas docentes de profesores de nuestro país y la recuperación del estatus perdido de esta profesión (Vásquez, 2018).

El artículo 11 de la Ley 20.903 establece que "[...] los profesionales de la educación tienen derecho a una formación gratuita y pertinente para su desarrollo profesional y la mejora continua de sus saberes y competencias pedagógicas [...]" (Biblioteca del Congreso Nacional de Chile [BCN], 2016, p.3). Atendiendo a la Ley, los docentes de cada comunidad educativa deben ser responsables de su progreso y avance, considerando como objetivo principal, contribuir al mejoramiento continuo a través de la actualización y profundización de sus conocimientos disciplinarios y pedagógicos; la reflexión sobre su práctica profesional, enfatizando en la colaboración docente y profesional como una de las técnicas que permiten dicho desarrollo y el fortalecimiento de competencias.

Por su parte, los establecimientos educativos a través de sus equipos directivos y de gestión, deben propiciar el desarrollo de las competencias profesionales de su cuerpo docente, asegurando en su totalidad una formación en servicio de calidad. De esta forma, las instituciones podrán conformar comunidades de aprendizaje asentadas en un profesionalismo colectivo y donde “la colaboración y la identidad son aspectos fundamentales para mejorar el desempeño de los docentes, la generación de significados compartidos a nivel escolar y el aprendizaje del estudiantado” (Galaz y Toro, 2019 y Labra et al, 2005, como se citó en Cabezas et. al, 2021, p.143).

En este sentido, ya no son solo los directivos del establecimiento quienes proponen y generan líneas de acción y toman decisiones para promover el DPD, sino que se transita a un liderazgo distribuido, planteando nuevas formas de entender el desarrollo profesional (MINEDUC, 2021), potenciando que este último se desarrolle en los diversos establecimientos educativos a través de diferentes acciones emanadas desde los directivos, distribuyendo este rol a otros docentes, por ejemplo, a aquellos que:

> [...] pertenezcan a los tramos profesionales experto I y experto II u otros docentes de esos mismos tramos de desempeño profesional, si así lo determinan voluntariamente, pudiendo para estos mismos fines generar redes de apoyo con otros establecimientos educacionales y, o equipos docentes [...]” (BCN, 2016, p. 2).

Así, se permite a los docentes que forman parte de un establecimiento educativo reflexionar y enriquecer su práctica, desde la necesidad de mejorar las competencias y habilidades desarrolladas en el periodo de formación inicial, siendo capaces de idear y proponer políticas que contribuyan a un proceso continuo, contextualizado y pertinente de aprendizaje basado en las necesidades que cada institución manifiesta (Arias, 2020).

Sumado a lo anterior, los directivos de los establecimientos educativos deben estar siempre pendientes de identificar buenas prácticas en relación a la gestión pedagógica y de enseñanza-aprendizaje, tanto en las aulas como fuera del establecimiento, para difundirlas y analizarlas con sus docentes, promoviendo el mejoramiento de sus prácticas pedagógicas y los logros de aprendizaje de los estudiantes, “[...] de manera de construir capacidades internas que permitan alcanzar los objetivos y metas de mejoramiento del establecimiento y sostenerlas en el tiempo [...]” (MINEDUC, 2015, p.22).

Para lograr lo anterior, el MINEDUC pone a disposición de los equipos directivos el Plan Local de Formación, que corresponde a un "instrumento por medio del cual la escuela se organiza y define acciones para el mejoramiento continuo de sus docentes [...]" (MINEDUC, s.f., p.3), enmarcado en la Ley 20.903. Debe referir a las Bases Curriculares vigentes para cada nivel educativo y contextualizarse a nivel local a través de los sellos educativos que cada establecimiento define y manifiesta en su Proyecto Educativo Institucional (PEI).

Este instrumento abarca procesos en los cuales los docentes individuales y/o colectivamente preparan el trabajo en el aula, reflexionan sobre sus prácticas pedagógicas y además se evalúan y retroalimentan constantemente con el objetivo de generar mejoras. Todas las acciones que se consignan en el Plan Local son desplegadas en los diversos establecimientos educativos, movilizando recursos, con el fin de fortalecer los aprendizajes de los estudiantes que han sido priorizados por la comunidad educativa, por lo cual, permite que los numerosos establecimientos a nivel nacional que reciben subvención por parte del Estado definan, organicen y prioricen acciones para potenciar el continuo mejoramiento de sus cuerpos docentes (CPEIP, s.f.b).

Dado que los profesores pasan la mayor parte de su tiempo en el establecimiento educativo, este plan local debe enfatizar en que el desarrollo sea impulsado y potenciado en la propia comunidad educativa, a partir de la reflexión de prácticas pedagógicas y el intercambio de experiencias con sus pares.

Se considera un recurso de gestión, el cual forma parte del Plan de Mejoramiento Educativo (herramienta que tiene por lógica el perfeccionamiento continuo de los establecimientos y por ende, de los estudiantes que forman parte de la comunidad), por lo cual sigue su misma estructura, es decir, se organiza en dos fases. La primera se denomina Fase Estratégica, en la cual se analiza el PEI con foco en la Formación Local, se autoevalúa la institución educativa y se planifica estratégicamente a 4 años, centrado en el DPD. Luego de lo anterior, se da paso a la Fase Anual, donde se definen aprendizajes de los estudiantes a abordar y se identifican aspectos del desempeño docente a fortalecer, definiendo las acciones a realizar en el Plan Local.

De esta forma, su objetivo principal recae en mejorar las capacidades docentes, generando más y mejores oportunidades de perfeccionamiento tanto para ellos como para los estudiantes, en las áreas que el establecimiento educativo desee priorizar, por lo cual, disponer de un Plan Local, es una oportunidad para ampliar la visión del perfeccionamiento, más allá del aprendizaje individual del profesor, a través de cursos esporádicos dados por agentes externos como las Asistencias Técnicas Educativas (ATE), por lo cual el MINEDUC (s.f) recalca que a diferencia de esto último, sitúa al colegio como el centro de los procesos de mejora de las capacidades de sus docentes, en donde la reflexión y la acción conjunta son un aspecto fundamental para desarrollar e impulsar más y mejores oportunidades de aprendizaje para sus educandos.

Por lo anterior, al conocer las problemáticas o dificultades que presentan los profesores en un determinado establecimiento educativo en las asignaturas de profundización "Límites, Derivadas e Integrales" y "Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial", de acuerdo con lo que reporten de manera individual o grupal, nos permite pensar en el diseño de un acompañamiento de acuerdo con lo que el Sistema de Desarrollo Profesional Docente nos propone, en términos de un Plan Local de Formación.

Capítulo 3: Marco Metodológico

En este capítulo se da a conocer el enfoque y diseño de la investigación, el cual fue realizado en dos fases, la dimensión temporal, el contexto y los participantes, la conceptualización y operacionalización de categorías y las técnicas e instrumentos de recolección de datos utilizados.

Tipo de Investigación

La presente investigación es del tipo exploratorio- descriptiva dado que, de acuerdo con la revisión bibliográfica realizada hasta el momento, no podemos dar cuenta de estudios que reporten las dificultades presentadas por los docentes que imparten las nuevas asignaturas de profundización, en vista de que el tema de investigación es reciente (Narváez y Villegas, 2014). Así mismo, a través del análisis, se pretende caracterizar las dificultades manifestadas por los docentes al impartir las nuevas asignaturas de profundización de Límites, Derivadas e Integrales y Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial.

Enfoque

Dado que en la siguiente investigación se pretende diseñar y validar un plan de acompañamiento para docentes de matemática que aborde las dificultades presentadas al impartir las asignaturas de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas e Integrales propuestas para 3° y 4° medio, se utilizará un enfoque cualitativo para identificar y categorizar dichas dificultades en las dimensiones tecnológica, didáctica y disciplinar, a través de la experiencia profesional de profesores en ejercicio, para comprender y profundizar ciertos fenómenos desde la perspectiva de quienes participan, de tal manera de conocer su percepción de la realidad sobre un tema y/o problema de investigación poco estudiado, buscando especificar propiedades y características de este fenómeno y a su vez, recoger información relevante ya sea individual y/o colectivamente (Guerrero, 2016; Hernández, Fernández y Baptista, 2014a).

Diseño de la investigación

La presente investigación considera el estudio de caso múltiple como el diseño metodológico más adecuado, que nos permite establecer semejanzas y diferencias entre un número pertinente de participantes proporcionando las bases para dar respuesta al problema planteado en la investigación. En este sentido, se pretende realizar un estudio consistente en indagar en las dificultades que ha presentado el profesorado perteneciente a un mismo establecimiento educacional al impartir las nuevas asignaturas de profundización desde su ejercicio profesional, teniendo en cuenta su experiencia y visión personal, por lo que aborda un fenómeno actual dentro de un contexto de vida real (Simons, 2011; Rule y Mitchell, 2015; citado por Ponce, 2018; Yin, 1994; citado por Jiménez y Comet, 2016; Ponce, 2018; Ragin, 2011, citado por Ponce, 2018).

En este sentido, en la presente investigación se realizará un estudio en profundidad respecto a las dificultades que manifiesta el profesorado de matemática al impartir las asignaturas de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas e Integrales en 3° y 4° medio, considerando que desempeñan su labor en un establecimiento con dependencia municipal.

Sumado a lo anterior, la intención del estudio de caso múltiple es "[...] dar respuesta a cómo y por qué ocurren el o los hechos, focalizando a los fenómenos en estudio desde múltiples perspectivas, haciendo que la exploración sea en forma más profunda y el conocimiento obtenido sea más amplio." (Jiménez y Comet, 2016, p. 9)

El diseño de la presente investigación contempla dos fases:

- Fase 1: Estudio de caso múltiple, en donde en primera instancia se aplica un cuestionario de autorreporte y luego considera un grupo focal para levantar información con respecto a las dificultades presentadas por los docentes en ejercicio que imparten las asignaturas de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas e Integrales en la dimensión del contenido disciplinar, didáctica y tecnológica. Posteriormente se realiza el análisis de contenido de la información recogida.

- Fase 2: Diseño y validación de un plan de acompañamiento para los docentes de matemática que imparten las asignaturas de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas e Integrales, abordando las dificultades manifestadas por los docentes en ejercicio, considerando la dimensión en la que presentan mayores inconvenientes.

Los planes de acompañamiento docente diseñados para las asignaturas de profundización de Límites, Derivadas e Integrales y Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial fueron sometidos a un proceso de validación mediante el juicio de expertos, definiendo este último como "[…] una opinión informada de personas con trayectoria en el tema, que son reconocidas por otros como expertos cualificados en éste, y que pueden dar información, evidencia, juicios y valoraciones […]" (Escobar- Pérez y Cuervo- Martínez, 2008). Este juicio de expertos fue desarrollado por 5 docentes.

Para la validación del plan de la asignatura de Límites, Derivadas e Integrales se contó con el trabajo de dos docentes expertos en el área cuyas especialidades de postgrado corresponden a Magister en Matemática y Doctor en Ingeniería Matemática, respectivamente, quienes actualmente imparten las asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral en una institución de educación superior para estudiantes de Pedagogía en Matemática y otras carreras.

La validación del plan de acompañamiento para la asignatura de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, fue llevada a cabo por 3 expertos en el área, en donde uno de ellos es Estadístico y participa activamente en la formación inicial docente como académico impartiendo las asignaturas de Estadística e Inferencia Estadística en una institución de educación superior. Adicionalmente, los otros dos expertos poseen especialidades de postgrado: uno es Magíster en Estadística y otro es Magíster en Matemática con mención en Estadística, siendo este último, docente de educación media.

El proceso de validación consistió en la entrega de una pauta en donde los expertos debían analizar que la propuesta del plan de acompañamiento docente para cada asignatura de profundización mencionadas anteriormente en esta investigación fuera adecuada y pertinente para lo que fue diseñado, de acuerdo con los objetivos de esta investigación. Dicha pauta fue elaborada bajo un único formato definido por los investigadores, para poder garantizar que todos los expertos realicen una observación bajo los mismos criterios (Soriano, 2014), disponiendo además de una sección para observaciones y recomendaciones para cada sesión.

Dimensión temporal

La temporalidad de esta investigación es transversal, ya que se considerará la experiencia de cada uno de los profesores que componen dicho estudio en un momento determinado, pues "el elemento clave que define a un estudio transversal es la evaluación de un momento específico y determinado de tiempo, en contraposición a los estudios longitudinales que involucran el seguimiento en el tiempo" (Cvetkovic, Maguiña, Soto, Lama y Correa, 2021, p.180).

Además, se conocen los hechos y circunstancias como exploración inicial y posteriormente, el diseño se ajusta a la descripción de los hechos, los cuales son medidos y descritos para poder ser analizados e interpretados y así dar una posible respuesta a la problemática planteada (Tacillo, 2016).

Contexto y participantes

Para la presente investigación se considera al profesorado de matemática de la comuna de Los Ángeles que imparte las asignaturas de profundización de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas e Integrales; siendo los participantes del estudio 5 docentes de matemática que han impartido estas asignaturas durante los años 2020, 2021 y 2022 en un establecimiento educativo municipal perteneciente a dicha comuna.

En consecuencia de lo anterior, los participantes para esta investigación fueron elegidos de manera no probabilística por conveniencia, pues se seleccionaron profesores accesibles y con disposición a ser parte de dicha investigación (Otzen y Manterola, 2017). Así, los sujetos de estudio se reducen sólo al cuerpo docente que cumpla con el perfil deseado y sean adecuados para la investigación.

Conceptualización y operacionalización de categorías

Para el siguiente estudio se han definido tres categorías preestablecidas a partir de la búsqueda sistemática que se da cuenta en el marco teórico, en las cuales se clasificarán las dificultades presentadas por los docentes de matemática en ejercicio que imparten las asignaturas de profundización de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y/o Límites, Derivadas e Integrales:

- **Dimensión didáctica:** Dominio, por parte del profesor, en el proceso de enseñanza y aprendizaje, en donde es capaz de emplear un repertorio diverso de estrategias didácticas y teorías pedagógicas para hacer el contenido disciplinar accesible, comprensible y significativo para todos sus estudiantes.

- **Dimensión tecnológica**: Capacidad del docente para comprender cómo las herramientas digitales permiten apoyar los procesos de enseñanza-aprendizaje en la disciplina que imparte, promoviendo experiencias en donde se utilicen diversos recursos tecnológicos, de manera responsable, para posibilitar la aplicación y reelaboración de los conocimientos adquiridos y el logro de nuevos aprendizajes.

- **Dimensión del conocimiento disciplinar:** Dominio de los conocimientos, habilidades y actitudes que caracterizan la disciplina que enseña el/la docente en ejercicio.

La operacionalización de estas dimensiones se entiende desde los descriptores redactados en el marco teórico (Tabla 1: Descriptores de las dimensiones disciplinar, didáctica y tecnológica para profesores de matemática que imparten las asignaturas de profundización “Límites, Derivadas e Integrales” y “Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial”, pp. 36-40)

Técnica de recolección de datos

La recolección de datos para la fase 1 mencionada en el diseño de la investigación, se divide en dos etapas. En la primera, se aplicó un cuestionario de autorreporte con el objetivo de identificar la percepción de docentes acerca de su desempeño para impartir las asignaturas de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas e Integrales, en relación con las dimensiones disciplinar, didáctica y tecnológica, en un establecimiento municipal de la comuna de Los Ángeles, respondiendo a los siguientes objetivos específicos:

1. Identificar la percepción sobre las competencias disciplinares al impartir las asignaturas de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial o Límites, Derivadas e Integrales.

2. Identificar la percepción sobre las competencias didácticas al impartir las asignaturas de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial o Límites, Derivadas e Integrales.

3. Identificar la percepción sobre las competencias tecnológicas al impartir las asignaturas de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial o Límites, Derivadas e Integrales.

En la segunda etapa, se aplicó un grupo focal, el cual corresponde a una técnica de recolección de datos de tipo cualitativo, en la cual se utiliza un grupo de discusión de entre cuatro a doce integrantes (Krueger, 1996; como se citó en Buss, López, Rutz, Coelho, Oliveira y Mikla, 2013).

Así, y de acuerdo con las posibilidades de participación, se realizó un grupo focal a 4 profesores, los cuales previamente respondieron el cuestionario de autorreporte, permitiendo profundizar en las dimensiones que evidenciaron mayores dificultades.

El objetivo general de dicho grupo focal es explorar las dificultades didácticas, tecnológicas y de conocimiento disciplinar que reconocen profesores al impartir las asignaturas de profundización Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas e Integrales, para el diseño y validación de un plan de acompañamiento docente. Específicamente:

1. Explorar la percepción sobre las asignaturas de profundización Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas e Integrales desde la perspectiva de docentes que las imparten.

2. Indagar en las competencias didácticas que reconoce el profesor en sus prácticas pedagógicas al impartir la asignatura de profundización Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial o Límites, Derivadas e Integrales.

3. Indagar en las competencias tecnológicas que reconoce el profesor en sus prácticas pedagógicas al impartir la asignatura de profundización Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial o Límites, Derivadas e Integrales.

4. Indagar en las competencias disciplinares que reconoce el profesor en sus prácticas pedagógicas al impartir la asignatura de profundización Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial o Límites, Derivadas e Integrales.

Instrumentos

<u>Escala Likert en un cuestionario de autorreporte de respuesta cerrada</u>

Se realizaron dos cuestionarios de autorreporte de respuestas cerradas, uno para los profesores que imparten la asignatura de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y otro para Límites, Derivadas e Integrales. Cada uno posee los descriptores especificados en la tabla 01 del marco teórico, a los cuales se les modificó la redacción en primera persona, estando agrupados en las tres dimensiones definidas. Dichos cuestionarios se construyeron a partir de la revisión sistemática bibliográfica realizada, considerando los Estándares de la Profesión Docente: Carrera de Pedagogía en Matemática Educación Media (2021), junto a diversos documentos mencionados.

Se utiliza una escala de Likert para dar respuesta en cada uno de estos instrumentos, la cual consta de cinco opciones, en donde:

1: totalmente en desacuerdo
2: en desacuerdo
3: ni de acuerdo ni en desacuerdo
4: en acuerdo
5: totalmente de acuerdo

Este tipo de escala ordinal presenta alternativas de manera secuencial y jerárquica, generalmente a partir de cuatro niveles, siendo comunes las de cinco o siete; además, es un instrumento que se utiliza hace muchos años porque se considera bastante útil para el desarrollo de investigaciones (Meneses, s.f; Morales, Sequeira, Prenda y Zúñiga, 2016).

Guion de grupo focal

El grupo focal está estructurado por un guion, el cual es utilizado como pauta por parte del moderador para guiar la discusión y así apuntar al objetivo de investigación propuesto a través de los objetivos del propio grupo focal descritos en la sección anterior. No obstante, no se inhibió la aparición de opiniones divergentes que enriquezcan la discusión, permitiendo un cierto grado de flexibilidad que no comprometiera el análisis comparativo de las respuestas (Buss et al, 2013).

El guion realizado para este grupo focal fue validado por expertos, quienes son docentes de la Universidad de Concepción, campus Los Ángeles, los cuales poseen títulos de postgrado, cuyas áreas de desempeño e investigación son matemática, estadística, didáctica de la matemática y enseñanza de la matemática.

Capítulo 4: Resultados

En este capítulo se dan a conocer los principales resultados obtenidos acerca de las dificultades manifestadas por los docentes que imparten las asignaturas de profundización de Límites, Derivadas e Integrales y Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, mediante la aplicación de un cuestionario de autorreporte y un grupo focal. Se presentan por fase y asignatura correspondiente, incluyendo su análisis y discusión.

Fase 1: Cuestionario de autorreporte

Los resultados del cuestionario de autorreporte surgen de una escala de Likert, la cual consta de cinco opciones de forma jerarquizada en donde:

1: totalmente en desacuerdo
2: bastante en desacuerdo
3: ni en desacuerdo ni en acuerdo
4: bastante de acuerdo
5: totalmente de acuerdo.

De acuerdo con esto, el criterio utilizado para decidir si los docentes presentaban dificultades en las diversas dimensiones, correspondió a considerar aquellos descriptores en el que la mayor parte de los resultados del cuestionario se encontraban entre 1 y 3.

En el siguiente apartado se presentará los datos recopilados mediante la aplicación del cuestionario de autorreporte en profesores descritos en fase 1 del diseño metodológico:

<u>Límite, Derivadas e Integrales</u>

A continuación, se dan a conocer las dificultades manifestadas, en el cuestionario de autorreporte, por los docentes en las dimensiones del conocimiento disciplinar, didáctica y tecnológica, las cuales fueron categorizadas en los descriptores mencionados en la tabla 01 del marco metodológico.

Dificultades reportadas

Dimensión	Dificultades
Conocimiento Disciplinar	1. "Soy capaz de estudiar la convergencia de series numéricas y series de potencias utilizando métodos del cociente, raíz y de comparación, modelando diversos fenómenos con ellas, en particular, el cálculo de interés". Solamente un participante indica estar de acuerdo con lo anterior.
Didáctica	1. "Soy capaz de planificar proyectos interdisciplinarios, contemplando distintos niveles de complejidad, que permita a todos mis estudiantes involucrarse activamente para conectar la derivada e integral con nociones de física". Solo una persona declara estar de acuerdo con esta afirmación. 2. "Soy capaz de utilizar diversas representaciones para que todos mis estudiantes logren superar las dificultades más frecuentes que tienen con las nociones de convergencia de sucesiones y límite de funciones". Ningún participante declara estar de acuerdo con esta afirmación. 3. "Soy capaz de gestionar actividades de resolución colaborativa de problemas matemáticos asociados a la aplicación de los teoremas del valor intermedio, valorando la diversidad de estrategias y respuestas de mis estudiantes, fomentando la discusión y comunicación entre ellos". Ningún participante declara estar de acuerdo con esta afirmación. 4. "Soy capaz de implementar estrategias de evaluación formativa en actividades de modelación de fenómenos del ámbito de Economía, reconociendo la diversidad de contextos de mis estudiantes y cómo ésta aporta al proceso de modelación". Ninguna persona declara estar de acuerdo con esta afirmación.
Tecnológica	1. "Soy capaz de promover el trabajo colaborativo en línea, considerando el contexto y los recursos disponibles, entre los estudiantes para la discusión y resolución de tareas enfocadas a Cálculo Diferencial e Integral, usando herramientas electrónicas de productividad y entornos virtuales de aprendizaje, protegiendo la información personal y la de los demás". Solamente un participante declara estar de acuerdo con esta afirmación. 2. "Soy capaz de utilizar TIC para retroalimentar los resultados de las evaluaciones en Límites, derivadas e integrales, para que los estudiantes ajusten, propongan y acuerden mejoras para sus propios procesos de aprendizaje". Solamente una persona declara estar de acuerdo con esta afirmación. 3. "Soy capaz de emplear herramientas digitales para realizar diversas formas de representación, argumentando acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada". 4. "Soy capaz de utilizar herramientas tecnológicas digitales para demostrar la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria". Todas las personas declaran no estar de acuerdo ni en desacuerdo con esta afirmación. 5. "Soy capaz de utilizar software matemático para modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio". Solamente una persona declara estar de acuerdo con esta afirmación.

Tabla 2: Dificultades manifestadas por los docentes en la asignatura de Límites, Derivadas e Integrales en el cuestionario de autorreporte.

Fuente: Elaboración Propia.

Análisis y discusión

En siglos anteriores, la enseñanza del cálculo diferencial e integral se desarrollaban en una secuencia específica, pero el orden actual en el cual se desarrolla dicha enseñanza, difiere bastante al orden original, lo cual genera incoherencia en los tópicos (Cuevas y Pluvinage, 2009, como se citó en Fonseca y Alfaro, 2018). En este sentido, se hace hincapié en que el acercamiento al cálculo no debe ser desde una estructura formal de los números reales, ni del concepto de función. Es por ello que se recomienda usar ideas provenientes de la geometría o del estudio del movimiento.

Por otro lado, Díaz (2009) menciona que en la enseñanza del cálculo diferencial e integral existe una tendencia a enfocarse en el desarrollo de habilidades en los aspectos mecánicos, así como en la memorización de algoritmos, lo cual no contribuye a la comprensión de las ideas fundamentales de este, dejando de lado el significado y la interpretación de los conceptos.

Lo anterior, deja entrever una problemática presente en los docentes que imparten la asignatura, pues el profesorado puede emplear exitosamente las ideas del cálculo; sin embargo, entenderlas, manejarlas, interpretarlas y enseñarlas son procesos diferentes y complejos (Fonseca y Alfaro, 2018).

Así, algunas de las dificultades que pueden presentarse en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en general corresponden a: la complejidad de los objetos matemáticos, la incapacidad de seguir un argumento lógico, dificultades asociadas a los procesos de enseñanza (institución en donde se lleva a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje, el currículo de matemática a desarrollar y los métodos de enseñanza empleados por el personal docente de matemática) (Di Blasi, 2003, como se citó en Abraté, Pochulu, y Vargas, 2006), criterios de convergencia para series numéricas (criterio de comparación directa, criterio de comparación mediante el límite, criterio del cociente, criterio de la raíz, convergencia absoluta y condicional) y series de potencias (demostración del teorema de la existencia del radio de convergencia, la representación de funciones por series de potencia, la fórmula de Taylor con resto de Lagrange y las aplicaciones a cálculos aproximados de la fórmula de Taylor) (Fonseca y Alfaro, 2018).

En cuanto a la dimensión didáctica, según la literatura revisada se puede constatar que actualmente, en la Sociedad del Siglo XXI, una de las problemáticas presentes en los docentes de matemática en ejercicio corresponde a la modificación de los métodos de enseñanza y aprendizaje a través del uso eficiente de las tecnologías de la información y comunicación (Cárdenas y Oyanedel, 2016; Laine y Nygren, 2016; Yunga-Godoy, Loaiza, Ramón-Jaramillo y Puertas, 2016, como se citó en Salas-Rueda, 2018). Adicionalmente, la forma en que el profesor aborda los diversos temas influye en el fracaso de los alumnos en la resolución de problemas, ya que en algunos casos confunden sus capacidades personales con las de sus alumnos, por lo cual no hacen explícitos sus razonamientos ni los detalles de la resolución ante la clase (Bedoya y Ospina, 2014).

Una de las cuestiones que se ha podido constatar desde la literatura sobre el análisis de las prácticas docentes, es la dificultad de realizar innovaciones en la evaluación de los aprendizajes, mucho más si se pretenden poner en marcha propuestas de evaluación formativa u orientada al aprendizaje (Álvarez, 2009; Walker, 2013, como se citó en Canabal y Margalef, 2017). En este sentido, existen prácticas que otorgan más atención a las calificaciones y la categorización de los estudiantes en niveles de desempeños, que a la propia retroalimentación sobre la forma de producir mejoras, prevaleciendo una falta de conciencia sobre la necesidades de aprendizaje de los alumnos; en donde las representaciones juegan un rol fundamental para apoyar la comprensión de los estudiantes de los conceptos y relaciones matemáticas; en comunicar acercamientos, argumentos e ideas matemáticas a uno mismo y a los demás; en reconocer conexiones entre conceptos matemáticos relacionados y en aplicar las matemáticas a situaciones de problemas realísticos a través de la modelización (García y Rodríguez, 2009), dejando entrever que por tradición las matemáticas escolares se han desvinculado de diversas áreas, en donde los docentes se inclinan por un fuerte énfasis en los aspectos formales y procedimentales de dicha asignatura, generando una valoración deficiente por parte de los educandos hacia la utilidad de la matemática en otras disciplinas. (Harley, 2007, como se citó en Martínez, 2013; Pávez, 2008)

En cuanto a la dimensión tecnológica las dificultades presentadas respecto al uso de las herramientas digitales se condice con la realidad de muchos educadores que no alcanzan las competencias necesarias en el uso de estas, debido a varias razones, entre las que se encuentran el hecho de que las políticas institucionales y los lineamientos curriculares no se transforman a la par con estos nuevos desafíos, falta de conocimiento, falta de capacitación en su uso o porque son reacios al cambio y a la incorporación de nuevas herramientas en el aula (Castrillón y Álvarez, 2015, como se citó en Grisales, 2018; Gutiérrez, Ariza y Jaramillo, 2014).

Por lo anterior, si el docente no tiene las competencias necesarias para el uso e implementación de todas las herramientas, podemos decir que el trabajo colaborativo en ambientes virtuales podría no tener el efecto esperado en el estudiantado o simplemente no llevarse a cabo. En este sentido, Pesantez-Arcos, García-Herrera, Ochoa-Encalada y Erazo-Álvarez (2020) afirman que el sistema educativo y sus mentores están muy acostumbrados a trabajar con un método de enseñanza establecido y toda la extensa oferta de sitios web, herramientas virtuales y ambientes de trabajo que ofrece actualmente la tecnología puede llegar a confundir a los docentes, por lo que la falta de preparación y capacitación ha llevado a la experimentación e improvisación debido al corto tiempo de implementación de las múltiples herramientas tecnológicas dentro de la educación.

En cuanto a la retroalimentación utilizando TIC, se menciona que los docentes desconocen la potencialidad de estas para la entrega de retroalimentación inmediata y personalizada, lo cual también puede verse obstaculizado por la falta de tiempo de los profesores y la presión constante de rendir cuentas (Farrell y Rushby, 2016, Joint Information Systems Committee [JISC], 2014, Redecker y Johannessen, 2013; como se citó en Moreno y Rochera, 2022).

Por otra parte, Guerrero y Hernández (2020) y Pineda, Hernández y Avendaño (2020), respecto al cálculo diferencial e integral, afirman que hay muchos docentes que actualmente lo enseñan, pero presentaron debilidades en el proceso de aprendizaje de este cuando se encontraban en su proceso de formación inicial, lo cual posteriormente repercute en sus prácticas pedagógicas, sumando a esto la dificultad que poseen en el uso de herramientas tecnológicas para sus métodos de enseñanza de conceptos que son complejos de comprender para los estudiantes.

Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial

A continuación, se dan a conocer las dificultades manifestadas, en el cuestionario de autorreporte, por los docentes en las dimensiones del conocimiento disciplinar, didáctica y tecnológica, las cuales fueron categorizadas en los descriptores mencionados en la tabla 01 del marco metodológico.

Dificultades reportadas

Dimensión	**Dificultades**
Conocimiento Disciplinar	1. "Soy capaz de comprender los elementos de un proceso de inferencia estadística, entendiendo que este utiliza datos de muestras aleatorias para inferir sobre la población de que provienen, y comprende el rol de la distribución muestral de los estadísticos al cuantificar la incertidumbre de las inferencias". Solo una persona declara estar de acuerdo con esta afirmación. 2. "Soy capaz de explorar y describir el comportamiento de datos uni y bivariados, usando estadísticos, representaciones gráficas y tabulares, para el desarrollo de habilidades de análisis exploratorio de datos". Todos los participantes declaran no estar ni de acuerdo ni en desacuerdo con esta afirmación. 3. "Soy capaz de definir variables aleatorias y utilizarlas para modelar fenómenos aleatorios, describiendo el comportamiento de la variable a través de funciones de probabilidad o densidad, como la Binomial y la Normal, evaluando la pertinencia del modelo en situaciones de incertidumbre de índole social, cultural o científica". Solo una persona declara estar de acuerdo con esta afirmación. 4. "Soy capaz de comprender y aplicar la Ley de los Grandes Números y el Teorema Central del Límite en la resolución de problemas, relacionando las características teóricas y/o experimentales de fenómenos contextualizados". Solo una persona declara estar de acuerdo con esta afirmación.
Didáctica	1. "Soy capaz de planificar unidades didácticas que promuevan la resolución de problemas estadísticos con uso de herramientas digitales, en el marco de situaciones relevantes de la vida social, cultural y científica, para fomentar el ejercicio de una ciudadanía informada y crítica que toma decisiones basadas en evidencia". Ninguna persona declara estar de acuerdo con esta afirmación. 2. "Soy capaz de diseñar instancias de evaluación formativa en situaciones que involucren inferencia estadística, considerando el nivel de confianza, para obtener evidencias de aprendizaje que permitan adecuar la enseñanza y retroalimentar efectivamente a estudiantes". Todos los participantes declaran no estar de acuerdo ni en desacuerdo con esta afirmación.
Tecnológica	1. "Soy capaz de promover el trabajo colaborativo en línea, considerando el contexto y los recursos disponibles, entre los estudiantes para la discusión y resolución de tareas enfocadas a Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, usando herramientas electrónicas de productividad y entornos virtuales de aprendizaje protegiendo la información personal y la de los demás". Solo una persona declara estar de acuerdo con esta afirmación. 2. "Soy capaz de promover estrategias de búsqueda, selección y almacenamiento de recursos de información disponibles en sistemas electrónicos, desarrollando experiencias para el aprendizaje en Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial". Solo una persona declara estar de acuerdo con esta afirmación. 3. "Soy capaz de utilizar herramientas digitales para construir histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de cajón y nube de puntos, a partir del estudio de características específicas de una población o la extracción de datos presentes en situaciones dadas". Solo una persona declara estar de acuerdo con esta afirmación. 4. "Soy capaz de utilizar herramientas digitales para modelar fenómenos o situaciones cotidianas, en el ámbito científico y social que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal". Todos los participantes declaran no estar de acuerdo ni en desacuerdo con esta afirmación.

	5. “Soy capaz de utilizar herramientas digitales, para realizar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis”. Todos los participantes declaran no estar de acuerdo ni en desacuerdo con esta afirmación.

Tabla 3: Dificultades manifestadas por los docentes en la asignatura de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial en el cuestionario de autorreporte.

Fuente: Elaboración Propia.

Análisis y discusión

Respecto a Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, los docentes presentan una gran complejidad en diversos conceptos, dado que esta área demanda de ellos competencias matemáticas asociadas al desarrollo de un pensamiento estocástico, el que difiere del razonamiento de la matemática, la cual es una ciencia exacta que no da pie a la incertidumbre necesaria en probabilidad, y se suele presentar de forma muy determinista, por lo que la formación que reciben los docentes de matemática centrada en el método axiomático deductivo, puede convertirse en un obstáculo para comprender la aleatoriedad y desarrollar el pensamiento estocástico (Sanabria, 2020; Secretaría de Educación Pública de México [SEP], 2019).

Por otro lado, la estadística se considera una disciplina científica autónoma, con sus métodos propios de razonamiento, lo que tiene como consecuencia que la relación entre matemática y estadística no sea biunívoca, ya que esta última toma conceptos matemáticos para el desarrollo de sus métodos, pero la matemática no usa conceptos estadísticos (Moore, 1991, Cabriá, 1994; como se citó en Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013). Asimismo, la estadística como ciencia, atraviesa un periodo de notable expansión, siendo cada vez más numerosos los procedimientos disponibles, por lo que se aleja cada vez más de la matemática pura y se convierte en una "ciencia de los datos", lo que implica una gran dificultad al momento de enseñar un tema en continuo cambio y crecimiento (Batanero, 2000).

Además, la estadística también es una disciplina relativamente nueva para gran parte de los docentes en ejercicio, los cuales generalmente no han tenido una formación adecuada en este tema en el marco de sus estudios universitarios iniciales, en donde incluso existe cierto desconocimiento por parte de algunos profesores sobre el objeto de estudio de la Estadística y la Probabilidad; como tampoco han contado con el desarrollo de herramientas metodológicas ni con cursos enfocados a la didáctica de la estadística, en los cuales se aborden los lineamientos curriculares recientes (Batanero et al, 2013; Osorio, Bimberto y Uribe, 2011).

Algunos docentes nunca han visto formalmente estos contenidos en su formación inicial, o los han recibido de forma deficiente, lo cual no los prepara para poder enseñarlos, pero se han visto obligados a abordarlos en clases, al tener que cumplir con el currículum (Tamayo, 2009, como se citó en Osorio et. al, 2011). Los bajos desempeños de profesores y sus alumnos confirman lo señalado en diversos estudios acerca de las dificultades de adultos y de niños respecto a la estadística (Estrella, Olfos y Mena-Lorca, 2015). En consecuencia, los profesores no son lo suficientemente competentes, ni se sienten bien preparados para abordar esta temática en el aula, lo que plantea una problemática vigente con la formación estocástica de estos profesionales (Batanero, Burrill y Reading, 2011; Groth y Meletiou-Mavrotheris, 2018; como se citó en Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020).

En el caso específico de Chile, los resultados deficientes de los profesores en ejercicio se explican por su falta de estudios y prácticas de enseñanza referentes a la Estadística (Estrella, Olfos y Mena-Lorca, 2015). El ajuste curricular del año 2009 introduce la estadística y la probabilidad en el currículo chileno, de acuerdo a una tendencia observada en variados curriculum internacionales, tales como Western Australia y New South Wales de Australia, y British Columbia de Canadá; en conjunto con la literatura internacional relacionada a Educación Matemática y las pruebas de mediciones internacionales como TIMSS y PISA, donde en estas últimas, se evidencia una desconexión entre el marco curricular nacional y los internacionales a través de sus resultados (MINEDUC, 2009).

En consecuencia de lo anterior, Chile, siguiendo el camino de países como España y Estados Unidos, se ha unido a la incorporación de la enseñanza estocástica, promoviendo su aprendizaje desde los niveles iniciales, así como toda la trayectoria educativa formal (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020).

Este ajuste curricular implica nuevas exigencias y desafíos, donde los docentes de matemática aparte de conocer las estocásticas escolares del nivel educativo donde ejercen su labor, también deben poder articular estos conocimientos con los niveles posteriores, es decir, manejar el conocimiento del contenido (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017).

Del Pino y Estrella (2012), señalan estudios que muestran que los profesores tienen nociones muy limitadas, y a menudo erróneas, de ideas básicas como muestreo y probabilidad. Asimismo, Sanoja y Ortiz (2013) señalan diversos reportes de investigación centrados en el conocimiento estadístico de profesores en ejercicio y en formación (Cabral y Vieira, 2011, Jacobbe, 2007, Estrada, Batanero y Fortuny, 2003, Batanero, Díaz y Navas, 1997 y Marques, Guimarães y Gitirana, 2011), los cuales indican que poseen dificultades en los conceptos de variables y su asociación con las representaciones gráficas, confundiendo histogramas con gráficos de barras; conocimientos que implican la interpretación gráfica, cometen errores relacionados con la simetría, valores atípicos y frecuencias acumuladas; tampoco diferencian entre la media y la mediana. Adicionalmente, se señala que la probabilidad también es un área complicada y entre los conceptos de mayor dificultad sobresale la aplicación de la regla del producto de probabilidades en contexto de reemplazo, la regla de la suma de probabilidades en eventos no mutuamente excluyentes y la interpretación de probabilidades desde un enfoque frecuencial, observando un poco uso y dominio de representaciones como diagramas de árbol y diagramas de Venn.

Respecto a la dimensión didáctica, es posible que algunos docentes no sepan cómo utilizar la resolución de problemas para que sus estudiantes tengan un aprendizaje significativo, lo que deja entrever una dificultad en la planificación de manera adecuada de unidades didácticas (Bedoya y Ospina, 2014).

Por otra parte, la evaluación de los aprendizajes es uno de los problemas más complejos de la práctica pedagógica, siendo un tema controversial y muchas veces incomprendido por los docentes, ya sea por falta de comprensión de conceptos claves, por lo tedioso que es o por falta de interés (Martínez, 2013); asimismo, los profesores creen que dar una retroalimentación de buena calidad a todos sus alumnos implica una gran carga laboral y sería inevitable verse abrumados, por lo que adoptar prácticas de evaluación formativa, por muy deseable que sea, les resulta imposible, aun cuando se ha evidenciado que la retroalimentación potencia el aprendizaje , ya que ofrece a los estudiantes una orientación específica sobre sus fortalezas y debilidades, por lo que se hace necesario darles los medios y oportunidades para mejorar (Bizarro, Sucari y Quispe- Coaquira, 2019).

Respecto a la dimensión tecnológica, similar a lo que ocurre en la asignatura de Límites, Derivadas e Integrales, las dificultades presentadas por los docentes concuerdan con la realidad de diversos profesores. Particularmente, en Latinoamérica se plantea que las TIC no han sido suficientemente priorizadas, existiendo una subutilización de estas en el aula, ya que ni los docentes ni los estudiantes poseen una preparación formal para su uso, por lo que los profesores no poseen la capacidad de utilizarlas correctamente para fines pedagógicos (Swing, 2015, Arancibia, 2020; como se citó en por Ferrada-Bustamante, González-Oro, Ibarra-Caroca, Ried-Donaire, Vergara-Correa y Castillo-Retamal, 2021). Asimismo, Fernández, Riveros y Montiel (2017) señalan que los docentes no han asumido su responsabilidad ante los cambios tecnológicos con los que deben contribuir para el proceso de la enseñanza de la matemática, la cual es una disciplina que presenta diversos problemas en su aprendizaje.

Se ha evidenciado que los docentes manifiestan una falta de actitud, preparación y capacitación en la materia tecnopedagógica, además de un escaso dominio generalizado en las distintas áreas de la competencia digital (Morán, Cardoso, Cerecedo y Ortíz, 2015; como se citó en López, Pozo, Morales y López, 2019), por lo que no se encuentra preparado ni formado para efectuar sus funciones, de manera efectiva, a través de las nuevas herramientas tecnológicas. Al no subsanarse lo anterior, la colaboración entre colegas y la comunicación entre los profesores y alumnos en nuevos escenarios de carácter virtual se ven mermados, incidiendo negativamente (García-Valcárcel, Hernández y Recamán, 2012). Por esto, para promover el trabajo colaborativo en línea, hay que considerar que "no es suficiente el equipamiento tecnológico, sino mejorar los diversos procesos de aprendizaje para generar interés de los estudiantes" (Melo et al., 2017; Rodríguez y Gómez, 2017, como se citó en Laurente-Cárdena, Rengifo-Lozano, Asmat-Vega y Neyra-Huamani, 2020), por lo que se hace necesario que los docentes se actualicen en tecnopedagogía sobre entornos virtuales, estableciendo un aprendizaje que fomente el uso funcional, ético y crítico de las nuevas tecnologías (Laurente-Cárdena et al, 2020).

Si bien la literatura revisada da cuenta de dificultades en el uso de las TIC como recurso de enseñanza para el aprendizaje, como se evidencia en los párrafos anteriores, no se logró encontrar dificultades específicas del uso de herramientas tecnológicas para la enseñanza y aprendizaje de la estadística y probabilidades. Por tanto, esta revisión sólo ha podido dar cuenta de aspectos didácticos y disciplinares.

Fase 1: Grupo Focal

A continuación, se presenta el análisis del grupo focal realizado, en donde se categorizaron las dificultades de los profesores que imparten ambas asignaturas de profundización mencionadas anteriormente.

Para dicho análisis, se utilizó la estructura presentada en el siguiente esquema:

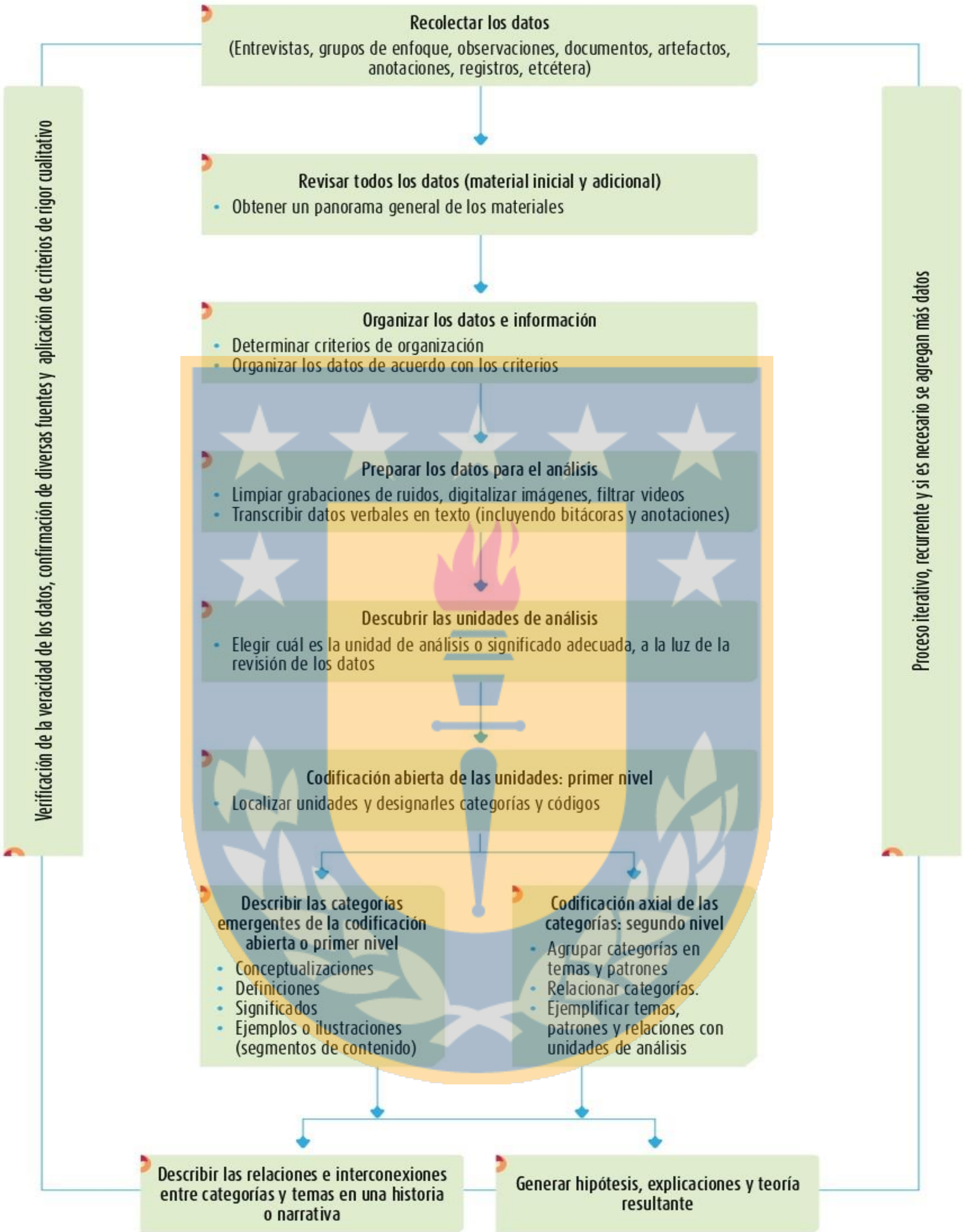


Figura 2: Proceso del análisis cualitativo para generar categorías o temas.

Adaptado de: Metodología de la Investigación (2014b)

Límites, Derivadas e Integrales

A continuación, se dan a conocer las dificultades manifestadas, en el grupo focal, por los docentes en las dimensiones del conocimiento disciplinar, didáctica y tecnológica, profundizando en la información obtenida en el cuestionario de autorreporte.

Dificultades reportadas

Dimensiones	Categorías	Citas
Conocimiento Disciplinar	Afinidad por la asignatura de profundización	1. "No, yo creo que estoy mejor preparado en conocimiento disciplinar." 2. "[...] creo que Profesor 1 estaba bastante fresco en todo lo que era el conocimiento de la parte del álgebra, de funciones…" 3. "En límite, yo creo que sí, no sé, siento que, bueno, en mi formación en la universidad me destaqué en, en esta asignatura de cálculo, eh, por eso decía denante que siento que mi fuerte es el conocimiento disciplinar." 4. "[...] yo creo que límite, también, pero más que nada por el conocimiento que tengo del límite [...]" 5. "[...] yo creo que volvería a dictar límite, y en segundo lugar, estadística [...]"
	Metodología utilizada en la formación universitaria	1. "Yo creo que sí, bastante. Porque volvemos a un estilo más clásico en la universidad cuando yo lo ví, de conocimiento, teorema, aplicación. Pero acá te dan vuelta [...]" (*Respuesta a la pregunta: ¿Sienten que varía un poco lo que tuvieron con respecto a la formación teórica en cuanto a lo que ahora implementamos en los electivos o en las asignaturas de profundización?)*
	Desconocimiento de las aplicaciones prácticas de la asignatura	1. "Porque cambia el enfoque, no es solo manejar un contenido en específico, tal definición, tal teorema …" 2. "Es saber dónde aplicarlo." 3. "Es que eso es como en todos." (*Respuesta a la pregunta: ¿Sienten que varía un poco lo que tuvieron con respecto a la formación teórica en cuanto a lo que ahora implementamos en los electivos o en las asignaturas de profundización?*) 4. "Me refiero en cuanto a lo que es cálculo, integrales en profundidad, aplicaciones de las integrales, aplicaciones de las derivadas […]"
	Deficiencia en la interpretación de resultados en Límites, Derivadas e Integrales	1. "[...] te dicen no es necesario tal vez que el estudiante se aprenda todas las formas de derivar que existen, sino que tú le puedes facilitar una calculadora cierto, que te calcula la derivada, pero él tiene que saber dónde se aplica esto y cómo se interpreta. Entonces no, nosotros en la universidad yo perdí quizás un mes completo en aprender a derivar con cada una de las reglas, cómo demostrarlas y todo el tema, pero acá no es eso, ya se da por hecho, él lo puede calcular con una herramienta pero ya … ¿dónde lo aplicamos, qué sacamos de esto, dónde está la interpretación?"
	Dificultad por dictar Límites, Derivadas e Integrales	1. "Hablo de todas las asignaturas … hablo por límites, por estadística, pensamiento fue un desafío completo porque ahí desde la primera me dediqué el verano completo a estudiar, al sacar una aplicación y aprender cómo se hacía." *(Haciendo referencia a la dificultad para dictar las últimas dos unidades del programa de estudio)*

Didáctica	Utilización de los programas de estudios	1. “[...] nos guiamos por el programa [...]” 2. “[...] nos hemos guiado fundamentalmente por los programas [...]”
	Habilidades del Siglo XXI: Creatividad e Innovación	1. “[...] trabajamos también con fractales, yo creo que ahí ellos afinaron harto la creatividad.”
	Adaptación del contenido a la diversidad de estudiantes	1. “De hecho, tercero y cuarto medio no habían visto funciones, no entendían lo que eran las funciones, entonces la primera unidad antes de ver lo que es límites ciertos… emm… que fue a lo último que llegamos, límites, sucesiones y al final límites de funciones…” 2. “Así que nuestro fuerte siempre fue nivelar toda la parte de funciones y álgebra que era una deficiencia que nosotros notábamos en los estudiantes.”
	Falta de cobertura curricular	1. “Nunca hemos alcanzado a ver más allá de la primera unidad completa, o sea, la primera unidad la hemos visto completa pero no hemos llegado la segunda que tiene que ver con derivadas.”
Tecnológica	Dominio y utilización de recursos y/o herramientas tecnológicas	1. [...] trabajamos con tablets [...] descargábamos aplicaciones como el GeoGebra, calculadoras gráficas más que todo, y trabajamos en clases, o sea, aprovechando que hay internet, no muy bueno, pero servía como para graficar, y la verdad es que sí, es súper útil sobre todo para los chiquillos, en realidad estar dibujando o gastando tiempo dibujando una gráfica en la pizarra que no queda bien hecha, es mucho más práctico usar los recursos tecnológicos. 2. “[...] en límites, nos apoyábamos harto en lo que es GeoGebra, sobre todo en la parte de funciones. Después, hay una aplicación, no me acuerdo bien cuál es el nombre, pero que calcula sucesiones, entonces esa también la utilizábamos y la mostrábamos.” 3. “[...] conozco herramientas tecnológicas con las que la puedo trabajar, ya sea GeoGebra” 4. “Donde nos unimos fue cuando hicieron fractales, nosotros hicimos en Scratch fractales.”
	Habilidades del siglo XXI: Herramientas para trabajar	1. “Lo otro es que yo los mandaba harto a hacer como tareas de investigación, donde tenían que buscar información, tenían que ver que la información fuera verídica…” 2. “Les pedía la bibliografía, no les pedía obviamente que justificaran con norma APA ni nada, pero sí les pedía la bibliografía y hacía hincapié en que yo iba a revisar frase por frase, que no estuviera copiada y pegada [...]”

Tabla 4: Dificultades manifestadas en las dimensiones del conocimiento disciplinar, didáctica y tecnológica por los docentes participantes del grupo focal en la asignatura de Límites, Derivadas e Integrales.

Fuente: Elaboración propia.

Análisis y discusión

Según la información recopilada en el grupo focal se evidencia que un factor que potencia la afinidad de los docentes por la asignatura de profundización impartida surge desde la impresión colectiva de que poseen una formación universitaria profunda en cuanto al conocimiento disciplinar de Límites, Derivadas e Integrales. Esto se debe a que principalmente la formación universitaria mantiene el foco en “el saber” teórico, mientras que la formación práctica profesional, en donde se ponen en juego dichos aprendizajes, es menos relevante (López, Benedito y León, 2016).

Asimismo, los docentes que participaron en el grupo focal dan cuenta de esto, al indicar que la metodología utilizada en la formación universitaria mantiene un enfoque mayoritariamente teórico, lo cual implica que sea todo un desafío impartir las asignaturas de profundización, pues los programas de estudio abordan los contenidos desde una perspectiva enfocada a la aplicación en diversos contextos, y en donde, en algunas oportunidades se abordan tópicos que los profesores desconocen. En este aspecto, Halbaut, García y Aróztegui (2015) consideran relevante que para potenciar la formación inicial docente se presenten metodologías basadas en la resolución de problemas, el aprendizaje basado en proyectos, trabajo cooperativo y/o colaborativo, además del estudio de casos, ya que no sólo estrechan la conexión con la realidad profesional, sino que ayudan al desarrollo de competencias docentes (como lo citaron López, Benedito, León, 2016).

Dicha secuencia tan estructurada en la que se trasmiten los contenidos desde docentes de enseñanza media a estudiantes, según Fonseca y Alfaro (2018), se genera en la Formación Inicial Docente, pues la poca comprensión de parte de los profesores en formación acerca del lenguaje matemático, la deficiencia en el manejo de los conocimientos previos, la falta de habilidades matemáticas como observar patrones, conjeturar, generalizar e inferir; y la falta de abstracción y visualización repercute en la comprensión de los problemas de optimización y de razones de cambio relacionadas, series y sucesiones, la continuidad de funciones reales de variable real y los sólidos de revolución. Para optimizar el proceso de enseñanza- aprendizaje, consideran que la metodología debe incluir sesiones de resolución de problemas, discusión y reflexión, presentaciones magistrales por parte del personal docente, sesiones de laboratorio y presentaciones magistrales por parte del estudiantado.

El aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral se limita a la enseñanza de fundamentos de matemáticas para luego abordar conceptos como límites y derivadas, que se complementan con la resolución de ejercicios de derivadas de funciones algebraicas y trascendentes, pasando luego al estudio del integral definida e indefinida, hasta llegar al concepto de área bajo la curva, sin considerar en este proceso la importancia que tiene la enseñanza y el aprendizaje de las aplicaciones de la derivada y el integral en campos como la ingeniería química, la bioquímica, la economía, el área de la salud, entre otras. (Muñoz, Porras y González, 2017)

Dado que los docentes manifiestan emplear tiempo designado a la implementación del contenido de las asignaturas de profundización en la nivelación de los contenidos por parte de los estudiantes, se puede constatar que no se logra una completa cobertura curricular, quedando pendientes generalmente las últimas dos unidades.

Latorre muestra en 2012 que la cubertura curricular en matemática para ese año en los niveles de enseñanza media corresponde a un 72,7% y 72,9% para los niveles de primero y segundo medio con currículum no ajustado (Decreto 220 actualización 2005), mientras que para el currículum ajustado (Decretos 254 de 2009) fue de un 71,4% y un 71,3%, respectivamente. A su vez, en el nivel de tercero medio, se presenta una cobertura de 73,3% y en cuarto medio, un porcentaje de 76,3%. Un año más tarde, de acuerdo con cifras del MINEDUC (2013), el porcentaje total de cobertura curricular para los contenidos mínimos obligatorios corresponde a un 73%, mientras que, de acuerdo con información de la Universidad de Chile muestra que en 2022, en promedio, los establecimientos educativos han cubierto solo un 73% de los contenidos mínimos obligatorios que establece el currículum chileno.

Respecto a la dimensión tecnológica, los docentes expresan utilizar con sus estudiantes los recursos disponibles en el establecimiento, tales como notebooks, tablets e internet. Además, declaran emplear programas matemáticos en las asignaturas de profundización, entre los cuales se encuentran GeoGebra y Excel, haciendo énfasis en el uso del primero, ya que señalan que es una herramienta muy provechosa que posee una amplia gama de funciones. El uso de las TIC en matemática beneficia el proceso de enseñanza-aprendizaje, por lo cual es de gran relevancia e importancia que los profesores posean suficiente conocimiento para hacer un uso efectivo de estas herramientas, las cuales cumplen un rol fundamental para la obtención y análisis de datos, producción de modelos o la validación y análisis de los mismos (Padilla y Conde-Carmona, 2020 y Villa-Ochoa, González-Gómez y Carmona-Mesa, 2018). Asimismo, es beneficioso es que los profesores de matemáticas tengan dominio de herramientas digitales, tales como softwares dinámicos, en donde se incluye GeoGebra, el cual permite un entorno interactivo para los estudiantes y una oportunidad para explorar objetos matemáticos y validar sus hipótesis y soluciones; y hojas de cálculo, que dan lugar a una comprensión correcta de conceptos abstractos, bien sea de tipo geométrico, numérico o algebraico (Stein, Gurevich y Gorev, 2020; como se citó en Padilla y Conde-Carmona, 2020).

Por otra parte, se evidencia que entre las habilidades del siglo XXI que promueven estos docentes en sus alumnos, se encuentran el uso de la información, relacionándose con la categoría de herramientas para trabajar, ya que mencionan implementar trabajos de investigación, en donde a los estudiantes se les solicitaba buscar información de fuentes confiables, el cual tiene directa relación con "[…] la eficacia y eficiencia en la búsqueda, el acceso, el procesamiento, la clasificación, la integración, la gestión, la evaluación crítica, el uso creativo y ético de la información." (MINEDUC, p.26, 2019). También, han intentado fomentar la creatividad e innovación, lo cual se ve reflejado en una actividad relativa al contenido de fractales en Scratch, el cual si bien es un tema que se aborda principalmente desde la geometría, integra distintos contenidos y conceptos de matemática (Jaramillo y Ruiz, 2015).

Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial

A continuación, se dan a conocer las dificultades manifestadas, en el grupo focal, por los docentes en las dimensiones del conocimiento disciplinar, didáctica y tecnológica, profundizando en la información obtenida en el cuestionario de autorreporte.

Dificultades reportadas

Dimensiones	Categorías	Citas
Conocimiento Disciplinar	Bajo desarrollo del razonamiento estocástico	1. "[...] Es que generalmente, los profesores de matemáticas están débiles en estadística [...]" 2. "Claro. Yo creo que el fuerte del profesor eh, chileno, me aventuro a decirlo, está en la parte de la estadística descriptiva, no en la inferencial [...]" 3. "Yo creo que no se alcanzan a ver, o hay algunos profesores… no hablo solamente de este liceo, sino de todos los que he trabajo que simplemente, no… le hacen el quite (*haciendo referencia a las unidades de geometría y estadística*). Sobre todo, geometría." 4. "Sí, especialmente en inferencia." (haciendo referencia a las debilidades que presentan los profesores en estadística) 5. "Sí." (*Respuesta a la pregunta: ¿Y estadística, va más que nada, relacionado a algo de conocimiento, de que lo dejo al fondo porque me cuesta desarrollarlo?*)

	Desconocimiento de las aplicaciones prácticas de la asignatura	1. “Entonces, no basta con que yo me sepa la materia, no basta con conocer.” 2. “Es que eso es como en todos.” (*Respuesta a la pregunta: ¿Sienten que varía un poco lo que tuvieron con respecto a la formación teórica en cuanto a lo que ahora implementamos en los electivos o en las asignaturas de profundización?*) “[…] En cuanto a estadística es la parte inferencial yo creo, la que me quedaría dando vueltas.” *(Respuesta a la pregunta: ¿Y las otras dos unidaddes, por qué… o sea, por qué esa dificultad para impartirlas?*
	Deficiencia en la interpretación de resultados en Inferencia Estadística	1. “En estadística es lo mismo…” (*haciendo referencia a la interpretación de resultados*)
	Dificultad por dictar Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial	1. “[...] estoy un poquito débil en estadística, entonces para mí igual sería un desafío, tengo que prepararme, tengo que estudiar, recordar cosas…” 2. “Sí, pero yo creo que si puedo escoger la misma opción que dije denante, a mí me costaría un poco estadística.” 3. “[...] yo creo que siempre las primeras dos unidades las dicto sin problema y ya la tercera y la cuarta ya tendría dificultades.” 4. “[...] materia que quizás no vi hace tanto tiempo como ellos pero que sí vi hace tiempo, que bien no recuerdo [...]” 5. “Estadística, yo creo” (*haciendo referencia a la asignatura de profundización que más se le dificulta dictar*) 6. “Yo creo que por lo disciplinar, yo creo que por una mala costumbre de siempre dejarlo pal’ último en cuanto al plan común de estudios.” (*haciendo referencia a estadística*) 7. “Una parte de que se le hacía el quite, y ahora, dentro de lo posible, yo creo que se le sigue haciendo, eh…” (*haciendo referencia a estadística*) 8. “Y bueno, el electivo, como te decía denante, la tercera, la cuarta unidad ya ahí es con inferencia, entonces, eh, ahí está el desafío.”
Didáctica	Utilización de los programas de estudios	1. “[...] yo me he guiado bastante por lo que son los programas, sobre todo ahora último en estadística.” 2. “[...] cuando teníamos que investigar, porque el programa igual plantea harto la investigación en cuanto a los temas de estadística.”
	Adaptación del contenido a la diversidad de estudiantes	1. “[...] nos fijamos primero en las deficiencias que nosotros detectamos en nuestros estudiantes, las falencias, las carencias que tenían en el contenido también [...]” 2. “[...] íbamos consultando y dentro de las realidades de los cursos íbamos aplicando una estrategia u otra, alguna herramienta u otra.” 3. “Ahora hablando de adaptación, podría ser al verificar yo y saber cuáles eran las falencias, los vacíos de contenido que ellos tenían y ahí dar tiempo de reforzar aquello antes y después retomar la actividad [...]”
	Conocimiento didáctico	1. “Ya, voy a enumerar las 3 yo creo. Didáctica …” (*haciendo referencia a la dimensión que mejor se siente preparado*)
	Limitación a la utilización del programa de estudio	1. “[...] nos hemos limitado yo creo que la mayoría al programa.” [...]” 2. “Ahora si tú me preguntas por estadística, este año yo netamente las actividades seleccionadas del programa, tratando de seguir la linealidad que ahí se presentaba … y eso … y poca la adaptación [...]”
	Nula interdisciplinariedad	1. “[...] cómo trabajamos en base al programa, sabemos que el programa plantea la interdisciplinariedad cierto, vienen proyectos armados como para hacerlos, pero todavía no los hemos abordado.”

	Poca experiencia en el sistema educativo	1. "Yo en estadística por lo menos, como estaba reemplazando a Profesor 3, traté de alargar, hice un repaso en realidad, no me guie por el programa, hicimos un repaso de todo lo que era estadística, estadística descriptiva más que nada y probabilidad."
	No considera las características de los estudiantes	1. "O sea, que aprendan a hacer un Word, un Excel, un Power Point. Que uno daba por hecho que sabían y no."
Tecnológica	Dominio y utilización de recursos y/o herramientas tecnológicas	1. "Ocupábamos harto Excel." 2. "[...] no es necesario tener un abanico tan grande, sino quizás profundizar en el que se tiene." 3. "GeoGebra por ejemplo, te da un abanico inmenso, puedes conectar con Excel y con otras tantas cosas, no sé. De todo. Entonces no creo que la respuesta sea el tener mucho y poco de mucho, sino que yo creo que es seguir profundizando en lo que se utiliza y potenciar eso." 4. "[...] lo llevaba a la sala el carro de notebook para que tuvieran acceso a Excel [...]"

Tabla 5: Dificultades manifestadas en las dimensiones del conocimiento disciplinar, didáctica y tecnológica por los docentes participantes del grupo focal en la asignatura de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial.

Fuente: Elaboración propia.

