



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ONDAS GRAVITACIONALES EN LA TEORÍA ECSK: ROBUSTEZ DE FUSIONES COMO SIRENAS ESTÁNDAR Y TORSIÓN NO NULA.

Por: Gonzalo Matías Salgado Riquelme

Tesis presentada a la Facultad de Nombre de Facultad de la Universidad de
Concepción para optar al grado académico de Magíster en Ciencias con
Mención en Física

Junio 2023

Concepción, Chile

Profesor Guía: Fernando Izaurieta Aranda

© 2019, Nombre

Ninguna parte de esta tesis puede reproducirse o transmitirse bajo ninguna forma o por ningún medio o procedimiento, sin permiso por escrito del autor.

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento

Resumen

En esta tesis se estudia la propagación de las ondas gravitacionales en una teoría de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble (ECSK) asumiendo un espacio tiempo con torsión inducido por un tensor de espín de materia oscura a escalas cosmológicas. El análisis se centra en un “régimen de torsión débil” tal que la emisión de ondas gravitacionales, a orden principal y secundario en el límite eikonal, no se desvíe de la relatividad general estándar. Para este propósito, revisamos de manera breve una técnica de parametrización de perturbaciones lineales y segundo orden en el vielbein y la conexión de espín en el formalismo de Cartan para luego aplicarla a ondas gravitacionales en la teoría de Einstein-Cartan. Adicionalmente, utilizamos una serie de herramientas matemáticas que corresponden a generalizaciones de operadores de onda en geometrías de Riemann para ser utilizadas en geometrías de Riemann-Cartan. Estas herramientas, aunque no imprescindibles para el estudio de las ondas gravitacionales, permiten un análisis mucho más profundo de estas, ya que posibilita explorar cada orden del parámetro eikonal y mostrar de manera más transparente los efectos de la torsión en la propagación de las ondas gravitacionales. Se demuestra que, en principio, la torsión background inducida por la componente de espín de materia oscura podría dar lugar a una amortiguación o amplificación anómala de la amplitud de una onda gravitacional después de una larga distancia cosmológica. Al evaluar la importancia de esta torsión inducida en la propagación anómala de la amplitud para fusiones de agujeros negros binarios, se concluye que para escenarios astrofísicos realistas del universo tardío, los efectos son pequeños y caen por debajo de los umbrales de detección, incluso para los interferómetros del futuro cercano como LISA. Detectar tal efecto podría no ser imposible, pero aún está más allá de nuestras capacidades tecnológicas. Este resultado permite seguir utilizando la fusión de agujeros negros como sirenas estándar para medir la expansión del universo.

Keywords – Ondas gravitacionales, torsión débil, espín, límite eikonal

Abstract

This thesis studies the amplitude propagation of gravitational waves in an Einstein-Cartan-Sciama-Kibble (ECSK) theory by assuming a dark matter spin tensor sourcing for spacetime torsion at cosmological scales. The analysis focuses on a "weak-torsion regime", such that gravitational wave emission, at leading and subleading order, does not deviate from standard General Relativity. For this purpose, we briefly review a linear and second-order perturbation parameterization technique on the vielbein and spin connection in the context of Cartan's formalism and applying it to gravitational waves in the Einstein-Cartan theory. Additionally, we use a series of mathematical tools corresponding to a generalization of the wave operators on Riemann geometries to be used in Riemann-Cartan geometries. These tools, although not essential for studying gravitational waves, allow a deeper analysis of them, since it makes possible to explore every order in the eikonal parameter and showing in a transparent way the torsion effects in the propagation of gravitational waves. It is demonstrated that, in principle, the background torsion induced by an eventual dark matter spin component could lead to an anomalous dampening or amplification of the gravitational wave amplitude, after going across a long cosmological distance. We assess the importance of this torsion-induced anomalous propagation of amplitude for binary black hole mergers. For realistic late-universe astrophysical scenarios, the effect is tiny and falls below detection thresholds, even for the near future interferometers such as LISA. To detect such an effect may not be impossible, but it is still beyond our technological capabilities. This result enables to continue using mergers as standard sirens to measure the expansion of the universe.

Keywords – Gravitational waves, weak torsion, spin, eikonal limit

Índice general

Resumen	I
Abstract	II
1. Introducción	1
2. Relatividad general	4
2.1. Principio de equivalencia	4
2.1.1. Principio de equivalencia débil	4
2.1.2. Principio de equivalencia de Einstein	5
2.2. Principio de la relatividad general	6
2.3. Relatividad general en el formalismo de Einstein	7
2.3.1. Propiedad métrica y afín	7
2.3.2. Acción de Einstein-Hilbert y ecuaciones de campo.	10
2.4. Relatividad general en el formalismo de Cartán	11
2.4.1. Geometría diferencial	11
2.4.2. Acción de Einstein-Hilbert en el formalismo de Cartan	25
3. Ondas gravitacionales	29
3.1. Teoría Linealizada	30
3.1.1. Relatividad general estándar linealizada	30
3.1.2. Gauge transversal sin traza	33
3.1.3. Solución de onda plana	33
3.2. Separación de ondas gravitacionales del background	35
3.3. Ondas en una geometría de Riemann-Cartan	37
3.3.1. Parametrización de las perturbaciones	38
3.4. Operadores de onda	43
3.4.1. Operadores de onda en geometría Riemannianna	43
3.4.2. Operadores de onda en geometría de Riemann Cartan	46
3.5. El límite eikonal en el operador generalizado de Lichnewowicz de Rham	50
4. Estudio de las ondas gravitacionales en la teoría ECSK	57
4.1. Estudio de las ondas gravitacionales en la teoría ECSK	57
4.1.1. Propagación de las ondas gravitacionales en la teoría ECSK	58

4.1.2.	Análisis eikonal	59
4.1.3.	Propagación de la amplitud en un escenario de torsión débil	62
4.2.	Torsión y simetrías cosmológicas	65
4.2.1.	Evaluación de Θ^+ a diferentes modelos cosmológicos ECSK	68
4.2.2.	Estimación para fusiones a $z < 1$	68
4.2.3.	Repaso de la cosmología ECSK	69
4.2.4.	Ansatz $\nu_+ \propto H\rho_{eff}^n$	71
4.2.5.	Ansatz $\nu_+ \propto H$	73
5.	Conclusión	75
	Apéndices	78
A1.	Operadores D y \mathcal{D}_a	78
A2.	Propagación anómala de la amplitud en una geometría con torsión	81
A3.	Propagación anómala de la polarización en una geometría con torsión	87
A4.	Ecuación de la onda en la teoría ECSK	90
A5.	Propagación anómala de la amplitud y polarización en la teoría ECSK	96

Capítulo 1

Introducción

Aquí evaluaremos el problema de si los efectos de torsión no contabilizados podrían introducir errores sistemáticos cuando utilizamos agujeros negros como sirenas estándar. Este problema es crucial para el entendimiento de la evolución del universo y explorar la naturaleza de la materia oscura y la energía oscura. Tanto la materia oscura como la energía oscura dan lugar a efectos físicos significativos, como la expansión acelerada del universo [41]-[44], lentes gravitacionales alrededor de un cúmulo de galaxias [45], el perfil de velocidad anómalo de las estrellas que orbitan galaxias espirales [46], entre otros efectos.

La mejor evidencia observacional para la materia oscura es la llamada relación distancia-redshift, que viene de la observación de una supernova de tipo Ia(SNe). Estas parecen candelas estándar robustas y es posible calibrar su brillo observado y la distancia de luminosidad. Sin embargo, la ausencia de una descripción teórica deja abierta la posibilidad de tener, por ejemplo, procesos evolutivos en el brillo de las supernovas que conducen a errores sistemáticos y, en consecuencia, amenazan la precisión en la estimación de los parámetros cosmológicos [47].

En contraste, las ondas gravitacionales y la astronomía multi-mensajero [48] prometen una era de cosmología de alta precisión. En particular, la dinámica en espiral impulsada por las ondas gravitacionales de los agujeros negros binarios puede proporcionar una forma de medir las distancias de luminosidad con alta precisión, $\frac{\delta D_L}{D_L} \sim 1 - 10\%$. Además, en un evento multi-mensajero, la medición del redshift de la contraparte electromagnética [49] podría permitirnos reducir este error a $0,5 - 1\%$. Por esta razón, la fusión de agujeros negros binarios como sirenas

estándar son esenciales para el desarrollo de una cosmología de alta precisión [50].

Todo esto es particularmente cierto para redshift grandes. Los eventos de fusión de agujeros negros binarios deberían seguir a las fusiones de galaxias y estructuras pregalácticas con un alto corrimiento al rojo [51]. Aunque la tasa de fusión no es muy conocida, LISA debería medir al menos varios eventos a lo largo de su misión, especialmente considerando su sensibilidad [52]. Por esta razón, es crucial examinar cualquier fuente de error sistemático que pueda surgir cuando usemos ondas gravitacionales de agujeros negros binarios como sirenas estándar.

En esta tesis evaluaremos si una posible fuente de error sistemático puede surgir al no considerar la torsión cuando estudiamos la propagación de las ondas gravitacionales. La torsión no es una posibilidad descabellada; por ejemplo, la materia oscura podría ser una fuente de torsión y, por otra parte, la torsión podría ser una componente de la materia oscura [32]-[37].

Por supuesto, hay múltiples candidatos a materia oscura, tales como las interacciones débiles entre partículas masivas, neutrinos estériles, axiones, objetos de halo masivos fríos, agujeros negros primordiales [38]-[40], entre otros. Además, debido a los problemas de la cosmología estándar para describir satisfactoriamente la materia oscura (ver, por ejemplo, [41]), existe una tendencia activa a estudiar teorías de gravedad modificadas [42]-[54].

En general, muchos de estos candidatos a materia oscura pueden dar lugar a torsión. Por ejemplo, cuando consideramos teorías de gravedad modificadas, acoplamientos no minimales y segundas derivadas en el lagrangiano son fuentes reales de torsión [55]. Más aún, cuando consideramos la materia oscura como partículas nuevas, es importante recalcar que los fermiones dan lugar a la torsión. En particular, esta tesis se enfocará en las partículas de materia oscura que generan torsión y las consecuencias de esto en la propagación de las ondas gravitacionales (y los agujeros negros binarios como sirenas estándar).

Para analizar las partículas de materia oscura como una fuente de torsión, usamos la gravedad de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble (ECSK) [56]. En esta teoría, el espín de la mecánica cuántica actúa como fuente de torsión¹ del mismo modo que

¹Es importante recalcar que, cuando hablamos de espín, nos referimos solo al espín de mecánica cuántica intrínseco y, en ningún caso, a la densidad de momentum angular. Esta confusión ha permitido algunos errores en la literatura, ver [57]

la energía es una fuente de curvatura (ver [58], [59]). Consecuentemente, la torsión pudo haber sido relevante en el universo primitivo debido a su extremadamente alta densidad de fermiones [60]-[67]. Además, en la teoría ECSK estándar, la torsión no se propaga en el vacío e interactúa muy débilmente con los fermiones del modelo estándar (ver capítulo 8.4 de [68] y las referencias [69]-[71]). Por tanto, la torsión podría ser potencialmente una componente de la materia oscura [32]-[37].

Otra observación interesante es que en una teoría basada en la geometría de Riemann-Cartan, el término de Einstein-Hilbert no cambia la relación de dispersión, es decir, la velocidad de las ondas gravitacionales no cambia. Sin embargo, la torsión puede influenciar la propagación de la amplitud y polarización de las ondas gravitacionales [55]. En principio, estos efectos pueden tener un impacto en la fiabilidad de las fusiones como sirenas estándar.

La presente tesis sostiene que en un escenario de background torsional, la propagación anómala de la amplitud (debido a la torsión) es muy débil para afectar el uso de las fusiones como sirenas estándar. Como consecuencia, podemos esperar que los resultados de la relatividad general sin torsión seguirán siendo válidos en lo que respecta a la propagación de la amplitud.

Mostraremos un cálculo explícito para el caso de la teoría ECSK, suponiendo que la materia oscura tiene una densidad de espín no nula que da lugar a torsión a escalas cosmológicas. Asumiremos una torsión background débil, en la cual se espera una emisión de ondas gravitacionales como en la relatividad general y efectos torsionales más pequeños que el orden secundario en el límite eikonal al momento de la emisión. En este escenario, los efectos torsionales pueden acumularse cuando las ondas gravitacionales se propagan a escalas cosmológicas, amortiguando o reforzando la amplitud. En principio, podríamos esperar que si no tomamos en cuenta los efectos de la torsión, esto podría afectar nuestra capacidad para usar las fusiones como sirenas estándar.

Capítulo 2

Relatividad general

En este capítulo introduciremos algunas nociones básicas de relatividad general tanto en el formalismo de Einstein como en el de Cartán. Adicionalmente, revisaremos de manera breve algunos conceptos de geometría diferencial que utilizaremos durante toda la tesis ¹. Finalmente, realizaremos una discusión acerca del porqué no debemos descartar la torsión en nuestros análisis de esta teoría en el contexto de la cosmología que desarrollaremos en el capítulo 4.

2.1. Principio de equivalencia

2.1.1. Principio de equivalencia débil

Este principio establece que el movimiento de cualquier partícula de prueba en caída libre es independiente de sus propiedades. Para visualizar esto, se puede pensar en el famoso (aunque mítico) experimento de Galileo dejando caer dos objetos de diferentes masas desde la torre de pisa, cuyo resultado fue que ambas masas caían simultáneamente si se desprecian los efectos de roce. Para Newton, lo que ocurría es que la masa inercial m_I , la cual mide la resistencia del cuerpo a cambiar su estado de movimiento, era equivalente a la masa gravitacional m_G , que corresponde a la constante de proporcionalidad que mide la intensidad del campo gravitacional $\Phi = -\frac{GM}{r}$ producido por una masa M . De este modo, si consideramos un cuerpo con las masas nombradas anteriormente, la segunda ley

¹Un análisis más completo de estos tópicos puede ser encontrado en [1]-[6]

de Newton y la ley de gravitación nos permiten escribir, respectivamente

$$\begin{aligned} F &= m_I \vec{a}, \\ F_G &= -m_G \vec{\nabla} \Phi. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la aceleración de una partícula debido a la influencia de un campo gravitacional es

$$\vec{a} = -\vec{\nabla} \Phi.$$

La última ecuación nos propone que todos los cuerpos que caen bajo la acción de un campo gravitacional lo hacen a la misma aceleración, es decir, establece una equivalencia entre la aceleración y la gravedad.

Cabe destacar que la equivalencia nombrada anteriormente solo es posible si consideramos regiones del espacio lo suficientemente pequeñas de manera tal que las inhomogeneidades del campo gravitacional sean despreciables.

2.1.2. Principio de equivalencia de Einstein

Einstein propuso que la impercepción entre la aceleración y la gravedad en regiones pequeñas no solo ocurre bajo experimentos mecánicos, sino que bajo todo experimento. Además, en estas regiones las leyes de la física que tendrán validez serán las de la relatividad especial.

Esto significa que todo sistema de referencia es un sistema de referencia inercial local (no percibiendo efectos de marea) cuando está en caída libre. Un cuerpo que se mueva de manera inercial será aquel donde las fuerzas de origen no gravitacional se anulen. Así, un observador en caída libre percibirá de manera local que las trayectorias de las partículas que caen en caída libre junto con él son líneas rectas y, en este sentido, las diferencias con la geometría euclidiana son despreciables. A su vez, todas las interacciones entre partículas estarán mediadas por las leyes de la relatividad especial. Por otra parte, si consideramos una región del espacio lo suficientemente grande de manera tal que su geometría sea lo suficientemente curva, entonces dichas leyes ya no tendrán más validez y todas las partículas acelerarán una con respecto a la otra.

Todo esto supone que el espacio tiempo es una variedad suave que, en una vecindad

lo suficientemente pequeña, se asimila al espacio de Minkowski.

2.2. Principio de la relatividad general

Puesto que un observador es incapaz de distinguir localmente entre una caída libre de un campo gravitatorio, es posible hacer un cambio de coordenadas en una vecindad lo suficientemente pequeña de la variedad de tal forma que, localmente, esta se asimile a Minkowski. Cabe destacar que este cambio de coordenadas se puede realizar en cada punto de la variedad, el cual será diferente en cada uno de ellos debido a las inhomogeneidades del campo gravitatorio. Esto quiere decir que la variedad tendrá una curvatura no nula (el espacio no será plano como en el caso euclidiano).

En un punto p de una variedad d -dimensional ($M^{(d)}$), se define el espacio tangente $T_p M^{(d)}$ como el espacio vectorial \mathcal{V} definido en ese mismo punto. Sobre dicho espacio tangente, es posible definir un conjunto de coordenadas llamadas “coordenadas localmente inerciales”, de modo que en una vecindad lo suficientemente pequeña de p se forme una métrica plana. De acuerdo con el principio de equivalencia, aquel observador en el punto p que utiliza las coordenadas localmente inerciales, percibe que las leyes de la física que se satisfacen en una pequeña región de la variedad se reducen a las de la relatividad especial. Sin embargo, la transformación de coordenadas entre las coordenadas localmente inerciales y generalizadas corresponde a una transformación de coordenadas generalizadas. Esto quiere decir que las leyes de la física que percibe el observador en p deben transformarse bajo un grupo más grande que el de Lorentz, por lo que las leyes de la física para un observador no inercial en un punto completamente diferente de la variedad deben ser exactamente las mismas. Esto nos lleva al principio de la relatividad general, el cual establece que las leyes de la física deben ser las mismas para todos los observadores, sean o no inerciales, lo que significa que las leyes deben transformarse de manera covariante bajo transformaciones generales de coordenadas.

En lo único en que los observadores pueden discrepar es en la forma en la que pueden interpretar la física. Podría ocurrir (según el principio de equivalencia débil) que lo que un observador perciba como aceleración el otro lo perciba como gravedad, mas los efectos físicos deben ser exactamente los mismos para ambos.

2.3. Relatividad general en el formalismo de Einstein

Acorde a la relatividad especial, la estructura del espacio tiempo es perfectamente descrita desde el punto de vista de los observadores inerciales, y las leyes de la física se relacionan en un sistema de referencia a otro mediante las transformaciones de Lorentz. Sin embargo, en la relatividad general, sólo podemos considerar sistemas de referencia localmente inerciales debido a la acción de la gravedad. Así, la teoría de Newton de la gravitación no es compatible con la relatividad especial, pues si insistimos en considerar, por ejemplo, dos cuerpos en caída libre lo suficientemente lejanos entre sí, se encuentra de que estos están acelerando uno con respecto al otro. Por lo que Einstein se aventuró a buscar una nueva teoría de la gravedad basada en las ideas antes descritas en el principio de equivalencia.

2.3.1. Propiedad métrica y afín

En una variedad $M^{(d)}$, el concepto de tamaño o distancia entre dos puntos es codificado por la métrica $g_{\mu\nu}(x)$ a través de la ecuación

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad (2.3.1)$$

donde $g_{\mu\nu}(x)$ no es necesariamente constante como ocurre en la relatividad especial con la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Las componentes de la métrica son dadas por el producto punto entre los vectores ∂_μ que forman una base coordenada en el espacio tangente en el punto p de $M^{(d)}$, es decir,

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu \cdot \partial_\nu. \quad (2.3.2)$$

Es importante mencionar que una variedad esta dotada de propiedades métrica y afines: la primera hace referencia a la noción de distancia, ángulo, áreas, volumen y objetos localmente definidos en el espacio tiempo; la segunda define la noción de paralelismo.

El concepto de paralelismo tiene su origen al intentar definir la derivada de un vector en una variedad no plana, pues, al intentar definir la derivada parcial que mida la tasa de cambio de una función, esta no será covariante bajo una

transformación general de coordenadas. De hecho, definiendo el vector $\vec{\zeta} = \zeta^\mu \partial_\mu \in T_p M^{(d)}$, tenemos que

$$(\partial_\mu \zeta_\nu)' = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} \partial_\rho \zeta_\sigma + \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\nu'}} \right) \zeta_\sigma, \quad (2.3.3)$$

donde se observa que el término problemático es el segundo.

La razón por la cual esta entidad no es covariante bajo transformación general de coordenadas radica en el hecho de que, al calcular una derivada de una función en una dirección de una variedad $M^{(d)}$

$$\zeta^\mu \partial_\mu V^\nu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V^\nu(x^\rho + \varepsilon \zeta^\rho) - V^\nu(x^\rho)}{\varepsilon}, \quad (2.3.4)$$

estamos restando vectores que pertenecen a espacios tangentes diferentes: por un lado, $V^\nu(x^\rho + \varepsilon \zeta^\rho) \in T_{x+\varepsilon \zeta} M^{(d)}$; por otro lado, $V^\nu(x^\rho) \in T_x M^{(d)}$.

Por lo tanto, la solución es trasladar el vector $V^\nu(x^\rho + \varepsilon \zeta^\rho)$ paralelamente desde un punto $x^\rho + \varepsilon \zeta^\rho$ a otro x^ρ de modo que pertenezcan al mismo espacio tangente. Matemáticamente, esto se expresa a través del ansatz

$$V_{||}^\nu(x^\rho + \varepsilon \zeta^\rho) = V^\nu(x^\rho + \varepsilon \zeta^\rho) + \varepsilon \Gamma_{\mu\nu}^\rho \zeta^\mu V^\nu(x^\rho), \quad (2.3.5)$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ corresponde a la conexión afín y es el encargado de codificar el concepto de paralelismo. Estando conscientes de todo esto, una operación derivada bien definida sobre la variedad debería ser

$$\zeta^\mu \partial_\mu V^\nu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V_{||}^\nu(x^\rho + \varepsilon \zeta^\rho) - V^\nu(x^\rho)}{\varepsilon}.$$

Reemplazando 2.3.5 en 2.3.4, encontramos la definición de derivada covariante

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu V^\rho, \quad (2.3.6)$$

la cual si es covariante bajo transformación general de coordenadas. Cabe destacar que la conexión afín no se comporta como un tensor bajo transformaciones de

coordenadas, pues esta cambia como sigue

$$\Gamma_{\mu'\rho'}^{\nu'} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\rho'}} \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}. \quad (2.3.7)$$

Einstein asume que la métrica es el único campo dinámico, lo cual se traduce en imponer una restricción sobre el tensor torsión

$$T_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda = 0. \quad (2.3.8)$$

Dicha conexión afín que satisface este constraint es el famoso símbolo de Christoffel

$$\mathring{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (2.3.9)$$

Considerando 2.3.6, es posible calcular el conmutador de derivadas covariantes, el cual esta dado por:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\lambda = \mathcal{R}^\lambda_{\alpha\mu\nu} V^\alpha - T_{\mu\nu}^\alpha \nabla_\alpha V^\lambda, \quad (2.3.10)$$

donde

$$\mathcal{R}^\lambda_{\alpha\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda + \Gamma_{\mu\beta}^\lambda \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - \Gamma_{\nu\beta}^\lambda \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \quad (2.3.11)$$

corresponde al tensor de curvatura. Note que 2.3.10 mide el cambio del vector cuando escoge caminos diferentes al transportarse paralelamente.

Si consideramos variedades con torsión nula, entonces el tensor de curvatura pasará a llamarse el tensor de curvatura de Riemann definido como

$$\mathring{\mathcal{R}}^\lambda_{\alpha\mu\nu} = \partial_\mu \mathring{\Gamma}_{\nu\alpha}^\lambda - \partial_\nu \mathring{\Gamma}_{\mu\alpha}^\lambda + \mathring{\Gamma}_{\mu\beta}^\lambda \mathring{\Gamma}_{\nu\alpha}^\beta - \mathring{\Gamma}_{\nu\beta}^\lambda \mathring{\Gamma}_{\mu\alpha}^\beta \quad (2.3.12)$$

A partir de 2.3.12 es posible definir, contrayendo algunos índices, los siguientes objetos:

$$\begin{aligned} \mathring{\mathcal{R}}_{\alpha\nu} &= \mathring{\mathcal{R}}^\lambda_{\alpha\lambda\nu}, \\ \mathring{\mathcal{R}} &= g^{\alpha\nu} \mathring{\mathcal{R}}_{\alpha\nu}, \end{aligned}$$

los cuales son llamados tensor de Ricci y curvatura escalar de Ricci, respectivamente.

2.3.2. Acción de Einstein-Hilbert y ecuaciones de campo.

Dado que todas las interacciones fundamentales son descritas por un principio de acción, es lógico considerar que esta teoría no es la excepción. Este principio de acción debe ser de la forma:

$$S = \int \mathcal{L} d^4x = \int \sqrt{-g} L d^4x, \quad (2.3.13)$$

con \mathcal{L} la densidad lagrangiana del sistema, L el lagrangiano y $g < 0$ el determinante del tensor métrico. En general,

$$S_g = \int \mathcal{L}_g d^4x + \int \mathcal{L}_M d^4x, \quad (2.3.14)$$

donde el primer término corresponde al principio de acción que se contruye a partir de la geometría del espacio, mientras que el segundo a cualquier otro campo. Observe que hemos considerado la dimensionalidad $d = 4$, pues la relatividad general es una generalización de la relatividad especial.

Conforme con el principio de equivalencia, la geometría y la gravitación pueden entenderse como conceptos equivalentes, por lo tanto, es innecesario agregar un término de interacción, puesto que estos deben estar contenidos dentro del primer término.

Dado que las ecuaciones del movimiento deben ser de segundo orden en las derivadas, entonces la densidad lagrangiana admite términos de hasta primer orden, tales como la métrica y el símbolo de Christoffel. Sin embargo, es imposible construir un escalar invariante solo utilizando estas herramientas, ya que siempre es posible escoger un sistema coordenado en donde los símbolos de Christoffel se anulen en un punto.

En 1915, Hilbert solucionó este problema suponiendo que la densidad lagrangiana buscada debería contener términos de hasta segundo orden. Esto, sumado a la condición de que los términos de segundo orden sean lineales, permitiría separar la acción en una integral de volumen, que contendría los lineales en la métrica, y

en una integral de superficie que contenga los términos de segundo orden.

Considerando todos los escalares que se pueden formar en cuatro dimensiones que involucren algún término de curvatura, el único consistente con las condiciones impuestas anteriormente corresponde al escalar de Ricci. De este modo, la acción de Einstein-Hilbert es dada por:

$$S_{EH} = \int \sqrt{-g} \overset{\circ}{\mathcal{R}} d^4x + 2k \int \sqrt{-g} L_M d^4x, \quad (2.3.15)$$

con L_M el lagrangiano de materia y k la constante de gravitación de Einstein. La variación de esta acción nos proporciona las ecuaciones de Einstein

$$\overset{\circ}{\mathcal{R}}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \overset{\circ}{\mathcal{R}} = k \mathcal{T}_{\mu\nu}, \quad (2.3.16)$$

con $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ el tensor de energía momentum definido como

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.3.17)$$

y S_M la acción no gravitacional. Al analizar el límite Newtoniano, es decir, considerando campos débiles en el que las partículas se mueven lentamente, encontramos que la constante de gravitación de Einstein k es dada por

$$k = \frac{8\pi G}{c^4},$$

donde G es la constante de gravitación universal y c la velocidad de la luz.

2.4. Relatividad general en el formalismo de Cartán

2.4.1. Geometría diferencial

Para comprender el formalismo de Cartán, es necesario hacer una breve introducción acerca de las formas diferenciales. Para ello, pensemos nuevamente en una vecindad de un punto $p \in M^{(d)}$ en el que definimos un sistema coordenado x^μ . Además de poder definir un espacio tangente $T_p(M^{(d)})$, también es posible

definir el espacio co-tangente $T_p^*(M^d)$, que corresponde al espacio dual de los covectores \mathcal{V}^* definido en cada punto p de la variedad. Los objetos que habitan en este espacio son llamados formas diferenciales, cuyas bases son denotadas como dx^μ . En particular, una 1-forma diferencial α corresponde a un tensor tipo (0,1) que en términos de la base se escribe como

$$\alpha = \alpha_\mu dx^\mu. \quad (2.4.1)$$

Al conjunto de todas las 1-formas que habitan sobre $M^{(d)}$ se les denota como $\Omega^1(M^{(d)})$.

Anteriormente, hemos mencionado que objetos tales como $\partial_\mu A_\nu$ no se comportan como tensores (ver 2.3.3). Esto quiere decir que una derivada de $\alpha \in \Omega^1(M^{(d)})$ del tipo

$$d\alpha = \partial_\mu \alpha_\nu dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (2.4.2)$$

tampoco lo hace. Sin embargo, de 2.3.3 notamos que si μ y ν fuesen índices antisimétricos, entonces 2.4.2 sí estaría bien definida.

Definición 1. *Producto exterior*

Sean $\phi, \varphi \in \mathcal{V}^*$, se define el producto exterior como el tensor antisimétrico definido como

$$\phi \wedge \varphi = \phi \otimes \varphi - \varphi \otimes \phi.$$

En particular, si $\phi, \varphi \in \Omega^1(M^d)$, entonces $\phi \wedge \varphi$ pertenece al espacio de 2-formas $\Omega^2(M^d)$, cuya definición explícita es dada a continuación

$$\phi \wedge \varphi = \phi_\mu \varphi_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \phi_\mu \varphi_\nu \left[\frac{1}{2} (dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu) \right].$$

Esta idea se puede generalizar y definir el espacio de las p-formas $\Omega^p(M^d)$ a través de un objeto completamente antisimetrizado de la forma

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_i} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} = \frac{1}{p!} dx^{[\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_p]}, \quad (2.4.3)$$

donde los corchetes denotan antisimetrización de peso 1.

En general, para construir objetos completamente antisimétricos es útil definir la delta de Kronecker generalizada

$$\delta_{\nu_1 \dots \nu_p}^{\mu_1 \dots \mu_p} = p! \delta_{[\nu_1}^{\mu_1} \dots \delta_{\nu_p]}^{\mu_p} \quad (2.4.4)$$

Una de las propiedades más interesantes que se utiliza muy a menudo es la contracción de sus índices 2.4.5

$$\delta_{\nu_1 \dots \nu_r \mu_{r+1} \dots \mu_p}^{\mu_1 \dots \mu_r \mu_{r+1} \dots \mu_p} = \frac{(d-r)!}{(d-p)!} \delta_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r}. \quad (2.4.5)$$

Esta delta de Kronecker permite definir otro objeto llamado el símbolo de Levi-Civita

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_p} = \delta_{\mu_1 \dots \mu_p}^{1 \dots p}, \quad (2.4.6)$$

el cual es antisimétrico en sus índices. Este símbolo es útil para definir el determinante de una matriz.

Sea un tensor $T \binom{1}{1} \in T_p(M^{(d)})$, con p un punto de una variedad d -dimensional M . El determinante de dicho tensor se relaciona con el símbolo como

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_p} T^{\mu_1}_{\nu_1} \dots T^{\mu_p}_{\nu_p} = \det(T) \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_p}, \quad (2.4.7)$$

similarmente,

$$\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p} T_{\mu_1}^{\nu_1} \dots T_{\mu_p}^{\nu_p} = \det(T) \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_p}, \quad (2.4.8)$$

Bajo una transformación de coordenadas, el símbolo no transforma como tensor, pues

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu'_1 \dots \mu'_p} &= \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_p}}{\partial x^{\mu'_p}} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_p}, \\ &= \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_p}, \end{aligned}$$

donde $\left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|$ es el jacobiano de la transformación. De manera análoga

$$\epsilon^{\mu'_1 \dots \mu'_p} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p}.$$

Puesto que el símbolo de Levi-Civita no es un tensor, entonces no es posible subir

y bajar índices de la manera usual como lo hacemos con tensores. Al intentarlo, obtenemos

$$g^{\mu_1\nu_1}\dots g^{\mu_p\nu_p}\epsilon_{\mu_1\dots\mu_p} = \det(g^{-1})\epsilon^{\nu_1\dots\nu_p}, \quad (2.4.9)$$

$$g_{\mu_1\nu_1}\dots g_{\mu_p\nu_p}\epsilon^{\mu_1\dots\mu_p} = \det(g)\epsilon_{\nu_1\dots\nu_p}. \quad (2.4.10)$$

A través de la delta de Kronecher generalizada, es sencillo definir una base de $\Omega^p(M^{(d)})$ del siguiente modo:

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_i} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} = \frac{1}{p!} \delta_{\nu_1\dots\nu_p}^{\mu_1\dots\mu_p} dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_p}. \quad (2.4.11)$$

El producto exterior de formas puede ser usado para construir una $p + q$ forma a través de una p -forma y q -forma. Sean $\alpha \in \Omega^p(M^{(d)})$ y $\beta \in \Omega^q(M^{(d)})$,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{p!} \alpha_{\mu_1\dots\mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \\ \beta &= \frac{1}{q!} \beta_{\nu_1\dots\nu_q} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_q}. \end{aligned}$$

Se define el producto exterior entre formas diferenciales como la aplicación

$$\wedge : \Omega^p(M^{(d)}) \times \Omega^q(M^{(d)}) \longrightarrow \Omega^{p+q}(M^{(d)}), \quad (2.4.12)$$

definido por

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{p!q!} \alpha_{\mu_1\dots\mu_p} \beta_{\nu_1\dots\nu_q} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_q}. \quad (2.4.13)$$

Cabe destacar que este producto no satisface la regla de conmutación. En efecto,

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha. \quad (2.4.14)$$

Definición 2. Derivada exterior

La derivada exterior de $B \in \Omega^p(M^{(d)})$ es un mapeo

$$d : \Omega^p(M^{(d)}) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M^{(d)}),$$

definido por

$$dB = \frac{1}{p!} \partial_\lambda B_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^\lambda \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (2.4.15)$$

Observe que la derivada exterior de una d -forma en una variedad d -dimensional es nula, pues esto correspondería a una forma diferencial $C \in \Omega^{d+1}(M^{(d)})$, y en estas circunstancias no existen suficientes índices para construir un tensor completamente antisimétrico sin repetir índices.

