



Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Sobre la Interacción Onda-Partícula en un Plasma Electroestático no Colisional Bajo Comportamiento Crítico

Tesis para optar al grado de
Magíster en Ciencias con Mención en Física
por

Isaías Alejandro Sandoval Peñailillo

octubre, 2022

Director de Tesis: **Dr. Jaime Araneda Sepúlveda**

Índice General

Lista de Figuras	iv
Resumen	vi
Abstract	vii
1 Introducción	1
1.1 Estado del Arte	1
1.2 Hipótesis	5
1.3 Objetivos Generales	7
1.4 Objetivos Específicos	7
2 Marco Teórico	9
2.1 Introducción a Teoría Cinética	9
2.2 Función densidad de probabilidad	10
2.3 Ecuación de Boltzmann	11
2.3.1 Sobre la interacción entre las partículas	12
2.3.2 Interacciones en un plasma	13
2.4 Resultados particulares de la función de distribución	14
2.4.1 Cantidades promedio y variables macroscópicas	14
2.4.2 Momentos de una función de distribución	15
2.4.3 Distribución Maxwelliana	15
2.5 Ondas en el modelo de Teoría Cinética y Amortiguamiento de Landau	19
2.6 Ondas planas y relación de dispersión de un medio	19

2.6.1	Relación de dispersión	20
2.7	Ecuaciones de Vlasov-Poisson	20
2.7.1	Oscilaciones electroestáticas	21
3	Metodología	35
3.1	Resolviendo Vlasov-Poisson en 1D	35
3.1.1	Solución de la Relación de Dispersión para Ondas de Langmuir	41
3.1.2	Soluciones Numéricas de Vlasov-Poisson	41
3.2	<i>Correlación Espacial</i>	42
3.3	<i>Correlación Onda-Partícula</i>	43
3.4	<i>Eficiencia de la Interacción Onda-Partícula</i>	44
4	Resultados	46
4.1	Solución de la Relación de Dispersión	47
4.2	Comportamiento Crítico	48
4.3	Eficiencia de Transmisión Energética	51
4.4	Correlación Espacial entre la presión y densidad	57
5	Conclusiones	62
	Bibliografía	64

Índice de Figuras

1.1	Función de Distribución de Velocidades	5
2.1	Sección de distribución maxwelliana, con $v_{y0} = v_{z0} = 0$	18
2.2	Contorno de integración	28
2.3	Polos de $\phi_k =$ ceros de $D(\vec{k}, ip)$	29
2.4	Contorno para $Re(p) > 0$	29
2.5	Contorno para $Re(p) = 0$	29
2.6	Contorno para $Re(p) < 0$	30
2.7	Contorno deformado	31
2.8	Amortiguamiento de Landau.	33
3.1	Técnica de <i>Howes</i>	43
3.2	Interpretación Física de $Q(\epsilon)$	44
4.1	Relación de Dispersión	47
4.2	Envolvente de $ \hat{E}_k ^2$ para distintos ϵ	48
4.3	<i>Critical Slowing</i> de t_a y $ \hat{E}_k ^2(t_a)$	49
4.4	Ajustes de 4.3a y 4.3b	49
4.5	$\Delta w(v_{max}, t)$ y su ajuste en función de ϵ	51
4.6	Relación entre $ \hat{E}_k ^2$ y $\Delta w(v_{max}, t)$	52
4.7	Espacio de Fase para $\epsilon \approx \epsilon_Q^*$	53
4.8	Espacio de Fase para $\epsilon \gg \epsilon_Q^*$	54
4.9	Espacio de Fase para $\epsilon = 4 \cdot 10^{-4}$	55
4.10	$\langle \delta f \rangle_x(v, t)$ en precisiones:	56

4.11	La correlación cruzada respecto de las autocorrelaciones muestran sincronizaciones de fase cada cierto intervalo de tiempo para $\epsilon \approx \epsilon_Q^*$. . .	58
4.12	La correlación cruzada con las autocorrelaciones comienzan a sincronizar sus fases irregularmente para $\epsilon \gg \epsilon_Q^*$	60

Resumen

Es sabido que el amortiguamiento de Landau ocurre por la interacción entre la onda (con velocidad $v_\phi = \omega/k$) y las partículas resonantes ($v \approx v_\phi$), ya que en un plasma con una distribución de velocidades Maxwelliana hay más partículas ($v \lesssim v_\phi$) absorbiendo energía de la onda que partículas ($v_\phi \lesssim v$) dando energía. Dicha modelización ha demostrado ser veraz cuando la amplitud inicial de perturbación ϵ_0 es lo suficientemente grande para que se manifiesten los efectos no lineales en el plasma (como el atrapamiento de partículas), deformando la distribución de velocidades en torno a v_ϕ y mostrando así que hay un intercambio energético eficaz que produce el amortiguamiento de Landau. Sin embargo, esta modelización es incorrecta para explicar el amortiguamiento de Landau cuando $\epsilon_0 \rightarrow 0$, esto significa que hay un valor límite $\epsilon_0^* \ll 1$, por debajo del cual el intercambio energético no es eficaz, y en consecuencia la distribución de velocidades no se deforma en torno a v_ϕ aún habiendo amortiguamiento de Landau, mostrando que dicha modelización no es válida para explicar el amortiguamiento de Landau para $\epsilon_0 < \epsilon_0^*$.

En este trabajo mostramos que ese límite existe y es calculado interpretando la interacción Onda-Partícula como una transición de fase de segundo orden. Esto lo validamos con una técnica desarrollada por el autor, la cual cuantifica la eficiencia de transmisión energética mediante soluciones numéricas del sistema de ecuaciones de Vlasov-Poisson 1D en cuádruple precisión computacional, para demostrar que bien por debajo de ese límite la distribución de velocidades no se deforma en torno a v_ϕ aún cuando sigue habiendo amortiguamiento de Landau, hasta que la energía decae a 0 para $t \rightarrow +\infty$ (computacionalmente hablando, hasta caer a ruido numérico).

Abstract

It is known that Landau damping occurs due to the interaction between the wave (with velocity $v_\phi = \omega/k$) and the resonant particles ($v \approx v_\phi$), since in a plasma with a Maxwellian velocity distribution there are more particles ($v \lesssim v_\phi$) absorbing wave energy than particles ($v_\phi \lesssim v$) giving energy. Such modeling has proven to be true when the initial perturbation amplitude ϵ_0 is large enough for nonlinear effects to manifest in the plasma (like particle trapping), distorting the velocity distribution around v_ϕ and thus showing that there is an efficient energy exchange that produces Landau damping. However, This modeling is incorrect for explain the Landau damping when $\epsilon_0 \rightarrow 0$, this means there is a limit value $\epsilon_0^* \ll 1$, below which energy exchange is not effective, and consequently the velocity distribution is not deformed around v_ϕ even with Landau damping, showing that such modeling is not valid to explain the Landau damping for $\epsilon_0 < \epsilon_0^*$.

In this work we show that this limit exists and it is calculated by interpreting the Wave-Particle interaction as a second-order phase transition. We validate this with a technique developed by the author, which quantifies the efficiency of energy transmission through numerical solutions of the Vlasov-Poisson 1D system equations in quadruple computational precision, to show that well below that limit the velocity distribution does not deform around v_ϕ even though Landau damping remains, until the energy decays to 0 for $t \rightarrow +\infty$ (computationally speaking, down to numerical noise).

Capítulo 1

Introducción

1.1 Estado del Arte

El amortiguamiento de Landau [12] ha sido sin lugar a dudas uno de los descubrimientos más interesantes en física de N partículas, al estar presente en muchos tipos de sistemas que exhiben comportamiento colectivo. Este fenómeno fue descubierto teóricamente por L. D. Landau para un plasma electrónico con temperatura finita y perturbando a primer orden en torno a un equilibrio termodinámico y homogéneo en presencia de un fondo de iones fijos y neutralizante. Landau se dio cuenta que el estudio realizado por Vlasov [19] para la propagación de ondas en un plasma era inconsistente, ya que éste último estaba basado en un procedimiento matemático en el cual no existía un estado inicial del plasma y, en consecuencia, la propagación de ondas no estaba sujeta a condiciones iniciales. De ese modo, no era posible estudiar la evolución temporal del sistema. Este descubrimiento fue cuestionado por otros autores de la época, sin embargo los experimentos en laboratorios [13] y mediciones *in situ* del viento solar [2] realizadas por la sonda MMS (*Magnetic MultiScale mission*) le dieron la razón a Landau.

Posteriormente, J. Dawson [4] se sintió motivado a dar una interpretación física al amortiguamiento de Landau, explicando este fenómeno como uno de desbalance energético de interacción entre partículas del plasma que interactúan eficazmente con la onda.

Más adelante, T. O’Neil [15] encontró una generalización del amortiguamiento de Landau mediante las trayectorias perturbadas en el espacio de fases a partículas cuyas velocidades son cercanas a la velocidad de fase de la onda y que, por ello, interactúan eficazmente con la perturbación. Esta generalización recupera el resultado de teoría lineal cuando el tiempo es menor al período en el que las partículas son atrapadas en el pozo potencial de la perturbación electroestática (este período es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de amplitud de esta perturbación, $t_b \propto \epsilon^{-1/2}$). En el caso opuesto, es decir, cuando la amplitud es finita, los efectos no-lineales impiden el amortiguamiento y aparecen modos de propagación asintóticos que son mantenidos por las oscilaciones de las partículas atrapadas.

Ivanov [9] interpreta la generalización de O’Neil como un fenómeno crítico, encontrando mediante simulaciones numéricas auto-consistentes que el atrapamiento de partículas predice bien lo que sucede en el plasma para perturbaciones relativamente grandes, pero a medida que se disminuye la perturbación inicial, el tiempo en el que la energía electroestática cesa de decaer diverge en lugar de llegar a una amplitud nula, como una transición de fase continua, contradiciendo lo hallado por O’Neil. Posteriormente, en [8] Ivanov encontró que el atrapamiento de partículas en el pozo potencial de la perturbación no rige directamente el cese del amortiguamiento de Landau, dejando preguntas abiertas para encontrar el mecanismo responsable del decaimiento. Debido a que la interpretación de Dawson para el amortiguamiento de Landau es concebida mediante el intercambio de energía entre la perturbación y las partículas con velocidades cercanas a la velocidad de fase de la onda, su descripción es válida para el rango de valores de las perturbaciones en el que las ecuaciones usadas en el formalismo son consistentes con física no lineal. Esto, porque la ecuación de Ampère envuelve al módulo cuadrático del campo eléctrico. Sin embargo, en el contexto de la teoría lineal este término es nulo y, consecuentemente, no admite variaciones cuadráticas en las perturbaciones para el proceso de interacción onda-partícula.

Finalmente, Cedric Villani [14] en su artículo en colaboración con Mouhot describió el amortiguamiento de Landau como un fenómeno de tendencia a la suavidad del espacio de fase y de *phase mixing*. En otras palabras, el *phase Mixing* convierte la suavidad en decaimiento. En este proceso la información del espacio de posiciones se transmite al espacio de velocidades sin que ocurra un aumento de la entropía. De este modo, el amortiguamiento de Landau surge como un raro ejemplo de un fenómeno físico en el cual la regularidad no es solamente crucial desde un punto de vista matemático, sino que también puede ser medido experimentalmente. Entonces, ¿Cuáles son los procesos físicos que median la evolución temporal de la energía electrostática de la perturbación para los casos en el que el tratamiento de O'Neil falla?

Los procesos de crecimiento de ondas han sido estudiados ampliamente debido a la diversidad de fenómenos que involucra, sin embargo, no se ha hecho suficiente hincapié en el caso contrario, el proceso de amortiguamiento de las ondas. Algunos cuestionamientos surgen sobre cómo las ondas son amortiguadas en un plasma en equilibrio termodinámico; si el comportamiento del amortiguamiento de Landau es diferente por sobre algún límite de la amplitud de perturbación inicial, ¿aplican los conceptos de la teoría de fenómenos críticos, y cuáles son sus implicancias?

¿Qué tan pequeña debe ser la amplitud para que el intercambio de energía entre partículas y la perturbación deje de ser relevante? En el trabajo de Ivanov se demostró que para un plasma no magnetizado y no colisional, la evolución temporal de la energía electrostática (tras una perturbación en el espacio de posiciones para diferentes amplitudes de perturbación) desarrolla distintos estados: el amortiguamiento de Landau lineal en el que el campo eléctrico decae a la misma tasa de amortiguamiento encontrado por teoría lineal luego si la amplitud el campo eléctrico decae de manera algebraica, y finalmente, si la amplitud es aún mayor, la evolución temporal de la energía electrostática exhibe un cese del amortiguamiento con una posterior recuperación de la energía electrostática. Estos estados están bien descritos como un fenómeno crítico, mostrando leyes de potencia en función de la

distancia al límite que separa a estos estados tanto para las cantidades que involucran a los campos autogenerados por el plasma, **como también para las cantidades temporales**. Los exponentes críticos de la fase de amortiguamiento y la fase de recuperación son distintos a los esperados por el atrapamiento de las partículas en el pozo potencial predicho por O'Neil. Sin embargo, este atrapamiento afecta a los exponentes críticos bien por encima de este límite, dando explicación también a la frecuencia de oscilación posterior a la etapa de recuperación.

Los escalamientos temporales y espaciales están interrelacionados, sugiriendo que la inclusión de una dimensión temporal es de vital importancia para fenómenos críticos en plasmas no colisionales, en contraste a sistemas termodinámicos donde las variables temporales para lograr el equilibrio termodinámico no son consideradas.

Las inestabilidades en plasmas han sido estudiadas ampliamente, sin embargo, muchos cuestionamientos surgen de la forma en que la amplitud de las ondas son amortiguadas en el tiempo, una de las más importantes es: ¿El comportamiento del amortiguamiento de Landau es el mismo para los casos bajo el **límite crítico** y por sobre este límite ?

Otros trabajos [16, 17, 10, 5, 6, 18, 1] han dado respuestas parciales a este problema, sin embargo, Ivanov recalca la importancia de emplear un buen modelo físico para describir el comportamiento crítico, ya que otros autores llegan a la misma conclusión, pero difieren en los parámetros empleados en el modelo.

Por otro lado, el *field-particle correlation* [11, 7], de ahora en adelante *correlación onda-partícula* es una técnica que usa medidas puntuales de los campos electromagnéticos y la función de distribución de velocidades de las partículas para investigar la transferencia de energía desde los campos hacia las partículas asociadas con el amortiguamiento no colisional de fluctuaciones turbulentas en un plasma débilmente colisional, como en gran parte del viento solar. Esta característica en el espacio de velocidades puede potencialmente ser usada para identificar el mecanismo dominante del amortiguamiento no colisional de fluctuaciones electroestáticas.

1.2 Hipótesis

J. Dawson propuso un modelo para explicar el amortiguamiento de Landau en términos energéticos, llegando al mismo resultado que Landau para una onda electrostática propagándose en un plasma. Dicho modelo separa la función de distribución inicial en dos partes $f = f_M + f_r$, la parte principal M y la parte resonante r :

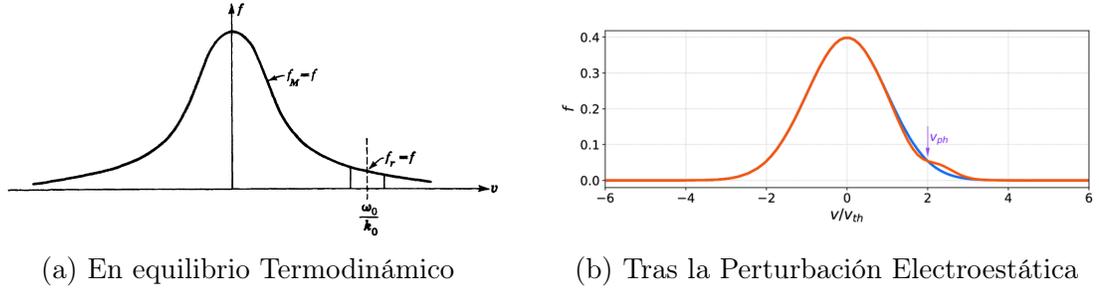


Figure 1.1: Función de Distribución de Velocidades

$$\frac{\partial f_M^1}{\partial t} + v \frac{\partial f_M^1}{\partial x} - E^1 \frac{\partial f_M^0}{\partial v} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial f_r^1}{\partial t} + v \frac{\partial f_r^1}{\partial x} - E^1 \frac{\partial f_r^0}{\partial v} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial E^1}{\partial x} = - \int dv (f_M^1 + f_r^1) \quad (1.3)$$

La función de distribución inicialmente está en equilibrio termodinámico (fig. 1.1a), por lo tanto no hay un campo eléctrico inicial. Luego tras una perturbación electrostática lo suficientemente grande para que la función de distribución de velocidades se deforme en torno a la velocidad de fase de la perturbación v_ϕ (fig. 1.1b), se genera una onda electrostática inicial (con velocidad v_ϕ). Las partículas con velocidades cercanas a v_ϕ , específicamente, aquellas con $v \lesssim v_\phi$ son aceleradas por la onda, absorbiendo su energía, y las que cumplen con $v \gtrsim v_\phi$ son frenadas por la onda, cediendo su energía, estas son las partículas resonantes. Estas son las partículas que

intercambian energía eficazmente con la perturbación electroestática. Luego, como la distribución de velocidades es una Maxwelliana, hay más partículas absorbiendo energía que cediendo energía a la onda y este desbalance en el número de partículas intercambiando energía con la onda es lo que produce el amortiguamiento de Landau según Dawson.

Para estudiar la evolución temporal del plasma resolvemos las ecuaciones 1.1 y 1.2 suponiendo $\int dv f_r^1 \ll \int dv f_M^1$, esto genera un ligero campo eléctrico no amortiguado inicial $E^1 = \epsilon_0 \cdot \text{sen}(k_0 x - \omega_0 t)$ que podemos usar como condición inicial para la ecuación 1.2 y así obtener el campo eléctrico debido a la interacción onda-partícula. Luego, para estudiar la evolución temporal de la energía electroestática del campo eléctrico E^1 se utiliza la ecuación de Ampère-Maxwell:

$$\frac{\partial E^1}{\partial t} = \int dv v (f_r^1 + f_M^1) \quad (1.4)$$

Multiplicando 1.4 por $E^1/4\pi$

$$\frac{1}{8\pi} \frac{\partial (E^1)^2}{\partial t} = \int dv E^1 v (f_r^1 + f_M^1) \quad (1.5)$$

Sin embargo, la ecuación 1.5 no es válida para el problema linealizado ya que el término izquierdo E^1 es un término lineal, entonces $(E^1)^2$ no admite variaciones significativas. Esto significa que el paso de la ecuación 1.4 al 1.5 no puede ser realizado para explicar en términos energéticos el amortiguamiento de Landau lineal¹. Por lo tanto, el modelo de Dawson es válido solo para un rango de valores de E^1 lo suficientemente grande para que la ecuación 1.5 tenga variaciones significativas. Entonces, surgen las siguientes dudas:

- ¿Hay un límite por debajo del cual este modelo no explica el amortiguamiento de Landau lineal?
- ¿Puede ocurrir el amortiguamiento de Landau lineal, aún cuando no exista un intercambio eficiente de energía entre la onda y las partículas resonantes?