Análisis y Discusión

El desconocimiento de las aplicaciones prácticas de las asignaturas de profundización, dificulta emplear los conocimientos a situaciones contextualizada, ya que si bien en Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, la realización de los cálculos asociados con los contraste de hipótesis es sencilla actualmente gracias a la diversa gama de softwares estadísticos, la enseñanza de los conceptos y el razonamiento inferencial es mucho más compleja (Vera, Díaz, Batanero, 2011).

Una de las posibles razones de esta situación es que la enseñanza es con frecuencia rutinaria, enfatiza las fórmulas y definiciones en desmedro de las actividades de interpretación y al contexto de donde se tomaron los datos. Los docentes parecen no comprender la lógica de la inferencia estadística, y en consecuencia, aunque lleguen a dar las definiciones y usar los algoritmos con competencia aparente, pueden tener dificultades de comprensión o de conexión de los conceptos estadísticos fundamentales y no sabrán elegir el procedimiento estadístico que es necesario aplicar cuando se enfrenten a un problema real de análisis de datos. (Liu y Thompson, 2009, como se citó en Batanero, 2013; Chatfield, 1998, como se citó en Alvarez y

Vallecillos, s.f)

La asignatura de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial presenta un mayor desafío pues, los docentes participantes consideran que tienen un conocimiento disciplinar deficiente. Esto está directamente relacionado con el bajo desarrollo del razonamiento estocástico presente en los docentes producto de una inadecuada preparación en su formación inicial, lo que repercute en que los contenidos a abordar en estas asignaturas regularmente sean omitidos por los docentes, ya sea por presentar carencias en su dominio, desconocer la trascendencia de estos contenidos en la formación de los estudiantes o por que se requiere utilizar nuevas formas de trabajo que rompen el esquema internalizado, generando una etapa de aprendizaje formalizada en donde los estudiantes presenten muchas dificultades (Font, 2008; Ojeda, 2006, como se citó en Elizarrarás, 2014; Batanero y Manfred, 2016, como se citó en Oviedo, Souza y Bueno, 2021).

Además, señalan que generalmente son capaces de adaptar el contenido al interés y diversidad de sus estudiantes, tomando en consideración las falencias detectadas en ellos, dándose el tiempo de reforzar aquello antes y después de aplicar una actividad. En este sentido, se concluye que los educadores realizan un proceso reflexivo en función de las necesidades que presentan sus alumnos, que en términos de lo didáctico es tratado como contenido, independiente de su designación o abordaje, pues un contenido estará encaminado en la apropiación de elementos personales, teóricos o prácticos, y es función del docente adecuarlos a la dinámica del contexto y los sujetos (Montoya y Arroyave, 2021).

Los relatos de los profesores muestran que ellos se limitan solo al uso de los programas de estudio, no consultando material didáctico adicional, siendo esta última una competencia fundamental en un docente, correspondiente al análisis e intervención didáctica, cuyo núcleo fundamental radica en diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora (Morales, Durán, Pérez y Bustamante, 2019).

En relación con los recursos educativos didácticos que pueden diseñar los docentes para potenciar el aprendizaje significativo de sus estudiantes en las asignaturas de profundización, se encuentran material audiovisual, medios didácticos informáticos, soportes físicos y otros, los cuales deben responder a los diversos requerimientos presentes en el aula, motivando y despertando el interés de los estudiantes para fortalecer el proceso de enseñanza aprendizaje (Vargas, 2017), aunque como se pudo evidenciar en el grupo focal, en ocasiones los profesores asumen que los estudiantes poseen los conocimientos suficientes para poder llevar a cabo actividades dentro de las asignaturas correspondientes, pero al momento de la implementación se dan cuenta que presentan ciertas falencias, como por ejemplo el uso de herramientas tecnológicas, que obstaculizan el óptimo desarrollo de estas.

Por otra parte, indican el utilizar los programas de estudio de las asignaturas de profundización como un recurso fundamental, pues les ayudan a organizar y orientar el trabajo pedagógico del año escolar, guiándolos acerca de cómo secuenciar los objetivos de aprendizaje, cómo combinarlos entre ellos, y cuánto tiempo destinar a cada uno durante el año. Estos programas incluyen además, orientaciones que se relacionan con la metodología, la evaluación y los recursos educativos involucrados, pudiendo incluir actividades que ejemplifiquen el proceso didáctico (CNED, s.f.b). En este caso, los profesores entrevistados mencionan implementar diversas actividades que incluyen los programas de dichas asignaturas, sin embargo, excluyen los proyectos interdisciplinarios que en estos se plantean, justificando lo anterior en la poca coincidencia de disponibilidad de horas no lectivas con los demás docentes que imparten las otras asignaturas, lo cual sería una gran oportunidad de aprendizaje para los estudiantes si se llevara a cabo, ya que " […] los proyectos interdisciplinarios y la colaboración generan procesos reflexivos y críticos que potencian la construcción del conocimiento […]" (Chacón, Chacón y Alcedo, 2012, p.877).

En particular, cabe mencionar el caso de un docente que no utiliza los programas de estudio como recurso fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje, debido a su poca experiencia y trayectoria dentro el sistema educativo, ya que se desempeñaba como profesor en otro tipo de instituciones. Lo anterior refleja la interacción entre las creencias y principios de actuación, rutinas y guiones de acción, saberes académicos y teorías implícitas propias del docente novel en el sistema educativo y cómo este se desenvuelve al momento de dictar la asignatura, enfrentando los cambios curriculares asociados (Jara, 2020).

Por último, según el análisis realizado al grupo focal y de acuerdo con lo mencionado por los docentes participantes, se pueden desprender categorías adicionales que de igual manera influyen en el desarrollo del proceso enseñanza – aprendizaje de las asignaturas de profundización, y que son transversales a ambas, las cuales se presentan a continuación:

Categorías Emergentes	**Citas**
Adaptabilidad al cambio	1. "[...] yo creo que directamente algunos por la edad por así decirlo, porque no sé … en palabras de ellos fueron contenidos que vieron hace mucho tiempo, entonces tienen que volver a estudiar para poder dictarlo y ya están con el tiempo del retiro de hecho." 2. "Pensamiento, claro, lo que pasa, es que yo tengo 43 años, entonces yo ya tengo otra formación se puede decir, yo no tengo esa formación que tienen los chicos más jóvenes." 3. "[...] como dice mi colega, se restan por lo mismo, por ese miedo a dictar algo nuevo, al tener que actualizarme, al tener que meterme en herramientas tecnológicas que sí o sí, independiente de la asignatura [...]" 4. "[...] el liceo trabajaba en común con lo que tiene que ver con Classroom, con Meet, las de Google, formularios." 5. "En febrero o enero nos juntamos". (*haciendo referencia a estudiar para poder dictar las asignaturas de profundización*)
Trabajo interdisciplinario	1. "[...] Sí, pero depende de la disponibilidad del otro colega. Es que uno puede hacerlo, pero depende del otro colega, que estemos a la par, si eso es lo más limitante. *(Respondiendo a la pregunta: ¿creen que dentro de, por ejemplo, pensamiento computacional, límites, estadística, lo que alcanzaron a ver, hay contenidos específicos que puedan ser abordables en otras asignaturas?")*
Conocimiento disciplinar formación inicial	1. "Entonces yo tuve más ramos de física I, física II, electrónica… entonces yo tenía más conocimiento que Profesor 1 en esa área." (haciendo referencia al conocimiento tecnológico) 2. "Claro, o sea, nuestra malla, que es la misma de ustedes cierto, es más fuerte en lo que es didáctica." 3. "Porque no había algunas cosas, no las había visto en la U." 4. "Yo creo que es eso lo que han utilizado para designarnos los electivos." *(haciendo referencia al conocimiento disciplinar que poseen los profesores en las asignaturas de profundización)*
Habilidades del siglo XXI	1. "[...] no sé si la formación, porque bueno, no todos venimos de la misma universidad ni hemos estado los mismos años." 2. "[...] las 3 … las 4, lo piden, requieren utilizar por las habilidades que tu decías que hay que desarrollar por el siglo XXI que lo solicita. Entonces eso hace que se resten un poco. No todos, no todos… porque tenemos colegas de bastante edad que también se suman, les cuesta mucho más por supuesto, pero se suman a la tecnología y están ahí intentando y lo tratan de hacer. Pero yo creo que ahí ustedes tienen un campo bien fértil para ir capacitando." 3. "[...] yo creo que en pensamiento computacional se explotó harto la creatividad [...]"

Desafíos personales	1. “Tecnología, yo creo.” (*haciendo referencia al electivo de pensamiento computacional y programación y respondiendo a la pregunta: ¿Qué asignatura de profundización creen que más les costaría implementar? ¿Y por qué?*) 2. “Yo creo que tecnología, tecnología por un tema de…” 3. “[...] es que empezar una asignatura nueva sin tener nada de base es difícil [...]”. 4. “Em, yo seguiría con pensamiento, pero me gustaría como un desafío diferente”. 5. “Yo creo que geometría.” (*Respondiendo a la pregunta: ¿Qué asignatura de profundización creen que más les costaría implementar? ¿Y por qué?*) 6. “En segundo lugar, quizás continuar con estadística, pero más como un poco porque la hice este año, y desafío personal, porque sé que es un punto que tengo que mejorar.” 7. “Sí, yo hice el curso del CPEIP, y a mí la última parte, la última unidad me costó.” (*Respondiendo a la pregunta: ¿Qué asignatura de profundización creen que más les costaría implementar? ¿Y por qué?*)
Afinidad por Pensamiento Computacional y Programación	1. “En cuanto a Profesor 2, por ejemplo, ella tiene un bagaje más mayor que nosotros en todo lo que es tecnológico, entonces le fue más sencillo adecuarse a eso y el primer año, hasta cierto punto, íbamos bien.”
Afinidad por Geometría 3D	1. “[...] también es un tema que me interesa harto y me gusta, geometría.” 2. “Yo me iría por Geometría, mi primera opción…” 3. “Quizá también un poco de conocimiento de la teoría de la didáctica en cuanto a cómo trabajar la geometría.” (*Respondiendo a la pregunta: ¿Qué competencias personales crees que tienes, que tienen afinidad con la asignatura?*)
Conocimiento disciplinar/didáctico de Pensamiento Computacional	1. “Ahí usamos varios programas como Meet, App Inventor, Scratch, pero todo en línea.”. 2. “[...] fue necesaria la nivelación de ofimática que decía Profesor 2 en pensamiento. 3. “Si, pero yo les pedía avance. O sea, mostrar un producto y también en la sala de computación tenemos un programa que yo puedo ver la pantalla del chico, le puedo mandar mensajes, lo puedo monitorear, entonces le doy una advertencia, la segunda le apagaba el computador, todo su avance se elimina, entonces hasta que aprendan a trabajar. Eso es con los chicos más pequeños, porque los más grandes ya saben”. 4. “Entonces yo podía monitorear a cada uno en qué porcentaje van”. 5. “[...] Y para no quedar tan corto en la respuesta, recreaban aplicaciones.”. 6. “Aplicaciones de teléfono, de recrear la típica aplicación por ejemplo de Paint para el teléfono.” 7. “[...] en la u nos pasaron Scratch”. 8. “[...] code no lo conocía, yo tuve que buscar hasta que encontramos algo que nos sirviera”. 9. “[...] el Gobierno hizo un programa para pensamiento, diferente, con las actividades ya hechas, entonces nos dimos cuenta de que habíamos hecho algo similar, pero hicieron un libro nuevo que se llama aprender a programar, no sé si lo han visto”. 10. “[...] buscamos harto para poder ver qué programa era mejor”.

	(*Respondiendo a la pregunta: ¿Qué habilidades crees que posees que te hace que esas asignaturas si sean las que puedes dictar?*) 11. "Por ejemplo, les dábamos libre elección. Por ejemplo, recrear un juego clásico, hacían pac - man, Snake, y hacían su propia versión del juego, hacer su propia cara en la cara de la serpiente y así editaban su propio videojuego". (*Respondiendo a la pregunta: ¿De qué manera ustedes promueven estas habilidades del siglo XXI en los estudiantes?*) 12. "[...] empezamos por lo más básico y ahí íbamos subiendo hasta llegar a una aplicación dada por el gobierno que quería que supieran". 13. "Sí, con Scratch. Nos sirvió harto porque es en línea, gratuito y no pesa nada y es más fácil porque da mayor acción a todo. Nosotros hicimos juegos en Excel, pero tenían limitaciones, no se podía hacer toda la variedad de juegos que los chiquillos quisieran hacer, entonces ahí fue más difícil de hacer" (*Respondiendo a la pregunta: ¿De qué manera ustedes promueven estas habilidades del siglo XXI en los estudiantes?*) 14. "Nosotros dependemos de la lógica matemática, entonces los chicos nunca han visto lógica en el liceo. O sea, aplican lógica, pero no saben lo que es, de ahí aplicar una función en Excel, que el sí condicional fue un tema que íbamos a estar un mes con eso … no es llegar y hacer una aplicación por ejemplo". 15. "[...] igual la didáctica primero porque es más sencilla para nosotros, porque a lo mejor, a diferencia de otros profes, nosotros estamos acostumbrados a innovar algo nuevo en la sala. No seguir con lo mismo o la forma en que ellos enseñaban, por ejemplo, tal contenido. Hacer programas, hacer proyectos, para nosotros se nos hace un poco más sencillo." *(Respondiendo a la pregunta: ¿con respecto a cuál dimensión se sienten más cómodos en la asignatura que imparten?)*

Tabla 6: Categorías emergentes de resultados del grupo focal.

Fuente: Elaboración propia

En este ámbito, los docentes manifiestan que la edad es un factor que puede ser influyente, dado que los nuevos cambios curriculares promueven el uso de nuevas tecnologías en la implementación del proceso educativo, y dado los años en que estos docentes fueron formados, se traduce en una barrera para implementar estos nuevos cambios. Tal como hemos comentado anteriormente, "los procesos educativos requieren de una transformación, que supone para el docente y su comunidad, un cambio en las creencias, en sus conocimientos, actitudes y costumbres […] modificando los patrones de conductas recurrentes en el quehacer profesional" (Gil, Antelm y Cacheiro, 2018; Ortega et al., 2007, como se citó en Vera- Sagredo, Constenla- Núñez y Jara- Coatt, 2022, p.2), por lo que es esperable que hayan tenido una formación apuntada a la innovación, ya que en su FID las actividades planteadas serían listas para su realización, no teniendo la capacidad de crear productos educativos originales. (Nikolaevna, 2019, como se citó en Constenla, Vera y Jara- Coatt, 2022).

En la misma línea, se realiza un contraste respecto a las mallas curriculares de sus distintos procesos de formación inicial docente, vislumbrando que, de acuerdo con los años en que los docentes fueron formados, pudiesen presentar mayores competencias en ciertas dimensiones, tal como lo plantea uno de los docentes con mayor edad del grupo focal, al mencionar que su malla curricular estaba enfocada en cuanto al conocimiento disciplinar, y por el contrario, los docentes más noveles se declaraban con una fuerte formación en la dimensión tecnológica y didáctica.

Por otra parte, surge fuertemente la idea de “desafío personal” para manifestar la preferencia hacia una asignatura por sobre otra, justificando lo anterior en la necesidad de mejorar sus capacidades y conocimientos mencionando y justificando las elecciones, con ciertas afinidades con las asignaturas de Pensamiento Computacional y Programación y/o Geometría 3D, manifestando poseer un mayor conocimiento disciplinar y/o didáctico, dominando las aplicaciones que se implementan o las teorías didácticas asociadas a la propia enseñanza. Los docentes noveles manifestaban sentirse cómodos con asignaturas que implementan dentro de sus procesos de enseñanza innovaciones tecnológicas asociadas a la didáctica de cada asignatura. Fernández (2007, como se citó Fernández, Riveros y Montiel, 2017, p.11) menciona que […] “las nuevas tecnologías ofrecen un abanico muy amplio para el diseño de medios de enseñanza y la calidad pedagógica” […], por lo cual, el uso de las nuevas tecnologías concede a los docentes y estudiantes herramientas mediadoras del proceso enseñanza – aprendizaje en todas las asignaturas y áreas del saber (Alcívar, Zambrano, Párraga, Mendoza y Zambrano, 2019).

Sumado a lo anterior, algunos docentes manifiestan tener un mayor dominio en la dimensión didáctica, ya que sus relatos muestran que sería más sencillo innovar en el aula, hacer programas y proyectos. En la actualidad es muy común escuchar en los círculos docentes propuestas relacionadas a estrategias didácticas innovadoras para un mejor proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, principalmente enfocándose en el uso de la tecnología, juegos, recursos y material didáctico (Guzmán, 2020).

Consecuencias de la fase 1

Con base en el análisis del cuestionario de autorreporte respondido por los docentes, el cual tributó al grupo focal, se refleja una inconsistencia entre la información declarada, dado que en el primero se evidencian mayores dificultades en la dimensión tecnológica, para ambas asignaturas de profundización; mientras que, en el segundo se puede constatar, mediante lo que expresan los docentes, que se presenta una mayor dificultad en la dimensión del conocimiento disciplinar.

Para efectos de esta investigación, se considera predominante el grupo focal por sobre el cuestionario de autorreporte, dada su capacidad de profundizar en lo manifestado por los docentes en dicho cuestionario, el cual era de respuesta cerrada.

En consecuencia de lo anterior, se elaboró la siguiente propuesta de Plan de acompañamiento docente, de acuerdo con la estructura de un Plan Local de Formación para el Desarrollo Profesional Docente, enmarcado en la Ley 20.903, considerando:

- Falencias del conocimiento disciplinar
- Énfasis en aplicaciones del conocimiento disciplinar
- Promoción del uso de herramientas tecnológicas.

Fase 2: Diseño del Plan de Acompañamiento

El Plan de acompañamiento elaborado, se presenta según el desarrollo del Plan de formación local:

Fase estratégica

Análisis del PEI con foco en Formación Local:

Componentes del PEI	Definición
Misión	Somos una institución pública y gratuita cuyo proyecto educativo inclusivo potencia el desarrollo intelectual, personal, emocional y social de nuestras alumnas y alumnos, con estándares de calidad que propicien el mejoramiento continuo, a través de una propuesta pedagógica de alta exigencia, contando para ello con un equipo de profesionales y funcionarios comprometidos con los sellos Institucionales.
Visión	Desde su amplia trayectoria educativa de excelencia, el liceo Los Ángeles A-59 Bicentenario, se proyecta formando ciudadanos, líderes que trasciendan en la comunidad, siendo agentes del cambio para un país que promueva una sociedad de sana convivencia, desarrollada, democrática, respetuosa y pluralista.
Sellos	• Excelencia Académica • Prosecución de Estudios superiores • Desarrollo Personal y Social • Desarrollo de habilidades Artísticas, Deportivas y culturales

Tabla 7: Misión, visión y sellos del PEI del establecimiento educacional.

Adaptado de: Orientaciones para el diseño del plan local de formación para el desarrollo profesional docente.

Adicionalmente, se observa que algunas dimensiones del PEI están enfocadas al mejoramiento de las capacidades docentes, lo cual queda en evidencia a través de los objetivos estratégicos y metas presentadas en la siguiente tabla:

Dimensión	Objetivo Estratégico	Meta
Visión Estratégica y planificación (Área de Liderazgo)	El Liceo planifica e implementa la formación y desarrollo cognitivo, personal y social de sus estudiantes en concordancia con el PEI, los objetivos de aprendizajes transversales y las bases curriculares.	Establecer un plan de trabajo sistemático que asegure la calidad educativa del liceo, tanto a nivel institucional, como en la acción docente en el aula, fortaleciendo las prácticas docentes y el trabajo en equipo.
Conducción (Área de Liderazgo)	Conducir y liderar la gestión	Fortalecer el trabajo en equipo

	institucional mediante un trabajo sistemático y planificado que asegure un actuar coordinado de los agentes intervinientes de la comunidad educativa en función del logro de los objetivos y metas institucionales expresados en el PEI.	entre los diferentes sectores de aprendizajes favoreciendo la participación e intercambio de experiencias entre pares.
Gestión del personal (Área de Recursos)	Promover y asegurar la formación continua del equipo de docentes y asistentes de la educación, con la finalidad de contar con el recurso humano competente que permita el desarrollo académico y formativo de nuestros estudiantes,	Capacitar al 100% de los profesionales de la educación y de apoyo a la docencia para entregar una formación de calidad desde los diversos roles.

Tabla 8**:** Objetivos estratégicos y metas del PEI del establecimiento educacional enfocados al DPD.

Adaptado de: Orientaciones para el diseño del plan local de formación para el desarrollo profesional docente.

En base a lo anterior, se puede mencionar que el trabajo en equipo posee una gran relevancia en el establecimiento, dado que se mencionan acciones tales como el fortalecimiento de prácticas docentes favoreciendo la participación y el intercambio de experiencia entre pares. Sin embargo, esto no se condice con la información obtenida a través del grupo focal, donde no existe mención al trabajo en equipo por parte de los docentes participantes.

Por otra parte, se promueve la formación continua de los docentes pertenecientes a la comunidad educativa a través de capacitaciones enfocadas en mejorar las prácticas pedagógicas de los docentes, lo cual se pudo evidenciar a su vez, en el grupo focal, puesto que los docentes expresaron haber tenido capacitaciones relacionadas con la implementación de las asignaturas de profundización promulgadas el 2019. Lo anterior, fue realizado para todos los docentes del establecimiento.

Autoevaluación Institucional con foco en el DPD:

En relación con esta etapa no se logró obtener información relacionada al PME del establecimiento, por ende, a acciones específicas implementadas con foco en el DPD.

Planificación estratégica (a 1 año):

Considerando lo estipulado en la misión, visión y sellos del establecimiento educativo en su PEI, hemos definido el siguiente objetivo estratégico enfocado a la capacitación docente entre pares, que responde al DPD y se enmarca en el Plan de Formación Local.

Objetivo estratégico (a 1 año)	**Meta estratégica (a 1 año)**
Implementar un plan de acompañamiento docente que aborde las dificultades del conocimiento disciplinar en las asignaturas de Límites, Derivadas e Integrales y Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, promoviendo el uso de herramientas tecnológicas.	El 100% de los docentes que imparten las asignaturas de profundización de matemática participan sistemáticamente del plan de acompañamiento, mejorando sus prácticas pedagógicas de manera continua y retroalimentándose entre pares.
Estrategia: El equipo directivo del establecimiento a través del jefe departamento de matemática se asegura que los docentes que imparten las asignaturas de Límites, Derivadas e Integrales y Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, trabajen colaborativamente en el plan de acompañamiento en sus tiempos no lectivos para mejorar su desempeño profesional, en aspectos esenciales para lograr un adecuado aprendizaje de los estudiantes y una apropiada cobertura curricular de las asignaturas.	

Tabla 9: Planificación estratégica del plan de acompañamiento docente.

Adaptado de: Orientaciones para el diseño del plan local de formación para el desarrollo profesional docente.

<u>Fase anual</u>

Definición de aprendizajes de los estudiantes a abordar:

Límites, Derivadas e Integrales

Unidad 3: Modelar situaciones de cambio con derivadas	
Objetivos	OA 3. Modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido. OA 4. Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos o de inflexión de una función, a partir del cálculo de la primera y segunda derivada, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.
Propósito de la unidad	Los estudiantes comprenden las nociones básicas de la derivada como la razón de cambio y la pendiente de la tangente a la curva. En ambos casos, se ve de forma intuitiva que la derivada implica un límite y que permite dar respuestas a problemas geométricos, económicos o científicos. En

	esta unidad, podrán representar la derivada, modelar situaciones, resolver problemas y derivar de forma simbólica para construir el significado de la derivada. Las siguientes preguntas pueden orientarlos: ¿Cómo se relaciona el cambio de una situación con la derivada? ¿Cómo modelar el comportamiento de las situaciones de cambio?
Unidad 4: Comprender la integral como proceso de reversibilidad y cálculo de áreas	
Propósito	Los estudiantes comprenden que la integral es el proceso inverso de derivar y, además, sirve para encontrar el área bajo la curva. Se comienza con funciones conocidas, sus derivadas y antiderivadas, para continuar con la integral definida y con aplicaciones en geometría, ciencias o economía. Las preguntas que orientan la unidad son: ¿Cómo se puede describir la relación entre el cambio y la superficie? ¿Cómo se puede describir las situaciones de cambio por medio del área?
Objetivo de Aprendizaje	OA 5. Modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales, y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

Tabla 10: Propósitos y Objetivos de Aprendizaje Unidad 3 y 4 del Programa de Límites, Derivadas e Integrales (2019c).

Fuente: Elaboración propia.

Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial

Unidad 3: Modelaje de fenómenos mediante las probabilidades las distribuciones binomial o normal	
Objetivo	OA 3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.
Propósito de la unidad	Los estudiantes comprenden los beneficios de trabajar con una distribución normal para encontrar rápidamente la probabilidad de algún suceso. Comienzan con experimentos aleatorios binomiales, encuentran la probabilidad de un suceso discreto y continúan con sucesos continuos y la probabilidad normal. Las preguntas que orientan la unidad son: ¿Cómo se modela las situaciones de incerteza? ¿Cómo permiten tomar decisiones las distribuciones de probabilidades de sucesos?
Unidad 4: Hacer inferencia estadística	
Objetivo	OA 4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.
Propósito de la unidad	Los estudiantes comprenden cómo se puede inferir información desde una muestra cuando la población está "distribuida normalmente". Por ejemplo: cómo construir un intervalo de confianza para que la media poblacional se encuentre dentro de dicho intervalo con un cierto nivel de precisión previamente dado. O bien, plantear pruebas de hipótesis para aprobar o rechazar una predicción en torno a parámetros específicos de la población. Las preguntas que orientan la unidad son: ¿En qué condiciones

	estadísticas es confiable la información? ¿Cuáles son las condiciones de significatividad que afectan la toma de decisiones?

Tabla 10: Propósitos y Objetivos de Aprendizaje Unidad 3 y 4 del Programa de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial (2019b).

Fuente: Elaboración propia.

Aspectos del desempeño docente a fortalecer:

Los contenidos a abordar en el plan de acompañamiento por los docentes para una implementación adecuada de las asignaturas de profundización Límites, Derivadas e Integrales y Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, se desprende del análisis mostrado en el capítulo anterior.

Asignatura de profundización	**Límites, Derivadas e Integrales**	**Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial.**
Contenidos	*Derivadas:* 1. Concepto de derivada y sus propiedades. 2. Interpretación geométrica de las derivadas. 2. Razón de cambio en diversos contextos (geometría, física, economía, entre otros). 3. Máximos, mínimos, puntos de inflexión y concavidad. 4. Resolución de problemas de máximos y mínimos en diversos contextos (economía, ciencia, salud, etc.) *Integrales:* 1. Antiderivadas: integrales indefinidas 2. Resolución de problemas con integrales indefinidas. 3. Representación geométrica de la integral. 4. Integrales definidas y sus propiedades. 5. Teorema Fundamental del Cálculo. 6. Modelamiento de diversas situaciones que involucran el uso de integrales definidas en contextos científicos, económicos y cotidianos 7. Aplicación de las integrales definidas en geometría (área de una región, áreas de superficie de revolución, volumen de sólidos de revolución y longitud de arco de curva).	Estadística Inferencial: 1. Variables Aleatorias 2. Distribuciones discretas y continuas. 3. Aplicaciones de las distribuciones en diversos contextos. 4. Estadísticos 5. Distribuciones muestrales 6. Intervalos de confianza 7. Aplicaciones de intervalos de confianza en diversos contextos. 8. Prueba de hipótesis. 9. Aplicación e interpretación de pruebas de hipótesis en diversos contextos.

Tabla 11: Contenidos a abordar en el plan de acompañamiento docente.

Fuente: Elaboración propia.

Acciones a realizar en el Plan de Acompañamiento Docente:

Las acciones a realizar en el marco del plan de acompañamiento docente se organizan de la siguiente forma: la primera corresponde a la implementación del plan correspondiente a la asignatura de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, dado que los docentes participantes del grupo focal manifestaron presentar mayores dificultades en esta asignatura, específicamente en las dos últimas unidades del programa, mientras que la segunda corresponde a la implementación del plan de Límites, Derivadas e Integrales. Por lo antes mencionado, se procuró que los tiempos establecidos para los planes de acompañamiento tuvieran cohesión con las dificultades presentadas y fechas correspondientes para llevar a cabo cada unidad.

Acción	Implementación de un plan de acompañamiento docente en Límites, derivadas e integrales. Se implementará un plan de acompañamiento a los docentes de matemática considerando principalmente la aplicación de los contenidos descritos anteriormente, con la finalidad de que sean capaces de implementar adecuadamente las últimas dos unidades de la asignatura de profundización Límites, derivadas e integrales. Se dará comienzo a este plan con una fase diagnóstica y de retroalimentación, y se finalizará con una de evaluación global.
Duración	Dos meses aproximadamente, con dos sesiones por semana (2 horas cada una).
Programa	Límites, Derivadas e Integrales.

Tabla 12: Acciones a realizar en el plan de acompañamiento docente en Límites, Derivadas e Integrales.

Fuente: Elaboración propia.

Acción	Implementación de un plan de acompañamiento docente en Inferencia Estadística: Se implementará un plan de acompañamiento a los docentes de matemática considerando principalmente la aplicación de los contenidos descritos anteriormente, con la finalidad de que sean capaces de implementar adecuadamente las últimas dos unidades de la asignatura de profundización Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial. Se dará comienzo a este plan con una fase diagnóstica y de retroalimentación, y se finalizará con una de evaluación global.
Duración	Dos meses aproximadamente, con dos sesiones por semana (2 horas cada una).
Programa	Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial.

Tabla 13: Acciones a realizar en el plan de acompañamiento docente en Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial.

. Fuente: Elaboración propia.

Validación

Resultados de la validación

De acuerdo con la devolución de las pautas recibidas por parte de los expertos participantes en la validación de los planes de acompañamiento surgen los siguientes resultados:

Límites, Derivadas e Integrales

Las principales observaciones y recomendaciones realizadas apuntan a la redacción, enumeración de ejercicios o definiciones, orden de ejercicios de acuerdo con su complejidad, expresiones algebraicas escritas en dos líneas por lo cual quedaban cortadas, entre otras. A continuación, se presentan algunos ejemplos de esto:

Motivos por los que se considera no adecuada	Algunos conceptos de esta sección presentan una redacción algo confusa, que afectan la comprensión de estos.
Propuestas de mejora (modificación, sustitución o supresión)	Se sugirió modificar la redacción de estos conceptos

Ilustración 3 : Sugerencia de redacción de conceptos.

Propuestas de mejora (modificación, sustitución o supresión)	El ejemplo 2 (en la página 26, la numeración de los ejemplos no está correcta), de la cerca de 2400 pies, debería ser uno de los primeros ejemplos, ya que es más fácil que los ejemplos precedentes.

Figura 4: Sugerencia orden de presentación de ejemplos.

Propuestas de mejora (modificación, sustitución o supresión)	Comenzar la sesión con un párrafo introductorio, y no directamente con los ejemplos.

Figura 5: Sugerencia de párrafo introductorio.

Hola:
En una nueva revisión rápida en ejercicios propuestos de algunas sesiones encontré expresiones algebraicas cortadas en 2 líneas (como las que sugerí corregir en las secciones), solicito que revisen esto y hagan las correcciones. Adicionalmente, en los ejercicios propuestos de la sección4 el ejercicio 3 contiene 2 partes numeradas con 1 y 2; solicito cambiar por a y b, respectivamente

Figura 6: Sugerencia modificación de expresiones algebraicas y enumeración de ejercicios.

Así mismo, existen otras observaciones y recomendaciones relacionadas a errores e imprecisiones conceptuales:

Motivos por los que se considera no adecuada	Algunos conceptos de esta sesión presentan algunas imprecisiones.
Propuestas de mejora (modificación, sustitución o supresión)	Se hizo sugerencias para mejorar éstos detalles

Figura 7: Observación de imprecisiones en conceptos.

Motivos por los que se considera no adecuada	La derivada se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto. Hay varios problemas en el uso del lenguaje matemático. Por ejemplo, se dice: Sea (x1,f(x1)) un punto arbitrario perteneciente a f(x). La pendiente de la recta tangente a dicho punto se puede obtener….

Figura 8: Observación de errores en uso del lenguaje matemático.

En particular, algunas de las recomendaciones mencionadas, respecto a errores e imprecisiones en conceptos, fueron realizadas por uno de expertos de manera digital sobre el mismo documento del plan de acompañamiento que se le hizo llegar, como se muestra a continuación:

Derivada de una función real en un punto

Sea $\boldsymbol{f}$ una función real y x_o un número real perteneciente al interior del dominio de f, entonces la **derivada** de la función en ~~$x = x_0$~~ x_0 está dada por:

$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, ~~con $h = x_1 - x_0$~~ ~~S~~si este límite existe, en tal caso, se dice que $\boldsymbol{f}$ **es derivable** en x_0; y a este límite se le denomina *la derivada de* $\boldsymbol{f}$ en x_0

Figura 9: Observación en la definición de Derivada de una función real.

Recta tangente a una curva

~~Si se considera la curva correspondiente a una función $y = f(x)$ y los puntos~~

Si $\boldsymbol{f}$ es una función derivable en x_0, entonces la ecuación $y = f(x)$ representa una curva C que contiene al punto $P\left(x_1, f(x_1)\right)$. ~~Y~~ Ahora, considerando otro punto $Q \in C, Q \neq P$, digamos $Q(x_1 + h, f(x_1 + h))$, ~~dos puntos pertenecientes a ella~~, se tiene que la ecuación de la recta ~~a la curva en el punto P, se puede obtener trazando la~~ secante ~~PQ~~. ~~La recta PQ~~ $\overleftrightarrow{PQ}$ tiene pendiente (m_{PQ}):

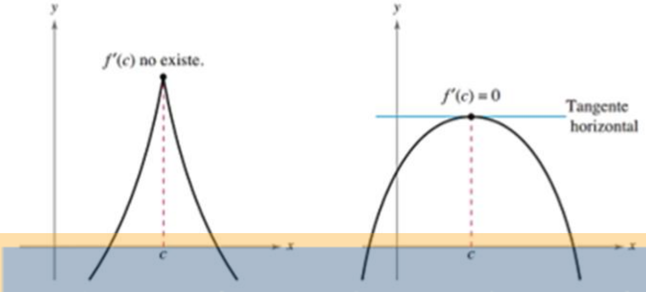
$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Cuando h tiende a cero, es decir, la distancia entre P y Q es cada vez más pequeña, la secante ~~PQ~~ $\overleftrightarrow{PQ}$ se aproxima a la recta tangente a la curva en el punto P, luego la pendiente de la recta tangente está dada por la expresión:

Figura 10: Observación en la definición de Recta tangente a una curva.

Punto crítico

Def. Sea f una función definida en c. Si $f'(c) = 0$ o si f no es derivable en c, entonces c ~~es un~~ se llama ~~punto~~ valor crítico de f.



c es un punto crítico de f.

Figura 11: Observación en la definición de valor crítico.

3. **Estrategias para determinar los intervalos en los que una función es creciente o decreciente**

Sea f continua en el intervalo (a, b). Para encontrar los intervalos ~~abiertos~~ sobre los cuales f es creciente o decreciente, se puede orientar por lo siguiente:

1. Localizar los puntos valores críticos de f en (a, b), y utilizarlos para determinar intervalos de prueba.

Figura 12: Observación en el uso de notación matemática.

Criterio de la primera derivada para valores extremos relativos (locales)

Sea c un punto crítico de una función f que es continua en un intervalo abierto I que contiene a c. Si f es derivable en el intervalo, excepto posiblemente en c, entonces $f(c)$ puede clasificarse:

1. Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c????, entonces f tiene un **mínimo relativo** en $(c, f(c))$.
2. Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un **máximo relativo** en $(c, f(c))$.
3. Si $f'(x)$ es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados de c, entonces $f(c)$ no es **ni un mínimo relativo ni un máximo relativo**.

1. Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en valores levemente ~~**pequeños o**~~ menores que c, versus valores levemente mayores a c, entonces f tiene un **mínimo relativo** en $(c, f(c))$.
2. Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en valores levemente ~~**pequeños o**~~ menores que c, versus valores levemente mayores a c, entonces f tiene un **máximo relativo** en $(c, f(c))$.
3. Si $f'(x)$ ~~**es positiva**~~ no cambia de signo en valores levemente menores que c, versus valores levemente ~~pequeños y~~ mayores a c ~~o negativa en valores levemente pequeños y mayores a c~~, entonces $f(c)$ no es ~~**ni**~~ **un mínimo relativo ni un máximo relativo**.

Figura 13: Observaciones en la redacción del Criterio la segunda derivada para valores extremos relativos.

Punto de inflexión

Def. Sea f una función que es continua en un intervalo abierto, y sea c un punto en ese intervalo. ~~Si la gráfica de f tiene una recta tangente en este punto $(c, f(c))$~~????, entonces ese punto es un **punto de inflexión** de la gráfica de f si la concavidad de f cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo (o viceversa) en ese punto???. Diremos que f tiene un pto. De inflexión en el punto (c;f©), si P separa arcos de concavidad opuesta

Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces $f''(c) = 0$ o f'' no existe en $x = c$.

Figura 14: Observación en la definición de Punto de inflexión.

Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial

Las principales observaciones y recomendaciones realizadas apuntan a la redacción, simbología y orden de contenidos. A continuación, se presentan algunos ejemplos de estas:

Motivos por los que se considera no adecuada	• Hay algunos errores de notación (media, complemento de conjuntos,). • Falta definir algunas notaciones utilizadas en las fórmulas, aunque para los expertos sea obvio, lo ideal es que cualquier persona lo pueda entender (Ω, ei)
Propuestas de mejora (modificación, sustitución o supresión)	Revisar las notaciones y definiciones utilizadas. Agregar las referencias bibliográficas.

Figura 15: Observación de errores de notaciones.

Definir quuien es Xi ¿es la marca de clase?

Figura 16: Sugerencia de definición de x_i.

para la concentración media de zinc en el río, suponiendo que la desviación típica de la población es 0.3.

Debe ir en el próximo módulo

6. El encargado del departamento de producción de una fábrica recibe un lote de 2000 piezas necesarias para el montaje de un artículo. El fabricante de las piezas asegura que en este lote no hay más de 100 piezas defectuosas.
   a) ¿Cuántas piezas hay que examinar para que, con un nivel de confianza del 95%, el error que se cometa en la estimación de la proporción de piezas defectuosas no sea mayor que 0.05?
   b) Si se toma una muestra de 100 piezas elegidas al azar y se encuentran 4 defectuosas, determinar un intervalo de confianza para la proporción de defectuosas al nivel del 95%.

Figura 17: Sugerencia de modificación en orden de ejemplos.

Variables aleatorias

Llamaremos variable aleatoria (v.a.) a toda función X con valores reales definida sobre un espacio muestral Ω, es decir,

$$\begin{array}{rcl} X & : & \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega & \longrightarrow & X(\omega) = x \end{array}$$

desplazar más a la derecha

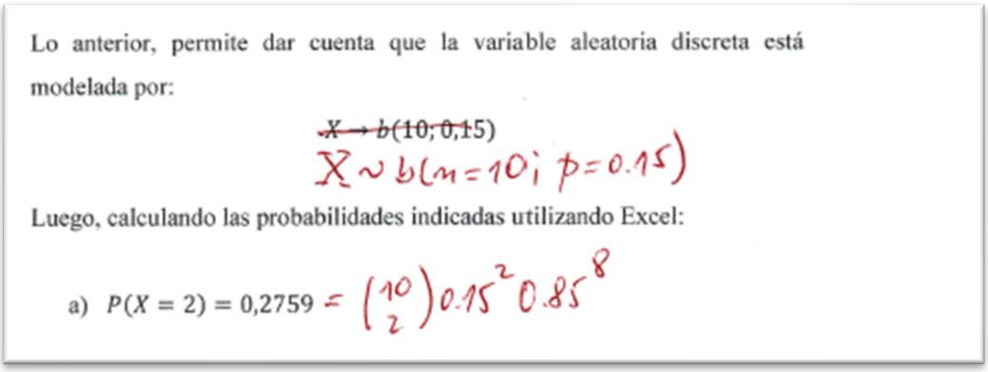
las flechas deben estar en la misma columna

Figura 18: Sugerencia en el orden de las expresiones matemáticas.

Modelos para la distribución de probabilidad

Existen modelos teóricos clásicos que describen el comportamiento de ~~una función de probabilidad~~ algunas variables aleatorias. Para **variables discretas** se ~~utilizan~~ pueden mencionar las distribuciones **binomial~~es~~**, hipergeométrica, **geométrica** o **Poisson**, entre otras; mientras que para **variables continuas** ~~se utilizan~~ están las distribuciones **uniforme**, **exponencial** o **normal**.

Figura 19: Sugerencia en la redacción de conceptos matemáticos.



Lo anterior, permite dar cuenta que la variable aleatoria discreta está modelada por:

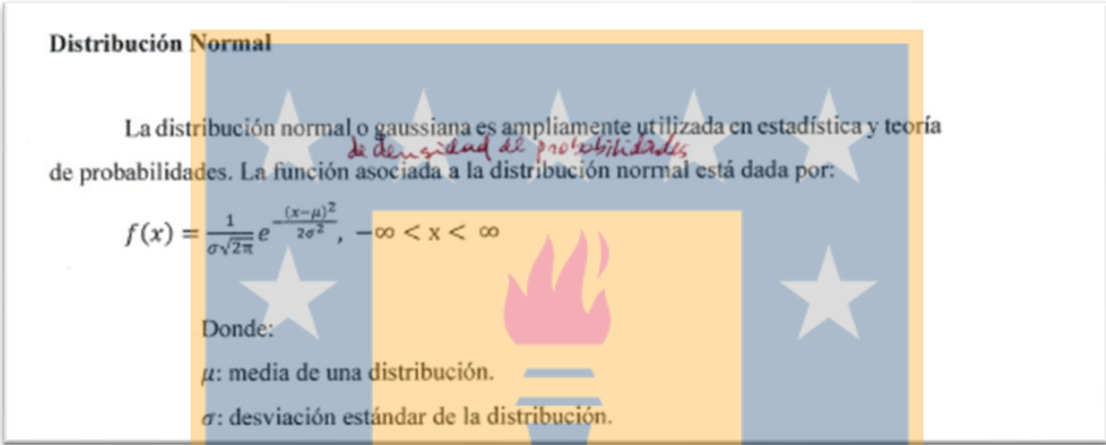
$$\cancel{X \rightarrow b(10; 0{,}15)}$$

$$X \sim b(n=10;\ p=0.15)$$

Luego, calculando las probabilidades indicadas utilizando Excel:

a) $P(X=2) = 0{,}2759 = \binom{10}{2} 0.15^2\, 0.85^8$

Figura 20: Sugerencia en la utilización de simbología.



Distribución Normal

La distribución normal o gaussiana es ampliamente utilizada en estadística y teoría de probabilidades. La función de densidad de probabilidades asociada a la distribución normal está dada por:

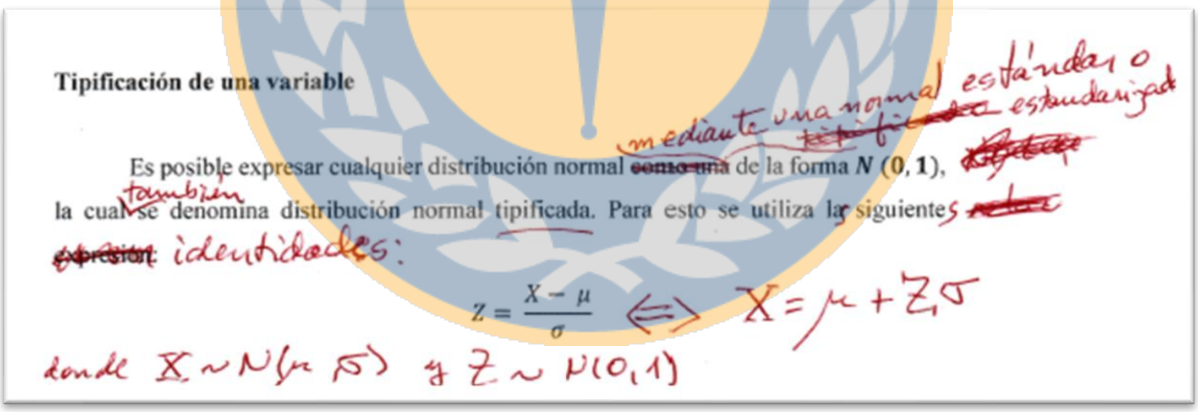
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ -\infty < x < \infty$$

Donde:

μ: media de una distribución.

σ: desviación estándar de la distribución.

Figura 21: Sugerencia en la definición de Distribución Normal.



Tipificación de una variable

Es posible expresar cualquier distribución normal ~~como una~~ mediante una normal estándar o estandarizada ~~tipificada~~ de la forma $N(0,1)$, la cual también se denomina distribución normal tipificada. Para esto se utiliza las siguientes ~~expresión~~ identidades:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \iff X = \mu + Z\sigma$$

donde $X \sim N(\mu, \sigma)$ y $Z \sim N(0,1)$

Figura 22: Sugerencia en la redacción de Tipificación de una variable.

Si bien uno de los expertos sugirió unificar las sesiones 2 y 3, esta modificación no fue incorporada en el plan final, dado que no existió un consenso por parte de los expertos en este punto.

Propuestas de mejora (modificación, sustitución o supresión)	Podrían unificar las sesiones 2 y 3, dado que esta última es la aplicación de los contenidos vistos en la sesión 2.

Figura 23: Sugerencia de unificación de sesiones.

<u>Consecuencias de la validación en el diseño de los planes de acompañamiento</u>

A partir de los resultados de la validación, desde las observaciones y recomendaciones recibidas por los expertos, surgen los siguientes Planes de Acompañamiento Docente para las asignaturas de profundización Límites, Derivadas e Integrales y Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial:

Sugerencia Plan de Acompañamiento Docente en Límites, Derivadas e Integrales

Índice

Planificación sugerida

ASIGNATURA	LÍMITES, DERIVADAS E INTEGRALES
N° HRS SEMESTRAL	24 HORAS CRONOLÓGICAS

Planificación semestral				MES 1				MES 2				MES 3			
	Diagnóstico: funciones y límites			X											
	Retroalimentación del diagnóstico			X											
Módulo 1: Aplicaciones de las Derivadas															
	Objetivos		**Contenidos**												
1	Resolver problemas que involucren derivadas en contexto geométrico, de la física y económico , utilizando herramientas tecnológicas.	1.1.	Concepto de derivadas y sus propiedades		X										
		1.2	Interpretación geométrica de las derivadas		X										
		1.3.	Razón de cambio en contexto geométrico		X										
		1.4.	Razón de cambio en contexto de la física: rapidez y velocidad instantánea		X										
		1.5.	Razón de cambio en contexto económico: análisis marginal de variables económicas		X										
2	Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos o de inflexión de una función, aplicando los criterios de la primera y segunda derivada, utilizando herramientas tecnológicas.	2.1.	Máximos y mínimos, concavidad y puntos de inflexión			X									
		2.2.	Resolución de problemas de máximos y mínimos en diversos contextos (economía, ciencia, salud, etc.)			X									
Módulo 2: Aplicaciones de las Integrales															
3	Resolver problemas que involucren integrales en diversos contextos, utilizando herramientas tecnológicas.	3.1.	Antiderivadas: integrales indefinidas				X								
		3.2	Resolución de problemas con integrales indefinidas				X								
		3.3	Representación geométrica de la integral				X								
		3.4	Integrales definidas y sus propiedades				X								
		3.5	Teorema fundamental del cálculo				X								
		3.6	Modelamiento de diversas situaciones que involucran el uso de integrales definidas en contextos científicos, económicos y cotidianos					X							
		3.7	Aplicación de las integrales en geometría (cálculo de áreas, cálculo de áreas de superficie de revolución, volumen de sólidos de revolución y longitud de arco de una curva)					X							
EVALUACIÓN FINAL									X						
RETROALIMENTACIÓN DE LA EVALUACIÓN									X						

4

Módulo 1: Derivadas

Sesión 1	
Duración	2 horas
Propósito	Comprender el concepto de derivada y su representación geométrica como la pendiente de la recta tangente a una curva en un determinado punto. Además, se recordarán propiedades fundamentales de las derivadas y derivadas de orden superior.
Contenidos a abordar	1. Concepto de derivadas 2. Representación geométrica de las derivadas 3. Propiedades de las derivadas 4. Derivadas de orden superior
Descripción general	Se darán a conocer las definiciones de derivada de una función real en un valor, recta tangente a una curva, función derivable, función derivada, reglas básicas de derivación, derivadas de funciones elementales y derivadas de orden superior. En esta sesión se enfatiza en la representación gráfica de las derivadas, por lo que al finalizar con los contenidos se sugieren ejercicios acerca de este tema, los cuales deberán ser compartidos de manera expositiva al cierre de la sesión.

Derivada de una función real

Def. Sea $\boldsymbol{f}$ una función real y x_o un número real perteneciente al interior del dominio de f, entonces la **derivada** de la función en x_0 está dada por:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

si este límite existe, en tal caso, se dice que $\boldsymbol{f}$ **es derivable** en x_0; y a este límite se le denomina *la derivada de* f en x_0.

Recta tangente a una curva

Si f es una función derivable en x_1, entonces la ecuación $y = f(x)$ representa una curva C que contiene al punto $P(x_1, f(x_1))$. Ahora, considerando otro punto $Q \in C, Q \neq P$, digamos $Q(x_1 + h, f(x_1 + h))$, se tiene que la ecuación de la recta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ tiene pendiente (m_{PQ}):

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

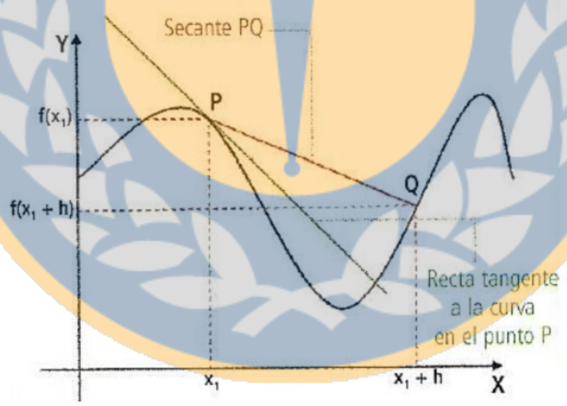
Cuando h tiende a cero, es decir, la distancia entre P y Q es cada vez más pequeña, la recta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ se aproxima a la recta tangente a la curva en el punto P, luego la pendiente de la recta tangente está dada por la expresión:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = f'(x_1)$$

Luego, la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(x_1, f(x_1))$ se obtiene mediante la expresión:

$$y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$

donde $f'(x_1)$ es la derivada de $f(x)$ en x_1.

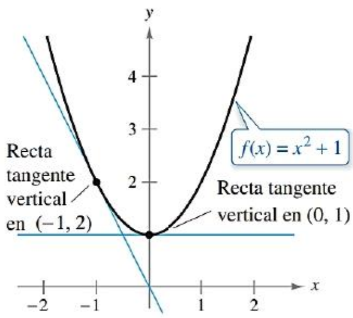


Ejemplo: Obtener las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = x^2 + 1$ en los puntos $(0,1)$ y $(-1,2)$.

Solución: En la figura adjunta podemos observar la gráfica de $f(x) = x^2 + 1$, con las respectivas rectas tangentes en los puntos $(0,1)$ y $(-1,2)$.

6

Sea $(x_1, f(x_1))$ un punto arbitrario perteneciente a la gráfica de $f(x)$. La pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto se puede obtener de la siguiente manera:



$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{[(x_1 + h)^2 + 1] - [x_1^2 + 1]}{h}$$

Al resolver el límite anterior se obtiene que $m = 2x_1$, es decir, la pendiente de la recta tangente a la curva en cualquier punto $(x_1, f(x_1))$ de la gráfica de $f(x)$ es $2x_1$.

Luego, la ecuación de la recta en el punto $(0,1)$ es:

$$y - 1 = 0(x - 0); \text{ es decir } y = 1$$

Y finalmente, la ecuación de la recta en el punto $(-1,2)$ corresponde a:

$$y - 2 = -2(x + 1); \text{ es decir } y = -2x$$

Función derivable

$y = f(x)$ es una función derivable en un conjunto, si $f'(a)$ existe para todo a perteneciente a ese conjunto.

Función derivada

Def. Si una función $y = f(x)$ es derivable, la función $y' = f'(x)$ se denomina **función derivada de f**. Esta función asocia a cada valor de x, su derivada en dicho valor (donde f es derivable).

Otras notaciones comunes para la derivada $f'(x)$ son $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d}{dx}f(x)$.

Reglas básicas de derivación

1. **Regla de la constante**: la derivada de una función constante es 0. Es decir, si c es un número real, entonces $\frac{d}{dx}[c] = 0$.

2. **Regla de la potencia**: si n es un número real, entonces la función $f(x) = x^n$ es derivable y $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$.

3. **Regla del múltiplo constante**: Si f es una función derivable y c un número real, entonces $c \cdot f$ también es derivable y $\frac{d}{dx}[c \cdot f(x)] = c \cdot f'(x)$.

4. **Reglas de suma y resta:** La derivada de la suma (o de la resta) de dos funciones derivables f y g es derivable en sí misma. Además, la derivada de $f + g$ (o $f - g$) es igual a la suma (o diferencia) de las derivadas de f y g, es decir
$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$

5. **Regla del producto:** el producto de dos funciones derivables f y g también es derivable. Además, la derivada de $f \cdot g$ es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la derivada de la primera por la segunda. Es decir
$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot g'(x) \pm g(x) \cdot f'(x)$$

6. **Regla del cociente**: El cociente $\frac{f}{g}$ de dos funciones derivables f y g también es derivable para todos los valores de x para los que $g(x) \neq 0$. Además, la derivada de $\frac{f}{g}$ se obtiene mediante el denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador. Es decir

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, g(x) \neq 0$$

Derivada de funciones elementales

En la siguiente tabla se presentan fórmulas para el cálculo de derivadas de funciones de uso frecuente.

Función	**Función derivada**
$f(x) = k$, con $k \epsilon \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n, n \epsilon \mathbb{R}$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = a^x, a > 0.a \neq 1$	$f'(x) = a^x \cdot ln\ a$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = log_a x, a > 0, a \neq 1$	$f'(x) = \frac{1}{x} log_a e$
$f(x) = ln\ x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = sen\ (x)$	$f'(x) = cos\ (x)$
$f(x) = cos\ (x)$	$f'(x) = -sen\ (x)$
$f(x) = tg\ (x)$	$f'(x) = 1 + tg^2(x)$
$f(x) = cotg\ (x)$	$f'(x) = -(1 + cotg^2(x))$
$f(x) = arcsen\ (x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$f(x) = arccos\ (x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$f(x) = arctg\ (x)$	$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

9

Derivadas de orden superior

Si $y = f(x)$ es una función diferenciable, entonces su derivada $f'(x)$ también es una función. Si f' también es diferenciable, podemos derivar f' para obtener una nueva función de x, denotada por f''. Así, $f'' = (f')'$. La función f'' se llama segunda derivada de f, ya que es la derivada de la primera derivada. En notación tenemos $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = y''$.

La segunda derivada es un ejemplo de una derivada de orden superior. En general, se pueden definir derivadas de cualquier orden entero positivo, es decir, la n-ésima derivada de f se denota mediante $f^{(n)}$ y se obtiene derivado n veces a f. Si $y = f(x)$, escribimos:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Aplicación de la sesión: Responda las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = \frac{1}{x}$ en $x = a \neq 0$?

b) ¿En qué punto la pendiente es igual a $-\frac{1}{4}$?

c) ¿Qué ocurre con la tangente a la curva en el punto $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ a medida que cambia a? Grafique en GeoGebra.

Propuesta de ejercicios

1. Halle la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = 4x - x^2$ en el punto $(1,3)$. Además, encuentre la ecuación de la recta tangente a dicha parábola. Grafique la parábola y la recta tangente en el punto dado.

2. Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x - x^3$ en el punto $(1,0)$. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva mencionada. Grafique la curva y la recta tangente en el punto dado.

3. Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en el punto dado y luego verifique sus resultados graficando en GeoGebra:

a. $y = 4x - 3x^2, (2, -4)$

b. $y = x^3 - 3x + 1, (2,3)$

c. $y = \sqrt{x}\ , (1,1)$

d. $y = \frac{2x+1}{x+2}, (1,1)$

4. Determine la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ en el punto donde $x = a$. Luego, determine las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(1,5)$ y $(2,3)$. Grafique la curva y ambas rectas tangentes en una misma pantalla.

5. Dibuje las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$ e $y = -x^2 + 6x - 5$, así como las dos rectas que son tangentes a ambas gráficas. Encuentre las ecuaciones de dichas rectas.

Sesión 2	
Duración	2 horas
Propósito	Aplicar las derivadas como razón de cambio instantánea en diversos contextos (geometría, física y economía).
Contenidos a abordar	Razón de cambio en diversos contextos
Descripción general	En primer lugar, se recordará la regla de la cadena y posteriormente se dará a conocer la definición de razón de cambio instantánea, con aplicaciones en diversos contextos. Al finalizar, se entrega una propuesta de problemas, los cuales se resuelven utilizando razones de cambio. Podrán trabajar de manera colaborativa y para cerrar la sesión deberán exponer su trabajo realizado.

Derivada de una función compuesta: Regla de la cadena

Si $f(x)$ es derivable en x y $g(x)$ es derivable en $f(x)$, entonces la derivada de $(g\ o\ f)\ (x) = g(f(x))$ se calcula mediante la expresión:

$$(g\ o\ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Esta expresión se conoce como regla de la cadena. Si $y = g(f(x))$ y $u = f(x)$, esta regla también se puede expresar como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Razones de cambio instantáneas

Si interpretamos el cociente de diferencias $\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}$ como la razón de cambio promedio de f a lo largo del intervalo de x a $x+h$, podemos interpretar que el límite cuando $h \to 0$ es la razón a la que f está cambiando en el punto x.

La razón de cambio instantánea de f con respecto a x en x_0 es la derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

siempre y cuando el límite exista. Por lo tanto, las razones de cambio instantáneas son límites de las razones de cambio promedio.

Se acostumbra a usar la palabra ***instantánea*** aun cuando x no represente el tiempo. Sin embargo, tal término frecuentemente se omite. Cuando decimos ***razón de cambio***, queremos decir ***razón de cambio instantánea***.

La razón de cambio es útil en diversas situaciones. Algunos ejemplos son las razones de crecimiento de poblaciones, las razones de producción, las razones de flujo de un líquido, la velocidad, entre otros.

***Ejemplo 1* (Razón de cambio en contexto geométrico):** ¿Qué tan rápido cambia el área de un círculo, por minuto, cuando su diámetro mide 10 m?

Solución: Sabemos que el área A de un círculo se relaciona con su radio de la siguiente manera $A = \pi r^2$. Luego, el diámetro D corresponde a $D = 2r$, lo cual implica que $r = D/2$. Así, el área A de un círculo en función del diámetro corresponde a $A = \frac{\pi D^2}{4}$.

La razón de cambio del área del círculo respecto al diámetro es $\frac{dA}{dD} = \frac{\pi D}{2}$.

Finalmente, cuando el diámetro del círculo mide 10 m, el área cambia a razón de $\frac{10\pi}{2}\ m^2/min = 5\pi\ m^2/min$.

***Ejemplo 2* (Razón de cambio en contexto de la física):** En el instante $t = 0$, un clavadista se lanza desde un trampolín que está a 10 metros sobre el nivel del agua de una piscina. Puesto que la velocidad inicial del clavadista es de 5 metros por segundo, la posición (altura) del clavadista está dada por $s(t) = -5t^2 + 5t + 10$, donde s se mide en metros y t en segundos. ¿Cuánto demora el clavadista en llegar al agua? ¿Cuál es su velocidad al momento del impacto?

Observación 1: La **velocidad** es una magnitud vectorial que relaciona el cambio de posición (o desplazamiento) con el tiempo. La **rapidez** es una magnitud escalar, es decir, un número que relaciona la distancia recorrida con el tiempo.

Solución: Cuando el clavadista toca el agua $s = 0\,m$. Con esto podemos determinar el tiempo que demora en caer:

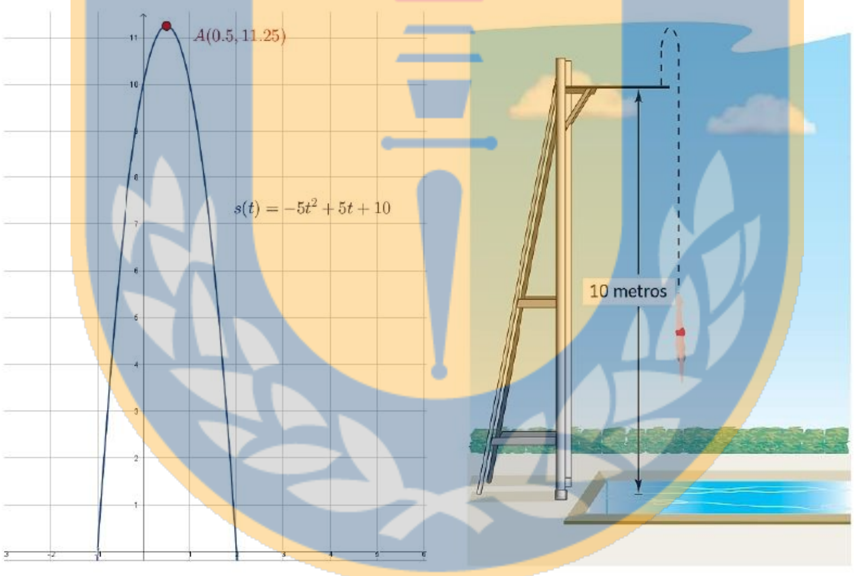
$$0 = -5t^2 + 5t + 10 \text{, es decir, } t = -1 \;\; o \;\; t = 2$$

Como $t \geq 0$, podemos afirmar que el clavadista demora 2 segundos en llegar al agua.
Ahora, la velocidad en el instante t está dada por $s'(t) = -10t + 5$. Luego, si $t = 2$:

$$s'(2) = -20 + 5 = -15\, m/seg$$

Es decir, la velocidad al momento del impacto del clavadista es de $-15\, m/seg$. Que sea negativa indica que está descendiendo. (La rapidez corresponde al valor absoluto de la velocidad, por lo que la rapidez con la que cae el clavadista es de $15\, m/seg$)

Podemos obtener información extra si analizamos con mayor profundidad la situación:



La función posición corresponde a una función cuadrática y dado el contexto del problema su dominio corresponde a $[0,2]$. En la imagen de la izquierda podemos observar la gráfica de $s(t)$, mientras que en la de la derecha observamos la situación contextualizada al clavadista. De acuerdo con esto, es posible afirmar que la altura máxima alcanzada por él es de 11,25 metros al transcurrir 0,5 segundos, es decir, cuando $0 < t < 1/2$ el clavadista asciende, por lo que si quisiéramos calcular su velocidad en ese intervalo de tiempo obtendremos una velocidad positiva, luego si $1/2 < t < 2$ la velocidad es negativa, puesto que el clavadista desciende.

Observación 2: Para comprender de mejor manera este ejemplo se sugiere profundizar en el concepto de **velocidad instantánea**, la cual se desprende de la **función posición** de un objeto. También puede investigar acerca de **aceleración** (derivada de la velocidad con respecto al tiempo) y **caída libre**.

***Ejemplo 3* (Razón de cambio en contexto económico):** Un fabricante estima que cuando se producen x unidades de cierto artículo, el costo total es de $C(x) = \frac{1}{8}x^2 + 3x + 98$ dólares, y además, que todas las x unidades se venderán, cuando el precio sea de $p(x) = \frac{1}{3}(75 - x)$ dólares por unidad.

a) Encuentre el costo marginal y el ingreso marginal.

Primero debemos saber que si $C(x)$ es el costo de producir x unidades de un determinado producto, entonces el costo marginal es el costo adicional de incrementar el nivel de producción en una unidad. Esto lo podemos estimar a través de su derivada $C'(x) = \frac{1}{4}x + 3$.

Ahora, el ingreso marginal corresponde a la derivada del ingreso y es la tasa de cambio de ingreso respecto al número de unidades vendidas, en otras palabras, corresponde al ingreso adicional generado al producir una unidad más de cierto producto. Ahora bien, el ingreso $I(x) = xp(x)$, en este caso $I(x) = 25x - \frac{1}{3}x^2$. Así, el ingreso marginal es $I'(x) = 25 - \frac{2}{3}x$.

b) Utilice el costo marginal para estimar el costo de producir la novena unidad.

