



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
MAGÍSTER EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN FÍSICA

---

# Cuerdas negras homogéneas en Lovelock-Horndeski en $D$ dimensiones

Tesis para optar al grado de  
Magíster en Ciencias con mención en Física

por

Sebastián Julio Fuenzalida Garrido

---

Director de Tesis : Dr. Julio Oliva Zapata

Comisión : Dr. Adolfo Cisterna Roa  
Dr. Guillermo Rubilar Alegria

CONCEPCIÓN • CHILE  
Diciembre de 2018

*Corta una flor en la Tierra, y moverás la estrella más lejana.*

PAUL A.M. DIRAC (1902-1984)

# Tabla de contenido

|                                                                    |           |
|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| Índice de figuras                                                  | v         |
| Agradecimientos                                                    | vi        |
| Resumen                                                            | vii       |
| Abstract                                                           | viii      |
| <b>1. Introducción</b>                                             | <b>1</b>  |
| <b>2. Geometría diferencial y teoría general de la relatividad</b> | <b>5</b>  |
| 2.1. Geometría diferencial . . . . .                               | 5         |
| 2.1.1. Métrica . . . . .                                           | 5         |
| 2.1.2. Conexión y derivada covariante . . . . .                    | 6         |
| 2.1.3. Curvatura y torsión . . . . .                               | 8         |
| 2.1.4. Geodésicas afines y pre-geodésicas afines . . . . .         | 12        |
| 2.1.5. Geometría riemanniana . . . . .                             | 13        |
| 2.2. Teoría general de la relatividad . . . . .                    | 15        |
| 2.2.1. Masa inercial y masa gravitacional . . . . .                | 15        |
| 2.2.2. Principio de equivalencia débil . . . . .                   | 16        |
| 2.2.3. Principio de equivalencia fuerte . . . . .                  | 17        |
| 2.2.4. Ecuaciones de campo de Einstein . . . . .                   | 22        |
| <b>3. Teoría de Lanczos-Lovelock</b>                               | <b>27</b> |
| 3.1. Teoría de Lanczos-Lovelock . . . . .                          | 27        |
| 3.1.1. Ecuaciones de campo de Lanczos-Lovelock . . . . .           | 29        |
| 3.1.2. Recobrando la teoría general de la relatividad . . . . .    | 32        |
| <b>4. Teoría de Lovelock-Horndeski</b>                             | <b>34</b> |
| 4.1. Teorías tenso-escalares . . . . .                             | 34        |
| 4.1.1. Teoría de Horndeski . . . . .                               | 36        |
| 4.1.2. Teoría de Horndeski extendida . . . . .                     | 37        |

|                                                                                                     |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.1.3. Teoría de Lovelock-Horndeski . . . . .                                                       | 39         |
| <b>5. Agujeros negros y objetos negros extendidos</b>                                               | <b>42</b>  |
| 5.1. Agujeros negros en 4 dimensiones . . . . .                                                     | 42         |
| 5.1.1. Solución de Schwarzschild . . . . .                                                          | 45         |
| 5.1.2. Agujero negro de Schwarzschild . . . . .                                                     | 49         |
| 5.2. Agujeros negros en altas dimensiones y objetos negros extendidos . . .                         | 54         |
| 5.2.1. Agujero negro de Schwarzschild-Tangherlini . . . . .                                         | 55         |
| 5.2.2. Cuerdas negras y $p$ -branas negras . . . . .                                                | 56         |
| 5.3. Breve introducción a la termodinámica de agujeros negros . . . . .                             | 61         |
| 5.3.1. Las cuatro leyes de la termodinámica de agujeros negros . . . .                              | 62         |
| 5.3.2. Entropía de Wald . . . . .                                                                   | 63         |
| <b>6. Cuerdas negras homogéneas en Lovelock-Horndeski</b>                                           | <b>65</b>  |
| 6.1. Cuerdas negras homogéneas en la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet . .                            | 65         |
| 6.1.1. Cuerdas negras homogéneas en la teoría de Einstein-Gauss-<br>Bonnet en $D = 5 + 1$ . . . . . | 68         |
| 6.1.2. Cuerdas negras homogéneas en la teoría de Einstein-Gauss-<br>Bonnet en $D = 6 + 1$ . . . . . | 71         |
| 6.2. Cuerdas negras homogéneas en la teoría de Lanczos-Lovelock . . . . .                           | 73         |
| 6.3. Soluciones extras . . . . .                                                                    | 78         |
| <b>7. Conclusiones</b>                                                                              | <b>80</b>  |
| <b>A. Variaciones con respecto al tensor métrico</b>                                                | <b>82</b>  |
| <b>B. Delta de Kronecker generalizada</b>                                                           | <b>84</b>  |
| <b>C. Cálculo de ecuaciones de campo</b>                                                            | <b>86</b>  |
| <b>D. Teoremas de unicidad</b>                                                                      | <b>111</b> |
| <b>E. Descomposición tensorial</b>                                                                  | <b>113</b> |
| <b>F. Propiedades térmicas en Lovelock-Horndeski</b>                                                | <b>124</b> |
| <b>Bibliografía</b>                                                                                 | <b>128</b> |

# Índice de figuras

|      |                                                                                                                                                  |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1. | Transporte paralelo del vector $V^\mu$ por la trayectoria $PSR$ y por la trayectoria $PQR$ . . . . .                                             | 9  |
| 2.2. | Diferencia $\delta x_1^\mu$ entre los puntos $P$ y $Q$ y diferencia $\delta x_2^\mu$ entre los puntos $P$ y $S$ . . . . .                        | 10 |
| 2.3. | Trasporte paralelo de los vectores $\delta x_1^\mu$ y $\delta x_2^\mu$ hasta los puntos $Q$ y $S$ , respectivamente. . . . .                     | 11 |
| 2.4. | Equivalencia entre un SR en caída libre y un SRI en ausencia de gravedad. . . . .                                                                | 18 |
| 2.5. | Equivalencia entre gravedad y aceleración. . . . .                                                                                               | 19 |
| 5.1. | Equilibrio hidrostático entre la presión del fluido (flechas rojas) y la presión debida a la interacción gravitacional (flechas azules). . . . . | 43 |
| 5.2. | Curvas radiales nulas en coordenadas de curvatura. . . . .                                                                                       | 51 |
| 5.3. | Curvas radiales nulas en coordenadas de Eddington-Finkelstein. . . . .                                                                           | 53 |
| 6.1. | Comportamiento de la función métrica (6.19) (izquierda) y de la función métrica (6.21) (derecha) en el caso $\gamma = 1$ . . . . .               | 69 |
| 6.2. | Comportamiento de la función métrica (6.27) (izquierda) y de la función métrica (6.29) (derecha) en el caso $\gamma = 1$ . . . . .               | 72 |

# Agradecimientos

Primero que todo, quiero agradecer a todos mis familiares que me apoyaron en este largo camino de formación universitaria. En especial, quiero agradecer y dedicar esta tesis a mi padre, quien se mantiene vivo en mis recuerdos.

Quiero agradecer también a todos mis amigos que he conocido a lo largo de mi vida, y además durante mi paso por la universidad. También, agradezco a los exiliados del sexto piso, por el grato ambiente de estudio y por las incontables partidas de Catan que jugamos.

Deseo expresar mis agradecimientos a todos los profesores de la Universidad de Concepción con los que tuve la oportunidad de tomar distintas asignaturas. En particular, agradezco al Dr. Guillermo Rubilar de la Universidad de Concepción, quien me instruyó a lo largo de varias asignaturas, y además me introdujo en el mundo de las artes relativistas.

Finalmente, quiero expresar mi gratitud hacia mi director de tesis, Dr. Julio Oliva de la Universidad de Concepción, ya que el desarrollo de esta tesis no hubiese sido posible sin la ayuda de él. Además, quiero agradecer su infinita paciencia para enseñar y por permitirme ser su estudiante para trabajar codo a codo con él.

# Resumen

En esta tesis presentamos nuevas soluciones analíticas que describen cuerdas negras homogéneas en las teorías de Einstein-Gauss-Bonnet y Lovelock. Estas soluciones existen debido a la introducción de campos escalares con densidad de energía finita, los cuales tienen una dependencia lineal en las direcciones extendidas. Además, para asegurar la existencia de dichas soluciones los términos cinéticos de los campos escalares son construidos a partir de los tensores de Lovelock, es decir, consideramos acoplamientos no-minimales. Luego, debido a que los tensores de Lovelock tienen divergencia nula se tiene que la teoría completa es de segundo orden.

Una vez preparado el escenario para asegurar la existencia de soluciones de cuerda negra homogénea, construimos tales soluciones en la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet, las cuales son obtenidas a partir de un polinomio de Wheeler. En seguida, estudiamos las propiedades térmicas de estas soluciones, es decir, la temperatura, la densidad de masa y la densidad de entropía.

Posteriormente, generalizamos los resultados obtenidos anteriormente a un escenario que considere teorías de Lovelock con potencias arbitrarias en la curvatura. Así, obtenemos un polinomio de Wheeler con constantes de acoplamiento efectivas, en donde las soluciones de este polinomio caracterizan las soluciones de cuerda negra homogénea, y además obtenemos las propiedades térmicas de estas soluciones, es decir, la temperatura, la densidad de masa y la densidad de entropía.

Finalmente, para valores especiales de las constantes de acoplamiento de la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet, construimos dos soluciones extras, las cuales corresponden a extensiones cilíndricas de una solución de agujero de gusano y una solución de agujero negro rotante.

# Abstract

In this thesis we present new analytical solutions that describe homogenous black strings in Einstein-Gauss-Bonnet and Lovelock theories. These solutions exist due to the introduction of scalar fields with finite energy density, which have a linear dependence on the extended directions. In addition, to ensure the existence of such solutions the kinetic terms of the scalar fields are constructed from the Lovelock tensors i.e. we consider non-minimal couplings. Then, because the Lovelock tensors have zero divergence, the whole theory is second order.

Once the scenario is prepared to ensure the existence of homogeneous black strings solutions, we construct such solutions in the Einstein-Gauss-Bonnet theory, which are obtained from a Wheeler polynomial. Later, we study thermal properties of these solutions i.e. temperature, mass density and entropy density.

Later, we generalize the results obtained previously to a scenario that considers Lovelock theories with arbitrary powers in the curvature. Thus, we obtain a Wheeler polynomial with effective coupling constants, where the solutions of this polynomial characterize homogeneous black strings solutions, and we also obtain the thermal properties of these solutions i.e. temperature, mass density and entropy density.

Finally, for special values of the coupling constants of the Einstein-Gauss-Bonnet theory, we construct two extra solutions, which correspond to a cylindrical extensions of wormhole solution and rotating black hole solution.