¹amortiguamiento de Landau lineal se refiere al encontrado por Landau, calculado mediante perturbaciones a primer orden de aproximación (secc. 2.7.1)

1.3 Objetivos Generales

demostrar que el amortiguamiento de Landau lineal no puede ser explicado mediante términos energéticos para perturbaciones pequeñas, esto significa que hay un valor de la amplitud inicial de perturbación electroestática que no permite variaciones significativas de la función de distribución de velocidades. En consecuencia, se busca demostrar que el intercambio energético entre la onda y partículas resonantes no es lo suficientemente eficiente para que la función de distribución de velocidades se deforme en torno a la velocidad de fase.

1.4 Objetivos Específicos

- **Encontrar la solución de la relación de dispersión de las ondas de Langmuir:** Esto con el fin de poder encontrar la frecuencia, la tasa de amortiguamiento y la velocidad de fase en teoría lineal.
- **Escribir un código para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones de Vlasov-Poisson unidimensional en precisión doble y cuádruple:** esto me permitirá estudiar la evolución temporal del espacio de fases para así obtener toda la información de la dinámica del plasma. Ello a su vez también servirá para calcular la tasa de transferencia de energía Δw mediante la *correlación onda-partícula*. Por otro lado, el código en precisión doble tiene una precisión entre 15 hasta 17 decimales, por lo tanto, si:

$$\boxed{10^{-17} < |\Delta w| < 10^{-15}} \quad (1.6)$$

no podemos recurrir a la energía para explicar el amortiguamiento de Landau lineal debido a que el computador no realiza cálculos fieles para esos valores, o en términos físicos, a esos órdenes de magnitud Δw es despreciable. Luego, el código en precisión cuádruple es para verificar que sigue habiendo amortiguamiento de Landau lineal para amplitudes muy pequeñas que llegan a ruido numérico en precisión doble.

- **Calcular la amplitud crítica de perturbación que separa los estados de equilibrio estable y equilibrio inestable para un valor fijo del vector de onda:** Para obtener el comportamiento crítico del plasma se deben hacer varias simulaciones con distintas perturbaciones iniciales.
- **Desarrollar un método para explicar la eficiencia de transmisión de energía:** Esto se realizará con la *Correlación Onda-Partícula* Δw , ya que esta técnica aísla la transferencia de energía debido a la interacción Onda-Partícula del amortiguamiento de Landau. Por lo tanto, esto nos ayudará a ser más precisos en la búsqueda de la transferencia de energía.
- **Calcular exponentes críticos para el método desarrollado en el paso anterior:** Esto para saber hasta qué punto el amortiguamiento de Landau lineal puede ser explicado mediante términos energéticos.
- **Demostrar qué le sucede al plasma para perturbaciones pequeñas:** Mostrar que sigue habiendo amortiguamiento de Landau lineal, pero la función de distribución de velocidades no se deforma en torno a v_ϕ y que además se cumple $10^{-17} < |\Delta w| < 10^{-15}$.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1 Introducción a Teoría Cinética

Los resultados anteriores pueden aplicarse a un sistema de muchas partículas, sin embargo, esto requiere determinar, dado un instante inicial, sus posiciones y velocidades en el volumen ocupado por el plasma. Junto con esto, cada partícula genera un campo eléctrico y magnético, que puede determinarse por medio de los potenciales de Liénard-Wiechert, por lo que todas las ecuaciones del movimiento resultantes están necesariamente acopladas. Además, se deben calcular los instantes en que las partículas interactúan entre sí (tiempo retardado) lo que introduce un sistema de ecuaciones no lineales asociado a la interacción de cada partícula con las demás. En general, el problema no tiene solución analítica. Por ejemplo, en un plasma compuesto por N partículas, la ecuación de movimiento de cada una involucra la interacción de las $N - 1$ restantes, teniendo un sistema de N ecuaciones diferenciales, y adicionalmente, la determinación de los instantes de interacción involucra $N - 1$ ecuaciones no lineales por partícula, además de calcular dos campos de tres componentes para cada una de ellas.

La teoría cinética, fundamentada en la mecánica estadística, permite estudiar un plasma por medio de variables microscópicas representativas fuera del estado de equilibrio termodinámico, en lugar de seguir la dinámica de cada una de las partículas; se pierde información, pero permite describir correctamente el comportamiento

de todo el volumen de plasma. Este enfoque introduce una función que permite caracterizar la distribución de partículas en función de sus posiciones, velocidades y el tiempo. Este procedimiento incorpora también las variables de interacción entre las partículas.

2.2 Función densidad de probabilidad

La descripción estadística completa de un sistema de N partículas es dada en términos de una función de distribución $F(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N, t)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_v F d^3x_1 \dots d^3x_N d^3v_1 \dots d^3v_N = 1. \quad (2.1)$$

Para un plasma que no está en equilibrio termodinámico, F debe en principio ser calculado desde la dinámica de las N partículas. En la práctica, sin embargo, f no se calcula porque sería equivalente al problema original. En vez de eso, el plasma generalmente es descrito en términos de cantidades obtenidas desde una función de distribución más simple. Esas cantidades se pueden estimar, a través de la evolución temporal de promedios desde un estado inicial conocido. La descripción más detallada del plasma que es manejable es la distribución de una partícula. Tal distribución se obtiene integrando F sobre las coordenadas y velocidades del espacio de fase de todas las partículas excepto una, de especie α . Así, para la especie α , la función distribución de una partícula $f^{(1)}$ es

$$\bar{n}_\alpha f_\alpha^{(1)}(\vec{x}_1, \vec{v}_1, t) = N_\alpha \int F(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N, t) d^3x_2 \dots d^3x_N d^3v_2 \dots d^3v_N, \quad (2.2)$$

donde N_α es el número de partículas de la especie, $\bar{n}_\alpha = N_\alpha/V$ y V es el volumen del sistema, y donde no se ha integrado sobre las coordenadas y velocidades de la partícula 1. La cantidad $\bar{n}_\alpha f_\alpha^{(1)} d^3x_1 d^3v_1$, es el número de partículas de tipo α en \vec{x}_1 , \vec{v}_1 y t en el volumen $d^3x_1 d^3v_1$ del espacio de fase. Esta es la función que en adelante se trabaja simplemente como la distribución de las partículas. Notar que se verifica

$$\int_v \bar{n}_\alpha f_\alpha^{(1)}(\vec{x}_1, \vec{v}_1, t) d^3v_1 = n_\alpha(\vec{x}_1, t), \quad (2.3)$$

es decir, se obtiene la densidad local de partículas de la especie α .

2.3 Ecuación de Boltzmann

El comportamiento del plasma en el contexto de la descripción reducida se obtiene aplicando las reducciones mencionadas a la ecuación que gobierna el comportamiento de F . Ésta obedece a la ecuación de Liouville

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i (\vec{v}_i \cdot \nabla_{x_i} F + \vec{a}_i^T \cdot \nabla_{v_i} F) = 0, \quad (2.4)$$

donde \vec{a}^T corresponde a la aceleración de la partícula i debido a fuerzas externas y a las otras partículas. La ecuación de Liouville puede ser escrita como $dF/dt = 0$. Esto implica que F se comporta como una hiperpartícula con coordenadas $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N)$ en un instante t , moviéndose en un espacio de fase bajo la influencia de las fuerzas $F(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N)$; la densidad de probabilidad F , permanece constante en la ubicación instantánea de la hiperpartícula. En general, esto no significa que F es constante en el tiempo en un punto fijo $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N)$, ni tampoco que F es la misma en todos los puntos espaciales.

La ecuación diferencial para la función de distribución de una especie se obtiene integrando 2.4 sobre todas las coordenadas y velocidades, excepto la de una partícula. De esto se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [\bar{n}_\alpha f_\alpha^{(1)}] + \vec{v}_1 \cdot \nabla_{x_1} [\bar{n}_\alpha f_\alpha^{(1)}] \\ & + N_\alpha \int \vec{a}_1^t \cdot \nabla_{v_1} F d^3 x_2 \dots d^3 x_N d^3 v_2 \dots d^3 v_N = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde se usó

$$\int \int \nabla_{x_2} [\vec{v}_2 F] \cdot d^3 x_2 d^3 v_2 = 0. \quad (2.6)$$

Esta cantidad representa el flujo neto de partículas saliendo del sistema. Por suposición N_α es constante, entonces el flujo debe ser nulo. De la misma forma

$$\int \nabla_{v_2} F d^3 v_2 = \vec{0},$$

porque $F(v \rightarrow \infty) = 0$; no existen partículas con velocidad extremadamente altas. Si la fuerza sobre la i -ésima partícula es debida a fuerzas auto-consistentes, en este caso

la fuerza de Lorentz por campos electromagnéticos creados por la propia distribución de carga en el sistema,

$$\vec{a}_i^T = \frac{q_i}{m_i} \left(\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B} \right), \quad (2.7)$$

donde no se ha considerado colisiones entre partículas, el tercer término de 2.5 se reescribe como

$$N_\alpha \int \vec{a}_1^T \cdot \nabla_{v_1} F d^3 x_2 \dots d^3 x_N d^3 v_2 \dots d^3 v_N = \frac{q_1}{m_1} \left(\vec{E} + \vec{v}_1 \times \vec{B} \right) \cdot \nabla_{v_1} [\bar{n}_\alpha f_\alpha^{(1)}]. \quad (2.8)$$

La ecuación para la función de distribución se convierte en

$$\frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \nabla_{x_1} f_\alpha^{(1)} + \vec{a}^e \cdot \nabla_{v_1} f_\alpha^{(1)} = 0, \quad (2.9)$$

La ecuación de Liouville 2.9 representa entonces una ecuación de conservación para la función de distribución f_α^1 en el espacio de fases.

2.3.1 Sobre la interacción entre las partículas

En el caso general, la fuerza sobre la i -ésima partícula incluye fuerzas externas y entre partículas

$$\vec{a}_i^T(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \frac{q_i}{m_i} \left(\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B} \right) + \sum_j \vec{a}_{ij} \quad (2.10)$$

donde \vec{a}_{ij} representa la aceleración debida a las fuerza entre partículas. En este caso, el tercer término de 2.5 es

$$\vec{a}_1^e \cdot \nabla_{v_1} [\bar{n}_\alpha f_\alpha^{(1)}] + \int \sum_j N_\alpha \vec{a}_{1j} \cdot \nabla_{v_1} F d^3 x_2 \dots d^3 x_N d^3 v_2 \dots d^3 v_N, \quad (2.11)$$

que puede ser reescrito como

$$\vec{a}_1^e \cdot \nabla_{v_1} [\bar{n}_\alpha f_\alpha^1] + \sum_\beta \int \vec{a}_{1\beta} \cdot \nabla_{v_1} \bar{n}_\alpha \bar{n}_\beta f_{e\alpha\beta}^{(2)}(\vec{x}_1, \vec{x}_\beta, \vec{v}_1, \vec{v}_\beta, t) d^3 x_\beta d^3 v_\beta, \quad (2.12)$$

donde $f^{(2)}$ corresponde a la distribución de dos cuerpos (integración sobre velocidades y posiciones de todas las partículas excepto dos) lo que introduce una nueva variable

al problema. En teoría cinética de plasmas se suele evitar el uso de esta función y en su lugar se usa un modelo. La forma de construir este modelo depende de la naturaleza de las fuerzas involucradas. Por ejemplo, si las fuerzas entre partículas son fuertes y de corto alcance, este término es primordialmente determinado por la evolución temporal de la función de distribución debido a las colisiones binarias, es decir, la ecuación de Liouville es aproximada como

$$\frac{df_\alpha^{(1)}}{dt} = \frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \nabla_{x_1} f_\alpha^{(1)} + \vec{a}_1^e \cdot \nabla_{v_1} f_\alpha^{(1)} = \left. \frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial t} \right|_C, \quad (2.13)$$

con

$$\left. \frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial t} \right|_C = - \sum_\beta \bar{n}_\beta \int \vec{a}_{1\beta} \cdot \nabla_{v_1} f_{\alpha\beta}^{(2)}(\vec{x}_1, \vec{x}_\beta, \vec{v}_1, \vec{v}_\beta) d^3x_\beta d^3v_\beta. \quad (2.14)$$

La ecuación 2.13 corresponde a la ecuación de Boltzmann e indica que la evolución temporal de la distribución de partículas en el espacio es afectada también por las interacciones colisionales entre ellas.

2.3.2 Interacciones en un plasma

En un plasma las interacciones son de amplio rango y las fuerzas entre partículas pueden ser divididas aproximadamente en dos partes: una parte es la fuerza promedio sobre las partículas debido a un gran número de partículas relativamente distantes, y la otra parte es la fuerza debido a las partículas más cercanas. En un sistema de baja densidad hay pocas partículas cercanas respecto de una, y el promedio de fuerzas de muchas partículas distantes excede las fuerzas de partículas cercanas.

Es conveniente englobar el promedio de fuerzas de interacciones entre partículas junto con las fuerzas externas escribiendo $\vec{a} = \vec{a}_{ext} + \langle \vec{a}_{int} \rangle$, porque el promedio de las fuerzas desde partículas distantes no depende exactamente de la posición de esas partículas, sino que de la densidad de tales partículas en una ubicación promedio. Las fuerzas que no dependen de la posición exacta de las partículas actúan como fuerzas externas. Luego, la variación de $f_\alpha^{(1)}$ por fuerzas entre partículas cercanas,

principalmente interacciones binarias, es

$$\left. \frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial t} \right|_C = - \sum_\beta \int \int (\vec{a}_{1\beta} - \langle \vec{a}_{1\beta}^{int} \rangle) \cdot \nabla_{v_1} f_{\alpha\beta}^{(2)} d^3 x_\beta d^3 v_\beta \quad (2.15)$$

Así la ecuación cinética apropiada para el estudio del plasma es

$$\left. \frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \nabla_{x_1} f_\alpha^{(1)} + \frac{q_i}{m_i} \langle \vec{E} + \vec{v}_1 \times \vec{B} \rangle \cdot \nabla_{v_1} f_\alpha^{(1)} \right|_C = \left. \frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial t} \right|_C, \quad (2.16)$$

donde $\langle \vec{E} \rangle$ y $\langle \vec{B} \rangle$ son la suma de las fuerzas externas y promedio interno de los campos, y que verifican las siguientes ecuaciones de Maxwell promediadas.

$$\nabla \cdot \langle \vec{E} \rangle = \frac{\langle \rho_q \rangle}{\epsilon}, \quad \nabla \times \langle \vec{B} \rangle = \mu_0 \langle \vec{J} \rangle + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{E} \rangle. \quad (2.17)$$

2.4 Resultados particulares de la función de distribución

Desde esta sección en adelante se considera la función de distribución de una partícula como la función de distribución del sistema, $f_\alpha^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{v}_1, t) \equiv f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$, con todas las implicaciones mencionadas en las secciones anteriores.

2.4.1 Cantidades promedio y variables macroscópicas

Las variables macroscópicas corresponden a cantidades promediadas sobre la distribución de partículas; contienen menor información que la distribución, pero se obtiene una descripción del comportamiento de la variable G en una localidad alrededor de cada posición \vec{r} en el volumen de la distribución de partículas de la especie α . La cantidad total G asociada a un volumen $d^3 x d^3 v$ del espacio de fase es dada por $G(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 x d^3 v$, para un instante t fijo. El valor promedio de la distribución de partículas de la especie α , $\langle G | G \rangle_\alpha$, alrededor de una posición \vec{r} dentro del volumen de la distribución se obtiene integrando respecto de todas las velocidades; esto da la contribución de todas las partículas a la variable macroscópica. Luego se divide por la cantidad de partículas ubicadas en una localidad infinitesimal de \vec{r} , $\bar{n}_\alpha(\vec{r}, t)$, de forma que

$$\langle G | G \rangle_\alpha \equiv \frac{1}{n_\alpha} \int_v G(\vec{v}) f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v, \quad \text{con } n_\alpha = \int_v \bar{n}_\alpha f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v. \quad (2.18)$$

2.4.2 Momentos de una función de distribución

Formalmente, el p -ésimo momento $\langle f|f \rangle_{\alpha,i}^p$ asociado a la componente i de la variable respecto a la que se promedia, con función de distribución $f_\alpha(\vec{v})$ para partículas de especie α , se define como

$$\langle f|f \rangle_{\alpha,i}^p \equiv \int_v v_i^p f_\alpha(\vec{v}) d^3v. \quad (2.19)$$

Esta definición puede extenderse a más dimensiones, y a componentes diferentes. Por ejemplo, puede definirse un momento asociado a las componentes i y j de la variable de integración, $\langle f|f \rangle_{\alpha,i,j}$, que también es considerado como momento de potencia dos.

$$\langle f|f \rangle_{\alpha,i,j} \equiv \int_v v_i v_j f_\alpha(\vec{v}) d^3v, \quad (2.20)$$

del que el momento $p = 2$ pasa a ser un caso particular. La interpretación física de este momento depende de la interpretación que se le dé a la variable sobre la que se promedia.

- El momento $p = 0$ se asocia a la densidad de masa del sistema de partículas, según lo indicado en la definición de f . Para esto, se evalúa $G = m$, donde m es la masa de la partícula asociada a las partículas de la distribución.
- El momento $p = 1$ se asocia al momentum lineal del sistema, y se evalúa usando $\vec{G} = m\vec{v}$, momentum lineal de una sola partícula.
- El momento $p = 2$ se asocia a la energía en la componente i del sistema; la suma en las tres componentes resulta en la energía cinética total. En general, los momentos de orden dos son componentes de un tensor.