El costo de producir la novena unidad es el cambio en el costo cuando x se incrementa de 8 a 9 unidades, y se puede obtener como $C'(8) = \$5$.

c) ¿Cuál es el costo real de producir la novena unidad?

$$C(9) - C(8) = \$5{,}13$$

d) Utilice el ingreso marginal para estimar el ingreso derivado de la venta de la novena unidad.

El ingreso al producir la novena unidad es el cambio en el ingreso generado cuando x se incrementa de 8 a 9 unidades y lo podemos obtener como $I'(8) = \$19{,}67$.

e) ¿Cuál es el ingreso real derivado de la venta de la novena unidad?

$$I(9) - I(8) = \$19{,}33$$

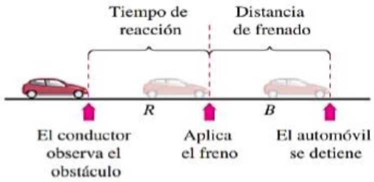
<u>Observación 3:</u> Lo que se realizó en el ejemplo anterior en economía se conoce como **análisis marginal** (se sugiere profundizar en esto). Dentro de dicho análisis también existe la **utilidad marginal**, la cual corresponde a la derivada de la utilidad y se interpreta como la utilidad adicional obtenida al producir una unidad más de cierto producto ($utilidad = ingresos - costos$). Por otra parte, se sugiere investigar acerca de las **tasas de variación** en economía.

<u>Observación 4:</u> La razón de cambio tiene diversas aplicaciones en diversos contextos, aparte de los ya mencionados en los ejemplos anteriores, se aplica en construcción, deportes, electricidad, diseño de máquinas, ángulos de elevación, medicina, entre muchos otros.

Aplicación de la sesión: Un objeto es lanzado desde una torre de 100 metros de altura. Después de t segundos, la altura del objeto es $100 - 4{,}9t\ 2\ m$. ¿Cuál es su velocidad 2 segundos después de haber sido lanzado?

Propuesta de ejercicios

1. La distancia de frenado de un automóvil que viaja a una velocidad v (kilómetros por hora), es la distancia R (metros) que recorre durante el tiempo de reacción del conductor más la distancia B (metros) que recorre una vez aplicados los frenos (vea la figura). La tabla muestra los resultados de un experimento al respecto.



Velocidad, v	20	40	60	80	100
Distancia durante el tiempo de reacción, R	8.3	16.7	25.0	33.3	41.7
Distancia durante el tiempo de frenado, B	2.3	9.0	20.2	35.8	55.9

a. Utilice las funciones de regresión de una herramienta de graficación para obtener un modelo lineal para el tiempo de reacción R.
b. Utilice las funciones de regresión de una herramienta de graficación para obtener un modelo cuadrático para la distancia aplicando los frenos B.
c. Encuentre el polinomio que expresa la distancia total T recorrida hasta que el vehículo se detiene por completo.
d. Utilice una herramienta de graficación para representar las funciones R, B y T en una misma ventana.
e. Calcule la derivada de T y la razón de cambio de la distancia total de frenado para $v = 40, v = 80$ y $v = 100$.
f. A partir de los resultados de este ejercicio, elabore sus conclusiones acerca del comportamiento de la distancia total de frenado a medida que se aumenta la velocidad.

2. Una explosión de dinamita lanza una roca pesada directamente hacia arriba, con una velocidad de $160\, pies/seg$ (alrededor de $109\, millas/h$). Después de t segundos la roca alcanza una altura de $s = 160t - 16t^2$ pies.

a. ¿Qué altura alcanza la roca?
b. ¿Cuáles son la velocidad y la rapidez de la roca cuando está a 256 pies del suelo durante el ascenso?, ¿durante el descenso?
c. ¿Cuál es la aceleración de la roca en cualquier tiempo t durante el vuelo (después de la explosión)?
d. ¿Cuándo choca la roca nuevamente contra el suelo?

3. A pesar de que la erupción del volcán hawaiano Kilauea Iki, en noviembre de 1959, empezó con una línea de brotes de lava a lo largo de la pared del cráter, más tarde la actividad se concentró en un solo orificio ubicado en el piso del cráter. En un momento dado, la lava lanzada desde dicho orificio alcanzó una altura de 1900 pies (un récord mundial). ¿Cuál fue la velocidad de salida de la lava en pies por segundo? ¿En millas por hora?

Sugerencia: Si v_0 es la velocidad de salida de una partícula de lava, su altura t segundos más tarde será $s = v_0 t - 16t^2$ pies. Empiece por determinar el tiempo en el que $ds/dt = 0$. Desprecie la resistencia del aire.

4. Un estudio ambiental de cierta comunidad suburbana indica que dentro de t años el nivel promedio de monóxido de carbono en el aire será de $Q(t) = 0{,}05t^2 + 0{,}1t + 3{,}4$ partes por millón.

a. ¿A qué razón cambiará el nivel de monóxido de carbono con respecto al tiempo dentro de 1 año?
b. ¿En cuánto cambiará el nivel de monóxido de carbono este año?
c. ¿En cuánto cambiará el nivel de monóxido de carbono en los próximos 2 años?

5. Un equipo de investigación médica determina que t días después del inicio de una epidemia, $N(t) = 10t^3 + 5t + \sqrt{t}$ personas estarán infectadas, para $0 \leq t \leq 20$ ¿A qué razón se incrementa la población infectada en el noveno día?

6. En cierta fábrica, el costo total de fabricar q unidades es $C(q) = 0{,}2q^2 + q + 900$ dólares. Se ha determinado que se fabricará aproximadamente $q(t) = t^2 + 100t$ unidades durante las primeras t horas de una corrida de producción. Calcule la razón a la que cambia el costo total de fabricación con respecto al tiempo 1 hora después iniciar la producción.

7. El ingreso mensual total de un fabricante es $I(q) = 240q - 0{,}05q^2$ dólares, cuando se producen y venden q unidades durante el mes. Actualmente, el fabricante produce 80 unidades al mes y planea incrementar la producción mensual en 1 unidad.

a. Utilice el análisis marginal para calcular el ingreso adicional que se generará por la producción y venta de la unidad 81.

b. Calcule el ingreso adicional real que se generará por la producción y venta de la unidad 81.

8. En una construcción se está derramando arena de un saco de tal manera que después de t segundos, quedan $S(t) = 50\left(1 - \frac{t^2}{15}\right)^3$ libras de arena en el saco.

a. ¿Cuánta arena había originalmente en el saco?
b. ¿A qué razón se derrama la arena del saco después de 1 segundo?
c. ¿Cuánto tiempo toma que se derrame toda la arena del saco? ¿A qué razón se derramará la arena del saco en el instante en el que se vacía?

9. Una escalera de 10 pies de longitud se apoya en una pared. La parte superior de la escalera se resbala pared abajo a una razón de $3\ pies/seg$ ¿Con qué rapidez se aleja de la pared la base de la escalera cuando la parte superior está a 6 pies sobre el suelo? Realiza un dibujo de la situación.

10. La palomilla de la manzana es un insecto que daña seriamente a las manzanas. Los gusanos de la manzana adultos emergen de sus capullos en primavera. Pronto se aparean y la hembra pone hasta 130 huevos pequeños en las hojas de los manzanos. Una vez que la larva de este gusano, también llamado gusano común de las manzanas sale de un huevo, va en busca de una manzana. El tiempo comprendido desde que sale del huevo hasta que encuentra la manzana se denomina como período de búsqueda. Cuando el gusano de la manzana encuentra una, se introduce en ella y se come la fruta y las semillas, con lo que acabará arruinándola. Después de 4 semanas, el gusano de la manzana sale de ella y se desliza bajo la corteza del árbol o en el suelo donde forma un capullo.

Las investigaciones acerca del comportamiento del gusano de las manzanas indican que la duración del período de búsqueda $S(t)$ y el porcentaje de larvas que sobreviven este período de búsqueda $N(T)$, dependen de la temperatura del aire T. Métodos de análisis de datos (regresión polinomial) aplicados a datos registrados a partir de las observaciones sugieren que si T se mide en grados Celsius con $20 \leq T \leq 30$, entonces $S(T)$ y $N(T)$ se pueden modelar mediante $S(T) = (-0{,}03T^2 + 1{,}6T - 13{,}65)^{-1}$ días y $N(T) = -0{,}85T^2 + 45{,}4T - 547$.

a. ¿Qué predicen estas fórmulas $S(T)$ y $N(T)$ sobre la duración del período de búsqueda y el porcentaje de larvas que sobreviven el período de búsqueda, cuando la temperatura del aire es de 25 grados Celsius?

b. Trace la gráfica de $N(t)$ y determine la temperatura a la cual sobrevive el mayor porcentaje de gusanos de la manzana. Luego determine la temperatura a la cual sobrevive el menor porcentaje de larvas (Recuerde $20 \leq T \leq 30$).

c. Determine $\frac{dS}{dT}$, la tasa de cambio del período de búsqueda con respecto a la temperatura T ¿Cuándo es igual a 0 esta razón? ¿Qué sucede (si es que ocurre algo) cuando $\frac{dS}{dT} = 0$?

d. Encuentre $\frac{dN}{dS}$, la tasa de cambio de porcentaje de larvas que sobreviven al período de búsqueda con respecto a la duración del período de búsqueda empleando la regla de la cadena, $\frac{dN}{dT} = \frac{dN}{dS} \cdot \frac{dS}{dT}$ ¿Qué información proporciona (si es que proporciona alguna) esta razón?

20

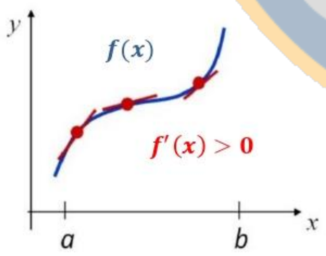
Sesión 3	
Duración	2 horas
Propósito	Identificar y obtener extremos relativos y absolutos, concavidad y puntos de inflexión de una función, utilizando los criterios de la primera y segunda derivada.
Contenidos a abordar	Extremos relativos y absolutos, concavidad y puntos de inflexión de una función.
Descripción general	En esta sesión será capaz de aplicar el criterio de la primera y segunda derivada para obtener extremos relativos y absolutos, concavidad y puntos de inflexión de una función. Además, se promueve el uso de GeoGebra para graficar. Al finalizar, se entrega una propuesta de ejercicios acerca del tema tratado, los cuales serán retroalimentados entre pares.

Extremos relativos y absolutos de una función

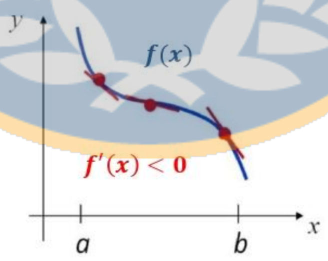
1. **Criterio para las funciones crecientes y decrecientes**

Sea f una función que es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto $]a, b[$

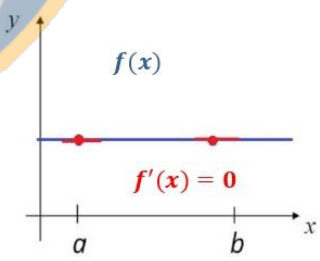
1. Si $f'(x) > 0$ para todo x en $]a, b[$, entonces f es **creciente** en $[a, b]$
2. Si $f'(x) < 0$ para todo x en $]a, b[$entonces f es **decreciente** en $[a, b]$
3. Si $f'(x) = 0$ para todo x en $]a, b[$entonces f es **constante** en $[a, b]$



La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en cualquier punto es positiva.



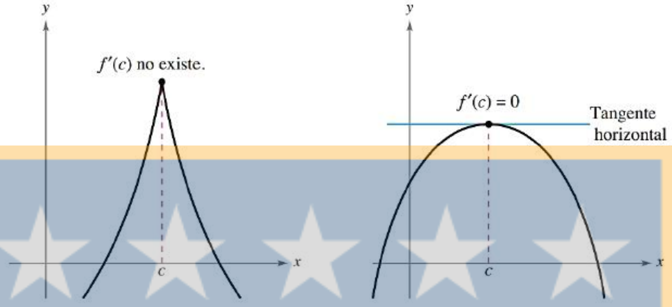
La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en cualquier punto es negativa.



La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en cualquier punto es cero.

2. Valor crítico

Def. Sea f una función definida en c. Si $f'(c) = 0$ o si f no es derivable en c, entonces c se llama valor crítico de f.



c es un punto crítico de f.

3. Estrategias para determinar los intervalos en los que una función es creciente o decreciente

Sea la función f continua en el intervalo $]a, b[$. Para encontrar los intervalos sobre los cuales f es creciente o decreciente, se puede orientar por lo siguiente:

1. Localizar los valores críticos de f en $]a, b[$, y utilizarlos para determinar posibles intervalos de crecimiento y decrecimiento.
2. Determinar el signo de $f'(x)$ en un valor de prueba en cada uno de los intervalos.
3. Utilizar los criterios para las funciones crecientes y decrecientes para determinar si f es creciente o decreciente en cada intervalo.

Estas estrategias también son válidas si el intervalo $]a, b[$ se sustituye por un intervalo de la forma $]-\infty, b[$, $]a, \infty[$ o $]-\infty, \infty[$.

Ejemplo 1: Determine los intervalos abiertos sobre los cuales $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ es creciente o decreciente.

Solución: La función f es derivable en todos los números reales. Luego $f'(x) = 3x^2 - 3x$. Ahora, determinamos los valores críticos cuando $f'(x) = 0$:

$$3x^2 - 3x = 0 \ /: 3$$

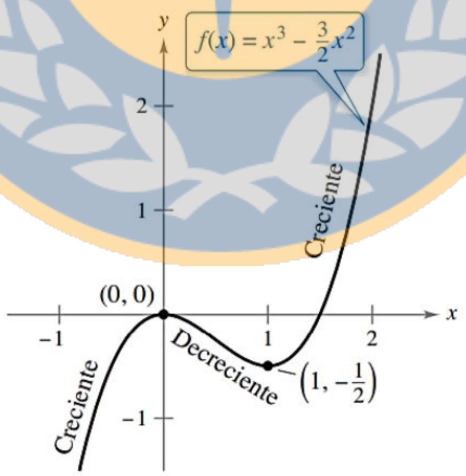
22

$$x^2 - x = 0$$
$$x(x - 1) = 0$$
$$x = 0 \quad o \quad x = 1$$

Como no hay puntos para los cuales f' no existe, podemos concluir que $x = 0$ y $x = 1$ son los únicos valores críticos. La siguiente tabla resume la prueba de los tres intervalos determinados por estos dos valores críticos:

	$-\infty < x <$	0	$< x <$	1	$< x < \infty$
x	-	0	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	0	+
$x(x-1)$	+	0	-	0	+
Conclusión	**Creciente**		**Decreciente**		**Creciente**

Por lo tanto, f es creciente en los intervalos $]-\infty, 0[$ y $]1, \infty[$ y decreciente en el intervalo $]0,1[$, tal como se observa en la gráfica de f.

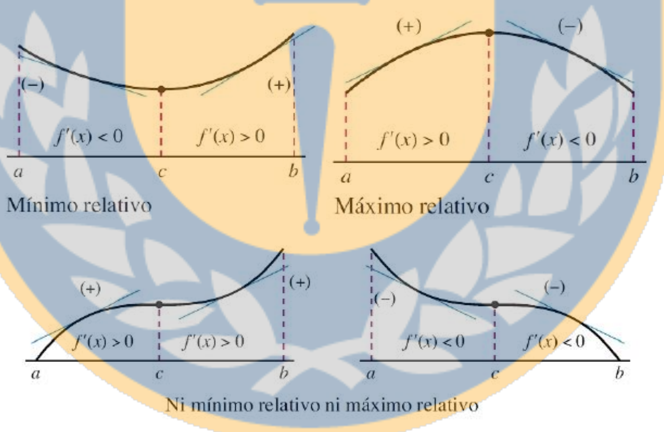


4. **Criterio de la primera derivada para valores extremos relativos (locales)**

Sea c un valor crítico de una función f que es continua en un intervalo abierto I que contiene a c. Si f es derivable en el intervalo, excepto posiblemente en c, entonces $f(c)$ puede clasificarse:

1. Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en valores levemente menores que c, versus valores levemente mayores a c, entonces f tiene un **mínimo relativo** en $(c, f(c))$.
2. Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en valores levemente menores que c, versus valores levemente mayores a c, entonces f tiene un **máximo relativo** en $(c, f(c))$.

3. Si $f'(x)$ no cambia de signo en valores levemente menores que c, versus valores levemente mayores a c, entonces $f(c)$ no es **un mínimo relativo ni un máximo relativo**.



Ejemplo 2: En el mismo ejemplo anterior, si analizamos la tabla resumen obtenemos lo siguiente:

	$-\infty < x <$	0	$< x <$	1	$< x < \infty$
x	-	0	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	0	+
$x(x - 1)$	+	0	-	0	+
Conclusión	Creciente	**Máximo**	Decreciente	**Mínimo**	Creciente

Así, la función f tiene un máximo relativo en $(0, f(0))$ y un mínimo relativo en $(1, f(1))$, es decir, en $(0,0)$ y $(1, -1/2)$.

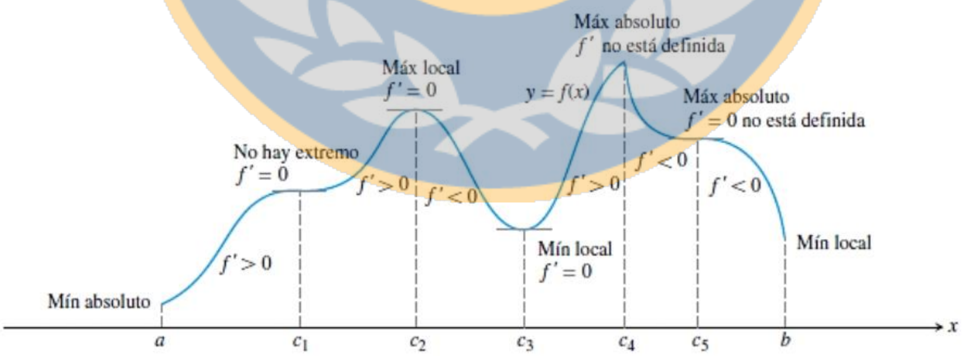
5. Mínimo y máximo absoluto

Sea f una función con dominio D. Decimos que f tiene un valor **máximo absoluto** en D en un valor c si:

$$f(x) \leq f(c) \text{ para toda } x \text{ en } D$$

y un valor **mínimo absoluto** en D en un valor c si:

$$f(x) \geq f(c) \text{ para toda } x \text{ en } D.$$



Ejemplo 3: El telescopio espacial Hubble fue puesto en operación el 24 de abril de 1990, por el transbordador espacial Discovery. Un modelo para la velocidad del transbordador durante esta misión, desde el lanzamiento en $t = 0$ hasta que los cohetes auxiliares de combustible sólido se desprenden en $t = 126\ seg$, está dado por

$$v(t) = 0{,}001302t^3 - 0{,}09029t^2 + 23{,}61t - 3{,}083 \text{ (en pies por segundo)}$$

Con este modelo, estime los valores máximo y mínimo absolutos de la aceleración del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares.

Solución: Observamos que se nos pide encontrar los valores extremos de la función aceleración y en el enunciado nos dan la función velocidad, por lo que debemos derivarla:

$$a(t) = v'(t) = 0{,}003906t^2 - 0{,}18058\,t + 23{,}61$$

Ahora, derivamos la función de aceleración para posteriormente encontrar los puntos críticos, considerando que $0 \leq t \leq 126$:

$$a'(t) = 0{,}007812t - 0{,}18058$$

El único punto crítico es $t_1 \approx 23{,}12$, ya que:

$$a'(t) = 0$$
$$0{,}007812t - 0{,}18058 = 0$$
$$t_1 \approx 23{,}12$$

Evaluando $a(t)$ en el valor crítico y en los extremos del intervalo, se obtiene que:

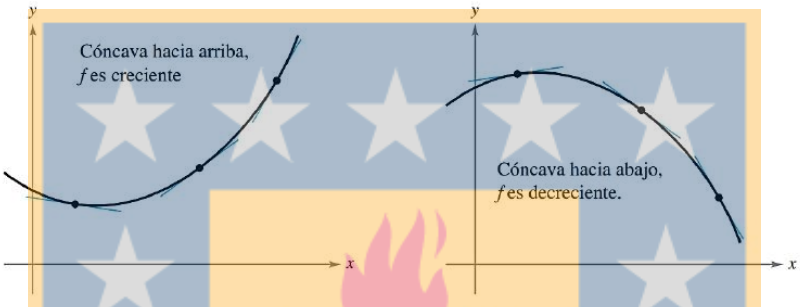
$$a(0) = 23{,}61 \quad ; \quad a(t_1) \approx 21{,}52 \quad ; \quad a(126) \approx 62{,}87$$

Por lo tanto, la aceleración máxima del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares es aproximadamente de $62{,}87\ pies/s^2$ y la aceleración mínima es aproximadamente de $21{,}52\ pies/s^2$.

Concavidad

Def. Sea la función f derivable en un intervalo I. La gráfica de f es:

i. **Cóncava hacia arriba** sobre I si f' es creciente en el intervalo.
ii. **Cóncava hacia abajo** en I si f' es decreciente en el intervalo.

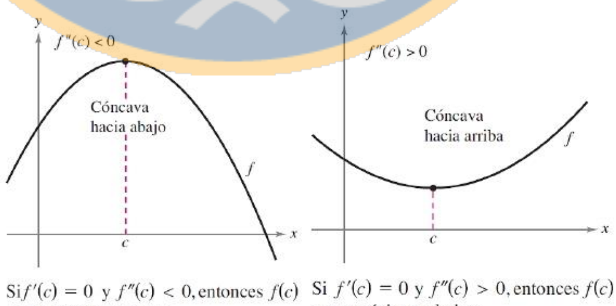


(a) La gráfica de f se encuentra sobre sus rectas tangentes.
(b) La gráfica de f se encuentra debajo de sus rectas tangentes.

1. Criterios para concavidad

Sea f una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto I:

1. Si $f''(x) > 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I.
2. Si $f''(x) < 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I.



Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo
Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo

Ejemplo: Determine los intervalos abiertos sobre los cuales la gráfica de $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$ es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Solución: Primero, podemos observar que f es continua en los números reales. Luego, obtenemos la segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

Ahora, encontramos los valores críticos cuando $f''(x) = 0$. Al resolver la ecuación $\frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3} = 0$ obtenemos que $x = \pm 1$. Con esta información realizamos una tabla resumen para analizar:

	$-\infty < x <$	-1	$< x <$	1	$< x < \infty$
$36(x^2-1)$	+	0	-	0	+
$(x^2+3)^3$	+	+	+	+	+
$\frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$	+	0	-	0	+
Conclusión	Cóncava hacia arriba		Cóncava hacia abajo		Cóncava hacia arriba

Así, la función es cóncava hacia arriba en los intervalos $]-\infty,-1[$ y $]1,\infty[$ y cóncava hacia abajo en el intervalo $]-1,1[$.

Punto de inflexión

Def. Sea f una función que es continua en un intervalo abierto, y sea c un valor en ese intervalo. Diremos que f tiene un **punto de inflexión** en el punto $P(c, f(c))$, si P separa arcos de concavidad opuesta.

Si $P(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces $f''(c) = 0$ o f'' no existe en $x = c$.

Ejemplo: En el ejemplo anterior podemos observar que el punto $(-1, f(-1)) = (-1,3/2)$ es un punto de inflexión, ya que antes de ese punto hay una concavidad hacia arriba y posteriormente una concavidad hacia abajo (cambio de concavidad). Análogamente, el punto $(1, f(1)) = (1,3/2)$ también es punto de inflexión, dado que hay un cambio de concavidad de negativa (hacia abajo) a positiva (hacia arriba).

Aplicación de la sesión: Trace la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Para ello obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos, mínimos, concavidad y puntos de inflexión. Verifique lo obtenido en GeoGebra.

Propuesta de ejercicios

1. Encuentre los valores máximo y mínimo absolutos de cada función en el intervalo dado. Después grafique la función. Identifique en la gráfica los puntos en dónde se alcanzan los extremos absolutos e incluya sus coordenadas.

a. $f(x) = \frac{2}{3}x - 5, -2 \leq x \leq 3$
b. $h(x) = -\frac{1}{x}, -2 \leq x \leq -1$
c. $g(x) = -\sqrt{5 - x^2}, -\sqrt{5} \leq x \leq 0$

2. La tos obliga a que la tráquea (conducto de aire) se contraiga, lo cual afecta la velocidad v del aire que pasa a través de este conducto. La velocidad del aire al toser es:

$$v = k(R - r)r^2, \qquad 0 \leq r \leq R$$

donde k es una constante, R es el radio normal de la tráquea y r es el radio cuando se tose ¿Qué radio producirá la máxima velocidad del aire?

3. La altitud (en pies) alcanzada por un cohete a los t segundos de vuelo viene dada por la función $h(t) = 0{,}1t^2(t - 7)^4, 0 \leq t \leq 7$ ¿En qué intervalo de tiempo el cohete está ascendiendo? ¿En qué intervalo de tiempo el cohete está descendiendo? ¿Cuál es la máxima altura alcanzada por el cohete y en qué momento la alcanza?

4. Una compañía estima que cuando se gasten x miles de dólares en mercadotecnia de cierto producto se venderá, $Q(x)$ unidades del producto, donde:

$$Q(x) = -4x^3 + 252x^2 - 3200x + 17000 \text{ para } 10 \leq x \leq 40$$

¿Dónde tiene la gráfica un punto de inflexión? ¿Cuál es el significado del gasto en mercadotecnia que corresponde a este punto? Trace la gráfica de $Q(x)$.

5. Encuentre los valores extremos de la función, puntos de inflexión y concavidad. Grafique.

a. $y = x^3 - 2x + 4$
b. $y = x^3 - 3x^2 + 5$
c. $y = \frac{x}{x^2+1}$
d. $y = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$
e. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Sesión 4	
Duración	2 horas
Propósito	Resolver problemas de optimización en diversos contextos.
Contenidos a abordar	Problemas de máximos y mínimos.
Descripción general	En esta sesión será capaz de resolver problemas de optimización utilizando los métodos para encontrar valores extremos de una función. Al finalizar, se entrega una propuesta de ejercicios, los cuales deberán serán compartidos en una exposición oral al cierre de la sesión.

Problemas de máximos y mínimos

Los métodos que se han presentado para encontrar los valores extremos de una función tienen aplicaciones prácticas en diversos contextos en donde se requiere maximizar o minimizar algo. El cálculo diferencial es una herramienta que permite resolver problemas que requieren maximizar o minimizar una función. Por ejemplo, un empresario quiere minimizar los costos y maximizar las ganancias, un viajero quiere minimizar el tiempo de transporte, el principio de Fermat en óptica establece que la luz sigue el camino que toma el menor tiempo, etc.

Pasos para la resolución de problemas aplicados de optimización:

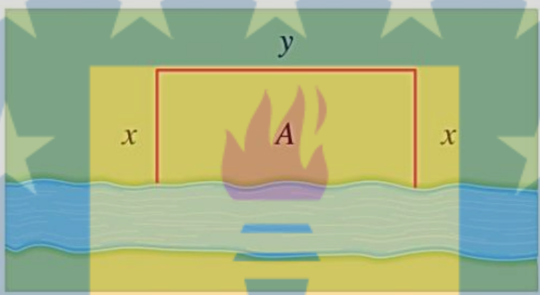
1. Leer el problema: lea el problema hasta que lo entienda. ¿Qué datos se dan? ¿Cuál es la cantidad desconocida que hay que optimizar?
2. Hacer un dibujo: identifique con una etiqueta cualquier parte que pueda ser importante para el problema.
3. Introducir variables: haga una lista de las relaciones que encuentre en el dibujo y en el problema como una ecuación o una expresión algebraica, e identifique la variable desconocida.
4. Escribir una ecuación para la cantidad desconocida: de ser posible, exprese la incógnita como función de una sola variable o en dos ecuaciones con dos incógnitas. Para ello puede ser necesaria una manipulación considerable.
5. Examinar los valores críticos y los extremos del dominio de la incógnita: use la información con que cuenta acerca de la forma de la gráfica de la función. Emplee la

primera y segunda derivadas para identificar y clasificar los valores críticos de la función.

6. Verifique los resultados obtenidos.

Ejemplo 1: Un agricultor tiene 2400 pies de material con el que quiere cercar un campo rectangular que bordea un río recto, de modo que no necesita cerco a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener el campo para encerrar el área más grande?

Para hacerse una idea de lo que está sucediendo en este problema, vamos a representarlo:



Queremos maximizar el área A del rectángulo. Sea x e y el ancho y largo, respectivamente, del rectángulo (en pies). Entonces, expresamos A en términos de x e y, es decir, $A = xy$.

Ahora, necesitamos expresar el área en términos de una sola variable. Para ello, utilizamos la información que poseemos acerca de la cantidad total de material con el que se cuenta para cercar el campo, es decir, $2x + y = 2400\, pies$.

De la ecuación obtenida anteriormente obtenemos que $y = 2400 - 2x$. Con esto, podemos expresar el área del campo solo en función de x de la siguiente manera:

$$A = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$$

Así, la función a maximizar es $A(x) = 2400x - 2x^2$, con $0 \leq x \leq 1200$.

Derivamos la función anterior, obteniendo $A'(x) = 2400 - 4x$ y encontramos los valores críticos cuando $A'(x) = 0$. Al resolver la ecuación anterior resulta $x = 600$.

El valor máximo del área se producirá en $x = 600$ o en alguno de los extremos del intervalo. Analizamos:

$$A(0) = 0 \qquad A(600) = 720000 \qquad A(1200) = 0$$

De lo anterior se concluye que, para encerrar el área máxima, el campo deberá tener un ancho de 600 pies y un largo de 1200 pies.

Verificamos, con $x = 600$ e $y = 1200$:

$$2x + y = 2 \cdot 600 + 1200 = 1200 + 1200 = 2400 \; pies$$

Ejemplo 2 (Economía): Una compañía de autobuses alquilará un autobús con capacidad para 50 personas a grupos de 35 personas o más. Si un grupo tiene exactamente 35 personas, cada persona paga $60. En grupos mayores la tarifa de cada uno se reduce en $1 por cada persona adicional a las 35. Determine el tamaño del grupo para el cual el ingreso de la compañía de autobuses será el máximo.

Solución: Sea I el ingreso de la compañía de autobuses. Entonces

$$I = (número\ de\ personas\ en\ el\ grupo)(tarifa\ \ por\ persona)$$

En este caso diremos que x es el número de personas adicionales a las 35, por lo que:

$$Número\ de\ personas\ en\ el\ grupo = 35 + x$$
$$Tarifa\ por\ persona = 60 - x$$

De lo anterior se tiene que la función ingreso corresponde a $I(x) = (35 + x)(60 - x)$.

Ahora, hay que considerar que el número de personas en el grupo es mayor o igual a 35 pero menor o igual a 50, por lo que $0 \leq x \leq 15$.

Se desea maximizar el ingreso de la compañía de autobuses. Para ello, primero derivaremos $I(x)$, obteniendo $I'(x) = 25 - 2x$. A continuación encontramos los valores críticos cuando $I'(x) = 0$. Al resolver dicha ecuación se tiene que $x = 12{,}5$.

Analizamos lo que ocurre con el ingreso en el valor crítico y en los extremos del intervalo:

$$I(0) = 2100 \qquad I(12{,}5) = 2256{,}25 \qquad I(15) = 2250$$

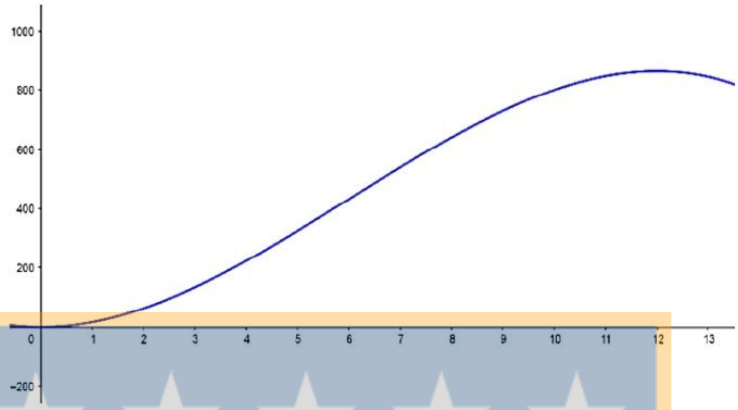
De lo anterior se deduce que el máximo absoluto de $I(x)$, en el intervalo dado, se produce cuando $x = 12{,}5$. Sin embargo, debemos considerar el contexto de la situación, y dado que x representa un número de personas debe ser un número entero. Para determinar el valor entero óptimo de x observamos que I es creciente para $0 < x < 12{,}5$ (puesto que $I'(x) > 0$) y decreciente para $x > 12{,}5$ (puesto que $I'(x) < 0$), por lo que el valor entero óptimo de x es 12 o 13, ya que $I(12) = 2256$ y $I(13) = 2256$.

Así, se concluye que el ingreso de la compañía de autobuses será máximo cuando el grupo tenga 12 o 13 personas adicionales a las 35, es decir, para grupos de 47 o 48 personas el ingreso máximo será de $2256.

Observación: El ejemplo anterior corresponde a una aplicación de las derivadas a la economía, para determinar un **ingreso máximo** (podría haber sido mínimo). Estas también se pueden aplicar para determinar **costos y utilidades máximas o mínimas**. Se sugiere profundizar en estos temas, así como también investigar acerca de la **Ley de Turgot** y la **elasticidad de la demanda**.

Ejemplo 3 (Ciencias): La fotosíntesis se genera en las hojas de las plantas y su producto es oxígeno, uno de los elementos fundamentales para la vida. En la imagen se muestra el gráfico de una función que modela aproximadamente la producción diaria de oxígeno de un árbol.

- La función f representa un polinomio de tercer grado con $f(t) = at^3 + bt^2$
- La función f representa el volumen total del oxígeno producido en litros hasta la hora indicada.
- La variable t representa el tiempo en horas que han pasado desde la salida del sol.



a. Determina los parámetros a y b con la siguiente información:

- En el instante $t = 6$ horas después de la salida del sol, se han acumulado 540 litros de oxígeno producido.
- En el mismo instante se empieza a cambiar la tendencia del oxígeno producido.

b. Con los resultados de la actividad anterior y utilizando herramientas tecnológicas digitales, elabora el gráfico de la función f.

c. Determina algebraicamente el punto máximo de la función f.

Solución:

a. Que en el instante $t = 6$ horas se hayan acumulado 540 litros de oxígeno producido significa que $f(6) = 540$. Además, sabemos que $f(t) = at^3 + bt^2$, por lo que:

$$f(6) = 6^3a + 6^2b = 216a + 36b.$$

De lo anterior se tiene que:

$$216a + 36b = 540$$
$$6a + b = 15$$
$$b = 15 - 6a \qquad (1)$$

Además, si en el mismo instante empieza a cambiar la tendencia del oxígeno producido significa que la tasa marginal de oxígeno pasa de creciente a decreciente, por lo que hay un

35

punto de inflexión, ya que como se observa en gráfica, antes de dicho punto hay una concavidad hacia arriba y después una concavidad hacia abajo. Esto implica que $f''(6) = 0$.

Ahora, si derivamos la función f obtenemos que $f'(t) = 3at^2 + 2bt$. Al calcular la segunda derivada resulta $f''(t) = 6at + 2b$. Así, $f''(6) = 36a + 2b$.

Luego, si $f''(6) = 0$, entonces se cumple que:

$$36a + 2b = 0$$

$$18a + b = 0$$

$$b = -18a \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2):

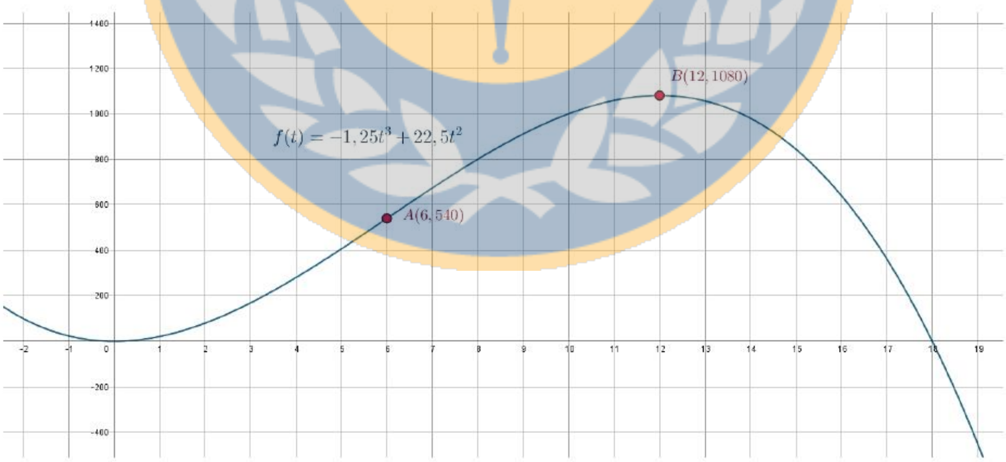
$$15 - 6a = -18a$$

$$a = -1{,}25$$

Con $a = -1{,}25$ reemplazamos en (2) y obtenemos que $b = 22{,}5$.

Por lo tanto, $f(t) = -1{,}25t^3 + 22{,}5t^2$.

b. Podemos graficar la función $f(t) = -1{,}25t^3 + 22{,}5t^2$ en GeoGebra:



c. Observando la gráfica se evidencia que se produce un máximo en $t = 12\ horas$. Si queremos determinarlo de manera algebraica lo primero que debemos hacer es derivar la función para posteriormente encontrar valores críticos cuando $f'(t) = 0$:

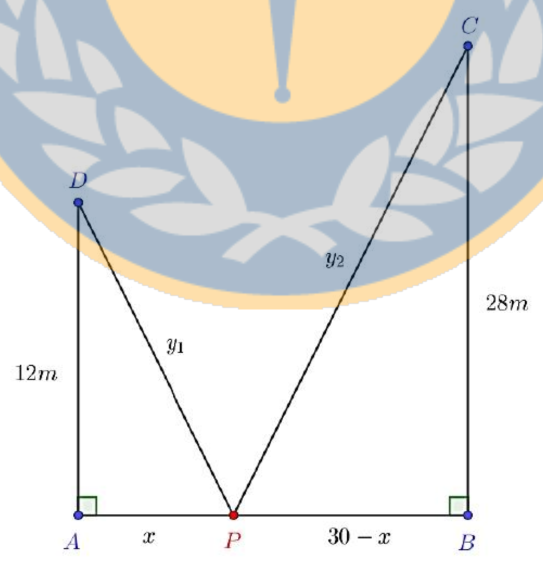
$$f'(t) = -3{,}75t^2 + 45t \Rightarrow t = 0 \quad o \quad t = 12$$

Ahora, $f(0) = 0$ y $f(12) = 1080$. De esto se concluye que cuando han transcurrido 12 horas desde la salida del sol, la producción de oxígeno de un árbol es máxima y corresponde 1080 litros.

Observación: Este ejemplo fue extraído de la unidad 3 del Programa de Límites, Derivadas e Integrales para 3° y 4° Medio, el cual posee una conexión interdisciplinaria con la asignatura de Ciencias para la ciudadanía (OA c, d, 3° y 4° medio).

***Ejemplo 4* (Longitud mínima):** Dos postes, uno de 12 metros de alto y otro de 28 metros de alto, se encuentran separados por 30 metros. Están sujetos por dos cables, atados a una única estaca desde el nivel del suelo hasta la punta de cada poste. Si la estaca se ubica entre los postes ¿dónde debe colocarse para ocupar la mínima cantidad de cable?

Solución: Primero, representamos la situación anterior en un dibujo:



Sean y_1 e y_2 los cables que sujetan a los postes de 12 m y 28 m, respectivamente, y P la estaca a los que están atados los cables. Debemos minimizar la cantidad total de cable a utilizar. Es decir, la función a minimizar es $f(x) = y_1 + y_2$.

Ahora, por el Teorema de Pitágoras podemos establecer las siguientes relaciones:

$$y_1 = \sqrt{x^2 + 144}$$
$$y_2 = \sqrt{(30 - x)^2 + 784} = \sqrt{x^2 - 60x + 1684}$$

Luego: $f(x) = y_1 + y_2 = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1684}, 0 \leq x \leq 30.$

Derivamos $f(x)$ y obtenemos que:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1684}}$$

A continuación, buscamos los valores críticos cuando $f'(x) = 0$. Al resolver la ecuación obtenemos que $x_1 = 9$ y $x_2 = -22,5$. Como x_2 no pertenece al dominio de $f(x)$, analizamos lo que ocurre con x_1 y los extremos del intervalo:

$$f(0) \approx 53,04 \qquad f(9) = 50 \qquad f(30) \approx 60,31$$

De lo anterior se concluye que la estaca debe colocarse a 9 metros del poste de 12 metros, para utilizar la mínima cantidad de cable correspondiente a 50 metros.

<u>**Observación:**</u> Los ejemplos anteriores son solo algunas de las tantas aplicaciones que tienen las derivadas en resolución de problemas de máximos y mínimos. Se sugiere investigar aún más de este tema.

Aplicación de la sesión: Se está diseñando un cartel rectangular cuya área de impresión es $50\ pulg^2$, con márgenes superior e inferior de 4 pulgadas y márgenes laterales de 2 pulgadas cada uno. ¿Qué dimensiones debe tener el cartel para minimizar la cantidad de papel usada?

Problemas propuestos

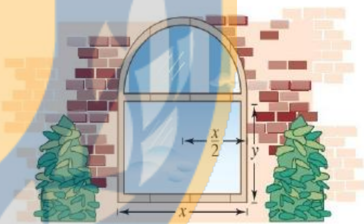
1. Dos pueblos están en el lado sur de un río. Se debe ubicar una estación de bombeo para abastecer de agua los dos pueblos. Una tubería será conectada desde la estación de bombeo a cada pueblo a lo largo de una línea que conecte el pueblo con la estación de bombeo. Ubique la estación de bombeo de manera que se minimice la cantidad de tubería que debe construirse.

2. Se ha pedido que se diseñe una lata con capacidad para 1 litro, con forma de un cilindro circular recto ¿De qué dimensiones debe ser la lata para usar la menor cantidad posible de material?

3. Un equipo de beisbol juega en un estadio con capacidad para 55000 espectadores. Con el precio de las entradas a \$10, la asistencia promedio había sido de 27000. Cuando los precios se redujeron a \$8, la asistencia promedio subió a 33 000.

a. Encuentre la función demanda, suponiendo que es lineal.
b. ¿Cómo se deben establecer los precios de las entradas para maximizar los ingresos?

4. Una ventana Normanda se construye juntando un semicírculo a la parte superior de una ventana rectangular ordinaria (vea la figura). Encuentre las dimensiones de una ventana Normanda de área máxima si el perímetro total es de 16 pies.



5. Una refinería de petróleo se encuentra en la orilla norte de un río recto que tiene 2 km de ancho. Se debe construir una tubería desde la refinería a tanques de almacenamiento situados en la orilla sur del río, 6 km al este de la refinería. El costo de colocación de tubería es \$400000/km sobre la tierra a un punto P a la orilla norte y \$800000/km bajo el río a los tanques. Para minimizar el costo de la tubería, ¿dónde debe ubicarse P?

6. La ley de Poiseuille establece que la velocidad de la sangre que está a r centímetros del eje central de una arteria de radio R es $S(r) = c(R^2 - r^2)$, donde c es una constante positiva. ¿Dónde es mayor la velocidad de la sangre?

39

7. Se le pide a un carpintero construir una caja abierta con base cuadrada. Los lados de la caja costarán \$3 por metro cuadrado, y la base costará \$4 por metro cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de máximo volumen que se puede construir con \$48?

8. Una empresa de plásticos ha recibido un pedido del departamento de recreación de la ciudad para fabricar 8000 tablas de plástico para su programa de natación en verano. La empresa cuenta con 10 máquinas, cada una puede producir 30 tablas por hora. El costo de poner en marcha las máquinas para fabricar las tablas es de \$20 por máquina. Una vez que las máquinas echan a andar, la operación es completamente automatizada y puede ser supervisada por un empleado de producción que gana \$15 la hora.

a. ¿Cuántas máquinas se deben utilizar para minimizar el costo de producción?
b. ¿Cuánto ganará el supervisor durante un turno de producción si se utiliza el número óptimo de máquinas?
c. ¿Cuánto costará poner en marcha el número óptimo de máquinas?

9. En cierta fábrica, cada máquina puede producir 50 unidades por hora. El costo de puesta en marcha es \$80 por máquina y el costo de operación es \$5 por hora. ¿Cuántas máquinas deben utilizarse para producir 8000 unidades al menor costo posible? (Recuerde que la respuesta debe ser un número entero.)

10. Un urbanista estima que si se construyen 60 casas de lujo en cierta área, la utilidad promedio será de \$47500 por casa. Por cada casa adicional que se construya en el área, la utilidad promedio se reducirá en \$500 por casa. ¿Cuántas casas debe construir el urbanista para maximizar la utilidad total? (Recuerde que la respuesta debe ser un entero.

Módulo 2: Integrales

Sesión 5	
Duración	2 horas
Propósito	Resolver problemas utilizando integrales indefinidas.
Contenidos a abordar	1. Antiderivadas 2. Integrales indefinidas 3. Resolución de problemas utilizando integrales indefinidas
Descripción general	En esta sesión será capaz de resolver problemas que implican el uso de integrales indefinidas, verificando sus resultados mediante GeoGebra. Para esto se comenzará con la definición de antiderivadas, integrales indefinidas, reglas básicas de integración y algunos métodos de integración, para posteriormente resolver problemas. Al cierre de la sesión se realizarán algunos ejercicios sugeridos y se deberán retroalimentar entre pares.

Antiderivada

Def. El proceso de recuperar una función $F(x)$ a partir de su derivada $f'(x)$ se llama **antiderivación** o **antidiferenciación**. Usamos letras mayúsculas como F para representar una antiderivada de una función f, G para representar una antiderivada de una función g, y así sucesivamente.

Una función F es una antiderivada de f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

Ejemplo: Si $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, entonces $F'(x) = x^2 = f(x)$. Pero la función $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 200$ también es una antiderivada para $f(x)$, por lo que cualquier función de la forma $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, donde C es una constante, es una antiderivada de f.

Teorema: Si F es una antiderivada de f sobre un intervalo I, entonces la antiderivada más general de f sobre I es $F(x) + C$, donde C es una constante arbitraria.

Integrales indefinidas

Def. El conjunto de *todas* las antiderivadas de una función f se llama **integral indefinida** de f respecto de x, lo cual se denota mediante $\int f(x)dx$.

Reglas Básicas de Integración

1. $\int 0\ dx = c$
2. $\int k\ dx = kx + c$
3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
4. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\ dx\ \pm \int g(x)\ dx$
5. $\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1\ (regla\ de\ la\ potencia)$
6. $\int \cos x\ dx = sen\ x + c$
7. $\int sen\ x\ dx = -\cos x + c$
8. $\int sec^2 x\ dx = \tan x + c$
9. $\int \sec x \tan x\ dx = \sec x + c$
10. $\int csc^2\ x\ dx = -\cot x + c$
11. $\int \csc x \cot x\ dx = -\csc x + c$

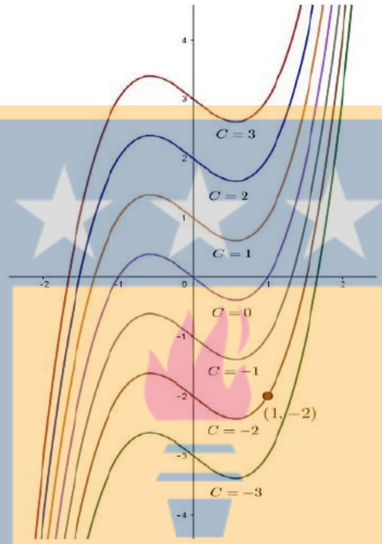
<u>Observación:</u> para efectos de este plan de acompañamiento no se dará énfasis en el cálculo de integrales utilizando reglas básicas.

Condiciones iniciales y soluciones particulares

Sabemos que $y = \int f(x)dx$ tiene muchas soluciones (cada una difiere de la otra en una constante). Eso significa que las gráficas de cualesquiera dos antiderivadas de f son traslaciones verticales una de otra.

Por ejemplo, $y = \int (3x^2 - 1)dx = x^3 - x + C$, para diversos valores enteros de C. Cada una de estas antiderivadas es solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1$.

En muchas aplicaciones de la integración, se le da suficiente información para determinar una solución particular. Para hacer esto, sólo necesita conocer el valor de $y = F(x)$ para un valor de x. Esta información recibe el nombre de *condición inicial*. Por ejemplo, si representamos gráficamente $F(x) = x^3 - x + C$, solo una de las curvas pasa por el punto $(1, -2)$. Para encontrar esta curva consideramos la solución general $F(x) = x^3 - x + C$ y la condición inicial $F(1) = -2$. Así, se tiene que $F(1) = 1 - 1 + C = -2$, lo cual implica que $C = -2$. Por lo tanto, la curva que pasa por el punto $(1, -2)$ es $F(x) = x^3 - x - 2$, tal como se muestra en la imagen.



Ejemplo: Una pelota se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 20 metros por segundo a partir de una altura inicial de 24 metros.

Observación: recordemos que si derivamos la función que describe la posición de un objeto obtenemos la función de velocidad. Además, si calculamos la segunda derivada de la función posición se obtiene la función de aceleración (esto se menciona en la *sesión 2*). Por otra parte, para este ejemplo debemos tener presente la ***aceleración de gravedad terrestre***, la cual se entiende como la aceleración que experimentan los cuerpos debida a dos fuerzas principalmente, la atracción gravitatoria y la fuerza centrífuga de rotación de la Tierra. Esta atracción gravitatoria está dirigida hacia el centro de la tierra y tiene un valor aproximado de $g = 9{,}8\ m/s^2$.

a. ¿Cuál es la función posición que expresa la altura s en una función del tiempo t?

En este caso tenemos dos condiciones iniciales, con $t = 0$, $s(0) = 24$ y $s'(0) = 20$.

Utilizando $-9{,}8\ m/s^2$ como la aceleración de gravedad de la Tierra (se considera negativa porque la pelota es lanzada hacia arriba), se tiene que $s''(t) = -9{,}8$. Así:

$$s'(t) = \int s''(t)dt = \int -9{,}8dt = -9{,}8t + C_1$$

Empleando la velocidad inicial se obtiene que $s'(0) = 20 = -9{,}8 \cdot 0 + C_1$, lo cual implica que $C_1 = 20$. Ahora, integrando $s'(t)$:

$$s(t) = \int s'(t)dt = \int (-9{,}8t + 20)dt = -4{,}9t^2 + 20t + C_2$$

Utilizando la altura inicial, se tiene que $s(0) = 24 = -4{,}9 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + C_2$, lo cual implica que $C_2 = 24$.

Por lo tanto, la función posición que expresa la altura s de la pelota en función del tiempo t es $s(t) = -4{,}9t^2 + 20t + 24$.

b. ¿Cuándo llegará la pelota al suelo?

Utilizando la función posición encontrada anteriormente, es posible determinar el instante en que la pelota llegará al suelo al resolver la ecuación $s(t) = 0$, es decir:

$$-4{,}9t^2 + 20t + 24 = 0$$
$$t \approx -0{,}970 \text{ o } t \approx 5{,}051$$

Considerando el contexto, t debe ser positivo, por lo tanto, la pelota llegará al suelo cuando hayan transcurrido $5{,}051\ seg$ aproximadamente.

Métodos de Integración

Existen diversos métodos de integración para resolver una integral cuando no se puede aplicar el método directo, tales como cambio de variable, integración por partes, integración trigonométrica, sustitución trigonométrica y fracciones parciales. Las técnicas de integración nos permiten obtener una función que sea integrable por medio de teoremas definidos durante el proceso de integración. A continuación, para efectos de este plan, solo definiremos dos principales métodos de integración más utilizados:

1. **Cambio de variable:** Este método de integración se utiliza cuando no se encuentre una integral inmediata o estándar. Si se tiene $\int f(x)\ dx$, se puede realizar el siguiente cambio de variable $x = u\,(t)$, con $dx = u'(t)\,dt$, donde $u\,(t)$ es una función derivable. Entonces, $\int f(x)\ dx = \int f\big(u(t)\big)\ \cdot u'(t)\,dt$.

   Para realizar el cambio de variable se debe reemplazar por la nueva función $u(t)$ y completar el diferencial con respecto a la misma función en t, de tal forma que se pueda integrar inmediatamente.

   <u>Ejemplo:</u> Encuentre $\int x^2 sen(x^3)\ dx$.

   Solución:

$$\int x^2 sen(x^3)\ dx = \int sen(x^3) \cdot x^2\ dx$$

   Sea $u = x^3$, $du = 3x^2 dx$, lo cual implica que $\frac{1}{3}du = x^2 dx$. Así, integramos respecto de u:

$$\begin{aligned}\int sen(x^3) \cdot x^2\ dx &= \int sen\,u \cdot \frac{1}{3}du \\ &= \frac{1}{3}\int sen\,u\,du \\ &= \frac{1}{3}(-\cos u) + C\end{aligned}$$

   Reemplazando $u = x^3$:

$$\int sen(x^3) \cdot x^2\ dx = -\frac{1}{3}\cos(x^3) + C$$

2. **Integración por partes:** Esta técnica se puede aplicar a una amplia variedad de funciones y es particularmente útil para integrandos que implican productos de

45

funciones algebraicas y trascendentes. Por ejemplo, la integración por partes funciona bien con integrales como $\int xlnx\,dx$, $\int x^2e^x\,dx$ o $\int e^x senx\,dx$.

La integración por partes se basa en la fórmula para la derivada de un producto $\frac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$, donde u y v son funciones derivables de x. Cuando u' y v' son continuas, se puede integrar a ambos lados de esta ecuación para obtener

$$uv = \int uv'dx + \int vu'dx = \int u\,dv + \int v\,du$$

Al reescribir esta ecuación se obtiene la integración por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Para poder integrar por partes se necesita identificar la función u con su respectivo diferencial du y el diferencial dv con respecto a su respectiva función v.

Ejemplo: Encuentre $\int xe^x\,dx$.

Tenemos que escribir la integral en forma $\int u\,dv$:

$$dv = e^x\,dx \Rightarrow v = \int dv = \int e^x\,dx = e^x$$
$$u = x \Rightarrow du = dx$$

Así, realizamos la integración por partes:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Aplicación de la sesión: ¿A qué velocidad inicial debe lanzarse un objeto hacia arriba (desde una altura de 2 metros) para que alcance una altura máxima de 200 metros?

Ejercicios propuestos *(utilice GeoGebra para verificar sus resultados obtenidos en la resolución de problemas)*

1. Encuentre la integral indefinida y compruebe el resultado mediante derivación.

a. $\int(8x^3 - 9x^2 + 4)\,dx$
b. $\int\left(\sqrt[4]{x^3} + 1\right)dx$
c. $\int \frac{x^4-3x^2+5}{x^4}\,dx$
d. $\int(x+1)(3x-2)\,dx$
e. $\int(5\,cosx + 4\,senx)\,dx$

3. Un vivero de plantas verdes suele vender cierto arbusto después de 6 años de crecimiento y cuidado. La velocidad de crecimiento durante esos 6 años es, aproximadamente:

$$\frac{dh}{dt} = 1{,}5t + 5$$

donde t es el tiempo en años y h es la altura en centímetros. Las plantas de semillero miden 12 centímetros de altura cuando se plantan ($t = 0$).

a. Determine la altura después de t años.
b. ¿Qué altura tienen los arbustos cuando se venden?

3. El Gran Cañón tiene una profundidad de 1800 metros en su punto más profundo. Se deja caer una roca desde el borde sobre ese punto. Escriba la altura de la roca como una función del tiempo t en segundos ¿Cuánto tardará la roca en llegar al suelo del cañón?

4. El fabricante de un automóvil indica en su publicidad que el vehículo tarda 13 segundos en acelerar desde 25 kilómetros por hora hasta 80 kilómetros por hora. Suponiendo aceleración constante:

a. Determine la aceleración en m/s^2.
b. Halle la distancia que recorre el automóvil durante los 13 segundos.

5. Suponga que un avión totalmente cargado que parte desde el reposo tiene una aceleración constante mientras se mueve por una pista. El avión requiere 0,7 millas de pista y una velocidad de 160 millas por hora para despegar ¿Cuál es la aceleración del avión?

Sesión 6	
Duración	2 horas
Propósito	Representar gráficamente una integral definida, como el área bajo una curva de una función continua y no negativa en $[a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$.
Contenidos a abordar	1. Representación geométrica de la integral 2. Integrales definidas y sus propiedades 3. Teorema fundamental del cálculo
Descripción general	En esta sesión será capaz de representar geométricamente una integral definida, ya sea de manera manual o haciendo uso de GeoGebra. Además, recordará la definición de integrales definidas y algunas de sus principales propiedades. Para finalizar se abordará el teorema fundamental del cálculo. Al cierre de la sesión se realizarán algunos ejercicios sugeridos y se deberán retroalimentar entre pares.

Suma de Riemann

Def. Sea f una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea $\triangle$ una partición de $[a, b]$ dada por:

$$x_0(= a) < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n(= b)$$

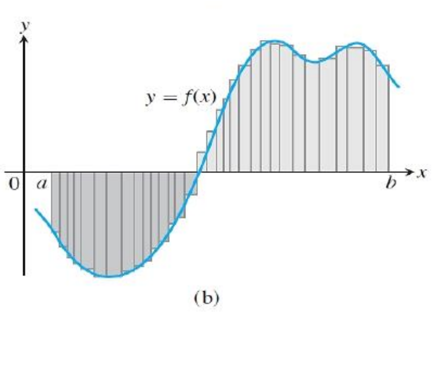
donde Δx_i es el ancho del i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Si para cada $i \in \{1,2, \ldots, n\}$, c_i es cualquier valor en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ entonces la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \triangle x_i \quad , x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

se denomina suma de Riemann de f para la partición $\triangle$.

(a)



(b)

Integral definida

Def. Para definir la integral definida, considere el siguiente límite

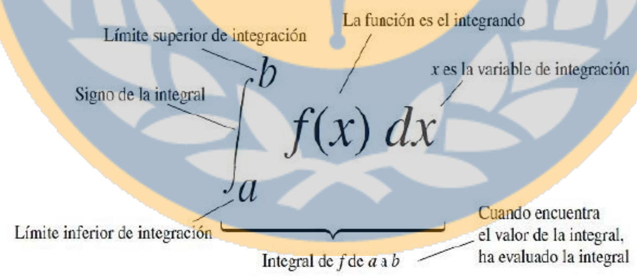
$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L$$

donde $\|\Delta\|$ es el ancho del subintervalo más grande de la partición Δ y se conoce como la norma de la partición. Si todos los intervalos tienen el mismo ancho, la partición es regular y la norma se denota mediante $\|\Delta\| = \Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Si la función f se define en el intervalo cerrado $[a, b]$ y el límite de las sumas de Riemann sobre las particiones Δ $\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L$ existe, entonces f se dice integrable en $[a, b]$ y el límite se denota por:

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx$$

El límite recibe el nombre de integral definida de la función f en $[a, b]$. El número a es el límite inferior de integración, y el número b es el límite superior de integración.



<u>Observación:</u> Se debe distinguir cuidadosamente entre integrales definidas e indefinidas. Una integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es un número; una integral indefinida $\int f(x)dx$ es una *función*.

Área bajo la curva de una función no negativa

A continuación, se precisa la noción del área de una región con frontera curva, tomando en cuenta la idea de aproximar una región mediante un número de rectángulos cada vez mayor.

Si la función $f(x)$ es continua y no negativa en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es la integral de f de a a b, es decir:

$$\acute{A}rea = \int_a^b f(x)\,dx$$

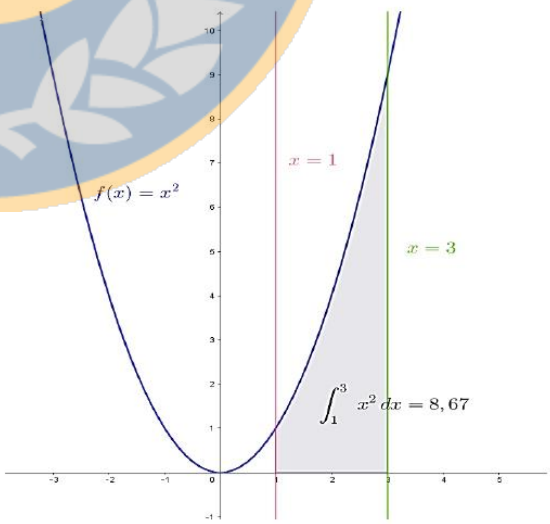
Ejemplo: Calcular el área de la región limitada por la función $f(x) = x^2$, las rectas $x = 1$, $x = 3$ y el eje x.

Solución: La función $f(x) = x^2$ es continua y además cumple con la condición $f(x) > 0, \forall\, x \in [1,3]$, por lo que el área de la región limitada por la función $f(x) = x^2$, las rectas $x = 1$, $x = 3$ y el eje x, se define como:

$$A = \int_1^3 x^2 dx$$

Al calcular esta integral definida mediante su definición obtenemos que $\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3} \approx 8{,}67$.

Por lo tanto, el área mencionada anteriormente corresponde a $\frac{26}{3}\,[u^2]$.El resultado anterior lo podemos comprobar graficando en GeoGebra y calculando la integral definida correspondiente con la siguiente función que posee dicho software: *=Integral(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>).*



Existencia de integrales definidas

Las funciones continuas son integrables. Esto es, si una función f es continua en un intervalo $[a, b]$, su integral definida en $[a, b]$ existe.

Propiedades de las integrales definidas

1. Orden de integración: $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

2. Intervalo de ancho cero: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

3. Múltiplo constante: $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ cualquier número k

   $\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ con $k = -1$

4. Suma y diferencia: $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

5. Aditividad: $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

6. Desigualdad máx-mín: Si la función f tiene un valor máximo M y un valor mínimo m en $[a, b]$, entonces

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b-a)$$

7. Dominación: $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

   $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ (caso especial)

Teorema Fundamental del Cálculo

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, y F es cualquier antiderivada de f en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplo: En el ejemplo en donde calculamos el área de la región limitada por la función $f(x) = x^2$, las rectas $x = 1$, $x = 3$ y el eje x, se mencionó que la integral definida $\int_1^3 x^2 dx$ se calculó mediante su definición. Ahora, calculamos la integral definida

$F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$, y usando el teorema fundamental del cálculo integral, se tiene:

$$\int_1^3 x^2\, dx = F(3) - F(1) = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$$

Aplicación de la sesión: Calcule el área de la región limitada por la curva $y = x^3 + 3$, el eje x y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Ejercicios propuestos

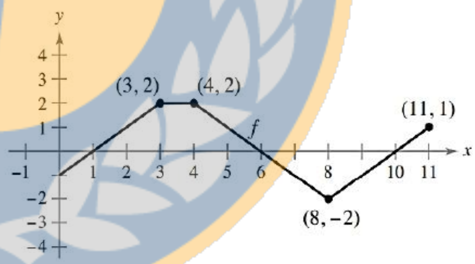
1. Evalúe las siguientes integrales interpretando cada una en términos de áreas:

a. $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$

b. $\int_0^3 (x - 1)dx$

c. $\int_{-7}^7 \sqrt{49 - x^2}dx$

2. La gráfica de la función f consta de segmentos de recta, como se muestra en la figura. Evalúe cada integral definida solicitada utilizando fórmulas geométricas conocidas:



a) $\int_0^1 -f(x)dx$

b) $\int_3^4 3f(x)dx$

c) $\int_0^7 f(x)dx$

d) $\int_5^{11} f(x)dx$

e) $\int_0^{11} f(x)dx$

f) $\int_4^{10} f(x)dx$

3. A diferentes alturas en la atmósfera de la Tierra, el sonido viaja a distintas velocidades. La velocidad del sonido $s(x)$ (en metros por segundo) puede modelarse mediante

$$s(x) = \begin{cases} -4x + 341, & 0 \leq x < 11{,}5 \\ 295, & 11{,}5 \leq x < 22 \\ \frac{3}{4}x + 278{,}5, & 22 \leq x < 32 \\ \frac{3}{2}x + 254{,}5, & 32 \leq x < 50 \\ -\frac{3}{2}x + 404{,}5, & 50 \leq x \leq 80 \end{cases}$$

donde x es la altura en kilómetros. ¿Cuál es la velocidad media del sonido en el intervalo $[0, 80]$? Grafique la situación.