# Capítulo 1

## Introducción

Las teorías gravitacionales en altas dimensiones poseen una amplia gama de soluciones de agujeros negros en comparación con la relatividad general estándar en 4 dimensiones (RG) [1,2]. De hecho, las soluciones de agujeros negros en RG están restringidas por teoremas de unicidad [3–5], los cuales aseguran que cualquier solución de este tipo está contenida en la familia de agujeros negros de Kerr-Newman [6, 7]. Además, debido a restricciones topológicas se tiene que los agujeros negros pertenecientes a dicha familia solo pueden tener horizontes de eventos con topología esférica [8]. De esta forma, las soluciones de agujero negro en RG están restringidas no solo cuantitativamente sino también cualitativamente, lo cual establece que si tenemos una estrella que colapsa a un agujero negro, entonces éste solo puede estar caracterizado por un pequeño conjunto de parámetros [9]. Por otra parte, se sabe que las teorías gravitacionales en altas dimensiones admiten soluciones con horizontes que pueden tener una topología más general que la  $(d - 2)$ -esfera [1, 2]. Dentro de esta amplia gama de soluciones se encuentra la cuerda negra, la cual es una solución con un horizonte de eventos extendido. Esta solución constituye el contraejemplo más simple de una solución con topología no esférica [3–5] debido a su coexistencia con el agujero negro de Schwarzschild-Tangherlini [10]. De esta forma, el estudio de la solución de cuerda negra ha permitido la construcción de otras soluciones con horizontes con topología no esférica más sofisticadas, dentro de las cuales se encuentra la solución de anillo negro [11] y otras soluciones de objetos negros [2], demostrando así la debilidad de las restricciones topológicas en altas dimensiones [8]. Al mismo tiempo, se ha mostrado que las cuerdas negras son afectadas por la inestabilidad de Gregory-Laflamme (GL) [12, 13], la cual es una inestabilidad perturbativa de longitud de onda larga que se genera por un modo de oscilación que viaja a lo largo de la dirección extendida del horizonte. En particular, se ha mostrado a través de simulaciones numéricas que la inestabilidad de una cuerda negra 5-dimensional da origen a singularidades desnudas [14, 15], lo cual muestra que la censura cósmica es violada en altas dimensiones [16].

Si consideramos RG en el vacío en  $d$  dimensiones, entonces es simple construir una solución de cuerda negra, en particular una solución de cuerda negra homogénea. En efecto, esta solución es obtenida simplemente ‘oxidando’ la solución de agujero

negro de Schwarzschild, es decir, agregando una coordenada plana a dicha solución. Esto es posible debido a que las ecuaciones de campo a lo largo de la brana son compatibles con las ecuaciones de campo a lo largo de las direcciones extendidas, ya que las cantidades que involucran la curvatura se anulan a lo largo de dichas direcciones. No obstante, es simple encontrar escenarios en donde no es posible la construcción de la solución de cuerda negra homogénea. De hecho, si consideramos RG en el vacío con constante cosmológica en  $d$  dimensiones, entonces se arruina la construcción de tal solución, debido a que las ecuaciones de campo a lo largo de la brana ya no son compatibles con las ecuaciones de campo a lo largo de las direcciones extendidas. Esto nos muestra que no es simple la oxidación de la solución de agujero negro de Schwarzschild-AdS.

Sin embargo, en [17] se mostró que si consideramos RG con una constante cosmológica negativa acoplada minimalmente a campos escalares sin masa, los cuales tienen una dependencia lineal en las direcciones extendidas, entonces sí es posible construir una solución de cuerda negra homogénea<sup>1</sup>. Esto es debido a que las ecuaciones de campo a lo largo de la brana sí son compatibles con las ecuaciones de campo a lo largo de las direcciones extendidas cuando se incluyen tales campos escalares. De esta manera, se puede concluir que sí es posible oxidar la solución de agujero negro de Schwarzschild-AdS sin que existan incompatibilidades entre las ecuaciones de campo.

De esta manera surge una pregunta natural: ¿Es posible construir una solución de cuerda negra homogénea en teorías gravitacionales que sean más generales que RG, es decir, teorías con potencias altas en la curvatura? En esta tesis veremos que la respuesta a esta pregunta es afirmativa. De hecho, veremos que esta construcción es posible tanto en la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet como en teorías de Lovelock generales [18] con valores arbitrarios de las constantes de acoplamiento.

Para poder construir una solución de cuerda negra homogénea en escenarios que consideren teorías con potencias altas en la curvatura, tenemos que aplicar un procedimiento análogo al descrito en el caso de RG con constante cosmológica negativa acoplada minimalmente a campos escalares sin masa. De hecho, tenemos que usar los mismos campos escalares sin masa con una dependencia lineal en las direcciones extendidas. No obstante, para que las ecuaciones de campo a lo largo de la brana sean compatibles con las ecuaciones de campo a lo largo de las direcciones extendidas se tienen que considerar acoplamientos no-minimales de los campos escalares con los términos dependientes de potencias altas en la curvatura. Estos acoplamientos no-minimales surgen de manera natural en la teoría de Horndeski [19], es decir, la teoría tenso-escalar más general en 4 dimensiones con ecuaciones de campo de segundo orden. Esta teoría fue formulada en 1974 y actualmente ha sido retomada debido a la reciente formulación de las teorías de Galileones [20–22]. El lagrangiano de Horndeski contiene términos que consideran acoplamientos no-minimales, los cuales son de la forma

---

<sup>1</sup>De hecho fue posible construir una solución de  $p$ -brana homogénea, la cual es una solución más general que la cuerda negra homogénea.

$$\mathcal{L} \sim G_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi, \quad (1.1)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein. Además, el término dado en (1.1) ha sido ampliamente usado en cosmología [23–27], y además en el estudio de objetos compactos, tales como agujeros negros y estrellas de neutrones [28–35].

El objetivo principal de esta tesis es encontrar y analizar distintas propiedades de una solución de cuerda negra homogénea en escenarios que consideren teorías de Lovelock generales con acoplamientos no-minimales con campos escalares, los cuales tienen una dependencia lineal en las direcciones extendidas. Para lograr este objetivo se estudiarán generalizaciones a dimensiones mayores del término (1.1), lo cual asegurará la compatibilidad de las ecuaciones de campo a lo largo de la brana con las ecuaciones de campo a lo largo de las direcciones extendidas.

A lo largo de los capítulos 2, 3, 4 y 5 se desarrollará el marco teórico de esta tesis. En el capítulo 2 se estudiarán los conceptos más importantes de la geometría diferencial y posteriormente se estudiará la construcción de la RG. En el capítulo 3 se estudiará la teoría de Lanczos-Lovelock y luego veremos cómo esta teoría se puede reducir a la RG. En el capítulo 4 se estudiarán las teorías tenso-escalares haciendo énfasis en la teoría de Horndeski. Después, veremos cómo esta teoría puede ser generalizada a una dimensión arbitraria, de forma tal que contenga a la teoría de Lanczos-Lovelock. Para finalizar el marco teórico, en el capítulo 5 se revisarán las principales propiedades de la solución de agujero negro de Schwarzschild. Luego, se estudiarán agujeros negros en altas dimensiones y objetos negros extendidos, en donde estudiaremos las soluciones de cuerda negra homogénea y  $p$ -brana homogénea en RG. Seguidamente, se realizará una breve revisión de la termodinámica de agujeros negros.

En el capítulo 6 se mostrarán los resultados originales de esta tesis. En primer lugar, se construirán soluciones de cuerda negra homogénea en la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet acoplada a dos campos escalares, en donde el primer campo escalar está acoplado minimalmente debido a la presencia de la constante cosmológica y el segundo campo escalar está acoplado no-minimalmente debido a la presencia del término de Gauss-Bonnet. Luego, una vez encontradas estas soluciones se estudiarán las propiedades térmicas de éstas. A continuación, se extenderán las soluciones de cuerdas negras homogéneas encontradas previamente a un escenario que considere teorías de Lovelock acopladas no-minimalmente a campos escalares. Sorprendentemente, se mostrará que hay un patrón que permite construir cuerdas negras homogéneas en tales teorías, lo que conduce a un polinomio de Wheeler con constantes de acoplamiento efectivas. Luego, se extenderán las propiedades térmicas encontradas en el caso de la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet acoplada a dos campos escalares a un escenario que considere teorías de Lovelock acopladas no-minimalmente a campos escalares. Posteriormente, utilizando el mismo método para la construcción de cuerdas negras homogéneas en teorías de Lovelock acopladas no-minimalmente a campos escalares, se construirán dos soluciones extras en la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet, las cuales corresponden a extensiones cilíndricas de una solución de agujero de gusano y una

solución de agujero negro rotante.

Para finalizar, en el capítulo 7 se mostrarán las conclusiones, comentarios y trabajos futuros.

A lo largo de los capítulos 2, 3 y 4 se utilizará el sistema internacional de unidades. Sin embargo, a lo largo de los capítulos 5 y 6 se utilizarán las unidades de Planck, es decir, unidades en donde la rapidez de la luz  $c$ , la constante reducida de Planck  $\hbar$ , la constante de gravitación universal  $G$  y la constante de Boltzmann  $k_B$  son iguales a la unidad ( $c = \hbar = G = k_B = 1$ ). Además, a lo largo del capítulo 6 se utilizará unidades en donde  $\kappa = c^4/16\pi G = 1$ . Finalmente, a lo largo de toda la tesis se utilizará la signatura  $(-, +, \dots, +)$ .

## Capítulo 2

# Geometría diferencial y teoría general de la relatividad

En este capítulo vamos a estudiar la teoría general de la relatividad. Antes de abordar esta teoría vamos a realizar una revisión de los conceptos más importantes de la geometría diferencial. Habiendo ya discutido estos conceptos, vamos a revisar los principios sobre los que se sustenta la teoría general de la relatividad. Finalmente, una vez revisados los principios de la teoría general de la relatividad, vamos a discutir sobre la construcción de esta teoría. Para una discusión más detallada de estos temas se recomienda revisar las referencias [36–41].

### 2.1. Geometría diferencial

#### 2.1.1. Métrica

Sean  $x^\mu$  y  $x^\mu + \delta x^\mu$  las coordenadas de dos puntos infinitesimalmente cercanos respecto a un SC  $x$ , los cuales pertenecen a una variedad  $\mathcal{M}$ . Llamemos a estos puntos  $P$  y  $Q$ , respectivamente. La distancia  $ds$  entre  $P$  y  $Q$  es dada por

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

donde (2.1) es un escalar denominado *elemento de línea*.

Los coeficientes  $g_{\mu\nu}$  de (2.1) son por definición las componentes de un tensor covariante tipo  $(0, 2)$  simétrico y es denominado *tensor métrico* o, simplemente, *métrica*. Con las consideraciones anteriores podemos asegurar que (2.1) es un escalar. También vamos a considerar que la métrica es no degenerada, es decir,  $g := \det(g_{\mu\nu}) \neq 0$ . Así, en virtud de (2.1) podemos definir la métrica como objeto geométrico que permite introducir el concepto de distancia en una variedad.

