



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL



**ANÁLISIS Y MODELAMIENTO DE LA VOLATILIDAD DE LAS
PRINCIPALES ACCIONES TECNOLÓGICAS, A TRAVÉS DEL AJUSTE DE
MODELOS AUTORREGRESIVOS DE HETEROCEDASTICIDAD
CONDICIONAL ARCH/GARCH**

POR

Cristián Alejandro Aparicio Barría

Memoria de Título presentada a la Facultad de Ingeniería de la Universidad de
Concepción para optar al título profesional de Ingeniera Civil Industrial

Profesor Guía
Hernaldo Reinoso Alarcón

Julio 2022
Concepción (Chile)

© 2022 Cristián Alejandro Aparicio Barría

© 2022 Cristián Alejandro Aparicio Barría

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

Agradecimientos

Agradezco a mi madre por siempre incentivarne a lograr grandes cosas, y a mi padre por sus consejos cuando necesito poner los pies en la tierra. Agradezco también a mi abuelita, mis hermanos y mis sobrinos, por su apoyo e incondicional cariño.

Sumario

Las acciones tecnológicas en los últimos años han mostrado desempeños bursátiles muy buenos, transando a montos más elevados en comparación a activos financieros de otros sectores. Este aumento se debe principalmente a la incorporación de nuevos inversores minoritarios que se ven atraídos por los altos retornos de estos activos financieros. Pero estas acciones se caracterizan por presentar volatilidades mayores que los de otras industrias, lo que sumado a que poseen un precedente relacionado a una burbuja especulativa, hace necesario cuantificar los riesgos de la inversión. Este estudio busca ayudar a la toma de decisiones de inversión mediante el modelamiento del comportamiento de la volatilidad de las acciones tecnológicas, a través del ajuste de modelos autorregresivos de heterocedasticidad condicional.

Las series de precios y retornos correspondientes a cada activo financiero estudiado se construyeron en base a información recopilada de sitios web financieros. El análisis preliminar de la serie de precios y retornos se ejemplifica a través de las acciones de Adobe, activo financiero que se utilizó como modelo durante todo el ajuste univariante. La metodología utilizada considera un ajuste de modelo ARMA para el modelamiento de correlación serial, luego evalúa la presencia de heterocedasticidad condicional, para posteriormente identificar un modelo ARCH/GARCH adecuado, estimar los parámetros, evaluar el modelo y finalmente pronosticar.

Siguiendo la metodología planteada se ajustaron modelos para cada serie estudiada, además, se realizaron ajustes multivariantes, modelando la correlación condicional de algunos de estos activos financieros con el índice Standard & Poor's 500, índice bursátil considerado como el más representativo de la situación actual del mercado estadounidense.

Finalmente, luego del ajuste realizado y su correspondiente validación, se obtuvieron los gráficos de pronóstico de retornos y volatilidad para cada una de las series financieras estudiadas. El análisis de los resultados del ajuste muestra que, efectivamente, las acciones tecnológicas presentan volatilidades más altas en comparación con los principales índices bursátiles, además de un comportamiento asimétrico frente a las malas noticias.

Summary

Technology stocks in recent years have shown very good stock market performances, trading at higher amounts compared to financial assets from other sectors. This increase is mainly due to the incorporation of new minority investors who are attracted by the high returns of these financial assets. But these stocks are characterized by higher volatilities than those of other industries, which added to the fact that they have a precedent related to a speculative bubble, making it necessary to quantify the investment risks. This study seeks to help investment decision-making by modeling the volatility behavior of technology stocks through the adjustment of autoregressive conditional heteroskedasticity models.

The series of prices and returns corresponding to each financial asset studied were constructed based on information gathered from financial websites. The preliminary analysis of the price and return series is exemplified through Adobe stock, a financial asset that was used as a model throughout the univariate adjustment. The methodology used considers an ARMA model adjustment for serial correlation modeling, then evaluates the presence of conditional heteroscedasticity, to subsequently identify a suitable ARCH/GARCH model, estimate the parameters, evaluate the model and finally forecast.

Following the proposed methodology, models were adjusted for each series studied, in addition, multivariate adjustments were made, modeling the conditional correlation of some of these financial assets with the Standard & Poor's 500 index, a stock market index considered as the most representative of the current situation of the U.S. market.

Finally, after the adjustment and its corresponding validation, the return and volatility forecast graphs were obtained for each of the financial series studied. The analysis of the results of the adjustment shows that, effectively, technology stocks present higher volatilities compared to the main stock market indices, in addition to an asymmetric behavior in the face of bad news.

Tabla de contenidos

1. Introducción	1
1.1 Justificación del estudio	2
1.1.1 Aumento de la inversión minoritaria en acciones tecnológicas	2
1.1.2 Mercado tecnológico	2
1.2 Objetivo del estudio	4
1.2.1 Objetivo general	4
1.2.2 Objetivos específicos.....	4
2. Marco teórico.....	1
2.1 Conceptos financieros previos	1
2.1.1 Mercado financiero.....	1
2.1.2 Rentabilidad	1
2.1.3 Retornos de acciones	2
2.1.4 Retorno simple para un periodo	2
2.1.5 Retorno simple multiperiodo.....	2
2.1.6 Retorno compuesto continuo.....	3
2.1.7 Distribución de los retornos	3
2.1.8 Hechos estilizados de las series financieras de retornos	4
2.2 Volatilidad	5
2.2.1 Volatilidad en series de tiempo financieras.....	5
2.2.2 Riesgo del activo financiero	5
2.2.3 Volatilidad histórica	5
2.2.4 Características de la volatilidad.....	6
2.2.5 Pronóstico de la volatilidad	6
2.2.6 Utilidades del pronóstico de volatilidad.....	7

2.2.6.1	Valor en riesgo (VaR)	7
2.2.6.2	La fórmula de Black and Scholes	8
2.3	Conceptos estadísticos previos	9
2.3.1	Proceso estocástico.....	9
2.3.2	Proceso estrictamente estacionario.....	9
2.3.3	Proceso débilmente estacionario	10
2.3.4	Proceso de ruido blanco	10
2.3.5	Autocorrelación.....	11
2.3.6	Función de autocorrelación (FAC).....	11
2.3.7	Función de autocorrelación parcial (FACP).....	11
2.3.8	Prueba de Ljung-Box	12
2.3.9	Criterios de bondad de ajuste	12
2.3.9.1	Criterio de información de Akaike y Bayesiano	13
2.4	Análisis de series de tiempo	13
2.4.1	Modelos ARMA	13
2.4.2	Método de Box-Jenkins.....	14
2.4.3	Principio de parsimonia.....	15
2.5	Modelos para volatilidad	15
2.5.1	Modelos de media móvil exponencialmente ponderados.....	15
2.5.2	Modelos de heterocedasticidad condicional.....	16
2.5.2.1	Modelo ARCH	17
2.5.2.2	El modelo GARCH	18
2.5.2.3	Estimación de los modelos ARCH/GARCH	19
2.5.3	Extensiones de modelos GARCH	21
2.5.3.1	Modelos GARCH integrados	21
2.5.3.2	Modelo GARCH en media	21

2.5.3.3	El modelo GARCH exponencial	22
2.5.3.4	El modelo TGARCH	22
2.5.3.5	El modelo APARCH	23
2.6	Modelos GARCH multivariantes	24
2.6.1	El modelo VECH	24
2.6.2	El modelo VECH diagonal.....	26
2.6.3	El modelo de correlación constante.....	27
2.6.4	El modelo de correlación condicional dinámica	27
3.	Metodología	29
3.1	Trabajo previo con la serie	29
3.2	Identificación, estimación y evaluación del modelo ARIMA	29
3.3	Evaluación de presencia de heterocedasticidad	29
3.4	Identificación del modelo ARCH/GARCH.	30
3.5	Estimación de parámetros del modelo ARCH/GARCH	30
3.6	Evaluación del modelo ARCH/GARCH	30
3.7	Predicción de la volatilidad	30
4.	Resultados	31
4.1.	Modelamiento univariante	31
4.1.1	Análisis y trabajo previo de la serie	31
4.1.2	Identificación del modelo ARMA.....	34
4.1.3	Efectos ARCH.....	35
4.1.4	Identificación de modelo ARCH/GARCH.....	36
4.1.5	Estimación de modelos.....	37
4.1.6	Validación	40
4.1.7	Pronóstico.....	42

4.1.8	Resultados del modelamiento.....	44
4.2	Modelamiento multivariante	46
4.2.1	Estimación de parámetros	48
4.2.2	Pronóstico.....	49
5.	Discusión de resultados	55
6.	Conclusiones	57
6.1	Sumario.....	57
6.2	Conclusiones.....	57
7.	Referencias.....	59
8.	Anexos.....	61
8.1	Anexo 1: Gráfico serie de tiempo acciones tecnológicas	61
8.2	Anexo 2: Histograma de residuos estandarizados luego de ajuste GARCH.....	63
8.3	Anexo 3: Pronósticos de volatilidad para enero de 2022.....	65
8.4	Anexo 4: Gráficos de pronósticos de volatilidad de ajuste GARCH.....	66
8.5	Anexo 5: Gráficos de comparación de pronósticos.....	69
8.6	Anexo 6: Gráficos de volatilidad condicional vs valor absoluto de retornos	73
8.7	Anexo 7: Pronóstico de volatilidad 30 días.....	74
8.8	Anexo 8: Pronóstico de covarianza condicional 30 días.....	75
8.9	Anexo 9: Pronóstico de matrices de varianza – covarianza condicional	77
8.10	Anexo 10: Pronóstico estático ajuste C – GARCH(1,1) para indicadores bursátiles..	81
9.	Resumen FI.....	82

Índice de tablas

Tabla 4.1: Resumen estadístico para retornos R_t	33
Tabla 4.2: Estimación de parámetros para modelo AR(1).....	35
Tabla 4.3: Estimación de parámetros para modelo ARMA(1,1).....	35
Tabla 4.4: Estimación de parámetros para modelo ARMA(1,0) - GARCH(1,1).....	37
Tabla 4.5: Estimación de parámetros para modelo ARMA(1,0) - EGARCH(1,1).....	38
Tabla 4.6: Estimación de parámetros para modelo ARMA(1,0) - EGARCH(1,1).....	38
Tabla 4.7: Estimación de parámetros para modelo ARMA(1,0) - APARCH(1,1).....	38
Tabla 4.8: Estimación de parámetros para modelo ARMA(1,0) – GARCH – M(1,1).....	39
Tabla 4.9: Comparación de criterios de información de modelos ajustados.....	39
Tabla 4.10: Resultados estimación de parámetros para modelos GARCH ajustados.....	48
Tabla 4.11: Resultados estimación de parámetros para modelo DCC ajustado.....	49
Tabla 8.1: Gráficos de series de tiempo de acciones tecnológicas trabajadas.....	62
Tabla 8.2: Gráficos de histogramas de residuos estandarizados para cada serie estudiada.....	64
Tabla 8.3: Pronóstico dinámico para volatilidad diaria de series estudiadas para enero de 2022.....	65
Tabla 8.4: Gráficos de pronósticos para volatilidad diaria de series estudiadas para enero de 2022.	68
Tabla 8.5: Pronóstico dinámico de matriz de varianza – covarianza condicional de los retornos del índice S&P500 y los retornos de Nvidia para enero de 2022.....	77
Tabla 8.6: Pronóstico dinámico de matriz de varianza – covarianza condicional de los retornos del índice S&P500 y los retornos de Meta para enero de 2022.....	78
Tabla 8.7: Pronóstico dinámico de matriz de varianza – covarianza condicional de los retornos del índice S&P500 y los retornos de Intel para enero de 2022.....	79
Tabla 8.8: Pronóstico dinámico de matriz de varianza – covarianza condicional de los retornos del índice S&P500 y los retornos de Netflix para enero de 2022.....	80
Tabla 8.9: Pronóstico estático de volatilidad para principales índices bursátiles.....	81

Índice de figuras

Figura 4.1: Serie de precios para acción de Adobe (2018 - 2021).....	31
Figura 4.2: Serie de retornos y retornos log para Adobe.....	32
Figura 4.3: Código R para gráficas de series de tiempo.....	32
Figura 4.4: Gráfico comparativo de función de densidad empírica de retornos de Adobe frente a distribución normal	33
Figura 4.5: Código R para construcción de histogramas.....	34
Figura 4.6: FAC y FACP para retornos log de Adobe	34
Figura 4.7: Código R para construcción de gráficos de autocorrelación	35
Figura 4.8: Correlograma para residuos del ajuste ARMA realizado	36
Figura 4.9: FAC y FAP para $rt2$	37
Figura 4.10: Código R para ajuste de modelos GARCH	39
Figura 4.11: Correlograma de residuos y residuos cuadráticos estandarizados	40
Figura 4.12: Gráfico QQ para residuos estandarizados.....	41
Figura 4.13: Gráficos de pronóstico estático para retornos y volatilidad de Adobe	42
Figura 4.14: Pronóstico dinámico para retornos de Adobe	43
Figura 4.15: Pronóstico dinámico para volatilidad de Adobe.....	43
Figura 4.16: Series de tiempo de retornos log de Nvidia y S&P 500.....	47
Figura 4.0.17: Código R para prueba DCC.....	48
Figura 4.18: Código R para ajuste de modelos GARCH y posterior ajuste DCC.....	48
Figura 4.19: Pronóstico estático para varianza condicional del índice S&P 500 vs el valor absoluto de sus retornos	50
Figura 4.20: Pronóstico estático para varianza condicional de Nvidia vs el valor absoluto de sus retornos.....	50
Figura 4.21: Pronóstico estático para covarianza condicional de los retornos del índice S&P500 y los retornos de Nvidia	51
Figura 4.22: Pronóstico estático para correlación condicional de los retornos del índice S&P500 y los retornos de Nvidia	51
Figura 4.23: Código R para realizar pronóstico dinámico de modelo DCC ajustado.....	52
Figura 4.24: Pronóstico dinámico de varianza condicional de los retornos del índice S&P 500 para enero de 2022	52

Figura 4.25: Pronóstico dinámico de varianza condicional de los retornos de Nvidia para enero de 2022.....	53
Figura 4.26: Pronóstico dinámico de covarianza condicional de los retornos del índice S&P500 y los retornos de Nvidia para enero de 2022.....	53
Figura 8.1: Gráficos de comparación de pronósticos dinámicos y estáticos de volatilidad para enero de 2022	72
Figura 8.2: Pronóstico estático para varianza condicional de series estudiadas vs el valor absoluto de sus retornos.....	73
Figura 8.3: Pronóstico dinámico para varianza condicional de series estudiadas.....	74
Figura 8.4: Pronóstico dinámico de covarianza condicional de los retornos del índice S&P500 y los retornos de Meta para enero de 2022	75
Figura 8.5: Pronóstico dinámico de covarianza condicional de los retornos del índice S&P500 y los retornos de Intel para enero de 2022	75
Figura 8.6: Pronóstico dinámico de covarianza condicional de los retornos del índice S&P500 y los retornos de Netflix para enero de 2022	76

1. Introducción

La investigación desarrollada busca describir el comportamiento de la volatilidad de un conjunto de activos financieros populares en los últimos años, la importancia de mostrar y entender este comportamiento radica en que, conocer la frecuencia e intensidad de los cambios del precio de algún activo financiero ayuda a los inversionistas (sobre todo a los inversionistas minoritarios) a tomar mejores decisiones de inversión. Lo anterior cobra aún mayor relevancia considerando el aumento del interés de adultos jóvenes por la inversión en bolsa, los cuales pudieron haberse visto atraídos por los cuantiosos y constantes retornos obtenidos por este conjunto de acciones tecnológicas durante el transcurso de la pandemia por COVID – 19, donde muchas de ellas alcanzaron sus máximos. Este tipo de acciones suelen ser más volátiles que la de los sectores económicos tradicionales, lo que ha quedado en evidencia durante finales de 2021 y principios de 2022, donde el impacto de las “malas noticias” ha provocado una disminución considerable en sus precios.

En este estudio se describió el comportamiento de la volatilidad a través de los modelos autorregresivos de heterocedasticidad condicional, considerando, además, a modo de profundización en la metodología, a sus contrapartes, los modelos GARCH multivariantes, a través del modelamiento de las covarianzas condicionales mediante el modelo de correlación condicional dinámica (GARCH – DCC).

El estudio se encuentra estructurado de la siguiente forma; en el capítulo 2, se expone el marco teórico, el cual contiene toda la teoría necesaria para orientar el proceso de investigación, luego, en el capítulo 3, se muestra la metodología a seguir en el ajuste de los modelos ARCH/GARCH para cada una de las series estudiadas, en el capítulo 4, se muestra el procedimiento y los resultados del ajuste considerando como ejemplo la serie de retornos de Adobe, posteriormente se lleva a cabo el ajuste del modelo GARCH – DCC considerando como ejemplo los retornos de Nvidia. Finalmente, en el capítulo 5 y 6 se presentan la discusión de resultados y las conclusiones del estudio, respectivamente.

1.1 Justificación del estudio

1.1.1 Aumento de la inversión minoritaria en acciones tecnológicas

En los últimos años el aumento de las tecnologías y el auge de las empresas Fintech han proporcionado el contexto ideal para el crecimiento de los inversionistas minoritarios, los cuales se ven atraídos por los altos rendimientos de activos financieros relacionados principalmente a acciones de empresas de alta tecnología. Tal ha sido el desarrollo de este sector, que algunas de sus compañías características ocupan hoy los primeros puestos del ranking de las mayores empresas por capitalización, que hasta no hace mucho tiempo estaba liderado por corporaciones industriales como ExxonMobil (petrolera), General Motors (fabricante y distribuidor de automóviles) o General Electric (conglomerado de industrias). En la actualidad, el cuarteto dominante lo componen Apple, Microsoft, Amazon y Google, con permutas periódicas en sus puestos, pero con bastante diferencia respecto a los siguientes clasificados (Martín Pérez. A., 2018).

Pérez, G. C., & Suárez, G. R. (2022) mencionan que *“La crisis desencadenada a raíz de la expansión del COVID-19 en el primer trimestre de 2020 propició descensos abruptos de las cotizaciones en los mercados de renta variable nacionales e internacionales, así como repuntes de los indicadores de volatilidad, que, en algunos casos, alcanzaron máximos superiores a los registrados en la crisis financiera de 2008”* (p.10). La baja en los precios presentó una rápida recuperación en las acciones tecnológicas provocada por el confinamiento de la población por la expansión de virus, estimulando el interés de los inversores por realizar transacciones en bolsa.

La tecnología es otro factor que ha facilitado la incorporación de nuevos inversores jóvenes, los cuales han estado inundando plataformas de comercio de acciones en línea. Padraig Belton (2021) en un artículo para la BBC indica que los clientes registrados en la plataforma Freetrade (empresa de Reino Unido que ofrece servicios de negociación de acciones) se multiplicaron por síes en 2020, de estos nuevos clientes, el 60% se identifica como un inversor primerizo, con una edad promedio de 31 años. Otras plataformas como Robinhood y eToro sumaron 3 y 5 millones de usuarios respectivamente, correspondiendo en aumentos de un 30 y 40% en la cantidad de usuarios en cada plataforma.

1.1.2 Mercado tecnológico

El término de “nueva economía” suele utilizarse para referirse a un conjunto de empresas cuyo principal activo es el conocimiento y explotación mediante el uso de las nuevas tecnologías de la

información y comunicación. La nueva economía se encuentra compuesta por empresas que han experimentado un elevado crecimiento en las últimas dos décadas y a las que actualmente se les atribuyen optimistas perspectivas de expansión futura (Martín Pérez. A., 2018).

Alonso Conde (2004) considera que la nueva economía, en su concepto más amplio “engloba a empresas de biotecnología y genética (como Amgen), microelectrónicas (por ejemplo, Intel), desarrollo de software (p. ej. Microsoft), industria de red (Cisco), tecnología móvil (Apple), y finalmente empresas de Internet y comercio electrónico (Google, Amazon, etc)” (p.81).

Muchos experimentados inversores consideran que debe moderarse la inversión en empresas de alta tecnología, manteniendo que son mercados que se encuentran sobrevalorados. Warren Buffet, uno de los inversores con mayor reputación sostiene que en materia de inversión, debe huirse de la moda y del imperativo institucional. Considerando, además, que las inversiones tecnológicas poseen un precedente de sobrevaloración que culminó en el estallido de la burbuja puntocom, deja entrever la necesidad de otorgar herramientas que permitan cuantificar el riesgo de estas inversiones (García Paramés, 2016).

Acciones tecnológicas a modelar

La cuantificación de la volatilidad se realizará sobre las series de tiempo financieras correspondiente a los precios de las acciones de las siguientes empresas tecnológicas.

- Adobe
- Alphabet
- Amazon
- Apple
- Intel
- Meta
- Microsoft
- Nvidia
- Netflix
- PayPal

Todas ellas presentan una influencia transformadora en la economía y las relaciones sociales, a través de la innovación tecnológica y modelos de negocios basados en la información. El conjunto seleccionado alberga empresas de telecomunicaciones, producción y comercialización de hardware y software, Fintech, distribución y venta por internet, servicios de streaming, y empresas con modelos de negocios basados en la publicidad.

1.2 Objetivo del estudio

1.2.1 Objetivo general

El objetivo del estudio realizado corresponde a ajustar modelos ARCH/GARCH a las series de tiempo de los precios de las acciones tecnológicas más transadas para cuantificar y proyectar el riesgo de cada uno de estos valores. Además de, profundizar en las metodologías relacionadas al ajuste de modelos autorregresivos de heterocedasticidad condicional.

1.2.2 Objetivos específicos

- Determinar el mejor modelo perteneciente a la familia ARCH/GARCH que permita cuantificar la volatilidad de cada serie financiera.
- Ajustar a las series de tiempo financieras modelos GARCH multivariantes, para modelar y pronosticar el comportamiento de las covarianzas condicionales.
- Explicar el comportamiento de la volatilidad de las series de tiempo financieras estudiadas.

2. Marco teórico

2.1 Conceptos financieros previos

El desarrollo de la investigación involucra una serie de conceptos y definiciones relacionadas al ajuste de modelos de volatilidad de series financieras, estos conceptos relacionados a las finanzas y la econometría se obtuvieron en base a una revisión bibliográfica sobre los modelos autorregresivos de heterocedasticidad condicional. A continuación, se presentan los distintos conceptos y definiciones que serán utilizados durante el desarrollo de la presente investigación.

2.1.1 Mercado financiero

Un mercado financiero o de valores corresponde a un espacio físico o virtual, a través del cual se intercambian activos financieros entre agentes económicos, definiendo así el precio de dichos activos, por lo tanto, el mercado financiero se encuentra construido por todas las personas que intercambian activos financieros. Según Elescano y Agüero (2004) el mercado de valores

“Es aquel mercado organizado para la compra y venta de activos financieros o títulos. Está compuesto por varios mercados: Mercado de capitales para la inversión a largo plazo, mercado de dinero para inversión a corto plazo, mercado primario para la emisión de títulos y mercado secundario para la compra – venta de títulos ya emitidos” (p.66).

2.1.2 Rentabilidad

La rentabilidad es la medida en la que se valoran los beneficios obtenidos por cierta cantidad de capital invertido, para el caso de la rentabilidad de las acciones, esta dependerá de la fluctuación en el precio del activo en cuestión y de los dividendos que se repartan. Para el caso particular de esta investigación se considerará la rentabilidad como la variación del precio del activo.

Según Medina y Rodríguez (2010), las variaciones en el precio de apertura y cierre de un índice son la causa de la rentabilidad, afirmando que

“Los rendimientos son prácticamente impredecibles, tienen una gran cantidad de valores extremos y los periodos de mayor agitación como los de tranquilidad están agrupados en el tiempo. Estas características a menudo se describen con exceso de curtosis y agrupamiento de la volatilidad” (p.80).

2.1.3 Retornos de acciones

Un retorno corresponde a la variación en un periodo de tiempo específico, de cualquier activo financiero, variación que determina si el inversionista gana, mantiene o pierde su capital al momento de transaccionar el activo financiero en cuestión. El análisis y ajuste de modelos de volatilidad se realiza generalmente con retornos de acciones, dado que, muchos estudios financieros priorizan el análisis de retornos por sobre los precios ya que los retornos poseen propiedades estadísticas que facilitan el manejo de la serie financiera (Campbell, Lo, and MacKinlay, 1997).

A continuación, se presentan las definiciones de retornos más importantes. Se asume que el activo financiero estudiado no paga dividendos.

2.1.4 Retorno simple para un periodo

La variación del precio del activo entre el periodo $t-1$ y t corresponde al retorno simple de ese periodo.

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} \leftrightarrow P_t = P_{t-1}(1 + R_t). \quad (2.1)$$

Por lo tanto, el retorno bruto de un periodo en específico se obtiene mediante el siguiente arreglo algebraico:

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}. \quad (2.2)$$

2.1.5 Retorno simple multiperiodo

Si se conserva el activo financiero por k periodos, el retorno obtenido en el periodo correspondido entre $t - k$ y t corresponde a un retorno bruto simple de k periodos.

$$\begin{aligned}
1 + R_t[k] &= \frac{P_t}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \times \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \times \cdots \times \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} \\
&= (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \cdots (1 + R_{t-k+1}) \\
&= \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j}).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Por lo tanto, el retorno bruto simple multiperiodo corresponde al producto de los retornos brutos simples en cada uno de los k periodos.

2.1.6 Retorno compuesto continuo

Al aplicar el logaritmo natural al retorno bruto de una acción se obtiene el retorno compuesto continuo o retorno log.

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = p_t - p_{t-1}. \tag{2.4}$$

Donde $p_t = \ln(P_t)$. Los rendimientos compuestos continuos r_t tienen algunas ventajas sobre los retornos netos simples R_t . En primer lugar, considerando retornos multiperiodos. Se tiene

$$\begin{aligned}
r_t &= \ln(1 + R_t[k]) = \ln\left[(1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \cdots (1 + R_{t-k+1})\right] \\
&= \ln(1 + R_t) + \ln(1 + R_{t-1}) + \cdots + \ln(1 + R_{t-k+1}) \\
&= r_t + r_{t-1} + \cdots + r_{t-k+1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el retorno compuesto continuo multiperiodo corresponde simplemente a la suma de los retornos compuestos continuos de un periodo involucrados. En segundo lugar, los retornos log tienen propiedades estadísticas que los hacen más manejables.

2.1.7 Distribución de los retornos

En relación a la distribución de los retornos, en el estudio financiero se suele suponer que estos son independientes e idénticamente distribuidos, siguiendo una distribución normal con media y varianza fija. El supuesto anterior conlleva una serie de dificultades, en primer lugar, una distribución normal puede tomar cualquier valor en la recta real, sin limitaciones, mientras que el menor valor que puede

tomar un retornos simple es -1 . La segunda dificultad corresponde a que, si el retornos simple R_t distribuye normal, el producto de estos retornos, es decir, el retorno simple multiperiodo, no distribuye normal. Además, empíricamente, el supuesto anterior no se respalda, ya que los retornos de activos financieros tienden a presentar exceso de curtosis.

Lo anterior generó un cambio en el supuesto, demostrando que la distribución de los retornos de los activos financieros presenta colas más pesadas por la mayor abundancia de valores extremos en comparación a la distribución normal, generando lo que se llama Leptocurtosis (curtosis mayor a 3).

2.1.8 Hechos estilizados de las series financieras de retornos

Los hechos empíricos estilizados corresponden a una serie de propiedades comunes para una gama de instrumentos, mercados y periodos de tiempo. Los resultados de muchos estudios realizados durante los últimos años indican que, si se examinan las propiedades de las series financieras desde un punto de vista estadístico, estas presentan algunas características comunes no triviales en las variaciones aleatorias de los precios de los instrumentos financieros, entre las cuales destacan las siguientes.

- Ausencia de autocorrelación lineal de los retornos de los activos financieros
- Las series de retornos suelen presentar colas pesadas, colas que se mantienen en las series temporales residuales, luego de la corrección por agrupación de volatilidad.
- Se observa asimetría entre las ganancias y las pérdidas, observando grandes disminuciones del valor de los activos financieros, pero no incrementos en la misma magnitud.
- Los retornos muestran Gaussianidad agregacional, es decir, la distribución de los retornos se parece cada vez más a una normal, a medida que se aumenta la escala de tiempo sobre la que se calculan los retornos.
- Los retornos, en cualquier escala de tiempo, muestran un alto grado de intermitencia o variabilidad.
- La volatilidad tiende a agruparse, formando clusters de alta y baja volatilidad.
- La función de autocorrelación de los retornos absolutos decae lentamente.

2.2 Volatilidad

2.2.1 Volatilidad en series de tiempo financieras

Cotidianamente se reconoce el concepto de volatilidad como las fluctuaciones observadas en algún fenómeno. Dentro del ámbito económico y financiero, se utiliza de forma formal para describir la variabilidad del componente aleatorio de los activos financieros. (T.G. Andersen et al., 2006).

De manera más precisa, la volatilidad es una medida que indica la frecuencia e intensidad de los cambios en el precio de un activo financiero, definido como la desviación estándar de este cambio en un horizonte de tiempo específico. Una característica importante de la volatilidad de los activos financieros corresponde a que esta no es observable, por ejemplo, considerando los registros de rendimientos diarios de cierta acción, la volatilidad diaria no sería directamente observable a partir de los datos porque solo existe una observación para ese día en particular. Según Tsay (2005), lo anterior mencionado provoca un problema dado que *“la inobservabilidad de la volatilidad dificulta la evaluación del desempeño del pronóstico de los modelos de heterocedasticidad condicional”* (p.98).

2.2.2 Riesgo del activo financiero

Si bien suele considerarse el riesgo de un activo financiero como un sinónimo de la volatilidad de este, esto no es del todo acertado. El riesgo comúnmente se asocia a la posibilidad de perder valor en una inversión, o en obtener bajas rentabilidades, pero el riesgo en una inversión considera aspectos más allá de las rentabilidades del activo, como puede ser, por ejemplo, la situación actual de un país, la solvencia que muestra la empresa, avance de la tecnología, etc. Según Poon y Granger (2003),

“El vínculo entre la volatilidad y el riesgo es leve; en particular, el riesgo es más frecuentemente asociado a retornos pequeños o negativos, mientras que la mayoría de las medidas de dispersión no hacen tal distinción ” (p.480).

2.2.3 Volatilidad histórica

El modelo más simple para la volatilidad es la estimación histórica. La volatilidad histórica simplemente implica calcular la varianza (o desviación estándar) de los rendimientos de la manera habitual durante algún periodo histórico, y esto se convierte en el pronóstico de volatilidad para todos los periodos futuros. La varianza media histórica (o desviación estándar) se utilizó tradicionalmente como entrada de volatilidad a los modelos de fijación de precios de opciones, aunque aún crece la evidencia que sugiere que el uso de la volatilidad predicha a partir de modelos de series temporales más sofisticados conducirá a valoraciones de opciones más precisas. La volatilidad histórica sigue

siendo útil como punto de referencia para comparar la capacidad de pronóstico de modelos de tiempo más complejos (Brooks 2019).

2.2.4 Características de la volatilidad

La volatilidad de una serie de retornos de un activo financiero cuenta con ciertas características en su comportamiento, por ejemplo, suelen producirse grupos de volatilidad, no suelen presentarse saltos de volatilidad (evoluciona de forma continua), la volatilidad no diverge al infinito (varía dentro de un rango fijo, por lo tanto, la volatilidad es a menudo estacionaria), además, suele reaccionar de forma distinta frente a un gran aumento de precios o a una gran caída en estos (Tsay ,2005).