4. La fuerza F (en newtons) de un cilindro hidráulico en una prensa es proporcional al cuadrado de $sec\ x$, donde x es la distancia (en metros) que el cilindro se desplaza en su ciclo. El dominio de F es $[0, \pi/3]$ y $F(0) = 500$.

a. Encuentre F como una función de x.

b. Determine la fuerza media ejercida por la prensa en el intervalo $[0, \pi/3]$

5. Se prueba un vehículo experimental en una pista recta. Parte del reposo y su velocidad v (en metros por segundo) se registra en la tabla cada 10 segundos durante un minuto

t	0	10	20	30	40	50	60
v	0	5	21	40	62	78	83

a. Use una herramienta de graficación para determinar un modelo de la forma $v = at^3 + bt^2 + ct + d$ para los datos.

b. Utilice una herramienta de graficación para dibujar los datos y hacer la gráfica del modelo.

c. Utilice el teorema fundamental del cálculo para aproximar la distancia recorrida por el vehículo durante la prueba.

Sesión 7	
Duración	2 horas
Propósito	Modelar situaciones o fenómenos que involucren integrales definidas en diversos contextos, utilizando herramientas tecnológicas.
Contenidos a abordar	Modelamiento de situaciones que involucran el uso de integrales definidas.
Descripción general	En esta sesión será capaz de aplicar las integrales definidas a situaciones contextualizadas que requieren el uso de estas, por ejemplo, en ciencias, economía, medicina, etc. Para finalizar la sesión se propone una serie de situaciones problemas que para resolverlas requieren del uso de integrales. Deberán exponer su trabajo de manera oral.

Modelando diversas situaciones que involucran el uso de integrales definidas

Las integrales definidas nos permiten resolver diversas situaciones problemas, en diferentes contextos. A continuación, se presentarán algunos ejemplos de esto:

Ejemplo 1 ***(Movimiento de una partícula)***: La velocidad (en pies por segundo) de una partícula moviéndose a lo largo de una recta es $v(t) = t^3 - 10t^2 + 29t - 20$, donde t es el tiempo en segundos.

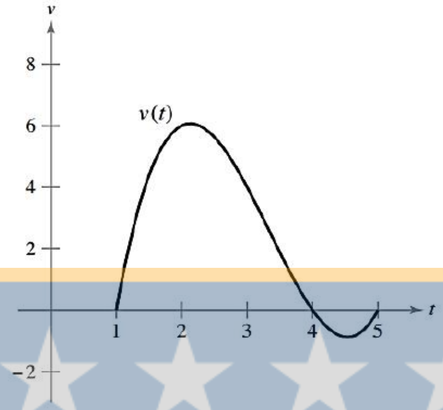
Observación: Cuando hablamos de **distancia** nos referimos a la longitud total entre dos puntos cualesquiera en el espacio, mientras que el **desplazamiento** se refiere a la **distancia** desde una posición inicial hasta una posición final independientemente del recorrido.

Son medidas de longitud, pero el desplazamiento será siempre menor o igual a la distancia

54

a. ¿Cuál es el desplazamiento de la partícula en el intervalo $1 \leq t \leq 5$?

Graficamos la situación:



En un gráfico de velocidad versus tiempo, el desplazamiento corresponde al área bajo la curva. Si la gráfica está sobre el eje x el desplazamiento es positivo; si está bajo el eje x es negativo.

Observando el gráfico nos damos cuenta de que $v(t) > 0$ en $[1,4]$ y $v(t) < 0$ en $[4,5]$, por lo que el desplazamiento de la partícula en el intervalo $1 \leq t \leq 5$ es:

$$\int_1^4 v(t) + \int_4^5 v(t) = \int_1^4 (t^3 - 10t^2 + 29t - 20)\,dt + \int_4^5 (t^3 - 10t^2 + 29t - 20)\,dt$$

$$= \left[\frac{t^4}{4} - \frac{10}{3}t^3 + \frac{29}{2}t^2 - 20t\right]_1^4 + \left[\frac{t^4}{4} - \frac{10}{3}t^3 + \frac{29}{2}t^2 - 20t\right]_4^5$$

$$= \frac{45}{4} + \left(-\frac{7}{12}\right) = \frac{32}{3}\ pies$$

Por lo tanto, la partícula se mueve $\frac{32}{3}$ pies hacia la derecha.

b. ¿Cuál es la distancia total recorrida por la partícula en el intervalo $1 \leq t \leq 5$?

Para encontrar la distancia total recorrida por la partícula sumamos los valores absolutos del desplazamiento realizado por dicha partícula en el intervalo $1 \leq t \leq 5$, considerando $v(t) > 0$ en $[1,4]$ y $v(t) < 0$ en $[4,5]$:

$$\left|\int_1^4 v(t)\right| + \left|\int_4^5 v(t)\right| = \left|\int_1^4 (t^3 - 10t^2 + 29t - 20)\,dt\right| + \left|\int_4^5 (t^3 - 10t^2 + 29t - 20)\,dt\right|$$

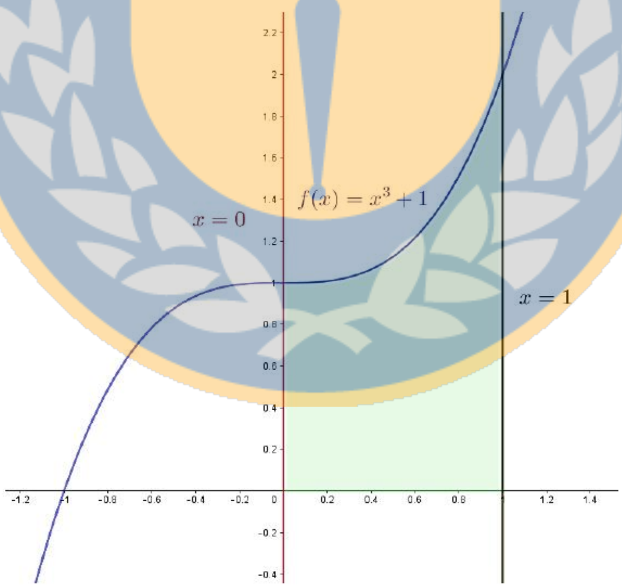
$$= \left|\frac{45}{4}\right| + \left|-\frac{7}{12}\right| = \frac{45}{4} + \frac{7}{12} = \frac{71}{6}\ pies$$

Por lo tanto, la partícula recorre una distancia total de $\frac{71}{6}$ pies.

<u>Observación</u>: Para resolver este ejemplo se debe tener clara la definición y diferencia entre **desplazamiento** y **distancia** recorrida por un objeto, por lo que se sugiere profundizar en este tema.

<u>Ejemplo 2</u> (Área y costo de una parcela): Un agente de bienes y raíces desea evaluar una parcela sin construir que tiene 100 pies de ancho y que está limitada por calles en tres de sus lados y por un arroyo en el cuarto lado. El agente determina que si establece un sistema coordenado, el arroyo se puede describir por medio de la curva $y = x^3 + 1$, donde x e y están en cientos de pies. Si el área de la parcela es A pies cuadrados y el agente estima que su tierra vale $12 por pie cuadrado, entonces el valor total de la parcela es $12A$ dólares. Determine el área de la parcela en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ y el valor total de esta.

Solución: Para comprender de mejor manera la situación la graficaremos en GeoGebra



Observando el gráfico nos damos cuenta de que $f(x) > 0$ en $[0,1]$, por lo que el área de la parcela corresponde a:

56

$$\int_0^1 (x^3+1)dx = \left[\frac{x^4}{4}+x\right]_0^1 = \frac{5}{4}$$

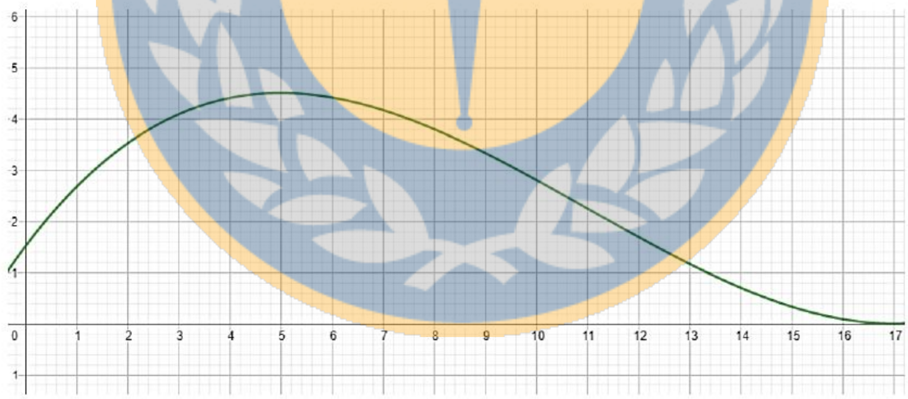
Recordemos que x e y están en cientos de pies, por lo que el área total será de:

$$\frac{5}{4}\cdot 100\cdot 100 = 12500\,pies^2$$

Finalmente, sabemos que el valor de la parcela es de $12 por pie cuadrado, por lo que el valor total de dicha parcela es de $\$12/pie^2 \cdot 12500\,pies^2 = \$150000$.

Ejemplo 3 ***(Medicina)***: Durante las primeras 17 horas luego de una operación, a un paciente se le aplica una solución fisiológica. La razón instantánea del caudal de la solución está programada por una bomba: sube en las primeras 5 horas hasta 4,5 mg/h y baja más lentamente hasta 0 mg/h en el instante $t = 17\,h$.

El gráfico representa la función f' con $f'(t) = \frac{1}{192}t^3 - \frac{11}{64}t^2 + \frac{85}{64}t + \frac{289}{192}$, que modela aproximadamente la razón instantánea del caudal de la solución fisiológica que se aplica al paciente en la fase postoperatoria.



a. Determina la dosis total de la solución fisiológica aplicada en las 17 horas.
b. Conjetura si a la mitad del tiempo se ha aplicado la mitad de la dosis, y verifica o rechaza algebraicamente esa conjetura.
c. Establece en qué instante se ha aplicado la mitad de la dosis total.

57

Solución:

a. La función entregada corresponde a la primera derivada de f. Para determinar la dosis total de la solución fisiológica aplicada en las 17 horas al paciente debemos integrar:

$$\int_0^{17} \left(\frac{1}{192}t^3 - \frac{11}{64}t^2 + \frac{85}{64}t + \frac{289}{192}\right) dt = \left[\frac{t^4}{768} - \frac{11t^3}{192} + \frac{85t^2}{128} + \frac{289t}{192}\right]_0^{17} = \frac{34391}{768} \approx 44{,}78$$

Por lo tanto, la dosis total de la solución fisiológica aplicada en las 17 horas al paciente es de aproximadamente $44{,}78\ mg$.

b. A simple vista, observando el gráfico, se podría deducir que a la mitad del tiempo se ha aplicado más de la mitad de la dosis de la solución fisiológica, veremos si esto es cierto.

La mitad de la dosis es de $\frac{34391}{1536} \approx 22{,}39\ mg$, la cual determinaremos si se ha aplicado a la mitad del tiempo correspondiente a $t = 8{,}5\ h$. Es decir:

$$\int_0^{8,5} \left(\frac{1}{192}t^3 - \frac{11}{64}t^2 + \frac{85}{64}t + \frac{289}{192}\right) dt = \left[\frac{t^4}{768} - \frac{11t^3}{192} + \frac{85t^2}{128} + \frac{289t}{192}\right]_0^{8,5} = \frac{132651}{4096} \approx 32{,}39$$

Con esto se concluye que a la mitad del tiempo ($t = 8{,}5\ h$) se ha aplicado una dosis total de la solución fisiológica de $32{,}39\ mg$ al paciente, es decir, más de la mitad.

c. Debemos determinar en qué instante se ha aplicado la mitad de la dosis total, correspondiente a $\frac{34391}{1536} \approx 22{,}39\ mg$, es decir:

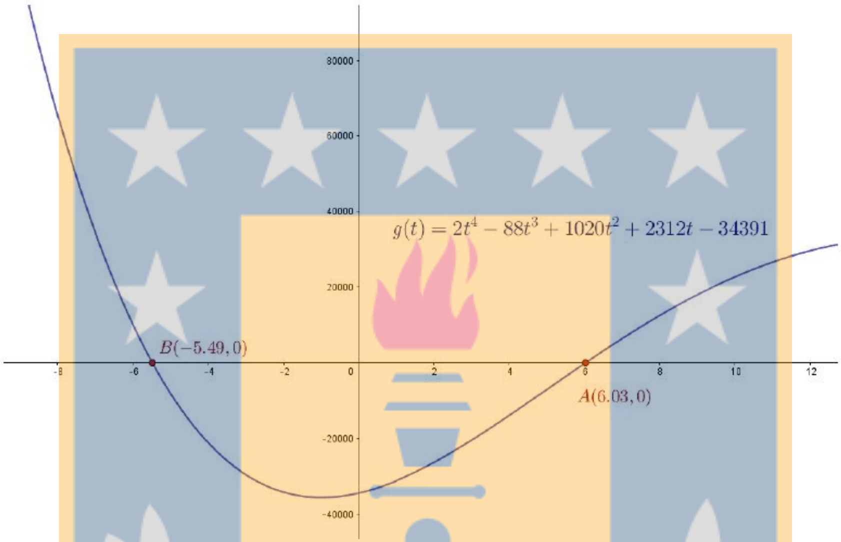
$$\int_0^{t} \left(\frac{1}{192}t^3 - \frac{11}{64}t^2 + \frac{85}{64}t + \frac{289}{192}\right) dt = \frac{34391}{1536}$$

$$\left[\frac{t^4}{768} - \frac{11t^3}{192} + \frac{85t^2}{128} + \frac{289t}{192}\right]_0^{t} = \frac{34391}{1536}$$

$$\frac{t^4}{768} - \frac{11t^3}{192} + \frac{85t^2}{128} + \frac{289t}{192} = \frac{34391}{1536}$$

$$2t^4 - 88t^3 + 1020t^2 + 2312t - 34391 = 0$$

Podemos resolver la ecuación anterior utilizando métodos algebraicos, sin embargo, considerando que este ejemplo se extrajo del Programa de Límites, Derivadas e Integrales de 3° y 4° medio, se resolverá mediante método gráfico. Para esto, utilizamos la función $g(t) = 2t^4 - 88t^3 + 1020t^2 + 2312t - 34391$, la graficamos en GeoGebra y determinamos las intersecciones de la gráfica con el eje x, es decir, cuando $g(t) = 0$.



Observando la gráfica de la función g obtenemos que $t_1 = -5,49$ y $t_2 = 6,03$. Considerando el contexto del problema, en donde $0 \leq t \leq 17$, podemos concluir que se ha suministrado la mitad de la dosis de la solución fisiológica al paciente al transcurrir aproximadamente $6,03$ horas.

Lo anterior lo podemos verificar como sigue:

$$\int_0^{6,03} \left(\frac{1}{192}t^3 - \frac{11}{64}t^2 + \frac{85}{64}t + \frac{289}{192}\right) dt = \left[\frac{t^4}{768} - \frac{11t^3}{192} + \frac{85t^2}{128} + \frac{289t}{192}\right]_0^{6,03} \approx 22,38$$

Lo cual confirma que el resultado obtenido es correcto, ya que habíamos calculado que la mitad de la dosis era aproximadamente de $22,39\ mg$.

Observación: Como se mencionó, este ejemplo fue extraído de la unidad 4 del Programa de Límites, Derivadas e Integrales para 3° y 4° Medio, el cual posee una conexión interdisciplinaria con la asignatura de Ciencias para la ciudadanía (OA c, d, 3° y 4° medio).

Aplicación de la sesión: Una población crece con una tasa de $e^{1,5t} - 3t$ individuos por año (donde t es el número de años). En el primer año la población es de 1500 personas. ¿Cuánto creció la población entre el primer y tercer año?, ¿Cuál es la población en el tercer año?

Problemas propuestos

1. Un automóvil viaja en línea recta a *45* millas por hora (*66* pies por segundo) en el instante en el que el conductor se ve forzado a aplicar los frenos para evitar un accidente. Si los frenos proporcionan una desaceleración constante de $22\, pies/s^2$, ¿qué distancia recorre el automóvil antes de detenerse por completo?

2. Suponga que el ingreso marginal de una compañía que fabrica y vende batidoras de huevo es $\frac{dr}{dx} = 2 - 2/(x+1)^2$, donde r está medido en miles de dólares y x en miles de unidades. ¿Cuánto dinero deberá recibir la compañía por una producción de mil batidoras de huevo?

3. El costo marginal de imprimir un cartel cuando se han impreso x carteles es $\frac{dc}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ dólares. Encuentre el costo de imprimir del cartel *2* al cartel *100*.

4. Cierto pozo petrolero que produce *400* barriles de crudo por mes se secará en *2* años. El precio del crudo actualmente es de *$25* por barril y se espera que aumente a una tasa constante de *3* centavos por barril al mes. Si el petróleo se vende tan pronto como se extrae del suelo, ¿cuál será el ingreso total futuro del pozo?

5. En un experimento sobre aprendizaje se proporciona a los sujetos una serie de hechos que deben memorizar, y se determina que, t minutos después del inicio del experimento, el sujeto promedio aprende a una tasa de $L'(t) = \frac{4}{\sqrt{t+1}}$ hechos por minuto, donde $L(t)$ es el número total de hechos memorizados en el tiempo t. Aproximadamente ¿cuántos hechos aprende el sujeto promedio durante los segundos *5* minutos (entre $t = 5$ y $t = 10$)?

60

Sesión 8	
Duración	2 horas
Propósito	Aplicar integrales definidas a situaciones en contexto geométrico, utilizando herramientas tecnológicas.
Contenidos a abordar	1. Cálculo de áreas y volumen 2. Cálculo de áreas de superficie de revolución 3. Cálculo de volumen de sólidos de revolución 4. Longitud de arco de curva
Descripción general	En esta sesión será capaz de aplicar las integrales definidas a la geometría. Para finalizar la sesión se propone una serie de situaciones problemas que para resolverlas requieren del uso de integrales. Deberán exponer su trabajo de manera oral.

Aplicación de las integrales a la geometría

Las integrales definidas también tienen diversas aplicaciones en la geometría, entre las cuales se encuentran el cálculo de áreas, áreas de superficie de revolución, volumen de sólidos de revolución y longitud de arco de curva. A continuación, se presentarán ejemplos para cada una de las aplicaciones mencionadas:

***Ejemplo 1* (Cálculo de áreas):** Calcule el área de la región encerrada por las parábolas $y = x^2$ e $y = 2x - x^2$.

Solución:

Primero debemos saber que el área A de la región limitada por las curvas de ecuaciones $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$, donde las funciones f y g son continuas y $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a, b]$, es

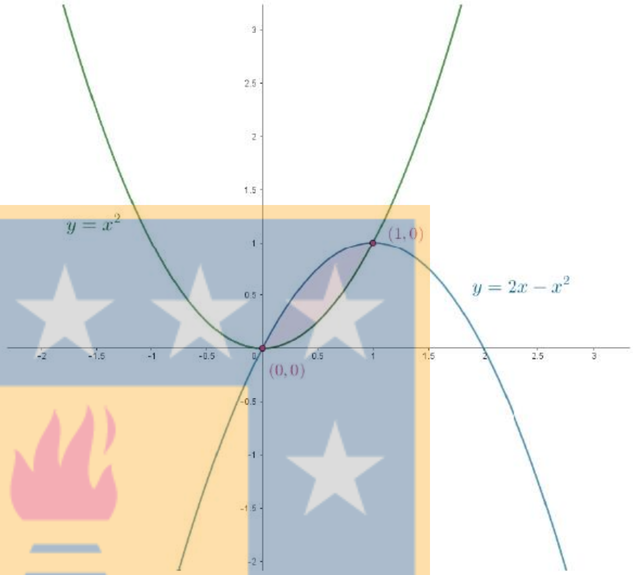
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Ahora, determinamos los puntos de intersección de las parábolas:

$$x^2 = 2x - x^2, \text{ es decir, } x = 0 \quad o \quad x = 1$$

61

Lo que significa que se intersectan en los puntos (0,0) y (1,0). A continuación, realizamos una gráfica correspondiente, utilizando GeoGebra:



Observando la gráfica podemos definir que el área de la región encerrada por las curvas de ecuación $y = x^2$ e $y = 2x - x^2$ corresponde a:

$$A = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2)dx$$

$$= \int_0^1 (2x - 2x^2)dx = \frac{1}{3}\ [u^2]$$

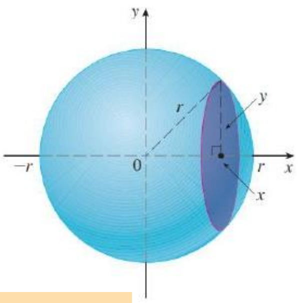
<u>Observación:</u> Algunas veces es difícil, o hasta imposible, determinar los puntos donde se cortan exactamente dos curvas de manera algebraica, por lo que, con la ayuda de una calculadora para graficar, como GeoGebra, podemos encontrar valores aproximados de los puntos de intersección.

<u>Ejemplo 2</u> (Volumen): Demuestre que el volumen de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Para realizar esta demostración primero es necesario saber lo siguiente:

Sea S un sólido que está entre $x = a$ y $x = b$. Si el área de la sección transversal de S en el plano P_x, a través de x y perpendicular al eje x, es $A(x)$, donde A es una función continua, entonces el volumen de S es $V = \int_a^b A(x)dx$.

Solución: Si ubicamos la esfera de modo que su centro esté en el origen, entonces el plano P_x corta la esfera en un círculo cuyo radio se puede obtener mediante el Teorema de Pitágoras $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Así, el área de la sección transversal es $A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$.



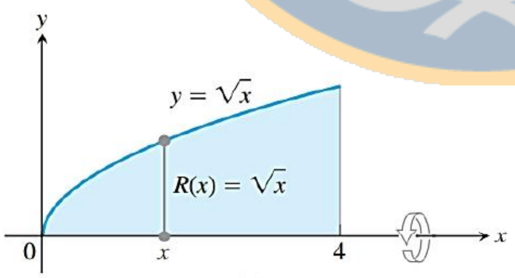
Ahora, con $a = -r$ y $b = r$, se tiene que el volumen de la esfera de radio r es:

$$V = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx = \left[\pi r^2 x - \frac{\pi x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

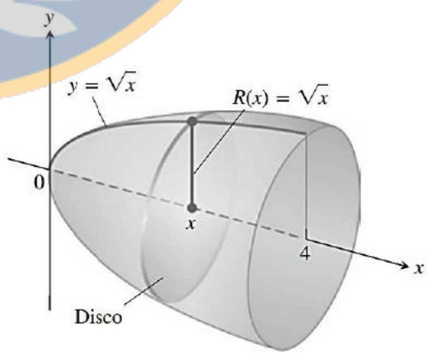
<u>Ejemplo 3</u> (Sólidos de revolución): La región entre la curva $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, y el eje x se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determinar su volumen.

Para este ejemplo debemos saber que el sólido generado al hacer girar una región plana alrededor de un eje se denomina sólido de revolución. Para determinar el volumen de un sólido debemos tener en cuenta que el área de la sección transversal $A(x)$ es el área de un disco con radio $R(x)$, la distancia entre la frontera de la región plana y el eje de rotación. En consecuencia, el volumen del sólido es $V = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx$ **(método de los discos)**.

Solución: Graficamos la situación presentada (sugerencia: se puede realizar en GeoGebra y hacer rotar la curva alrededor del eje x)



(a)



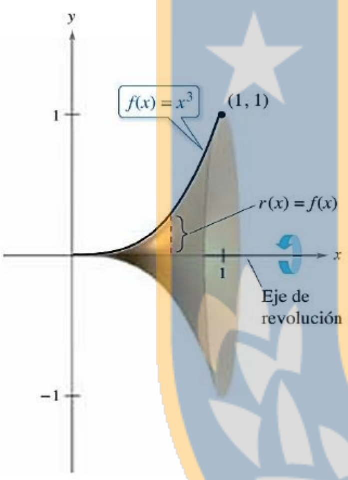
Luego, el volumen del sólido generado es:

63

$$V = \int_0^4 \pi\left[\sqrt{x}\right]^2 dx = \left[\pi \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi\ [u^3]$$

Observación: Para determinar el volumen de un sólido de revolución también existe el **método de las arandelas**, entre otros, por lo que se sugiere profundizar en este tema.

Ejemplo 4 (Superficie de revolución): Encuentre el área de la superficie formada al girar la gráfica de la función $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0,1]$ alrededor del eje x, como se muestra en la figura.



Para este ejemplo se debe tener presente la definición de superficie de revolución:

Sea $y = f(x)$ que tiene una derivada continua en el intervalo $[a,b]$. El área S de la superficie de revolución formada al girar la gráfica de la función f alrededor de un eje horizontal o vertical es

$S = 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{1 + [f'(x)]}dx$, donde $r(x)$ es la distancia entre la gráfica de y y el eje de revolución.

Solución: La distancia entre el eje x y la gráfica de f es $r(x) = f(x) = x^3$, y como $f'(x) = 3x^2$, el área de la superficie es:

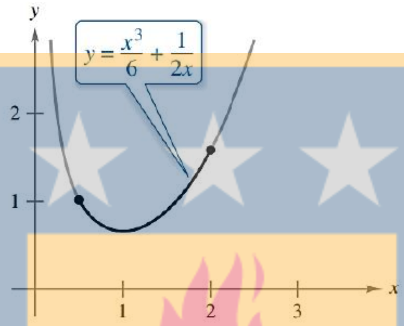
$$S = 2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1 + (3x^2)^2}dx = \frac{\pi}{18}\left[\frac{(1 + 9x^4)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{27}\left(10^{3/2} - 1\right) \approx 3{,}563\ [u^3]$$

Ejemplo 5 (Longitud arco de curva): Determinar la longitud de arco de la gráfica de $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, en el intervalo $[1/2,2]$.

64

Para resolver este ejemplo necesitamos saber que si la derivadada f' de una función f es continua sobre $[a, b]$, entonces la longitud de la curva de ecuación $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, es $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$.

Solución: Graficamos la situación presentada



Luego, la longitud de arco L de la gráfica de $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, en el intervalo mencionado, es $L = \int_{1/2}^{2}\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$. Al derivar f se obtiene que $f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$. Así:

$$L = \int_{1/2}^{2}\sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\right]^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}\right]_{1/2}^{2} = \frac{33}{12}$$

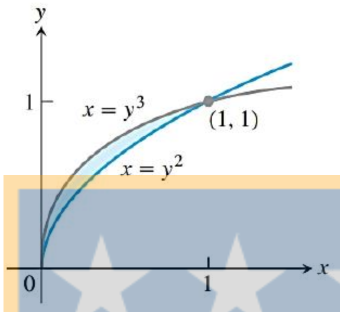
Por lo tanto, la longitud de dicho arco es de $\frac{33}{12} = 2{,}75\ [u]$.

Aplicación de la sesión: Obtener el volumen del cuerpo generado al hacer rotar un triángulo rectángulo en torno a uno de sus catetos.

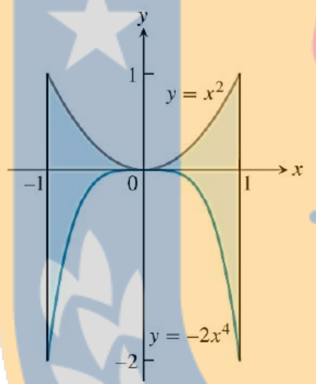
Ejercicios y problemas propuestos:

1. Encuentre el área total de las regiones sombreadas:

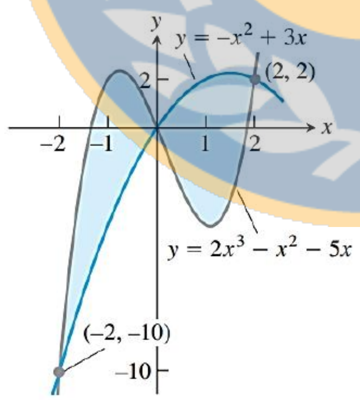
a.



b.

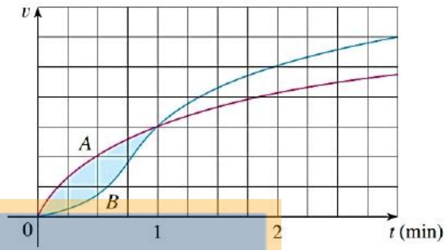


c.



2. Dos automóviles, A y B, se encuentran lado a lado al inicio de la carrera, y aceleran a partir del reposo. En la figura se muestran las gráficas de sus funciones velocidad.

a. ¿Cuál vehículo tiene ventaja después de un minuto? Explique.
b. ¿Cuál es el significado del área de la región sombreada?
c. ¿Cuál es el automóvil que tiene ventaja después de dos minutos? Explique.
d. Estime el tiempo en el cual los vehículos van de nuevo lado a lado.



3. Calcule el volumen de cada uno de los sólidos descritos:

a. De un cilindro circular de radio 4, definido mediante dos planos, se corta una cuña. Un plano es perpendicular al eje del cilindro. El otro corta al primero en un ángulo de $30°$ a lo largo del diámetro del cilindro. Determine el volumen de la cuña.
b. Un cono truncado circular recto cuya altura es h, base inferior de radio R, y radio de la parte superior r.
c. Un casquete de una esfera con radio r y altura h.

4. Un viento continuo arrastra un cometa hacia el oeste. La altura del cometa por encima de la superficie de la tierra desde la posición horizontal $x = 0$ hasta $x = 80$ pies está dada por $y = 150 - \frac{1}{40}(x - 50)^2$. Halle la distancia recorrida por el cometa.

5. Un halcón que vuela a $15\ m/s$ a una altitud de 180 m deja caer su presa accidentalmente. La trayectoria parabólica de la presa en descenso se describe mediante la ecuación $y = 180 - \frac{x^2}{45}$ hasta que choca con el suelo, donde y es la altura sobre del suelo, y x es la distancia horizontal recorrida en metros. Calcule la distancia que recorre la presa desde el momento en que es dejada caer hasta que choca con el suelo.

6. Encuentre el volumen del sólido obtenido al rotar cada una de las siguientes regiones limitadas por las curvas dadas alrededor del eje especificado:

a. $y = 2x, y = x^2$; alrededor del eje x.

b. $x = 1 + y^2, y = x - 3$; alrededor del eje y.

c. $y = x^2 + 1, y = 9 - x^2$; alrededor de $y = -1$.

7. La altura de un monumento es de 20 m. Un corte transversal horizontal a una distancia de x metros desde la parte superior es un triángulo equilátero con $\frac{1}{4}x$ metros de lado. Encuentre el volumen del monumento.

8. Determine el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva en torno al eje x:

a. $y = x^3, 0 \leq x \leq 2$

b. $y = \sqrt{1 + 4x}, 1 \leq x \leq 5$

c. $y = sen\pi x, 0 \leq x \leq 1$

9. Un grupo de ingenieros está construyendo un plato de satélite parabólico cuya forma se obtiene al hacer girar la curva $y = ax^2$ en torno al eje y. Si el plato tiene un diámetro de 10 pies y una profundidad máxima de 2 pies, encuentre el valor de a y el área superficial del plato.

Se sugiere trabajar todas las actividades planteadas en el programa de estudio.

Referencias

Baeza, A., Córdova, C., García, M., González, M., López, M., Venegas, S. y Villena, M. (2007). *Manual de estadística, probabilidad y precálculo*. Santillana.

Escandón Panchana, P. C. (2017). Técnicas de integración: 500 ejercicios resueltos de integral indefinida. https://repositorio.upse.edu.ec/bitstream/46000/4249/1/Tecnicas%20de%20Integracion.pdf

Hoffman, L., Bradley, G. y Rosen, K. (2006). *Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales.* McGraw-Hill Interamericana. https://www.academia.edu/34734135/Laurence_D_Hoffman_C%C3%81LCULO_APLICADO_PARA_ADMINISTRACI%C3%93N_ECONOM%C3%8DA_Y_CIENCIAS_SOCIALES

Larson, R. y Edwards, B. (2016). *Cálculo, Tomo I.* Cengage Learning. https://www.academia.edu/41473999/C%C3%81LCULO_TOMO_I

Ministerio de Educación. (2021). *Programa de Estudio 3° o 4° medio. Formación Diferenciada Matemática: Límites, Derivadas e Integrales.* https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140143_programa_feb_2021_final_s_disegno.pdf

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. Cengage Learning. https://www.fbioyf.unr.edu.ar/evirtual/pluginfile.php/107533/course/section/2765/calculo-james-stewart-7ed.pdf

Thomas, G. (2006). *Cálculo. Una variable.* Pearson Educación. http://uasdsanjuan.org/wp-content/uploads/2014/10/CalculoUnaVariableThomaspdf.pdf

Categorización de las sesiones

Objetivo General: Mejorar las capacidades docentes asociadas al conocimiento disciplinar para la asignatura de Límites, Derivadas e Integrales, promoviendo el uso de herramientas tecnológicas.

Objetivos Específicos:

1. Resolver problemas que involucren derivadas en contexto geométrico, de la física y económico, utilizando herramientas tecnológicas.
2. Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos o de inflexión de una función, aplicando los criterios de la primera y segunda derivada, utilizando herramientas tecnológicas.
3. Resolver problemas que involucren integrales en diversos contextos, utilizando herramientas tecnológicas.

Se solicita marcar con una X en el objetivo específico que considera más adecuado a cada sesión del plan.

Sesión	OE.1	OE.2	OE.3
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

70

Sugerencia Plan de acompañamiento docente en Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial

Asignatura		Probabilidades estadística descriptiva e inferencial
N° Hrs semestral		22

Planificación Semestral			Mes 1				Mes 2				Mes 3			
Diagnóstico: Leyes de probabilidades/ Propiedades de probabilidades y teoremas básicos.			x											
Retroalimentación diagnóstico			x											
Objetivos		**Contenidos**												
Módulo 1: Variables Aleatorias														
1 Resolver problemas contextualizados que involucren la distribución Bernoulli, Binomial o Normal, utilizando herramientas tecnológicas.	1.1	Variables Aleatorias: Discretas y continuas.		x										
	1.2	Variables discretas: Distribución de Bernoulli y Binomial.		x										
	1.3	Variables continuas: Distribución Normal.		x										
	1.4	Aplicación de las distribuciones de probabilidades en diferentes contextos			x									
	1.5	Resolver experimentos sencillos utilizando la distribución de Bernoulli, Binomial o Normal.			x									
	1.6	Resolver problemas contextualizados que involucren las distribuciones de Bernoulli, Binomial y/o Normal.			x									
Módulo 2: Intervalos de confianza														
2 Resolver problemas que requieren de la estimación de parámetros a través de intervalos de confianza, utilizando herramientas tecnológicas.	2.1	Definición de muestra aleatoria y estadísticos				x								
	2.2	Muestreo de una distribución normal				x								
	2.3	Distribuciones muestrales: Chi-cuadrado, t-Student y F.				x								
	2.4	Estimación por intervalos de confianza					x							
	2.5	Intervalos de confianza para la media, varianza, diferencia de medias, razón entre varianzas, proporciones y diferencias entre					x							
	2.6	Resolución de problemas contextualizados utilizando intervalos de confianza					x							
	2.7	Estimar tamaño de la muestra: Variación de la variable principal. Saber la varianza o tener una muestra piloto.						x						
Módulo 3: Prueba de hipótesis														
4 Resolver problemas que utilicen pruebas de hipótesis para aprobar o rechazar una afirmación o conjetura en torno a parámetros específicos de la población, haciendo uso de herramientas tecnológicas.	3.1	Pruebas de hipótesis para la media, las varianzas y proporciones.						x						
	3.2	Procedimiento de prueba de hipótesis.							x					
	3.3	Potencia y valor p de la prueba.							x					
	3.4	Diferencia de medias, razón entre varianzas y diferencias entre proporciones								x				
	3.5	Resolución de problemas contextualizados utilizando prueba de hipótesis								x				
Evaluacion											x			
Retroalimentación evaluación											x			

2

Plan de acompañamiento docente en Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial

Índice

Módulo 1: Variables Aleatorias

Sesión 1	
Duración	2 horas
Propósito	Recordar el concepto de función de probabilidad, variable aleatoria y las principales distribuciones de probabilidad.
Contenidos a abordar	- Concepto de función de probabilidad - Concepto de variable aleatoria - Distribuciones de probabilidad discretas y continuas
Descripción general	Se darán a conocer las definiciones de función de probabilidad, variable aleatoria y las principales distribuciones de probabilidad discretas y continuas. En esta sesión se enfatiza en dos distribuciones de probabilidad discretas (Binomial y Bernoulli) y una distribución continua (Normal). En cada una de ellas, se presentan ejercicios, los cuales serán resueltos de forma expositiva, para recordar el procedimiento, análisis e interpretación de resultados. Al finalizar con los contenidos se sugiere un ejercicio de desafío acerca de este tema, el cual deberá ser resuelto por cada docente de forma individual.

Al considerar los eventos o sucesos que pueden ocurrir en la realización de un experimento aleatorio, se define el espacio de los eventos, es decir:

$$\begin{aligned} \xi &= \{ \textit{Espacio de todos los eventos o sucesos del experimento aleatorio}\} \\ &= \{A \ / \ A \subseteq \Omega\} \end{aligned}$$

Donde $\begin{aligned} \Omega &= \{\text{Conjunto de todos los resultados posibles al experimento aleatorio}\} \\ &= \{\textit{espacio muestral}\} \end{aligned}$

Y al asignar las probabilidades a estos eventos, se está definiendo la función:

$$\begin{aligned} P: \xi &\to \mathbb{R} \\ A &\to P(A) \end{aligned}$$

La cual debe cumplir las siguientes propiedades básicas o axiomas (Kolmogorov, 1933).

- Axioma 1: Para todo evento A se tiene que $P(A) \geq 0$
- Axioma 2: $P(\Omega) = 1$
- Axioma 3: Si A y B son eventos excluyentes, es decir, $A \cap B = \phi$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Basándose en estos axiomas, es posible deducir otras propiedades de la función de probabilidades, lo que se resume en los siguientes teoremas:

- Teorema 1: Para cualquier evento A se tiene que $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Teorema 2: $P(\phi) = 0$, en donde ϕ: $evento\ imposible.$
- Teorema 3: Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$
    - Corolario: Para cualquier evento $A, 0 \leq P(A) \leq 1$
- Teorema 4: Para dos eventos cualesquiera A y B se tiene que
$$P(A - B) = P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$
- Teorema 5: Para dos eventos cualesquiera A y B se tiene que
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
- Teorema 6: Para tres eventos cualesquiera A y B y C se tiene que
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Variables aleatorias

Llamaremos variable aleatoria (v.a.) a toda función X con valores reales definida sobre un espacio muestral Ω, es decir,

$$\begin{aligned} X \ :\ \ &\Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\omega \ \longrightarrow \ X(\omega) = x \end{aligned}$$

Si $Rec\ (X)$ es finito o infinito numerable (o confiable), diremos que X es una **variable aleatoria discreta**, en cambio, si $Rec\ (X)$ es un intervalo de números reales, diremos que X es una **variable aleatoria continua**.

Variables discretas

Si X es una variable aleatoria discreta, llamaremos función de distribución de probabilidades (f.d.p) a la función real denotada y definida por:

$$f(x) = P(X = x) = P(\{\omega \varepsilon \Omega |\ X(\omega) = x\})$$

Función de probabilidad

La probabilidad asociada a cada uno de los valores de una variable aleatoria X se denomina distribución de probabilidad o función de probabilidad $f(x_i)$, la cual corresponde a la distribución de las probabilidades asociadas a cada uno de los valores x_i de la variable aleatoria X, es decir:

$$f(x_i) = P(X = x_i) = p_i$$

Donde:

- $f(x_1) + \ldots + f(x_i) = 1$, con $i \in \mathbb{N}$

Valor esperado de la variable aleatoria discreta

Si X es una v.a. discreta con f.d.p. $f(x)$, llamaremos media poblacional o valor esperado de la v.a. discreta X al parámetro denotado y calculado por:

$$\mu = E[X] = \sum_{x \in Rec(X)} x f(x)$$

En general, se define la esperanza de una función real $g(x)$ por:

$$E[g(x)] = \sum_{x \in Rec(X)} g(x) \cdot f(x)$$

Varianza Poblacional

Si X es una v.a. discreta con f.d.p. $f(x)$, llamaremos varianza poblacional al parámetro denotado y calculado por:

$$\sigma^2 = Var(X) = V(X) = \sum_{x \in Rec(X)} (x - \mu)^2 \cdot f(x)$$

Es decir: $V(X) = \sigma^2 = \mathrm{E}[(X - \mu)^2] = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[\mathrm{X}])^2]$

Propiedades del valor esperado y la varianza

1. $\mathrm{E}[c] = c$
2. $\mathrm{E}[cX] = c\mathrm{E}[\mathrm{X}] = \mathrm{c\mu}$
3. $\mathrm{E}[aX + b] = a\mathrm{E}[\mathrm{X}] + \mathrm{b} = \mathrm{a\mu} + \mathrm{b}$
4. $\mathrm{E}[ag(X) + bh(X)] = a\mathrm{E}[\mathrm{g(X)}] + \mathrm{bE}[\mathrm{h(X)}]$
5. $V(X) = \sigma^2 = \mathrm{E}[(X-\mu)^2] = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[\mathrm{X}])^2] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[\mathrm{X}])^2 = \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}^2X$
6. $V\big(g(X)\big) = \mathrm{E}[(g(X) - \mathrm{E}[\mathrm{g(X)}])^2]$
7. $V(c) = 0$
8. $V(X + b) = V(X) = \sigma^2$
9. $V(cX) = c^2V(X) = c^2\sigma^2$
10. $V(aX + b) = a^2V(X) = a^2\sigma^2$

Percentil poblacional

El percentil poblacional $100\ a(0 < a < 1)$ de una v.a. discreta X se define como aquel valor del recorrido de los datos x_a que satisface las inecuaciones:

$$P(X \leq x_a) \geq a \quad \wedge \quad P(X \geq x_a) \geq 1 - a$$

Propiedades de la función de probabilidades y la función de probabilidades acumulada

1. Para todo número real x se tiene que $0 \leq f(x) \leq 1$ y $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $\sum_{x \in Rec(X)} f(x) = 1$
3. La función de probabilidad acumulada $F(x)$ es una función real monótona no decreciente, constante por tramos o escalonada, discontinua o sólo continua por la derecha, es decir:

$$\forall x_0 \epsilon \mathbb{R}, \lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$$

4. $F(x) = \sum_{\substack{k \leq x \\ k \in Rec(x)}} f(k)$

5. $\forall x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} F(x) - \lim_{x \to x_0^-} F(x) = F(x_0^+) - F(x_0^-)$
6. $\forall x_0 \notin Rec(X), f(x_0) = 0$
7. $F(-\infty) = 0$ y $F(+\infty) = 1$

Variables continuas

Si X es una variable aleatoria continua, llamaremos función de distribución de probabilidades acumulativa (f.d.a) a la función real denotada y definida por:

$$F(x) = P(X \leq x), \qquad \forall\, x \in R$$

en el caso de variables aleatorias continuas las probabilidades no se concentran en ningún punto aislado y por lo tanto, no es posible definir la función de distribución de probabilidades como en el caso discreto, es decir, $P(X = x) = 0,\ \forall\, x\ \in \mathbb{R}$.

Distribuciones de Probabilidad Clásicas

Observación: Para efectos de este plan de acompañamiento, se abordarán ejemplos solo de aquellas distribuciones que propone el programa de estudio para la asignatura de profundización Probabilidad y Estadística Descriptiva e Inferencial.

Modelos para la distribución de probabilidad

Existen modelos teóricos clásicos que describen el comportamiento de algunas variables aleatorias. Para **variables discretas** se pueden mencionar las distribuciones **hipergeométrica**, **binomial**, **geométrica** o **Poisson**, entre otras; mientras que para **variables continuas** están las distribuciones **uniforme**, **exponencial** o **normal**.

Distribuciones Discretas

Distribución Hipergeométrica:

Consideremos una población finita de tamaño N, dentro de la cual existen M elementos con una cierta característica de interés. Si se define la variable aleatoria X que indica el número total de elementos que presentan la característica de interés dentro de una muestra aleatoria simple (sin orden y sin reemplazo) de tamaño n, entonces:

$$X \approx H(N, M, n), f(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}},\ x \in \{0,1,2,\ldots,n^*\}.\text{ Con } n^* = \min\{n, m\}.$$

Además, $E[X] = \frac{nM}{N},\ V(x) = n\frac{M}{N}\frac{(N-M)}{N}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

Distribución Bernoulli:

Diremos que un experimento aleatorio constituye un Ensayo Bernoulli si en tal experimento sólo interesa la ocurrencia de un evento A que llamaremos "éxito". El evento contrario A^c lo llamaremos "fracaso". Si en un ensayo Bernoulli con probabilidad de éxito p se define la variable aleatoria X indicadora de la ocurrencia del evento éxito, es decir, X = 1 si ocurre A y X = 0 si no ocurre A, entonces:

$$X \approx B(p), f(x) = p^x q^{1-x}, \qquad x \in \{0,1\}$$

Además, $E[X] = p,\ V(X) = pq, \quad q = 1 - p$

Ejemplos

1. Un recipiente contiene 2 bolas amarillas y 6 bolas rojas. Introducimos la mano en él y extraemos al azar una bola. Vemos si es amarilla y la introducimos de nuevo en la urna.

a) ¿Es un experimento de tipo Bernoulli? En caso afirmativo, ¿cuál sería el éxito y cual el fracaso?

b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola amarilla? ¿y de sacar una roja?

Solución:

Al estar frente a un experimento en donde solo se pueden obtener dos resultados, uno de éxito, que en este caso sería obtener una bola amarilla, y fracaso, que sería obtener una bola roja. Se define el evento:

$$A = \{\text{Obtener una bola amarilla.}\}$$

Entonces, el evento que define el fracaso se podría representar a través de:

$$A^c = \{\text{No obtener una bola amarilla.}\} = \{\text{Obtener una bola roja}\}$$

a) Entonces, la probabilidad de obtener una bola amarilla sería:

$$P(A) = \frac{2}{8} = 0,25$$

Y de obtener una bola roja:

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{8} = \frac{6}{8} = 0,75$$

Respuesta: La probabilidad de éxito es de $0,25$ y de fracaso es $0,75$.

2. Estamos realizando un control de calidad y tenemos un lote de tornillos fabricados por una máquina que, por término medio, produce un 3% de tornillos defectuosos. Extraemos uno de ellos al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que éste sea perfecto?

Solución:

Se define el evento B como:

$$B = \{\text{Obtener un tornillo perfecto.}\}$$

Entonces, el evento que define el fracaso sería:

$$B^c = \{\text{No obtener un tornillo perfecto.}\} = \{\text{Obtener un tornillo defectuoso}\}$$

Y, además por el enunciado se sabe que:

$$P(B^c) = 0,03$$

Entonces, la probabilidad de obtener el evento B sería:

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0,03 = 0,97$$

Respuesta: La probabilidad de obtener un tornillo perfecto es de $0,97$.

Distribución binomial

Si se consideran n repeticiones independientes de un ensayo Bernoulli con probabilidad de éxito p y se define la variable aleatoria X que indica el número total de éxitos en las n repeticiones independientes, entonces:

$$X \approx b(n,p), f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \qquad x \in \{0,1,2,\dots,n\}$$

Además, $E[X] = np, \quad V(X) = npq$

Ejemplos

1. La probabilidad de que cierto antibiótico presente una reacción negativa al administrarse a un ave rapaz en recuperación es de 0,15. Si se les ha administrado dicho antibiótico a 10 aves, calcúlense las probabilidades de que haya reacción negativa:

a) En dos aves.
b) En ningún ave.
c) En menos de cuatro aves.
d) En más de tres aves.
e) Entre 2 y 5 aves.

Observación: Para el cálculo de las probabilidades siguientes y de cualquier problema o ejercicio propuesto en el presente archivo, se sugiere utilizar alguna aplicación como Stats Suits, Probablity Distributions, Excel o Geogebra, entre otras.

Resolución:

Sea la variable aleatoria:

$$X: \{N° \; de \; aves \; a \; las \; que \; se \; les \; presenta \; alguna \; reacción \; entre \; las \; 10 \; en \; tratamiento\}$$

Y, se define el siguiente evento:

$$A = \{A \; un \; ave \; se \; le \; presenta \; reacción \; negativa\}$$

Además, por enunciado, se tiene lo siguiente:

$$P(A) = 0{,}15$$
$$n = 10$$

Lo anterior, permite dar cuenta que la variable aleatoria discreta está modelada por:

$$X \sim b(n = 10; p = 0{,}15)$$

Luego, calculando las probabilidades indicadas utilizando Excel:

a) $P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot (0{,}15)^2 \cdot (0{,}85)^2 0{,}2759$

Respuesta: La probabilidad de que exista una reacción negativa en exactamente dos aves es de $0{,}2759$.

b) $P(X = 0)$ =0,1969

Respuesta: La probabilidad de que exista una reacción negativa en exactamente ningún ave es de $0{,}1969$.

c) $P(X < 4) = 0{,}9500$

Respuesta: La probabilidad de que exista una reacción negativa en menos de cuatro aves es de $0{,}95$.

d) $P(X > 3) = 0{,}0500$

Respuesta: La probabilidad de que exista una reacción negativa en más de tres aves es de 0,05.

e) $P(2 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 1) = 0{,}4543$

Respuesta: La probabilidad de que exista una reacción negativa entre 2 a 5 aves es de $0{,}4543$.

2. Un hombre y una mujer, cada uno con un gen recesivo (Azul) y uno dominante (Marrón) para el color de los ojos, son padres de tres hijos. ¿Cuál es la distribución de probabilidades para la variable aleatoria X, definida como número de hijos con ojos azules?

Solución:

El espacio muestral para la herencia de este gen es:

$$E = \{(AA), (AM), (MA), (MM)\}$$

Y, se define el siguiente suceso o evento:

$$Z = \{Hijos\ con\ ojos\ azules\} = \{(AA)\} = \{éxito\}$$

Además, recordemos que:

$$X: \{Número\ de\ hijos\ con\ ojos\ azules\}$$

Luego, se tiene que la probabilidad del evento Z, corresponde a la probabilidad de *éxito*. Entonces, tomando en cuenta el espacio muestral, con equiprobabilidad, se obtiene:

$$P(Z) = p = 1/4$$

Por otro lado, como los padres tienen tres hijos, la muestra (n) corresponde a:

$$n = 3$$

Así, la distribución Binomial tiene las siguientes características:

$$X \sim b(n;p) = b(n = 3;\ p = 0{,}25)$$

Y en consecuencia, queda modelada por la siguiente expresión:

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = \binom{3}{r}\left(\frac{1}{4}\right)^r \left(\frac{3}{4}\right)^{n-r} \ ; r \in \{0,1,2,3\}$$

Ahora, calculando las probabilidades de que X hijos de esta familia tengan los ojos azules:

- $P(X = 0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0{,}4219$

Respuesta: La probabilidad de que ningún hijo tenga los ojos azules es de 0,4219.

- $P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0{,}4219$

Respuesta: La probabilidad de que un hijo tenga los ojos azules es de 0,4219.

- $P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 0{,}1406$

Respuesta: La probabilidad de que dos hijos tengan los ojos azules es de 0,1406.

- $P(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 0{,}0156$

Respuesta: La probabilidad de que todos los hijos tengan los ojos azules es de 0,0156.

Distribución geométrica

Si se define la variable aleatoria X que indica el número total de repeticiones independientes de un ensayo Bernoulli con probabilidad de éxito p hasta que ocurra el primer éxito, entonces:

$$X \approx G(p), f(x) = q^{x-1}p, \qquad x \in N.$$

Además, $E[X] = \frac{1}{p}$, $V(X) = \frac{q}{p^2}$

Distribución Pascal

Si se define la variable aleatoria X que indica el número total de repeticiones independientes de un ensayo Bernoulli con probabilidad de éxito p hasta que ocurran r éxitos, entonces:

$$X \approx Pascal\ (r,p), f(x) = \binom{x-1}{x-r} q^{x-r} p^r, \qquad x \in \{r, r+1, r+2, \ldots\}$$

Además, $E[X] = \frac{r}{p}$, $V(X) = \frac{rq}{p^2}$

Distribución de Poisson

Consideremos un evento A que ocurre aleatoriamente en el tiempo o en un eje real positivo obedeciendo los siguientes postulados:

- **Independencia:** La probabilidad de ocurrencias del evento A en un intervalo de tiempo es independiente del número de ocurrencias en cualquier otro intervalo de tiempo disjunto.
- **Falta de agrupamiento**: La probabilidad de más de una ocurrencia del evento A en un intervalo de tiempo de longitud pequeña es prácticamente nula.
- **Tasa constante**: El número promedio de ocurrencias del evento A por unidad de tiempo es igual a λ y permanece constante en el tiempo. Si se define la variable aleatoria X_t que indica el número de ocurrencias del evento A en un intervalo de longitud t, se puede deducir que:

$$X \approx P(\lambda t), f(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}, \qquad x \in N_o.$$

Además, $E[X]$=λt, $V(X) = \lambda t$

Distribuciones Continuas

Distribución Uniforme

Diremos que la variable aleatoria continua X tiene distribución Uniforme en el intervalo $]a, b[$ si su función de densidad de probabilidades $(f.d.p.)$ está dada por:

$$f(t) = \frac{1}{b-a}, \qquad a < t < b$$

Además, $E[X] = \frac{a+b}{2}$, $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$, $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$

Distribución Exponencial

Si en un proceso de Poisson con tasa de ocurrencias del evento A igual a λ veces por unidad de tiempo, se define la variable aleatoria T que indica el tiempo transcurrido hasta la próxima ocurrencia del evento A, entonces:

$$F_T(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x > 0 \qquad f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \qquad t > 0$$

Además, $E[T] = \frac{1}{\lambda}$, $V(T) = \frac{1}{\lambda^2}$

Distribución Normal

La distribución normal o gaussiana es ampliamente utilizada en estadística y teoría de probabilidades. La función de densidad de probabilidades asociada a la distribución normal está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ -\infty < x < \infty$$

Donde:
μ: media de una distribución.
σ: desviación estándar de la distribución.

A una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación estándar σ se le denota $X \sim N(\mu, \sigma)$.

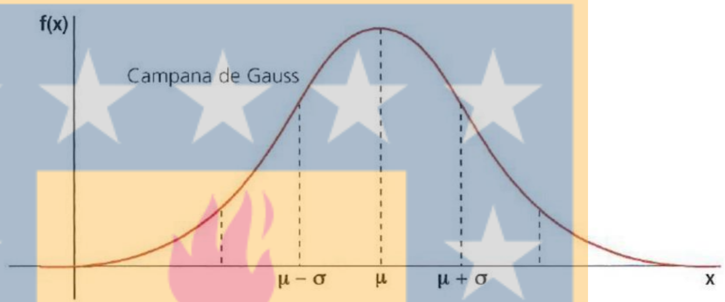
Además, $E[X] = \mu$, $V(X) = \sigma^2$

Por otro lado, $F_X(X) = \phi\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$, $\phi(-z) = 1 - \phi(z)$ y $x_a = \mu + z_a\sigma$, $z_a = -z_{1-a}$, donde $\phi(z)$ es la función de distribución de probabilidades acumulada

$(f.d.a)$ de la variable aleatoria $Z \sim N(0, 1)$, llamada distribución normal estándar o tipificada.

Representación gráfica

La representación gráfica de la función de densidad de esta distribución es una curva simétrica y su forma se asemeja a una campana, por lo que se conoce como **campana de Gauss**.



Propiedades de la distribución normal

- La forma de la curva de la distribución depende de sus 2 parámetros: la media y la desviación estándar.
- La media indica la posición de la campana, la gráfica se desplaza a lo largo del eje X.
- A mayor desviación, la curva será más "plana", dado que la distribución, en este caso, presenta una mayor variabilidad.
- La curva es simétrica respecto a la media.

Tipificación de una variable

Es posible expresar cualquier distribución normal mediante una normal estándar o estandarizada de la forma $\boldsymbol{N}\ (\mathbf{0}, \mathbf{1})$, la cual también se denomina distribución normal tipificada. Para esto se utilizan las siguientes identidades:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \Leftrightarrow X = \mu + Z\sigma$$

Donde $X \sim N(\mu, \sigma)$ y $Z \sim N(0,1)$

Una de las ventajas de tipificar una distribución es que se puede medir la desviación de los datos respecto a la media, lo cual permite comparar la posición relativa de los datos. Además, existen valores tabulados para una variable Z, de modo que se facilitan los cálculos, especialmente aquellos relacionados con el tamaño de la muestra, dadas ciertas características de ella.

Ejemplos

La media de los pesos de 5000 estudiantes de un colegio es $70\ kg$ y la desviación típica $3\ kg$. Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente. Obtener el número de estudiantes que pesan menos de $60\ kg$.

Resolución:

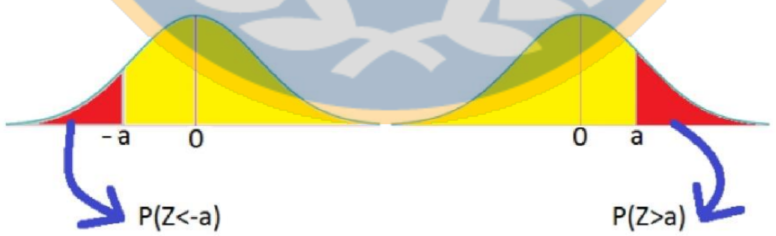
Gracias al enunciado, se tienen los siguientes datos:

$\mu = 70$ kg. $\sigma = 3$ kg. $X = 60$ kg.

Estandarizando la distribución, quedaría:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{60 - 70}{3} = \frac{-10}{3} = -3,\overline{3}$$

Observación: El valor negativo del resultado anterior solo indica que se está por debajo de la media, ya que al observar la tabla con los valores de Z para la distribución normal estándar, solo existen valores positivos. Así cabe recordar que $P(Z < -a)$, es equivalente a calcular $P(Z > a)$, ya que la distribución normal estándar es simétrica con respecto al eje Y, tal como se muestra en la imagen a continuación:



Así, observando el dibujo de la derecha, para dar respuesta al problema anterior, se debe encontrar la $P(Z < a)$, la cual corresponde a la parte de color amarillo de la distribución. Luego, calculando, se obtiene:

$$P(Z > 3{,}33) = 1 - 0{,}9996 = 0{,}0004 = P(Z < -3{,}33) = P(X < 60)$$

Respuesta: En efecto, el $0{,}04$ % de los 5000 estudiantes pesan menos de $60\ Kg$, lo cual corresponde a 2 educandos.

2. La confianza de un fusible eléctrico corresponde a la probabilidad de que un fusible, escogido al azar de una línea de producción, funcione adecuadamente bajo condiciones de diseño. Calcule la probabilidad de obtener 27 o más fusibles defectuosos en una muestra de 1000 fusibles, sabiendo que la probabilidad de que un fusible elegido al azar no sea defectuoso es de $0{,}98$.

Solución:

Se definen los siguientes eventos:

A: $\{Obtener\ un\ fusible\ perfecto\}$

A^c: $\{Obtener\ un\ fusible\ defectuoso\} = \{éxito\}$

Y además, se tiene:

X: $\{Cantidad\ de\ fusibles\ defectuosos\ entre\ los\ 1000\ seleccionados\ en\ la\ muestra\}$

La probabilidad del evento A, está dada por: $P(A) = 0{,}98$, y $P(A^c) = 0{,}02$.

Así, la distribución binomial de la situación queda modelada por la siguiente expresión:

$$X \sim b(n = 1000; p = 0{,}02)$$

Ahora bien, como la muestra de 1000 fusibles es muy grande, el problema anterior puede ser resuelto en forma aproximada a través de una distribución normal. Para ello, se deben calcular los parámetros de dicha distribución, teniendo en cuenta que para una distribución binomial:

$$\boldsymbol{E(x)} = \boldsymbol{\mu} = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}02 = 20$$

$$\sqrt{\boldsymbol{Var(x)}} = \boldsymbol{\sigma} = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{1000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98} \approx 4{,}4271$$

En efecto, aplicando el teorema central del límite, la situación anterior a través de la distribución normal quedaría modelada por:

$$X \rightarrow N(20; 4{,}4272)$$

Calculando $P(X \geq 27)$, quedaría:

$P(X \geq 27) = P\left(z \geq \frac{27-20}{4{,}4271}\right) = P(z \geq 1{,}58) = 1 - P(z \geq 1{,}58) = 1 - 0{,}9429 =$ $0{,}0571$

Respuesta: La probabilidad de que 27 o más fusibles estén defectuosos en una muestra de 1000 fusibles, es de $0{,}0571$.

Nota: Usando la distribución exacta binomial se obtiene $P(X \geq 27) = 0{,}0758$.

3. En un quiosco de periódicos se supone que el número de ventas diarias se distribuye normalmente con media 30 y varianza 2. Determinar:

a) Probabilidad de que en un día se vendan entre 13 y 31 periódicos
b) Determinar el máximo número de periódicos que se venden en el 90% de las ocasiones
c) Supongamos que en una ciudad hay 10 quioscos independientes del mismo tipo y con las mismas características. Determinar la probabilidad de que más de dos quioscos vendan entre 13 y 31 periódicos.

Solución:

La situación anterior a través de la distribución normal quedaría modelada por:

$$X \rightarrow N(30; \sqrt{2})$$

a) Calculando $P(13 \leq X \leq 31)$, quedaría:

$P(13 \leq X \leq 31) = P\left(\frac{13-30}{\sqrt{2}} \leq z \leq \frac{31-30}{\sqrt{2}}\right) = P(-12{,}02 \leq z \leq 0{,}71) = P(z \leq$ $0{,}71) - P(z \leq -12{,}02) = 0{,}7602$

Respuesta: La probabilidad de que se vendan entre 13 a 31 periódicos es de 0,7602.

b) $P(X \leq a) = 0.90 \iff P\left(z \leq \frac{(a-30)}{\sqrt{2}}\right) = 0,90$

Luego, se puede resolver utilizando alguna aplicación de estadística, como las anteriormente citadas, o a través de las tablas, y se obtiene que $Z_{0,90} = 1,28$

Usando la identidad $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, se obtiene:

$$\frac{(a-30)}{\sqrt{2}} = 1,28$$

$$a - 30 = 1,28 \cdot \sqrt{2}$$

$$a = 31,81$$

Respuesta: El máximo número de periódicos vendidos el 90% de las ocasiones es de 31.

c) Como se enuncia que hay 10 quioscos independientes del mismo tipo y con las mismas características, la muestra es:

$$n = 10$$

Luego, utilizando el resultado de la pregunta de la letra a), y definiendo el evento:

$$A = \{Vender\ entre\ 13\ y\ 31\ periódicos\} = \{éxito\}$$

Entonces, la $P(A) = P(13 \leq x \leq 31) = 0,76$ y la $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0,76 = 0,24$

Así, modelando la situación anterior a través de la distribución binomial, donde X indica el número de quioscos que venden 13 y 31 periódicos entre los 10 quioscos de la ciudad:

$$X \sim b(n = 10; p = 0,76)$$

Luego, para calcular la probabilidad de que dos o más quioscos vendan entre 13 a 31 periódicos se puede realizar el siguiente procedimiento:

$$P(x > 2) = 1 - P(x \leq 2) = 1 - [f(0) + f(1) + f(2)] = 0{,}99969$$

$$= 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot 0{,}7580^0 \cdot 0{,}242^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0{,}7580^1 \cdot 0{,}242^9 + \binom{10}{2} \cdot 0{,}7580^2 \cdot 0{,}242^8\right]$$

$$= 0{,}99967$$

Respuesta: La probabilidad de que dos o más quioscos de esta ciudad vendan entre 13 a 31 periódicos es de 0,99972.

Aplicación de la sesión

El tiempo empleado, en horas, en hacer un determinado producto sigue una distribución $N(10, 2)$. Se pide la probabilidad de que ese producto se tarde en hacer:

a) Menos de 7 horas
b) Entre 8 y 13 horas

Observación: No se les indicarán ejercicios prácticos ni problemas a resolver a los docentes en dicha sesión, ya que estos serán abordados en la próxima sesión.

