



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICAS

GRAVEDAD TENSO-ESCALAR A PARTIR DE SIMETRÍAS DE POINCARÉ GENERALIZADAS.

Por: Vicmar Carolina Orozco Araujo

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la
Universidad de Concepción para optar al grado académico de
Doctor en Ciencias Físicas

Profesor Guía : Dr. Patricio Salgado

Comisión : Dr. Fernando Izaurieta

Dr. Luis Roa

Dr. Ricardo Caroca

Abril 2023

Concepción, Chile

© 2023, Vicmar Orozco

Ninguna parte de esta tesis puede reproducirse o transmitirse bajo ninguna forma o por ningún medio o procedimiento, sin permiso por escrito del autor.

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

Dedicado a todos aquellos quienes experimentan la pasión por las ciencias y las artes, que sus sueños los lleven lejos, que alcancen sus metas, y que la pasión siempre viva perpetuamente en ustedes como una llama inextinguible.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo de investigación es el producto de varios años de estudio, trabajo, disciplina, aprendizaje, dedicación, crecimiento y reflexión interna. Para llevarse a cabo contó con el apoyo de muchas personas, con quienes estoy sumamente agradecida.

En primer lugar es para mí un privilegio haber trabajado bajo la guía del Dr. Patricio Salgado, ha sido un verdadero maestro, agradezco mucho su paciencia, amabilidad, y enseñanzas. En particular su comprensión, porque cuando tome la decisión de cambiar de área de estudio a física teórica (el cual fue un momento muy difícil para mí) él estuvo allí y me tendió la mano. Por lo que estoy infinitamente agradecida, y espero en el futuro seguir trabajando junto con él.

Me gustaría expresar mis sinceros agradecimientos a los miembros de la comisión, Dr. Luis Roa, Dr. Ricardo Caroca, Dr. Fernando Izaurieta, Dr. Esteban Sepúlveda y Dr. Patricio Salgado, y a todos los profesores que han sido parte de mi educación durante la realización del doctorado. Quiero dar gracias especialmente a los profesores Dr. Patricio Salgado por las clases de teoría clásica de campos, Dr. Fernando Izaurieta por las clases de geometría diferencial en teorías de gauge, Dr. Julio Oliva por las clases de teoría cuántica de campos I, y Dr. Jaime Araneda por las clases de mecánica estadística.

También quiero agregar como agradecimiento especial al profesor Dr. Ricardo Caroca por su apoyo como miembro de lo que fueron las comisiones de mi examen de calificación, de mi proyecto de tesis y ahora en la presentación de mi trabajo de grado.

Quiero dar las gracias al profesor Dr. Jaime Araneda por su apoyo y paciencia mientras ocupó el puesto de director del programa de Doctorado en Ciencias Físicas. Así como también al actual director profesor Dr. Esteban Sepúlveda Gómez. A ambos muchas gracias.

A mi esposo Paúl Calderón muchas gracias por tu amor, tu paciencia, tu apoyo, me diste fuerza para seguir adelante cuando solo quería echarme a llorar, sin ti este trabajo de investigación no hubiese iniciado.

Es para mi grato dar las gracias a los amigos que hice durante este tiempo en la Universidad de Concepción especialmente a todos los que nos encontrábamos en la sala de postgrado, Karen Escalona, Ignacio Ormazábal, Daniela Narbona, José Ilić, Elias Fierro, Carla Henriquez, Constanza Quijada, Ricardo Stuardo, César Riquelme, Gonzalo Barriga, Leonardo Sanhueza, Jean Cortez, y los amigos de astronomía Johana Henao, Juan Osorno y Heinz Frelíj. Me disculpo de antemano si se me paso el nombre de alguien, es que somos muchos (gracias a la vida).

A mi familia especialmente a mis padres José Vicente Orozco y María de Lourdes Araujo por su amor y apoyo desde la distancia, gracias por los ánimos que me dieron cada vez que lo necesite. Son los mejores padres del mundo. Gracias por ser mis padres.

A la Srta. Yarerla Soledad Daroch quien con su excelente trabajo nos ha apoyado a todos nosotros durante el doctorado, por ello muchas gracias. Así como a la Srta. Nilsa García por toda su ayuda en la gestiones finales.

Mis más sinceros agradecimientos a la Universidad de Concepción, especialmente a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, por recibirme como alumna en el programa de doctorado, me hicieron sentir acogida, sobretodo al inicio cuando estaba recién mudada a Chile.

Siguiendo esta misma línea quiero dar las gracias a la ciudad de Concepción, por ser un hermoso lugar para vivir, y por su hermosa gente, en particular a la Sra. Hilda Salgado y su bella familia por su cálida bienvenida a la ciudad.

Por último pero no menos importante quiero dar gracias a Dios por el amor a la física que vive dentro de mi.

Resumen

Fue estudiado el procedimiento de compactificación de Randall-Sundrum (RS) así como sus implicaciones en las soluciones cosmológicas en el contexto de gravedades Chern-Simons (ChS) y Einstein-Gauss-Bonnet (EGB). La primera parte de esta tesis, consiste en usar el mencionado procedimiento de compactificación sobre la acción de la gravedad $AdS\mathcal{L}_4$ -Chern-Simons en $5D$, de la cual se obtuvo una acción Einstein-Hilbert (EH) cuatridimensional extendida con término cosmológico, que incluye campos de gauge \tilde{k}_{μ}^{mn} no Abelianos. El mismo procedimiento de compactificación fue usado en la acción que describe gravedad ChS para el álgebra de Maxwell en $5D$, de donde se obtuvo una gravedad de Einstein en $4D$ extendida con término cosmológico y campos de gauge Abelianos que coincide con la ecuación (29) de (16). Empleando el procedimiento de contracción Inönü-Wigner sobre la acción compactificada obtenida a partir de gravedad $AdS\mathcal{L}_4$ -ChS en $5D$, se encontró la ecuación (29) de (16). Señalamos que los campos de gauge \tilde{k}_{μ}^{mn} pueden ser interpretado como posibles campos vectoriales geométricos del inflatón. En la segunda parte de la tesis, se consideró el Lagrangiano de la acción para gravedad EGB en $5D$, a partir del cual se obtuvieron las ecuaciones de campo para la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker junto con algunas soluciones. Fue usado el procedimiento de compactificación RS sobre la gravedad EGB en $5D$, cuyo resultado fue la acción de gravedad de EH en $4D$ con constante cosmológica. Dicho resultado nos permitió escribir la constante cosmológica Λ_{4D} en términos del par (r_c, Λ_{5D}) , de lo cual especulamos que Λ_{4D} tiene su origen en el radio de compactificación r_c y en la constante cosmológica de la quinta dimensión Λ_{5D} . Aplicando la compactificación de RS sobre la gravedad AdS -ChS fue encontrado gravedad de EH en $4D$ con constante cosmológica, a partir de la cual fue obtenido Λ_{4D} en términos de r_c , que nos lleva a la interpretación del parámetro l como el tamaño del universo. Por último empleamos la compactificación RS sobre gravedad EChS en $5D$, lo que nos condujo a una acción para una gravedad tenso-escalar en $4D$ que incluye un término de GB, esta acción corresponde a un caso particular de la teoría de Horndeski, en concreto al Lagrangiano (48) de (24).

Keywords – Gravedad Einstein-Gauss-Bonnet, gravedad Chern-Simons, compactificación, Randall-Sundrum, constante cosmológica, teoría tenso-escalar

Abstract

The Randall-Sundrum (RS) compactification procedure was studied as well as its implications in the cosmological solutions in the context of Chern-Simons (ChS) gravity and Einstein-Gauss-Bonnet (EGB) gravity. The first part of this thesis consists of using the mentioned compactification procedure on the $5D$ $AdS\mathcal{L}_4$ -ChS gravity action, from which an extended four-dimensional Einstein-Hilbert (EH) action with cosmological term, including non-Abelian \tilde{k}^{mn}_μ gauge fields, was obtained. The same compactification procedure was used in the action describing ChS gravity for the Maxwell algebra in $5D$, from which a $4D$ extended Einstein gravity with cosmological term and Abelian gauge fields coinciding with equation (29) of (16) was obtained. Employing the Inönü-Wigner contraction procedure on the compactified action gotten from $AdS\mathcal{L}_4$ -ChS gravity in $5D$ was found in equation (29) of (16). We point out that the \tilde{k}^{mn}_μ gauge fields can be interpreted as possible geometric vector fields of the inflaton. In the second part of the thesis, the Lagrangian of the action for EGB in $5D$ was considered, from which the field equations for the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metric together with some solutions were obtained. The RS compactification procedure was used on the $5D$ EGB gravity, which resulted in the $4D$ Einstein-Hilbert (EH) gravity action with cosmological constant. This result allowed us to write the cosmological constant Λ_{4D} in terms of the pair (r_c, Λ_{5D}) , from which we speculate that Λ_{4D} has its origin in the compactification radius r_c and in the cosmological constant of the fifth dimension Λ_{5D} . Applying the RS compactification on AdS -ChS gravity was found EH gravity with cosmological constant in $4D$, from which was obtained Λ_{4D} in terms of r_c , leading to the interpretation of the parameter l as the size of the universe. Finally, we employed the RS compactification on EChS gravity in $5D$, which led us to an action for a scalar-tensor gravity in $4D$ that includes a GB term, this action corresponds to a particular case of Horndeski theory, namely the Lagrangian (48) of (24).

Keywords – Einstein-Gauss-Bonnet gravity, Chern-Simons gravity, compactification, Randall-Sundrum, cosmological constant, scalar-tensor theory

Índice general

AGRADECIMIENTOS	I
Resumen	III
Abstract	IV
1. Introducción	1
2. Gravedad y métodos de reducción dimensional	5
2.1. Teoría de la relatividad general	5
2.1.1. Introducción	5
2.1.2. Acción Einstein-Hilbert	6
2.1.3. Acción Einstein-Hilbert en el formalismo de Cartan	8
2.2. Teoría de Lovelock de la gravedad	11
2.2.1. Introducción	11
2.2.2. Acción de Lanczos-Lovelock	12
2.3. Teoría de Kaluza-Klein	14
2.4. Modelos de Randall-Sundrum	17
3. Gravedad de Einstein $AdS\mathcal{L}_4$-extendida	21
3.1. Teoría de Chern-Simons de la gravedad	21
3.1.1. Introducción	21
3.1.2. Forma Chern-Simons	21
3.2. Acción Chern-Simons- $AdS\mathcal{L}_4$ para la gravedad	23
3.3. Reducción dimensional a la Randall-Sundrum	25
3.4. Gravedad de Einstein $4D$ extendida a partir de la acción de la gravedad Maxwell-Chern-Simons	32
4. Cosmología en gravedad Einstein-Gauss-Bonnet en $5D$ y $4D$	38
4.1. Modelo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	38
4.2. Gravedad Einstein-Gauss-Bonnet	40
4.2.1. Introducción	40
4.2.2. Término de Gauss-Bonnet	41
4.3. Cosmología en gravedad Einstein-Gauss-Bonnet sin constante cosmológica	42

4.3.1. Ecuaciones de campo y cosmología	44
4.4. Gravedad $4D$ a partir de gravedad Einstein-Gauss-Bonnet	53
4.4.1. Reducción dimensional de la gravedad Einstein-Gauss-Bonnet $5D$ a $4D$	53
4.5. Cosmología en gravedad Chern-Simons- AdS reducida a $4D$	57
4.5.1. Gravedad $4D$ a partir de la gravedad AdS -Chern-Simons	57
5. Teoría tenso-escalar con término Einstein-Gauss-Bonnet a partir de la gravedad de Einstein-Chern-Simons	60
5.1. Introducción	60
5.2. Gravedad Einstein-Chern-Simons $5D$	61
5.3. Gravedad tenso-escalar con término Gauss-Bonnet $4D$	62
5.4. Gravedad tenso-escalar con término Gauss-Bonnet en lenguaje tensorial	64
5.5. Acción para un espacio-tiempo máximamente simétrico	65
6. Conclusiones	68
Referencias	71
Apéndices	75
A. Álgebra de Lie	75
A1. Álgebra de Lie	75
A2. Álgebra de Poincaré	76
A2.1. Transformación de Lorentz	76
A2.2. Transformación de Poincaré	77
A2.3. Álgebras de Poincaré generalizadas \mathfrak{B}_{2n+1}	79
A3. Álgebra de Anti-de Sitter (AdS)	80
A3.1. Álgebra $AdS\mathcal{L}_4$ generalizada	81
B. Formalismo de Cartan	83
B1. Vielbein	83
B2. Derivada covariante exterior	85
B3. Curvatura	87
B4. Torsión	88
B5. Identidades de Bianchi	88
C. Lenguaje de formas diferenciales	90
C1. Elementos del cálculo exterior	90
C1.1. Producto exterior	92
C1.2. Derivada exterior	92
C1.3. Conjugación del dual y el operador co-diferencial	94
D. Término cosmológico generalizado a partir de las simetrías de Maxwell	98
D1. Gauging el álgebra de Maxwell	99

D2. Acción de Einstein con término cosmológico generalizado	103
E. Cosmología	105
E1. Principio cosmológico	105
E2. Ecuaciones de Friedmann	105
E3. Tres valores de k	107
F. Contracción Inönü-Wigner	108
G. Gravedad de Lovelock en $5D$	111
H. Las teorías tenso-escalares más generales de la gravedad	113

Índice de cuadros

E3.1. Un resumen de las posibles geometrías.	107
--	-----

Capítulo 1

Introducción

Recuerda que la última palabra en las leyes de la física le pertenece a la Naturaleza.

Baez y Muniain

La interacción gravitacional es de capital importancia en el problema de encontrar una descripción del origen del Universo y su destino, y en el de la construcción de una teoría unificada de las cuatro interacciones fundamentales.

Sin embargo a pesar del extraordinario éxito obtenido por la teoría de la relatividad general, podría ocurrir que la teoría de Einstein no sea la respuesta a problemas tales como el descubrimiento de la actual era de expansión acelerada del universo, por lo que es necesario investigar teorías alternativas a la teoría de Einstein.

La explicación de la actual era de expansión cósmica podría requerir de un importante cambio en la actual descripción de la interacción gravitacional, ya sea por la inclusión de nuevos grados de libertad gravitacionales o por la introducción de una constante cosmológica pequeña. La inclusión de nuevos grados de libertad gravitacionales podrían venir de teorías de gravedad masiva o bien de teorías cuyas simetrías sean más generales que las usuales simetrías de Poincaré o $(A)dS$. En esta tesis se considerará el último caso.

Los problemas teóricos y la información experimental han motivado la construcción de las llamadas teorías tenso-escalares, las cuales proporcionan una extensión mínima de la teoría general de la relatividad de Einstein, con un solo grado de libertad adicional que corresponden a un campo escalar.

El problema es encontrar una clasificación general y sistematizada del conjunto

de teorías gravitacionales actualmente existente, fue considerado en la Ref. (24), donde los autores investigaron el espacio de las teorías tenso-escalares utilizando el lenguaje de las formas diferenciales. Ellos encontraron una base finita y cerrada de Lagrangianos y probaron que las estructuras antisimétricas utilizadas para obtener, por ejemplo, la teoría de Horndeski o los Galileones generalizados, que a primera vista podrían parecer ad hoc, surgen de forma natural de la exigencia de que los bloques de construcción del Lagrangiano sean formas diferenciales.

En esta tesis estudiamos el procedimiento de compactificación empleado en las Refs. (21) y (31) “a la Randall-Sundrum”, en el cual se reemplaza una métrica tipo Randall-Sundrum (50) y (51), en un Lagrangiano en cinco-dimensiones, con la idea de hacer consistente dicho Lagrangiano con el espacio-tiempo de cuatro-dimensiones.

Realizamos la compactificación “a la Randall-Sundrum” del Lagrangiano Chern-Simons en $5D$ invariante bajo el álgebra $AdS\mathcal{L}_4$ en (54). Paralelamente, consideramos el Lagrangiano Chern-Simons en 5-dimensiones para el álgebra de Maxwell, al cual aplicamos el procedimiento de contracción de Inönü-Wigner en el sentido Weimar-Woods, y seguido lo compactificamos mediante el procedimiento mencionado, para así estudiar los Lagrangianos resultantes.

Se trabajó el Lagrangiano de la gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet (EGB) en $5D$ sin constante cosmológica, y se resolvieron las correspondientes ecuaciones de campo considerando la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker espacialmente plana.

También se estudio el Lagrangiano de EGB en $5D$ esta vez con la presencia del término correspondiente a la constante cosmológica, y lo compactificamos “a la Randall-Sundrum” a $4D$. De esta forma, estudiamos los efectos de la compactificación de $5D$ a $4D$ en el ámbito cosmológico. Asimismo realizamos este mismo procedimiento sobre la acción de la gravedad Chern-Simons en $5D$ para el álgebra AdS .

El principal objetivo de esta tesis es mostrar que la compactificación “a la Randall-Sundrum” de gravedades Chern-Simons cinco-dimensionales conducen a acciones para gravedades tenso-escalares cuadri-dimensionales, las cuales pertenecen a casos particulares de las acciones propuestas en la Ref. (24). Cabe señalar que este mismo procedimiento de compactificación aplicado a la acción cinco-dimensional

AdS-Chern-Simons, conduce a la acción de Einstein-Hilbert-Cartan en cuatro-dimensiones.

La estructura que presenta esta tesis es la descrita a continuación: en el capítulo 2 se trata la célebre teoría de la relatividad general de Einstein, así como su forma en el contexto de Cartan. Se sigue con la teoría de Lovelock la cual generaliza la gravedad de Einstein, donde se presenta la acción de Lanczos-Lovelock. Para luego dar cierre al capítulo con dos de las teorías de compactificación más importantes desde que se empezaron a considerar más de cuatro dimensiones, estas son la teoría de Kaluza-Klein y los modelos de branas de Randall y Sundrum.

El capítulo 3 se inicia con una breve descripción de la teoría de Chern-Simons, luego se muestra la acción Chern-Simons- $AdS\mathcal{L}_4$ para la gravedad. La importancia de este capítulo está en la descripción del procedimiento de compactificación “a la Randall-Sundrum”. Además se muestran los resultados de aplicar este procedimiento de compactificación sobre el Lagrangiano Chern-Simons en $5D$ invariante bajo el álgebra $AdS\mathcal{L}_4$, y sobre el Lagrangiano Chern-Simons en $5D$ para el álgebra de Maxwell.

En el capítulo 4 se proporciona una introducción a la aplicación de la relatividad general en la cosmología, así como una breve descripción de la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet. En este capítulo se muestran los resultados de aplicar procedimiento de compactificación “a la Randall-Sundrum” sobre la acción de la gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet en $5D$.

En el capítulo 5 presentamos una introducción a la teoría tenso-escalar, así como el procedimiento de compactificación “a la Randall-Sundrum” sobre el Lagrangiano gravedad Einstein-Gauss-Bonnet en $5D$ y sus correspondientes resultados relacionados con la teoría tenso-escalar.

Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones generales y un resumen de los principales resultados de la investigación actual.

Adicionalmente, se incluyen ocho apéndices. En el apéndice (A) se exponen las álgebras de Lie, en particular el álgebra de Poincaré y el álgebra de Anti-de Sitter. El apéndice (B) proporciona las definiciones básicas del formalismo de Cartan. El apéndice (C) contiene una breve guía de las reglas del lenguaje de formas diferenciales. En el apéndice (D) se desarrolla el cálculo para llegar a una acción de Einstein en $4D$ con término cosmológico generalizado. En el apéndice (E) se habla

de algunos conceptos importantes en cosmología como el principio cosmológico. En el apéndice (F) se explica rápidamente el método de contracción Inönü-Wigner. En el apéndice (G) se trata de manera concisa la acción de Lovelock en $5D$. Finalmente el apéndice (H) presenta de forma breve resultados interesantes en lo que a teorías tenso-escalares se refiere.

Capítulo 2

Gravedad y métodos de reducción dimensional

Los marcos de referencia son construcciones humanas por lo que las verdaderas leyes de la física deben ser independientes de los marcos de coordenadas.

A. Einstein.

2.1. Teoría de la relatividad general

2.1.1. Introducción

Como es conocido la teoría de Newton no es relativista, es decir es una teoría de campo estática en la que el campo no se propaga. Por consiguiente, el problema que se tenía era cómo formular una teoría de campo de la gravitación con una influencia física que se propague a velocidad finita. En términos más generales, se buscaba disponer de una nueva teoría de la gravedad en la que el espacio y el tiempo se trataran en pie de igualdad (9).

Einstein recordó el resultado experimental fundamental de que la masa gravitatoria y la masa inercial son iguales. Esto significa que la gravedad y el movimiento acelerado son indistinguibles. Una vez incluida la gravedad en este marco, todos los marcos de referencia, ya sea en movimiento constante o acelerado, están ahora en pie de igualdad.

Al considerar los diversos vínculos entre la gravedad y el movimiento acelerado,

Einstein llegó a la idea de que la gravedad puede hacer que el tejido del espacio-tiempo se deforme. En otras palabras, la forma del espacio responde a la materia del entorno.

Por lo tanto, si uno conoce las leyes de la física en un marco de referencia inercial que tiene un campo gravitatorio, y realiza una transformación a un marco que acelera respecto al primero, entonces el efecto de la aceleración debe ser el mismo que el debido a la gravedad en el primero. Esto es conocido como el principio de equivalencia.

A partir del principio de equivalencia, Einstein infirió que la representación matemática adecuada del campo gravitatorio es un espacio-tiempo curvo. En concreto, la relatividad general es una teoría de campo de la gravedad con el espacio-tiempo curvado. Luego, dado que el movimiento de una partícula de prueba en un espacio curvo sigue “la trayectoria más corta y recta posible”, en consecuencia se tiene que la ecuación de movimiento de la relatividad general es la ecuación geodésica.

Para terminar esta sección, es de mencionar que el Universo consiste de una gran colección de materia y campo, lo que significa que se debe tratar con fuertes efectos gravitatorios. De modo que el estudio de la estructura y evolución del universo se debe realizar bajo el marco de la relatividad general.

2.1.2. Acción Einstein-Hilbert

En esta sección vamos a derivar las ecuaciones de Einstein, a partir de un punto de vista moderno. En otras palabras, partiremos de un principio de acción. La acción debe ser la integral sobre el espacio-tiempo de una densidad Lagrangiana, esto es (5)

$$S = \int_{\Sigma_4} d^4x \mathcal{L}_{EH} \quad (2.1.1)$$

La densidad Lagrangiana es una densidad tensorial que puede ser escrita como $\sqrt{-g}$ veces un escalar. Por lo que nos preguntamos ¿Qué escalares pueden ser construidos empleando la métrica? El único escalar independiente construido a partir de la métrica, que no tiene derivadas mayores que de segundo orden, es el escalar de Ricci, por lo tanto la densidad Lagrangiana más simple posible es

$$\mathcal{L}_{EH} = \sqrt{-g}R \quad (2.1.2)$$

$$\Rightarrow S_{EH} = \int_{\Sigma_4} d^4x \sqrt{-g}R \quad (2.1.3)$$

Las ecuaciones de movimiento emergen de variar la acción con respecto a la métrica. De hecho considerando las variaciones con respecto a la métrica inversa $g^{\mu\nu}$, que es ligeramente más fácil de trabajar pero da un conjunto de ecuaciones equivalente, nos queda

$$\delta S = \int_{\Sigma_4} d^4x [\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + R\delta\sqrt{-g}] \quad (2.1.4)$$

La variación del tensor de Ricci $\delta R_{\mu\nu}$ nos conduce al siguiente resultado

$$\int_{\Sigma_4} d^4x \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \int d^n x \sqrt{-g} \nabla_\sigma [g^{\mu\sigma} (\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}) - g^{\mu\nu} (\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu})] \quad (2.1.5)$$

Este resultado implica que tenemos la integral con respecto al elemento de volumen natural de la divergencia covariante de un vector, por el teorema de Stokes, sabemos que esto es igual a una contribución de frontera en el infinito, la cual podemos fijar a cero haciendo que la variación se anule en el infinito. Por lo tanto, este término no contribuye en nada la variación total.

Luego, la variación de la raíz del determinante de la métrica, es decir $\delta\sqrt{-g}$ da lo siguiente

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (2.1.6)$$

Así encontramos que la variación de la acción respecto a la métrica es de la forma

$$\delta S = \int_{\Sigma_4} d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right] \delta g^{\mu\nu} \quad (2.1.7)$$

Esta última ecuación debería anularse para variaciones arbitrarias, lo que nos conduce a las ecuaciones de Einstein en el vacío

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (2.1.8)$$

Sin embargo, lo que realmente se quiere es obtener las ecuaciones de campo sin vacío. Por lo que necesitamos considerar una acción de la forma

$$S = \frac{1}{8\pi G}S_{EH} + S_M \quad (2.1.9)$$

donde S_M es la acción para la materia, y además se ha normalizado la acción gravitatoria de forma prudente. Siguiendo el mismo procedimiento realizado con anterioridad tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{8\pi G}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \quad (2.1.10)$$

y recuperamos las ecuaciones de Einstein al establecer

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.1.11)$$

este último corresponde al tensor de energía-momento, el cual es simétrico. Finalmente la ecuación de Einstein en presencia de materia viene dada como sigue

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \text{ con } \kappa = 8\pi G \quad (2.1.12)$$

2.1.3. Acción Einstein-Hilbert en el formalismo de Cartan

La acción Einstein-Hilbert en 4-dimensiones puede ser escrita en forma tensorial como en (2.1.3), pero también puede ser escrita en el formalismo de Cartan, es decir en términos del vierbein e^a y de la conexión de espín ω^{ab} , los cuales se describieron en (B), de modo que tenemos

$$S_{EH} = \int_{\Sigma_4} \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d \quad (2.1.13)$$

donde $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_c \omega^{cb}$, la cual corresponde a la 2-forma curvatura de Riemann.

A continuación se muestra cómo calcular la forma tensorial de la acción Einstein-Hilbert a partir de (2.1.13),

$$\begin{aligned}\epsilon_{abcd}R^{ab}e^ce^d &= \epsilon_{abcd}R^{ab}{}_{ef}e^ee^fe^ce^d \\ &= 4\sqrt{-g}Rd^4x\end{aligned}\quad (2.1.14)$$

donde se han empleado las siguientes identidades

$$dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_n} = \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_n} d^n x \quad (2.1.15)$$

$$(\det(e)) \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_n} = e^{\mu_1}_{i_1} \cdots e^{\mu_n}_{i_n} \epsilon^{i_1 \cdots i_n} \quad (2.1.16)$$

$$\delta_{j_1 \cdots j_p i_{p+1} \cdots i_q}^{i_1 \cdots i_p i_{p+1} \cdots i_q} = \frac{(n-p)!}{(n-q)!} \delta_{j_1 \cdots j_p}^{i_1 \cdots i_p} \quad (2.1.17)$$

$$\delta_{j_1 \cdots j_p}^{i_1 \cdots i_p} B^{j_1 \cdots j_p} = p! B^{i_1 \cdots i_p} \quad (2.1.18)$$

A continuación calculamos las ecuaciones de movimiento, para ello realizamos la variación de la acción dada en (2.1.13) respecto del vierbein, es decir δe^a , y de la conexión de espín $\delta \omega^{ab}$, obteniendo

$$\delta_e S_{EH} = \int_{\Sigma_4} 2\epsilon_{abcd}R^{ab}e^c(\delta e^d) \quad (2.1.19)$$

$$\begin{aligned}\delta_\omega S_{EH} &= \int_{\Sigma_4} \epsilon_{abcd}\delta R^{ab}e^ce^d \\ &= \int_{\Sigma_4} 2\epsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}T^ce^d\end{aligned}\quad (2.1.20)$$

De modo que

$$\delta_e S_{EH} = \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c = 0 \quad (2.1.21)$$

$$\delta_\omega S_{EH} = \epsilon_{abcd} T^c e^d = 0 \quad (2.1.22)$$

La ecuación $\epsilon_{abcd} R^{ab} e^c = 0$ junto con (2.1.22) es equivalente a la ecuación de Einstein en el vacío, es decir $G_{\mu\nu} = 0$.

Por otro lado, la acción Einstein-Hilbert de 4-dimensiones dada en (2.1.13) es, por construcción, invariante bajo transformaciones generales de coordenadas y bajo transformaciones locales de Lorentz. Sin embargo, esta acción no es invariante bajo traslaciones locales de Poincaré. En efecto

$$\delta_{tlp} S = \int d(\epsilon_{abcd} \delta\omega^{ab} e^c e^d) + 2 \int \epsilon_{abcd} \delta\omega^{ab} T^c e^d + 2 \int \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c \delta e^d \quad (2.1.23)$$

Puesto que bajo traslaciones locales de Poincaré

$$\delta e^a = D\rho^a \quad (2.1.24)$$

$$\delta\omega^{ab} = 0 \quad (2.1.25)$$

y bajo rotaciones locales de Lorentz

$$\delta e^a = \kappa^a_c e^c \quad (2.1.26)$$

$$\delta\omega^{ab} = D\kappa^{ab} \quad (2.1.27)$$

De modo que la variación de la acción bajo traslaciones locales de Poincaré conduce a

$$\delta S = -2 \int d(\epsilon_{abcd} R^{ab} e^c \rho^d) + 2 \int \epsilon_{abcd} R^{ab} T^c \rho^d \quad (2.1.28)$$

es decir salvo términos de superficies tenemos que $\delta S = 2 \int \epsilon_{abcd} R^{ab} T^c \rho \neq 0$ para ρ^d arbitrario. Así tenemos que la acción de Einstein-Hilbert es (cuasi)-invariante si y solo si exigimos la anulación de la torsión, es decir $T^a = 0$.