A través de la propiedad 2.4.14, es posible demostrar que la derivada exterior del producto exterior entre 2 formas diferenciales satisfacen la regla de Leibniz con corrección de signo:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta, \quad (2.4.16)$$

donde $\alpha \in \Omega^p(M^{(d)})$. Por otro lado, el lema de Poincaré establece que

$$d \wedge d\alpha = 0. \quad (2.4.17)$$

Hasta el momento, todo el análisis se ha hecho considerando una base coordenada ∂_μ sobre el espacio tangente. Dicha base, dado que es una base coordenada, en general no será ortonormal, por lo que 2.3.2 no necesariamente satisficará $\partial_\mu \cdot \partial_\nu = \delta_{\mu\nu}$. No obstante, existe un isomorfismo e que establece una relación entre una base coordenada y ortonormal, el cual viene dado por

$$e_a = e_a^\mu \partial_\mu, \quad (2.4.18)$$

donde e_a^μ corresponde a la matriz de cambio de base y definen una base ortonormal. Es posible hacer el mismo cambio de base considerando la base dual de los vectores

$$e^a = e^a_\mu dx^\mu, \quad (2.4.19)$$

objeto que forma una base ortonormal de las 1-formas.

La ventaja que supone trabajar con este tipos de objetos llamados vielbein es que,

al ser e_a una base ortonormal en $T_p M^{(d)}$, el producto punto satisface

$$\begin{aligned} e_a \cdot e_b &= e_a^\mu \partial_\mu e_b^\nu \partial_\nu, \\ &= e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu}, \\ &= \eta_{ab}, \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

donde η_{ab} corresponde a la métrica de Minkowski. Con el objetivo de ser más transparente con los cálculos, siempre utilizaremos los índices griegos para referirnos a la base coordenada, mientras que los índices con alfabeto latino serán considerados para referirse a la base ortonormal.

A partir del cambio de base inverso

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= e_\mu^a e_a, \\ dx^\mu &= e_a^\mu e^a, \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

y considerando

$$\partial_\mu dx^\nu = \delta_\mu^\nu, \tag{2.4.22}$$

se encuentra fácilmente que las matrices cambio de base satisfacen

$$e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu. \tag{2.4.23}$$

Reemplazando 2.4.23 en 2.4.20, encontramos que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b. \tag{2.4.24}$$

De forma análoga, es posible encontrar la relación inversa

$$g^{\mu\nu} = \eta^{ab} e_a^\mu e_b^\nu. \tag{2.4.25}$$

Esto quiere decir que es posible expresar los campos vectoriales y formas

diferenciales en esta base ortonormal como

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A^\mu \partial_\mu = A^a e_a, \\ \alpha &= \alpha_\mu dx^\mu = \alpha_a e^a,\end{aligned}$$

lo cual implica que la matriz de cambio de base e convierte las componentes de vectores y formas del siguiente modo

$$\begin{aligned}A^\mu &= e_a^\mu A^a, \\ A^a &= e^a_\mu A^\mu, \\ \alpha_\mu &= e^a_\mu \alpha_a, \\ \alpha_a &= e_a^\mu \alpha_\mu.\end{aligned}$$

Por supuesto, todo esto puede ser generalizado para $P \in \Omega^p(M^{(d)})$

$$P = \frac{1}{p!} P_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} = \frac{1}{p!} P_{a_1 \dots a_p} e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_p},$$

con $P_{a_1 \dots a_p} = e_{a_1}^{\mu_1} \dots e_{a_p}^{\mu_p} P_{\mu_1 \dots \mu_p}$.

Observe de 2.4.24 que los vielbein codifican toda la información de la métrica. Por lo tanto, podemos utilizar los vielbein para construir la teoría de la relatividad general de una manera alternativa.

Cabe destacar que, si conocemos la métrica de la variedad, no es posible obtener información alguna sobre los vielbein, pues existen infinitas elecciones de vielbein para construir la métrica. En efecto, siempre es posible definir una nueva base ortonormal en términos de otra base en cada punto de la variedad de manera que

$$\bar{e}^a = \Lambda^a_b(x) e^b,$$

la cual sigue siendo ortonormal. De este modo, de la condición 2.4.24

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu} &= \eta_{ab} \bar{e}^a_\mu \bar{e}^b_\nu, \\ &= \eta_{ab} \Lambda^a_c e^c_\mu \Lambda^b_d e^d_\nu.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$g_{\mu\nu} = \eta_{cd} e^c{}_{\mu} e^d{}_{\nu}. \quad (2.4.26)$$

De aquí observamos que la métrica de Minkowski y las matrices $\Lambda^a{}_b$ satisfacen

$$\eta_{ab} \Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d = \eta_{cd},$$

lo cual significa que las matrices $\Lambda^a{}_b$ son rotaciones locales de Lorentz y, por lo tanto, la métrica $g_{\mu\nu}$ no cambia bajo esta transformación.

Una consecuencia de la transformación de la base ortonormal bajo transformaciones de Lorentz es que la derivada exterior de un vector de Lorentz no es invariante bajo transformaciones del grupo $SO(d - \eta_-, \eta_-)$ ². En efecto, dada la componente de un vector $\bar{V}^a = \Lambda^a{}_b V^b \in T_p M^{(d)}$, su derivada exterior vendrá dada por

$$d\bar{V}^a = \Lambda^a{}_b dV^b + d\Lambda^a{}_b \wedge V^b. \quad (2.4.27)$$

Para solucionar este problema, definiremos una 1-forma $\omega^{ab} = \omega^a{}_{\mu}{}^b dx^{\mu}$ llamada conexión de espín (análogo a la conexión afín para la base coordenada). Realizando un procedimiento totalmente análogo para el caso de la derivada covariante ∇ , definiremos la derivada covariante invariante de Lorentz como

$$DV^a = dV^a + \omega^a{}_b V^b. \quad (2.4.27)$$

Como consecuencia de esta covariancia, la conexión de espín bajo transformaciones de Lorentz no cambia como un tensor, pues

$$\bar{\omega}^a{}_b = \Lambda^a{}_c \Lambda_b{}^d \omega^c{}_d - \Lambda_b{}^c d\Lambda^a{}_c.$$

Una característica importante de la conexión de espín es la antisimetría de sus índices, consecuencia directa de la condición de compatibilidad métrica, la cual

² η_- representa la cantidad de signos negativos que posee la métrica η_{ab} .

³A partir de ahora, cada vez que encontremos un producto exterior entre alguna forma diferencial arbitraria con una 0-forma o un vector, omitiremos el operador \wedge .

establece que

$$\nabla_{\mu} g_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.4.28)$$

$$D\eta_{ab} = 0. \quad (2.4.29)$$

Esta condición existe para no dejar espacio a ambigüedades al momento de subir o bajar índices de tensores cuando trabajamos con cualquiera de las derivadas covariantes. En general, tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} A_{\nu} &= \nabla_{\mu} (g_{\nu\gamma} A^{\gamma}) = \nabla_{\mu} g_{\nu\gamma} A^{\gamma} + g_{\nu\gamma} \nabla_{\mu} A^{\gamma}, \\ DA_a &= D(\eta_{ab} A^b) = D\eta_{ab} A^b + \eta_{ab} DA^b, \end{aligned}$$

al aplicar la condición de compatibilidad métrica, se cumple que

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} A_{\nu} &= \nabla_{\mu} (g_{\nu\gamma} A^{\gamma}) = g_{\nu\gamma} \nabla_{\mu} A^{\gamma}, \\ DA_a &= D(\eta_{ab} A^b) = \eta_{ab} DA^b, \end{aligned}$$

por lo que no interesa de que manera subamos o bajemos índices.

Dado que $d\eta_{ab} = 0$, 2.4.29 se traduce en la antisimetría de la conexión de espín

$$\omega_{ab} = -\omega_{ba}. \quad (2.4.30)$$

Al igual que la conexión afín $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$, la conexión ω_{ab} también codifica la noción de transporte de vectores sobre una variedad, la cual, en principio, debiese ser independiente de la elección de nuestra base. Teniendo en cuenta esto, exigiremos la equivalencia entre ambas derivadas sobre el mismo vector, esto es

$$\begin{aligned} \nabla \vec{V} &= D\vec{V}, \\ (\partial_{\mu} V^{\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} V^{\nu}) dx^{\mu} \otimes \partial_{\rho} &= (\partial_{\mu} V^a + \omega_b^a V^b) dx^{\mu} \otimes e_a, \end{aligned}$$

donde $\nabla = dx^{\mu} \otimes \nabla_{\mu}$ y $D = dx^{\mu} \wedge D_{\mu}$. Esto nos lleva directamente a una ecuación

conocida como postulado de vielbein

$$\partial_\mu e^a{}_\nu + \omega^a{}_{b\mu} e^b{}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e^a{}_\rho = 0, \quad (2.4.31)$$

que nos muestra la relación entre ambas conexiones cuando codifican la misma noción de transporte para vectores (0-formas). Sin embargo, lo anterior no es cierto si consideramos p formas con $p \neq 0$. Para comprender esto, es necesario estudiar como actúan ambas derivadas sobre formas diferenciales.

Dada una p -forma P en la base cartesiana

$$P = \frac{1}{p!} P^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n \mu_1 \dots \mu_p} \partial_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\alpha_m} \otimes dx^{\beta_1} \dots \otimes dx^{\beta_n} \otimes dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad (2.4.32)$$

la derivada covariante ∇ sobre 2.4.32 tiene la forma

$$\begin{aligned} \nabla P = & \frac{1}{p!} \left(\partial_\gamma P^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n \mu_1 \dots \mu_p} + \Gamma_{\gamma\lambda}^{\alpha_1} P^{\lambda \alpha_2 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n \mu_1 \dots \mu_p} + \dots + \Gamma_{\gamma\lambda}^{\alpha_m} P^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1} \lambda}_{\beta_1 \dots \beta_n \mu_1 \dots \mu_p} \right. \\ & - \Gamma_{\gamma\beta_1}^\lambda P^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\lambda \beta_2 \dots \beta_n \mu_1 \dots \mu_p} - \Gamma_{\gamma\beta_n}^\lambda P^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_{n-1} \lambda \mu_1 \dots \mu_p} \\ & \left. - \Gamma_{\gamma\mu_1}^\lambda P^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n \lambda \mu_2 \dots \mu_p} - \Gamma_{\gamma\mu_p}^\lambda P^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n \mu_1 \dots \mu_{p-1} \lambda} \right) \\ & dx^\gamma \otimes \partial_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\alpha_m} \otimes dx^{\beta_1} \dots \otimes dx^{\beta_n} \otimes dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \end{aligned} \quad (2.4.33)$$

Por otra parte, si escribimos la p -forma utilizando el lenguaje ortonormal

$$P^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} = \frac{1}{p!} P^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n \mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad (2.4.34)$$

su derivada covariante de Lorentz será

$$\begin{aligned} DP^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} = & dP^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} + \omega_{c_1}^{a_1} \wedge P^{c_1 a_2 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} \dots + \omega_{c_m}^{a_m} \wedge P^{a_1 a_2 \dots c_m}_{b_1 \dots b_n} \\ & - \omega_{b_1}^{c_1} \wedge P^{a_1 \dots a_m}_{c_1 \dots b_n} \dots - \omega_{b_n}^{c_n} \wedge P^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots c_n}. \end{aligned} \quad (2.4.35)$$

Es importante resaltar que esta derivada, al igual que la derivada exterior usual d , también satisface la regla de Leibniz con la corrección de signo

$$D(P^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} \wedge Q^{c_1 \dots c_l}_{d_1 \dots d_k}) = DP^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} \wedge Q^{c_1 \dots c_l}_{d_1 \dots d_k} + (-1)^p P^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} \wedge DQ^{c_1 \dots c_l}_{d_1 \dots d_k}, \quad (2.4.36)$$

con $Q \in \Omega^q (M^{(d)})$.

Observe que, a diferencia de la derivada ∇ 2.4.33, la derivada D 2.4.35 actúa de manera antisimétrica sobre los índices, siendo un mapeo tipo

$$D : \Omega^p (M^{(d)}) \longrightarrow \Omega^{p+1} (M^{(d)}),$$

mientras que en la derivada ∇ tenemos un mapeo de estilo

$$\nabla : \Omega^p (M^{(d)}) \longrightarrow \Omega^p (M^{(d)}).$$

Una segunda diferencia es que la derivada covariante de Lorentz solo se contrae con los índices de $SO(d - \eta_-, \eta_-)$, mientras que la derivada covariante ∇ se aplica sobre todos los índices, incluyendo los índices de forma.

Las similitudes sólo se dan cuando estos operadores actúan sobre 0-formas, ya que en este caso, codifican la misma noción de transporte paralelo

$$\nabla \phi = D\phi, \tag{2.4.37}$$

con $\phi \in \Omega^0 (M^{(d)})$.

La derivada covariante de $SO(d - \eta_-, \eta_-)$ también coincide con la derivada exterior usual d siempre y cuando lo apliquemos sobre una p-forma escalar, ya que la conexión de espín actúa solo sobre los índices libres de Lorentz. Así,

$$D\lambda = d\lambda, \tag{2.4.38}$$

con $\lambda = \frac{1}{p!} \lambda_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$. Sin embargo, esta similitud se acaba cuando consideramos formas diferenciales de Lorentz. De hecho, una diferencia remarcable entre estos operadores, es que la derivada D no satisface el lema de Poincaré 2.4.17. En efecto, considerando la componente de un vector V^a , es fácil ver que

$$D^2 V^a = R^a_b V^b, \tag{2.4.39}$$

donde R^a_b es la llamada 2-forma curvatura dada por:

$$R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b. \quad (2.4.40)$$

Utilizando el postulado del vielbein, es posible escribir este objeto en términos del tensor curvatura como sigue

$$R^a_b = \frac{1}{2} e^a_\alpha e_b^\beta \mathcal{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (2.4.41)$$

Por otra parte, se define la 2-forma torsión como la derivada covariante actuando sobre el vielbein

$$T^a = De^a = de^a + \omega^a_b \wedge e^b, \quad (2.4.42)$$

la cual, análogamente al caso de la curvatura, está relacionado con el tensor de torsión mediante la siguiente ecuación

$$T^a = \frac{1}{2} e^a_\lambda T^\lambda_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (2.4.43)$$

En este punto, es importante señalar que la conexión de espín puede separarse en dos términos

$$\omega^{ab} = \mathring{\omega}^{ab} + \kappa^{ab},$$

donde $\mathring{\omega}^{ab}$ corresponde a la pieza sin torsión de la conexión de espín, la cual satisface

$$D\mathring{e}^a = d\mathring{e}^a + \mathring{\omega}^a_b \wedge \mathring{e}^b = 0^4, \quad (2.4.44)$$

mientras que κ^{ab} es la llamada 1-forma contorsión, que esta relacionada con la 2-forma torsión mediante

$$T^a = \kappa^a_b \wedge \mathring{e}^b. \quad (2.4.45)$$

Utilizando estos objetos, es posible definir la 2-forma curvatura de Riemann como

$$\mathring{R}^{ab} = d\mathring{\omega}^{ab} + \mathring{\omega}^a_c \wedge \mathring{\omega}^c_b \text{ }^5, \quad (2.4.46)$$

⁴Tanto la derivada $\mathring{\nabla}$ como \mathring{D} se definen de la manera usual mostrada en 2.3.6 y 2.4.27 respectivamente, salvo que las conexiones utilizadas serán $\mathring{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ y $\mathring{\omega}^{ab}$

⁵Cabe destacar que el símbolo "°" también se usa sobre formas diferenciales.

cuya relación con la 2-forma curvatura 2.4.40 se manifiesta en siguiente ecuación

$$R^{ab} = \mathring{R}^{ab} + \mathring{D}\kappa^{ab} + \kappa^a_c \wedge \kappa^c_b. \quad (2.4.47)$$

Tanto la ecuación 2.4.40 como 2.4.42 son importantes debido a que describen la estructura geométrica de la variedad y reciben el nombre de ecuaciones de estructura. En particular, la ecuación de estructura 2.4.40 nos permite distinguir de mejor manera la diferencia entre las derivadas ∇ y D . Para ello, haremos un procedimiento análogo al realizado cuando se obtuvo 2.4.40, solo que en esta oportunidad consideraremos la derivada ∇ . Puesto que $D^2 = \frac{1}{2}dx^\mu \wedge dx^\nu [D_\mu, D_\nu]$, debemos calcular en primer lugar el conmutador entre derivadas covariantes ∇_μ sobre V^α , el cual es dado por

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = (\mathcal{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta - T^\rho_{\mu\nu} \nabla_\rho V^\alpha) dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

lo cual es equivalente a

$$\nabla \wedge \nabla \vec{V} = \frac{1}{2} (\mathcal{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta - T^\rho_{\mu\nu} \nabla_\rho V^\alpha) dx^\mu \wedge dx^\nu \otimes \partial_\alpha. \quad (2.4.48)$$

Comparando 2.4.48 con 2.4.40, observamos que la diferencia entre las derivadas ∇ y D viene dada por la aparición de un término torsional en 2.4.48, el cual es consecuencia directa del sobretransporte paralelo de ∇ sobre los índices de forma. De este modo, la única manera de que ambas derivadas codifiquen la misma idea de paralelismo es cuando $T^\rho_{\mu\nu} = 0$.

Para finalizar, es importante conocer cómo calcular la dimensionalidad de una p-forma en una variedad d-dimensional. Recordemos que el producto exterior \wedge define un tensor antisimétrico, entonces una base $e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_i} \wedge \dots \wedge e^{a_j} \wedge \dots \wedge e^{a_p}$ de una forma diferencial $\alpha \in \Omega^p(M^{(d)})$ no es independientemente lineal de $e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_j} \wedge \dots \wedge e^{a_i} \wedge \dots \wedge e^{a_p}$, pero sí de $e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_i} \wedge \dots \wedge e^{a_j} \wedge \dots \wedge e^{a_{p-1}} \wedge e^{a_{p+1}}$ ⁶. En este sentido, para calcular la dimensionalidad de las p-formas en una variedad d-dimensional, debemos tener cuidado de no contabilizar todas las permutaciones

⁶ $p+1 \leq d$, de lo contrario la base se anularía

posibles de una base, lo que nos lleva a la siguiente combinatoria

$$\dim [\Omega^p (M^{(d)})] = \binom{d}{p} = \frac{d!}{p!(d-p)!}. \quad (2.4.49)$$

De la última expresión, es directo ver que $\dim [\Omega^p (M^{(d)})] = \dim [\Omega^{d-p} (M^{(d)})]$ y, puesto que tanto $\Omega^p (M^{(d)})$ como $\Omega^{d-p} (M^{(d)})$ tienen la estructura de un espacio vectorial, es posible definir una serie de operadores que utilizaremos muy a menudo a lo largo de esta tesis.

Definición 3. *Dual de Hodge*

Sea $P \in \Omega^p (M^{(d)})$,

$$P = \frac{1}{p!} P_{a_1 \dots a_p} e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_p}.$$

Se define el operador de Hodge como un mapeo lineal

$$* : \Omega^p (M^{(d)}) \longrightarrow \Omega^{d-p} (M^{(d)}),$$

definido por

$$*P = \frac{1}{(d-p)!p!} P^{a_1 \dots a_p} \epsilon_{a_1 \dots a_p b_1 \dots b_{d-p}} e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{b_{d-p}}. \quad (2.4.50)$$

con $*P \in \Omega^{d-p} (M^{(d)})$ el dual de P .

Este operador en términos de sus componentes adopta la forma

$$*P = \frac{1}{(d-p)!} (*P)_{b_1 \dots b_{d-p}} e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{b_{d-p}}, \quad (2.4.51)$$

donde

$$(*P)_{b_1 \dots b_{d-p}} = \frac{1}{p!} P^{a_1 \dots a_p} \epsilon_{a_1 \dots a_p b_1 \dots b_{d-p}}.$$

Definición 4. *El operador I*

Sea γ una q -forma en la variedad $M^{(d)}$. En términos del operador de Hodge 2.4.50, el operador I_α en el espacio tiempo d -dimensional es un mapeo del tipo

$$I_\gamma : \Omega^p (M^{(d)}) \longrightarrow \Omega^{p-q} (M^{(d)}),$$

definido de manera explicita como

$$I_\gamma = (-1)^{(d-p)(p-q)+\eta_-} * (\gamma \wedge *). \quad (2.4.52)$$

Si γ coincide con la base $e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_q}$, entonces la notación de este operador queda reducida a

$$I_{a_1 \dots a_q} = (-1)^{(d-p)(p-q)+\eta_-} * (e_{a_1} \wedge \dots \wedge e_{a_q} \wedge *). \quad (2.4.53)$$

Algunas propiedades interesantes de este operador son las siguientes:

- Si $\gamma \in \Omega^1 (M^{(d)})$, el operador satisface la regla de Leibnitz con una corrección de signo

$$I_\gamma (P \wedge L) = I_\gamma P \wedge L + (-1)^p P \wedge I_\gamma L, \quad (2.4.54)$$

donde P y L son p y l formas, respectivamente

- Se satisface el álgebra $I_{a_1 \dots a_q} I_{b_1 \dots b_r} = I_{b_1 \dots b_r a_1 \dots a_q}$, cuya consecuencia directa es que $I_a I^a = 0$

Definición 5. *Coderivada exterior*

La coderivada exterior es un mapeo lineal

$$d^\dagger : \Omega^p (M^{(d)}) \longrightarrow \Omega^{p-1} (M^{(d)}),$$

cuya definición es dada por

$$d^\dagger = - (-1)^{d(p+1)+\eta_-} * (d *). \quad (2.4.55)$$

2.4.2. Acción de Einstein-Hilbert en el formalismo de Cartan

Puesto que la geometría está basada en los conceptos independientes de metricidad y paralelismo, la descripción dinámica del espacio tiempo deben ser representados

por los grados de libertad independientes vielbein e^a y conexión de espín ω^{ab} . Luego, para la construcción de un principio de acción, debemos utilizar estas formas diferenciales y objetos que sean construidos a partir de ellos, tales como la 2-forma curvatura y la 2-forma torsión. Otros objetos que son posibles de utilizar son los tensores invariantes de Lorentz η_{ab} y ϵ_{abcd} ⁷, de manera que se construya una 4-forma invariante de Lorentz.

El único principio de acción razonable que se puede construir con los ingredientes antes mencionado es

$$S = \frac{1}{ck_4} \int_{M^{(4)}} \frac{1}{4} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d - \frac{1}{4!} \Lambda \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + \int_{M^{(4)}} \mathcal{L}_M^{(4)}, \quad (2.4.56)$$

con $\mathcal{L}_M^{(4)}$ el lagrangiano de materia que podría depender de los vielbein, conexión de espín o algún campo de materia y k_4 una constante de acoplamiento cuyas dimensiones son

$$[k_4] = \frac{T^2}{M \cdot L}, \quad (2.4.57)$$

donde M , L y T son unidades de masa, longitud y tiempo, respectivamente. Definiendo las variaciones del lagrangiano de materia con respecto al vielbein y la conexión de espín como

$$\begin{aligned} \delta_e \mathcal{L}_M^{(4)} &= - * \mathcal{T}_d \wedge \delta e^d, \\ \delta_\omega \mathcal{L}_M^{(4)} &= -\frac{1}{2} \delta \omega^{ab} \wedge * \sigma_{ab}, \end{aligned}$$

con \mathcal{T}_d una 1-forma energía momentum y σ_{ab} a una 1-forma de espín:

$$\mathcal{T}^a = \mathcal{T}_\mu^a dx^\mu, \quad (2.4.58)$$

$$\sigma^{ab} = \sigma_\mu^{ab} dx^\mu. \quad (2.4.59)$$

Variando el principio de acción, las ecuaciones de campo proporcionadas por el

⁷La invariabilidad bajo transformaciones locales de Lorentz de ϵ_{abcd} puede verse directamente de la ecuación 2.4.7.

vielbein y la conexión de espín son, respectivamente:

$$\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}R^{ab} \wedge e^c - \frac{\Lambda}{3!}\epsilon_{abcd}e^a \wedge e^b \wedge e^c = k_4 * \mathcal{T}_d, \quad (2.4.60)$$

$$\epsilon_{abcd} \wedge T^c \wedge e^d = k_4 * \sigma_{ab}. \quad (2.4.61)$$

Escribiendo estas ecuaciones en el lenguaje coordenado, encontramos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = k_4 \mathcal{T}_{\mu\nu}, \quad (2.4.62)$$

$$T^\beta_{\gamma\varepsilon} - \delta_\gamma^\beta T^\kappa_{\kappa\varepsilon} + \delta_\varepsilon^\beta T^\kappa_{\kappa\gamma} = k_4 \sigma^\beta_{\gamma\varepsilon}. \quad (2.4.63)$$

Ambas ecuaciones pueden reescribirse como

$$R_{\mu\nu} = k_4 \left(\mathcal{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \mathcal{T}^\alpha_\alpha \right) + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (2.4.64)$$

$$T^\rho_{\mu\nu} = k_4 \left(\sigma^\rho_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \{ \sigma^\alpha_{\alpha\mu} \delta^\rho_\nu - \sigma^\alpha_{\alpha\nu} \delta^\rho_\mu \} \right). \quad (2.4.65)$$

Al considerar el límite de campos débiles, debemos recuperar la teoría de gravitación de Newton, lo que nos lleva a que la constante k_4 tome el valor

$$k_4 = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (2.4.66)$$

Note que 2.4.62 es similar a la ecuación de Einstein-Hilbert 2.3.16, solo que esta última considera todos los términos sin torsión debido a la restricción de torsión nula impuesto.

La ecuación 2.4.64 nos dice que el tensor de Ricci podría ser no nulo en el vacío, posibilitando que la materia pueda curvar el espacio tiempo fuera de la región en la que se encuentra.

Por otro lado, de 2.4.65 observamos que las componentes de la torsión están algebraicamente relacionadas al tensor de espín 2.4.59. Por consiguiente, la torsión en el vacío se anula idénticamente y no se puede propagar. Cuando además de esto, consideramos el modelo estándar como lagrangiano de la materia, la torsión parecería estar condenada a la irrelevancia en el contexto de ECSK. En el modelo

estándar, solo los fermiones son una fuente de torsión (tienen un tensor de espín que no desaparece) a la vez que son afectados por esto (ver [58], [68]). Sin embargo, no existen experimentos realistas de física de partículas que permitan detectar torsión en un futuro previsible, ya que el efecto esperado es muy débil. De hecho, algunas referencias incluso desaconsejan en broma apostar por una detección de este tipo (ver el final del capítulo 8 de [68]). Más aún, los fermiones del modelo estándar interactúan formando estructuras localizadas. Dado que cualquier efecto torsional que los fermiones crean no pueden propagarse en el vacío, podría parecer que la torsión no juega un rol en la evolución tardía del universo⁸.

Sin embargo, es necesario tomar en cuenta la materia oscura antes de descartar la torsión, ya que no es claro aún si la materia oscura posee espín o si su densidad de espín desaparece o no. Los modelos cosmológicos estándar generalmente asumen una densidad de spin nula por simplicidad, pero no hay razones físicas más allá de esta hipótesis: Las restricciones de observación sobre la torsión son pobres. Por el contrario, asumir una densidad de spin no nula proporciona una explicación simple para fenómenos como la torsión en el parámetro de Hubble, ver [37].

Esto abre una interesante posibilidad, puesto que, como veremos, la torsión background afecta a la propagación de la amplitud y la polarización de las ondas gravitacionales. Esto significa que, en principio, incluso una torsión background débil podría afectar la propagación de las ondas a escalas cosmológicas. Incluso peor, podría ser que una propagación anómala no contabilizada de la amplitud de las ondas gravitacionales podría obstaculizar nuestros efectos para utilizar las fusiones de agujeros negros como sirenas estándar, haciéndolas parecer más lejanas o cercanas de lo que verdaderamente están. Sin embargo, como veremos más adelante, no es el caso, dado que sería necesario una torsión background fuerte poco realista para afectar la propagación de las ondas de un modo observable.

⁸La situación es contraria cuando se considera un plasma de fermiones extremadamente denso, como en el universo muy primitivo o durante el colapso de un agujero negro. En este caso, la torsión puede evitar la singularidad, proporcionar una alternativa a los modelos de inflación y dar origen a los modelos Big Bounce (ver referencias [60] y [67]). Con respecto a la evolución del universo tardío, es interesante observar que la inclusión de los efectos de torsión en las fluctuaciones del vacío, reduce el problema de la constante cosmológica desde 122 órdenes de magnitud a solo 8 (ver referencia [77]).

Capítulo 3

Ondas gravitacionales

Luego de la formulación de la teoría de la relatividad general, Einstein predijo la existencia de las ondas gravitacionales al encontrar soluciones tipo onda que se propagaban a la velocidad de la luz en la versión linealizada de la teoría en la métrica. Sin embargo, no fue hasta el año 2015 que Ligo detectó por primera vez en la historia, a través de una colisión de agujeros negros, la señal de onda gravitacional GW170817 [7]. Paralelamente, la detección de la explosión de rayos gamma GRB170817A por parte del observatorio Fermi [82] permitió comparar las velocidades de las ondas gravitacionales y electromagnéticas, encontrando una diferencia de solo una parte entre 10^{15} (ver [83]). Este hecho no coincidía con las predicciones hechas por algunas teorías de la gravedad (tales como un sector de las teorías de la familia de Hordenski), las cuales predecían una velocidad de propagación anómala de las ondas gravitacionales. Más tarde, se demostró que esta discordancia se produce por asumir que la torsión del espacio tiempo es nula [74]. En este sentido, es conveniente introducir nuevas herramientas matemáticas que faciliten y permitan un análisis más profundo del estudio de la propagación de las ondas gravitacionales en geometrías de Riemann-Cartan.

En este capítulo revisaremos en primer lugar cómo las ondas gravitacionales surgen al estudiar la teoría linealizada. Luego, estudiaremos brevemente los aspectos básicos de las perturbaciones lineales y de segundo orden de los campos y sus potenciales contribuciones a orden principal y secundario en el límite eikonal. En la tercera parte veremos como implementar operadores de onda sobre geometrías de Riemann Cartan. Finalmente, discutiremos las consecuencias de considerar

la torsión en la propagación de las ondas gravitacionales en una geometría de Riemann Cartan en la aproximación eikonal.

Un análisis más profundo de los tópicos discutidos en este capítulo pueden encontrarse en [8] y [34].

3.1. Teoría Linealizada

3.1.1. Relatividad general estándar linealizada

Las ondas gravitacionales surgen en la teoría de la relatividad general estándar al linealizar sus ecuaciones de campo (con constante cosmológica nula), las cuales como sabemos, son no lineales en la métrica. En particular, al considerar campos gravitacionales débiles, es posible escribir el tensor métrico como sigue

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \quad (3.1.1)$$

donde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Es decir, consideramos el espacio plano con una pequeña perturbación, de modo que los términos que puedan aparecer en alguna ecuación que sean de segundo orden serán totalmente despreciados. Dado que el valor numérico de los tensores depende del sistema de referencia, escogeremos un marco de referencia en donde 3.1.1 se satisface para una porción del espacio tiempo muy grande.

Consideremos la siguiente transformación de coordenadas

$$x \longrightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \zeta^{\mu}(x) . \quad (3.1.2)$$

Exigiendo que las derivadas de $\zeta^{\mu}(x)$ sean del mismo orden que $|h_{\mu\nu}|$, encontramos que la métrica transforma como

$$g'_{\mu\nu}(x') = \eta_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x) - (\partial_{\mu}\zeta_{\nu} + \partial_{\nu}\zeta_{\mu}) , \quad (3.1.3)$$

por lo tanto, la perturbación métrica de $h_{\mu\nu}$ es como sigue:

$$h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - (\partial_{\mu}\zeta_{\nu} + \partial_{\nu}\zeta_{\mu}) . \quad (3.1.4)$$

De 3.1.4 se observa que el difeomorfismo 3.1.2 es una simetría de la teoría linealizada, pues $|h_{\mu\nu}|$ es aún muy pequeño.