2.4.3 Distribución Maxwelliana

Un caso particular de gran importancia es la distribución Maxwelliana, asociada a un sistema de N partículas sobre el que la fuerza externa es nula. A priori, la distribución debe ser homogénea en el espacio y constante en el tiempo, por lo que la distribución no es modificada por colisiones entre partículas. La cantidad de

partículas y la forma en que se distribuyen para cada energía (n_i partículas con energía E_i) y la energía interna U del sistema es dada por

$$U = \sum_{i=1}^N n_i E_i. \quad (2.21)$$

La energía se encuentra particionada y en principio no existe limitación en la cantidad n_i de partículas asociada a cada energía. Con esto se determina la probabilidad de encontrar a alguna partícula con una cierta energía, $P(E_i)$. La distribución se obtiene aplicando el teorema de máxima verosimilitud a dicha probabilidad, exigiendo que

$$N = \sum_{i=1} n_i = \text{cte.}, \quad U = \sum_{i=1}^N n_i E_i = \text{cte.}, \quad (2.22)$$

y que la probabilidad sea constante, $dP = 0$. Este es un problema de maximización con restricciones. El método de multiplicadores de Lagrange resulta en

$$n_i = \alpha e^{-\beta E_i}, \quad (2.23)$$

donde α y β son constantes del método de los multiplicadores. De este resultado se desprende que en la distribución la cantidad de partículas disminuye a medida que aumenta su energía. Se espera que la distribución f sea proporcional a la cantidad de partículas n_i . Suponiendo que las partículas conforman un gas ideal sin fuerzas externas, entonces la energía de las partículas, suponiendo que sólo realizan movimientos de traslación, es $E_i = mv_i^2/2$, con $v_i^2 = v_{i,x}^2 + v_{i,y}^2 + v_{i,z}^2$, y se tiene

$$f(\vec{v}_i) = A e^{-\beta m v_i^2/2}. \quad (2.24)$$

Se debe notar que f tiene la forma de una distribución Gaussiana, en la que el término $\beta m/2$ se relaciona con la dispersión σ respecto del valor medio que, expresada de esta forma, es cero. Equivalentemente, se tiene

$$2\sigma^2 = \frac{2}{\beta m}. \quad (2.25)$$

Se impone la condición de normalización, integrando sobre todas las velocidades en x , y y z , suponiendo que N es la suma de todas las funciones $f(\vec{v}_i)$ puede expresarse como una integral.

$$\int_v f(\vec{v}) d^3v = \int_v A e^{-\beta m v^2/2} d^3v = 1. \quad (2.26)$$

Notar que esta integral es el producto de tres integrales sobre cada componente v_j , de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 v_j^2} dv_j = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Por lo tanto,

$$\int_v f(\vec{v}) d^3 v = A \left[\frac{2\pi}{\beta m} \right]^{3/2} = 1 \Rightarrow A = \left[\frac{m\beta}{2\pi} \right]^{3/2}. \quad (2.27)$$

Para obtener la constante β se utiliza el teorema de equipartición, que indica que en promedio un sistema tiene la misma energía por cada grado de libertad; en este caso hay tres grados de libertad. Al comparar la ley de los gases ideales y con la presión ejercida por la distribución de partículas sobre el borde del volumen, cuando se estudia como un cambio de momentum por colisiones con éste, se tiene que la energía por grado de libertad es $\langle E|E \rangle_l = \kappa T/2$, donde κ es la constante de Boltzmann y T es la temperatura del plasma. Luego,

$$\langle E|E \rangle = \int_v \frac{1}{2} m v^2 f(\vec{v}) d^3 v = \frac{m}{2} \left[\frac{m\beta}{2\pi} \right]^{3/2} \int_v v^2 e^{-\beta m v^2/2} d^3 v = \frac{3}{2} \kappa T. \quad (2.28)$$

Para resolver la integral, se considera que

$$\int_v v_j^2 e^{-a^2 v_k^2} d^3 v = \int_{-\infty}^{\infty} v_j^2 e^{-a^2 v_j^2} dv_j \int_{v_k} e^{-a^2 v_j^2} d^2 v = \left[\sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{1}{2a} \right] \left[\sqrt{\frac{\pi}{a}} \right]^2 = \frac{\pi^{3/2}}{2a^{5/2}}.$$

Luego, la contribución de las tres velocidades v_j resulta

$$\langle E|E \rangle = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{\beta} \right] = \frac{3}{2} \kappa T \Rightarrow \beta = \frac{1}{\kappa T}. \quad (2.29)$$

La integral de energía corresponde a la definición de promedio de v^2 . Luego,

$$\frac{m}{2} \langle v^2 | v^2 \rangle = \frac{3}{2} \kappa T \Leftrightarrow \langle v^2 | v^2 \rangle = \frac{3}{2} \left[\frac{2\kappa T}{m} \right]. \quad (2.30)$$

De esto se define la velocidad térmica $v_T^2 \equiv 2\kappa T/m$. Esta velocidad se relaciona con la desviación estándar de la distribución de partículas, lo que también le da una interpretación a la temperatura como un grado de dispersión de las velocidades en el sistema de partículas respecto del equilibrio estático. En este caso

$\sigma = \sqrt{\kappa T/m} = \sqrt{v_T^2/2}$; a mayor temperatura, más dispersión hay respecto del centro de la distribución de velocidades y por lo tanto mayor energía cinética en promedio. Así, la distribución para el estado de equilibrio térmico, denominada distribución maxwelliana, es

$$f(\vec{v}) = \frac{1}{\pi^{3/2}v_T^3} e^{-v^2/v_T^2}. \quad (2.31)$$

En la Fig.2.1¹ se muestra un corte transversal de la distribución en tres dimensiones, para la velocidad v_x .

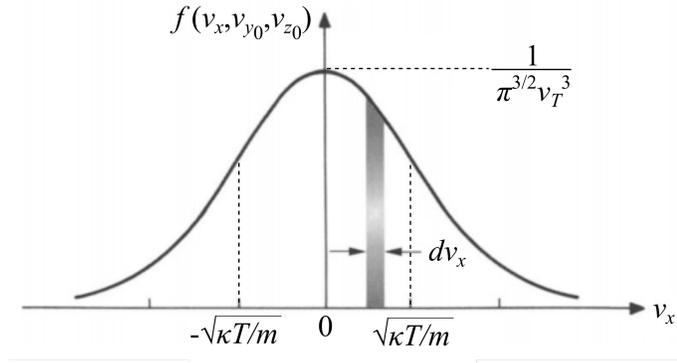


Figure 2.1: Sección de distribución maxwelliana, con $v_{y0} = v_{z0} = 0$.

Esta distribución es isotrópica, ya que depende del módulo de la velocidad de las partículas. También puede extenderse para sistemas cercanos al equilibrio termodinámico. En tal caso se tiene que $T = T(\vec{r}, t)$ es una función que varía lentamente en el tiempo y el espacio, y la distribución maxwelliana adquiere un carácter local centrada en algún punto \vec{r} .

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{1}{\pi^{3/2}v_T^3(\vec{r}, t)} e^{-(v^2 - v_T^2(\vec{r}, t))/v_T^2(\vec{r}, t)}. \quad (2.32)$$

La distribución no necesariamente debe estar centrada en $\vec{v} = \vec{0}$. El valor esperado de la distribución puede ser no nulo, y en tal caso se trata de un conjunto de partículas que en promedio llevan alguna velocidad \vec{v}_0 , pero que mantienen la distribución del

¹*Fundamentals of Plasma Physics*, J.A. Bittencourt. Pág. 173, cap. 7.

estado de equilibrio en un sistema de referencia que se mueve con la misma velocidad promedio. En tal caso, la distribución se escribe como

$$f(\vec{v}) = \frac{1}{\pi^{3/2} v_T^3} e^{-\vec{v} - \vec{v}_0^2 / v_T^2}. \quad (2.33)$$

2.5 Ondas en el modelo de Teoría Cinética y Amortiguamiento de Landau

Se puede predecir la propagación de ciertas ondas en el plasma usando el modelo de Teoría Cinética. Este capítulo se remite a dos casos particulares relacionados con ondas electroestáticas para electrones, ondas de Langmuir, y para iones, ondas ión-acústicas, en el marco del fenómeno denominado amortiguamiento de Landau, que indica que las ondas que se propagan en un plasma, para perturbaciones pequeñas, presentan una amplitud decreciente en el tiempo.

2.6 Ondas planas y relación de dispersión de un medio

Se sabe que una señal ondulatoria $S(\vec{r}, t)$ se puede representar como una superposición de exponenciales complejas. Esto es, por medio de una transformada inversa de Fourier en el espacio y el tiempo.

$$S(\vec{r}, t) = \frac{1}{2^2 \pi^2} \int_K \int_t \mathcal{S}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} dt d^3 k, \quad (2.34)$$

donde \vec{k} es el vector de onda y ω la frecuencia. El término $\mathcal{S}(\vec{k}, \omega)$ corresponde a la transformada de Fourier de S . Debido a esto, basta con conocer cómo responde un sistema ante una onda de la forma $\mathcal{S}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, y la respuesta total se obtiene luego por la integral de Fourier. Estas exponenciales representan ondas planas, por cuanto su fase representa un plano que avanza en el tiempo, cuyo vector normal es \vec{k} .

2.6.1 Relación de dispersión

Dado un sistema de partículas, sin embargo, no pueden propagarse ondas de cualquier frecuencia y vector de onda. El sistema presenta ciertas características, por ejemplo, en un plasma, las cargas de las especies, el rango de frecuencia de los forzamientos, los campos electromagnéticos de fondo, la conductividad resultante del plasma y su carácter dieléctrico que restringen \vec{k} y ω . Al desarrollar las ecuaciones del sistema, se puede encontrar una función $\omega = \omega(\vec{k})$, que indican el número de onda y la frecuencia de las ondas que efectivamente se propagan en el medio. Esta función se denomina relación de dispersión. Cualquier otra onda que no verifique esta relación, es absorbida ó reflejada. Esto tiene como consecuencia que cuando sobre un plasma incide un paquete de ondas, sólo los armónicos que verifiquen dicha relación se propagarán en él.

2.7 Ecuaciones de Vlasov-Poisson

En un sistema que no presenta colisiones, la ecuación de Boltzmann indica f es invariante en el tiempo. Si consideramos un conjunto de partículas cargadas de M especies y el término de fuerzas correspondiente a la fuerza de Lorentz, la función de densidad representa la distribución de un plasma.

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_j + \frac{q_j}{m_j} [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] \cdot \nabla_v f_j = 0. \quad (2.35)$$

Si adicionalmente se considera el sistema de partículas aislado, los campos \vec{E} y \vec{B} que afectan a la distribución son debidos a la misma distribución. Los campos eléctrico y magnético se relacionan por medio de la ley de Gauss y la ley de Ampère.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_j q_j \int_v f_j d^3v, \quad (2.36)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \sum_j q_j \int_v \vec{v} f_j d^3v + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.37)$$

Adicionalmente, se deben verificar las ecuaciones de Gauss para campo magnético y la ley de Faraday-Lenz. Este conjunto de ecuaciones se denomina ecuaciones de Vlasov, es claramente un sistema de ecuaciones acopladas.

2.7.1 Oscilaciones electroestáticas

Un caso particular que puede obtenerse al resolver las ecuaciones de Vlasov es el de oscilaciones electroestáticas que se propaga en un plasma consistente de iones, carga e , y electrones, carga $-e$. Con las suposiciones adecuadas, el resultado obtenido se reduce a la oscilación de electrones para el caso de plasma frío y al de plasma como fluido.

Para resolver el problema de oscilaciones electroestáticas se considera un estado de equilibrio en que las partículas constituyentes tienen funciones de densidad $f_{0,j}$ dependiente sólo de la velocidad. Entonces se realiza una pequeña perturbación de la distribución a primer orden, de forma que la densidad de cada especie es dada por $f_j(\vec{r}, \vec{v}, t) = f_{0,j}(\vec{v}) + f_{1,j}(\vec{r}, \vec{v}, t)$, $f_{0,j} \gg |f_{1,j}|$. Se presentan dos formas de resolver este problema, la primera considera una oscilación periódica en régimen estacionario, imponiendo que no pueden existir frecuencias imaginarias, y la segunda considera un problema de valores iniciales, obteniéndose como resultado una oscilación amortiguada.

Solución de Vlasov

Vlasov soluciona este problema considerándolo como una onda electromagnética, por medio de una transformada de Fourier espacial y temporal. Hacer esto en el dominio del tiempo implica que la onda siempre ha existido, lo que es equivalente al régimen estacionario. De esta manera, se tiene que

$$f_j = f_{0,j}(\vec{v}) + f_{1,j}(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad (2.38)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1(\vec{r}, t), \quad (2.39)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1(\vec{r}, t). \quad (2.40)$$

Reemplazando estas soluciones en las ecuaciones de Vlasov, reteniendo los términos de primer orden, se obtiene

$$\frac{\partial f_{1,j}}{\partial t} +$$

$$\vec{v} \cdot \nabla f_{1,j} + \frac{q_j}{m_j} [\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_1] \cdot \nabla_v f_{0,j} = 0, \quad (2.41)$$

$$\rho = e\bar{n}_0 \int_v [f_{1,i} - f_{1,e}] d^3v, \quad \vec{J} = e\bar{n}_0 \int_v \vec{v} [f_{1,i} - f_{1,e}] d^3v \quad (2.42)$$

$$\nabla \times \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}. \quad (2.43)$$

que no aparecen la densidad de carga ni de corriente en el estado de equilibrio, por lo que éstas se deben sólo a la perturbación a primer orden. Al aplicar la transformada de Fourier en el espacio y el tiempo a las ecuaciones anteriores, resulta

$$i(\vec{v} \cdot \vec{k} - \omega) f_{1,jk} +$$

$$\frac{q_j}{m_j} [\vec{E}_{1k} + \vec{v} \times \vec{B}_{1k}] \cdot \nabla_v f_{0,j} = 0, \quad (2.44)$$

$$\rho_k = e\bar{n}_0 \int_v [\tilde{f}_{1,ik} - f_{1,ek}] d^3v, \quad \vec{J}_k = e\bar{n}_0 \int_v \vec{v} [f_{1,ik} - f_{1,ek}] d^3v \quad (2.45)$$

$$i\vec{k} \times \vec{E}_{1k} = i\omega \vec{B}_{1k}, \quad i\vec{k} \times \vec{B}_{1k} = \mu_0 \vec{J}_k - i\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_{1k}. \quad (2.46)$$

La idea de este cálculo es obtener un tensor dieléctrico equivalente para el plasma, y a partir de ella obtener la relación de dispersión para el caso electrostático.

Considerar la ley de Ampère. De ella se puede determinar una constante dieléctrica equivalente, expresando la densidad de corriente en función del campo eléctrico. Para esto, se requiere obtener una expresión para el término perturbativo \tilde{f}_j . De la ecuación de Boltzmann se obtiene

$$f_{jk} = \frac{q_j}{m_j} \frac{[\vec{E}_{1k} + \vec{v} \times \vec{B}_{1k}] \cdot \nabla_v f_{0,j}}{i(\omega - \vec{v} \cdot \vec{k})}. \quad (2.47)$$

En este punto, se introduce la suposición de que la distribución $f_{0,j}$ es isotrópica en ambas especies, por lo que las variaciones de ella con \vec{v} son iguales en todas las direcciones, es decir, $\nabla_v f_{0,j}$ es paralelo a \vec{v} . Con esto, se tiene que $\vec{v} \times \vec{B}_1 \cdot \nabla_v f_{0,j} = 0$. Con esto, la densidad de corriente es,

$$\vec{J}_k = e^2 \bar{n}_0 \int_v \frac{\vec{v} \nabla_v [f_{0,i}/m_i + f_{0,e}/m_e]}{i(\omega - \vec{v} \cdot \vec{k})} d^3v \cdot \vec{E}_{1k}, \quad (2.48)$$

donde $\vec{v} \nabla_v [f_{0,i}/m_i + f_{0,e}/m_e]$ es un producto tensorial, y la integral representa el tensor conductividad, $\vec{\sigma}$, obteniéndose la ley de Ohm, $\vec{J}_k = \vec{\sigma} \cdot \vec{E}_{1k}$. Luego, de la ley

de Ampère, se tiene que

$$i\vec{k} \times \vec{B}_{1k} = -i\mu_0\omega[\epsilon_0[\mathbb{I} - \frac{1}{i\epsilon_0\omega}\check{\sigma}]] \cdot \vec{E}_{1k} = -i\omega\mu_0\check{\epsilon} \cdot \vec{E}_{1k}, \quad (2.49)$$

donde

$$\check{\epsilon} = \epsilon_0[\mathbb{I} - \frac{1}{i\epsilon_0\omega}\check{\sigma}], \quad (2.50)$$

es el tensor dieléctrico buscado. Luego, de transformada de Fourier de la ley de Gauss en términos del vector de desplazamiento \vec{D}_1 y considerando que no hay cargas libres, se tiene que

$$\nabla \cdot \vec{D}_1 = 0 \Rightarrow i\vec{k} \cdot [\check{\epsilon} \cdot \vec{E}_{1k}] = 0, \quad (2.51)$$

de donde se obtiene la relación de dispersión electrostática, ya que $\vec{k} \parallel \vec{E}_1$. Como no existe campo magnético de fondo, el plasma se comporta como un medio isotrópico, por lo que el campo eléctrico en una dirección, produce una respuesta de las partículas, en promedio, exclusivamente en dicha dirección. Se concluye entonces que $\check{\epsilon}$ es un tensor diagonal. Más aún, suponiendo que la propagación ocurre en z , se tiene que la relación de dispersión es dada sólo por la componente $\epsilon_{zz} = 0$.

$$1 - \frac{e^2\bar{n}_0}{im_i\epsilon_0\omega} \int_v \frac{v_z \frac{\partial}{\partial v_z}[f_{0,i}]}{i(\omega - v_z k)} d^3v - \frac{e^2\bar{n}_0}{im_e\epsilon_0\omega} \int_v \frac{v_z \frac{\partial}{\partial v_z}[f_{0,e}]}{i(\omega - v_z k)} d^3v = 0. \quad (2.52)$$

En este punto se introduce la suposición de que en la configuración sin perturbar ambas especies tienen una distribución maxwelliana.

$$f_{0,j}(\vec{v}) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{1}{v_j^3} e^{-v^2/v_j^2}. \quad (2.53)$$

$v_j \equiv (2kT_j/m_j)^{1/2}$ es la velocidad térmica asociada a la distribución de la especie j , siendo k la constante de Boltzmann y T_j la temperatura asociada a la especie j , y $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, por tanto

$$\frac{\partial f_{0,j}}{\partial v_z} = -\frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{2v_z}{v_j^5} e^{-v^2/v_j^2}. \quad (2.54)$$

Por otro lado, notar que

$$\frac{v_z}{\omega - v_z k} = \frac{1}{k} \left[\frac{\omega}{\omega - v_z k} - 1 \right]. \quad (2.55)$$

Por el teorema fundamental del cálculo, la integral asociada al término unitario en [2.55](#) resulta en $f_{0,j}(|v_z| \rightarrow \infty) = 0$, entonces no hay contribución de este término. Luego, la relación de dispersión es

$$1 - \frac{\bar{n}_0 e^2}{m_i \epsilon_0 k \pi^{3/2} v_i^5} \int_v \frac{2v_z e^{-v^2/v_i^2}}{(\omega - v_z k)} d^3v - \frac{\bar{n}_0 e^2}{m_e \epsilon_0 k \pi^{3/2} v_e^5} \int_v \frac{2v_z e^{-v^2/v_e^2}}{(\omega - v_z k)} d^3v = 0. \quad (2.56)$$

Considerando que el término asociado a los iones es mucho menor respecto del término asociado a los electrones ($\frac{1}{m_i} \ll \frac{1}{m_e}$), y que la temperatura de los electrones no es mucho mayor que la de los iones (restricción asociada a las funciones de densidad) la relación se reduce a

$$1 - \frac{\bar{n}_0 e^2}{m_e \epsilon_0 k \pi^{3/2} v_e^5} \int_v \frac{2v_z e^{-v^2/v_e^2}}{(\omega - v_z k)} d^3v = 0 \quad (2.57)$$

La integración respecto de las velocidades v_x y v_y es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v_x^2/v_e^2} e^{-v_y^2/v_e^2} dv_x dv_y = v_e^2 \pi. \quad (2.58)$$

Además, se puede identificar la frecuencia de plasma $\omega_{p,e}^2 \equiv \bar{n}_0 e^2 / (m_e \epsilon_0)$. Así, se obtiene

$$1 - \frac{\omega_c^2}{k v_e^3 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2v_z e^{-v_z^2/v_e^2}}{(\omega - v_z k)} dv_z = 0. \quad (2.59)$$

Realizando la siguiente integración por partes

$$-\frac{1}{v_e^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2v_z e^{-v_z^2/v_e^2}}{(\omega - v_z k)} dv_z = \frac{e^{-v_z^2/v_e^2}}{(\omega - v_z k)} \Big|_{-\infty}^{\infty} - k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-v_z^2/v_e^2}}{(\omega - v_z k)^2} dv_z, \quad (2.60)$$

y reordenando términos, la relación de dispersión es la siguiente.

$$1 - \frac{\omega_{p,e}^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{v_e \sqrt{\pi}} e^{-v_z^2/v_e^2} \right] \frac{1}{(1 - v_z k / \omega)^2} dv_z = 0. \quad (2.61)$$

La integral obtenida se resuelve por medio de integración sobre contornos en el plano complejo. Notar que el argumento tiene una singularidad en $v_z = \omega/k$ en el intervalo de integración, ya que la transformada de Fourier establece que $\omega \in \mathbb{R}$. El resultado obtenido por Vlasov corresponde al valor principal de la integral, argumentando que la frecuencia no puede tener parte imaginaria. En el límite en que

la oscilación se propaga más rápido de lo que se mueven los electrones, $\omega/k \gg v_z$; esto coloca la indeterminación fuera del dominio de integración y se obtiene la siguiente relación de dispersión, que coincide con la de una onda en el modelo de plasma fluido. Expandiendo en serie, se tiene que

$$\frac{1}{(1 - v_z/v_\phi)^2} \approx 1 + 2\frac{v_z}{v_\phi} + 3\left[\frac{v_z}{v_\phi}\right]^2, \quad (2.62)$$

donde se ha definido $v_\phi \equiv \omega/k$. Luego, al evaluar la integral se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{v_e \sqrt{\pi}} e^{-v_z^2/v_e^2} \right] \left[1 + 2\frac{v_z}{v_\phi} + 3\left[\frac{v_z}{v_\phi}\right]^2 \right] dv_z = 1 + \frac{2}{v_\phi} \langle v_z | v_z \rangle + \frac{3}{v_\phi^2} \langle v_z^2 | v_z^2 \rangle. \quad (2.63)$$

Pero $\langle v_z^2 | v_z^2 \rangle = v_e^2/2$. Así, la relación de dispersión obtenida es

$$\omega^2 = \omega_{p,e}^2 + 3v_e^2 k^2, \quad (2.64)$$

En la aproximación de plasma frío, se tiene que $v_e \rightarrow 0$, por lo que $\omega = \omega_{p,e}$, y la perturbación no se propaga.