Sesión 2	
Duración	2 horas
Propósito	Aplicar las distribuciones de probabilidad Binomial, Bernoulli y Normal en la resolución de ejercicios y problemas contextualizados.
Contenidos a abordar	- Concepto de función de probabilidad - Concepto de variable aleatoria - Distribuciones de probabilidad discretas: Bernoulli y Binomial - Distribución de probabilidad continua: Normal
Descripción general	Se comienza la sesión retroalimentando el desafío propuesto al final de la sesión 1. Posteriormente, se les indica a los docentes que deben resolver los ejercicios relacionados a las distribuciones de probabilidad de forma grupal. Al finalizar, los ejercicios resueltos serán expuestos por los docentes.

Propuesta de ejercicios

1. ¿Es adecuado el modelo de ensayos Bernoulli en cada una de las siguientes situaciones? Si es así, discuta de qué manera puede ocurrir alguna seria violación de los supuestos.

   a) Los escarabajos de una raza común son rociados con una cierta concentración de insecticida y se registra la ocurrencia de muertos y sobrevivientes.
   b) Se aplica a 10 niños de primer grado una prueba de asociación de palabras y se registra el tiempo empleado por cada niño en completar la prueba.
   c) Los artículos que salen de una línea de ensamble son inspeccionados y clasificados como defectuoso o no defectuoso.
   d) Se observa cada uno de los primeros diez días de julio y se registra si está nublado o despejado.
   e) De un grupo de 50 personas se elige al azar 20 y cada una es clasificada como zurda o no.
   f) En el borde de un bosque se inspecciona cada árbol para clasificarlo como sano o enfermo.

2. Un fabricante de aviones desea obtener remaches para montar los propulsores de sus aviones. El esfuerzo a la tensión mínimo necesario de cada remache es de $25000\ lb$. Se pide a tres fabricantes de remaches $(A, B\ y\ C)$ que proporcionen toda la información pertinente con respecto a los remaches que producen. Los tres fabricantes aseguran que la resistencia a la tensión de sus remaches se encuentra distribuida, de manera aproximada, normalmente con un valor medio de 28000, 30000 y $29000\ lb$, respectivamente.

a) ¿Tiene el fabricante la suficiente información para hacer una selección? ¿Por qué?

b) Supóngase que las desviaciones estándar para $A, B\ y\ C$ son $1000, 1800\ y\ 1200$ libras, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que un remache producido ya sea por A, B o C no reúna los requisitos mínimos?

c) Si usted fuera el fabricante de aviones, ¿Podría elegir entre $A, B\ y\ C$, con base en su respuesta al inciso b)? ¿Por qué?

3. Si la probabilidad de tener un hijo varón es 0.5, encuentre la probabilidad que el tercer hijo de una familia sea varón.

4. Una bengala contiene 3 cargas para señales de emergencia, cada una de las cuales encenderá con probabilidad 0.9. Suponiendo que las cargas operan independientemente, encuentre:

a) La probabilidad que al menos una carga encienda.
b) La probabilidad que exactamente dos cargas enciendan.

5. Si la probabilidad de que lo descubran copiando en un examen es 0.2, encuentre la probabilidad de que no lo descubran en tres intentos. Suponga independencia.

6. Usando una tabla de distribución binomial (o evaluando su fórmula con ayuda de una aplicación), encuentre la probabilidad de:

a) 2 éxitos en 8 ensayos cuando $p = 0.4$.

b) 7 fracasos en 16 ensayos cuando $p = 0.6$.

c) 3 o menos éxitos en 9 ensayos cuando $p = 0.4$.

d) Más de 12 éxitos en 16 ensayos cuando $p = 0.7$.

e) El número de éxitos entre 8 y 13 (ambos incluidos), en 16 ensayos cuando $p = 0.6$

7. En una lechería la producción de leche por vaca tiene distribución $X \sim N(18,9)$. Calcule la probabilidad de que una vaca elegida al azar produzca:

   a) menos de 12 litros.
   b) entre 21 y 24 litros.
   c) entre 15 y 22 litros.
   d) más de 25 litros.

8. Un fabricante de lustramuebles asegura que su nuevo producto da más brillo que otra marca líder. De 18 dueñas de casa elegidas aleatoriamente a quienes se les invitó a usar ambas marcas y comparar la brillosidad, 13 prefirieron la nueva marca. Suponiendo que realmente no hay ninguna diferencia entre la calidad de las marcas, de modo que la probabilidad de preferencia por la nueva marca es 0.5, encuentre la probabilidad de que 13 o más personas prefieran el nuevo producto. Comente sobre la validez de la afirmación del fabricante.

9. ***Inspección por muestreo:*** Se contrata una compañía farmacéutica para suministrar lotes de vacunas para animales de granja. Ocasionalmente algunas de estas vacunas están estériles. El distribuidor quiere protegerse de recibir demasiadas vacunas estériles. Probar cada dosis es impracticable, dado que al ejecutar la prueba la vacuna se inutiliza. Para monitorizar la calidad de la vacuna, el distribuidor usa el siguiente proceso de protección. Se prueba una muestra aleatoria de 10 dosis de cada lote y se cuenta el número de dosis estériles. Si $X = 0$ el lote es aceptado y si $X \geq 1$ es rechazado. Esto es llamado un plan de muestreo simple con el tamaño muestral $n = 10$ y número de aceptación $c = 0$. Suponga que el tamaño del lote es grande de modo que la distribución de X es aproximadamente binomial con parámetro $n = 10$ y $p =$ la fracción desconocida de dosis estériles en cada lote.

a) Si $p = 0.2$, ¿cuál es la probabilidad que un lote sea aceptado por el plan de inspección por muestreo del distribuidor?

b) Calcule la probabilidad de aceptar un lote $P(A)$ para $p = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50, 0.55, 0.60$. Grafique $P(A)$ versus p uniendo los puntos obtenidos con una curva suave. (Esta curva se llama curva de operación característica del plan de muestreo).

10. Un semáforo en el camino a clases está rojo el 40% del tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar una luz roja:

a) 2 días consecutivos?
b) 3 días consecutivos?
c) 2 de tres días?

11. En cada caso obtener el valor a de que cumpla con la probabilidad dada a partir de una tabla de la distribución acumulativa normal estándar:

   a) $P(Z < a) = 0,1093$
   b) $P(Z < a) = 0,8159$
   c) $P(Z > a) = 0,20$
   d) $P(Z > a) = 0,1093$
   e) $P(Z > a) = 0,10$
   f) $P(Z < a) = 0,10$

12. Si en un cierto huerto ocurre que el peso de manzanas Granny, tiene distribución normal con media 140 gr y desviación típica de 20 gr, entonces se pueden determinar situaciones como las siguientes.

   a) El peso máximo del 10% de las manzanas de menor peso.
   b) El peso mínimo del 5% de las manzanas más grandes.
   c) Entre que peso se encuentra el 90% central de las manzanas.

13. Una fábrica produce pistones cuyos diámetros se encuentran adecuadamente modelados por una distribución normal con un diámetro promedio de 5 centímetros y una desviación estándar igual a 0.001 cm. Para que un pistón sirva, su diámetro debe encontrarse entre 4.998 y 5.002 cm. Si el diámetro del pistón

es menor que 4.998 se desecha; si es mayor que 5.002 el pistón puede reprocesarse.

a) ¿Qué porcentaje de pistones servirá?
b) ¿Qué porcentaje será desechado?
c) ¿Qué porcentaje será reprocesado?

Autoevaluación sugerida

Categoría				
Soy capaz de **identificar** la distribución de probabilidades asociada a cada ejercicio o problema.				
Soy capaz de **resolver** los ejercicios o problemas asociados a las distribuciones de probabilidades.				
Soy capaz de **interpretar** adecuadamente los resultados de los problemas asociados a las distribuciones de probabilidades.				

Sesión 3	
Duración	2 horas
Propósito	Comprender las distribuciones muestrales: Chi Cuadrado, T Student y F de Fisher.
Contenidos a abordar	- Concepto de distribución muestral. - Estadísticos asociados a los parámetros de media, desviación estándar y varianza poblacional. - Distribución muestral Chi Cuadrado. - Distribución muestral T de Student. - Distribución muestral F de Fisher.
Descripción general	Se recordarán los principales estadísticos asociados a los parámetros más comunes, junto al concepto de distribución muestral. Posteriormente, se presentarán las tres distribuciones muestrales asociadas a dichos estadísticos.

Distribución muestral

Al considerar todas las muestras posibles de obtener una población de tamaño n, cada estadístico se comporta como una variable aleatoria que varía de una a otra muestra.

La distribución de probabilidad que modela esta variabilidad de un determinado estadístico recibe el nombre de distribución muestral. Seguidamente se presentan los estadísticos asociados a los parámetros más comunes.

Considerando la población dada por la variable aleatoria X y todas las muestras aleatorias de tamaño n de esta población $M = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$, se definen los siguientes estadísticos:

- El estadístico asociado a la media poblacional μ se denomina **media muestral** $\bar{X}$:

$$\bar{X}(M) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

- El estadístico asociado a la varianza poblacional σ^2 se denomina **varianza muestral** S^2:

$$S^2(M) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

- El estadístico asociado a la desviación estándar poblacional σ se denomina **desviación estándar muestral** S:

$$S(M) = \sqrt{S^2(M)}$$

Distribución Chi cuadrado

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_v$ v variables aleatorias independientes distribuidas normalmente con media cero y varianza 1. Consideremos la variable aleatoria:

$$x^2 = {X_1}^2 + {X_2}^2 + \ldots + {X_v}^2$$

Donde x^2 se llama **chi cuadrado.** Entonces, podemos demostrar que para $x \geq 0$:

$$P(x^2 \leq x) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^x u^{\left(\frac{v}{2}\right)-1} e^{\frac{-u}{2}} du$$

y $P(x^2 \leq x) = 0$ para $x > 0$.

La distribución definida anteriormente se llama **distribución chi cuadrado** y v es el número de **grados de libertad**.

Distribución F

Sean V_1 y V_2 variables aleatorias independientes que tienen distribución chi cuadrado con v_1 y v_2 grados de libertad, respectivamente. Entonces la variable aleatoria:

$$V = \frac{\frac{V_1}{v_1}}{\frac{V_2}{v_2}}$$

tiene **distribución F** con v_1 grados *de libertad en el numerador* y v_2 grados de libertad en el denominador.

Distribución T de Student

Sean Y y Z variables aleatorias independientes, donde Y está distribuida normalmente con media 0 y varianza 1, mientras que Z tiene distribución chi cuadrado con v grados de libertad, entonces la variable aleatoria

$$T = \frac{Y}{\sqrt{\frac{Z}{v}}}$$

tiene la **distribución t** con v grados de libertad.

Observación: En esta sesión, no se ejemplificarán ejercicios ni problemas, ya que el objetivo de estas distribuciones de probabilidades es poder calcular intervalos de confianza, los cuales serán abordados en la próxima sesión, ya que estas leyes de probabilidades permiten modelar el comportamiento de estadísticos que se calculan de muestras aleatorias obtenidas de una población con distribución normal.

Por ejemplo:

- **T de Student**

$$T = \frac{X - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t\,(\gamma = n - 1)$$

- **Distribución F de Fisher o Snedecor:**

$$F = \frac{\frac{{s_1}^2}{{\sigma_1}^2}}{\frac{{s_2}^2}{{\sigma_2}^2}} \sim f(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

- **Chi cuadrado:**

$$V = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim x^2(\gamma = n - 1)$$

Autoevaluación sugerida

Categoría				
Soy capaz de **identificar** y **calcular** los estadísticos más comunes.				
Soy capaz de **distinguir** entre los indicadores de características de una población (parámetros) y de una muestra (estadísticos).				
Soy capaz de **identificar** cada distribución asociada a un estadístico.				

Módulo 2: Intervalos de Confianza

Sesión 4	
Duración	2 horas
Propósito	Comprender el concepto de intervalo de confianza y su interpretación para una muestra de distribución normal.
Contenidos a abordar	- Intervalos de confianza - Nivel de confianza y significación - Intervalo de confianza para una proporción - Representación gráfica de un intervalo de confianza para una muestra de distribución normal
Descripción general	Se recordará la definición de intervalo de confianza, junto a su nivel de confianza y significación. Posteriormente, se resolverán los problemas ejemplificados de forma expositiva, enfocándose en la interpretación de los resultados. Por último, se les indicará a los docentes que resuelvan los ejercicios propuestos.

Nivel de confianza

Es posible que en dos muestras diferentes y representativas de una misma población, los estadísticos obtenidos en un estudio sean diferentes entre sí. Esto ocurre no por error, sino por azar. Para controlar lo anterior, se establece un rango de valores que podrían contener el valor del parámetro con cierta probabilidad. A esta probabilidad se le conoce como nivel de confianza y su principal objetivo es evaluar la validez del muestreo.

Intervalos de confianza

Un intervalo de confianza es un intervalo estimador de un parámetro, cuyos extremos, el límite inferior (L_1) y límite superior (L_2) son funciones de la muestra, es decir depende solamente de valores muestrales.

Un intervalo de confianza del parámetro θ es un intervalo $[L_1, L_2]$, que incluye al parámetro con cierto grado de incertidumbre establecido. Tomando en cuenta la distribución de probabilidades del estimador, construir un intervalo de confianza es equivalente a plantear el enunciado probabilístico siguiente:

$$\boldsymbol{P(L_1 \leq \theta \leq L_2) = 1 - \alpha}$$

$$P(L_1 \leq \theta \leq L_2) = 1 - \alpha$$

Donde α es un número positivo pequeño y el valor de $(1 - \alpha)$ indica la proporción esperada de las veces que el intervalo contendrá al verdadero valor del parámetro cuando el muestreo se repite un determinado número de ocasiones.

Este valor $(1 - \alpha)$ se conoce como **nivel de confianza**. El nivel de confianza se fija de antemano y su valor debe ser grande. A menudo se usa como valores de α 0.10, 0.05, 0.01, de esta manera los niveles de confianza son 0.90, 0.95 y 0.99, respectivamente.

Un intervalo de confianza [a, b] para un parámetro poblacional es un intervalo de valores que con cierto nivel de confianza (95%, 99%, etc.) contiene al parámetro que se está estimando.

Un intervalo de confianza para el parámetro μ de una población con distribución normal, con desviación estándar poblacional σ, y tamaño n, se puede representar como:

$$\left[\bar{X} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Donde:

$Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$: Coeficiente asociado al nivel de confianza. Percentil $(1-\alpha)100\%$ de la distribución normal estándar.

Observación:

- Se designa como parámetro a los valores o medidas que caracterizan una población (media, desviación, etc.)
- Se designa estadístico a los valores o medidas que se obtienen o calculan de una muestra.

Los estadísticos son valores variables, ya que dependen de la fluctuación de la muestra, mientras que los parámetros son valores constantes.

- Nivel de confianza y significación: $1 - \alpha$ es el nivel de confianza que indica la probabilidad de que la media de una población pertenezca al intervalo de confianza. α es el nivel de significación y corresponde al riesgo de que la media de la población no pertenezca al intervalo

- Valores de $Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ según el nivel de confianza. Percentil $(1-\frac{\alpha}{2})100\%$ de la distribución Z o normal estándar.

Nivel de confianza $\boldsymbol{(1-\alpha)100\%}$	$\boldsymbol{Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}$ **Percentil** $\boldsymbol{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)100}$
50%	0,67449
68%	0,99446
75%	1,15035
80%	1,28155
90%	1,64485
95%	1,95996
98%	2,32635
99%	2,57583
99,7%	2,96774

Usando las distribuciones muestrales pertinentes se obtienen los siguientes intervalos de confianza:

- Límites de confianza de un nivel $(1-\alpha)100\%$, para la media μ de una población normal con varianza σ^2 conocida:
    - $L_1 = \bar{X} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\qquad$ $L_2 = \bar{X} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- Límites de confianza de un nivel $(1-\alpha)100\%$, para la media μ de una población normal con varianza σ^2 desconocida:

- $L_1 = \bar{X} - t_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)} \frac{S}{\sqrt{n}}$ $\qquad L_1 = \bar{X} - t_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)} \frac{S}{\sqrt{n}}$

Donde el percentil t de Student tiene $n-1$ grados de libertad.

- Límites de confianza aproximados de un nivel $(1-\alpha)100\%$, para la probabilidad de éxito p de una población Bernoulli.

  - $L_1 = \dfrac{\left(\hat{P}+\frac{z^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2n}\right)-\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\sqrt{\left((\hat{P}(1-\hat{P})+\frac{z^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}}{4n}\right)}}{1+\frac{z^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}}$
  - $L_2 = \dfrac{\left(\hat{P}+\frac{z^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2n}\right)+\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\sqrt{\left((\hat{P}(1-\hat{P})+\frac{z^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}}{4n}\right)}}{1+\frac{z^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}}$

Donde $\hat{P} = \frac{X}{n}$ y $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es el número de éxitos observados.

Si n es muy grande $(n > 200)$:

  - $L_1 = \hat{P} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$ $\qquad L_2 = \hat{P} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$

- Límites de confianza de un nivel $(1-\alpha)100\%$, para la varianza σ^2 de una población normal.

  - $L_1 = \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)}}$
  - $L_2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)}}$

Donde los percentiles chi cuadrado tienen $n-1$ grados de libertad.

- Límites de confianza de un nivel $(1-\alpha)100\%$, para la diferencia de dos medias $\mu_1 - \mu_2$ de poblaciones normales independientes con varianzas ${\sigma_1}^2$ y ${\sigma_2}^2$ conocidas.

- $L_1 = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
- $L_2 = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

- Límites de confianza de un nivel $(1-\alpha)100\%$, para la diferencia de dos medias $\mu_1 - \mu_2$ de poblaciones normales independientes con varianzas ${\sigma_1}^2$ y ${\sigma_2}^2$ desconocidas, pero supuestamente iguales.

- $L_1 = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2\right)} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$
- $L_2 = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2\right)} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$

Donde el percentil t de Student tiene $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad y

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

- Límites de confianza aproximados de un nivel $(1-\alpha)100\%$, para la diferencia de dos medias $\mu_1 - \mu_2$ de poblaciones normales independientes con varianzas ${\sigma_1}^2$ y ${\sigma_2}^2$ desconocidas y distintas.

- $L_1 = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, v\right)} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$
- $L_2 = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, v\right)} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$

Donde el percentil t de Student tiene v grados de libertad que se calculan de la siguiente forma redondeándolo al entero más cercano:

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

- Límites de confianza aproximados de un nivel $(1-\alpha)100\%$, para la diferencia de dos proporciones $p_1 - p_2$ de poblaciones Bernoulli independientes.

  - $L_1 = \hat{P}_1 - \hat{P}_2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}$
  - $L_2 = \hat{P}_1 - \hat{P}_2 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}$

- Límites de confianza de un nivel $(1-\alpha)100\%$, para el cuociente de dos varianzas $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ de poblaciones normales independientes.

  - $L_1 = \frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{f_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right)}}$ $\qquad L_2 = \frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{f_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right)}}$

Donde los percentiles f tienen $n_1 - 1$ grados de libertad en el numerador y $n_2 - 1$ grados de libertad en el denominador.

Ejemplos

1. Después de una década sin recopilar datos, se quiere determinar aproximadamente el valor esperado μ de la estatura entre las mujeres de una población. Se obtiene una muestra de 100 mujeres, con una estatura media de $\bar{X} = 154\ cm$. Se conoce la desviación estándar poblacional de esa medición: $\sigma = 6\ cm$ y se supone que no ha cambiado.

a) A partir de la muestra poblacional, describan el procedimiento que determina un intervalo de confianza para estimar el valor esperado poblacional μ.

b) Determinen el intervalo de confianza alrededor de la media muestral $\bar{X}$ con un nivel de 95% de confianza, que contenga el valor esperado μ de la población.

c) Si la media muestral $\bar{X} = 154\ cm$ hubiera resultado de una muestra de 400 mujeres, ¿qué influencia tendría en el intervalo de confianza? Argumenten.

Resolución:

a) Primero se deben calcular los estadísticos asociados al problema (en este caso es la media muestral ($\bar{X}$), y el valor de los parámetros supuestamente conocidos, en este caso la desviación estándar poblacional(σ)) y el nivel de confianza.)

Luego, según las características de la muestra, como se conoce el valor de la desviación estándar poblacional y se requiere determinar el valor esperado de la media poblacional, se utiliza la siguiente fórmula para calcular ambos límites aceptando que la estatura tiene distribución normal:

$$L_1 = \bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad L_2 = \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

b) Intervalo de confianza del 95%

Según el enunciado, se tienen los siguientes datos:

$$n = 100$$
$$\mu = ?$$
$$\bar{x} = 154\ cm$$
$$\sigma = 6\ cm$$

Además, como el intervalo de confianza es del 95%, se tiene:

$$1 - \alpha = 0{,}95$$
$$1 - 0{,}95 = \alpha$$
$$0{,}05 = \alpha$$
$$0{,}025 = \frac{\alpha}{2}$$

Y en consecuencia: $Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = Z_{(1-0{,}025)} = Z_{(0{,}975)} = 1{,}96$

Luego, aplicando la fórmula mencionada en la letra a), los límites son:

$$L_1 = 154 - z_{0{,}975} \frac{6}{\sqrt{100}} = 154 - 1{,}96 \cdot 0{,}6 = 154 - 1{,}176 = 152{,}824$$

$$L_2 = 154 + z_{0{,}975} \frac{6}{\sqrt{100}} = 154 + 1{,}96 \cdot 0{,}6 = 154 + 1{,}176 = 155{,}176$$

Respuesta: Se espera que la estatura promedio de todas las mujeres de esta población, se encuentren entre $152{,}824\ cm$ y $155{,}176\ cm$, con un nivel de confianza del 95%.

c) El intervalo de confianza sería más estrecho o de menor longitud, ya que los límites se acercarían más a la media muestral.

2. Para una campaña de alimentación saludable, diferentes casinos distribuyen su plato de hamburguesa de garbanzos, lenteja y quinoa: si su masa es menor que 500 gramos será gratis para los clientes; los cuales están informados de la promoción. Pero los casinos se quieren asegurar de que ese plato no pese menos de 500 gramos para no entregar comida gratis; para ello, quieren tener una confianza alta. Con el dato histórico de las muestras, se requiere predecir qué pasará con un alto grado de confianza. Asumiendo una distribución normal de las masas, la información histórica es la siguiente:

- Media muestral de las masas $(\bar{X})$: $610\ g$.
- Desviación estándar poblacional (σ): $12\ g$.
- Cantidad de platos de hamburguesa que se pesaron (n): 36
- Nivel de confianza: 95%

a) Encuentra el intervalo para la masa poblacional, según el nivel de confianza solicitado.
b) Interpreta este intervalo. ¿Se cumple el objetivo estadístico del casino? Argumenta.
c) Determina el error para el intervalo de confianza en este caso. ¿Cómo se interpreta dicho error? Argumenta.

Resolución:

a) Intervalo de confianza del 95%

Según el enunciado, se tienen los siguientes datos:

$$n = 36$$
$$\mu = ?$$
$$\bar{X} = 610\ g$$
$$\sigma = 12\ g$$

Además, como el intervalo de confianza es del 95%, se tiene:

$$1 - a = 0{,}95$$
$$1 - 0{,}95 = a$$
$$0{,}05 = a$$
$$0{,}025 = \frac{a}{2}$$

Entonces: $Z_{\left(1-\frac{a}{2}\right)} = Z_{(1-0{,}025)} = Z_{(0{,}975)} = 1{,}96$

Luego, los límites son:

$$L_1 = 610 - z_{0{,}975}\frac{12}{\sqrt{36}} = 610 - 1{,}96 \cdot 2 = 610 - 1{,}96 \cdot 2 = 606{,}08$$

$$L_2 = 610 + z_{0{,}975}\frac{12}{\sqrt{36}} = 610 + 1{,}96 \cdot 2 = 610 + 1{,}96 \cdot 2 = 613{,}92$$

Respuesta: El valor esperado de μ de la masa poblacional, se encuentra entre $606{,}08\ gr$ y $613{,}92\ gr$, con un nivel de confianza del 95%.

b) Sí, porque con un 95% de confianza se puede afirmar que todos los platos de este tipo de hamburguesa servidos en este casino siguen estando por sobre los $500\ grs$.

c) Para calcular el error, se utiliza la siguiente fórmula:

$$E = z_{\left(1-\frac{a}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Así, reemplazando, quedaría:

$$E = z_{(0{,}975)} \cdot \frac{12}{\sqrt{36}} = 1{,}96 \cdot 2 = 3{,}92$$

Respuesta: El error indica que la estimación de la media poblacional oscila alrededor de la media muestral entre $606{,}08\ gr$ y $613{,}92\ gr$, es decir $610 \pm 3{,}92$

Intervalo de confianza para una proporción

Para estimar la proporción **p** de elementos que posee una característica en una población, se utiliza una muestra de tamaño **n**, donde:

$$\hat{p} = \frac{f}{n}$$

Es la proporción muestral de elementos que posee la característica determinada, $\boldsymbol{f}$ el número de elementos de la muestra que posee la característica estudiada y $(1-\hat{p})$ la proporción muestral de elementos que no la posee.

Si el tamaño muestral es muy grande $(n > 200)$ el intervalo de confianza aproximado para el parámetro **p** está dado por la expresión:

- $L_1 = \hat{P} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$
- $L_2 = \hat{P} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$

Donde:

$Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$: Coeficiente asociado al nivel de confianza. Percentil $(1-\frac{\alpha}{2})100\%$ de la distribución normal estándar o tipificada.

Observación:

- **Distribución muestral de las proposiciones:** se considera que se distribuye aproximadamente normal con parámetros, si el tamaño muestral es grande según el Teorema Central del Límite.

$$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right), \text{con } q = 1-p.$$

Intervalos de confianza

Problemas propuestos

1. Se emplea un método que consiste en usar un manual auto instructivo acompañado del video correspondiente, para aplicar un programa de capacitación industrial. Las calificaciones $(0 - 100)$ obtenidas al final de la capacitación, al aplicar una prueba adecuada a una muestra aleatoria de alumnos son:

$71, 75, 68, 59, 70, 66, 78, 79, 68, 73, 55, 63, 72, 56, 72, 66, 60, 58, 62, 70$

Si las calificaciones tienen distribución de probabilidad normal, con varianza poblacional igual a 40, construir e interpretar el intervalo de confianza para el promedio poblacional de 82 las calificaciones. Emplear 90% y 95% de probabilidad de confianza, compare los resultados.

2. Respirar benceno puede causar somnolencia, mareo y pérdida del conocimiento; la exposición de larga duración produce alteraciones en la médula de los huesos y puede causar anemia y leucemia., por tanto disminuir el rendimiento académico de los escolares. En cierta investigación se ha tomado muestras de un litro de agua de un río cuyo contenido en $\mu g\ /\ L$, en diferentes puntos; Este río recorre tres distritos rurales de extrema pobreza y que cada distrito tiene una escuela polidocente. Según la OPS el valor permisible de benceno es hasta $10\ \mu g\ /\ L$.

Los datos obtenidos son:

$$10{,}4;\ 9{,}7;\ 11{,}3; 12{,}7;\ 10{,}7;\ 10{,}3;\ 9{,}5; 12{,}9;\ 8{,}7;\ 12{,}9$$
$$10{,}3;\ 11{,}0;\ 12{,}0; 12{,}7;\ 8{,}0;\ 9{,}2;\ 11{,}6;\ 10{,}4;\ 12{,}0;\ 11{,}7;\ 10{,}9;\ 11{,}2$$
$$8{,}4;\ 11{,}9;\ 10{,}5;\ 8{,}2;\ 10{,}2;\ 9{,}9;\ 9{,}4;\ 10{,}6;\ 11{,}0;\ 10{,}7;\ 10{,}1;\ 9{,}0$$
$$11{,}6;\ 10{,}7;\ 9{,}4; 10{,}0;\ 11{,}4;\ 8{,}9;\ 11{,}2;\ 11{,}7;\ 10{,}5;\ 10{,}0$$
$$8{,}0;\ 11{,}3;\ 9{,}7;\ 10{,}6;\ 10{,}4; 9{,}1$$

Considerando que el contenido de benceno se distribuye como normal de probabilidad, obtenga e interprete el intervalo de confianza del 99% para el contenido promedio poblacional de benceno y su respectiva varianza poblacional.

3. La Universidad Bienestar Seguro tiene 2 formas para examen de admisión que pretende utilizar durante los próximos 3 años. Sin embargo, un profesor de estadística de la Universidad afirma que la forma 1 va a tener un mejor rendimiento promedio que la forma 2. Ante esto, la universidad aplicó las fórmulas a un grupo de estudiantes, obteniendo los siguientes resultados:

Forma	Tamaño de la muestra	Media muestral	Desviación muestral
1	21	65	24
2	17	63	15

a) Encuentre un intervalo de confianza de 90% para el cociente de las varianzas de las notas obtenidas en las formas de examen.
b) ¿Puede suponerse que las variancias son iguales?
c) Encuentre un intervalo de confianza de 95% para la diferencia entre los promedios de las notas obtenidas en las formas de examen.
d) ¿Es aceptable la afirmación del profesor? Justifique.

4. Se ha comprobado que la concentración promedio de zinc que se obtiene del agua de un río a partir de una muestra de mediciones de zinc en 36 sitios diferentes es de 2.6 gramos por mililitro. Encontrar los intervalos de confianza del 95% y 99% para la concentración media de zinc en el río, suponiendo que la desviación típica de la población es 0.3.

5. Dos compañías A y B fabrican el mismo tipo de cable. Un distribuidor desea conocer la diferencia promedio de la resistencia a la rotura de los mismos, para lo cual toma muestras de 100 cables de A y 50 cables de B. La muestra de los cables de la compañía A arroja una resistencia promedio a la rotura de 4500 kilogramos, mientras que los cables de la compañía B arrojan una resistencia promedio a la rotura de 4000 kilogramos. Se sabe, por experiencia, que la desviación típica de la resistencia a la rotura es de 300 kilogramos para la compañía A y de 200 kilogramos para la compañía B. Se pide estimar, con un nivel de confianza del 95%, el intervalo de confianza de la diferencia de medias de la resistencia a la rotura entre los dos cables, si la resistencia a la rotura se distribuye normalmente para ambas compañías.

6. Sea desea investigar la duración de dos tipos A y B de baterías AA no recargables, las cuales tiene precios similares. Un estudiante, que utiliza muchas baterías AA, señala que la duración promedio de las baterías A supera en más de 10 minutos a la duración promedio de las baterías B. Se tomaron muestras de duraciones de ambos tipos de baterías, la información se resume en la siguiente tabla:

Batería AA	Tamaño de muestra (n)	$\bar{x}$	s
Tipo A	21	$5,3\ hrs$	$0,8\ hrs$

Tipo B	19	5,1 hrs	0,6 hrs

a) Encuentre un intervalo de confianza de 90% para el cociente de las desviaciones estándar poblaciones de las duraciones de las baterías.

b) ¿Puede suponerse que las variancias son iguales?

c) Determine un intervalo de confianza del 90% para la diferencia de duraciones promedio de baterías.

Aplicación de la sesión

El peso de los terneros de una granja se distribuye normalmente, con desviación típica de 10 kilogramos. Se toma al azar una muestra de 35 de ellos para transportarlos en un camión. Sabiendo que el peso medio de esta muestra resulta ser de 140 kilogramos, determinar un intervalo de confianza al 8% de nivel de significación en el que oscilará el peso promedio de todos los terneros de la granja.

Sesión 5	
Duración	2 horas
Propósito	Comprender el tamaño muestral, determinación de dicho tamaño, fijando el margen de error. Además de resolver ejercicios asociados a dichos tópicos.
Contenidos a abordar	- Tamaño muestral - Margen de error - Elección de tamaño de la muestra
Descripción general	Se darán a conocer las definiciones de tamaño muestral, margen de error asociado y elección de dicho tamaño. En esta sesión se enfatiza en el cálculo e interpretación del margen de error junto a la determinación del tamaño de la muestra, por lo que al finalizar con los contenidos se sugieren ejercicios acerca de este tema, los cuales deberán ser compartidos de manera expositiva al cierre de la sesión.

Tamaño muestral

Determinación del tamaño de la muestra

Para determinar el tamaño de la muestra requerido para cumplir con una cierta exigencia de la precisión de la estimación de la media poblacional se debe especificar el máximo error de muestreo aceptable o tolerable, es decir:

$$|\bar{X} - \mu| \leq \varepsilon$$

donde el valor ε lo fija el investigador de acuerdo con la precisión que él requiera.

Además, se debe especificar el nivel de confianza, es decir, la probabilidad $1 - \alpha$ de que tal evento ocurra, o sea:

$$P(|\bar{X} - \mu| \leq \varepsilon) = 1 - \alpha$$

De esta última ecuación, suponiendo que los datos provienen de una distribución normal, o apoyándose en el teorema central del límite, es posible despejar el valor del tamaño de la muestra obteniéndose:

$$n = \frac{Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Cuya fórmula de cálculo necesita que la varianza σ^2 sea conocida, o bien su valor debe ser estimado mediante una muestra preliminar o piloto. El valor de σ también puede ser estimado considerando que el rango de una población normal o aproximadamente normal es de seis veces la desviación estándar, o sea:

$$R \cong 6\sigma, \text{ por lo tanto } \hat{\sigma} = \frac{R}{6} = \frac{X_{max} - X_{min}}{6}$$

Si la población es finita de tamaño N, el tamaño muestral requerido se corrige de la forma:

$$n_c = \frac{n}{\frac{N-1}{N} + \frac{n}{N}} \cong \frac{n}{1 + \frac{n}{N}}$$

Los valores calculados de n siempre se aproximan al entero inmediatamente superior.

En el caso de poblaciones Bernoulli, recordemos que $\sigma^2 = p(1-p)$ y para la aplicación de la fórmula pertinente se requiere contar con una estimación preliminar de p.

Si no se tiene ninguna información respecto del valor de p se puede trabajar bajo la condición de *máxima incertidumbre*, es decir, con $p = \frac{1}{2}$ o equivalentemente con $\sigma^2 = \frac{1}{4}$.

En el caso que no pueda suponer que la población es normal se debe utilizar la desigualdad de Tchebysheff, la cual establece que para cualquier variable aleatoria X con media μ y varianza σ^2 finita, y para cualquier constante $k > 1$, se tiene que:

$$P(|X - \mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Lo que en el caso de la media obtenida de una muestra de tamaño n, se traduce en:

$$P\left(|\bar{X} - \mu| \leq \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Si consideramos $\alpha = \frac{1}{k^2}$, es decir, $k = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ entonces:

$$P\left(|\bar{X} - \mu| \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}\right) \geq 1 - \alpha$$

Si se especifica la magnitud del máximo error de muestreo permisible $|\bar{X} - \mu| \leq \varepsilon$, entonces se tiene $\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}$, que al resolver con respecto a n permite concluir que:

$$n = \frac{\sigma^2}{\alpha \varepsilon^2}$$

Ejemplos

1. El director de una sucursal desea estimar el tiempo medio de atención a los clientes con una confianza del 99% y con un error máximo de medio minuto. Se sabe que el tiempo medio de atención a los clientes se distribuye normalmente, con desviación típica $2{,}6$ minutos. ¿Cuántas personas se deben incluir en el estudio para obtener dicha estimación?

Solución

A través del enunciado, se obtienen los siguientes datos:

$$\text{Nivel de confianza} = 99\%$$
$$\alpha = 0{,}01$$
$$\sigma = 2{,}6$$
$$\varepsilon = 0{,}5$$

En consecuencia: $z_{0{,}995} = 2{,}57583 \approx 2{,}576$

Luego, en el problema se indica que los datos provienen de una distribución normal, por ende se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$n = \frac{z^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Posteriormente, reemplazando:

$$n = \frac{(2{,}576)^2 \cdot (2{,}6)^2}{(0{,}5)^2} = 179{,}2921 \approx 180$$

Respuesta: Para estimar el tiempo medio de atención a los clientes, con un error máximo de medio minuto y con un 99% de confianza, se deben incluir 180 personas.

2. Se sabe por estudios previos que la proporción de objetos defectuosos en una línea de producción es del orden de 0.05. ¿De qué tamaño conviene tomar una muestra para tener una confianza del 95% de que la proporción estimada no difiera de la verdadera en más de un 3%?

Solución

A través del enunciado, se obtienen los siguientes datos:

$$p = 0{,}05$$

$$\text{Nivel de confianza} = 95\%$$

$$\alpha = 0{,}05$$

$$\varepsilon = 0{,}03$$

En efecto: $z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = z_{(0{,}975)} = 1{,}95996 = 1{,}96$

Luego, como en este problema se requiere calcular la proporción de objetos, se debe utilizar la siguiente fórmula:

$$n = \frac{z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}^{2} \cdot \hat{p}(1-\hat{p})}{\varepsilon^2}$$

Reemplazando, quedaría:

$$n = \frac{(1{,}96)^2 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95}{(0{,}03)^2} = 202{,}7511 \approx 203$$

Respuesta: Para tener un nivel de confianza del 95% y un error máximo del 3% en la estimación de la proporción de objetos defectuosos, se debe tomar una muestra de 203 productos.

3. En una fábrica de artículos electrónicos generalmente el 10% de los artículos presenta algún defecto de fabricación. Para analizar la calidad del producto se desea estimar la proporción de artículos electrónicos defectuosos de un lote de

2000 artículos listo para ser embarcado. ¿Cuántos artículos deben ser elegidos del lote si se desea una confianza de 95% y un error de estimación no mayor a 0.05?

Solución

Del enunciado del problema, se puede extraer que:

$\hat{p} = 0{,}1$ (10%) es un estimador de p.

Nivel de confianza: 95%

$\varepsilon = 0{,}05$

Así: $z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = z_{(0{,}975)} = 1{,}95996 = 1{,}96$

Luego, para determinar el tamaño de la muestra, se debe utilizar la siguiente fórmula:

$$n = \frac{z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{}^{2} \cdot \hat{p}(1-\hat{p})}{\varepsilon}$$

Así reemplazando, se tiene:

$$n = \frac{1{,}96 \ \cdot \ 0{,}1 \cdot 0{,}9}{0{,}05} = 138{,}2976 \approx 139$$

No obstante, como se indica que la población es finita (N=2000), se debe ajustar a través de la siguiente fórmula:

$$n_c = \frac{n}{1 + \frac{n}{N}}$$

Reemplazando, quedaría:

$$n_c = \frac{139}{1 + \frac{139}{2000}}$$

Realizando el cálculo:

$$n_c = \frac{139}{1 + 0{,}0695} = 129{,}967 \approx 130$$

Respuesta: Para estimar la proporción de artículos electrónicos en el lote con una confianza de 95% y un error de estimación no mayor a 0,05 se debe elegir a lo menos 130 artículos del lote en la muestra.

Problemas propuestos

1. ¿De qué tamaño debe ser una muestra para tener un margen de error de 0,2 en la estimación de la media para una variable con distribución normal con desviación típica de 0,3, y con una confianza del 95%?

2. Calcular el tamaño de la muestra de una población de 500 elementos con desviación estándar de 0,5 y un nivel de significancia del 5%, para estimar la media con un margen de error de 2,4 unidades de medición.

3. Se quiere estimar la facturación mensual promedio por consumo doméstico de electricidad en el mes de julio de una determinada ciudad europea, con una aproximación de 5 euros al promedio real y con el 99% de confianza. Se sabe que la desviación típica es de 20 euros. ¿Qué tamaño de muestra se necesita?

4. Para estimar la proporción de hogares de una población que tienen ordenador se utiliza una muestra de tamaño n.

a) ¿Cuál debe ser el mínimo valor de n para garantizar con una confianza del 95% que el error en la estimación no sea superior al 2%?
b) ¿Y si se desea una confianza del 98% y un error máximo del 1%? Supongamos máxima variabilidad.

5. Para analizar el crecimiento de ratas de laboratorio se elige una muestra piloto de 13 ratas y se miden obteniendo una talla promedio de la muestra de 5.3 centímetros y una varianza muestral de 19.2

Un investigador desea determinar el tamaño de muestra para estimar la talla promedio de las ratas en la población con una confianza de 95% y un error de estimación no mayor a 2 centímetros si en la población hay 200 ratas. ¿Cuántas ratas se debe elegir en la muestra?

6. Se desea estimar el costo promedio de matrícula de los estudiantes universitarios de la ciudad. Por estudios anteriores y a precios actuales se sabe que la desviación típica es de $1800 USD.

a) Calcular el tamaño muestral fijando para ello un error de 300 USD y una confianza del 99%
b) Si se considera que la población estudiantil que se desea investigar es de 12000 estudiantes ¿Cuál sería el valor de n?

7. ¿Qué tamaño deberá tener una muestra para estimar dentro del 3%, la proporción de mujeres casadas que van periódicamente a consulta ginecológica, en una población de 5000 mujeres y una seguridad del 95%?

8. Un fabricante de electrodomésticos sabe que la vida media de estos artefactos sigue una distribución normal con media 100 meses y desviación típica 12 meses. Determina el mínimo tamaño muestral que garantiza, con un nivel de confianza del 98%, que la vida media de los electrodomésticos en dicha muestra se encuentre entre 90 y 110 meses.

9. El encargado del departamento de producción de una fábrica recibe un lote de 2000 piezas necesarias para el montaje de un artículo. El fabricante de las piezas asegura que en este lote no hay más de 100 piezas defectuosas.
   a) ¿Cuántas piezas hay que examinar para que, con un nivel de confianza del 95%, el error que se cometa en la estimación de la proporción de piezas defectuosas no sea mayor que 0.05?
   b) Si se toma una muestra de 100 piezas elegidas al azar y se encuentran 4 defectuosas, determinar un intervalo de confianza para la proporción de defectuosas al nivel del 95%.

Autoevaluación sugerida

Categoría				
Soy capaz de **calcular** el tamaño muestral en un problema.				
Soy capaz de **distinguir** cuando debo utilizar la media muestral y la media proporcional en una situación problema.				

Módulo 3: Prueba de Hipótesis

Sesión 6	
Duración	2 horas
Propósito	Caracterizar la prueba de hipótesis, aplicándola a diversas situaciones contextualizadas e interpretando el error tipo I y el $valor\ p$.
Contenidos a abordar	- Prueba de hipótesis - Hipótesis nula y alternativa - Errores en una prueba de hipótesis: Tipo I y II. - $Valor\ p$ de una prueba de hipótesis. - Algoritmo recomendado de prueba de hipótesis.
Descripción general	En esta sesión será capaz de resolver una situación problema que involucre una prueba de hipótesis, además de interpretar el error tipo I, junto al $valor\ p$ de dicha prueba. Para ello, se indicarán una serie de pasos a realizar para resolver correctamente cada problema propuesto. Posteriormente, se expondrán una serie de ejemplos, en los cuales se deba realizar una prueba de hipótesis, e interpretar el error tipo I, junto al $valor\ p$. Para finalizar, se entregará una autoevaluación a cada docente.

Pruebas de hipótesis

Conceptos básicos

Llamaremos **hipótesis estadística** a cualquier afirmación acerca de la población, donde su plausibilidad es lo que será evaluada sobre la base de la información obtenida mediante el muestreo de la población.

Debido a que una afirmación puede ser verdadera o falsa, siempre se debe tener en cuenta dos hipótesis complementarias:

- H_1: la afirmación es verdadera

- H_0: la afirmación es falsa.

Usando la información de las observaciones muestrales se debe optar por una de las dos siguientes decisiones o inferencias.

- Rechazar H_0 y concluir que H_1 es fuertemente respaldada por los datos, o
- Fracasa el rechazo de H_0 y se concluye que H_1 no está fuertemente respaldada por los datos.

El proceso mediante el cual se elige una de estas dos acciones es lo que se llama **prueba estadística de hipótesis**, **test de hipótesis** o **docimasia de hipótesis**.

Hipótesis Nula

Es una aseveración en el sentido de que un parámetro θ tenga un valor especifico θ_0 y se denota H_0:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

Donde θ_0 es un valor del parámetro $\hat{\theta}$ llamado valor nulo. El procedimiento consiste en suponer que H_0 es verdadera y buscar evidencias en contra del supuesto. Para que H_0 se acepte no debe haber una fuerte evidencia en su contra.

Hipótesis Alternativa

Es una aseveración que se acepta si se rechaza H_0, se denota por H_1 y tiene la forma:

$$H_1 : \theta < \theta_0, H_1 : \theta > \theta_0 \quad 0\; H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Errores en una prueba de hipótesis

En una prueba de hipótesis se pueden presentar los siguientes errores:

1. **Error tipo I:** la hipótesis nula se rechaza siendo verdadera. La probabilidad del error tipo I se denota por α y es la probabilidad de rechazar H_0 sabiendo que H_0 es verdadera:

$$\alpha = P(Rechazar\ H_1/H_0)$$

2. **Error tipo II:** la hipótesis nula se acepta siendo falsa. La probabilidad del error tipo II se denota por β y es la probabilidad de aceptar H_0 sabiendo que H_1 es verdadera:

$$\beta = P(Rechazar\ H_0/H_1)$$

Valor p de la prueba de hipótesis

El α más pequeño que permita el rechazo de H_0 sobre la base del valor observado del estadístico recibe el nombre de probabilidad de significación del valor observado del estadístico de la prueba o simplemente $valor - p$.

Resumen de las etapas en una prueba estadística de hipótesis

1. Definición del objetivo de la investigación.
2. Planteamiento descriptivo de la hipótesis objetivo y la hipótesis nula.
3. Identificación del parámetro de interés.
4. Planteamiento de H_0 y H_1 en término del parámetro de interés.
5. Identificación del estadístico de la prueba y su distribución muestral.
6. Definición de la estructura de la región de rechazo de H_0.
7. Fijación del nivel de significación de la prueba.
8. Determinación del valor crítico de la región de rechazo.
9. Cálculo del valor observado del estadístico de la prueba.
10. Decisión.
11. Redacción de la conclusión en el contexto del problema.
12. Cálculo del $valor - p$. Probabilidad de significación del valor observado del estadístico de la prueba o significación estadística de la evidencia muestral.

Ejemplos

1. El departamento de investigación y desarrollo de una compañía de cigarrillos proyecta que la cantidad promedio de alquitrán (nicotina) de una nueva mezcla de tabaco será menos de 5 miligramos por cigarrillos. Esta calidad de baja nicotina tiene un buen mercado potencial. Los datos recopilados de un análisis químico de

varios cigarrillos serán usados para determinar si hay fuerte justificación para mantener esta conjetura. Identificar la hipótesis nula y alternativa, junto al parámetro de interés.

Solución:

H_1: La cantidad de alquitrán en la nueva mezcla de tabaco es menor que 5 miligramos por cigarrillos.

H_0: La cantidad de alquitrán en la nueva mezcla de tabaco no es menor que 5 miligramos por cigarrillos.

Parámetro de interés: cantidad promedio de alquitrán contenida por cigarrillos con la nueva mezcla de tabaco (μ).

En consecuencia de lo anterior, las hipótesis quedarían de la siguiente manera:

H_1: $\mu < 5$ mg.
H_0: $\mu \geq 5$ mg.

2. En los últimos años el 20% de los empleados en una organización usó el transporte público para ir y regresar de su trabajo. Con el objetivo de determinar si ha sido efectiva una reciente campaña encauzada al uso del transporte público, se entrevista una muestra aleatoria de 25 empleados y se registra el número T de empleados que actualmente usan el transporte público.

a) Formule las hipótesis en palabra y en términos de p, la proporción poblacional de empleados que actualmente usan transporte público.
b) ¿Cuál es el estadístico de la prueba adecuado en este caso?
c) ¿Cuál es la estructura de la región de rechazo de la hipótesis nula?
d) Después de entrevistar los 25 empleados, supongamos que 10 de ellos actualmente usan transporte público. ¿Cuál es la probabilidad de significación del valor observado del estadístico de la prueba?
e) ¿Qué conclusión se obtendría usando la prueba?

Resolución:

Objetivo de la investigación:

Determinar si ha sido efectiva la campaña de incentivo del uso del transporte público.

H_1: La campaña de incentivo del uso del transporte público en los trabajadores de la empresa bajo análisis fue efectiva.

H_0: La campaña no fue efectiva.

Parámetro de interés:

p: Proporción de empleados de toda la organización que actualmente (después de la campaña) usan el transporte público (probabilidad de éxito).

$H_1: p > 0{,}20$

$H_0: p \leq 0{,}20 \ (p = 0{,}20)$

Estadístico de la prueba

T: total de empleados que usan el transporte público entre los 25 encuestados (después de la campaña).

Distribución muestral del estadístico de la prueba

$T \sim binomial(n = 25, p = ?)$ $\quad Rec(T) = \{0,1,2,3,4, \ldots., \ 22,23,24,25\}$

Estructura de la región de rechazo de H_0:

$R = \{T > c\}$ $\quad c$: valor crítico.

$R = \{valores\ grandes\ del\ estadístico\ reafirman\ el\ rechazo\ de\ H0\}$
y la plausibilidad que la campaña fue efectiva.

Fijación del nivel de significancia (máxima probabilidad de cometer Error tipo I).

$$\alpha = máx\ P(Error\ Tipo\ I) = máx\ P(Rechazar\ H_0 : \mid H_0 : verdadero) =$$
$$= P(T \geq c \mid T \sim b(n = 25, p = 0{,}2)) =< 0{,}05$$

A través de la evaluación en la correspondiente ley de probabilidades, se evidencia que el valor más cercano, pero menor a 0,05 es $P(T > 9)$

$P(T \geq 8) = 0{,}10912$

$P(T \geq 9) = 0{,}04677$

$P(T \geq 10) = 0{,}01733$

Por lo tanto, el valor crítico es:

$$c = 9$$

La región de rechazo de H_0 queda completamente definida por:

$$R = \{T \geq 9\}$$

Una vez realizada la encuesta, después de realizada la campaña, se observaron 10 éxitos en la muestra de tamaño 25, por lo tanto, $10 \in R$ y se debe decidir: **rechazar H_0.**

Conclusión: Existe evidencia muestral significativa ($\alpha \leq 0{,}05$) para poder afirmar que la campaña encauzada al uso del transporte público en esta organización si fue efectiva.

Para el cálculo del valor p debemos considerar la región de rechazo que está limitada por el valor observado del estadístico de la prueba:

$R^* = \{X \geq 10\}$

$a^* = P(\bar{X} \geq 10 \mid X \sim b(n = 25, p = 0{,}2)) = 0{,}01733$

Luego, el valor p de la información registrada es igual a $\alpha * = 0{,}0173$ (probabilidad de significación del valor observado del estadístico de la prueba o significación estadística de la evidencia muestral).

Es decir, **existe** evidencia muestral **significativa** para afirmar que la campaña fue efectiva, pero **no hay** evidencia muestral **altamente significativa** para esta misma conclusión.

3. La capacidad de la carga eléctrica de un modelo de batería está etiquetada con 120 Ah (Amperio-hora). Una empresa automotriz recibe reclamos de clientes que dicen que la carga eléctrica de ese modelo es distinta de este valor. Se hizo una investigación al interior de la automotriz, testeando al azar $n = 25$ baterías con una media $\bar{X} = 118{,}8\ Ah$. La desviación estándar de la capacidad de este modelo es de $\sigma = 2{,}5\ Ah$.

a) Prueben la siguiente hipótesis con un nivel de error de probabilidad de 5%: "El valor esperado μ de la carga eléctrica sigue en 120 Ah".

b) ¿Por qué las pruebas de hipótesis dan sentido a la elaboración de intervalos de confianza?

Solución

a) **Objetivo de la investigación:** Determinar si el valor esperado μ de la carga eléctrica es o no de 120 Ah.

Parámetro de interés: Amperaje- hora promedio de todas las baterías del modelo bajo análisis.

$H_0: \mu = 120$

$H_1: \mu \neq 120$

Estadístico de la prueba: Amperaje- hora promedio de baterías probadas $(\bar{X})$.

Distribución del estadístico de la prueba:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

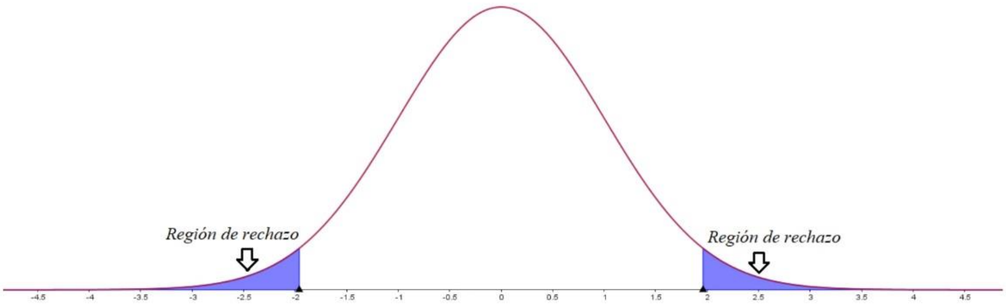
Estructura de la región de rechazo: R = $\{|Z_o| > Z_{\frac{a}{2}}\} = \{|Z_o| > Z_{0,025}\} = \{|Z_o| > 1{,}96\}$

Es decir:

Distribución Normal Estándar

58

Plan de acompañamiento docente en Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial



Luego, calculando, se obtiene:

$$Z_o = \frac{118{,}8 - 120}{\frac{2{,}5}{\sqrt{25}}} = \frac{-1{,}2}{2{,}5} \cdot 5 = -0{,}48 \cdot 5 = -2{,}4$$

En efecto, como $Z_o = -2{,}4$ y $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$, entonces $|Z_c| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$, es decir, $Z_0 \in \mathbb{R}$.

Conclusión: Así, se rechaza la hipótesis nula, y el resultado anterior nos indica que existe la evidencia muestral significativa para poder afirmar que la duración promedio de las baterías es distinta de $120\ Ah$.

b) Cuando se estudian prueba de hipótesis bilaterales, el intervalo de confianza se puede identificar con la región de aceptación de la hipótesis nula.

Aplicación de la sesión

La policía local de una ciudad afirma que más del 65% de accidentes en fin de semana se deben al exceso de alcohol. Para contrastar esta afirmación se observan 35 accidentes y se comprueba que 24 de ellos se deben al alcohol. ¿Se puede aceptar la afirmación de la policía local con una confianza del 99%?

Sesión 7	
Duración	2 horas
Propósito	Resolver problemas que involucren pruebas de hipótesis interpretando el valor p, y el tipo de error I y II correspondiente a cada una de ellas.
Contenidos a abordar	- Prueba de hipótesis - Hipótesis nula y alternativa - Errores en una prueba de hipótesis: Tipo I y II. - $Valor\ p$ de una prueba de hipótesis. - Algoritmo recomendado de prueba de hipótesis.
Descripción general	En esta sesión será capaz de resolver una situación problema que involucre una prueba de hipótesis, además de interpretar el error tipo I y II, junto al $valor\ p$ de dicha prueba. Para ello, se indicarán una serie de pasos a realizar para resolver correctamente cada problema propuesto. Para finalizar, se entregarán una serie de problemas, en donde a cada docente se le asignará uno al azar, y posteriormente, deberá resolverlo y retroalimentarlo de forma expositiva.

Problemas propuestos

1. En una muestra de 105 comercios seleccionados al azar de una zona, se observa que 27 de ellos han tenido pérdidas en este mes. Un analista económico de la zona establece que la proporción de comercios en la zona con pérdidas es igual o superior a 0,35. Contraste dicha hipótesis a un nivel de significación del 5%.

2. Datos de diferentes titulaciones universitarias hacen suponer que la media de años que se requieren para culminar los estudios de psicología es de 7. Para comprobarlo se obtiene una muestra aleatoria simple de 50 expedientes, encontrándose una media de 6 años y una desviación tipo de 4 años. Con un nivel de significación de 0,05 ¿Puede mantenerse la afirmación inicial de los siete años?

3. Una asociación de hosteleros rurales desea conocer la edad media de los turistas que optan por los alojamientos rurales durante el período estival. Un estudio realizado tres años antes indicaba que esta edad se situaba en los 39 años. Sin embargo, para planificar la campaña turística de este año, se realiza un nuevo estudio seleccionando una muestra de 850 individuos que desean viajar durante sus vacaciones, resultando que la edad media de los que planean pernoctar en alojamientos rurales es de 40,7 años. Sabiendo que la desviación típica de ese

estudio fue de 4,8 años, y con un nivel de confianza del 95%, ¿se puede concluir que la edad media de los visitantes ha aumentado en los tres últimos años?

4. El propietario de un automóvil sospecha que su vehículo tiene un consumo medio de combustible en carretera superior a los 5,6 litros $/100\ km$, que es lo que el fabricante indica en su publicidad. Para apoyar empíricamente su sospecha observa el consumo medio en 11 viajes seleccionados aleatoriamente entre todos los que realiza en el año, obteniendo los siguientes resultados:

   6,1; 6,5; 5,1; 6,0; 5,9; 5,2; 5,8; 5,3; 6,2; 5,9; 6,3

   Se pide:

   a) ¿Están fundadas las sospechas del propietario a un nivel de significación del 1%?
   b) Calcula el p- $valor$.

5. Para analizar el crecimiento de ratas de laboratorio se eligen 13 ratas y se miden obteniendo una talla promedio de la muestra de 5,3 cm y una varianza muestral de 19,3.

   a) Un investigador afirma que la talla promedio de las ratas en la población es mayor a 4,5 centímetros. Verifique tal afirmación realizando la prueba de hipótesis adecuada con un nivel de significación de 0,01.

6. Un laboratorio farmacéutico sostiene que uno de sus productos es efectivo en un 90% para reducir una alergia en 8 horas. El medicamento dio buen resultado en 160 personas de una muestra de 200 dentro de las 8 horas. Determinar si la afirmación del laboratorio es cierta.

7. La duración media de una muestra de 100 tubos fluorescentes producidos en cierta fábrica resulta ser de 1570 horas, con una desviación típica de 120 horas. Si μ es la duración media de todos los tubos producidos en esa fábrica, comprobar la hipótesis $\mu = 1600$ frente a la hipótesis $\mu \neq 1600$ con niveles de significación:

   a) 0,05
   b) 0,01

Se sugiere trabajar todas las actividades planteadas en el programa de estudio.

Referencias bibliográficas

Baeza, A., Silva, C., Villena, M., Gonzalez, M. J., & Garcia, M. J. (2007). *Manual de estadística, probabilidad y precálculo*.

Brenes, G. S. (2011). Comprendiendo la estadística inferencial. Recuperado el 24 de diciembre de 2022 de: https://conductitlan.org.mx/04_Investigacion/Materiales/L_Sanabria_estadistica.pdf

DE, C. Introducción a la Probabilidad y a la Estadística (Doctoral dissertation, Universidad de Buenos Aires). Recuperado el 29 de diciembre de 2022 de: http://bibliotecadigital.econ.uba.ar/download/libros/Bacchini_Introduccion-a-la-probabilidad-y-a-la-estadistica-2018.pdf

De la Fuente, S. (s.f.) Ejercicios resueltos: Distribuciones de probabilidad. *Gestión Aeronáutica: Estadística Teórica.* (pp. 1-44). Recuperado el 24 de diciembre de diciembre de 2022 de: https://www.estadistica.net/Aeronautica2016/ejercicios-distribuciones.pdf

George, C. C. (1988). Probabilidad y Estadística-Aplicaciones y Métodos. *McGraw- Hill Interamericana de México, SA*. México.

Gómez Villegas, M. A. (2005). *Inferencia estadística.* Ediciones Díaz de Santos. Recuperado el 29 de diciembre de 2022 de: https://www.editdiazdesantos.com/wwwdat/pdf/9788479786878.pdf

González, B., Hernández, D., Jiménez, M., Marrero, M. & Sanabria, A. (2013) Variables Aleatorias: Problemas propuestos. *Matemática Aplicada y Estadística.* Recuperado el 24 de diciembre de 2022 de: https://campusvirtual.ull.es/ocw/pluginfile.php/6020/mod_resource/content/1/tema8/PP8.2-valeatorias.pdf

González, B., Hernández, D., Jiménez, M., Marrero, M. & Sanabria, A. (2013). Muestreo y estimación: Problemas propuestos. *Matemática Aplicada y Estadística.* Recuperado el 28 de diciembre de 2022 de: https://campusvirtual.ull.es/ocw/pluginfile.php/6201/mod_resource/content/1/tema9/PR9-muestreo.pdf

González, B., Hernández, D., Jiménez, M., Marrero, M. & Sanabria, A. (2013). Muestreo y estimación. *Matemática Aplicada y Estadística.* Recuperado el 29 de diciembre de 2022 de: https://campusvirtual.ull.es/ocw/pluginfile.php/6115/mod_resource/content/1/tema9/ME9-muestreo.pdf

Jara, V. (s.f.). *Inferencia Estadística y Muestreo*. Universidad de Concepción.

Mendenhall, W., Beaver, R. J., & Beaver, B. M. (2010). Introducción a la probabilidad y estadística. 13ª. Edición. México: Cengage Learning.

Ministerio de Educación. (2021). *Programa de Estudio Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial 3° y 4° medio – Formación Diferenciada.* *https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140145_programa_feb_2021_final_s_disegno.pdf*

Spiegel, M., Schiller, J., Snirivasan, R. (2003). Teoría y problemas de Probabilidad y Estadística. (2^a ed.). *McGraw-Hill Interamericana de México, SA.*

Reyes, J. (s.f.) Elementos de muestreo. Recuperado el 05 de enero de 2023 de: https://intranetua.uantof.cl/facultades/csbasicas/matematicas/academicos/jreyes/DOCENCIA/APUNTES/APUNTES%20PDF/Unidad%207%20Muestreo.pdf

Rustom, J., Espinoza, A., Fernández, L., & Mansilla, M. (2012). Estadística descriptiva, probabilidad e inferencia: una visión conceptual y aplicada. Recuperado el 29 de diciembre de 2022 de: https://repositorio.uchile.cl/bitstream/handle/2250/120284/Rustom_Antonio_Estadistica_descriptiva.pdf

Nolberto, V. & Ponce, M. (2008). Estadística inferencial aplicada. *Universidad Nacional Mayor de San Marcos.* Lima Perú. Recuperado el 29 de diciembre de 2022 de: https://edgarmartinlarosa.files.wordpress.com/2013/07/est_inf_aplicada.pdf

Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., & Ye, K. (2012). Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias. *Norma*, 162, 157.

Categorización de las sesiones

Objetivo General: Implementar un plan de acompañamiento docente que aborde las dificultades del conocimiento disciplinar en la asignatura de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, promoviendo el uso de herramientas tecnológicas.

Objetivos Específicos:

1. Resolver problemas contextualizados que involucren la distribución Bernoulli, Binomial o Normal, implementando herramientas tecnológicas.
2. Resolver problemas que requieren de la estimación de parámetros a través de intervalos de confianza, utilizando herramientas tecnológicas.
3. Resolver problemas que utilicen pruebas de hipótesis para aprobar o rechazar una predicción en torno a parámetros específicos de la población, haciendo uso de herramientas tecnológicas.

Sesión	OE.1	OE.2	OE.3
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

Capítulo 5: Limitaciones y Proyecciones

En este capítulo se dan a conocer las principales limitaciones presentadas en el transcurso de la investigación, así como también las proyecciones más relevantes consideradas para el presente estudio.

Limitaciones

Dado que la aplicación de la investigación se realizó en un establecimiento educativo con una realidad y contexto en particular, siendo de la comuna de los Ángeles y con una dependencia municipal, se pueden mencionar dos grandes limitaciones:

- La primera, corresponde a la dificultad que se tiene dado que el estudio de caso efectuado a través del cuestionario de autorreporte y la aplicación del grupo focal no permite efectuar una extrapolación de los resultados obtenidos a otros casos, ni poder generalizarlos.

- La segunda, dice relación con la modalidad de trabajo de los docentes en la implementación de las asignaturas de profundización, dado que la promulgación de las bases curriculares para 3° y 4° año medio se realizó en el año 2019 y su implementación paulatina comenzó a partir del año 2020, coincidiendo con el contexto mundial de pandemia por Covid-19, lo que modificó la forma de llevar a cabo estas asignaturas, trasladando la enseñanza a las plataformas digitales y siendo posible recién el año 2022 implementarlas de manera presencial, en donde los profesores se encontraron con grandes falencias de contenidos que presentaban los estudiantes, por lo que debieron priorizar la nivelación de los alumnos antes que los contenidos correspondientes a las asignaturas de profundización respectivas. Esto último, pudo haber incidido en las respuestas dadas por los docentes y, en consecuencia, en el diseño del plan correspondiente.