En general, la volatilidad en activos financieros suele presentar las siguientes características:

- Exceso de curtosis
- Agrupamientos de alta o baja volatilidad, es decir, si la volatilidad es alta o baja en un periodo, suele mantener este comportamiento
- Ocasionalmente, se pueden presentar valores altos de volatilidad que se interpretan como discontinuidades en los precios
- Según información empírica de los mercados financieros, las series de volatilidades presenta comportamiento asimétrico.
- Pueden presentarse movimientos conjuntos de volatilidad, es decir, al evaluar series distintas, se puede evidenciar que los movimientos importantes de un mercado se encuentran relacionados a movimientos importantes de otro mercado.

2.2.5 Pronóstico de la volatilidad

Dado que la volatilidad asociada a una serie de tiempo financiera no es observable, la determinación de esta se debe realizar a través de procesos de estimación. La forma clásica de determinación de la volatilidad se realiza a través del cálculo de la desviación estándar de las rentabilidades de algún activo financiero en un periodo de tiempo específico, obteniendo así un valor único que representa la dispersión de los datos, pero no la evolución de esta dispersión a través del tiempo. La estimación de la volatilidad puede llevarse a cabo a través de métodos paramétricos y no paramétricos. Entre los métodos paramétricos se encuentran los basados en el cálculo de medias móviles y los que asumen un modelo para estimar la volatilidad, mientras que los métodos no paramétricos cuentan con la ventaja de necesitar muy pocas hipótesis para obtener estimaciones de la volatilidad. Medina y Rodríguez (2010).

2.2.6 Utilidades del pronóstico de volatilidad

El modelado y pronóstico de la volatilidad del mercado de valores ha sido objeto de una basta investigación empírica y teórica, la principal motivación de estas investigaciones corresponde a que la volatilidad se utiliza a menudo como una medida cruda del riesgo total de los activos financieros, siendo directamente utilizada en modelos financieros importantes como el Value at Risk y la fórmula de Black Scholes para determinar el valor presente de alguna opción financiera.

2.2.6.1 Valor en riesgo (VaR)

El valor en riesgo (VaR) es un método popular para medir los riesgos financieros, en términos generales corresponde a una estimación de las pérdidas financieras que se esperarían que surgieran de los cambios en los precios del mercado. De forma más precisa el VaR se define como la pérdida en términos monetarios que se espera que ocurra en un horizonte específico de tiempo y con un grado determinado de confianza (Brooks, 2019).

Existen muchas maneras simples de calcular el VaR, por ejemplo, es popular asumir que las pérdidas del portafolio distribuyen normal, y luego se toma el valor crítico α de la distribución normal en el nivel de confianza específico y se multiplica por la desviación estándar σ de los datos. Este método es conocido popularmente como delta normal.

$$VaR_{normal} = \sigma Z_{\alpha} \quad (2.5)$$

Este enfoque otorga el mismo peso a todas las observaciones en el periodo de la muestra utilizada para el cálculo de la desviación estándar, σ . Pero también es posible reemplazar esta desviación por una estimación o pronóstico de la volatilidad mediante un modelo paramétrico como EWMA o GARCH.

Para definir el VaR bajo un marco probabilístico Tsay (2005) supone que en un tiempo t nos encontramos interesados en el riesgo de una posición financiera para los próximos l periodos. Sea $\Delta V(l)$ el cambio en el valor de los activos en la posición financiera entre el tiempo t y $t + l$ (esta cantidad se mide en unidades monetarias y es una variable aleatoria en el tiempo t). Definimos la función de distribución acumulada (CDF) de $\Delta V(l)$ como $F_l(x)$. Se define entonces el VaR de una posición larga en el horizonte temporal con probabilidad p como

$$p = \Pr[\Delta V(l) \leq VaR] = F_l(VaR). \quad (2.6)$$

Dado que el titular de una posición financiera larga sufre una pérdida cuando $\Delta V(l) < 0$ el VaR definido en la ecuación (2.6) generalmente asume un valor negativo cuando p es pequeño. El signo negativo significa una pérdida. A partir de la definición, la probabilidad de que el titular encuentre una pérdida mayor o igual que VaR en el horizonte temporal es p .

El titular de una posición corta sufre una pérdida cuando el valor del activo aumenta, es decir. $\Delta V(l) > 0$. Para este caso, el VaR se encuentra definido como

$$p = \Pr[\Delta V(l) \geq VaR] = 1 - \Pr[\Delta V(l) < VaR] = 1 - F_l(VaR). \quad (2.7)$$

Para un p pequeño, el VaR de una posición corta normalmente asume un valor positivo. El signo positivo significa una pérdida.

Las definiciones anteriores muestran que el VaR hace referencias a la cola de la función de distribución acumulada $F_l(x)$. Para una posición larga, la cola izquierda de $F_l(x)$ es importante. Sin embargo, una posición corta se centra en la cola derecha de esta (Tsay, 2005).

2.2.6.2 La fórmula de Black and Scholes

Fue desarrollada por Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton en 1973, ganando el premio Nobel de economía en 1997 por la contribución que tuvo su modelo al estudio de las finanzas. La ecuación, basada en la teoría de procesos estocásticos, se utilizó en principio para valorar opciones que no repartían dividendos, pero con el tiempo se han desarrollado variantes del modelo que permiten valorizar todo tipo de opciones.

El modelo de Black Scholes para estimar el valor actual de una opción europea para la compra (Call) de acciones en una fecha futura se define como:

$$C = S \cdot N(d_1) - Xe^{-r\tau} \cdot N(d_2) \quad (2.8)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad (2.9)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \quad (2.10)$$

En cualquier instante de tiempo, C corresponde al valor de mercado de la opción de compra; S es el precio del valor subyacente; X es el precio de ejercicio; τ es el tiempo hasta el vencimiento; r es la tasa de interés a corto plazo, la cual es continua y constante a través del tiempo; σ^2 es la volatilidad del valor subyacente; $N(d_i)$ es la función de densidad normal acumulada evaluada en d_i .

Para cualquier intervalo de tiempo de longitud d , el retorno sobre el valor subyacente tiene una distribución normal con varianza σ_d^2 . También se asume en este modelo que no hay costos de transacción en la compra o venta de la opción o el valor subyacente, que no hay impuestos y que no hay restricciones en las ventas cortas. (MacBeth, J. D., & Merville, L. J., 1979).

2.3 Conceptos estadísticos previos

El objetivo de esta sección corresponde a presentar algunas nociones y conceptos útiles al momento de realizar análisis sobre series de tiempo. La primera de estas nociones corresponde a la identificación de una serie estacionaria. Identificar si la serie es estacionaria o no es fundamental dado que la estacionariedad o no estacionariedad de una serie puede influir en las propiedades y el comportamiento de esta.

2.3.1 Proceso estocástico

Si se considera a los datos de una serie temporal como fenómenos que evolucionan en el tiempo, los modelos adecuados a evaluar son los llamados procesos estocásticos. Según Amate (2018), un proceso estocástico se define como

“Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias indexadas por un conjunto T , que habitualmente representa el tiempo: $\{X_t, t \in T\}$. El proceso puede ser a tiempo discreto, es decir T es N o Z , o por otra parte a tiempo continuo, donde T es $[0;1)$ o R ” (p.6).

2.3.2 Proceso estrictamente estacionario

Un proceso estacionario es un proceso estocástico cuya distribución de probabilidad conjunta no cambia con el tiempo. Brooks (2019) define un proceso estrictamente estacionario aquel en el que, para todo $t_1, t_2, \dots, t_T \in Z$, todo $k \in Z$ y $T = 1, 2, \dots$

$$F_{y_{t_1} = y_{t_2}, \dots, y_{t_T}}(y_1, \dots, y_T) = F_{y_{t_1+k}, y_{t_2+k}, \dots, y_{t_T+k}}(y_1, \dots, y_T)$$

Donde F denota la función de distribución conjunta del conjunto de variables aleatorias. También se puede afirmar que la medida de probabilidad para la secuencia $\{y_t\}$ es la misma que para $\{y_{t+k}\} \forall k$. En otras palabras, una serie es estrictamente estacionaria si la distribución de sus valores sigue siendo la misma a medida que avanza el tiempo, lo que implica que la probabilidad de que y caiga dentro de un intervalo en particular es la misma ahora que en cualquier momento en el pasado o futuro (Brooks, 2019).

2.3.3 Proceso débilmente estacionario

Si una serie satisface las ecuaciones (2.11) – (2.13) para $t = 1, 2, \dots, \infty$, se dice que la serie es débilmente estacionaria

$$E(y_t) = \mu \quad (2.11)$$

$$E(y_t - \mu)(y_t - \mu) = \sigma^2 < \infty \quad (2.12)$$

$$E(y_{t_1} - \mu)(y_{t_2} - \mu) = \gamma_{t_2 - t_1}, \forall t_1, t_2 \quad (2.13)$$

Estas tres ecuaciones establecen que un proceso estacionario debe tener una media constante, una varianza constante y una estructura de autocovarianza constante, respectivamente (Brooks, 2019).

2.3.4 Proceso de ruido blanco

En términos generales, un proceso de ruido blanco es un proceso sin estructura discernible. Una definición de proceso de ruido blanco es

$$E(y_t) = \mu \quad (2.14)$$

$$var(y_t) = \sigma^2 \quad (2.15)$$

$$y_{t-r} = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } t=r \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.16)$$

Por lo tanto, un proceso de ruido blanco tiene media y varianzas constantes, y cero autocovarianzas, excepto en el retraso cero. Otra forma de establecer esta última condición sería que cada observación no está correlacionada con todos los demás valores de la secuencia (Brooks, 2019).

2.3.5 Autocorrelación

Usualmente en las series de tiempo, los valores que toma la variable en el tiempo dependen de los valores anteriores, para medir esta dependencia se puede recurrir a la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial.

2.3.6 Función de autocorrelación (FAC)

La autocorrelación mide la correlación de dos variables separadas por un periodo de k retardos. Villavicencio, J. (2010) muestra la siguiente definición para la autocorrelación

$$\rho_j = \text{corr}(X_j, X_{j-k}) = \frac{\text{cov}(X_j, X_{j-k})}{\sqrt{V(X_j)}\sqrt{V(X_{j-k})}} \quad (2.17)$$

La función anterior cumple con las siguientes propiedades

- $\rho_0 = 1$
- $-1 \leq \rho_j \leq 1$
- $\rho_j = \rho_{-j}$ (simetría)

2.3.7 Función de autocorrelación parcial (FACP)

La autocorrelación parcial también mide la correlación entre dos variables separadas por k periodos, pero en este caso, no se considera la dependencia creada por los retardos intermedios (Villavicencio, J, 2010). La función de autocorrelación parcial se define como sigue

$$\pi_j = \text{corr}(X_j, X_{j-k}/X_{j-1}, X_{j-2}, \dots, X_{j-k+1}) \quad (2.18)$$

$$\pi_j = \frac{\text{cov}(X_j - \hat{X}_j, X_{j-k} - \hat{X}_{j-k})}{\sqrt{V(X_j - \hat{X}_j)}\sqrt{V(X_{j-k} - \hat{X}_{j-k})}} \quad (2.19)$$

2.3.8 Prueba de Ljung-Box

La prueba de Ljung-Box permite probar de forma conjunta que todos los coeficientes de autocorrelación son iguales a cero, y, por lo tanto, determina si los datos distribuyen de forma independiente. La prueba está definida como

H_0 : Las autocorrelaciones son independientes

H_1 : Las autocorrelaciones no son independientes

$$LB = n(n + 2) \sum_{k=1}^m \left(\frac{\hat{\rho}_k^2}{(n - k)} \right) \sim \chi_{(m)}^2 \quad (2.20)$$

Donde n corresponde al tamaño de la muestra y m al número de retardos.

En la aplicación, si el estadístico de prueba calculado excede el valor crítico de la tabla ji cuadrada correspondiente al nivel de significancia específico, se rechaza la hipótesis nula y, por lo tanto, no todos los coeficientes de autocorrelación son iguales a cero, es decir, existe al menos un coeficiente de autocorrelación diferente de cero.

2.3.9 Criterios de bondad de ajuste

La determinación del mejor modelo en la etapa de identificación de la metodología Box-Jenkins normalmente no se realiza utilizando los gráficos de FAC y FACP. Esto dado que cuando se utilizan datos reales “desordenados”, desafortunadamente rara vez exhiben patrones simples de interpretar. Para eliminar la parte subjetiva del ajuste de modelos a través de la FAC y FACP se utiliza lo que se conoce como criterios de información. Los criterios de información involucran dos factores: un término que corresponde a una función de la suma del cuadrado de los residuos (RSS), y alguna penalización por la pérdida de grados de libertad al agregar parámetros adicionales. Por lo tanto, agregar una nueva variable o un retraso adicional a un modelo tendrá dos efectos competitivos en los criterios de información: la suma residual de cuadrados disminuirá, pero el valor del término de penalización aumentará (Brooks, 2019).

2.3.9.1 Criterio de información de Akaike y Bayesiano

Existen varios criterios de información diferentes, que varían principalmente por la rigidez del término de penalización. Entre los más populares se encuentran el criterio de información de Akaike (AIC) y el criterio de información Bayesiano (BIC), los cuales se definen a continuación

$$AIC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{2k}{T} \quad (2.21)$$

$$BIC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{k}{T} \ln T \quad (2.22)$$

Donde $\hat{\sigma}^2$ es la varianza de los residuos (Equivalente también a la suma de los cuadrados residuales dividida por el número de observaciones, T), $k = p + q + 1$ es el número total de parámetros estimados y T corresponde al tamaño de la muestra.

La comparación de modelos a través de los criterios de información se basa en que, dado que el objetivo corresponde a minimizar el valor de los criterios, agregar un término adicional reducirá el valor del criterio solo si la caída en la suma residual de cuadrados es suficiente como para superar el valor aumentado del término de penalización.

Al momento de comparar modelos no hay un criterio mejor que el otro, el BIC es fuertemente consistente (pero ineficiente) y el AIC no es consistente, pero generalmente es más eficiente. En otras palabras, el BIC entregará asintóticamente el orden correcto del modelo. Mientras que el AIC entregará en promedio un modelo demasiado grande, incluso con una cantidad infinita de datos. Por otro lado, la variación promedio en los órdenes de modelos seleccionados de diferentes muestras dentro de una población dada será mayor en el contexto del BIC que del AIC, En general, entonces, ningún criterio es definitivamente superior a otro (Brooks, 2019).

2.4 Análisis de series de tiempo

2.4.1 Modelos ARMA

Al combinar los modelos $AR(p)$ y $MA(q)$ se obtiene el modelo autorregresivo de medias móviles $ARMA(p, q)$. Este modelo establece que el valor actual de algunas series Y_t dependen linealmente de

sus valores previos más una combinación de valores actuales y previos de un término de error de ruido blanco (Brooks, 2019). El modelo puede expresarse de la siguiente forma

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \alpha_t + \theta_1 \alpha_{t-1} + \dots + \theta_q \alpha_{t-q} \quad \alpha_t \sim RB(0, \sigma^2) \quad (2.23)$$

El modelo también puede escribirse en términos del operador de retardos como sigue:

$$\begin{aligned} (1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p) Y_t &= (1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q) \\ \phi_p(L) Y_t &= \theta_q(L) \alpha_t. \end{aligned}$$

Donde $\phi_p(L)$ es el polinomio autorregresivo y $\theta_q(L)$ es el polinomio de medias móviles.

El modelo $ARMA(p, q)$ va a compartir las características de los modelos $AR(p)$ y $MA(q)$ ya que contiene ambas estructuras a la vez. El modelo $ARMA(p, q)$ tiene media cero, varianza constante y finita y una función de autocovarianzas infinita. La función de autocorrelación es infinita decreciendo rápidamente hacia cero, pero sin truncarse (González Casimiro, M. P., 2009).

Básicamente, un modelo ARMA combina las ideas de un modelo AR y MA en una forma compacta por lo que el número de parámetros usados se mantiene bajo. Para las series financieras, la posibilidad de usar modelos ARMA es bajo. Sin embargo, el concepto de modelos ARMA es muy relevante en el modelamiento de la volatilidad. De hecho, el modelo autorregresivo de heterocedasticidad condicional generalizado (GARCH), puede considerarse como un modelo ARMA (aunque no de la forma estándar) para la serie de residuos α_t^2 (Tsay, 2005).

2.4.2 Método de Box-Jenkins

Si bien los modelos ARMA ya se encontraban definidos con anterioridad, Box y Jenkins (1976) fueron los primeros en abordar la estimación de un modelo ARMA de forma sistemática. Su enfoque es práctico y pragmático, que implica tres pasos: Identificación, estimación y comprobación.

- **Identificación:** Esta etapa implica determinar el orden del modelo requerido, se utilizan procedimientos gráficos (como las gráficas de FAC y FACP) para determinar la especificación adecuada para capturar las características dinámicas de los datos.

- Estimación: En esta etapa se estiman los parámetros correspondientes a el modelo identificado en la etapa anterior. Para llevar a cabo esta estimación se puede utilizar mínimos cuadrados u otros métodos, como máxima verosimilitud, dependiendo del modelo es cuestión.
- Comprobación diagnóstica: En esta etapa se evalúa si el modelo ajustado es adecuado o no. Para llevar a cabo esta comprobación se puede realizar un sobreajuste, si el modelo ajustado es adecuado, los parámetros de este sobreajuste deberían ser no significativos estadísticamente. Otra forma de realizar esta comprobación corresponde a los diagnósticos residuales, estudiando si los residuos luego del ajuste presentan evidencia de dependencia lineal que, en caso de estar presente, indicarían que el modelo no capturó en su totalidad las características de los datos.

2.4.3 Principio de parsimonia

Por lo general, al ajustar un modelo se espera que este sea parsimonioso, es decir, se espera que el modelo sea capaz de capturar y describir el comportamiento de los datos utilizando la menor cantidad de parámetros posibles. Un modelo parsimonioso es deseable porque la suma de los cuadrados de los residuos es proporcional al número de grados de libertad. Un modelo que contiene retrasos irrelevantes de la variable o del término de error generalmente conducirá a un aumento de los errores estándar del coeficiente, dificultando la búsqueda de relaciones significativas en los datos. Los modelos con muchos parámetros pueden llegar a ajustar particularidades específicas de los datos, que no se replicarían fuera de la muestra. Por lo tanto, a pesar de que un modelo con muchos parámetros pueda tener un valor alto de R^2 , podrían entregar pronósticos muy inexactos (Brooks, 2019).

2.5 Modelos para volatilidad

La volatilidad es uno de los conceptos más importantes en las finanzas y su comportamiento y pronóstico en el mercado de valores ha sido objeto de vasta investigación empírica y teórica durante la última década. A continuación, se presentan los modelos más populares para el ajuste de la volatilidad.

2.5.1 Modelos de media móvil exponencialmente ponderados

Los modelos de media móvil exponencialmente ponderados EWMA en esencia corresponden a una extensión de los modelos de volatilidad media histórica, pero considerando que las observaciones más recientes tendrán un mayor impacto en la determinación del comportamiento de la serie y su posterior

pronóstico, es decir, bajo una especificación EWMA, la última observación tiene el mayor peso, y los pesos asociados con observaciones anteriores disminuyen exponencialmente con el tiempo. Según Brooks (2019), este enfoque, en comparación con la volatilidad media histórica, posee dos ventajas

“En primer lugar, en la práctica es probable que la volatilidad se vea más afectada por los acontecimientos recientes, que tienen más peso, que por lo acontecimientos del pasado. En segundo lugar, el efecto sobre la volatilidad de una sola observación dada disminuye a un ritmo exponencial a medida que caen las ponderaciones asociadas a los acontecimientos recientes” (p.505).

El modelo EWMA puede expresarse de varias maneras, Brooks (2019) lo define de la siguiente forma

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (r_{t-j} - \bar{r})^2 \quad (2.24)$$

Donde σ_t^2 es la estimación de la varianza para el periodo t, que también se convierte en el pronóstico de la volatilidad futura para todos los periodos, \bar{r} es el rendimiento promedio estimado sobre las observaciones y λ es el “factor de desintegración”, que determina cuanto peso se les da a las observaciones recientes frente a las más antiguas.

Vale la pena señalar dos limitaciones importantes de los modelos EWMA. Primero, es crucial recordar que cuando la suma infinita en la ecuación anterior se reemplaza con una suma finita de datos observables, los pesos de la expresión dada ahora sumarian menos de uno. En el caso de muestras pequeñas, esto podría marcar una gran diferencia en el EWMA calculado y, por lo tanto, puede ser necesaria una corrección. En segundo lugar, la mayoría de los modelos de series temporales, como GARCH, tendrán pronósticos que tienden hacia la varianza no condicional de la serie a medida que aumenta el horizonte de predicción, esta es una buena propiedad para un modelo de pronóstico de volatilidad, ya que las series tienden a converger a su nivel promedio. Este comportamiento no lo captura un modelo EWMA.

2.5.2 Modelos de heterocedasticidad condicional

La importancia de la volatilidad en el mercado de activos financieros ha provocado que en los últimos años surjan una serie de modelos que buscan capturar y pronosticar su comportamiento, entre estos

modelos se destaca el modelo de heterocedasticidad condicional (ARCH) propuesto por Engle (1982), el modelo ARCH generalizado de Bollerslev (1986) y el modelo GARCH exponencial de Nelson (1991). Junto a los modelos anteriores, se han propuesto una serie de extensiones y alternativas que buscan subsanar desventajas de sus predecesores, adaptándose a características de la serie de tiempo financiera estudiada.

2.5.2.1 Modelo ARCH

Los modelos de la familia ARCH nacen de la necesidad de modelar los episodios de agrupamiento temporal de la volatilidad, episodios que suelen observarse en las series de retornos de activos financieros.

El primer modelo que proporciona un marco sistemático para el modelado de volatilidad es el modelo ARCH de Engle (1982). La idea básica de los modelos ARCH es que (a) el choque en el rendimiento de un activo no está correlacionado en serie, pero es dependiente, y (b) la dependencia de a_t puede describirse mediante una función cuadrática simple de sus valores rezagados (Tsay, 2005). Específicamente, un modelo ARCH(m) asume que

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \quad (2.25)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m a_{t-1}^2 \quad (2.26)$$

Donde $\{\epsilon_t\}$ es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) con media cero y varianza 1, $\alpha_0 > 0$, y $\alpha_i > 0$, para $i > 0$. El coeficiente α_i debe satisfacer algunas condiciones regulares para asegurar que la varianza no condicional de a_t es finita. En la práctica, usualmente se asume que ϵ_t sigue una distribución normal, t-Student estandarizada o una distribución de errores generalizada.

La simplicidad en la formulación de la ecuación de la media a_t se debe a la escasa estructura dinámica que se observa en los datos de las series de retornos de activos financieros. Si es adecuado, se pueden incorporar variables que expliquen el comportamiento de a_t .

Debilidades de los modelos ARCH

Si bien los modelos ARCH son una herramienta importante, que posee una serie de ventajas sobre otros modelos, como por ejemplo el modelo EWMA, también tiene debilidades, entre las que destacan las siguientes:

- Dado que la volatilidad en el modelo ARCH depende del cuadrado de los shocks pasados, el modelo asume que los shocks positivos y negativos tienen el mismo efecto, lo cual, en general no sucede, por el efecto asimetría.
- El modelo ARCH es restrictivo, dado que para que la serie tenga un cuarto momento finito, se restringe el parámetro α_1^2 al intervalo $[0, 1/3]$. Esta restricción se vuelve conflictiva para los modelos ARCH de orden superior, limitando la capacidad del modelo ARCH para la captura de innovaciones gaussianas con exceso de curtosis.
- El modelo ARCH no entrega información que permita conocer las causas de las variaciones de la serie de tiempo, se limita a entregar una mecánica forma de describir la varianza condicional.
- Es posible que los modelos ARCH sobre predigan la volatilidad, dado que reaccionan de forma lenta a grandes shocks aislados sobre la serie de retornos.

2.5.2.2 El modelo GARCH

Si bien el modelo ARCH es sencillo, frecuentemente requiere una estructura de retardos de la varianza condicional muy larga para describir adecuadamente el comportamiento de la volatilidad de los retornos de algún activo financiero. Para evitar esto es necesario buscar modelos alternativos.

Bollerslev (1986) propuso una extensión útil conocida como ARCH generalizado o modelo GARCH, el cual permite capturar el comportamiento de varios rezagos a través de una estructura más flexible. Para una serie de retornos r_t , se considera a $a_t = r_t - \mu_t$ como la innovación en el tiempo t . Luego, a_t sigue un modelo GARCH(m, s) si

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \quad (2.27)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2. \quad (2.28)$$

Donde nuevamente $\{\epsilon_t\}$ corresponde a una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media 0 y varianza 1, $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$. De lo anterior se desprende que $\alpha_i = 0$ para $i > m$ y $\beta_j = 0$ para $j > s$. Esta última restricción en $\alpha_i + \beta_i$ implica que la varianza no condicional de a_t es finita, mientras que su varianza condicional σ_t^2 evoluciona con el tiempo. Como antes, a menudo se asume que ϵ_t sigue una distribución normal, t-Student estandarizada o una distribución de error generalizada (Tsay, 2005).

Los modelos GARCH solucionan uno de los problemas de los modelos ARCH, pero sigue manteniendo la mayor parte de sus debilidades, como el no considerar el efecto asimétrico de los shocks positivos y negativos.

La varianza no condicional bajo un modelo GARCH

La varianza condicional cambia, pero la varianza no condicional es contante y se encuentra dada por

$$E(a_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i)} \quad (2.29)$$

Siempre y cuando $\sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$. Para el caso contrario, la varianza no condicional no está definida, provocando una “no estacionariedad en varianza”. Esta no estacionariedad en la varianza no tiene una fuerte motivación teórica para su existencia, como sería el caso de la no estacionariedad en la media (por ejemplo, de una serie de precios). Además, un modelo GARCH cuyos coeficientes implican no estacionariedad en la varianza tendría algunas propiedades altamente indeseables, que pueden dificultar, por ejemplo, los pronósticos realizados con estos modelos (Brooks, 2019).

2.5.2.3 Estimación de los modelos ARCH/GARCH

Dado que los modelos en cuestión ya no poseen la forma lineal habitual, no se puede utilizar mínimos cuadrados ordinarios para estimar los parámetros de un modelo GARCH, dado que, mínimos cuadrados ordinarios minimiza la suma de residuos al cuadrado, la cual depende solo de los parámetros de la ecuación de la media condicional, no considerando los parámetros de la varianza condicional. Para estimar los modelos de la familia GARCH se recurre a la técnica conocida como “máxima verosimilitud”, en la cual se buscan los valores más probables para los parámetros, dados los datos reales.

La estimación de los parámetros se lleva a cabo formando una función de verosimilitud, la cual corresponderá a una función multiplicativa de los datos reales, por lo tanto, para facilitar el manejo de la maximización se toma su logaritmo, convirtiendo la función anterior en una función adictiva de los datos de la muestra, la cual es llamada función de log verosimilitud.

Brooks (2019), contextualiza el ajuste de parámetros a los modelos GARCH, en el cual se considera el modelo con la siguiente forma $y_t = \mu + \phi y_{t-1} + u_t, u_t \sim N(0, \sigma_t^2)$, de modo que la varianza de los errores ha pasado de ser asumida contante, σ^2 , a variable en el tiempo, σ_t^2 , con la ecuación para la varianza condicional como la mostrada anteriormente. La función de log verosimilitud relevante para un modelo GARCH se puede construir de la misma manera que para el caso homocedástico reemplazando.

$$\frac{T}{2} \ln(\sigma^2)$$

Por su equivalente para una varianza variable en el tiempo

$$\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(\sigma_t^2)$$

A través de los principios expuestos, la función de log-verosimilitud para el modelo anterior (con varianza condicional variable en el tiempo y errores normalmente distribuidos) se muestra a continuación

$$L = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{(y_t - \mu - \phi y_{t-1})^2}{\sigma_t^2}. \quad (2.30)$$

Esencialmente, todos los métodos funcionan buscando sobre espacios de parámetros hasta que encuentran valores de parámetros que maximizan la función de log-verosimilitud. Sin embargo, como suele ser el caso con los modelos no lineales como GARCH, la función de log verosimilitud puede tener muchos máximos locales, de modo que diferentes algoritmos podrían encontrar diferentes máximos. Considerar la idea anterior es importante para llegar a una estimación de parámetros correcta y no caer en estos óptimos locales (Brooks, 2019).

2.5.3 Extensiones de modelos GARCH

2.5.3.1 Modelos GARCH integrados

Los modelos IGARCH corresponden a modelos GARCH de raíz unitaria, esto quiere decir que $\sum(\alpha_i + \beta_i) = 1$.

Un modelo IGARCH(1,1) posee la siguiente estructura

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \quad (2.31)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 - \beta_1) a_{t-1}^2 \quad (2.32)$$

Donde $\{\epsilon_t\}$ corresponde a una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media 0 y varianza 1, y $0 < \beta_1 < 1$.

La varianza no condicional de a_t , y, por lo tanto, la de r_t , no se encuentra definida para el modelo IGARCH(1,1). Esto parece difícil de justificar para una serie de retornos. Desde un punto de vista teórico, el fenómeno IGARCH podría ser causado por cambios ocasionales de nivel en la volatilidad. La causa real de la persistencia en la volatilidad merece una investigación cuidadosa (Tsay, 2005).

La formulación del modelo IGARCH hace que los shocks en la varianza condicional sean persistentes, a diferencia de lo que ocurre en un modelo GARCH(1,1).

2.5.3.2 Modelo GARCH en media

En la mayoría de los modelos utilizados en finanzas se supone que los inversores deben ser recompensados por asumir riesgos adicionales mediante la obtención de un mayor rendimiento. Una forma de poner en práctica este concepto es modelar el retorno de un valor de tal forma que dependa en parte de su riesgo.

Por lo tanto, el retorno de un valor puede depender de su volatilidad. Para modelar este fenómeno se puede considerar el modelo GARCH-M, donde "M" significa GARCH en media. Un modelo simple GARCH(1,1) – M se expresa como

$$r_t = \mu + c\sigma_t^2 + a_t \quad (2.33)$$

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \quad (2.34)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (2.35)$$

Donde μ y c son constantes. Si el parámetro c es positivo y estadísticamente significativo, entonces el aumento del riesgo, dado por un aumento en la varianza condicional, conduce a un aumento en el rendimiento medio. Por lo tanto, c puede interpretarse como un premio por riesgo. En algunas aplicaciones empíricas, el término de varianza condicional σ_{t-1}^2 aparece directamente en la ecuación de la media condicional, en lugar de en forma de raíz cuadrada, σ_{t-1} . Además, en algunas aplicaciones el término es contemporáneo σ_t^2 , en lugar de rezagado (Brooks, 2019).

2.5.3.3 El modelo GARCH exponencial

Los modelos ARCH y GARCH antes mencionados no consideran la relación negativa que existe entre los retornos y las variaciones de su volatilidad, esto sucede porque estos modelos solo consideran la magnitud y no consideran los signos en cada uno de los retardos. Para dar solución a este problema, surgieron los modelos EGARCH.