2.2. Teoría de Lovelock de la gravedad

2.2.1. Introducción

Previamente, se describió la teoría general de la relatividad de Einstein, en la cual las interacciones gravitacionales son descritas sobre una variedad espacio-tiempo, mediante un tensor métrico simétrico g dotado de una conexión métrica libre de torsión (por definición la conexión de Levi-Civita) que obedece a las ecuaciones de campo de Einstein (8) dadas en (2.1.8) y en (2.1.12), en el vacío y en presencia de materia, respectivamente.

La suposición de que la geometría del espacio-tiempo es descrita por la acción de Einstein-Hilbert (2.1.3), con o sin constante cosmológica, es la elección más razonable en tres y cuatro dimensiones, no obstante esto no es necesariamente así para dimensiones superiores, es decir $D > 4$ (57) y (53).

En la actualidad, la relatividad general es una teoría exitosa que ha sido probada en el sistema solar y por datos de púlsares binarios, en el régimen de gravedad débil y fuerte, respectivamente. Sin embargo, experimentos cosmológicos recientes, y datos astrofísicos, como las curvas de rotación galáctica, entre otros, podrían cuestionar la validez de la relatividad general incluso a escalas clásicas a distancias suficientemente grandes (8). Se espera que la teoría de Einstein se quiebre a muy altas energías cercanas a la escala de Planck, donde los términos de curvatura de mayor orden ya no son despreciables.

Entonces, nos preguntamos ¿cómo modificamos la relatividad general de manera consistente? Uno puede considerar tres tipos básicos de modificación. En primer lugar podemos incluir campos o grados de libertad adicionales, en segundo lugar podemos ampliar el espacio de parámetros en el que evoluciona la teoría, y en tercer lugar podemos generalizar las ecuaciones de campo. Cabe destacar que en todos los casos, es muy importante fijar requisitos básicos de consistencia para una teoría de la gravedad modificada (8).

Como se verá a continuación, la teoría de Lovelock es una teoría de la gravedad

de orden superior, la cual generaliza la relatividad general de 4-dimensiones a dimensiones más altas, siendo esta una extensión única, matemáticamente sensata y físicamente interesante de la relatividad general.

2.2.2. Acción de Lanczos-Lovelock

La idea de que una teoría más general podría ser empleada para describir la geometría del espacio-tiempo en dimensiones mayores a cuatro, aún en ausencia de torsión, fue considerada en primera instancia por (40) quien propuso un Lagrangiano para $D = 5$, y más tarde (43) generalizó el Lagrangiano para dimensiones arbitrarias (53).

En cuatro dimensiones la única modificación de la teoría de Einstein es agregar el término de la constante cosmológica. Cualquier invariante de curvatura de orden superior da un término de divergencia pura, o agrega derivadas de orden superior.

El objetivo del teorema de Lovelock era demostrar que existen teorías que contienen invariantes de curvatura de orden superior, que sí modifican las ecuaciones de campo de Einstein. Así, la extensión natural de la acción de Einstein-Hilbert está dada por el siguiente teorema

- **Teorema** La acción más general para una teoría métrica de la gravedad en D -dimensiones, que es generalmente covariante, libre de torsión y conduce a ecuaciones de segundo orden para la métrica puede ser escrita en la forma (43)

$$S_D = \int_M \sum_{p=0}^{[D/2]} \alpha_p L_D^{(p)} \quad (2.2.1)$$

donde los corchetes representan la parte entera de $D/2$, α_p son constantes arbitrarias, y $L_D^{(p)}$ está dado como sigue

$$L_D^{(p)} = \epsilon_{a_1 \dots a_D} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_D} \quad (2.2.2)$$

La acción dada en (2.2.1) es conocida como la acción de Lovelock. Es interesante resaltar, que una clara derivación del teorema de Lovelock empleando formas diferenciales fue realizada por (62).

Entonces, de acuerdo con el teorema de Lovelock, dada una teoría métrica, las densidades Lagrangianas $L_D^{(p)}$ son las únicas densidades formadas por (M, ∇, g) , que permiten la conservación de la energía y ecuaciones de campo de segundo orden.

En estas densidades Lagrangianas si la dimensión es par para un $p = D/2$, tenemos que la densidad de Lovelock se reduce a la densidad de Euler generalizada para una variedad M compacta de dimensión par. Esta es una cantidad geométrica cuya integral sobre M es un invariante topológico,

$$\chi[M] = \frac{1}{(4\pi)^{D/2} (D/2)!} \int_M L_{D/2} \quad (2.2.3)$$

Esta última ecuación muestra una relación entre una cantidad geométrica que involucra curvatura con la topología de la variedad M . Por ejemplo, para $D = 2$ la acción (2.2.1) se reduce a una combinación lineal de la característica de Euler bidimensional, χ_2 , y el volumen del espacio-tiempo (área),

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_M \epsilon_{ab} (\alpha_1 R^{ab} + \alpha_0 e^a e^b) \\ &= \int_M \sqrt{-g} (\alpha_1 R + 2\alpha_0) \\ &= \alpha_1 \cdot \chi_2 + 2\alpha_0 \cdot V_2 \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Mientras que, para $D = 3$ la acción se reduce a la acción de Einstein-Hilbert con un término de volumen, cuyo coeficiente es la constante cosmológica. Para $D = 4$ la acción tiene en adición el invariante de Euler de cuatro dimensiones χ_4 ,

$$\begin{aligned} S_4 &= \int_M \epsilon_{abcd} (\alpha_2 R^{ab} R^{cd} + \alpha_1 R^{ab} e^c e^d + \alpha_0 e^a e^b e^c e^d) \\ &= - \int_M \sqrt{-g} [\alpha_2 (R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} - 4R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + R^2) + 2\alpha_1 R + 24\alpha_0] d^4x \\ &= -\alpha_2 \cdot \chi_4 - 2\alpha_1 \int_M \sqrt{-g} R d^4x - 24\alpha_0 \cdot V_4 \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Vemos que la característica especial de la teoría de Lovelock es que sus densidades

Lagrangianas son continuaciones dimensionales de la densidad de Euler. En particular, para D par la potencia más alta en la curvatura es el caracter de Euler χ_D . En cuatro dimensiones, el término $L_4 = -\alpha_2 \cdot \chi_4$ puede ser identificado como la densidad de Gauss-Bonnet, cuya integral sobre una variedad de cuatro dimensiones compacta M_4 equivale a la característica de Euler $\chi(M_4)$. Este término proporciona también la primera generalización no trivial de la gravedad de Einstein en cinco dimensiones, donde el término cuadrático que puede ser sumado al Lagrangiano es la 5-forma Gauss-Bonnet (61),

$$\epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e = \sqrt{-g} (R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} - 4R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + R^2) d^5x \quad (2.2.6)$$

Por otro lado, el teorema de Lovelock asume que la torsión es idénticamente cero, es decir $T^a = de^a + \omega^a_b e^b = 0$, si esta ecuación se asume como una identidad, significa que e^a y ω^a_b no son campos independientes, contradiciendo la suposición de que estos campos corresponden a dos características independientes de la geometría en igualdad de condiciones.

2.3. Teoría de Kaluza-Klein

En los intentos de unificar relatividad general y electromagnetismo de Maxwell, Kaluza y Klein propusieron en 1920 que el espacio-tiempo podría ser de dimensiones más altas. Y que mientras el espacio-tiempo parezca efectivamente de 4-dimensiones, a todas las escalas donde los experimentos de hoy en día pueden probarlo, las dimensiones extras no serían directamente observables. Este esquema se suele denominar teoría de Kaluza-Klein. Ellos argumentaron que la invariancia de coordenadas generales de cinco dimensiones daría lugar tanto a la invariancia de coordenadas generales de 4-dimensiones como a una invariancia gauge $U(1)$, unificando así el electromagnetismo y la gravedad (22).

Consideremos la acción Einstein-Hilbert de cinco dimensiones (18),

$$S[\hat{g}] = \frac{1}{2\pi\kappa^2} \int_Y d^5z \sqrt{-\det(\hat{g})} R(\hat{g}) \quad (2.3.1)$$

La acción es para una métrica \hat{g} sobre un espacio de cinco dimensiones, y $R(\hat{g})$ es la curvatura escalar de \hat{g} . Por último, κ es la constante de Newton. Las ecuaciones

de movimiento clásicas para esta acción son las ecuaciones de Einstein,

$$R_{MN}(\hat{g}) = 0 \quad (2.3.2)$$

la anulación del tensor de curvatura de Ricci de \hat{g} .

Una solución \hat{g} es la variedad $Y = \mathbf{R}^4 \times S^1$ donde la métrica es (18)

$$\hat{g}_{MN}(z) dz^M dz^N = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r^2 d\theta^2; \quad \text{donde } z = (x, \theta) \quad (2.3.3)$$

Aquí hemos introducido varias convenciones, primero los índices $\mu, \nu = 0, \dots, 3$, los cuales son índices para las coordenadas x^μ en el espacio-tiempo de Minkowski de 4-dimensiones. El tensor métrico $\eta_{\mu\nu}$ es de la forma diagonal estándar $(-, +, +, +)$. Los índices $M, N = 0, \dots, 4$ los cuales identifican las coordenadas z^M sobre Y . Aquí, r es una constante que determina el radio del círculo interno.

Por otro lado, es conveniente escribir la métrica en una base ligeramente diferente:

$$\hat{g}_{MN}(z) dz^M dz^N = e^{-\rho/3} (e^\rho (d\theta + \kappa A_\mu dx^\mu)^2 + g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) \quad (2.3.4)$$

En esta descripción la métrica sobre el espacio de 5-dimensiones se ha convertido en tres campos: un tensor métrico de 4-dimensiones $g_{\mu\nu}$, una 1-forma sobre el cuadriespacio $A_\mu dx^\mu$, y un campo escalar ρ . Por supuesto, a esta altura todos estos campos no dependen sólo de los puntos en el cuadriespacio, sino también de la variable auxiliar θ parametrizando el círculo.

Ahora bien, vamos a considerar la expansión en serie de Fourier con respecto a la variable θ sobre el círculo:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{\mu\nu;n}(x) e^{in\theta} \\ A_\mu(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{\mu;n}(x) e^{in\theta} \\ \rho(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_n(x) e^{in\theta} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

En este punto lo que se ha hecho es reescribir la métrica de 5-dimensiones como una colección infinita de campos cuadridimensionales. Cuando tomamos el límite efectivo a bajas energías podemos ignorar todos los campos, excepto los finitos (sólo mantenemos los modos cero en las expansiones de Fourier arriba), puesto que nuestro principal interés está en los estados sin masa.

Hasta el momento el tamaño del factor del círculo en Y ha sido un parámetro libre en la teoría. Ahora, tomaremos $r \sim 10^{-33}cm$, es decir la longitud de Planck. A esta escala de longitud todas las excitaciones tienen alta energía, pero como estamos interesados en la teoría efectiva a bajas energías, podemos ignorar con seguridad todos los modos excepto los modos cero. Así, a escalas por debajo de $1/r$, nuestra teoría efectiva es puramente cuadridimensional. Tiene tres campos sobre el cuadridespacio los cuales son independientes de la variable interna θ . Los campos son: una métrica $g_0 = g_{\mu\nu;0}(x)dx^\mu dx^\nu$ sobre \mathbf{R}^4 , una 1-forma $A_0 = A_{\mu;0}(x)dx^\mu$ sobre el cuadridespacio y un campo escalar $\rho_0(x)$ sobre el cuadridespacio.

A continuación, introducimos estos campos en la acción de Kaluza-Klein y escribimos la acción efectiva resultante, dada como sigue

$$S_{efectiva} [g_0, A_0, \rho_0] = r \int_{\mathbf{R}^4} d^4x \sqrt{-g_0} \left(\frac{1}{\kappa^2} R(g_0) - \frac{1}{4} e^{\rho_0} F_{\mu\nu}^0 F_0^{\mu\nu} - \frac{1}{6\kappa^2} (\nabla \rho_0)^2 + \left((\nabla \rho_1)^2 + \frac{1}{r^2} \rho_1^2 + \dots \right) \right) \quad (2.3.6)$$

donde $F_{\mu\nu}^0 dx^\mu dx^\nu$ es la curvatura de la conexión A_0 . Todos los términos encerrados en el último par de paréntesis representan partículas masivas y pueden ser ignoradas en nuestra acción efectiva a bajas energías. Así, nos quedamos con

$$S_{efectiva} [g_0, A_0, \rho_0] = r \int_{\mathbf{R}^4} d^4x \sqrt{-g_0} \left(\frac{1}{\kappa^2} R(g_0) - \frac{1}{4} e^{\rho_0} F_{\mu\nu}^0 F_0^{\mu\nu} - \frac{1}{6\kappa^2} (\nabla \rho_0)^2 \right) \quad (2.3.7)$$

Empezamos con una teoría de la gravedad de 5-dimensiones, y para radios suficientemente pequeños r hemos encontrado la acción efectiva a bajas energías de 4-dimensiones: una métrica, una conexión que está relacionada al campo vectorial de Killing sobre la variedad tangente de 5-dimensiones a las direcciones del círculo,

y un campo escalar ρ que está relacionado al parámetro libre r en la teoría de 5-dimensiones.

2.4. Modelos de Randall-Sundrum

Randall y Sundrum propusieron en 1999 un nuevo mecanismo de altas dimensiones con el objetivo de resolver el problema de jerarquía. Básicamente, construyen dos modelos de universos estáticos en 5-dimensiones en los cuales se tienen branas paralelas separadas por un bulk de Anti-de Sitter (*AdS*).

Al proponer un espacio-tiempo que no llena las cinco-dimensiones, se hace necesario imponer condiciones de frontera, lo cual se logra al considerar la quinta coordenada ϕ como periódica. En el primer modelo se tiene una brana visible en $\phi = 0$ y una brana oculta¹ en $\phi = \pi$. Además, la superficie (x^μ, ϕ) se identifica con la superficie $(x^\mu, -\phi)$. A esto se le conoce como simetría \mathbb{Z}_2 . El rango ϕ está entre $-\pi$ y π , aún así la métrica está completamente determinada por los valores de $0 \leq \phi \leq \pi$.

Adicionalmente se asume que las branas tienen tensiones iguales y opuestas interpretadas como la energía del vacío por los habitantes de la brana. Ambas branas se acoplan únicamente a las componentes cuadridimensionales de la métrica del bulk como sigue,

$$g_{\mu\nu}^{\text{visible}}(x^\mu) \equiv G_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = \pi), \quad g_{\mu\nu}^{\text{oculta}}(x^\mu) \equiv G_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = 0) \quad (2.4.1)$$

donde G_{MN} es la métrica de cinco dimensiones con $M, N = \mu, \phi$.

La acción clásica que describe la configuración de arriba está dada por,

$$S = S_{\text{gravedad}} + S_{\text{visible}} + S_{\text{oculta}} \quad (2.4.2)$$

$$S_{\text{gravedad}} = \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-G} (-\Lambda + 2M^3 R) \quad (2.4.3)$$

$$S_{\text{visible}} = \int d^4x \sqrt{-g_{\text{visible}}} (\mathcal{L}_{\text{visible}} - V_{\text{visible}}) \quad (2.4.4)$$

$$S_{\text{oculta}} = \int d^4x \sqrt{-g_{\text{oculta}}} (\mathcal{L}_{\text{oculta}} - V_{\text{oculta}}) \quad (2.4.5)$$

¹La brana oculta no es visible para los observadores que viven en el mundo de 4-dimensiones.

donde S_{gravedad} es la acción en el bulk, es decir en el espacio de cinco dimensiones, R es el escalar de Ricci en cinco dimensiones, Λ es la constante cosmológica en el bulk, M es la escala de Planck fundamental de cinco dimensiones (Masa de Planck $5D$), S_{visible} representa la acción sobre la brana visible, mientras que S_{oculta} representa la acción sobre la brana oculta, $\mathcal{L}_{\text{visible}}$ y $\mathcal{L}_{\text{oculta}}$ son los Lagrangianos de cada 3-brana los cuales están separados por una energía del vacío constante dadas por V_{visible} y V_{oculta} , las cuales actúan como una fuente gravitacional incluso en la ausencia de partículas excitadas.

A partir de las condiciones establecidas, podemos resolver que la ecuación de campo de Einstein en cinco dimensiones para la acción dada arriba es

$$\begin{aligned} \sqrt{-G} \left(R_{MN} - \frac{1}{2} G_{MN} R \right) = & -\frac{1}{4M^3} \left[\Lambda \sqrt{-G} G_{MN} \right. \\ & + V_{\text{visible}} \sqrt{-g_{\text{visible}}} g_{\mu\nu}^{\text{visible}} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(\phi - \pi) \\ & \left. + V_{\text{oculta}} \sqrt{-g_{\text{oculta}}} g_{\mu\nu}^{\text{oculta}} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(\phi) \right] \quad (2.4.6) \end{aligned}$$

Luego, se asume que existe una solución que respeta la invariancia de Poincaré de cuatro dimensiones en un espacio-tiempo ordinario, es decir en las direcciones x^μ . Una métrica de 5-dimensiones que satisface este ansatz toma la siguiente forma,

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\phi)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2, \quad \text{con } \mu, \nu = 0, \dots, 3 \quad (2.4.7)$$

El coeficiente r_c es una constante de proporcionalidad independiente de ϕ , mejor conocida como el radio de compactificación del círculo de la dimensión extra. Además, r_c es independiente de x debido a la invariancia de Poincaré de cuatro dimensiones. Por otra parte, $\sigma(\phi)$ es una función que solo depende de la coordenada de la dimensión extra.

A continuación sustituyendo la solución propuesta (2.4.7) en la ecuación de campo encontrada (2.4.6) se llega al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{6\sigma'^2}{r_c^2} = \frac{-\Lambda}{4M^3} \quad (2.4.8)$$

$$\frac{3\sigma''}{r_c^2} = \frac{V_{\text{oculta}}}{4M^3 r_c} \delta(\phi) + \frac{V_{\text{visible}}}{4M^3 r_c} \delta(\phi - \pi) \quad (2.4.9)$$

A partir de la ecuación dada en (2.4.9) se tiene que la solución consistente con la simetría $\phi \rightarrow -\phi$ es

$$\sigma = r_c |\phi| \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}} \quad (2.4.10)$$

En esta ecuación se ha omitido la constante de integración puesto que equivale a un reescalamiento de las coordenadas x^μ . Claramente, esta solución solo tiene sentido si $\Lambda < 0$. Se resalta el hecho que el espacio-tiempo entre las dos 3-branas es una porción de una geometría AdS_5 . Por otro lado, se puede encontrar una solución para la ecuación (2.4.9) si V_{visible} , V_{oculta} y Λ están en términos de una única escala k , es decir

$$V_{\text{oculta}} = -V_{\text{visible}} = 24M^3 k \quad (2.4.11)$$

$$\Lambda = -24M^3 k^2$$

Estas relaciones entre los términos cosmológicos de frontera y del bulk son necesarias para obtener una solución que respete la invariancia de Poincaré de cuatro dimensiones. Por otro lado, asumimos que $k < M$ de modo que la curvatura del bulk es pequeña comparada con la escala de Planck de altas dimensiones. Así la solución final para la métrica del bulk es,

$$ds^2 = e^{-2kr_c|\phi|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2 \quad (2.4.12)$$

La cualidad más importante del modelo RS-I es que este proporciona un enfoque ingenioso al problema de jerarquía. En el escenario RS-I la escala de Planck

fundamental es igual a la escala electrodébil fundamental. Sin embargo, las escalas se separaran cuando consideramos las interacciones efectivas sobre la brana.

En estos modelos de brana, aunque a la gravedad se le permite propagarse en el bulk, los campos del modelo estándar están confinados a la brana. Por lo tanto, el electromagnetismo, y las fuerzas fuerte y débil son campos que solo viven en la brana. Las interacciones que involucran estos campos no pueden notar directamente la dimensión extra y por lo tanto permanecerán enteramente casi sin modificación. Solo la gravedad es modificada en estos escenarios.

También es necesario resaltar que el modelo RS-I es inestable. En este modelo la materia en el bulk fuera de una brana con densidad de energía negativa caerá hacia la brana y hará que su energía sea positiva. Por lo que, Randall y Sundrum construyeron un segundo modelo (RS-II) de universo de brana que no sufre de tal inestabilidad. Sin embargo, el segundo modelo no proporciona una resolución al problema de jerarquía, aunque da una explicación para la debilidad de la gravedad en nuestro mundo.

En el segundo modelo RS-II hay solo una brana en un bulk de Anti-de Sitter de extensión infinita. La brana tiene densidad de energía del vacío positiva que es nuevamente ajustada con la constante cosmológica del bulk para asegurar la invariancia de Poincaré sobre la brana. El factor warp es similar al del modelo RS-I, pero ahora hay simetría global alrededor de la posición de la brana.

La compactificación estándar de Kaluza-Klein asegura que la gravedad se vea como de cuatro dimensiones al establecer que las dimensiones extras deberían ser pequeñas. En el modelo RS-II la dimensión extra es infinita, y a la gravedad se le permite propagarse en la dimensión extra por lo que esperaríamos que se vea de cinco dimensiones incluso para un observador en la brana. Sin embargo, el factor warp exponencial causa que la interacción gravitacional se amortigüe en la dirección que se aleja de la brana. Lo que causa el efecto de que la gravedad se vea como de cuatro dimensiones para un observador del mundo brana.

Esta sección fue desarrollada extrayendo la información de (50), (51) y (33), adicionalmente se recomienda leer (47).

Capítulo 3

Gravedad de Einstein $AdS\mathcal{L}_4$ -extendida

3.1. Teoría de Chern-Simons de la gravedad

3.1.1. Introducción

Como bien se sabe la ecuación de Yang-Mills depende de la métrica del espacio-tiempo. Esta métrica es lo que los físicos llaman una estructura de fondo fijo, puesto que juega un rol crucial, pero en lugar de ser una solución de algunas ecuaciones, simplemente se postula que tiene una forma particular, tal como la métrica de Minkowski en \mathbb{R}^4 (2).

La teoría de la relatividad general pone fin al pensamiento de la métrica como una estructura fija, al decir que se permite cualquier métrica siempre que satisfaga la ecuación de Einstein. No obstante, nos interesa escribir una acción de la gravedad que no involucre la métrica en absoluto. De esta idea surge la teoría de Chern-Simons, la cual está construida del tal manera que es independiente de las bases.

3.1.2. Forma Chern-Simons

En primer lugar, vamos a definir qué es un polinomio invariante. Sea α una matriz $n \times n$ y $\mathcal{P}(\alpha)$ un polinomio en las componentes de α , tenemos que $\mathcal{P}(\alpha)$ es llamado un polinomio invariante si (23)

$$\mathcal{P}(\alpha) = \mathcal{P}(g^{-1}\alpha g), \quad \forall g \in GL(n) \quad (3.1.1)$$

Ahora bien, la clase de Chern es obtenida al sustituir la 2-forma curvatura F en el polinomio invariante $\det(I + \alpha)$. Por lo que, se define la clase de Chern total como (48)

$$c(F) = \det\left(I + \frac{i}{2\pi}F\right) = 1 + c_1(F) + c_2(F) + \dots \quad (3.1.2)$$

Por el teorema de Chern-Weil, sabemos que para un polinomio invariante en términos de una 2-forma, esto es $\mathcal{P}_{2i}(F)$, la cual es una $2i$ -forma, se satisface

- $\mathcal{P}_{2i}(F)$ es una forma cerrada, es decir $d\mathcal{P}_{2i}(F) = 0$.
- Sean F y F' 2-formas curvatura correspondientes a diferentes conexiones A y A' . Entonces la diferencia $\mathcal{P}(F') - \mathcal{P}(F)$ es exacta.

Por el lema de Poincaré es posible escribir una forma cerrada $\mathcal{P}_{2i}(F)$, como una forma exacta tal que $\mathcal{P}_{2i}(F) = d\mathcal{C}_{2i-1}$, donde \mathcal{C}_{2i-1} es denominada la forma de Chern-Simons.

Luego, la derivada exterior de la 3-forma Chern-Simons no es más que la segunda forma de Chern, es decir $c_2 = \mathcal{P}_4(F) = \text{tr}(F \wedge F) = d\mathcal{C}_3$. La 3-forma Chern-Simons puede ser calculada de forma explícita, puesto que al cambiar la conexión A se cambia la forma de Chern por una forma exacta. Así tenemos que, sea $A_s = sA$ y sea $F_s = sdA + s^2A \wedge A$ la curvatura de A_s , obtenemos (2)

$$\mathcal{P}_4(F) = \text{tr}(F \wedge F) = d\text{tr}\left(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\right) \quad (3.1.3)$$

A partir de este resultado se define la acción de Chern-Simons para una teoría de campos de tres dimensiones como sigue

$$S_{ChS}(A) = \int_{\Sigma} \text{tr}\left(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\right) \quad (3.1.4)$$

Lo especial de la teoría de Chern-Simons es que la acción de Chern-Simons es invariante bajo todos los difeomorfismos de Σ que conservan la orientación, y

también es casi invariante de gauge, es decir es invariante bajo transformaciones de gauge que están conectadas a la identidad.

Por último, la teoría de Chern-Simons puede ser extendida a todas las dimensiones impares $2n - 1$. Así tenemos de (6) y (7) que la acción de Chern-Simons general para todas las dimensiones impares es

$$S_{2n-1} = k \int_{\Sigma_{2n-1}} \epsilon_{a_1 \dots a_{2n-1}} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\lambda^l}{2l+1} \binom{l}{n-1} \times [R^{a_1 a_2} \wedge \dots \wedge R^{a_{2n-2l+3} a_{2n-2l-2}} \wedge e^{a_{2n-2l-1}} \wedge \dots \wedge e^{a_{2n-1}}] \quad (3.1.5)$$

3.2. Acción Chern-Simons- $AdS\mathcal{L}_4$ para la gravedad

Para escribir un Lagrangiano Chern-Simons para el álgebra $AdS\mathcal{L}_4$, es necesario considerar los generadores que conforman dicha álgebra, estos vienen dados por P_a, J_{ab}, Z_{ab} , los cuales siguen el álgebra de los conmutadores dados en el apéndice (A3.2), el caso en los que Z_{ab} conmuta consigo mismos y con los P_a conduce al álgebra de Maxwell.

Al evaluar la 1-forma conexión de gauge A en el álgebra $AdS\mathcal{L}_4$, con los generadores $T_A = (P_a, J_{ab}, Z_{ab})$ y los campos $A^A = (e_a, \frac{1}{2}\omega_{ab}, \frac{1}{2}k_{ab})$, tenemos que la conexión va como sigue

$$A = A^A T_A = \frac{1}{l} e^a P_a + \frac{1}{2} \omega^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2} k^{ab} Z_{ab} \quad (3.2.1)$$

donde $a, b = 0, 1, 2, 3, 4$ son índices del espacio tangente que suben y bajan con la métrica de Minkowski η_{ab} , y donde

$$e^a = e^a_\mu dx^\mu, \quad \omega^{ab} = \omega^{ab}_\mu dx^\mu, \quad k^{ab} = k^{ab}_\mu dx^\mu \quad (3.2.2)$$

son e^a_μ el vierbein, ω^{ab}_μ la conexión de espín y k^{ab}_μ los nuevos campos de gauge no-Abelianos.

Es preciso señalar que a lo largo del cálculo se empleará el formalismo de Cartan dado en el apéndice (B) y las correspondientes reglas del lenguaje de formas

diferenciales dadas en el apéndice (C).

Continuando con el cálculo, sabemos que del producto de dos derivadas covariantes exteriores se obtiene la 2-forma curvatura genérica de los campos asociados, es decir $F = dA + A \wedge A = dA + \frac{1}{2}[A, A] \equiv F^A T_A$. Luego, denotando $F^A = (\mathcal{T}^a, R^{ab}, F^{ab})$, nos conduce a la correspondiente 2-forma curvatura asociada a la conexión A (3.2.1)

$$F = \frac{1}{l} \mathcal{T}^a P_a + \frac{1}{2} R^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2} F^{ab} Z_{ab} \quad (3.2.3)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^a &= T^a + k^a_c e^c \\ R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega^a_c \omega^{cb} \\ F^{ab} &= Dk^{ab} + k^{[a}_c k^{c|b]} + \frac{1}{l^2} e^a e^b \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

En este punto, podría ser interesante recordar que:

1. claramente ℓ podría ser eliminado al absorberlo en la definición del vielbein pero luego la métrica espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$ ya no estaría relacionado con el e^a a través de la relación $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b$,
2. la interpretación del parámetro ℓ como un parámetro relacionado al radio de la curvatura del espacio-tiempo AdS se hereda para el espacio-tiempo cuyas simetrías son descritas por el álgebra de Maxwell.

Por otra parte, también podría ser interesante observar que J_{ab} aún son generadores de Lorentz, pero P_a ya no son boosts AdS (el álgebra de AdS puede ser consultada en el apéndice (A3)). De hecho, $[P_a, P_b] = Z_{ab}$. Sin embargo e^a aún transforma como un vector bajo transformaciones de Lorentz, como debe ser, para recobrar la gravedad en este esquema.