Por otra parte, debido a que estamos considerando una métrica no degenerada, tenemos que existe la inversa de la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Esta corresponde a un tensor con-

travariante tipo  $(2,0)$  cuyas componentes son  $g^{\mu\nu}$ , y además este tensor cumple la propiedad:

$$g^{\mu\alpha}(x)g_{\alpha\nu}(x) = \delta_{\nu}^{\mu}. \quad (2.2)$$

Cabe mencionar que la métrica permite establecer un isomorfismo entre el espacio tangente  $T_n(P)$  en un punto  $P$  de una variedad  $\mathcal{M}$  y el espacio cotangente  $T_n^*(P)$  en el mismo punto  $P^1$ . Dicho de otra manera, esto corresponde a la operación de ‘subir’ y ‘bajar’ índices en un vector o en un tensor<sup>2</sup>.

### 2.1.2. Conexión y derivada covariante

Sean  $x^\mu$  las coordenadas de un punto  $P$  y  $x^\mu + \delta x^\mu$  las coordenadas de un punto  $Q$ , ambos pertenecientes a una variedad diferenciable  $\mathcal{M}$  e infinitesimalmente próximos. Además, consideremos un vector covariante  $V_\nu$  definido en ambos puntos.

Se sabe que la derivada parcial  $\partial_\mu V_\nu$  no trasforma como un tensor tipo  $(0,2)$  bajo TGC’s<sup>3</sup>. En general, la derivada parcial de un tensor arbitrario tipo  $(r,s)$ <sup>4</sup> no trasforma como un tensor tipo  $(r,s+1)$  bajo TGC’s.

Esta noción de derivación sobre la variedad implica una resta de vectores o tensores, los cuales están definidos en puntos diferentes de la variedad (aún estando próximos entre si). Por ejemplo, si consideramos la derivada parcial de  $V_\nu$  en la dirección  $x^\mu$  se obtiene

$$\partial_\mu V_\nu(x) = \lim_{\delta x^\mu \rightarrow 0} \frac{V_\nu(Q) - V_\nu(P)}{\delta x^\mu}, \quad (2.3)$$

donde en (2.3) vemos claramente que estamos restando el vector  $V_\nu$  en puntos distintos de la variedad. Para solucionar este problema tenemos que hacer uso de un objeto matemático, la *conexión*<sup>5</sup>. Este objeto nos permitirá trasportar vectores paralelamente en la variedad desde un punto hasta otro punto de la misma.

Consideremos entonces el vector  $V_\nu$  definido en los puntos  $P$  y  $Q$ . Para poder derivar el vector  $V_\nu$ , el cual está evaluado en estos dos puntos, tenemos que definir el vector

---

<sup>1</sup>El espacio tangente  $T_n(P)$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$  formado por el conjunto de vectores contravariantes definidos en el punto  $P$  de la variedad. Por otro lado, el espacio cotangente  $T_n^*(P)$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$  formado por el conjunto de vectores covariantes definidos en el punto  $P$  de la variedad.

<sup>2</sup>Los tensores pertenecen a un espacio mucho más complejo, el cual es formado por el producto tensorial  $\otimes$  de los espacios tangente y cotangentes.

<sup>3</sup>Transformaciones generales de coordenadas.

<sup>4</sup> $\partial_\mu T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s}$ .

<sup>5</sup>En la literatura también conocida como *conexión afín*.

$$V_\nu^T(Q) := V_\nu(P) + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \delta x^\mu V_\lambda(P), \quad (2.4)$$

donde (2.4) es el vector resultante de transportar paralelamente el vector  $V_\nu$  en el punto  $P$  hasta el punto  $Q$  y  $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$  son las componentes de la conexión.

Habiendo definido el vector transportado (2.4) podemos introducir una derivada  $\nabla_\mu$ , la cual resta vectores que están definidos en un mismo punto y está definida en términos de un vector transportado paralelamente. En particular, la derivada  $\nabla_\mu V_\nu$  es definida en términos del vector (2.4), es decir,

$$\nabla_\mu A_\nu := \lim_{\delta x^\mu \rightarrow 0} \frac{V_\nu(Q) - V_\nu^T(Q)}{\delta x^\mu}, \quad (2.5)$$

donde de (2.5) vemos que se están restando dos vectores pertenecientes al mismo punto de la variedad.

Así, de (2.3), (2.4) y (2.5) vemos que

$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} V_\lambda, \quad (2.6)$$

donde  $\nabla_\mu V_\nu$  es la derivada covariante de  $V_\nu$  y esta transforma como un tensor tipo  $(0, 2)$  bajo TGC's.

Siguiendo un procedimiento análogo para obtener (2.6), tenemos que la derivada covariante de un vector contravariante  $V^\nu$  es dada por

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} V^\lambda, \quad (2.7)$$

donde para obtener (2.7) hemos definido el vector transportado

$$V_T^\nu(Q) := V^\nu(P) - \Gamma^\nu_{\lambda\mu} \delta x^\lambda V^\mu(P). \quad (2.8)$$

Los resultados obtenidos en (2.6) y (2.7) pueden ser generalizados fácilmente a un tensor tipo  $(r, s)$ , obteniéndose

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s} &= \partial_\mu T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s} \\ &+ \Gamma^{\mu_1}_{\lambda\mu} T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s} + \dots + \Gamma^{\mu_r}_{\lambda\mu} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \lambda}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s} \\ &- \Gamma^\lambda_{\nu_1 \mu} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_s} - \dots - \Gamma^\lambda_{\nu_s \mu} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \lambda}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Debido a que (2.9) transforma como un tensor tipo  $(r, s + 1)$  bajo TGC's, podemos concluir fácilmente que la conexión *no es un tensor*, ya que está no transforma como tal bajo TGC's. Esto motiva a definir la conexión  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  como un arreglo de  $n^3$  cantidades definidas en cada punto de la variedad y que sus componentes cambian bajo TGC's de acuerdo a la siguiente ley de transformación:

$$\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} \Gamma^\rho_{\alpha\beta} + \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^\nu}. \quad (2.10)$$

Cabe mencionar que la derivada covariante de un vector  $A^\mu$  no solo se puede calcular en la dirección de las coordenadas  $x^\mu$ , también se puede calcular en la dirección de un campo vectorial  $V = V^\nu \partial_\nu$ . Así, la derivada covariante de  $A^\mu$  a lo largo de  $V = V^\nu \partial_\nu$  es dada por

$$\nabla_V A^\mu = V^\nu \nabla_\nu A^\mu. \quad (2.11)$$

### 2.1.3. Curvatura y torsión

Sean  $x^\mu$  las coordenadas de un punto  $P$  y  $x^\mu + \delta x^\mu$  las coordenadas de un punto  $R$ , ambos pertenecientes a una variedad diferenciable  $\mathcal{M}$  e infinitesimalmente próximos.

Por otro lado, supongamos que tenemos una curva de parámetro  $\lambda_1$  parametrizada de la forma  $x^\mu = x^\mu(\lambda_1)$  y una curva de parámetro  $\lambda_2$  parametrizada de la forma  $x^\mu = x^\mu(\lambda_2)$ . Ambas curvas comienzan en el punto  $P$  y terminan en el punto  $R$ .

Si fijamos una conexión  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ , entonces al transportar paralelamente un tensor arbitrario de tipo  $(r, s)$  a lo largo de las dos curvas mencionadas anteriormente, se tiene que dicho transporte puede o no depender de la curva por la cual se efectúe. Matemáticamente esto se traduce en que el conmutador de dos derivadas covariantes es distinto de cero, o dicho de otra manera, las segundas derivadas covariantes de un tensor arbitrario no conmutan.

Así, si aplicamos el conmutador de dos derivadas covariantes a un tensor arbitrario de tipo  $(r, s)$  se obtiene

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s} &= R^{\mu_1}_{\mu\nu\lambda} T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s} + \dots + R^{\mu_r}_{\mu\nu\lambda} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \lambda}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s} \\ &\quad - R^\lambda_{\mu\nu\nu_1} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_s} - \dots - R^\lambda_{\mu\nu\nu_s} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \lambda} \\ &\quad - T^\lambda_{\mu\nu} \nabla_\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

En (2.12) hemos introducido el *tensor de curvatura de Riemann*, el cual es un tensor tipo  $(1, 3)$  definido como

$$R^\rho_{\mu\nu\lambda} := \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^\rho_{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} - \Gamma^\rho_{\alpha\lambda} \Gamma^\alpha_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$



donde el tensor<sup>6</sup> (2.13) contiene toda la información sobre la curvatura de la variedad.

Por otro lado, tenemos que (2.13) mide de forma local, es decir, en una región infinitesimal, la magnitud de la dependencia del transporte paralelo (inducido por una cierta conexión) de tensores con la trayectoria.

Por ejemplo, consideremos un paralelogramo infinitesimal  $PQRS$ , donde las coordenadas de sus vértices son  $x^\mu$ ,  $x^\mu + \delta x_1^\mu$ ,  $x^\mu + \delta x_1^\mu + \delta x_2^\mu$  y  $x^\mu + \delta x_2^\mu$ , respectivamente. Además, consideremos un vector contravariante  $V^\mu$  definido en el punto  $P$ . Adicionalmente, supongamos que la curva de parámetro  $\lambda_1$  corresponde a  $PSR$  y la curva de parámetro  $\lambda_2$  corresponde a  $PQR$ . Lo anteriormente mencionado puede ser visto en la figura (2.1).

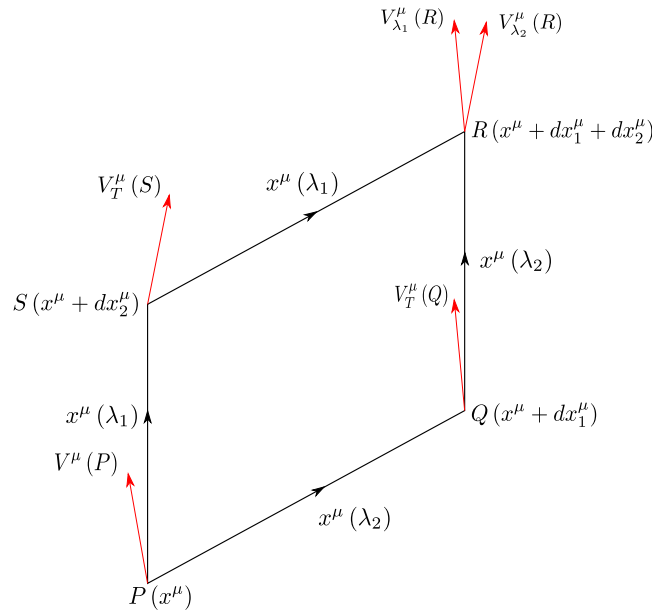


Figura 2.1: Transporte paralelo del vector  $V^\mu$  por la trayectoria  $PSR$  y por la trayectoria  $PQR$ . Fuente: Adaptada a partir de la figura original disponible en [36].