El modelo GARCH exponencial fue propuesto por Nelson (1991). Hay varias maneras de expresar la ecuación de la varianza condicional, una de ellas se encuentra dada por

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \gamma \frac{a_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} + \alpha \left[\frac{|a_{t-1}|}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \quad (2.36)$$

El modelo posee varias ventajas en comparación a la especificación pura del modelo GARCH. Primero, dado que el modelo es $\ln(\sigma_t^2)$, entonces incluso si los parámetros son negativos, σ_t^2 será positivo. Por lo tanto, no hay necesidad de imponer artificialmente restricciones de no negatividad a los parámetros del modelo. En segundo lugar, las asimetrías están permitidas bajo la formulación de EGARCH, ya que, si la relación entre volatilidad y rendimientos es negativa, γ , será negativa (Brooks, 2019).

2.5.3.4 El modelo TGARCH

Otro modelo de volatilidad comúnmente utilizado para manejar los efectos asimétricos es el modelo Threshold GARCH o modelo TGARCH. El modelo tiene la siguiente forma

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^s (\alpha_i + \gamma_i N_{t-i}) a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^m \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (2.37)$$

Donde N_{t-i} es un indicador para la negatividad de a_{t-i} , es decir,

$$N_{t-i} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{t-i} < 0, \\ 0 & \text{si } a_{t-i} \geq 0, \end{cases}$$

Además, α_i, γ_i y β_j son parámetros no negativos que satisfacen condiciones similares a las de los modelos GARCH. Del modelo, se ve puede ver que un a_{t-i} positivo contribuye en $\alpha_i a_{t-i}^2$ a σ_t^2 , mientras que un a_{t-i} negativo tiene un impacto mayor sobre la varianza condicional, equivalente a $(\alpha_i + \gamma_i) a_{t-i}^2$ con $\gamma_i > 0$. El modelo utiliza el cero como umbral para separar los impactos de los choques pasados, pero también se puede ocupar otros valores de umbral (Tsay, 2005). El modelo también se llama GJR porque Glosten et al. (1993) propusieron esencialmente el mismo modelo.

2.5.3.5 El modelo APARCH

El modelo ARCH asimétrico en potencia (APARCH) propuesto por Ding, Granger y Engle (1993) es una de las variaciones de los modelos ARCH tradicionales más populares, debido a que se encuentra construido con base en al menos otras siete especificaciones ARCH alternativas. Además, se ha encontrado en el modelo APARCH particular relevancia para ciertas aplicaciones.

El modelo APARCH se puede definir como

$$r_t = \mu + a_t \quad (2.38)$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim NID(0,1) \quad (2.39)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|a_{t-1}| - \gamma_i a_{t-1})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-1}^\delta \quad (2.40)$$

Donde $\omega, \alpha_i, \gamma_i, \beta_j$ y δ son los parámetros a estimar. δ ($\delta > 0$) desempeña el papel de una transformación de Box-Cox de la desviación estándar condicional σ_t , mientras que los γ_i representan el llamado efecto apalancamiento. Un valor positivo de γ_i significa que los shocks negativos pasados tienen un impacto más profundo en la actualidad que los shocks positivos. Este modelo combina la

flexibilidad de un exponente variable con el coeficiente de asimetría, considerando así el efecto apalancamiento (Laurent, 2004).

2.6 Modelos GARCH multivariantes

Como ya ha sido mencionado, la volatilidad de los mercados financieros es una de las variables más importantes para los inversionistas al momento de tomar una decisión de inversión, volatilidad que es usualmente modelada por modelos GARCH univariantes. Sin embargo, lo que permite al inversionista tomar una decisión es la comparación de los mercados, y realizar esta comparación a través de modelos univariantes puede ser ineficiente. Una solución a lo planteado anteriormente corresponde al modelamiento conjunto del comportamiento de la volatilidad a través de modelos multivariantes.

Los modelos GARCH multivariantes son en espíritu muy similares a sus contrapartes univariantes, excepto que los primeros también especifican ecuaciones sobre cómo se mueven las covarianzas a lo largo del tiempo y, por lo tanto, por su naturaleza son inherentemente más complejos de especificar y estimar. Se han propuesto varias formulaciones diferentes de GARCH multivariante en la literatura, las más populares son el VECH, el VECH diagonal y los modelos BEKK. En cada caso, hay N activos, cuyas variaciones de rendimiento y covarianzas deben ser modeladas (Brooks, 2019).

2.6.1 El modelo VECH

Según Brooks (2019) la ecuación de la media condicional, al igual que con los modelos GARCH univariantes, puede parametrizarse de cualquier manera deseada, aunque vale la pena señalar que, dado que las varianzas condicionales se miden sobre la media, es posible que la especificación errónea de esta última implique una especificación errónea de la primera. Para introducir alguna notación, supongamos, que $y_t(y_{1t}y_{2t} \dots y_{Nt})$, es un vector $N \times 1$ de observaciones de series temporales, C es un vector columna $N(N + 1)/2$ de varianza condicional e intercepciones de covarianza, y A y B son matrices de parámetros cuadradas de orden $N(N + 1)/2$. Una especificación común del modelo VECH, propuesta por Bollerslev, Engle y Wooldridge (1988), es

$$VECH(H_t) = C + AVECH(\mathbb{E}_{t-1}\mathbb{E}'_{t-1}) + BVECH(H_{t-1}) \quad (2.41)$$

$$\mathbb{E}_t|\psi_{t-1} \sim N(0, H_t)$$

Donde H_t es una matriz de varianza – covarianza condicional $N \times N$, Ξ_t es un vector de innovación (perturbación) $N \times 1$, ψ_{t-1} representa el conjunto de información en el tiempo $t - 1$, y $VECH(\cdot)$ denota el operador de apilamiento de columnas aplicado a la parte superior de la matriz simétrica. En el caso bivariado (es decir, $N = 2$), C será un vector de 3×1 parámetros, y A y B serán matrices de 3×3 parámetros.

La matriz de varianza no condicional para el VECH estará dada por $C[I - A - B]^{-1}$, donde I es una matriz de identidad de orden $N(N + 1)/2$. La estacionariedad del modelo VECH requiere que los valores propios de $[A + B]$ sean todos menores que uno en valor absoluto.

Con el fin de obtener una mejor comprensión de cómo funciona el modelo VECH, los elementos para $N=2$ se escriben a continuación

$$H_t = \begin{bmatrix} h_{11t} & h_{12t} \\ h_{21t} & h_{22t} \end{bmatrix}, \Xi_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

El operador VECH toma la porción "triangular superior" de una matriz y apila cada elemento en un vector con una sola columna. Por ejemplo, en el caso de $VECH(H_t)$, esto se convierte en

$$VECH(H_t) = \begin{bmatrix} h_{11t} \\ h_{22t} \\ h_{12t} \end{bmatrix}$$

donde h_{iit} representa las varianzas condicionales en el tiempo t de la serie de rendimiento de dos activos ($i = 1, 2$) utilizada en el modelo, y h_{ijt} ($i \neq j$) representa las covarianzas condicionales entre los rendimientos de los activos. En el caso de $VECH(\Xi_t \Xi_t')$, se puede expresar como

$$\begin{aligned} VECH(\Xi_t \Xi_t') &= VECH \left(\begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t} & u_{2t} \end{bmatrix} \right) \\ &= VECH \begin{pmatrix} u_{1t}^2 & u_{1t}u_{2t} \\ u_{1t}u_{2t} & u_{2t}^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{1t}^2 \\ u_{2t}^2 \\ u_{1t}u_{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El modelo VECH extendido está dado por

$$h_{11t} = c_{11} + a_{11}u_{1t-1}^2 + a_{12}u_{2t-1}^2 + a_{13}u_{1t-1}u_{2t-1} + b_{11}h_{11t-1} + b_{12}h_{22t-1} + b_{13}h_{12t-1}$$

$$h_{22t} = c_{21} + a_{21}u_{1t-1}^2 + a_{22}u_{2t-1}^2 + a_{23}u_{1t-1}u_{2t-1} + b_{21}h_{11t-1} + b_{22}h_{22t-1} + b_{23}h_{12t-1}$$

$$h_{12t} = c_{31} + a_{31}u_{1t-1}^2 + a_{32}u_{2t-1}^2 + a_{33}u_{1t-1}u_{2t-1} + b_{31}h_{11t-1} + b_{32}h_{22t-1} + b_{33}h_{12t-1}$$

Por lo tanto, está claro que las varianzas y las covarianzas condicionales dependen de los valores rezagados de todas las varianzas y covarianzas condicionales entre todos los rendimientos de activos de la serie, así como de los errores al cuadrado rezagados y los productos cruzados de error. Este modelo sin restricciones está altamente parametrizado y es difícil de estimar (Brooks, 2019).

2.6.2 El modelo VECH diagonal

A medida que aumenta el número de activos empleados, la estimación del modelo VECH puede volverse rápidamente inviable. Por lo tanto, la matriz de varianza-covarianza condicional del modelo VECH se ha restringido a la forma desarrollada por Bollerslev, Engle y Wooldridge (1988), en la que se supone que A y B son diagonales. Esta restricción implica que no hay efectos de contagio de volatilidad directa de una serie a otra, lo que reduce considerablemente el número de parámetros a estimar, a 9 en el caso bivariante (ahora A y B tienen tres elementos cada uno) y 18 para un sistema trivariante (es decir, si $N = 3$). El modelo, conocido como VECH diagonal, ahora se caracteriza por

$$h_{ij,t} = \omega_{ij} + \alpha_{ij}u_{i,t-1}u_{j,t-1} + \beta_{ij}h_{ij,t-1} \quad \text{para } i, j = 1, 2 \quad (2.42)$$

Donde ω_{ij} , α_{ij} y β_{ij} son parámetros.

Según Brooks (2019), “Una matriz de varianza-covarianza o correlación siempre debe ser ‘semidefinida positiva’, y en el caso de que todos los rendimientos en una serie particular sean todos iguales, de modo que su varianza sea cero, entonces la matriz será definida positiva” (p.552). Entre otras cosas, esto significa que la matriz de varianza-covarianza tendrá todos los números positivos en la diagonal principal, y será simétrica sobre esta diagonal principal.

2.6.3 El modelo de correlación constante

Un método alternativo para reducir el número de parámetros en el marco MGARCH es definir que las correlaciones entre las perturbaciones, ε_t , (o equivalentemente entre las variables observadas, y_t) se fijen a través del tiempo. Así, aunque las covarianzas condicionales no son fijas, están ligadas a las varianzas, tal como es propuesto en el modelo de correlación condicional constante (CCC) planteado por Bollerslev (1990). Además, las varianzas condicionales en el modelo de correlación fija son idénticas a las de un conjunto de especificaciones GARCH univariantes (aunque se estiman conjuntamente).

$$h_{ii,t} = c_i + a_i \varepsilon_{i,t-1}^2 + b_i h_{ii,t-1}, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.43)$$

Los elementos fuera de diagonal de H_t , $h_{ij,t}$ ($i \neq j$), se definen indirectamente a través de las correlaciones, denotadas ρ_{ij}

$$h_{ij,t} = \rho_{ij} h_{ii,t}^{1/2} h_{jj,t}^{1/2}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i < j \quad (2.44)$$

¿Es empíricamente plausible suponer que las correlaciones son constantes a través del tiempo? Se han desarrollado varias pruebas de este supuesto, las conclusiones a las que se llega parecen depender de la prueba que se utilice, pero parece haber pruebas no despreciables contra las correlaciones constantes, particularmente en el contexto de los rendimientos de las acciones (Brooks, 2019).

2.6.4 El modelo de correlación condicional dinámica

El modelo de correlación condicional dinámica (DCC) está relacionado a la formulación del modelo CCC descrito anteriormente, pero en este se permite que las correlaciones varíen con el tiempo. Considere una innovación k – dimensional a_t de la serie de retornos z_t . Sea $\Sigma_t = [\sigma_{ij,t}]$ la matriz de volatilidad de a_t dado F_{t-1} (correspondiente a la información disponible en el instante $t - 1$). La matriz de correlación condicional se define como

$$\rho_t = D_t^{-1} \Sigma_t D_t^{-1} \quad (2.45)$$

Donde $D_t = \text{diag}\{\sigma_{11}^{1/2}, \dots, \sigma_{kk}^{1/2}\}$ es una matriz diagonal que contiene las desviaciones estándar condicionales (es decir, las raíces cuadradas de las varianzas condicionales de las estimaciones

univariadas del modelo GARCH en cada una de las series individuales N). El modelo puede estimarse en una sola etapa utilizando máxima verosimilitud, aunque esto seguirá siendo un ejercicio difícil en el contexto de grandes cantidades de parámetros. En consecuencia, Engle aboga por un procedimiento de estimación de dos etapas en el que cada variable en el sistema se modela primero por separado como un proceso GARCH univariante. Luego, en la segunda etapa, la probabilidad condicional se maximiza con respecto a cualquier parámetro desconocido en la matriz de correlación (Brooks, 2019).

Considere $\eta_t = (\eta_{1t}, \dots, \eta_{kt})'$ es un vector de innovaciones estandarizados, donde $\eta_{it} = a_{it}/\sqrt{\sigma_{ii,t}}$. Luego, ρ_t corresponde a la matriz de correlaciones de η_t . El modelo DCC propuesto por Engle (2002) se define como

$$Q_t = (1 - \theta_1 - \theta_2)\bar{Q} + \theta_1 Q_{t-1} + \theta_2 \eta_{t-1} \eta'_{t-1}, \quad (2.46)$$

$$\rho_t = J_t Q_t J_t \quad (2.47)$$

Donde \bar{Q} es la matriz de covarianzas no condicionales de η_t . θ_i son números reales no negativos tal que $0 < \theta_1 + \theta_2 < 1$, y $J_t = \text{diag}\{q_{11}^{1/2}, \dots, q_{kk}^{1/2}\}$, donde $q_{ii,t}$ denota el elemento (i, i) de Q_t , la cual a su vez corresponde a la matriz de varianza – covarianza definida positiva simétrica de $N \times N$.

3. Metodología

En base a la serie de pasos propuestos por Box-Jenkins para el ajuste de modelos ARIMA a una serie de datos, Elescano y Agüero (2004) propone una serie de pasos que sirven de guía para el análisis de datos y ajuste de modelos de heterocedasticidad condicional. El ajuste a llevar a cabo para el modelamiento de la volatilidad de las acciones tecnológicas se basará en esta serie de pasos.

3.1 Trabajo previo con la serie

El ajuste de modelos ARCH/GARCH para el análisis del comportamiento de la volatilidad de una serie de retornos requiere que la serie pase por un tratamiento previo, en el cual se puedan detectar datos faltantes, deflactar la serie, considerar y ajustar el pago de dividendos, etc.

3.2 Identificación, estimación y evaluación del modelo ARIMA

Se intentará identificar un modelo ARMA a partir del análisis de la función de autocorrelación y autocorrelación parcial. Una vez identificado el modelo, se procede a la estimación de parámetros y posteriormente se realiza la evaluación de bondad de ajuste del modelo. El proceso se itera siguiendo el método Box-Jenkins hasta encontrar un modelo ARMA adecuado.

3.3 Evaluación de presencia de heterocedasticidad

La evaluación de presencia de heteroscedasticidad se puede llevar a cabo de distintas maneras

- A través de la función de autocorrelación de los cuadrados de los residuos del ajuste del modelo ARMA. Si se observa algún patrón, podría evidenciar la presencia de heterocedasticidad condicional.
- Prueba de hipótesis de Ljung-Box de los cuadrados de los residuos del ajuste del modelo ARMA. Identificar autocorrelaciones significativas implicaría presencia de heterocedasticidad condicional.
- Prueba de multiplicadores de Lagrange.

En caso de identificarse la presencia de heterocedasticidad condicional, la siguiente tarea corresponde a identificar el orden del proceso ARCH o GARCH para los residuos al cuadrado.

3.4 Identificación del modelo ARCH/GARCH.

Al igual que para la identificación de modelos ARMA, se puede utilizar la función de autocorrelación y autocorrelación parcial de la serie de residuos al cuadrado para identificar el orden del modelo ARCH/GARCH a ajustar.

Usualmente, la identificación del orden del modelo adecuado se dificulta mediante inspección visual de los gráficos FAC y FACP, por lo que se recomienda que se pruebe el ajuste de modelos de heterocedasticidad condicional de orden bajo, y luego escoger el mejor modelo a través de los criterios de información, tales como el criterio de información de Akaike y el criterio de información Bayesiano.

3.5 Estimación de parámetros del modelo ARCH/GARCH

La estimación de los parámetros de los modelos ARCH y GARCH será diferente dependiendo del modelo que se haya identificado: (i) sobre los residuos del ajuste de un ARMA para los retornos o (ii) directamente sobre los cuadrados de los retornos.

3.6 Evaluación del modelo ARCH/GARCH

Una vez estimados los parámetros, se evaluará la bondad de ajuste y la adecuación del modelo ajustado. Un modelo estimado es válido si cumple con los siguientes requisitos:

1. Los residuos del ajuste se comportan aproximadamente como un proceso de ruido blanco gaussiano
2. No se observa heterocedasticidad condicional en los residuos
3. El ajuste del modelo es estadísticamente significativo
4. Los coeficientes del modelo estimados son significativos y están débilmente correlacionados

3.7 Predicción de la volatilidad

El objetivo de identificar, estimar y evaluar un modelo de heterocedasticidad condicional consiste en encontrar un modelo consistente, que sea capaz de capturar la información más importante de la serie y de esta forma obtener buenas predicciones de la volatilidad de los retornos. Finalmente, el mejor modelo ajustado corresponderá a aquel que sea capaz de producir el menor error de pronóstico.

4. Resultados

4.1. Modelamiento univariante

4.1.1 Análisis y trabajo previo de la serie

El ajuste de los modelos de heterocedasticidad condicional se realiza considerando la metodología presentada anteriormente, se ajustará el mejor modelo a cada una de las diez series estudiadas. A continuación, a modo de ejemplificación, se presenta el proceso en detalle para el caso de los retornos diarios de Adobe en el periodo comprendido entre enero de 2018 y diciembre de 2021.

El caso Adobe

La serie de tiempo financiera se construyó en base a los datos recopilados desde la página web [investing.com](https://www.investing.com), la cual corresponde a una de las tres plataformas financieras más visitadas a nivel global. El gráfico de la evolución del precio de la acción de Adobe se presenta a continuación.

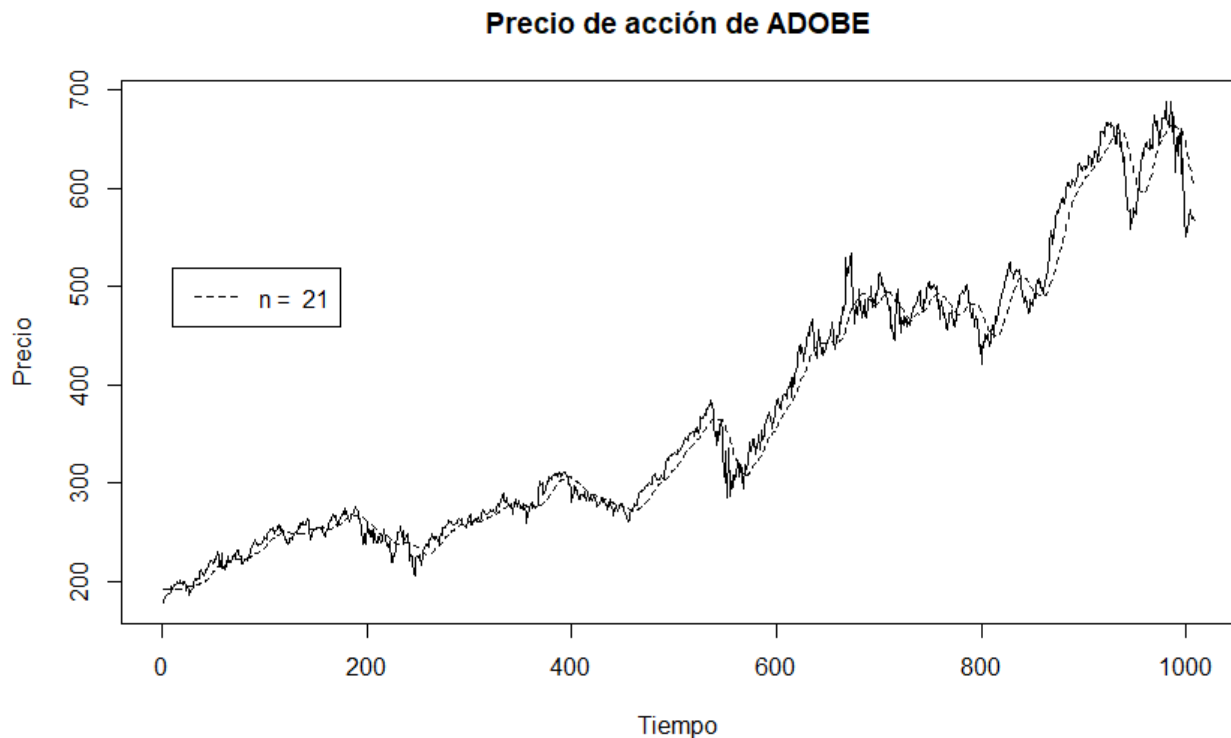


Figura 4.1: Serie de precios para acción de Adobe (2018 - 2021)
Fuente: Elaboración propia en base a información recopilada de [investing.com](https://www.investing.com)

En base a los precios de la acción, se construye la serie de retornos diarios R_t , para posteriormente construir la serie de retornos log diarios r_t , que como fue antes mencionado, posee ciertas características que los hacen más manejables.

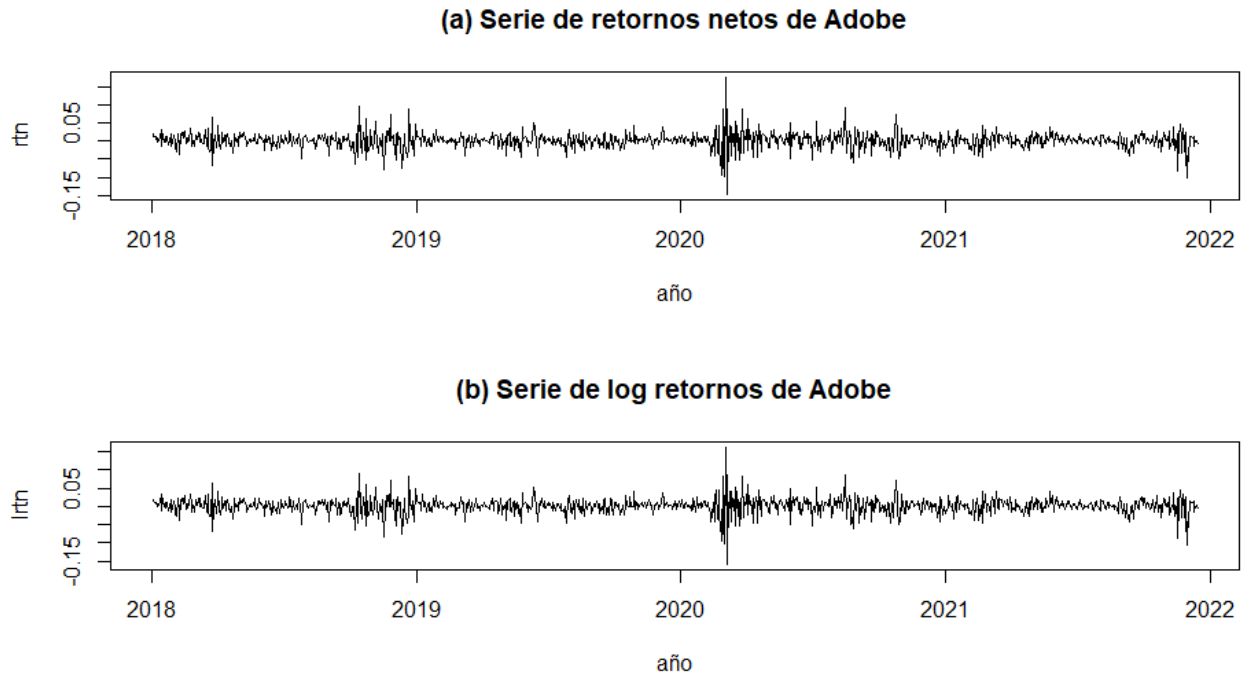


Figura 4.2: Serie de retornos y retornos log para Adobe
Fuente: Elaboración propia

```

1 #Gráficos serie de log retornos
2 ladb=log(ADBE$Adobe+1)
3 tdx=c(1:nrow(ADBE))/255+2018
4 par(mfcol=c(2,1))
5 plot(tdx,ladb,xlab="año",ylab="l rtn",type="l")
6 title(main="(b) Serie de log retornos de Adobe")
7 plot(tdx,adb,xlab="año",ylab="rtn",type="l")
8 title(main="(a) Serie de retornos netos de Adobe")

```

Figura 4.3: Código R para gráficas de series de tiempo
Fuente: Elaborado con base en paquetes timeDate y timeSeries, adaptado de Tsay, R. S. (2014)

Medida	Valor
Recuento	1008
Promedio	0,0014123
Desviación Estándar	0,0222139
Coefficiente de Variación	1572,79%
Mínimo	-0,147452
Máximo	0,177193
Rango	0,324645
Sesgo Estandarizado	0,205706
Curtosis Estandarizada	53,536

Tabla 4.1: Resumen estadístico para retornos R_t
Fuente: Elaboración propia.

El resumen estadístico de la tabla 4.1 incluye medidas de tendencia central, medidas de variabilidad y medidas de forma, estas últimas son de particular interés para el análisis de los retornos de un activo financiero, ya que permite determinar si la muestra proviene de una distribución normal. Si los valores de estas medidas se encuentran fuera del intervalo $[-2,2]$ deja en evidencia desviaciones significativas de la normalidad. Si bien el sesgo se encuentra en este intervalo, la serie de retornos posee exceso de curtosis, lo cual es una de las características de las distribuciones de las series de retornos de activos financieros. A continuación, se muestra una comparativa entre una función de densidad empírica ajustada a R_t , en comparación con la distribución normal.

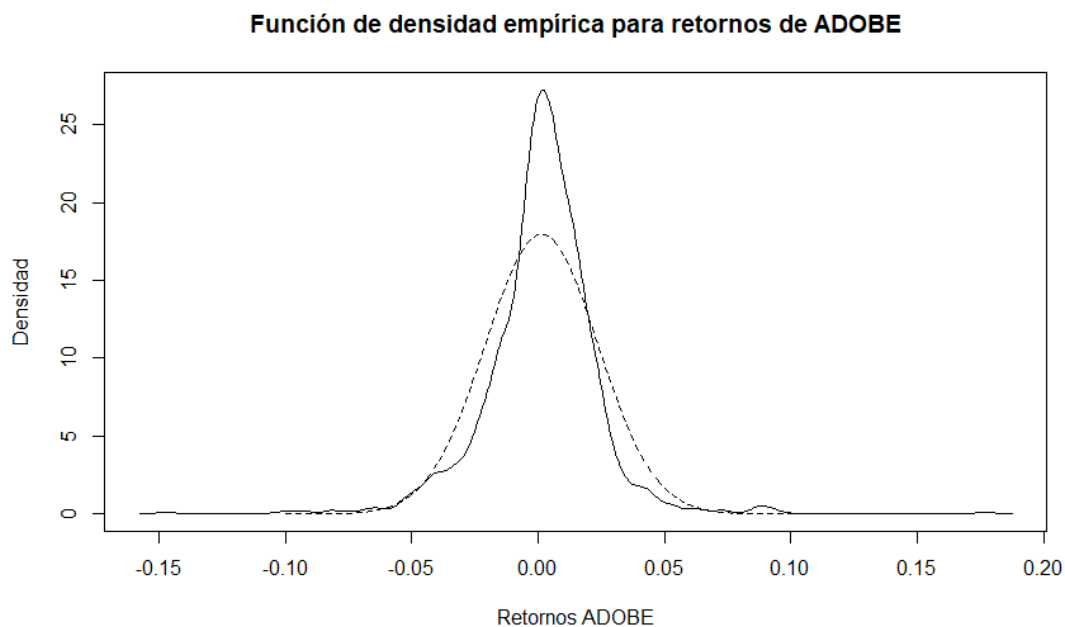


Figura 4.4: Gráfico comparativo de función de densidad empírica de retornos de Adobe frente a distribución normal
Fuente: Elaboración propia

```

1 #histograma
2 par(mfcol=c(1,1))
3 hist(adb,nclass=30, main = "Histograma de retornos de ADOBE", xlab =
4 "Retornos ADOBE", ylab = "Frecuencia")
5 #función de densidad empírica
6 d1=density(adb)
7 #rango de los retornos
8 range(adb)
9 x=seq(-.1,.1,.001)
10 y1=dnorm(x,mean(adb),stdev(adb))
11 plot(d1$x,d1$y,xlab="Retornos ADOBE",ylab="Densidad",type="l", main =
12 "Función de densidad empírica para retornos de ADOBE")
13 lines(x,y1,lty=2)
14 plot(tdx,adb,xlab="año",ylab="rtn",type="l")
15 title(main="(a) Serie de retornos netos de Adobe")

```

Figura 4.5: Código R para construcción de histogramas

Fuente: Elaborado con base en paquetes timeDate y timeSeries, adaptado de Tsay, R. S. (2014)

4.1.2 Identificación del modelo ARMA

Para la mayoría de las series de retornos, las correlaciones seriales son débiles o inexistentes. Pero en caso de existir, se debe ajustar un modelo econométrico (como por ejemplo un modelo ARMA) que permita remover cualquier dependencia lineal existente en la serie. Para determinar el modelo y el orden de este se compara la FAC y FAP de la serie de retornos r_t con las FAC y FAP teóricas de cada modelo. Aunque cabe destacar que, para una serie de retornos diarios, un modelo $AR(1)$ suele ser suficiente.

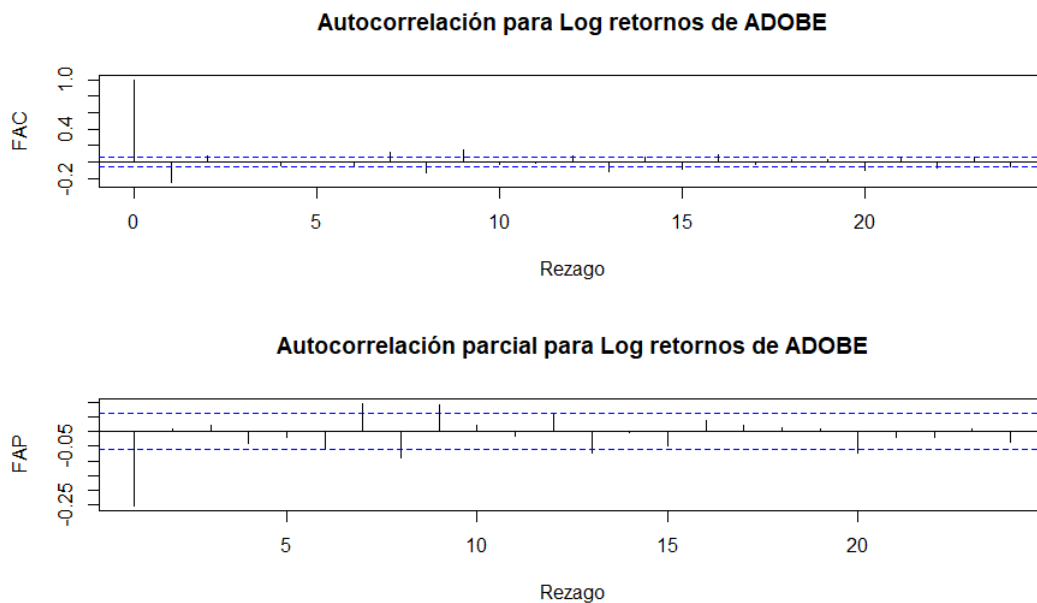


Figura 4.6: FAC y FACP para retornos log de Adobe

Fuente: Elaboración propia

```

1 #Obtención de gráficos de autocorrelación y autocorrelación parcial#
2 par(mfcol=c(2,1))
3 acf(ladb, lag=24, main = "Autocorrelación para Log retornos de ADOBE", xlab =
4 "Rezago", ylab="FAC")
5 pacf(ladb, lag=24, main = "Autocorrelación parcial para Log retornos de
6 ADOBE", xlab = "Rezago", ylab="FAP")

```

Figura 4.7: Código R para construcción de gráficos de autocorrelación

Fuente: Elaborado con base en paquetes timeDate y timeSeries, adaptado de Tsay, R. S. (2014)

Los gráficos indican autocorrelación significativa para el primer rezago, tanto en la FAC como en la FAP, lo que al ser comparados con el comportamiento teórico podrían indicar que el ajuste adecuado corresponde a un modelo $AR(1)$ o $ARMA(1,1)$. Se evaluarán estos modelos, determinando el más adecuado a través de la significancia estadística de sus parámetros estimados y la posterior comparación mediante los criterios de información.