Proyecciones

Por una parte, se sugiere extender el estudio a la investigación de las dificultades que manifiestan los docentes al impartir las asignaturas correspondientes a Pensamiento Computacional y Programación y Geometría 3D.

Así mismo, se podría implementar y evaluar la eficacia de los planes de acompañamiento propuestos en esta investigación y analizar los eventuales resultados que manifiesten tanto los docentes, desde su percepción respecto a la pertinencia, metodología, didáctica o marco conceptual de la propuesta; así como también los estudiantes pertenecientes a estas asignaturas de profundización.

Capítulo 6: Conclusiones

Respecto a la fase 1 de nuestro estudio, en relación con las dificultades presentadas por los docentes de matemática al impartir las asignaturas de Límites, Derivadas e Integrales y Probabilidades, Estadística Descriptiva e Inferencial, podemos concluir que:

- La mayor cantidad de dificultades se manifiestan en Probabilidades, Estadística Descriptiva e Inferencial, por sobre Límites, Derivadas e Integrales. De acuerdo con la revisión bibliográfica realizada, se esperaba que la dimensión en la que se detectaran mayores dificultades fuese en la didáctica o tecnológica, lo cual se contradice con la información recopilada en el grupo focal, donde los profesores dejan en evidencia que sus falencias se encuentran en el conocimiento disciplinar de ambas asignaturas de profundización abarcadas en este estudio, principalmente en la aplicación e interpretación de este. Así, en base a las dificultades presentadas en la dimensión disciplinar, es necesario que los docentes permanezcan en un constante perfeccionamiento y actualización de contenidos, ya que "[…] este dominio es uno de los más importantes para la carrera del docente" (Barrientos y Zamorano, 2017) y es uno de los factores que constituye gran relevancia al momento de intervenir en el aula y conducir el proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula (Rodríguez, Saavedra y Castillo, 2015).

- Los docentes entrevistados manifiestan que existe una marcada tendencia a la matemática teórica en la formación inicial docente de los profesores, no enfatizando en las aplicaciones contextualizadas que esta tiene, lo que se condice con la revisión de la literatura realizada. En este sentido, esta tendencia repercute directamente al momento en que deben enseñar, ya que de acuerdo como los docentes formadores de futuros profesores enseñen, estos últimos pueden reproducir en menor o mayor medida las estrategias utilizadas, dificultándoseles implementar la asignatura desde un enfoque centrado en la aplicación (Ní Chróinín y O'Sullivan, 2014, como se citó en Hortigüela, Pérez y Moreno, 2016).

- De acuerdo con los docentes entrevistados, el programa de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial es demasiado ambicioso desde el punto de vista didáctico en el que se aborda, pues asume que los estudiantes tienen un desarrollo del razonamiento matemático y lenguaje algebraico suficiente para comprender la profundidad de la teoría matemática propia de la inferencia estadística, lo que podría no ser así, en consecuencia del tipo de tareas desarrolladas por los alumnos en el proceso de aprendizaje en el transcurso de su educación, y contrario a lo que se podría pensar, desde el punto de vista docente, aquellas tareas cuya naturaleza demanda una gran exigencia cognitiva son difíciles de implementar correctamente, y en consecuencia, se transforman en tareas visiblemente menos exigentes para ser abordadas en el aula (Vásquez, Pincheira, Piñeiro y Díaz-Levicoy, 2019). También asume que han desarrollado óptimamente el razonamiento estocástico y son capaces de comprender cabalmente la disciplina, cuando en esta investigación se ha evidenciado que los docentes también poseen un bajo desarrollo del razonamiento estocástico e insuficiente conocimiento acerca de la inferencia estadística, lo que repercute directamente en un proceso de enseñanza-aprendizaje de carácter conductista, donde el docente es el actor principal que transmite sus conocimientos de manera unidireccional. (Díaz-Levicoy, Aguayo-Arriagada y Cortés, 2014).

- De acuerdo con la información entregada por los docentes participantes del grupo focal, no se evidencia el trabajo colaborativo entre pares. Para este grupo docente, surge el desafío de transitar desde un "[…] enfoque tradicional basado en el individuo hacia el aprendizaje colaborativo que considera al centro educativo y a la comunidad de profesores como un espacio efectivo de desarrollo profesional […]" (Vaillant, 2016, p. 10), potenciando el aprendizaje a través de la interacción entre pares y sus diversas disciplinas.

- Si bien, el diseño del plan de acompañamiento se enfoca principalmente en las dificultades manifestadas por los docentes en el grupo focal, es decir, en la aplicabilidad de los contenidos y/o conceptos teóricos abordados en ambas asignaturas, también se consideraron las falencias en la dimensión tecnológica, expresadas por los profesores en el cuestionario de autorreporte, de modo que se promueve el uso de distintas herramientas tecnológicas, tales como GeoGebra, Excel, Probability Distribution, entre otras, en ambos planes diseñados. Adicionalmente, se utilizaron como base los programas de estudio de Límites, Derivadas e Integrales y Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, para que así los docentes potencien las competencias correspondientes a la didáctica de cada asignatura, de tal manera que sean capaces de implementar y adecuar las actividades planteadas en dichos programas en el aula. Es decir, el diseño del Plan de Acompañamiento articula las dimensiones del conocimiento disciplinar, didáctica y tecnológica para una adecuada implementación de las asignaturas de profundización.

- Se pudo constatar, a través del grupo focal, que las dificultades manifestadas por los profesores participantes son transversales a la formación inicial docente, y en consecuencia, no hubo mayores inconvenientes en el proceso de diseño de los planes de acompañamiento, ya que se lograron evidenciar los tópicos específicos de cada asignatura en donde se presentaban dichas dificultades.

Asimismo, respecto a la fase 2 de nuestro estudio, en relación con el diseño y validación de los planes de acompañamiento, podemos concluir que:

- En un principio, el Plan de acompañamiento Docente de cada asignatura estaba enfocado a la aplicación de los conceptos teóricos abordados en cada plan para las asignaturas de Límites, Derivadas e Integrales y Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, respectivamente. Luego de las validaciones correspondientes por los expertos de cada área, surgieron modificaciones apuntadas a la redacción de conceptos, notaciones matemáticas, orden de contenidos de acuerdo con su estructura lógica, etc.

- La validación de los planes de acompañamiento docente en ambas asignaturas de profundización en matemática avala la estructura planteada por los investigadores, evidenciando la necesaria articulación entre los diversos contenidos y su aplicabilidad para una mejor comprensión tanto de los estudiantes, así como también de los docentes que los enseñan.

- Así, los planes de acompañamiento dan cuenta de una articulación entre los conceptos teóricos que propone el MINEDUC abordar en las asignaturas de profundización en el área de matemática Humanístico – Científica y sus aplicaciones para otorgar en los estudiantes una mejor y mayor comprensión. Así mismo, se presentan en un orden lógico de contenidos, dando cuenta de lo que se pretende lograr y abordar en cada sesión propuesta, incorporando, además, ejemplos que sirven como guía para los docentes. Adicionalmente, cuentan con la validación de expertos en el área, cuyas sugerencias en la instancia de validación fueron incorporadas en dichos planes.

Referencias

Abrate, R., Pochulu, M., y Vargas, J. (2006). Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo. *Villa María: Universidad Nacional de Villa María*, 21-31. Recuperado el 5 de noviembre de 2022 de: https://www.academia.edu/26468683/ERRORES_Y_DIFICULTADES_EN_MATEM%C3%81TICA_An%C3%A1lisis_de_causas_y_sugerencias_de_trabajo

Alcívar, E., Zambrano, K., Párraga, L., Mendoza, K. y Zambrano, Y. (2019). Software educativo GeoGebra. propuesta de estrategia metodológica para mejorar el aprendizaje de las matemáticas. *Universidad Ciencia y Tecnología*, *23*(95), 59-65. Recuperado el 30 de diciembre de 2022 de: https://uctunexpo.autanabooks.com/index.php/uct/article/view/247/423

Álvarez, G. y Vallecillos, A. (s.f.) Razonamiento estadístico para la resolución de problemas en el nivel universitario: Aspectos teóricos y una aplicación. Pedagogía Universitaria. *6*(3), 3-13, Recuperado el 29 de diciembre de 2022 de: https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/43410314/RAZONAMIENTO_ESTADISTICO_PARA_LA_RESOLUCION_DE-libre.pdf?1457244944=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DRAZONAMIENTO_ESTADISTICO_PARA_LA_RESOLUC.pdf&Expires=1672703593&Signature=XigFbkmEDEHOrEfALPDmjYF~cSt-Kt0T5018xSo4e6Gjtj1PY0N8t~6aPHhY5IcVig78Fl0Heiz~aVNRpxlux9iUvsdVj~0UqLkzvldiCKrITn63Wet-Xg~v~lyL~YmrLG-qEPRgnVDl18xN4Opq4UlHjbgnj59BR-t7kmFzx~gfRKrxjYOSjtRfvsvq3hEHQ1TWTKjPN8-jiwtOY~HyScid4EGWoJq5bz1bWXeA5Ysu0qdn~CRVMzbnGw9zYztr0PCLuqMhNnXTcxtaJJlcE3FsJ3hlwR7N~2j-poBdHkHxjbOcMF74CEzu7w9AJRlYVOoP5NW31WfRTBDhJ-beUQ__&Key-Pair-Id=APKAJLOHF5GGSLRBV4ZA

Arias, P. (2020). Trabajo Colaborativo y Desarrollo Profesional Docente, un estudio de caso [Programa de Doctorado Formación en la Sociedad del Conocimiento, Universidad de Salamanca]. Recuperado el 20 de julio de 2022 de: https://repositorio.grial.eu/bitstream/grial/2075/1/PAAR_PI.pdf

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística?. *Blaix*, *15*(2), 13 Recuperado el 5 de noviembre de 2022 de: https://www.researchgate.net/profile/Carmen-Batanero/publication/255738435_Hacia_donde_va_la_educacion_estadistica/links/00b495209e17d7ad35000000/Hacia-donde-va-la-educacion-estadistica.pdf

Batanero, C. (2013). Del análisis de datos a la inferencia: Reflexiones sobre la formación del razonamiento estadístico. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.* 8(11), 277-291. Recuperado el 29 de diciembre de 2022 de: http://funes.uniandes.edu.co/21414/1/Batanero2014Del.pdf

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números. Revista de didáctica de las Matemáticas, 83*, 7-18. Recuperado el 5 de noviembre de 2022 de: http://funes.uniandes.edu.co/3651/1/Batanero2013ElNumeros83.pdf

Barrientos, P., y Zamorano, M. (2017). *Examinando las necesidades del conocimiento disciplinar, en el eje curricular de Números y Operaciones, en profesores de Enseñanza Básica no especializados, que comienzan un postítulo en Matemáticas*. [Seminario de Titulación para optar al título de Profesor(a) de Matemáticas, Universidad Austral de Chile]. Recuperado el 03 de enero de 2023 de http://cybertesis.uach.cl/tesis/uach/2017/bpmb275e/doc/bpmb275e.pdf

Bedoya, M. y Ospina, S. (2014). *Concepciones que poseen los profesores de matemática sobre la resolución de problemas y cómo afectan los métodos de enseñanza y aprendizaje* [Tesis de Magíster, Universidad de Medellín]. Recuperado el 5 de noviembre de 2022 de: http://funes.uniandes.edu.co/11470/1/Bedoya2014Concepciones.pdf

BCN. (2016). Ley 20903 crea el Sistema de Desarrollo Profesional Docente y modifica otras normas. *Ministerio de Educación*. Recuperado el 18 de julio de 2022 de: https://www.bcn.cl/leychile/navegar?idNorma=1087343

Bizarro, W., Sucari, W., y Quispe-Coaquira, A. (2019). Evaluación formativa en el marco del enfoque por competencias. *Revista Innova Educación, 1*(3), 374-390.

https://doi.org/10.35622/j.rie.2019.03.r001

Bolívar, A. (1992). Papel del profesor en los procesos de desarrollo curricular. *Revista Española de pedagogía*, (191). 131-151. Recuperado el 20 de julio de 2022 de: https://revistadepedagogia.org/wp-content/uploads/2018/03/9-Papel-del-Profesor-en-los-Procesos-de-Desarrollo-Curricular.pdf

Buss, M., López, M. J., Rutz, A., Coelho, S., Oliveira, I., y Mikla, M. (2013). Grupo focal: una técnica de recogida de datos en investigaciones cualitativas. *Index de enfermería*, *22*(1-2), 75-78. Recuperado el 30 de octubre de 2022 de: https://scielo.isciii.es/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1132-12962013000100016

Calderón, P. y Loja, H. (2018). Un cambio imprescindible: el rol del docente en el siglo XXI. *ILLARI*, (6) 35-40. Recuperado el 19 de octubre de 2021 de https://www.aacademica.org/margarita.calderon/2.pdf

Cabrera, L. y Cantoral, R. (2013). La deconstrucción del conocimiento matemático: un medio para el análisis del desarrollo profesional del profesor. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.* 1595-1603. Recuperado el 20 de julio de 2022 de: http://funes.uniandes.edu.co/4440/1/CabreraLadeconstruccionALME2013.pdf

Cabezas, V., Gómez, C., Orrego, V., Medeiros, M., Palacios, P., Nogueira, A., Suckel, M., Peri, A. (2021). Comunidades de Aprendizaje Profesional Docente en Chile: Dimensiones y fases de desarrollo. *Estudios Pedagógicos XLVII.* (3). *141-165.* https://doi.org/10.4067/S0718-07052021000300141

Canabal, C. y Margalef, L. (2017). La retroalimentación: la clave para una evaluación orientada al aprendizaje. *Profesorado, Revista de currículum y formación del profesorado*, *21*(2), 149-170. Recuperado el 5 de noviembre de 2022 de: https://www.redalyc.org/pdf/567/56752038009.pdf

CPEIP. (s.f.a). Estándares para carreras de pedagogía. Recuperado de: https://estandaresdocentes.mineduc.cl/estandares-carreras-pedagogia/

CPEIP. (s.f.b). Orientaciones para el Diseño del Plan Local de Formación para el Desarrollo Profesional Docente. Recuperado de: https://cpeip.cl/wp-content/uploads/2021/09/ORIENTACIONES_DISENO_PLAN_LOCAL_DPD.pdf

CPEIP. (2015). Marco para la Buena Dirección y el Liderazgo Escolar. Recuperado de: https://liderazgoescolar.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/55/2016/04/MBDLE_2015.pdf

CPEIP. (2020a). *Cpeip presenta los Estándares de la Profesión Docente, herramienta clave para la profesión docente en Chile.* Recuperado el 20 de julio de 2022, de https://www.cpeip.cl/lanzamiento-estandares-docentes/

CPEIP. (2020b). *Formación Local para el Desarrollo Profesional Docente*. Recuperado el 20 de julio de 2022 de: https://www.cpeip.cl/formacion-local/

CPEIP. (2021a). Estándares de la profesión docente: Marco para la Buena Enseñanza. Recuperado de: https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2021/08/MBE-2.pdf

CPEIP. (2021b). Estándares de la profesión docente: Carreras de Pedagogía en Matemática Educación Media. Recuperado de: https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2021/08/Matematica-Media.pdf

Chacón, M., Chacón, C. y Alcedo, Y. (2012). Los proyectos de aprendizaje interdisciplinarios en la formación docente. *Revista mexicana de investigación educativa*, *17*(54), 877-902. Recuperado el 30 de diciembre de 2022 de: https://www.scielo.org.mx/pdf/rmie/v17n54/v17n54a9.pdf

Chavarría-Arrollo, G. y Albanese, V. (2021). Problemas matemáticos en el caso de un currículo: Análisis con base en el contexto y en la contextualización. *Avances de Investigación en Educación Matemática.* (19), 39 - 54. Recuperado el 20 de julio de 2022 de: https://repositorio.una.ac.cr/bitstream/handle/11056/21421/359-Texto%20del%20art%c3%adculo-1905-2-10-20210503%20%281%29.pdf?sequence=3&isAllowed=y

CNED. (s.f.a). Marco Curricular y Bases Curriculares. Recuperado el 27 de octubre de 2021 de: https://www.cned.cl/marco-curricular-y-bases-curriculares

CNED. (s.f.b). *Planes y Programas de Estudio.* Recuperado el 30 de diciembre de 2022 de: https://www.cned.cl/planes-y-programas-de-estudio#:~:text=Ayudan%20a%20organizar%20y%20orientar,determinados%20en%20las%20Bases%20Curriculares

CNED. (2019a). Rol del CNED en el proceso de diseño curricular en Chile. Recuperado el 20 de julio de 2022 de: https://www.cned.cl/noticia/rol-del-cned-en-el-proceso-de-diseno-curricular-en-chile

CNED. (2019b). Presentación del CNED en sesión especial celebrada por la Sala de la Cámara de Diputados. Recuperado el 20 de julio de 2022 de: https://www.cned.cl/noticia/presentacion-del-cned-en-sesion-especial-celebrada-por-la-sala-de-la-camara-de-diputados

Cortés, A. (2016). *Prácticas innovadoras de integración educativa de TIC que posibilitan el desarrollo profesional docente: un estudio en instituciones de niveles básica y media de la ciudad de Bogotá (Col).* [Tesis de doctorado]. Universitat Autonoma de Barcelona. Recuperado el 30 de diciembre de: https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/400225/acr1de1.pdf?sequence

Cortés, A. (2019). Comunidad de saberes y prácticas pedagógicas para el desarrollo profesional docente apoyado en el componente tecnológico. *Experiencias en innovación educativa: Convirtiendo conocimiento en nuevas oportunidades*, 16. 16-38. Recuperado el 30 de diciembre de 2022 de: https://books.google.cl/books?hl=es&lr=&id=kyejDwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA16&dq=r%C3%A1cticas+innovadoras+de+integraci%C3%B3n+educativa+de+TIC+que+posibilitan+el+desarrollo+profesional+docente+Un+estudio+en+Instituciones+de+niveles+b%C3%A1sica+y+media+de+la+ciudad+de+Bogot%C3%A1+(Col)&ots=dopgmGU1kD&sig=u82oshqMpYKxi2cKmZzu4gJUmP0&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

CRUCH. (2012). *Innovación Curricular en las Universidades del Consejo de Rectores*.

Nuevamérica Impresores Ltda. Recuperado el 29 de octubre de 2021 de: https://www.consejoderectores.cl/wp-content/uploads/publicaciones/PDF_libro_CRUCH_.pdf .

Criollo, M. (2018). Competencias del Docente del Siglo XXI. *Revista Vinculando.* Recuperado el 20 de julio de 2022 de: https://vinculando.org/wp-content/uploads/kalins-pdf/singles/competencias-del-docente-siglo-xxi.pdf

Cvetkovic, A., Maguiña, J., Soto, A., Lama, J. y López, L. (2021). Estudios transversales. *Revista de la Facultad de Medicina Humana*, *21*(1), 179-185 Recuperado el 09 de diciembre de 2021 de: http://www.scielo.org.pe/pdf/rfmh/v21n1/2308-0531-rfmh-21-01-179.pdf

De la Fuente, D. (2012). Los cambios sociales y su reflejo en la educación. Propuestas educativas desde la asignatura de música. *Dedica, Revista de Educação e Humanidades (dreh)*, (2), 249-260. Recuperado el 19 de octubre de 2021 de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3825649.

Del Pino, G., y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo, Revista de Investigación Latinoamericana*, *49*(1), 53-64. Recuperado el 5 de noviembre de 2022 de: https://horizonteenfermeria.uc.cl/index.php/pel/article/view/25747/20671

Díaz-Barriga, F. (2010). Los profesores ante las innovaciones curriculares. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*, *1*(1), 37-57. Recuperado el 20 de julio de 2022 de: https://www.redalyc.org/pdf/2991/299128587005.pdf

Díaz-Levicoy, D., Aguayo-Arriagada, C., y Cortés, C. (2014). Enseñanza de la estadística mediante proyectos y su relación con teorías de aprendizaje. *Premisa*, *16*(62), 16-23. Recuperado el 04 de enero de 2023 de: http://funes.uniandes.edu.co/6154/1/97_D%C3%ADaz%2C_Aguayo_y_Cort%C3%A9s_(versi%C3%B3n_WEB).pdf

Díaz, M. (2009). Conocimientos de los profesores preuniversitarios de Cálculo acerca del significado y las interpretaciones de la derivada. *El cálculo y su enseñanza, Enseñanza de* *las ciencias y la matemática*, *1*, 75-90. Recuperado el 5 de noviembre de: https://www.recacym.org/index.php/recacym/article/view/166/114

Elizarrarás, S. (2014). Comprensión sobre ideas fundamentales de estocásticos en la formación inicial de profesores de Matemática. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *87*(2), 69-80. Recuperado el 29 de diciembre de 2022 de: http://funes.uniandes.edu.co/8511/1/Articulos_05.pdf

Escobar-Pérez, J. y Cuervo-Martínez, Á. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en medición*, *6*(1), 27-36. Recuperado el 26 de enero de 2023 de: https://gc.scalahed.com/recursos/files/r161r/w25645w/Juicio_de_expertos_u4.pdf

Escribano, E. (2018) El desempeño del docente como factor asociado a la calidad educativa en América Latina. *Revista Educación. 42*(2). 1 - 15. Recuperado el 20 de julio de 2022 de: https://doi.org/10.15517/revedu.v42i2.27033

Esperidión, C. (2020). Diseño curricular desde una perspectiva nacional chilena: visiones y sus incógnitas. *Voces y silencios. Revista Latinoamericana de Educación*, *11*(1), 128-140. Recuperado el 20 de julio de 2022 de: https://revistas.uniandes.edu.co/doi/10.18175/VyS11.1.2020.7

Espinoza, O. (2016). Cambios al currículum escolar 1990-2014: institucionalidad y desafíos. *CEPPE Policy Brief*, *7*, 1-7. Recuperado el 20 de julio de 2022 de: http://ceppe.uc.cl/images/contenido/policy-briefs/CEPPE_N7-Cambios-al-curriculum-escolar-1990-2014-Institucionalidad-y-desafios.pdf

Espinoza-Freire, E., Tinoco-Izquierdo, W., Sánchez-Barreto, X. (2017). Características del docente del siglo XXI. *Olimpia. 14*(43). 39-53. Recuperado el 20 de julio de 2022 de: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6210816.pdf

Estrella, S., Olfos, R. y Mena-Lorca, A. (2015). El conocimiento pedagógico del contenido de estadística en profesores de primaria. *Educação e Pesquisa*, *41*, 477-493. https://doi.org/10.1590/S1517-97022015041858.

Fernández, I., Riveros, V. y Montiel, G. (2017). Software educativo y las funciones matemáticas. Una estrategia de apropiación. *Omnia. 23*(1). 9-19. Recuperado el 15 de noviembre de: https://www.redalyc.org/pdf/737/73753475002.pdf

Ferrada-Bustamante, V., González-Oro, N., Ibarra-Caroca, M., Ried-Donaire, A., Vergara-Correa, D. y Castillo-Retamal, F. (2021). Formación docente enTIC y su evidencia en tiempos de COVID-19. *Saberes Educativos.* (6). 144-168. Recuperado el 15 de noviembre de 2022 de: https://sintesisdejurisprudencia.uchile.cl/index.php/RSED/article/view/60715/64525

Fondo, M. (2019). Seis competencias docentes para el Siglo XXI. *Revista de Didáctica Español Lengua Extranjera*. (29). 1-14. Recuperado el 20 de julio de 2022 de: https://www.redalyc.org/journal/921/92159587007/92159587007.pdf

Fonseca , J. y Alfaro, C. (2018). El cálculo diferencial e integral en una variable en la formación inicial de docentes de matemática en Costa Rica. *Revista Educación*, *42*(2), 289-305. Recuperado el 5 de noviembre de 2022 de: https://www.redalyc.org/journal/440/44055139017/html/

Font, V. (2008). Enseñanza de la Matemática. Tendencias y perspectivas. III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas. 21-62. Recuperado el 29 de diciembre de: http://funes.uniandes.edu.co/16874/1/Font2008Ense%C3%B1anza.pdf

Frías, Y. (2019). Los retos educativos del siglo XXI desde la perspectiva de una maestra novel de educación secundaria, 161-176. Recuperado el 19 de octubre de 2021 de: http://ensech.edu.mx/pdf/maestria/libro4/TP04-3-01-Frias.pdf

Gamboa, M. y Borrero, R. (2027). Influencia de los organizadores del curriculum en la planificación de la contextualización didáctica de la matemática. *Red Iberoamericana de Pedagogía*. *6*(1). 90-112. Recuperado el 20 de julio de 2022 de: https://revista.redipe.org/index.php/1/article/view/181/178

García, J. y Rodríguez, A. (2009). La representación en matemáticas: una dificultad en el aprendizaje. *Ethos Educativo*, (44), 93-111. Recuperado el 5 de noviembre de 2022 de: https://imced.edu.mx/Ethos/Archivo/44-93.pdf

García-Valcárcel, A., Hernández, A. y Recamán, A. (2012). La metodología del aprendizaje colaborativo a través de las TIC: una aproximación a las opiniones de profesores y alumnos. *Revista complutense de educación*. *23*(1), 161-188. https://doi.org/10.5209/rev_RCED.2012.v23.n1.39108

Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *31*, 90-113. Recuperado el 20 de diciembre de 2022 de: https://www.scielo.br/j/bolema/a/jQy8nXFVBd9wPYY5R38JFYw/abstract/?lang=es

González, A. y Sanz, R. (2016). Desafíos y tensiones del sistema educativo del siglo XXI: una mirada desde la pedagogía. *Crónica: revista científico profesional de la pedagogía y psicopedagogía*, (1), 5-18. Recuperado el 19 de octubre de 2021 de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7912751.

Guerrero, M. (2016) La Investigación Cualitativa. *INNOVA Research Journal*. *1*(2). 1-9. Recuperado el 09 de diciembre de 2021, de: https://repositorio.uide.edu.ec/bitstream/37000/3645/3/document.pdf

Guerrero, J.., y Hernández, L. (2020). Análisis de actividades didácticas para el estudio del límite de una función por medio de la teoría APOE. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, *5*, 1-19. Recuperado el 24 de diciembre de 2022 de: http://funes.uniandes.edu.co/20215/1/Guerrero2020Analisis.pdf

Gutiérrez, L., Ariza, L. y Jaramillo, J. (2014). Estrategias didácticas en el uso y aplicación de herramientas virtuales para el mejoramiento en la enseñanza del cálculo integral. *Academia y Virtualidad*. *7*(2). 64-75. Recuperado el 15 de noviembre de 2022 de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5061043

Guzmán, J. (2020). La didáctica de las matemáticas: Un vistazo con futuros docentes. *Revista Electrónica De Conocimientos, Saberes Y Prácticas*, *3*(1), 11–18. https://doi.org/10.5377/recsp.v3i1.9788

Grisales, A. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. *Entramado*. *14*(2). 198-214. Recuperado el 15 de noviembre de 2022 de: 1900-3803-entra-14-02-198.pdf (scielo.org.co)

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014a). *Definición de la investigación que se realizará: exploratorio, descriptivo, correlacional o explicativo.* (6th ed.).

Hernández, R., Fernández, C., y Batista, P. (2014b). *Metodología de la investigación. [en línea]*. sexta. MEXICO: sn ISBN 978-1-4562-2396-0. Recuperado el 12 de enero de 2023 de:https://www.uca.ac.cr/wp-content/uploads/2017/10/Investigacion.pdf

Hortigüela, D., Pérez, Á., y Moreno, A. (2016). ¿Cómo enseñamos a los futuros docentes?: análisis documental y contraste de percepciones entre alumnos y profesores. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *42*(3), 207-221. Recuperado el 03 de enero de 2023 de https://www.scielo.cl/pdf/estped/v42n3/art11.pdf

Jara, R. (2020). El desempeño de los profesores noveles de ciencias: Las competencias profesionales que desarrollan durante los primeros años de ejercicio profesional. *Pensamiento educativo*, *57*(1), 1-18. Recuperado el 27 de diciembre de 2022 de: https://www.scielo.cl/scielo.php?pid=S0719-04092020000100102&script=sci_arttext

Jaramillo, J. y J.A. Ruiz, J. (2015). Diseño de una estrategia metodológica basada en MICEA para la enseñanza de la geometría fractal mediante aulas virtuales. *Actualidades Pedagógicas*, (66), 103-125. Recuperado el 30 de diciembre de 2022 de: https://ciencia.lasalle.edu.co/cgi/viewcontent.cgi?article=1271&context=ap

Jiménez, V. y Comet, C. (2016). Los estudios de casos como enfoque metodológico. *ACADEMO Revista de Investigación en Ciencias Sociales y Humanidades*, *3*(2). Recuperado el 09 de diciembre de 2021 de: http://revistacientifica.uamericana.edu.py/index.php/academo/article/view/54

Latorre, M. (2012). Cobertura curricular en enseñanza media: lenguaje y comunicación-matemática. Recuperado el 30 de diciembre de 2022 de: https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/18297/E12-0013.pdf?sequence=1

Laurente-Cárdenas, C., Rengifo-Lozano, R., Asmat-Vega, N. & Neyra-Huamani, L. (2020). Desarrollo de competencias digitales en docentes universitarios a través de entornos virtuales: experiencias de docentes universitarios en Lima. *Revista eleuthera*, *22* (2), 71-87. https://doi.org/10.17151/eleu.2020.22.2.5

Ley 20.903 de 2016. Crea el sistema de desarrollo profesional docente y modifica otras normas. 04 de marzo de 2016. Recuperado el 15 de septiembre de 2023 de: https://www.bcn.cl/leychile/navegar?idNorma=1087343

López, C., Benedito, V. y León, M. (2016). El Enfoque de Competencias en la Formación Universitaria y su Impacto en la Evaluación: La Perspectiva de un Grupo de Profesionales Expertos en Pedagogía. *Formación universitaria*, *9*(4), 11-22. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062016000400003

López, J., Pozo, S., Morales, M. B., y López, E. (2019). Competencia digital de futuros docentes para efectuar un proceso de enseñanza y aprendizaje mediante realidad virtual. *Edutec. Revista Electrónica De Tecnología Educativa*, (67), 1-15. https://doi.org/10.21556/edutec.2019.67.1327

Luna, C. (2015a). El futuro del Aprendizaje 2: ¿Qué tipo de aprendizajes se necesita en el siglo XXI?. Investigación y Prospectiva en Educación UNESCO, París. [Documentos de Trabajo ERF, No. 14]. Recuperado el 20 de julio de 2022 de: https://educrea.cl/wp-content/uploads/2018/03/DOC2-futuro.pdf

Luna, C. (2015b). El futuro del Aprendizaje 3: ¿Qué tipo de aprendizajes se necesita en el siglo XXI?. Investigación y Prospectiva en Educación UNESCO, París. [Documentos de Trabajo ERF, No. 15]. Recuperado el 20 de julio de 2022 de: http://disde.minedu.gob.pe/bitstream/handle/20.500.12799/4724/El%20futuro%20del%20 aprendizaje%203%20Qu%c3%a9%20tipo%20de%20pedagog%c3%adas%20se%20necesitan%20para%20el%20siglo%20XXI.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Martínez, F. (2013). Dificultades para implementar la evaluación formativa: Revisión de literatura. *Perfiles educativos*, *35*(139), 128-150. Recuperado el 5 de noviembre de 2022 de: https://www.scielo.org.mx/pdf/peredu/v35n139/v35n139a9.pdf

Martínez, M., Álvarez, Y y Villardón, L. (2018). Autoevaluación y reflexión docente para la mejora de la competencia profesional del profesorado en la sociedad del conocimiento. *Revista de Educación a Distancia (RED),* (56). http://dx.doi.org/10.6018/red/56/10.

Meneses, J. (s.f.). *El cuestionario*. Recuperado el 30 de octubre de 2022 de: https://femrecerca.cat/meneses/publication/cuestionario/cuestionario.pdf

MINEDUC. (s.f.). Sistema de Desarrollo Profesional Docente. Recuperado el 20 de julio de 2022 de: https://liderazgoescolar.mineduc.cl/sistema-desarrollo-profesional-docente/

MINEDUC. (2009). Fundamentos del Ajuste Curricular en el Sector de Matemática. Recuperado de: https://www.rmm.cl/sites/default/files/usuarios/csanc1/doc/200912232048340.Articulo_Fundamentos_Ajuste_Matematica_300309.pdf

MINEDUC. (2011). Competencias y Estándares TIC para la Profesión Docente. Recuperado de: https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/2151/mono-964.pdf?sequence=1&isAllowed=y

MINEDUC. (2013). Serie Evidencias: Implementación del currículum de Educación Media en Chile. Recuperado el 30 de diciembre de 2022 de: https://centroestudios.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/100/2017/06/A2N21_Curriculum_EMedia.pdf

MINEDUC. (2015). Marco para la buena dirección y el liderazgo escolar. Recuperado el 22 de julio de: https://www.researchgate.net/publication/328102362_Marco_para_la_Buena_Direccion_y_el_Liderazgo_Escolar

MINEDUC. (2019a). Bases Curriculares 3° y 4° Medio. Recuperado el 19 de octubre de 2021 de: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-91414_bases.pdf.

MINEDUC. (2019b). Plan de estudios para 3° y 4° año medio. Recuperado el 20 de enero de 2023 de: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-134351_recurso_plan.pdf

MINEDUC. (2021a). Estudiantes de enseñanza media no alcanzaron el 60% de los aprendizajes necesarios en 2020. *Ministerio de Educación*. Recuperado el 30 de diciembre de 2022 de: https://www.mineduc.cl/en-ensenanza-media-no-se-alcanzo-el-60-de-los-aprendizajes-minimos/

MINEDUC. (2021b). *Programa de Estudio Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial 3° y 4° medio – Formación Diferenciada.* Recuperado el 20 de diciembre de 2022 de: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140145_programa_feb_2021_final_s_disegno.pdf

MINEDUC. (2021c). *Programa de Estudio Límites, Derivadas e Inntegrales 3° y 4° medio – Formación Diferenciada.* Recuperado el 20 de diciembre de 2022 de: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140143_programa_feb_2021_final_s_disegno.pdf

Montero, I. (2002). La educación actual ante las nuevas exigencias de la sociedad del conocimiento. *Temas*, *10*(32), 1-17. Recuperado el 20 de agosto de 2022 de: http://bibliotecavirtual.clacso.org.ar/ar/libros/cuba/cips/caudales05/Caudales/ARTICULOS/ArticulosPDF/05G001.pdf

Montoya, N. y Arroyave, D. (2021) Conocimiento didáctico del contenido. Una revisión sistemática exploratoria. *Boletín Redipe. 10*(8), 55-71. Recuperado el 30 de diciembre de 2022 de: https://revista.redipe.org/index.php/1/article/view/1384/1297

Morales, L., Duran, R., Pérez, C y Bustamante, M. (2019). Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza de la matemática desde la idoneidad didáctica. experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. *Inclusiones.* 6. 143-162. Recuperado el 30 de diciembre de 2022 de: https://revistainclusiones.org/pdf41/9%20VOL%206%20NUM%202%202019ESPABRILJUNIO19INCL.pdf

Morales, N., Sequeira, N., Prenda, T. y Zúñiga, K. (2016). Escala de Likert: Una herramienta económica. *Universidad Técnica Nacional.* 1-6. https://www.academia.edu/30245064/ESCALA_DE_LIKERT_UNA_HERRAMIENTA_ECON%C3%93MICA_Contenido

Moreno, L y Rochera, M. (2022). *Feedback* del profesorado con uso de TIC y percepciones del alumnado en la educación secundaria. *Educación. 46*(2). 1-41. Recuperado el 15 de noviembre de 2022 de: https://www.redalyc.org/journal/440/44070055031/html/

Muñoz, M., Porras, M. y Gonzalez, M. (2017). *Aplicación de software matemático para el logro de aprendizajes en aplicaciones del Cálculo Diferencial e Integral, en estudiantes universitarios.* Memorias del tercer Congreso Internacional de Ciencias Pedagógicas: Por una educación inclusiva: con todos y para el bien de todos, Instituto Superior Tecnológico Bolivariano. Recuperado el 29 de diciembre de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7210620

Narváez, O., Villegas, L. (2014). *Introducción a la Investigación: guía interactiva. Recursos didácticos 1*. Biblioteca Digital de Humanidades. Universidad Veracruzana. Recuperado el 18 de enero de 2023 de https://www.uv.mx/apps/bdh/investigacion/unidad1/investigacion-tipos.html

Osorio, M., Bimberto, A. y Uribe, C. (2011). Revisión de aspectos asociados a la problemática del aprendizaje de la Probabilidad. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, *34*(34), 360-384. Recuperado el 5 de noviembre de 2022 de: http://funes.uniandes.edu.co/10580/1/Osorio2011Revisio%CC%81n.pdf

Otzen, T., y Manterola, C. (2017). Técnicas de Muestreo sobre una Población a Estudio. *Int. J.*

Morphol, *35*(1), 227-232. https://scielo.conicyt.cl/pdf/ijmorphol/v35n1/art37.pdf

Oviedo, T., Souza, E. y Bueno, S. (2021). Dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística: comparación de investigaciones de Perú y Brasil entre los años 2009 a 2017. *Research, Society and Development*, *10*(12), 1-15. Recuperado el 29 de diciembre de: https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/19975/18594

Padilla, I. y Conde-Carmona, R. (2020). Uso y formación en TIC en profesores de matemáticas: un análisis cualitativo. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (60), 116-136. https://www.doi.org/10.35575/rvucn.n60a7

Palomares, A. (2009). El nuevo modelo docente en el paradigma formativo centrado en el alumnado. *Enseñanza & teaching: revista interuniversitaria de didáctica*. (27) 45-75. Recuperado el 06 de agosto de 2022 de: https://redined.educacion.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/194418/7095-26747-1-PB.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Pávez, F. (2008). Interdisciplinariedad y Matemáticas [Tesis Magíster, Universidad de la Frontera]. Recuperado el 5 de noviembre de 2022 de: https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/18657/Interdisciplinariedad%20y%20matem%C3%A1ticas.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Pesantez- Arcos, K., Ochoa-Encalada, S., Erazo-Alvarez, J. y García-Herrera, D. (2020). Trabajo colaborativo y herramientas digitales para la enseñanza-aprendizaje en la educación en línea del bachillerato. *5*(5). *KOINONIA*. 68-90. Recuperado el 15 de noviembre de 2022 de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7696080

Pineda, W., Hernández, C. y Avendaño, W. (2020). Propuesta didáctica para el aprendizaje de la derivada con Derive. *Praxis & Saber* , *11* (26). https://doi.org/10.19053/22160159.v11.n26.2020.9845

Ponce, A. (2018). El Estudio de Caso Múltiple. Una estrategia de Investigación en el ámbito de la Administración. *Revista Publicando*, *15*(2). 21-34. Recuperado el 09 de diciembre de

2021 de: https://revistapublicando.org/revista/index.php/crv/article/download/1359/pdf_992/5224

Reimers, F y Chung, C. (Ed.). (2016). Enseñanza y aprendizaje en el siglo XXI: Metas, Políticas Educativas y Currículo en seis Países. Editorial Fondo de Cultura Económica. Recuperado el 20 de julio de 2022 de: http://repositorio.uasb.edu.bo:8080/bitstream/54000/1320/1/Reimers-ense%C3%B1anza.pdf

Ribosa, J. (2020). El docente socioconstructivista: un héroe sin capa. *Educar* , *56* (1), 77-90. Recuperado el 22 de julio de: https://educar.uab.cat/article/view/v56-n1-ribosa/1072-pdf-es

Rico - Gómez, M. y Ponce, A. (2022). El Docente del Siglo XXI: Perspectivas según el rol formativo y profesional. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *27*(92), *77-101*. Recuperado el 20 de julio de 2022 de: http://www.scielo.org.mx/pdf/rmie/v27n92/1405-6666-rmie-27-92-77.pdf

Rodríguez Garcés, C., Saavedra Uribe, R., y Castillo Riquelme, V. (2015). Expectativa, cobertura y dominio curricular: percepciones del profesorado en la enseñanza de la matemática. *Paradigma*, *36*(2), 177-201. Recuperado el 03 de enero de 2023 de http://ve.scielo.org/pdf/pdg/v36n2/art09.pdf

Rojas, A. (2016). Retos a la Educación Peruana en el Siglo XXI. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*. *14*(1), *101-115*. https://doi.org/10.15366/reice2016.14.1.006

Ruz-Fuenzalida, C. (2020). Construcción y trayectoria del currículum en Chile: una perspectiva desde las Nuevas Bases Curriculares para 3º y 4º medio. *Revista Saberes Educativos*, *4*, 22-36. Recuperado el 27 de octubre de 2021 de: https://ultimadecada.uchile.cl/index.php/RSED/article/view/55896/63079

Ruz, F., Molina-Portillo, E. y Contreras, J. (2020). Evaluación de conocimientos sobre el contenido de estadística descriptiva de futuros profesores de matemáticas. *Avances de investigación en educación matemática*, *18*, 55-71. Recuperado el 5 de noviembre de 2022 de: https://redined.educacion.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/203826/Art.%204.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Salas-Rueda, R. (2018). Uso del modelo TPACK como herramienta de innovación para el proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Perspectiva educacional*, *57*(2), 3-26. http://dx.doi.org/10.4151/07189729-vol.57-iss.2-art.689 .

Sanabria, G. (2020). La Enseñanza determinista de la probabilidad. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, *20*(1), 1-13. Recuperado el 5 de noviembre de 2022 de: https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/4590/4158

Sanchez-Acero, A. y García - Martín, M. (2021). Programa de entrenamiento en potencial de aprendizaje para niños colombianos con dificultades de aprendizaje en Matemáticas. *Interdisciplinaria*. *38*(1), 163-180. Recuperado el 20 de julio de 2022 de: http://www.scielo.org.ar/pdf/interd/v38n1/1668-7027-interd-38-01-00180.pdf

Sánchez, J., González, A., y Monroy, A. (2019). La formación de docentes normalistas: De la tradición pedagógica a los entornos virtuales de aprendizaje. *RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, *10*(19). Recuperado el 03 de enero de 2023 de https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S2007-74672019000200025&script=sci_arttext

Sanoja, J. y Ortiz, J. (2013). Conocimiento de contenido estadístico de los maestros. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística*, (2), 157-164. Recuperado el 5 de noviembre de 2022 de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4770260

Secretaría de Educación Pública. (2019). *Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria: Plan de Estudios 2018*. México. Recuperado de: https://www.dgesum.sep.gob.mx/public/planes2018/MAT/1433.pdf

Simons, H. (2011). *El estudio de caso: Teoría y práctica*. Ediciones Morata.

Soriano, A. (2014). Diseño y validación de instrumentos de medición. *Diá-logos*, (13), 19-40. Recuperado el 26 de enero de 2023 de: http://redicces.org.sv/jspui/bitstream/10972/2105/1/2%20disenoyvalidacion_dialogos14.pdf

Tacillo, E. (2016) *Metodología de la Investigación Científica.* Recuperado el 09 de diciembre de 2021 de: http://repositorio.bausate.edu.pe/bitstream/handle/bausate/36/Tacillo_Metodolog%c3%ada_de_la_Investigaci%c3%b3n.pdf?sequence=1&isAllowed=y

UNESCO. (2019). Marco de competencias de los docentes en materia de TIC UNESCO. Recuperado el 18 de julio de 2022 de: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000243126_spa#:~:text=La%20educaci%C3%B3n%20del%20siglo%20XXI%20requerir%C3%A1%20un%20aprendizaje%20m%C3%A1s%20personalizado,creatividad%20en%20lugar%20de%20reprimirla.

Universidad de Chile. (2022). Monitoreo de escuelas en pandemia: Colegios particulares, subvencionados y públicos presentan importantes brechas en cobertura curricular. *Universidad de Chile*. Recuperado el 30 de diciembre de 2022 de: https://uchile.cl/u192241

Vaillant, D. (2016). Trabajo colaborativo y nuevos escenarios para el desarrollo profesional docente. *Revista docencia*, *60*, 5-13. Recuperado el 03 de enero de 2023 de https://www.rmm.cl/sites/default/files/usuarios/15581357/articulos/trabajo-colaborativo-y-nuevos-escenarios-para-el-desarrollo-profesional-docente.pdf

Valencia-Molina, T., Serna-Collazos, A., Ochoa-Angrino, S., Caicedo-Tamayo, A. M., Montes-González, J. A., y Chávez-Vescance, J. D. (2016). Competencias y estándares TIC desde la dimensión pedagógica: Una perspectiva desde los niveles de apropiación de las TIC en la práctica educativa docente. Recuperado el 03 de enero de 2023 de: http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/4757

Vargas, G. (2017). Recursos educativos didácticos en el proceso enseñanza aprendizaje. *Cuadernos Hospital de Clínicas*, *58*(1), 68-74. Recuperado el 30 de diciembre de 2022 de: http://www.scielo.org.bo/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1652-67762017000100011&lng=es&tlng=es.

Vásquez, C. (2018). Creencias respecto de las consecuencias de la Ley Nº 20.903 que crea el Sistema de Desarrollo Profesional de Profesores de Colegios Particulares Subvencionados de la comuna de Concepción [Tesis de Magister, Universidad del Desarrollo]. Recuperado el 20 de julio de 2022 de: https://repositorio.udd.cl/bitstream/handle/11447/2367/Documento.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Vásquez, C., Pincheira, N., Piñeiro, J., y Díaz-Levicoy, D. (2019). ¿Cómo se promueve el aprendizaje de la estadística y la probabilidad? Un análisis desde los libros de texto para la Educación Primaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*(65), 1133-1154. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a08

Vera, O., Díaz, C. y Batanero, C. (2011). Dificultades en la formulación de hipótesis estadís ticas por estudiantes de Psicología. Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática. (27), 41-61. Recuperado el 29 de diciembre de 2022 de: http://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/911/614

Vera-Sagredo, A., Constenla-Núñez, J. y Jara-Coatt, P. (2022). Actitudes y capacidades frente a la innovación educativa: Desde la percepción de docentes y directivos de establecimientos educativos de la región del Biobío, Chile. *Entramado*, *18*(2). https://doi.org/10.18041/1900-3803/entramado.2.8478

Villa-Ochoa, J., González-Gómez, D. y Carmona-Mesa, J. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas. *Formación universitaria*, *11*(2), 25-34. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062018000200025

Anexos

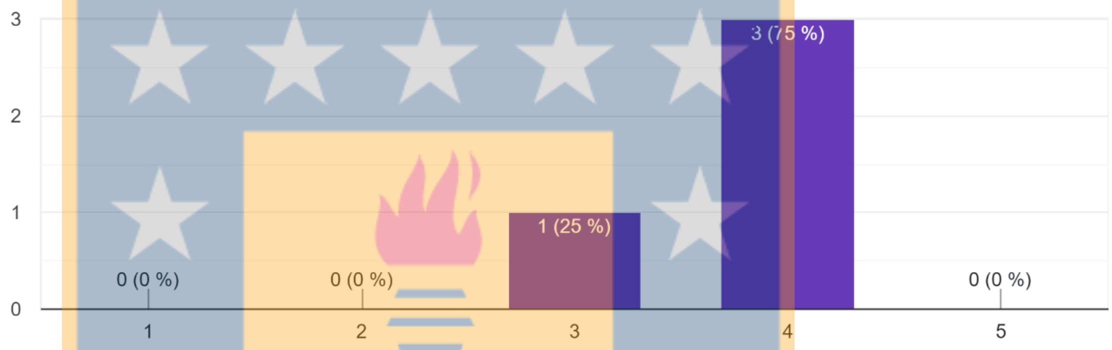
Anexo 1: Cuestionario de autorreporte Límites, Derivadas e Integrales

Respuestas:

- Dimensión disciplinar

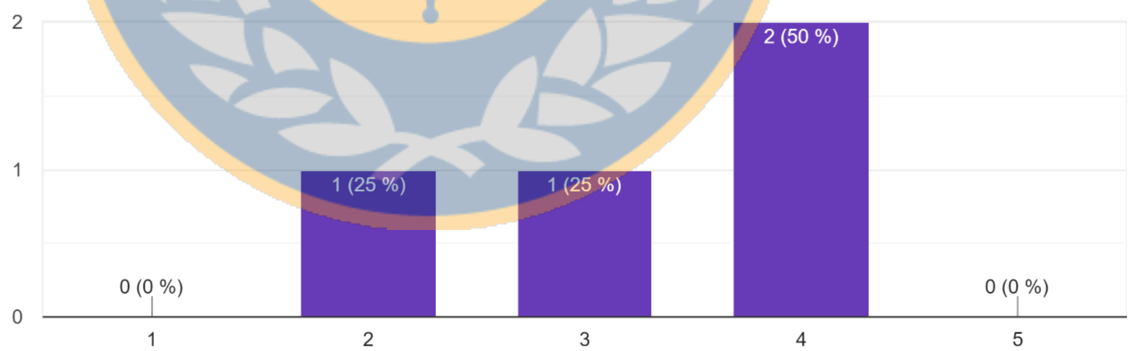
Soy capaz de explicar correctamente la relación entre las nociones de límite de sucesiones y de funciones, utilizándolas posteriormente en la res...s empleando casos conocidos y sus propiedades.

4 respuestas

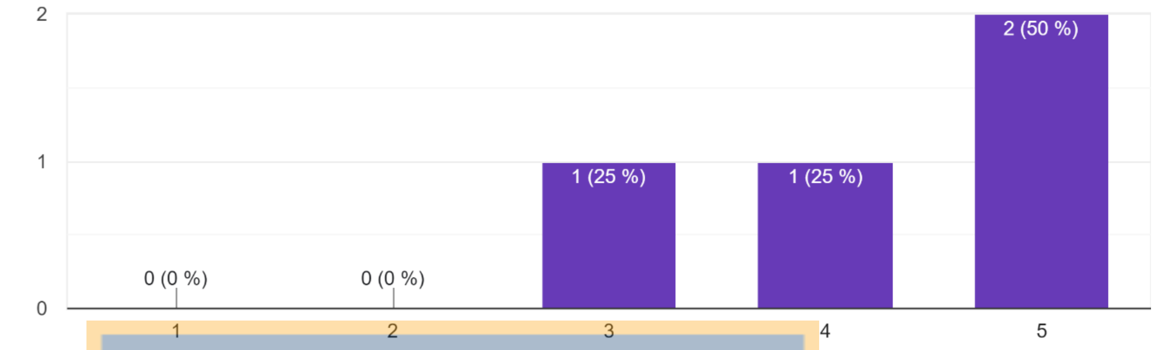


Soy capaz de resolver problemas que involucran las relaciones lógicas entre la noción de continuidad y derivabilidad de funciones, usando lo...oremas del valor intermedio y del valor medio.

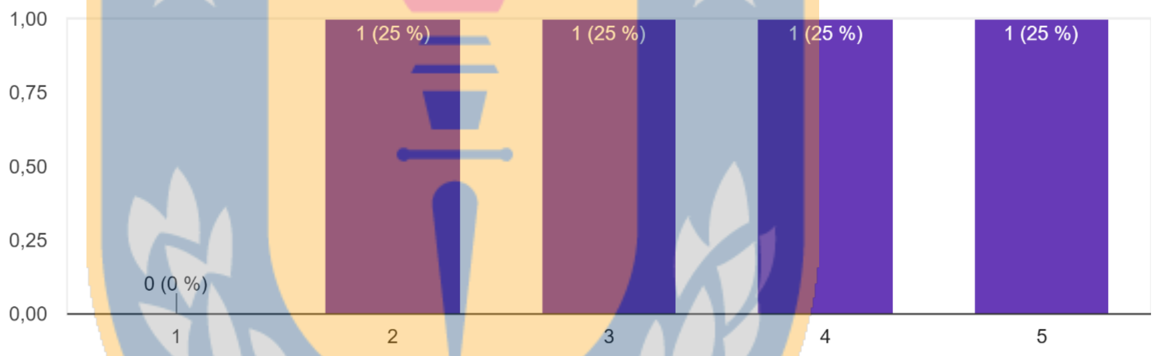
4 respuestas



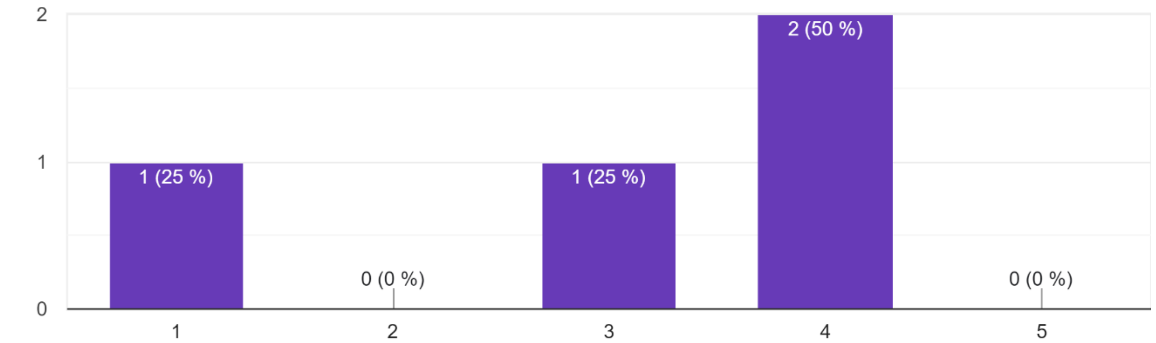
Soy capaz de utilizar las nociones de límite, continuidad y derivabilidad para analizar funciones, en particular sus puntos críticos, de inflexión y su c...ctando sus representaciones gráficas y algebraicas.
4 respuestas



Soy capaz de modelar fenómenos que involucran tasas de cambio instantáneo, maximización o minimización de funciones.
4 respuestas

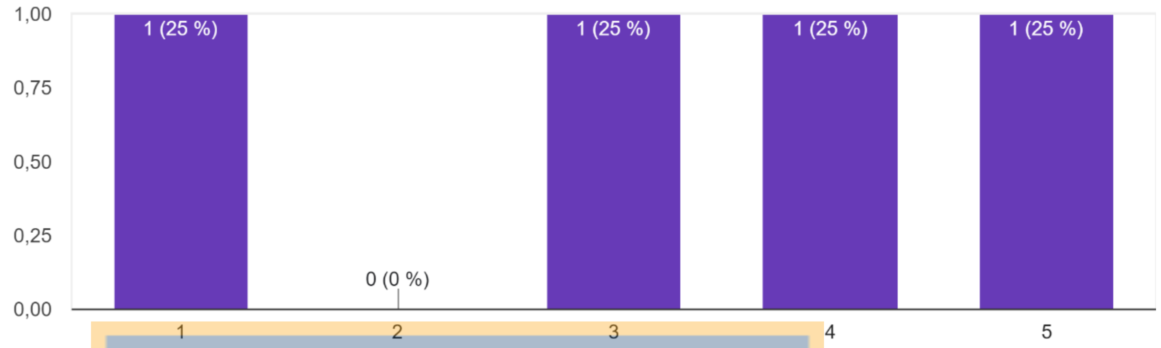


Conozco la integral de Riemann, además de comprender el Teorema Fundamental del Cálculo y su aplicación para el cálculo de integrales usando funciones primitivas.
4 respuestas



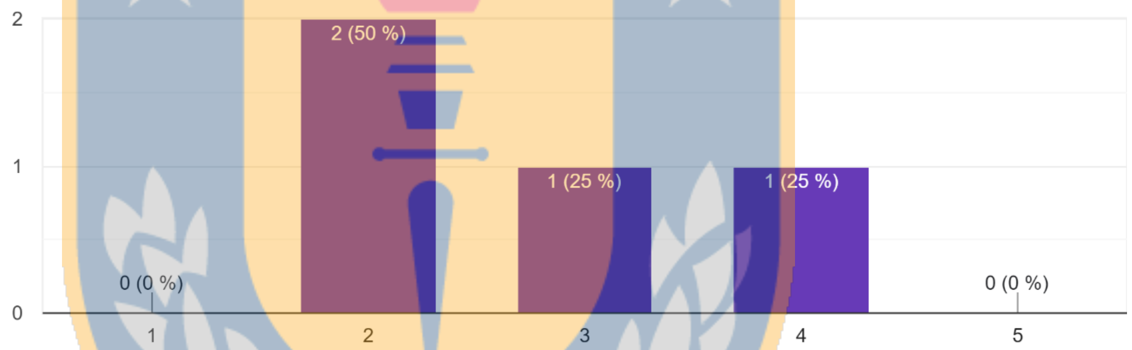
Soy capaz de aplicar el cálculo integral para determinar longitudes, superficies y volúmenes en la resolución de problemas y la modelación.

4 respuestas



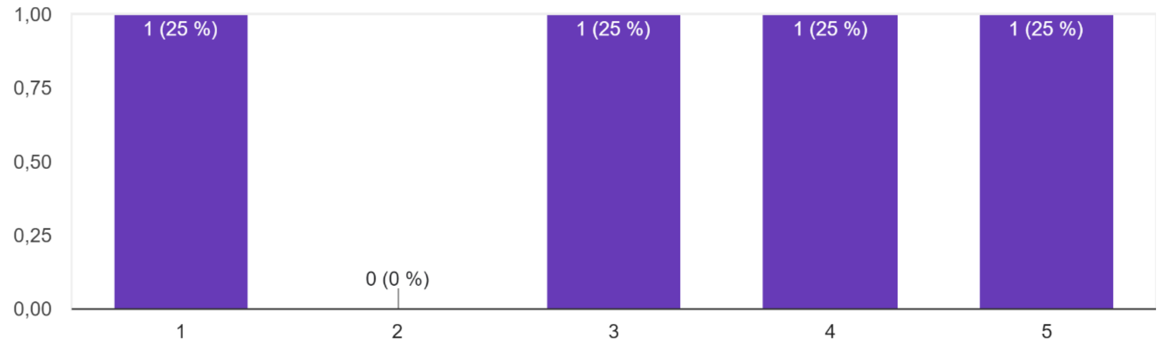
Soy capaz de estudiar la convergencia de series numéricas y series de potencias utilizando métodos del cociente, raíz y de comparación, modela...s con ellas, en particular, el cálculo de interés.

4 respuestas



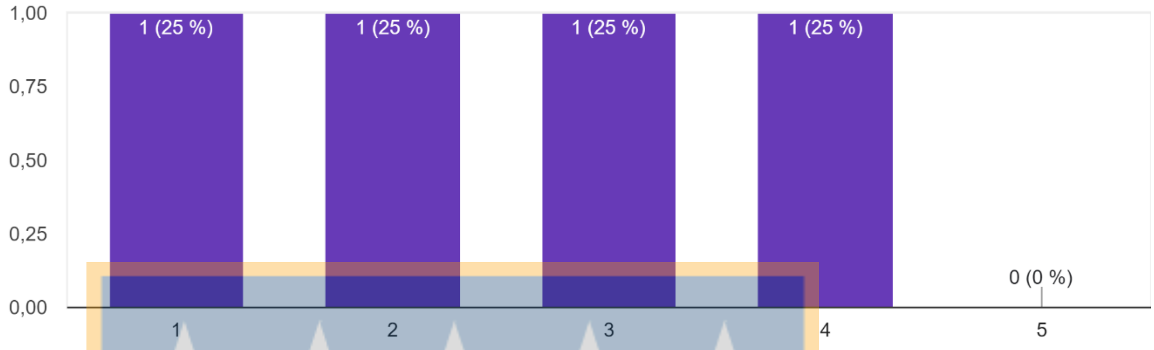
Soy capaz de modelar diversos fenómenos que requieren conocimientos de límites, derivadas e integrales y de otras áreas.