Por otro lado, para transformaciones de Lorentz globales

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu,$$

la métrica cambia como se muestra a continuación:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \eta_{\mu\nu} + \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu h_{\rho\sigma}(x), \quad (3.1.5)$$

de donde se concluye que $h_{\mu\nu}$ es un tensor de Lorentz, pues

$$h'_{\mu\nu}(x) = \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu h_{\rho\sigma}(x). \quad (3.1.6)$$

Note que, bajo un difeomorfismo arbitrario,

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta},$$

de donde se observa que la perturbación métrica es invariante bajo traslaciones $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$, con a^μ no necesariamente infinitesimal. Esto sumado al hecho que $h_{\mu\nu}$ también es covariante bajo rotaciones 3.1.6, significa que la teoría linealizada es invariante bajo transformaciones de Poincaré.

A partir de todo lo mencionado anteriormente, debemos estudiar como se ven las ecuaciones de Einstein Hilbert 2.3.16 en la teoría linealizada. Para ello, debemos calcular todo lo necesario, no olvidando que solo debemos considerar términos a primer orden en $h_{\mu\nu}$.

A primer orden en $h_{\mu\nu}$, el tensor de Riemann transforma como

$$\mathring{\mathcal{R}}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\rho h_{\mu\sigma} + \partial_\mu \partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\mu \partial_\rho h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h_{\mu\rho}), \quad (3.1.7)$$

el cual es invariante bajo transformaciones de gauge 3.1.4. Calculando el resto de los ingredientes obtenemos:

$$\mathring{\mathcal{R}}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial^\rho h_{\rho\nu} + \partial^\lambda \partial_\nu h_{\mu\lambda} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h), \quad (3.1.8)$$

$$\mathring{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} g^{\varphi\kappa} (\partial_\varphi \partial^\rho h_{\rho\kappa} + \partial^\lambda \partial_\kappa h_{\varphi\lambda} - \square h_{\varphi\kappa} - \partial_\varphi \partial_\kappa h). \quad (3.1.9)$$

Así, las ecuaciones de Einstein toman la forma

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\lambda \partial_\nu \bar{h}_{\mu\lambda} - \partial_\mu \partial^\rho \bar{h}_{\rho\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

con $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h$.

Por otra parte, a través de 3.1.4, es posible demostrar que

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} \longrightarrow (\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu})' = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}(x) - \square \zeta_\mu. \quad (3.1.10)$$

Dada la libertad de elección de coordenadas, siempre es posible elegir un sistema conveniente en que $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}(x) = \square \zeta_\mu$. Es decir, es posible elegir un $\bar{h}_{\mu\nu}$ tal que

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (3.1.11)$$

que es conocido como el gauge de Lorenz. Esto nos lleva a la ecuación de onda inhomogénea

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \mathcal{T}_{\mu\nu}. \quad (3.1.12)$$

Considerando el caso del vacío, ($\mathcal{T}_{\mu\nu} = 0$)

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (3.1.13)$$

se observa que la onda se propaga a la velocidad de la luz.

Originalmente, $h_{\mu\nu}$ tiene 10 componentes independientes, pero dado el gauge de Lorenz, $h_{\mu\nu}$ reduce el número de sus componentes independientes a 6.

3.1.2. Gauge transversal sin traza

En el vacío, es posible elegir coordenadas específicas para simplificar aún más la solución de $h_{\mu\nu}$ en 3.1.13, ya que 3.1.11 no fija completamente el gauge de Lorenz. En efecto, dado que $\square\zeta_\mu = 0$ deja invariante el gauge 3.1.11, entonces

$$\square\zeta_{\mu\nu} = 0,$$

con

$$\zeta_{\mu\nu} = \partial_\mu\zeta_\nu + \partial_\nu\zeta_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial^\rho\zeta_\rho,$$

también deja invariante 3.1.11. Puesto que $\zeta_{\mu\nu}$ depende de ζ_μ , podemos exigir cuatro condiciones extra sobre $h_{\mu\nu}$. Escogiendo ζ^0 y ζ^i de manera tal que $\bar{h} = \bar{h}^\mu{}_\mu = 0$ y $h^{0i}(x) = 0$, obtenemos el gauge totalmente fijado

$$h^{0\mu} = 0, \quad (3.1.14)$$

$$h^i{}_i = 0, \quad (3.1.15)$$

$$\partial^j h_{ij} = 0. \quad (3.1.16)$$

Además, $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, lo cual es consecuencia directa de $\bar{h} = 0$. Este gauge es conocido como el gauge transversal sin traza (TT) y reduce los grados de libertad de 6 a 2.

3.1.3. Solución de onda plana

La ecuación 3.1.13 admite soluciones de onda plana

$$h_{\mu\nu}^{TT} = A_{\mu\nu} \text{Re}(\exp(ik_\lambda x^\lambda)), \quad (3.1.17)$$

con $A_{\mu\nu}$ es el tensor de polarización

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{01} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{02} & A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{03} & A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (3.1.18)$$

y k_λ el vector de onda. Imponiendo la condición del gauge de Lorenz 3.1.16, es claro que las componentes espaciales de 3.1.17 que no se anulan están en el plano transversal a la dirección de propagación de la onda, esto es

$$n^i h_{ij}^{TT} = 0,$$

donde $n^i = \frac{k^i}{|k|}$. Esto significa que, si elegimos que la onda se propague a lo largo de un eje z , entonces

$$A_{13} = A_{23} = A_{33} = 0.$$

Por otra parte, de 3.1.14 encontramos que

$$A_{00} = A_{01} = A_{02} = A_{03} = 0,$$

por lo que el tensor de polarización 3.1.18 tendría la forma

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.19)$$

Por último, de la condición de traza nula 3.1.15, encontramos que 3.1.19 se transforma en

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.20)$$

Tal como fue mencionado en la sección anterior, el tensor polarización tiene dos componentes independientes, lo cual coincide con lo expresado en 3.1.20. Explícitamente, el tensor de polarización estará dado por

$$A'_{\mu\nu} = h_+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h_\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.21)$$

donde $h_+ = A'_{11}$ y $h_\times = A'_{12}$ corresponden a las amplitudes de la polarización $+$ y \times . El tensor polarización que acompaña a h_\times corresponde a una rotación en $\frac{\pi}{4}$ de la polarización $+$ en el plano ortogonal a la dirección de propagación de la onda.

Finalmente, la solución de la onda plana en términos del gauge TT es

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos\left(\omega \left[t - \frac{z}{c}\right]\right), \quad (3.1.22)$$

que da lugar a un elemento de línea del estilo:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dz^2 + \left(1 + h_+ \cos\left(\omega \left(t - \frac{z}{c}\right)\right)\right) dx^2 + \left(1 - h_+ \cos\left(\omega \left(t - \frac{z}{c}\right)\right)\right) dy^2 + 2h_\times \cos\left(\omega \left(t - \frac{z}{c}\right)\right) dx dy. \quad (3.1.23)$$

3.2. Separación de ondas gravitacionales del background

Hasta ahora, todo nuestro análisis se ha basado en la linealización de las ecuaciones de Einstein mediante la separación de la métrica en una background plana más pequeñas perturbaciones. Sin embargo, la métrica background no necesariamente debe ser plana.

Es posible demostrar que, desde el punto de vista del detector, las ondas gravitacionales son capaces de desplazarse mediante el paso de una onda

gravitacional, cuyo efecto es descrito mediante una fuerza newtoniana¹

$$\ddot{\zeta}^i = \frac{1}{2} \ddot{h}^{ijTT} \zeta_j. \quad (3.2.1)$$

Esto trae como consecuencia que dichas ondas sean portadores de energía y momentum, por lo tanto, conforme a la relatividad general, estas deben ser capaces de curvar el el espacio tiempo.

Así pues, debemos considerar métricas background dinámicas que entiendan las ondas gravitacionales como perturbaciones de una métrica background curva.

$$g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x). \quad (3.2.2)$$

Por supuesto, la pregunta natural es cuál de los objetos en 3.2.2 corresponde a la métrica background y cual a la perturbación. Por lo general, la respuesta a esta pregunta no es sencilla, puesto que la métrica podría recibir contribuciones que podrían variar tanto en el tiempo como en el espacio. Sin embargo, existe un caso útil cuando hablamos de métrica background y ondas gravitacionales, la cual se da cuando existe una separación de escalas, en este caso, entre L_B , que es la escala de variación típica de la métrica background $\bar{g}_{\mu\nu}$, y $\lambda = \frac{\lambda}{2\pi}$, que corresponde a la longitud de onda reducida. La separación natural se da cuando se satisface la condición

$$\lambda \ll L_B. \quad (3.2.3)$$

El significado de $h_{\mu\nu}$ en 3.2.2 es el de pequeñas ondas en un background suave. Este método de separación entre un background suave más perturbaciones es conocida como el método de expansión de onda corta.

Dicha distinción también puede darse en el espacio de las frecuencias

$$f_B \ll f, \quad (3.2.4)$$

donde f_B y f es el valor máximo de la frecuencia que puede alcanzar $\bar{g}_{\mu\nu}$ y $h_{\mu\nu}$,

¹Para ver detalles del cálculo de la ecuación 3.2.1, consultar el capítulo 1.3 de [8]

respectivamente. En este caso, $h_{\mu\nu}$ es una perturbación de alta frecuencia de un background estático. La situación es representada en la figura 3.2.1

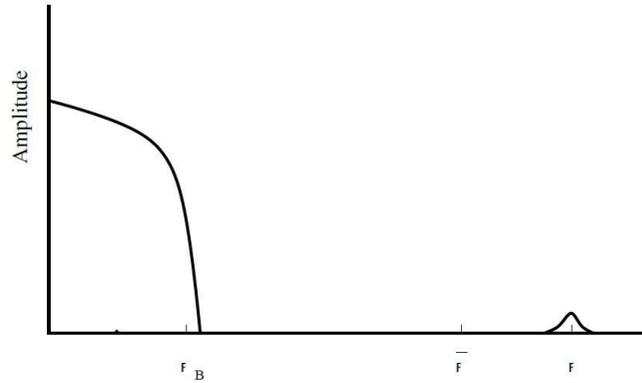


Figura 3.2.1: El background es definido como la parte de frecuencias bajas mientras que para las ondas gravitacionales para las más altas. Fuente: [8]

Cabe destacar que 3.2.3 y 3.2.4 no están relacionadas entre sí. Sin embargo, si solo una de ellas se satisface, entonces es posible realizar la separación 3.2.2.

3.3. Ondas en una geometría de Riemann-Cartan

Por lo general, las ondas gravitacionales se estudian en el contexto de la geometría de Riemann, calculando todo lo necesario considerando como base la separación de la métrica background y una perturbación, tal como lo mencionamos en la sección anterior.

Para realizar dichos cálculos en una geometría de Riemann Cartan (RC) es necesario considerar la conexión $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ como un nuevo grado de libertad, lo que adiciona 24 grados de libertad nuevos a través de la ecuación para la torsión 2.3.8.

La mayoría de las teorías formuladas en este marco, tales como [10] y [11], se dan utilizando un lenguaje tensorial y no en el formalismo de cartan. Sin embargo, si existen herramientas matemáticas para hacerlo, donde se consideran la conexión de espín y el vielbein como grados de libertad independientes y la parametrización de las perturbaciones de estas tanto a primer (ver [12]) como a segundo orden (ver [13]). Note que considerar términos de orden cuadrático en el término $h_{\mu\nu}$ cobra relevancia, pues según lo mencionado en la sección anterior, el primer paso que debemos realizar es separar la métrica en un background de baja frecuencia y un término de alta frecuencia que corresponde a la onda en si misma $h_{\mu\nu}$. El

punto es que los términos $h_{\mu\nu}$ a orden cuadrático podrían tener efectos a baja frecuencia, lo cual es simple de ver si pensamos en dos ondas cuyos vectores de ondas k_1 y k_2 sean tales que $k_1 \approx -k_2$.

3.3.1. Parametrización de las perturbaciones

En esta sección revisaremos brevemente una técnica para estudiar las perturbaciones en un espacio tiempo con torsión para aplicarlos a las ondas gravitacionales en la geometría de Riemann-Cartan².

Consideremos una variedad d -dimensional $M^{(d)}$ dotada de una métrica $g_{\mu\nu}$ en cada punto p . Dado que los vielbein e^a codifican la misma información que la métrica, también es posible definirlos en cada punto de la variedad.

Puesto que estamos trabajando con una geometría de RC, el vielbein e^a y la conexión de espín ω^{ab} son grados de libertad independientes, por lo que son ambos los que describen la geometría background, situación que no ocurría cuando trabajamos en una teoría de relatividad general estandar, donde la torsión es nula y la geometría queda descrita solo por el vielbein.

Sean $H^a, u^{ab} \in \Omega^{(1)}$ las perturbaciones del vielbein e^a y la conexión de espín ω^{ab} , respectivamente. La geometría perturbada queda descrita por las perturbaciones del vielbein \bar{e}^a y conexión de espín $\bar{\omega}^{ab}$ dadas por

$$\bar{e}^a = e^a + \frac{1}{2}H^a, \quad (3.3.1)$$

$$\bar{\omega}^{ab} = \omega^{ab} + u^{ab}. \quad (3.3.2)$$

La 1-forma $H^a = H^a_b e^b$ mapea los mismos grados de libertad que la perturbación métrica $h_{\mu\nu}$ a través de 2.4.26. Además, sin importar la teoría que consideremos, siempre es posible usar la invariancia local de Lorentz y la derivada de Lie para demostrar que las componentes H_{ab} deben ser simétricas, $H_{ab} = H_{ba}$ (ver [74]).

A través de 2.4.26, es posible establecer una relación entre las perturbaciones del vielbein y la métrica

$$h_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} + \frac{1}{4}H^a_\mu H_{\alpha\nu}. \quad (3.3.3)$$

Asumiendo que $H_{\mu\nu}$ es una función analítica, entonces podemos escribir $H_{\mu\nu}$ como

²Para un análisis más detallado, ver [74]

una serie de potencias en $h_{\mu\nu}$

$$H_{\mu\nu} = a_0\delta_{\mu\nu} + a_1h_{\mu\nu} + a_2h_{\mu\rho}h^\rho_\nu + a_3h_{\mu\rho}h^\rho_\lambda h^\lambda_\nu + \dots, \quad (3.3.4)$$

lo cual nos permite obtener la relación inversa

$$H^a_\mu = h^a_\mu - \frac{1}{4}h^a_\rho h^\rho_\mu + \frac{1}{8}h^a_\lambda h^\lambda_\rho h^\rho_\mu + \dots \quad (3.3.5)$$

Comparando 3.3.3 con 3.3.5, se observa una diferencia a orden cuadrático, lo que significa que estas son solo formas diferentes de parametrizar los mismos grados de libertad.

Así como definimos la conexión de espín en términos de las 1-forma contorsión y $\hat{\omega}^{ab}$, también es posible hacerlo para la conexión de espín perturbada u^{ab} como

$$u^{ab} = \hat{u}^{ab} + q^{ab}, \quad (3.3.6)$$

donde \hat{u}^{ab} representa la parte sin torsión de la conexión de spin perturbada

$$\hat{u}^{ab} = \hat{\omega}^{ab} - \hat{\omega}^{ab}, \quad (3.3.7)$$

mientras que q^{ab} es la perturbación de la contorsión

$$q^{ab} = \bar{\kappa}^{ab} - \kappa^{ab}. \quad (3.3.8)$$

Imponiendo la condición sin torsión 2.4.44 sobre la perturbación de la conexión de espín, obtenemos

$$\frac{1}{2}\hat{D}H^a + \hat{u}^a_b \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b \right) = 0, \quad (3.3.9)$$

cuya solución en serie de potencias de H es

$$\hat{u}_{ab} = \hat{u}_{ab}^{(1)} + \hat{u}_{ab}^{(2)} + O(H^3),$$

con $\hat{u}_{ab}^{(1)}$ y $\hat{u}_{ab}^{(2)}$ los términos lineales y cuadráticos de la solución de 3.3.9.

Reemplazando este ansatz en 3.3.9 obtenemos dos ecuaciones a resolver

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathring{D}H_a + \mathring{u}_{ab}^{(1)} \wedge e^b &= 0, \\ \mathring{u}_{ab}^{(2)} \wedge e^b + \frac{1}{2}\mathring{u}_{ab}^{(1)} \wedge H^b + \frac{1}{2}\mathring{u}_{ab}^{(2)} \wedge H^b &= 0,\end{aligned}$$

en las cuales hemos separado la ecuación entre aquellas que van a orden 1 en H y orden 2, respectivamente. Sus respectivas soluciones son dadas por

$$\mathring{u}_{ab}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(I_a \mathring{D}H_b - I_b \mathring{D}H_a \right), \quad (3.3.10)$$

$$\mathring{u}_{ab}^{(2)} = \frac{1}{8} I_{ab} \left(\mathring{D}H_c \wedge H^c \right) + \frac{1}{2} \left[I_b \left(\mathring{u}_{ab}^{(1)} \wedge H^c \right) - I_a \left(\mathring{u}_{bc}^{(1)} \wedge H^c \right) \right]. \quad (3.3.11)$$

Lo que sigue ahora es intentar obtener una parametrización completa de la perturbación y no solo la pieza sin torsión. Para ello, debemos introducir nuevas 1-formas diferenciales

$$U^{ab} = \mathring{u}^{ab} - \Delta^{ab}, \quad (3.3.12)$$

$$V^{ab} = q^{ab} + \Delta^{ab}, \quad (3.3.13)$$

con Δ^{ab} una 1-forma antisimétrica de Lorentz, de manera tal que

$$u^{ab} = U^{ab} + V^{ab}. \quad (3.3.14)$$

Utilizando estas variables, 3.3.9, toma la forma

$$\frac{1}{2}DH^a + U^a_b \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b \right) + \Delta^a_b \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b \right) - \frac{1}{2}\kappa^a_b \wedge H^b = 0. \quad (3.3.15)$$

Cabe destacar que las derivadas sin torsión también fueron eliminadas de la ecuación, esto debido a que, generalmente, las ecuaciones de campo de una teoría surgen derivadas con torsión, y combinar ambas derivadas puede resultar engorroso en los cálculos.

Una larga mirada a las ecuaciones para $u^{(1)}$ y $u^{(2)}$ sugiere que Δ_{ab} debe satisfacer

$$\Delta_{ab} \wedge \left(e^b + \frac{1}{2} H^b \right) - \frac{1}{2} \kappa_{ab} \wedge H^b = \frac{1}{2} I_a \left[H^b \wedge T_b - \frac{1}{2} H^b \wedge I_b (H^c \wedge T_c) \right] + O(H^3). \quad (3.3.16)$$

Análogamente a 3.3.9, encontramos la solución de Δ_{ab} separandolas en series de potencias en H

$$\Delta_{ab} = \Delta_{ab}^{(1)} + \Delta_{ab}^{(2)} + O(H^3),$$

con

$$\Delta_{ab}^{(1)} = \frac{1}{2} [I_a (\kappa_{bc} \wedge H^c) - I_b (\kappa_{ab} \wedge H^c)], \quad (3.3.17)$$

$$\Delta_{ab}^{(2)} = -\frac{1}{8} I_{ab} (H^c \kappa_{cd} \wedge H^d) - \frac{1}{2} \left[I_a (\Delta_{bc}^{(1)} \wedge H^c) - I_b (\Delta_{ac}^{(1)} \wedge H^c) \right]. \quad (3.3.18)$$

Reemplazando estas soluciones en 3.3.12, encontramos soluciones para U_{ab} tanto a primer como a segundo orden en H dadas por

$$U_{ab}^{(1)} = -\frac{1}{2} (I_a D H_b - I_b D H_a), \quad (3.3.19)$$

$$U_{ab}^{(2)} = \frac{1}{8} I_{ab} (D H_c \wedge H^c) - \frac{1}{2} \left[I_a (U_{bc}^{(1)} \wedge H^c) - I_b (U_{ac}^{(1)} \wedge H^c) \right]. \quad (3.3.20)$$

Para una teoría con torsión propagante, el término de perturbación contorsional $V^{ab} = V^{ab} e^c$ es un grado de libertad independiente (ver [71],[74],[75]). Sin embargo, para teorías con torsión no propagantes (como la teoría de Einstein-Cartan), es posible encontrar una solución para V^{ab} en términos de H^a y T^a , de tal forma que en una región donde la torsión background desaparece, la perturbación V^{ab} también lo hace.

La torsión y la curvatura perturbada pueden ser escritas en términos de las nuevas variables U_{ab} y V_{ab} . Para el caso de la torsión, aplicamos la definición 2.4.45 considerando el espacio tiempo perturbado

$$\bar{T}^a = \bar{\kappa}^a_b \wedge \bar{e}^b.$$

Introduciendo las ecuaciones 3.3.8, 3.3.13 y 3.3.1 en la ecuación anterior, obtenemos una expresión apropiada para la torsión perturbada

$$T_a \longrightarrow \bar{T}_a = T_a + V_{ab} \wedge \left(e^b + \frac{1}{2} H^b \right) - \frac{1}{2} I_a \left[H^b \wedge T_b - \frac{1}{2} H^b \wedge I_b (H^c \wedge T_c) \right]. \quad (3.3.21)$$

Escribiendo 3.3.21 en términos de potencias de H , obtenemos

$$T^a \longrightarrow \bar{T}^a = T^a + T_{(1)}^a + T_{(2)}^a + \dots,$$

con

$$T_a^{(1)} = V_{ab} \wedge e^b - \frac{1}{2} I_a (H^b \wedge T_b), \quad (3.3.22)$$

$$T_a^{(2)} = \frac{1}{2} V_{ab} \wedge H^b + \frac{1}{4} I_a (H^b \wedge I_b (H^c \wedge T_c)). \quad (3.3.23)$$

Por otra parte, para la 2-forma curvatura bastará utilizar la definición usual 2.4.40 junto con la definición para la conexión de spin perturbada 3.3.6. De este modo,

$$R^{ab} \longrightarrow \bar{R}^{ab} = R^{ab} + R_{(1)}^{ab} + R_{(2)}^{ab} + O(H^3), \quad (3.3.24)$$

donde los términos lineales y cuadráticos se definen como

$$R_{(1)}^{ab} = DU_{(1)}^{ab} + DV^{ab}, \quad (3.3.25)$$

$$R_{(2)}^{ab} = DU_{(2)}^{ab} + (U_{(1)c}^a + V_c^a) \wedge (U_{(1)}^{cb} + V^{cb}). \quad (3.3.26)$$

De 3.3.25 y 3.3.26 se observan términos de segunda derivada en H , como es de esperarse cuando se calculan las ecuaciones del movimiento para las ondas gravitacionales. Por otra parte, los términos V^{ab} pueden contener derivadas hasta de primer orden si no consideramos derivadas en la curvatura, tal como ocurre en la teoría de Lovelock [14], por lo que no encontraremos ecuaciones tipo onda para V . Esto significa que H y V se propagan de manera diferente.

3.4. Operadores de onda

Cuando se estudia la propagación de la onda en un espacio de Riemann, usualmente se utilizan operadores tales como el operador de Beltrami y de Rham. Sin embargo, cuando las estudiamos en un espacio de Riemann Cartan, el análisis de las ondas queda muy limitado, por lo que requerimos de una generalización de los operadores antes mencionados [72], los cuales serán los mismos a los que surgen de la teoría de Einstein- Cartan (ver [18]).

Estas herramientas matemáticas nos permiten una mejor comprensión de las consecuencias al considerar un campo propagándose en un espacio tiempo con torsión a cualquier orden en el parámetro eikonal ϵ y no solo al orden principal como se muestra en [16] y [17].

Cabe destacar que, aunque es posible continuar sin introducir este conjunto de herramientas matemáticas, estos simplifican enormemente los cálculos y hace que los resultados sean mucho más transparentes.

En [72] se estudia una definición matemática formal de la generalización de los operadores de Beltrami y Rham en una geometría de Riemann-Cartan, y en las referencias [55] y [73] encontramos ejemplos de su uso en teorías con torsión no nulas. Nos referimos a estos artículos anteriores en caso de que el lector requiera un tratamiento más profundo del tema, sin embargo, esta sección resume brevemente las definiciones y las propiedades en términos del lenguaje de las formas diferenciales.

3.4.1. Operadores de onda en geometría Rieminianna

Antes de estudiar los operadores de onda en una geometría RC, conviene recordar los dos principales operadores de onda en un espacio sin torsión y como se relacionan entre sí. Para ello, necesitaremos de un fibrado principal³ con un grupo de gauge G , que para el caso de esta tesis, será el grupo especial ortogonal $SO(d - \eta_-, \eta_-)$.

Definición 6. *Operador de Rham*

³Un fibrado principal consiste en elegir en cada punto de un abierto $U_\alpha \subset M^{(d)}$ un representante del grupo de simetría que esta definido en cada punto de la variedad. La unión de todas estas fibras compone el fibrado principal.

Se define el operador de Rham como el mapeo lineal

$$\square_{dR} : \Omega^p(M^{(d)}) \longrightarrow \Omega^p(M^{(d)}),$$

dado por

$$\square_{dR} = d^\dagger d + dd^\dagger, \quad (3.4.1)$$

donde d^\dagger corresponde a la coderivada exterior 2.4.55. Este operador fue definido por Georges De Rham con el sentido de generalizar el operador de onda ∇^2 utilizado en el espacio plano.

En particular, si aplicamos este operador sobre $\phi \in \Omega^0(M^{(d)})$

$$\square_{dR}\phi = d^\dagger d\phi, \quad (3.4.2)$$

pues la coderivada sobre una 0 forma es nula. Tras un poco de álgebra, es sencillo demostrar que 3.4.2 puede escribirse del siguiente modo

$$\square_{dR}\phi = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\lambda \left(\sqrt{|g|}\partial^\lambda \phi \right).$$

Definición 7. *Operador de Beltrami*

El operador lineal de Beltrami es un mapeo lineal del tipo

$$\square_B : \Omega^p(M^{(d)}) \longrightarrow \Omega^p(M^{(d)}),$$

definido como

$$\square_B = \overset{\circ}{\nabla}^\mu \overset{\circ}{\nabla}_\mu. \quad (3.4.3)$$

Es necesario subrayar que los operadores de Rham 3.4.1 y de Beltrami 3.4.3 son operadores distintos, y solo coinciden cuando actúan sobre 0-formas. Sin embargo, ambos operadores se relacionan mediante las identidades de Weitzemböck [19].

Definición 8. *Identidad de Weitzemböck*

La identidad de Weitzemböck relaciona los operadores definidos anteriormente

como sigue

$$\square_{dR}\alpha = \square_B\alpha + I_a \left(\mathring{R}^a_b \wedge I^b\alpha \right), \quad (3.4.4)$$

con $\alpha \in \Omega^p$.

En general, el segundo término de 3.4.4 nos proporcionará elementos que son proporcionales a la curvatura de Riemann, cuya cantidad de términos dependerá del grado de la forma diferencial.

El lector debe advertir que la presencia de torsión en la variedad es irrelevante a la hora de considerar la ecuación de onda para una p-forma escalar. Observe que el lado izquierdo de 3.4.4 nos puede proveer información sobre la métrica de la variedad, hecho que esta en concordancia con lo que ocurre en el lado derecho, pues tanto la conexión de Christoffel como la curvatura de Riemann dependen de la métrica, por lo que no es ninguna sorpresa la ausencia de torsión.

A pesar de haber definido operadores de onda más generales que el D'Alambertiano que se utiliza en el espacio plano, ninguno de estos operadores es covariante de $SO(\eta_+, \eta_-)$ cuando utilizamos este operador sobre formas diferenciales con índices libres de Lorentz, por lo que necesitamos una generalización de este operador, de modo tal que objetos tales como $\square_{dR}\alpha^{ab}$ estén bien definidos. Para ello, debemos en primer lugar definir una nueva derivada que actúa en espacios curvos.

Definición 9. *Coderivada exterior covariante*

La coderivada exterior covariante corresponde a un mapeo lineal

$$D^\dagger = \Omega^p(M^{(d)}) \longrightarrow \Omega^{p-1}(M^{(d)}),$$

cuya definición explícita es dada por

$$D^\dagger = -(-1)^{d(p+1)+\eta_-} * (D*), \quad (3.4.5)$$

donde $*$ corresponde al dual de hodge. Por supuesto, también es posible definir la misma coderivada sin torsión

$$\mathring{D}^\dagger = -(-1)^{d(p+1)+\eta_-} * (\mathring{D}*). \quad (3.4.6)$$

Esta derivada tiene la particularidad de ser covariante bajo el grupo $SO(\eta_+, \eta_-)$ al actuar sobre objetos que contengan índices libres de Lorentz.

Definición 10. *Operador de Lichnerowicz de Rham*

El operador lineal de Lichnerowicz de Rham

$$\square_{LdR} : \Omega^p(M^{(d)}) \longrightarrow \Omega^p(M^{(d)}),$$

corresponde a una generalización del operador de Rham en un espacio curvo dado por

$$\square_{LdR} = \mathring{D}^\dagger \mathring{D} + \mathring{D} \mathring{D}^\dagger, \quad (3.4.7)$$

el cual, como es de suponerse, actúa covariantemente sobre formas diferenciales que pertenecen a alguna representación del álgebra del grupo $SO(d - \eta_-, \eta_-)$.

Este operador también se relaciona con el operador de Beltrami de una manera muy similar a como lo hace la identidad de Weitzenböck 3.4.4.

$$\square_{LdR} \alpha^{ab} = \square_B \alpha^{ab} + I_a \left(\mathring{R}^a_b \wedge I^b \alpha^{ab} \right). \quad (3.4.8)$$

donde α^{ab} es una p-forma con índices libres de $SO(\eta_+, \eta_-)$.

3.4.2. Operadores de onda en geometría de Riemann Cartan

Antes de definir los operadores de onda generalizados mencionados anteriormente, es menester introducir otros operadores para luego estudiar el comportamiento de la onda en un espacio tiempo con torsión, todos ellos covariantes de $SO(d - \eta_-, \eta_-)$ al aplicarse sobre campos con índices libres de Lorentz.

Definición 11. *Derivada generalizada de Lie*

Sea $\alpha \in \Omega^q(M^{(d)})$. Se define la derivada generalizada de Lie como una aplicación lineal del tipo

$$\mathcal{D}_\alpha : \Omega^p(M^{(d)}) \longrightarrow \Omega^p(M^{(d)}),$$

cuya definición explícita es

$$\mathcal{D}_\alpha = I_\alpha D + DI_\alpha. \quad (3.4.9)$$

Si α corresponde al elemento base de una q -forma $e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_q}$, entonces la notación se escribe como se señala a continuación:

$$\mathcal{D}_{a_1 \dots a_q} = I_{a_1 \dots a_q} D + DI_{a_1 \dots a_q}. \quad (3.4.10)$$

Si $\alpha \in \Omega^1(M^{(d)})$, entonces la derivada de Lie generalizada satisficará la regla de Leibniz

$$\mathcal{D}_\alpha (P \wedge Q) = \mathcal{D}_\alpha P \wedge Q + P \wedge \mathcal{D}_\alpha Q, \quad (3.4.11)$$

con P y Q una p y q forma respectivamente.

Otra propiedad adicional de este operador es que si α corresponde al vielbein e^a , entonces

$$\mathcal{D}_a = e_a^\mu \nabla_\mu + I_a T^c \wedge I_c. \quad (3.4.12)$$

La ecuación 3.4.12 nos informa que, al considerar un espacio tiempo sin torsión, la derivada generalizada de lie \mathcal{D}_a coincide con la derivada covariante sin torsión $\mathring{\nabla}_a = e_a^\mu \mathring{\nabla}_\mu$.

Por último, la derivada covariante de Lorentz D también se relaciona con la derivada \mathcal{D}_a mediante 3.4.13 (ver apéndice A2)

$$D = e^a \wedge \mathcal{D}_a - T^a \wedge I_a. \quad (3.4.13)$$

Una característica práctica de los operadores I_a , D y \mathcal{D}_a es que estos abarcan una super algebra abierta satisficando la super identidad de Jacobi (ver apéndice B

de referencia [72])

$$\{I_a, D\} = \mathcal{D}_a, \quad (3.4.14)$$

$$\{I_a, I_b\} = 0, \quad (3.4.15)$$

$$\{D, D\} = 2D^2, \quad (3.4.16)$$

$$[I_a, \mathcal{D}_b] = -T^c{}_{ab} I_c, \quad (3.4.17)$$

$$[D, \mathcal{D}_a] = D^2 I_a - I_a D^2, \quad (3.4.18)$$

$$[\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b] = I_{ab} D^2 + D^2 I_{ab} + I_a D^2 I_b - I_b D^2 I_a - (DT^c{}_{ab} \wedge I_c + T^c{}_{ab} \mathcal{D}_c). \quad (3.4.19)$$

Estas propiedades simplifican enormemente los cálculos algebraicos.