Si transportamos paralelamente el vector  $V^\mu$  a lo largo de la curva  $\lambda_1$  se obtiene un vector  $V_{\lambda_1}^\mu$ , el cual es proporcional a la conexión. Además, si transportamos el mismo vector, pero a lo largo de la curva  $\lambda_2$  se obtiene el vector  $V_{\lambda_2}^\mu$ , el cual también es proporcional a la conexión. En efecto, estos vectores son dados por

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1}^\mu(R) = & V^\mu - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\nu \delta x_2^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\nu \delta x_1^\lambda + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu V^\alpha \delta x_2^\beta \delta x_1^\lambda \\ & - (\partial_\alpha \Gamma_{\nu\lambda}^\mu) V^\nu \delta x_2^\alpha \delta x_1^\lambda, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2}^\mu(R) = & V^\mu - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\nu \delta x_1^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\nu \delta x_2^\lambda + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu V^\alpha \delta x_1^\beta \delta x_2^\lambda \\ & - (\partial_\alpha \Gamma_{\nu\lambda}^\mu) V^\nu \delta x_1^\alpha \delta x_2^\lambda. \end{aligned} \quad (2.15)$$

<sup>6</sup>Cabe mencionar que por construcción este tensor posee la anti-simetría  $R^{\rho}_{\mu\nu\lambda} = -R^{\rho}_{\mu\lambda\nu}$ .

Si restamos (2.14) con (2.15) se obtiene

$$\left( V_{\lambda_1}^\mu - V_{\lambda_2}^\mu \right) (R) = R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} (x) V^\nu (x) \delta x_1^\lambda \delta x_2^\rho. \quad (2.16)$$

Así, de (2.16) vemos claramente que el transporte paralelo en una región infinitesimal de una variedad con curvatura no nula, depende de la trayectoria por la cual se realice dicho transporte.

Por otro lado, si  $R^\rho{}_{\mu\nu\lambda} = 0$ , entonces se dice que la variedad es *plana* o *sin curvatura*. Esto implica que en un espacio plano, el transporte paralelo de cualquier vector o tensor es independiente de la trayectoria.

Volviendo al resultado obtenido en (2.12), vemos que también hemos introducido el *tensor de torsión*, el cual es un tensor tipo (1,2) definido como

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} := \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}, \quad (2.17)$$

donde el tensor<sup>7</sup> (2.17) representa la parte antisimétrica de la conexión en los índices inferiores.

Ahora, consideremos un punto  $P$  en la variedad cuyas coordenadas son  $x^\mu$ . Además, consideremos dos puntos  $Q$  y  $S$  de la variedad cuyas coordenadas son tales que la diferencia entre las coordenadas  $P$  y  $Q$  es  $\delta x_1^\mu$  y la diferencia entre las coordenadas de  $P$  y  $S$  es  $\delta x_2^\mu$ . Además, tenemos que  $\delta x_1^\mu$  y  $\delta x_2^\mu$  son dos vectores definidos en  $P$ . Todo esto se puede ver en la figura (2.2).

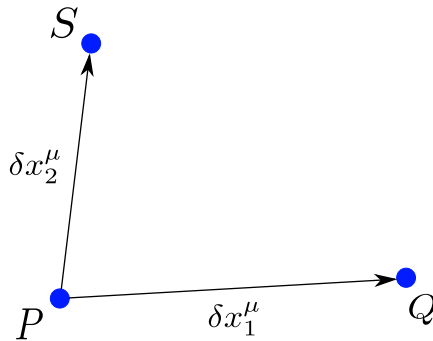


Figura 2.2: Diferencia  $\delta x_1^\mu$  entre los puntos  $P$  y  $Q$  y diferencia  $\delta x_2^\mu$  entre los puntos  $P$  y  $S$ . Fuente: Adaptada a partir de la figura original disponible en [36].

<sup>7</sup>Cabe mencionar que por construcción este tensor posee la anti-simetría  $T^\lambda{}_{\mu\nu} = -T^\lambda{}_{\nu\mu}$ .

Si transportamos paralelamente los vectores  $\delta x_1^\mu$  y  $\delta x_2^\mu$  hasta los puntos  $Q$  y  $S$ , respectivamente, entonces se obtienen los vectores  $\overline{\delta x_2^\mu}(Q)$  y  $\overline{\delta x_1^\mu}(S)$ , los cuales son dados por

$$\overline{\delta x_2^\mu}(Q) = \delta x_2^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \delta x_2^\nu \delta x_1^\lambda, \quad (2.18)$$

$$\overline{\delta x_1^\mu}(S) = \delta x_1^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \delta x_1^\nu \delta x_2^\lambda. \quad (2.19)$$

Los resultados obtenidos en (2.18) y (2.19) se pueden ver en la figura (2.3).

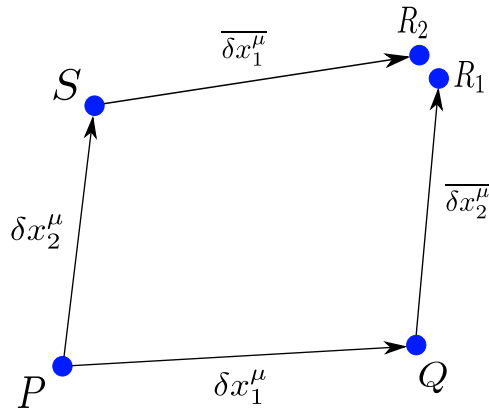


Figura 2.3: Transporte paralelo de los vectores  $\delta x_1^\mu$  y  $\delta x_2^\mu$  hasta los puntos  $Q$  y  $S$ , respectivamente. *Fuente: Adaptada a partir de la figura original disponible en [36].*

A partir de los vectores (2.18) y (2.19) podemos definir nuevos puntos  $R_1$  y  $R_2$ , cuyas coordenadas son

$$x^\mu(R_1) := x^\mu(Q) + \overline{\delta x_2^\mu}(Q), \quad (2.20)$$

$$x^\mu(R_2) := x^\mu(S) + \overline{\delta x_1^\mu}(S). \quad (2.21)$$

Ahora, restando (2.21) con (2.20) se obtiene

$$x^\mu(R_2) - x^\mu(R_1) = -T^\mu_{\nu\lambda} \delta x_1^\nu \delta x_2^\lambda. \quad (2.22)$$

Así, de (2.22) vemos que si la torsión es no nula, entonces los puntos  $R_1$  y  $R_2$  no coinciden, es decir, el ‘paralelogramo’ infinitesimal formado por los puntos  $P$ ,  $Q$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $S$  no se cierra. Debido a esto se dice que la torsión describe la falla en el cierre de ‘paralelogramos’ infinitesimales.

Volviendo a la definición (2.17) vemos que si la torsión se anula, entonces la conexión es simétrica con respecto a sus índices inferiores, es decir,  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ . En este caso decimos que tenemos una conexión con torsión nula, la cual es denotada como

$$\mathring{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}.$$

Por otro lado, a partir del tensor de curvatura de Riemann (2.13) puede definirse el *tensor de Ricci*  $R_{\mu\nu}$ , el cual es dado por

$$R_{\mu\nu} := R^\rho_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\rho} + \Gamma^\rho_{\alpha\rho} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha_{\mu\rho}. \quad (2.23)$$

Finalmente, a partir del tensor de Ricci (2.23) y la métrica inversa  $g^{\mu\nu}$  podemos definir el *escalar de curvatura*  $R$ , el cual es dado por

$$R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} (\partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\rho} + \Gamma^\rho_{\alpha\rho} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha_{\mu\rho}). \quad (2.24)$$

#### 2.1.4. Geodésicas afines y pre-geodésicas afines

Sea  $u^\mu(\lambda) = dx^\mu/d\lambda$  un vector tangente a la curva parametrizada de la forma  $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ . Si al transportar paralelamente el vector tangente  $u^\mu(\lambda)$  a lo largo de la curva  $x^\mu(\lambda)$  este se mantiene para todo punto de la curva paralelo a esta, entonces la derivada covariante de  $u^\mu(\lambda)$  a lo largo de la dirección  $u^\mu(\lambda)$  se anula. En otras palabras, de (2.11) obtenemos que

$$u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0. \quad (2.25)$$

Si se cumple (2.25), entonces la curva  $x^\mu = x^\mu(\lambda)$  es una *geodésica afín*, es decir, la geodésica afín es una propiedad que depende de la parametrización elegida para la curva y no de la trayectoria por la cual se realiza el transporte paralelo.

Desarrollando (2.25) obtenemos la *ecuación de la geodésica afín*, la cual es dada por

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\lambda} = 0. \quad (2.26)$$

Consideramos ahora el vector  $u^\mu(\lambda) = dx^\mu/d\lambda$  y la curva  $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ . Si al trasportar paralelamente el vector  $u^\mu(\lambda)$  a lo largo de la curva  $x^\mu = x^\mu(\lambda)$  se obtiene

$$u^\nu \nabla_\nu u^\mu = f(\lambda) u^\mu, \quad (2.27)$$

entonces la curva  $x^\mu = x^\mu(\lambda)$  es una *pre-geodésica afín*.

Desarrollando (2.27) obtenemos la *ecuación de la pre-geodésica afín*, la cual es dada por

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\lambda} = f(\lambda) \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (2.28)$$

Por lo tanto, si escogemos un parámetro<sup>8</sup> de forma tal que  $f(\lambda) = 0$ , entonces la ecuación (2.28) se reduce a la ecuación (2.26).

### 2.1.5. Geometría riemanniana

Hasta el momento hemos introducido la métrica  $g_{\mu\nu}$  y la conexión  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  como dos objetos independientes, es decir, las propiedades métricas (compás) son independientes de las propiedades afines (regla). Sin embargo, si consideramos una geometría riemanniana<sup>9</sup> o, en otras palabras, una *variedad pseudoriemanniana* dotada de una métrica, entonces las propiedades afines son dependientes de las propiedades métricas, es decir, la conexión depende de la métrica.

Debido a que tenemos una variedad pseudoriemanniana dotada de una métrica  $g_{\mu\nu}$  se tiene que existe una única conexión, la cual es compatible con la métrica. Esta conexión es denominada *conexión de Levi-Civita* y esta coincide con los *símbolos de Christoffel*. Así, tenemos que la conexión es dada por

$$\overset{\circ}{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} \equiv \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (2.29)$$

Por otro lado, debido a que estamos considerando una conexión compatible con la métrica, es decir, una conexión dada por los símbolos de Christoffel se tiene que se cumple *hipótesis de compatibilidad métrica*:

$$\overset{\circ}{\nabla}_\lambda g_{\mu\nu} \equiv 0. \quad (2.30)$$

Volviendo a la conexión (2.29), vemos que esta es simétrica en sus dos índices inferiores. Esta simetría implica que la torsión (2.17) se anula, es decir, la conexión dada en (2.29) es libre de torsión<sup>10</sup>. Además, debido a la simetría de la conexión (2.29) se tiene que el tensor de Riemann (2.13) libre de torsión posee las siguientes (anti-)simetrías:

$$\overset{\circ}{R}_{\mu\nu\lambda\rho} = -\overset{\circ}{R}_{\nu\mu\lambda\rho}, \quad \overset{\circ}{R}_{\mu\nu\lambda\rho} = -\overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\lambda}, \quad \overset{\circ}{R}_{\mu\nu\lambda\rho} = \overset{\circ}{R}_{\lambda\rho\mu\nu}. \quad (2.31)$$

Además, el tensor de Riemann (2.13) libre de torsión satisface las identidades:

<sup>8</sup>Este parámetro es denominado *parámetro afín*.