En la teoría de Chern-Simons en (3.1) se mostró la acción de Chern-Simons para 3-dimensiones dada como (3.1.4), y mostramos la forma general para dimensiones impares dada en (6), así tenemos que un Lagrangiano de Chern-Simons en 5-dimensiones se define como la siguiente función local de una conexión gauge A

1-forma

$$\mathcal{L}_{ChS}^{(5D)}(A) = \left\langle AF^2 - \frac{1}{2}A^3F + \frac{1}{10}A^5 \right\rangle \quad (3.2.5)$$

donde $\langle \dots \rangle$ denota un tensor invariante para la correspondiente álgebra de Lie, y $F = dA + A \wedge A$ es la correspondiente curvatura 2-forma, como ya se había mencionado.

Luego, tomando en cuenta los teoremas para obtener tensores invariantes para álgebras S -expandidas, los cuales pueden ser consultados en (38), es posible mostrar que las únicas componentes no nulas de un tensor invariante para el álgebra de $AdS\mathcal{L}_4$ están dadas por

$$\begin{aligned} \langle J_{ab}J_{cd}P_e \rangle &= \frac{4}{3}\alpha_1\ell^3\epsilon_{abcde} \\ \langle Z_{ab}Z_{cd}P_e \rangle &= \frac{4}{3}\alpha_1\ell^3\epsilon_{abcde} \\ \langle J_{ab}Z_{cd}P_e \rangle &= \frac{4}{3}\alpha_1\ell^3\epsilon_{abcde} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

donde α_1 es una constante arbitraria de dimensiones $[\text{longitud}]^{-3}$.

Utilizando el procedimiento de S -expansión dual en (14) (15), encontramos que el Lagrangiano Chern-Simons de cinco dimensiones invariante bajo el álgebra $AdS\mathcal{L}_4$ tiene la siguiente forma (54),

$$\begin{aligned} L_{ChS-5}^{(AdS\mathcal{L}_4)} &= \alpha_1\epsilon_{abcde} \left\{ l^2 R^{ab} R^{cd} e^e + l^2 (Dk^{ab}) (Dk^{cd}) e^e + l^2 k_f^a k^{fb} k_g^c k^{gd} e^e + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{5l^2} e^a e^b e^c e^d e^e + 2l^2 R^{ab} k_f^c k^{fd} e^e + \frac{2}{3} (Dk^{ab}) e^c e^d e^e + 2l^2 R^{ab} (Dk^{cd}) e^e + \right. \\ &\quad \left. 2l^2 (Dk^{ab}) k_f^c k^{fd} e^e + \frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e + \frac{2}{3} k_f^a k^{fb} e^c e^d e^e \right\} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

3.3. Reducción dimensional a la Randall-Sundrum

En la sección previa se consiguió que el Lagrangiano Chern-Simons de cinco dimensiones invariante bajo el álgebra $AdS\mathcal{L}_4$ está dado por la ecuación (3.2.7).

Nuestro propósito en esta sección es presentar una metodología a través de la cual dicha acción de la gravedad, es decir (3.2.7), sea consistente con el espacio-tiempo de cuatro dimensiones. Esto se pretende lograr realizando el reemplazo de una métrica tipo Randall-Sundrum en todos los términos del Lagrangiano, como se verá abajo.

Anteriormente se describieron los trabajos de Randall y Sundrum (50) y (51), en dichos trabajos como bien se explicó en la sección (2.4) se plantearon como métrica del espacio-tiempo

$$ds^2 = e^{-2kr_c|\phi|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2 \quad (3.3.1)$$

Básicamente (3.3.1) es una métrica de cuatro dimensiones multiplicada por un “factor warp” el cual es una función de una dimensión adicional que cambia rápidamente, donde k es un factor de escala del orden de la escala de Planck, x^μ son las coordenadas para las conocidas cuatro dimensiones, mientras que $0 \leq \phi \leq 2\pi$ es la coordenada de una dimensión extra, el cual es un intervalo finito cuyo tamaño es establecido por r_c , conocido como “radio de compactificación”.

Para encontrar una acción y sus correspondientes ecuaciones de campo para una brana de cuatro dimensiones Σ_4 embebida en un espacio-tiempo de cinco dimensiones Σ_5 para la gravedad de Einstein-Chern-Simons, consideraremos la siguiente métrica tipo Randall-Sundrum,

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{2f(\phi)}\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x})d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu + r_c^2 d\phi^2 \\ &= e^{2f(\phi)}\tilde{\eta}_{mn}\tilde{e}^m\tilde{e}^n + r_c^2 d\phi^2 \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

donde $e^{2f(\phi)}$ “el factor warp”, $f(\phi)$ es un función arbitraria y continuamente diferenciable, y r_c es “el radio de compactificación” de la dimensión extra, que está asociada a la coordenada $0 \leq \phi \leq 2\pi$. El símbolo \sim denota las cantidades de cuatro dimensiones relacionadas al espacio-tiempo Σ_4 . La notación a emplear será la siguiente

$$\begin{aligned}
x^\alpha &= (\tilde{x}^\mu, \phi); & \alpha, \beta &= 0, \dots, 4; & a, b &= 0, \dots, 4; \\
\mu, \nu &= 0, \dots, 3; & m, n &= 0, \dots, 3; \\
\eta_{ab} &= \text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1); & \tilde{\eta}_{mn} &= \text{diag}(-1, 1, 1, 1)
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Esto nos permite escribir

$$\begin{aligned}
e^m(\phi, \tilde{x}) &= e^{f(\phi)} \tilde{e}^m(\tilde{x}) = e^{f(\phi)} \tilde{e}_\mu^m(\tilde{x}) d\tilde{x}^\mu \\
e^4(\phi) &= r_c d\phi
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

y

$$\begin{aligned}
k^{mn}(\phi, \tilde{x}) &= \tilde{k}^{mn}(\tilde{x}) \\
k^{m4} &= k^{4m} = 0
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

donde, siguiendo a Randall y Sundrum en (50) y (51) los campos de materia son nulos en la quinta dimensión.

De la condición de torsión nula

$$T^a = de^a + \omega^a_b e^b = 0 \tag{3.3.6}$$

obtenemos

$$\omega^a_{b\alpha} = -e^\beta_b (\partial_\alpha e^a_\beta - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} e^a_\gamma) \tag{3.3.7}$$

donde $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ es el símbolo de Christoffel.

A partir de las ecuaciones en (3.3.4) y (3.3.6), encontramos

$$\omega^m_4 = \frac{e^f f'}{r_c} \tilde{e}^m, \text{ con } f' = \frac{\partial f}{\partial \phi} \tag{3.3.8}$$

Asimismo, consideramos la condición de torsión nula para las típicas cuatro dimensiones,

$$\tilde{T}^m = \tilde{d}\tilde{e}^m + \tilde{\omega}_n^m \tilde{e}^n = 0 \quad (3.3.9)$$

donde $\tilde{\omega}_n^m = \omega_n^m$ y $\tilde{d} = d\tilde{x}^\mu \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu}$.

Luego, a partir de las ecuaciones (3.3.4), (3.3.8), (3.3.9) y la segunda ecuación de estructura de Cartan, es decir

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_c \omega^{cb} \quad (3.3.10)$$

obtenemos

$$R^{mn} = \tilde{R}^{mn} - \left(\frac{e^f f'}{r_c} \right)^2 \tilde{e}^m \tilde{e}^n \quad (3.3.11)$$

$$R^{m4} = \frac{e^f}{r_c} (f'^2 + f'') d\phi \tilde{e}^m$$

donde la 2-forma curvatura de cuatro dimensiones está dada por

$$\tilde{R}^{mn} = \tilde{d}\tilde{\omega}^{mn} + \tilde{\omega}_p^m \tilde{\omega}^{pn} \quad (3.3.12)$$

A partir de la ecuación (3.2.7) podemos ver que el Lagrangiano contiene diez términos que denotaremos como L_1, L_2, \dots, L_{10} , donde L_1 corresponde al término Gauss-Bonnet, L_4 corresponde al término cosmológico, y L_9 corresponde al término Einstein-Hilbert, todos ellos en 5-dimensiones, evidentemente. A continuación reemplazamos las ecuaciones (3.3.4), (3.3.5) y (3.3.11) en (3.2.7), y empleando $\tilde{\epsilon}_{mnpq} = \epsilon_{mnpq4}$, obtenemos

$$L_1 = \alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e \quad (3.3.13)$$

$$L_1 = \alpha_1 l^2 \epsilon_{4mnpq} R^{4m} R^{np} e^q + \alpha_1 l^2 \epsilon_{m4npq} R^{m4} R^{np} e^q + \alpha_1 l^2 \epsilon_{mn4pq} R^{mn} R^{4p} e^q +$$

$$\alpha_1 l^2 \epsilon_{mnpq4} R^{mn} R^{p4} e^q + \alpha_1 l^2 \epsilon_{mnpq4} R^{mn} R^{pq} e^4$$

$$L_1 = \alpha_1 l^2 \tilde{\epsilon}_{mnpq} \left[\tilde{R}^{mn} - \left(\frac{f' e^{f(\phi)}}{r_c} \right)^2 \tilde{e}^m \tilde{e}^n \right] \left[\tilde{R}^{pq} - \left(\frac{f' e^{f(\phi)}}{r_c} \right)^2 \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right] e^4 -$$

$$4\alpha_1 l^2 \tilde{\epsilon}_{mnpq} \left[\tilde{R}^{mn} - \left(\frac{f' e^{f(\phi)}}{r_c} \right)^2 \tilde{e}^m \tilde{e}^n \right] \left[(f'' + f'^2) \frac{e^{f(\phi)}}{r_c^2} e^4 \tilde{e}^p \right] e^q$$

$$L_1 = \alpha_1 l^2 r_c d\phi \left\{ \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{R}^{pq} - \left(\frac{2e^{2f(\phi)}}{r_c^2} \right) (3f'^2 + 2f'') \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q + \right. \\ \left. \left(\frac{e^{4f(\phi)}}{r_c^4} f'^2 \right) (5f'^2 + 4f'') \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right\} \quad (3.3.14)$$

Empleando esta misma idea de desarrollo en el resto de los términos encontramos

$$L_2 = \alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} (D_\omega k^{ab}) (D_\omega k^{cd}) e^e \\ = \alpha_1 l^2 r_c d\phi \tilde{\epsilon}_{mnpq} (D_\omega \tilde{k}^{mn}) (D_\omega \tilde{k}^{pq}) \quad (3.3.15)$$

$$L_3 = \alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} k_f^a k_g^b k_c^c k_g^d e^e \\ = \alpha_1 l^2 r_c d\phi \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{k}_f^m \tilde{k}_g^n \tilde{k}_p^p \tilde{k}_g^q \quad (3.3.16)$$

$$L_4 = \alpha_1 \frac{1}{5l^2} \epsilon_{abcde} e^a e^b e^c e^d e^e \\ = \frac{\alpha_1}{l^2} r_c d\phi e^{4f(\phi)} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \quad (3.3.17)$$

$$\begin{aligned}
L_5 &= 2\alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} R^{ab} k_f^c k^{fd} e^e \\
&= 2\alpha_1 l^2 r_c d\phi \left\{ \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{k}_f^p \tilde{k}^{fq} - \frac{e^{2f(\phi)}}{r_c^2} (2f'' + 3f'^2) \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{k}_f^m \tilde{k}^{fn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right\}
\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

$$\begin{aligned}
L_6 &= \frac{2}{3} \alpha_1 \epsilon_{abcde} (D_\omega k^{ab}) e^c e^d e^e \\
&= 2\alpha_1 r_c d\phi e^{2f(\phi)} \tilde{\epsilon}_{mnpq} (D_\omega \tilde{k}^{mn}) \tilde{e}^p \tilde{e}^q
\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

$$\begin{aligned}
L_7 &= 2\alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} R^{ab} (D_\omega k^{cd}) e^e \\
&= 2\alpha_1 l^2 r_c d\phi \left\{ \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} (D_\omega \tilde{k}^{pq}) - \frac{e^{2f(\phi)}}{r_c^2} (2f'' + 3f'^2) \tilde{\epsilon}_{mnpq} (D_\omega \tilde{k}^{mn}) \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right\}
\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

$$\begin{aligned}
L_8 &= 2\alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} (D_\omega k^{ab}) k_f^c k^{fd} e^e \\
&= 2\alpha_1 l^2 r_c d\phi \tilde{\epsilon}_{mnpq} (D_\omega \tilde{k}^{mn}) \tilde{k}_f^p \tilde{k}^{fq}
\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

$$\begin{aligned}
L_9 &= \frac{2}{3} \alpha_1 \epsilon_{abcde} R^{ab} e^c e^d e^e \\
&= \frac{2}{3} \alpha_1 r_c d\phi \left\{ 3e^{2f(\phi)} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q - \frac{e^{4f(\phi)}}{r_c^2} (2f'' + 5f'^2) \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right\}
\end{aligned} \tag{3.3.22}$$

$$\begin{aligned}
L_{10} &= \frac{2}{3} \alpha_1 \epsilon_{abcde} k_f^a k^{fb} e^c e^d e^e \\
&= 2\alpha_1 r_c d\phi e^{2f(\phi)} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{k}_f^m \tilde{k}^{fn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q
\end{aligned} \tag{3.3.23}$$

Al reemplazar (3.3.14 - 3.3.23) en la ecuación (3.2.7) e integrando sobre la quinta dimensión encontramos

$$\begin{aligned}
S_{AdS\mathcal{L}_4}^{(4D)} = & \int_{\Sigma_4} \left\{ A \tilde{\epsilon}_{mnpq} \left[\tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q + \tilde{k}_f^m \tilde{k}_f^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q + \left(D \tilde{k}^{mn} \right) \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right] + \right. \\
& B \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q + 2\pi\alpha_1 l^2 r_c \tilde{\epsilon}_{mnpq} \left[\left(D \tilde{k}^{mn} \right) \left(D \tilde{k}^{pq} \right) + \tilde{k}_f^m \tilde{k}_f^n \tilde{k}_g^p \tilde{k}_g^q \right. \\
& \left. \left. + 2\tilde{R}^{mn} \tilde{k}_f^p \tilde{k}_f^q + 2\tilde{R}^{mn} \left(D \tilde{k}^{pq} \right) + 2 \left(D \tilde{k}^{mn} \right) \tilde{k}_f^p \tilde{k}_f^q + \tilde{R}^{mn} \tilde{R}^{pq} \right] \right\} \quad (3.3.24)
\end{aligned}$$

donde tenemos que los coeficientes A y B están dados como sigue

$$\begin{aligned}
A &= 2\alpha_1 r_c \int_0^{2\pi} e^{2f(\phi)} \left[1 - \frac{l^2}{r_c^2} (3f'^2 + 2f'') \right] d\phi \\
B &= \alpha_1 r_c \int_0^{2\pi} e^{4f(\phi)} \left[\frac{l^2}{r_c^4} (5f'^2 + 4f'') f'^2 + \frac{1}{l^2} - \frac{2}{3r_c^2} (5f'^2 + 2f'') \right] d\phi
\end{aligned} \quad (3.3.25)$$

Notemos que en la ecuación (3.3.24) aparece el término

$$2\pi\alpha_1 l^2 r_c \int_{\Sigma_4} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{R}^{pq}$$

el mencionado término es conocido como el término de Gauss-Bonnet de 4-dimensiones, del cual por cierto se habla con más detalle en (4.2.2), este término Gauss-Bonnet no contribuye a las ecuaciones de la dinámica y puede ser eliminado de la ecuación (3.3.24). Esto mismo aplica al siguiente término de superficie

$$4\pi\alpha_1 l^2 r_c \int_{\Sigma_4} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \left(D \tilde{k}^{pq} \right)$$

De tal manera que la acción viene dada por

$$S_{AdS\mathcal{L}_4}^{(4D)} = \int_{\Sigma_4} \left\{ A \tilde{\epsilon}_{mnpq} \left[\tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q + \tilde{k}_f^m \tilde{k}_f^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q + \left(D \tilde{k}^{mn} \right) \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & B\tilde{\epsilon}_{mnpq}\tilde{e}^m\tilde{e}^n\tilde{e}^p\tilde{e}^q + 2\pi\alpha_1 l^2 r_c \tilde{\epsilon}_{mnpq} \left[\left(D\tilde{k}^{mn} \right) \left(D\tilde{k}^{pq} \right) + \tilde{k}_f^m \tilde{k}^{fn} \tilde{k}_g^p \tilde{k}^{gq} \right. \\
 & \left. + 2\tilde{R}^{mn} \tilde{k}_f^p \tilde{k}^{fq} + 2 \left(D\tilde{k}^{mn} \right) \tilde{k}_f^p \tilde{k}^{fq} \right] \} \tag{3.3.26}
 \end{aligned}$$

En lo relativo a los coeficientes A y B , nos interesa integrar ambos términos en función de la coordenada ϕ , para lograrlo es necesario definir una función $f(\phi)$ y ya que, como se mencionó previamente, esta función $f(\phi)$ es arbitraria y continuamente diferenciable, elegimos (siendo que esta no es la única opción) $f(\phi) = \ln(\sin \phi)$, en consecuencia los coeficientes A y B toman las siguientes formas

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2\pi\alpha_1 (l^2 + r_c^2)}{r_c} \\
 B &= \frac{\pi\alpha_1}{4l^2 r_c^3} [3r_c^4 + 2l^2 r_c^2 - l^4]
 \end{aligned} \tag{3.3.27}$$

De la acción (3.3.26) podemos ver que esta incluye campos no Abelianos \tilde{k}^{mn}_μ , que podrían ser interpretados como campos gauge no Abelianos que conducen a inflación, se remite al lector a las ref. (26), (30), (1), (46) y (28).

3.4. Gravedad de Einstein 4D extendida a partir de la acción de la gravedad Maxwell-Chern-Simons

Manteniendo en mente que el álgebra de Maxwell puede ser obtenida del álgebra $AdS\mathcal{L}_4$ por medio de una contracción Inönü-Wigner generalizada (44) y (54), resulta natural preguntarnos ¿cómo obtener el correspondiente Lagrangiano del álgebra de Maxwell a partir del Lagrangiano del álgebra $AdS\mathcal{L}_4$?, tenemos que también es posible obtener el Lagrangiano para el álgebra de Maxwell utilizando el mismo procedimiento. Por lo que, mostraremos que al emplear la contracción Inönü-Wigner en el sentido Weimar-Woods (58), que puede ser consultada en el

apéndice (F), sobre el Lagrangiano (3.2.7), obtenemos el Lagrangiano del álgebra de Maxwell. Así, empezamos por escribir el Lagrangiano (3.2.7) en términos de los generadores como tenemos a continuación

$$\begin{aligned}
 L_{ChS-5}^{(AdS\mathcal{L}_4)} &= \alpha_1 l^2 R^{ab} R^{cd} e^e \langle J_{ab} J_{cd} P_e \rangle + \alpha_1 l^2 (Dk^{ab}) (Dk^{cd}) e^e \langle Z_{ab} Z_{cd} P_e \rangle + \\
 &\alpha_1 l^2 k_f^a k^{fb} k_g^c k^{gd} e^e \langle Z_{ab} Z_{cd} P_e \rangle + \alpha_1 \frac{1}{5l^2} e^a e^b e^c e^d e^e \langle P_a P_b P_c P_d P_e \rangle + \\
 &\alpha_1 2l^2 R^{ab} k_f^c k^{fd} e^e \langle J_{ab} Z_{cd} P_e \rangle + \alpha_1 \frac{2}{3} (Dk^{ab}) e^c e^d e^e \langle Z_{ab} P_c P_d P_e \rangle + \\
 &\alpha_1 2l^2 R^{ab} (Dk^{cd}) e^e \langle J_{ab} Z_{cd} P_e \rangle + \alpha_1 2l^2 (Dk^{ab}) k_f^c k^{fd} e^e \langle Z_{ab} Z_{cd} P_e \rangle + \\
 &\alpha_1 \frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e \langle J_{ab} P_c P_d P_e \rangle + \alpha_1 \frac{2}{3} k_f^a k^{fb} e^c e^d e^e \langle Z_{ab} P_c P_d P_e \rangle
 \end{aligned}$$

Seguido reescalamos los generadores y campos como se muestra abajo

$$\begin{aligned}
 P_a &\rightarrow \xi P_a \\
 e^a &\rightarrow \xi^{-1} e^a \\
 & \\
 Z_{ab} &\rightarrow \xi^2 Z_{ab} \\
 k^{ab} &\rightarrow \xi^{-2} k^{ab}
 \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

$$L_{ChS-5}^{(AdS\mathcal{L}_4)} = \alpha_1 l^2 R^{ab} R^{cd} e^e \xi^{-1} \langle \xi J_{ab} J_{cd} P_e \rangle + \alpha_1 l^2 (Dk^{ab}) (Dk^{cd}) e^e \xi^{-5} \langle \xi^5 Z_{ab} Z_{cd} P_e \rangle +$$

$$\alpha_1 l^2 k_f^a k_f^{fb} k_g^c k_g^{gd} e^e \xi^{-9} \langle \xi^5 Z_{ab} Z_{cd} P_e \rangle + \alpha_1 \frac{1}{5l^2} e^a e^b e^c e^d e^e \xi^{-5} \langle \xi^5 P_a P_b P_c P_d P_e \rangle +$$

$$\alpha_1 2l^2 R^{ab} k_f^c k_f^{fd} e^e \xi^{-5} \langle \xi^3 J_{ab} Z_{cd} P_e \rangle + \alpha_1 \frac{2}{3} (Dk^{ab}) e^c e^d e^e \xi^{-5} \langle \xi^5 Z_{ab} P_c P_d P_e \rangle +$$

$$\alpha_1 2l^2 R^{ab} (Dk^{cd}) e^e \xi^{-3} \langle \xi^3 J_{ab} Z_{cd} P_e \rangle + \alpha_1 2l^2 (Dk^{ab}) k_f^c k_f^{fd} e^e \xi^{-7} \langle \xi^5 Z_{ab} Z_{cd} P_e \rangle +$$

$$\alpha_1 \frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e \xi^{-3} \langle \xi^3 J_{ab} P_c P_d P_e \rangle + \alpha_1 \frac{2}{3} k_f^a k_f^{fb} e^c e^d e^e \xi^{-7} \langle \xi^5 Z_{ab} P_c P_d P_e \rangle$$

Luego, hacemos $\xi \rightarrow \infty$, y finalmente obtenemos el Lagrangiano de nuestro interés,

$$\begin{aligned} L_{ChS-5}^{(AdSL_4)} &= \alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e + \frac{2}{3} \alpha_1 \epsilon_{abcde} R^{ab} e^c e^d e^e \\ &+ \frac{\alpha_1}{5l^2} \epsilon_{abcde} e^a e^b e^c e^d e^e + \frac{2}{3} \alpha_1 \epsilon_{abcde} (Dk^{ab}) e^c e^d e^e \\ &+ \alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} (Dk^{ab}) (Dk^{cd}) e^e + 2\alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} R^{ab} (Dk^{cd}) e^e \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

el cual corresponde al Lagrangiano Chern-Simons para el álgebra de Maxwell.

Con la finalidad de obtener una acción para una teoría de la gravedad de cuatro dimensiones a partir de la acción Chern-Simons para el álgebra de Maxwell seguimos el mismo procedimiento descrito en (3.3). Por consiguiente, reemplazando (3.3.4), (3.3.5) y (3.3.11) en (3.4.2), y empleando $\tilde{\epsilon}_{mnpq} = \epsilon_{mnpq4}$, encontramos

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e \\
 &= \alpha_1 l^2 r_c d\phi \left\{ \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{R}^{pq} \right. \\
 &\quad - 2 \frac{e^{2f(\phi)}}{r_c^2} (3f'^2 + 2f'') \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q \\
 &\quad \left. + \frac{e^{4f(\phi)}}{r_c^4} (5f'^2 + 4f'') f'^2 \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right\} \quad (3.4.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_2 &= \frac{2\alpha_1}{3} \epsilon_{abcde} R^{ab} e^c e^d e^e \\
 &= \frac{2\alpha_1}{3} r_c d\phi \left\{ 3e^{2f(\phi)} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right. \\
 &\quad \left. - \frac{e^{4f(\phi)}}{r_c^2} (5f'^2 + 2f'') \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right\} \quad (3.4.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_3 &= \frac{\alpha_1}{5l^2} \epsilon_{abcde} e^a e^b e^c e^d e^e \\
 &= \frac{\alpha_1}{l^2} r_c d\phi e^{4f(\phi)} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \quad (3.4.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_4 &= \frac{2\alpha_1}{3} \epsilon_{abcde} (Dk^{ab}) e^c e^d e^e \\
 &= 2\alpha_1 r_c d\phi e^{2f(\phi)} \tilde{\epsilon}_{mnpq} (D\tilde{k}^{mn}) \tilde{e}^p \tilde{e}^q \quad (3.4.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_5 &= \alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} (Dk^{ab}) (Dk^{cd}) e^e \\
 &= \alpha_1 l^2 r_c d\phi \tilde{\epsilon}_{mnpq} (D\tilde{k}^{mn}) (D\tilde{k}^{pq}) \quad (3.4.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_6 &= 2\alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} R^{ab} (Dk^{cd}) e^e \\
 &= 2\alpha_1 l^2 r_c d\phi \left\{ \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} (D\tilde{k}^{pq}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{e^{2f(\phi)}}{r_c^2} (3f'^2 + 2f'') \tilde{\epsilon}_{mnpq} (D\tilde{k}^{mn}) \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right\} \quad (3.4.8)
 \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento realizado con anterioridad, sustituimos las ecuaciones (3.4.3 - 3.4.8) en la ecuación (3.4.2), y después de realizar algo de trabajo algebraico tenemos que la acción nos va quedando como sigue

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\Sigma_4} \left\{ A \tilde{\epsilon}_{mnpq} \left[\tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q + (D\tilde{k}^{mn}) \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right] + B \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q + \right. \\
 &\quad \left. 2\pi\alpha_1 l^2 r_c \tilde{\epsilon}_{mnpq} \left[\tilde{R}^{mn} \tilde{R}^{pq} + (D\tilde{k}^{mn}) (D\tilde{k}^{pq}) + 2\tilde{R}^{mn} (D\tilde{k}^{pq}) \right] \right\} \quad (3.4.9)
 \end{aligned}$$

donde los coeficientes A y B están dados por

$$\begin{aligned}
 A &= 2\alpha_1 r_c \int_0^{2\pi} e^{2f(\phi)} \left[1 - \frac{l^2}{r_c^2} (3f'^2 + 2f'') \right] d\phi \\
 B &= \alpha_1 r_c \int_0^{2\pi} e^{4f(\phi)} \left[\frac{l^2}{r_c^4} (5f'^2 + 4f'') f'^2 + \frac{1}{l^2} - \frac{2}{3r_c^2} (5f'^2 + 2f'') \right] d\phi
 \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

De (3.4.10) notamos que estos coeficientes A y B son exactamente los mismos obtenidos en (3.3.25). Por otro lado, observamos en la acción la presencia de los términos $2\pi\alpha_1 l^2 r_c \int_{\Sigma_4} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{R}^{pq}$ y $4\pi\alpha_1 l^2 r_c \int_{\Sigma_4} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} (D\tilde{k}^{pq})$, los cuales previamente se identificaron como términos que no contribuyen a las ecuaciones de la dinámica, de modo que la acción final viene dada por

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\Sigma_4} \left\{ A \tilde{\epsilon}_{mnpq} \left[\tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q + (D\tilde{k}^{mn}) \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right] + \right. \\
 &\quad \left. B \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q + 2\pi\alpha_1 l^2 r_c \tilde{\epsilon}_{mnpq} (D\tilde{k}^{mn}) (D\tilde{k}^{pq}) \right\} \quad (3.4.11)
 \end{aligned}$$

Esta acción coincide con la acción dada en la ecuación (29) de la referencia (16) (consultar el apéndice (D)), siempre y cuando se tenga que los coeficientes sean $A = -1/2\kappa = \lambda/2\kappa\Lambda$, $B = \lambda/4\kappa$, y $\lambda/4\kappa\Lambda^2 = 2\pi\alpha_1 l^2 r_c$. Esto significa que la acción dada en (3.4.11) y la acción (29) dada en (16) coinciden sólo si $\Lambda = 1/l^2$, es decir si $\lambda = -1/l^2$. Adicionalmente, es claro que para que la igualdad $\lambda/4\kappa\Lambda^2 = 2\pi\alpha_1 l^2 r_c$ se cumpla es necesario que $\alpha_1 = -1/8\pi r_c \kappa$.

Es interesante señalar que la acción (3.4.11) también puede ser obtenida a partir de la acción dada en (3.3.26) utilizando la contracción Inönü-Wigner en el sentido Weimar-Woods (58).

Capítulo 4

Cosmología en gravedad

Einstein-Gauss-Bonnet en $5D$ y $4D$

4.1. Modelo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

El principio cosmológico (véase el apéndice E1) nos da una imagen del universo como un sistema de “fluido cósmico” (9). El requisito de un Universo homogéneo e isotrópico significa que el espacio debe de tener curvatura constante, por lo que la métrica para un espacio-tiempo de 4-dimensiones con curvatura constante está dada como sigue

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (4.1.1)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala dimensional, k es la constante de curvatura, y r es la distancia radial adimensional. Esta ecuación (4.1.1) es conocida como la métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) (5). La mencionada métrica es solución de la ecuación de Einstein para un universo homogéneo e isotrópico, dicha solución es conocida como las ecuaciones de Friedmann (véase el apéndice E2), notemos que en (4.1.1) se ha considerado que la velocidad de la luz es igual a la unidad ($c = 1$).