Si bien estos resultados coinciden con lo que se obtiene al utilizar el modelo de fluidos el análisis realizado por Landau lo muestra inconsistente.

Solución de Landau

A diferencia de la solución de Vlasov, Landau propuso resolver el problema como uno de condiciones iniciales, dando un estado inicial a la perturbación $f_{1,j}$. De la misma forma como en el tratamiento de Vlasov, el estado sin perturbar corresponde al equilibrio; el sistema no presenta campos eléctricos ni magnéticos, y aparecen sólo debido a la perturbación. Las variables perturbadas a primer orden corresponden a [2.38](#), [2.39](#) y [2.40](#), y se obtienen las mismas ecuaciones de la solución de Vlasov al reemplazar en el sistema de Vlasov-Poisson [2.41](#), [2.42](#) y [2.43](#).

Si en el instante inicial $t = 0$ una pequeña cantidad de cargas se separa del equilibrio, la función de distribución adopta la forma $f_j(\vec{r}, \vec{v}, 0) = f_{0,j}(\vec{v}) + f_{1,j}(\vec{r}, \vec{v}, 0)$. Supongamos que la perturbación es electroestática, es decir, el desplazamiento de la

carga da lugar a un campo eléctrico perturbado, pero no es suficiente para generar un campo magnético, esta condición se satisface si la densidad de carga perturbada varía solo en una dimensión entonces genera solo un campo electrostático. En este caso

$$\nabla \times \vec{E}_1 = \vec{0} \text{ y } \vec{E}_1 = -\nabla\phi_1 \quad (2.65)$$

Aunque perturbaciones unidimensionales son exactamente electroestáticas, en general 2.65 es solo una aproximación. Con esta aproximación electroestática, la evolución temporal de $f_{1,j}$ es dada por la solución de

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right] f_{1,j} = \frac{q_j}{m_j} \nabla\phi_1 \cdot \nabla_v f_{0,j}, \quad (2.66)$$

$$\nabla^2\phi_1 = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{1,\alpha} d^3v. \quad (2.67)$$

De la misma manera que en la solución de Vlasov, se usan transformadas integrales: de Fourier en el espacio, pero de Laplace en el tiempo, y la que se tiene una condición inicial. Las cantidades tildadas corresponden a transformadas de Laplace.

$$\tilde{f}_{1,jk}(\vec{v}, p) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_K \tilde{f}_{1,k} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - ipt)} d^3k dp, \quad Re(p) \geq p_0 \quad (2.68)$$

$$\phi_k = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \phi e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3x. \quad (2.69)$$

Se debe cumplir la condición sobre p mencionada en 2.68 para que el integrando sea de orden exponencial, de forma que la transformada exista. Ahora las ecuaciones de Vlasov pasan a ser Conociendo el valor de la función de distribución transformada, podemos invertirla;

$$f_{\alpha 1}(\vec{v}, \vec{r}, t) = \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \tilde{f}_{\alpha k} \quad (2.70)$$

$$\phi_1 = \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \tilde{\phi}_k \quad (2.71)$$

$$(p + i\vec{k} \cdot \vec{v}) \tilde{f}_{1,jk} = f_{1,jk}(\vec{k}, \vec{v}, 0) + \frac{q_j}{m_j} (i\vec{k} \cdot \nabla_v) \tilde{\phi}_k, \quad (2.72)$$

$$k^2 \tilde{\phi}_k = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_j \bar{n}_j q_j \int_v \tilde{f}_{1,jk} d^3v, \quad (2.73)$$

donde se ha usado la propiedad de transformada de la derivada respecto de t para $f_{1,j}$. Con estas ecuaciones, la transformada del potencial resulta

$$\tilde{\phi}_k = \frac{1}{\epsilon_0 k^2} \frac{\sum_j \bar{n}_j q_j \int_v \frac{f_{1,jk}(0)}{p + i\vec{k} \cdot \vec{v}} d^3v}{1 + \frac{1}{\epsilon_0} \sum_j \frac{\bar{n}_j q_j^2}{m_j k^2} \int_v \frac{\vec{k} \cdot \nabla_v f_{0,j}}{ip - \vec{k} \cdot \vec{v}} d^3v} \equiv \frac{N(k, ip)}{D(k, ip)}. \quad (2.74)$$

Eligiendo un sistema coordenado \vec{k} apunta en una direcci3n correspondiente a un eje, y definiendo una funci3n $F(u)$ correspondiente a la integral de $f(\vec{v})$ en las velocidades ortogonales a u ,

$$F_{0,j}(u) \equiv \int_{v_\perp} f_{0,j}(\vec{v}) d^2v, \quad \tilde{F}_{1,jk}(u) \equiv \int_{v_\perp} \tilde{f}_{1,jk}(\vec{v}) d^2v,$$

la ecuaci3n 2.74 y su denominador son

$$\tilde{\phi}_k(p) = \frac{-i}{\epsilon_0 k^3 D(k, ip)} \sum_j \bar{n}_j q_j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{1,jk}(u, 0)}{u - ip/k} du \quad (2.75)$$

$$D(k, ip) = 1 - \sum_j \frac{\omega_{p,j}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial u} F_{0,j}(u)}{u - ip/k} du, \quad \text{Re}(p) \geq p_0, \quad (2.76)$$

donde se ha encontrado nuevamente la frecuencia de plasma $\omega_{p,j}$ para la especie j . Para calcular el potencial y la funci3n de distribuci3n, se aplican las transformadas inversas. La dependencia temporal del potencial es la transformada inversa de Laplace.

$$\phi_k(t) = \frac{1}{2\pi i k^2 \epsilon_0} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \frac{\sum_j \bar{n}_j q_j \int \frac{F_{1,jk}(u, 0)}{p + iku} du}{D(\vec{k}, ip)} dp. \quad (2.77)$$

El contorno de integraci3n es como lo indica la Fig. 2.2², corresponde al contorno de Bromwich.

En general, la transformada inversa de ϕ_k no se puede llevar a cabo anal3ticamente para distribuciones arbitrarias. Sin embargo, es posible encontrar una soluci3n para

²*Principles of Plasma Physics*, Nicholas A. Krall, Alvin W. Trivelpiece. P3g. 375, cap. 8.

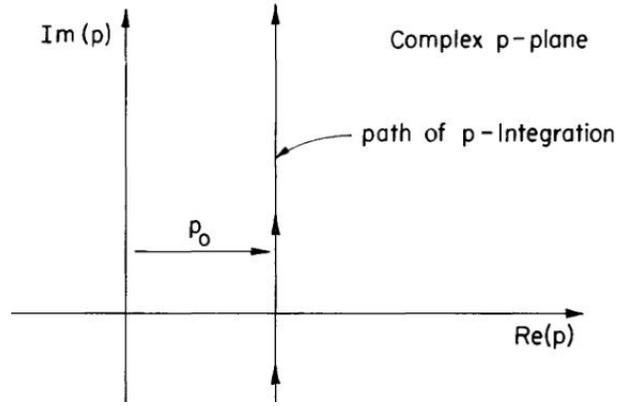


Figure 2.2: Contorno de integración

tiempos largos, luego de iniciada la perturbación. El comportamiento asintótico en el tiempo es determinado por los modos normales de oscilación del plasma más que la respuesta transiente del plasma que especifica detalles de la perturbación inicial.

La evaluación del contorno puede ser simplificada al aplicar el teorema de deformación, extendiendo el contorno hacia la izquierda, ya que $\tilde{\phi}_k$ es de orden exponencial p_0 , por lo que no es analítica en $Re(p) < p_0$; existen potenciales polos en dicha región, según la Fig.2.3³, y se puede usar el teorema de los residuos. Pero tampoco está definida en ese dominio. Por lo tanto, se busca la continuación analítica $\tilde{\Phi}_k(p)$, de forma que esté definida en $Re(p) < p_0$.

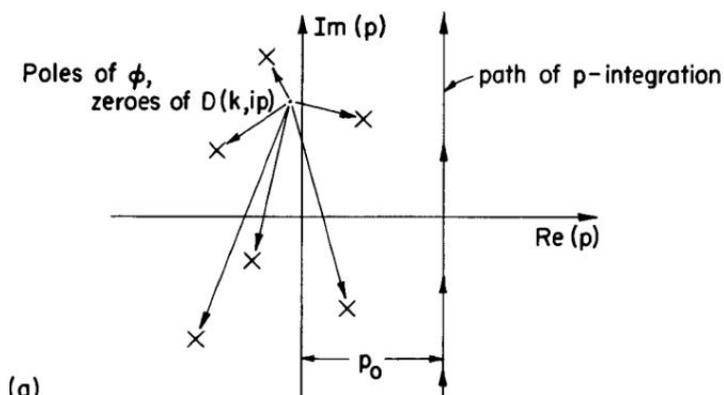
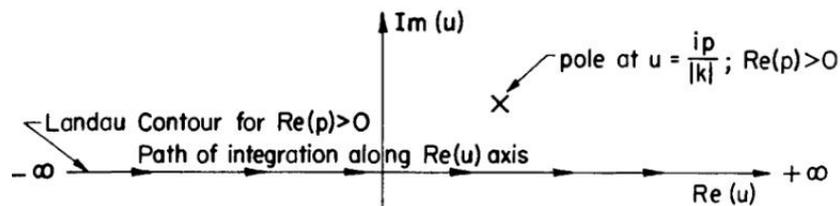
Analizando 2.75, es claro que su continuación analítica requiere la misma condición para $F_{0,j}$ y $\tilde{F}_{1,jk}(u, 0)$ y de sus respectivas integrales respecto de u .

$$h(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)}{u - ip/k} du, \quad Re(p) \geq p_0.$$

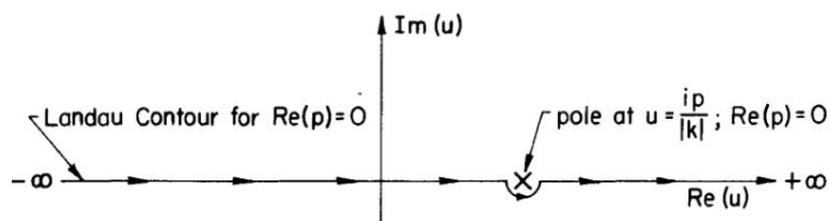
En general, $f_{0,j}$ y $f_{1,j}(0)$ representan configuraciones de partículas realizables, por lo que corresponden a funciones que no tienen singularidades. Para la integral, si $Re(p) > 0$, el camino de integración sobre todo el eje real pasa por debajo del polo $u = i\frac{p}{k}$, como lo indica la Fig.2.4⁴.

³*Principles of Plasma Physics*, Nicholas A. Krall, Alvin W. Trivelpiece. Pág. 379, cap. 8.

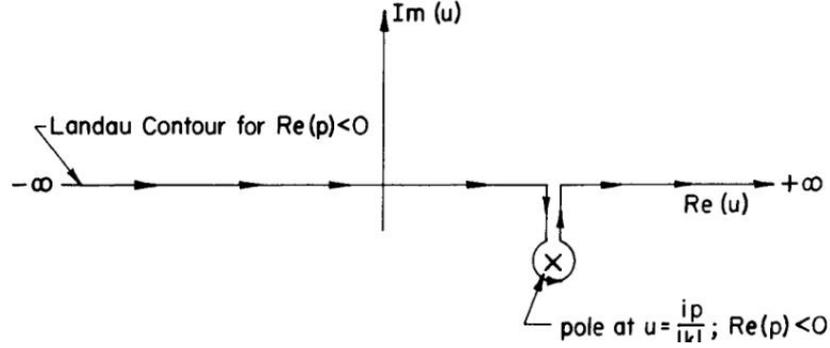
⁴*Principles of Plasma Physics*, Nicholas A. Krall, Alvin W. Trivelpiece. Pág. 377, cap. 8.

Figure 2.3: Polos de $\phi_k = \text{ceros de } D(\vec{k}, ip)$ Figure 2.4: Contorno para $Re(p) > 0$

La continuación analítica de $h(p)$, por otro lado, requiere que el camino de integración esté por debajo del polo cuando $Re(p) \geq 0$, como lo indican las Figs. 2.5 y 2.6⁵, de forma que las integrales resulten no nulas para $t > 0$; en realidad, consiste en un contorno su contribución hacia $Im(\omega) \rightarrow \infty$ es nula, por lo que si no encierra un polo, la integral resultante, y por tanto su continuación, es nula. Junto con el contorno mostrado en la Fig. 2.4, éstos se denominan contornos de Landau.

Figure 2.5: Contorno para $Re(p) = 0$

⁵*Principles of Plasma Physics*, Nicholas A. Krall, Alvin W. Trivelpiece. Pág. 377, cap. 8.

Figure 2.6: Contorno para $Re(p) < 0$

Con esta continuación, la función $h(p)$ como puede definirse ahora

$$h(p) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)}{u - ip/k} du, & Re(p) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)}{u - ip/k} du + 2\pi i f\left(i\frac{p}{k}\right), & Re(p) < 0, \end{cases} \quad (2.78)$$

En el caso que $Re(p) \rightarrow 0$, el contorno que encierra al polo sólo tiene un ángulo de π , por lo que

$$h(p) = VP \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)}{u - ip/k} du \right] + i\pi f\left(i\frac{p}{k}\right), \quad (2.79)$$

donde VP se refiere al valor principal de Cauchy. Así, $\tilde{\Phi}_k$ con las integrales de velocidad definidas por el contorno de Landau es la continuación analítica de $\tilde{\phi}_k(p)$. De esta manera, las únicas singularidades del potencial generalizado son los ceros de $D(\vec{k}, ip)$.

Con los ceros de D se puede determinar la transformada inversa de $\tilde{\phi}_k$ con el contorno deformado. Éste se muestra en la Fig. 2.7⁶. Desarrollando la integral en el contorno sugerido, se tiene.

$$\phi_k(t) = \sum_j R_j e^{p_j(k)t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+p_0}^{-i\infty-\alpha} \tilde{\phi}_k(p) e^{pt} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} \tilde{\phi}_k(p) e^{pt} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty-\alpha}^{i\infty+p_0} \tilde{\phi}_k(p) e^{pt} dp$$

donde p_j son los polos de $\tilde{\phi}_k(p)$, y R_j es el residuo $R_j = \lim_{p \rightarrow p_j} (p - p_j) \tilde{\phi}_k(p)$.

⁶ *Principles of Plasma Physics*, Nicholas A. Krall, Alvin W. Trivelpiece. Pág. 379, cap. 8.

Esta ecuación es la relación de dispersión para tiempo asintótico. Si el plasma está compuesto por sólo iones y electrones,

$$D(\vec{k}, \omega) = 1 - \frac{\omega_{p,e}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial u} F_{0,e}}{u - \omega/k} du - \frac{\omega_{p,i}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial u} F_{0,i}}{u - \omega/k} du = 0. \quad (2.81)$$

Dos ejemplos para la solución de la relación de dispersión anterior para ondas de pequeña amplitud en plasmas son ondas de Langmuir y ion-acústicas en un plasma libre de campos externos.

Ondas de Langmuir

Considerando una distribución inicial Maxwelliana

$$F_{0,j}(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}v_j} e^{-u^2/v_j^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u} F_{0,j} = -\frac{2u}{\sqrt{\pi}v_j^3} e^{-u^2/v_j^2}. \quad (2.82)$$

Para resolver la relación de dispersión, se utiliza el resultado de 2.79. En la aproximación de ondas rápidas $u \ll v_\phi$, se tiene que

$$-VP \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial u} F_{0,j}}{u - \omega/k} du \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial u} F_{0,j} \left[\frac{1}{\omega/k} + \frac{u}{(\omega/k)^2} + \dots \right] du. \quad (2.83)$$

Considerando las mismas aproximaciones que Vlasov, y en el caso $Re(\omega) \gg Im(\omega)$, es decir, amortiguamiento débil, la relación de dispersión puede evaluarse usando $\omega = \omega_r + ik\epsilon$.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial u} F_{0,e}}{u - \omega_r/k - i\epsilon} du = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_r^2} + 3 \frac{\omega_{pe}^4}{\omega_r^4} k^2 \lambda_D^2 + \dots + i \pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \frac{\partial}{\partial u} F_{0,e}(u) \Big|_{u=\omega_r/k} \quad (2.84)$$

Suponiendo que la longitud de la onda es grande respecto de la longitud de Debye, $k^2 \lambda_{De}^2 \ll 1$, los electrones pueden fácilmente apantallar el campo eléctrico de la onda, pueden considerarse términos de hasta orden dos. Reemplazando 2.84 en 2.83, se obtiene

$$\omega_r^2 = \omega_{p,e}^2 (1 + 3k^2 \lambda_{De}^2) = \omega_{p,e}^2 + \frac{3}{2} k^2 v_e^2, \quad (2.85)$$

y para la parte imaginaria

$$\omega_i = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{p,e}}{|k^3 \lambda_{De}^3|} e^{-((2k^2 \lambda_{De}^2)^{-1} + 3/2)}. \quad (2.86)$$

La parte real es idéntica al resultado obtenido por Vlasov. La oscilación electrostática en $\omega \approx \omega_{p,e}$ es un modo normal de oscilación de un plasma. Una propiedad de las ondas de Langmuir que es predicha por la teoría de Vlasov es el amortiguamiento no colisional del potencial electrostático con los modos normales del plasma. Este decaimiento es caracterizado por esa pequeña parte imaginaria, de forma que el potencial electrostático producido por esta perturbación verifica $\phi_1(t) \propto e^{\omega_i t}$, donde $\omega_i \propto \partial F_{0,e}/\partial u$. Este amortiguamiento de ϕ en el tiempo corresponde al amortiguamiento de Landau.