Definición 12. *Coderivada covariante generalizada*

La coderivada covariante generalizada es un mapeo lineal

$$D^\dagger : \Omega^p(M^{(d)}) \longrightarrow \Omega^{p-1}(M^{(d)}),$$

definido como

$$D^\dagger = -I_a D I^a. \quad (3.4.20)$$

Es posible demostrar que la relación entre este operador y la coderivada exterior covariante 3.4.6 es (ver: [15])

$$D^\dagger \gamma^d = D^\dagger \gamma^d - \frac{1}{2} [I^{bc} T^a{}_{bc} (e_a \wedge \gamma^d) + (I^a T^b - I^b T^a) \wedge I_{ab} \gamma^d]. \quad (3.4.21)$$

Definición 13. *Operador de Beltrami generalizado*

El operador de Beltrami es un mapeo lineal

$$\blacksquare_B : \Omega^p(M^{(d)}) \longrightarrow \Omega^p(M^{(d)}),$$

definido como

$$\blacksquare_B = -\mathcal{D}^a \mathcal{D}_a. \quad (3.4.22)$$

Definición 14. *Operador generalizado de Lichnerowicz de Rham*

El Operador generalizado de Lichnewowicz de Rham corresponde a un mapeo lineal

$$\blacksquare_{LdR} : \Omega^p(M^{(d)}) \longrightarrow \Omega^p(M^{(d)}),$$

dado por

$$\blacksquare_{LdR} = D^\dagger D + DD^\dagger. \quad (3.4.23)$$

Ambos operadores 3.4.22 y 3.4.23 se relacionan entre sí en una relación análoga a 3.4.4, la cual es llamada la identidad de Weitzenböck generalizada

$$\blacksquare_{LdR} = \blacksquare_B + I_a D^2 I^a, \quad (3.4.24)$$

donde el segundo término da lugar a la curvatura de Lorentz vía las identidades de Bianchi.

Por supuesto, a partir de 3.4.24, es posible recuperar la identidad de Weitzenböck 3.4.4 actuando sobre una p-forma escalar α en una variedad sin torsión, esto es

$$\begin{aligned} \blacksquare_{LdR}\alpha &= \blacksquare_B\alpha + I_a D^2 I^a \alpha, \\ \left(\overset{\circ}{D}{}^\dagger \overset{\circ}{D} + \overset{\circ}{D} \overset{\circ}{D}{}^\dagger\right)\alpha &= \left(-\overset{\circ}{D}{}^a \overset{\circ}{D}_a\right)\alpha + I_a \overset{\circ}{D}{}^2 I^a \alpha. \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

De 3.4.21 se observa que la co-derivada exterior actuando sobre campos escalares en un espacio tiempo sin torsión se puede escribir como

$$d^\dagger \alpha = \overset{\circ}{D}{}^\dagger \alpha. \quad (3.4.26)$$

Además, si consideramos la equivalencia $\overset{\circ}{D}_a = \overset{\circ}{\nabla}_a$ en un espacio tiempo sin torsión y que $d = D$ cuando actuamos sobre formas escalares de $SO(d - \eta_-, \eta_-)$, la ecuación 3.4.25 se transforma en

$$(d^\dagger d + dd^\dagger)\alpha = -\overset{\circ}{\nabla}{}^a \overset{\circ}{\nabla}_a \alpha + I_a \overset{\circ}{D}{}^2 I^a \alpha, \quad (3.4.27)$$

lo que nos lleva a la identidad de Weitzenböck usual 3.4.4.

$$\square_{dR}\alpha = \square_B\alpha + I_a \mathring{D}^2 I^a \alpha.$$

En resumen, cuando trabajamos con una p -forma escalar en un espacio tiempo sin torsión, los operadores generalizados de Lichnewowicz- de Rham y Beltrami se reducen a los operadores de Rham y Beltrami usuales, respectivamente.

Si consideramos el mismo espacio tiempo sin torsión, pero en esta oportunidad con una p -forma β^{ab} que contenga índices libres de Lorentz, los términos del lado derecho de 3.4.27 no cambian. Sin embargo, el operador generalizado de Lichnewowicz- de Rham se transforma en el operador de Lichnerowicz de Rham usual, pues en estas situaciones, es posible demostrar a través de 3.4.21 que $\mathring{D}^\ddagger = \mathring{D}^\dagger$, así, 3.4.24 se transforma en

$$\square_{LdR}\beta^{cd} = \square_B\beta^{cd} + I_a \left(\mathring{R}^a_b \wedge I^b \beta^{cd} \right). \quad (3.4.28)$$

Desde un punto de vista físico y fenomenológico, la ecuación 3.4.24 es también una definición apropiada del operador de onda. Esto es debido a que $D^\ddagger D + D D^\ddagger$ (o equivalentemente, el operador de Beltrami generalizado $-\mathcal{D}^a \mathcal{D}_a$) es el operador de onda que surge de las perturbaciones del término de Einstein-Hilbert en el caso de torsión no nula. Para dejar claro este punto, en las siguientes secciones revisaremos brevemente las perturbaciones en la geometría de Riemann-Cartan y las perturbaciones de alta frecuencia del término de Einstein-Hilbert.

3.5. El límite eikonal en el operador generalizado de Lichnewowicz de Rham

El límite eikonal consiste en la búsqueda de soluciones a la ecuación de onda generalizada de la onda gravitacional propagante

$$\blacksquare_{LdR} H^a = 0, \quad (3.5.1)$$

cuya fase varíe rápidamente en la escala de λ , mientras que la amplitud de la onda no variaría demasiado, ya que esta solo lo hace en la escala característica L_B .

Adicionalmente a la condición eikonal, la onda gravitacional debe satisfacer el gauge de Lorenz 3.1.11, que en una geometría de Riemann-Cartan luce como⁴

$$\mathcal{D}_a H^a - \frac{1}{2} dI_a H^a = 0. \quad (3.5.2)$$

Escribiremos en primer lugar la parametrización de la onda en términos de las variables mencionadas anteriormente.

$$H^a = \exp(i\theta) \mathbf{H}^a, \quad (3.5.3)$$

donde \mathbf{H}^a es la 1-forma amplitud de la onda compleja y θ representa la fase real. Similarmente, para el término de perturbación contorsional tenemos que

$$V^a{}_b = \exp(i\theta) \mathbf{V}^a{}_b,$$

donde $\mathbf{V}^a{}_b$ también actúa como 1-forma amplitud.

Utilizando la identidad de Weitzenböck generalizada 3.4.24, es posible mostrar que 3.5.1 se puede escribir del siguiente modo

$$\blacksquare_{LdR} H^b = \exp(i\theta) \left[k^2 \mathbf{H}^b - 2i \left(k_a \mathcal{D}^a \mathbf{H}^b - \frac{1}{2} \mathbf{H}^b D^\dagger k \right) + \blacksquare_{LdR} \mathbf{H}^b \right], \quad (3.5.4)$$

con $k = d\theta$ la 1-forma de onda.

Se define el parámetro eikonal ϵ como

$$\epsilon = \frac{\lambda}{L}. \quad (3.5.5)$$

Dada la condición $\lambda \ll L_B$, es claro que $\epsilon \ll 1$, lo que nos permite hacer una

⁴ver [55] para más detalles

expansión del tipo

$$\mathbf{H}^a = \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{H}_{(p)}^a \quad (3.5.6)$$

$$\mathbf{V}^a_b = \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{V}^a_{b(p)} \quad (3.5.7)$$

donde $\mathbb{H}_{(p)}^a$ y $\mathbb{V}^a_{b(p)}$ corresponden a 1-formas amplitud de orden p en ϵ . Así pues, al reemplazar 3.5.6 en 3.5.4, esta se dividirá en términos de diferentes órdenes en ϵ , los cuales serán independientes entre sí. En particular, las dos ecuaciones de interés son las siguientes:

$$k^2 \mathbb{H}_{(0)}^b = 0, \quad (3.5.8)$$

$$k^2 \mathbb{H}_{(1)}^b - 2i \left(k_a \mathcal{D}^a \mathbb{H}_{(0)}^b - \frac{1}{2} \mathbb{H}_{(0)}^b D^\dagger k \right) = 0, \quad (3.5.9)$$

que corresponden a las ecuaciones que se satisfacen a orden ϵ^{-2} y ϵ^{-1} , respectivamente.

Note que $k = d\theta = O(\epsilon^{-1})$, ya que θ cambia rápidamente en el parámetro eikonal. Por otra parte, $\mathbb{H}_{(0)}^b$ corresponde a un término independiente de λ , por lo que es no nulo. De esto y de 3.5.8, se desprende la relación de dispersión

$$k^2 = 0. \quad (3.5.10)$$

Diferenciando esta ecuación con respecto a la derivada de Lie generalizada \mathcal{D}_a , obtenemos que

$$k^a \overset{\circ}{\mathcal{D}}_a k^b = 0.$$

Utilizando la relación 3.4.12 se puede escribir como sigue

$$k^\mu \overset{\circ}{\nabla}_\mu k_\nu = 0. \quad (3.5.11)$$

De 3.5.11 observamos que la 1-forma de onda k satisface la ecuación de la geodésica, independientemente si existe o no torsión en la geometría background.

Por otro lado, introduciendo la relación de dispersión 3.5.10 en 3.5.9, obtenemos una ecuación que nos provee información sobre la propagación de la amplitud de la onda a orden principal

$$k_a \mathcal{D}^a \mathbb{H}_{(0)}^b - \frac{1}{2} \mathbb{H}_{(0)}^b D^\dagger k = 0. \quad (3.5.12)$$

En este punto, conviene introducir una amplitud escalar real $\phi = \sqrt{\phi^a \phi_a}$ y una 1-forma polarización compleja $P^a = P^a_b e^b$, de modo tal que

$$\mathbb{H}_{(0)}^b = \phi P^b. \quad (3.5.13)$$

Siempre es posible elegir la normalización de la polarización como

$$(-1)^{\eta_-} \eta_{ab} * (P^a \wedge * P^b) = 1, \quad (3.5.14)$$

que, para el caso particular de esta forma diferencial, la normalización 3.5.14 se traduce en

$$\bar{P}_{ab} P^{ab} = 1. \quad (3.5.15)$$

Multiplicando la ecuación anterior por ϕ^2 , obtenemos

$$\bar{\mathbb{H}}_{ab(0)} \mathbb{H}_{(0)}^{ab} = \phi^2. \quad (3.5.16)$$

Antes de continuar, notemos que, en el contexto de una teoría con torsión no nula, podrían existir 6 modos de polarización presentes en las componentes de H_{ab} en lugar de 2 como ocurre en una geometría Riemanniana. Esto se debe a que, para este tipo de teorías, es imposible realizar una mayor fijación del gauge. Por ejemplo, es posible escribir la polarización de la onda gravitacional propagante en la tercera dirección del sistema de referencia ortonormal como

$$P_{ab} = p_{(+)} \mathbb{P}_{ab}^{(+)} + p_{(\times)} \mathbb{P}_{ab}^{(\times)} + p_{(b)} \mathbb{P}_{ab}^{(b)} + p_{(l)} \mathbb{P}_{ab}^{(l)} + p_{(x)} \mathbb{P}_{ab}^{(x)} + p_{(y)} \mathbb{P}_{ab}^{(y)}, \quad (3.5.17)$$

con la base de polarización ortonormal

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{ab}^{(+)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbb{P}_{ab}^{(\times)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \mathbb{P}_{ab}^{(b)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbb{P}_{ab}^{(l)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 \mathbb{P}_{ab}^{(x)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbb{P}_{ab}^{(y)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{3.5.18}$$

y donde

$$\bar{p}_{(+)}p_{(+)} + \bar{p}_{(\times)}p_{(\times)} + \bar{p}_{(b)}p_{(b)} + \bar{p}_{(l)}p_{(l)} + \bar{p}_{(x)}p_{(x)} + \bar{p}_{(y)}p_{(y)} = 1. \tag{3.5.19}$$

Es esencial recordar que, incluso en el caso estándar de relatividad general sin torsión, la fijación adicional del gauge (como el gauge transversal sin traza) es solo aproximada en una geometría background genérica, y solo es válida a órdenes principales y secundarios en la expansión eikonal. Para una geometría background genérica, esto significa que en el caso de la relatividad general sin torsión, algunas componentes de la polarización dominan sobre otros, lo que matemáticamente quiere decir que

$$\bar{p}_{(+)}p_{(+)} + \bar{p}_{(\times)}p_{(\times)} \approx 1, \tag{3.5.20}$$

$$\bar{p}_{(b)}p_{(b)} + \bar{p}_{(l)}p_{(l)} + \bar{p}_{(x)}p_{(x)} + \bar{p}_{(y)}p_{(y)} \leq \epsilon^2. \tag{3.5.21}$$

Esta jerarquía de modos de polarización puede romperse en un background torsional genérico, volviendo a los demás modos significativos.

Continuando con el análisis eikonal, es posible utilizar las ecuaciones 3.5.13-3.5.16 en 3.5.12 para deducir el comportamiento de la polarización 3.5.22 y la amplitud de una onda gravitacional 3.5.23 (Ver apéndices A2 y A3)

$$\begin{aligned}
 k^\lambda \overset{\circ}{\nabla}_\lambda P_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} k^\gamma [P_{\mu\nu} \Pi^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta\gamma} + (-T_{\lambda\gamma\mu} + T_{\mu\gamma\lambda} - T_{\gamma\lambda\mu}) P_\nu^\lambda + (T_{\lambda\gamma\nu} + T_{\nu\gamma\lambda} - T_{\gamma\lambda\nu}) P_\mu^\lambda], \\
 \overset{\circ}{\nabla}_\lambda J^\lambda &= T_{\mu\nu\lambda} (\Pi^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}) J^\lambda.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

donde

$$\Pi^{\alpha\beta} = \bar{P}_\gamma^\alpha P^{\gamma\beta} + \bar{P}_\gamma^\beta P^{\gamma\alpha}, \tag{3.5.24}$$

$$J^\lambda = \phi^2 k^\lambda. \tag{3.5.25}$$

J^λ juega el rol de una densidad de corriente conservada cuando no estamos en presencia de torsión⁵.

La ecuación 3.5.22 nos informa que la polarización interactúa con la torsión background al propagarse sobre geodésicas nulas, generando un comportamiento anómalo con respecto a lo que ocurre en un espacio de Riemann, pues en el caso de torsión nula, 3.5.22 se transforma en

$$k^\lambda \overset{\circ}{\nabla}_\lambda P_{\mu\nu} = 0, \tag{3.5.26}$$

donde se observa que la polarización se transporta paralelamente mientras la onda se propaga en una geodésica nula.

Un análisis similar se puede realizar a partir de la ecuación 3.5.23, la cual muestra un comportamiento anómalo de la propagación de la amplitud ante la presencia de torsión background, la que consiste en el incremento o el decrecimiento de la amplitud. Esta situación no ocurre en un espacio tiempo sin torsión, donde J^λ actúa como una densidad de corriente conservada, provocando que la amplitud se conserve.

Es importante notar que el aumento o disminución de la amplitud es proporcional al número de onda k^λ , cuyo valor no se verá afectado por la torsión debido a que la relación de dispersión no cambia.

Como consecuencia de todo lo analizado en este capítulo, la medición de la

⁵Cuando trabajamos en electromagnetismo, este tensor es llamado el tensor de número de fotones.

56 3.5. El límite eikonal en el operador generalizado de Lichnewowicz de Rham

amplitud y la polarización de una onda gravitacional podría usarse para detectar la presencia de torsión en la geometría background.

Capítulo 4

Estudio de las ondas gravitacionales en la teoría ECSK

Dadas las consecuencias en la propagación de las ondas gravitacionales mostradas en el capítulo anterior, es perfectamente lógico pensar que las ondas emitidas producto de la fusión de dos agujeros negros puedan ser afectadas ante una eventual fuente de torsión, peligrando así el uso de estos como sirenas estándar para medir la expansión del universo.

En este capítulo estudiaremos la propagación de las ondas gravitacionales en la teoría ECSK, donde se mostrará explícitamente la propagación anómala de la amplitud y la polarización de ondas gravitacionales en la aproximación eikonal, situación que es generada por los efectos de la torsión inducida por un eventual espín de la materia oscura. Adicionalmente, se discutirá la posibilidad de usar las ondas gravitacionales para estudiar sus implicaciones a escalas cosmológicas.

4.1. Estudio de las ondas gravitacionales en la teoría ECSK

La teoría ECSK es un buen punto de partida para estudiar la fenomenología de la propagación de las ondas gravitacionales antes de pasar a considerar lagrangianos más complejos por las siguientes razones: en primer lugar, el gran éxito observacional de la teoría de la relatividad general estándar lo hace atractivo para analizar teorías cercanas a su dinámica; en segundo lugar, la teoría ECSK es

la teoría más sencilla con torsión no nula que, a pesar de tener una torsión que no se propaga, puede afectar a la propagación de una manera no trivial.

Las siguientes secciones analizan las ondas gravitacionales en la teoría ECSK con torsión background no nula.

4.1.1. Propagación de las ondas gravitacionales en la teoría ECSK

Cuando estudiamos ondas gravitacionales (en cualquier teoría), debemos separar los términos de alta y baja frecuencia (hasta segundo orden en perturbaciones). El trozo de alta frecuencia describe cómo la onda se propaga en la geometría background, creando un tensor de energía-momentum efectivo y un tensor de espín. Los capítulos 1 y 4 de [27] proporcionan un excelente ejemplo de como llevar a cabo esta separación en el contexto de la relatividad general.

Dado que nosotros estamos interesados en el estudio de la propagación de la onda, nos enfocaremos en los efectos de los términos de alta frecuencia. En esta pieza de alta frecuencia, no todos los términos son igualmente importantes. Por lo tanto, consideraremos solo los términos que contribuyan a los órdenes principal y secundarios en la aproximación eikonal. De esta manera, empezamos por estudiar la perturbación de todos los términos de la ecuación 2.4.60. Sin embargo, procediendo como en el caso estándar de la relatividad general (ver [55]), es directo demostrar de 2.4.60 que los únicos términos que contribuyen a la propagación de las ondas gravitacionales en esta aproximación están dentro de la expresión

$$\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}R_{(1)}^{ab} \wedge e^c = 0, \quad (4.1.1)$$

siendo $R_{(1)}^{ab}$ la perturbación lineal de la curvatura de Lorentz.

Es posible demostrar (ver apéndice A1 de [55]) que

$$\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}R_{(1)}^{ab} \wedge e^c = \left(W_{md} - \frac{1}{2}\eta_{md}W_p^p \right) * e^m, \quad (4.1.2)$$

con

$$W_{md} = (I_d\mathcal{D}_a - I_a\mathcal{D}_d + T_{da}^p I_p) (U_{m(1)}^a + V_m^a) \quad (4.1.3)$$

utilizando el gauge de Lorenz 3.5.2, es posible reescribir 4.1.3 como se muestra en 4.1.4

$$W_{mn} = -\frac{1}{2} (I_n \mathcal{D}_a \mathcal{D}^a H_m - I_n [\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_m] H^a) + (I_n \mathcal{D}_a - \mathcal{D}_n I_a) V_m^a. \quad (4.1.4)$$

Por consiguiente, la ecuación 4.1.2 es equivalente a exigir $W_{mn} = 0$. Observe que el operador de onda corresponde al operador de Beltrami generalizado 3.4.22.

4.1.2. Análisis eikonal

Hasta este punto, hemos preferido la concisión de las formas diferenciales sobre la base ortonormal para estudiar las propiedades generales del operador de onda y la teoría ECSK. Sin embargo, en las próximas secciones, analizaremos las ondas gravitacionales en el límite eikonal y su propagación en un background cosmológico. Es mucho mas amigable para la mayoría de los lectores llevar a cabo este trabajo en términos de tensores en una base coordenada, por lo que pasaremos a esta descripción en lo que sigue.

En primer lugar, es conveniente remplazar el álgebra abierto 3.4.14-3.4.19 en 4.1.4, preservando solo los términos a órdenes principales ($O(\epsilon^{-2})$) y secundario ($O(\epsilon^{-1})$) en 4.1.4. Luego, debemos pasar a la base coordenada usando 3.4.12. El resultado de esto es (ver apéndice A4)

$$W_{\mu\nu} |_{lead.+sublead.} = - \left[\frac{1}{2} \nabla_\lambda \nabla^\lambda H_{\mu\nu} + T_{\sigma\rho\nu} \nabla^\rho H^\sigma{}_\mu + \frac{1}{2} T_{\rho\sigma\mu} \nabla^\rho H^\sigma{}_\nu \right] + \nabla^\lambda V_{\lambda\mu\nu} + \nabla_\nu V_{\mu\lambda}{}^\lambda. \quad (4.1.5)$$

Esta ecuación tiene una parte simétrica y antisimétrica que se anulan independientemente, las cuales son dadas por

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^+ &|_{lead.+sublead.} = 0, \\ W_{\mu\nu}^- &|_{lead.+sublead.} = 0. \end{aligned}$$

La anulación de $W_{\mu\nu}^-$ nos permite resolver $V_{\alpha\beta\gamma}$ en términos de $H_{\mu\nu}$ y $T_{\lambda\mu\nu}$ como

$$V_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{4} \left([T_{\sigma\rho}^{\alpha} H^{\rho}_{\alpha} - T_{\rho\sigma\alpha} H^{\rho\sigma}] g_{\beta\gamma} - [T_{\sigma\rho}^{\alpha} H^{\rho}_{\beta} - T_{\rho\sigma\beta} H^{\rho\sigma}] g_{\alpha\gamma} \right) \\ - \left(T_{\rho\alpha\beta} + \frac{1}{4} [T_{\alpha\beta\rho} - T_{\beta\alpha\rho}] \right) H^{\rho}_{\gamma} + \frac{1}{4} [(T_{\beta\rho\gamma} + T_{\gamma\rho\beta}) H^{\rho}_{\alpha} - (T_{\alpha\rho\gamma} + T_{\gamma\rho\alpha}) H^{\rho}_{\beta}].$$

Aquí podemos ver que en el vacío $T_{\lambda\mu\nu} = 0$ también implica $V_{\alpha\beta\gamma} = 0$, como debería ser esperado para una torsión no propagante.

Reemplazando esto de nuevo en $W_{\mu\nu}^+ |_{lead.+sublead.}$, obtenemos

$$W_{\mu\nu}^+ |_{lead.+sublead.} = \frac{1}{2} \left[-\nabla_{\lambda} \nabla^{\lambda} H_{\mu\nu} - \left(2T_{\sigma\rho\nu} + \frac{1}{2} [T_{\rho\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\rho}] \right) \nabla^{\rho} H^{\sigma}_{\mu} \right. \\ \left. - \left(2T_{\sigma\rho\mu} + \frac{1}{2} [T_{\rho\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\rho}] \right) \nabla^{\rho} H^{\sigma}_{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\rho\sigma\lambda} \nabla^{\lambda} H^{\rho\sigma} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} [g_{\mu\nu} T^{\sigma}_{\sigma\lambda} - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})] \partial^{\lambda} H \right].$$

De esta expresión, es claro que la torsión afecta a la propagación de la onda a órdenes secundarios. Además, observe que cuando la torsión desaparece, recuperamos la ecuación de onda de la relatividad general estándar en términos del operador de Beltrami estándar.

Llevando a cabo el análisis eikonal usando las ecuaciones 3.5.6-3.5.7, encontramos que al orden principal $O(\epsilon^{-2})$, la relación de dispersión se mantiene sin cambios, esto es

$$k^{\mu} k_{\mu} = 0, \quad (4.1.6)$$

implicando que las ondas gravitacionales se propagan a la velocidad de la luz. Más aún, teniendo en cuenta que $k = d\theta$ y tomando la derivada de Lie generalizada en relación de dispersión, volvemos a obtener la ecuación 3.5.11

$$k^{\mu} \overset{\circ}{\nabla}_{\mu} k^{\lambda} = 0, \quad (4.1.7)$$

por lo tanto, la conclusión es la misma que se mencionó en la sección anterior: a pesar de la torsión background no nula, las ondas gravitacionales se mueven a lo largo de geodésicas nulas. Esto podría parecer contraintuitivo porque, además de las geodésicas estándar sin torsión, una geometría de Riemann-Cartan permite

definir auto paralelas

$$\frac{d^2 X^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau} = 0$$

usando la conexión completa $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ y no solo el símbolo de Christoffel $\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$. Este hecho sencillo es crucial desde un punto de vista observacional. La observación multi-mensajera GW170817/GRB170817 implica que las ondas gravitacionales y electromagnéticas viajan a la misma velocidad y en el mismo tipo de trayectorias. Si las ondas electromagnéticas se mueven en geodésicas nulas sin torsión y las ondas gravitacionales en autoparalelas, esto aún podría haber causado un retraso incluso si ambas ondas viajan a la misma velocidad.

Por otra parte, el orden secundario $O(\epsilon^{-1})$ nos proporciona la relación

$$\frac{1}{2} \nabla_\lambda k^\lambda \mathbb{H}_{\mu\nu} + k^\lambda \left(\nabla_\lambda \mathbb{H}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} M_{\lambda\mu\nu}^+ \right) = 0, \quad (4.1.8)$$

con

$$\begin{aligned} M_{\lambda\mu\nu}^+ &= \left(2T_{\sigma\lambda\nu} + \frac{1}{2} [T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}] \right) \mathbb{H}^\sigma{}_\mu + \left(2T_{\sigma\lambda\mu} + \frac{1}{2} [T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}] \right) \mathbb{H}^\sigma{}_\nu \\ &\quad + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\rho\sigma\lambda} \mathbb{H}^{\rho\sigma} - \frac{1}{4} [g_{\mu\nu} T_{\sigma\lambda}^\sigma - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})] \mathbb{H}. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Note que la ecuación 4.1.8 codifica la amplitud ϕ y la propagación de la polarización $P_{\mu\nu}$. La forma tradicional de obtener esta información es a través de la densidad de corriente $J_\mu = \phi^2 k_\mu$, el cual se conserva en el caso Riemanniano, aunque no en el caso con torsión.

En nuestro caso, después de reemplazar 3.5.13 y 3.5.15 en 4.1.8, obtenemos (ver apéndice A5)

$$\overset{\circ}{\nabla}_\lambda J^\lambda = (\Pi^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}) T_{\mu\nu\lambda} J^\lambda, \quad (4.1.10)$$

con $\Pi^{\mu\nu}$ dado por

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[3 (\bar{P}^{\mu\sigma} P_{\sigma}{}^\nu + P^{\mu\sigma} \bar{P}_{\sigma}{}^\nu) - (\bar{P} P^{\mu\nu} + \bar{P}^{\mu\nu} P) + \frac{1}{2} \bar{P} P g^{\mu\nu} \right] \quad (4.1.11)$$

y $P = P^\lambda{}_\lambda$ denotando la traza de la polarización.

La polarización también se propaga anómalamente en un background torsional.

Reemplazando la ecuación 4.1.10 en 4.1.8, encontramos después de un poco de álgebra (ver apéndice A5) la relación

$$\begin{aligned}
k^\lambda \overset{\circ}{\nabla}_\lambda P_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} k^\lambda \left[\Pi^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma\lambda} P_{\mu\nu} + \left(T_{\sigma\lambda\nu} - \frac{1}{2} [T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}] \right) P_\mu^\sigma \right] \\
&+ \left(T_{\sigma\lambda\mu} - \frac{1}{2} [T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}] \right) P_\nu^\sigma + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\rho\sigma\lambda} P^{\rho\sigma} \\
&- \frac{1}{4} [g_{\mu\nu} T_{\sigma\lambda}^\sigma - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda}) P]. \tag{4.1.12}
\end{aligned}$$

Las ecuaciones 4.1.10 y 4.1.12 muestran que la torsión, incluso si esta no se propaga, puede afectar a la propagación de la amplitud de las ondas gravitacionales y su polarización.

Con respecto a las ecuaciones 4.1.10- 4.1.12, la forma explícita del lado derecho de ambas ecuaciones dependen de la estructura del lagrangiano de la teoría ECSK, pero es una característica genérica de las teorías con torsión no nula para crear una propagación anómala de la amplitud y la polarización. Este comportamiento anómalo es una característica intrínseca del operador de onda en geometrías de Riemann-Cartan. El cambio de teoría solo cambiaría los pesos de los coeficientes en las ecuaciones 4.1.10- 4.1.12. Por ejemplo, incluso si comenzamos solo con el operador

$$\mathcal{D}_a \mathcal{D}^a H_m = 0,$$

la ecuación 4.1.4 no desaparecerá y, por lo tanto, la torsión seguirá dando lugar a una propagación anómala (ver [72]).

4.1.3. Propagación de la amplitud en un escenario de torsión débil

El enorme éxito observacional de la relatividad general deja en claro que los efectos torsionales, si están presentes, deberían ser débiles. Por ejemplo, el perfil de las ondas gravitacionales emitidos por las fusiones se ajusta muy bien en las predicciones de la relatividad general.

La torsión, si es que está presente (por ejemplo, siendo creado por una posible densidad de espín de materia oscura), pareciera no tener efectos observables en el proceso de emisión. Hay algunos trabajos que apoyan este argumento. De hecho,

[78] estudió los procesos de emisión de ondas gravitacionales de las fusiones en la teoría ECSK. Esta mostró que solo las densidades de espín extremadamente grandes (como las del universo muy temprano) podrían dar lugar a desviaciones importantes de la relatividad general en el proceso de emisión.

Esto hace interesante considerar un “escenario torsional débil”, donde un background torsional podría estar presente, pero es muy débil para afectar el proceso de emisión de ondas gravitacionales. En particular, solo los modos de polarización (+) y (×) son relevantes y los otros cuatro modos son al menos ϵ veces más débiles (ver ecuación 3.5.20). Sin embargo, estas ondas gravitacionales deben viajar largas distancias cosmológicas antes de alcanzar nuestros detectores. En tal caso, no es claro si los efectos acumulativos del background torsional podrían ser observados al momento de la detección.

La codificación de los modos de polarización a lo largo de la ecuación geodésica 4.1.12 podría hacer crecer los otros modos de polarización mientras la onda gravitacional se propaga. Además, una propagación anómala de la amplitud de la onda gravitacional 4.1.10 no contabilizada podría entorpecer nuestros esfuerzos de usar fusiones como sirenas estándar, haciéndolas parecer más cercanas o lejanas de lo que realmente están. Por esta razón, nos concentraremos en el problema de la amplitud; los detalles de la propagación de la polarización se dejarán para trabajos futuros.

Consideremos ondas gravitacionales propagándose a lo largo de geodésicas nulas sin torsión 4.1.7, con un vector tangente $\frac{dX^\mu}{d\eta} \propto k^\mu$, un parámetro afín η y η_0 el parámetro afín al momento de la emisión. Sea $\phi(\eta)$ la amplitud de la onda gravitacional a η y $\overset{\circ}{\phi}(\eta)$ la amplitud a η predicha por la relatividad general estándar. Luego, podemos definir

$$A(\eta) = \ln \frac{\phi}{\overset{\circ}{\phi}} \quad (4.1.13)$$

como un parámetro definiendo la propagación anómala de la amplitud. Un escenario torsional débil implica que $\phi(\eta_0) = \overset{\circ}{\phi}(\eta_0)$ y, por lo tanto, $A(\eta_0) = 0$. En este contexto, supongamos una teoría genérica con una torsión que no desaparece, lo que nos lleva a la ruptura de la conservación de J_μ en alguna forma generalizada de la ecuación 4.1.10,

$$\overset{\circ}{\nabla}_\mu J^\mu = N_\mu J^\mu.$$

Puesto que $\phi = \exp(A) \overset{\circ}{\phi}$, es posible escribir esta última ecuación como

$$\partial_\mu \exp(2A) \overset{\circ}{\phi}^2 k^\mu + \exp(2A) \overset{\circ}{\nabla}_\mu \overset{\circ}{J}^\mu = N_\mu \exp(2A) \overset{\circ}{\phi}^2 k^\mu,$$

donde $\overset{\circ}{J}^\mu = \overset{\circ}{\phi}^2 k^\mu$. Además, usando el hecho que $\overset{\circ}{\nabla}_\mu \overset{\circ}{J}^\mu = 0$, después de un poco de álgebra, encontramos

$$\frac{dA}{d\eta} = \frac{1}{2} N^\mu \frac{dX^\mu}{d\eta}.$$

De este modo, tenemos que $A = \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} N_\mu(\tilde{\eta}) \frac{dX^\mu}{d\tilde{\eta}}$ y

$$\phi(\eta) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} N_\lambda(\tilde{\eta}) \frac{dX^\lambda}{d\tilde{\eta}} \overset{\circ}{\phi}(\eta)\right), \quad (4.1.14)$$

particularmente, en el caso de la teoría ECSK,

$$N_\lambda = (\Pi^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}) T_{\mu\nu\lambda}.$$

Consecuentemente, en el caso de las fusiones, la discordancia entre $\phi(\eta)$ y $\overset{\circ}{\phi}(\eta)$ podría conducir en principio a una evaluación errónea de la relación de distancia de luminosidad.