Es preciso señalar que en la ecuación de Einstein $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ con $\kappa = -8\pi G$

para un universo homogéneo e isotrópico, el lado izquierdo de la ecuación está determinado por la métrica FLRW con sus dos parámetros; la constante de curvatura k y el factor de escala $a(t)$. Sin embargo, necesitamos especificar el tensor de energía-momento del lado derecho de la ecuación, el cual debe ser compatible con el principio cosmológico. La opción plausible más simple es tomar el fluido cósmico como un fluido ideal o fluido perfecto, es decir como sigue (9)

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (\rho + p) u_\mu u_\nu \quad (4.1.2)$$

donde p es la presión, ρ es la densidad de masa, y u^μ es el campo de la cuadrivelocidad del fluido.

Luego, las ecuaciones de Friedmann son solo la ecuación de Einstein con la métrica FLRW y con el tensor de energía-momento para un fluido ideal. En consecuencia, las ecuaciones de Friedmann toman la forma

1. Para $G_{00} = -8\pi G\rho$

$$\frac{\dot{a}^2(t) + k}{a^2(t)} = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (4.1.3)$$

2. Para $G_{ij} = -8\pi Gpg_{ij}$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3} (3p + \rho) \quad (4.1.4)$$

Debido al principio cosmológico las ecuaciones (4.1.3) y (4.1.4) tienen una interpretación Newtoniana simple. No obstante, deben ser entendidas en el contexto de la relatividad general, ya que todavía involucran conceptos geométricos como curvatura, entre otros. El punto de vista apropiado son las ecuaciones de Einstein aplicadas a la cosmología (9).

El deseo de Einstein de un universo estático lo llevó a modificar su ecuación de campo original para la relatividad general. Esto nos conduce a la pregunta ¿cómo es posible modificar una ecuación con argumentos teóricos sólidos y que además sea exitosa en la descripción de los fenómenos gravitatorios? La posibilidad es agregando una característica que sea demasiado pequeña para ser observada a escalas subcósmicas, pero suficientemente importante en las dimensiones verdaderamente grandes.

Aún así lo que agreguemos a la ecuación de Einstein, debe ser compatible con su estructura tensorial. Un tensor que cumple con la estructura tensorial, es decir que sea simétrico, de rango 2 y cuya derivada covariante sea nula, es el tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Por lo tanto, es matemáticamente coherente incluir dicho término en el lado izquierdo de la ecuación de campo, así tenemos

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (4.1.5)$$

donde Λ es llamada la constante cosmológica. La interpretación física de este nuevo término se puede obtener, más fácilmente, si lo trasladamos al lado derecho, es decir (9)

$$G_{\mu\nu} = \kappa (T_{\mu\nu} + \kappa^{-1} \Lambda g_{\mu\nu}) = \kappa (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\Lambda}) \quad (4.1.6)$$

donde $T_{\mu\nu}^{\Lambda} = \kappa^{-1} \Lambda g_{\mu\nu}$ puede ser llamado el “tensor de energía del vacío”. En ausencia de distribución ordinaria de masa/energía $T_{\mu\nu} = 0$ (por lo tanto, el vacío), el término fuente $T_{\mu\nu}^{\Lambda}$ aún puede generar un campo gravitacional.

4.2. Gravedad Einstein-Gauss-Bonnet

4.2.1. Introducción

Desde sus inicios han habido intentos de proporcionar alternativas a la teoría de la relatividad general de Einstein. Estas alternativas a la teoría de la relatividad general se presentan por una variedad de razones matemáticas, filosóficas y observacionales, pero casi todas tienen el objetivo común de generalizar la teoría que Einstein propuso inicialmente (25).

Dentro de este zoológico de posibilidades gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet posee un lugar especial, esta teoría fue inicialmente propuesta por Lanczos (39) y (40), y posteriormente generalizada por Lovelock (42) y (43). Estas teorías son únicas en el sentido de que no requieren campos fundamentales adicionales más allá de los que corresponden a relatividad general, al tiempo que mantienen la propiedad de que las ecuaciones de campo de la teoría se pueden escribir con no más de segundas derivadas de la métrica. Por lo tanto, están particularmente bien

motivadas y ocupan una posición privilegiada única entre las alternativas a la relatividad general (25).

4.2.2. Término de Gauss-Bonnet

Recordemos de la sección (2.2) que las ecuaciones de campo de Lovelock se pueden derivar de la siguiente densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \sum_j \alpha_j \mathcal{R}^j \quad (4.2.1)$$

donde

$$\mathcal{R}^j \equiv \frac{1}{2^j} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_j \beta_j}^{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_j \nu_j} \prod_{i=1}^j R_{\mu_i \nu_i}^{\alpha_i \beta_i} \quad (4.2.2)$$

Continuando con dimensiones más altas, en el caso $D = 5$ ó 6 la densidad Lagrangiana puede contener tres términos, siendo el último de orden proporcional al cuadrado del tensor de Riemann, esto da

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} [\alpha_0 + \alpha_1 R + \alpha_2 \mathcal{G}] \quad (4.2.3)$$

donde

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (4.2.4)$$

se conoce como el término de Gauss-Bonnet. La combinación de los términos de Einstein-Hilbert y Gauss-Bonnet en la acción gravitatoria da lugar a teorías que se conocen como gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet. Estas teorías son interesantes en parte porque la teoría de cuerdas predice que, en el nivel clásico, las ecuaciones de Einstein están sujetas a correcciones de orden superior que suelen describirse mediante términos de curvatura de orden superior en la acción. Como acabamos de ver, el término de Gauss-Bonnet es el único término que es cuadrático en la curvatura y que da lugar a ecuaciones de campo de segundo orden (25).

Los fundamentos matemáticos de las teorías que contienen tanto términos de

4.3. Cosmología en gravedad Einstein-Gauss-Bonnet sin constante cosmológica

Einstein como de Gauss-Bonnet han sido ampliamente estudiados, particularmente los modelos cosmológicos, inflacionarios, y en el contexto de la cosmología de “branas” (19).

4.3. Cosmología en gravedad Einstein-Gauss-Bonnet sin constante cosmológica

Considerando la teoría de Lanczos-Lovelock dada en la sección 2.2, y la densidad Lagrangiana en forma tensorial dada en (4.2.3), tenemos que la acción en 5-dimensiones en el lenguaje de formas diferenciales para dicha teoría está dada por ((43), (62), (57) y (12))

$$S_{LL}^{(5D)} = \frac{1}{8\kappa_5} \int \epsilon_{abcde} \left(\alpha R^{ab} R^{cd} e^e + \frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e + \beta e^a e^b e^c e^d e^e \right) \quad (4.3.1)$$

donde α y β son constantes arbitrarias, $e^a = e^a_\mu dx^\mu$ es el vierbein, $\omega^{ab} = \omega^{ab}_\mu dx^\mu$ es la conexión de espín, $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_c \omega^{cb}$ es la 2-forma curvatura, y $\kappa_5 = 12\pi^2 G_5$, donde G_5 es la constante de Newton en 5-dimensiones.

Al hacer $\alpha = 0$ en la acción (4.3.1), y luego comparándola con la acción de Einstein-Hilbert-Cartan con constante cosmológica en cinco dimensiones,

$$S_{EHC}^{(5D)} = \frac{1}{12\kappa_5} \int \epsilon_{abcde} \left(R^{ab} e^c e^d e^e - \frac{\Lambda_{5D}}{10} e^a e^b e^c e^d e^e \right) \quad (4.3.2)$$

podemos ver que la acción (4.3.1) coincide con la acción (4.3.2) sólo si $\beta = -\Lambda_{5D}/15$. Con esta elección de la constante β , la acción (4.3.1) toma la forma de la acción de Einstein-Gauss-Bonnet (EGB) con constante cosmológica

$$S_{EGB}^{(5D)} = \frac{1}{8\kappa_5} \int \epsilon_{abcde} \left(\alpha R^{ab} R^{cd} e^e + \frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e - \frac{\Lambda_{5D}}{15} e^a e^b e^c e^d e^e \right) \quad (4.3.3)$$

Por otro lado, en presencia de materia, la acción en cinco dimensiones está dada por

$$S^{(5D)} = S_{EGB}^{(5D)} + S_M^{(5D)} \quad (4.3.4)$$

4.3. Cosmología en gravedad Einstein-Gauss-Bonnet sin constante cosmológica 43

Ahora bien, considerando la acción (4.3.4) sin constante cosmológica, tenemos que el Lagrangiano tiene la forma

$$L^{(5D)} = L_{EGB}^{(5)} |_{\Lambda_5=0} + L_M^{(5D)} \quad (4.3.5)$$

con

$$L_{EGB}^{(5)}(e, \omega) |_{\Lambda_5=0} = \frac{2}{3} \epsilon_{abcde} R^{ab} e^c e^d e^e + \alpha \epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e \quad (4.3.6)$$

siendo $\alpha = |\alpha| \operatorname{sgn}(\alpha)$ una constante y $L_M^{(5D)}$ representa un Lagrangiano de materia. Más adelante se muestran dos escenarios cosmológicos asociados con $\operatorname{sgn}(\alpha)$.

La variación de la acción $S^{(5D)}$ con respecto al vielbein e^a y la conexión del espín ω^{ab} conduce a las siguientes ecuaciones de campo

$$\epsilon_{abcde} (2R^{bc} e^d e^e + |\alpha| \operatorname{sgn}(\alpha) R^{bc} R^{de}) = -8\kappa_5 \frac{\delta L_M^{(5D)}}{\delta e^a} \quad (4.3.7)$$

$$\epsilon_{abcde} (T^c e^d e^e + |\alpha| \operatorname{sgn}(\alpha) R^{cd} T^e) = -4\kappa_5 \frac{\delta L_M^{(5D)}}{\delta \omega^{ab}} \quad (4.3.8)$$

Por otra parte si la materia bajo consideración no tiene espín, entonces

$$\frac{\delta L_M^{(5D)}}{\delta \omega^{ab}} = 0 \quad (4.3.9)$$

$$\epsilon_{abcde} (e^c e^d + |\alpha| \operatorname{sgn}(\alpha) R^{cd}) T^e = 0, \quad T^e = 0 \quad (4.3.10)$$

Luego, puesto que

$$\frac{\delta L_M}{\delta e^a} = \frac{1}{4!} T_a^\mu \epsilon_{\mu bcde} e^b e^c e^d e^e \quad (4.3.11)$$

donde $T^{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento, tenemos que la ecuación (4.3.7) toma la forma

4.3. Cosmología en gravedad Einstein-Gauss-Bonnet sin constante cosmológica

$$\epsilon_{abcde} (2R^{bc}e^de^e + |\alpha| \operatorname{sgn}(\alpha)R^{bc}R^{de}) = -\frac{\kappa_5}{3}T_a{}^\mu \epsilon_{\mu bcde} e^b e^c e^d e^e \quad (4.3.12)$$

4.3.1. Ecuaciones de campo y cosmología

A continuación consideramos una métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) plana, esto es tomar $k = 0$ en la ecuación (4.1.1), que en cinco dimensiones se escribe como sigue

$$dS^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (4.3.13)$$

Luego, calculando la curvatura correspondiente a la métrica FLRW tenemos

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \omega^{cb}$$

$$R^0{}_1 = d\omega^0{}_1 + \omega^0{}_c \omega^{c1}$$

$$\begin{aligned} R^0{}_1 &= d\left(\frac{\dot{a}}{a}e^1\right) \\ &= d\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)e^1 + \frac{\dot{a}}{a}de^1 \\ &= \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2}dt \wedge e^1 + \frac{\dot{a}}{a}e^0 \wedge e^1 \\ &= \frac{\ddot{a}}{a}e^0 \wedge e^1 \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

$$R^{01} = \eta^{11}R^0{}_1 = (1)\frac{\ddot{a}}{a}e^0 e^1 = \frac{\ddot{a}}{a}e^0 e^1$$

Realizando el mismo procedimiento para las componentes R^{02}, R^{03}, R^{04} , encontramos que podemos escribir estas componentes como sigue

$$R^{0p} = \frac{\ddot{a}}{a}e^0 e^p \quad (4.3.15)$$

Vamos ahora a determinar la componente R^{12} ,

$$R^1{}_2 = d\omega^1{}_2 + \omega^1{}_c \omega^c{}_2$$

$$\begin{aligned} R^1{}_2 &= \omega^1{}_0 \omega^0{}_2 \\ &= \left(\frac{\dot{a}}{a} e^1 \right) \wedge \left(\frac{\dot{a}}{a} e^2 \right) \\ &= \frac{\dot{a}^2}{a^2} e^1 e^2 \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

$$R^{12} = \eta^{22} R^1{}_2 = (1) \frac{\dot{a}^2}{a^2} e^1 e^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 e^1 e^2$$

Bajo el mismo procedimiento se encuentra que las componentes R^{pq} , pueden ser escritas como se ve a continuación

$$R^{pq} = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 e^p e^q \tag{4.3.17}$$

Pero, como tal, es de nuestro interés escribir las componentes de la curvatura en términos del parámetro de Hubble $H = \dot{a}/a$,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = \left(\dot{H} + H^2 \right)$$

$$\left(\dot{H} + H^2 \right) = \frac{\left(\dot{H} + H^2 \right)}{H^2} H^2 = \left(\frac{\dot{H}}{H^2} + 1 \right) H^2$$

$$R^{0p} = \frac{\ddot{a}}{a} e^0 e^p = \left(\dot{H} + H^2 \right) e^0 e^p = \left(\frac{\dot{H}}{H^2} + 1 \right) H^2 e^0 e^p = -q H^2 e^0 e^p \tag{4.3.18}$$

donde se ha definido

46.3. Cosmología en gravedad Einstein-Gauss-Bonnet sin constante cosmológica

$$q = - \left(\frac{\dot{H}}{H^2} + 1 \right) \quad (4.3.19)$$

este último es el parámetro de desaceleración.

$$R^{pq} = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 e^p e^q = H^2 e^p e^q \quad (4.3.20)$$

donde $p, q = 1, 2, 3, 4$.

A partir de aquí, se tiene que cuando $q < 0$ entonces $\ddot{a} > 0$ y cuando $q > 0$ entonces $\ddot{a} < 0$.

Enseguida, se considera un tensor de energía-momentum correspondiente a un fluido perfecto,

$$T_{\mu}^{\nu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p, p) \quad (4.3.21)$$

Después de reemplazar (4.3.18) y (4.3.20) en (4.3.12) obtenemos el constraint de Friedmann y la ecuación de conservación

$$\begin{aligned} 2H^2 + |\alpha| \text{sgn}(\alpha) H^4 &= \frac{\kappa_5}{3} \rho \\ 6H^2 + 3|\alpha| \text{sgn}(\alpha) H^4 &= \kappa_5 \rho \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

Para determinar la ecuación de conservación, es necesario considerar la métrica dada arriba en (4.3.13), así tenemos que las componentes de la métrica van como sigue

$$g_{00} = -1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} = a^2(t) \quad (4.3.23)$$

A partir de las componentes de la métrica es posible calcular los símbolos de Christoffel de segundo género,

$$g^{ir} \Gamma_{abr} = \Gamma_{ab}^i$$

$$\Gamma_{11}^0 = \Gamma_{22}^0 = \Gamma_{33}^0 = \Gamma_{44}^0 = a(t)\dot{a}(t) \quad (4.3.24)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{04}^4 = \frac{\dot{a}}{a}$$

Teniendo en cuenta los símbolos de Christoffel en (4.3.24), es posible determinar la ecuación de la conservación de la energía como sigue

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = \partial_\nu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\nu} T^{\mu\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} T^{\nu\lambda} = 0 \quad (4.3.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + 4\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) &= 0 \\ \frac{d\rho}{dt} \frac{a}{\dot{a}} &= -4(\rho + p) \\ \frac{d\rho}{dz} \frac{dz}{dt} \frac{a}{\dot{a}} &= -4(\rho + p) \end{aligned}$$

pero sabemos que $z = \frac{a_0}{a} - 1$ con $a_0 = a(t_0)$, de tal manera que después de algo de cálculo se encuentra que la ecuación de conservación es

$$(1 + z) \frac{d\rho}{dz} = 4(\rho + p) \quad (4.3.26)$$

donde z es el conocido parámetro de corrimiento al rojo o en inglés redshift. A continuación elegimos $\kappa_5 = 1$, y además empleando la ecuación de estado (60), es decir

$$p = w\rho \quad (4.3.27)$$

donde w es la densidad de energía oscura, tenemos que es posible reescribir la ecuaciones (4.3.22) y (4.3.26) de la siguiente la forma

$$6H^2 \left(1 + \frac{1}{2} |\alpha| \operatorname{sgn}(\alpha) H^2 \right) = \rho \quad (4.3.28)$$

4.3. Cosmología en gravedad Einstein-Gauss-Bonnet sin constante cosmológica

y

$$\begin{aligned}
 (1+z) \frac{d\rho}{dz} &= 4(\rho + p) \\
 (1+z) \frac{d\rho}{dz} &= 4(\rho + w\rho) \\
 \rho(z) &= \rho(0) (1+z)^{4(1+w)}
 \end{aligned}
 \tag{4.3.29}$$

Tal que la solución para (4.3.28), cuando $\text{sgn}(\alpha) = 1$ es,

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{\sqrt{3} \sqrt{|\alpha| \left(-3 + \sqrt{9 + 3|\alpha| \rho(z)} \right)}}{3|\alpha|} \\
 H^2(z) &= \frac{1}{|\alpha|} \left(\sqrt{1 + \frac{|\alpha|}{3} \rho(z)} - 1 \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.3.30}$$

Mientras que para $\text{sgn}(\alpha) = -1$ es,

$$H_{\pm}^2(z) = \frac{1}{|\alpha|} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{|\alpha|}{3} \rho(z)} \right)
 \tag{4.3.31}$$

El último caso muestra un límite superior para ρ , es decir

$$\rho(z_s) = \frac{3}{|\alpha|}
 \tag{4.3.32}$$

$$H_{\pm}(z_s) = \sqrt{\frac{1}{|\alpha|}}
 \tag{4.3.33}$$

Siendo

$$\begin{aligned}
 \rho(z) &= \rho(0) (1+z)^{4(1+w)} \\
 \frac{3}{|\alpha|} &= \rho(0) (1+z_s)^{4(1+w)} \\
 z_s &= -1 + \left(\frac{3}{|\alpha| \rho(0)} \right)^{\frac{1}{4(1+w)}}
 \end{aligned} \tag{4.3.34}$$

Vamos a buscar reemplazar (4.3.34) en (4.3.31), para ello necesitamos hacer algunos despejes,

$$z_s = -1 + \left(\frac{3}{|\alpha| \rho(0)} \right)^{\frac{1}{4(1+w)}} \Rightarrow \frac{|\alpha|}{3} = \frac{1}{\rho(0) (1+z_s)^{4(1+w)}}$$

tomamos en cuenta (4.3.29), y seguido reemplazamos en (4.3.31), así nos queda

$$H_{\pm}^2(z) = \frac{1}{|\alpha|} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1+z}{1+z_s} \right)^{4(1+w)}} \right) \tag{4.3.35}$$

Por lo que tenemos una solución para $H_{\pm}(z)$ si $z \leq z_s$. De acuerdo a (4.3.34) y (4.3.35), y considerando $w = 0$ (materia oscura fría¹), tenemos

$$z_s = -1 + \left(\frac{3}{|\alpha| \rho(0)} \right)^{\frac{1}{4}} \gtrless 0 \tag{4.3.36}$$

Si $-1 < z_s < 0$, entonces $\rho(z \rightarrow z_s) \rightarrow 3/|\alpha| \Rightarrow H_{\pm}(z \rightarrow z_s) \rightarrow \sqrt{1/|\alpha|}$, es decir se evoluciona a un espacio de de-Sitter, universo con curvatura constante y positiva. A diferencia de la materia oscura fría de 4-dimensiones que evoluciona a un espacio de de-Sitter cuando $z \rightarrow -1$.

Luego, si $z_s > 0$, tenemos una situación no real. Por último, si $z_s = 0$ y $w = 0$ entonces

$$H_{\pm}^2(z) = \frac{\rho(0)}{3} \left(1 \pm \sqrt{1 - (1+z)^4} \right) \tag{4.3.37}$$

¹Un neutrino pesado es un ejemplo de materia oscura fría, es decir, partículas que tienen velocidades insignificantes a lo largo de la historia del Universo (41).

50.3. Cosmología en gravedad Einstein-Gauss-Bonnet sin constante cosmológica

De tal manera que

$$H_{\pm}^2(0) = \frac{\rho(0)}{3} \quad (4.3.38)$$

y

$$H_+^2(z \rightarrow -1) = \frac{\rho(0)}{3} (1 + \sqrt{1}) = 2\frac{\rho(0)}{3} \quad (4.3.39)$$

Recordando que en la presente discusión no hay constante cosmológica (pensando en una evolución de de-Sitter).

Ahora bien, en ausencia de ρ , a partir de (4.3.31), obtenemos una solución auto-acelerada dada por,

$$H_+ = \sqrt{\frac{2}{|\alpha|}} \quad (4.3.40)$$

A continuación reemplazamos (4.3.29) en (4.3.30), de donde es directo mostrar que

$$w > -1 \Rightarrow \rho(z \rightarrow -1) \rightarrow 0 \quad (4.3.41)$$

y

$$H(z \rightarrow -1) \rightarrow 0 \quad (4.3.42)$$

tienen el comportamiento típico de las componentes cósmicas no asociadas con la energía oscura.

De (4.3.31) se infiere la existencia de un límite superior para la densidad de energía dada por $\rho(z_s) = 3/|\alpha|$ si y sólo si $H_{\pm}(z_s) = \sqrt{1/|\alpha|}$. Mientras que en el modelo de materia oscura fría en 4-dimensiones se tiene que $\rho(z \rightarrow -1) \rightarrow 0 \Rightarrow H(z \rightarrow -1) \rightarrow \sqrt{\Lambda/3}$.

Por otra parte, como sabemos el parámetro de Hubble puede cambiar con el tiempo, de tal modo que se hace necesario introducir otro parámetro que proporcione su

tasa de cambio, este es el parámetro de desaceleración² (9)

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$$

este parámetro de desaceleración q puede ser escrito como

$$q = -1 + \frac{1}{2}(1+z) \frac{1}{H^2} \frac{dH^2}{dz} \quad (4.3.43)$$

que después de trabajar la ecuación (4.3.28) como sigue

$$\begin{aligned} 6H^2 \left(1 + \frac{1}{2}\alpha H^2\right) &= \rho \\ 6\frac{dH^2}{dz} \left(1 + \frac{1}{2}\alpha H^2\right) + 6H^2 \frac{d}{dz} \left(1 + \frac{1}{2}\alpha H^2\right) &= \frac{d\rho}{dz} \\ 6\frac{dH^2}{dz} (1 + \alpha H^2) &= \frac{d\rho}{dz} \end{aligned} \quad (4.3.44)$$

y de trabajar la ecuación (4.3.29)

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \rho(0) (1+z)^{4(1+w)} \\ \frac{d\rho}{dz} &= \rho(0) 4(1+w) (1+z)^{4(1+w)-1} \frac{d}{dz} (1+z) \\ \frac{d\rho}{dz} &= \rho(0) 4(1+w) (1+z)^{4(1+w)-1} \\ \frac{d\rho}{dz} &= \rho(0) 4(1+w) \frac{(1+z)^{4(1+w)}}{(1+z)} \end{aligned} \quad (4.3.45)$$

A continuación simplemente igualamos los resultados en (4.3.44) y (4.3.45), de donde se obtiene

$$(1+z) \frac{1}{H^2} \frac{dH^2}{dz} = \frac{4(1+w)}{(1+\alpha H^2)} \left(1 + \frac{1}{2}\alpha H^2\right)$$

²El parámetro de desaceleración es una medida de la desaceleración de la expansión del universo. El signo menos se incluye porque se pensaba que la expansión debería estar desacelerándose bajo la atracción gravitatoria mutua de la materia a medida que el universo envejece.

52.3. Cosmología en gravedad Einstein-Gauss-Bonnet sin constante cosmológica

sustituyendo en (4.3.43), es directo obtener

$$q = -1 + 2(1 + w)f(z) \quad (4.3.46)$$

donde hemos definido

$$f(z) = \frac{1}{(1 + \alpha H^2)} \left(1 + \frac{1}{2} \alpha H^2(z) \right) \quad (4.3.47)$$

y $f(z) < 1$. El constraint de Friedmann nos dice que independientemente de $\text{sgn}(\alpha)$, la siguiente desigualdad debe ser satisfecha,

$$1 + \frac{1}{2} \alpha H^2(z) > 0 \quad (4.3.48)$$

por lo que

$$q(z) < 0 \Rightarrow 2(1 + w) < \frac{1}{f(z)} \quad (4.3.49)$$

Por otro lado, para $w \geq 0$ (los fluidos que por sí mismos generan desaceleración, $q = 1 + 2w > 0$), es evidente que $2(1 + w) > 1$, por lo que la desigualdad en (4.3.49) es satisfecha.

En las buenas cuentas, es perfectamente posible satisfacer $q(z) < 0$ en (4.3.49), por lo que consistencia con la tan llamada condición de la métrica Lorentziana. De hecho, de acuerdo a la referencia (3), “una condición necesaria para las ecuaciones de movimiento hiperbólica es que la métrica efectiva sea Lorentziana” y que las condiciones para que dicha métrica sea Lorentziana es que

$$\text{sgn}(1 + 4\lambda_2 H^2) = \text{sgn}(1 - 4\lambda_2 q H^2) \quad (4.3.50)$$

donde ahora $\lambda_2 = \alpha/4l_p^3$ (ver apéndice G), como se puede ver en las ecuaciones (3.11) y (3.12) de la mencionada referencia (3). En esta misma referencia se estableció que si esta igualdad no se cumple, entonces la mencionada métrica no será Lorentziana, sin embargo si $q < 0$ la métrica es Lorentziana.