Variable	Coefficiente	Estad. Error	Estadístico - t	Prob.
C	0.001411	0.000548	2.574941	0.0102
$AR(1)$	-0.256494	0.016151	-15.88066	0.0000
Criterio de información de Akaike				-4.839336
Criterio de información Bayesiano				-4.824706

Tabla 4.2: Estimación de parámetros para modelo $AR(1)$

Fuente: Elaboración propia

Variable	Coefficiente	Estad. Error	Estadístico - t	Prob.
C	0.001411	0.000565	2.499132	0.0126
$AR(1)$	-0.265486	0.070852	-3.747075	0.0002
$MA(1)$	0.009627	0.075797	0.127014	0.8990
Criterio de información de Akaike				-4.837359
Criterio de información Bayesiano				-4.817852

Tabla 4.3: Estimación de parámetros para modelo $ARMA(1,1)$

Fuente: Elaboración propia

El ajuste de los modelos $ARMA$ nos muestra que existe dependencia lineal que puede eliminarse a través del ajuste de un modelo $AR(1)$, el cual posee todos sus parámetros estimados estadísticamente significativos a un 95% de confianza. Lo anterior no sucede con el modelo $ARMA(1,1)$, sin embargo, se seguirá considerando para el posterior ajuste en conjunto de la ecuación de la media y la varianza condicional de los retornos, ya que, en este ajuste en conjunto podría tener un impacto significativo en la ecuación de la media.

4.1.3 Efectos ARCH

Una vez realizado el ajuste del modelo que captura la dependencia lineal de la serie, se realiza el test de efectos ARCH sobre los residuos al cuadrado de ajuste, para verificar la existencia de

heterocedasticidad condicional. A continuación, se presenta el correlograma para los a_t^2 obtenidos del ajuste del modelo $AR(1)$.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.410	0.410	169.83	0.000
		2	0.218	0.060	217.75	0.000
		3	0.193	0.102	255.37	0.000
		4	0.257	0.168	322.38	0.000
		5	0.187	0.017	358.04	0.000
		6	0.131	0.013	375.56	0.000
		7	0.099	0.001	385.56	0.000
		8	0.079	-0.016	391.86	0.000
		9	0.093	0.034	400.63	0.000
		10	0.084	0.014	407.88	0.000
		11	0.059	-0.004	411.38	0.000
		12	0.062	0.026	415.34	0.000
		13	0.093	0.048	424.26	0.000
		14	0.076	0.003	430.23	0.000
		15	0.049	-0.007	432.64	0.000
		16	0.083	0.051	439.65	0.000
		17	0.060	-0.020	443.29	0.000
		18	0.034	-0.016	444.52	0.000
		19	-0.006	-0.045	444.56	0.000
		20	0.045	0.043	446.68	0.000

Figura 4.8: Correlograma para residuos del ajuste ARMA realizado
Fuente: Elaboración propia, Eviews 10

El correlograma anterior muestra que, existen correlaciones significativamente distintas de cero a un nivel de confianza del 95%, las cuales corresponden a los rezagos que poseen autocorrelación que se escapa de los límites de control. Lo anterior se puede corroborar con la prueba de Ljung-Box, donde la hipótesis nula corresponde a que los primeros m rezagos de la función de autocorrelación de la serie a_t^2 son cero. Al realizar la prueba se obtiene un estadístico $Q(20) = 446,68$ con un valor p cercano a cero, permitiendo rechazar la hipótesis nula a un 95% de confianza y evidenciando la presencia de heterocedasticidad condicional o equivalentemente, que la serie de residuos al cuadrado no corresponde a un proceso de ruido blanco.

4.1.4 Identificación de modelo ARCH/GARCH

Una vez identificados efectos ARCH significativos, se puede determinar el orden del modelo de heterocedasticidad condicional a través de la FAC y FACP de r_t^2 .

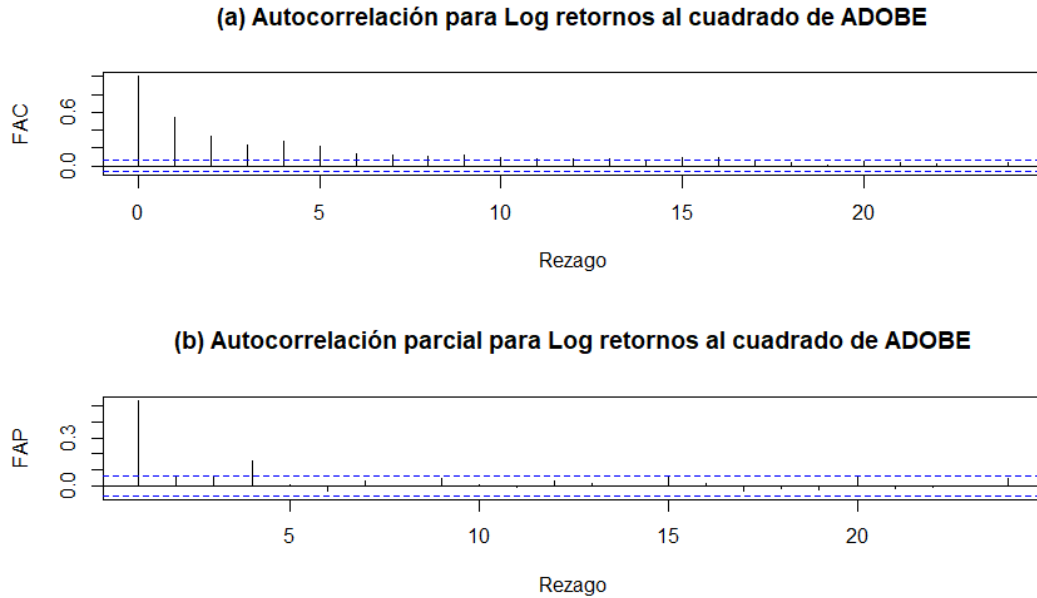


Figura 4.9: FAC y FAP para r_t^2
Fuente: Elaboración propia

La FAC de los retornos log al cuadrado muestra un decrecimiento lento a cero, mientras que la FACP muestra una autocorrelación significativa en el primer rezago, lo que podría indicar que el orden adecuado para los modelos de la familia ARCH a ajustar sea 1. Por lo tanto, considerando lo anterior, y el principio de parsimonia, se evaluarán modelos con parámetros pequeños. Se evaluarán también si es significativo el efecto de premio por riesgo a través de un modelo GARCH en media, y la significancia del efecto apalancamiento a través de los modelos asimétricos.

4.1.5 Estimación de modelos

A continuación, se muestran los parámetros obtenidos del ajuste de los distintos modelos propuestos.

Modelo 1: ARMA(1,0) – GARCH(1,1)

Ecuación de la media				
Parámetro	Valor estimado	Error estándar	Estadístico t	Valor p
C	2.065e-03	5.115e-04	4.036	5.43e-05
AR(1)	-8.951e-02	3.511e-02	-2.549	0.0108
Ecuación de varianza condicional				
C	1.818e-05	6.245e-06	2.911	0.0036
ARCH(1)	1.704e-01	3.222e-02	5.290	1.22e-07
GARCH(1)	7.974e-01	3.344e-02	23.848	< 2e-16

Tabla 4.4: Estimación de parámetros para modelo ARMA(1,0) - GARCH(1,1)

Fuente: Elaboración propia

Modelo 2: ARMA(1,0) – EGARCH(1,1)

Ecuación de la media				
Parámetro	Valor estimado	Error estándar	Estadístico t	Valor p
C	0.001537	0.000465	3.306947	0.000943
AR(1)	-0.097688	0.037061	-2.635881	0.008392
Ecuación de varianza condicional				
C	-0.527095	0.121370	-4.342875	1.41e-05
ARCH(1)	0.238366	0.049116	4.853153	1.22e-06
Parámetro de asimetría (γ)	-0.111470	0.037489	-2.973395	0.002945
GARCH(1)	0.956408	0.013115	72.924827	0.000000

Tabla 4.5: Estimación de parámetros para modelo ARMA(1,0) - EGARCH(1,1)

Fuente: Elaboración propia

Modelo 3: ARMA(1,1) – EGARCH(1,1)

Ecuación de la media				
Parámetro	Valor estimado	Error estándar	Estadístico t	Valor p
C	0.001633	0.000432	3.777575	0.000158
AR(1)	0.432751	0.201043	2.152531	0.031356
MA(1)	-0.521935	0.192245	-2.714950	0.006629
Ecuación de varianza condicional				
C	-0.574780	0.128432	-4.475356	7.63e-06
ARCH(1)	0.252910	0.050610	4.997204	5.82e-07
Parámetro de asimetría (γ)	-0.102910	0.037518	-2.742920	0.006090
GARCH(1)	0.951737	0.013883	68.55515	0.000000

Tabla 4.6: Estimación de parámetros para modelo ARMA(1,0) - EGARCH(1,1)

Fuente: Elaboración propia

Modelo 4: ARMA(1,0) – APARCH(1,1)

Ecuación de la media				
Parámetro	Valor estimado	Error estándar	Estadístico t	Valor p
C	0.0015494	0.0005132	3.019	0.00254
AR(1)	-0.0943387	0.0336081	-2.807	0.00500
Ecuación de varianza condicional				
C	0.0005095	0.0001304	3.908	9.30e-05
ARCH(1)	0.1343989	0.0207317	6.483	9.01e-11
Parámetro de asimetría (γ)	1.1235875	0.2865259	3.921	8.8e-05
GARCH(1)	0.8545193	0.0239222	35.721	< 2e-16
Parámetro de potencia (δ)	0.4297668	0.1429286	3.007	0.00264

Tabla 4.7: Estimación de parámetros para modelo ARMA(1,0) - APARCH(1,1)

Fuente: Elaboración propia

Modelo 5: ARMA(1,0) – GARCH – M(1,1)

Ecuación de la media				
Parámetro	Valor estimado	Error estándar	Estadístico t	Valor p
C	0.002022	0.000772	2.618060	0.0088
AR(1)	-0.089462	0.033432	-2.675977	0.0075
GARCH(1)	0.168497	2.149410	0.078392	0.9375
Ecuación de varianza condicional				
C	1.81E-05	6.33E-06	2.860968	0.0042
ARCH(1)	0.167704	0.036183	4.634837	0.0000
GARCH(1)	0.799751	0.039731	20.12901	0.0000

Tabla 4.8: Estimación de parámetros para modelo ARMA(1,0) – GARCH – M(1,1)

Fuente: Elaboración propia

```

1 #####AJUSTE DE MODELOS#####
2 library(fGarch)
3 #ARMA(1,0) - GARCH(1,1)
4 m1=garchFit(~arma(1,0)+garch(1,1),data=ladb,trace=F, cond.dist = "QMLE")
5 summary(m1)
6 plot(m1)

```

Figura 4.10: Código R para ajuste de modelos GARCH

Fuente: Elaborado con base en paquetes fGarch, adaptado de Tsay, R. S. (2014)

Mediante el ajuste de las distintas extensiones de los modelos GARCH se puede establecer que no existe un efecto significativo de la volatilidad sobre los retornos, es decir, para las acciones de Adobe, en el periodo de estudio, no existe un premio por riesgo, esto es evidenciado en la no significancia del parámetro en cuestión en el modelamiento de comportamiento de la volatilidad. Sin embargo, si hay presencia de asimetría o efecto apalancamiento en la serie de retornos de Adobe, dado que, los parámetros relacionados a este efecto son significativos a un 95% tanto para los modelos GARCH exponenciales como para los modelos GARCH asimétricos en potencia.

La determinación del modelo que mejor se ajusta a la serie de retornos estudiada se realiza a través de los criterios de información, comparando los modelos que resultaron ser significativos. El resumen de estas medidas para cada modelo se presenta a continuación.

Modelo	Criterio de información de Akaike (AIC)	Criterio de información Bayesiano (BIC)
Modelo 1: ARMA(1,0) – GARCH(1,1)	-5,141	-5,111
Modelo 2: ARMA(1,0) – EGARCH(1,1)	-5,121	-5,096
Modelo 3: ARMA(1,1) – EGARCH(1,1)	-5,140	-5,106
Modelo 4: ARMA(1,0) – APARCH(1,1)	-5,092	-5,057

Tabla 4.9: Comparación de criterios de información de modelos ajustados

Fuente: Elaboración propia

De los modelos ajustados, el modelo que minimiza el valor tanto de AIC como BIC es el modelo $ARMA(1,0) - GARCH(1,1)$. Por lo tanto, es este modelo el que mejor explica el comportamiento de la volatilidad de la serie de retornos de Adobe.

Las ecuaciones para la media y la varianza condicional según el modelo seleccionado son las siguientes:

$$r_t = 0.002065 - 0.08951r_{t-1} + a_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.00001818 + 0.1704a_{t-1}^2 + 0.7974\sigma_{t-1}^2$$

4.1.6 Validación

Para determinar si el modelo es adecuado se estudia el efecto que tuvo el modelamiento en la heterocedasticidad de la serie, para ello se recurre nuevamente a los correlogramas y las pruebas de heterocedasticidad, pero en este caso, se evalúan sobre los residuos obtenidos del ajuste del modelo $ARMA(1,0) - GARCH(1,1)$.

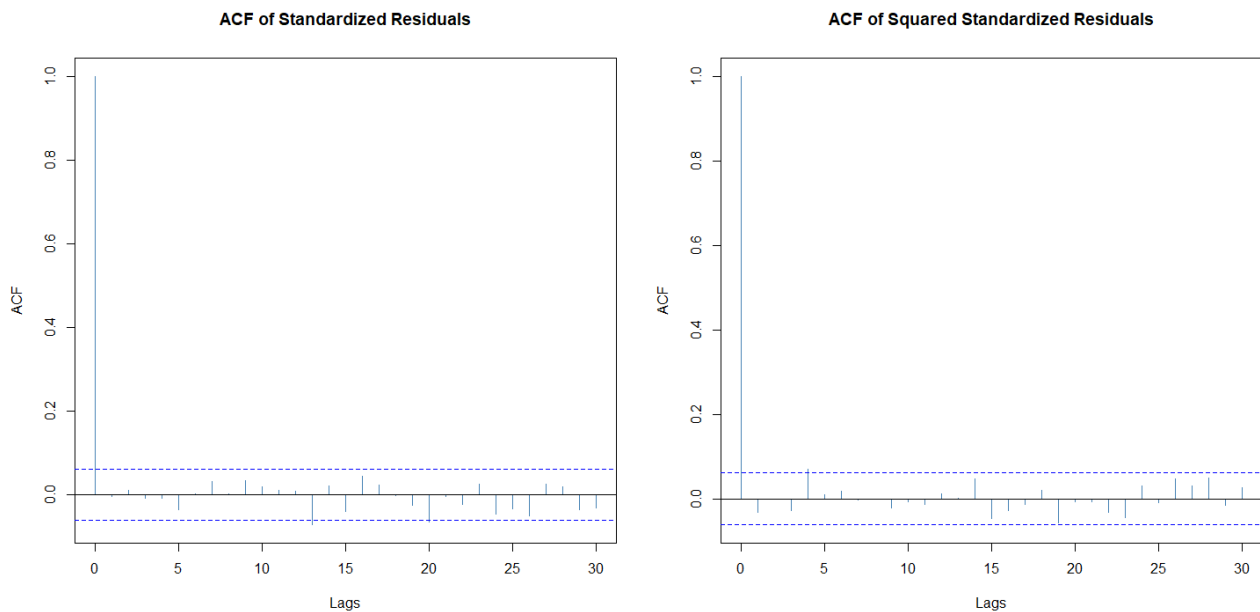


Figura 4.11: Correlograma de residuos y residuos cuadráticos estandarizados
Fuente: Elaborado propia

Los correlogramas no muestran autocorrelaciones significativas, por lo que se puede concluir que la heterocedasticidad fue capturada por el modelo ajustado y los residuos corresponden a un proceso de ruido blanco. Para corroborar lo antes mencionado se lleva a cabo el test de heterocedasticidad de los

multiplicados de Lagrange obteniendo un estadístico $Q(20) = 18.3538$, con un valor p de 0.5641, superior a 5% por lo tanto, con un 95% de confianza, se puede rechazar la hipótesis nula de la prueba y descartar así la presencia de heterocedasticidad en los residuos.

Otro aspecto a evaluar en el contexto de validación del modelo corresponde a la verificación de los supuestos, en este caso particular, al realizar el ajuste se asume que los residuos estandarizados siguen una distribución normal Gaussiana.

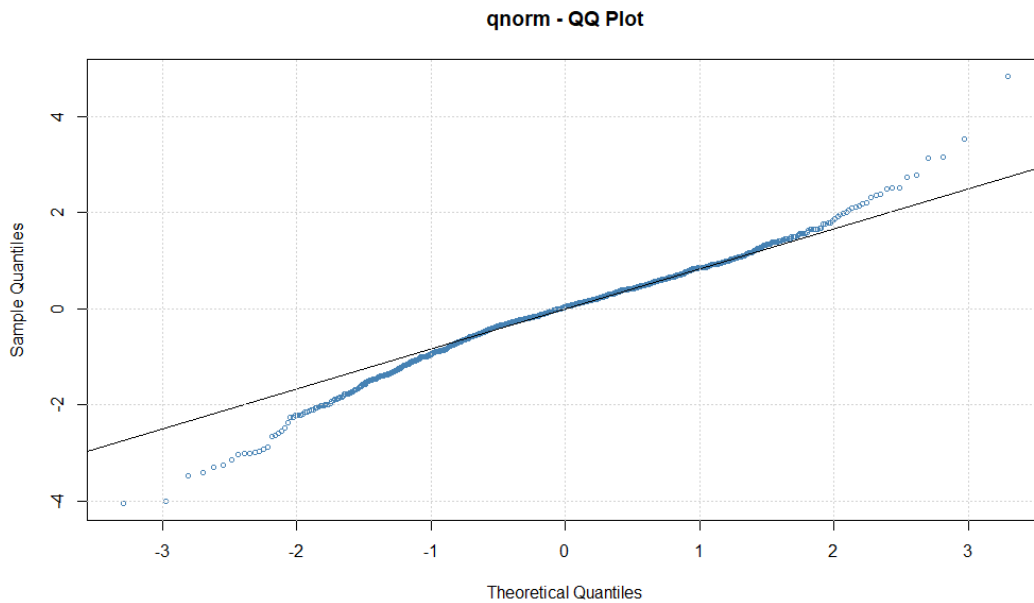


Figura 4.12: Gráfico QQ para residuos estandarizados
Fuente: Elaborado con base en paquetes fGarch

El gráfico Q-Q de los residuos estandarizados muestra que parte de los residuos no se ajusta a la distribución normal. Sin embargo, el ajuste se realizó considerando un estimador de la matriz de varianza – covarianza diferente, este estimador fue propuesto por Bollerslev y Wooldridge (1992) y se conoce como cuasi – máxima verosimilitud, el cual, es robusto frente a un contexto de no normalidad. Por lo tanto, aún en no normalidad, las estimaciones del error estándar siguen siendo adecuadas.

Considerando que los residuos del modelo ajustado no presentan efectos ARCH y que la especificación cumple con los supuestos planteados, se concluye que el modelo es adecuado.

4.1.7 Pronóstico

Una vez identificado el modelo que mejor explica el comportamiento de la serie, este se puede utilizar para realizar pronósticos de la volatilidad en el corto plazo. Se pueden llevar a cabo dos tipos de pronósticos, el estático y el dinámico.

Pronóstico estático

Los pronósticos estáticos son aquellos que se encuentran basados en la última información disponible, por lo que se encuentran limitados a proyecciones en un periodo hacia adelante. Para el caso del modelo ajustado, los resultados del pronóstico estático se muestran a continuación.

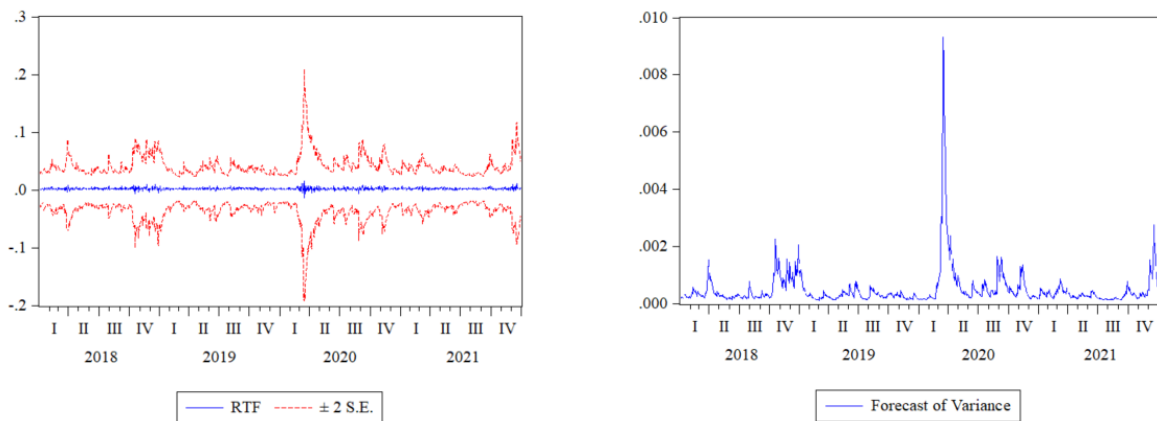


Figura 4.13: Gráficos de pronóstico estático para retornos y volatilidad de Adobe

Fuente: Elaboración propia, Eviews 10

El primer gráfico representa el pronóstico de los retornos diarios estimados para las acciones de Adobe, retornos muy cercanos a cero que presentan pequeñas variaciones que son explicadas por la parte autorregresiva ajustada a la ecuación de la media condicional. El segundo gráfico muestra la estimación de la varianza condicional, en el cual se puede ver el agrupamiento o clustering de volatilidad característico de las series de tiempo financieras. Se destaca el periodo con mayor volatilidad producido durante el primer trimestre de marzo de 2020, periodo en el cual los mercados financieros se vieron sumamente afectados por las expectativas frente a la pandemia producida por el Covid – 19.

Pronóstico dinámico

Los pronósticos dinámicos se caracterizan por utilizar el ultimo pronóstico disponible como dato para evaluar el modelo en el siguiente periodo, permitiendo así realizar una proyección de dos o más

periodos hacia adelante. A continuación, se presentan los pronósticos dinámicos para la serie en estudio.

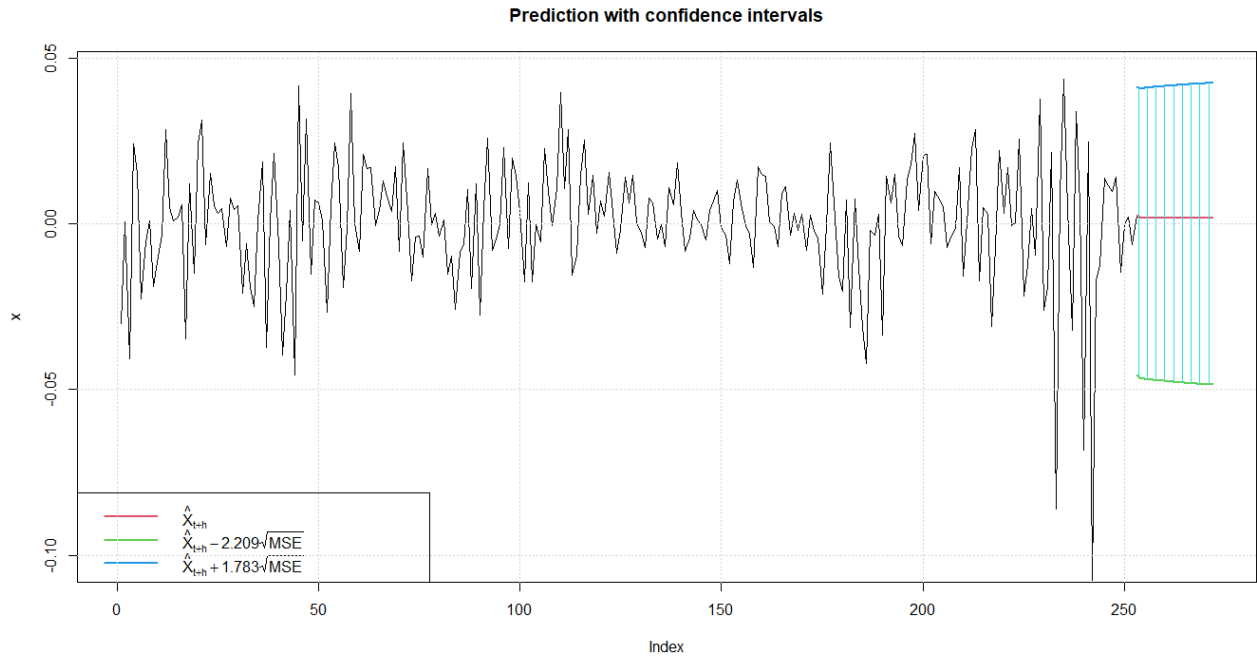


Figura 4.14: Pronóstico dinámico para retornos de Adobe
Fuente: Elaborado con base en paquete fGarch

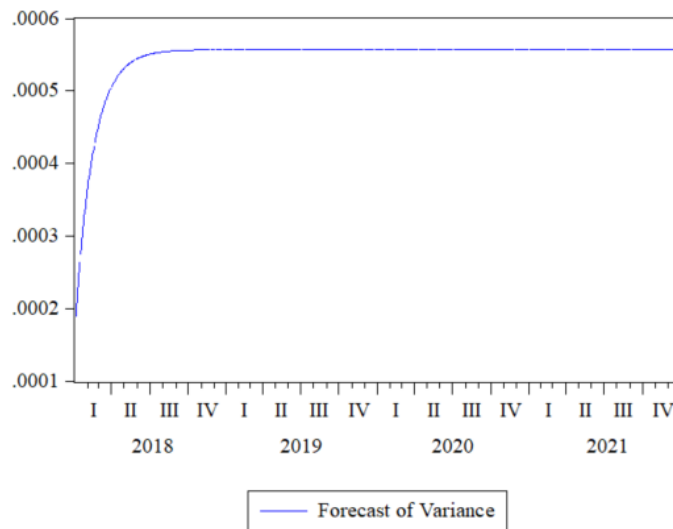


Figura 4.15: Pronóstico dinámico para volatilidad de Adobe
Fuente: Elaboración propia, Eviews 10

El gráfico de pronóstico dinámico muestra la predicción de la media condicional simbolizada por la línea roja, la media pronosticada se encuentra levemente superior a cero. Además, se muestra el intervalo en el que podría moverse la media condicional a un 95% de confianza. Este intervalo crece a medida que aumenta el horizonte de proyección y esto sucede porque estas estimaciones son de corto plazo, perdiendo precisión al aumentar la cantidad de pasos adelante en el pronóstico. Mientras que, la varianza condicional pronosticada muestra un comportamiento asintótico, esto sucede al realizar el pronóstico utilizando como datos los pronósticos anteriores, provocando que la varianza condicional se acerque asintóticamente a la varianza no condicional en el largo plazo.

4.1.8 Resultados del modelamiento

El modelamiento de la volatilidad de las demás series estudiadas se lleva a cabo de la misma forma que la mostrada para la serie de retornos de Adobe, obteniendo distintos modelos que fueron contrastados en base a la significancia de sus parámetros y sus respectivos criterios de información. A continuación, se muestran las ecuaciones de los modelos que mejor se ajustaron al comportamiento de la volatilidad para cada una de las series en estudio. Los gráficos de las series de tiempo, histogramas de residuos estandarizados luego del ajuste, pronósticos y gráficos de pronósticos para cada uno de estas se encuentran en el anexo 1, 2, 3 y 4 respectivamente.

Adobe $ARMA(1,0) - GARCH(1,1)$

$$r_t = 0.002065 - 0.08951r_{t-1} + a_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.00001818 + 0.1704a_{t-1}^2 + 0.7974\sigma_{t-1}^2$$

Alphabet $ARMA(1,1) - EGARCH(1,1)$

$$r_t = 0.001002 + 0.875213r_{t-1} - 0.927306a_{t-1} + a_t$$

$$\ln(\sigma_t^2) = -1.060445 + 0.208839 \frac{|a_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} - 0.113195 \frac{a_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + 0.888513 \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

Amazon C - $TGARCH(1,2)$

$$r_t = 0.001390 + a_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.0000166 + 0.060911a_{t-1}^2 + 0.078824a_{t-i}^2\delta_{t-i} + 1.280554\sigma_{t-1}^2 - 0.421989\sigma_{t-2}^2$$

Apple C – APARCH(1,1,2)

$$r_t = 0.001822 + a_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.0000170 + 0.131657(|a_{t-1}| - 0.326085a_{t-1})^2 + 0.817514\sigma_{t-1}^2$$

Intel ARMA(1,0) – GARCH(1,1)

$$r_t = 0.000424 - 0.110212r_{t-1} + a_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.000132 + 0.139455a_{t-1}^2 + 0.601439\sigma_{t-1}^2$$

Meta C – GARCH(1,1)

$$r_t = 0.000279 + a_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.000150 + 0.188126a_{t-1}^2 + 0.537267\sigma_{t-1}^2$$

Microsoft ARMA(1,1) – EGARCH(1,1)

$$r_t = 0.001529 + 0.839480r_{t-1} - 0.909718a_{t-1} + a_t$$

$$\ln(\sigma_t^2) = -0.868511 + 0.325803 \frac{|a_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} - 0.093709 \frac{a_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + 0.925823 \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

Netflix C – GARCH(1,1)

$$r_t = 0.001280 + a_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.000279 + 0.054485a_{t-1}^2 + 0.901239\sigma_{t-1}^2$$

Nvidia C – GARCH(1,1)

$$r_t = 0.002327 + a_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.000561 + 0.162135a_{t-1}^2 + 0.782294\sigma_{t-1}^2$$

Paypal C – EGARCH(1,1)

$$r_t = 0.000531 + a_t$$

$$\ln(\sigma_t^2) = -0.559719 + 0.217498 \frac{|a_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} - 0.085895 \frac{a_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + 0.948380 \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

En general, gran parte de los modelos estudiados presenta parámetros significativos relacionados a el efecto asimetría, por lo tanto, las acciones tecnológicas, tienden a presentar una reacción mayor en la volatilidad frente a las malas noticias. En relación al premio por riesgo, en todas las series estudiadas, el parámetro que representa el efecto de la volatilidad en la ecuación del retorno fue altamente no significativo, por lo tanto, el grupo de acciones más importantes del sector tecnológico no presenta un comportamiento relacionado a un premio por riesgo.