Para ser más preciso, observemos que la amplitud predicha por las fusiones de agujeros negros en la relatividad general estándar tiene la forma

$$\overset{\circ}{\phi} = \frac{1}{D_L} F_{GW},$$

donde D_L es la distancia de luminosidad y F_{GW} es una función complicada y dependiente del tiempo de las masas y el momento angular de la fusión (ver capítulo 4 de [8]).

Un background torsional introduce un factor extra de corrección $\exp(A)$ a la amplitud. Por lo tanto, un observador que modele el perfil de las ondas gravitacionales por la relatividad general estándar, asignaría la distancia lumínica

incorrecta a la fuente

$$\phi = \frac{1}{\overset{\circ}{D}_L} F_{GW} = \exp(A) \frac{1}{D_L} F_{GW},$$

es decir,

$$\frac{D_L}{\overset{\circ}{D}_L} = \exp(A). \quad (4.1.15)$$

En un escenario torsional débil consideramos que el efecto sería perceptible solo cuando $|A| > 0$, es decir, cuando la onda se propaga a distancias cosmológicas grandes. Por esta razón, con el fin de restringir cualquier posible efecto observable, en la siguiente sección integraremos estas relaciones considerando diferentes escenarios cosmológicos con torsión no nula.

4.2. Torsión y simetrías cosmológicas

Una geometría de Riemann-Cartan que satisface las simetrías copernicanas de homogeneidad e isotropía en una sección espacial plana tiene la métrica y el tensor de torsión de la forma

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (4.2.1)$$

$$T_{\mu\nu\lambda} = -\frac{1}{c^2} \left[\nu_+(t) (g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}) + 2\sqrt{|g|} \nu_-(t) \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \right] U^\rho. \quad (4.2.2)$$

De este modo, para describir esta geometría, necesitamos dos funciones $\nu_+(t)$ y $\nu_-(t)$ además del factor de escala común $a(t)$. Los símbolos \pm se refieren a la paridad de la componente de torsión asociada.

Usando el ansatz 4.2.2, uno encuentra

$$\begin{aligned} N_\lambda &= (\Pi^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}) T_{\mu\nu\lambda}, \\ &= -\frac{1}{c} \nu^+(t) (\Pi_{\lambda 0} - g_{\lambda 0} - (\Pi^\sigma_\sigma - 4) g_{\lambda 0}). \end{aligned}$$

De 4.2.2, tenemos que $\Pi^\sigma_\sigma = 3$, y por lo tanto

$$N_\lambda = -\frac{1}{4c} \nu^+(t) \bar{P} P g_{\lambda 0}.$$

De esta expresión para N_λ , tenemos que

$$A(t) = \frac{1}{4} \int_{t_0}^t d\tilde{t} \nu^+(\tilde{t}) \frac{1}{2} |P|^2. \quad (4.2.3)$$

De esta forma, para resolver $A(t)$ necesitamos $P(t)$. Trazando la ecuación 4.1.12 obtenemos

$$k^\lambda \nabla_\lambda P = \frac{1}{2c} \nu^+(t) k^\lambda \left(\frac{1}{4} \bar{P} P - \frac{1}{2} \right) P g_{\lambda 0}, \quad (4.2.4)$$

y dado que, a lo largo de la geodésica se satisface $\frac{dX^\mu}{d\eta} \propto k^\mu$, entonces

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{1}{2} \nu^+(t) \left(\frac{1}{2} \bar{P} P - 1 \right) \frac{1}{2} P. \quad (4.2.5)$$

De aquí, tenemos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |P|^2 \right) = -\frac{1}{2} \nu^+(t) \left(\frac{1}{2} |P|^2 - 1 \right) \frac{1}{2} |P|^2.$$

Es simple integrar esta ecuación como

$$\frac{1}{2} |P|^2(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\frac{1}{2} |P|^2(t_0)} - 1 \right) \exp\left(-\frac{1}{2} \Theta^+\right) + 1},$$

con

$$\Theta^+ = \int_{t_0}^t d\tilde{t} \nu^+(\tilde{t}). \quad (4.2.6)$$

Con esta expresión, integramos 4.2.3:

$$\exp(A(t)) = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2} |P|^2(t_0)}{1 - \frac{1}{2} |P|^2(t)}}, \quad (4.2.7)$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{2} |P|^2(t_0) \left[\exp\left(\frac{1}{2} \Theta^+\right) - 1 \right]}. \quad (4.2.8)$$

Caben algunas observaciones al respecto. Primero, la anomalía en la propagación de la amplitud solo depende de la componente ν_+ y no de ν_- . Esto no es extraño cuando consideramos el rol de la torsión en la evolución cósmica. En el caso de torsión débil, $\frac{1}{2} |P|^2(t_0) \sim \epsilon^2$ es un número positivo pequeño (ver 3.5.21), ya que en

situaciones astrofísicas, $\epsilon \leq 10^{-20}$. Por lo tanto, la única posibilidad de tener una desviación observable de la relatividad general es si $\Theta^+ \gg 0$ y lo suficientemente grande para compensar la pequeñez de $\frac{1}{2}|P|^2(t_0)$. Por otro lado, $\Theta^+ \leq 0$ no tiene ninguna posibilidad de producir un efecto observable en $\exp(A(t))$. Esto significa que, en principio, la gravedad ECSK podría hacer parecer a las fusiones más cercanas de lo que realmente están ($\exp(A(t)) > 1$ en la ecuación 4.1.15), pero no más lejanas de lo que están.

Sin embargo, cuando usamos las fusiones como una candela estándar, siempre existirá algo de incertidumbre $\delta\mathring{D}_L$ en determinar la distancia lumínica \mathring{D}_L , (ver [29]). Por lo tanto, para tener una anomalía torsional observable en la determinación de las distancias lumínicas, es necesario que $D_L > \mathring{D}_L + \delta\mathring{D}_L$, es decir, que

$$\exp(A) > 1 + \frac{\delta\mathring{D}_L}{\mathring{D}_L}. \quad (4.2.9)$$

Considerando 4.2.8, tenemos que

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2}|P|^2(t_0) \left[\exp\left(\frac{1}{2}\Theta^+ - 1\right) \right]} > 1 + \frac{\delta\mathring{D}_L}{\mathring{D}_L} \quad (4.2.10)$$

y por lo tanto

$$\Theta^+ > 2 \ln \left[\frac{\left(1 + \frac{\delta\mathring{D}_L}{\mathring{D}_L}\right)^2 - 1}{\frac{1}{2}|P|^2(t_0)} + 1 \right]. \quad (4.2.11)$$

Como a lo sumo $\frac{1}{2}|P|^2(t_0) \sim \epsilon^2$, el valor mínimo que podría tomar Θ^+ para producir una anomalía torsional por encima del umbral de detección corresponde a

$$\Theta_{\min}^+ \approx 2 \ln \left[\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{-2} \frac{\delta\mathring{D}_L}{\mathring{D}_L} \right]. \quad (4.2.12)$$

Usando las estimaciones de rendimiento para LISA (ver [29]), en el mejor de los casos se satisface

$$\frac{\delta\mathring{D}_L}{\mathring{D}_L} \sim 10^{-3}, \quad (4.2.13)$$

(lo cual sería una hazaña asombrosa). Considerando que $\epsilon < 10^{-20}$, tenemos que

$$\Theta_{\min}^+ \sim 170. \quad (4.2.14)$$

Como veremos en las siguientes secciones, cumplir estas condiciones parece físicamente inviable para los modelos realistas de ECSK: alcanzar el valor mínimo detectable de Θ_{\min}^+ requeriría, hasta donde sabemos, condiciones que las observaciones cosmológicas descartan. Por esta razón, podemos concluir que las fusiones son sirenas estándar confiables incluso si hay efectos torsionales no contabilizados. Las anomalías de las amplitudes de las ondas gravitacionales generadas por fusiones que la torsión ECSK podría crear caen por debajo del umbral de detección de LISA.

4.2.1. Evaluación de Θ^+ a diferentes modelos cosmológicos ECSK

Es posible expresar Θ^+ en términos del redshift $z = \frac{a_0}{a} - 1$ considerando que

$$dt = -\frac{dz}{(z+1)H},$$

donde $H = \frac{\dot{a}}{a}$ corresponde al parámetro de Hubble. Para una fusión a redshift z , la ecuación 4.2.6 se transforma en

$$\Theta^+(z) = -\int_z^0 d\tilde{z} \frac{\nu_+(\tilde{z})}{(\tilde{z}+1)H(\tilde{z})}. \quad (4.2.15)$$

Para $z < 1$ es posible intentar una estimación de esta integral a través de datos observacionales; para $z > 1$ podemos utilizar modelos cosmológicos ECSK que concuerden con las observaciones.

4.2.2. Estimación para fusiones a $z < 1$

Para $z < 1$, tenemos

$$\frac{1}{H(z)} = \frac{1}{H_0} [1 - z(1 + q_0)] + \dots,$$

donde q_0 corresponde al parámetro de desaceleración. En términos de esta expresión, obtenemos

$$\Theta^+(z) \approx -\frac{1}{H_0} \int_z^0 d\tilde{z} \frac{\nu^+(\tilde{z})}{\tilde{z}+1} [1 - \tilde{z}(1 + q_0)].$$

Para integrar esta última ecuación, en rigor necesitamos un modelo cosmológico de torsión particular para $\nu^+(\tilde{z})$. Sin embargo, para una estimación, solo necesitaremos introducir un "valor representativo" $\langle \nu^+ \rangle$,

$$\begin{aligned}\Theta^+(z) &\approx -\frac{\langle \nu^+ \rangle}{H_0} \int_z^0 d\tilde{z} \frac{1 - (1 + q_0)\tilde{z}}{1 + \tilde{z}}, \\ &\approx -\frac{\langle \nu^+ \rangle}{H_0} [(1 + q_0)z - (2 + q_0) \ln(1 + z)].\end{aligned}$$

Usando las estimaciones observacionales de $q_0 \sim -0,6$, concluimos que cuando $z < 1$, entonces

$$\Theta^+(z) < \frac{\langle \nu^+ \rangle}{H_0} 0,6,$$

por lo tanto, para alcanzar el valor mínimo de la ecuación 4.2.14, es necesario algo como

$$\langle \nu^+ \rangle \sim 100H_0. \quad (4.2.16)$$

Las estimaciones para ν^+ en la literatura son dependientes del modelo, pero $\nu^+ = 100H_0$ está varios órdenes de magnitud encima incluso de las estimaciones más optimistas de la cosmología ECSK, ver referencias [62],[79],[80]. En las siguientes secciones revisaremos brevemente los modelos cosmológicos ECSK para hacer estimaciones de $\Theta^+(z)$ para $z > 1$.

4.2.3. Repaso de la cosmología ECSK

Consideremos el ansatz copernicano 4.2.1-4.2.2 y reemplacemos este en las ecuaciones de campo 2.4.62-2.4.63 para un universo con constante cosmológica, materia oscura y materia del modelo estándar. El resultado es

$$3\mathcal{H}^2 = \kappa_4 c^2 \rho, \quad (4.2.17)$$

$$2\dot{\mathcal{H}} - 3\mathcal{H}^2 + 2\nu_+ \mathcal{H} = -\kappa_4 c^2 p, \quad (4.2.18)$$

con

$$\mathcal{H} = H - \nu_+,$$

donde $H = \frac{\dot{a}}{a}$ es el parámetro de Hubble. La densidad y presión total son,

respectivamente:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\Lambda}{\kappa_4} + \rho_{SM} + \rho_{DM} + \frac{3}{c^2 \kappa_4} \nu_-^2, \\ p &= -\frac{\Lambda}{\kappa_4} + p_{SM} + p_{DM} - \frac{1}{c^2 \kappa_4} \nu_-^2.\end{aligned}$$

Asumiendo la materia oscura como una fuente de espín y, en consecuencia, de torsión, implica que ν_+ y ν_- deben ser funciones de ρ_{DM} . Sin embargo, ambas funciones juegan un rol completamente diferente en las ecuaciones 4.2.17-4.2.18. Es claro que ν_- solo juega un rol de materia oscura y presión extra, mientras que ν_+ juega un rol completamente diferente en la dinámica. Por esta razón, es natural asumir un ansatz barotrópico para ν_- tal que

$$\nu_-^2 = \alpha_-^2 \frac{c^2 k_4}{3} \rho_{DM}, \quad (4.2.19)$$

en el cual α_- juega el rol de un parámetro barotrópico, proporcionándonos una densidad de materia oscura y presión efectiva dada por

$$\begin{aligned}\rho_{eff} &= (1 + \alpha_-^2) \rho_{DM}, \\ p_{eff} &= \omega_{eff} \rho_{eff},\end{aligned}$$

con

$$\omega_{eff} = \frac{1}{1 + \alpha_-^2} \omega_{DM} - \frac{1}{3 \left(1 + \frac{1}{\alpha_-^2}\right)},$$

donde hemos asumido una relación barotrópica $p_{DM} = \omega_{DM} \rho_{DM}$. Podemos ver que el efecto neto ν_- fue solo fue cambiar la constante barotrópica. En el caso de la materia oscura fría, $\omega_{DM} = 0$, se satisface $-\frac{1}{3} < \omega_{eff} \leq 0$, lo que de hecho podría explicar que el parámetro de tensión de Hubble tenga valores tan pequeños como $\omega_{eff} \sim -10^{-2}$ (ver [37]).

Las ecuaciones 4.2.17 y 4.2.18 pueden ser reescritas como

$$3(H - \nu_+)^2 = \kappa_4 c^2 \rho, \quad (4.2.20)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) - \nu^+ (\rho + 3p) = 0, \quad (4.2.21)$$

con

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\Lambda}{\kappa_4} + \rho_{SM} + \rho_{eff}, \\ p &= -\frac{\Lambda}{\kappa_4} + p_{SM} + p_{eff}.\end{aligned}$$

En términos del redshift,

$$\frac{d}{dt} = -(1+z)H\frac{d}{dz}, \quad (4.2.22)$$

la ecuación 4.2.21 se transforma en

$$-(1+z)\frac{d\rho}{dz} + 3(\rho+p) - \frac{\nu_+}{H}(\rho+3p) = 0. \quad (4.2.23)$$

Para resolver estas ecuaciones, necesitamos conocer ν_+ como función de la densidad de materia oscura. Esto es precisamente la información que la ecuación de campo 2.4.65 debería proveer. Sin embargo, dado que no tenemos un lagrangiano de materia oscura, no tenemos información a priori de su posible tensor de espín, aunque si existen modelos de fluidos con espín tal como el fluido de Weyssenhoff, para detalles ver [84].

Por esta razón, cuando consideramos cosmologías ECSK, debemos proponer un ansatz razonable para modelar la dependencia de ν_+ en la densidad de materia oscura. En las siguientes secciones revisaremos brevemente un par de ansatz que concuerdan con las observaciones. Además, veremos cómo la amplitud de las ondas gravitacionales se propagan en ellas para fusiones a $z > 1$.

4.2.4. Ansatz $\nu_+ \propto H\rho_{eff}^n$

Consideremos un ansatz de la forma

$$\nu^+ = CH \left(\frac{\rho_{eff}}{\rho_c} \right)^n, \quad (4.2.24)$$

donde H es el parámetro de Hubble, ρ_c corresponde a la densidad crítica

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{c^2\kappa_4} \quad (4.2.25)$$

y C es solo una constante de proporcionalidad. En general, los efectos torsionales aceleran la expansión del universo y pueden jugar un rol de materia oscura. Por lo tanto, asumamos un modelo de prueba con $\Lambda = 0$ y donde ρ_{SM} es despreciable comparado con ρ_{eff} . Considerando, en este caso, el ansatz 4.2.24, la ecuación 4.2.23 se transforma en

$$-(1+z) \frac{d\rho_{eff}}{dz} - \frac{C}{\rho_c^n} (1+3\omega_{eff}) \rho_{eff}^{n+1} + 3(1+\omega_{eff}) \rho_{eff} = 0. \quad (4.2.26)$$

La solución de esta ecuación diferencial de Bernulli es (ver [79],[81])

$$\rho_{eff}(z) = \rho_c \left[\frac{\frac{3}{C} \frac{1+\omega_{eff}}{1+3\omega_{eff}}}{\left(\frac{3}{C} \frac{1+\omega_{eff}}{1+3\omega_{eff}} \frac{1}{\Omega_0^n} - 1 \right) (1+z)^{-3n(1+\omega_{eff})} + 1} \right]^{\frac{1}{n}},$$

con

$$\Omega_0 = \frac{\rho_{eff0}}{\rho_c}.$$

Usando las ecuaciones 4.2.17 y 4.2.24, es sencillo encontrar

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{\rho_{eff}}{\rho_c}} \frac{1}{1 - C \left(\frac{\rho_{eff}}{\rho_c} \right)^n}. \quad (4.2.27)$$

y para $\frac{\nu^+}{H}$ tenemos

$$\frac{\nu^+}{H} = C \left(\frac{\rho_{eff}}{\rho_c} \right)^n, \quad (4.2.28)$$

$$= \frac{3 \frac{1+\omega_{eff}}{1+3\omega_{eff}}}{\left(\frac{3}{C} \frac{1+\omega_{eff}}{1+3\omega_{eff}} \frac{1}{\Omega_0^n} - 1 \right) (1+z)^{-3n(1+\omega_{eff})} + 1}. \quad (4.2.29)$$

La referencia [79] muestra que las observaciones permiten los siguientes rangos de parámetros para este modelo:

Ω_0	C	n	$H_0 \left(\frac{km}{s} Mpc \right)$
$0,31_{-0,12}^{+0,11}$	$0,28_{-0,24}^{+0,28}$	$-0,47_{-0,36}^{+0,26}$	$68,8_{-3,1}^{-3,0}$

Insertando 4.2.29 en 4.2.15 con la aproximación $\omega_{eff} \approx 0$ (materia oscura fría), encontramos

$$\Theta^+ = - \int_z^0 \frac{3}{\left[\frac{3}{C} \frac{1}{\Omega_0^n} - 1 \right] (1 + \tilde{z})^{-3n} + 1} \frac{d\tilde{z}}{(\tilde{z} + 1)}. \quad (4.2.30)$$

De los parámetros de observación permitidos, podemos hacer una estimación para $\Theta^+(z)$. De hecho, esta función crece muy lentamente para compensar la pequeñez de $\frac{1}{2}|P_0|^2$ en 4.2.8. Para ver esto, es suficiente hacer un gráfico y compararlo con las estimaciones de 4.2.14 (ver figura 4.2.1).

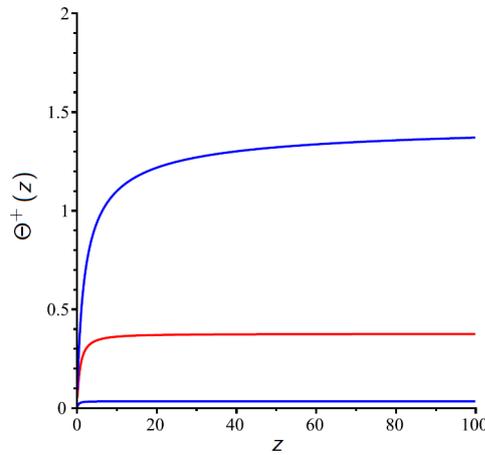


Figura 4.2.1: $\Theta^+(z)$ como función del redshift z . Las líneas azules delimitan la desviación superior e inferior de los valores medios que se muestran en rojo.

4.2.5. Ansatz $\nu_+ \propto H$

El ansatz de torsión en estado estacionario

$$\nu_+ = -\alpha H, \quad (4.2.31)$$

con α una constante muy popular entre los modelos cosmológicos ECSK [80]. La principal razón de esta elección es que la ecuación 4.2.23 se vuelve fácilmente integrable. Sin embargo, esto tiene un grave inconveniente físico: de la ecuación de campo 2.4.63, esperamos que ν_+ dependa de alguna característica de la materia oscura, por ejemplo, su densidad, y no de una característica geométrica como H . Independientemente si consideramos $\nu_+ = -\alpha H$ como un modelo astrofísico realista o no, evaluemos su capacidad para dar lugar a algún efecto observable en la propagación de la amplitud de ondas gravitacionales. En este caso, tenemos

que la ecuación 4.2.15 se convierte en

$$\Theta^+(z) = \alpha \int_z^0 d\tilde{z} \frac{1}{1 + \tilde{z}}, \quad (4.2.32)$$

$$= -\alpha \ln(1 + z). \quad (4.2.33)$$

Según [80], las observaciones restringen este modelo permitiendo un valor positivo pequeño para α ,

$$\alpha = 0,086_{-0,095}^{+0,094}. \quad (4.2.34)$$

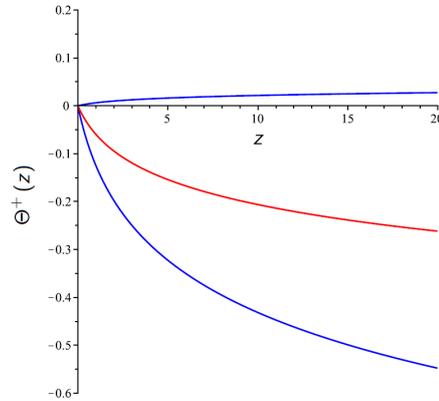


Figura 4.2.2: $\Theta^+(z)$ como una función del redshift z

Esta función $\Theta^+(z)$ negativa (y de evolución lenta) no tiene ninguna posibilidad de compensar la pequeñez de $\frac{1}{2}|P_0|^2$ en la ecuación 4.2.8. Este $\Theta^+(z)$ está muy por debajo del valor mínimo 4.2.14.

Capítulo 5

Conclusión

Después de realizar un análisis general de las ondas gravitacionales en una geometría de Riemann-Cartan y sus características asociadas (revisadas en el capítulo 2 y en las referencias [55],[72],[73]), queda claro que un background torsional produciría genéricamente una propagación anómala de la amplitud y la polarización de una onda gravitacional, dado por las ecuaciones 4.1.10-4.1.12. En particular, en la presente tesis hemos enfocado nuestra atención en la propagación de la amplitud de las ondas gravitacionales producidas por la fusión de agujeros negros en el contexto de una teoría ECSK, donde un tensor de espín de materia oscura no nulo podría comportarse como una posible fuente de torsión a escalas cosmológicas.

Dado el sólido éxito observacional de la relatividad general estándar, consideramos un “escenario de torsión débil”. Esto significa que la torsión background está configurada para ser lo suficientemente débil para hacer que las emisiones de ondas gravitacionales de las fusiones sean indistinguibles (a menos a orden principal y secundario) de las predichas por la relatividad general.

Esto conduce, en particular, a una jerarquía de los modos de polarización, donde al momento de la emisión, los modos de polarización (b) , (l) , (x) e (y) son al menos ϵ veces más débiles que los modos de polarización $(+)$ y (\times) (ver 3.5.20-3.5.21).

Sin embargo, la propagación anómala de la polarización 4.1.12 implica (a menos en principio) que la torsión podría amplificar lentamente esos modos de polarización débiles a lo largo de la geodésica. Del mismo modo (y también en principio), la torsión background podría conducir a una amortiguación o amplificación de la

amplitud 4.1.10-4.1.14 después de recorrer una larga distancia cosmológica.

Ya que la masa y el momento angular de las fusiones se relacionan con la evolución de la frecuencia de las ondas gravitacionales, una propagación anómala de la amplitud podría conducir a una evaluación incorrecta distancia lumínica \mathring{D}_L (ver 4.1.15), deshabilitando potencialmente el uso de las fusiones como candelas estándar.

A raíz de nuestro análisis de que estas preocupaciones son infundadas, es que los mergers siguen siendo candelas estándar fiables, tanto con como sin torsión (al menos para teorías ECSK). En las últimas secciones se calculó la fuerza de las anomalías en la propagación de la amplitud. La conclusión es que el efecto de la torsión bajo estas condiciones es tan pequeña que se mantiene bajo el umbral de detección, incluso pensando en interferómetros de futuro cercano como LISA. En particular, para los modelos ECSK considerados en la última sección, para detectar una posible anomalía en la propagación de la amplitud debido a la torsión, necesitaríamos medir las distancias lúminicas de los mergers a $z = 1$ con una precisión de

$$\frac{\delta \mathring{D}_L}{\mathring{D}_L} \leq 10^{-41}. \quad (5.0.1)$$

Detectar este efecto podría ser posible, pero por ahora esto está más allá de nuestras capacidades tecnológicas.

Profundizando más en este punto, la ecuación 4.2.8 muestra el porqué de esto. Incluso si el efecto de la amplitud anómala se acumula a lo largo de una larga distancia cosmológica en la integral Θ^+ , la pequeñez de los modos de traza de la onda gravitacional (b) y (l) en el momento de la emisión hace que el efecto integrado completo siga siendo insignificante. A su vez, la pequeñez de $\frac{1}{2}|P_0|^2$ es una consecuencia directa del escenario de torsión débil, donde la torsión debería mantenerse lo suficientemente débil para que el proceso de la emisión de la onda gravitacional siga sucediendo, como ocurre en el caso de la relatividad general estándar.

Este punto abre un asunto crítico para futuras investigaciones. Primero, es crucial notar que la hipótesis de torsión débil es razonable, pero solo para el universo tardío. En contraste, si consideramos una densidad de espín alta en el universo primitivo, la torsión podría haber sido relevante (ver [60],[67]), y el proceso de

emisión de ondas gravitacionales podría haberse apartado significativamente en esa época de la predicha por la relatividad general [78]. En este caso, no es claro aún si $\frac{1}{2}|P_0|^2$ en la ecuación 4.2.8 debería seguir siendo considerada insignificante. Por lo tanto, una propagación anómala de la amplitud y polarización, descritas en las ecuaciones 4.1.10-4.1.12, producidas por la torsión podrían, en principio, dejar una huella detectable en el fondo de la onda gravitacional cósmica. Este prometedor tema se tratará en otra parte.

A1. Operadores D y \mathcal{D}_a

En este apéndice deducimos los diferentes lemas provenientes de las definiciones, que son mostradas en las ecuaciones 3.4.11-3.4.13.

Comencemos por 3.4.11. Sean P y Q una p y q -forma respectivamente. La derivada exterior del producto exterior entre ellos es

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\alpha(P \wedge Q) &= (I_\alpha D + DI_\alpha)(P \wedge Q), \\
&= I_\alpha DP \wedge Q - (-1)^p DP \wedge I_\alpha Q + (-1)^p I_\alpha P \wedge DQ + P \wedge I_\alpha DQ, \\
&\quad + DI_\alpha P \wedge Q - (-1)^p I_\alpha P \wedge DQ + (-1)^p DP \wedge I_\alpha Q + P \wedge DI_\alpha Q, \\
&= I_\alpha DP \wedge Q + DI_\alpha P \wedge Q + P \wedge DI_\alpha Q + P \wedge I_\alpha DQ, \\
&= \mathcal{D}_\alpha P \wedge Q + P \wedge \mathcal{D}_\alpha Q.
\end{aligned}$$

Por otra parte, para la ecuación 3.4.12

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_a \Phi &= (I_a D + DI_a) \Phi, \\
&= I_a (D\Phi_c e^c + \Phi_c D e^c) + D\Phi_a, \\
&= I_a (D\Phi_c e^c + \Phi_c T^c) + D\Phi_a, \\
&= I_a D\Phi_c e^c - D\Phi_c I_a e^c + \Phi_c I_a T^c + D\Phi_a, \\
&= I_a D\Phi_c e^c + \Phi_c I_a T^c, \\
&= I_a (d\Phi_c - \omega^b_c \Phi_b) e^c + I_c \Phi I_a T^c, \\
&= I_a (\partial_\mu \Phi_c e_d^\mu e^d - \omega^b_{c\mu} \Phi_b e_d^\mu e^d) e^c + \Phi_c I_a T^c, \\
&= e_a^\mu (\partial_\mu \Phi_c - \omega^b_{c\mu} \Phi_b) e^c + \Phi_c I_a T^c, \\
&= e_a^\mu D_\mu \Phi + I_c \Phi I_a T^c, \\
&= e_a^\mu \nabla_\mu \Phi + I_a T^c \wedge I_c \Phi,
\end{aligned}$$

donde $\Phi \in \Omega^1(M^{(d)})$ por simplicidad. Sin embargo, esta relación funciona para cualquier tipo de forma diferencial.