4.4. Gravedad 4D a partir de gravedad Einstein-Gauss-Bonnet

4.4.1. Reducción dimensional de la gravedad Einstein-Gauss-Bonnet 5D a 4D

A partir de la ecuación (4.3.3) vemos que el Lagrangiano contiene el término de Gauss-Bonnet, el término de Einstein-Hilbert y un término cosmológico. Siguiendo el procedimiento de compactificación dado en (3.3), encontramos que los términos del Lagrangiano en (4.3.3) quedan como sigue

$$\begin{aligned} \epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e &= r_c d\phi \left\{ \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{R}^{pq} - \left(\frac{2e^{2f}}{r_c^1} \right) (3f'^2 + 2f'') \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{e^{4f}}{r_c^4} f'^2 \right) (5f'^2 + 4f'') \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right\} \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{abcde} R^{ab} e^c e^d e^e &= r_c d\phi \left\{ (3e^{2f}) \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{e^{4f}}{r_c^2} \right) (5f'^2 + 2f'') \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right\} \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

$$\epsilon_{abcde} e^a e^b e^c e^d e^e = r_c d\phi (5e^{4f} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q) \quad (4.4.3)$$

Luego, el Lagrangiano tiene la forma

$$\begin{aligned} L &= \alpha r_c d\phi \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{R}^{pq} + \tilde{\epsilon}_{mnpq} r_c d\phi \left\{ -\alpha \left(\frac{2e^{2f}}{r_c^2} \right) (3f'^2 + 2f'') + 2e^{2f} \right\} \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q + \\ &\quad \tilde{\epsilon}_{mnpq} r_c d\phi \left\{ \alpha \left(\frac{e^{4f}}{r_c^4} f'^2 \right) (5f'^2 + 4f'') - \frac{2}{3} \left(\frac{e^{4f}}{r_c} \right) (5f'^2 + 2f'') - \frac{\Lambda_{5D}}{3} e^{4f} \right\} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \end{aligned}$$

A continuación definimos los coeficientes A , B y C como sigue,

$$A = r_c \int_0^{2\pi} d\phi \quad (4.4.4)$$

$$B = r_c \int_0^{2\pi} 2e^{2f} \left\{ 1 - \frac{\alpha}{r_c^2} (3f'^2 + 2f'') \right\} d\phi \quad (4.4.5)$$

$$C = r_c \int_0^{2\pi} e^{4f} \left\{ \alpha \frac{f'^2}{r_c^4} (5f'^2 + 4f'') - \frac{2}{3r_c^2} (5f'^2 + 2f'') - \frac{\Lambda_{5D}}{3} \right\} d\phi \quad (4.4.6)$$

Puesto que $f(\phi)$ es una función arbitraria y continuamente diferenciable, y ya que estamos trabajando con una variedad cilíndrica, se elige $f(\phi) = \ln(\sin \phi)$ (aunque está no es la única elección posible) encontramos que (4.4.4), (4.4.5) y (4.4.6) quedan como sigue

$$A = 2\pi r_c \quad (4.4.7)$$

$$B = \frac{2\pi r_c^2 + 2\alpha\pi}{r_c} = 2\pi r_c \left(1 + \frac{\alpha}{r_c^2} \right) \quad (4.4.8)$$

$$C = \frac{6\pi r_c^2}{24r_c^3} \left(2 - \frac{\alpha}{r_c^2} - \Lambda_{5D} r_c^2 \right) = -\frac{\pi}{4r_c} \left(\frac{\alpha}{r_c^2} - 2 + \Lambda_{5D} r_c^2 \right) \quad (4.4.9)$$

Luego, la acción compactificada a 4-dimensiones está dada por

$$\tilde{S}[\tilde{e}] = \frac{1}{8\kappa_5} \int_{\Sigma_4} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \left(A\tilde{R}^{mn}\tilde{R}^{pq} + B\tilde{R}^{mn}\tilde{e}^p\tilde{e}^q + C\tilde{e}^m\tilde{e}^n\tilde{e}^p\tilde{e}^q \right) \quad (4.4.10)$$

Notemos que en la acción (4.4.10) hay un término cuadrático en la curvatura dada por $A\tilde{\epsilon}_{mnpq}\tilde{R}^{mn}\tilde{R}^{pq}$, que representa el término de Gauss-Bonnet de 4-dimensiones. Este término es topológico, por lo que no contribuye a la dinámica y puede ser descartado. Esto significa que la compactificación evita los problemas citados en la referencia (55). La ecuación (2.1) de esta referencia concuerda con el Lagrangiano (4.4.10), excepto para el término cosmológico, cuando $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2/\lambda_1 = -4$ y

$$\lambda_3/\lambda_1 = 1.$$

Tomando en cuenta que (4.4.10) debería conducir a la acción Einstein-Hilbert-Cartan de 4-dimensiones, es decir

$$\tilde{S}_{EHC}^{(4D)} = \frac{1}{4\kappa_4} \int_{\Sigma_4} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \left(\tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q - \frac{\Lambda_{4D}}{6} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right)$$

donde $\kappa_4 = 8\pi G$, es directo ver que esto se da cuando

$$B = \frac{8\kappa_5}{4\kappa_4} = \frac{8 \cdot 12 \cdot \pi^2 G_5}{4 \cdot 8 \cdot \pi G} = 3\pi \frac{G_5}{G} \quad (4.4.11)$$

y

$$C = -\frac{\Lambda_{4D}}{4 \cdot 6 \cdot \kappa_4} 8\kappa_5 = -\frac{\Lambda_{4D}}{4 \cdot 6 \cdot 8\pi G} 8 \cdot 12\pi^2 G_5 = -\frac{\Lambda_{4D}}{2} \pi \frac{G_5}{G} \quad (4.4.12)$$

Por otro lado, sabemos que si G_D es la constante de Newton en D -dimensiones y si G es la constante de Newton usual, entonces

$$G_D = l_c^{D-4} G \quad (4.4.13)$$

donde l_C es la longitud de la dimensión extra compactificada (63). En nuestro caso particular, $D = 5$ y por tanto $l_C = 2\pi r_c$. Esto significa que $G_5 = 2\pi r_c G$. Por lo que (4.4.11) y (4.4.12) toman la siguiente forma

$$B = 3\pi \frac{G_5}{G} = 3\pi 2\pi r_c = 6\pi^2 r_c \quad (4.4.14)$$

$$C = -\frac{\pi}{2} \Lambda_{4D} \frac{G_5}{G} = -\frac{\pi}{2} \Lambda_{4D} 2\pi r_c = -\Lambda_{4D} \pi^2 r_c \quad (4.4.15)$$

Ahora bien, igualando (4.4.8) con (4.4.14), y (4.4.9) con (4.4.15), es directo ver que

$$\Lambda_{4D} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\alpha}{r_c^4} - \frac{2}{r_c^2} + \Lambda_{5D} \right) \quad (4.4.16)$$

$$\frac{\alpha}{r_c^4} = \frac{3\pi - 1}{r_c^2} \quad (4.4.17)$$

reemplazando (4.4.17) en (4.4.16)

$$\Lambda_{4D} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3(\pi - 1)}{r_c^2} + \Lambda_{5D} \right] \quad (4.4.18)$$

Ahora bien sustituyendo (4.4.14) y (4.4.15) en (4.4.10) (esto es recordando que el término de Gauss-Bonnet de cuatro dimensiones ya no juega un rol en la acción por las razones dadas con anterioridad), tenemos

$$\tilde{S}[\tilde{e}] = \frac{1}{8\kappa_5} \int_{\Sigma_4} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \left(6\pi^2 r_c \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q - \pi^2 \Lambda_{4D} r_c \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right) \quad (4.4.19)$$

Enseguida se trabajan los coeficientes de (4.4.19), de tal manera que se busca sacar factor común $1/4\kappa_4$, obteniendo así la acción de la gravedad de 4-dimensiones dada por

$$\tilde{S}[\tilde{e}] = \frac{1}{4\kappa_4} \int_{\Sigma_4} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \left(\tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q - \frac{\Lambda_{4D}}{6} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right) \quad (4.4.20)$$

con constante cosmológica Λ_{4D} dada por (4.4.18).

En el lenguaje tensorial los dos términos en (4.4.20) pueden ser escritos como sigue

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q &= -2 \int d^4 \tilde{x} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} \\ \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q &= -24 \int d^4 \tilde{x} \sqrt{-\tilde{x}} \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

donde \tilde{g} es el determinante del tensor métrico de 4-dimensiones $\tilde{g}^{\mu\nu}$, y \tilde{R} es el escalar de Ricci. Así, la acción (4.4.20) se puede escribir como

$$\tilde{S}[\tilde{g}] = \int d^4 \tilde{x} \sqrt{-\tilde{g}} \left(\tilde{R} + 2\Lambda_{4D} \right) \quad (4.4.22)$$

cuyas ecuaciones de campo son

$$G_{\mu\nu} = \Lambda_{4D} g_{\mu\nu} \quad (4.4.23)$$

y $\Lambda_{4D} = \Lambda_{4D}(r_c, \Lambda_{5D})$.

De acuerdo a (4.4.18), podemos decir poco o nada sobre la presencia de r_c . La única cosa que podemos especular es que Λ_{4D} se origina del radio de compactificación y la constante cosmológica de 5-dimensiones, y nada más.

4.5. Cosmología en gravedad Chern-Simons- AdS reducida a $4D$

En esta sección vamos a considerar nuevamente la acción Einstein-Gauss-Bonnet dada en (4.3.3), y establecemos $\alpha = l^2$ y $\Lambda = -3/l^2$ en la mencionada acción, de tal manera que la acción Einstein-Gauss-Bonnet toma la forma dada a continuación

$$S_{EGB}^{(5D)} = \frac{l^2}{8\kappa_5} \int \epsilon_{abcde} \left(R^{ab} R^{cd} e^e + \frac{2}{3l^2} R^{ab} e^c e^d e^e + \frac{1}{5l^4} e^a e^b e^c e^d e^e \right) \quad (4.5.1)$$

es directo ver que está elección particular para α y Λ nos conduce a la acción de la gravedad Chern-Simons de 5-dimensiones para el álgebra AdS , con l interpretado como el radio del universo.

4.5.1. Gravedad $4D$ a partir de la gravedad AdS -Chern-Simons

Seguidamente se toman cada uno de los términos que conforman la acción (4.5.1), y aplicamos sobre ellos el procedimiento de compactificación empleado previamente, y explicado en (3.3), lo que proporciona los resultados de abajo

$$L_{GB} = \epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e = r_c d\phi \left\{ \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{R}^{pq} - \left(\frac{2e^{2f}}{r_c^2} \right) (3f'^2 + 2f'') \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q + \left(\frac{e^{4f}}{r_c^4} f'^2 \right) (5f'^2 + 4f'') \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right\} \quad (4.5.2)$$

$$L_{EH} = \epsilon_{abcde} R^{ab} e^c e^d e^e = r_c d\phi \left\{ (3e^{2f}) \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q - \left(\frac{e^{4f}}{r_c^2} \right) (5f'^2 + 2f'') \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right\} \quad (4.5.3)$$

$$L_\Lambda = \epsilon_{abcde} e^a e^b e^c e^d e^e = 5r_c d\phi e^{4f} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \quad (4.5.4)$$

Luego, reemplazamos estos resultados en la acción (4.5.1), y después de algo de trabajo algebraico, encontramos que una acción de la gravedad de cuatro dimensiones dada a continuación

$$\tilde{S}[\tilde{e}] = \frac{1}{8\kappa_5} \int_{\Sigma_4} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \left(\tilde{A} \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q + \tilde{B} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right) \quad (4.5.5)$$

donde los coeficientes \tilde{A} y \tilde{B} están dados por,

$$\tilde{A} = \frac{2l^2\pi + 2\pi r_c^2}{r_c} = \frac{2\pi l^2}{r_c} \left(1 + \frac{r_c^2}{l^2} \right) \quad (4.5.6)$$

$$\tilde{B} = -\frac{\pi}{4r_c} \left(\frac{l^2}{r_c^2} - 2 - 3\frac{r_c^2}{l^2} \right) \quad (4.5.7)$$

De (4.5.5) es directo ver que se puede obtener la acción Einstein-Hilbert-Cartan cuando los coeficientes \tilde{A} y \tilde{B} están dados como sigue

$$\tilde{A} = 6\pi^2 r_c \quad (4.5.8)$$

$$\tilde{B} = -\pi^2 \Lambda_{4D} r_c \quad (4.5.9)$$

Luego de igualar (4.5.6) con (4.5.8) encontramos

$$\frac{r_c^2}{l^2} = \frac{1}{3\pi - 1} \quad (4.5.10)$$

Asimismo igualamos (4.5.7) con (4.5.9), lo que resulta en

$$\Lambda_{4D} = \frac{3}{4r_c^2} \left(\frac{3\pi - 4}{3\pi - 1} \right) \quad (4.5.11)$$

A partir de la sustitución de (4.5.8) y (4.5.9) en (4.5.5), se consigue la misma acción de (4.4.20), con la diferencia de que ahora Λ_{4D} viene dado por (4.5.11).

Por consiguiente, la forma tensorial de la acción viene siendo

$$\tilde{S}[\tilde{g}] = \int d^4\tilde{x} \sqrt{-\tilde{g}} \left(\tilde{R} - 2\Lambda_{4D} \right) \quad (4.5.12)$$

cuyas ecuaciones de campo son

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda_{4D} g_{\mu\nu} \quad (4.5.13)$$

Con la finalidad de formarnos una idea sobre r_c , tenemos que de (4.5.11) obtenemos $r_c \approx \Lambda_{4D}^{-1/2}$. Lo que antecede permite deducir que al utilizar $\Lambda_{4D} \sim 10^{-52} [m^{-2}] \sim 3 * 10^{-122} [l_{Planck}^{-2}]$, se llega a $r_c \sim 10^{61} [l_{Planck}] \approx 10^{26} [m]$. Recordando que $a_0 \approx 10^{26} [m]$ (tamaño causal actual del universo).

De acuerdo a (4.5.8) y (4.5.9), conseguimos $r_c/l \approx 0,34$, es decir, $l \approx 3r_c$. Por lo que, interpretar l como el tamaño del universo parece ser razonable.

Capítulo 5

Teoría tenso-escalar con término Einstein-Gauss-Bonnet a partir de la gravedad de Einstein-Chern-Simons

5.1. Introducción

Considerar alternativas a una teoría tan exitosa como la relatividad general puede verse como un movimiento muy radical. Sin embargo, desde una perspectiva diferente se puede considerar como un enfoque muy modesto frente a los desafíos actuales de la gravedad (56).

La teoría de la relatividad general de Einstein ha alimentado muchas teorías alternativas, entre ellas la teoría tenso-escalar, la cual está construida sobre los sólidos cimientos de la relatividad general, y el campo escalar entra en juego de una manera altamente no trivial, concretamente a través de un término de acoplamiento no mínimo (27).

La teoría tenso-escalar fue concebida originalmente por Jordan, quien presentó un Lagrangiano general para el campo escalar que vive en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones. En este Lagrangiano introdujo un término de acoplamiento no mínimo dado por $\sqrt{-g}\varphi^2 R$, el cual marcó el nacimiento de la teoría tenso-escalar.

Más adelante Brans y Dicke retomaron el trabajo de Jordan, y exigiendo que el Lagrangiano de materia se desacoplara del campo escalar φ , propusieron el

siguiente Lagrangiano:

$$\mathcal{L}_{BD} = \sqrt{-g} \left(\varphi R - \omega \frac{1}{\varphi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + L_{materia}(\Psi) \right) \quad (5.1.1)$$

donde ω es una constante adimensional. Llamamos a (5.1.1) el modelo prototipo de Brans-Dicke. El término de acoplamiento no mínimo está dado por $\sqrt{-g}\varphi R$, el cual reemplaza el término de Einstein-Hilbert en la teoría estándar. El término $\omega (1/\varphi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi$ corresponde a un término cinético del campo escalar φ , que se puede convertir a la forma canónica estándar redefiniendo el campo escalar.

Por lo que podemos ver, la simplicidad del campo escalar permite acoplarlo a la métrica de muchas maneras diferentes, lo que permite la introducción de un abanico de posibles interacciones con los grados de libertad del tensor. Cabe destacar, es fácil proponer modelos tenso-escalares con cosmologías interesantes (24).

5.2. Gravedad Einstein-Chern-Simons 5D

La gravedad Einstein-Chern-Simons tiene la interesante propiedad que el Lagrangiano Chern-Simons de cinco dimensiones para el álgebra \mathcal{B} , está dado por (37)

$$\begin{aligned} L_{ChS}^{(5D)}[e, \omega, h, k] = & \alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e + \alpha_3 \epsilon_{abcde} \left(\frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e \right. \\ & \left. + 2l^2 k^{ab} R^{cd} T^e + l^2 R^{ab} R^{cd} h^e \right) + d\hat{B}_{EC hS}^{(4D)} \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

donde α_1, α_3 son parámetros de la teoría, $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_c \omega^{cb}$ y $T^a = de^a + \omega^a_b e^b$, conduce a la relatividad general estándar de cinco dimensiones sin constante cosmológica en el límite donde la constante de acoplamiento l tiende a cero mientras se mantiene fija la constante de Newton. Cabe señalar que los términos cinéticos para los campos h^a y k^{ab} están presentes solo en el término de superficie del Lagrangiano es decir $\hat{B}_{EC hS}^{(4D)}$.

A continuación, tomando en cuenta que $T^a = De^a$, podemos reescribir el Lagrangiano dado en (5.2.1) como sigue

$$\begin{aligned}
L_{ChS}^{(5D)}[e, \omega, h, k] &= \alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e + \alpha_3 \epsilon_{abcde} \left(\frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e \right. \\
&\quad \left. + 2l^2 (Dk^{ab}) R^{cd} e^e + l^2 R^{ab} R^{cd} h^e \right) \quad (5.2.2)
\end{aligned}$$

5.3. Gravedad tenso-escalar con término Gauss-Bonnet 4D

A partir de la ecuación (5.2.2) podemos ver que el Lagrangiano contiene cuatro términos que denotaremos como L_1, L_2, L_3, L_4 , donde L_1 corresponde al término de Gauss-Bonnet y L_2 corresponde al término de Einstein-Hilbert. Siguiendo el procedimiento de compactificación dado en (3.3), reemplazamos las componentes de la 2-forma curvatura, es decir (3.3.11) en el Lagrangiano (5.2.2), así encontramos

$$\begin{aligned}
L_1 &= \alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e \\
&= \alpha_1 l^2 r_c d\phi \left[\tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{R}^{pq} - 2 \frac{e^{2f(\phi)}}{r_c^2} (2f'' + 3f'^2) \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{4f(\phi)}}{r_c^4} (4f'' + 5f'^2) f'^2 \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right] \quad (5.3.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2 &= \frac{2\alpha_3}{3} \epsilon_{abcde} R^{ab} e^c e^d e^e \\
&= \frac{2}{3} \alpha_3 r_c d\phi \left[3e^{2f(\phi)} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{4f(\phi)}}{r_c^2} (2f'' + 5f'^2) \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right] \quad (5.3.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_3 &= 2\alpha_3 l^2 \epsilon_{abcde} (Dk^{ab}) R^{cd} e^e \\
&= -2\alpha_3 l^2 \frac{e^{2f(\phi)}}{r_c^2} (2f'' + 3f'^2) r_c d\phi \tilde{\epsilon}_{mnpq} \left(D\tilde{k}^{mn} \right) \tilde{e}^p \tilde{e}^q \\
&\quad + 2\alpha_3 l^2 r_c d\phi \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \left(D\tilde{k}^{pq} \right) \quad (5.3.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_4 &= \alpha_3 l^2 \epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} h^e \\
&= -4\alpha_3 l^2 (f'' + f'^2) \frac{e^{f(\phi)}}{r_c^2} e^{g(\phi)} r_c d\phi \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{h}^q \\
&\quad + 4\alpha_3 l^2 (f'' + f'^2) \frac{e^{3f(\phi)}}{r_c^4} f'^2 e^{g(\phi)} r_c d\phi \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{h}^q
\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

donde hemos utilizado el hecho que

$$h^m(\phi, \tilde{x}) = e^{g(\phi)} \tilde{h}^m(\tilde{x}), \quad h^4 = 0 \tag{5.3.5}$$

Reemplazando (5.3.1 - 5.3.4) en el Lagrangiano (5.2.2) e integrando sobre la quinta dimensión encontramos la siguiente acción

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^{(4D)}(\tilde{e}, \tilde{k}, \tilde{h}) &= \int_{\Sigma_4} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \left\{ \alpha \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q + \beta \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q + \gamma (D\tilde{k}^{mn}) \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right. \\
&\quad \left. + \tau \tilde{R}^{mn} (D\tilde{k}^{pq}) + \chi \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{h}^q + \xi \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{h}^q \right\}
\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{2\alpha_1 l^2 \pi}{r_c} + 2\pi\alpha_3 r_c, & \beta &= -\frac{11\alpha_1 l^2 \pi}{4r_c^3} + \frac{\alpha_3 l^2 \pi}{2r_c} \\
\gamma &= \frac{2\alpha_3 l^2 \pi}{r_c}, & \tau &= 4\pi\alpha_3 l^2 r_c, & \chi &= \frac{4\alpha_3 l^2 \pi}{r_c}, & \xi &= -\frac{\alpha_3 l^2 \pi}{r_c^3}
\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

son coeficientes que fueron calculados al elegir $f(\phi) = g(\phi) = \ln(\sin \phi)$. Notemos que cuando $l \rightarrow 0$ la acción resulta en la acción de Einstein-Hilbert en cuatro dimensiones.

5.4. Gravedad tenso-escalar con término Gauss-Bonnet en lenguaje tensorial

La forma tensorial de la acción (5.3.6) puede ser obtenida recordando que los primeros dos términos pueden ser escritos como

$$\tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q = 4\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} d^4 \tilde{x} \quad (5.4.1)$$

$$\tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q = 4! \sqrt{-\tilde{g}} d^4 \tilde{x} \quad (5.4.2)$$

donde \tilde{g} es el determinante de la métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ de cuatro dimensiones. Los términos restantes son obtenidos después de algo de cálculo. Resultando así

$$\tilde{\epsilon}_{mnpq} \left(D \tilde{k}^{mn} \right) \tilde{e}^p \tilde{e}^q = 4\sqrt{-\tilde{g}} D_\mu \tilde{k}^{\mu\nu} d^4 \tilde{x} \quad (5.4.3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} D \tilde{k}^{pq} &= 4\sqrt{-\tilde{g}} \left(\tilde{R}^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} D_\mu \tilde{k}^{\rho\sigma}{}_\nu - 2\tilde{R}^\mu{}_\nu D_\rho \tilde{k}^{\rho\nu}{}_\mu \right. \\ &\quad \left. - 2\tilde{R}^\mu{}_\nu D_\mu \tilde{k}^{\nu\rho}{}_\rho + \tilde{R} D_\mu \tilde{k}^{\mu\nu}{}_\nu \right) d^4 \tilde{x} \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

$$\tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{h}^q = 2\sqrt{-\tilde{g}} \left(\tilde{R} \tilde{h} - 2\tilde{R}^\mu{}_\nu \tilde{h}^\nu{}_\mu \right) d^4 \tilde{x} \quad (5.4.5)$$

$$\tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{h}^q = 6\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{h} d^4 \tilde{x} \quad (5.4.6)$$

donde

$$\tilde{h}^m = \tilde{h}^m{}_\mu d\tilde{x}^\mu, \quad \tilde{e}^m = \tilde{e}^m{}_\mu d\tilde{x}^\mu, \quad \tilde{\omega}^{mn} = \tilde{\omega}^{mn}{}_\mu d\tilde{x}^\mu, \quad \tilde{k}^{mn} = \tilde{k}^{mn}{}_\mu d\tilde{x}^\mu \quad (5.4.7)$$

Introduciendo (5.4.1 - 5.4.6) en la acción (5.3.6), tenemos que la acción en lenguaje tensorial toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\tilde{S} = & \int_{\Sigma_4} \sqrt{-\tilde{g}} \left[4\alpha\tilde{R} + 24\beta + 4\gamma D_\mu \tilde{k}^{\mu\nu}{}_\nu + \right. \\
& 4\tau \left(\tilde{R}^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} D_\mu \tilde{k}^{\rho\sigma}{}_\nu - 2\tilde{R}^\mu{}_\nu D_\rho \tilde{k}^{\rho\nu}{}_\mu - 2\tilde{R}^\mu{}_\nu D_\mu \tilde{k}^{\nu\rho}{}_\rho + \tilde{R} D_\mu \tilde{k}^{\mu\nu}{}_\nu \right) \\
& \left. + 2\chi \left(\tilde{R}\tilde{h} - 2\tilde{R}^\mu{}_\nu \tilde{h}^\nu{}_\mu \right) + 6\xi\tilde{h} \right] d^4\tilde{x} \quad (5.4.8)
\end{aligned}$$

5.5. Acción para un espacio-tiempo máximamente simétrico

Si consideramos un espacio-tiempo máximamente simétrico (por ejemplo el espacio de de-Sitter), la ecuación (13.4.6) de (Weinberg) nos permite escribir

$$\tilde{h}^q = F(\phi)\tilde{e}^q, \quad \tilde{k}^{mn} = G(\phi)\tilde{\omega}^{mn} \quad (5.5.1)$$

De tal manera que en la acción en (5.3.6) podemos reescribir los términos que contienen los campos \tilde{h}^q y \tilde{k}^{mn} como sigue

$$\tilde{\epsilon}_{mnpq}\tilde{R}^{mn}\tilde{e}^p\tilde{h}^q = F(\phi)\tilde{\epsilon}_{mnpq}\tilde{R}^{mn}\tilde{e}^p\tilde{e}^q \quad (5.5.2)$$

$$\tilde{\epsilon}_{mnpq}\tilde{e}^m\tilde{e}^n\tilde{e}^p\tilde{h}^q = F(\phi)\tilde{\epsilon}_{mnpq}\tilde{e}^m\tilde{e}^n\tilde{e}^p\tilde{e}^q \quad (5.5.3)$$

$$\tilde{\epsilon}_{mnpq} \left(D\tilde{k}^{mn} \right) \tilde{e}^p\tilde{e}^q = \frac{DG(\phi)}{G(\phi)}\tilde{\epsilon}_{mnpq}\tilde{k}^{mn}\tilde{e}^p\tilde{e}^q + G(\phi)\tilde{\epsilon}_{mnpq}\tilde{R}^{mn}\tilde{e}^p\tilde{e}^q \quad (5.5.4)$$

$$\tilde{\epsilon}_{mnpq}\tilde{R}^{mn} \left(D\tilde{k}^{pq} \right) = \frac{DG(\phi)}{G(\phi)}\tilde{\epsilon}_{mnpq}\tilde{R}^{mn}\tilde{k}^{pq} + G(\phi)\tilde{\epsilon}_{mnpq}\tilde{R}^{mn}\tilde{R}^{pq} \quad (5.5.5)$$

Utilizando (5.5.2 - 5.5.5) encontramos que la acción dada en (5.3.6) toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\tilde{S} \left[\tilde{e}, \tilde{k}, \tilde{h} \right] = & \int_{\Sigma_4} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \left\{ V_1(\phi)\tilde{R}^{mn}\tilde{e}^p\tilde{e}^q + V_2(\phi)\tilde{e}^m\tilde{e}^n\tilde{e}^p\tilde{e}^q \right. \\
& \left. + V_3(\phi)\tilde{k}^{mn}\tilde{e}^p\tilde{e}^q + V_4(\phi)\tilde{R}^{mn}\tilde{k}^{pq} + V_5(\phi)\tilde{R}^{mn}\tilde{R}^{pq} \right\} \quad (5.5.6)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} V_1(\phi) &= \alpha + \gamma G(\phi) + \chi F(\phi), & V_2(\phi) &= \beta + \xi F(\phi), & V_3(\phi) &= \gamma \frac{DG(\phi)}{G(\phi)} \\ V_4(\phi) &= \tau \frac{DG(\phi)}{G(\phi)}, & V_5(\phi) &= \tau G(\phi) \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

La forma tensorial de la acción (5.5.6) puede ser obtenida, teniendo en cuenta, además de (5.4.1) y (5.4.2), que

$$\begin{aligned} V_3(\phi) \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{k}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q &= \gamma \frac{DG(\phi)}{G(\phi)} \tilde{k}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q \\ &\quad \gamma 4 \sqrt{-\tilde{g}} \frac{D_\mu G(\phi)}{G(\phi)} \left\{ \tilde{k}^{\mu\nu} \right\} d^4 \tilde{x} \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

$$\begin{aligned} V_4(\phi) \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{k}^{pq} &= \tau \frac{DG(\phi)}{G} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{k}^{pq} \\ &= 4\tau \sqrt{-\tilde{g}} \frac{(D_\mu G(\phi))}{G(\phi)} \left\{ \tilde{R} \tilde{k}^{\mu\sigma}{}_\sigma + 2\tilde{R}^\sigma{}_\nu \tilde{k}^{\nu\mu}{}_\sigma \right. \\ &\quad \left. + \tilde{R}^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \tilde{k}^{\rho\sigma}{}_\nu - 2\tilde{R}^\mu{}_\nu \tilde{k}^{\nu\sigma}{}_\sigma \right\} d^4 \tilde{x} \\ &= -4\tau \sqrt{-\tilde{g}} \frac{(D_\mu G)}{G} \left\{ 2\tilde{G}^{\mu\nu} \tilde{k}^\sigma{}_\nu{}_\sigma - 2\tilde{R}^\sigma{}_\nu \tilde{k}^{\nu\mu}{}_\sigma \right. \\ &\quad \left. - \tilde{R}^{\mu\sigma}{}_{\nu\rho} \tilde{k}^{\nu\rho}{}_\sigma \right\} d^4 \tilde{x} \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

$$V_5(\phi) \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{R}^{pq} = \tau G(\phi) \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \tilde{R}^2 - 4\tilde{R}_{\mu\nu} \tilde{R}^{\mu\nu} + \tilde{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma} \right\} \quad (5.5.10)$$

De hecho, al reemplazar (5.4.1), (5.4.2) y (5.5.8-5.5.10), obtenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(\tilde{e}, \tilde{k}, \tilde{h}) &= \int_{\Sigma_4} d^4\tilde{x} \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tau G (R^2 - 4R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}) \right. \\
&\quad + 4 \left(\alpha + \gamma G + \chi F + \tau \frac{D_\mu G}{G} \tilde{k}^{\mu\sigma} \right) \tilde{R} \\
&\quad + \frac{8\tau}{G} \left(D_\sigma G \tilde{k}^{\nu\sigma}{}_\mu - D_\mu G \tilde{k}^{\nu\sigma}{}_\sigma \right) \tilde{R}^\mu{}_\nu \\
&\quad + \frac{4\tau}{G} D_\mu G \tilde{k}^{\rho\sigma}{}_\nu \tilde{R}^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \\
&\quad \left. + 24 \left(\beta + \xi F + \gamma \frac{D_\mu G}{6G} \tilde{k}^{\mu\nu}{}_\nu \right) \right] \tag{5.5.11}
\end{aligned}$$

donde $G = G(\phi)$, $F = F(\phi)$ y $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \chi, \tau$ son constantes arbitrarias.

Comparando (5.5.11) con el Lagrangiano (H0.4) del apéndice (H), nos damos cuenta que es posible identificar los coeficientes de una ecuación con la otra. De tal manera, que el coeficiente que acompaña el término de Gauss-Bonnet dado por τG puede ser identificado con el coeficiente E_6 en la ecuación (H0.4). Siguiendo esta misma idea podemos identificar el coeficiente $4 \left(\alpha + \gamma G + \chi F + \tau \frac{D_\mu G}{G} \tilde{k}^{\mu\sigma} \right)$ con el coeficiente $2E_{6,X} ([\Phi]^2 - [\Phi^2])$ los cuales corresponden al término del escalar de Ricci. El coeficiente $\frac{8\tau}{G} \left(D_\sigma G \tilde{k}^{\nu\sigma}{}_\mu - D_\mu G \tilde{k}^{\nu\sigma}{}_\sigma \right)$ con $-8E_{6,X} ([\Phi] \Phi_a{}^b - \Phi^2_a{}^b)$ del tensor de Ricci. El coeficiente $\frac{4\tau}{G} D_\mu G \tilde{k}^{\rho\sigma}{}_\nu$ es identificado con $4E_{6,X} \Phi_a{}^c \Phi_b{}^d$ en el término que corresponde al tensor de Riemann. Finalmente, el término $24 \left(\beta + \xi F + \gamma \frac{D_\mu G}{6G} \tilde{k}^{\mu\nu}{}_\nu \right)$ con $\frac{1}{3} E_{6,XX} \left([\Phi]^4 - 6 [\Phi]^2 [\Phi^2] + 3 [\Phi^2]^2 + 8 [\Phi] [\Phi^3] - 6 [\Phi^4] \right)$.

Esta correspondencia conduce en principio a una probable interpretación de los campos $\tilde{k}^{\mu\sigma}$ y $\tilde{k}^{\rho\sigma}{}_\nu$ como la primera y tercera derivada de un campo escalar, respectivamente.