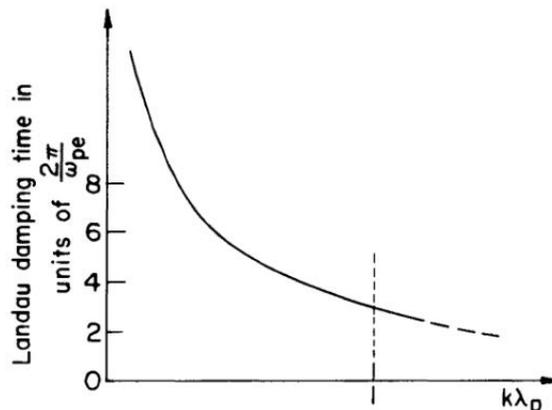


Figure 2.8: Amortiguamiento de Landau.

Este es un fenómeno resonante, proporcional a la pendiente de la función de distribución, de partículas moviéndose a una velocidad cercana a la velocidad de fase de la onda. Este decaimiento es a menudo explicado notando que la función de distribución que decrece con el incremento de $|u|$, hay más partículas moviéndose ligeramente más lento que la onda que partículas moviéndose más rápido que la onda; si las partículas son aceleradas por la onda, esto debe reducir la energía de la onda ya que transfirió energía cinética a las partículas, y esto hace decaer las ondas. Se sigue que la escala de tiempo de decaimiento $1/\omega_i$ es mucho mayor que el periodo de oscilación $2\pi/\omega_{p,e}$ para grandes longitudes de ondas ($k\lambda_D \rightarrow 0$). Esto se muestra en la Fig.2.8⁷.

⁷*Principles of Plasma Physics*, Nicholas A. Krall, Alvin W. Trivelpiece. Pág. 387, cap. 8.

En este punto se debe hacer notar que si existe un amortiguamiento de la onda, entonces la perturbación tiende a cero conforme $t \rightarrow \infty$ ello indicaría que no existe régimen estacionario, y por tanto, la solución de Vlasov es inconsistente, puesto que su resultado tiene una oscilación periódica ante pequeñas perturbaciones. Por lo tanto, la solución presenta dos inconsistencias: no predice el fenómeno de amortiguamiento y en consecuencia corresponde a régimen estacionario.

Capítulo 3

Metodología

En este capítulo se detallan en cada sección los métodos utilizados para cumplir los objetivos específicos (en la sección 1.4).

3.1 Resolviendo Vlasov-Poisson en 1D

En la ecuación de Vlasov para un plasma no colisional y no magnetizado, el campo de advección en el espacio de posiciones, el cual es el campo de velocidades, no depende de la posición, y el campo de advección de las velocidades, el cual es el campo eléctrico, no depende de las velocidades. Por lo tanto es conveniente descomponer en dos partes a la ecuación de Vlasov, usando la técnica de *splitting*¹.

Consideraremos el caso no relativista de la ecuación de Vlasov-Poisson;

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m} \mathbf{E} \cdot \nabla_v f = 0$$

Acoplada con la ecuación de Poisson para la densidad de carga

$$\begin{aligned} -\Delta\phi &= 1 - \rho(x, t) \\ &= 1 - \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\nabla\phi \tag{3.2}$$

A través de este acoplamiento, \mathbf{E} depende de f , el cual hace que el sistema Vlasov-Poisson sea no lineal.

¹*splitting* se refiere a romper la ecuación en dos ecuaciones

Separaremos la ecuación en las siguientes dos partes:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f = 0 \quad (3.3)$$

$$(3.4)$$

con \mathbf{v} fijo y

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{q}{m} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \quad (3.5)$$

$$(3.6)$$

con \mathbf{x} fijo. Con esto obtenemos dos coeficientes constantes para la advección que son fácilmente resueltas.

Por otro lado, para analizar el error del operador *Splitting*, consideremos el sistema de ecuaciones:

$$\frac{du}{dt} = (A + B)u \quad (3.7)$$

donde A y B son operadores diferenciales, que son constantes entre los tiempos t_n y t_{n+1} . La solución formal de esta ecuación en un paso de tiempo es:

$$u(t + \Delta t) = \exp(\Delta t(A + B))u(t)$$

Apliquemos el *Splitting* a la ecuación 3.6:

$$\frac{du}{dt} = Au \quad (3.8)$$

$$\frac{du}{dt} = Bu \quad (3.9)$$

Las soluciones de 3.8 y 3.9 tomadas separadamente son

$$u(t + \Delta t) = \exp(\Delta t A)u(t)$$

$$u(t + \Delta t) = \exp(\Delta t B)u(t)$$

respectivamente.

El operador *Splitting* estándar consiste en resolver sucesivamente sobre un paso de tiempo 3.8 y después 3.9. Entonces uno obtiene sobre un paso de tiempo:

$$\tilde{u}(t + \Delta t) = \exp(\Delta t A) \exp(\Delta t B) u(t)$$

Si los operadores A y B conmutan, entonces $\exp(\Delta t A) \exp(\Delta t B) = \exp(\Delta t (A + B))$, el operador *Splitting* es exacto. Este es un caso particular considerando coeficientes constantes para la ecuación de advección de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Cuando los operadores A y B no conmutan, el operador *splitting* no es exacto haciendo que el error numérico aumente en comparación a si los operadores conmutaran. Para reducir este error se resuelve primero 3.8 un medio paso de tiempo, luego resolviendo 3.9 un paso de tiempo y de nuevo resolviendo 3.8 otro medio paso de tiempo. Este método es conocido como el *método splitting de Strang*. Esto corresponde a la solución formal:

$$\tilde{u}(t + \Delta t) = \exp\left(\frac{\Delta t}{2} A\right) \exp(\Delta t B) \exp\left(\frac{\Delta t}{2} A\right) u(t)$$

El error cometido en cada instante de tiempo es de orden 2. A continuación se demuestra error que se comete al usar este método:

$$\exp(\Delta t (A + B)) = I + \Delta t (A + B) + \frac{\Delta t^2}{2} (A + B)^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} \exp(\Delta t B) \exp(\Delta t A) &= \left(I + \Delta t B + \frac{\Delta t^2}{2} B^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3) \right) \left(I + \Delta t A + \frac{\Delta t^2}{2} A^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3) \right) \\ &= I + \Delta t (A + B) + \frac{\Delta t^2}{2} (A^2 + B^2 + 2BA) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \end{aligned}$$

pero como A y B no conmutan, tenemos que $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$. Entonces tenemos $\exp(\Delta t (A + B)) - \exp(\Delta t A) \exp(\Delta t B) = \mathcal{O}(\Delta t^2)$, lo cual da un error local de orden 2 y un error global de orden 1.

Para el *Splitting* de Strang, tenemos:

$$\exp\left(\frac{\Delta t}{2} A\right) \exp(\Delta t B) \exp\left(\frac{\Delta t}{2} A\right) = \left(I + \frac{\Delta t}{2} A + \frac{\Delta t^4}{4} A^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3) \right)$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(I + \Delta B + \frac{\Delta t^2}{2} B^2 + O(\Delta t^3) \right) \\
& \cdot \left(I + \frac{\Delta t}{2} A + \frac{\Delta t^2}{4} A^2 + O(\Delta t^3) \right) \\
& = I + \Delta(A + B) + \frac{\Delta t^2}{2} (A^2 + B^2 + BA + AB) + O(\Delta t^3)
\end{aligned}$$

Finalmente obtenemos un error local de orden 3 y un error global de orden 2 para el método de Strang.

Interpolación: El esquema semi-Lagrangeano: Consideramos una ecuación de advección escalar de la forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla f = 0 \quad (3.10)$$

La curva característica asociada a esta ecuación es la solución de la EDO:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{X}(t), t)$$

Denotaremos por $\mathbf{X}(t, \mathbf{x}, s)$ la solución única a esta ecuación con condición inicial $\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}$.

El esquema clásico semi-Lagrangeano se basa en seguir las curvas características donde la función de distribución es constante. Dos pasos se necesitan para avanzar la función de distribución desde t_n hacia t_{n+1} :

1. Para cada punto de la grilla x_i calcular el valor de la curva característica en t_n el cual toma el valor x_i en t_{n+1} , $\mathbf{X}(t_n; \mathbf{x}_i, t_{n+1})$.
2. Como la solución de la ecuación 3.10 verifica

$$f^{n+1}(\mathbf{x}_i) = f^n(\mathbf{X}(t_n; \mathbf{x}_i, t_{n+1})),$$

obtenemos el valor buscado $f^{n+1}(x_i)$ calculando $f^n(\mathbf{X}(t_n; \mathbf{x}_i, t_{n+1}))$ mediante interpolación ya que en general $\mathbf{X}(t_n; \mathbf{x}_i, t_{n+1})$ no siempre cae en puntos de la grilla. Este esquema fue inicialmente propuesto por Cheng y Knorr [3]

En el esquema semi-Lagrangeano es importante la interpolación para que en la solución no aparezcan términos difusivos. En nuestro caso seleccionamos métodos espectrales: aproximación de los coeficientes de una serie de Fourier usando la FFT. Una función f de período L puede ser expresada mediante una serie de Fourier. La serie de Fourier es definida por:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \hat{f}_k \exp\left(i \frac{k2\pi}{L} x\right) \quad (3.11)$$

donde los coeficientes de Fourier c_k son definidos mediante

$$\hat{f}_k = \int_0^L dx f(x) \exp\left(-i \frac{k2\pi}{L} x\right) \quad (3.12)$$

A fin de calcular la aproximación numérica de los coeficientes de Fourier, definimos una grilla con N puntos sobre un intervalo $[0, L[$ tales que $x_j = jL/N$, $0 \leq j \leq N-1$. Denotamos por $f_j = f(x_j)$. Obtenemos lo siguiente:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) \exp\left(-i \frac{k2\pi}{L} x\right) \quad (3.13)$$

Como f es conocida solo en los puntos de la grilla la integral es aproximada mediante la regla del trapecio compuesta en cada intervalo de la grilla. Notar que debido a la fórmula de Euler-McLaurin la regla del trapecio compuesta es adecuada para funciones periódicas. Más precisamente, si $f \in \mathcal{C}^{2p}([0, L])$ y es L -periódica, luego la regla del trapecio compuesta es de orden $2p$. Luego se obtiene

$$\hat{f}_k \approx \frac{1}{L} \frac{L}{N} \sum_{j=0}^N f_j \exp\left(-i \frac{k2\pi}{L} \frac{jL}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N f_j \exp\left(-i \frac{k2\pi j}{N}\right) \quad (3.14)$$

Veamos ahora el algoritmo para el problema Vlasov-Poisson en 1D ² donde queremos encontrar la función de distribución de velocidades de los electrones para cualquier instante, en presencia de un fondo de iones fijos y neutralizantes sobre un dominio $[0, L]$ periódico en posiciones e infinito en velocidades.

La ecuación queda:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - E(x, t) \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (3.15)$$

²1D significa una dimensión en el espacio de posiciones y de velocidades

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dx} &= \rho(x, t) \\ &= 1 - \int dv f(x, v, t)\end{aligned}\quad (3.16)$$

con la condición inicial $f(x, v, 0) = f_0(x, v)$.

El espacio de velocidades es truncado a $[-A, A]$ lo suficientemente grande respecto a la velocidad térmica. En este caso se utilizará $A = 6$.

Se definirá un espacio de fase de grilla uniforme $x_i = iL/N_x$, $i = 0, \dots, N_x - 1$, $v_j = -A + j2A/N_v$, $j = 0, \dots, N_v$.

El algoritmo es

1. **Inicialización:** Suponer una función de distribución inicial $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$. Se concluye que $\rho(x, 0) = 1 - \int dv f_0(x, v)$, y luego se calcula el campo eléctrico inicial $E(x, 0)$ resolviendo la ecuación de Poisson.
2. **Avanzar desde t_n a t_{n+1} :** La función f^n es conocida en todos los puntos del espacio de fase y E^n es conocido en todos los puntos de del espacio.

- Se calcula f^* resolviendo

$$\frac{\partial f}{\partial t} + E^n \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

sobre un medio paso de tiempo $\frac{\Delta t}{2}$ usando el método semi-Lagrangeano

- Se calcula f^{**} resolviendo la ecuación de advección para un intervalo de tiempo posterior Δt

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

desde la condición inicial f^* .

- Se calcula $\rho^{n+1} = 1 - \int dv f^{**}(x, v)$ y luego el correspondiente campo eléctrico E^{n+1} usando la ecuación de Poisson.
- Se calcula f^{n+1} resolviendo sobre un intervalo de tiempo $\frac{\Delta t}{2}$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + E^{n+1} \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (3.17)$$

desde la condición inicial f^{**}

3.1.1 Solución de la Relación de Dispersión para Ondas de Langmuir

Para encontrar la tasa de amortiguamiento de Landau lineal y la velocidad de fase de la perturbación electroestática, buscamos las raíces complejas de la relación de dispersión (ecuación 2.61). Esto consiste en encontrar (mediante métodos numéricos que calculen los ceros de una función) los puntos en el plano complejo que anulan la parte real e imaginaria de la relación de dispersión.

3.1.2 Soluciones Numéricas de Vlasov-Poisson

La evolución temporal del espacio de fases $\delta f(x, v, t)$ se encuentra resolviendo 3.18 y 3.19. Dicha relación hace que este sistema de ecuaciones diferenciales parciales sea acoplado y altamente no lineal:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - E \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 1 - \int dv f \quad (3.19)$$

Luego, la condición inicial es el equilibrio termodinámico y homogeneidad del espacio de posiciones, el cual es perturbado periódicamente en el espacio de posiciones con una amplitud ϵ

$$f(x, v, 0) = f_0(1 + \epsilon \cdot \cos(kx)) \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} &= f_0 + \delta f_0 \\ f_0(v) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Esto se hace con la programación de métodos numéricos (propuesto por Cheng y Knorr, el cual es un método simpléctico de orden 2 (explicado en 3.1)).

Estos son los parámetros utilizados en la simulación que serán ejecutadas en mi computador personal, luego se harán correr distintas simulaciones para un número de onda fijo y distintas amplitudes de perturbación inicial que varían entre valores muy pequeños ($\approx 10^{-4}$) y muy grandes ($\approx 10^{-2}$) para ver el comportamiento crítico.

3.2 *Correlación Espacial*

Nos interesa encontrar diferencias de fase entre la variación de la presión δP y la densidad de los electrones $\delta\rho$, que es lo que esperaríamos que ocurra en el plasma para que suceda el amortiguamiento de Landau Lineal. Para aquello se utilizó la correlación definida como:

$$(f * g)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \bar{f}(t) g(t - \tau)$$

la barra indica el complejo conjugado de la función f , donde es importante notar también que la evolución temporal de las variables dinámicas del plasma, a grandes escalas de tiempo no son periódicas respecto del período del plasma, y además, como estas parten desde un $t = 0$ hasta un $t = t_f$, este será el dominio temporal. Tomando en cuenta lo anterior, la presión y la densidad de carga involucran la integración en el espacio de velocidades de la función de distribución, y si además tomamos el promedio espacial que involucra una integración en el espacio de posiciones, estas dos integraciones remueven o suavizan información que nos podría ser útil para encontrar dichos desfases. Por ello, entonces se tomó la correlación espacial para distintos instantes de tiempo, donde t' es un instante de tiempo fijo y τ_x es el intervalo de correlación espacial;

$$(\delta P(x, t') * \delta\rho(x, t'))(\tau_x) = \int_0^{\tau_x} dx \delta P(x, t') \delta\rho(x, t') \quad (3.22)$$

3.3 Correlación Onda-Partícula

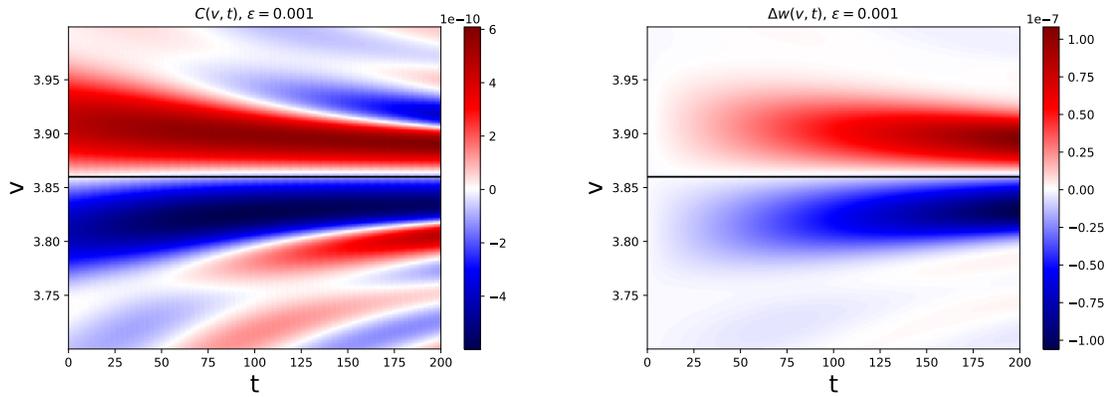
Howes [11] define la correlación evaluada en una posición fija:

$$C_\tau(v, t) := -q_s \frac{v^2}{2} \cdot \frac{1}{\int_t^{t+\tau} dt'} \cdot \int_t^{t+\tau} dt' \frac{\partial \delta f_s(x_0, v, t')}{\partial v} E(x_0, t') \quad (3.23)$$

Donde τ es el intervalo de correlación. En la figura 3.1 está la clave de esta técnica, hay que integrar sobre el tiempo;

$$\Delta w(v, t) = \int_0^t dt' C_\tau(v, t', \tau) \quad (3.24)$$

Esto permite aislar la transferencia de energía del amortiguamiento de Landau lineal de la energía del movimiento libre de las partículas (el asociado al término balístico).