Como fue mencionado anteriormente, el comportamiento de la volatilidad no es observable, por lo que es difícil determinar el desempeño de los modelos ajustados, ya que los pronósticos de estos no se pueden comparar con la realidad. Sin embargo, con la información de los retornos del periodo en estudio, se puede ajustar un modelo GARCH y determinar el comportamiento de la volatilidad con base en un pronóstico estático, considerando así la última información disponible para la estimación de la volatilidad diaria. Para obtener estos pronósticos estáticos se ajustaron modelos $C - GARCH(1,1)$ a cada serie estudiada, considerando los retornos desde julio de 2018 a mayo de 2022, obteniendo como resultados los gráficos de pronósticos para el mes de enero expuestos en el anexo 5.

En los gráficos se puede observar que las proyecciones son bastante acertadas en magnitud, no mostrando diferencias importantes entre los pronósticos realizados, y modelando, además, en todas las series, una tendencia al alza en la volatilidad diaria durante enero de 2022. El pronóstico realizado resultó ser bastante acertado durante todo el periodo para Alphabet, Amazon, Apple, Intel y Netflix, pero mostrando una diferencia durante la última semana (a excepción de Alphabet), en la cual la volatilidad diaria de estos activos se disparó. Las proyecciones de la volatilidad de Meta, Microsoft, Nvidia y Paypal resultaron ser menores durante gran parte del periodo, y la única sobreestimación de la volatilidad diaria corresponde al caso de Adobe. En general, los pronósticos realizados muestran comportamientos bastante acertados, corroborando que los ajustes realizados son adecuados para explicar el comportamiento de la volatilidad diaria.

4.2 Modelamiento multivariante

Dado que la información de algunas de las series estudiadas solo se ajustó significativamente a las versiones más sencillas de los modelos GARCH univariantes, se aplicarán modelos multivariantes para determinar el comportamiento de la varianza y covarianza condicional. A diferencia de las demás series de tiempo, las innovaciones de una serie de tiempo financiera multivariante se encuentran correlacionadas, dado que la mayoría de estas series poseen heterocedasticidad condicional. Esta

dependencia dinámica de la matriz de covarianza condicional es la que se modela a través de los modelos GARCH multivariantes.

El ajuste se realiza a través del modelamiento conjunto de las correlaciones condicionales de cada serie en estudio con la serie de retornos log del índice Standard & Poor's 500, uno de los índices más importantes de Estados Unidos y considerado como el índice más representativo de la situación actual del mercado financiero.

Para el modelamiento de la covarianza heterocedástica se hace uso de los modelos de correlación condicional dinámica (GARCH DCC). La estimación de los parámetros se realiza en dos etapas, en primer lugar, se ajustan modelos GARCH para cada serie de forma independiente, para luego, en segundo lugar, proceder a la estimación de los parámetros de la matriz de correlación. A continuación, se presenta, a modo de ejemplo, el modelamiento de la correlación condicional de los retornos log de Nvidia y el índice S&P 500.

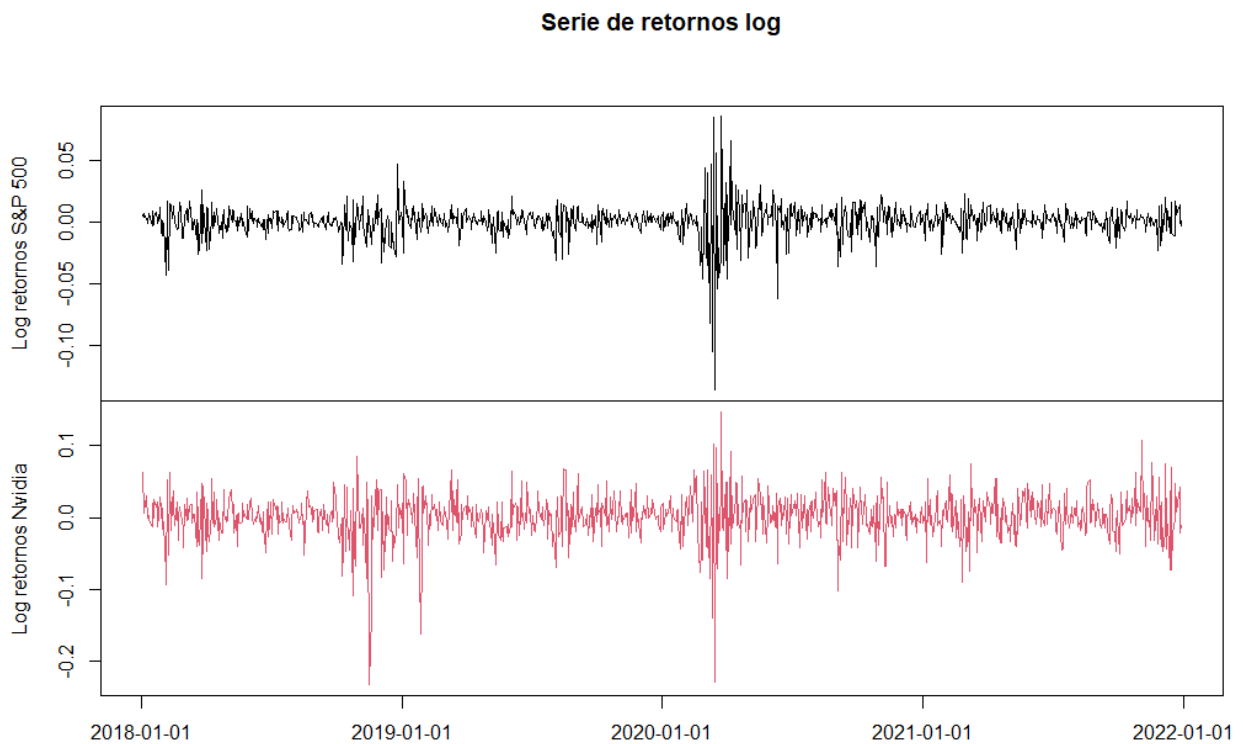


Figura 4.16: Series de tiempo de retornos log de Nvidia y S&P 500
Fuente: Elaboración propia

En primer lugar, se debe identificar que los retornos de las series estudiadas no poseen correlaciones condicionales constantes, determinando de esta forma que es apropiado ajustar un modelo DCC. Para lo anterior se utiliza el test DCC, en el cual se prueba que luego de un ajuste de un modelo de

correlación condicional constante (CCC), los residuos estandarizados son i.d.d., con una matriz de covarianza igual a la matriz identidad.

```
1 #Prueba DCC
2 DCCtest(FX, garchOrder = c(1,1))
```

Figura 4.0.17: Código R para prueba DCC
Fuente: Elaboración propia

Como resultados de la prueba de hipótesis se obtiene un valor p igual a 0.7458, por lo tanto, con un 95% de confianza se rechaza la hipótesis de que los residuos estandarizados son i.d.d., por lo tanto, es adecuado ajustar un modelo de correlación condicional dinámica a las series en estudio.

4.2.1 Estimación de parámetros

```
1 #Ajuste de modelos GARCH a las series individuales
2 dis_garch11<-ugarchspec(mean.model = list(armaOrder = c(0,0),include.mean=F),
3 variance.model = list(garchOrder = c(1,1),model = "sGARCH"))
4 #Definir el modelo DCC
5 DCC_garch11<-dccspec(uspec = multispec(replicate(2, dis_garch11)),
6 dccOrder = c(1,1),distribution = "mvt")
7 #Ajuste de los modelos definidos a los datos de las series
8 DCC_garch11_mod<-dccfit(DCC_garch11, data = FX)
9 DCC_garch11_mod
```

Figura 4.18: Código R para ajuste de modelos GARCH y posterior ajuste DCC
Fuente: Elaborado con base en paquete MTS, ruGarch, rmGarch y ccGarch

Una vez determinado que es adecuado ajustar un modelo DCC para modelar la correlación condicional entre las series, se da paso a la estimación de los modelos GARCH individuales, para de esta forma, mediante la estimación de la volatilidad, construir los vectores de innovación estandarizados.

Los resultados de la primera parte del ajuste, correspondientes a la estimación de los parámetros de los modelos GARCH individuales para cada serie, se presenta a continuación.

	Valor estimado	Error Std.	Valor t	Valor p
S&P 500				
C	0.000007	0.000005	1.2538	0.209910
ARCH(1)	0.237160	0.053942	4.3965	0.000011
GARCH(1)	0.724194	0.056492	12.8193	0.000000
Nvidia				
C	0.000056	0.000021	2.7065	0.006799
ARCH(1)	0.167807	0.038268	4.3851	0.000012
GARCH(1)	0.781178	0.043125	18.1144	0.000000

Tabla 4.10: Resultados estimación de parámetros para modelos GARCH ajustados
Fuente: Elaboración propia

Del ajuste anterior, solo uno de los parámetros no es significativo a un 95% de confianza, correspondiente a la constante del modelo GARCH ajustado a la serie del índice S&P 500. Las ecuaciones de los modelos ajustados son las siguientes:

$$\sigma_{11,t} = 0.000007 + 0.237160a_{1,t-1}^2 + 0.724194\sigma_{11,t-1}$$

$$\sigma_{22,t} = 0.000056 + 0.167807a_{2,t-1}^2 + 0.781178\sigma_{22,t-1}$$

Una vez determinados los modelos GARCH para cada serie, se procede a realizar la estimación del modelo DCC. Los parámetros estimados y la ecuación que define el comportamiento de la correlación dinámica condicional entre las series estudiadas se presentan a continuación.

	Valor estimado	Error Std.	Valor t	Valor p
A1	0.101481	0.029428	3.4485	0.000564
B1	0.763147	0.081226	9.3954	0.000000
MShape	5.576716	0.512456	10.8823	0.000000

Tabla 4.11: Resultados estimación de parámetros para modelo DCC ajustado
Fuente: Elaboración propia

Obteniendo así, la siguientes ecuaciones para la matriz de correlaciones y para la matriz de varianza – covarianza condicional.

$$Q_t = (1 - 0.101481 - 0.763147)\bar{Q} + 0.101481Q_{t-1} + 0.763147\hat{\eta}_{t-1}\hat{\eta}'_{t-1}$$

$$\rho_t = J_t Q_t J_t$$

Donde $J_t = \text{diag} \left\{ q_{11,t}^{-\frac{1}{2}}, q_{22,t}^{-\frac{1}{2}} \right\}$ con $q_{ii,t}$ corresponden al elemento (i, i) de la matriz Q_t y \bar{Q} es la matriz de varianza no condicional del vector de innovaciones.

4.2.2 Pronóstico

A continuación, se muestran los resultados del ajuste, a través de la estimación de las varianzas y covarianzas condicionales para cada serie.

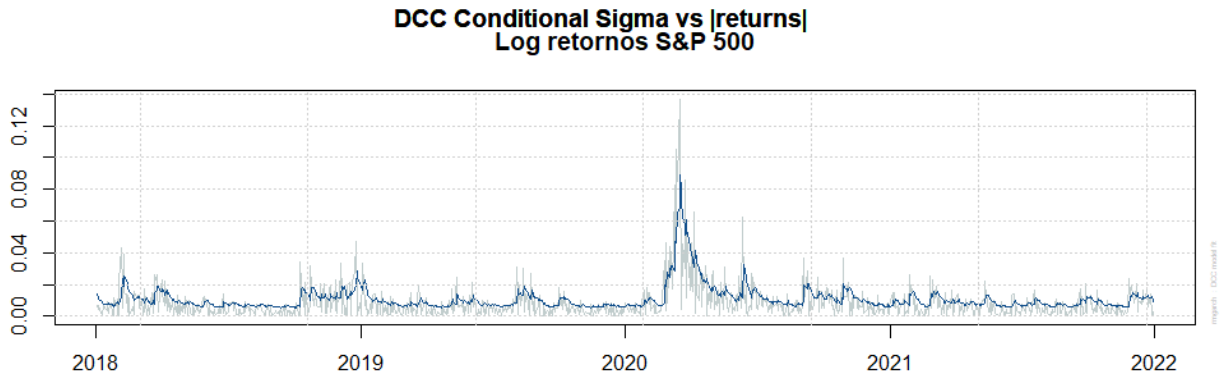


Figura 4.19: Pronóstico estático para varianza condicional del índice S&P 500 vs el valor absoluto de sus retornos
Fuente: Elaboración propia

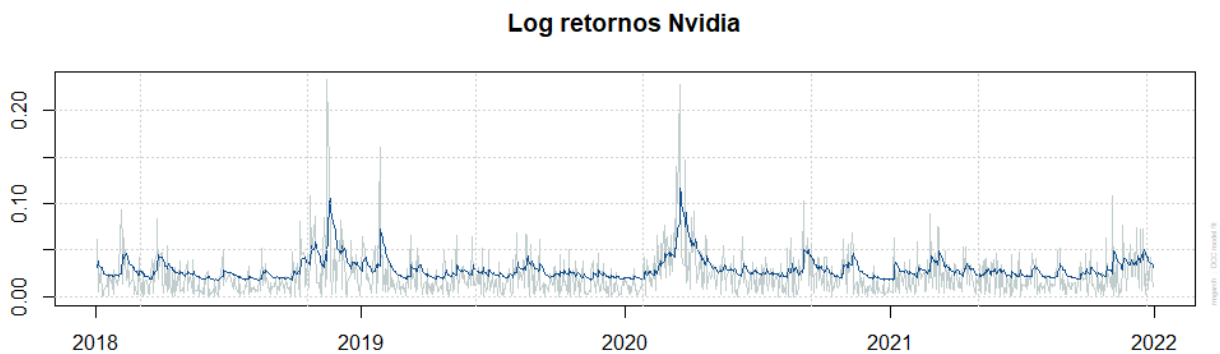


Figura 4.20: Pronóstico estático para varianza condicional de Nvidia vs el valor absoluto de sus retornos
Fuente: Elaboración propia

El gráfico anterior muestra el comportamiento de la volatilidad en contraste con el valor absoluto de los retornos, enseñando que, en relación a los clusters de volatilidad, ambas series presentan comportamientos parecidos, identificando periodos de alta volatilidad a finales de 2018 y principios de 2020. Mediante el cluster de volatilidad de finales de 2018 se puede explicar cómo afecta el comportamiento de la volatilidad de una serie sobre otra, en este caso, como se ve afectado el modelamiento de la volatilidad del índice S&P 500 por la alta volatilidad de los retornos de Nvidia en este periodo. La figura 4.16 muestra la serie de retornos de ambos activos estudiados, en ella se puede ver, que, si bien los retornos del índice S&P 500 poseen un aumento en su variación durante finales de 2018, este es considerablemente menor al de los retornos de Nvidia, es decir, el agrupamiento en la varianza y covarianza condicional de este periodo en particular se debe principalmente al efecto que tiene la volatilidad de las acciones de Nvidia, efecto que se cuantifica a través de la ecuación de la matriz de varianza – covarianza condicional ajustada. La volatilidad de Nvidia en este periodo en

particular se deben a causas internas de la empresa, la cual se vio enfrentada a caídas y repuntes en las ventas de sus principales productos y resultados menores a las expectativas de venta de nuevos lanzamientos (Nueva línea de tarjetas gráficas “RTX”).

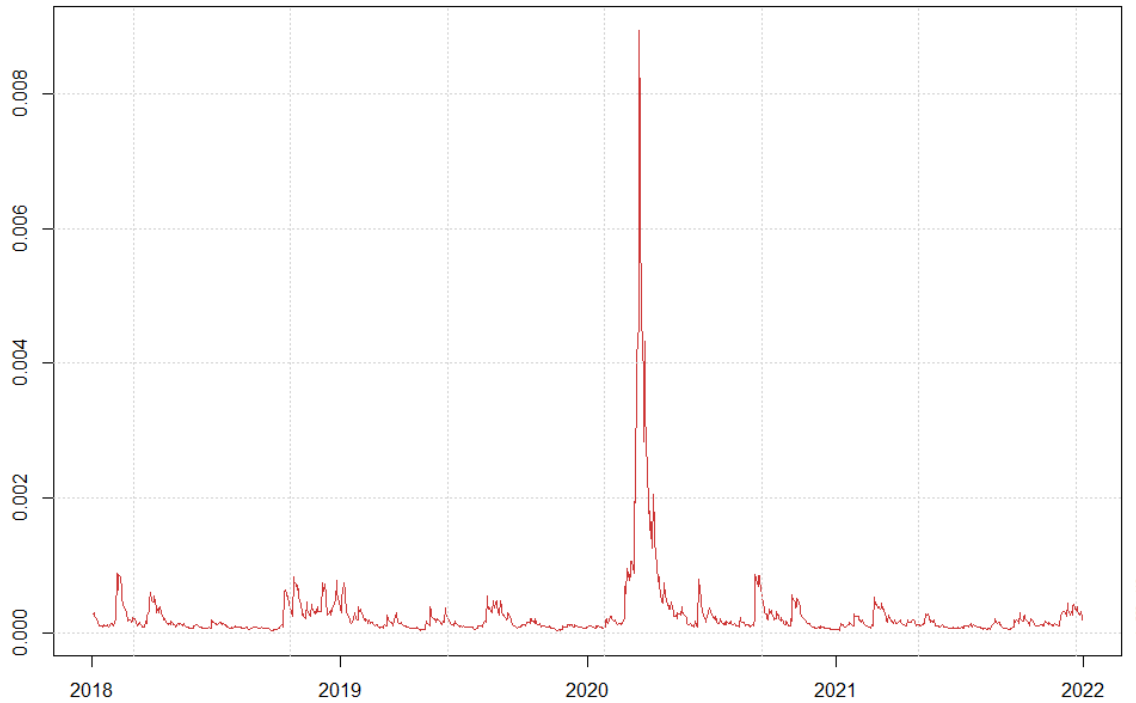


Figura 4.21: Pronóstico estático para covarianza condicional de los retornos del índice S&P500 y los retornos de Nvidia
Fuente: Elaboración propia

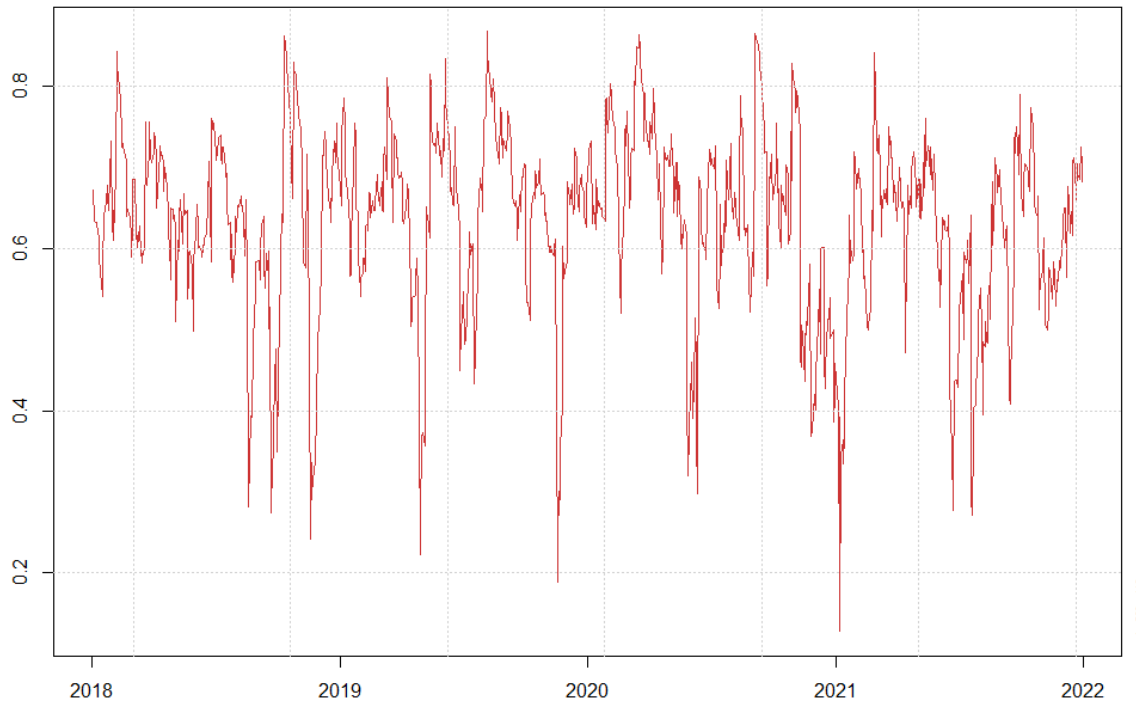


Figura 4.22: Pronóstico estático para correlación condicional de los retornos del índice S&P500 y los retornos de Nvidia
Fuente: Elaboración propia

El nivel de relación entre las series se comprueba con las gráficas de covarianza y correlación condicional dinámica estimadas, en ellas, el resultado más interesante corresponde a que la covarianza y correlación de las series se mantiene siempre positiva durante todo el periodo de estudio, demostrando la alta relación directa entre estas series. Además, se observa en el gráfico de covarianza condicional que, durante el inicio de la pandemia, la relación entre estas series se acrecentó de forma considerable. El gráfico de correlación condicional por su parte muestra una correlación positiva durante todo el periodo, y no presenta indicios de tendencia, exhibiendo valores de correlación que fluctúan alrededor de una constante, que por inspección del gráfico se podría fijar en 0,7. Cabe mencionar que en ambos gráficos se puede evidenciar un comportamiento de agrupamiento o clusters, tal como ocurre con el modelamiento de la volatilidad.

Mediante el modelo ajustado se obtienen los siguientes gráficos para el pronóstico de volatilidad y las covarianzas condicionales para un periodo de 30 días.

```

1 #Pronóstico
2 Pronostico_30<- (dccforecast(DCC_garch11_mod,n.ahead=30))
3 Pronostico_30
4 plot(Pronostico_30)
5 #Predicción matriz de covarianzas
6 pred_cov<-matrix(Prediccion@mforecast$H[[1]],nrow=2)
7 pred_cov
8 #Predicción matriz de correlaciones
9 pred_cor<-matrix(Prediccion@mforecast$R[[1]],nrow=2)
10 pred_cor

```

Figura 4.23: Código R para realizar pronóstico dinámico de modelo DCC ajustado

Fuente: Elaborado con base en paquete MTS, ruGarch, rmGarch y ccGarch

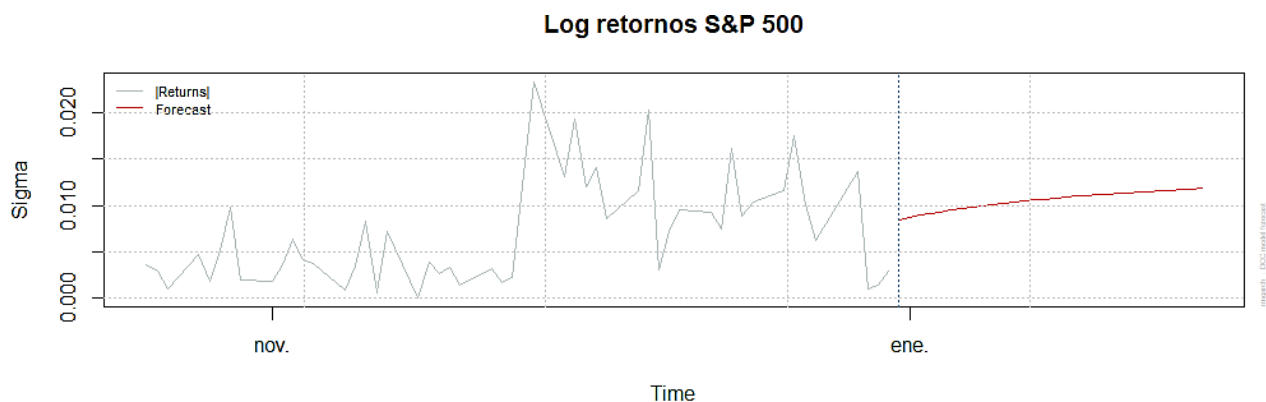


Figura 4.24: Pronóstico dinámico de varianza condicional de los retornos del índice S&P 500 para enero de 2022

Fuente: Elaboración propia

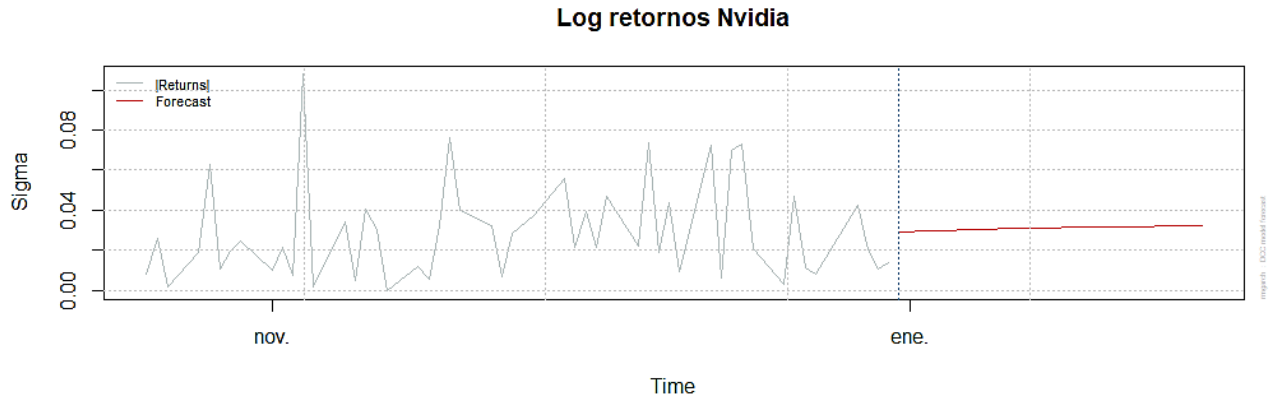


Figura 4.25: Pronóstico dinámico de varianza condicional de los retornos de Nvidia para enero de 2022
Fuente: Elaboración propia

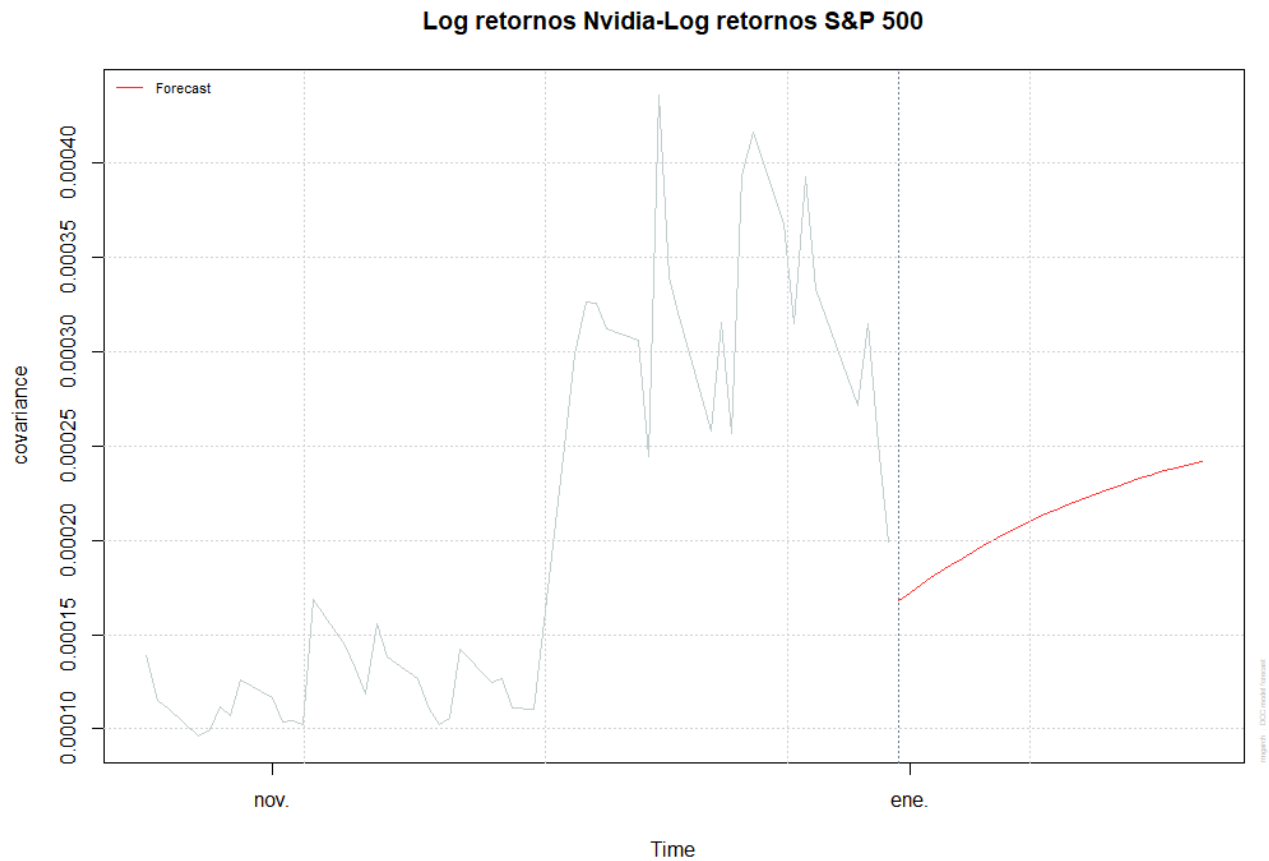


Figura 4.26: Pronóstico dinámico de covarianza condicional de los retornos del índice S&P500 y los retornos de Nvidia para enero de 2022
Fuente: Elaboración propia

Tanto el pronóstico de la volatilidad individual de cada serie como el de la covarianza condicional inician con valores de orden bajo, los cuales aumentan a medida que se incrementa el horizonte de pronóstico, dado que, al igual que para el caso univariante, el pronóstico dinámico implica que las

proyecciones de la volatilidad tiendan asintóticamente a la matriz de varianza – covarianza no condicional en el largo plazo.

El modelo GARCH de correlación condicional dinámica mostrado fue ajustado también a las series de tiempo de Meta, Intel y Netflix, obteniendo las siguientes ecuaciones para la matriz de varianza – covarianza condicional (los gráficos correspondientes a cada ajuste se muestran en el anexo 6, 7 y 8, y los pronósticos de la matriz de varianza – covarianza condicional para enero de 2022 se presentan en el anexo 9).