Capítulo 6

Conclusiones

A partir del procedimiento de compactificación a la Randall-Sundrum se obtuvo un Lagrangiano de gravedad de Einstein extendida en $4D$ con término cosmológico (3.3.26), el cual incluye campos de gauge \tilde{k}_μ^{mn} no Abelianos. Tomando en cuenta los estudios realizados en (16) y (17), estos campos \tilde{k}_μ^{mn} podrían ser interpretados como campos presentes en modelos inflacionarios.

La compactificación del Lagrangiano Chern-Simons para el álgebra de Maxwell en $5D$ usando una métrica tipo Randall-Sundrum resultó en la acción para una gravedad en $4D$ dada en (3.4.11) que coincide con la ecuación (29) de la referencia (16). La acción corresponde a la gravedad de Einstein con un particular término cosmológico, que incluye campos \tilde{k}_μ^{mn} Abelianos.

Debe ser notado que el Lagrangiano de Einstein extendido para el álgebra de Maxwell, puede ser obtenido a partir de la contracción Inönü-Wigner en el sentido de Weimar-Woods del Lagrangiano para la acción de la gravedad de Einstein extendida de cuatro dimensiones con término cosmológico (3.3.26), obteniendo de nuevo el Lagrangiano de la ecuación (29) de (16).

Ambas extensiones de la gravedad de Einstein con términos cosmológicos (que incluyen campos de gauge no Abelianos y Abelianos respectivamente) no son invariantes bajo las transformaciones locales respectivas sino solo bajo las transformaciones locales de Lorentz. Demostrando que es posible obtener estas acciones de Einstein-Hilbert generalizadas de $4D$ a partir de las gravedades de Chern-Simons de $5D$ genuinamente invariantes. Lo que parece indicar que el procedimiento de compactificación rompe las simetrías originales de las acciones

de Chern-Simons (Maxwell y $\text{AdS}\mathcal{L}_4$) a la simetría de Lorentz.

Por otro lado, obtuvimos las ecuaciones del campo de la gravedad de EGB para la métrica FLRW junto con algunas soluciones cosmológicas. Y concluimos que si el parámetro de desaceleración es negativo, se cumple la llamada condición de la métrica Lorentziana (3).

Se logró que tanto la acción de la gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet en $5D$ dada en (4.3.3), como la gravedad AdS -Chern-Simons en $5D$ dada en (4.5.1), fueran ambas consistentes con la idea del espacio-tiempo en $4D$, a través del procedimiento de compactificación que implica la sustitución de una métrica tipo Randall-Sundrum, a la cual nos hemos referido como compactificación “a la Randall-Sundrum”.

A partir de las acciones de gravedad compactificadas, llegamos a una interpretación de la constante cosmológica efectiva de 4-dimensiones Λ_{4D} , en un primer caso se obtuvo Λ_{4D} en términos del par (r_c, Λ_{5D}) de lo cual especulamos que Λ_{4D} tiene su origen en el radio de compactificación r_c y en la constante cosmológica de la quinta dimensión, es decir Λ_{5D} . En un segundo caso se encontró Λ_{4D} en términos únicamente de r_c nos lleva a la interpretación aparentemente razonable del parámetro l como el tamaño del universo.

Cabe destacar que el término cuadrático $A\tilde{\epsilon}_{mnpq}\tilde{R}^{mn}\tilde{R}^{pq}$ en la acción compactificada dada en (4.4.10), representa el término de Gauss-Bonnet en $4D$. Este término es del tipo topológico, por lo que no contribuye a la dinámica del sistema. De modo que, el procedimiento de compactificación aplicado evita los problemas citados en la referencia (55), es decir no se rompe la condición de que las ecuaciones de movimiento sean hiperbólicas.

Cabe destacar que las ecuaciones de movimiento obtenidas para el Lagrangiano de Einstein-Gauss-Bonnet sin constante cosmológica (4.3.6) y para el Lagrangiano de la acción compactificada en (4.4.10), son ambas de segundo orden, por lo que no experimentan inestabilidad.

Para dar por termino a las conclusiones tenemos que tras la compactificación “a la Randall-Sundrum”, en el Lagrangiano (28) de la referencia (37), se encontró una acción para una gravedad tenso-escalar de $4D$ que incluye un término de Gauss-Bonnet, el cual pertenece a una familia de acciones de la teoría de Horndeski.

Esta acción de gravedad tenso-escalar corresponde al Lagrangiano de la ecuación (48) de la referencia (24). Este Lagrangiano (48) introduce grados de libertad escalares adicionales mediante el acoplamiento del campo escalar a la métrica, lo cual es posible debido al adecuado comportamiento del campo escalar bajo transformaciones de Lorentz. Este procedimiento dio lugar a teorías tenso-escalares que corresponden a generalizaciones de las teorías de Jordan-Brans-Dicke y también a teorías que conducen a ecuaciones de campo de segundo orden conocidas como teorías de Horndeski.

La inclusión de nuevos grados de libertad gravitatorios puede realizarse mediante la construcción de teorías gravitatorias invariantes bajo simetrías mayores que las habituales de Poincaré o $(A)dS$, es decir, invariantes bajo las denominadas álgebras de Poincaré generalizadas \mathcal{B}_5 .

Cabe destacar que los resultados obtenidos mediante la compactificación “a la Randall-Sundrum” han sido prometedores, mostrando que este procedimiento de reducción dimensional puede resultar en una herramienta matemática no sólo interesante sino útil para allanar el camino a una teoría de la gravedad que describa la evolución del universo.

Bibliografía

- [1] Armendariz-Picon, C. (2004). Could dark energy be vector-like? *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2004(07):007.
- [2] Baez, J y Muniain, J. (1994). Gauge theories, knots and gravity.
- [3] Brustein, R. y Sherf, Y. (2018). Causality violations in lovelock theories. *Physical Review D*, 97(8):084019.
- [4] Cárdenas, L., Diaz, J., Salgado, P., and Salgado, D. (2022). Generalized einstein gravities and generalized ads symmetries. *Nuclear Physics B*, 984:115943.
- [5] Carroll, S. M. (1997). Lecture notes on general relativity. *arXiv preprint gr-qc/9712019*.
- [6] Chamseddine, A. H. (1989). Topological gauge theory of gravity in five and all odd dimensions. *Physics Letters B*, 233(3-4):291–294.
- [7] Chamseddine, A. H. (1990). Topological gravity and supergravity in various dimensions. *Nuclear Physics B*, 346(1):213–234.
- [8] Charmousis, C. (2009). Higher order gravity theories and their black hole solutions. In *Physics of Black Holes*, pages 299–346. Springer.
- [9] Cheng, T. (2005). Relativity gravitation and cosmology, p208.
- [10] Concha, P., Peñafiel, D., Rodríguez, E., and Salgado, P. (2013). Even-dimensional general relativity from born-infeld gravity. *Phys. Lett. B*, 725.
- [11] Concha, P., Penafiel, D., Rodríguez, E., and Salgado, P. (2014). Chern-simons and born-infeld gravity theories and maxwell algebras type. *Eur. Phys. J. C*, 74.
- [12] Crisostomo, J., Troncoso, R., and Zanelli, J. (2000). Black hole scan. *Physical Review D*, 62(8):084013.
- [13] Das, A. (2008). *Lectures on quantum field theory*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Estados Unidos.
- [14] de Azcárraga, J. A. and Izquierdo, J. M. (1998). *Lie groups, Lie algebras, cohomology and some applications in physics*. Cambridge University Press.

- [15] de Azcarraga, J. A., Izquierdo, J. M., Picon, M., and Varela, O. (2003). Generating lie and gauge free differential (super) algebras by expanding maurer–cartan forms and chern–simons supergravity. *Nuclear Physics B*, 662(1-2):185–219.
- [16] de Azcárraga, J. A., Kamimura, K., and Lukierski, J. (2011). Generalized cosmological term from maxwell symmetries. *Physical Review D*, 83(12):124036.
- [17] de Azcárraga, J. A., Kamimura, K., and Lukierski, J. (2013). Maxwell symmetries and some applications. In *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, volume 23, pages 350–356. World Scientific.
- [18] Deligne, P., Etingof, P., Freed, D. S., Jeffrey, L. C., Kazhdan, D., Morgan, J. W., Morrison, D. R., and Witten, E. (1999). *Quantum fields and strings: A course for mathematicians*. American Mathematical Society Institute for Advanced Study, Estados Unidos.
- [19] Deruelle, N. y Madore, J. (2003). On the quasi-linearity of the einstein-"gauss-bonnet"gravity field equations. *arXiv preprint gr-qc/0305004*.
- [20] Díaz, J., Fierro, O., Izaurieta, F., Merino, N., Rodríguez, E., Salgado, P., and Valdivia, O. (2012). A generalized action for $(2+ 1)$ -dimensional chern–simons gravity. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(25):255207.
- [21] Díaz, R., Gómez, F., Pinilla, M., and Salgado, P. (2020). Brane gravity in 4d from chern–simons gravity theory. *The European Physical Journal C*, 80(6):1–9.
- [22] Dine, M. (2006). *Supersymmetry and string theory: Beyond the standard model*. Cambridge University Press, Estados Unidos.
- [23] Eguchi, T., Gilkey, P. B., and Hanson, A. J. (1980). Gravitation, gauge theories and differential geometry. *Physics reports*, 66(6):213–393.
- [24] Ezquiaga, J. M., García-Bellido, J., and Zumalacárregui, M. (2016). Towards the most general scalar-tensor theories of gravity: a unified approach in the language of differential forms. *Physical Review D*, 94(2):024005.
- [25] Fernandes, P. G., Carrilho, P., Clifton, T., and Mulryne, D. J. (2022). The 4d einstein-gauss-bonnet theory of gravity: a review. *Classical and Quantum Gravity*.
- [26] Ford, L. H. (1989). Inflation driven by a vector field. *Physical Review D*, 40(4):967.
- [27] Fujii, Y. and Maeda, K.-i. (2003). *The scalar-tensor theory of gravitation*. Cambridge University Press.
- [28] Gal'tsov, D. V. and Davydov, E. A. (2011). Cosmological models with yang-mills fields. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 272(1):119–140.
- [29] Gasperini, M. (2013). *Theory of gravitational interactions*. Springer, Italia.

- [30] Golovnev, A., Mukhanov, V., and Vanchurin, V. (2008). Vector inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2008(06):009.
- [31] Gómez, F., Lepe, S., and Salgado, P. (2021). Four-dimensional brane–chern–simons gravity and cosmology. *The European Physical Journal C*, 81(1):1–9.
- [32] Gomis, J., Kamimura, K., and Lukierski, J. (2009). Deformations of maxwell algebra and their dynamical realizations. *Journal of High Energy Physics*, 2009(08):039.
- [33] Grøn, Ø. y Hervik, S. (2007). *Einstein’s General Theory of Relativity*. Springer, Estados Unidos.
- [34] Horndeski, G. W. (1974). Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *International Journal of Theoretical Physics*, 10:363–384.
- [35] Inonu, E. y Wigner, E. P. (1953). On the contraction of groups and their representations. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 39(6):510–524.
- [36] Izaurieta, F. (2018). Introducción a la geometría diferencial. Notas de clases, Universidad de Concepción.
- [37] Izaurieta, F., Minning, P., Pérez, A., Rodríguez, E., and Salgado, P. (2009). Standard general relativity from chern–simons gravity. *Phys. Lett. B*, 678.
- [38] Izaurieta, F., Rodríguez, E., and Salgado, P. (2006). Expanding lie (super)algebras through abelian semigroups. *Jour. Math. Phys.*, 47.
- [39] Lanczos, C. (1932). Elektromagnetismus als natürliche eigenschaft der riemannschen geometrie. *Zeitschrift für Physik*, 73(3):147–168.
- [40] Lanczos, C. (1938). A remarkable property of the riemann-christoffel tensor in four dimensions. *Annals of Mathematics*, pages 842–850.
- [41] Liddle, A. (2015). *An introduction to modern cosmology*. John Wiley & Sons.
- [42] Lovelock, D. (1970). Divergence-free tensorial concomitants. *Aequationes mathematicae*, 4(1):127–138.
- [43] Lovelock, D. (1971). The einstein tensor and its generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, 12(3):498–501.
- [44] Lukierski, J. (2011). Generalized wigner-inönü contractions and maxwell (super) algebras. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 272(1):183–190.
- [45] Maggiore, M. (2005). *A modern introduction to quantum field theory*, volume 12. Oxford university press.
- [46] Maleknejad, A. and Sheikh-Jabbari, M. (2013). Gauge-flation: inflation from non-abelian gauge fields. *Physics Letters B*, 723(1-3):224–228.

- [47] Moreno Sánchez, A. (2009). Ecuación de friedmann modificada y cosmología sobre una brane-world.
- [48] Nakahara, M. (2003). *Geometry, topology and physics*. Institute of Physics Publishing, Reino Unido.
- [49] Osorio, C. (2012). *De Sitter relativity: Foundations and some physical implications*. PhD thesis, Instituto de Física Teórica, Universidad de Estadual Paulista.
- [50] Randall, L. y Sundrum, R. (1999a). An alternative to compactification. *Physical Review Letters*, 83(23):4690.
- [51] Randall, L. y Sundrum, R. (1999b). Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Physical review letters*, 83(17):3370.
- [52] Rodríguez Durán, E. (2013). Teoría de einstein-lovelock e invariancia de gauge tipo maxwell.
- [53] Salgado, P. (2012). Gravedad en dimensiones arbitrarias. Notas de clases, Universidad de Concepción.
- [54] Salgado, P. y Salgado, S. (2014). $so(d-1, 1)$ $so(d-1, 2)$ algebras and gravity. *Phys. Lett. B*, 728.
- [55] Sherf, Y. (2019). Hyperbolicity constraints in extended gravity theories. *Physica Scripta*, 94(8):085005.
- [56] Sotiriou, T. P. (2015). Gravity and scalar fields. *Modifications of Einstein's Theory of Gravity at Large Distances*, pages 3–24.
- [57] Troncoso, R. y Zanelli, J. (2000). Higher-dimensional gravity, propagating torsion and ads gauge invariance. *Classical and Quantum Gravity*, 17(21):4451.
- [58] Weimar-Woods, E. (2000). Contractions, generalized inönü-wigner contractions and deformations of finite-dimensional lie algebras. *Reviews in Mathematical Physics*, 12(11):1505–1529.
- [Weinberg] Weinberg, S. Gravitation and cosmology john wiley & sons, 1972. *New York*.
- [60] Weinberg, S. (2008). *Cosmology*. OUP Oxford.
- [61] Zanelli, J. (2005). Lecture notes on chern-simons (super-) gravities. (february 2008). *arXiv preprint hep-th/0502193*.
- [62] Zumino, B. (1986). Gravity theories in more than four dimensions. *Physics Reports*, 137(1):109–114.
- [63] Zwiebach, B. (2004). *A first course in string theory*. Cambridge university press.

Apéndice A

Álgebra de Lie

A1. Álgebra de Lie

Un álgebra de Lie consiste de un espacio vectorial real o complejo de dimensión finita \mathfrak{g} junto con una multiplicación $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que satisface las siguientes tres propiedades:

1. Antisimetría

$$a) [u, v] = -[v, u] \quad \forall u, v \in \mathfrak{g}$$

2. Ley distributiva

$$a) [au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w] \quad \forall u, v, w \in \mathfrak{g} \text{ y } \forall a, b \in \mathbf{R}$$

3. Identidad de Jacobi

$$a) [[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$$

Por otra parte, se llama álgebra de Lie del grupo bajo consideración a los generadores que cumplan con la siguiente condición (45)

$$[T^a, T^b] = if^c{}_{ab}T^c \tag{A1.1}$$

Comentamos que incluso si la forma explícita de los generadores T^a depende de la representación utilizada, las constantes de estructura $f^c{}_{ab}$ son independientes de la representación.

A2. Álgebra de Poincaré

A2.1. Transformación de Lorentz

Una transformación de Lorentz propia puede ser pensada como una rotación en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones de Minkowski, dicha transformación tiene la siguiente forma infinitesimal (13)

$$\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu \quad (\text{A2.1})$$

donde el parámetro constante, infinitesimal de transformación satisface la condición dada a continuación

$$\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (\text{A2.2})$$

Vamos a tener que si definimos un operador vectorial infinitesimal como

$$\hat{R}(\omega) = \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \quad (\text{A2.3})$$

Podemos determinar las propiedades del grupo de las transformaciones de Lorentz a partir del álgebra de los operadores vectoriales que generan las transformaciones. De esta manera, encontramos que

$$\begin{aligned} [\hat{R}(\omega), \hat{R}(\bar{\omega})] &= \left[\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}, \frac{1}{2}\bar{\omega}^{\lambda\rho} J_{\lambda\rho} \right] \\ &= \omega^{\mu\nu} \bar{\omega}^{\lambda\rho} [x_\mu \partial_\nu, x_\lambda \partial_\rho] \\ &= \hat{R}(\tilde{\omega}) \end{aligned} \quad (\text{A2.4})$$

donde

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}^{\mu\nu} &= -\tilde{\omega}^{\nu\mu} \\
&= \omega^\mu_\lambda \bar{\omega}^{\lambda\nu} - \bar{\omega}^\mu_\lambda \omega^{\lambda\nu} \\
&= [\omega, \bar{\omega}]^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{A2.5}$$

Esto muestra que el álgebra de los operadores vectoriales es cerrada y que las transformaciones de Lorentz definen un grupo no Abelian. Por último, el álgebra de los generadores también puede ser calculado directamente y tiene la forma dada en (A2.6), la cual no es más que el álgebra de Lie asociada a las transformaciones de Lorentz.

$$[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\rho}] = -\eta_{\mu\lambda} J_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} J_{\mu\lambda} + \eta_{\mu\rho} J_{\nu\lambda} + \eta_{\nu\lambda} J_{\mu\rho} \tag{A2.6}$$

A2.2. Transformación de Poincaré

Si adicionalmente a las transformaciones de Lorentz agregamos las translaciones infinitesimales, la transformación general de coordenadas toma la forma (13)

$$\delta x^\mu = \epsilon^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu \tag{A2.7}$$

donde ϵ^μ , ω^μ_ν denotan respectivamente los parámetros de translación infinitesimal y transformación de Lorentz. Las transformaciones en $\delta x^\mu = \epsilon^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu$ son conocidas como las transformaciones de Poincaré infinitesimales o las transformaciones de Lorentz no homogéneas. Claramente, en este caso, si definimos un operador vectorial infinitesimal obtenemos

$$\begin{aligned}
\hat{R}(\epsilon, \omega) &= -\epsilon^\mu P_\mu + \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu} \\
&= -(\epsilon^\mu \partial_\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu)
\end{aligned} \tag{A2.8}$$

El álgebra de los operadores vectoriales para las transformaciones de Poincaré también puede ser fácilmente calculada como

$$\begin{aligned}
\left[\hat{R}(\epsilon, \omega), \hat{R}(\bar{\epsilon}, \bar{\omega}) \right] &= \left[\epsilon^\mu \partial_\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu, \bar{\epsilon}^\lambda \partial_\lambda + \bar{\omega}^{\lambda\rho} x_\rho \partial_\lambda \right] \\
&= -(\omega^\mu{}_\nu \bar{\epsilon}^\nu - \bar{\omega}^\mu{}_\nu \epsilon^\nu) \partial_\mu + (\omega^{\mu\lambda} \bar{\omega}_\lambda{}^\nu - \bar{\omega}^{\mu\lambda} \omega_\lambda{}^\nu) x_\mu \partial_\lambda \quad (\text{A2.9}) \\
&= -(\tilde{\epsilon}^\mu \partial_\mu + \tilde{\omega}^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu) \\
&= \hat{R}(\tilde{\epsilon}, \tilde{\omega}) \quad (\text{A2.10})
\end{aligned}$$

donde hemos identificado

$$\tilde{\epsilon}^\mu = (\omega^\mu{}_\nu \bar{\epsilon}^\nu - \bar{\omega}^\mu{}_\nu \epsilon^\nu) \quad (\text{A2.11})$$

$$\tilde{\omega}^{\mu\nu} = (\omega^{\mu\lambda} \bar{\omega}_\lambda{}^\nu - \bar{\omega}^{\mu\lambda} \omega_\lambda{}^\nu) = [\omega, \bar{\omega}]^{\mu\nu} \quad (\text{A2.12})$$

Asimismo, podemos calcular el álgebra de los generadores del grupo de Poincaré. Para este momento, conocemos las relaciones de conmutación $[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\rho}]$, y $[P_\mu, P_\nu]$. Por tanto, la única relación que necesita ser calculada es el conmutador entre los generadores de las transformaciones de Lorentz y traslaciones,

$$\begin{aligned}
[P_\mu, J_{\nu\lambda}] &= [\partial_\mu, x_\nu \partial_\lambda - x_\lambda \partial_\nu] \\
&= \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda - \eta_{\mu\lambda} \partial_\nu \quad (\text{A2.13}) \\
&= \eta_{\mu\nu} P_\lambda - \eta_{\mu\lambda} P_\nu
\end{aligned}$$

Este último resultado muestra que bajo una transformación de Lorentz, el generador P_μ se comporta como un vector de cuatro dimensiones covariante.

De este modo, al combinar los resultados previos sobre el álgebra del grupo de translación, así como el grupo de Lorentz homogéneo, concluimos que el álgebra de Lie asociada a las transformaciones de Poincaré está dada por

$$\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0 \\
[P_\mu, J_{\nu\lambda}] &= \eta_{\mu\nu}P_\lambda - \eta_{\mu\lambda}P_\nu \\
[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\rho}] &= -\eta_{\mu\lambda}J_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}J_{\mu\lambda} + \eta_{\mu\rho}J_{\nu\lambda} + \eta_{\nu\lambda}J_{\mu\rho}
\end{aligned} \tag{A2.14}$$

A2.3. Álgebras de Poincaré generalizadas \mathfrak{B}_{2n+1}

En esta sección se describirá brevemente los resultados obtenidos en (37), (10), y (11). Siguiendo las definiciones dadas en (38), vamos a considerar la \mathcal{S} -expansión del álgebra de Lie Anti-de Sitter (AdS) empleando como semigrupo $\mathcal{S}_E^{(2n-1)} = \{\lambda_0, \dots, \lambda_{2n}\}$ dotada de la ley de multiplicación $\lambda_\alpha\lambda_\beta = \lambda_{\alpha+\beta}$ cuando $\alpha + \beta \leq 2n$; $\lambda_\alpha\lambda_\beta = \lambda_{2n}$ cuando $\alpha + \beta > 2n$. Los generadores \tilde{J}_{ab} y \tilde{P}_a del álgebra de AdS satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned}
[\tilde{J}_{ab}, \tilde{J}_{cd}] &= \eta_{bc}\tilde{J}_{ad} - \eta_{ac}\tilde{J}_{bd} - \eta_{bd}\tilde{J}_{ac} + \eta_{ad}\tilde{J}_{bc} \\
[\tilde{J}_{ab}, \tilde{P}_c] &= \eta_{bc}\tilde{P}_a - \eta_{ac}\tilde{P}_b \\
[\tilde{P}_a, \tilde{P}_b] &= \tilde{J}_{ab}
\end{aligned} \tag{A2.15}$$

donde $a, b = 0, \dots, 2n$ y η_{ab} corresponde a la métrica de Minkowski. A continuación consideramos la siguiente descomposición en subconjuntos $\mathcal{S}_E^{(2n-1)} = \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$, con

$$\mathcal{S}_0 = \{\lambda_{2m}, \text{ con } m = 0, \dots, n-1\} \cup \{\lambda_{2n}\} \tag{A2.16}$$

$$\mathcal{S}_1 = \{\lambda_{2m+1}, \text{ con } m = 0, \dots, n-1\} \cup \{\lambda_{2n}\} \tag{A2.17}$$

donde λ_{2n} corresponde al elemento cero del semigrupo ($0_{\mathcal{S}} = \lambda_{2n}$). Tras extraer una subálgebra resonante y realizar su $0_{\mathcal{S}}(\lambda_{2n})$ -reducción, se encuentra el álgebra de Poincaré generalizada \mathfrak{B}_{2n+1} ,

$$\begin{aligned}
[P_a, P_b] &= Z_{ab}^{(1)}, \\
[J_{ab}, P_c] &= \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b, \\
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{cb}J_{ad} - \eta_{ca}J_{bd} + \eta_{db}J_{ca} - \eta_{da}J_{cb}, \\
[J_{ab}, Z_c^{(i)}] &= \eta_{bc}Z_a^{(i)} - \eta_{ac}Z_b^{(i)}, \\
[Z_{ab}^{(i)}, P_c] &= \eta_{bc}Z_a^{(i)} - \eta_{ac}Z_b^{(i)}, \\
[Z_{ab}^{(i)}, Z_c^{(j)}] &= \eta_{bc}Z_a^{(i+j)} - \eta_{ac}Z_b^{(i+j)}, \\
[J_{ab}, Z_{cd}^{(i)}] &= \eta_{cb}Z_{ad}^{(i)} - \eta_{ca}Z_{bd}^{(i)} + \eta_{db}Z_{ca}^{(i)} - \eta_{da}Z_{cb}^{(i)}, \\
[Z_{ab}^{(i)}, Z_{cd}^{(j)}] &= \eta_{cb}Z_{ad}^{(i+j)} - \eta_{ca}Z_{bd}^{(i+j)} + \eta_{db}Z_{ca}^{(i+j)} - \eta_{da}Z_{cb}^{(i+j)}, \\
[P_a, Z_b^{(i)}] &= Z_{ab}^{(i+1)}, \\
[Z_a^{(i)}, Z_b^{(j)}] &= Z_{ab}^{(i+j+1)},
\end{aligned} \tag{A2.18}$$

donde $i, j = 1, \dots, n-1$. Notemos que los generadores del álgebra \mathfrak{B}_{2n+1} están relacionados a las originales a través de

$$\begin{aligned}
J_{ab} &= J_{(ab,0)} = \lambda_0 \otimes \tilde{J}_{ab}, \\
P_a &= P_{(a,1)} = \lambda_1 \otimes \tilde{P}_a, \\
Z_{ab}^{(i)} &= J_{(ab,2i)} = \lambda_{2i} \otimes \tilde{J}_{ab}, \\
Z_a^{(i)} &= P_{(a,2i+1)} = \lambda_{2i+1} \otimes \tilde{P}_a,
\end{aligned} \tag{A2.19}$$

luego si $i > n-1$ tenemos que $Z_{ab}^{(i)} = Z_a^{(i)} = 0$. El álgebra de Poincaré generalizada \mathfrak{B}_{2n+1} también se conoce como el tipo de álgebra de Maxwell que fue introducida en ((11)). Notemos que establecer $Z_{ab}^{(i+1)}$ y $Z_a^{(i)}$ igual a cero, conduce al álgebra de \mathfrak{B}_4 que coincide con el álgebra de Maxwell \mathcal{M} (54).

A3. Álgebra de Anti-de Sitter (*AdS*)

La teoría de la relatividad especial y general está formulada en el espacio-tiempo de Minkowski, el cual es un espacio plano y es el caso más simple que uno puede

considerar. Por otro lado están los espacios-tiempo de de-Sitter (dS) y Anti-de Sitter (AdS), estos son los parientes más cercanos al espacio-tiempo de Minkowski, debido a que son los espacios-tiempo no planos más simples, ya que tienen una curvatura constante en todas partes.

Los generadores que componen el álgebra de de-Sitter (dS) y Anti-de Sitter (AdS) conmutan como sigue

$$\begin{aligned} [J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{bd}J_{ca} - \eta_{ad}J_{cb} + \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd} \\ [J_{ab}, P_c] &= \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b \\ [P_a, P_b] &= -\frac{1}{l^2}\sigma J_{ab} \end{aligned} \tag{A3.1}$$

donde tenemos que para $\sigma = +1$ aparece el álgebra de de-Sitter $dS = \mathfrak{so}(4, 1)$, mientras que para $\sigma = -1$ tenemos el álgebra de Anti-de Sitter $AdS = \mathfrak{so}(3, 2)$. Por otra parte, al tomar el límite $l \rightarrow \infty$, el cual es conocido como contracción Inönü-Wigner ver el apéndice (F), reaparece el álgebra de Poincaré en d dimensiones $\mathfrak{iso}(3, 1)$.

Los generadores J_{ab} hacen referencia al subgrupo Lorentz $SO(3, 1)$ y los generadores P_a definen la transitividad de los correspondientes espacios homogéneos. La importancia relativa de estas dos componentes está ponderada por el valor de la constante cosmológica. En particular, para una constante cosmológica nula, los dos espacios dS y AdS transforman al espacio de Minkowski M con Poincaré como grupo de simetría (49).

A3.1. Álgebra $AdS\mathcal{L}_4$ generalizada

La S -expansión del álgebra AdS de Lie utilizando como semigrupo $S_{\mathcal{M}}^{(2)} = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ dotado con la regla de multiplicación $\lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_{\alpha+\beta}$ si $\alpha + \beta \leq 2$; $\lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_{\alpha+\beta-2}$ si $\alpha + \beta > 2$, nos conduce a la tan llamada álgebra- $AdS\mathcal{L}_4$, cuyos generadores satisfacen las siguientes relaciones de conmutación ((20) y (4))

$$\begin{aligned}
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{bc}J_{ad} + \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac} \\
[J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{bc}Z_{ad} + \eta_{ad}Z_{bc} - \eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{bd}Z_{ac} \\
[Z_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{bc}Z_{ad} + \eta_{ad}Z_{bc} - \eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{bd}Z_{ac} \\
[J_{ab}, P_c] &= \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b \\
[Z_{ab}, P_c] &= \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b \\
[P_a, P_b] &= Z_{ab}
\end{aligned} \tag{A3.2}$$

Esta álgebra fue obtenida en (32) a partir del álgebra de Maxwell a través de un procedimiento conocido como deformación.