Finalmente, a partir de la definición de la derivada generalizada de lie 3.4.9, es posible demostrar 3.4.13. Tomando el producto exterior e^a por la izquierda en

3.4.9,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_a &= I_a D + D I_a, \\
e^a \wedge \mathcal{D}_a &= e^a \wedge I_a D + e^a \wedge D I_a, \\
e^a \wedge \mathcal{D}_a &= e^a \wedge I_a D + D e^a \wedge I_a - D(e^a \wedge I_a), \\
e^a \wedge \mathcal{D}_a &= e^a \wedge I_a D + T^a \wedge I_a - D(e^a \wedge I_a), \\
e^a \wedge \mathcal{D}_a - T^a \wedge I_a &= e^a \wedge I_a D - D(e^a \wedge I_a).
\end{aligned} \tag{A1.1}$$

Trabajemos el primer termino de el lado derecho de A1.1. Sea $\phi^\% \in \Omega^p(M^{(d)})$ dada por

$$\phi^\% = \frac{1}{p!} \phi_{g_1 \dots g_p}^\% e^{g_1} \wedge \dots \wedge e^{g_p},$$

donde $\%$ representa los diferentes índices de Lorentz libres que ϕ podría tener. De este modo

$$\begin{aligned}
e^a \wedge I_a D \phi^\% &= e^a \wedge I_a \left\{ \frac{1}{p!} D_\mu \phi_{\nu_1 \dots \nu_p}^\% dx^\mu \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_p} \right\}, \\
&= e^a \wedge I_a \left\{ \frac{1}{p!} D_\mu \phi_{\nu_1 \dots \nu_p}^\% e_{b_1}^\mu e_{b_2}^{\nu_1} \dots e_{b_{p+1}}^{\nu_p} e^{b_1} \wedge e^{b_2} \wedge \dots \wedge e^{b_{p+1}} \right\}, \\
&= \frac{1}{p!} D_\mu \phi_{\nu_1 \dots \nu_p}^\% e_{b_1}^\mu e_{b_2}^{\nu_1} \dots e_{b_{p+1}}^{\nu_p} e^a \wedge I_a \left\{ e^{b_1} \wedge e^{b_2} \wedge \dots \wedge e^{b_{p+1}} \right\}.
\end{aligned}$$

Consideremos lo siguiente,

$$I_a (e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{b_{p+1}}) = I_a e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{b_{p+1}} + \dots + (-1)^p e^{b_1} \wedge \dots \wedge I_a e^{b_{p+1}},$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
e^a \wedge I_a D\phi^\% &= \frac{1}{p!} D_\mu \phi_{\nu_1 \dots \nu_p}^\% e_{b_1}^\mu e_{b_2}^{\nu_1} \dots e_{b_{p+1}}^{\nu_p} e^a \wedge I_a \{e^{b_1} \wedge e^{b_2} \wedge \dots \wedge e^{b_{p+1}}\}, \\
&= \frac{1}{p!} D_\mu \phi_{\nu_1 \dots \nu_p}^\% e_{b_1}^\mu e_{b_2}^{\nu_1} \dots e_{b_{p+1}}^{\nu_p} e^a \wedge \{I_a e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{b_{p+1}} \\
&\quad + \dots + (-1)^p e^{b_1} \wedge \dots \wedge I_a e^{b_{p+1}}\}, \\
&= \frac{1}{p!} D_\mu \phi_{\nu_1 \dots \nu_p}^\% e_{b_1}^\mu e_{b_2}^{\nu_1} \dots e_{b_{p+1}}^{\nu_p} e^a \wedge \{\delta_a^{b_1} e^{b_2} \wedge \dots \wedge e^{b_{p+1}} \\
&\quad + \dots + (-1)^p e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{b_p} \delta_a^{b_{p+1}}\}, \\
&= \frac{1}{p!} D_\mu \phi_{\nu_1 \dots \nu_p}^\% e_{b_1}^\mu e_{b_2}^{\nu_1} \dots e_{b_{p+1}}^{\nu_p} e^a \wedge \delta_a^{b_1} e^{b_2} \wedge \dots \wedge e^{b_{p+1}} \\
&\quad + \dots + \frac{1}{p!} (-1)^p D_\mu \phi_{\nu_1 \dots \nu_p}^\% e_{b_1}^\mu e_{b_2}^{\nu_1} \dots e_{b_{p+1}}^{\nu_p} e^a \wedge e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{b_p} \delta_a^{b_{p+1}}, \\
&= \frac{1}{p!} D_\mu \phi_{\nu_1 \dots \nu_p}^\% e_{b_1}^\mu e_{b_2}^{\nu_1} \dots e_{b_{p+1}}^{\nu_p} e^{b_1} \wedge e^{b_2} \wedge \dots \wedge e^{b_{p+1}} \\
&\quad + \dots + \frac{1}{p!} (-1)^p D_\mu \phi_{\nu_1 \dots \nu_p}^\% e_{b_1}^\mu e_{b_2}^{\nu_1} \dots e_{b_{p+1}}^{\nu_p} e^{b_{p+1}} \wedge e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{b_p}, \\
&= \frac{1}{p!} D_\mu \phi_{\nu_1 \dots \nu_p}^\% e_{b_1}^\mu e_{b_2}^{\nu_1} \dots e_{b_{p+1}}^{\nu_p} e^{b_1} \wedge e^{b_2} \wedge \dots \wedge e^{b_{p+1}} \\
&\quad + \dots + \frac{1}{p!} D_\mu \phi_{\nu_1 \dots \nu_p}^\% e_{b_1}^\mu e_{b_2}^{\nu_1} \dots e_{b_{p+1}}^{\nu_p} e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{b_p} \wedge e^{b_{p+1}}, \\
&= \frac{1}{p!} \left\{ D_\mu \phi_{\nu_1 \dots \nu_p}^\% e_{b_1}^\mu e_{b_2}^{\nu_1} \dots e_{b_{p+1}}^{\nu_p} + \dots + D_\mu \phi_{\nu_1 \dots \nu_p}^\% e_{b_1}^\mu e_{b_2}^{\nu_1} \dots e_{b_{p+1}}^{\nu_p} \right\} \\
&\quad e^{b_1} \wedge e^{b_2} \wedge \dots \wedge e^{b_{p+1}}, \\
&= \frac{p+1}{p!} D_\mu \phi_{\nu_1 \dots \nu_p}^\% e_{b_1}^\mu e_{b_2}^{\nu_1} \dots e_{b_{p+1}}^{\nu_p} e^{b_1} \wedge e^{b_2} \wedge \dots \wedge e^{b_{p+1}}, \\
&= \frac{p+1}{p!} D_\mu \phi_{\nu_1 \dots \nu_p}^\% dx^\mu \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_p}, \\
&= \frac{p+1}{p!} D \left(\phi_{\nu_1 \dots \nu_p}^\% dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_p} \right), \\
&= (p+1) D\phi^\%, \tag{A1.2}
\end{aligned}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que

$$I_a \phi^\% = \frac{1}{(p-1)!} \phi_{ag_1 \dots g_{p-1}}^\% e^{g_1} \wedge \dots \wedge e^{g_{p-1}},$$

el segundo término se escribiría como

$$\begin{aligned}
e^a \wedge I_a \phi^\% &= \frac{1}{(p-1)!} \phi_{ag_1 \dots g_{p-1}}^\% e^a \wedge e^{g_1} \wedge \dots \wedge e^{g_{p-1}}, \\
&= \frac{1}{(p-1)!} \phi_{g_1 \dots g_p}^\% e^{g_1} \wedge \dots \wedge e^{g_p}, \\
&= p \phi^\%.
\end{aligned} \tag{A1.3}$$

Finalmente, reemplazando A1.2 y A1.3 en A1.1, obtenemos

$$e^a \wedge \mathcal{D}_a - T^a \wedge I_a = D.$$

A2. Propagación anómala de la amplitud en una geometría con torsión

En sección se deducirá la ecuación 3.5.23. Sabemos que

$$\begin{aligned}
k^a \mathcal{D}_a \phi^2 &= k^a \mathcal{D}_a (\bar{\mathbb{H}}_{(0)}^{cd} \bar{\mathbb{H}}_{cd(0)}), \\
&= k^a \mathcal{D}_a \bar{\mathbb{H}}_{(0)}^{cd} \bar{\mathbb{H}}_{cd(0)} + k^a \bar{\mathbb{H}}_{(0)}^{cd} \mathcal{D}_a \bar{\mathbb{H}}_{cd(0)}.
\end{aligned} \tag{A2.1}$$

De 3.5.14

$$* (\bar{\mathbb{H}}_{(0)}^b \wedge * \mathbb{H}_{(0)}^c) = (-1)^{\eta^-} \bar{\mathbb{H}}_{d(0)}^b \mathbb{H}_{(0)}^{cd}, \tag{A2.2}$$

es directo observar que

$$(-1)^{-\eta^-} * (k^a \mathcal{D}_a \bar{\mathbb{H}}_{d(0)}^b e^d \wedge * \mathbb{H}_{(0)}^c) = k^a \mathcal{D}_a \bar{\mathbb{H}}_{d(0)}^b \mathbb{H}_{(0)}^{cd}, \tag{A2.3}$$

$$(-1)^{\eta^-} * \left(\bar{\mathbb{H}}_{(0)}^b \wedge \frac{1}{(d-1)!} k^a \mathcal{D}_a \left(\mathbb{H}_{(0)}^{cb_1} \right) \epsilon_{b_1 c_1 \dots c_{d-1}} e^{c_1} \wedge \dots \wedge e^{c_{d-1}} \right) = \bar{\mathbb{H}}_{d(0)}^b k^a \mathcal{D}_a \mathbb{H}_{(0)}^{cd}. \tag{A2.4}$$

Reemplazando A2.3 y A2.4 en A2.1

$$\begin{aligned}
k^a \mathcal{D}_a \phi^2 &= (-1)^{-\eta^-} * \left(k^a \mathcal{D}_a \bar{\mathbb{H}}_{cd(0)} e^d \wedge * \mathbb{H}_{(0)}^c \right. \\
&\quad \left. + \bar{\mathbb{H}}_{c(0)} \wedge \frac{1}{(d-1)!} k^a \mathcal{D}_a \left(\mathbb{H}_{(0)}^{cb_1} \right) \epsilon_{b_1 c_1 \dots c_{d-1}} e^{c_1} \wedge \dots \wedge e^{c_{d-1}} \right). \quad (\text{A2.5})
\end{aligned}$$

Por otra parte, la expresión 3.5.12 puede ser reescrita como sigue

$$k^a \mathcal{D}_a \mathbb{H}_{cd(0)} e^d = -k^a I_a T^f \wedge I_f \mathbb{H}_{c(0)} - \frac{1}{2} \mathbb{H}_{c(0)} \mathcal{D}_a k^a. \quad (\text{A2.6})$$

Aplicando el dual de Hodge:

$$k^a * \left(\mathcal{D}_a \mathbb{H}_{d(0)}^b e^d \right) = -k^a * \left(I_a T^c \wedge I_c \mathbb{H}_{(0)}^b \right) - \frac{1}{2} * \mathbb{H}_{(0)}^b \mathcal{D}_a k^a, \quad (\text{A2.7})$$

donde se utilizó el hecho que

$$\mathcal{D}_a \Phi^{b_1 \dots b_q} = \frac{1}{p!} \mathcal{D}_a \Phi^{b_1 \dots b_q} e^{c_1} \wedge \dots \wedge e^{c_p} + I_a T^d \wedge I_d \Phi^{b_1 \dots b_q}. \quad (\text{A2.8})$$

Reemplazando A2.6 y A2.7 en A2.5

$$\begin{aligned}
k^a \mathcal{D}_a \phi^2 &= (-1)^{-\eta^-} * \left(-k^a I_a T^f \wedge I_f \bar{\mathbb{H}}_{c(0)} \wedge * \mathbb{H}_{(0)}^c - \frac{1}{2} \bar{\mathbb{H}}_{c(0)} \mathcal{D}_a k^a \wedge * \mathbb{H}_{(0)}^c \right. \\
&\quad \left. + \bar{\mathbb{H}}_{c(0)} \wedge \frac{1}{(d-1)!} k^a \mathcal{D}_a \left(\mathbb{H}_{(0)}^{cb_1} \right) \epsilon_{b_1 c_1 \dots c_{d-1}} e^{c_1} \wedge \dots \wedge e^{c_{d-1}} \right),
\end{aligned}$$

considerando

$$* \left(\mathcal{D}_a \mathbb{H}_{d(0)}^c e^d \right) = \frac{1}{(d-1)!} \mathcal{D}_a \mathbb{H}_{(0)}^{cb_1} \epsilon_{b_1 c_1 \dots c_{d-1}} e^{c_1} \wedge \dots \wedge e^{c_{d-1}},$$

entonces

$$\begin{aligned}
k^a \mathcal{D}_a \phi^2 &= -(-1)^{-\eta^-} * \left\{ k^a I_a T^f \wedge I_f \bar{\mathbb{H}}_{c(0)} \wedge * \mathbb{H}_{(0)}^c + k^a \bar{\mathbb{H}}_{c(0)} \wedge * \left(I_a T^f \wedge I_f \mathbb{H}_{(0)}^c \right) \right\} \\
&\quad - (-1)^{-\eta^-} * \left\{ \bar{\mathbb{H}}_{c(0)} \wedge * \mathbb{H}_{(0)}^c \right\} \mathcal{D}_a k^a. \quad (\text{A2.9})
\end{aligned}$$

De la condición de normalización A2.2 en A2.9:

$$\begin{aligned}
k^a \mathcal{D}_a \phi^2 &= -(-1)^{-\eta^-} * \left\{ k^a I_a T^f \wedge I_f \bar{\mathbb{H}}_{c(0)} \wedge * \mathbb{H}_{(0)}^c + k^a \bar{\mathbb{H}}_{c(0)} \wedge * (I_a T^f \wedge I_f \mathbb{H}_{(0)}^c) \right\} \\
&\quad - (-1)^{-\eta^-} (-1)^{\eta^-} \bar{\mathbb{H}}_{ca_1(0)} \mathbb{H}_{(0)}^{ca_1} \mathcal{D}_a k^a, \\
&= -(-1)^{-\eta^-} * \left\{ k^a I_a T^f \wedge I_f \bar{\mathbb{H}}_{c(0)} \wedge * \mathbb{H}_{(0)}^c + k^a \bar{\mathbb{H}}_{c(0)} \wedge * (I_a T^f \wedge I_f \mathbb{H}_{(0)}^c) \right\} \\
&\quad - \phi^2 \mathcal{D}_a k^a,
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathcal{D}_a (k^a \phi^2) = -(-1)^{-\eta^-} * \left\{ k^a I_a T^f \wedge I_f \bar{\mathbb{H}}_{c(0)} \wedge * \mathbb{H}_{(0)}^c + k^a \bar{\mathbb{H}}_{c(0)} \wedge * (I_a T^f \wedge I_f \mathbb{H}_{(0)}^c) \right\}.$$

Definamos el tensor $J^a = k^a \phi^2$

$$\mathcal{D}_a J^a = -(-1)^{-\eta^-} * \left\{ k^a I_a T^f \wedge I_f \bar{\mathbb{H}}_{c(0)} \wedge * \mathbb{H}_{(0)}^c + k^a \bar{\mathbb{H}}_{c(0)} \wedge * (I_a T^f \wedge I_f \mathbb{H}_{(0)}^c) \right\}. \quad (\text{A2.10})$$

Consideremos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbb{H}}_{c(0)} \wedge * (I_a T^f \wedge I_f \mathbb{H}_{(0)}^c) &= \varphi \bar{P}_c \wedge * (T_{ad}^f e^d \wedge I_f (\varphi P^c)), \\
&= \varphi^2 \bar{P}_c \wedge * (T_{ad}^f e^d \wedge I_f P^c).
\end{aligned}$$

Así A2.10 adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_a J^a &= -(-1)^{-\eta^-} * \left\{ k^a T_{ad}^f e^d \wedge \varphi^2 I_f \bar{P}_c \wedge * P^c + k^a \varphi^2 \bar{P}_c \wedge * (T_{ad}^f e^d \wedge I_f P^c) \right\}, \\
&= -(-1)^{-\eta^-} * \left\{ J^a T_{fad} e^d \wedge I^f \bar{P}_c \wedge * P^c + J^a \bar{P}_c \wedge * (T_{fad} e^d \wedge I^f P^c) \right\}, \\
&= -T_{fad} (-1)^{-\eta^-} * \left\{ e^d \wedge I^f \bar{P}_c \wedge * P^c + \bar{P}_c \wedge * (e^d \wedge I^f P^c) \right\} J^a, \\
&= T_{fda} (-1)^{-\eta^-} * \left\{ I^f \bar{P}_c \wedge e^d \wedge * P^c + \bar{P}_c \wedge * (e^d \wedge I^f P^c) \right\} J^a. \quad (\text{A2.11})
\end{aligned}$$

Desarrollemos cada término de A2.11, para el primero se tiene que

$$I^f \bar{P}_c \wedge e^d \wedge *P^c = \frac{1}{(d-1)!} \bar{P}_c^f P^{ca_1} \epsilon_{a_1 b_1 \dots b_{d-1}} e^d \wedge e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{b_{d-1}}. \quad (\text{A2.12})$$

Aplicando el dual de Hodge a A2.12

$$\begin{aligned} *(I^f \bar{P}_c \wedge e^d \wedge *P^c) &= \frac{1}{(d-1)!} \bar{P}_c^f P^{ca_1} \epsilon_{a_1 b_1 \dots b_{d-1}} \eta^{de} \eta^{b_1 d_1} \dots \eta^{b_{d-1} d_{d-1}} \epsilon_{ed_1 \dots d_{d-1}}, \\ &= \frac{1}{(d-1)!} \bar{P}_c^f P^{ca_1} \epsilon_{a_1 b_1 \dots b_{d-1}} (-1)^{\eta^-} \epsilon^{db_1 \dots b_{d-1}}, \\ &= \frac{(-1)^{\eta^-}}{(d-1)!} \bar{P}_c^f P^{ca_1} \delta_{a_1 b_1 \dots b_{d-1}}^{db_1 \dots b_{d-1}}, \\ &= \frac{(-1)^{\eta^-}}{(d-1)!} \bar{P}_c^f P^{ca_1} \frac{(d-1)!}{(d-d)!} \delta_{a_1}^d, \\ &= (-1)^{\eta^-} \bar{P}_c^f P^{cd}. \end{aligned} \quad (\text{A2.13})$$

Mientras que para el segundo término de A2.11:

$$\begin{aligned} \bar{P}_c \wedge *(e^d \wedge I^f P^c) &= \bar{P}_c \wedge *(P^{cf} e^d), \\ &= \frac{1}{(d-1)!} \bar{P}_{ce} P^{cf} \eta^{da_1} \epsilon_{a_1 b_1 \dots b_{d-1}} e^e \wedge e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{b_{d-1}}. \end{aligned} \quad (\text{A2.14})$$

Aplicando el dual de hodge a A2.14

$$\begin{aligned} *(\bar{P}_c \wedge *(e^d \wedge I^f P^c)) &= \frac{1}{(d-1)!} \bar{P}_{ce} P^{cf} \eta^{da_1} \epsilon_{a_1 b_1 \dots b_{d-1}} \eta^{eg} \eta^{b_1 h_1} \dots \eta^{b_{d-1} h_{d-1}} \epsilon_{gh_1 \dots h_{d-1}}, \\ &= \frac{(-1)^{\eta^-}}{(d-1)!} \bar{P}_{ce} P^{cf} \eta^{da_1} \epsilon_{a_1 b_1 \dots b_{d-1}} \epsilon^{eb_1 \dots b_{d-1}}, \\ &= \frac{(-1)^{\eta^-}}{(d-1)!} \bar{P}_{ce} P^{cf} \eta^{da_1} \delta_{a_1 b_1 \dots b_{d-1}}^{eb_1 \dots b_{d-1}}, \\ &= (-1)^{\eta^-} \bar{P}_{ce} P^{cf} \eta^{da_1} \delta_{a_1}^e, \\ &= (-1)^{\eta^-} \bar{P}_c^d P^{cf}. \end{aligned} \quad (\text{A2.15})$$

Reemplazando A2.13 y A2.15 en A2.11:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_a J^a &= T_{fda} (-1)^{-\eta_-} \{(-1)^{\eta_-} \bar{P}_c^f P^{cd} + (-1)^{\eta_-} \bar{P}_c^d P^{cf}\} J^a, \\ &= T_{abc} \{\bar{P}_c^a P^{cb} + \bar{P}_c^b P^{ca}\} J^c.\end{aligned}$$

Definiendo

$$\Pi^{ab} = \bar{P}_f^a P^{fb} + \bar{P}_f^b P^{fa}, \quad (\text{A2.16})$$

obtenemos la ecuación correspondiente para la corriente J^a :

$$\mathcal{D}_a J^a = T_{abc} \Pi^{ab} J^c. \quad (\text{A2.17})$$

Separando la derivada generalizada de Lie de [A2.17](#) en términos con y sin torsión, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_a J^a &= I_a D J^a, \\ &= I_a \left(\overset{\circ}{D} J^a - k^a_b J^b \right), \\ &= I_a \overset{\circ}{D} (J^b I^a e_b) - k^a_{ba} J^b, \\ &= I_a \overset{\circ}{D} I^a J - T^a_{ba} J^b, \\ &= -\overset{\circ}{D}^\dagger J + T^a_{ab} J^b, \\ &= -d^\dagger J + T^a_{ab} J^b.\end{aligned} \quad (\text{A2.18})$$

Donde hemos utilizado la relación [3.4.26](#). Reemplazando [A2.18](#) en [A2.17](#)

$$\begin{aligned}d^\dagger J &= -T_{abc} \Pi^{ab} J^c + T^a_{ab} J^b \\ &= -T_{abc} \Pi^{ab} J^c + \eta^{ab} T_{abc} J^c \\ &= T_{abc} (\eta^{ab} - \Pi^{ab}) J^c\end{aligned} \quad (\text{A2.19})$$

Escribamos esta ecuación en índices coordinados. Comencemos por reescribir la

parte izquierda de A2.19.

$$\begin{aligned}
d^\dagger J &= -I_a \mathring{D} I^a J, \\
&= -I_a \mathring{D} J^a, \\
&= -I_a \left((\partial_\mu J^a + \mathring{\omega}_{c\mu}^a J^c) e_a^\mu e^d \right), \\
&= -(\partial_\mu J^a + \mathring{\omega}_{c\mu}^a J^c) e_a^\mu, \\
&= -(\partial_\mu (e_a^\mu J^a) - \partial_\mu e_a^\mu J^a + e_a^\mu \mathring{\omega}_{c\mu}^a J^c), \\
&= -(\partial_\mu J^\mu - \{ \partial_\mu e_c^\mu - e_a^\mu \mathring{\omega}_{c\mu}^a \} J^c).
\end{aligned}$$

Considerando el postulado de vielbein 2.4.31, es directo demostrar:

$$\mathring{\omega}_{c\mu}^a = \mathring{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a e_c^\nu - e_c^\nu \partial_\mu e_\nu^a,$$

de modo que

$$\begin{aligned}
d^\dagger J &= -\left(\partial_\mu J^\mu - \partial_\mu e_c^\mu J^c + e_a^\mu \left(\mathring{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a e_c^\nu - e_c^\nu \partial_\mu e_\nu^a \right) J^c \right), \\
&= -\left(\partial_\mu J^\mu - \partial_\mu e_c^\mu J^c + \mathring{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \delta_\lambda^\mu e_c^\nu J^c - e_a^\mu e_c^\nu \partial_\mu e_\nu^a J^c \right), \\
&= -\left(\partial_\lambda J^\lambda + \mathring{\Gamma}_{\lambda\nu}^\lambda J^\nu - \partial_\mu e_c^\mu J^c - e_a^\mu e_c^\nu \partial_\mu e_\nu^a J^c \right), \\
&= -\left(\mathring{\nabla}_\lambda J^\lambda - \partial_\mu e_c^\mu J^c - e_a^\mu \partial_\mu e_\nu^a J^\nu \right), \\
&= -\left(\mathring{\nabla}_\lambda J^\lambda - \partial_\mu e_c^\mu J^c + \partial_\mu e_a^\mu e_\nu^a J^\nu \right), \\
&= -\left(\mathring{\nabla}_\lambda J^\lambda - \partial_\mu e_a^\mu J^a + \partial_\mu e_a^\mu J^a \right), \\
&= -\mathring{\nabla}_\lambda J^\lambda.
\end{aligned} \tag{A2.20}$$

Similarmente para el lado derecho de A2.19:

$$\begin{aligned}
T_{abc} (\eta^{ab} - \Pi^{ab}) J^c &= e_a^\mu e_b^\nu e_c^\lambda e_\alpha^a e_\beta^b e_\gamma^c T_{\mu\nu\lambda} (g^{\alpha\beta} - \Pi^{\alpha\beta}) J^\gamma, \\
&= \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \delta_\gamma^\lambda T_{\mu\nu\lambda} (g^{\alpha\beta} - \Pi^{\alpha\beta}) J^\gamma, \\
&= T_{\mu\nu\lambda} (g^{\mu\nu} - \Pi^{\mu\nu}) J^\lambda.
\end{aligned} \tag{A2.21}$$

Reemplazando A2.20 y A2.21 en A2.19

$$\overset{\circ}{\nabla}_\lambda J^\lambda = T_{\mu\nu\lambda} (\Pi^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}) J^\lambda,$$

donde

$$\Pi^{\alpha\beta} = e_a^\alpha e_b^\beta (\bar{P}^{fa} P_f^b + \bar{P}^{fb} P_f^a). \quad (\text{A2.22})$$

Dado que H^{ab} es simétrico, entonces la polarización también lo es, luego

$$\begin{aligned} \Pi^{\alpha\beta} &= e_a^\alpha e_b^\beta (\bar{P}_f^a P^{fb} + \bar{P}_f^b P^{fa}), \\ &= e_a^\alpha e_b^\beta (\bar{P}_\gamma^a P^{\gamma b} + \bar{P}_\gamma^b P^{\gamma a}), \\ &= \bar{P}_\gamma^\alpha P^{\gamma\beta} + \bar{P}_\gamma^\beta P^{\gamma\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{A2.23})$$

A3. Propagación anómala de la polarización en una geometría con torsión

En este apéndice se deducirá la ecuación 3.5.22. Para ello, comenzaremos reemplazando 3.5.13 en 3.5.12.

$$\begin{aligned} k^a \mathcal{D}_a (\phi P^b) - \frac{1}{2} \phi P^b D^\dagger k &= 0, \\ \frac{1}{\phi} k^a \mathcal{D}_a \phi P^b + k^a \mathcal{D}_a P^b + \frac{1}{2} P^b \mathcal{D}_a k^a &= 0, \\ k^a \mathcal{D}_a P^b + \left(\frac{1}{\phi} k^a \mathcal{D}_a \phi + \frac{1}{2} \mathcal{D}_a k^a \right) P^b &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A3.1})$$

Por lo tanto,

$$k^a \mathcal{D}_a P^b = - \left(\frac{1}{\phi} k^a \mathcal{D}_a \phi + \frac{1}{2} \mathcal{D}_a k^a \right) P^b. \quad (\text{A3.2})$$

Por otro lado, de la definición de la corriente $J^a = k^a \phi$:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\phi^2} \mathcal{D}_a (\phi^2 k^a) &= \frac{1}{\varphi} \mathcal{D}_a \phi k^a + \frac{1}{2} \mathcal{D}_a k^a, \\
 \frac{1}{2\phi^2} \mathcal{D}_a (J^a) &= \frac{1}{\phi} \mathcal{D}_a \phi k^a + \frac{1}{2} \mathcal{D}_a k^a, \\
 \frac{1}{2\phi^2} T_{abc} \Pi^{ab} J^c &= \frac{1}{\phi} \mathcal{D}_a \phi k^a + \frac{1}{2} \mathcal{D}_a k^a, \\
 \frac{1}{2\phi^2} T_{abc} \Pi^{ab} \phi^2 k^c &= \frac{1}{\phi} \mathcal{D}_a \phi k^a + \frac{1}{2} \mathcal{D}_a k^a, \\
 \frac{1}{2} T_{abc} \Pi^{ab} k^c &= \frac{1}{\phi} \mathcal{D}_a \phi k^a + \frac{1}{2} \mathcal{D}_a k^a.
 \end{aligned} \tag{A3.3}$$

Reemplazando A3.3 en A3.2

$$k^a \mathcal{D}_a P^b = -\frac{1}{2} T_{adc} \Pi^{ad} k^c P^b. \tag{A3.4}$$

Lo siguiente será separar la derivada generalizada de lie de la polarización A3.4 en una sin torsión más términos proporcionales a la contorsión.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_a P^b &= I_a D P^b + D I_a P^b, \\
 &= I_a (dP^b + \dot{\omega}^b_c \wedge P^c + k^b_c \wedge P^c) + dP^b_a + \omega^b_c P^c_a - \omega^c_a P^b_c, \\
 &= I_a (dP^b + \dot{\omega}^b_c \wedge P^c) + I_a (k^b_c \wedge P^c) + dP^b_a + \dot{\omega}^b_c P^c_a + \kappa^b_c P^c_a \\
 &\quad - \dot{\omega}^c_a P^b_c - \kappa^c_a P^b_c, \\
 &= I_a (\dot{D} P^b) + I_a (k^b_c \wedge P^c) + dP^b_a + \dot{\omega}^b_c P^c_a + \kappa^b_c P^c_a - \dot{\omega}^c_a P^b_c - \kappa^c_a P^b_c, \\
 &= I_a (\dot{D} P^b) + I_a (k^b_c \wedge P^c) + (d(I_a P^b) - \dot{\omega}^c_a I_c P^b + \dot{\omega}^b_c I_a P^c) \\
 &\quad - \kappa^c_a I_c P^b + \kappa^b_c I_a P^c, \\
 &= I_a (\dot{D} P^b) + (d(I_a P^b) - \dot{\omega}^c_a I_c P^b + \dot{\omega}^b_c I_a P^c) + I_a (k^b_c \wedge P^c) \\
 &\quad - \kappa^c_a I_c P^b + \kappa^b_c I_a P^c, \\
 &= I_a (\dot{D} P^b) + (d(I_a P^b) - \dot{\omega}^c_a I_c P^b + \dot{\omega}^b_c I_a P^c) + I_a \kappa^b_c P^c - \kappa^b_c \wedge I_a P^c \\
 &\quad - \kappa^c_a I_c P^b + \kappa^b_c I_a P^c, \\
 &= I_a (\dot{D} P^b) + \dot{D} (I_a P^b) + I_a \kappa^b_c P^c - \kappa^c_a I_c P^b, \\
 &= \dot{D}_a P^b + I_a \kappa^b_c P^c - \kappa^c_a I_c P^b.
 \end{aligned} \tag{A3.5}$$

La 1-forma contorsión en términos de la torsión es dada por

$$\kappa^c{}_a = \frac{1}{2}\eta^{cd}(T_{ade} - T_{dae} + T_{eda})e^e. \quad (\text{A3.6})$$

Aplicando el operador I_a sobre la contorsión, obtenemos

$$I_a\kappa^b{}_c = \frac{1}{2}\eta^{bh}(T_{cha} - T_{hca} + T_{ahc}). \quad (\text{A3.7})$$

Reemplazando A3.6 y A3.7 en A3.5, obtenemos una expresión para la polarización en términos de la torsión, dada explícitamente por

$$\begin{aligned} D_a P^b &= \mathring{D}_a P^b + \frac{1}{2}\eta^{bh}(T_{cha} - T_{hca} + T_{ahc})P^c \\ &\quad - \frac{1}{2}\eta^{cd}(T_{ade} - T_{dae} + T_{eda})I_c P^b e^e. \end{aligned} \quad (\text{A3.8})$$

De A3.8 en A3.4, obtenemos

$$\begin{aligned} k^a \mathring{D}_a P_b &= -k^a \left(\frac{1}{2}\delta_b^h (T_{cha} - T_{hca} + T_{ahc})P^c - \frac{1}{2}\eta^{cd}(T_{ade} - T_{dae} + T_{eda})P_{bc}e^e \right) - \frac{1}{2}T_{adc}\Pi^{ad}k^c P_b \\ &= -k^a \left(\frac{1}{2}(T_{cba} - T_{bca} + T_{abc})P^c - \frac{1}{2}\eta^{cd}(T_{ade} - T_{dae} + T_{eda})P_{bc}e^e \right) - \frac{1}{2}T_{adc}\Pi^{ad}k^c P_b, \\ &= -k^m \left(\frac{1}{2}(T_{cbm} - T_{bcm} + T_{mbc})P^c - \frac{1}{2}\eta^{cd}(T_{mde} - T_{dme} + T_{edm})P_{bc}e^e \right) - \frac{1}{2}T_{adm}\Pi^{ad}k^c P_b \\ &= -\frac{1}{2}k^m \{ (T_{cbm} - T_{bcm} + T_{mbc})P^c - \eta^{cd}(T_{mde} - T_{dme} + T_{edm})P_{bc}e^e + T_{adm}\Pi^{ad}P_b \}, \\ &= -\frac{1}{2}k^m \{ (T_{cbm} - T_{bcm} + T_{mbc})P^c - (T_{mde} - T_{dme} + T_{edm})P_b^d + T_{adm}\Pi^{ad}P_{be} \} e^e. \end{aligned}$$

Escribiendo esta expresión en lenguaje coordenado:

$$\begin{aligned}
e_b^\alpha e_e^\beta k^\lambda \overset{\circ}{\nabla}_\lambda (P_{\alpha\beta}) &= -\frac{1}{2} k^m \{ (T_{cbm} - T_{bcm} + T_{mbc}) P_e^c - (T_{mde} - T_{dme} + T_{edm}) P_b^d \\
&\quad + T_{adm} \Pi^{ad} P_{be} \}, \\
&= -\frac{1}{2} k^m \{ (-T_{cmb} + T_{bmc} - T_{mcb}) P_e^c + (T_{dme} - T_{edm} - T_{mde}) P_b^d \\
&\quad + T_{adm} \Pi^{ad} P_{be} \}, \\
&= -\frac{1}{2} k^m \{ (-T_{cmb} + T_{bmc} - T_{mcb}) P_e^c + (T_{dme} + T_{emd} - T_{mde}) P_b^d \\
&\quad + T_{adm} \Pi^{ad} P_{be} \}, \\
&= -\frac{1}{2} e_b^\alpha e_e^\beta k^\gamma \{ (-T_{\lambda\gamma\alpha} + T_{\alpha\gamma\lambda} - T_{\gamma\lambda\alpha}) P_\beta^\lambda + (T_{\lambda\gamma\beta} + T_{\beta\gamma\lambda} - T_{\gamma\lambda\beta}) P_\alpha^\lambda \\
&\quad + T_{\mu\nu\gamma} \Pi^{\mu\nu} P_{\alpha\beta} \}.
\end{aligned}$$

De aquí, es directo observar que la propagación de la torsión tiene la forma

$$k^\lambda \overset{\circ}{\nabla}_\lambda P_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} k^\gamma [P_{\mu\nu} \Pi^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta\gamma} + (-T_{\lambda\gamma\mu} + T_{\mu\gamma\lambda} - T_{\gamma\lambda\mu}) P_\nu^\lambda + (T_{\lambda\gamma\nu} + T_{\nu\gamma\lambda} - T_{\gamma\lambda\nu}) P_\mu^\lambda].$$

A4. Ecuación de la onda en la teoría ECSK

En esta sección deduciremos la ecuación 4.1.5, la cual es equivalente a 4.1.4 escrita en lenguaje coordenado. Para ello utilizaremos la relación 3.4.12 y la super álgebra abierta 3.4.14-3.4.19.