Meta

$$\sigma_{11,t(S\&P500)} = 0.000007 + 0.237160a_{1,t-1}^2 + 0.724194\sigma_{11,t-1}$$

$$\sigma_{22,t(Meta)} = 0.000167 + 0.195814a_{2,t-1}^2 + 0.509534\sigma_{22,t-1}$$

$$Q_t = (1 - 0.043012 - 0.881906)\bar{Q} + 0.043012Q_{t-1} + 0.881906\hat{\eta}_{t-1}\hat{\eta}'_{t-1}$$

Intel

$$\sigma_{11,t(S\&P500)} = 0.000007 + 0.237160a_{1,t-1}^2 + 0.724194\sigma_{11,t-1}$$

$$\sigma_{22,t(Intel)} = 0.000164 + 0.160726a_{2,t-1}^2 + 0.533835\sigma_{22,t-1}$$

$$Q_t = (1 - 0.144683 - 0.730059)\bar{Q} + 0.144683Q_{t-1} + 0.730059\hat{\eta}_{t-1}\hat{\eta}'_{t-1}$$

Netflix

$$\sigma_{11,t(S\&P500)} = 0.000007 + 0.237160a_{1,t-1}^2 + 0.724194\sigma_{11,t-1}$$

$$\sigma_{22,t(Intel)} = 0.000033 + 0.058239a_{2,t-1}^2 + 0.890208\sigma_{22,t-1}$$

$$Q_t = (1 - 0.063988 - 0.794478)\bar{Q} + 0.063988Q_{t-1} + 0.794478\hat{\eta}_{t-1}\hat{\eta}'_{t-1}$$

5. Discusión de resultados

Los resultados del ajuste realizado corresponden a 10 modelos GARCH univariantes, que fueron seleccionados considerando los valores de sus criterios de información. Además, se obtuvieron 4 modelos multivariantes, en el cual se modeló la covarianza condicional de estas 4 series financieras con el índice S&P 500. Los modelos univariantes obtenidos corresponden a ajuste de extensiones de los modelos GARCH para el caso de Alphabet, Amazon, Apple, Microsoft y Paypal; Mientras que, para Intel, Meta, Netflix, Adobe y Nvidia se ajustaron modelos GARCH tradicionales.

El ajuste se realiza considerando retornos diarios, pero en primera instancia se había considerado retornos semanales para llevar a cabo el ajuste. Sin embargo, el resultado del modelamiento de retornos semanales no mostraba indicios de efecto asimetría o alguna otra particularidad en las series financieras, esto podría darse dado que el mayor impacto frente a las malas noticias podría verse apaciguado al considerar un periodo mayor en los retornos, es decir, que el efecto de las malas noticias podría evidenciarse en los retornos diarios, pero perderse o estabilizarse en los retornos semanales o mensuales, desaprovechando la oportunidad de identificarlos en el modelamiento del comportamiento de la volatilidad. Lo mismo sucede al intentar identificar un modelo ARMA para la correlación serial de los retornos, donde los retornos diarios a menudo muestran algunas correlaciones seriales menores, en comparación a los retornos mensuales que probablemente no contengan correlaciones seriales significativas (Tsay, 2013).

Considerar los retornos diarios permitió que el modelamiento de la volatilidad presentara resultados más interesantes, sin embargo, si bien frecuentemente se logra ajustar más de un modelo a la serie financiera, comparándolos luego mediante sus criterios de información, esto no sucedió para algunas de las acciones estudiadas, ya que solo se pudo ajustar un único modelo, correspondiente a la versión más básica de los modelos GARCH, esto indica que los retornos de estos activos financieros no presentan efecto asimetría o premio por riesgo. La simplicidad del modelo obtenido para estas series dio paso a realizar el ajuste multivariante, buscando a través de este, un modelo adicional que permita explicar el comportamiento de la volatilidad.

Los modelos de correlación condicional dinámica ajustados a las series de Intel, Nvidia y Meta, entregaron modelos significativos estadísticamente a un 95%, modelos que muestran además el comportamiento de la covarianza condicional. El principal resultado de este ajuste corresponde a que,

cada una de las series modeladas presentan covarianzas positivas con el índice S&P 500 durante todo el periodo estudiado. Estas covarianzas se vieron incrementadas significativamente durante el primer trimestre de 2020, mostrando el incremento de la relación entre estas series durante el remezón en los mercados financieros provocado por la incertidumbre generada por el COVID – 19.

Los gráficos de la estimación muestran claramente los clusters de volatilidad, de los cuales destaca, además del agrupamiento de alta volatilidad del 2020, el cluster de alta volatilidad de 2018. Este periodo de alta volatilidad se produjo debido a las altas tasas de interés por parte de la FED, el temor de un estancamiento económico mundial y la incertidumbre política estadounidense. Es en este agrupamiento donde se puede evidenciar que las acciones tecnológicas tienden a ser más volátiles que los activos financieros de otros sectores, dado que presentaron volatilidades más altas durante este periodo en comparación a índices bursátiles como, por ejemplo, el Standard & Poor's 500, Dow Jones Industrial Average, Russell 2000 e Ibex 35 (Ver anexo 10). Durante 2020 la gran mayoría de los mercados presentaron alta volatilidad por lo que este efecto no es tan evidente. Se puede ver además que, durante todo el periodo de estudio, la mayoría de las acciones tecnológicas estudiadas presentan mayor volatilidad que los índices presentados anteriormente.

En relación a los ajustes realizados, el modelamiento a través de la especificación GARCH DCC claramente incorpora mayor información al análisis del comportamiento de la volatilidad de cada serie de tiempo, dado que muestra una relación entre las volatilidades de dos o más series. Sin embargo, los modelos multivariantes suelen incorporar solo vectores de innovaciones y vectores de estimaciones anteriores para explicar el comportamiento de la matriz de varianza – covarianza, siendo un símil de los modelos GARCH básicos, no considerando el análisis del efecto asimetría o de premio por riesgo. Lo anterior es consecuencia del principal problema de los modelos multivariantes, el cual corresponde a la gran cantidad de parámetros a estimar, por lo tanto, incorporar nuevos parámetros que permitan modelar particularidades del comportamiento de la volatilidad, dificulta aún más la estimación de estos. Por ende, los modelos multivariantes no son superiores a los univariantes, ni viceversa, si no que dependerá de cada serie de tiempo modelada y del comportamiento que se quiera analizar.

6. Conclusiones

6.1 Sumario

El estudio realizado determina modelos adecuados para explicar el comportamiento de la volatilidad de las principales acciones tecnológicas durante los últimos 4 años (2018 - 2021), para de esta forma, entender y cuantificar los riesgos asociados a la inversión en este tipo de activos financieros, y así, entregar una herramienta que apoye la toma de decisiones a los inversionistas, principalmente minoritarios.

Las series de precios y retornos correspondientes a cada activo financiero estudiado se construyeron en base a información recopilada de sitios web financieros. El análisis preliminar de la serie de precios y retornos se ejemplificó a través de las acciones de Adobe, activo financiero que se utilizó como modelo durante todo el ajuste univariante. La metodología utilizada considera un ajuste de modelo ARMA para el modelamiento de correlación serial, luego evalúa la presencia de heterocedasticidad condicional, para posteriormente identificar un modelo ARCH/GARCH adecuado, estimar los parámetros, evaluar el modelo y finalmente pronosticar.

Siguiendo la metodología planteada se ajustaron modelos para cada serie estudiada, además, se realizaron ajustes multivariantes, modelando la correlación condicional de algunos de estos activos financieros con el índice Standard & Poor's 500, índice bursátil considerado como el más representativo de la situación actual del mercado estadounidense.

Finalmente, luego del ajuste realizado y su correspondiente validación, se obtuvieron los gráficos de pronóstico de retornos y volatilidad para cada una de las series financieras estudiadas.

6.2 Conclusiones

El principal resultado obtenido del ajuste de los modelos corresponde al modelamiento del efecto asimetría, gran parte de las series estudiadas presenta este comportamiento, lo que implica que frente a malas noticias (baja en el precio del activo), el efecto sobre la volatilidad será mayor en comparación con las buenas noticias. Este efecto “Leverage” se presentó en las acciones de Alphabet, Amazon, Apple, Microsoft y Paypal.

Ninguna de las series estudiadas presenta un efecto de premio por riesgo, es decir, no existe un efecto directo de la volatilidad sobre los retornos, esto significa que, mayor volatilidad no implica un mayor

valor en los retornos del activo financiero. Considerando lo anteriormente expuesto y sabiendo que las acciones tecnológicas suelen ser más volátiles que los activos financieros de otros sectores del mercado, se cuestiona que tan conveniente resulta ser invertir en este tipo de activos, dado que, se espera que un mayor riesgo implique una mayor recompensa.

El estudio permitió corroborar que, al menos en el periodo estudiado, las acciones tecnológicas suelen ser más volátiles que otros activos financieros, provocando que, frente a situaciones de incertidumbre política y económica, el precio al que cotizan disminuya de forma considerable, tal como se ha evidenciado durante este primer semestre de 2022, donde la incertidumbre de los mercados por la posible quiebra de Evergrande, el conflicto bélico en Europa oriental, la crisis económica post COVID – 19 y los altos niveles de inflación en Estados Unidos, han provocado que las empresas tecnológicas y los activos volátiles como las criptomonedas, perdieran gran parte del valor que generaron durante el periodo de pandemia. Un claro indicador de lo anterior corresponde a que el índice NASDAQ, (principal índice que reúne a las empresas de alta tecnología), que acumula una caída del 27% desde inicios de enero a finales de mayo de 2022.

Este tipo de sucesos muestra la importancia de conocer cómo se comporta la volatilidad de los activos en los que se invierte, demostrando el valor de los modelos que permiten realizar estimaciones y pronósticos, y en particular la significancia de los modelos GARCH, que entregan, además, a través de sus pronósticos de volatilidad, inputs para otros instrumentos, como la medición del riesgo a través del VAR, o la evaluación de opciones futuras a través de la ecuación de Black – Scholes.

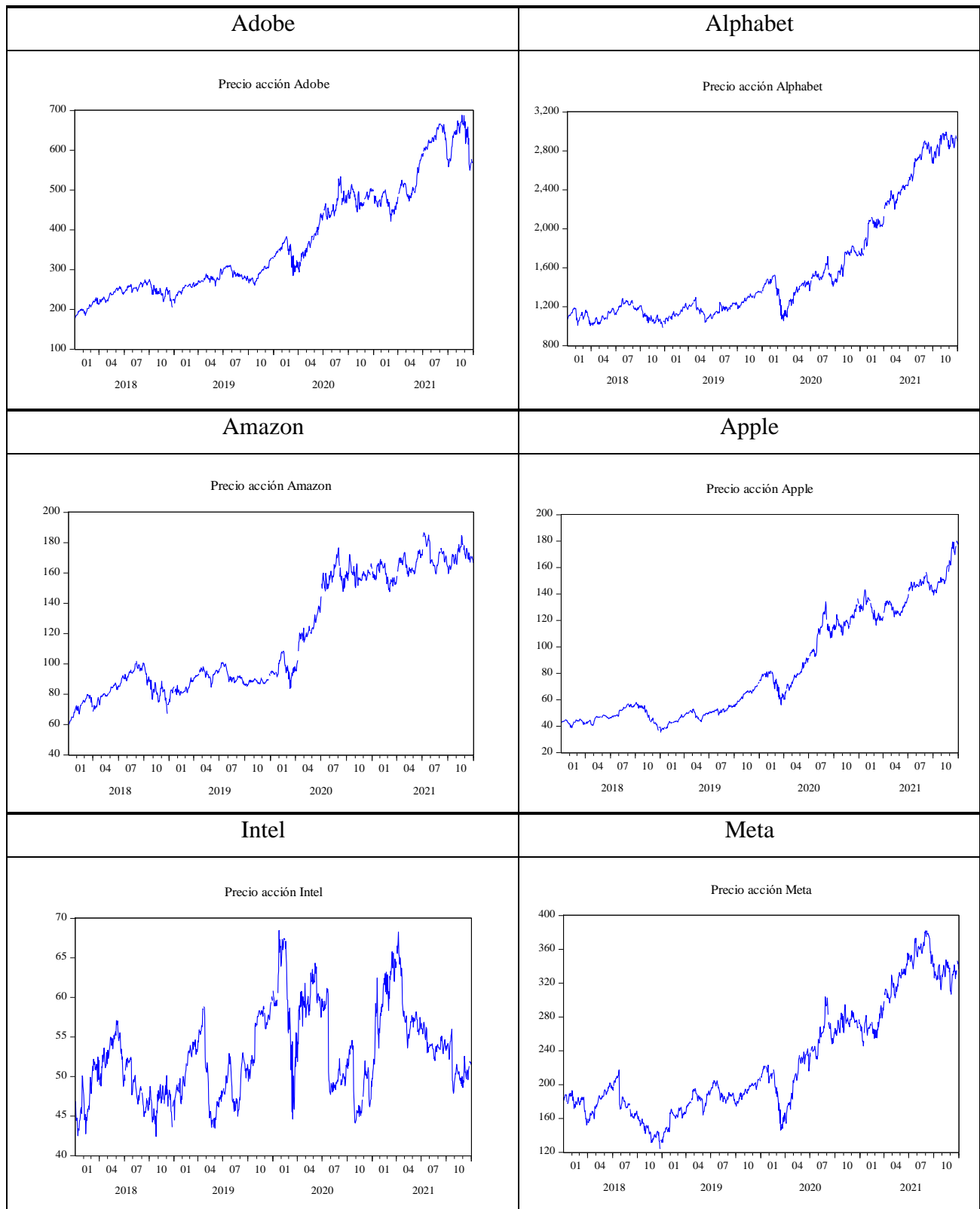
7. Referencias

- Amante, K. (2018). Modelos ARCH y GARCH: Aplicación a series financieras. Diposit digital.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Christoffersen, P. F., & Diebold, F. X. (2006). Volatility and correlation forecasting. *Handbook of economic forecasting*, 1, 777-878.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3), 307-327.
- Bollerslev, T. (1990). Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH model. *The review of economics and statistics*, 498-505.
- Bollerslev, T., & Wooldridge, J. M. (1992). Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances. *Econometric reviews*, 11(2), 143-172.
- Bollerslev, T., Engle, R. F., & Wooldridge, J. M. (1988). A capital asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of political Economy*, 96(1), 116-131.
- Brooks, C. (2019). *Introductory Econometrics for Finance (English Edition) (4.a ed.)*. Cambridge University Press.
- Campbell, J. Y., Lo, A. W., MacKinlay, A. C., & Whitelaw, R. F. (1998). The econometrics of financial markets. *Macroeconomic Dynamics*, 2(4), 559-562.
- Conde, A. B. A. (2004). *Comercio electrónico: antecedentes, fundamentos y estado actual*. Dykinson.
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative finance*, 1(2), 223.
- Ding, Z., Granger, C. W., & Engle, R. F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of empirical finance*, 1(1), 83-106.
- Elescano Rojas, A., & Agüero Palacios, Y. D. (2004). An application to forecast volatility in the lima stock market.
- Engle, R. (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3), 339-350.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the econometric society*, 987-1007.
- González Casimiro, M. P. (2009). *Análisis de series temporales: Modelos ARIMA*.
- Laurent, S. (2004). Analytical derivatives of the APARCH model. *Computational Economics*, 24(1), 51-57.

- MacBeth, J. D., & Merville, L. J. (1979). An empirical examination of the Black-Scholes call option pricing model. *The journal of finance*, 34(5), 1173-1186.
- Martín Pérez, A. (2018). ¿ Una nueva burbuja bursátil en el mercado tecnológico? El caso de las FAG (Facebook, Amazon y Google).
- Medina, R. T., & Pinzón, H. Y. R. (2010). Una revisión de los modelos de volatilidad estocástica. *Comunicaciones en Estadística*, 3(1), 79-98.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica: Journal of the econometric society*, 347-370.
- Paramés, F. G. (2016). *Invirtiendo a largo plazo: Mi experiencia como inversor*. Deusto.
- Pérez, G. C., & Suárez, G. R. (2022). Análisis del comportamiento de los inversores minoristas en los mercados financieros durante la crisis del COVID-19. *Documentos de trabajo (CNMV)*, (78), 1-46.
- Poon, S. H., & Granger, C. W. (2003). Forecasting volatility in financial markets: A review. *Journal of economic literature*, 41(2), 478-539.
- Tsay, R. S. (2005). *Analysis Of Financial Time Series* (2.a ed.). Wiley-Interscience.
- Tsay R.S. (2013). *Multivariate Time Series Analysis* (1. ed.). Wiley-Interscience.
- Vargas, A. S., & Martínez, O. R. (2006). Regularidades probabilísticas de las series financieras y la familia de modelos GARCH. *CIENCIA ergo-sum, Revista Científica Multidisciplinaria de Prospectiva*, 13(2), 149-156.
- Villavicencio, J. (2010). *Introducción a series de tiempo*. Puerto Rico.

8. Anexos

8.1 Anexo 1: Gráfico serie de tiempo acciones tecnológicas



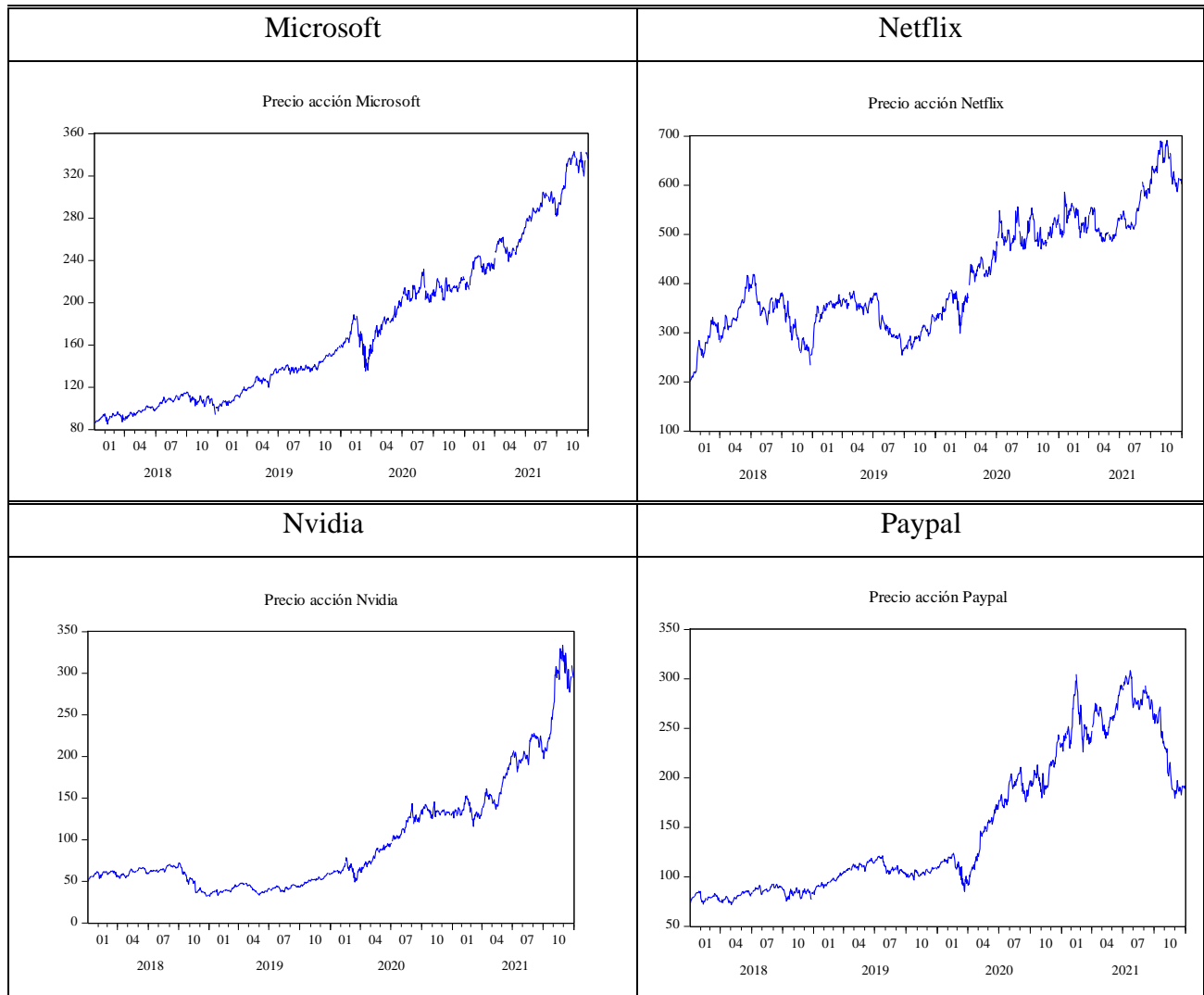
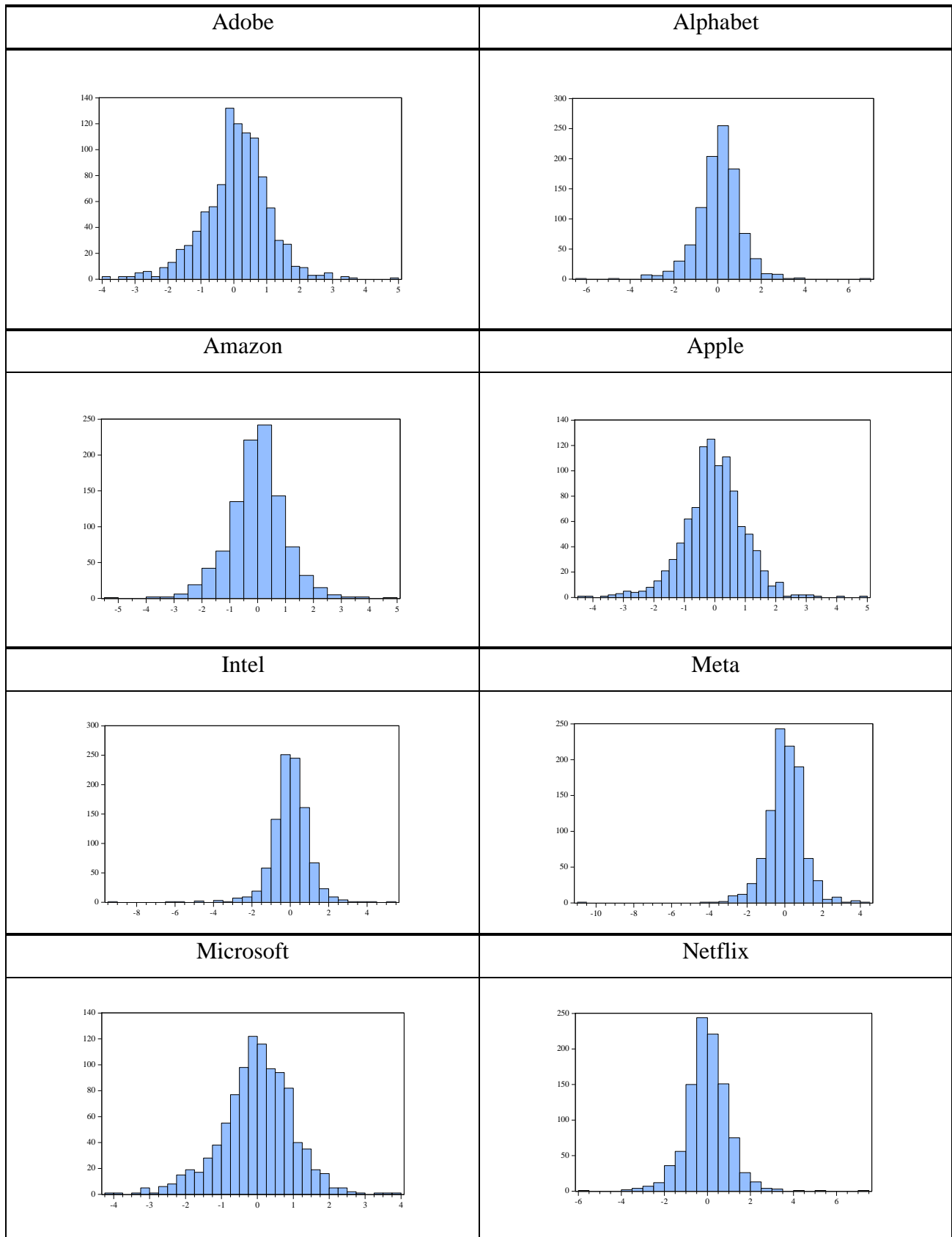


Tabla 8.1: Gráficos de series de tiempo de acciones tecnológicas trabajadas
Fuente: Elaboración propia, Eviews 10

8.2 Anexo 2: Histograma de residuos estandarizados luego de ajuste GARCH

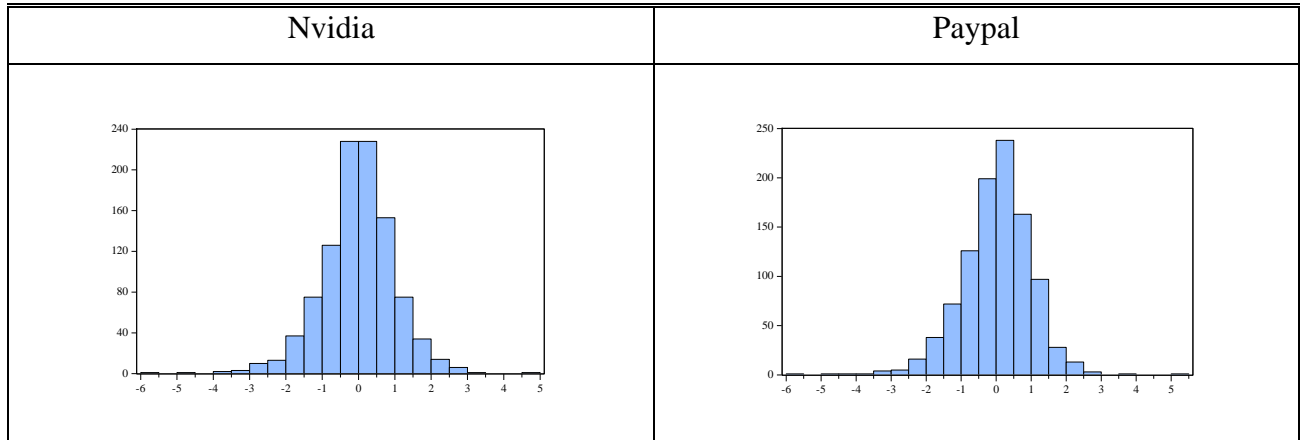


Tabla 8.2: Gráficos de histogramas de residuos estandarizados para cada serie estudiada
Fuente: Elaboración propia, Eviews 10

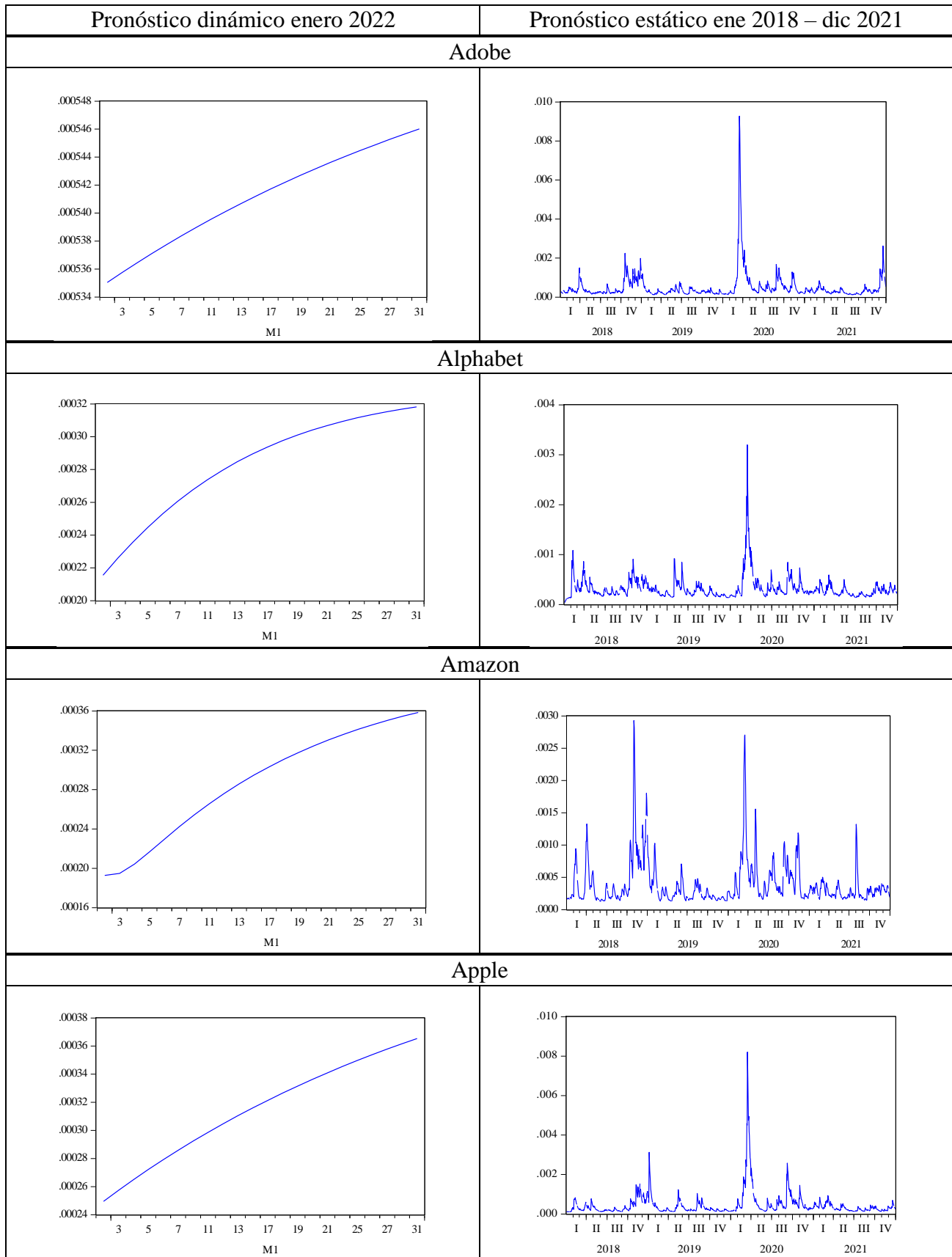
8.3 Anexo 3: Pronósticos de volatilidad para enero de 2022