Apéndice B

Formalismo de Cartan

La definición de la conexión de Cartan nos conduce de forma natural a los conceptos de las funciones curvatura y torsión, sin embargo, previo a establecer la descripción de dichas funciones, requerimos precisar en qué consiste el formalismo de Cartan, con el objetivo de exponer la curvatura y la torsión en términos de las ecuaciones de estructura de Cartan.

B1. Vielbein

En el espacio tangente a un punto x de una variedad M , es decir $T_x(M)$, las bases coordenadas están dada por $e_\mu = \partial_\mu$, mientras que el espacio dual¹ a dicho espacio tangente es decir $T_x^*(M)$ las bases coordenadas son dx^μ . Pero si además, a la variedad M se la dota de una métrica g , entonces es posible escribir las bases coordenadas como sigue (48),

$$\hat{e}_a(x) = e_a^\mu(x)\partial_\mu \tag{B1.1}$$

donde las entidades $e_a^\mu(x)$ actúan como “matrices de cambio de base” entre ∂_μ y $\hat{e}_a(x)$. Ahora, vamos a requerir que el objeto $\hat{e}_a(x)$ sea ortonormal² con respecto a la métrica g como sigue,

¹El espacio dual se define como el conjunto de las transformaciones lineales de un espacio vectorial a un espacio de valores escalares.

²Ortonormal significa que los vectores son ortogonales entre ellos y todos ellos tienen norma igual a la unidad.

$$g(\hat{e}_a, \hat{e}_b) = e_a^\mu(x)e_b^\nu(x)g_{\mu\nu}(x) = \delta_{ab} \quad (\text{B1.2})$$

Si la variedad es Lorentziana entonces δ_{ab} debe ser reemplazado por la métrica de Minkowski η_{ab} , quedando como sigue

$$\eta_{ab} = e_a^\mu(x)e_b^\nu(x)g_{\mu\nu}(x) \quad (\text{B1.3})$$

de donde tenemos que los objetos $e_a^\mu(x)$ son las componentes de las matrices que diagonalizan $g_{\mu\nu}(x)$ (36). Por otro lado, podemos revertir (B1.3) obteniendo las componentes de la métrica g (48),

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu(x)e^b{}_\nu(x)\eta_{ab} \quad (\text{B1.4})$$

donde $e^a{}_\mu(x)$ es el inverso de $e_a^\mu(x)$, de tal forma que $e^a{}_\mu e_a^\nu = \delta_\mu^\nu$, $e^a{}_\mu e_b^\mu = \delta_b^a$.

Vamos ahora a introducir una base ortonormal 1-formal e^a definida como

$$e^a = e^a{}_\mu dx^\mu \quad (\text{B1.5})$$

la cual debe satisfacer que $\langle e^a, e^b \rangle = \eta^{ab}$. Notemos que la base e^a es dual a la base de vectores \hat{e}_a tal que $e^a(\hat{e}_b) = \hat{e}_b(e^a) = \delta_b^a$. Luego, la métrica en términos de la base dual e^a se escribe como sigue

$$\begin{aligned} g &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu dx^\mu dx^\nu \\ &= \eta_{ab} e^a e^b \end{aligned} \quad (\text{B1.6})$$

Las bases \hat{e}_a y e^a son llamadas bases no coordenadas, mientras que los coeficientes $e^a{}_\mu$ son las tan llamados vielbeins, nombre que reciben si el espacio tiene muchas dimensiones. Para un espacio de cuatro dimensiones el nombre que se les acuña es vierbeins. Los vielbeins son conocidos como marcos móviles, y constituyen marcos ortonormales locales sobre la variedad M .

Por otro lado, por la ecuación (B1.4) el vielbein $e^a{}_\mu$ determina la métrica, de lo que se deduce que todas las propiedades métricas del espacio o del espacio-tiempo están contenidas en el vielbein. Sin embargo, lo contrario no es cierto, es decir dada una métrica $g_{\mu\nu}$ existen infinitas elecciones de vielbein que corresponden a las diferentes elecciones de los marcos ortonormales locales (61), cada uno de los cuales está relacionado a otros marcos ortonormales por rotación ortogonal local (36),

$$e^a{}_\mu(x) \rightarrow \bar{e}^a{}_\mu(x) = \Lambda^a{}_b(x)e^b{}_\mu(x) \quad (\text{B1.7})$$

donde los objetos $\Lambda^a{}_b$ son las matrices de rotación (que pueden ser rotaciones espaciales o rotaciones espacio-temporales), estas matrices son conocidas como las transformaciones de Lorentz, y conforman el llamado grupo de Lorentz. Después, la nueva base no coordenada está dada por $\bar{e}^a{}_\mu(x)$. Al requerir que esta nueva base sea ortonormal, se encuentra el resultado dado en (B1.9)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\bar{e}^a{}_\mu\bar{e}^b{}_\nu \quad (\text{B1.8})$$

$$\begin{aligned} \eta_{ab}\bar{e}^a{}_\mu\bar{e}^b{}_\nu &= \eta_{cd}e^c{}_\mu e^d{}_\nu \\ \eta_{ab}\Lambda^a{}_c e^c{}_\mu \Lambda^b{}_d e^d{}_\nu &= \eta_{cd}e^c{}_\mu e^d{}_\nu \\ \eta_{ab}\Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d &= \eta_{cd} \end{aligned} \quad (\text{B1.9})$$

Esta última relación se debe a la invariancia bajo rotaciones del tensor métrico, además implica que estas bases no coordenadas están relacionadas entre sí en cada punto del espacio por transformaciones locales del grupo ortogonal $O(d - \eta_-, \eta_-)$.

B2. Derivada covariante exterior

Para definir un operador derivada sobre la variedad, se requiere un campo de conexión tal que la estructura diferencial permanece invariante bajo transformaciones de Lorentz locales, que actúan de forma independiente en cada punto de la variedad. La introducción de la conexión se debe a la necesidad de

compensar la acción del grupo de gauge independiente de los puntos vecinos. En este caso, el campo de gauge es la conexión de Lorentz ω^{ab} , también conocida como la conexión de espín o conexión de Cartan, esta última se discutió anteriormente en la sección de la geometría de Cartan.

Por tanto, dada una p -forma A^a vector-valuado en el espacio tangente, que transforma como una representación del grupo de Lorentz, esto es $A^a \in \Lambda_p$, definimos un operador derivada covariante exterior como sigue (29),

$$DA^a = dA^a + \omega^a_b \wedge A^b \quad (\text{B2.1})$$

donde dA^a es la derivada exterior ordinaria. Notemos, que el operador D es una 1-forma y ya que A^a es una p -forma, nos damos cuenta que DA^a es una $(p+1)$ -forma. La derivada covariante D mide el cambio producido por el transporte paralelo entre puntos vecinos. De tal manera que las propiedades afines del espacio están codificadas en las componentes ω^{ab} , que son arbitrarios e independientes de la métrica.

Adicionalmente, la derivada covariante exterior debe de satisfacer

$$DA^a \rightarrow \Lambda^a_b DA^b \quad (\text{B2.2})$$

es decir, debe de transformar correctamente como un vector bajo transformaciones de Lorentz locales. En consecuencia, la conexión 1-forma ω^{ab} transforma como sigue

$$\omega^a_b \rightarrow \Lambda^a_c \omega^c_k (\Lambda^{-1})^k_b - (d\Lambda)^a_c (\Lambda^{-1})^c_b \quad (\text{B2.3})$$

Es importante resaltar que el símbolo diferencial D opera sobre la p -forma de tal manera que es independiente de p . Por lo tanto, las reglas previas aplican sin cambios a tensores-valuados 0-formas. Como un ejemplo típico podemos considerar la métrica η_{ab} del espacio-tiempo de Minkowski tangente, al calcular su derivada covariante exterior encontramos

$$\begin{aligned}
D\eta^{ab} &= d\eta^{ab} + \omega^a_c \eta^{cb} + \omega^b_c \eta^{ac} \\
&= \omega^{ab} + \omega^{ba} = 0
\end{aligned}
\tag{B2.4}$$

$$\tag{B2.5}$$

Este resultado es gracias a la propiedad de antisimetría de la conexión de Lorentz $\omega^{ab} = \omega^{[ab]}$. El requisito de que la conexión de Lorentz sea compatible con la estructura métrica del espacio tangente hace que ω^{ab} se restrinja a ser antisimétrico.

Otro tensor 0-forma importante en el espacio tangente es el símbolo completamente antisimétrico $\epsilon^{a_1 \dots a_n}$. Los tensores η_{ab} y $\epsilon^{a_1 \dots a_n}$ son definidos por la estructura algebraica del grupo de Lorentz, y en consecuencia son constantes en toda la variedad M , asimismo también deben de ser covariantemente constantes,

$$d\eta_{ab} = D\eta_{ab} = 0 \tag{B2.6}$$

$$d\epsilon_{a_1 \dots a_n} = D\epsilon_{a_1 \dots a_n} = 0 \tag{B2.7}$$

B3. Curvatura

Una de las propiedades fundamentales del cálculo exterior es que la segunda derivada exterior de una forma diferencial se anula idénticamente $d(dA^a) = d^2A^a = 0$ (61). No obstante, la segunda derivada covariante en general no se anula, siendo controlada por la curvatura del espacio-tiempo. De hecho, al aplicar el operador D sobre una $(p+1)$ -forma DA^a genérica obtenemos (29)

$$\begin{aligned}
D^2A^a &= D(DA^a) \\
&= D(dA^a + \omega^a_b \wedge A^b) \\
&= (d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b) \wedge A^b
\end{aligned}
\tag{B3.1}$$

De esta forma, surge la tan llamada 2-forma curvatura R^a_b , la cual está

explícitamente definida como

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \quad (\text{B3.2})$$

Esta ecuación (B3.2) corresponde a la segunda ecuación de estructura de Cartan, y está relacionada al tensor de curvatura de Riemann $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ como sigue (61)

$$R^a{}_b = \frac{1}{2} e^a{}_\alpha e^\beta{}_b R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (\text{B3.3})$$

B4. Torsión

La curvatura y la torsión son objetos de características distintas. La curvatura está definida para cualquier conexión infinitesimal, mientras que la torsión está definida sólo para las conexiones no homogéneas.

Las 1-formas ω^{ab} y e^a se destacan por tener distintas reglas de transformación, puesto que e^a transforma como un vector y no como una conexión como vimos en (B2.3). En las teorías de gauge esto se ve reflejado en el hecho de que los campos vectoriales corresponden a la materia, mientras que la conexión actúa como un portador de las interacciones. Como consecuencia, el único tensor que se puede obtener a partir de la diferenciación de e^a es empleando la derivada covariante De^e . De esta última se obtiene la 2-forma Torsión, que viene dada por (61)

$$T^a = De^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b \quad (\text{B4.1})$$

Esta ecuación corresponde a la primera ecuación de estructura de Cartan, y junto a la ecuación (B3.2) forman las ecuaciones de estructura, las cuales controlan la estructura geométrica de la variedad dada (29).

B5. Identidades de Bianchi

Como se comentó anteriormente, es posible calcular la segunda derivada covariante de una forma diferencial. De modo que podemos calcular la derivada covariante de la torsión, obteniendo así el siguiente resultado

$$DT^a = R^a_b \wedge e^b \quad (\text{B5.1})$$

donde R^a_b está dado por (B3.2). Por consiguiente, calcular la segunda derivada covariante de un vector es equivalente a multiplicar por la 2-forma curvatura, lo que nos conduce a la siguiente propiedad (61)

$$\begin{aligned} DR^a_b &= dR^a_b + \omega^a_c \wedge R^c_b - \omega^c_b \wedge R^a_c \\ DR^a_b &\equiv 0 \end{aligned} \quad (\text{B5.2})$$

Las ecuaciones (B5.1) y (B5.2) son las llamadas identidades de Bianchi, las cuales resultan de calcular la derivada covariante exterior de las dos ecuaciones de estructura. Las identidades de Bianchi se cumplen, en general, en una estructura geométrica que satisface la condición $\nabla g = 0$, incluso en el caso de torsión no nula (29).

Es importante resaltar que la ecuación (B5.2) es una identidad y no un conjunto de ecuaciones, esto es porque se cumple para cualquier conexión 1-forma bien definida. Una consecuencia de esta identidad es que tomar sucesivas derivadas covariantes no produce nuevos tensores independientes (61).

Apéndice C

Lenguaje de formas diferenciales

Gracias al lenguaje de formas diferenciales podemos reescribir las ecuaciones en una forma más compacta, donde los índices tensoriales del espacio-tiempo curvado se encuentran ocultos dentro de las variables con grandes simplificaciones y beneficios formales (especialmente en el contexto de los cálculos variacionales). Por otro lado, en este apéndice seguiremos las siguientes convenciones: las letras latinas a, b, c, \dots denotarán los índices de Lorentz en el espacio plano tangente, las letras griegas μ, ν, α, \dots denotarán los índices tensoriales en la variedad curvada. Para los campos de materia siempre usaremos unidades naturales $\hbar = c = 1$. Además, a menos que se establezca lo contrario, supondremos que la variedad espacio-tiempo tiene un número arbitrario D de dimensiones, con signatura $(+, -, -, -, \dots)$ (29).

C1. Elementos del cálculo exterior

Vamos a iniciar señalando que el elemento de superficie infinitesimal $dx_1 dx_2$ de una variedad diferenciable es anti-simétrico con respecto al intercambio de las coordenadas $x_1 \rightarrow x'_1 = x_2$ y $x_2 \rightarrow x'_2 = x_1$, puesto que el correspondiente determinante jacobiano de la transformación es $|\partial x'/\partial x| = -1$. Por lo tanto,

$$\int dx_1 dx_2 = - \int dx_2 dx_1 \quad (\text{C1.1})$$

Con respecto a un elemento de volumen genérico $dx_1 dx_2 \cdots dx_D$ vamos a introducir la composición de diferenciales llamado producto exterior, denotado por el símbolo

cuña como $dx^\mu \wedge dx^\nu$, además este producto es asociativo y anti-simétrico, $dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$. Vamos a definir, en este contexto, una forma diferencial “exterior” de grado p o una p -forma como un elemento del espacio vectorial lineal Λ_p abarcado por la composición externa de los p diferenciales.

Así cualquier p -forma puede ser representada como un polinomio homogéneo con un grado p en el producto exterior de los diferenciales,

$$A \in \Lambda_p \Rightarrow A = A_{[\mu_1 \dots \mu_p]} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (\text{C1.2})$$

donde $dx^{\mu_i} \wedge dx^{\mu_j} = -dx^{\mu_j} \wedge dx^{\mu_i}$ para cualquier par de índices, y donde $A_{[\mu_1 \dots \mu_p]}$ corresponden a las componentes de un tensor totalmente anti-simétrico de rango p . Un escalar ϕ , por ejemplo, se puede representar como una 0-forma, un vector covariante A_μ como una 1-forma A , con $A = A_\mu dx^\mu$, un tensor anti-simétrico $F_{\mu\nu}$ como una 2-forma F , con $F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$, y así sucesivamente.

En una variedad D -dimensional, la suma directa de espacios vectoriales Λ_p de 0 a D define el álgebra de Cartan Λ ,

$$\Lambda = \bigoplus_{p=0}^D \Lambda_p \quad (\text{C1.3})$$

En el espacio vectorial lineal Λ , el producto exterior es un mapeo $\Lambda \times \Lambda \rightarrow \Lambda$ que en la base de coordenadas diferenciales $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \dots$, es representado por una ley de composición que satisface las propiedades de

1. Bilinealidad:

$$\begin{aligned} (\alpha dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} + \beta dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}) \wedge dx^{\mu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p+q}} \\ = (\alpha + \beta) dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \wedge dx^{\mu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p+q}} \end{aligned} \quad (\text{C1.4})$$

con α y β coeficientes numéricos arbitrarios.

2. Asociatividad:

$$(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}) \wedge (dx^{\mu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p+q}}) = dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p+q}} \quad (\text{C1.5})$$

3. Asimetría:

$$dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} = dx^{[\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p]} \quad (\text{C1.6})$$

Esta última propiedad implica que el producto exterior de un número de diferenciales $\mu_p > D$ es idénticamente nulo.

Partiendo de las definiciones anteriores, podemos introducir algunas operaciones importantes relativas a las formas exteriores.

C1.1. Producto exterior

El producto exterior entre una p -forma $A \in \Lambda_p$ y una q -forma $B \in \Lambda_q$ es un mapeo bilineal y asociativo $\wedge : \Lambda_p \times \Lambda_q \rightarrow \Lambda_{p+q}$, que define la $(p+q)$ -forma C tal que

$$C = A \wedge B = A_{\mu_1 \cdots \mu_p} B_{\mu_{p+1} \cdots \mu_{p+q}} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_{p+q}} \quad (\text{C1.7})$$

Las propiedades de conmutación de este producto dependen de los grados de las formas que estamos considerando (es decir el número de las componentes que tenemos que conmutar), en general tenemos la regla:

$$A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A \quad (\text{C1.8})$$

C1.2. Derivada exterior

La derivada exterior de una p -forma $A \in \Lambda_p$ puede ser interpretada como el producto exterior entre el gradiente 1-forma $dx^\mu \partial_\mu$ y la p -forma A . Así, esto es representado por el mapeo $d : \Lambda_p \rightarrow \Lambda_{p+1}$, que define la $(p+1)$ -forma dA tal que

$$dA = \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \cdots \mu_{p+1}]} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_{p+1}} \quad (\text{C1.9})$$

Por ejemplo para un escalar ϕ , la derivada exterior es representada por la 1-forma

$$d\phi = \partial_\mu \phi dx^\mu \quad (\text{C1.10})$$

La derivada exterior de la 1-forma A es representada por la 2-forma

$$dA = \partial_{[\mu} A_{\nu]} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (\text{C1.11})$$

y así sucesivamente para grados superiores.

Una consecuencia inmediata de la definición (C1.9) es que la segunda derivada exterior siempre se anula,

$$d^2 A = d \wedge dA \equiv 0 \quad (\text{C1.12})$$

independientemente del grado de la forma A . También podemos recordar que una p -forma A es llamada cerrada si $dA = 0$, y exacta si satisface la propiedad de $A = d\phi$, donde ϕ es una $(p-1)$ -forma. Si una forma es exacta entonces es cerrada. Sin embargo, si una forma es cerrada entonces no necesariamente es exacta, depende de las propiedades topológicas de la variedad donde la forma es definida.

Otra consecuencia de la definición (C1.9) es que, en un espacio-tiempo con una conexión simétrica ($\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$), el gradiente ∂_μ que aparece en el operador derivada exterior siempre puede ser reemplazado por el gradiente covariante ∇_μ . De hecho,

$$\nabla_{\mu_1} A_{\mu_2 \mu_3 \dots} = \partial_{\mu_1} A_{\mu_2 \mu_3 \dots} - \Gamma_{\mu_1 \mu_2}^\alpha A_{\alpha \mu_3 \dots} - \Gamma_{\mu_1 \mu_3}^\alpha A_{\mu_2 \alpha \dots} - \dots \quad (\text{C1.13})$$

por lo que todos los términos con la conexión desaparecen después de la antisimetrización, y

$$dA = \nabla A \equiv \nabla_{[\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p+1}} \quad (\text{C1.14})$$

Finalmente, de nuevo de la definición (C1.9) y de la regla de conmutación (C1.8), podemos obtener una regla de Leibnitz generalizada para la derivada exterior de un producto. Considere, el producto exterior de una p -forma A y una q -forma B . Recordando que d es un operador 1-forma tenemos

$$\begin{aligned}
d(A \wedge B) &= dA \wedge B + (-1)^p A \wedge dB \\
d(B \wedge A) &= dB \wedge A + (-1)^q B \wedge dA
\end{aligned}
\tag{C1.15}$$

y así sucesivamente para múltiples productos.

C1.3. Conjugación del dual y el operador co-diferencial

Otro ingrediente crucial para la aplicación de este formalismo a modelos físicos es el llamado operador dual de Hodge, el cual asocia a cada p -forma su complemento $(D - p)$ -dimensional. El dual de una p -forma $A \in \Lambda_p$ es un mapeo $^* : \Lambda_p \rightarrow \Lambda_{D-p}$, definiendo la $(D - p)$ -forma *A tal que

$$^*A = \frac{1}{(D - p)!} A^{\mu_1 \dots \mu_p} \eta_{\mu_1 \dots \mu_p \mu_{p+1} \dots \mu_D} dx^{\mu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_D}
\tag{C1.16}$$

Debemos hacer notar que el tensor η completamente antisimétrico está relacionado a la densidad antisimétrica de Levi-Civita ϵ a través de la relación

$$\eta_{\mu_1 \dots \mu_D} = \sqrt{|g|} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_D}
\tag{C1.17}$$

También deberíamos notar que el uso de $\sqrt{|g|}$ en lugar de $\sqrt{-g}$ es debido al hecho de que el signo de $\det g_{\mu\nu}$, en un número arbitrario de D dimensiones espacio-temporales, depende del número (par o impar) de las $D - 1$ componentes tipo espacio.

Además puede ser útil señalar que el cuadrado del operador dual no coincide con la identidad, en general. Al aplicar la definición (C1.16), obtenemos

$$\begin{aligned}
^*(^*A) &= \frac{1}{p!(D - p)!} A_{\mu_1 \dots \mu_p} \eta^{\mu_1 \dots \mu_D} \eta_{\mu_{p+1} \dots \mu_D \nu_1 \dots \nu_p} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_p} \\
&= (-1)^{p(D-p)} (-1)^{D-1} \frac{1}{p!} \delta_{\nu_1 \dots \nu_p}^{\mu_1 \dots \mu_p} A_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_p} \\
&= (-1)^{p(D-p)+D-1} A
\end{aligned}
\tag{C1.18}$$

El factor $(-1)^{D-1}$ viene de las reglas del producto de los tensores totalmente anti-simétrico puesto que, en $D - 1$ dimensiones espaciales,

$$\epsilon_{012\dots D-1} = (-1)^{D-1} \epsilon^{012\dots D-1} = (-1)^{D-1} \quad (\text{C1.19})$$

Las reglas del producto se convierten así, en general,

$$\eta_{\nu_1 \dots \nu_p \mu_{p+1} \dots \mu_D} \eta^{\mu_1 \dots \mu_D} = (-1)^{D-1} (D-p)! \delta_{\nu_1 \dots \nu_p}^{\mu_1 \dots \mu_p} \quad (\text{C1.20})$$

donde $\delta_{\nu_1 \dots \nu_p}^{\mu_1 \dots \mu_p}$ está definido como sigue

$$\delta_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \det \begin{pmatrix} \delta_{\nu_1}^{\mu_1} & \dots & \delta_{\nu_n}^{\mu_1} \\ \delta_{\nu_1}^{\mu_2} & \dots & \delta_{\nu_n}^{\mu_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{\nu_1}^{\mu_n} & \dots & \delta_{\nu_n}^{\mu_n} \end{pmatrix} \quad (\text{C1.21})$$

El factor $(-1)^{p(D-p)}$, en cambio, proviene de la conmutación de los p índices de A con los $D - p$ índices de su dual (tal cambio es necesario para ordenar los índices de η de manera que coincidan con la secuencia de la regla del producto (C1.20)).

El dual del operador identidad está directamente relacionado con la medida de integración escalar que representa el elemento de hipervolumen de la variedad espacio-tiempo dada. A partir de la definición (C1.16) tenemos,

$$\begin{aligned} {}^*1 &= \frac{1}{D!} \eta_{\mu_1 \dots \mu_D} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_D} \\ &= \sqrt{|g|} \epsilon_{012\dots D-1} dx^0 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{D-1} \\ &= (-1)^{D-1} \sqrt{|g|} d^D x \end{aligned} \quad (\text{C1.22})$$

Combinando este resultado con la regla del producto

$$\eta_{\mu_1 \dots \mu_D} \eta^{\mu_1 \dots \mu_D} = (-1)^{D-1} D! \quad (\text{C1.23})$$

Así, somos conducidos a la relación útil

$$dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_D} = \sqrt{|g|} d^D x \eta^{\mu_1 \cdots \mu_D} = d^D x \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_D} \quad (\text{C1.24})$$

La operación dual es requerida para definir los productos escalares que aparecen en todas las integrales de acción. Consideremos el producto exterior entre una p -forma A y el dual de otra p -forma B . Al emplear la definición (C1.16) y la relación (C1.24) obtenemos

$$\begin{aligned} \int A \wedge^* B &= \frac{1}{(D-p)!} \int A_{\mu_1 \cdots \mu_p} B^{\nu_1 \cdots \nu_p} \eta_{\nu_1 \cdots \nu_p \mu_{p+1} \cdots \mu_D} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_D} \\ &= (-1)^{D-1} \int d^D x \sqrt{|g|} A_{\mu_1 \cdots \mu_p} B^{\nu_1 \cdots \nu_p} \delta_{\nu_1 \cdots \nu_p}^{\mu_1 \cdots \mu_p} \\ &= (-1)^{D-1} p! \int d^D x \sqrt{|g|} A_{\mu_1 \cdots \mu_p} B^{\mu_1 \cdots \mu_p} \end{aligned} \quad (\text{C1.25})$$

El resultado anterior se cumple para formas del mismo grado p (pero p es arbitrario) y empleando la ecuación (C1.22) podemos reescribir (C1.25) como

$$A \wedge^* B = B \wedge^* A = p! {}^*1 A_{\mu_1 \cdots \mu_p} B^{\mu_1 \cdots \mu_p} \quad (\text{C1.26})$$

Finalmente, a través de la aplicación del operador dual podemos expresar la divergencia de una p -forma A al calcular la derivada exterior de su dual, y subsecuentemente dualizar el resultado obtenido. De esta forma obtenemos la $(p-1)$ -forma ${}^*(d^*A)$ cuyas componentes corresponden exactamente a la divergencia del tensor anti-simétrico $A_{[\mu_1 \cdots \mu_p]}$.

Consideremos la derivada exterior de la forma dual (C1.16):

$$d^*A = \frac{1}{(D-p)!} \partial_\alpha \left(\sqrt{|g|} A^{\mu_1 \cdots \mu_p} \right) \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_D} dx^\alpha \wedge dx^{\mu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_D} \quad (\text{C1.27})$$

Calculando el dual obtenemos

$$\begin{aligned}
*(d^*A) &= \frac{1}{(p-1)!(D-p)!} \partial_\alpha \left(\sqrt{|g|} A_{\mu_1 \dots \mu_p} \right) \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\mu_{p+1} \dots \mu_D} \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{\mu_{p+1} \dots \mu_D}_{\nu_1 \dots \nu_{p-1}} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{p-1}} \\
&= p(-1)^{D-1+(p-1)(D-p)} \nabla^\alpha A_{\alpha \nu_1 \dots \nu_{p-1}} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{p-1}} \quad (\text{C1.28})
\end{aligned}$$

donde

$$\nabla_\alpha A^{[\alpha \nu_1 \dots \nu_{p-1}]} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha \left(\sqrt{|g|} A^{[\alpha \nu_1 \dots \nu_{p-1}]} \right) \quad (\text{C1.29})$$

es la divergencia covariante de un tensor completamente anti-simétrico, calculado con una conexión simétrica.

Al explotar el resultado anterior, también podemos definir una operación diferencial adicional que actúa sobre las formas exteriores, representada por el operador co-diferencial (o co-derivada exterior). El co-diferencial de una p -forma es un mapeo $\delta : \Lambda_p \rightarrow \Lambda_{p-1}$, definiendo la $(p-1)$ -forma δA tal que

$$\delta A = p \nabla^\alpha A_{\alpha \mu_1 \dots \mu_{p-1}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p-1}} \quad (\text{C1.30})$$

Una comparación con la ecuación (C1.28) muestra que la derivada exterior d y la co-derivada δ están relacionadas por

$$\delta = (-1)^{D-1+(p-1)(D-p)*} d^* \quad (\text{C1.31})$$

Apéndice D

Término cosmológico generalizado a partir de las simetrías de Maxwell

En la publicación realizada por de Azcárraga, Kamimura, y Lukierski (16), se proponen por objetivo considerar una forma alternativa de introducir el término cosmológico, que como se sabe sumar el término de la constante cosmológica a la acción de Einstein-Hilber estándar describe la energía oscura.

Cuando se emplea el gauge en el álgebra del espacio-tiempo de Maxwell, el marco geométrico estándar de la gravedad de Einstein con el término de la constante cosmológica es extendido al sumar seis campos cuadri-vectoriales $A_{\mu}^{ab}(x)$ asociados con las seis cargas tensoriales Abelianas en el álgebra de Maxwell. En la extensión más simple de Maxwell de la gravedad de Einstein, esto conduce a un término cosmológico generalizado que incluye una contribución de estos campos vectoriales.