<sup>9</sup>La geometría riemanniana es una generalización de la geometría gaussiana a espacios de dimensiones arbitrarias.

<sup>10</sup>Por esa razón, la conexión y todas las cantidades libres de torsión son denotadas con el símbolo  $\overset{\circ}{}$ .

$$\mathring{R}_{\mu[\nu\lambda\rho]} \equiv 0 \iff \mathring{R}_{\mu\nu\lambda\rho} + \mathring{R}_{\mu\lambda\rho\nu} + \mathring{R}_{\mu\rho\nu\lambda} \equiv 0, \quad (2.32)$$

$$\mathring{\nabla}_{[\mu} \mathring{R}_{\nu\lambda]\rho\sigma} \equiv 0 \iff \mathring{\nabla}_{\mu} \mathring{R}_{\nu\lambda\rho\sigma} + \mathring{\nabla}_{\nu} \mathring{R}_{\lambda\mu\rho\sigma} + \mathring{\nabla}_{\lambda} \mathring{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv 0. \quad (2.33)$$

Por otro lado, el tensor de Ricci (2.23) libre de torsión posee la simetría:

$$\mathring{R}_{\mu\nu} = \mathring{R}_{\nu\mu}. \quad (2.34)$$

A partir del tensor de Ricci  $\mathring{R}_{\mu\nu}$ , de la métrica  $g_{\mu\nu}$  y el escalar de curvatura  $\mathring{R}$ , definimos el *tensor de Einstein*, el cual es dado por

$$G_{\mu\nu} := \mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{R}, \quad (2.35)$$

donde (2.35) por construcción es simétrico en sus dos índices covariantes. Además, las formas explícitas del tensor de curvatura de Riemann  $\mathring{R}^{\rho}_{\mu\lambda\nu}$ , del tensor de Ricci  $\mathring{R}_{\mu\nu}$  y del escalar de curvatura  $\mathring{R}$  en términos de los símbolos de Christoffel son dadas por

$$\mathring{R}^{\rho}_{\mu\lambda\nu} := \partial_{\lambda}\mathring{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\mathring{\Gamma}^{\rho}_{\mu\lambda} + \mathring{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\lambda}\mathring{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} - \mathring{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\nu}\mathring{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\lambda}, \quad (2.36)$$

$$\mathring{R}_{\mu\nu} := \partial_{\rho}\mathring{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\mathring{\Gamma}^{\rho}_{\mu\rho} + \mathring{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\rho}\mathring{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} - \mathring{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\nu}\mathring{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\rho}, \quad (2.37)$$

$$\mathring{R} := g^{\mu\nu} \left( \partial_{\rho}\mathring{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\mathring{\Gamma}^{\rho}_{\mu\rho} + \mathring{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\rho}\mathring{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} - \mathring{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\nu}\mathring{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\rho} \right), \quad (2.38)$$

respectivamente.

A partir de las identidades (2.30) y (2.33) es directo demostrar que el tensor (2.35) es covariantemente constante, es decir,

$$\mathring{\nabla}_{\mu} G^{\mu\nu} \equiv 0. \quad (2.39)$$

Finalmente, si consideramos un geometría riemanniana, entonces la ecuación de la geodésica afín (2.26) coincide con la usual *ecuación de la geodésica*, la cual es dada por

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{dl^2} + \mathring{\Gamma}^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{dx^{\nu}}{dl} \frac{dx^{\lambda}}{dl} = 0, \quad (2.40)$$

donde para obtener la ecuación (2.40) hemos elegido el parámetro afín  $\lambda = \alpha l + \beta$ . Si no se eligiese este parámetro, entonces la ecuación de la geodésica es dada por

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \mathring{\Gamma}^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \frac{dx^{\lambda}}{d\lambda} = f(\lambda) \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}. \quad (2.41)$$

## 2.2. Teoría general de la relatividad

### 2.2.1. Masa inercial y masa gravitacional

En el contexto newtoniano la masa de un cuerpo es una cantidad fundamental para describir su dinámica. Dependiendo de la situación en la que se esté analizando esta dinámica, se puede hacer una distinción entre dos tipos de masas (las cuales caracterizan la dinámica de dicho cuerpo): la *masa inercial*  $m_i$  y la *masa gravitacional*  $m_g$ .

Se define la masa inercial  $m_i$  del cuerpo como una cantidad que mide la resistencia de éste a cambiar su estado de movimiento, es decir, esta masa regula la respuesta del cuerpo a una fuerza aplicada sobre éste. Esta masa está determinada por la Segunda Ley de Newton, es decir,

$$\sum \vec{F} = m_i \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}. \quad (2.42)$$

En este sentido la masa inercial caracteriza la dinámica del cuerpo en la situación en la que la interacción gravitacional *no* juega un rol en la descripción de dicha dinámica. En otras palabras, la masa inercial puede ser determinada a partir de experimentos *no-gravitacionales*.

Por otro lado, se define la masa gravitacional  $m_g$  del cuerpo como una cantidad que mide la magnitud de la fuerza gravitacional que éste experimenta al estar en una región con campo gravitacional  $\vec{g}$ , es decir, esta masa regula la respuesta del cuerpo cuando éste está sometido a un campo gravitacional. Esta masa está determinada a partir de (2.42), pero en el caso en que sobre el cuerpo actúa solo la fuerza gravitacional  $\vec{F}_g$ , así

$$\vec{F}_g = m_g \vec{g}. \quad (2.43)$$

En este sentido la masa gravitacional caracteriza la dinámica del cuerpo en la situación en la que *solo* la interacción gravitacional juega un rol en la descripción de dicha dinámica. En otras palabras, la masa gravitacional puede ser determinada a partir de experimentos *gravitacionales*.

Concentrándonos en este último caso, de la ecuación (2.42) y (2.43) se puede ver que

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \left( \frac{m_g}{m_i} \right) \vec{g}, \quad (2.44)$$

donde (2.44) determina la aceleración del cuerpo, el cual está sometido a un campo gravitacional  $\vec{g}$ .

### 2.2.2. Principio de equivalencia débil

A partir de la ecuación (2.44) se podría concluir que si tenemos un campo gravitacional  $\vec{g}$ , entonces distintos cuerpos (pequeños y macroscópicos) en presencia de este campo podrían adquirir diferentes aceleraciones, es decir, que estos cuerpos posean distintos valores de la relación  $m_g/m_i$ , una para cada cuerpo. Sin embargo, como veremos a continuación, esto *parece no ser así*.

De acuerdo a todas las observaciones realizadas hasta hoy [40], si tenemos distintos cuerpos sometidos a un campo gravitacional  $\vec{g}$ , entonces estos adquieren la misma aceleración en este campo gravitacional, es decir, aceleran en la misma dirección y con la misma magnitud. De acuerdo a la ecuación (2.44) esto se traduce en que todos los cuerpos poseen el mismo valor de la relación  $m_g/m_i$ .

Debido a que todos los cuerpos parecen poseer la misma relación  $m_g/m_i$ , es útil elegir unidades de  $m_g$  en donde se cumpla la igualdad

$$m_i = m_g. \quad (2.45)$$

Luego, de (2.44) y (2.45) obtenemos que

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{g}. \quad (2.46)$$

Tenemos que la igualdad (2.45) se asume como un postulado y este es denominado: *universalidad de la interacción gravitacional*. Si asumimos que este postulado es siempre válido, entonces las trayectorias de los cuerpos sometidos únicamente a un campo gravitacional  $\vec{g}$  solo dependen de este campo. Dicho de otra forma, las trayectorias de los cuerpos solo dependen de sus posiciones iniciales, de sus velocidades iniciales y no dependen de los cuerpos en sí, tal como se puede ver en la ecuación (2.46). En otras palabras, las trayectorias de los cuerpos sometidos únicamente a un campo gravitacional no dependen de su masa, carga, temperatura, color, etc.

Que las trayectorias de los cuerpos sometidos a un campo gravitacional sean independientes de sus propiedades es una consecuencia del postulado (2.45) y este postulado es denominado *Principio de Equivalencia Débil* (PED).

El PED fue considerado por Isaac Newton como un ingrediente crucial en la construcción de la teoría de la mecánica y de la gravitación de Newton. Mucho tiempo después, en 1907, Albert Einstein utilizó una generalización del PED como un elemento crucial en la construcción de la teoría general de la relatividad, el principio de equivalencia fuerte (PEF). Debido a esto, hay un continuo interés en verificar el PED experimentalmente u observacionalmente, y mejorar la precisión con la que se verifica.



### 2.2.3. Principio de equivalencia fuerte

En 2.2.2 vimos que si asumimos que el PED es siempre válido, entonces las trayectorias de los cuerpos (pequeños y macroscópicos) sometidos únicamente a un campo gravitacional  $\vec{g}$  solo dependen de este campo y no de los cuerpos en sí. En otras palabras, la ecuación de movimiento de un cuerpo sometido únicamente a un campo gravitacional respecto a un SRI  $K$  es dada por (2.46), es decir,

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{g}, \quad (2.47)$$

donde (2.47) determina la aceleración del cuerpo con respecto al SRI  $K$ .

La ecuación de movimiento (2.47) solo es válida si consideramos una pequeña región del espacio y un pequeño intervalo de tiempo, de forma que el campo gravitacional  $\vec{g}$  se pueda aproximar como homogéneo e independiente del tiempo en tal región y en tal intervalo de tiempo, respectivamente<sup>11</sup>. Luego, si resolvemos la ecuación de movimiento (2.47) obtenemos la solución

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2, \quad (2.48)$$

donde la solución (2.48) describe una trayectoria parabólica del cuerpo con respecto al SRI  $K$ .

Por otro lado, si consideremos un SR  $K'$  que acelera con respecto al SRI  $K$  con aceleración constante  $\vec{a}$ , en donde la transformación de coordenadas de  $K$  a  $K'$  es dada por<sup>12</sup>

$$t' = t, \quad \vec{x}' = \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{a} t^2, \quad (2.49)$$

entonces usando (2.47) y (2.49) obtenemos que la aceleración del cuerpo con respecto a  $K'$  es dada por

$$\frac{d^2\vec{x}'}{dt^2} = \vec{g} - \vec{a}. \quad (2.50)$$

Además, usando (2.48) y (2.49) obtenemos que la trayectoria del cuerpo con respecto a  $K'$  es dada por

$$\vec{x}'(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} (\vec{g} - \vec{a}) t^2. \quad (2.51)$$

---

<sup>11</sup>Esto es equivalente a decir que las fuerzas de marea, es decir, el efecto debido a la inhomogeneidad de un campo gravitacional es despreciable.

<sup>12</sup>Esta transformación también es válida de  $K'$  a  $K$ , es decir, la transformación es invertible.