Fecha	Adobe	Alphabet	Amazon	Apple	Intel	Meta	Microsoft	Netflix	Nvidia	Paypal
31/12/2021	0,023136	0,014694	0,013892	0,015803	0,018507	0,019394	0,014326	0,019475	0,029156	0,017838
03/01/2022	0,023244	0,015064	0,013969	0,016049	0,019734	0,020563	0,014514	0,019757	0,029308	0,018104
04/01/2022	0,023259	0,015397	0,014307	0,016282	0,020538	0,021371	0,014681	0,020024	0,029450	0,018359
05/01/2022	0,023274	0,015698	0,014729	0,016504	0,021112	0,021938	0,014833	0,020275	0,029584	0,018605
06/01/2022	0,023288	0,015969	0,015162	0,016714	0,021528	0,022341	0,014971	0,020513	0,029710	0,018840
07/01/2022	0,023301	0,016212	0,015573	0,016915	0,021831	0,022629	0,015097	0,020737	0,029829	0,019067
10/01/2022	0,023314	0,016431	0,015955	0,017105	0,022053	0,022835	0,015213	0,020950	0,029940	0,019284
11/01/2022	0,023327	0,016627	0,016304	0,017287	0,022216	0,022983	0,015319	0,021150	0,030045	0,019492
12/01/2022	0,023339	0,016803	0,016622	0,017460	0,022336	0,023091	0,015418	0,021341	0,030144	0,019692
13/01/2022	0,023351	0,016961	0,016912	0,017626	0,022425	0,023168	0,015510	0,021521	0,030237	0,019883
14/01/2022	0,023363	0,017102	0,017176	0,017783	0,022490	0,023224	0,015594	0,021692	0,030325	0,020066
15/01/2022	0,023374	0,017229	0,017417	0,017934	0,022538	0,023265	0,015673	0,021854	0,030407	0,020242
18/01/2022	0,023384	0,017342	0,017637	0,018078	0,022574	0,023294	0,015746	0,022007	0,030485	0,020409
19/01/2022	0,023395	0,017443	0,017837	0,018215	0,022600	0,023315	0,015813	0,022153	0,030558	0,020569
20/01/2022	0,023405	0,017533	0,018021	0,018347	0,022620	0,023331	0,015876	0,022292	0,030627	0,020722
21/01/2022	0,023414	0,017613	0,018189	0,018472	0,022634	0,023342	0,015934	0,022423	0,030692	0,020869
24/01/2022	0,023424	0,017685	0,018343	0,018593	0,022645	0,023350	0,015988	0,022549	0,030753	0,021008
25/01/2022	0,023433	0,017749	0,018484	0,018708	0,022653	0,023356	0,016039	0,022667	0,030811	0,021142
26/01/2022	0,023441	0,017806	0,018613	0,018818	0,022659	0,023360	0,016085	0,022781	0,030865	0,021269
27/01/2022	0,023450	0,017857	0,018732	0,018923	0,022663	0,023363	0,016129	0,022888	0,030916	0,021390
28/01/2022	0,023458	0,017902	0,018841	0,019024	0,022666	0,023365	0,016169	0,022990	0,030965	0,021506
31/01/2022	0,023466	0,017942	0,018942	0,019121	0,022669	0,023367	0,016206	0,023088	0,031010	0,021616

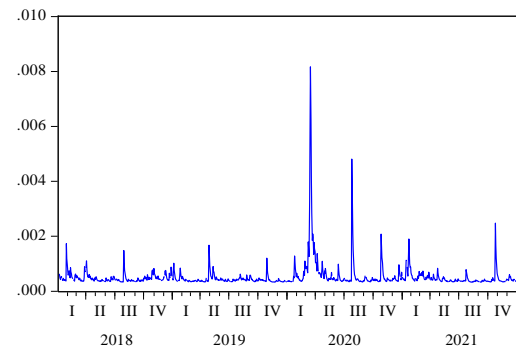
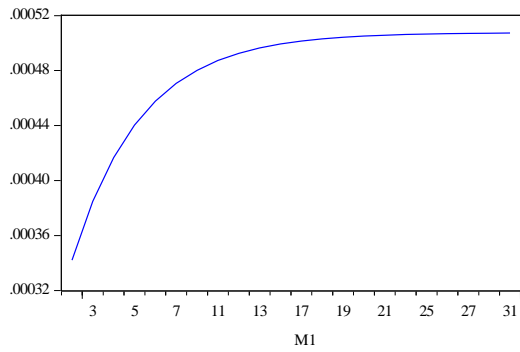
Tabla 8.3: Pronóstico dinámico para volatilidad diaria de series estudiadas para enero de 2022

Fuente: Elaboración propia

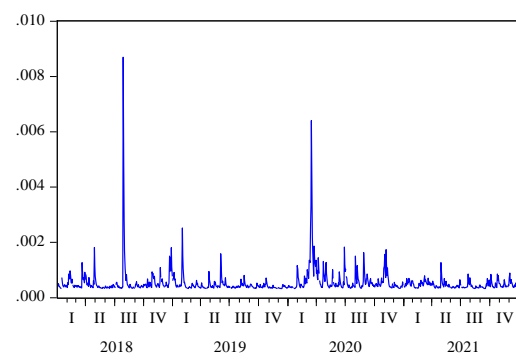
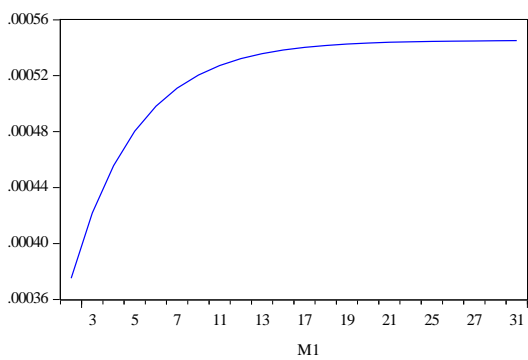
8.4 Anexo 4: Gráficos de pronósticos de volatilidad de ajuste GARCH



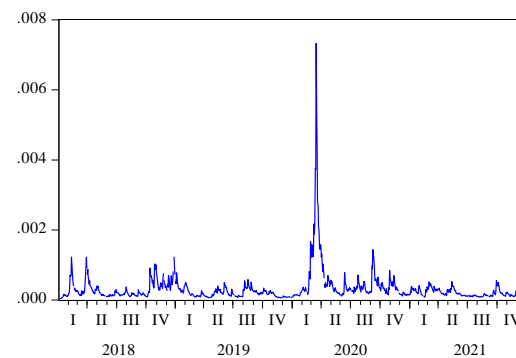
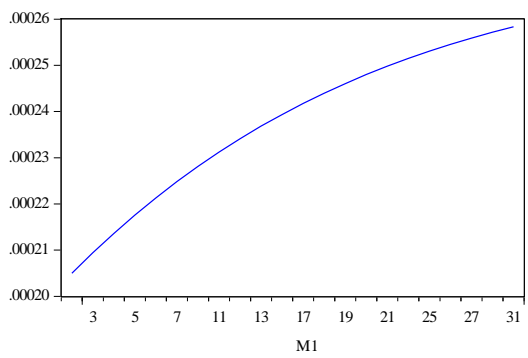
Intel



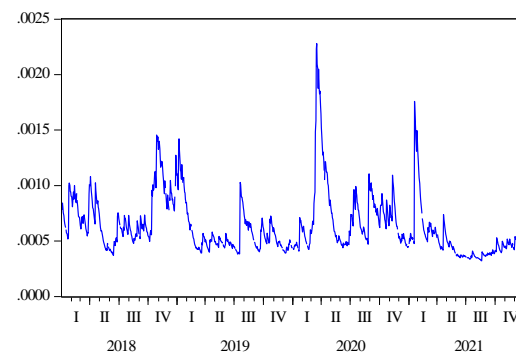
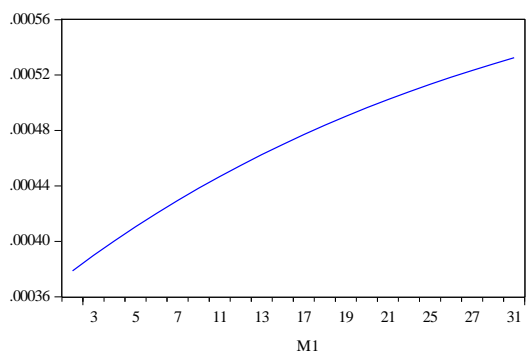
Meta



Microsoft



Netflix



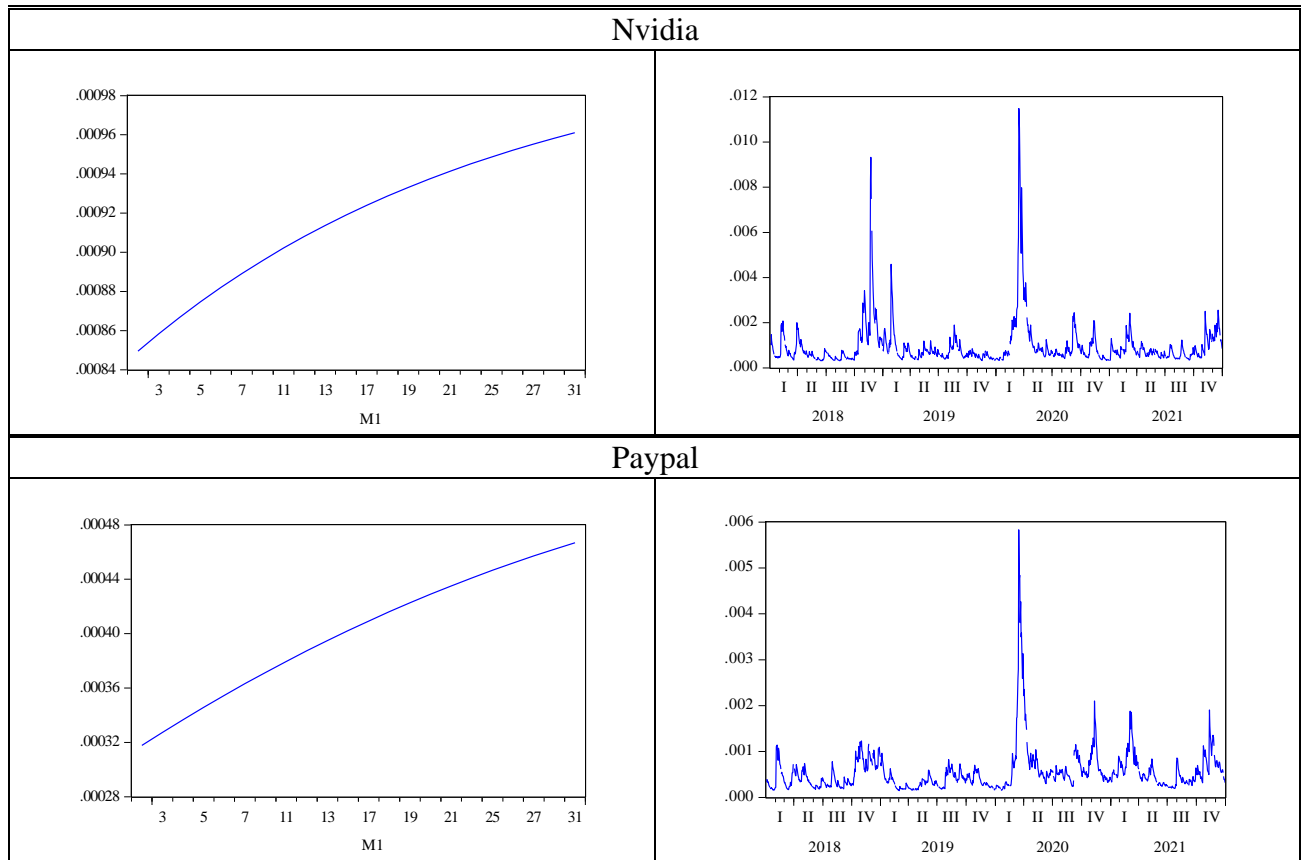
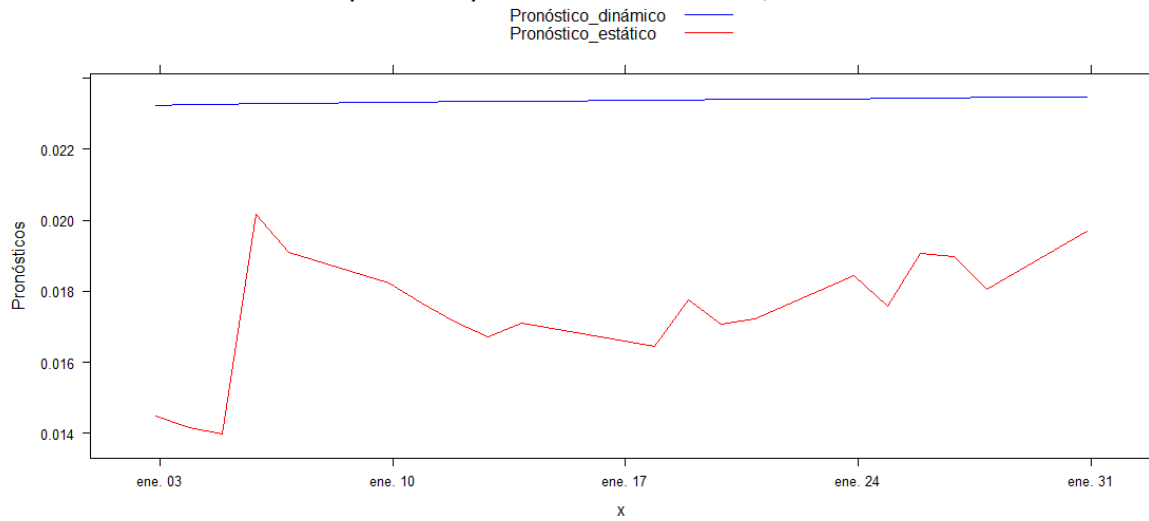


Tabla 8.4: Gráficos de pronósticos para volatilidad diaria de series estudiadas para enero de 2022

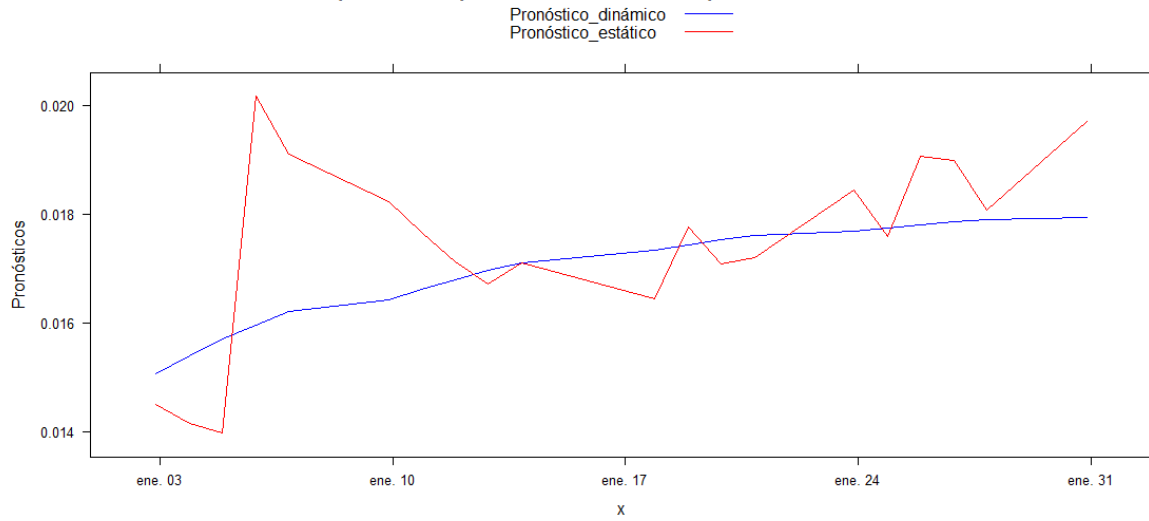
Fuente: Elaboración propia

8.5 Anexo 5: Gráficos de comparación de pronósticos

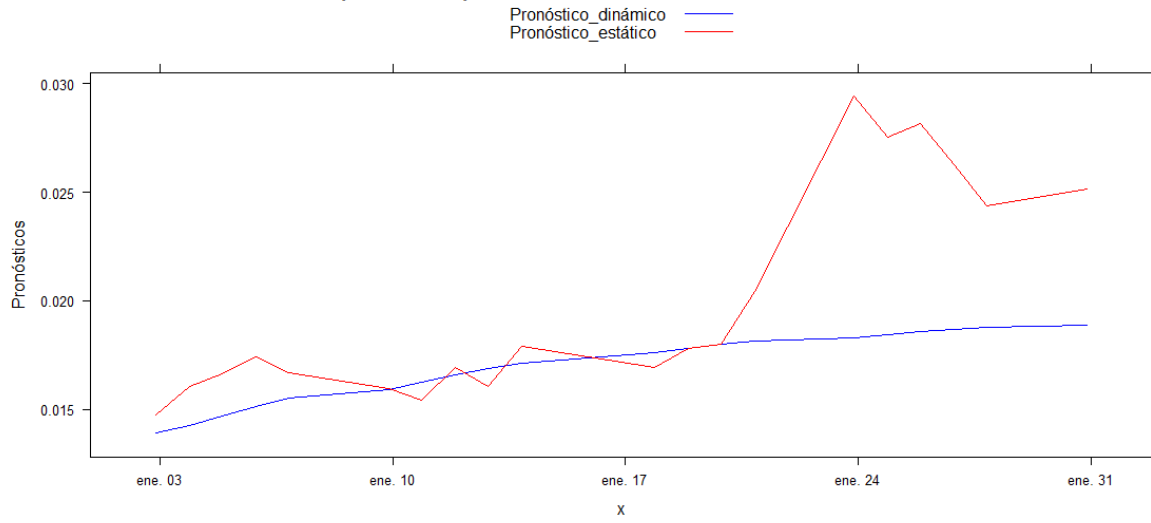
Comparación de pronósticos volatilidad Adobe, enero 2022



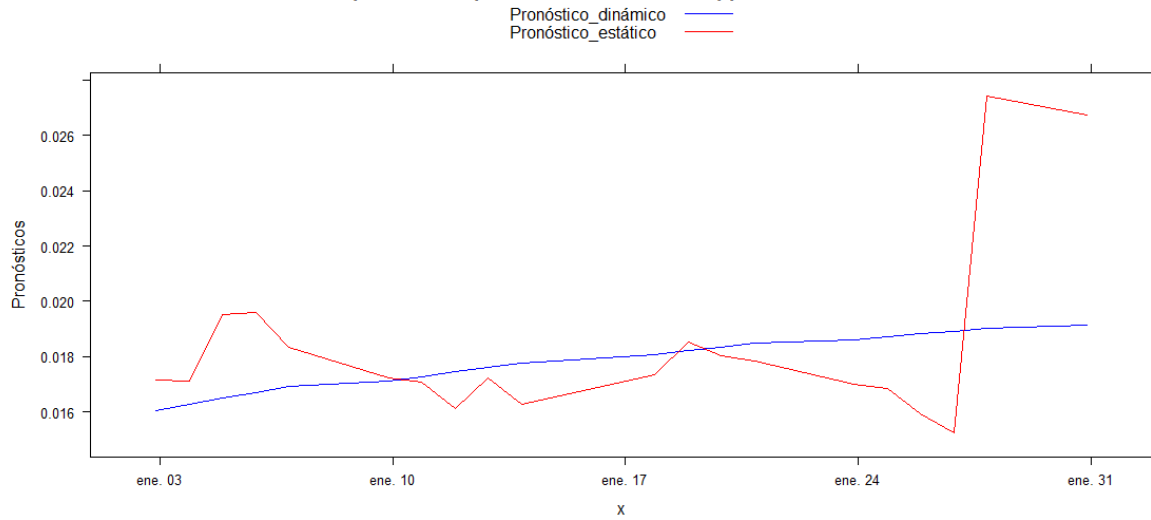
Comparación de pronósticos volatilidad Alphabet, enero 2022



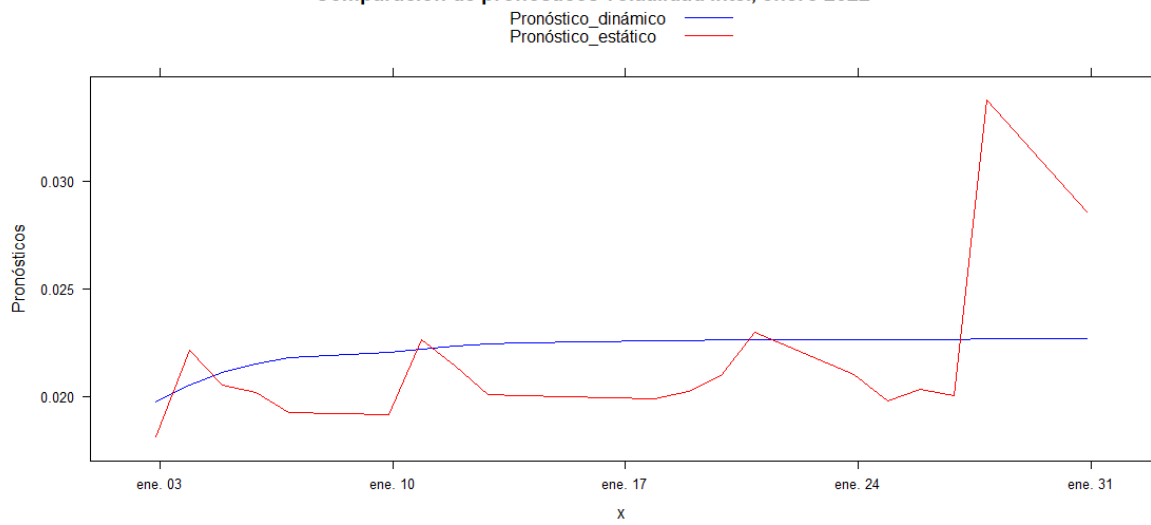
Comparación de pronósticos volatilidad Amazon, enero 2022



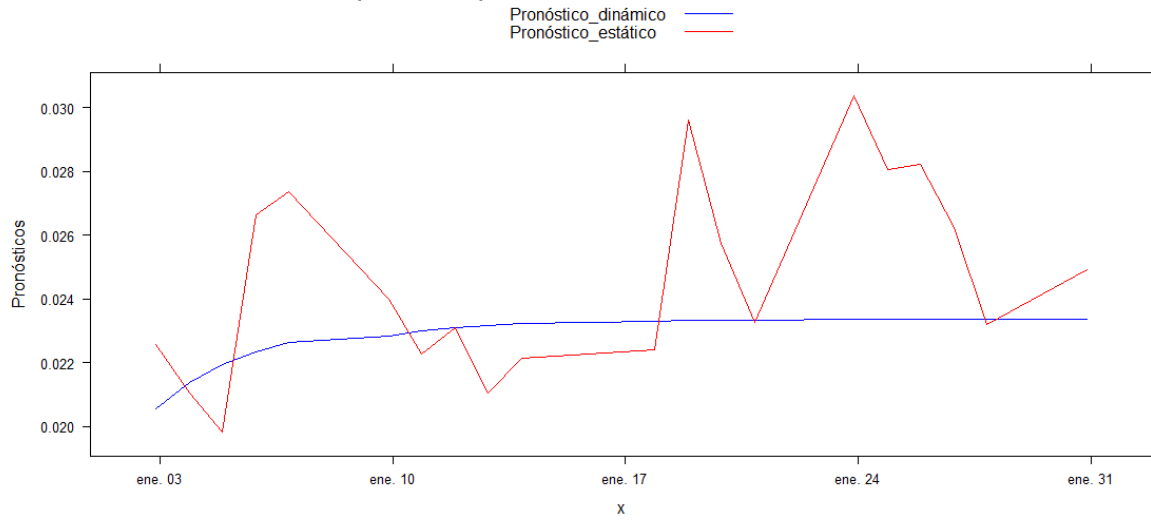
Comparación de pronósticos volatilidad Apple, enero 2022



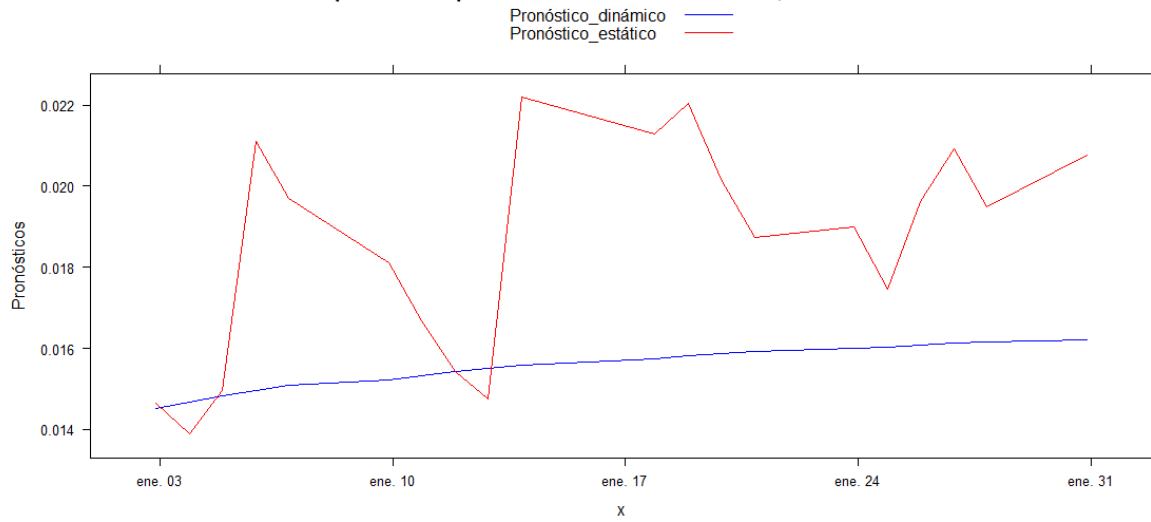
Comparación de pronósticos volatilidad Intel, enero 2022



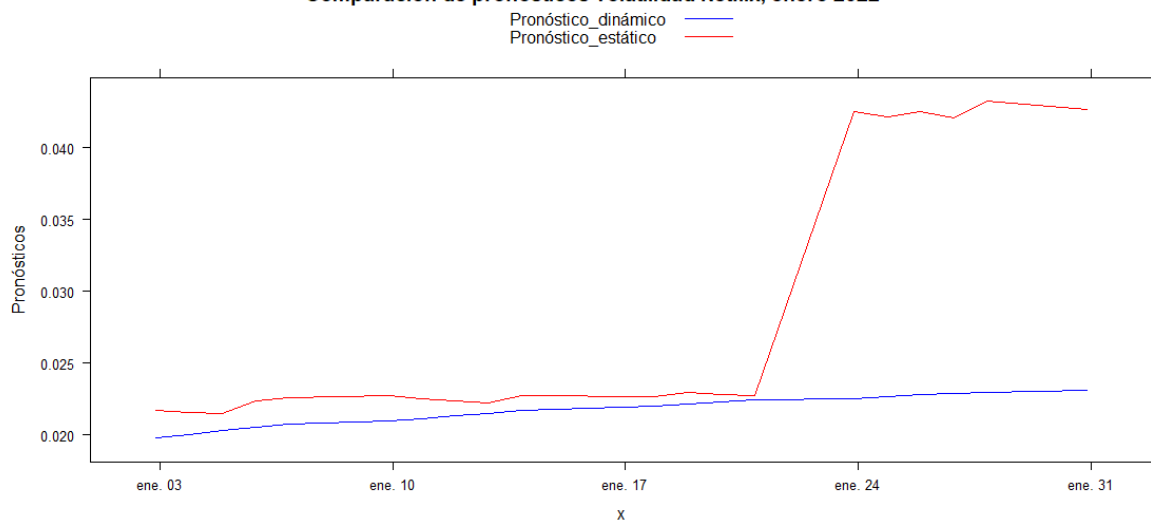
Comparación de pronósticos volatilidad Meta, enero 2022



Comparación de pronósticos volatilidad Microsoft, enero 2022



Comparación de pronósticos volatilidad Netflix, enero 2022



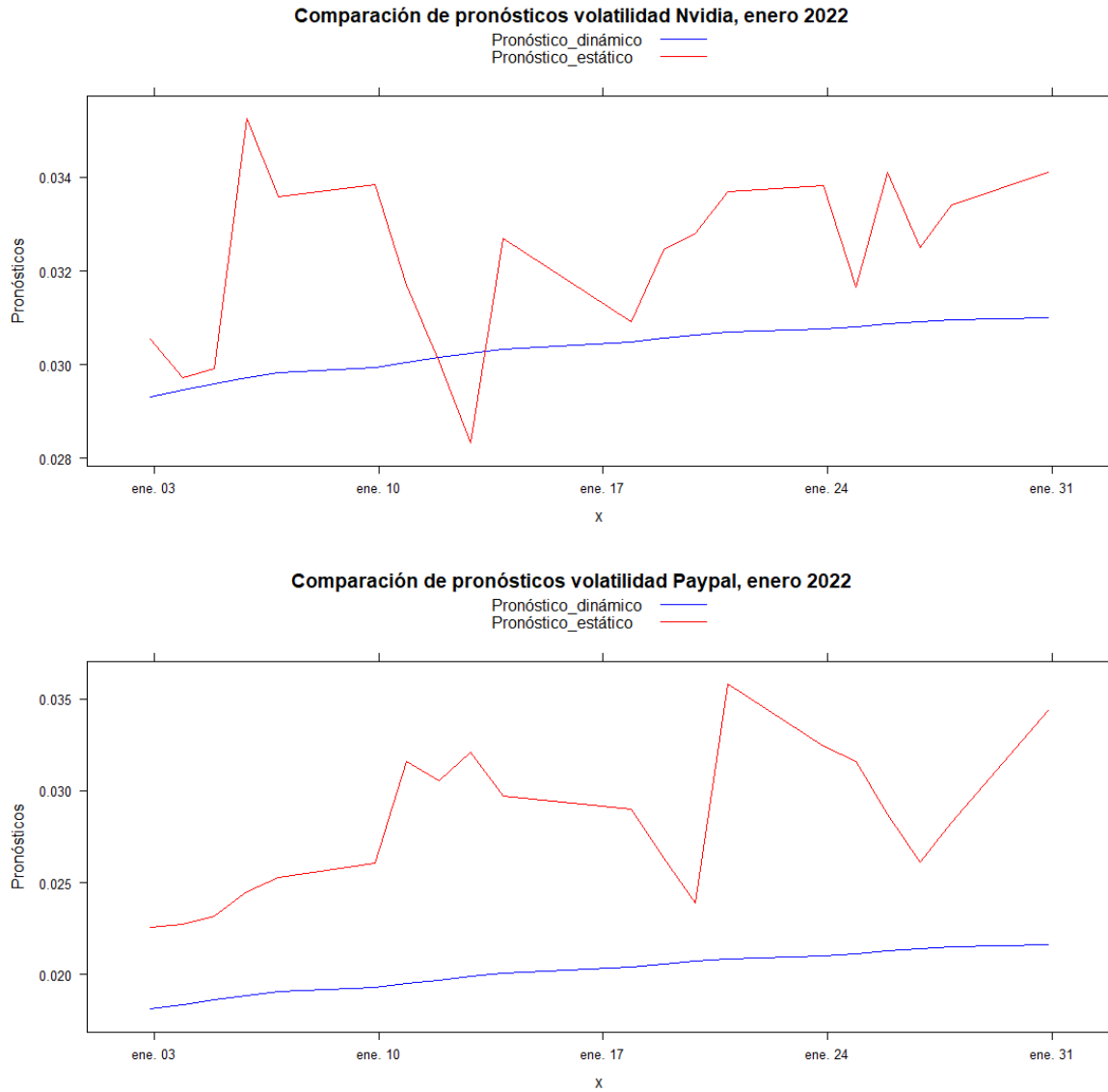


Figura 8.1: Gráficos de comparación de pronósticos dinámicos y estáticos de volatilidad para enero de 2022
Fuente: Elaboración propia

8.6 Anexo 6: Gráficos de volatilidad condicional vs valor absoluto de retornos

A continuación, se muestran la estimación de la volatilidad de los modelos GARCH ajustados en la primera etapa del modelamiento GARCH – DCC.