(a) Correlación onda-partícula

(b) Transferencia de energía

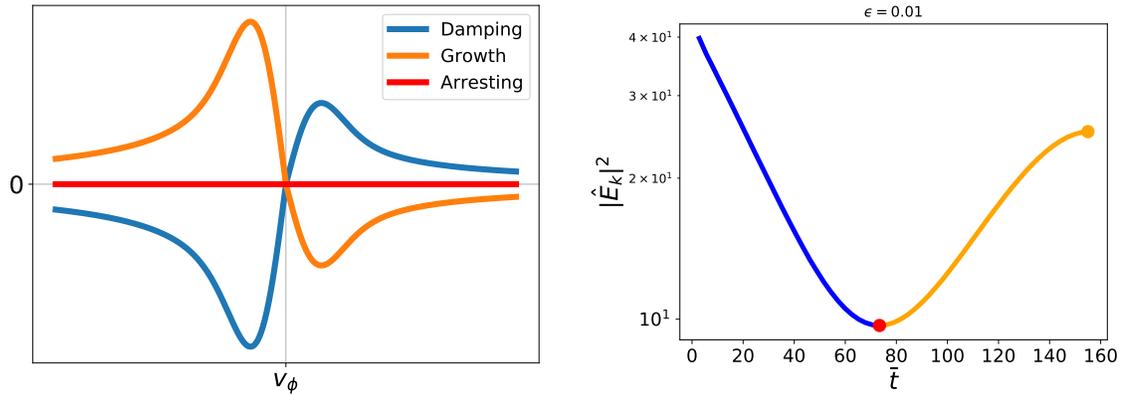
Figure 3.1: Técnica de *Howes*

En la figura 3.1, *Howes* demuestra que es posible aislar el intercambio de energía asociado al amortiguamiento de Landau lineal de otros tipos de intercambio energético entre ondas y partículas con velocidades considerablemente distintas a la velocidad de fase de la perturbación calculado mediante la relación de dispersión lineal (ecuación 2.61). Esto porque la imagen izquierda es difusa y las líneas de contorno muestran una dinámica compleja y no trivial. En cambio la figura derecha muestra

claramente que cualquier otro tipo de interacción que no sea el asociado al amortiguamiento de Landau desaparece, mostrando que existe un desbalance energético entre las partículas que intercambian energía eficazmente con la onda. Howes concluye que el amortiguamiento de Landau es explicado mediante el modelo de Dawson sin problemas.

3.4 Eficiencia de la Interacción Onda-Partícula

A continuación, se explica la técnica desarrollada por el autor para medir la eficiencia del intercambio de energía entre la perturbación (que viaja en el plasma con una velocidad de fase v_ϕ) y las partículas que poseen velocidades cercanas a v_ϕ . Para aquello es necesario recurrir al trabajo realizado por *Howes* (secc. 3.3).



(a) $\Delta w(v, t)$ en distintos instantes de tiempo donde hay procesos físicos distintos (b) Decaimiento y posterior recuperación de la energía electrostática

Figure 3.2: Interpretación Física de $Q(\epsilon)$

En la figura 3.2a:

- La línea azul representa el amortiguamiento de Landau explicado en términos energéticos, ya que la energía electrostática de la perturbación está fluyendo hacia las partículas con $v \lesssim v_\phi$, mientras que las partículas con $v \gtrsim v_\phi$ disminuyen su energía para entregárselas a la perturbación. Pero debido a la dis-

tribución de velocidades (una Maxwelliana en velocidad que es decreciente para todo el intervalo $v > 0$), hay mucho más partículas con velocidades menores a la velocidad de fase que partículas con velocidades mayores a la velocidad de fase, por lo tanto, este desbalance en el número de partículas que entregan y quitan energía a la onda produce el amortiguamiento de Landau.

- La línea roja representa el tiempo en el que ocurre el *arresting time*, ya que no hay partículas que ganen o pierden energía.
- La línea naranja es la fase de la recuperación de energía electrostática para la perturbación explicado en términos energéticos, ya que está fluyendo de manera inversa que en el amortiguamiento de Landau. Las partículas con $v \gtrsim v_\phi$ ganan energía de la perturbación, mientras que las partículas con $v \lesssim v_\phi$ disminuyen su energía entregándosela a la perturbación, y como la función de distribución a macroescala sigue siendo una Maxwelliana, a pesar de que existan oscilaciones en el espacio de velocidades, estas oscilaciones no deforman de una manera considerable a la distribución. Consecuentemente, sigue habiendo un mayor número de partículas que viajan más lento que la perturbación.

Cuando ocurre el amortiguamiento de Landau vemos que hay un valor de la velocidad, v_{max} , que maximiza $\Delta w(v, t)$, en todo instante de tiempo en el que ocurre el amortiguamiento de Landau. A su vez, el valor de $\Delta w(v_{max}, t')$ a medida que avanza el tiempo (para tiempos iniciales) crece vertiginosamente y posteriormente deja de crecer, disminuye muy poco y luego se mantiene constante en el tiempo. Dicho máximo lo etiquetaremos como t_{max} . Por lo tanto, como proponemos que la interacción onda-partícula deja de ser eficiente, es que integramos hasta el instante de tiempo en el que ocurre una saturación en el proceso de interacción onda-partícula para la velocidad máxima v_{max}

$$Q(\epsilon) := \int_0^{t_{max}} dt' \Delta w(v_{max}, t') \quad (3.25)$$

Cabe mencionar que dicho análisis se puede hacer con la velocidad que minimiza Δw , pero se llega al mismo resultado y es por eso que se ha escogido v_{max} .

Capítulo 4

Resultados

Primero que todo, se enfatiza que las variables fueron normalizadas por las cantidades naturales del plasma. En otras palabras:

- Posiciones: $\tilde{x} := \frac{x}{\lambda_D}$
- Velocidades: $\tilde{v} := \frac{v}{v_{th,e}}$
- Tiempo: $\tilde{t} := t \cdot \omega_{p,e}$
- Campo Eléctrico: $\tilde{E} := \frac{|q_e|}{m_e v_{th,e} \omega_{p,e}} E$
- Función de distribución de velocidades: $\tilde{f} := \frac{f}{n_e v_{th,e}}$

donde m_e y q_e es la masa y la carga, λ_D es la longitud de Debye, $v_{th,e}$ es la velocidad térmica, $\omega_{p,e}$ es la frecuencia natural de oscilación del plasma y n_e es la densidad de carga, todas estas cantidades son de los electrones. Sin embargo, para efectos gráficos vamos a prescindir de usar la virgulilla, recordando que esta es la adimensionalización. Por otro lado, las resoluciones utilizadas para las simulaciones numéricas son $(Nx, Nv, dt) = (512, 4096, 0.05)$, sin embargo, también se desarrollaron simulaciones con mayor resolución en velocidad (se detalla en cada caso).

4.1 Solución de la Relación de Dispersión

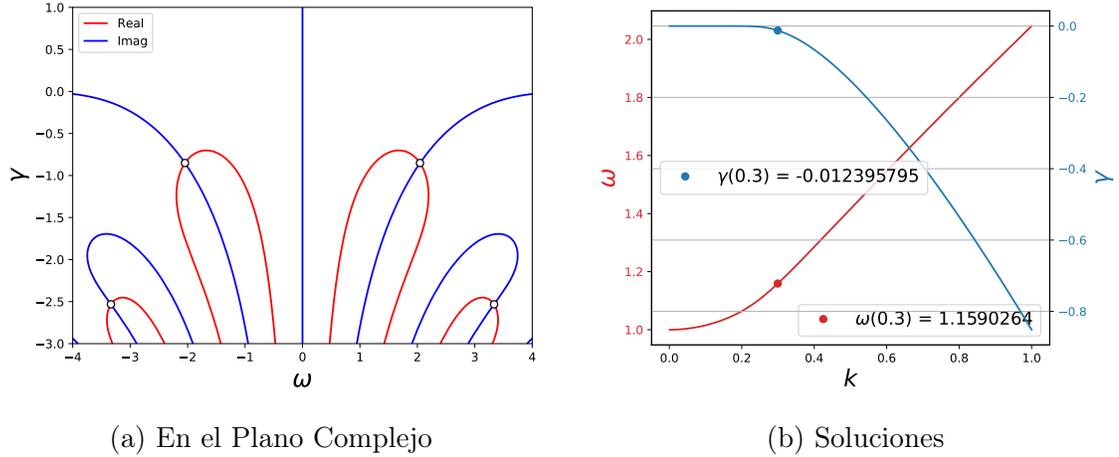


Figure 4.1: Relación de Dispersión

En la fig. 4.1a las líneas roja y azul son las curvas donde la relación de dispersión (ecuación 2.61) se anula para sus partes reales e imaginarias respectivamente, y los círculos blancos son el punto intersección, por lo tanto son las soluciones de la relación de dispersión. En 4.1b la línea roja y azul son la frecuencia y la tasa de amortiguamiento ($\omega(k)$ y $\gamma(k)$, respectivamente) para ondas de Langmuir y desde este resultado se tomó un valor del vector de onda $k = 0.3$, principalmente porque según *xu Hwi* [20] está dentro del rango en el que un plasma electrostático se comporta como un fenómeno crítico. Finalmente, con esta información obtenemos la velocidad de fase de la perturbación $v_\phi = 3.863$ y el amortiguamiento de Landau lineal es $\gamma_L = -0.012$.

4.2 Comportamiento Crítico

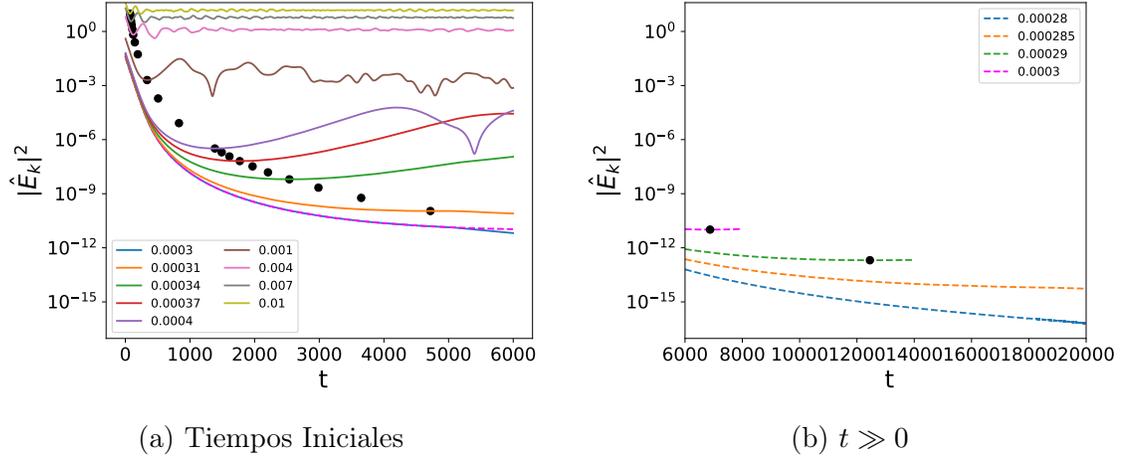


Figure 4.2: Envoltente de $|\hat{E}_k|^2$ para distintos ϵ

Las figs. 4.2 muestran la evolución temporal de la envoltente del módulo cuadrático de la energía electrostática y los círculos negros son el instante de tiempo en el que la envoltente cesa de decaer y posteriormente se recupera ¹. La línea segmentada color magenta por debajo de la curva azul continúa en la figura 4.2b. Este resultado corresponde a una simulación con los mismos parámetros que en la línea azul de 4.2a pero con $Nv = 16.384$. Esa resolución permite resolver estructuras más finas en el espacio de fase, por lo cual la deformación de δf adquiere oscilaciones cada vez más pequeñas, y en efecto se logra ver que la curva comienza a levantarse en 4.2b.

En la figura 4.2b se logra apreciar la sensibilidad con la que el *arresting time* diverge, existiendo una diferencia de el doble si $\epsilon = 3.0 \cdot 10^{-4}$ disminuye a $\epsilon = 2.9 \cdot 10^{-4}$, lo que es esperable en fenómenos críticos. Finalmente la curva naranja $\epsilon = 2.85 \cdot 10^{-4}$ muestra la tendencia a permanecer constante en el tiempo y la azul $\epsilon = 2.80 \cdot 10^{-4}$ continúa decayendo para $t > 20.000$ (fuera del rango gráfico).

¹en este gráfico no se muestran todas las curvas pero sí todos los círculos negros para que no se llene de líneas y sea difícil de ver

A continuación se muestra cómo evoluciona el *arresting time* t_a y el valor mínimo de la envolvente de la energía electrostática $|\hat{E}_k(t_a)|^2$ en función de ϵ

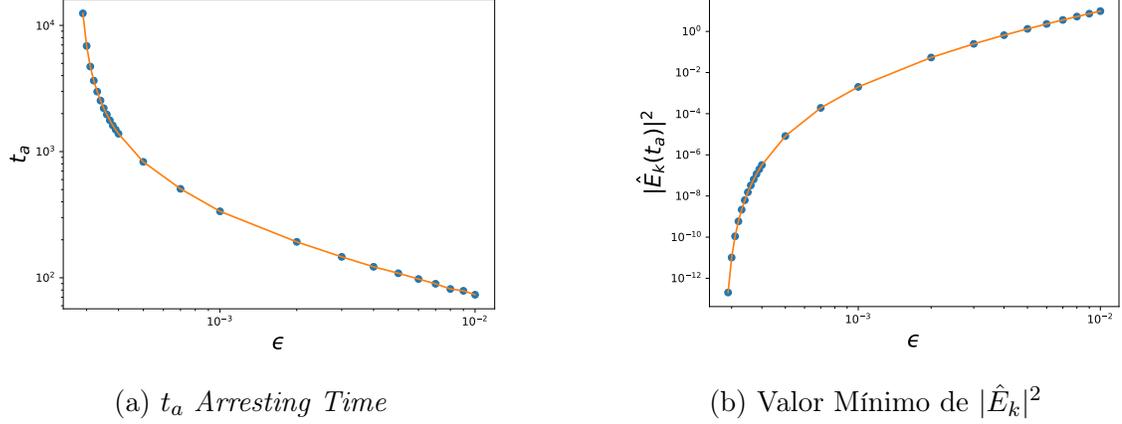


Figure 4.3: *Critical Slowing* de t_a y $|\hat{E}_k|^2(t_a)$

En las figs. 4.3 no se logra ver una pendiente recta, esto significa que hay *Critical slowing*, lo que quiere decir que hay un cambio en los exponentes críticos a medida que $\epsilon \rightarrow 0$. Gráficamente hablando, debido a la escala logarítmica en ambos ejes, los datos siguen una tendencia tipo ley de potencia como en fenómenos críticos.

Las figs. en 4.4 muestran los ajustes de los datos de las figs. 4.3, el cual se separa en dos partes debido al *critical slowing*

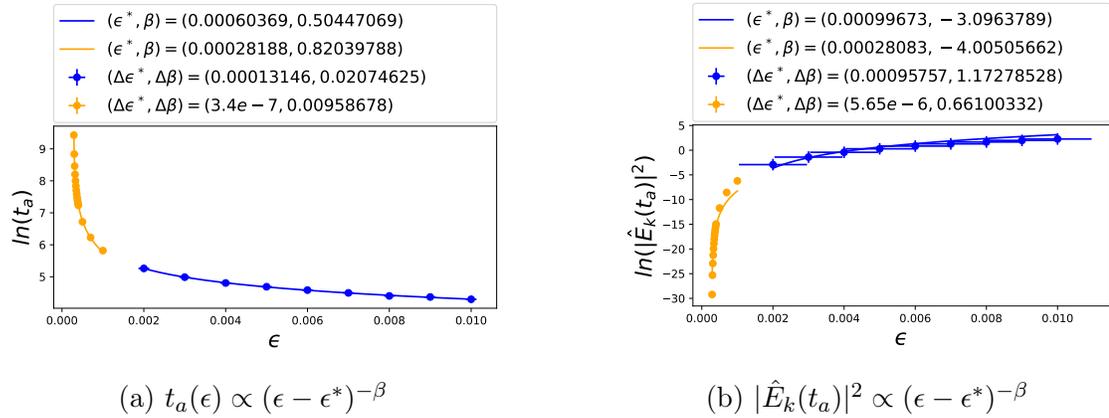


Figure 4.4: Ajustes de 4.3a y 4.3b

Los parámetros de los ajustes se muestran a continuación:

$$t_a(\epsilon) \propto \begin{cases} (\epsilon - (2.819 \pm 0.003) \cdot 10^{-4})^{-(0.820 \pm 0.0009)}, & \epsilon \in [3 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}] \\ (\epsilon - (6.037 \pm 1.314) \cdot 10^{-4})^{-(0.504 \pm 0.001)}, & \epsilon \in [2 \cdot 10^{-3}, 10^{-2}] \end{cases} \quad (4.1)$$

$$|\hat{E}_k(t_a)|^2(\epsilon) \propto \begin{cases} (\epsilon - (2.808 \pm 0.057) \cdot 10^{-4})^{4.005 \pm 0.661}, & \epsilon \in [3 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}] \\ (\epsilon - (9.967 \pm 9.578) \cdot 10^{-4})^{3.096 \pm 0.661}, & \epsilon \in [2 \cdot 10^{-3}, 10^{-2}] \end{cases} \quad (4.2)$$

El ajuste de los datos azules en la figura 4.4a confirman el escenario de *O'Neil*: el tiempo de atrapamiento de partículas es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la amplitud de perturbación, $t_a \propto \epsilon^{-(0.504 \pm 0.001)}$. Por otro lado, el ajuste de los datos en color naranja de las figuras 4.4 confirman el escenario de *Ivanov*, los exponentes críticos difieren de lo esperado por *O'Neil*, exhibiendo *critical slowing*. De las ecuaciones 4.1 y 4.2 se concluye que la amplitud de perturbación que separa los estados en el que la energía electrostática se recupera de las que siguen decayendo para $t \rightarrow +\infty$ es $\epsilon_a^* = 2.8 \cdot 10^{-4}$. Lo llamaremos amplitud crítica de *arresting*.