Ahora, si consideramos que el SR  $K'$  acelera con respecto al SRI  $K$  con aceleración constante  $\vec{a} = \vec{g}$ , es decir, si consideramos que el SR  $K'$  está en caída libre con respecto al SRI  $K$ , entonces de (2.51) vemos que la trayectoria del cuerpo con respecto a  $K'$  es dada por

$$\vec{x}'(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t. \quad (2.52)$$

Luego, la ecuación (2.52) nos dice que la trayectoria del cuerpo con respecto al SR en caída libre  $K'$  es una trayectoria rectilínea con velocidad constante  $\vec{v}_0$ .

Por otra parte, si consideramos que el SRI  $K$  está en una región sin campo gravitacional, es decir, si consideramos  $\vec{g} = 0$ , entonces de (2.48) vemos que la trayectoria del cuerpo con respecto a  $K$  es dada por

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t. \quad (2.53)$$

Así, de (2.52) y (2.53) se puede concluir que las trayectorias de los cuerpos con respecto a un SR en caída libre son exactamente iguales a la trayectorias de los cuerpos con respecto a un SRI en donde no hay campo gravitacional, tal como se puede ver en la figura (2.4).

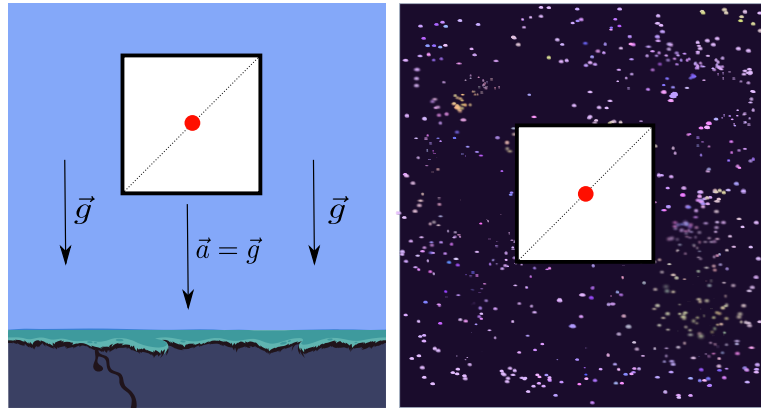


Figura 2.4: Equivalencia entre un SR en caída libre y un SRI en ausencia de gravedad. Fuente: Adaptada a partir de la figura original disponible en [36]. Suelo disponible aquí y cielo nocturno disponible aquí.

En otras palabras, bajo las consideraciones de localidad asumidas al principio de esta subsección<sup>13</sup>, un SR en caída libre es *equivalente* a un SRI en donde no hay campo gravitacional.

<sup>13</sup>Es decir, considerando una pequeña región del espacio y un pequeño intervalo de tiempo.

Por otro lado, si consideramos que el SR  $K'$  está en reposo con respecto al SRI  $K$ , es decir, si consideramos  $\vec{a} = 0$ , entonces de (2.51) vemos que la trayectoria del cuerpo con respecto a  $K'$  es dada por

$$\vec{x}'(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2. \quad (2.54)$$

Luego, la ecuación (2.54) nos dice que la trayectoria del cuerpo con respecto al SR en reposo  $K'$  es una trayectoria parabólica.

Por otra parte, si consideramos que el SRI  $K$  está en una región con  $\vec{g} = 0$ , pero éste acelera con respecto al SR  $K'$  con aceleración constante  $\vec{a} = -\vec{g}$ , entonces usando la transformación (2.49) obtenemos que la trayectoria del cuerpo con respecto a  $K$  es dada por

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2. \quad (2.55)$$

Así, de (2.54) y (2.55) se puede concluir que las trayectorias de los cuerpos con respecto a un SR en reposo, pero sometido a un campo gravitacional  $\vec{g}$ , son exactamente iguales a las trayectorias de los cuerpos con respecto a un SR que no está sometido a un campo gravitacional, pero que acelera con una aceleración  $\vec{a} = -\vec{g}$ , tal como se puede ver en la figura (2.5).

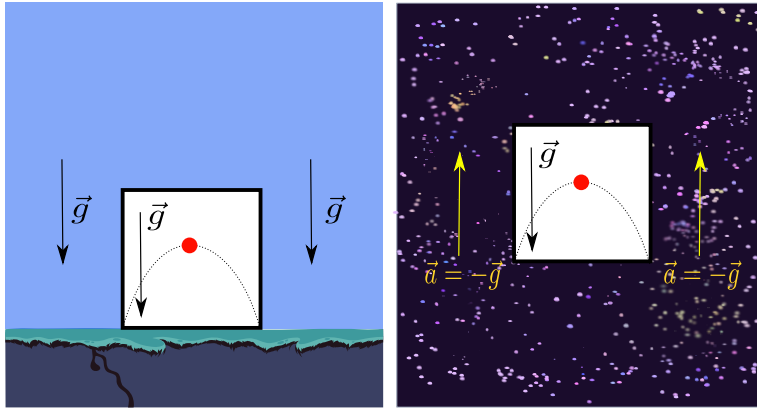


Figura 2.5: Equivalencia entre gravedad y aceleración. *Fuente: Adaptada a partir de la figura original disponible en [36]. Suelo disponible aquí y cielo nocturno disponible aquí.*

En otras palabras, bajo las consideraciones de localidad asumidas al principio de esta subsección, un SR sometido a un campo gravitacional es *equivalente* a un SR acelerado.

De la discusión hecha anteriormente, se tiene que si suponemos la validez del PED, entonces en una pequeña región del espacio y en un pequeño intervalo de tiempo, los

SR's en caída libre son equivalentes a los usuales SRI's, es decir, SR's en ausencia de gravedad. En otras palabras, las trayectorias de todo cuerpo (pequeño y macroscópico) con respecto a SR's en caída libre son iguales a las trayectorias de dichos cuerpos con respecto a SRI's. De esta forma, podemos concluir que los fenómenos mecánicos descritos con respecto a SR's en caída libre son equivalentes si se describen estos mismos con respecto a SRI's, es decir, los SR's en caída libre juegan el mismo rol físico que los SRI's.

No obstante, cuando Albert Einstein desarrolló la teoría general de la relatividad, él supuso que para todo tipo de fenómeno físico (no solo mecánico) los SR's en caída libre son equivalentes a los SRI's. Además, debido a la extensión finita de los SR's en caída libre que hemos considerado, éstos reciben el nombre de *sistemas de referencia localmente inerciales* (SRLI's). El supuesto de Albert Einstein fue denominado como *principio de equivalencia fuerte* (PEF) o *principio de equivalencia de Einstein* (PEE), nombre que fue acuñado por Robert Dicke en 1964 [42].

Por otro lado, sabemos que los SRI's juegan un rol fundamental en la mecánica de Newton, la teoría especial de la relatividad y en modelo estandar de la física de partículas, y además estos SRI's poseen extensión infinita. Esto se debe a que estas teorías no involucran la interacción gravitacional. Así, podemos concluir que los SRI's con extensión infinita sí poseen realidad física en ausencia de gravitación.

Ahora, en presencia de la interacción gravitacional los SRI's con extensión infinita no poseen realidad física. Por un lado, esto se debe al PED, porque debido a este principio, todos los cuerpos son afectados por la interacción gravitacional. Además, en presencia de un campo gravitacional (el cual puede ser homogéneo o no homogéneo), es imposible encontrar un SR de extensión infinita con respecto al cual los cuerpos se muevan en línea recta y con velocidad constante, es decir, un SRI. Sin embargo, tal como hemos estado discutiendo a lo largo de esta subsección, en presencia de un campo gravitacional los SRLI's sí poseen realidad física.

En resumen, en presencia de un campo gravitacional es imposible encontrar SRI's con extensión infinita. No obstante, de acuerdo al PEF o PEE sí es posible encontrar SRLI's (SR's en pequeñas regiones del espacio, pequeños intervalos de tiempo y en caída libre) con respecto a los cuales sean válidas las teorías que no involucran la interacción gravitacional. Por ejemplo, en el caso particular de la mecánica de Newton, en presencia de un campo gravitacional podemos considerar SRLI's o SR's en caída libre de forma tal que los cuerpos (pequeños y macroscópicos) se muevan en líneas recta y a velocidad constante con respecto a estos, tal como se puede ver en las ecuaciones (2.52) y (2.53).

De toda la discusión hecha hasta el momento se tiene que PEE establece que:

- El PED es válido.
- El resultado de cualquier experimento local que no involucra la interacción

gravitacional es independiente de la velocidad del SR en caída libre en el que se realiza.

- El resultado de cualquier experimento local que no involucra la interacción gravitacional es independiente de dónde y cuándo se realiza.

El segundo punto hace referencia a la invariancia local de Lorentz y el tercer punto hace referencia a la invariancia local de posición.

El PEE es el corazón y el alma de la teoría general de la relatividad de Einstein. En este sentido si el PEE es válido, entonces la interacción gravitacional es un fenómeno que se debe a la curvatura del espaciotiempo. De esta forma, si consideramos una pequeña región de este espaciotiempo y un SR en caída libre o un SRLI, entonces los efectos de la interacción gravitacional desaparecen y es en esa pequeña región en donde son válidas las teorías que no incluyen la interacción gravitacional<sup>14</sup>. Como consecuencia del argumento de que la interacción gravitacional es equivalente a la curvatura del espaciotiempo se tiene que las únicas teorías que satisfacen el PEE son las *teorías métricas de la gravedad*, en donde los postulados de estas teorías son:

- El espaciotiempo está dotado de una métrica simétrica.
- Las trayectorias de los cuerpos libre de fuerzas no gravitacionales son geodésicas de este espaciotiempo.
- Es en los SRLI's o SR's en caída libre en donde es válida la relatividad especial.

De esta forma la teoría general de la relatividad de Einstein es una teoría métrica de la gravedad la cual satisface el PEE. Sin embargo, cabe mencionar que después de que Einstein formulara su teoría, se desarrollaron varias teorías alternativas a la teoría general de la relatividad, en donde estas igualmente satisfacen el PEE. Una de ellas son las teorías tenso-escalares, en particular la teoría de Brans-Dicke y sus generalizaciones. Ver la subsección 1.3.1 de [43] para mayores detalles.

Finalmente, se tiene que el PEE permite determinar el comportamiento de cualquier sistema físico sometido a un campo gravitacional, ya que de acuerdo a este principio este comportamiento es exactamente igual o indistinguible si se describe con respecto a un SR que acelera con respecto a un SRLI. De esta forma la interacción gravitacional en la teoría de Einstein se puede entender como la aceleración de SR's con respecto a SRLI's. No obstante, hay que recalcar que esta es una consideración puramente cinemática. La dinámica de estos SR's que aceleran con respecto a los SRLI's está determinada por las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales veremos a continuación.

---

<sup>14</sup>En particular, si consideramos coordenadas adaptadas a estos SR's, entonces recobramos la teoría especial de la relatividad con su métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ .

### 2.2.4. Ecuaciones de campo de Einstein

El 25 de Noviembre de 1915, Albert Einstein presentó a la Academia Prusiana de las Ciencias las *ecuaciones de campo de Einstein sin constante cosmológica*<sup>15</sup>, las cuales son dadas por

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.56)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein (2.35),  $g_{\mu\nu}$  es la métrica del espaciotiempo,  $T_{\mu\nu}$  es el tensor energía-momentum de la materia,  $c$  es la rapidez de la luz y  $G$  es la constante de Newton.

La ecuación (2.56) es de segundo orden en la métrica  $g_{\mu\nu}$ , es decir, depende de las segundas derivadas de esta. Por otro lado, debido a que  $G_{\mu\nu}$  y  $T_{\mu\nu}$  son tensores simétricos se tiene que la ecuación (2.56) se puede separar en 10 ecuaciones diferenciales parciales (linealmente independientes).

Las ecuaciones de campo de Einstein son un modelo para la interacción gravitacional, el cual determina cómo el espaciotiempo se curva debido a una distribución de materia. La validez de este modelo se asume como un postulado de la Teoría de Relatividad General. Debido a esto, las predicciones que se puedan deducir de este modelo deben ser testeadas experimentalmente para así concluir si este modelo es el correcto o no para describir la interacción gravitacional.

Por otro lado, las ecuaciones de campo Einstein son un modelo razonable para la interacción gravitacional. Esto se debe a que estas ecuaciones son *tensoriales, son de segundo orden en la métrica  $g_{\mu\nu}$  y reproducen la gravedad newtoniana en límite de campo gravitacional débil.*

Que las ecuaciones de campo de Einstein sean tensoriales significa que éstas tienen la misma forma para todo sistema coordenado. En otras palabras, estas ecuaciones son covariantes bajo TGC's. Esto se debe a que estas ecuaciones describen la interacción gravitacional como la propia curvatura del espaciotiempo, es decir, el concepto de *fuerza de gravedad* es reemplazado por el de *campo gravitacional*, el cual es una entidad geométrica. Debido a esto, no existen sistemas coordenados privilegiados, o en términos físicos, sistemas de referencia privilegiados para describir el campo gravitacional. Por lo tanto, bajo un cambio de coordenadas  $x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu = \bar{x}^\mu(x^\nu)$  las ecuaciones de campo (2.56) transforman como

$$\bar{G}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \bar{T}_{\mu\nu}, \quad (2.57)$$

---

<sup>15</sup>Las ecuaciones con constante cosmológica fueron presentadas en 1917 y son dadas por

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

donde

$$\bar{G}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu} G_{\lambda\rho}, \quad \bar{T}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu} T_{\lambda\rho}. \quad (2.58)$$

Por otro lado, debido a que las ecuaciones de Einstein son de segundo orden en la métrica  $g_{\mu\nu}$  se tiene que para poder integrar estas ecuaciones se necesita conocer la métrica y sus primeras derivadas en un instante dado. Esta dependencia de las ecuaciones de Einstein con las segundas derivadas de la métrica puede ser vista fácilmente del lado izquierdo de la ecuación (2.56). En efecto, de (2.29), (2.37) y (2.38) vemos que el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$ , el cual es dado en (2.35), depende de la métrica  $g_{\mu\nu}$  y de las primeras, y segundas derivadas de ésta.

Finalmente, que las ecuaciones de Einstein (2.56) reproduzcan la teoría newtoniana de la gravitación en límite de campo gravitacional débil hace referencia al *principio de correspondencia*. Este principio nos dice que la teoría de Newton de la gravitación es el límite no relativista de la teoría de relatividad general.

Según la Teoría de la Relatividad General, la ecuación que rige la dinámica de los cuerpos libres de fuerzas no-gravitacionales es la ecuación de la geodésica. De la ecuación (2.40) tenemos que la ecuación de la geodésica para un cuerpo masivo es dada por

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0, \quad (2.59)$$

donde  $d\tau$  se interpreta como el tiempo que un reloj comóvil con el cuerpo registra entre los eventos con coordenadas  $x^\mu$  y  $x^\mu + dx^\mu$ .

Sabemos que la teoría de Newton de la gravitación describe la dinámica de cuerpos que se mueven a velocidades no-relativistas en un campo gravitacional débil y estático.

Por otro lado, en el contexto de relatividad general, un campo gravitacional débil se describe como un espaciotiempo ligeramente curvado. Matemáticamente, la métrica  $g_{\mu\nu}$  de un espaciotiempo ligeramente curvado se puede dividir de la forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.60)$$

donde  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  y  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ .

Debido a que tenemos cuerpos que se mueven a velocidades no relativistas, es decir  $|dx^i/dt| \ll c$ , entonces podemos realizar la aproximación  $d\tau \approx dt$ , luego  $dx^0/d\tau \approx c$  y  $dx^i/d\tau \approx dx^i/dt$ . Con estas aproximaciones la ecuación de la geodésica (2.59) se reduce a

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\mu{}_{00} c^2 \approx 0. \quad (2.61)$$

Por otro lado, usando (2.29) y (2.60) obtenemos que  $\overset{\circ}{\Gamma}{}^\mu{}_{00}$  es dado por

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^\mu{}_{00} \approx -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu h_{00}. \quad (2.62)$$

Luego, reemplazando (2.62) en (2.61) se obtiene

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} \approx \frac{c^2}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu h_{00}. \quad (2.63)$$

La componente temporal y espacial de la ecuación (2.63) son dada por

$$\frac{d^2 x^0}{dt^2} \approx -\frac{c}{2} \partial_t h_{00}, \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx \frac{c^2}{2} \partial_i h_{00}, \quad (2.64)$$

respectivamente<sup>16</sup>.

Para obtener el límite newtoniano de la ecuación de la geodésica (2.59), la ecuación espacial de (2.64) debe coincidir con la ecuación newtoniana

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi, \quad (2.65)$$

donde (2.65) determina el movimiento de un cuerpo de prueba en un campo gravitacional  $\vec{g} = -\vec{\nabla} \phi$ .

Así, si queremos que se cumpla lo anterior, tenemos que la componente 00 de la perturbación  $h_{\mu\nu}$  tiene que ser identificada como

$$h_{00} \stackrel{!}{=} -\frac{2\phi}{c^2}, \quad (2.66)$$

de modo que

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right). \quad (2.67)$$

En efecto, reemplazando (2.66) en la ecuación espacial de (2.64) se obtiene

---

<sup>16</sup>La ecuación temporal se satisface idénticamente, ya que el campo gravitacional es estático.



$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \approx -\vec{\nabla}\phi. \quad (2.68)$$

Por otro lado, tenemos que las ecuaciones de campo de Einstein (2.56) en el límite newtoniano tienen que coincidir con la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad (2.69)$$

donde (2.69) determina el potencial gravitacional  $\phi$  a partir de una distribución de materia  $\rho$ .

En efecto, supongamos que la materia es modelada como un fluido perfecto sin presión (polvo). Luego, tenemos que el tensor de energía-momento en este caso es dado por

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu. \quad (2.70)$$

Debido a que estamos considerando velocidades no relativistas, tenemos que las partículas que componen al fluido se mueven a velocidades no relativistas. Por lo tanto, en el límite considerado la componente 00 de (2.70) es dada aproximadamente por

$$T_{00} \approx \rho c^2. \quad (2.71)$$

Por otra parte, de (2.60) obtenemos que la aproximación de campo gravitacional débil de la ecuación (2.56) es dada por

$$\nabla^2 h_{00} \approx -\frac{8\pi G}{c^4} T_{00}. \quad (2.72)$$

Así, reemplazando (2.66) y (2.71) en (2.72) se obtiene<sup>17</sup>

$$\nabla^2\phi \approx 4\pi G\rho. \quad (2.73)$$

Alternativamente, las ecuaciones de Einstein (2.56) con constante cosmológica se pueden obtener a partir de una acción. En efecto, se define la *acción de Einstein-Hilbert* con constante cosmológica en 4 dimensiones como

---

<sup>17</sup>Para obtener la aproximación (2.72) hemos hecho uso de las ecuaciones de campo de Einstein (2.56) escrita de la forma

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right).$$

$$I[g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \alpha_0 + \alpha_1 \mathring{R} \right) + I_M, \quad (2.74)$$

donde

$$G = \frac{c^4}{16\pi\alpha_1}, \quad \Lambda = -\frac{\alpha_0}{2\alpha_1}, \quad \kappa = \frac{c^4}{16\pi G}, \quad (2.75)$$

y

$$I_M = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M \quad (2.76)$$

es la acción que describe campos de materia.

Luego, la variación de la acción (2.74) con respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  da como resultado las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.77)$$

La acción (2.74) es invariante bajo TGC's y proporciona ecuaciones de segundo orden en la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Además esta acción es única, ya que no es posible construir una acción invariante bajo TGC's y que dé como resultado ecuaciones de segundo orden usando la métrica  $g_{\mu\nu}$  y los símbolos de Christoffel  $\mathring{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ . Por lo que la única acción que cumple los requerimientos anteriores es la acción (2.74), la cual es construida a partir del escalar de curvatura (2.24), el cual es una función de la métrica  $g_{\mu\nu}$ , su inversa  $g^{\mu\nu}$  y las segundas derivadas de  $g_{\mu\nu}$ .

## Capítulo 3

# Teoría de Lanczos-Lovelock

En este capítulo vamos a estudiar la teoría de Lanczos-Lovelock. En primer lugar, presentaremos la acción de Lanczos-Lovelock y revisaremos sus propiedades más importantes. Luego, estudiaremos las ecuaciones de campo que se deducen de esta acción y analizaremos la importancia de los invariantes topológicos, los cuales juegan un rol importante en la descripción de la teoría. Finalmente, veremos cómo se puede recobrar la teoría general de la relatividad a partir de la teoría de Lanczos-Lovelock. Para una discusión más detallada de estos temas se recomienda revisar las referencias [18, 38, 44, 45].

### 3.1. Teoría de Lanczos-Lovelock

En capítulo 2 determinamos que las ecuaciones de campo de Einstein (2.77) son un modelo razonable para describir la interacción gravitacional, o la dinámica de la geometría del espaciotiempo en  $D = 4$ . Además, Estas ecuaciones son obtenidas a partir de la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica (2.74).

La importancia de la acción (2.74) es que esta es invariante bajo TGC's, proporciona ecuaciones de segundo orden en la métrica  $g_{\mu\nu}$ , y además esta acción es única. Así, la descripción de la interacción gravitacional debida a la acción (2.74) es consistente.

Considerando lo mencionado anteriormente, nos podemos preguntar si es posible extender la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica a una dimensión arbitraria  $D$ , es decir, formular una teoría más general que la teoría general de la relatividad, la cual me dé una descripción de la interacción gravitacional en una dimensión  $D \geq 4$ .

Para lograr obtener una teoría que describa la interacción gravitacional en  $D \geq 4$ , esta tiene que cumplir con los mismos principios con los que se sustenta la teoría general de la relatividad, es decir, la acción debe ser invariante bajo TGC's, debe conducir a ecuaciones de segundo orden en la métrica  $g_{\mu\nu}$  y esta teoría debe cumplir

el principio de correspondencia.