Comencemos con escribir el término ligado a la perturbación contorsional V_m^a .

$$\begin{aligned}
(I_n \mathcal{D}_a - \mathcal{D}_n I_a) V_m^a &= I_n \mathcal{D}_a V_m^a - \mathcal{D}_n V_{ma}^a, \\
&= I_n (e_a^\mu \nabla_\mu + I_a T^b \wedge I_b) V_m^a - (e_n^\mu \nabla_\mu + I_n T^b \wedge I_b) V_{ma}^a, \\
&= e_a^\mu \nabla_\mu V_{mn}^a + \frac{1}{2} T_{cd}^b V_{mb}^a I_{an} (e^c \wedge e^d) - e_n^\mu \nabla_\mu V_{ma}^a, \\
&= e_a^\mu \nabla_\mu V_{mn}^a - e_n^\mu \nabla_\mu V_{ma}^a + T_{an}^b V_{mb}^a, \\
&= \nabla^\lambda V_{\lambda mn} - \nabla_n V_{m\lambda}^\lambda + T_{an}^b V_{mb}^a, \\
&= \nabla^\lambda V_{\lambda mn} - \nabla_n V_{\lambda m}^\lambda + T_{an}^b V_{mb}^a, \\
&= \nabla^\lambda V_{\lambda mn} + \nabla_n V_{m\lambda}^\lambda + T_{an}^b V_{mb}^a. \tag{A4.1}
\end{aligned}$$

Una mirada a las ecuaciones 3.3.22 y 3.3.23 sugieren que V_b^a es del orden de magnitud

$$|V_b^a| \sim \frac{H}{L},$$

la cual cambia rápidamente en la escala de λ , por lo que

$$\begin{aligned} |\partial V_b^a| &\sim \frac{H}{L} \frac{1}{\lambda}, \\ &\sim \frac{H}{L^2} \epsilon^{-1}. \end{aligned}$$

Por otra parte, dado que la torsión es dada por $T^a = de^a + \omega_b^a e^b$, inferimos que la torsión debe ser del orden de magnitud

$$|T^a| \sim \frac{1}{L},$$

y por lo tanto,

$$|T_{an}^b V_{mb}^a| \sim \frac{H}{L^2}.$$

Teniendo en cuenta solo los términos del orden ϵ^{-2} y ϵ^{-1} , A4.1 se transforma en

$$(I_n \mathcal{D}_a - \mathcal{D}_n I_a) V_m^a = \nabla^\lambda V_{\lambda mn} + \nabla_n V_{m\lambda}^\lambda. \quad (\text{A4.2})$$

Continuemos desarrollando el primer término de 4.1.4.

$$\begin{aligned}
I_n \mathcal{D}_a \mathcal{D}^a H_m &= I_n \left((e_a^\mu \nabla_\mu + I_a T^b \wedge I_b) (e^a_\nu \nabla^\nu H_m + I^a T^c H_{mc}) \right), \\
&= I_n \left(e_a^\mu \nabla_\mu (e^a_\nu \nabla^\nu H_m + I^a T^c H_{mc}) + I_a T^b \wedge I_b (e^a_\nu \nabla^\nu H_m + I^a T^c H_{mc}) \right), \\
&= I_n \left(e_a^\mu \nabla_\mu (e^a_\nu \nabla^\nu H_m) + e_a^\mu \nabla_\mu (I^a T^c H_{mc}) + I_a T^b \wedge I_b (e^a_\nu \nabla^\nu H_m) \right. \\
&\quad \left. + I_a T^b \wedge I_b (I^a T^c H_{mc}) \right), \\
&= I_n \left(e_a^\mu e^a_\nu \nabla_\mu \nabla^\nu H_m + e_a^\mu \nabla_\mu (I^a T^c H_{mc}) + I_a T^b e^a_\nu \nabla^\nu H_{mb} \right. \\
&\quad \left. + I_a T^b \wedge I_b (I^a T^c H_{mc}) \right), \\
&= \nabla_\mu \nabla^\mu H_{mn} + e_a^\mu I_n \nabla_\mu (I^a T^c H_{mc}) + I_n I_a T^b e^a_\nu \nabla^\nu H_{mb} \\
&\quad + I_n I_a T^b \wedge I_b I^a T^c H_{mc}, \\
&= \nabla_\mu \nabla^\mu H_{mn} + e^{a\mu} \nabla_\mu (I_{an} T^c H_{mc}) + I_{an} T^b e^a_\nu \nabla^\nu H_{mb} + I_{an} T^b \wedge I_b I^a T^c H_{mc}, \\
&= \nabla_\mu \nabla^\mu H_{mn} + e^{a\mu} \nabla_\mu (T^c_{an} H_{mc}) + T^b_{an} e^a_\nu \nabla^\nu H_{mb} + T^b_{an} \wedge I_b I^a T^c H_{mc}, \\
&= \nabla_\mu \nabla^\mu H_{mn} + e^{a\mu} \nabla_\mu (T^c_{an} H_{mc}) + T^b_{an} e^a_\nu \nabla^\nu H_{mb} + T^{ba}_n I_{ab} T^c H_{mc}, \\
&= \nabla_\mu \nabla^\mu H_{mn} + e^{a\mu} \nabla_\mu (T^b_{an} H_{mb}) + T^b_{an} e^a_\nu \nabla^\nu H_{mb} + T^{ba}_n T^c_{ab} H_{mc}, \\
&= \nabla_\mu \nabla^\mu H_{mn} + T^b_{an} e^a_\nu \nabla^\nu H_{bm} + e^{a\mu} \nabla_\mu (T^c_{an} H_{mc}) + T^{ba}_n T^c_{ab} H_{mc}, \\
&= \nabla_\mu \nabla^\mu H_{mn} + T_{b\nu n} \nabla^\nu H^b_m + e_a^\mu \nabla_\mu (T^{\rho a}_n H_{m\rho}) + T^{\rho\sigma}_n T^\mu_{\sigma\rho} H_{m\mu}, \\
&= \nabla_\mu \nabla^\mu H_{mn} + T_{b\nu n} \nabla^\nu H^b_m + e_a^\mu \nabla_\mu T^{\rho a}_n H_{m\rho} + e_a^\mu T^{\rho a}_n \nabla_\mu H_{m\rho} + T^{\rho\sigma}_n T^\mu_{\sigma\rho} H_{m\mu}, \\
&= \nabla_\mu \nabla^\mu H_{mn} + T_{b\nu n} \nabla^\nu H^b_m + \nabla_\mu T^{\rho\mu}_n H_{\rho m} + T^{\rho\mu}_n \nabla_\mu H_{\rho m} + T^{\rho\sigma}_n T^\mu_{\sigma\rho} H_{m\mu}, \\
&= \nabla_\mu \nabla^\mu H_{mn} + T_{b\nu n} \nabla^\nu H^b_m + T_{\rho\mu n} \nabla^\mu H^\rho_m + \nabla^\mu T_{\rho\mu n} H^\rho_m + T^{\rho\sigma}_n T^\mu_{\sigma\rho} H_{m\mu}. \quad (\text{A4.3})
\end{aligned}$$

Analicemos el orden en ϵ de cada término de A4.3: Para el primer término tenemos que

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \nabla^\mu H_{mn} &\sim \frac{H}{\lambda^2} \\
&\sim \frac{1}{L^2} \frac{H}{\left(\frac{\lambda}{L}\right)^2} \\
&\sim \frac{1}{L^2} \frac{H}{\epsilon^2}.
\end{aligned}$$

Para el segundo término

$$\begin{aligned}
T_{b\nu n} \nabla^\nu H_m^b &\sim \frac{1}{L} \frac{H}{\lambda} \\
&\sim \frac{1}{L^2} \frac{H}{\frac{\lambda}{L}} \\
&\sim \frac{1}{L^2} \frac{H}{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Para el tercer término

$$T_{\rho\mu n} \nabla^\mu H_m^\rho \sim \frac{1}{L^2} \frac{H}{\epsilon}.$$

Para el cuarto término

$$\nabla^\nu T_{\rho\nu n} H_m^\rho \sim \frac{H}{L^2} \epsilon^0.$$

Para el quinto término

$$T^{\rho\sigma}_n T^\mu_{\sigma\rho} H_{m\mu} \sim \frac{H}{L^2}.$$

De esto se observa que el único término descartable es el tercero, por lo que [A4.3](#) se convierte en

$$I_n \mathcal{D}_a \mathcal{D}^a H_m = \nabla_\mu \nabla^\mu H_{mn} + T_{b\nu n} \nabla^\nu H_m^b + T_{\rho\mu n} \nabla^\mu H_m^\rho + e_a^\mu \nabla_\mu e^a_\nu \nabla^\nu H_{mn}. \quad (\text{A4.4})$$

Por último, veamos que sucede con el segundo término de [4.1.4](#).

$$\begin{aligned}
I_n [\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_m] H^a &= I_n (I_{am} D^2 H^a + D^2 I_{am} H^a + I_a D^2 I_m H^a - I_m D^2 I_a H^a) \\
&\quad - I_n (DT_{am}^c \wedge I_c H^a + T_{am}^c \mathcal{D}_c H^a), \\
&= I_n (I_{am} D^2 H^a + I_a D^2 H_m^a - I_m D^2 H) - I_n (DT_{am}^c \wedge H_c^a + T_{am}^c \mathcal{D}_c H^a), \\
&= I_n (I_{am} (R^a_b H^b) + I_a D^2 H_m^a - I_m d^2 H) - I_n (DT_{am}^c \wedge H_c^a + T_{am}^c \mathcal{D}_c H^a), \\
&= I_n (I_{am} (R^a_b H^b) + I_a D^2 H_m^a) - I_n (DT_{am}^c \wedge H_c^a + T_{am}^c \mathcal{D}_c H^a). \quad (\text{A4.5})
\end{aligned}$$

Note que el tercer término es del orden de ϵ^0 , por lo tanto, no lo consideraremos en los cálculos. Por otro lado, los únicos términos de la curvatura que contribuyen al

límite eikonal es el de primer orden en H . Sin embargo, dado que va multiplicado por un término proporcional a H , entonces $R^{(1)}H \sim \frac{1}{L^2} \frac{H^2}{\epsilon^2}$ y puesto que $H \ll \epsilon \ll 1$, entonces este término también es despreciable. De este modo, los términos relevantes de A4.5 son

$$I_n [\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_m] H^a = I_n (I_a D^2 H_m^a - T_{am}^c \mathcal{D}_c H^a). \quad (\text{A4.6})$$

Del último término,

$$\begin{aligned} T_{am}^c \mathcal{D}_c H^a &= T_{am}^c (e_c^\mu \nabla_\mu + I_c T^b \wedge I_b) H^a, \\ &= T_{am}^c e_c^\mu \nabla_\mu H^a + T_{am}^c I_c T^b \wedge I_b H^a. \end{aligned}$$

Dado que el último término es de orden ϵ^0 ,

$$\begin{aligned} T_{am}^c \mathcal{D}_c H^a &= T_{am}^c e_c^\mu \nabla_\mu H^a, \\ &= T_{am}^\mu \nabla_\mu H^a, \\ &= T_{am}^\mu \nabla_\mu (e^a_\nu H^\nu), \\ &= T_{\nu m}^\mu \nabla_\mu H^\nu. \end{aligned} \quad (\text{A4.7})$$

Veamos que ocurre con el primer término de A4.6:

$$\begin{aligned} D^2 H_m^a &= D(dH_m^a + \omega_c^a \wedge H_m^c - \omega_m^c \wedge H_c^a), \\ &= DdH_m^a + D(\omega_c^a \wedge H_m^c) - D(\omega_m^c \wedge H_c^a), \\ &= ddH_m^a + \omega_c^a \wedge dH_m^c - \omega_m^c \wedge dH_c^a + D\omega_c^a \wedge H_m^c - \omega_c^a \wedge DH_m^c \\ &\quad - D\omega_m^c \wedge H_c^a + \omega_m^c \wedge DH_c^a, \\ &= \omega_c^a \wedge dH_m^c - \omega_m^c \wedge dH_c^a + D\omega_c^a \wedge H_m^c - \omega_c^a \wedge DH_m^c - D\omega_m^c \wedge H_c^a \\ &\quad + \omega_m^c \wedge DH_c^a, \end{aligned}$$

considerando el límite eikonal,

$$\begin{aligned}
D^2 H_m^a &= \omega_c^a \wedge dH_m^c - \omega_m^c \wedge dH_c^a - \omega_c^a \wedge DH_m^c + \omega_m^c \wedge DH_c^a, \\
&= \omega_c^a \wedge dH_m^c - \omega_m^c \wedge dH_c^a - \omega_c^a \wedge (dH_m^c + \omega_d^c H_m^d - \omega_m^d \wedge H_c^d) \\
&\quad + \omega_m^c \wedge (dH_c^a + \omega_d^a \wedge H_c^d - \omega_c^d \wedge H_d^a), \\
&= -\omega_c^a \wedge (\omega_d^c H_m^d - \omega_m^d \wedge H_c^d) + \omega_m^c \wedge (\omega_d^a \wedge H_c^d - \omega_c^d \wedge H_d^a). \quad (\text{A4.8})
\end{aligned}$$

de aquí vemos que los todos los términos en realidad son despreciables, por lo que de este término no se obtiene nada importante. Por lo tanto, de A4.7 y A4.8 en A4.6, obtenemos

$$\begin{aligned}
I_n [\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_m] H^a &= I_n (-T_{\nu m}^\mu \nabla_\mu H^\nu), \\
&= -T_{\nu m}^\mu \nabla_\mu H^\nu. \quad (\text{A4.9})
\end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando A4.2, A4.4 y A4.9 en 4.1.5:

$$\begin{aligned}
W_{mn} &= -\frac{1}{2} (\nabla_\mu \nabla^\mu H_{mn} + T_{b\nu n} \nabla^\nu H_m^b + T_{\rho\mu n} \nabla^\mu H_m^\rho + T_{\nu m}^\mu \nabla_\mu H_n^\nu) + \nabla^\lambda V_{\lambda mn} + \nabla_n V_{m\lambda}^\lambda, \\
&= -\frac{1}{2} (\nabla_\mu \nabla^\mu H_{mn} + T_{\mu\nu n} \nabla^\nu H_m^\mu + T_{\mu\nu n} \nabla^\nu H_m^\mu + T_{\nu m}^\mu \nabla_\mu H_n^\nu) + \nabla^\lambda V_{\lambda mn} + \nabla_n V_{m\lambda}^\lambda, \\
&= -\frac{1}{2} (\nabla_\mu \nabla^\mu H_{mn} + 2T_{\mu\nu n} \nabla^\nu H_m^\mu + T_{\mu\nu m} \nabla^\mu H_n^\nu) + \nabla^\lambda V_{\lambda mn} + \nabla_n V_{m\lambda}^\lambda, \\
&= -\left(\frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla^\mu H_{mn} + T_{\mu\nu n} \nabla^\nu H_m^\mu + \frac{1}{2} T_{\mu\nu m} \nabla^\mu H_n^\nu \right) + \nabla^\lambda V_{\lambda mn} + \nabla_n V_{m\lambda}^\lambda.
\end{aligned}$$

de este modo

$$\begin{aligned}
e_m^\mu e_n^\nu W_{\mu\nu} &= -\left(\frac{1}{2} \nabla_\lambda \nabla^\lambda (e_m^\mu e_n^\nu H_{\mu\nu}) + e_n^\nu T_{\sigma\rho\nu} \nabla^\rho (e_m^\mu H_\mu^\sigma) + \frac{1}{2} e_m^\mu T_{\rho\sigma\mu} \nabla^\rho (e_n^\nu H_\nu^\sigma) \right) \\
&\quad + \nabla^\lambda (e_m^\mu e_n^\nu V_{\lambda\mu\nu}) + e_n^\nu \nabla_\nu (e_m^\mu V_{\mu\lambda}^\lambda), \\
&= e_m^\mu e_n^\nu \left\{ -\left(\frac{1}{2} \nabla_\lambda \nabla^\lambda H_{\mu\nu} + T_{\sigma\rho\nu} \nabla^\rho (H_\mu^\sigma) + \frac{1}{2} T_{\rho\sigma\mu} \nabla^\rho H_\nu^\sigma \right) + \nabla^\lambda V_{\lambda\mu\nu} + \nabla_\nu V_{\mu\lambda}^\lambda \right\}
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$W_{\mu\nu} = -\left(\frac{1}{2} \nabla_\lambda \nabla^\lambda H_{\mu\nu} + T_{\sigma\rho\nu} \nabla^\rho H_\mu^\sigma + \frac{1}{2} T_{\rho\sigma\mu} \nabla^\rho H_\nu^\sigma \right) + \nabla^\lambda V_{\lambda\mu\nu} + \nabla_\nu V_{\mu\lambda}^\lambda.$$

A5. Propagación anómala de la amplitud y polarización en la teoría ECSK

Para encontrar una expresión para la propagación de la amplitud y polarización de la onda, haremos un procedimiento totalmente análogo al hecho en el apéndice A3. Para empezar, desarrollemos la ecuación 4.1.8 utilizando 3.5.13 y 3.5.15 del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2} \nabla_\lambda k^\lambda \mathbb{H}_{\mu\nu} + k^\lambda \left(\nabla_\lambda \mathbb{H}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} M_{\lambda\mu\nu}^+ \right), \\
&= \frac{1}{2} \nabla_\lambda k^\lambda \phi P_{\mu\nu} + k^\lambda \left[\nabla_\lambda \phi P_{\mu\nu} + \phi \nabla_\lambda P_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \phi \left\{ \left(2T_{\sigma\lambda\nu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}) \right) P_\mu^\sigma \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(2T_{\sigma\lambda\mu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}) \right) P_\nu^\sigma + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\rho\sigma\lambda} P^{\rho\sigma} - \frac{1}{4} (g_{\mu\nu} T_{\sigma\lambda}^\sigma - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})) P \right\} \right]. \\
&= \frac{1}{2} \phi^2 \nabla_\lambda k^\lambda P_{\mu\nu} + k^\lambda \left[\frac{1}{2} \nabla_\lambda \phi^2 P_{\mu\nu} + \phi^2 \nabla_\lambda P_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \phi^2 \left\{ \left(2T_{\sigma\lambda\nu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}) \right) P_\mu^\sigma \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(2T_{\sigma\lambda\mu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}) \right) P_\nu^\sigma + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\rho\sigma\lambda} P^{\rho\sigma} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{4} (g_{\mu\nu} T_{\sigma\lambda}^\sigma - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})) P \right\} \right], \\
&= \frac{1}{2} (\nabla_\lambda (\phi^2 k^\lambda) - k^\lambda \nabla_\lambda \phi^2) P_{\mu\nu} + k^\lambda \left[\frac{1}{2} \nabla_\lambda \phi^2 P_{\mu\nu} + \phi^2 \nabla_\lambda P_{\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \phi^2 \left\{ \left(2T_{\sigma\lambda\nu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}) \right) P_\mu^\sigma + \left(2T_{\sigma\lambda\mu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}) \right) P_\nu^\sigma \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\rho\sigma\lambda} P^{\rho\sigma} - \frac{1}{4} (g_{\mu\nu} T_{\sigma\lambda}^\sigma - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})) P \right\} \right], \\
&= \frac{1}{2} \nabla_\lambda J^\lambda P_{\mu\nu} + k^\lambda \left[\phi^2 \nabla_\lambda P_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \phi^2 \left\{ \left(2T_{\sigma\lambda\nu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}) \right) P_\mu^\sigma \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(2T_{\sigma\lambda\mu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}) \right) P_\nu^\sigma + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\rho\sigma\lambda} P^{\rho\sigma} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{4} (g_{\mu\nu} T_{\sigma\lambda}^\sigma - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})) P \right\} \right], \tag{A5.1} \\
&= \frac{1}{2} \nabla_\lambda J^\lambda P_{\mu\nu} + J^\lambda \left[\nabla_\lambda P_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left\{ \left(2T_{\sigma\lambda\nu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}) \right) P_\mu^\sigma \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(2T_{\sigma\lambda\mu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}) \right) P_\nu^\sigma + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\rho\sigma\lambda} P^{\rho\sigma} - \frac{1}{4} (g_{\mu\nu} T_{\sigma\lambda}^\sigma - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})) P \right\} \right].
\end{aligned}$$

de este modo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nabla_\lambda J^\lambda P_{\mu\nu} &= -J^\lambda \left[\nabla_\lambda P_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left\{ \left(2T_{\sigma\lambda\nu} + \frac{1}{2}(T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}) \right) P^\sigma_\mu \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(2T_{\sigma\lambda\mu} + \frac{1}{2}(T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}) \right) P^\sigma_\nu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\rho\sigma\lambda}P^{\rho\sigma} - \frac{1}{4}(g_{\mu\nu}T^\sigma_{\sigma\lambda} - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})) \right\} \right] \end{aligned}$$

Recordando que $P_{\mu\nu}\bar{P}^{\mu\nu} = 1$, es posible escribir la ecuación anterior como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nabla_\lambda J^\lambda &= -J^\lambda \left[\bar{P}^{\mu\nu}\nabla_\lambda P_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left\{ \left(2T_{\sigma\lambda\nu} + \frac{1}{2}(T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}) \right) \bar{P}^{\mu\nu} P^\sigma_\mu \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(2T_{\sigma\lambda\mu} + \frac{1}{2}(T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}) \right) \bar{P}^{\mu\nu} P^\sigma_\nu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\rho\sigma\lambda}\bar{P}^{\mu\nu} P^{\rho\sigma} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{4}(g_{\mu\nu}T^\sigma_{\sigma\lambda} - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})) P\bar{P}^{\mu\nu} \right\} \right], \\ &= -J^\lambda \left[\bar{P}^{\mu\nu}\nabla_\lambda P_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left\{ \left(2T_{\sigma\lambda\mu} + \frac{1}{2}(T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}) \right) \bar{P}^{\nu\mu} P^\sigma_\nu \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(2T_{\sigma\lambda\mu} + \frac{1}{2}(T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}) \right) \bar{P}^{\mu\nu} P^\sigma_\nu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\rho\sigma\lambda}\bar{P}^{\mu\nu} P^{\rho\sigma} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{4}(g_{\mu\nu}T^\sigma_{\sigma\lambda} - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})) P\bar{P}^{\mu\nu} \right\} \right], \\ &= -J^\lambda \left[\bar{P}^{\mu\nu}\nabla_\lambda P_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left\{ 2 \left(2T_{\sigma\lambda\mu} + \frac{1}{2}(T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}) \right) \bar{P}^{\nu\mu} P^\sigma_\nu \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\rho\sigma\lambda}\bar{P}^{\mu\nu} P^{\rho\sigma} - \frac{1}{4}(g_{\mu\nu}T^\sigma_{\sigma\lambda} - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})) P\bar{P}^{\mu\nu} \right\} \right] \Bigg], \\ &= - \left[J^\lambda \bar{P}^{\mu\nu}\nabla_\lambda P_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left\{ 4J^\lambda T_{\sigma\lambda\mu}\bar{P}^{\nu\mu} P^\sigma_\nu + J^\lambda T_{\lambda\sigma\mu}\bar{P}^{\nu\mu} P^\sigma_\nu + J^\lambda T_{\mu\sigma\lambda}\bar{P}^{\nu\mu} P^\sigma_\nu \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\rho\sigma\lambda}J^\lambda\bar{P}^{\mu\nu} P^{\rho\sigma} - \frac{1}{4}T^\sigma_{\sigma\lambda}P\bar{P}J^\lambda + \frac{1}{4}J^\lambda T_{\mu\nu\lambda}P\bar{P}^{\mu\nu} + \frac{1}{4}T_{\nu\mu\lambda}P\bar{P}^{\mu\nu}J^\lambda \right\} \right]. \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de índices conveniente¹, encontramos que

¹El cambio de índices se realiza de manera tal que todos los términos de torsión tengan los mismos índices

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\nabla_\lambda J^\lambda &= - \left[J^\lambda \bar{P}^{\mu\nu} \nabla_\lambda P_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left\{ 4J^\nu T_{\mu\nu\lambda} \bar{P}^{\sigma\lambda} P^\mu_\sigma + J^\mu T_{\mu\nu\lambda} \bar{P}^{\sigma\lambda} P^\nu_\sigma + J^\lambda T_{\mu\nu\lambda} \bar{P}^{\sigma\mu} P^\nu_\sigma \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} T_{\mu\nu\lambda} J^\lambda \bar{P}^{\rho\sigma} P^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu\lambda} P \bar{P} J^\lambda + \frac{1}{4} J^\lambda T_{\mu\nu\lambda} P \bar{P}^{\mu\nu} + \frac{1}{4} T_{\mu\nu\lambda} P \bar{P}^{\mu\nu} J^\lambda \right\} \right], \\
 &= - \left[J^\lambda \bar{P}^{\mu\nu} \nabla_\lambda P_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left\{ -4J^\nu T_{\mu\lambda\nu} \bar{P}^{\sigma\lambda} P^\mu_\sigma + J^\mu T_{\mu\nu\lambda} \bar{P}^{\sigma\lambda} P^\nu_\sigma + J^\lambda T_{\mu\nu\lambda} \bar{P}^{\sigma\mu} P^\nu_\sigma \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} T_{\mu\nu\lambda} J^\lambda \bar{P}^{\rho\sigma} P^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu\lambda} P \bar{P} J^\lambda + \frac{1}{4} J^\lambda T_{\mu\nu\lambda} P \bar{P}^{\mu\nu} + \frac{1}{4} T_{\mu\nu\lambda} P \bar{P}^{\mu\nu} J^\lambda \right\} \right], \\
 &= -J^\lambda \bar{P}^{\mu\nu} \nabla_\lambda P_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left\{ -4J^\lambda T_{\mu\nu\lambda} \bar{P}^{\sigma\nu} P^\mu_\sigma + J^\mu T_{\mu\nu\lambda} \bar{P}^{\sigma\lambda} P^\nu_\sigma + J^\lambda T_{\mu\nu\lambda} \bar{P}^{\sigma\mu} P^\nu_\sigma \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} T_{\mu\nu\lambda} J^\lambda \bar{P} P^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu\lambda} P \bar{P} J^\lambda + \frac{1}{2} T_{\mu\nu\lambda} P \bar{P}^{\mu\nu} J^\lambda \right\}. \tag{A5.2}
 \end{aligned}$$

Considerando el conjugado de la misma ecuación:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\nabla_\lambda J^\lambda &= -J^\lambda P^{\mu\nu} \nabla_\lambda \bar{P}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left\{ -4J^\lambda T_{\mu\nu\lambda} P^{\sigma\nu} \bar{P}^\mu_\sigma + J^\mu T_{\mu\nu\lambda} P^{\sigma\lambda} \bar{P}^\nu_\sigma + J^\lambda T_{\mu\nu\lambda} P^{\sigma\mu} \bar{P}^\nu_\sigma \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} T_{\mu\nu\lambda} J^\lambda P \bar{P}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu\lambda} \bar{P} P J^\lambda + \frac{1}{2} T_{\mu\nu\lambda} \bar{P} P^{\mu\nu} J^\lambda \right\}. \tag{A5.3}
 \end{aligned}$$

Sumando A5.2 con A5.3, obtenemos

$$\begin{aligned}
\nabla_\lambda J^\lambda &= -\frac{1}{2} \left\{ -4J^\lambda T_{\mu\nu\lambda} \bar{P}^{\sigma\nu} P^\mu_\sigma + J^\mu T_{\mu\nu\lambda} \bar{P}^{\sigma\lambda} P^\nu_\sigma + J^\lambda T_{\mu\nu\lambda} \bar{P}^{\sigma\mu} P^\nu_\sigma \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} T_{\mu\nu\lambda} J^\lambda \bar{P} P^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu\lambda} P \bar{P} J^\lambda + \frac{1}{2} T_{\mu\nu\lambda} P \bar{P}^{\mu\nu} J^\lambda \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ -4J^\lambda T_{\mu\nu\lambda} P^{\sigma\nu} \bar{P}^\mu_\sigma + J^\mu T_{\mu\nu\lambda} P^{\sigma\lambda} \bar{P}^\nu_\sigma + J^\lambda T_{\mu\nu\lambda} P^{\sigma\mu} \bar{P}^\nu_\sigma \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} T_{\mu\nu\lambda} J^\lambda P \bar{P}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu\lambda} \bar{P} P J^\lambda + \frac{1}{2} T_{\mu\nu\lambda} \bar{P} P^{\mu\nu} J^\lambda \right\}, \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ -4J^\lambda T_{\mu\nu\lambda} \bar{P}^{\sigma\nu} P^\mu_\sigma + J^\lambda T_{\mu\nu\lambda} \bar{P}^{\sigma\mu} P^\nu_\sigma \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} T_{\mu\nu\lambda} J^\lambda \bar{P} P^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu\lambda} P \bar{P} J^\lambda + \frac{1}{2} T_{\mu\nu\lambda} P \bar{P}^{\mu\nu} J^\lambda \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ -4J^\lambda T_{\mu\nu\lambda} P^{\sigma\nu} \bar{P}^\mu_\sigma + J^\lambda T_{\mu\nu\lambda} P^{\sigma\mu} \bar{P}^\nu_\sigma \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} T_{\mu\nu\lambda} J^\lambda P \bar{P}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu\lambda} \bar{P} P J^\lambda + \frac{1}{2} T_{\mu\nu\lambda} \bar{P} P^{\mu\nu} J^\lambda \right\} \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} J^\mu T_{\mu\nu\lambda} \bar{P}^{\sigma\lambda} P^\nu_\sigma + \frac{1}{2} J^\mu T_{\mu\nu\lambda} P^{\sigma\lambda} \bar{P}^\nu_\sigma \right). \tag{A5.4}
\end{aligned}$$

Considerando solo la suma de los dos últimos términos de la ecuación anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} J^\mu T_{\mu\nu\lambda} P^{\sigma\lambda} \bar{P}^\nu_\sigma + \frac{1}{2} J^\mu T_{\mu\nu\lambda} \bar{P}^{\sigma\lambda} P^\nu_\sigma &= \frac{1}{2} J^\mu T_{\mu\nu\lambda} P_\sigma^\lambda \bar{P}^{\nu\sigma} + \frac{1}{2} J^\mu T_{\mu\nu\lambda} \bar{P}^{\sigma\lambda} P^\nu_\sigma, \\
&= \frac{1}{2} J^\mu T_{\mu\nu\lambda} P_\sigma^\lambda \bar{P}^{\sigma\nu} + \frac{1}{2} J^\mu T_{\mu\nu\lambda} \bar{P}^{\sigma\lambda} P^\nu_\sigma, \\
&= \frac{1}{2} J^\mu T_{\mu\lambda\nu} P_\sigma^\nu \bar{P}^{\sigma\lambda} + \frac{1}{2} J^\mu T_{\mu\nu\lambda} \bar{P}^{\sigma\lambda} P^\nu_\sigma, \\
&= -\frac{1}{2} J^\mu T_{\mu\nu\lambda} P_\sigma^\nu \bar{P}^{\sigma\lambda} + \frac{1}{2} J^\mu T_{\mu\nu\lambda} \bar{P}^{\sigma\lambda} P^\nu_\sigma, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Reemplazando lo anterior en A5.4:

$$\begin{aligned}
 \nabla_\lambda J^\lambda &= -\frac{1}{2}T_{\mu\nu\lambda} \left\{ -4\bar{P}^{\sigma\nu}P^\mu_\sigma + \bar{P}^{\sigma\mu}P^\nu_\sigma + \frac{1}{2}\bar{P}P^{\mu\nu} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}P\bar{P} + \frac{1}{2}P\bar{P}^{\mu\nu} \right\} J^\lambda, \\
 &\quad -\frac{1}{2}T_{\mu\nu\lambda} \left\{ -4P^{\sigma\nu}\bar{P}^\mu_\sigma + P^{\sigma\mu}\bar{P}^\nu_\sigma + \frac{1}{2}P\bar{P}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\bar{P}P + \frac{1}{2}\bar{P}P^{\mu\nu} \right\} J^\lambda, \\
 &= -\frac{1}{2}T_{\mu\nu\lambda} \left\{ -4\bar{P}^{\sigma\nu}P^\mu_\sigma + \bar{P}^{\sigma\mu}P^\nu_\sigma + \bar{P}P^{\mu\nu} + P\bar{P}^{\mu\nu} \right. \\
 &\quad \left. -4P^{\sigma\nu}\bar{P}^\mu_\sigma + P^{\sigma\mu}\bar{P}^\nu_\sigma - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\bar{P}P \right\} J^\lambda, \\
 &= -\frac{1}{2}T_{\mu\nu\lambda} \left\{ -4\bar{P}^{\sigma\nu}P^\mu_\sigma + P^{\sigma\mu}\bar{P}^\nu_\sigma - 4P^{\sigma\nu}\bar{P}^\mu_\sigma + \bar{P}^{\sigma\mu}P^\nu_\sigma \right. \\
 &\quad \left. + (\bar{P}P^{\mu\nu} + \bar{P}^{\mu\nu}P) - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\bar{P}P \right\} J^\lambda, \\
 &= -\frac{1}{2}T_{\mu\nu\lambda} \left\{ -4\bar{P}^\nu_\sigma P^{\mu\sigma} + P^\mu_\sigma \bar{P}^{\sigma\nu} - 4\bar{P}^{\mu\sigma} P^\nu_\sigma + \bar{P}^\mu_\sigma P^{\sigma\nu} \right. \\
 &\quad \left. + (\bar{P}P^{\mu\nu} + \bar{P}^{\mu\nu}P) - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\bar{P}P \right\} J^\lambda, \\
 &= -\frac{1}{2}T_{\mu\nu\lambda} \left\{ -4P^{\mu\sigma}\bar{P}^\nu_\sigma + P^{\mu\sigma}\bar{P}^\nu_\sigma - 4\bar{P}^{\mu\sigma}P^\nu_\sigma + \bar{P}^{\mu\sigma}P^\nu_\sigma \right. \\
 &\quad \left. + (\bar{P}P^{\mu\nu} + \bar{P}^{\mu\nu}P) - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\bar{P}P \right\} J^\lambda, \\
 &= -\frac{1}{2}T_{\mu\nu\lambda} \left[-3P^{\mu\sigma}\bar{P}^\nu_\sigma - 3\bar{P}^{\mu\sigma}P^\nu_\sigma + (\bar{P}P^{\mu\nu} + \bar{P}^{\mu\nu}P) - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\bar{P}P \right] J^\lambda, \\
 &= \frac{1}{2}T_{\mu\nu\lambda} \left[3(P^{\mu\sigma}\bar{P}^\nu_\sigma + \bar{P}^{\mu\sigma}P^\nu_\sigma) - (\bar{P}P^{\mu\nu} + \bar{P}^{\mu\nu}P) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\bar{P}P \right] J^\lambda. \quad (\text{A5.5})
 \end{aligned}$$