4.3 Eficiencia de Transmisión Energética

En la fig. 4.5a los círculos rojos indican el primer máximo de $\Delta w(v_{max}, t)$. Como se explicó en la sección 3.4, es en este punto es donde ocurre la mayor eficiencia de intercambio energético, respecto de sus vecinos más cercanos en velocidad:

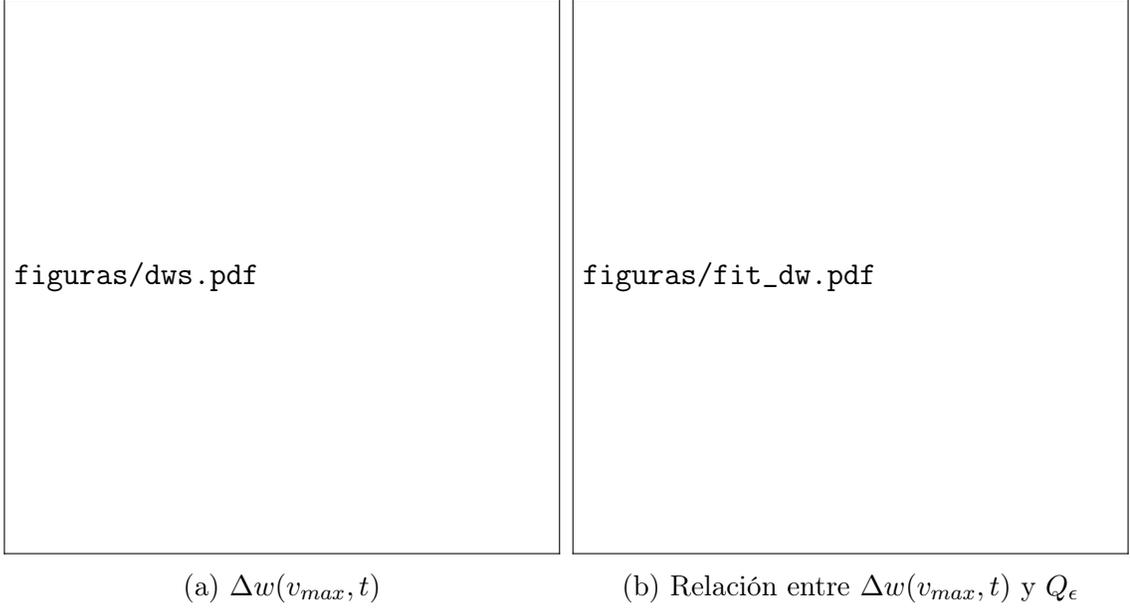


Figure 4.5: $\Delta w(v_{max}, t)$ y su ajuste en función de ϵ

Para la figura 4.5b, el ajuste de los datos señalados con líneas azules y naranjas son (respectivamente):

$$Q(\epsilon) \propto \begin{cases} (\epsilon - (1.400 \pm 0.100) \cdot 10^{-7})^{-1.977 \pm 0.002}, & \epsilon \in [7 \cdot 10^{-6}, 7 \cdot 10^{-5}] \\ (\epsilon - (1.478 \pm 0.117) \cdot 10^{-4})^{-0.733 \pm 0.147}, & \epsilon \in [1.8 \cdot 10^{-4}, 2.8 \cdot 10^{-4}] \end{cases} \quad (4.3)$$

acá tenemos *critical slowing* ya que según la ecuación 4.3 hay un cambio en los exponentes críticos cuando ϵ disminuye. Entonces $\boxed{\epsilon_Q^* = (1.4 \pm 0.1) \cdot 10^{-7}}$ separa los estados a partir de donde se puede interpretar el amortiguamiento de Landau Lineal en términos energéticos, amplitud que se denomina amplitud crítica de $Q(\epsilon)$.

A continuación se explica la respuesta a la hipótesis

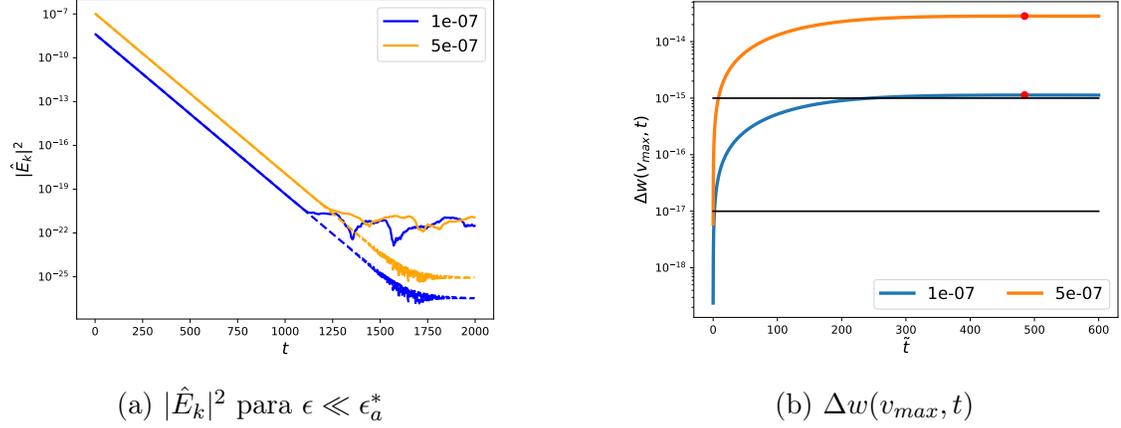


Figure 4.6: Relación entre $|\hat{E}_k|^2$ y $\Delta w(v_{max}, t)$

En la fig. 4.6a la tasa de amortiguamiento de las líneas continuas coincide con γ_L hasta caer a ruido numérico, para simulaciones realizadas con precisión doble. Por otro lado, las líneas segmentadas son el resultado de simulaciones con los mismos parámetros anteriores, pero en precisión cuádruple, demostrando que sigue habiendo amortiguamiento de Landau lineal γ_L . Las curvas de la imagen 4.6b son $\Delta w(v_{max}, t)$, junto a dos líneas negras horizontales que son el intervalo $[10^{-17}, 10^{-15}]$, este es el rango de valores donde Δw es despreciable. La amplitud de perturbación de la curva azul es $\epsilon = 1 \cdot 10^{-7} \lesssim \epsilon_Q^* = (1.40 \pm 0.1) \cdot 10^{-7}$, esto quiere decir que para $\epsilon < \epsilon_Q^*$, $\Delta w(v_{max}, t)$ es despreciable, por lo tanto no se puede recurrir a la energía en la interacción onda partícula para explicar el amortiguamiento de Landau lineal.

En las figs 4.7 se muestran la parte perturbada de la función de distribución de velocidades en diferentes instantes de tiempo en el que ocurre amortiguamiento de Landau lineal. La línea roja del fondo es el promedio en el espacio de posiciones $\langle \delta f \rangle_x$ (que está escalada para poder visualizar) y lo que hay debajo de la superficie es la proyección sobre el espacio de fase

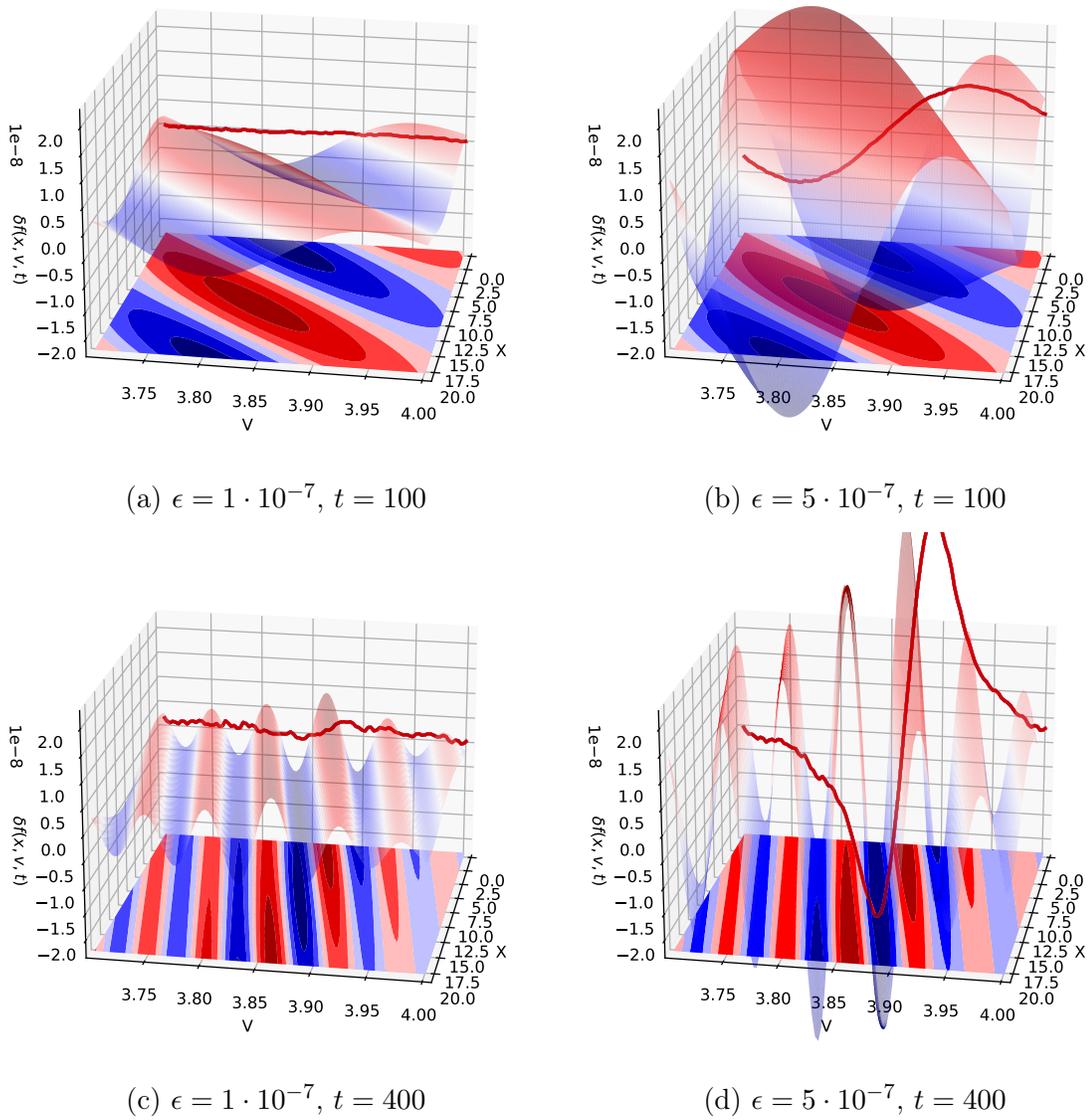


Figure 4.7: Espacio de Fase para $\epsilon \approx \epsilon_Q^*$

En las figs. 4.7b y 4.7d vemos que sigue habiendo una deformación de $\langle \delta f \rangle_x$ en torno v_ϕ y el espacio de fase se sigue deformando porque aún existe phase mixing mientras ocurre amortiguamiento de Landau lineal (fig 4.6a). Por otro lado, las figs. 4.7a y 4.7c no muestran esa deformación de $\langle \delta f \rangle_x$ a pesar de que el espacio de fase siga deformándose según el phase mixing y aún cuando sigue ocurriendo amortiguamiento de Landau lineal.

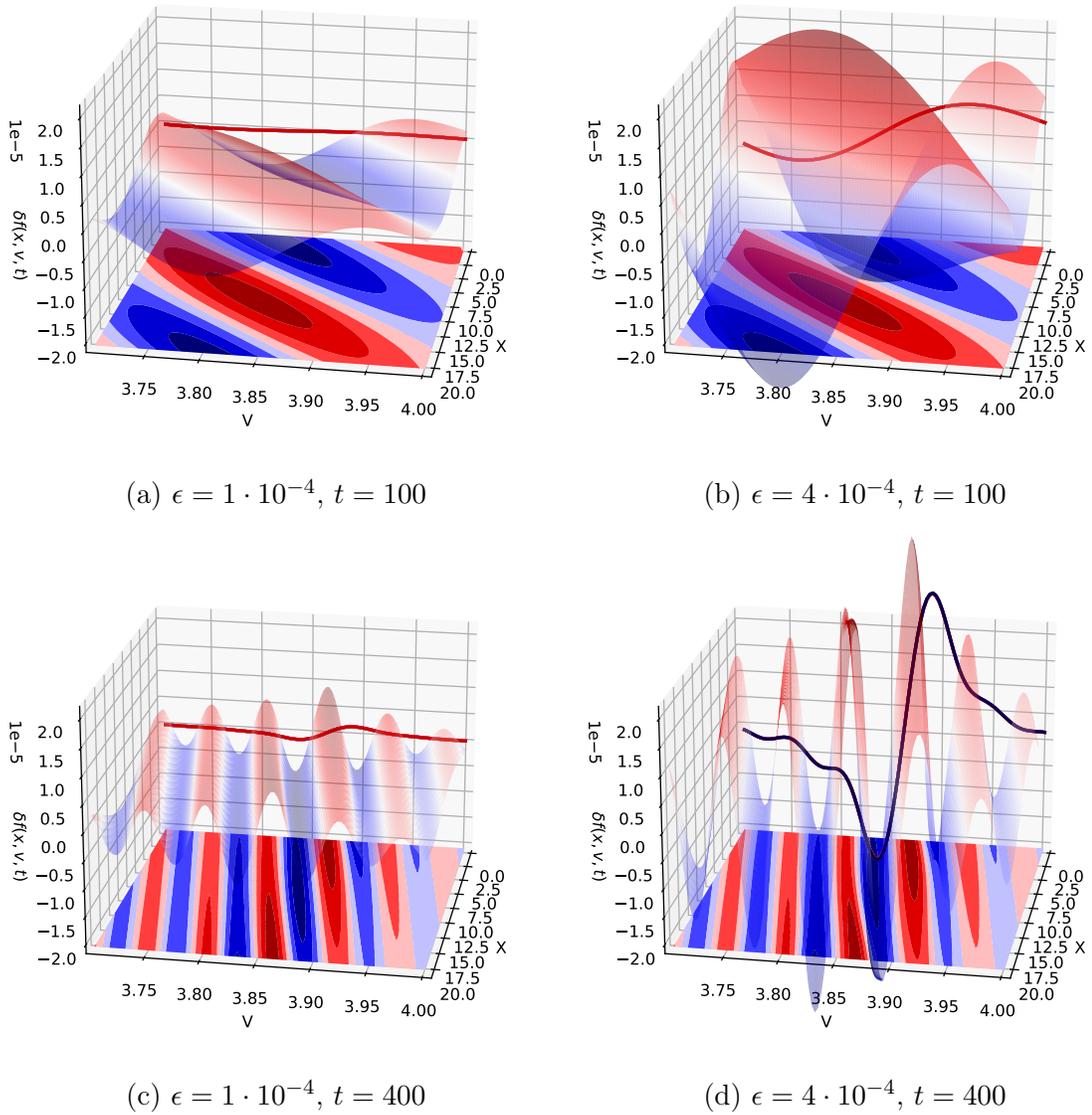


Figure 4.8: Espacio de Fase para $\epsilon \gg \epsilon_Q^*$

En las figs. 4.8 (las cuales están a una escala mayor que las figs. en 4.7) se logra apreciar las oscilaciones en el espacio de fase que en promedio logran deformar $\langle \delta f \rangle_x$ mientras ocurre el amortiguamiento de Landau lineal, y más aún, para tiempos asintóticos, cuando la energía está en un máximo, se logran ver vórtices en el espacio de fases, mostrando así que hay partículas atrapadas (figs 4.9).

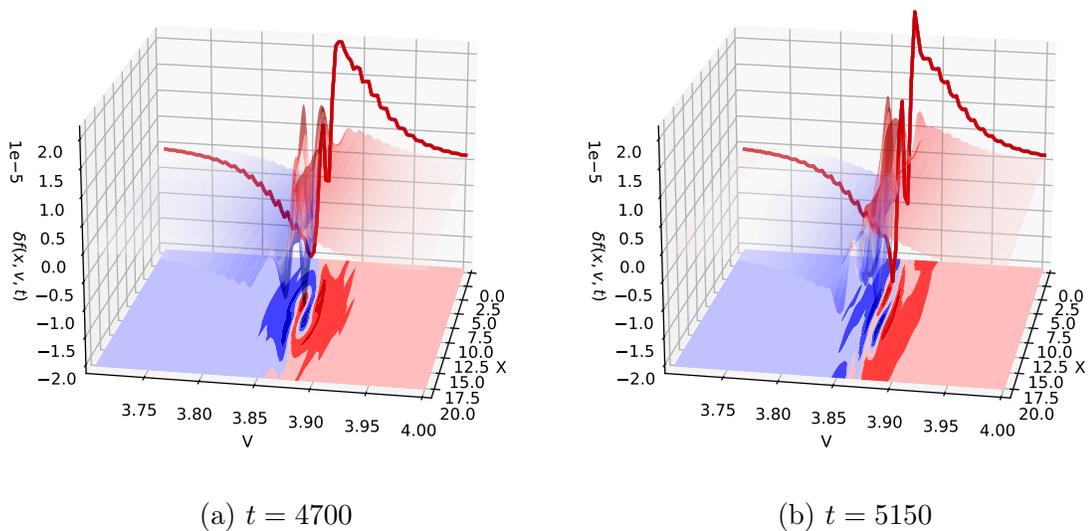


Figure 4.9: Espacio de Fase para $\epsilon = 4 \cdot 10^{-4}$

A continuación se muestran la parte perturbada de la función de distribución de velocidades promediada en el espacio de posiciones en distintos instantes de tiempo (líneas rojas de las figuras 4.7), resultado de simulaciones hechas en precisión doble (izquierda) y cuádruple (derecha) con una resolución doble en velocidad:

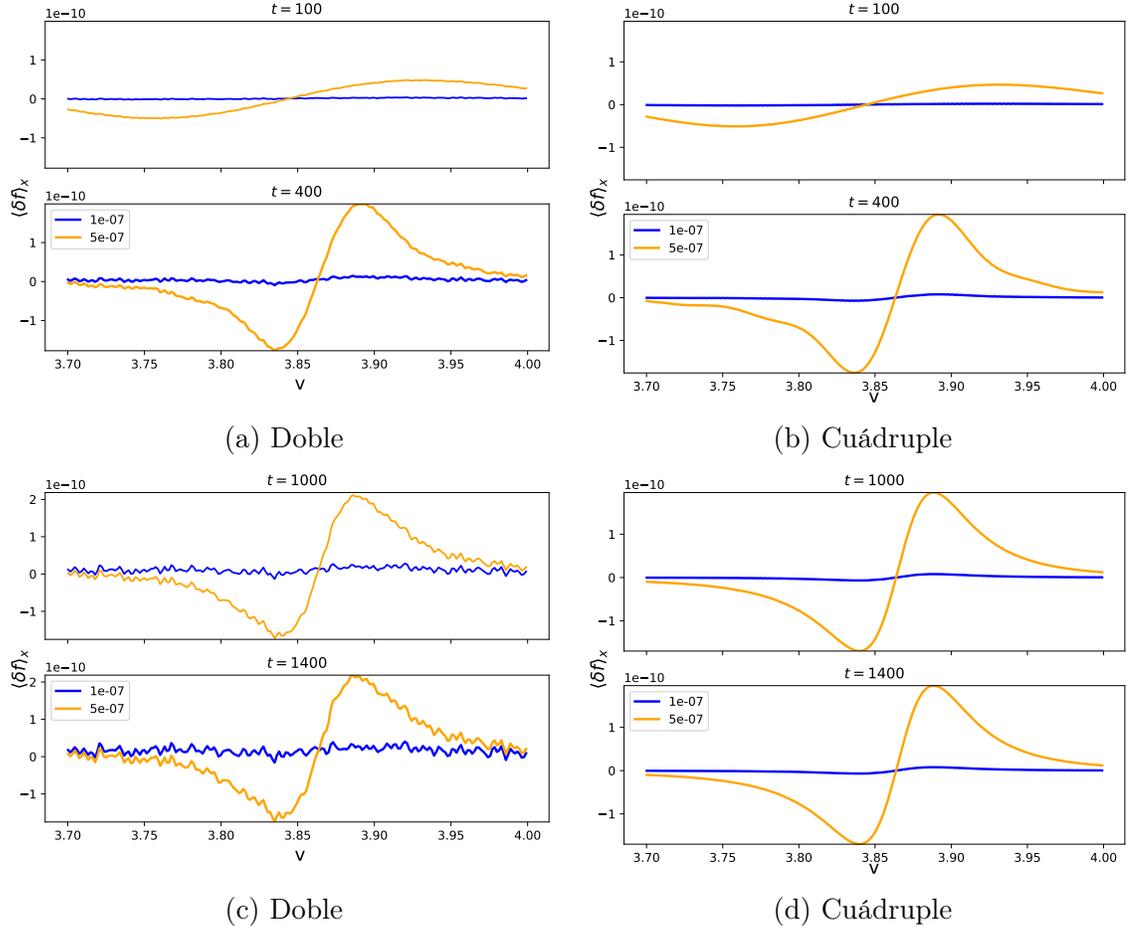


Figure 4.10: $\langle \delta f \rangle_x(v, t)$ en precisiones:

En las fig. 4.10 sigue habiendo una deformación en torno a la velocidad de fase si $\epsilon = 5.0 \cdot 10^{-7} > \epsilon_Q^*$ (línea naranja), pero para $\epsilon = 1 \cdot 10^{-7} \lesssim \epsilon_Q^*$ (línea azul) no existe esa deformación en torno a la velocidad de fase, calculada con la relación de dispersión ($v_\phi = 3.863$), confirmando así que para $\epsilon < \epsilon_Q^*$ no hay un intercambio eficiente de energía entre la onda y partículas resonantes.