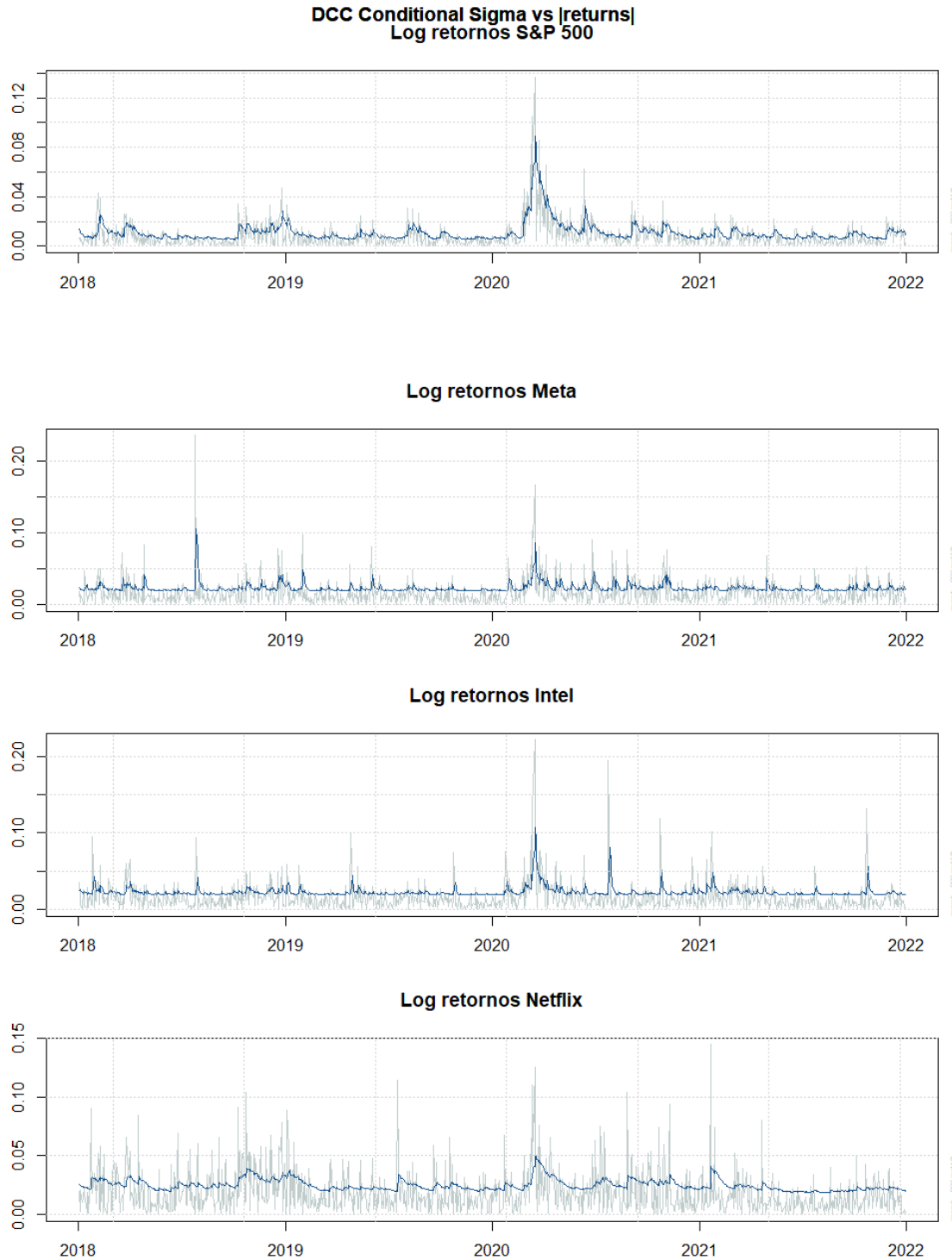


Figura 8.2: Pronóstico estático para varianza condicional de series estudiadas vs el valor absoluto de sus retornos
Fuente: Elaboración propia

8.7 Anexo 7: Pronóstico de volatilidad 30 días

A continuación, se muestran el pronóstico de la volatilidad de los modelos GARCH ajustados en la primera etapa del modelamiento GARCH – DCC.

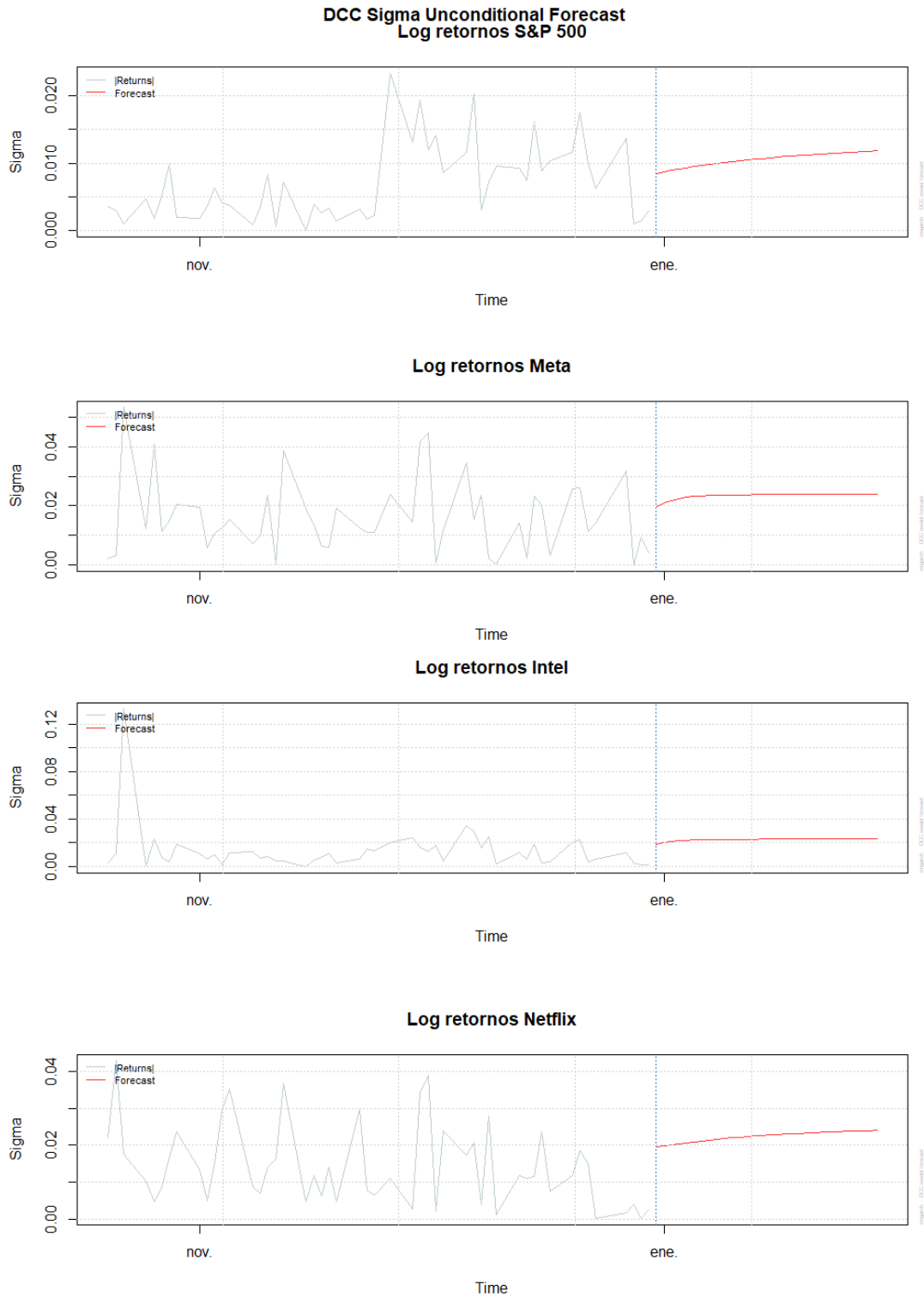


Figura 8.3: Pronóstico dinámico para varianza condicional de series estudiadas
Fuente: Elaboración propia

8.8 Anexo 8: Pronóstico de covarianza condicional 30 días

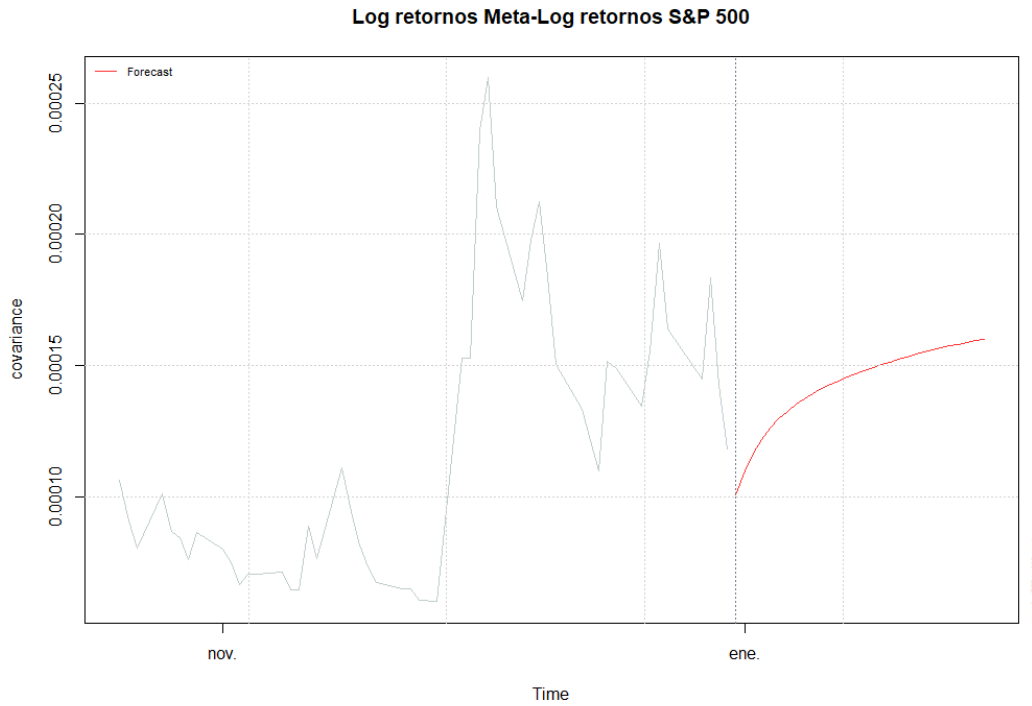


Figura 8.4: Pronóstico dinámico de covarianza condicional de los retornos del índice S&P500 y los retornos de Meta para enero de 2022
Fuente: Elaboración propia

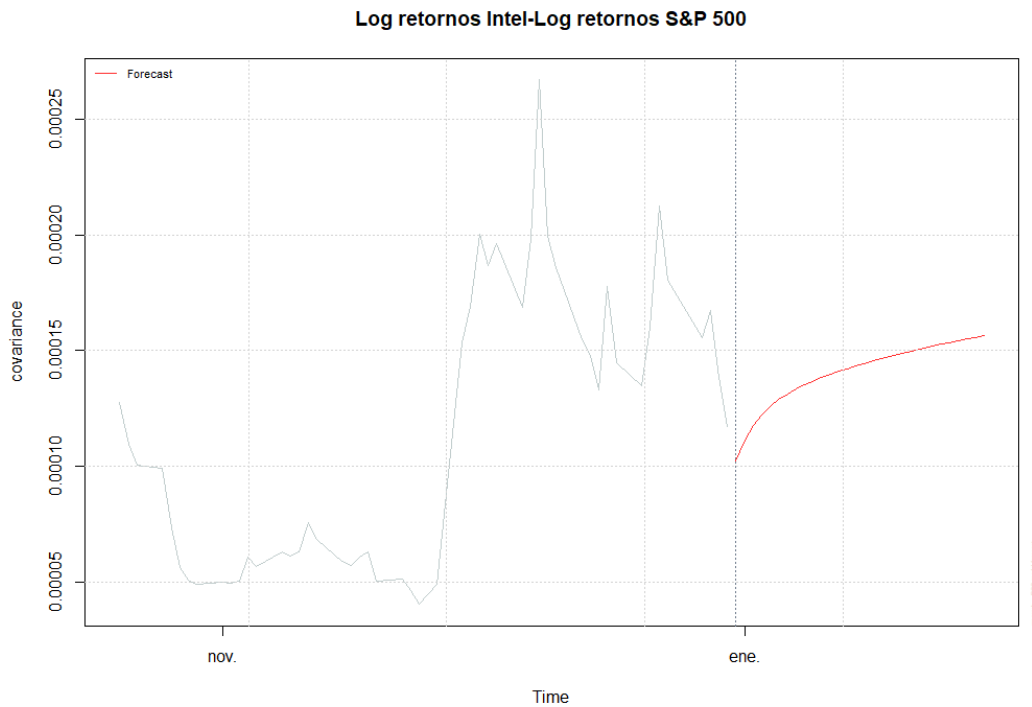


Figura 8.5: Pronóstico dinámico de covarianza condicional de los retornos del índice S&P500 y los retornos de Intel para enero de 2022
Fuente: Elaboración propia

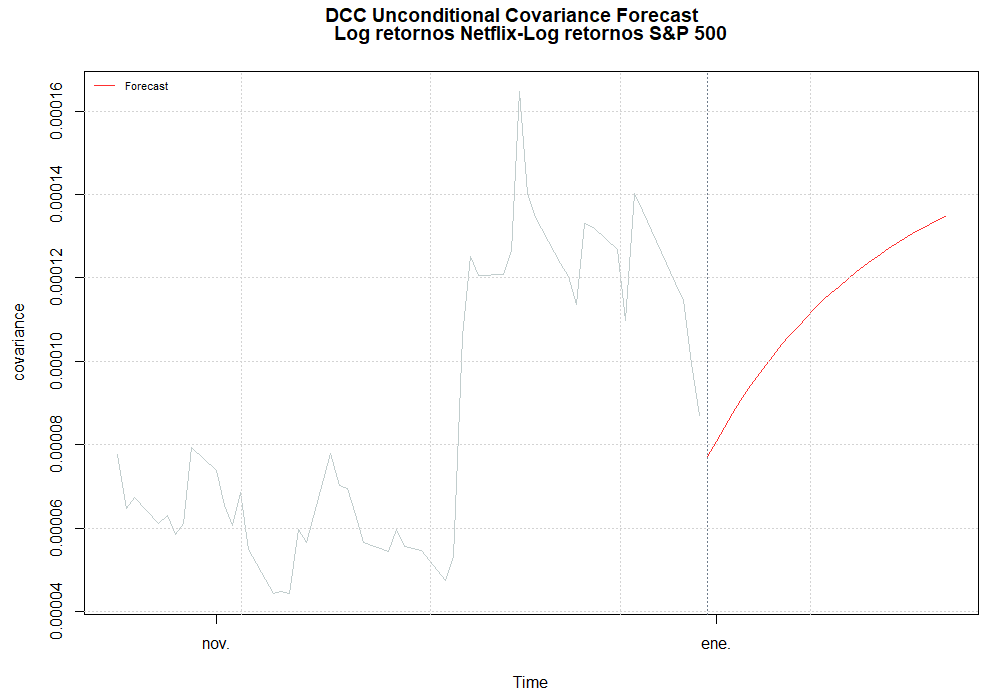


Figura 8.6: Pronóstico dinámico de covarianza condicional de los retornos del índice S&P500 y los retornos de Netflix para enero de 2022
Fuente: Elaboración propia

8.9 Anexo 9: Pronóstico de matrices de varianza – covarianza condicional

Fecha		S&P 500	Nvidia
03/01/2022	S&P 500	7.213766e-05	0.0001679891
	Nvidia	1.679891e-04	0.0008470965
04/01/2022	S&P 500	7.595884e-05	0.0001721171
	Nvidia	1.721171e-04	0.0008594677
05/01/2022	S&P 500	7.963234e-05	0.0001760765
	Nvidia	1.760765e-04	0.0008712078
06/01/2022	S&P 500	8.316388e-05	0.0001798822
	Nvidia	1.798822e-04	0.0008823490
07/01/2022	S&P 500	8.655894e-05	0.0001835459
	Nvidia	1.835459e-04	0.0008929218
10/01/2022	S&P 500	0.0000898228	0.0001870763
	Nvidia	0.0001870763	0.0009029553
11/01/2022	S&P 500	9.296052e-05	0.0001904804
	Nvidia	1.904804e-04	0.0009124769
12/01/2022	S&P 500	9.597698e-05	0.0001937639
	Nvidia	1.937639e-04	0.0009215127
13/01/2022	S&P 500	9.887686e-05	0.0001969315
	Nvidia	1.969315e-04	0.0009300876
14/01/2022	S&P 500	0.0001016647	0.0001999869
	Nvidia	0.0001999869	0.0009382251
15/01/2022	S&P 500	0.0001043448	0.0002029338
	Nvidia	0.0002029338	0.0009459474
18/01/2022	S&P 500	0.0001069213	0.0002057753
	Nvidia	0.0002057753	0.0009532757
19/01/2022	S&P 500	0.0001093982	0.0002085142
	Nvidia	0.0002085142	0.0009602302
20/01/2022	S&P 500	0.0001117794	0.0002111535
	Nvidia	0.0002111535	0.0009668299
21/01/2022	S&P 500	0.0001140686	0.0002136957
	Nvidia	0.0002136957	0.0009730929
24/01/2022	S&P 500	0.0001162693	0.0002161436
	Nvidia	0.0002161436	0.0009790365
25/01/2022	S&P 500	0.0001183850	0.0002184997
	Nvidia	0.0002184997	0.0009846768
26/01/2022	S&P 500	0.0001204189	0.0002207667
	Nvidia	0.0002207667	0.0009900293
27/01/2022	S&P 500	0.0001223742	0.0002229471
	Nvidia	0.0002229471	0.0009951088
28/01/2022	S&P 500	0.0001242539	0.0002250436
	Nvidia	0.0002250436	0.0009999292
31/01/2022	S&P 500	0.0001260610	0.0002270588
	Nvidia	0.0002270588	0.0010045037

Tabla 8.5: Pronóstico dinámico de matriz de varianza – covarianza condicional de los retornos del índice S&P500 y los retornos de Nvidia para enero de 2022

Fuente: Elaboración propia

Fecha		S&P 500	Meta
03/01/2022	S&P 500	7.213766e-05	0.0001007611
	Meta	1.007611e-04	0.0003859103
04/01/2022	S&P 500	7.595884e-05	0.0001097615
	Meta	1.097615e-04	0.0004390477
05/01/2022	S&P 500	7.963234e-05	0.0001165673
	Meta	1.165673e-04	0.0004765282
06/01/2022	S&P 500	8.316388e-05	0.000121883
	Meta	1.218830e-04	0.000502965
07/01/2022	S&P 500	8.655894e-05	0.0001261487
	Meta	1.261487e-04	0.0005216121
10/01/2022	S&P 500	8.98228e-05	0.0001296560
	Meta	1.29656e-04	0.0005347649
11/01/2022	S&P 500	9.296052e-05	0.0001326046
	Meta	1.326046e-04	0.0005440422
12/01/2022	S&P 500	9.597698e-05	0.0001351347
	Meta	1.351347e-04	0.0005505860
13/01/2022	S&P 500	9.887686e-05	0.0001373464
	Meta	1.373464e-04	0.0005552016
14/01/2022	S&P 500	0.0001016647	0.0001393116
	Meta	0.0001393116	0.0005584572
15/01/2022	S&P 500	0.0001043448	0.0001410828
	Meta	0.0001410828	0.0005607536
18/01/2022	S&P 500	0.0001069213	0.0001426985
	Meta	0.0001426985	0.0005623733
19/01/2022	S&P 500	0.0001093982	0.0001441872
	Meta	0.0001441872	0.0005635158
20/01/2022	S&P 500	0.0001117794	0.0001455704
	Meta	0.0001455704	0.0005643216
21/01/2022	S&P 500	0.0001140686	0.000146864
	Meta	0.0001468640	0.000564890
24/01/2022	S&P 500	0.0001162693	0.0001480805
	Meta	0.0001480805	0.0005652909
25/01/2022	S&P 500	0.0001183850	0.0001492293
	Meta	0.0001492293	0.0005655737
26/01/2022	S&P 500	0.0001204189	0.0001503180
	Meta	0.0001503180	0.0005657732
27/01/2022	S&P 500	0.0001223742	0.0001513525
	Meta	0.0001513525	0.0005659139
28/01/2022	S&P 500	0.0001242539	0.0001523376
	Meta	0.0001523376	0.0005660131
31/01/2022	S&P 500	0.0001260610	0.0001532773
	Meta	0.0001532773	0.0005660831

Tabla 8.6: Pronóstico dinámico de matriz de varianza – covarianza condicional de los retornos del índice S&P500 y los retornos de Meta para enero de 2022

Fuente: Elaboración propia

Fecha		S&P 500	Intel
03/01/2022	S&P 500	7.595884e-05	0.0001111024
	Intel	1.111024e-04	0.0004132616
04/01/2022	S&P 500	7.595884e-05	0.0001111024
	Intel	1.111024e-04	0.0004132616
05/01/2022	S&P 500	7.963234e-05	0.0001174445
	Intel	1.174445e-04	0.0004506438
06/01/2022	S&P 500	8.316388e-05	0.0001221919
	Intel	1.221919e-04	0.0004766081
07/01/2022	S&P 500	8.655894e-05	0.0001258723
	Intel	1.258723e-04	0.0004946418
10/01/2022	S&P 500	0.0000898228	0.0001288214
	Intel	0.0001288214	0.0005071674
11/01/2022	S&P 500	9.296052e-05	0.0001312601
	Intel	1.312601e-04	0.0005158671
12/01/2022	S&P 500	9.597698e-05	0.0001333368
	Intel	1.333368e-04	0.0005219096
13/01/2022	S&P 500	9.887686e-05	0.0001351530
	Intel	1.351530e-04	0.0005261065
14/01/2022	S&P 500	0.0001016647	0.0001367783
	Intel	0.0001367783	0.0005290215
15/01/2022	S&P 500	0.0001043448	0.0001382608
	Intel	0.0001382608	0.0005310462
18/01/2022	S&P 500	0.0001069213	0.0001396340
	Intel	0.0001396340	0.0005324524
19/01/2022	S&P 500	0.0001093982	0.0001409213
	Intel	0.0001409213	0.0005334291
20/01/2022	S&P 500	0.0001117794	0.0001421388
	Intel	0.0001421388	0.0005341075
21/01/2022	S&P 500	0.0001140686	0.0001432980
	Intel	0.0001432980	0.0005345787
24/01/2022	S&P 500	0.0001162693	0.0001444068
	Intel	0.0001444068	0.0005349060
25/01/2022	S&P 500	0.0001183850	0.0001454709
	Intel	0.0001454709	0.0005351333
26/01/2022	S&P 500	0.0001204189	0.0001464944
	Intel	0.0001464944	0.0005352911
27/01/2022	S&P 500	0.0001223742	0.0001474803
	Intel	0.0001474803	0.0005354008
28/01/2022	S&P 500	0.0001242539	0.0001484308
	Intel	0.0001484308	0.0005354770
31/01/2022	S&P 500	0.0001260610	0.0001493476
	Intel	0.0001493476	0.0005355299

Tabla 8.7: Pronóstico dinámico de matriz de varianza – covarianza condicional de los retornos del índice S&P500 y los retornos de Intel para enero de 2022

Fuente: Elaboración propia

Fecha		S&P 500	Netflix
03/01/2022	S&P 500	7.213766e-05	7.722051e-05
	Netflix	7.722051e-05	3.819857e-04
04/01/2022	S&P 500	7.595884e-05	8.079216e-05
	Netflix	8.079216e-05	3.948663e-04
05/01/2022	S&P 500	7.963234e-05	8.419604e-05
	Netflix	8.419604e-05	4.070829e-04
06/01/2022	S&P 500	8.316388e-05	8.743965e-05
	Netflix	8.743965e-05	4.186697e-04
07/01/2022	S&P 500	8.655894e-05	9.053035e-05
	Netflix	9.053035e-05	4.296591e-04
10/01/2022	S&P 500	8.982280e-05	9.347534e-05
	Netflix	9.347534e-05	4.400820e-04
11/01/2022	S&P 500	9.296052e-05	0.0000962816
	Netflix	9.628160e-05	0.0004499676
12/01/2022	S&P 500	9.597698e-05	9.895584e-05
	Netflix	9.895584e-05	4.593436e-04
13/01/2022	S&P 500	9.887686e-05	0.0001015045
	Netflix	1.015045e-04	0.0004682362
14/01/2022	S&P 500	0.0001016647	0.0001039338
	Netflix	0.0001039338	0.0004766703
15/01/2022	S&P 500	0.0001043448	0.0001062496
	Netflix	0.0001062496	0.0004846697
18/01/2022	S&P 500	0.0001069213	0.0001084576
	Netflix	0.0001084576	0.0004922567
19/01/2022	S&P 500	0.0001093982	0.0001105630
	Netflix	0.0001105630	0.0004994525
20/01/2022	S&P 500	0.0001117794	0.0001125710
	Netflix	0.0001125710	0.0005062774
21/01/2022	S&P 500	0.0001140686	0.0001144863
	Netflix	0.0001144863	0.0005127505
24/01/2022	S&P 500	0.0001162693	0.0001163135
	Netflix	0.0001163135	0.0005188898
25/01/2022	S&P 500	0.0001183850	0.0001180569
	Netflix	0.0001180569	0.0005247127
26/01/2022	S&P 500	0.0001204189	0.0001197206
	Netflix	0.0001197206	0.0005302353
27/01/2022	S&P 500	0.0001223742	0.0001213084
	Netflix	0.0001213084	0.0005354733
28/01/2022	S&P 500	0.0001242539	0.0001228242
	Netflix	0.0001228242	0.0005404412
31/01/2022	S&P 500	0.0001260610	0.0001242712
	Netflix	0.0001242712	0.0005451530

Tabla 8.8: Pronóstico dinámico de matriz de varianza – covarianza condicional de los retornos del índice S&P500 y los retornos de Netflix para enero de 2022

Fuente: Elaboración propia

8.10 Anexo 10: Pronóstico estático ajuste C – GARCH(1,1) para indicadores bursátiles

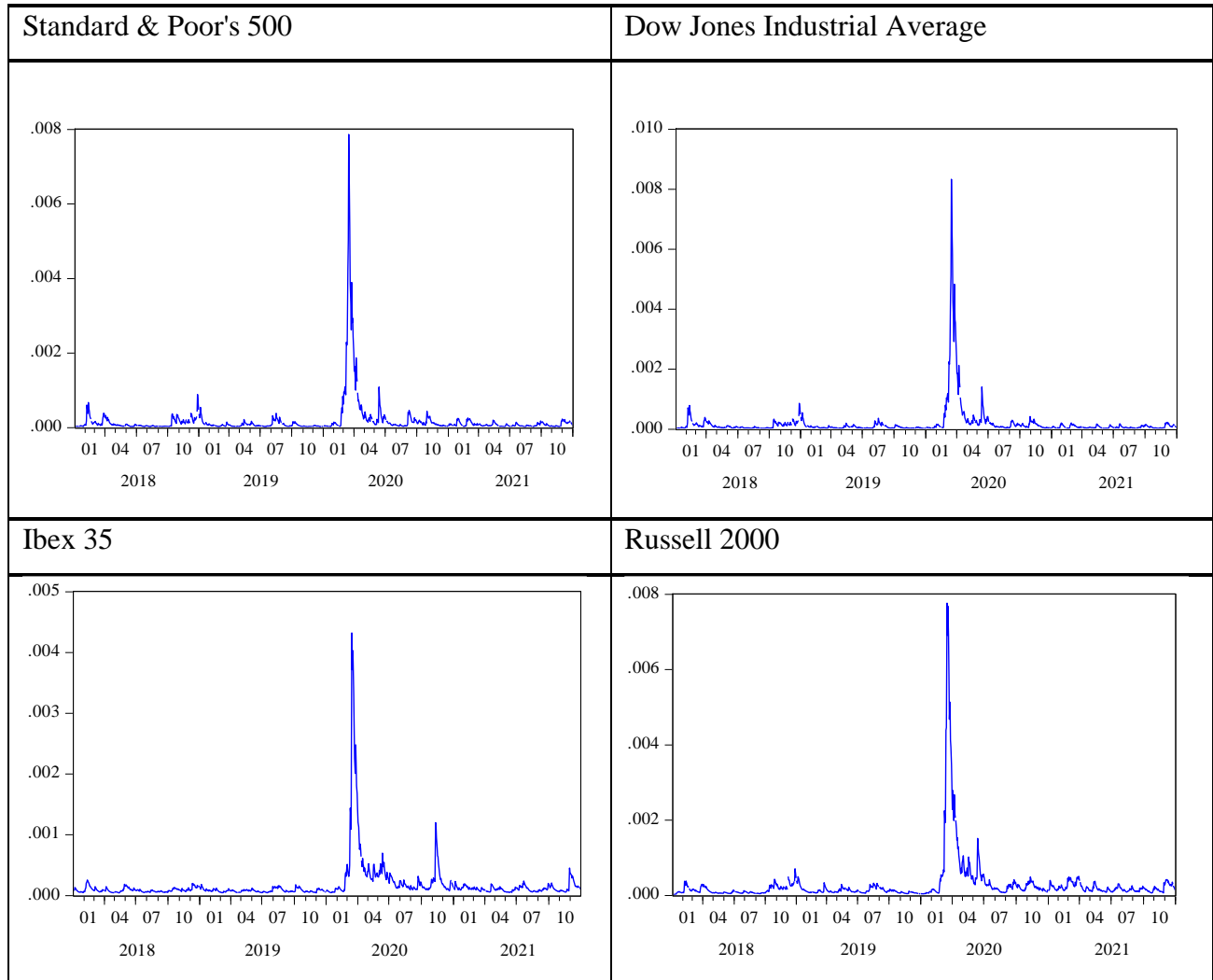


Tabla 8.9: Pronóstico estático de volatilidad para principales índices bursátiles

Fuente: Elaboración propia

9. Resumen FI

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION – FACULTAD DE INGENIERIA

RESUMEN MEMORIA DE TÍTULO

Departamento	: Departamento de Ingeniería Civil Industrial
Carrera	: Ingeniería Civil Industrial
Nombre memorista	: Cristián Alejandro Aparicio Barría
Título de la memoria	: Análisis y modelamiento de la volatilidad de las principales acciones tecnológicas, a través del ajuste de modelos autorregresivos de heterocedasticidad condicional ARCH/GARCH
Fecha de presentación oral	:
Profesor(es) Guía	: Hernaldo Reinoso Alarcón
Profesor(es) Revisor(es)	: Sebastián Astroza Tagle
Concepto	:
Calificación	:

Resumen

El estudio realizado busca determinar modelos adecuados para explicar el comportamiento de la volatilidad de las principales acciones tecnológicas durante los últimos 4 años, para de esta forma entregar una herramienta que apoye la toma de decisiones a los inversionistas.

Las series de cada activo estudiado se construyeron en base a información recopilada de sitios web financieros, creando series de retornos diarios. Todo la metodología del ajuste se expone a través del caso Adobe, el cual es utilizado como ejemplo. Esta metodología corresponde a una adaptación de la metodología Box-Jenkins para los modelos ARIMA. Esta considera un ajuste de modelo ARMA para el modelamiento de correlación serial, luego evalúa la presencia de heterocedasticidad condicional, para después identificar un modelo GARCH adecuado, estimar los parámetros, evaluar el modelo y finalmente pronosticar.

Los modelos resultantes del ajuste para algunas series fueron básicos, por lo que se realizó un ajuste multivariante, modelando la correlación condicional de estos activos financieros con el índice Standard & Poor's 500. Luego de realizar y validar el ajuste, se obtuvieron los gráficos de pronóstico de retornos y volatilidad para cada una de las series estudiadas. El estudio concluye con la discusión de resultados y sus correspondientes conclusiones.