Definiendo

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[3(P^{\mu\sigma}\bar{P}^\nu_\sigma + \bar{P}^{\mu\sigma}P^\nu_\sigma) - (\bar{P}P^{\mu\nu} + \bar{P}^{\mu\nu}P) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\bar{P}P \right],$$

A5.5 se transforma en

$$\nabla_\lambda J^\lambda = T_{\mu\nu\lambda} \Pi^{\mu\nu} J^\lambda.$$

Ya que

$$\hat{\nabla}_\lambda J^\lambda = \nabla_\lambda J^\lambda - T_{\mu\lambda}^\mu J^\lambda,$$

la conservación de la corriente J^λ se rompe de acuerdo con

$$\mathring{\nabla}_\lambda J^\lambda = (\Pi^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}) T_{\mu\nu\lambda} J^\lambda.$$

La propagación de la polarización también es anómala en presencia de torsión. De [A5.1](#)

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{2} \nabla_\lambda J^\lambda P_{\mu\nu} + k^\lambda \phi^2 \nabla_\lambda P_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \phi^2 k^\lambda \left\{ \left(2T_{\sigma\lambda\nu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}) \right) P^\sigma_\mu \right. \\ & + \left(2T_{\sigma\lambda\mu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}) \right) P^\sigma_\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\rho\sigma\lambda} P^{\rho\sigma} \\ & \left. - \frac{1}{4} (g_{\mu\nu} T^\sigma_{\sigma\lambda} - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})) P \right\}. \end{aligned}$$

De aquí,

$$\begin{aligned} k^\lambda \phi^2 \nabla_\lambda P_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2} \nabla_\lambda J^\lambda P_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \phi^2 k^\lambda \left\{ \left(2T_{\sigma\lambda\nu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}) \right) P^\sigma_\mu \right. \\ & + \left(2T_{\sigma\lambda\mu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}) \right) P^\sigma_\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\rho\sigma\lambda} P^{\rho\sigma} \\ & \left. - \frac{1}{4} (g_{\mu\nu} T^\sigma_{\sigma\lambda} - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})) P \right\} \end{aligned}$$

dividiendo por ϕ^2 :

$$\begin{aligned}
 k^\lambda \nabla_\lambda P_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2\phi^2} \nabla_\lambda J^\lambda P_{\mu\nu} - \frac{1}{2} k^\lambda \left\{ \left(2T_{\sigma\lambda\nu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}) \right) P_\mu^\sigma \right. \\
 &\quad + \left(2T_{\sigma\lambda\mu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}) \right) P_\nu^\sigma + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\rho\sigma\lambda} P^{\rho\sigma} \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4} (g_{\mu\nu} T_{\sigma\lambda}^\sigma - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})) P \right\}, \\
 &= -\frac{1}{2\phi^2} \Pi^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma\lambda} J^\lambda P_{\mu\nu} - \frac{1}{2} k^\lambda \left\{ \left(2T_{\sigma\lambda\nu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}) \right) P_\mu^\sigma \right. \\
 &\quad + \left(2T_{\sigma\lambda\mu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}) \right) P_\nu^\sigma + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\rho\sigma\lambda} P^{\rho\sigma} \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4} (g_{\mu\nu} T_{\sigma\lambda}^\sigma - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})) P \right\}, \\
 &= -\frac{1}{2} \Pi^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma\lambda} k^\lambda P_{\mu\nu} - \frac{1}{2} k^\lambda \left\{ \left(2T_{\sigma\lambda\nu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}) \right) P_\mu^\sigma \right. \\
 &\quad + \left(2T_{\sigma\lambda\mu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}) \right) P_\nu^\sigma + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\rho\sigma\lambda} P^{\rho\sigma} \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4} (g_{\mu\nu} T_{\sigma\lambda}^\sigma - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})) P \right\}, \\
 &= -\frac{1}{2} k^\lambda \left[\Pi^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma\lambda} P_{\mu\nu} + \left\{ \left(2T_{\sigma\lambda\nu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}) \right) P_\mu^\sigma \right. \right. \\
 &\quad + \left(2T_{\sigma\lambda\mu} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}) \right) P_\nu^\sigma + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\rho\sigma\lambda} P^{\rho\sigma} \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} (g_{\mu\nu} T_{\sigma\lambda}^\sigma - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})) P \right\} \right]. \tag{A5.6}
 \end{aligned}$$

Del postulado del vielbein, es posible demostrar que

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = e_a^\alpha \partial_\mu e_\nu^a + e_a^\alpha \hat{\omega}_{\nu\mu}^a + \kappa_{\nu\mu}^\alpha, \tag{A5.7}$$

con κ la 1-forma contorsión A3.6. En términos de la torsión, A5.7 es expresada como

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= e_a^\alpha \partial_\mu e_\nu^a + e_a^\alpha \hat{\omega}_{\nu\mu}^a + \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (T_{\nu\lambda\mu} - T_{\lambda\nu\mu} + T_{\mu\lambda\nu}), \\
 &= \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha + \frac{1}{2} (g^{\alpha\lambda} T_{\nu\lambda\mu} - g^{\alpha\lambda} T_{\lambda\nu\mu} + g^{\alpha\lambda} T_{\mu\lambda\nu}), \\
 &= \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha + \frac{1}{2} (T_{\nu\mu}^\alpha + T_{\mu\nu}^\alpha) + \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^\alpha.
 \end{aligned}$$

Note que los dos primeros términos de la conexión son simétricas y la tercera es antisimétrica en $\mu\nu$. Así, resulta conveniente definir

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha(+)} = \mathring{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} + \frac{1}{2} (T_{\nu\mu}^{\alpha} + T_{\mu\nu}^{\alpha}), \quad (\text{A5.8})$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha(-)} = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^{\alpha}, \quad (\text{A5.9})$$

donde A5.8 y A5.9 corresponden a la parte simétrica y antisimétrica de la conexión, respectivamente.

Volviendo a la derivada covariante de la polarización, observamos lo siguiente.

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda} P_{\mu\nu} &= \partial_{\lambda} P_{\mu\nu} - \left(\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha(+)} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha(-)} \right) P_{\alpha\nu} - \left(\Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha(+)} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha(-)} \right) P_{\mu\alpha}, \\ &= \partial_{\lambda} P_{\mu\nu} - \left(\mathring{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\alpha} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\mu}^{\alpha} + T_{\mu\lambda}^{\alpha}) + \frac{1}{2} T_{\lambda\mu}^{\alpha} \right) P_{\alpha\nu} \\ &\quad - \left(\mathring{\Gamma}_{\lambda\nu}^{\alpha} + \frac{1}{2} (T_{\lambda\nu}^{\alpha} + T_{\nu\lambda}^{\alpha}) + \frac{1}{2} T_{\lambda\nu}^{\alpha} \right) P_{\mu\alpha}, \\ &= \partial_{\lambda} P_{\mu\nu} - \mathring{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\alpha} P_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} (T_{\lambda\mu}^{\alpha} + T_{\mu\lambda}^{\alpha}) P_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} T_{\lambda\mu}^{\alpha} P_{\alpha\nu} \\ &\quad - \mathring{\Gamma}_{\lambda\nu}^{\alpha} P_{\mu\alpha} - \frac{1}{2} (T_{\lambda\nu}^{\alpha} + T_{\nu\lambda}^{\alpha}) P_{\mu\alpha} - \frac{1}{2} T_{\lambda\nu}^{\alpha} P_{\mu\alpha}, \\ &= \partial_{\lambda} P_{\mu\nu} - \mathring{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\alpha} P_{\alpha\nu} - \mathring{\Gamma}_{\lambda\nu}^{\alpha} P_{\mu\alpha} - \frac{1}{2} (T_{\lambda\alpha\mu} + T_{\mu\alpha\lambda}) P_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2} T_{\alpha\lambda\mu} P_{\nu}^{\alpha} \\ &\quad - \frac{1}{2} (T_{\lambda\alpha\nu} + T_{\nu\alpha\lambda}) P_{\mu}^{\alpha} - \frac{1}{2} T_{\alpha\lambda\nu} P_{\mu}^{\alpha}, \\ &= \mathring{\nabla}_{\lambda} P_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (T_{\lambda\alpha\nu} + T_{\nu\alpha\lambda} + T_{\alpha\lambda\nu}) P_{\mu}^{\alpha} - \frac{1}{2} (T_{\lambda\alpha\mu} + T_{\mu\alpha\lambda} + T_{\alpha\lambda\mu}) P_{\nu}^{\alpha}, \\ &= \mathring{\nabla}_{\lambda} P_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda} + T_{\sigma\lambda\nu}) P_{\mu}^{\sigma} - \frac{1}{2} (T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda} + T_{\sigma\lambda\mu}) P_{\nu}^{\sigma}. \end{aligned}$$

Reemplazando la última ecuación en A5.6

$$\begin{aligned}
 k^\lambda \overset{\circ}{\nabla}_\lambda P_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}k^\lambda \left[\Pi^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma\lambda} P_{\mu\nu} + \left\{ \left(2T_{\sigma\lambda\nu} + \frac{1}{2}(T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}) \right) P_\mu^\sigma \right. \right. \\
 &\quad + \left(2T_{\sigma\lambda\mu} + \frac{1}{2}(T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}) \right) P_\nu^\sigma + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\rho\sigma\lambda}P^{\rho\sigma} \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{4}(g_{\mu\nu}T_{\sigma\lambda}^\sigma - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})) P \right\} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2}k^\lambda (T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda} + T_{\sigma\lambda\nu}) P_\mu^\sigma \\
 &\quad + \frac{1}{2}k^\lambda (T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda} + T_{\sigma\lambda\mu}) P_\nu^\sigma, \\
 &= -\frac{1}{2}k^\lambda \left[\Pi^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma\lambda} P_{\mu\nu} + \left(T_{\sigma\lambda\nu} - \frac{1}{2}(T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}) \right) P_\mu^\sigma \right. \\
 &\quad + \left(T_{\sigma\lambda\mu} - \frac{1}{2}(T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}) \right) P_\nu^\sigma + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\rho\sigma\lambda}P^{\rho\sigma} \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4}(g_{\mu\nu}T_{\sigma\lambda}^\sigma - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})) P \right].
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 k^\lambda \overset{\circ}{\nabla}_\lambda P_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}k^\lambda \left[\Pi^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma\lambda} P_{\mu\nu} + \left(T_{\sigma\lambda\nu} - \frac{1}{2}(T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}) \right) P_\mu^\sigma \right. \\
 &\quad + \left(T_{\sigma\lambda\mu} - \frac{1}{2}(T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}) \right) P_\nu^\sigma + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\rho\sigma\lambda}P^{\rho\sigma} \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4}(g_{\mu\nu}T_{\sigma\lambda}^\sigma - (T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda})) P \right].
 \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] A. Einstein, Die Feldgleichungen der Gravitation (The field equations of gravitation), Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber. 47, 844-847 (1915).
- [2] Clifford M Will. Theory and experiment in gravitational physics. Cambridge University Press, 1993.
- [3] Mokhtar Hassaine and Jorge Zanelli. Chern-Simons (Super)gravity. World Scientific, 2016.
- [4] Bert Janssen-Relatividad General. Universidad de Granada.
- [5] Fernando Izaurieta. Notas de Clase de Gravitación y Geometría Diferencial. Universidad de Concepción.
- [6] Miguel Sánchez Caja and José Luis Flores Dorado. Introducción a la Geometría Diferencial de Variedades. Universidad de Granada, 2003
- [7] B. P. Abbott et al. [LIGO Scientific and Virgo Collaborations], “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”, Phys. Rev. Lett. **116**, no. 6, 061102 (2016) doi:10.1103/PhysRevLett.116.061102 [arXiv:1602.03837 [gr-qc]].
- [8] M. Maggiore, *Gravitational Waves*. Vol. 1: *Theory and Experiments*. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, 2007. <http://www.oup.com/uk/catalogue/?ci=9780198570745>.
- [9] Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. Gravitation (Freeman, 1973)
- [10] T.W.B. Kibble, J. Math. Phys. **2**, 212 (1961). <https://doi.org/10.1063/1.1703702>

- [11] F.W. Hehl, P. von der Heyde, G.D. Kerlick, J.M. Nester, *Rev. Mod. Phys.* **48**, 393 (1976). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.48.393>
- [12] J. Barrientos, F. Cordonier-Tello, F. Izaurieta, P. Medina, D. Narbona, E. Rodríguez, O. Valdivia, *Phys. Rev. D* **96**(8), 084023 (2017). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.084023>
- [13] Izaurieta, F., Rodríguez, E. & Valdivia, O. Linear and second-order geometry perturbations on spacetimes with torsion. *Eur. Phys. J. C* **79**, 337 (2019). <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6852-y>
- [14] D. Lovelock, *J. Math. Phys.* **12**, 498 (1971)
- [15] J. Barrientos, F. Izaurieta, E. Rodríguez, and O. Valdivia, “Wave Operators, Torsion, and Weitzenböck Identities” arXiv:1903.04712 [gr-qc].
- [16] Obukhov, Y.N.: Gravitational waves in Poincaré gauge gravity theory. *Phys. Rev. D* **95**(8), 084028 (2017). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.084028>. arXiv:1702.05185 [gr-qc]
- [17] Jiménez-Cano, A., Obukhov, Y.N.: Gravitational waves in metric-affine gravity theory. *Phys. Rev. D* **103**(2), 024018 (2021). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.024018>. arXiv:2010.14528 [gr-qc]
- [18] J. Barrientos, F. Cordonier-Tello, F. Izaurieta, P. Medina, D. Narbona, E. Rodríguez, and O. Valdivia, “Nonminimal couplings, gravitational waves, and torsion in Horndeski’s theory”, *Phys. Rev. D* **96** no. 8, (2017) 084023, arXiv:1703.09686 [gr-qc].
- [19] Bourguignon, J.-P.: The “magic” of Weitzenböck formulas, pp. 251–271. Birkhäuser Boston, Boston (1990). https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1080-9_17
- [20] **Supernova Search Team** Collaboration, A. G. Riess et al., “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant”, *Astron. J.* **116** (1998) 1009–1038, arXiv:astro-ph/9805201.
- [21] **Supernova Cosmology Project** Collaboration, S. Perlmutter et al., “Measurements of Ω and Λ from 42 high redshift supernovae”, *Astrophys. J.* **517** (1999) 565–586, arXiv:astro-ph/9812133.

- [22] **Supernova Search Team** Collaboration, J. L. Tonry et al., “Cosmological results from high- z supernovae”, *Astrophys. J.* **594** (2003) 1–24, arXiv:astro-ph/0305008.
- [23] **Supernova Cosmology Project** Collaboration, R. A. Knop et al., “New constraints on $\Omega(M)$, $\Omega(\lambda)$, and w from an independent set of eleven high-redshift supernovae observed with HST”, *Astrophys. J.* **598** (2003) 102, arXiv:astro-ph/0309368.
- [24] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White, “The Structure of cold dark matter halos”, *Astrophys. J.* **462** (1996) 563–575, arXiv:astro-ph/9508025.
- [25] V. C. Rubin, J. Ford, W. K., and N. Thonnard, “Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. IV. Systematic dynamical properties, *Sa - Sc.*”, **225** (Nov.,1978) L107–L111.
- [26] P. S. Drell, T. J. Loredo, and I. Wasserman, “Type ia supernovae, evolution, and the cosmological constant”, *The Astrophysical Journal* **530** no. 2, (Feb, 2000) 593–617. <https://doi.org/10.1086/308393>.
- [27] B. P. A. et al., “Gravitational waves and gamma-rays from a binary neutron star merger: GW170817 and GRB 170817a”, *The Astrophysical Journal* **848** no. 2, (Oct, 2017) L13. <https://doi.org/10.3847/2041-8213/2Faa920c>.
- [28] B. F. Schutz, “Determining the Hubble constant from gravitational wave observations”, *Nature* **323** no. 6086, (Sept., 1986) 310–311.
- [29] D. E. Holz and S. A. Hughes, “Using gravitational-wave standard sirens”, *Astrophys. J.* **629** (2005) 15–22, arXiv:astro-ph/0504616.
- [30] M. Volonteri, F. Haardt, and P. Madau, “The Assembly and Merging History of Supermassive Black Holes in Hierarchical Models of Galaxy Formation”, **582** no. 2, (Jan., 2003) 559–573, arXiv:astro-ph/0207276 [astro-ph].
- [31] P. Amaro-Seoane, H. Audley, S. Babak, J. Baker, E. Barausse, P. Bender, E. Berti, P. Binetruy, M. Born, D. Bortoluzzi, J. Camp, C. Caprini, V. Cardoso, M. Colpi, J. Conklin, N. Cornish, C. Cutler, K. Danzmann, R. Dolesi, L. Ferraioli, V. Ferroni, E. Fitzsimons, J. Gair, L. Gesa Bote, D. Giardini, F. Gibert, C. Grimani, H. Halloin, G. Heinzl, T. Hertog, M. Hewitson, K. Holley-Bockelmann, D. Hollington, M. Hueller, H. Inchauspe, P. Jetzer, N. Karnesis,

- C. Killow, A. Klein, B. Klipstein, N. Korsakova, S. L. Larson, J. Livas, I. Lloro, N. Man, D. Mance, J. Martino, I. Mateos, K. McKenzie, S. T. McWilliams, C. Miller, G. Mueller, G. Nardini, G. Nelemans, M. Nofrarias, A. Petiteau, P. Pivato, E. Plagnol, E. Porter, J. Reiche, D. Robertson, N. Robertson, E. Rossi, G. Russano, B. Schutz, A. Sesana, D. Shoemaker, J. Slutsky, C. F. Sopuerta, T. Sumner, N. Tamanini, I. Thorpe, M. Troebs, M. Vallisneri, A. Vecchio, D. Vetrugno, S. Vitale, M. Volonteri, G. Wanner, H. Ward, P. Wass, W. Weber, J. Ziemer, and P. Zweifel, “Laser Interferometer Space Antenna”, arXiv e-prints (Feb., 2017) arXiv:1702.00786, arXiv:1702.00786 [astro-ph.IM].
- [32] A. Tilquin and T. Schucker, “Torsion, an alternative to dark matter?”, *Gen. Rel. Grav.* **43** (2011) 2965–2978, arXiv:1104.0160 [astro-ph.CO].
- [33] S. Alexander, M. Cortês, A. R. Liddle, J. a. Magueijo, R. Sims, and L. Smolin, “The cosmology of minimal varying Lambda theories”, arXiv:1905.10382 [gr-qc].
- [34] J. Magueijo and T. Złośnik, “Parity violating Friedmann Universes,” *Phys. Rev. D* **100** no. 8, (2019) 084036, arXiv:1908.05184 [gr-qc].
- [35] W. Barker, A. Lasenby, M. Hobson, and W. Handley, “Addressing H0 tension with emergent dark radiation in unitary gravity,” arXiv:2003.02690 [gr-qc].
- [36] S. Alexander, L. Jenks, P. Jirouvsek, J. Magueijo, and T. Złośnik, “Gravity waves in parity-violating Copernican Universes,” arXiv:2001.06373 [gr-qc].
- [37] F. Izaurieta, S. Lepe, and O. Valdivia, “The Spin Tensor of Dark Matter and the Hubble Parameter Tension,” *Phys. Dark Univ.* **30** (2020) 100662, arXiv:2004.13163 [gr-qc].
- [38] G. B. Gelmini, “The Hunt for Dark Matter,” pp. 559–616. 2015. arXiv:1502.01320 [hep-ph].
- [39] G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk, “Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints,” *Phys. Rept.* **405** (2005) 279–390, arXiv:hep-ph/0404175.
- [40] B.-L. Young, “A survey of dark matter and related topics in cosmology,” *Frontiers of Physics* **12** no. 2, (Oct, 2016) 121201. <https://doi.org/10.1007/s11467-016-0583-4>.

-
- [41] P. Bull et al., “Beyond Λ CDM: Problems, solutions, and the road ahead,” *Phys. Dark Univ.* **12** (2016) 56–99, arXiv:1512.05356 [astro-ph.CO].
- [42] E. Elizalde, S. Nojiri, and S. D. Odintsov, “Late-time cosmology in (phantom) scalar-tensor theory: Dark energy and the cosmic speed-up,” *Phys. Rev. D* **70** (2004) 043539, arXiv:hep-th/0405034.
- [43] F. Briscese, E. Elizalde, S. Nojiri, and S. D. Odintsov, “Phantom scalar dark energy as modified gravity: Understanding the origin of the Big Rip singularity,” *Phys. Lett. B* **646** (2007) 105–111, arXiv:hep-th/0612220.
- [44] G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, and S. Zerbini, “Dark energy in modified Gauss-Bonnet gravity: Late-time acceleration and the hierarchy problem,” *Phys. Rev. D* **73** (2006) 084007, arXiv:hep-th/0601008.
- [45] G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, L. Sebastiani, and S. Zerbini, “A Class of viable modified $f(R)$ gravities describing inflation and the onset of accelerated expansion,” *Phys. Rev. D* **77** (2008) 046009, arXiv:0712.4017 [hep-th].
- [46] G. Cognola, E. Elizalde, S. D. Odintsov, P. Tretyakov, and S. Zerbini, “Initial and final de Sitter universes from modified $f(R)$ gravity,” *Phys. Rev. D* **79** (2009) 044001, arXiv:0810.4989 [gr-qc].
- [47] E. Elizalde and D. Saez-Gomez, “ $F(R)$ cosmology in presence of a phantom fluid and its scalar-tensor counterpart: Towards a unified precision model of the universe evolution,” *Phys. Rev. D* **80** (2009) 044030, arXiv:0903.2732 [hep-th].
- [48] A. De Felice and S. Tsujikawa, “ $f(R)$ theories,” *Living Rev. Rel.* **13** (2010) 3, arXiv:1002.4928 [gr-qc].
- [49] E. Elizalde, R. Myrzakulov, V. V. Obukhov, and D. Saez-Gomez, “ Λ CDM epoch reconstruction from $F(R,G)$ and modified Gauss-Bonnet gravities,” *Class. Quant. Grav.* **27** (2010) 095007, arXiv:1001.3636 [gr-qc].
- [50] G. J. Olmo, “Palatini Approach to Modified Gravity: $f(R)$ Theories and Beyond,” *Int. J. Mod. Phys. D* **20** (2011) 413–462, arXiv:1101.3864 [gr-qc].
- [51] S. Capozziello and M. De Laurentis, “Extended Theories of Gravity,” *Phys. Rept.* **509** (2011) 167–321, arXiv:1108.6266 [gr-qc].

- [52] S. Nojiri, S. Odintsov, and V. Oikonomou, “Modified Gravity Theories on a Nutshell: Inflation, Bounce and Late-time Evolution,” *Phys. Rept.* **692** (2017) 1–104, arXiv:1705.11098 [gr-qc].
- [53] J. Beltran Jimenez, L. Heisenberg, G. J. Olmo, and D. Rubiera-Garcia, “Born–Infeld inspired modifications of gravity,” *Phys. Rept.* **727** (2018) 1–129, arXiv:1704.03351 [gr-qc].
- [54] L. Heisenberg, “A systematic approach to generalisations of General Relativity and their cosmological implications,” *Phys. Rept.* **796** (2019) 1–113, arXiv:1807.01725 [gr-qc].
- [55] J. Barrientos, F. Cordonier-Tello, C. Corral, F. Izaurieta, P. Medina, E. Rodríguez, and O. Valdivia, “Luminal Propagation of Gravitational Waves in Scalar-tensor Theories: The Case for Torsion,” *Phys. Rev. D* **100** no. 12, (2019) 124039, arXiv:1910.00148 [gr-qc].
- [56] A. Trautman, “Einstein-Cartan theory,” arXiv:gr-qc/0606062.
- [57] F. W. Hehl, Y. N. Obukhov, and D. Puetzfeld, “On Poincaré gauge theory of gravity, its equations of motion, and Gravity Probe B,” *Phys. Lett. A* **377** (2013) 1775–1781, arXiv:1304.2769 [gr-qc].
- [58] M. Blagojević and F. W. Hehl, eds., *Gauge Theories of Gravitation*. World Scientific, Singapore, 2013. <http://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/p781>.
- [59] H. Arcos and J. Pereira, “Torsion gravity: A Reappraisal,” *Int. J. Mod. Phys. D* **13** (2004) 2193–2240, arXiv:gr-qc/0501017.
- [60] N. J. Poplawski, “Nonsingular, big-bounce cosmology from spinor-torsion coupling,” *Phys. Rev. D* **85** (2012) 107502, arXiv:1111.4595 [gr-qc].
- [61] G. Unger and N. Poplawski, “Big bounce and closed universe from spin and torsion,” *Astrophys. J.* **870** no. 2, (2019) 78, arXiv:1808.08327 [gr-qc].
- [62] D. Kranas, C. G. Tsagas, J. D. Barrow, and D. Iosifidis, “Friedmann-like universes with torsion,” *Eur. Phys. J. C* **79** no. 4, (2019) 341, arXiv:1809.10064 [gr-qc].
- [63] N. J. Poplawski, “Cosmology with torsion: An alternative to cosmic inflation,”

- Phys. Lett. B **694** (2010) 181–185, arXiv:1007.0587 [astro-ph.CO]. [Erratum: Phys.Lett.B 701, 672–672 (2011)].
- [64] A. Ivanov and M. Wellenzohn, “Einstein–cartan Gravity with Torsion Field Serving as an Origin for the Cosmological Constant or Dark Energy Density,” *Astrophys. J.* **829** no. 1, (2016) 47, arXiv:1607.01128 [gr-qc].
- [65] O. Razina, Y. Myrzakulov, N. Serikbayev, G. Nugmanova, and R. Myrzakulov, “Einstein-Cartan gravity with scalar-fermion interactions,” *Central Eur. J. Phys.* **10** (2012) 47–50, arXiv:1012.5690 [astro-ph.CO].
- [66] D. Palle, “On the Einstein-Cartan cosmology vs. Planck data,” *J. Exp. Theor. Phys.* **118** (2014) 587–592, arXiv:1405.3435 [physics.gen-ph].
- [67] N. J. Poplawski, “Thermal fluctuations in Einstein-Cartan-Sciama-Kibble-Dirac bouncing cosmology,” arXiv:1201.0316 [astro-ph.CO].
- [68] D. Z. Freedman and A. V. Proeyen, *Supergravity*. Cambridge University Press, 1 ed., 5, 2012.
- [69] D. Puetzfeld and Y. N. Obukhov, “Prospects of detecting spacetime torsion,” *Int. J. Mod. Phys. D* **23** no. 12, (2014) 1442004, arXiv:1405.4137 [gr-qc].
- [70] S. M. Carroll and G. B. Field, “Consequences of propagating torsion in connection dynamic theories of gravity,” *Phys. Rev. D* **50** (1994) 3867–3873, arXiv:gr-qc/9403058.
- [71] J. Boos and F. W. Hehl, “Gravity-induced four-fermion contact interaction implies gravitational intermediate W and Z type gauge bosons,” *Int. J. Theor. Phys.* **56** no. 3, (2017) 751–756, arXiv:1606.09273 [gr-qc].
- [72] J. Barrientos, F. Izaurieta, E. Rodríguez, and O. Valdivia, “Wave Operators, Torsion, and Weitzenböck Identities,” arXiv:1903.04712 [gr-qc].
- [73] J. Barrientos, F. Cordonier-Tello, F. Izaurieta, P. Medina, D. Narbona, E. Rodríguez, and O. Valdivia, “Nonminimal couplings, gravitational waves, and torsion in Horndeski’s theory,” *Phys. Rev.* **D96** no. 8, (2017) 084023, arXiv:1703.09686 [gr-qc].
- [74] F. Izaurieta, E. Rodríguez, and O. Valdivia, “Linear and Second-order Geometry Perturbations on Spacetimes with Torsion,” *Eur. Phys. J. C* **79** no. 4, (2019) 337, arXiv:1901.06400 [gr-qc].

- [75] F. W. Hehl, “Four Lectures on Poincaré Gauge Field Theory,” in *Cosmology and Gravitation: Spin, Torsion, Rotation, and Supergravity*, P. G. Bergmann and V. De Sabbata, eds., pp. 5–62. Plenum Press, New York, 1980. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on *Cosmology and Gravitation: Spin, Torsion, Rotation, and Supergravity*, held at the Ettore Majorana International Center for Scientific Culture, Erice, Italy, May 6–8, 1979.
- [76] J. A. de Azcarraga and J. M. Izquierdo, *Lie groups, Lie algebras, cohomology and some applications in physics*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. CUP, 1995.
- [77] N. J. Poplawski, “Spacetime torsion as a possible remedy to major problems in gravity and cosmology,” *Astron. Rev.* **8** (2013) 108, arXiv:1106.4859 [gr-qc].
- [78] E. Battista and V. De Falco, “First post-Newtonian generation of gravitational waves in Einstein-Cartan theory,” *Phys. Rev. D* **104** no. 8, (2021) 084067, arXiv:2109.01384 [gr-qc].
- [79] S. H. Pereira, R. d. C. Lima, J. F. Jesus, and R. F. L. Holanda, “Acceleration in Friedmann cosmology with torsion,” *Eur. Phys. J. C* **79** no. 11, (2019) 950, arXiv:1906.07624 [gr-qc].
- [80] S. H. Pereira, A. M. Vicente, J. F. Jesus, and R. F. L. Holanda, “Dark matter from torsion in Friedmann cosmology,” arXiv:2202.01807 [gr-qc].
- [81] T. M. Guimarães, R. d. C. Lima, and S. H. Pereira, “Cosmological inflation driven by a scalar torsion function,” *Eur. Phys. J. C* **81** no. 4, (2021) 271, arXiv:2011.13906 [gr-qc].
- [82] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific, Virgo, Fermi GBM, INTEGRAL, IceCube, AstroSat Cadmium ZincTelluride Imager Team, IPN, Insight-Hxmt, ANTARES, Swift, AGILE Team, 1M2H Team, Dark Energy Camera GW-EM, DES, DLT40, GRAWITA, Fermi-LAT, ATCA, ASKAP, Las Cumbres Observatory Group, OzGrav, DWF (Deeper Wider Faster Program), AST3, CAASTRO, VINROUGE, MASTER, J-GEM, GROWTH, JAGWAR, CaltechNRAO, TTU-NRAO, NuSTAR, PanSTARRS, MAXI Team, TZAC Consortium, KU, Nordic Optical Telescope, ePESSTO, GROND, Texas Tech University, SALT Group, TOROS, BOOTES, MWA, CALET, IKI-GW Follow-up, H.E.S.S., LOFAR, LWA, HAWC, Pierre Auger, ALMA, Euro

- VLBI Team, Pi of Sky, Chandra Team at McGill University, DFN, ATLAS Telescopes, High Time Resolution Universe Survey, RIMAS, RATIR, SKA South Africa/MeerKAT), *Astrophys. J.* **848**, L12 (2017), arXiv:1710.05833 [astroph.HE].
- [83] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific, Virgo, FermiGBM, INTEGRAL), *Astrophys. J.* **848**, L13 (2017), arXiv:1710.05834 [astro-ph.HE].
- [84] Y. N. Obukhov and V. A. Korotkii, “The Weyssenhoff fluid in Einstein-Cartan theory,” *Class. Quant. Grav.* **4** (1987), 1633-1657 doi:10.1088/0264-9381/4/6/021