Por otro lado, el álgebra de Maxwell para $D = 4$ está compuesta por los siguientes conmutadores:

$$\begin{aligned}
[P_a, P_b] &= \Lambda Z_{ab} \\
[Z_{ab}, Z_{cd}] &= 0 \\
[P_a, Z_{cd}] &= 0 \\
[J_{ab}, P_c] &= -(\eta_{ca}P_b - \eta_{cb}P_a) \\
[J_{ab}, Z_{cd}] &= -(\eta_{ca}Z_{bd} - \eta_{cb}Z_{ad} - \eta_{da}Z_{bc} + \eta_{db}Z_{ac}) \\
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{cb}J_{ad} - \eta_{ca}J_{bd} + \eta_{db}J_{ca} - \eta_{da}J_{cb}
\end{aligned} \tag{D0.1}$$

El término de la constante cosmológica aparecerá de forma generalizada, con una dependencia en los campos gauge adicionales asociados con los nuevos generadores Z_{ab} . Por otro lado, veremos que además del vierbein e^a_μ y la conexión de espín ω^{ab}_μ , el esquema incluye seis campos vectoriales A^{ab}_μ que introducen un nuevo conjunto de curvaturas. Tengamos presente que la 1-forma $A^{ab} = A^{ab}_\mu dx^\mu$ es antisimétrica tal que $A^{ab}_\mu = -A^{ba}_\mu$.

D1. Gauging el álgebra de Maxwell

Vamos a introducir el conjunto de formas de Maurer-Cartan evaluadas en el álgebra de Maxwell:

$$h = h^A X_A = e^a P_a + \frac{1}{2} \omega^{ab} M_{ab} + \frac{1}{2} A^{ab} Z_{ab} \tag{D1.1}$$

donde $a, b = 0, 1, 2, 3$ son índices del espacio tangente que suben y bajan con la métrica de Minkowski η_{ab} . Los campos de gauge asociados $h^A_\mu = (e^a_\mu(x), \omega^{ab}_\mu(x), A^{ab}_\mu(x))$ son definidos por los campos uno-forma del espacio-tiempo $D = 4$.

$$e^a = e^a_\mu dx^\mu, \quad \omega^{ab} = \omega^{ab}_\mu dx^\mu, \quad A^{ab} = A^{ab}_\mu dx^\mu \tag{D1.2}$$

donde e^a_μ es el vierbein, ω^{ab}_μ es la conexión de espín, y A^{ab}_μ son los nuevos campos de gauge Abelianos.

$$h^A = \left(e^a, \frac{1}{2}\omega^{ab}, \frac{1}{2}A^{ab} \right) \quad (\text{D1.3})$$

Del producto exterior de dos derivadas covariantes exteriores obtenemos la dos-forma curvatura genérica de los campos de gauge asociados,

$$\mathcal{R} = dh + h \wedge h = dh + \frac{1}{2}[h, h] \equiv \mathcal{R}^A X_A \quad (\text{D1.4})$$

Desarrollando la curvatura tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & d \left(e^a P_a + \frac{1}{2}\omega^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2}A^{ab} Z_{ab} \right) + \frac{1}{2} \left[e^a P_a + \frac{1}{2}\omega^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2}A^{ab} Z_{ab}, e^c P_c \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\omega^{cd} J_{cd} + \frac{1}{2}A^{cd} Z_{cd} \right] \end{aligned} \quad (\text{D1.5})$$

$$\mathcal{R} = (de^a + \omega^a_c e^c) P_a + \frac{1}{2} (d\omega^{ab} + \omega^a_c \omega^{cb}) J_{ab} + \frac{1}{2} (DA^{ab} + \Lambda e^a e^b) Z_{ab} \quad (\text{D1.6})$$

Denotando las componentes de \mathcal{R} por $\mathcal{R}^A = (T^a, R^{ab}, F^{ab})$ tenemos,

Torsión

$$T^a = de^a + \omega^a_c e^c \quad (\text{D1.7})$$

Tensor de Curvatura

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_c \omega^{cb} = D\omega^{ab} = -R^{ba} \quad (\text{D1.8})$$

Curvatura de los campos gauge Abelianos A^{ab} más la dos-forma vierbein $\Lambda e^a e^b$

$$F^{ab} = DA^{ab} + \Lambda e^a e^b \quad (\text{D1.9})$$

A continuación calculamos las identidades de Bianchi empleando la derivada

exterior sobre la torsión y la curvatura como sigue

$$\begin{aligned}
dT^a &= dde^a + d(\omega^a_b e^b) = (d\omega^a_b) e^b - \omega^a_b de^b \\
dT^a + \omega^a_b T^b &= R^a_b e^b \\
DT^a &= R^a_b e^b
\end{aligned} \tag{D1.10}$$

$$\begin{aligned}
dR^a_b &= d(d\omega^a_b + \omega^a_c \omega^c_b) \\
DR^{ab} &= 0
\end{aligned} \tag{D1.11}$$

Luego, la última identidad la determinamos vía derivada covariante de la dos-forma curvatura F^{ab} como sigue

$$F^{ab} = dA^{ab} + \omega^{[a}_c A^{c|b]} + \Lambda e^a e^b = DA^{ab} + \Lambda e^a e^b$$

$$\begin{aligned}
DF^{ab} &= dF^{ab} + \omega^a_c F^{cb} + \omega^b_c F^{ac} \\
DF^{ab} &= R^{[a|c} A_c{}^{b]} + \Lambda T^{[a} e^{b]}
\end{aligned} \tag{D1.12}$$

Por otra parte, bajo una transformación local de gauge con el parámetro $\zeta(x)$ valuado en el álgebra de Maxwell,

$$\zeta(x) = \zeta^A(x) X_A = \xi^a(x) P_a + \frac{1}{2} \lambda^{ab}(x) J_{ab} + \frac{1}{2} \rho^{ab}(x) Z_{ab} \tag{D1.13}$$

donde $\zeta^A(x) = \{\xi^a(x), \frac{1}{2} \lambda^{ab}, \frac{1}{2} \rho^{ab}\}$, además tenemos que h en la ecuación (D1.1) transforma como sigue,

$$\delta_\zeta h^A = d\zeta^A + f^A_{BC} h^B \zeta^C \equiv (\mathcal{D}\zeta)^A \tag{D1.14}$$

Similarmente, las curvaturas en la ecuación (D1.4) transforman como

$$\delta_\zeta R^A = f_{BC}^A R^B \zeta^C \quad (\text{D1.15})$$

Esto conduce a

$$\begin{aligned} \delta_\zeta e^a &= D\xi^a + e^c \lambda_c^a \\ \frac{1}{2} \delta_\zeta \omega^{ab} &= D\lambda^{ab} \\ \delta_\zeta A^{ab} &= D\rho^{ab} + \Lambda e^{[a} \xi^{b]} + A_c^{[a} \lambda^{c|b]} \end{aligned} \quad (\text{D1.16})$$

$$\begin{aligned} \delta_\zeta T^a &= T^c \lambda_c^a + R_c^a \xi^c \\ \delta_\zeta R^{ab} &= R_c^{[a} \lambda^{c|b]} \\ \delta_\zeta F^{ab} &= \Lambda T^a \xi^b + R_c^{[a} \rho^{c|b]} + F_c^{[a} \lambda^{c|b]} \end{aligned} \quad (\text{D1.17})$$

Así, las dos-forma T^a , R^{ab} y F^{ab} se comportan de manera tensorial bajo transformaciones locales de Lorentz $\lambda^{ab}(x)$.

De lo anterior se deduce que los Lagrangianos cuatro-forma adimensionales invariantes bajo difeomorfismo y transformaciones locales de Lorentz de la Teoría de Einstein-Cartan pueden ser construidos como bilineales en R^{ab} y F^{ab} ,

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd} \quad (\text{D1.18})$$

$$\mathcal{L}_2 = \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge F^{cd}, \quad \mathcal{L}_3 = \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} F^{ab} \wedge F^{cd} \quad (\text{D1.19})$$

$$\mathcal{L}_4 = \frac{1}{2} R^{ab} \wedge R_{ab} \quad (\text{D1.20})$$

$$\mathcal{L}_5 = R^{ab} \wedge F_{ab}, \quad \mathcal{L}_6 = \frac{1}{2} F^{ab} \wedge F_{ab} \quad (\text{D1.21})$$

Los términos \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_4 son conocidos en un marco de la gravedad estándar. La densidad topológica \mathcal{L}_1 produce un término de superficie que, de hecho, es proporcional a la característica de Euler. El término \mathcal{L}_4 también es topológico y corresponde a la clase Chern-Pontryagin. El modelo básico que proponemos será

construido a partir de las formas Lagrangianas de \mathcal{L}_2 y \mathcal{L}_3 .

D2. Acción de Einstein con término cosmológico generalizado

Consideramos primero el Lagrangiano \mathcal{L}_2 , desarrollando tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &= \epsilon_{abcd} R^{ab} F^{cd} \\ \mathcal{L}_2 &= \epsilon_{abcd} R^{ab} (DA^{cd} + \Lambda e^c e^d) \\ -\frac{1}{2\kappa\Lambda} \mathcal{L}_2 &= -\frac{1}{2\kappa\Lambda} \epsilon_{abcd} R^{ab} DA^{cd} - \frac{1}{2\kappa} \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d\end{aligned}\quad (\text{D2.1})$$

donde identificamos el término $-\frac{1}{2\kappa} \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d$ como el Lagrangiano de Einstein-Hilbert \mathcal{L}_E .

A continuación empleando la identidad de Bianchi $DR^{ab} = 0$, y además considerando que $D\epsilon_{abcd} = 0$, y que el término $\epsilon_{abcd} R^{ab} A^{cd}$ es un escalar, podemos escribir

$$D(\epsilon_{abcd} R^{ab} A^{cd}) = (D\epsilon_{abcd}) R^{ab} A^{cd} + \epsilon_{abcd} (DR^{ab}) A^{cd} + \epsilon_{abcd} R^{ab} DA^{cd}$$

$$d(\epsilon_{abcd} R^{ab} A^{cd}) = \epsilon_{abcd} R^{ab} DA^{cd}$$

$$-\frac{1}{2\kappa\Lambda} \mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2\kappa\Lambda} d(\epsilon_{abcd} R^{ab} A^{cd}) + \mathcal{L}_E \quad (\text{D2.2})$$

Como resultado, $-\frac{1}{2\kappa\Lambda} \mathcal{L}_2$ es el Lagrangiano de Einstein-Hilbert más un término de superficie.

Seguido consideramos el Lagrangiano \mathcal{L}_3 , el cual es la anunciada extensión de Maxwell del término cosmológico.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_3 &= \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}F^{ab} \wedge F^{cd} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{abcd} (DA^{ab} + \Lambda e^a e^b) (DA^{cd} + \Lambda e^c e^d) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}DA^{ab}DA^{cd} + \Lambda\epsilon_{abcd}DA^{ab}e^c e^d + \frac{\Lambda^2}{2}\epsilon_{abcd}e^a e^b e^c e^d
\end{aligned}$$

Ahora definimos un nuevo término cosmológico dado como sigue

$$\tilde{\mathcal{L}}_{cosm} = \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda^2}\mathcal{L}_3 \quad (\text{D2.3})$$

de tal manera que nos queda

$$\tilde{\mathcal{L}}_{cosm} = \frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\epsilon_{abcd}DA^{ab}DA^{cd} + \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda}\epsilon_{abcd}DA^{ab}e^c e^d + \frac{\lambda}{4\kappa}\epsilon_{abcd}e^a e^b e^c e^d \quad (\text{D2.4})$$

donde el término cosmológico estándar está dado por la cuatro-forma $\frac{\lambda}{4\kappa}\epsilon_{abcd}e^a e^b e^c e^d$.

En último término, se propone como Lagrangiano para la gravedad de Maxwell la siguiente cuatro-forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{2\kappa\Lambda}\mathcal{L}_2 + \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda^2}\mathcal{L}_3 \\
&= \frac{\mu}{2\kappa\lambda}(-\mathcal{L}_2 + \mu\mathcal{L}_3) \\
&= \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_{cosm} + \frac{\lambda}{4\kappa\Lambda^2}\epsilon_{abcd}DA^{ab}DA^{cd} + \frac{\lambda}{2\kappa\Lambda}\epsilon_{abcd}DA^{ab}e^c e^d \quad (\text{D2.5})
\end{aligned}$$

el cual corresponde a la ecuación (29) de la publicación (16).

Apéndice E

Cosmología

E1. Principio cosmológico

Einstein adoptó la estrategia de comenzar el estudio de la cosmología con una hipótesis llamada principio cosmológico, el cual establece que en cada época, esto es cada valor fijo del tiempo cosmológico t , el universo es homogéneo e isotrópico. En otras palabras, el universo presenta el mismo aspecto desde cada punto (salvo irregularidades locales) (9).

A esta afirmación de que no existe una ubicación privilegiada en el universo a veces se le denomina principio cosmológico copernicano.

Que el universo es homogéneo e isotrópico en la escala más grande de cientos de Mpc ha sido confirmado por observación directa muy recientemente. Otra prueba se presentó en forma de radiación de fondo cósmico de microondas extremadamente uniforme. Esta es la radiación térmica que quedó de una época temprana cuando el universo tenía solo 10^5 años.

E2. Ecuaciones de Friedmann

La ecuación de Einstein relaciona la geometría del espacio-tiempo por un lado y la distribución masa-energía por el otro, $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$. Para una descripción del universo como un sistema físico que satisface el principio cosmológico, tenemos que el espacio-tiempo debe tener la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker en coordenadas comomóviles. Esto fija el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ en el

lado geométrico de la ecuación; mientras que el lado de la fuente también debe ser compatible con un espacio homogéneo e isotrópico. La opción plausible más simple es hacer que el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ tome la forma de un fluido ideal, es decir, la conductividad térmica y la viscosidad no son importantes en el fluido cósmico. Así los dos parámetros importantes son la densidad de masa ρ y la presión p . Luego, la ecuación de campo de la relatividad general relaciona los parámetros geométricos de la signatura de la curvatura k y el factor de escala $a(t) = R(t)/R_0$ con la densidad del fluido cósmico $\rho(t)$ y la presión $p(t)$ (9).

La ecuación de Einstein con la métrica de FLRW y la fuente de fluido ideal conduce al conjunto básico de ecuaciones cósmicas. Se llaman ecuaciones de Friedmann, en honor al matemático y meteorólogo ruso que fue el primero, en darse cuenta de que la ecuación de Einstein admitía soluciones cosmológicas que conducían a un universo en expansión.

Un componente de la ecuación de Einstein se convierte en “la primera ecuación de Friedmann”,

$$\frac{\dot{a}^2(t) + k}{a^2(t)} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (\text{E2.1})$$

Otra componente se convierte en “la segunda ecuación de Friedmann”,

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -4\pi G \left(p + \frac{1}{3}\rho \right) \quad (\text{E2.2})$$

Debido a que los factores de presión y densidad son positivos, tenemos una segunda derivada negativa $\ddot{a}(t)$: la expansión debe desacelerar debido a la atracción gravitatoria mutua entre los elementos fluidos cósmicos. Se puede demostrar que una combinación lineal de estas dos ecuaciones de Friedmann (E2.1) y (E2.2) conduce a

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -p \frac{da^3}{dt} \quad (\text{E2.3})$$

que, teniendo la forma de la primera ley de la termodinámica $dE = -pdV$, es el enunciado de la conservación de la energía.

E3. Tres valores de k

Consideremos ahora el significado real de la constante k que aparece en la ecuación de Friedmann (E2.1). La interpretación de k , aparente en el contexto de la relatividad general, es que mide la curvatura del espacio. Hasta el momento se ha exigido que nuestros universos modelo sean tanto homogéneos como isotrópicos. El tipo de geometría más simple que puede tener esta propiedad es lo que se denomina geometría plana, en la que se aplican las reglas normales de la geometría euclidiana. Sin embargo, resulta que la suposición de isotropía no es suficiente para exigirla como única opción. En cambio, hay tres geometrías posibles para el universo, y corresponden a que para k igual a cero se tiene la geometría plana, para k positivo se tiene la geometría esférica, mientras que para k negativo se tiene la geometría hiperbólica. La siguiente tabla resume las características de cada una de estas geometrías (41),

Curvatura	Geometría	Ángulo del triángulo	Circunferencia del círculo	Tipo de universo
$k > 0$	esférica	$> 180^\circ$	$c < 2\pi r$	cerrado
$k = 0$	plana	180°	$c = 2\pi r$	plano
$k < 0$	hiperbólica	$< 180^\circ$	$c > 2\pi r$	abierto

Cuadro E3.1: Un resumen de las posibles geometrías.

Apéndice F

Contracción Inönü-Wigner

Tomando en cuenta que la mecánica clásica es un caso límite de la mecánica relativista, tiene sentido considerar que existe un proceso en el que el grupo de Galileo es un caso límite del grupo de la mecánica relativista, y de la misma forma para las correspondientes representaciones. De modo que, Inönü y Wigner investigaron cómo los grupos pueden ser casos límites de otros grupos, y cómo sus representaciones pueden ser obtenidas a partir de las representaciones de los grupos de los cuales aparecen como límites (35).

Así, en su nota de 1953 exponen el siguiente teorema: Todo grupo de Lie puede contraerse con respecto a cualquiera de sus subgrupos continuos y sólo con respecto a éstos. El subgrupo con respecto al cual se realiza la contracción se llamará S . Los elementos infinitesimales contraídos forman un subgrupo invariante Abeliano del grupo contraído. El subgrupo S es isomorfo con el grupo factor de este subgrupo invariante. A la inversa, la existencia de un subgrupo invariante Abeliano y la posibilidad de elegir de cada uno de sus cosets un elemento para que éstos formen un subgrupo S , es una condición necesaria para la posibilidad de obtener el grupo a partir de otro grupo por contracción.

Entonces, sea $\mathfrak{g} = V_0 \oplus V_1$ un álgebra de Lie, donde V_0 es una subálgebra de \mathfrak{g} generada por $\{X_{i_0}\}_{i_0=1}^{\dim V_0}$ y V_1 es un subespacio de \mathfrak{g} generado por $\{X_{i_1}\}_{i_1=1}^{\dim V_1}$. El álgebra es descrita por (52)

$$[X_A, X_B] = C_{AB}^D X_D \quad (\text{F0.1})$$

la contracción Inönü-Wigner se logra siguiendo los pasos a continuación:

1. Reescalar los generadores por medio de un parámetro λ de la siguiente forma

$$Y_{i_1} = \lambda^{-1} X_{i_1} \quad (\text{F0.2})$$

2. Descomponer el álgebra como sigue

$$\begin{aligned} [X_{i_0}, X_{j_0}] &= C_{i_0 j_0}^{k_0} X_{k_0} + C_{i_0 j_0}^{k_1} X_{k_1} \\ [X_{i_0}, X_{j_1}] &= C_{i_0 j_1}^{k_0} X_{k_0} + C_{i_0 j_1}^{k_1} X_{k_1} \\ [X_{i_1}, X_{j_1}] &= C_{i_1 j_1}^{k_0} X_{k_0} + C_{i_1 j_1}^{k_1} X_{k_1} \end{aligned} \quad (\text{F0.3})$$

3. Tener en cuenta que V_0 , generado por $\{X_{i_0}\}$ es una subálgebra, lo cual significa que las constantes de estructura deben satisfacer la condición

$$C_{i_0 j_0}^{k_1} = 0 \quad (\text{F0.4})$$

4. Reemplazando los generadores reescalados en el álgebra dada en (F0.3) tenemos una nueva álgebra dada por

$$\begin{aligned} [X_{i_0}, X_{j_0}] &= C_{i_0 j_0}^{k_0} X_{k_0} \\ [X_{i_0}, Y_{j_1}] &= \frac{1}{\lambda} C_{i_0 j_1}^{k_0} X_{k_0} + C_{i_0 j_1}^{k_1} Y_{k_1} \\ [Y_{i_1}, Y_{j_1}] &= \frac{1}{\lambda^2} C_{i_1 j_1}^{k_0} X_{k_0} + \frac{1}{\lambda} C_{i_1 j_1}^{k_1} Y_{k_1} \end{aligned} \quad (\text{F0.5})$$

5. Finalmente, tomamos el límite cuando el parámetro $\lambda \rightarrow \infty$, lo que nos conduce al álgebra contraída

$$\begin{aligned} [X_{i_0}, X_{j_0}] &= C_{i_0 j_0}^{k_0} X_{k_0} \\ [X_{i_0}, Y_{j_1}] &= C_{i_0 j_1}^{k_1} Y_{k_1} \\ [Y_{i_1}, Y_{j_1}] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{F0.6})$$

En general, las contracciones Inönü-Wigner cambian las constantes de estructura y la métrica de Killing del álgebra sin cambiar el número de generadores, pero el álgebra resultante sigue siendo un álgebra de Lie. Puesto que algunas constantes de estructura pueden hacerse cero bajo la contracción, algunos generadores se vuelven conmutables y acaban formando una sub-álgebra Abeliiana. Por lo que, la contracción de un álgebra semi-simple no es necesariamente semi-simple (61).

Por otro lado, las contracciones de Inönü-Wigner pueden dar lugar a representaciones in fieles. En otras palabras, la representación de tomar el límite puede no ser una representación fiel irreducible del grupo contraído. Por lo tanto, el procedimiento para obtener una acción para un grupo contraído no es el límite directo de la acción original.

Apéndice G

Gravedad de Lovelock en $5D$

En las ecuaciones (2.1) y (2.2) de la referencia (3) los coeficientes λ_m en el Lagrangiano (2.2) tienen dimensiones de longitud ^{$(2p-D)$} y $\delta_{j_1 \dots j_{2p}}^{i_1 \dots i_{2p}}$ es la delta de Kronecker generalizada. Usualmente tal densidad Lagrangiana es normalizada a las unidades de la longitud de Planck $\lambda_1 = (16\pi G)^{-1} = l_P^{2-D}$. En 5-dimensiones, el Lagrangiano está dado por los primeros tres términos de la suma

$$\mathcal{L}^{(5D)} = \sqrt{-g} [\lambda_0 + \lambda_1 R + \lambda_2 (R^2 - 4R_{ij}R^{ij} + R_{ijkl}R^{ijkl})] \quad (\text{G0.1})$$

donde $\lambda_1 = (16\pi G)^{-1} = l_P^{-3}$.

En el lenguaje de las formas diferenciales, el Lagrangiano de Lovelock en 5-dimensiones puede ser escrito como (12)

$$\mathcal{L}^{(5)} = \epsilon_{abcde} (\alpha_0 e^a e^b e^c e^d e^e + \alpha_1 R^{ab} e^c e^d e^e + \alpha_2 R^{ab} R^{cd} e^e) \quad (\text{G0.2})$$

donde α_0 , α_1 y α_2 son constantes arbitrarias.

Tomando en cuenta que $\epsilon_{abcde} e^a e^b e^c e^d e^e = -120\sqrt{-g}d^5x$, $\epsilon_{abcde} R^{ab} e^c e^d e^e = -6\sqrt{-g}Rd^5x$, $\epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e = -\sqrt{-g} (R^2 - 4R_{ij}R^{ij} + R_{ijkl}R^{ijkl}) d^5x$, tenemos que (G0.2) puede ser escrito de la siguiente forma

$$\mathcal{L}^{(5)} = -\sqrt{-g} (120\alpha_0 + 6\alpha_1 R + \alpha_2 [R^2 - 4R_{ij}R^{ij} + R_{ijkl}R^{ijkl}]) d^5x \quad (\text{G0.3})$$

La comparación de (G0.1) con (G0.3) vemos que $\lambda_0 = 120\alpha_0$, $\lambda_1 = 6\alpha_1$, $\lambda_2 = \alpha_2$.

Por otra parte, a partir de (4.3.3) es directo ver que

$$\mathcal{L}_{EGB}^{(5D)} = \epsilon_{abcde} \left(\alpha R^{ab} R^{cd} e^e + \frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e - \frac{\Lambda_{5D}}{15} e^a e^b e^c e^d e^e \right) \quad (\text{G0.4})$$

donde $\alpha = 2\alpha_2/3\alpha_1$, $\beta = 2\alpha_0/3\alpha_1$, que indica que los coeficientes α y λ_2 son proporcionales. En efecto,

$$\alpha = \frac{2\alpha_2}{3\alpha_1} = \frac{4\lambda_2}{\lambda_1} = 64\pi G\lambda_2 = 4l_P^3\lambda_2 \quad (\text{G0.5})$$

Apéndice H

Las teorías tenso-escalares más generales de la gravedad

En la referencia (24) se construyó la teoría tenso-escalar más general que satisface las siguientes condiciones: (i) que se describa mediante un principio de acción en el que la función de Lagrange es una D -forma invariante bajo transformaciones locales de Lorentz sobre una variedad pseudo-Riemanniana M , y (ii) La función de Lagrange se construye a partir del producto exterior de la 1-forma vielbein e^a , la 2-forma curvatura R^{ab} , las primeras derivadas del campo escalar Ψ^a , y las segundas derivadas del campo escalar Φ^a , donde los campos Ψ^a y Φ^a son definidos en términos de la 0-forma ϕ , como sigue $\Psi^a \equiv \nabla^a \phi \nabla_b \phi e^b$ y $\Phi^a \equiv \nabla^a \nabla_b \phi e^b$.

Con estas condiciones es posible definir un Lagrangiano de base dado por:

$$\mathcal{L}_{lmn} = \bigwedge_{i=1}^l R^{a_i b_i} \wedge \bigwedge_{j=1}^m \Phi^{c_j} \wedge \bigwedge_{k=1}^n \Psi^{d_k} \wedge \theta_{a_1 b_1 \dots a_l b_l c_1 \dots c_m d_1 \dots d_n}^* \quad (\text{H0.1})$$

donde $l, m, n \in \mathbb{N}$. Aquí, $e_{a_1 \dots a_k}^*$ es la base dual de Hodge, y es definida como sigue

$$e_{a_1 \dots a_k}^* = \frac{1}{(D-1)!} \epsilon_{a_1 \dots a_k a_{k+1} \dots a_D} e^{a_{k+1}} \wedge \dots \wedge e^{a_D} \quad (\text{H0.2})$$

Así tenemos que la acción para esta teoría tenso-escalar será la suma sobre todos los posibles Lagrangianos con diferentes l , m , y n integrados sobre la variedad espacio-tiempo

$$S = \sum_{l,m,n}^{p \leq D} \int_M \alpha_{lmn} \mathcal{L}_{(lmn)} \quad (\text{H0.3})$$

donde $p = 2l + m + n$ y $n \leq 1$. En este contexto, los coeficientes $\alpha_{(lmn)}$ representan 0-formas, que en general pueden ser funciones del campo escalar y sus derivadas, esto es $\alpha_{lmn} = \alpha_{lmn}(\phi, X, [\Phi])$, con $X = (-1/2)\phi^{;\mu}\phi_{;\mu}$, $[\Phi] = \phi^{;a}_{;a}$.

Luego, para el caso de cuatro dimensiones con $p = 4$ y $n = 0$, se encontró que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6^{NH} = & E_6 (R_{abcd}R^{abcd} - 4R_{ab}R^{ab} + R^2) \eta \\ & + 2E_{6,X} \{ ([\Phi]^2 - [\Phi^2]) R + 4([\Phi] \Phi_{ab} - \Phi_{ab}^2) R^{ab} + 2\Phi_{ab}\Phi_{cd}R^{abcd} \} \eta \\ & + \frac{1}{3}E_{6,XX} \left([\Phi]^4 - 6[\Phi]^2 [\Phi^2] + 3[\Phi^2]^2 + 8[\Phi] [\Phi^3] - 6[\Phi^4] \right) \eta \end{aligned} \quad (\text{H0.4})$$

donde $[\Phi] = \phi^{;a}_{;a}$, $\Phi_{ab} = \phi_{;ab}$, $\Phi_{ab}^n = \phi_{;ac_1} \phi^{;c_1}_{;c_2} \cdots \phi^{;c_{n-1}}_{;b}$, por lo que

$$\begin{aligned} [\Phi]^2 - [\Phi^2] &= \phi^{;a}_{;a} \phi^{;b}_{;b} - \phi^{;a}_{;b} \phi^{;b}_{;a} \\ [\Phi] \Phi_{ab} - \Phi_{ab}^2 &= \phi^{;d}_{;d} \phi_{;ab} - \phi_{;ac} \phi^{;c}_{;b} \\ \Phi_{ab} \Phi_{cd} &= \phi_{;ab} \phi_{;cd} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\Phi]^4 - 6[\Phi]^2 [\Phi^2] + 3[\Phi^2]^2 + 8[\Phi] [\Phi^3] - 6[\Phi^4] &= \phi^{;a}_{;a} \phi^{;b}_{;b} \phi^{;c}_{;c} \phi^{;d}_{;d} - 6\phi^{;a}_{;a} \phi^{;b}_{;b} \phi^{;c}_{;d} \phi^{;d}_{;c} \\ &+ 3\phi^{;a}_{;b} \phi^{;b}_{;a} \phi^{;c}_{;d} \phi^{;d}_{;c} + 8\phi^{;a}_{;a} \phi^{;b}_{;c} \phi^{;c}_{;d} \phi^{;d}_{;b} \\ &- 6\phi^{;a}_{;b} \phi^{;b}_{;c} \phi^{;c}_{;d} \phi^{;d}_{;a} \end{aligned}$$

Las correspondientes ecuaciones de movimiento no tienen derivadas de orden superior. Esta teoría cuyo Lagrangiano es $\mathcal{L}_6^{NH} = \mathcal{L}_6^{NH}[E_6(\phi, X)]$, fue llamado por sus autores “teoría cinética de Gauss-Bonnet”. Este resultado permitió a los autores de (24) probar que dicha teoría está contenida en la teoría de Horndeski (34), y que cuando existe una dependencia sólo del término cinético en el coeficiente $E_6 = E_6(X)$, se tiene que el Lagrangiano Gauss-Bonnet cinético es una forma exacta.