4 respuestas

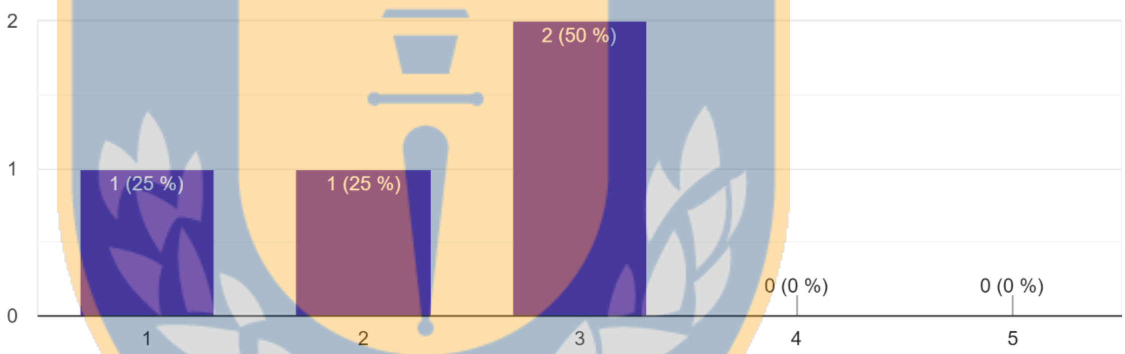


- <u>Dimensión Didáctica</u>

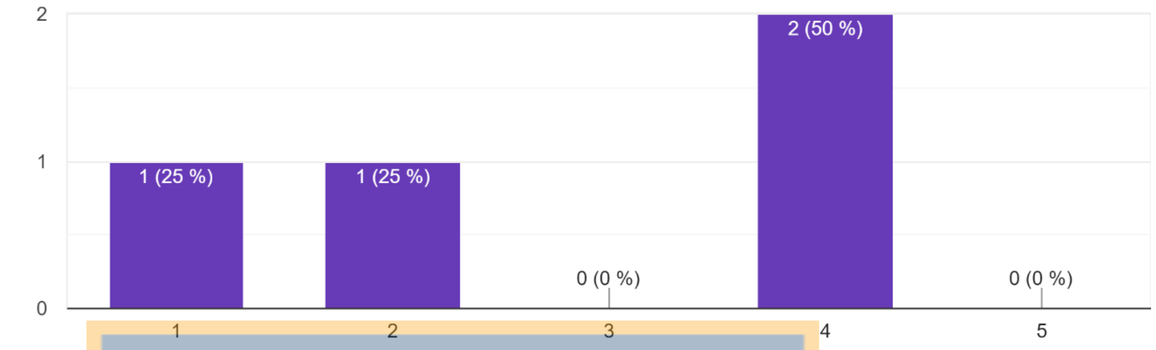
Soy capaz de planificar proyectos interdisciplinarios, contemplando distintos niveles de complejidad, que permita a todos mis estudiantes in...ar la derivada e integral con nociones de física.
4 respuestas



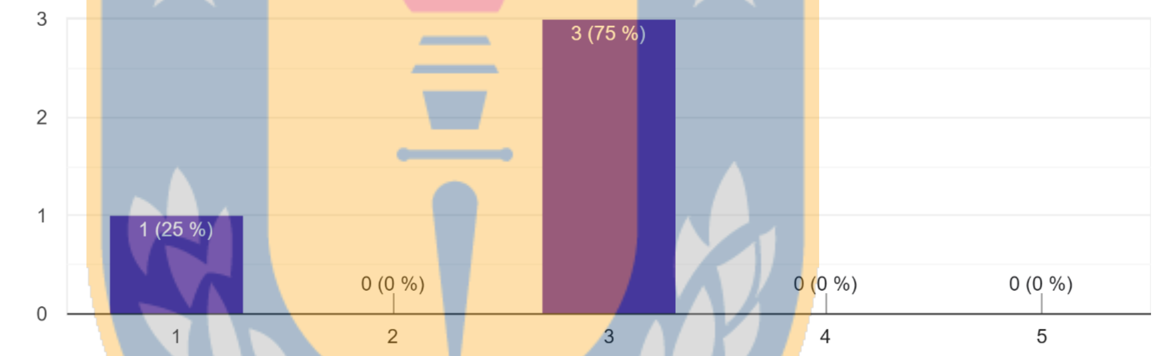
Soy capaz de utilizar diversas representaciones para que todos mis estudiantes logren superar las dificultades más frecuentes que tienen con las no...onvergencia de sucesiones y límite de funciones.
4 respuestas



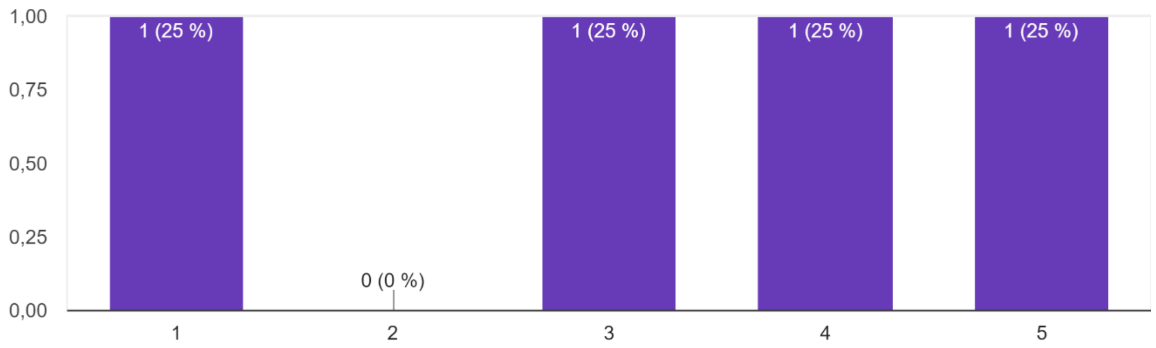
Soy capaz de anticipar preguntas para estimular el aprendizaje y para guiar a mis alumnos en una actividad de modelación colaborativa de fenómenos ...o diferencial y el uso de herramientas digitales.
4 respuestas



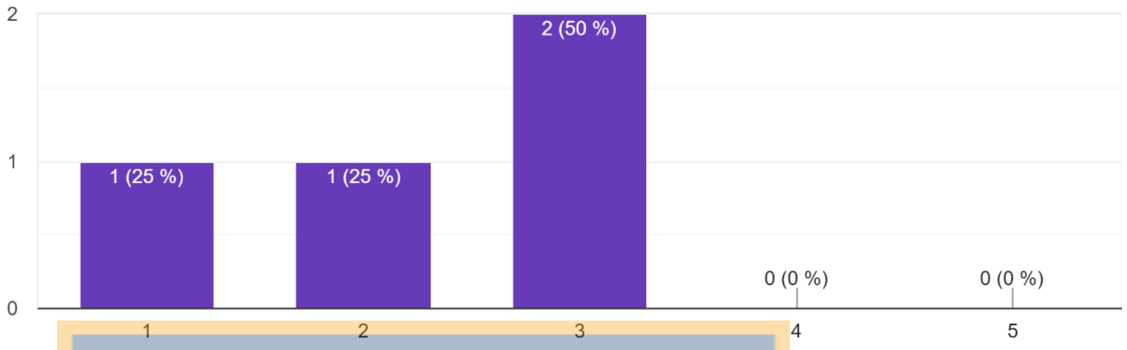
Soy capaz de gestionar actividades de resolución colaborativa de problemas matemáticos asociados a la aplicación de los teoremas del valo...entando la discusión y comunicación entre ellos.
4 respuestas



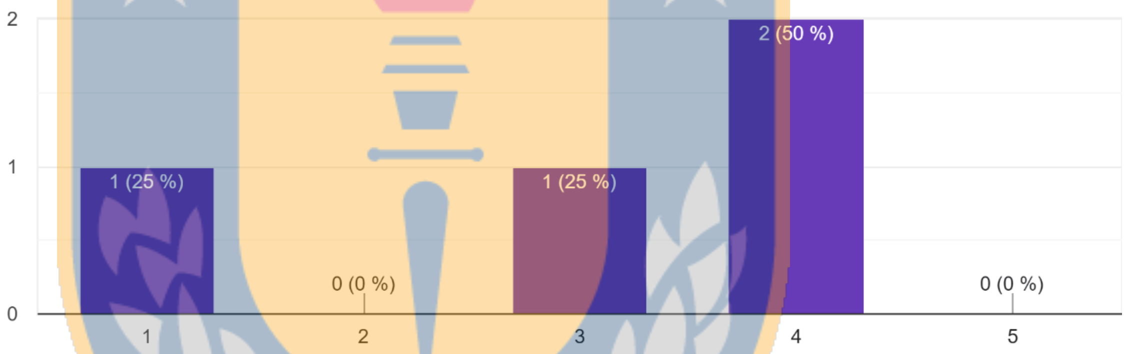
Soy capaz de diseñar actividades que requieran el uso de software dinámico para graficar, derivar, integrar y/o resolver ecuaciones en la resolución d...to, considerando el contexto de sus estudiantes.
4 respuestas



Soy capaz de implementar estrategias de evaluación formativa en actividades de modelación de fenómenos del ámbito de Economía, reconociendo ...s y cómo esta aporta al proceso de modelación.
4 respuestas

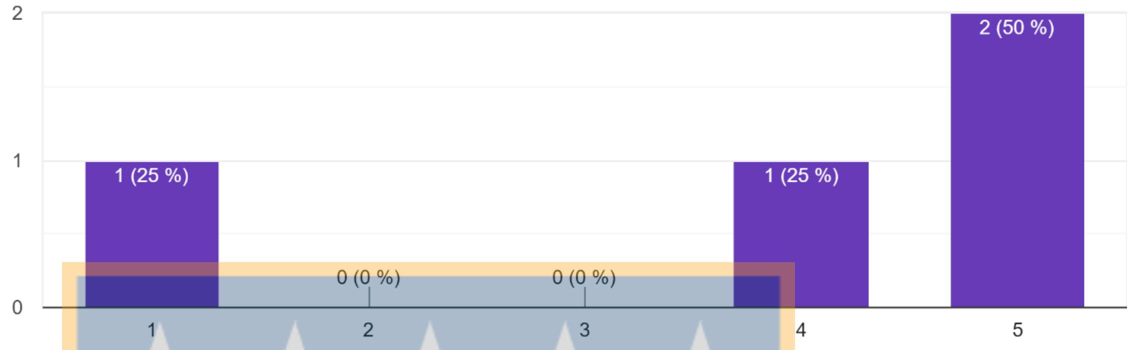


Soy capaz de propiciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento crítico y otras funciones cognitivas de orden superior mediante la integraci...de aprendizaje de Límites, Derivadas e Integrales.
4 respuestas

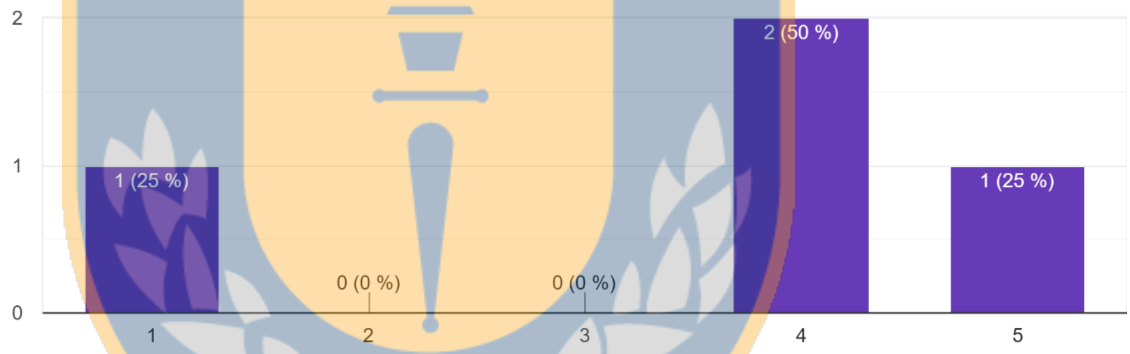


- <u>Dimensión Tecnológica</u>

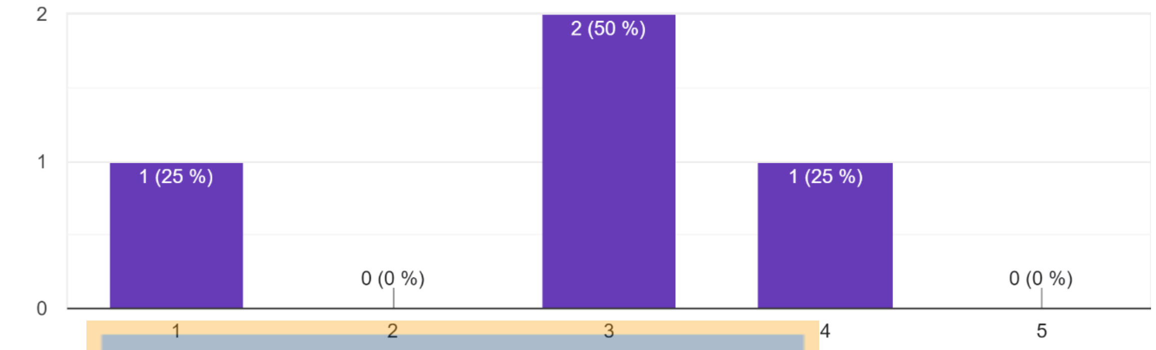
Soy capaz de buscar, seleccionar y utilizar información fidedigna de estudios presentes en la web con el fin de mejorar la práctica docente y el propi... contexto y los recursos tecnológicos disponibles.
4 respuestas



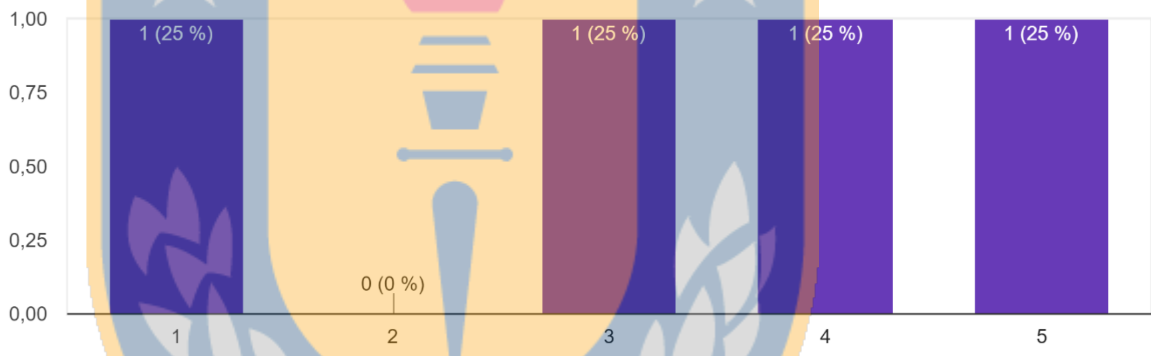
Soy capaz de reflexionar sobre los resultados del uso y manejo de TIC en la asignatura de Límites, Derivadas e Integrales, diseñando e implementando acciones de mejora.
4 respuestas



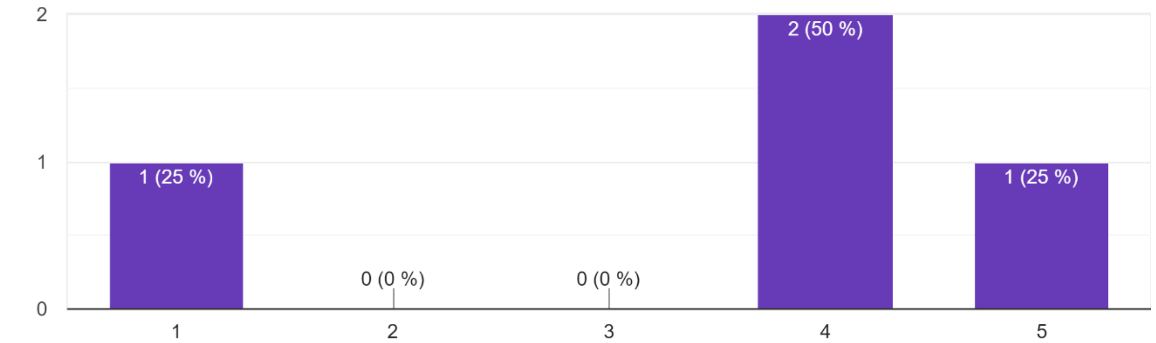
Soy capaz de promover el trabajo colaborativo en línea, considerando el contexto y los recursos disponibles, entre los estudiantes para la discusió...iendo la información personal y la de los demás.
4 respuestas



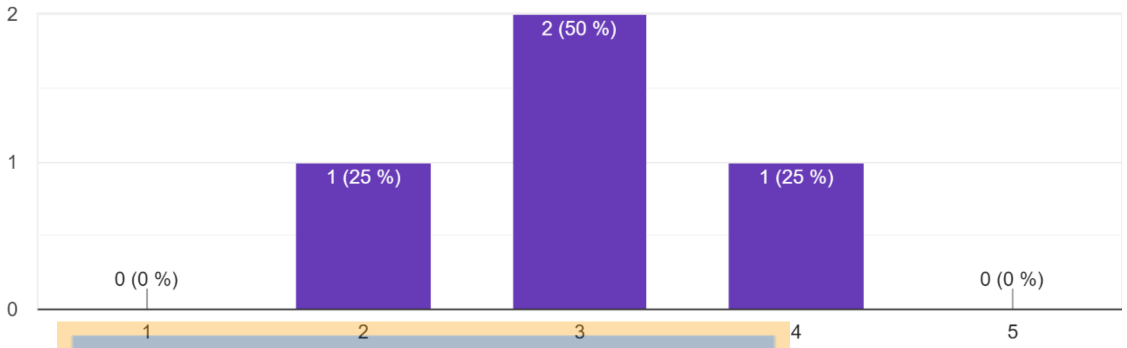
Soy capaz de promover estrategias de búsqueda, selección y almacenamiento de recursos de información disponibles en sistemas electrónicos, d... el aprendizaje en Cálculo Diferencial e Integral.
4 respuestas



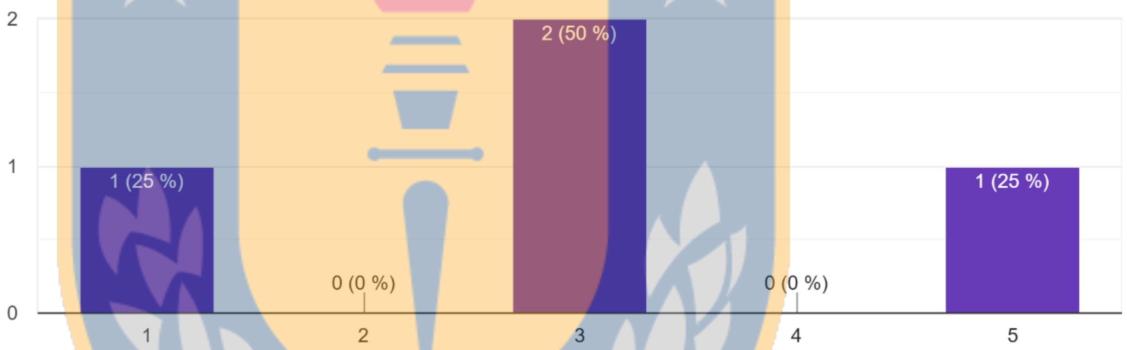
Soy capaz de utilizar recursos digitales para diseñar estrategias de evaluación pertinentes a los aprendizajes esperados en Límites, derivadas e integrales.
4 respuestas



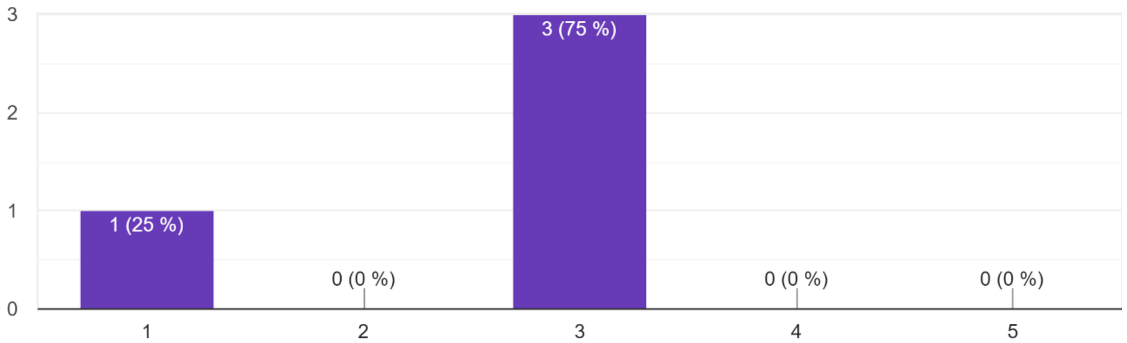
Soy capaz de utilizar TIC para retroalimentar los resultados de las evaluaciones en Límites, derivadas e integrales, para que los estudiantes a...ejoras para sus propios procesos de aprendizaje.
4 respuestas



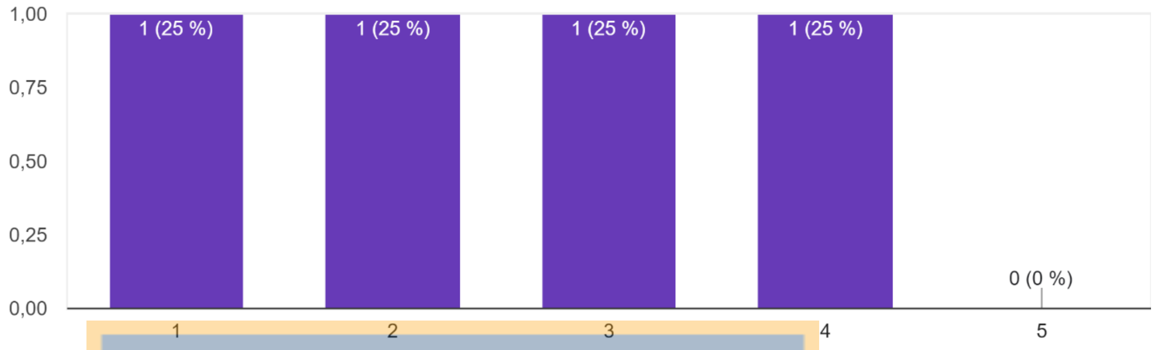
Soy capaz de emplear herramientas digitales para realizar diversas formas de representación, argumentando acerca de la resultante de la compos...encia de la función inversa de una función dada.
4 respuestas



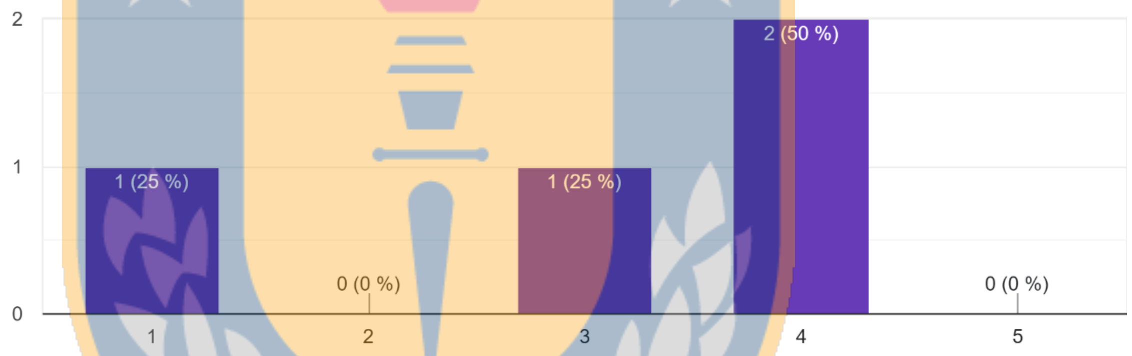
Soy capaz de utilizar herramientas tecnológicas digitales para demostrar la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para deter...s matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria.
4 respuestas



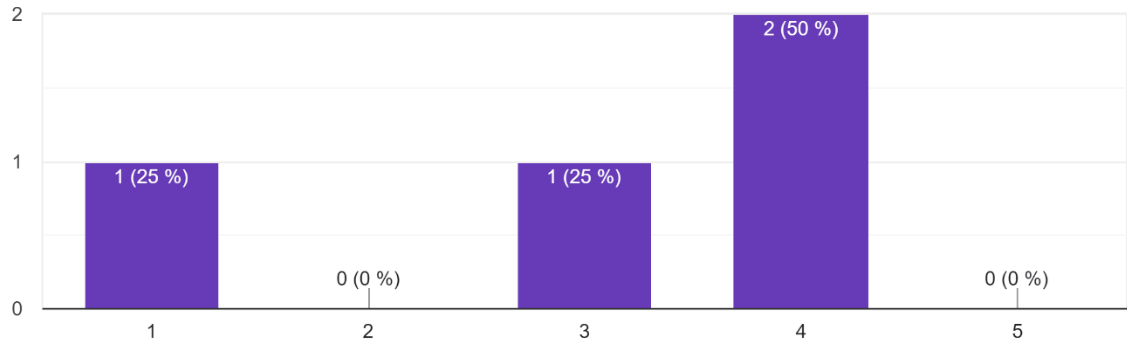
Soy capaz de utilizar software matemático para modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio.
4 respuestas



Soy capaz de implementar software matemático para crear actividades que involucren la resolución de problemas asociados a crecimiento ...rtir del cálculo de la primera y segunda derivada.
4 respuestas



Soy capaz de utilizar software educativos para modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en con...matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria.
4 respuestas

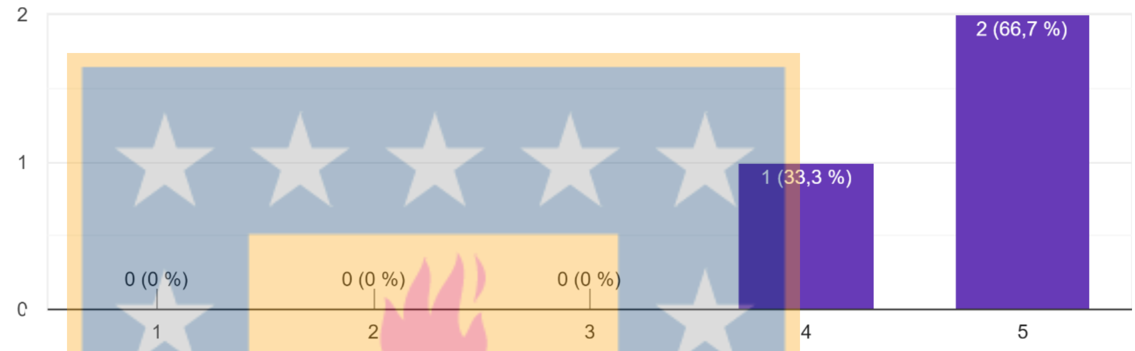


Anexo 2: Cuestionario de autorreporte Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial

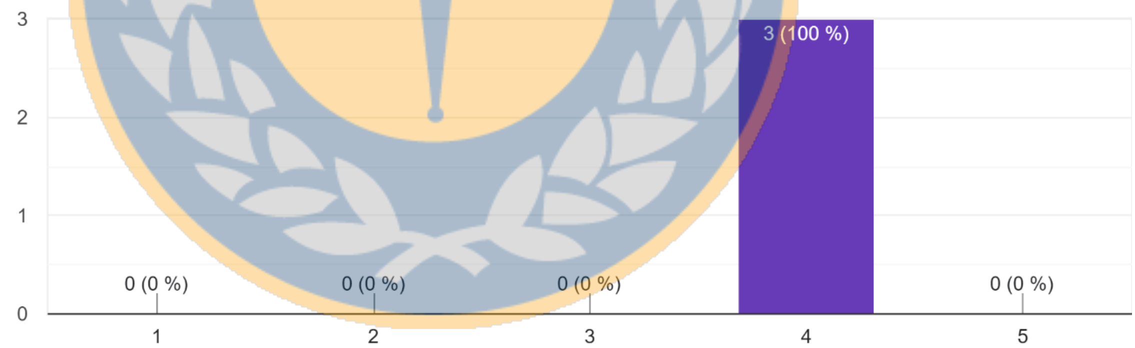
Respuestas:

- Dimensión Disciplinar

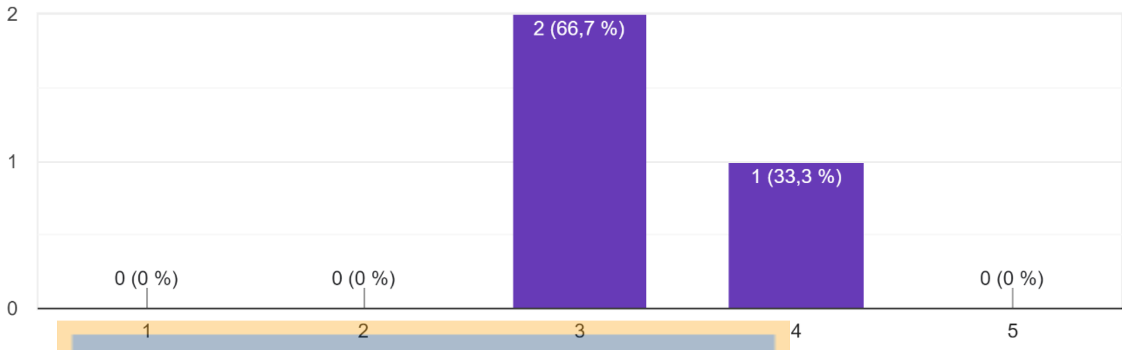
Soy capaz de utilizar medidas de centro, posición y dispersión para resumir y comparar conjuntos de datos provenientes de varias poblaciones, en di...nder preguntas de interés sobre las poblaciones.
3 respuestas



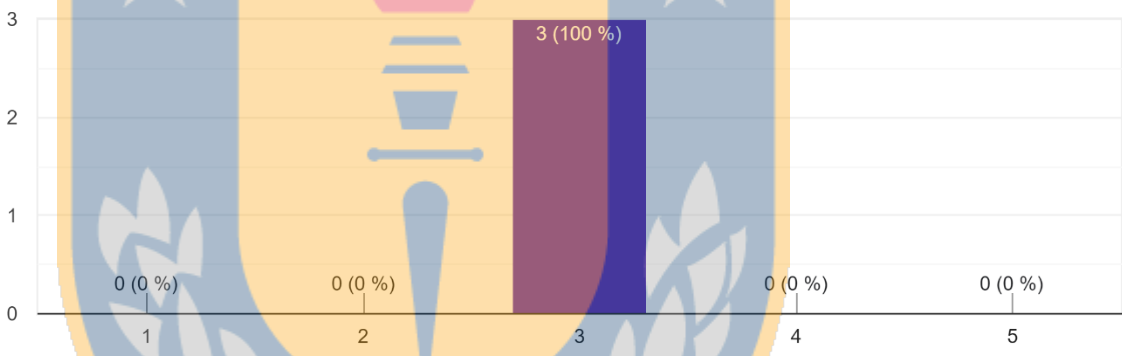
Soy capaz de vincular la estadística descriptiva y la inferencial, usando los datos como evidencia, generalizando más allá de la descripción de los da...rtidumbre para conectar con la inferencia formal.
3 respuestas



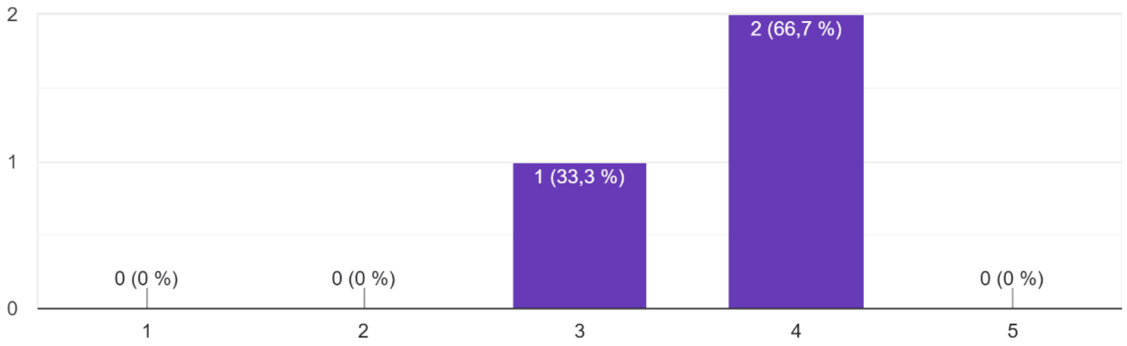
Soy capaz de comprender los elementos de un proceso de inferencia estadística, entendiendo que este utiliza datos de muestras aleatorias para inferi... al cuantificar la incertidumbre de las inferencias.
3 respuestas



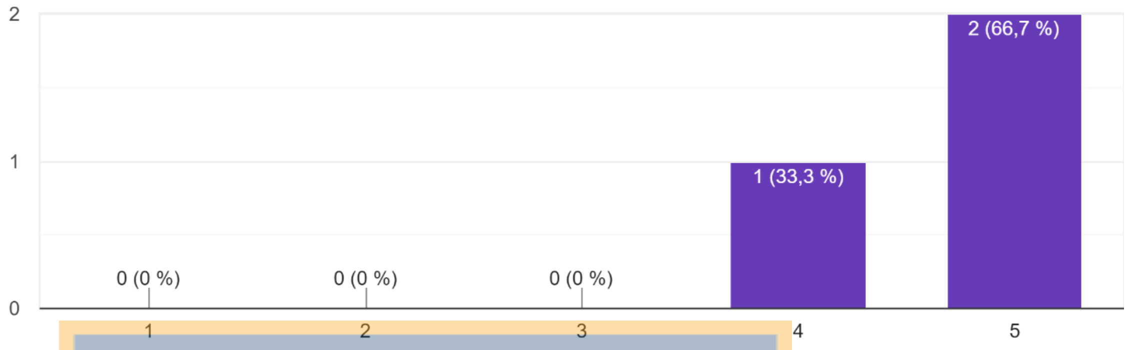
Soy capaz de explorar y describir el comportamiento de datos uni y bivariados, usando estadísticos, representaciones gráficas y tabulares... de habilidades de análisis exploratorio de datos.
3 respuestas



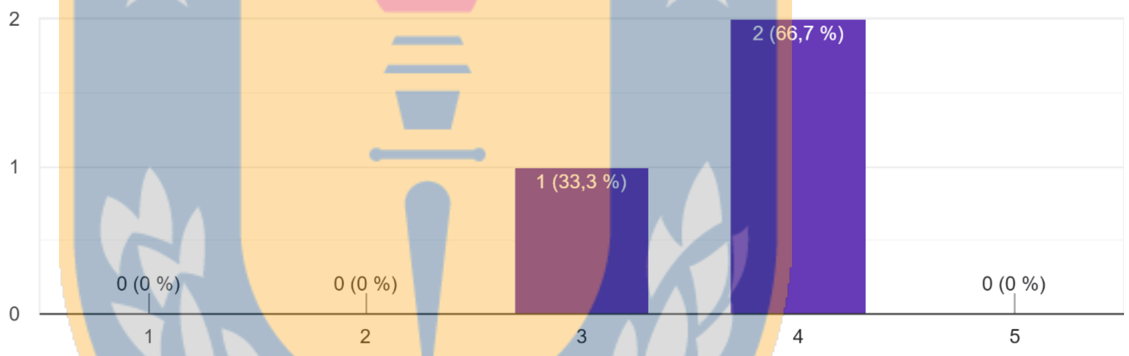
Soy capaz de determinar los principios básicos del cálculo de probabilidades a partir de experimentos aleatorios, y estudia el desarrollo de...amente la probabilidad teórica y la experimental.
3 respuestas



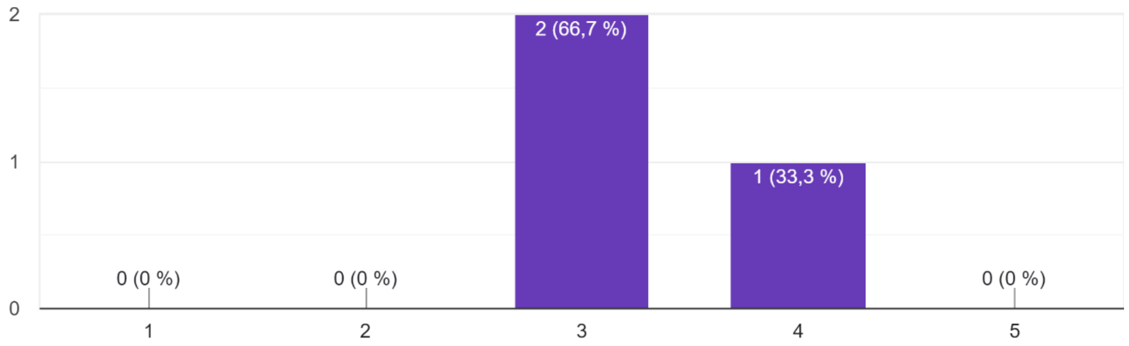
Soy capaz de utilizar el principio multiplicativo para desarrollar técnicas de conteo de resultados en experimentos aleatorios simples y compuestos, c..., y las aplica para el cálculo de probabilidades.
3 respuestas



Soy capaz de interpretar la probabilidad condicional como una medida de incertidumbre a la luz de nueva información, relacionándola con el concepto...entar decisiones con base en su cuantificación.
3 respuestas

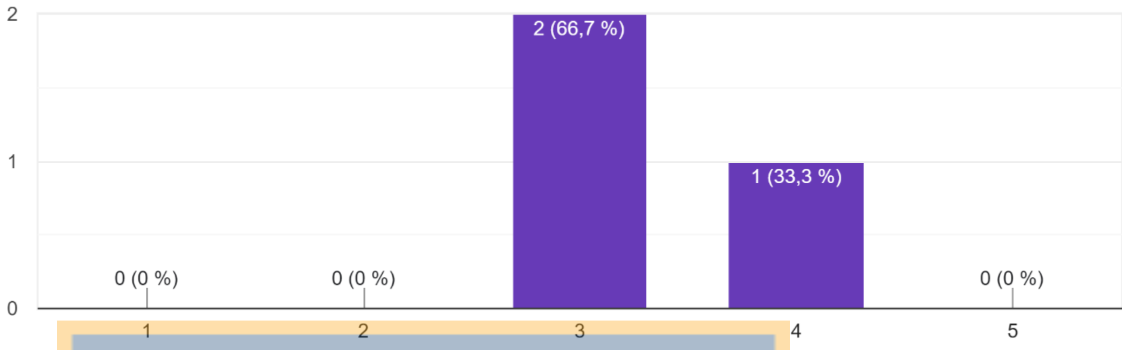


Soy capaz de definir variables aleatorias y utilizarlas para modelar fenómenos aleatorios, describiendo el comportamiento de la variable a trav...rtidumbre de índole social, cultural o científica.
3 respuestas



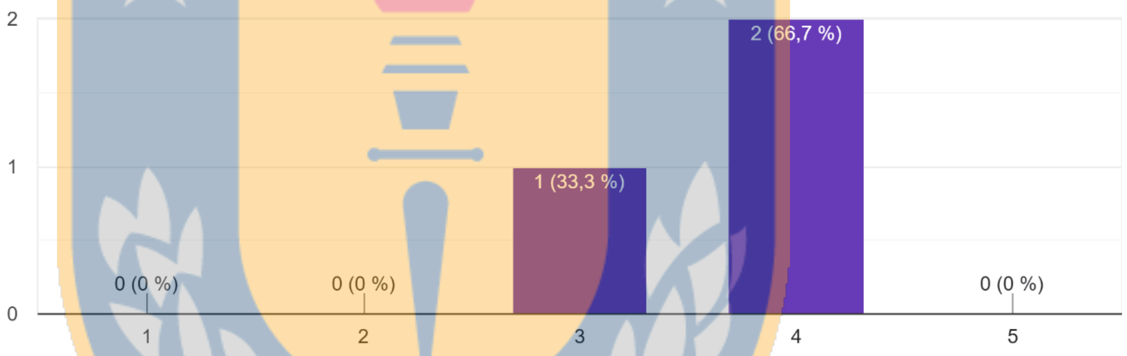
Soy capaz de comprender y aplicar la Ley de los Grandes Números y el Teorema Central del Límite en la resolución de problemas, relacionando las c... experimentales de fenómenos contextualizados.

3 respuestas



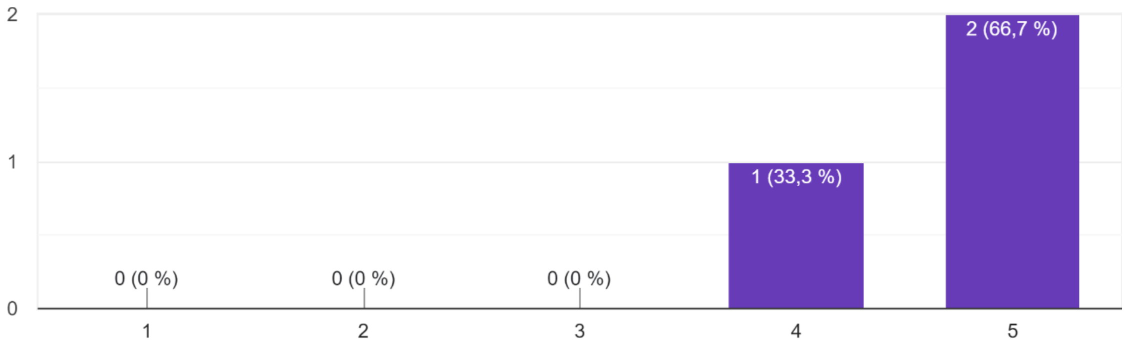
Soy capaz de construir intervalos de confianza e interpretar su significancia estadística para el análisis crítico de información y para la realización...cias sociales, ciencias de la salud y educación.

3 respuestas



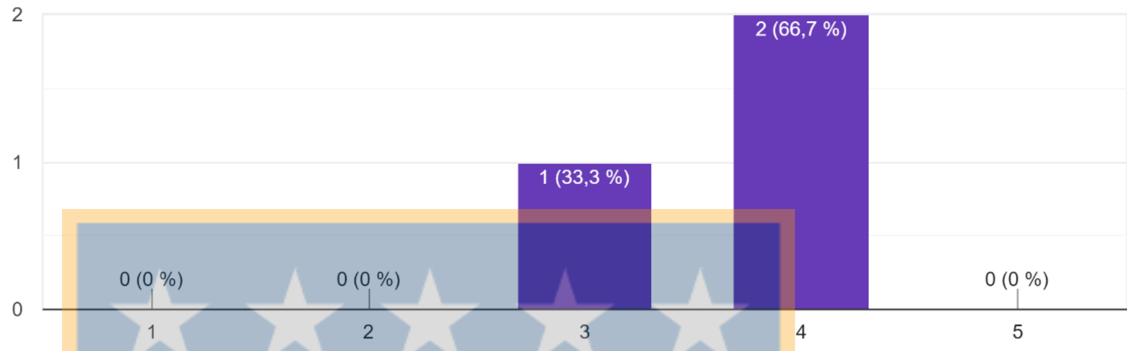
Soy capaz de comprender el potencial de las Probabilidades y Estadística como herramienta para estudiar fenómenos naturales y sociales.

3 respuestas

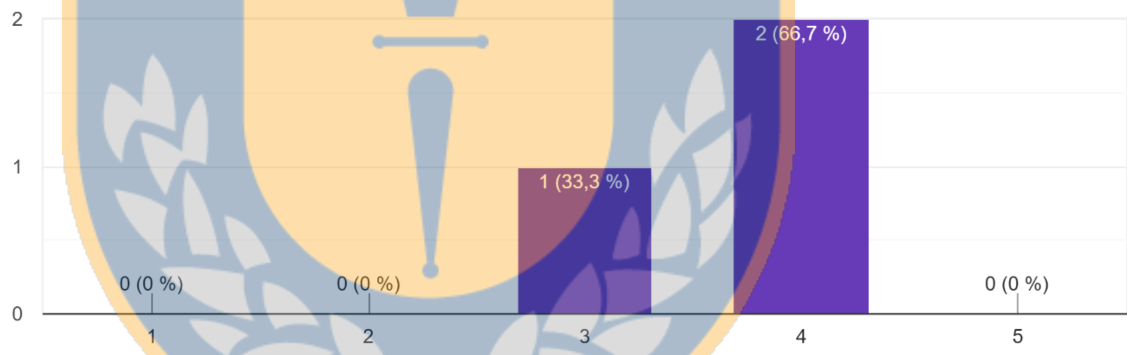


- <u>Dimensión Didáctica</u>

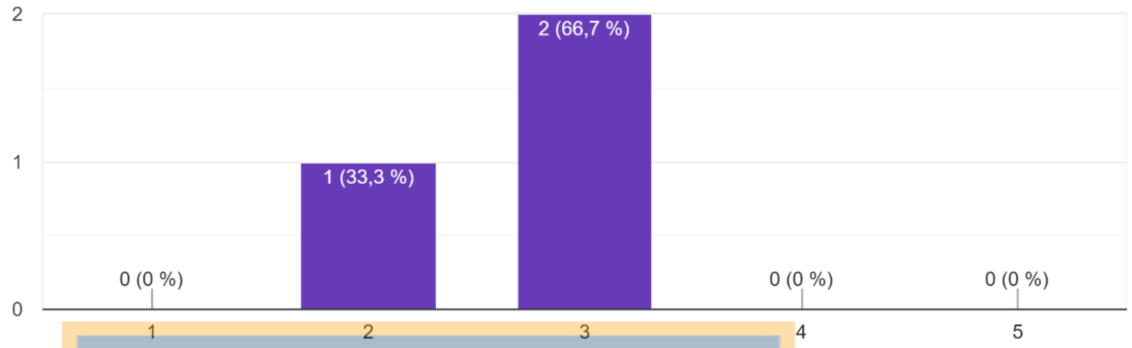
Soy capaz de implementar discusiones en clase para monitorear los diversos niveles de razonamiento y las dificultades que presentan sus ...onfianza en problemas de inferencia estadística.
3 respuestas



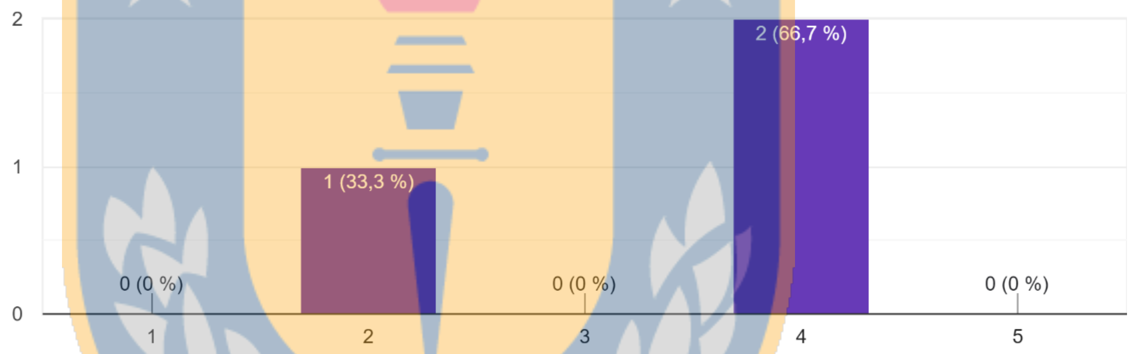
Soy capaz de diseñar planes de clases que integren software dinámico para la representación y análisis de datos en la resolución de problemas est...nriqueciendo la interpretación de los resultados.
3 respuestas



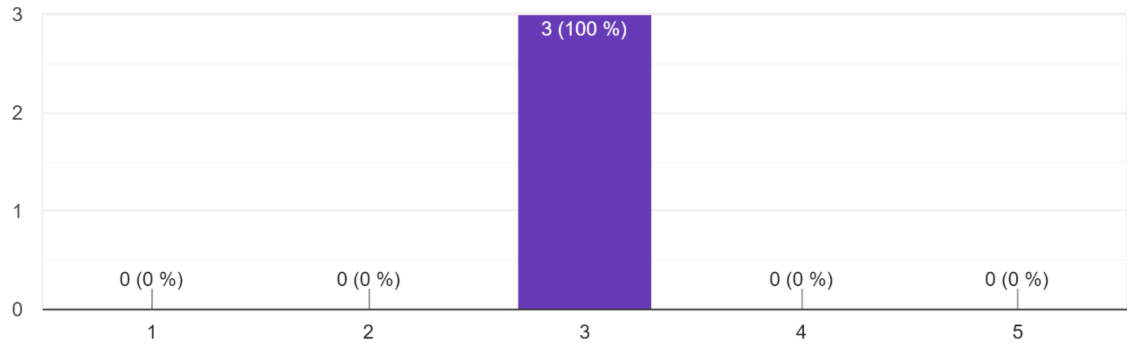
Soy capaz de planificar unidades didácticas que promuevan la resolución de problemas estadísticos con uso de herramientas digitales, en...rítica que toma decisiones basadas en evidencia.
3 respuestas



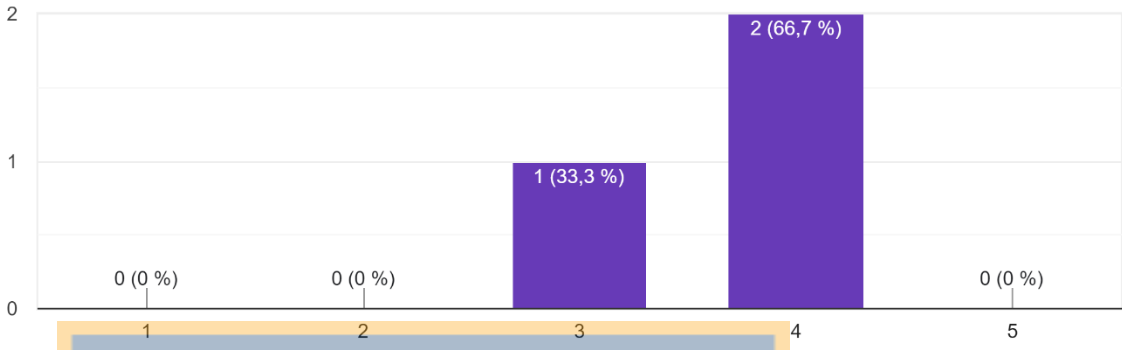
Soy capaz de formular preguntas a sus estudiantes para que discutan y contrasten en grupos pequeños las concepciones teórica y experimental ...va la participación de todos/as sus estudiantes.
3 respuestas



Soy capaz de diseñar instancias de evaluación formativa en situaciones que involucren inferencia estadística, considerando el nivel de confianza, pa...nza y retroalimentar efectivamente a estudiantes.
3 respuestas

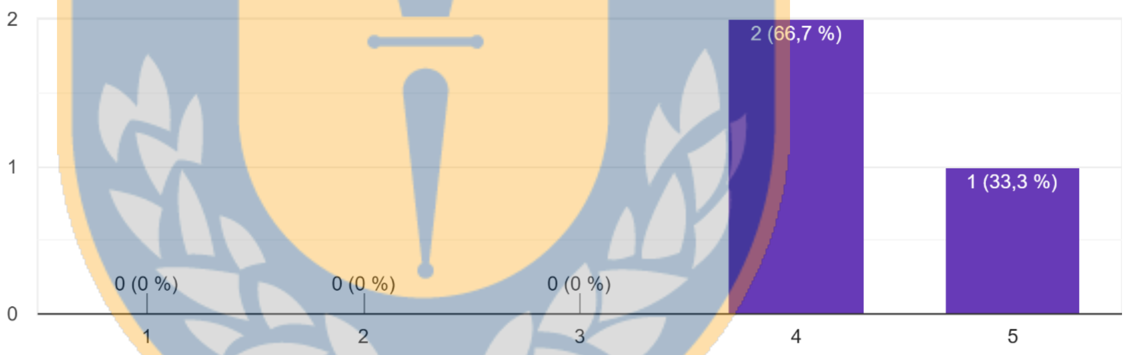


Soy capaz de propiciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento crítico y otras funciones cognitivas de orden superior mediante la integració...bilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial.
3 respuestas

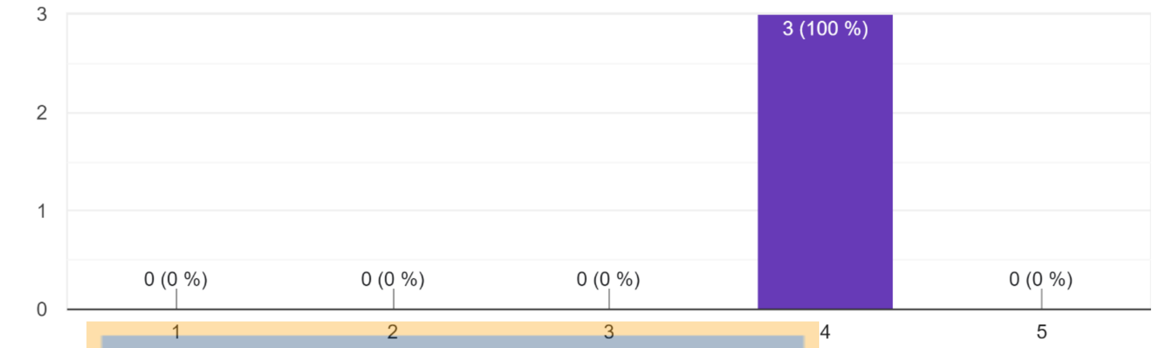


- <u>Dimensión Tecnológica</u>

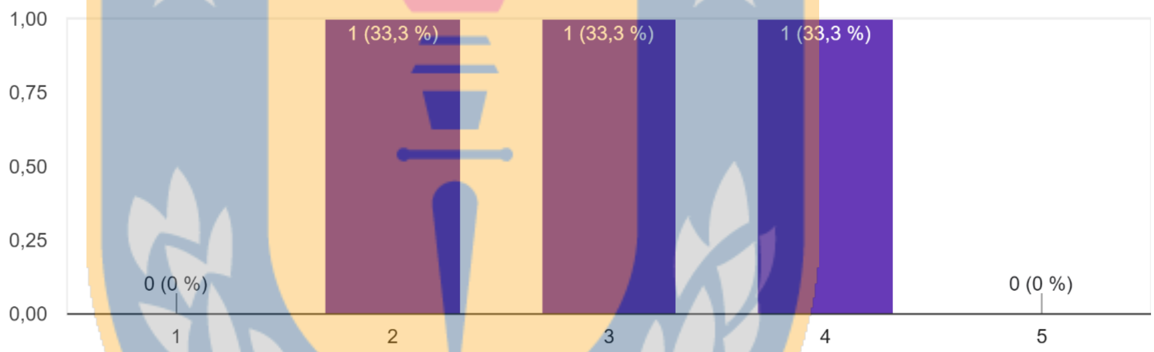
Soy capaz de buscar, seleccionar y utilizar información fidedigna de estudios presentes en la web con el fin de mejorar la práctica docente y el propi...l contexto y los recursos tecnológicos disponibles
3 respuestas



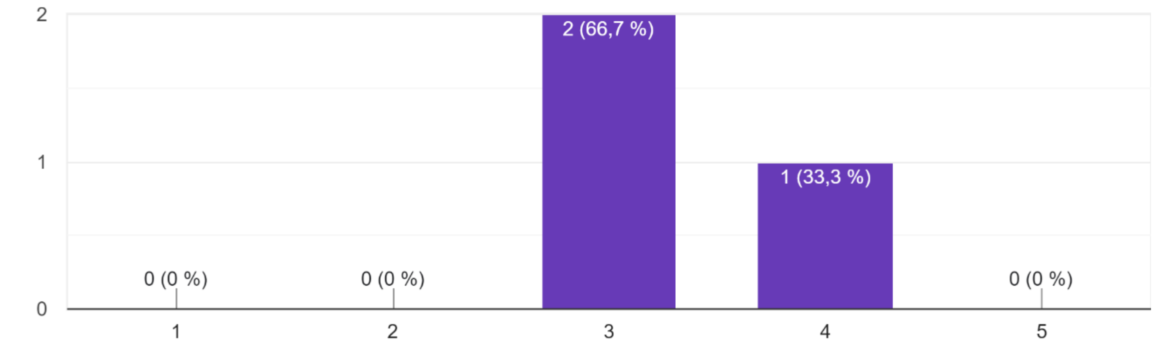
Soy capaz de reflexionar sobre los resultados del uso y manejo de TIC en la asignatura de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Infere...l, diseñando e implementando acciones de mejora.
3 respuestas



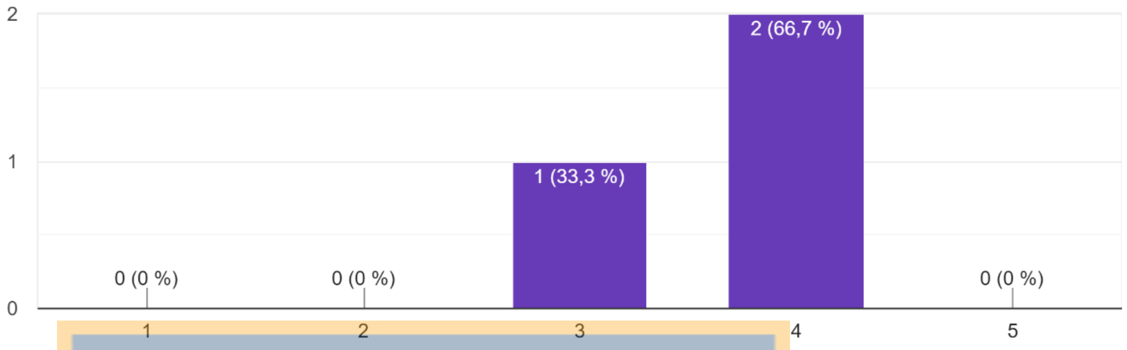
Soy capaz de promover el trabajo colaborativo en línea, considerando el contexto y los recursos disponibles, entre los estudiantes para la discusi...giendo la información personal y la de los demás.
3 respuestas



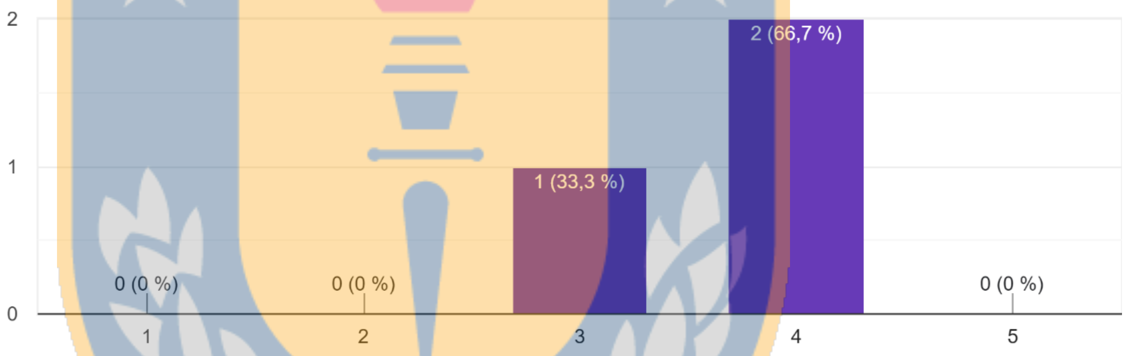
Soy capaz de promover estrategias de búsqueda, selección y almacenamiento de recursos de información disponibles en sistemas electrónicos, d...bilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial.
3 respuestas



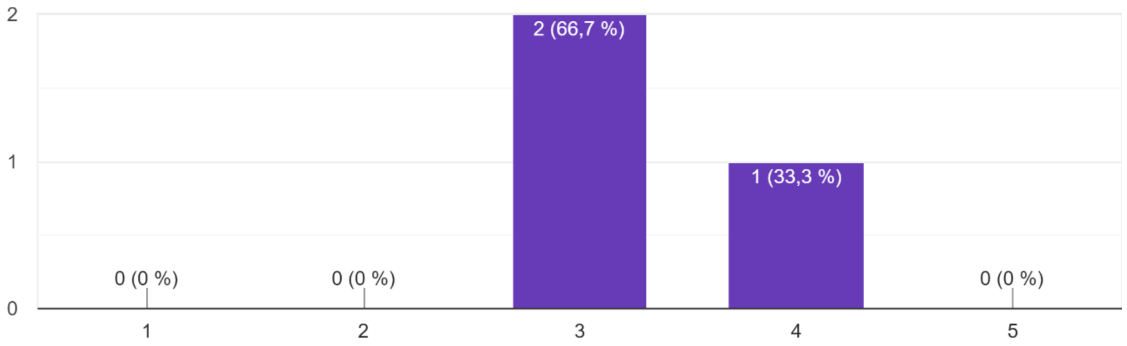
Soy capaz de utilizar recursos digitales para diseñar estrategias de evaluación pertinentes a los aprendizajes esperados en Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial.
3 respuestas



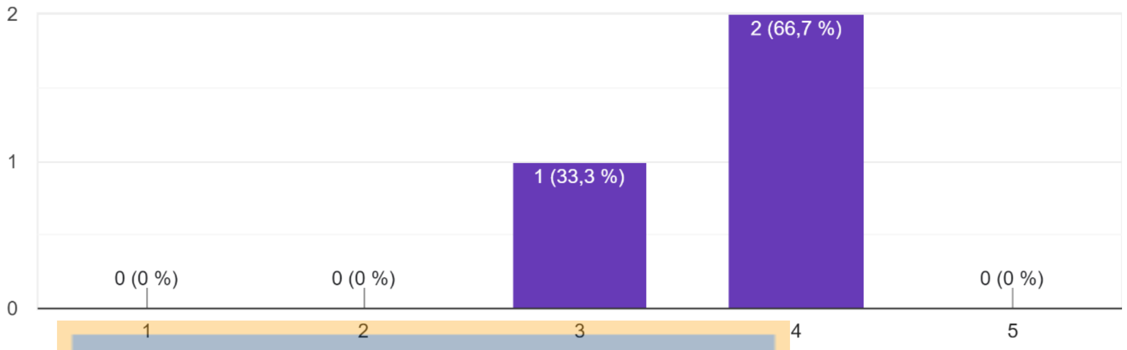
Soy capaz de utilizar TIC para retroalimentar los resultados de las evaluaciones en Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, para que l... mejoras para sus propios procesos de aprendizaje.
3 respuestas



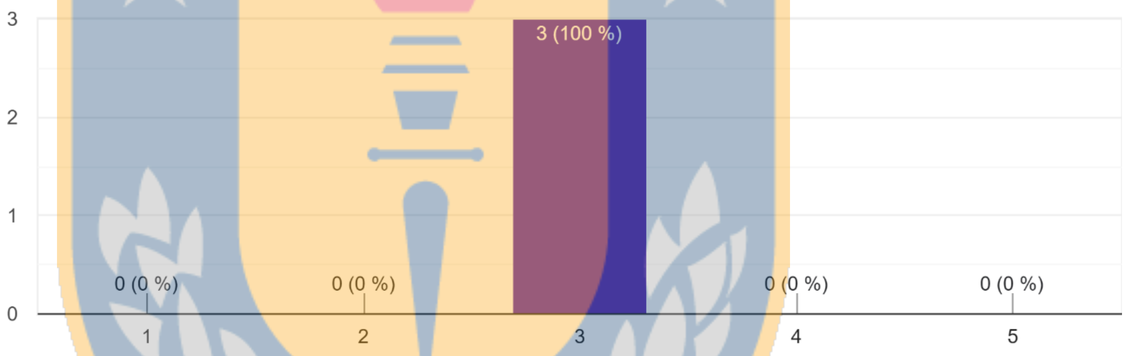
Soy capaz de utilizar herramientas digitales para construir histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de cajón y nube ...acción de datos presentes en situaciones dadas.
3 respuestas



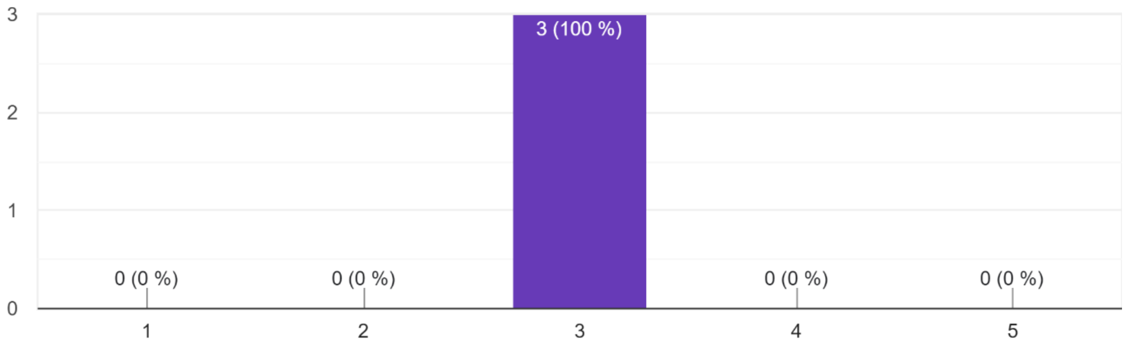
Soy capaz de utilizar herramientas digitales para crear actividades que involucren los conceptos de media muestral, desviación estándar, varianza, ...re dos variables para la resolución de problemas.
3 respuestas



Soy capaz de utilizar herramientas digitales para modelar fenómenos o situaciones cotidianas, en el ámbito científico y social que requieran el cálcu...plicación de las distribuciones binomial y normal.
3 respuestas



Soy capaz de utilizar herramientas digitales, para realizar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a p...en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.
3 respuestas



Anexo 3: Guión Grupo Focal docentes que imparten las asignaturas de Límites, Derivadas e Integrales y Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial

Objetivo General: Identificar las dificultades didácticas, tecnológicas y de conocimiento disciplinar que reconocen profesores al impartir las asignaturas de profundización Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas e Integrales, para el diseño y validación de un plan de acompañamiento docente.

Objetivos Específicos:

1. Explorar la percepción sobre las asignaturas de profundización Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas e Integrales desde la perspectiva de docentes que las imparten.

2. Indagar en las competencias didácticas que reconoce el profesor en sus prácticas pedagógicas al impartir la asignatura de profundización Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial o Límites, Derivadas e Integrales.

3. Indagar en las competencias tecnológicas que reconoce el profesor en sus prácticas pedagógicas al impartir la asignatura de profundización Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial o Límites, Derivadas e Integrales.

4. Indagar en las competencias disciplinares que reconoce el profesor en sus prácticas pedagógicas al impartir la asignatura de profundización Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial o Límites, Derivadas e Integrales.

Introducción:

- Presentación personal.
- Años de experiencia.

- ¿Qué asignatura(s) de profundización propuesta(s) por el MINEDUC de matemática ha impartido hasta el momento? ¿En cuál de los contenidos que se abordan en estas asignaturas presenta mayor dominio?

Preguntas:

1. ¿Qué tal les ha parecido el diseño o propuesta de estas asignaturas de profundización?

2. Las Bases Curriculares de 3° y 4° Medio, promulgadas el año 2019 por el MINEDUC, promueven las Habilidades del Siglo XXI, las cuales están organizadas en 4 categorías: **maneras de pensar** (creatividad e innovación, el pensamiento crítico y la metacognición), **maneras de trabajar** (comunicación y colaboración), **herramientas para trabajar** (alfabetización digital y el uso de la información) y **maneras de vivir en el mundo** (ciudadanía local y global, el proyecto de vida y carrera, la responsabilidad personal y social). Respecto a lo mencionado, ¿qué actividades les permiten fomentar en sus estudiantes el desarrollo de estas a través de las asignaturas de profundización de matemática que imparte?

    a. ¿Qué recursos curriculares utilizan para la implementación de estas actividades? ¿Por qué?

3. ¿Qué recursos tecnológicos (equipos, programas, entornos virtuales de aprendizaje, sitios web, etc.) utilizan en el proceso de enseñanza-aprendizaje dentro del aula en la asignatura de profundización que imparte?

    a. ¿Por qué eligieron el uso de estos y con qué frecuencia los utilizan?
    b. ¿Por qué creen que estas herramientas digitales son adecuadas para llevar a cabo el proceso de enseñanza aprendizaje?
    c. ¿Cómo se ve facilitado el proceso de enseñanza aprendizaje con la utilización de estas herramientas?
    d. ¿De qué manera dan a conocer a sus estudiantes los riesgos asociados al uso de estos entornos virtuales y/o sitios web y cómo promueven la protección de los datos que ellos proporcionan en estos, principalmente en las redes sociales?

e. ¿Cómo logran que sus estudiantes empleen un uso y tiempo adecuado de estas herramientas tecnológicas?

4. Considerando sus competencias pedagógicas, tales como organización del currículum, la construcción de evaluaciones, diseño de actividades, etc. ¿De qué forma han logrado conducir el proceso de enseñanza - aprendizaje en la asignatura de profundización considerando las diversas características de sus estudiantes?

    a. ¿Cuáles les permitieron impulsar de mejor manera el proceso de enseñanza-aprendizaje?
    b. ¿Qué otras competencias consideran ustedes le permitirían realizar un buen proceso de enseñanza-aprendizaje de estas asignaturas? ¿Por qué?

5. En base a las respuestas que entregaron en el cuestionario de autorreporte y considerando las tres dimensiones mencionadas didáctica, disciplinar y tecnológica) ¿Qué estrategias consideran que se podrían implementar para subsanar las dificultades presentadas para impartir la asignatura de profundización que se encuentran dictando actualmente? ¿Y qué estrategias consideran que se podrían implementar para potenciar sus fortalezas?