4.4 Correlación Espacial entre la presión y densidad

A continuación se muestra la correlación espacial (ecuación 3.22) cruzada entre δP y $\delta\rho$, $C(\delta P, \delta\rho)$, respecto de las autocorrelaciones $C(\delta P, \delta P)$ y $C(\delta\rho, \delta\rho)$. Debajo de cada imagen está la evolución temporal de la energía electrostática con un punto negro que indica el instante de tiempo en el que se están estudiando las correlaciones:

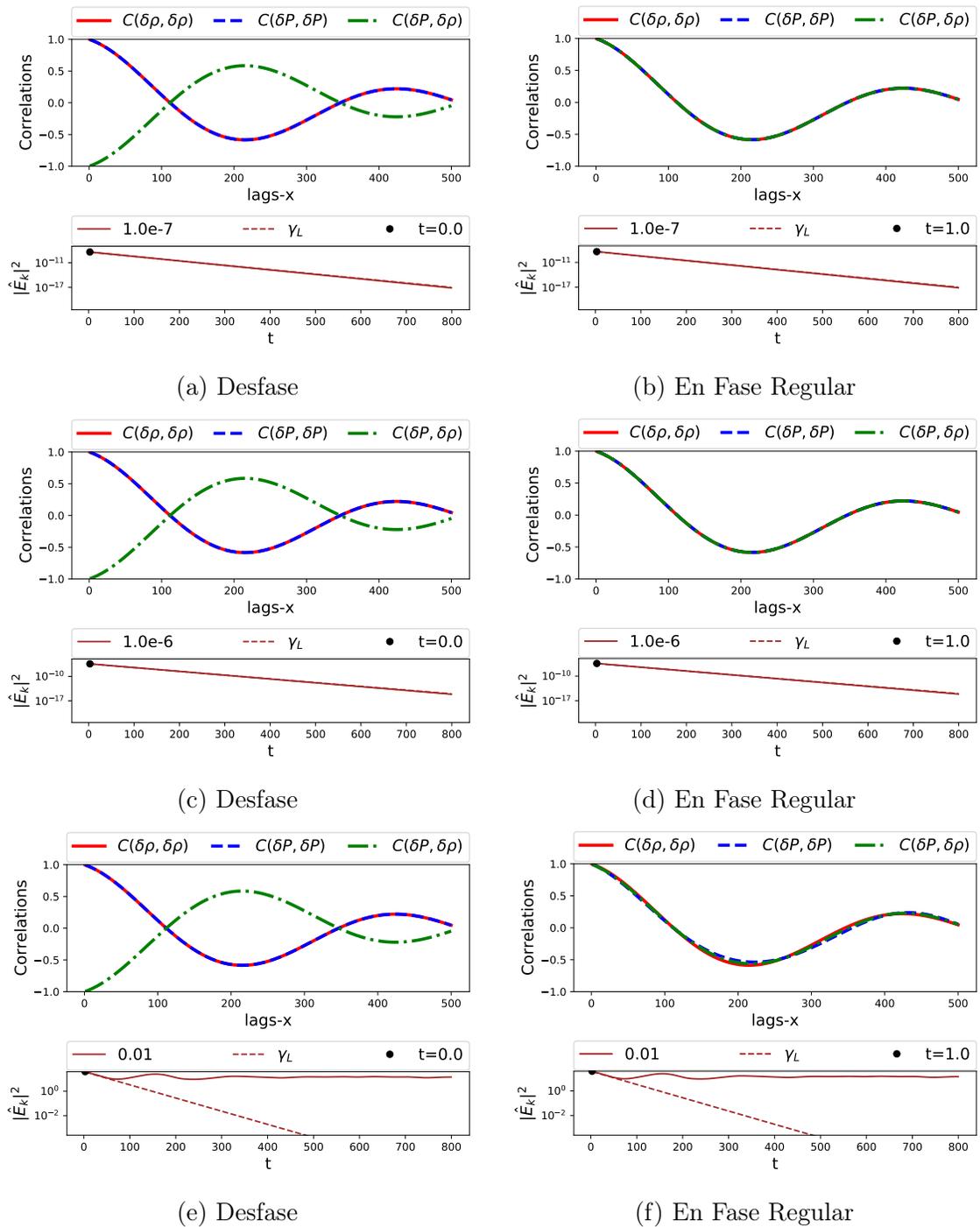


Figure 4.11: La correlación cruzada respecto de las autocorrelaciones muestran sincronizaciones de fase cada cierto intervalo de tiempo para $\epsilon \approx \epsilon_Q^*$

Las curvas en figs. 4.11 están desfasadas inicialmente (lo que es esperable para que ocurra el amortiguamiento de Landau), pero en el primer período de plasma ($t = 1$) estas se sincronizan para todos los casos simulados (no se muestran todos aquí), y además, se puede verificar que esta tendencia a la sincronización de fases se repite de manera relativamente regular para todo instante de tiempo en el que la tasa de decaimiento temporal de la onda coincide con γ_L .

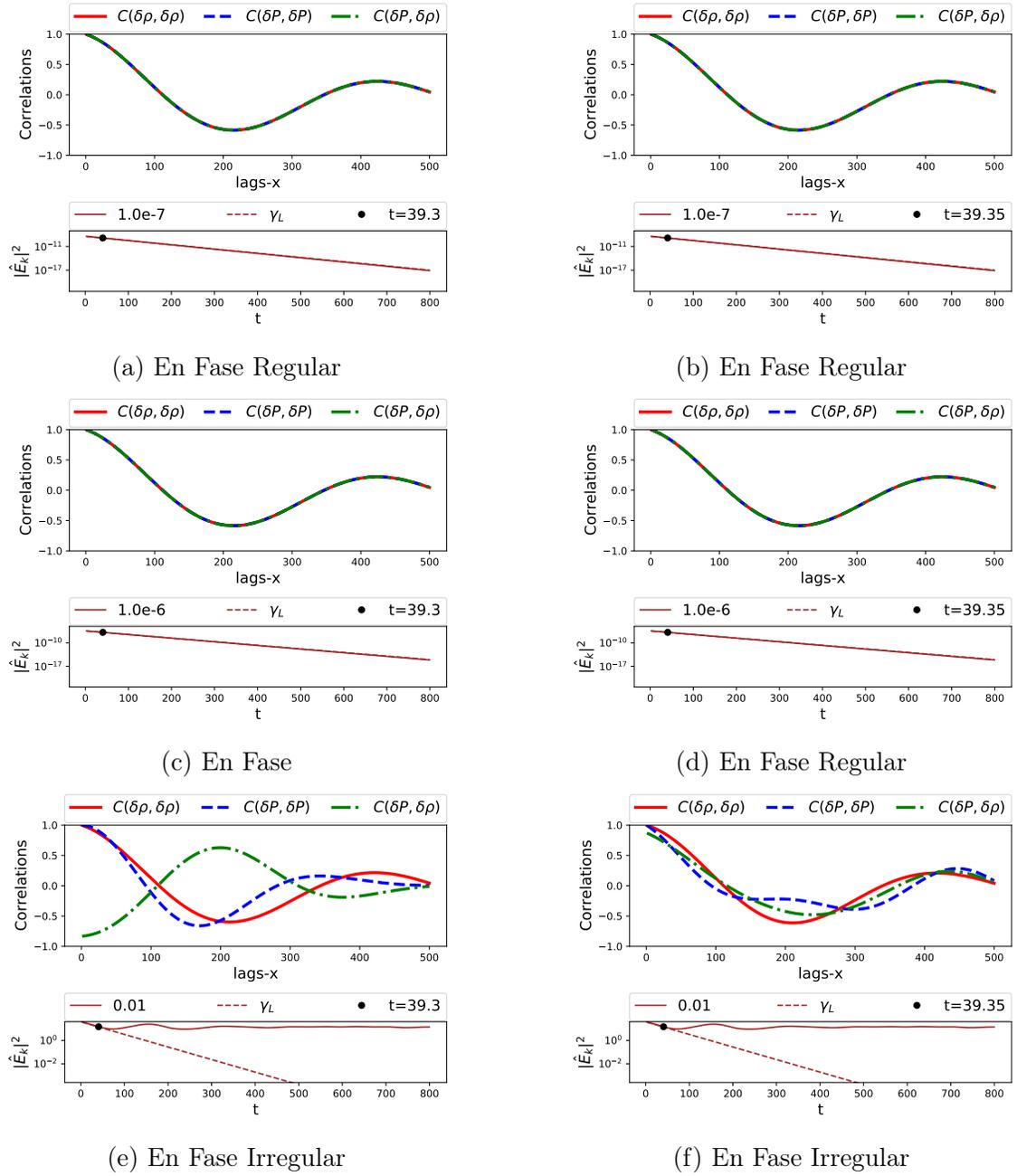


Figure 4.12: La correlación cruzada con las autocorrelaciones comienzan a sincronizar sus fases irregularmente para $\epsilon \gg \epsilon_Q^*$

Por otro lado, las figs 4.12e y 4.12f muestran que en ese instante ocurre una tendencia a la sincronización de fases mientras que la tasa de amortiguamiento de la onda coincide con γ_L , pero esta sincronización es irregular ya que las curvas muestran

cambios drásticos y además ni una está solapada sobre otra (como cuando están en fase regular), pero están cerca, lo que nos lleva a pensar si se les puede considerar en fase o no, por eso las denominamos en una fase irregular.

En las figs. 4.11 y 4.12 el decaimiento temporal de la onda coincide con γ_L en ambos instantes de tiempo, además la tendencia a la sincronización irregular de las fases desaparece cuando $\epsilon \rightarrow \epsilon_Q^*$, ya que en este rango la sincronización regular de las fases ocurrió en todo instante de tiempo en el que la tasa de amortiguamiento de la onda coincide con γ_L hasta decaer a ruido numérico (lo que es físicamente equivalente a decir que la onda decae a cero para tiempos asintóticos).

Capítulo 5

Conclusiones

Se verificó que $Q(\epsilon)$ (ec. 3.25) obedece una ley de potencia con parámetros:

$$Q(\epsilon) \propto \begin{cases} (\epsilon - (1.400 \pm 0.100) \cdot 10^{-7})^{-1.977 \pm 0.002}, & \epsilon \in [7 \cdot 10^{-6}, 7 \cdot 10^{-5}] \\ (\epsilon - (1.478 \pm 0.117) \cdot 10^{-4})^{-0.733 \pm 0.147}, & \epsilon \in [1.8 \cdot 10^{-4}, 2.8 \cdot 10^{-4}] \end{cases} \quad (5.1)$$

En consecuencia, en esta tesis se ha encontrado que la eficiencia de transmisión energética, al igual que el tiempo de *arresting*, exhibe comportamiento crítico. Esto permite tener un valor exacto que separa los estados en el que el plasma se comporta de manera completamente lineal a pesar de resolver el problema mediante simulaciones numéricas (que son resultados no lineales). En otras palabras, se encontró que efectivamente hay un límite para que no exista un intercambio eficiente de energía entre la onda y las partículas resonantes.

Por lo tanto, $Q(\epsilon)$ demostró ser un buen estimador para medir la eficiencia de la transmisión de energía entre los campos autoconsistentes generados por el plasma. Esto último porque logró predecir el valor $\epsilon_Q^* \approx 1 \cdot 10^{-7}$ que separa los estados en que la función de distribución se deforma conforme a lo dicho por Dawson y el estado en el que la función de distribución no se deforma en torno a la velocidad de fase aún mostrando amortiguamiento de Landau lineal, es decir, la interpretación de Dawson del amortiguamiento de Landau lineal para $\epsilon < \epsilon_Q^*$ es inconsistente con lo encontrado mediante simulaciones en esta tesis.

Por otro lado, con la correlación cruzada entre δP y $\delta \rho$ ($C(\delta P, \delta \rho)$) respecto de sus autocorrelaciones ($C(\delta P, \delta P)$ y $C(\delta \rho, \delta \rho)$), que se encuentran inicialmente desfasadas, se encontró una tendencia hacia la sincronización de las fases que se repiten en intervalos de tiempo con períodos irregulares, y además esa tendencia a la sincronización muestra ser irregular cuando el amortiguamiento de Landau se puede explicar mediante términos energéticos, es decir, $\epsilon \gg \epsilon_Q^*$. Por otro lado, esa tendencia hacia la sincronización es regular para $\epsilon \approx \epsilon_Q^*$, cuando no podemos tomar en cuenta la energía para explicar el amortiguamiento de Landau lineal. Finalmente, este trabajo demostró cumplir la hipótesis planteada mediante la técnica desarrollada por el autor (la cual es nueva y este descubrimiento ha sido su primer logro). Con esto, los autores confirman aún más lo que ya se ha evidenciado y planteado en otros trabajos sobre el mecanismo físico que genera el amortiguamiento de Landau. Entonces se invita a seguir trabajando en buscar mecanismos físicos que expliquen el comportamiento del amortiguamiento de Landau lineal, entender bajo qué situaciones éste sucede o en qué situaciones puede cambiar su comportamiento, y cuáles son los mecanismos físicos que modulan las variables dinámicas del plasma.

Lo más importante en este trabajo fue:

- Plantear el problema de que si existe o no un límite para explicar el amortiguamiento de Landau lineal en términos energéticos, ya que aquello requería cuestionar el modelo de Dawson.
- Proponer la idea que la eficiencia de transferencia energética de la interacción onda-partícula durante el amortiguamiento de Landau lineal se comporta como una transición de fase de segundo orden.
- Explicar una posible solución al problema planteado, mostrando cómo esperamos que nuestra idea se cumpla.
- Desarrollar un método que permite cuantificar la eficiencia de intercambio energético para sustentar nuestra idea.

- Demostrar que dicho método funcionó y permitió encontrar el límite planteado en nuestra idea.

Bibliografía

- [1] J. A. Araneda, E. Marsch, and A. F. Viñas. “Collisionless damping of parametrically unstable Alfvén waves”. In: *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 112.A4 (2007). DOI: <https://doi.org/10.1029/2006JA011999>.
- [2] Howes G. G. Chen C. H.K. Klein K. G. “Evidence for electron Landau Damping in space plasma turbulence”. In: *Nature* 10 (2019).
- [3] C. Z. Cheng and Georg Knorr. “The integration of the vlasov equation in configuration space”. In: *Journal of Computational Physics* 22.3 (1976), pp. 330–351.
- [4] John Dawson. “On Landau damping”. In: *Physics of Fluids* 4.7 (1961), pp. 869–874. ISSN: 10706631. DOI: [10.1063/1.1706419](https://doi.org/10.1063/1.1706419).
- [5] D. F. Escande, S. Zekri, and Yves Elskens. “Intuitive and rigorous derivation of spontaneous emission and Landau damping of Langmuir waves through classical mechanics”. In: *Physics of Plasmas* 3.10 (1996), pp. 3534–3539.
- [6] Marie-christine Firpo and Yves Elskens. “Phase transition in the collisionless damping regime for wave-particle interaction”. In: *Physical Review Letters* 1 ().
- [7] Gregory G. Howes, Kristopher G. Klein, and Tak Chu Li. “Diagnosing collisionless energy transfer using field-particle correlations: Vlasov-Poisson plasmas”. In: 83.1 (2017). ISSN: 14697807. DOI: [10.1017/S0022377816001197](https://doi.org/10.1017/S0022377816001197).
- [8] A. V. Ivanov and Iver H. Cairns. “Nontrapping arrest of langmuir wave damping near the threshold amplitude”. In: *Physical Review Letters* 96.17 (2006), pp. 1–5. arXiv: [0510131 \[physics\]](https://arxiv.org/abs/0510131).
- [9] A. V. Ivanov, Iver H. Cairns, and P. A. Robinson. “Wave damping as a critical phenomenon”. In: *Physics of Plasmas* 11.10 (2004), pp. 4649–4661.
- [10] Alexei V. Ivanov. “Critical Dynamics under the Vlasov [U+2010] Poisson Equations: Critical Exponents and Scaling of the Distribution Function near the Point of a Marginal Stability”. In: *The Astrophysical Journal* 550.2 (2001), pp. 622–634. ISSN: 0004-637X. DOI: [10.1086/319790](https://doi.org/10.1086/319790).

- [11] K. G. Klein and G. G. Howes. “Measuring Collisionless Damping in Heliospheric Plasmas Using Field–Particle Correlations”. In: *The Astrophysical Journal* 826.2 (2016), p. L30.
- [12] L D Landau. “On the Vibrations of the Electronic Plasma”. In: *Journal of Physics (USSR)* (1946), pp. 445–460.
- [13] J. H. Malmberg and C. B. Wharton. “Collisionless Damping of Electrostatic Plasma Waves”. In: *American Physical Society* 13 (1964).
- [14] Mouhot and Villani. “On Landau damping”. In: *Acta Mathematica* 207.1 (2011), pp. 29–201. ISSN: 00015962.
- [15] Thomas O’Neil. “Collisionless damping of nonlinear plasma oscillations”. In: *Physics of Fluids* 8.12 (1965), pp. 2255–2262. ISSN: 10706631. DOI: [10.1063/1.1761193](https://doi.org/10.1063/1.1761193).
- [16] Constantin F. Rupp, Rodrigo A. López, and Jaime A. Araneda. “Critical density for Landau damping in a two-electron-component plasma”. In: *Physics of Plasmas* 22.10 (2015). ISSN: 10897674. DOI: [10.1063/1.4933022](https://doi.org/10.1063/1.4933022).
- [17] “Simulation study of landau damping near the persisting to arrested transition”. In: *Journal of Plasma Physics* 83.4 (2017). ISSN: 14697807.
- [18] P. Stubbe and A. I. Sukhorukov. “On the physics of Landau damping”. In: *Physics of Plasmas* 6.8 (1999), pp. 2976–2988. DOI: [10.1063/1.873584](https://doi.org/10.1063/1.873584).
- [19] A.A. Vlasov. “On Vibrations Properties of Electron Gas”. In: *Journal of Experimental and Theoretical Physics* 3.8 (1938), p. 291.
- [20] Hui Xu and Zhengming Sheng. “Critical initial amplitude of Langmuir wave damping”. In: *Plasma Science and Technology* 14.3 (Mar. 2012), pp. 181–186. ISSN: 10090630. DOI: [10.1088/1009-0630/14/3/01](https://doi.org/10.1088/1009-0630/14/3/01).