6. ¿Qué contenidos pueden ser aplicados en otros contextos para una mejor comprensión por parte de los estudiantes de la asignatura de profundización que imparten?

7. Si el establecimiento les brindara la oportunidad de elegir la asignatura de profundización de matemática a impartir, ¿Cuál sería la elección y por qué?

    a. ¿Qué competencias personales presentan afinidad con dicha asignatura que le facilita el proceso de enseñanza?
    b. ¿Qué les impide sentirse cómodos para dictar las otras asignaturas?

Categorización:

Pregunta	OE.1	OE.2	OE.3	OE.4
1	x			
2		x		
3			x	
4		x		
5	x	x	x	x
6				x
7	x			

Anexo 4: Consentimiento Informado Grupo Focal

CONSENTIMIENTO INFORMADO DE PARTICIPACIÓN
EN TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Usted ha sido invitado(a) a participar en el estudio llamado **"Estudio de caso para el diseño de un plan de acompañamiento para profesores de matemática que imparten las asignaturas de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas e Integrales de un establecimiento municipal de la comuna de Los Ángeles",** dirigido por el profesor Salvador Alarcón. El estudio tiene como objetivo general **diseñar y validar un plan de acompañamiento para docentes de matemática pertenecientes a un establecimiento municipal de la comuna de Los Ángeles que aborde las dificultades didácticas, tecnológicas y de conocimiento disciplinar, manifestadas al impartir las asignaturas de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas e Integrales**.

Este estudio se realiza en el marco del Trabajo de Titulación de **Francisca Albornoz, Nicolás Castro y Ellen Zúñiga**, estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemática de la Universidad de Concepción.

Por este motivo, se pide su colaboración, que consiste en **participar de un grupo focal**, cuyo objetivo es explorar las dificultades didácticas, tecnológicas y de conocimiento disciplinar que reconocen profesores al impartir las asignaturas de profundización Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas e Integrales.

La investigación es conducida por Salvador Alarcón, del departamento de Ciencias Básicas de la Escuela de Educación de la Universidad de Concepción, teléfono 43 240 5297, correo electrónico salvadoralarcon@udec.cl.

BENEFICIOS Y RIESGOS:
Este estudio tiene el beneficio de producir conocimiento científico para contribuir a la mejora en las prácticas de enseñanza en las asignaturas de profundización de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas.
A juicio de los investigadores, su participación en este estudio no conlleva riesgos ni consecuencias, ya que la actividad se llevará a cabo en el establecimiento educativo.

ALMACENAMIENTO DE LOS DATOS PARA LA CONFIDENCIALIDAD DEL PROYECTO:
La información recogida será ingresada a una base de datos codificada, la cual no permite establecer la identidad de las personas ni cualquier otra información que lleve a identificarlas. La base de datos sólo será manejada por los investigadores que desarrollan el proyecto.

LUGAR Y TIEMPO INVOLUCRADO:
La investigación se llevará a cabo el lunes 05 de diciembre de 2022 en el Establecimiento Educativo Liceo Bicentenario de Los Ángeles.

CÓMO SE USARÁN LOS RESULTADOS:
Los resultados del estudio serán usados solo para fines de la investigación. No se identificarán nombres de las personas ni de del establecimiento educativo. Toda divulgación se hará con propósitos educativos.

AUTORIZACIÓN
He leído la información proporcionada o me ha sido leída. He tenido la oportunidad de preguntar sobre ella y se me ha contestado satisfactoriamente las preguntas que he realizado. Consiento voluntariamente participar en esta investigación como participante y entiendo que tengo el derecho de retirarme de la investigación en cualquier momento sin que me afecte en ninguna manera.

Nombre participante: _______________________________________

____
Firma

Fecha: ___________________________

Anexo 5: Transcripción Grupo Focal

Moderador: Bueno le damos la bienvenida y las gracias por participar en nuestro grupo focal que se enmarca dentro de nuestra tesis de pregrado que la dirige el profesor Salvador. El grupo focal tiene como objetivo explorar las dificultades tanto didácticas, de conocimiento disciplinar o tecnológica que manifiestan ustedes, los profesores que imparten la asignatura de profundización en los electivos matemáticos. Esto es con el objetivo de diseñar y validar un plan de acompañamiento que aborde las dificultades que ustedes manifiestan. Entonces, para comenzar, les voy a pedir que se presenten, que nos cuente un poco de los años de experiencia que tienen en el sistema educativo y cuáles son las asignaturas de profundización que han impartido hasta el momento.

Profesor 1: Yo soy Profesor 1, me conocen, egresé el año 2021 pero en enero. Empecé a trabajar en marzo en el Liceo y sigo aquí desde marzo del año 2021. Este año impartí la asignatura de Limites, Derivadas e Integrales en alumnos de tercero y cuarto medio.

Moderador: ¿Solo es para tercer y cuarto año medio?, o sea ¿son secciones separadas?, porque ¿cuántos tercer y cuarto medio hay acá?

Profesor 1: Siete cuartos y seis terceros.

Moderador: ¿Y ahí los dividen por grupos?

Profesor 2: Sí.

Profesor 1: Pero fueron pocas personas que escogieron límites, 33.

Moderador: ¿Entonces era un solo grupo?

Profesor 2: Sí, son mezclados.

Moderador: ¿Y usted qué electivo ha impartido?

Profesor 4: Bueno yo soy Profesor 4, yo tengo muy poca experiencia en el sistema público, en realidad en un colegio, porque yo estaba trabajando en Santiago en un preuniversitario, y estuve como más de 10 años trabajando ahí y este sería como mi primer colegio o Liceo donde trabajo en forma constante porque estuve trabajando un par de semanas, un mes máximo, en otros liceos. Y el año pasado partí con un reemplazo, luego, después en septiembre con unos talleres, como que no se hizo mucho. Ah… y lo que pasó a fines del año pasado fue que empecé a reemplazar al Profesor 3, por eso yo hice el... empecé este año con estadística, porque estaba reemplazando al Profesor 3.

Moderador: El electivo de estadística.

Profesor 4: Claro, pero era porque estaba reemplazando al Profesor 3, pero no es un curso que me asignaron a mí. Y el Profesor 3 llegó como en junio de este año.

Moderador: ¿Y ese fue el único electivo que ha dictado hasta el momento?

Profesor 4: Claro, pero fue un reemplazo más que nada. Tengo muy poca experiencia en colegio, estoy aprendiendo, podríamos decirlo de alguna forma.

Moderador: ¿Profesor 3 y usted?

Profesor 3: Yo soy Profesor 3 y este es mi quinto año trabajando en el Liceo. La verdad es que pasé por los electivos que se han dictado acá: Pensamiento Computacional, Límites y Estadística este año.

Moderador: ¿Has dictado los 3 electivos?

Profesor 3: Los 3 electivos que hemos tenido hasta el momento.

Moderador: ¿Y el cuarto que no se ha dictado es por, netamente por los estudiantes?

Profesor 3: Lo que pasa es que nosotros teníamos la opción cuando iniciamos de ofrecer no todos, si no una selección de los electivos, y la primera vez ofrecimos límites y pensamiento computacional, este año se incorporó estadística y propusimos para el próximo año incorporar también geometría.

Moderador: ¿Dictar los cuatro al mismo tiempo?

Profesor 3: Claro, los 4 al mismo tiempo, pero eso obvio en base a lo que los estudiantes también escogieron, y se alcanzó a conformar al menos un grupo de cada uno.

Moderador: ¿Y eso lo deciden en un consejo de profesores? ¿O netamente el lineamiento es de los directivos?

Profesor 3: Dentro de lo que es el departamento, y en la reunión de departamento, nosotros proponemos cuáles tenemos la capacidad de dictar, en cuanto a los profesores cierto, los conocimientos y también los espacios que también eso se considera, entonces así nosotros propusimos a UTP dictar los cuatro y eso después pasa a la elección de los estudiantes, entonces a ellos se les comparte un formulario y ellos eligen y si tiene el quórum suficiente se dicta si o no.

Moderador: Ah, ¿y eso lo mandan por formulario y ellos deciden?

Profesor 2: Sí, y con cupos limitados.

Moderador: ¿Y cuánto es la cantidad de cupos?

Profesor 2: Por ejemplo 45, es que de nosotros son 45, pero por ejemplo de música son 20.

Profesor 3: Se establecía un mínimo, si no me equivoco eran 20.

Profesor 2: Pero en interpretación musical eran como 20 máximo por la disposición del espacio. Pero ponían un mínimo de 20 en general

Moderador: Y usted, ¿su nombre?

Profesor 2: Profesor 2, la única mujer.

Moderador: ¿Y qué electivos ha dictado hasta el momento?

Profesor 2: Pensamiento. Este sería el segundo año de pensamiento.

Moderador: ¿Pensamiento computacional y programación?

Profesor 2: Sí.

Moderador: Ahora, si yo les pregunto por el diseño, ¿qué les ha parecido el diseño que propone el Ministerio? Alguna percepción que tengan de él.

Profesor 3: Bueno, la verdad yo me he guiado bastante por lo que son los programas, sobre todo ahora último en estadística. El primer año en cuanto a límites, con otra profesora que lo dictamos, nos fijamos primero en las deficiencias que nosotros detectamos en nuestros estudiantes, las falencias, las carencias que tenían en el contenido también. Fue trabajado online, así que eso nos cortó mucho el avance, el progreso. Nunca hemos alcanzado a ver más allá de la primera unidad completa, o sea, la primera unidad la hemos visto completa pero no hemos llegado la segunda que tiene que ver con derivadas. Así que nuestro fuerte siempre fue nivelar toda la parte de funciones y álgebra que era una deficiencia que nosotros notábamos en los estudiantes. Una vez cubierto eso que nos llevaba, sobre todo cuando estuvimos online, prácticamente todo el primer semestre, quizás un poco más; empezar lo que es sucesiones, límites y después terminar con límites de funciones que es lo que alcanzamos a ver, pasando también entre medio por fractales.

Moderador: ¿Y cuando estaban online, qué aplicaciones ocupaban?

Profesor 3: Bueno el liceo trabajaba en común con lo que tiene que ver con Classroom, con Meet, las de Google, formularios.

Moderador: ¿Pero se limitan solo al tema de aplicaciones de videoconferencia o utilizaban algún recurso tecnológico adicional?

Profesor 3: Dentro de la asignatura, al menos en limites, nos apoyábamos harto en lo que es GeoGebra, sobre todo en la parte de funciones. Después, hay una aplicación, no me acuerdo bien cuál es el nombre, pero que calcula sucesiones, entonces esa también la utilizábamos y la mostrábamos. Como las dos principales.

Moderador: ¿Y esas son aplicaciones que los chiquillos descargaban directamente desde sus celulares?

Profesor 3:: Online, directamente online.

Moderador: Y si yo les preguntara ¿cómo estos recursos benefician a los estudiantes para adquirir conocimientos? ¿De qué forma lo pueden evidenciar?

Profesor 3: Yo creo que bastante, sobre todo lo que trabajamos online, a ellos les ayuda, les facilita porque están con el computador ahí. Ahora, siempre nos dábamos el trabajo de preguntar si es que contaban o no con computador, sobre todo en el inicio, no todos lo tenían, tenían teléfono, algunos tablet, entonces íbamos consultando y dentro de las realidades de los cursos íbamos aplicando una estrategia u otra, alguna herramienta u otra. Lo que sí, siempre nosotros compartiendo pantalla, se mostraba, explicando como se hacía, etc., y después hacíamos consultas y si es que no tenían y tenían acceso, les dejábamos alguna tarea con respecto a eso. Ahora, Profesor 2, que trabajaba con pensamiento, me intentaba apoyar a mí.

Profesor 2: Sí, pasa que en un principio, el primer año, nos guiamos por el programa con el Profesor 3, pero ya para el segundo, … el Gobierno hizo un programa para pensamiento, diferente, con las actividades ya hechas, entonces nos dimos cuenta de que habíamos hecho algo similar, pero hicieron un libro nuevo que se llama aprender a programar, no sé si lo han visto.

Moderador: Directamente, no.

Profesor 2: Es uno nuevo que salió este año y está todo, las 4 unidades listas, y esta con los tiempos, con las rúbricas, está todo para hacer. Ahí usamos varios programas como Meet, App Inventor, Scratch, pero todo en línea.

Profesor 3: Y ahí volviendo a su pregunta inicial, nos hemos guiado fundamentalmente por los programas, salvo esto que le comentaba yo de que tenemos como lineamientos, de acuerdo con el departamento, de lo que fue limites, ha sido estadística y lo que pretende ser geometría el próximo año, de hacer una nivelación fuerte de los contenidos de 7mo a 2do medio, que es lo que nosotros recibimos acá.

Moderador: ¿Los demás han ocupado algún otro recurso tecnológico?

Profesor 4: Yo la verdad es que no. Yo en estadística por lo menos, como estaba reemplazando a Profesor 3, traté de alargar, hice un repaso en realidad, no me guie por el programa, hicimos un repaso de todo lo que era estadística, estadística descriptiva más que nada y probabilidad.

Moderador: ¿Pero de lo visto hasta el momento de lo que llevaban este año?

Profesor 3: No, Mario hizo esta primera etapa que yo te mencionaba del refuerzo, de la nivelación.

Profesor 2: Ocupábamos harto Excel.

Moderador: Ya pero ahí tenemos un recurso tecnológico.

Profesores: Sí.

Moderador: Profesor 1, y tú ¿has ocupado algún recurso?

Profesor 1: Sí, o sea, yo trabajé en límites con... bueno, Profesor 3 contaba que él había hecho la asignatura de límites de forma online, donde ellos podían entrar a los computadores desde las casas y todo eso. Ya, yo trabajé de una forma bien parecida en clases, con ciertos contenidos obviamente porque no siempre se puede usar, pero trabajamos con tablets, el liceo cuenta con tablets, descargábamos aplicaciones como el GeoGebra, calculadoras gráficas más que todo, y trabajamos en clases, o sea, aprovechando que hay internet, no muy bueno, pero servía como para graficar, y la verdad es que sí, es súper útil sobre todo para los chiquillos, en realidad estar dibujando o gastando tiempo dibujando una gráfica en la pizarra que no queda bien hecha, es mucho más práctico usar los recursos tecnológicos.

Profesor 3: En estadística este año igual. Bueno el liceo tiene carros de tablets y también tiene un carro de notebook que yo lo utilizaba también, lo llevaba a la sala el carro de notebook para que tuvieran acceso a Excel, y cuando teníamos que investigar, porque el programa igual plantea harto la investigación en cuanto a los temas de estadística, los llevábamos a la sala de computación, o en su defecto con los mismos notebooks ahí, apelando a que el internet nos diera.

Moderador: ¿Y eso con qué frecuencia lo hacían aproximadamente?

Profesor 1: Cada dos semanas y últimamente casi todas las clases.

Moderador: Y si nos vamos al contexto de que llevamos tablets, llevamos computadores, pero ¿cómo lograban que los estudiantes no se desconcentran haciendo un mal uso de los recursos? Que realmente se concentraran en el trabajo que íbamos a hacer en la clase

Profesor 3: Eso yo creo que va un poco en la práctica que tenemos todos los colegas acá, de la supervisión constante, uno tiene que estar encima, tiene que dar las recomendaciones, tiene que dar una actividad acotada, que se solicite que se empiece en la clase y se termine, o fijo que empiece esta clase y se termina la otra, entonces va mucho en cuanto a la planificación del profesor y ese monitoreo constante que tenemos de costumbre yo creo, en el departamento, de estarlo haciendo. Al menos en mi caso era así.

Moderador: ¿Y los demás igual con actividades más acotadas?

Profesor 2: Si, pero yo les pedía avance. O sea, mostrar un producto y también en la sala de computación tenemos un programa que yo puedo ver la pantalla del chico, le puedo mandar mensajes, lo puedo monitorear, entonces le doy una advertencia, la segunda le apagaba el computador, todo su avance se elimina, entonces hasta que aprendan a trabajar. Eso es con los chicos más pequeños, porque los más grande ya saben.

Moderador: Profesor 3, y cuando estaban en virtualidad, ¿cómo lo hacían? Porque en virtualidad estamos en el tema de las plataformas digitales de video conferencia, y corremos el riesgo de la protección de datos, el buen uso de la información, ¿cómo promueves tú eso en los chiquillos?

Profesor 3: Bueno, ahí fue más complejo.

Moderador: Tomando en cuenta que los chiquillos estaban en sus casas donde no tenemos un control directo.

Profesor 3: Bueno el contexto de la pandemia yo creo que a todos nos pegó igual en los distintos liceos. De partida la participación no era el ideal, empezamos con 20 alumnos después de a poco, me refiero a los inicios de la pandemia, incluso a nosotros empezamos con algunos colegas solamente a experimentar y tratar de hacer clases por zoom, después ya el Liceo institucionalizó la plataforma de Classroom y Meet para trabajar, pero hicimos algunos intentos previos ahí tratando como de recolectar a los estudiantes, teníamos un quórum de unos 20-30 alumnos, eso fue después con el tiempo, cuando ya estaba todo más formal y exigiendo asistencia y todo el tema, como la primera parte, que ahí nos costó bastante, entonces si nos costaba que se conectaran, mucho más nos costaba que respondieran con las tareas y todo lo solicitado. Después cuando ya se instauró un correo institucional para estudiantes, cuando se puso a disposición Classroom para todos como exigencia, ahí ya podíamos fijar tareas y evaluaciones con fecha, entonces podíamos tener un registro de quienes enviaban y quienes no enviaban. Eso era una parte para ya más o menos controlar que participaran y fueran respondiendo. Ahora imposible yo creo evitar que ellos copiaran, que se filtraran información. Yo creo que ahí ellos aprendieron mucho de tecnología y como utilizar estas herramientas y plataformas.

Profesor 2: Aunque uno los bloqueaba, solamente de ese correo podían abrir, pero igual lo hacían.

Profesor 3: Claro, buscaban la forma de cómo hacerlo con medios, entonces siendo muy sincero ahí las notas subieron bastante y era muy complejo y era una realidad que todos asumimos en realidad y sabíamos que venía, entonces por ahí nos costó mucho. Ahora, ese primer año, al final de año, con otra profesora, en límites probamos una herramienta que nos permitía crear salas virtuales dentro de una misma llamada, entonces ahí logramos en algunas clases que ellos se comunicaran más y trabajaran en equipos, porque eso era un desafío grande. Siempre el profesor hablando y mostrando la pantalla y todos los estudiantes detrás sin saber que estaban haciendo, muchas veces, sino el 90% de las veces, con las pantallas apagadas. Entonces ahí logramos un avance que fue implementar esta nueva plataforma, pero también, bien exigente el tema.

Moderador: ¿Y hacen proyectos, por ejemplo, con otras asignaturas, o se limitan solamente a lo que el programa propone?

Profesor 3: Hasta el momento si hablo por las asignaturas de nosotros, nos hemos limitado yo creo que la mayoría al programa.

Moderador: Al programa, ¿Profesor 1 usted igual?

Profesor 1: Sí.

Moderador: ¿Todos netamente al programa? ¿Nadie interdisciplinario?

Profesor 3: Ahora hemos visto, como trabajamos en base al programa, sabemos que el programa plantea la interdisciplinariedad cierto, vienen proyectos armados como para hacerlos, pero todavía no los hemos abordado.

Moderador: ¿Y por qué no?

Profesor 3: Yo creo que nos falta ese paso, una yo creo que saliendo de pandemia nos costó organizarnos, eso es una primera. Este año quizás por de nuevo enfrentar la realidad de recibirlos y adaptarnos a lo que son las clases presenciales, que yo creo que también eso fue choque de nuevo, de realidad tanto para los estudiantes, traían otras dificultades que dejaron habilidades sociales, presentaban crisis de pánico, perdieron hábitos de estudio y cuanta cosa, entonces por ahí va para otro lado, y yo creo que es lo que nos queda, el desafío en delante de hacerlo, de armarlo.

Moderador: Gracias Profesor 3. Los demás, ¿creen que dentro de, por ejemplo, pensamiento computacional, limites, estadística, lo que alcanzaron a ver, hay contenidos específicos que puedan ser abordables en otras asignaturas?

Profesor 2: Sí, pero depende de la disponibilidad del otro colega. Es que uno puede hacerlo, pero depende del otro colega, que estemos a la par, si eso es lo más limitante.

Moderador: Ya, ahora, en las Bases Curriculares que son del año 2019, se proponen, no sé si lo han escuchado, habilidades del siglo XXI ¿De qué manera ustedes promueven estas habilidades del siglo XXI en los estudiantes?

Profesor 1: No me acuerdo exactamente cuáles son las habilidades del siglo XXI.

Moderador: Les nombro algunas, por ejemplo: la creatividad, la innovación, el pensamiento crítico cierto, la comunicación y colaboración que era lo que decías tú.

Profesor 3: Si me permite echarle la culpa altiro a alguien para que responda, yo creo que en pensamiento computacional se explotó harto la creatividad, mucho, ya que Profesor 2 nos puede referir de los trabajos que hicieron los estudiantes.

Moderador: ¿Y de qué forma lo hacías?

Profesor 2: Por ejemplo, les dábamos libre elección. Por ejemplo, recrear un juego clásico, hacían pac - man, Snake, y hacían su propia versión del juego, hacer su propia cara en la cara de la serpiente y así editaban su propio videojuego

Moderador: ¿Y eso lo hacían cómo?

Profesor 2: En pensamiento.

Moderador: ¿Pero con algún software en específico?

Profesor 2: Sí, con Scratch. Nos sirvió harto porque es en línea, gratuito y no pesa nada y es más fácil porque da mayor acción a todo. Nosotros hicimos juegos en Excel, pero tenían limitaciones, no se podía hacer toda la variedad de juegos que los chiquillos quisieran hacer, entonces ahí fue más difícil de hacer.

Moderador: ¿Y tú tenías conocimiento de ese software?

Profesor 2: Si, sí.

Moderador: ¿Habías trabajado con el antes?

Profesor 2: Si, en la u nos pasaron Scratch.

Profesor 3: Nos obligaron a una capacitación.

Moderador: Pero también hubo algo institucional que los llevaba a perfeccionarse.

Profesor 2: Eso dijeron, yo no estuve, pero tienen toda una certificación de Scratch. Si es como lego, como jugar, con colores, con los colores van leyendo.

Profesor 1: Programación en bloque.

Profesor 3: Y para no quedar tan corto en la respuesta, recreaban aplicaciones.

Profesor 2: Aplicaciones de teléfono, de recrear la típica aplicación por ejemplo de Paint para el teléfono.

Moderador: ¿Profesor 1 y en límites?

Profesor 1: La verdad es que fue un año complicado porque bueno … Profesor 3 decía que online fue complejo el tema de la supervisión de que los alumnos realmente pusieran atención en clases y todo eso. Yo lo vi en la sala porque ahí en realidad para ellos no es imposible, pero es un poco más complicado el copiar o el conseguirse las respuestas cuando uno los evalúa, entonces el avance fue muy muy lento, lentísimo. De hecho, tercero y cuarto medio no habían visto funciones, no entendían lo que eran las funciones, entonces la primera unidad antes de ver lo que es límites cierto… emm… que fue a lo último que llegamos, límites, sucesiones y al final límites de funciones… trabajamos también con fractales, yo creo que ahí ellos afinaron harto la creatividad. Lo otro es que yo los mandaba harto a hacer como tareas de investigación, donde tenían que buscar información, tenían que ver que la información fuera verídica…

Moderador: ¿De qué forma lograbas que los chiquillos realmente buscaran información, por ejemplo, no en rincón del vago, por decir así?

Profesor 1: Les pedía la bibliografía, no les pedía obviamente que justificaran con norma APA ni nada, pero sí les pedía la bibliografía y hacía hincapié en que yo iba a revisar frase por frase, que no estuviera copiada y pegada, pero al final igual es complejo porque es más trabajo para uno. Pero, o sea a mí eso fue lo que me costó, el tema de la nivelación donde los tenía de forma presencial, había muchos contenidos que no habían visto o a lo mejor los vieron pero como estaban de forma online no los aprendieron en realidad.

Moderador: ¿Esa nivelación fue en las tres asignaturas?

Profesor 2: Claro, lo mío fue … ¿ofimática? … Sí, ofimática.

Moderador: ¿Y el tiempo aproximado que demoraron en nivelar contenidos o que ustedes dijeran: ya sí, ahora puedo comenzar a ver los contenidos del programa?

Profesor 2: Depende, casi un semestre.

Profesor 1: Fue muy difícil, o sea, en septiembre ya habíamos nivelado.

Moderador: O sea es más limitación en cuanto al conocimiento de los chiquillos, porque tecnológicamente hablando tenemos implementos del establecimiento, conocimiento de ustedes…

Profesores: Sí.

Moderador: Ya, súper. Ahora si yo les pregunto, considerando sus competencias, que ustedes creen, pedagógicas, como la organización del currículum, el tema de los programas de estudio, la construcción de evaluaciones … ¿de qué forma lograban conducir el aprendizaje de los chiquillos, de los estudiantes… de sus estudiantes? ¿Cómo lo hacían con la creación de las actividades? Miraban por ejemplo el plan, buscaban información adicional, llegaban a un producto final … ¿cómo hacían ese proceso?

Profesor 2: Bueno en mi caso, con Profesor 3 mirábamos la actividad y la enfocábamos al interés de los chicos. Por ejemplo, si creábamos una aplicación que decía el programa: "llegar a una aplicación matemática", por ejemplo, que sea graficar funciones y cosas así, empezamos por lo más básico y ahí íbamos subiendo hasta llegar a una aplicación dada por el gobierno que quería que supieran.

Moderador: ¿Y para eso consideraron las características de sus estudiantes?

Profesor 2: En presencial sí, pero en pandemia realmente no, porque nosotros no conocíamos a los chicos, hasta este año, que conocimos a los chicos que le hicimos clases el año pasado, no sabíamos quiénes eran.

Profesor 3: Si no es presencial está el factor de que al armar los grupos tengo estudiantes de distintos cursos que a veces no les he hecho nunca clases, entonces conocerlos por ahí era difícil. Ahora en vivo, claro, se puede considerar ya de la segunda unidad o que se yo, uno ya conoce a sus estudiantes, entonces ahí se puede. Ahora si tú me preguntas por estadística, este año yo netamente las actividades seleccionadas del programa, tratando de seguir la linealidad que ahí se presentaba … y eso … y poca la adaptación ... más que nada tomándolas en base a eso y trabajándolas. Ahora hablando de adaptación, podría ser al verificar yo y saber cuáles eran las falencias, los vacíos de contenido que ellos tenían y ahí dar tiempo de reforzar aquello antes y después retomar la actividad, yo creo que por ahí podría ser.

Moderador: Ahora, si nos vamos como a actividades en particular ¿cuáles creen que eran más beneficiosas para los chiquillos? En el tema de aprendizaje.

Profesor 3: Yo creo que los electivos plantean un cambio de paradigma para ellos, porque ellos están acostumbrados a una clase más dirigida, más individual, que es la que nosotros solemos llevar hasta segundo medio… y el electivo los descuadra porque los manda a investigar, los manda a trabajar en grupo, los manda a reflexionar y, por ejemplo, por el lado de la estadística, tenían que aplicar mucho lo que es la interpretación. Interpretación de datos más allá del contenido, que a veces el programa asume como que sabían. Entonces, yo creo que por ahí va el tema, en cuanto a la interpretación, cambiaba la cosa.

Moderador: ¿Creen ustedes que hay alguna otra competencia que, personalmente hablando, fue un beneficio para ustedes? Quizás poseerla para poder llevar a cabo la asignatura, alguna competencia más personal quizás.

Profesor 3: Mira… Sí. Yo creo que… voy a hablar un poco de los chiquillos … mmm … yo creo que Profesor 1 estaba bastante fresco en todo lo que era el conocimiento de la parte del álgebra, de funciones… Quizás claro, en lo teórico, por ese lado de ahí. En cuanto a Profesor 2, por ejemplo, ella tiene un bagaje más mayor que nosotros en todo lo que es tecnológico, entonces le fue más sencillo adecuarse a eso y el primer año, hasta cierto punto, íbamos bien y después yo le decía: "¿Profesor 2 qué vamos a hacer ahora?", entonces ahí como que ella guiaba un poco más la asignatura. Ahora si pregunta por mí, no sé jajaja. Pero yo creo que la capacidad a lo mejor de adaptación que uno pueda tener un poco de la experiencia de haber pasado por todos los electivos, de más o menos saber cómo se enfocan y también la confianza que te da el que ya es mi quinto año trabajando en el liceo, entonces sé más menos cómo es y cómo se quiere aplicar la visión, la misión de la institución y cómo queremos trabajar con los estudiantes.

Moderador: ¿Y se retroalimentaban entre ustedes? Por ejemplo, pedían la opinión de no sé… de acá cierto, del profesor o de Profesor 1 en cuanto a lo teórico, de la profesora en cuanto a lo tecnológico… ¿igual buscaban instancias como para compartir su conocimiento?

Profesor 1: Sí, pero no sé si tan… todos… yo creo que de forma…

Profesor 2: Personal.

Profesor 1: Claro… entre uno y otro, pero no como …

Moderador: No como departamento, en una instancia más formal.

Profesores: No.

Profesor 3: Mira, institucionalmente está establecida nuestra hora de departamento, que son los martes, y ahí está como la opción de compartir. Ahora, no todos los colegas se sumaron al desafío de dictar los electivos, unos derechamente se restaron y por equis motivo dijeron nosotros no los vamos a hacer, entonces eso ya nos cerró un poco la puerta de con quién trabajar. Pero los que sí estábamos sí, sobre todo porque son cosas nuevas que estamos en cuanto a prueba y error a veces, sobre todo yo hablo por pensamiento, que …

Profesor 2: Fue lo más difícil yo creo, para nosotros.

Moderador: Ahora si yo les preguntara… quizás no se pueda responder, pero ¿las otras personas por qué decidieron bajarse?

Profesor 2: A ver… es que empezar una asignatura nueva sin tener nada de base es difícil …

Profesor 1: Y bueno… yo creo que directamente algunos por la edad por así decirlo, porque no sé … en palabras de ellos fueron contenidos que vieron hace mucho tiempo, entonces tienen que volver a estudiar para poder dictarlo y ya están con el tiempo del retiro de hecho.

Profesor 3: Yo creo que ahí es donde tienen un fuerte de la tesis, en la investigación que están haciendo ustedes, porque muchos colegas, como dice mi colega, se restan por lo mismo, por ese miedo a dictar algo nuevo, al tener que actualizarme, al tener que meterme en herramientas tecnológicas que si o si, independiente de la asignatura, las 3 … las 4, lo piden, requieren utilizar por las habilidades que tu decías que hay que desarrollar por el siglo XXI que lo solicita. Entonces eso hace que se resten un poco. No todos, no todos… porque tenemos colegas de bastante edad que también se suman, les cuesta mucho más por supuesto, pero se suman a la tecnología y están ahí intentando y lo tratan de hacer. Pero yo creo que ahí ustedes tienen un campo bien fértil para ir capacitando.

Moderador: En cuanto a las personas que quedaron, por ejemplo, que dijeron: ”ya sí, somos capaces de dictar los electivos” ¿el liceo decidió … no sé… dijeron: “Profesor 1 va a dictar este electivo o tú vas a dictar este otro” o fue “yo puedo dictar esto”?

Profesor 3: Ambas cosas. Yo creo que es una propuesta y una decisión de ellos.

Profesor 2: Piden la opinión al jefe de departamento me imagino.

Moderador: Pero hubo una instancia donde yo sí soy capaz de … o me siento capaz de dictar un electivo.

Profesores: Claro.

Profesor 3: Por ejemplo, si tú me preguntas la primera vez en límites, cuando estábamos diciendo el primer año los electivos … nos ofrecimos, dijimos: “yo puedo dictar este” y ahí después tuvimos el respaldo del jefe de departamento y se propuso a UTP y se dijo “sí, bien, vamos”.

Moderador: Ahora, de las 3 grandes dimensiones (conocimiento del contenido, didáctico y tecnológico) ¿en cuál se sienten más preparados ustedes como profesores para dictar los electivos, o sea las asignaturas de profundización?

Profesor 2: ¿En general, cierto?

Moderador: En general. Es que si nos vamos a lo particular quizás hay asignaturas que son más teóricas que otras, y hay otras en que yo… por ejemplo, tu asignatura es más tecnológica por así decirlo. Por lo tanto, puede variar la dimensión donde yo me voy a sentir más cómodo o no… por eso sería bueno compartir la visión de cada uno.

Profesor 3: Bueno yo creo, siendo muy honesto, yo creo que siempre las primeras dos unidades las dicto sin problema y ya la tercera y la cuarta ya tendría dificultades.

Moderador: ¿Por qué esas dificultades?

Profesor 3: Hablo de todas las asignaturas … hablo por límites, por estadística, pensamiento fue un desafío completo porque ahí desde la primera me dediqué el verano completo a estudiar, al sacar una aplicación y aprender cómo se hacía.

Moderador: Con respecto a lo que tú mencionas ¿tuvieron que estudiar, sintieron que tuvieron que volver a estudiar …?

Profesores: Sí.

Profesor 2: En febrero o enero nos juntamos. Nosotros dependemos de la lógica matemática, entonces los chicos nunca han visto lógica en el liceo. O sea, aplican lógica pero no saben lo que es, de ahí aplicar una función en Excel, que el sí condicional fue un tema que íbamos a estar un mes con eso … no es llegar y hacer una aplicación por ejemplo.

Moderador: ¿Y eso enfocado más a lo del conocimiento más que nada? Como a reforzar los conceptos que vimos en la universidad …

Profesor 3: Sí, y no solo en verano, semana a semana, preparar el material, siempre. Porque cambia el enfoque, no es solo manejar un contenido en específico, tal definición, tal teorema …

Profesor 2: Es saber dónde aplicarlo …

Profesor 3: Sino que como te decía, en estadística, una interpretación. Y para interpretar tengo que hacerlo con … es una habilidad superior. Entonces, no basta con que yo me sepa la materia, no basta con conocer.

Moderador: ¿Y las otras dos unidades, por qué … o sea, por qué esa dificultad para impartirlas?

Profesor 3: Claro, yo lo decía ahí por … acojo el comentario de los colegas más antiguos … materia que quizás no vi hace tanto tiempo como ellos pero que sí vi hace tiempo, que bien no recuerdo, quizás bastante responsabilidad mía por mi formación y por cómo fui yo como estudiante en la universidad y también un poco de a lo mejor de cómo se abordó en la universidad, puede ser. Me refiero en cuanto a lo que es cálculo, integrales en profundidad, aplicaciones de las integrales, aplicaciones de las derivadas; en cuanto a estadística es la parte inferencial yo creo, la que me quedaría dando vueltas.

Moderador: ¿Sienten que varía un poco lo que tuvieron con respecto a la formación teórica en cuanto a lo que ahora implementamos en los electivos o en las asignaturas de profundización?

Profesores: Sí.

Moderador: ¿Por qué?

Profesor 3: Yo creo que sí, bastante. Porque volvemos a un estilo más clásico en la universidad cuando yo lo ví, de conocimiento, teorema, aplicación. Pero acá te dan vuelta … te dicen no es necesario tal vez que el estudiante se aprenda todas las formas de derivar que existen, sino que tú le puedes facilitar una calculadora cierto, que te calcula la derivada, pero él tiene que saber dónde se aplica esto y cómo se interpreta. Entonces no, nosotros en la universidad yo perdí quizás un mes completo en aprender a derivar con cada una de las reglas, cómo demostrarlas y todo el tema, pero acá no es eso, ya se da por hecho, él lo puede calcular con una herramienta pero ya … ¿dónde lo aplicamos, qué sacamos de esto, dónde está la interpretación?

Profesor 1: En estadística es lo mismo…

Profesor 2: Es que eso es como en todos.

Moderador: ¿Y en pensamiento computacional ocurre algo similar o hay una pequeña variación con respecto a los otros?

Profesor 2: Similar, pero uno tiene que hacerlo un poco más sencillo a los chicos, porque por ejemplo uno no se tiene que aprender todas las funciones de Excel de memoria, si Excel tenía ahí mismo… uno coloca es igual, la fórmula y aparece como el torpedo de qué hay que colocar en cada cosa. Saber interpretar lo que dice eso… eso es lo complicado para los chicos, les costaba darse cuenta que ahí estaba la respuesta.

Moderador: Ahora ¿sientes que hay algún beneficio con respecto a las demás asignaturas que tú dictas?

Profesor 2: Bueno, es que más es porque nosotros sacamos un producto tangible, una aplicación, algo que ellos vean. En cambio, en límites, interprete una integral o un límite, pero no es tan tangible como nosotros. Donde nos unimos fue cuando hicieron fractales, nosotros hicimos en Scratch fractales.

Profesor 1: Claro, es algo más concreto.

Profesor 2: Claro, más concreto, fue como lo único.

Moderador: Y ahora, el hecho de que los chiquillos… bueno estas generaciones son mucho más tecnológicas con respecto a las anteriores ¿beneficia un poco en el aprendizaje que ellos tienen?

Profesor 3: Sí… quiero hacer un pare ahí, porque al decir tecnológicos es porque tienen más acceso a la tecnología, pero no que sean usuarios responsables.

Moderador: Ahí quizás volvemos a lo anterior, a de qué forma yo promuevo que los chiquillos sí hagan un uso responsable de los recursos tecnológicos con los que estamos trabajando.

Profesores: Claro…

Profesor 1: Podemos hablar de que son más tecnológicos, pero en realidad… en redes sociales.

Profesor 2: Hasta ahí llegamos… mandan un correo… un WhatsApp…

Profesor 1: O sea, nosotros lo vemos en ese ámbito.

Moderador: ¿Pero facilita un poquito, quizás, el que sea una generación más tecnológica?

Profesor 3: Sí, aprenden más rápido.

Profesor 1: Son nativos.

Profesores: Claro, nativos digitales.

Profesor 3: Pero, por eso fue necesaria la nivelación de ofimática que decía Profesor 2 en pensamiento. O sea, que aprendan a hacer un Word, un Excel, un Power Point. Que uno daba por hecho que sabían y no.

Profesor 2: Que sea todo automático. Por ejemplo, la típica de escribir el índice, que en tercero y cuarto medio hacían un índice con los puntitos, viendo que todos queden alineados.

Moderador: Y ahora si yo les pregunto ¿con respecto a cuál dimensión se sienten más cómodos en la asignatura que imparten?

Profesor 3: ¿Me repite las tres dimensiones?

Moderador: Conocimiento disciplinar, didáctica y dimensión tecnológica.

Profesor 3: Ya, voy a enumerar las 3 yo creo. Didáctica …

Moderador: ¿Te sientes más cómodo…?

Profesor 3: Curricular y por último conocimiento.

Moderador: ¿Y acá?

Profesor 2: Sí… yo usaría… igual la didáctica primero porque es más sencilla para nosotros, porque a lo mejor, a diferencia de otros profes, nosotros estamos acostumbrados a innovar algo nuevo en la sala. No seguir con lo mismo o la forma en que ellos enseñaban, por ejemplo, tal contenido. Hacer programas, hacer proyectos, para nosotros se nos hace un poco más sencillo.

Moderador: ¿Y eso depende más por la formación o habilidades personales?

Profesor 2: No sé … no sé si la formación, porque bueno, no todos venimos de la misma universidad ni hemos estado los mismos años. Por ejemplo, nosotros dos, es ¿un año de diferencia? …

Profesor 1: Sí, y diferente malla …

Profesor 2: Entonces yo tuve más ramos de física I, física II, electrónica… entonces yo tenía más conocimiento que Profesor 1 en esa área.

Profesor 1: Claro, o sea, nuestra malla, que es la misma de ustedes cierto, es más fuerte en lo que es didáctica.

Profesor 2: Claro.

Moderador: ¿Y Profesor 1, si tuvieras que categorizar …?

Profesor 1: Me cuesta … yo diría que … didáctica igual… didáctica.

Moderador: ¿Y la que más te costaría o crees tú que es en la que tienes más dificultades a la hora de implementar un electivo?

Profesor 1: Mmm…

Moderador: Si vamos haciendo un recordatorio de lo que respondieron en el cuestionario, en conocimiento disciplinar en el área de límites derivadas e integrales… ¿cuántas personas lo importen, una? Dos … ¿Tú igual lo impartiste?

Profesor 3: O sea este año no.

Moderador: Lo dictaste, o sea años anteriores, pero lo dictaste cierto.

Profesor 3: Sí.

Moderador: Ya, dos. Dentro de lo que es conocimiento disciplinar en límites, derivadas e integrales había un ítem que presentaba dificultades o que estaban en desacuerdo a sentirse capaz o que no estaban en acuerdo ni en desacuerdo. En cambio, en probabilidades y estadística presentaban mayor cantidad de indicadores que presentaban dificultades. Entonces, por eso es más que nada la pregunta. Si tuvieran que categorizar ¿en cuál creen que: "ah no, yo me siento más preparado en la tecnológica porque quizás mi formación tecnológica fue mayor, en cambio en conocimiento disciplinar no me sienta tan preparado porque (como mencionaban ustedes) tuve que volver a recordar conceptos, estudiar quizás un mes antes del ingreso a clases para tener los conocimientos frescos…"? Entonces, hacia eso va enfocada la pregunta ¿en cuál creen que están mejor preparados que en otra?

Profesor 1: No yo creo que estoy mejor preparado en conocimiento disciplinar.

Moderador: ¿Conocimiento disciplinar?

Profesor 1: Sí.

Moderador: ¿Y en la que más presentarías dificultades?

Profesor 1: Bueno yo lo veo en la asignatura … porque generalmente el programa que más utilizo o que más manejo es el GeoGebra nomás. Entonces yo diría que en la parte tecnológica. A pesar de que… no estoy diciendo que el GeoGebra sea un programa que … porque yo lo encuentro una herramienta genial …. pero siento que no sé, me falta más …

Moderador: ¿Quizás ampliar la gama de recursos que podamos abordar?

Profesor 1: Sí, claro.

Moderador: Porque generalmente nos limitamos a los que nosotros también somos capaz de aplicar.

Profesor 3: No sé, ahí discrepo.

Moderador: ¿Por qué?

Profesor 3: Yo discrepo porque no es necesario tener un abanico tan grande, sino quizás profundizar en el que se tiene.

Moderador: Ya.

Profesor 3: Y que eso…

Profesor 2: y eso aprovecharlo.

Profesor 3: GeoGebra por ejemplo, te da un abanico inmenso coma puedes conectar con Excel y con otras tantas cosas, no sé. De todo. Entonces no creo que la respuesta sea el tener mucho y poco de mucho, sino que yo creo que es seguir profundizando en lo que se utiliza y potenciar eso. Por lo tanto tener una para mí yo creo que puede ser bueno, suficiente y quizá no prescindir de más.

Profesor 2: Claro.

Profesor 3: Ahora, no es la única herramienta tecnológica que él utiliza, él utiliza presentaciones, cierto, puede utilizar las tablets, puede utilizar aplicaciones por ahí que también son otras, entonces no, no, no creo que esté ahí la falencia. En cuanto a lo curricular yo creo que un poco la experiencia y el trabajo con los años te lo va dando porque terminas aprendiendo que se yo el currículum de memoria, sabes a lo que vas, te sabes cómo podrías manejarlo, entonces…

Moderador: Aparte…

Profesor 2: Hay una diferencia po’, entre nosotros y el Ministerio.

Profesor 3: Claro.

Profesor 2: Uno duplica, po’, por eso.

Moderador: Aparte de lo que son los programas de estudio, de lo que mencionaba usted, ese libro que decía, aprender a programar, ¿No?

Profesor 2: Sí, aprender a programar.

Moderador: Ya, ¿Buscaban algún otro recurso adicional para poder ejecutar las actividades o planificar actividades o solamente me enfocaba en lo que era programa?

Profesor 2: Ah, code, code que igual era un programa, lo sugería el programa que es como, es como un aula virtual pero con las guías ya hechas.

Moderador: Ya.

Profesor 2: Entonces yo podía monitorear a cada uno en qué porcentaje van.

Profesor 3: Pero es que ahí, en ese punto…

Profesor 2: Sí, como...

Profesor 3: Ahí, en ese punto quiero darle un punto al ministerio esta vez…

Profesor 2: Un punto.

Profesor 3: … que ofrecían dentro de la porque ofrecían dentro de la el término del capítulo una linkografía, una bibliografía que consultar aparte, entonces a pesar de… esta vez es de las pocas veces yo creo que que hicieron un buen trabajo en cuanto a los electivos porque vienen actividades hechas, vienen con formas de evaluar, vienen con sugerencias, lo que sí a lo mejor están al debe es que no vienen con el solucionario, o sea a veces, a uno le queda un poco a pero viene con todo eso y con recursos anexos que uno puede ir consultando, así que yo creo que si uno se guía por ahí puede sacar más, ya, no es como tan necesario. Hay una frase que quizás no me gusta mucho pero quizás aplica aquí, qué dice y que a lo mejor hicieron el programa a prueba del profesor.

Moderador: A prueba de profesor.

Profesor 3: Claro, para que cualquier profesor lea y diga: “ah, tengo que seguir esta línea tengo que aplicar esta actividad, tengo aquí la prueba, tengo aquí la rúbrica para evaluar, bueno, y si me falta más busco en esta bibliografía”.

Moderador: Ah ya. Ahora, ¿Existía alguna supervisión por parte de ya sea su jefe de departamento o de algún directivo de lo que yo he llevaba a cabo en los electivos? ¿O quedaba netamente a disposición de cada profesor?

Profesor 3: Lo que ocurre es que en estos últimos 2 o 3 años el jefe de departamento no ha dictado la asignatura, no sé si cuando fue la profesora …

Profesor 2: Sí, pero...

Profesor 3: Cuando dictamos límite…

Profesor 2: Pero ahí no estaba el profe… po’. Estaba haciendo el otro electivo.

Profesor 3: No pero ahí, … No me acuerdo si fue el profe… o la profe...

Profesor 2: No po, si la profe…

Profesor 3: Cuento corto que puede que una sola de las veces el jefe de departamento haya dictado junto con nosotros, entonces para nosotros es nuevo. Es nuevo, todo es nuevo, estadística se ha dictado sólo este año y aprendimos esto que por varias situaciones yo no estuve, entonces Profesor 4 y yo tratábamos de sacarlo a flote. Límites sea se ha dictado un par de veces, pero por equis motivo tampoco hemos podido avanzar mucho. Pensamiento yo creo que ha sido el que ha tenido un recorrido más profundo y geometría viene entonces no tenemos sobre qué evaluar, seríamos nosotros mismos que podríamos evaluarnos con una nota, yo por ejemplo en estadística que debe este año, bastante, siento que hicimos lo que se pudo pero siento que pudimos haber sacado mucho más.

Moderador: ¿Qué límites sientes que encontraste?

Profesor 3: Eh, más que nada, de salud. Que yo planteé por un problema de salud grave que tuve entonces falté el primer semestre y dentro de eso se le informó a Profesor 4 de un día para otro: "oye sabes que tienes que dictar esta asignatura," entonces tampoco es su responsabilidad haberla preparado más a profundidad, po, entonces él nos colaboró mucho en lo que fue repaso y reforzamiento de contenidos, entonces yo empecé a trabajar el segundo semestre, recién con la primera unidad, la primera unidad se vio a fondo completa, que es lo que más recuerdan los chiquillos sobre todo aprendieron lo que es interpretación de gráficos y todo el tema de tablas.

Moderador: O sea cuesta tener una cobertura curricular de…

Profesor 3: Sí.

Moderador: ...de las asignaturas. ¿Y los demás que dicen? ¿Encontraron alguna limitación que digan ustedes, sabes que hay esta cosa en específico, que tengo problemas para poder llevar a cabo la…?

Profesor 1: No, lo que comentaba denante, los conocimientos previos, pero yo creo que más que todo por el contexto de pandemia toma porque muchos conocimientos que…, muchos contenidos que no se vieron en años anteriores. Y, igual lo vemos en el currículum de la asignatura de matemática así, quedamos muy al debe.

Moderador: ¿Creen que tienen habilidades que potencien los electivos?

Profesor 1: ¿Nosotros?

Moderador: Sí, lo que decías tú por ejemplo, yo tengo mucho conocimiento disciplinar, por lo tanto, eh tengo quizás una afinidad con este electivo más que con el otro.

Profesor 2: Yo creo que es eso lo que han utilizado para designarnos los electivos, a mí me preguntaron, no me acuerdo si me preguntaron. Decide, ¿Aceptas o no aceptas? Una cosa así, no fue como…

Moderador: Fue más opcional.

Profesor 2: Claro, no que yo lo haya pedido. Ellos vieron… determinaron.

Profesor 3: Claro, eligieron las personas más o menos acorde… a la asignatura.

Moderador: A ver, yo creo que ya para ir terminando, si nos enfocamos a eso, como a las habilidades personales, y si el liceo les diera la oportunidad de decidir, sabes que ¿Qué asignatura de profundización quieres dictar?, ¿Cuál elegirían?

Profesor 3: Yo me iría por Geometría, mi primera opción…

Moderador: ¿Por qué?

Profesor 3: …después el de estadística. Tengo más afinidad, creo que la geometría es lo que más me gusta.

Moderador: ¿Qué competencias personales crees que tienes, que tienen afinidad con la asignatura?

Profesor 3: Eh, yo creo que las habilidades netas que tienen que ver con el pensamiento geométrico. Quizá también un poco de conocimiento de la teoría de la didáctica en cuanto a cómo trabajar la geometría. Eh, también los años que la he dictado acá, que más menos, manejo ya todo lo que tiene que ver hasta segundo medio que es el fuerte que nosotros trabajamos, y también que conozco herramientas tecnológicas con las que la puedo trabajar, ya sea GeoGebra, que es la que me gusta, que insisto, uno puede hacer de todo con eso.

Moderador: Sí.

Profesor 3: Así que yo creo que va por ahí. En segundo lugar, quizás continuar con estadística, pero más como un poco porque la hice este año, y desafío personal, porque sé que es un punto que tengo que mejorar.

Moderador: ¿Profesora?

Profesor 2: Em, yo seguiría con pensamiento, pero me gustaría como un desafío diferente.

Moderador: ¿En la asignatura?, ¿O con respecto a otra asignatura?

Profesor 2: No, no, no, en otra asignatura, como límite, o sea, me llama la atención. Siempre me ha llamado la atención limite.

Moderador: O sea, si tuvieras que escoger…límite o pensamiento.

Profesor 2: Ta' difícil.

Moderador: Sería como indiferente.

Profesor 2: Claro, ta' difícil.

Moderador: ¿Y qué habilidades crees que tienes, que tienen afinidad con esas asignaturas que te permiten llevarlas a cabo de buena manera?

Profesor 2: ¿Cómo?, ¿La nueva o pensamiento?

Moderador: En ambas.

Profesor 2: No s… Bueno, como ya como sería la segunda, la tercera vez que la dicto, igual todos los años uno lo hace diferente, por ejemplo todo lo que vimos en pandemia, lo vimos ahora hasta agosto con los chicos, entonces como que todo fue nuevo, entonces me gustaría de nuevo… eh… otro desafío diferente puedo cambiar, como ir rotando, una cosa así. Para no repetir, no repetir, sino hacerlo de nuevo, con otros chicos, otra asignatura, Otros tendrían el desafío de hacer pensamiento a lo mejor, agregan otras cosas que yo no agregué por ejemplo.

Moderador: Y personalmente, ¿Qué habilidades crees que posees que te hace que esas asignaturas si sean las que puedes dictar?

Profesor 2: Mmm… No sé, como buscar soluciones, porque uno… buscamos harto para poder ver qué programa era mejor… ya si no lo sé, por ejemplo, code no lo conocía, yo tuve que buscar hasta que encontramos algo que nos sirviera.

Moderador: Profesor 1, si tuvieras que escoger, si el liceo te dijera Profesor 1, Ehh, ¿Cuál es la asignatura de profundización que quieres dictar?

Profesor 2: Ninguna.

Profesor 1: Eh, yo creo que volvería a dictar límite, y en segundo lugar, estadística, pero yo creo que igual por lo que dice Profesor 3, por desafío personal, porque creo que estoy un poquito débil en estadística, entonces para mi igual sería un desafío, tengo que prepararme, tengo que estudiar, recordar cosas que…

Moderador: ¿Y crees que tengas habilidades personales que se condigan con dictar esas asignaturas?

Profesor 1: Mmm… En límite, yo creo que sí, no sé, siento que, bueno, en mi formación en la universidad me destaqué en, en esta asignatura de cálculo, eh, por eso decía denante que siento que mi fuerte es el conocimiento disciplinar.

Moderador: ¿Profesor?

Profesor 4: Eh, bueno, primero que nada, quiero decirte algo, yo, eh le dije al profesor que no tenía mucho que hacer acá, porque yo no hice nada del ramo de profundización, ya pero te voy a responder igual.

Moderador: No hay problema.

Profesor 4: Pero, te voy a responder, eh, yo creo que límite, también, pero más que nada por el conocimiento que tengo en límite, porque como te dije anteriormente, estuve en un preuniversitario, eh, y ahí a lo mejor, eh, no sé po, no tenía como la opción de avanzar un poco más po, nosotros teníamos contenidos acotados, pero si lo veíamos todo porque teníamos contenido de primero a cuarto medio. Y cuando llegué ahora al liceo, por ejemplo, me di cuenta que no se ven los contenidos de primero a cuarto medio, o sea, faltan contenidos. eh…

Moderador: ¿Qué se dan como por asumidos?

Profesor 4: ¿Ah?

Moderador: ¿Que se dan por asumidos?

Profesor 2: No.

Profesor 4: Yo creo que no se alcanzan a ver, o hay algunos profesores… no hablo solamente de este liceo, sino de todos los que he trabajo que simplemente, no… le hacen el quite. Sobre todo, geometría.

Profesor 2: Sí, geometría y estadística.

Moderador: ¿Y geometría lo abordan dentro de la unidad de matemática o se aborda como una…?

Profesor 2: Dentro de la unidad.

Profesor 4: Y ese quizás sea el otro, geometría, porque Profesor 3 estaba hablando de que.., este otro año quizá vamos a ver geometría, también es un tema que me interesa harto y me gusta, geometría.

Moderador: Ya, es que pongo el caso, por ejemplo, el liceo donde yo trabajo, la asignatura de geometría es una asignatura aparte, entonces se libera…

Profesor 2: Lo que pasa es que…

Profesor 1: Lo que pasa es que, eh, como nosotros somos Liceo Bicentenario, eh, no, nos guiamos por una… ¿Como se llama esto?

Profesor 2: Una red de contenidos.

Profesor 1: Una red de aprendizaje, claro, y esas están divididas en unidades, entonces en las unidades nosotros ya sabemos que contenidos se van a ver, eh, y no, no lo podemos ver como una asignatura aparte. Entonces tenemos que verlo sí o sí en tal etapa, porque tenemos que rendir una prueba al final de cada unidad.

Moderador: Ah, ya.

Profesor 2: La unidad después tiene dos ejes, la unidad mide los tres, los cuatro ejes, o sea…

Moderador: Tienen directrices que van más allá del establecimiento, por así decirlo…

Profesor 1: No depende de nosotros.

Profesor 2: Claro.

Moderador: Ahora si les hago la pregunta invertida. Estábamos hablando recién de las habilidades que yo creo poseer para dictar una asignatura de profundización. Ahora, si hacemos la pregunta invertida, ¿Qué asignatura de profundización creen que más les costaría implementar? ¿Y por qué?

Profesor 4: Yo creo que tecnología, tecnología por un tema de…

Profesor 2: Yo creo que geometría.

Moderador: ¿Geometría 3D?

Profesor 2: Sí, yo hice el curso del CPEIP, y a mí la última parte, la última unidad me costó.

Moderador: ¿Te costó por habilidades personales o por tema de…?

Profesor 2: Porque no había algunas cosas, no las había visto en la U.

Moderador: Más que nada por conocimiento disciplinar.

Profesor 2: Sí.

Moderador: ¿Profesor 1?

Profesor 1: Eh, es que sabes que yo siento que las cuatro asignaturas de matemática son atractivas, al menos para mí. Entonces como que me cuesta un poco desechar alguna.

Profesor 2: Indeciso.

Profesor 1: Sí, pero yo creo que si puedo escoger la misma opción que dije denante, a mí me costaría un poco estadística, pero por lo mismo me llama la atención porque es como un, un desafío po'.

Moderador: ¿Y qué parte de estadística crees que te costaría?, ¿implementarla?, ¿lo teórico de estadística, o conectar lo didáctico para que los niños aprendan o más que nada como conectarlo con lo tecnológico?

Profesor 1: No, lo teórico. Si, o sea…

Moderador: Profesor

Profesor 4: Tecnología, yo creo.

Profesor 2: Pensamiento.

Moderador: Pensamiento computacional, más que nada por el conocimiento disciplinar, también.

Profesor 4: Pensamiento, claro, lo que pasa, es que yo tengo 43 años, entonces yo ya tengo otra formación se puede decir, yo no tengo esa formación que tienen los chicos más jóvenes.

Profesor 1: Ahí volvemos al tema de años.

Profesor 2: Claro.

Profesor 4: Pero entiendo también que si se presenta el desafío hay que tomarlo y hay que aprender no más po'. Estoy dispuesto yo creo a aprender.

Moderador: Y… ¿Profesor 3?

Profesor 3: Estadística, yo creo.

Moderador: O sea, te gusta, pero crees que es en lo que más puedes presentar dificultad.

Profesor 3: Sí, sería tomarlo como desafío personal…, y nos lanzamos.

Profesor 2: Es que todo ha sido así, todo ha sido así.

Profesor 1: (Risas) Es que generalmente, los profesores de matemáticas están débiles en estadística.

Profesor 2: Sí, especialmente en inferencia.

Profesor 1: Claro.

Moderador: Ahora, ¿Por qué crees que sea, Profesor 1, por qué creen que se de esa dificultad que estadística sea, sea como LA asignatura en la que quizás los profesores presentan más dificultades?

Profesor 3: Yo creo que por lo disciplinar, yo creo que por una mala costumbre de siempre dejarlo pal' último en cuanto al plan común de estudios. Ahora, en el Bicentenario nos cambió el tema, nos mezclan los distintos ejes.

Profesor 1: Hay que verlos sí o sí.

Profesor 3: Antes de eso uno lo dejaba para el final. Te comento el orden que trabajábamos siempre. Trabajamos eje de números, eje de álgebra, ahí se nos iba mitad del año, poco más, después geometría y al último, estadística.

Moderador: ¿Y estadística, va más que nada, relacionado a algo de conocimiento, de que lo dejo al fondo porque me cuesta desarrollarlo?

Profesor 3: Sí.

Profesor 2: O sea, eso fue antes, sí.

Profesor 1: Claro.

Moderador: O sea, si antes, pero ya hay un indicio de que…

Profesor 2: Claro.

Profesor 3: Una parte de que se le hacia el quite, y ahora, dentro de lo posible, yo creo que se le sigue haciendo, eh…

Moderador: Pero, netamente enfocado a lo disciplinar.

Profesor 3: Claro. Yo creo que el fuerte del profesor eh, chileno, me aventuro a decirlo, está en la parte de la estadística descriptiva, no en la inferencial, tampoco. Entonces ahí…

Moderador: Y eso va relacionado por algo más, eh el lado de la formación.

Profesor 3: Yo creo que, por el tema de la formación, que estamos ahí al debe. Y bueno, el electivo, como te decía denante, la tercera, la cuarta unidad ya ahí es con inferencia, entonces, eh, ahí está el desafío. Entre suerte y no, este año no llegamos. Pero, pero el próximo año tenemos que llegar, y eso es meta, meta, meta. Yo creo que tenemos esa afinidad en cuanto a números primero, después algebra, después geometría, yo creo que así va como…

Moderador: Y por último, estadística, relacionado.

Profesor 3: Y eso, se transfiere a los estudiantes…

Profesor 1: Sí.

Profesor 3: …y seguimos en este ciclo.

Moderador: Ya, súper. Más que nada, darles las gracias por su tiempo, por participar en este grupo focal, va a ser un insumo importante dentro de lo que es nuestra, nuestra tesis, así que agradecerles, en nombre de Francisca, Ellen…

Profesor 3: Sí, como comentario final quisiera decirles que sigan, sigan con su tesis, yo creo que está super buena, nos hace falta a todos. Eh, creen algo, perdón la palabra, bien hecho, cosa que lo puedan llevar a todos lados, que lo expongan, lo saquen de aquí, y lo lleven, no solo aquí a la ciudad, sino a congresos, que lo expongan, lo comenten, porque hace falta, ya. Sobre todo ahora que estamos empezando con esto de los electivos, que no ha habido una buena evaluación, y quizá a futuro proseguir, y implementar no solo esta especie de capacitación o recoger información que ustedes están levantando, sino la otra parte que tú mencionabas que acá no se hace, por el conocimiento, por él.. etc., etc., que es la parte de la evaluación.

Profesor 2: Claro.

Profesor 3: Ahí tienen tema para otra tesis, de cómo vamos a evaluar ahora, de si lo que han hecho los profesores es exitoso o no. Así que ahí pueden crear otros instrumentos en base a lo mismo que a lo mejor estaban ustedes haciendo y prosiguen. Y eso.

Moderador: Muchas gracias. Gracias. Así que damos por terminado el grupo focal.

Anexo 6: Pautas de validación de expertos del Plan de acompañamiento docente

A continuación, se presenta la pauta utilizada para la validación de los planes de acompañamiento sugeridos:

Pauta de validación del Plan de acompañamiento docente en Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial

Objetivo de la investigación: Diseñar y validar un plan de acompañamiento para docentes de matemática pertenecientes a un establecimiento municipal de la comuna de Los Ángeles que aborde las dificultades de conocimiento disciplinar, didácticas o tecnológicas manifestadas al impartir las asignaturas de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial y Límites, Derivadas e Integrales.

Objetivo del Plan de acompañamiento: Mejorar las capacidades docentes asociadas al conocimiento disciplinar para la asignatura de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, promoviendo el uso de herramientas tecnológicas.

A continuación, se dan a conocer criterios a evaluar del plan de acompañamiento. En los espacios en blanco bajo cada sesión debe escribir un número de 1 a 5 dando a conocer qué tan de acuerdo se encuentra con dichos criterios, siendo:

1: totalmente en desacuerdo

2: en desacuerdo

3: ni de acuerdo ni en desacuerdo

4: en acuerdo

5: totalmente de acuerdo

Criterios a evaluar	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
Claridad en la redacción							
Los contenidos se presentan en un orden lógico							
Redacción adecuada a la población en estudio							
Los ejercicios propuestos son adecuados a la población en estudio							
Es pertinente para lograr el objetivo general de la investigación							
No se presentan errores de contenido							

Observación: Las respectivas sesiones de 1 a 7 están abreviadas como S1, S2, … , S7, respectivamente.

Observaciones y recomendaciones en relación a la sesión N° 1	
Motivos por los que se considera no adecuada	
Propuestas de mejora (modificación, sustitución o supresión)	

Observaciones y recomendaciones en relación a la sesión N° 2	
Motivos por los que se considera no adecuada	
Propuestas de mejora (modificación, sustitución o supresión)	

Observaciones y recomendaciones en relación a la sesión N° 3	
Motivos por los que se considera no adecuada	
Propuestas de mejora (modificación, sustitución o supresión)	

Observaciones y recomendaciones en relación a la sesión N° 4	
Motivos por los que se considera no adecuada	
Propuestas de mejora (modificación, sustitución o supresión)	

Observaciones y recomendaciones en relación a la sesión N° 5	
Motivos por los que se considera no adecuada	
Propuestas de mejora (modificación, sustitución o supresión)	

Observaciones y recomendaciones en relación a la sesión N° 6	
Motivos por los que se considera no adecuada	
Propuestas de mejora (modificación, sustitución o supresión)	

Observaciones y recomendaciones en relación a la sesión N° 7	
Motivos por los que se considera no adecuada	
Propuestas de mejora (modificación, sustitución o supresión)	

Instrumento validado por:	Firma:
Correo:	
Formación de pregrado:	
Especializado en (Magister, Diplomados, Doctorado, etc.):	

Adicionalmente, las pautas de los expertos participantes en el proceso de validación del Plan de acompañamiento docente en las asignaturas de Límites, Derivadas e Integrales y Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial se pueden encontrar en el siguiente link adjunto, al cual tendrán acceso las personas con el enlace:

Link: https://drive.google.com/drive/folders/1cGlFD3IB79mzRzAXHySr6821tqJm0uME?usp=share_link