En efecto, la teoría más general para la interacción gravitacional en  $D$  dimensiones que no involucra torsión<sup>1</sup>, la cual es invariante bajo TGC's y proporciona ecuaciones de campo de segundo orden en la métrica es denominada *teoría de Lanczos-Lovelock*<sup>2</sup>, y esta es dada por la acción

$$I[g_{\mu\nu}] = \int d^D x \sum_{k=0}^N \alpha_k \mathcal{L}^{(k)}, \quad (3.1)$$

donde

$$\mathcal{L}^{(k)} = \frac{\sqrt{-g}}{2^k} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}. \quad (3.2)$$

De (3.2) se tiene que el símbolo  $\delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}}$  es un tensor tipo  $(2k, 2k)$  y es denominado *delta de Kronecker generalizada*. Por otro lado, de la sumatoria presente en (3.1) se tiene que  $N = [D/2]$ , donde  $[D/2]$  representa la parte entera de  $D/2$ . Luego, vemos que la acción (3.1) es un polinomio de grado  $[D/2]$  en la curvatura.

Tenemos que la acción (3.1) es denominada *acción de Lanczos-Lovelock*, el lagrangiano (3.2) es denominado *densidad lagrangiana de Lanczos-Lovelock* y las constantes  $\alpha_k$  son las constantes de acoplamiento.

Las constantes de acoplamiento  $\alpha_k$  no son fijadas desde primeros principios. Además, las unidades de medida de estas constantes son  $[\alpha_k] = [L]^{2k-2}$ . Adicionalmente, en el capítulo 2 introdujimos las constantes  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$ , las cuales están relacionadas con la constante de Newton  $G$  y la constante cosmológica  $\Lambda$  de la forma

$$G = \frac{c^4}{16\pi\alpha_1}, \quad \Lambda = -\frac{\alpha_0}{2\alpha_1}. \quad (3.3)$$

Finalmente, volviendo a la acción de Lanczos-Lovelock se tiene que la densidad lagrangiana de Lanczos-Lovelock (3.2) se puede escribir como

$$\mathcal{L}^{(k)} = \sqrt{-g} L^{(k)}, \quad (3.4)$$

con

$$L^{(k)} = \frac{1}{2^k} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}, \quad (3.5)$$

donde (3.5) es el *lagrangiano de Lanczos-Lovelock*.

<sup>1</sup>Desde ahora en adelante vamos a omitir el símbolo  $\circ$ .

<sup>2</sup>La teoría de Lanczos-Lovelock primero fue formulada por Cornelius Lanczos para  $D = 5$  en 1938 [44] y tiempo después fue generalizada por David Lovelock para una dimensión arbitraria  $D$  en 1971 [18].

### 3.1.1. Ecuaciones de campo de Lanczos-Lovelock

Ahora vamos a estudiar las ecuaciones de campo de la teoría de Lanczos-Lovelock, las cuales son obtenidas a partir de la acción de Lanczos-Lovelock (3.1). En efecto, variando (3.1) con respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  obtenemos las *ecuaciones de campo Lanczos-Lovelock*, las cuales son dadas por

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = \sum_{k=0}^N \alpha_k E_{\mu\nu}^{(k)} = 0, \quad (3.6)$$

donde

$$E_{\mu\nu}^{(k)} = -\frac{1}{2^{k+1}} g_{(\mu|\alpha} \delta_{|\nu)\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \quad (3.7)$$

es el *tensor de Lovelock* de orden  $k$  en la curvatura.

Es simple verificar que el tensor de Lovelock (3.7) es un tensor de simétrico tipo  $(0, 2)$ , y además éste es covariantemente constante, es decir,

$$\nabla_{\mu} E^{(k)\mu\nu} \equiv 0. \quad (3.8)$$

Por otro lado, en el capítulo 2 discutimos que el tensor de Einstein (2.35) es un tensor simétrico tipo  $(0, 2)$ , y además en (2.39) vimos que este tensor es covariantemente constante. En este sentido, se puede ver que (3.7) es una generalización de (2.35). Esto es consistente, ya que como vimos anteriormente la teoría de Lanczos-Lovelock es una generalización de la teoría general de la relatividad, en donde la teoría de Lanczos-Lovelock cumple los mismos principios que la teoría general de la relatividad.

En la sección 3.1 vimos que la acción (3.1) es un polinomio de grado  $[D/2]$  en la curvatura. En otras palabras, si consideramos una dimensión arbitraria  $D$  entonces la acción (3.1) es un polinomio de grado  $k \leq D/2$ . Ahora, si consideramos una dimensión par  $D = 2p$ , entonces el último término de la sumatoria en la acción (3.1), o la potencia más alta del polinomio dado en (3.1) es un invariante topológico denominado *característica de Euler 2p-dimensional*  $\chi_{2p}$ . En efecto, este invariante topológico es dado por

$$\chi_{2p} = \frac{1}{2^p} \int d^{2p}x \sqrt{-g} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2p}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2p}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2p-1} \beta_{2p}}_{\alpha_{2p-1} \alpha_{2p}}. \quad (3.9)$$

De (3.9) vemos que

$$\chi_{2p} = \int d^{2p}x \mathcal{L}^{(p)}, \quad (3.10)$$

con

$$\mathcal{L}^{(p)} = \frac{1}{2^p} \sqrt{-g} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2p}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2p}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2p-1} \beta_{2p}}_{\alpha_{2p-1} \alpha_{2p}}, \quad (3.11)$$

donde la densidad lagrangiana (3.11) es denominada *densidad de Euler*.

Tenemos que (3.9) es un invariante topológico debido a que éste es un número entero que no cambia bajo deformaciones continuas. Estas deformaciones continuas son dadas por la variación de la acción (3.1). Por esta razón, el término (3.9) no aporta a las ecuaciones de campo, debido a que el integrando de (3.9) se puede escribir como una derivada total. Luego, si integramos esta derivada total sobre la variedad, entonces este término se anula idénticamente, por lo que no aporta a las ecuaciones de campo<sup>3</sup>.

Cabe mencionar que si consideramos una dimensión arbitraria  $D$ , entonces la densidad lagrangiana de Lanczos-Lovelock (3.2) de dimensión  $D + 1$  se anula idénticamente, es decir,

$$\mathcal{L}^{(k)} \equiv 0. \quad (3.12)$$

Además, si consideramos una dimensión arbitraria  $D$ , entonces los tensores de Lovelock (3.7) de orden  $k \geq [(D + 1)/2]$  en la curvatura se anulan idénticamente, es decir,

$$E_{\mu\nu}^{(k)} \equiv 0, \quad k \geq \left\lceil \frac{D + 1}{2} \right\rceil. \quad (3.13)$$

Por otro lado, existe una identidad entre la traza de los tensor de Lovelock de orden  $k$  (3.7) y el lagrangiano de Lanczos-Lovelock de orden  $k$  (3.5), la cual es dada por

$$E^{(k)\mu}_{\mu} \equiv \frac{2k - d}{2} L^{(k)}. \quad (3.14)$$

A continuación vamos a mostrar explícitamente las cuatro primeras densidades lagrangianas de Lanczos-Lovelock, los cuatro primeros lagrangianos de Lanczos-Lovelock y los cuatro primeros tensores de Lovelock. En efecto, de (3.2) se tiene que

---

<sup>3</sup>Para un análisis más detallado de este tema se recomienda ver [38].

$$\mathcal{L}^{(0)} = \sqrt{-g}, \quad (3.15)$$

$$\mathcal{L}^{(1)} = \sqrt{-g}R, \quad (3.16)$$

$$\mathcal{L}^{(2)} = \sqrt{-g} \left( R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho} \right), \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(3)} = \sqrt{-g} \left( R^3 - 12RR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + 16R_{\mu\nu}R^\mu{}_\rho R^{\nu\rho} + 24R_{\mu\nu}R_{\rho\sigma}R^{\mu\rho\nu\sigma} + 3RR_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \right. \\ \left. - 24R_{\mu\nu}R^\mu{}_{\rho\sigma\kappa}R^{\nu\rho\sigma\kappa} + 4R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\eta\xi}R^{\rho\sigma}{}_{\eta\xi} - 8R_{\mu\rho\nu\sigma}R^\mu{}_{\eta}{}^\nu{}_{\xi}R^{\rho\eta\sigma\xi} \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde (3.15)-(3.18) son las densidades lagrangianas de Lanczos-Lovelock de orden 0, 1, 2 y 3 en la curvatura, respectivamente.

Por otro lado, de (3.5) se tiene que

$$L^{(0)} = 1, \quad (3.19)$$

$$L^{(1)} = R, \quad (3.20)$$

$$L^{(2)} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} L^{(3)} = R^3 - 12RR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + 16R_{\mu\nu}R^\mu{}_\rho R^{\nu\rho} + 24R_{\mu\nu}R_{\rho\sigma}R^{\mu\rho\nu\sigma} + 3RR_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \\ - 24R_{\mu\nu}R^\mu{}_{\rho\sigma\kappa}R^{\nu\rho\sigma\kappa} + 4R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\eta\xi}R^{\rho\sigma}{}_{\eta\xi} - 8R_{\mu\rho\nu\sigma}R^\mu{}_{\eta}{}^\nu{}_{\xi}R^{\rho\eta\sigma\xi}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde (3.19)-(3.22) son los lagrangianos de Lanczos-Lovelock de orden 0, 1, 2 y 3 en la curvatura, respectivamente.

Finalmente, de (3.7) se tiene que

$$E_{\mu\nu}^{(0)} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}, \quad (3.23)$$

$$E_{\mu\nu}^{(1)} = G_{\mu\nu}, \quad (3.24)$$

$$E_{\mu\nu}^{(2)} = 2RR_{\mu\nu} - 4R_{\mu\gamma}R^\gamma{}_\nu - 4R^{\gamma\delta}R_{\mu\gamma\nu\delta} + 2R_{\mu\gamma\delta\lambda}R_\nu{}^{\gamma\delta\lambda} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}L^{(2)}, \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu}^{(3)} = 3R^2R_{\mu\nu} - 12RR_{\rho\mu}R^\rho{}_\nu - 12R^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}R_{\mu\nu} + 24R^{\rho\sigma}R_{\rho\mu}R_{\sigma\nu} \\ - 12RR^{\rho\sigma}R_{\rho\mu\sigma\nu} + 24R^{\rho\kappa}R^\sigma{}_\kappa R_{\rho\mu\sigma\nu} - 48R^{\rho\sigma}R^\kappa{}_{(\mu}R_{\kappa\sigma\rho|\nu)} + 6RR^{\rho\sigma\kappa}{}_\mu R_{\rho\sigma\kappa\nu} \\ + 3R_{\mu\nu}R^{\rho\sigma\kappa\eta}R_{\rho\sigma\kappa\eta} - 24R^\rho{}_{(\mu}R^{\sigma\kappa\eta}{}_{\rho}R_{\sigma\kappa\eta|\nu)} - 12R^{\rho\sigma}R^{\kappa\eta}{}_{\rho\mu}R_{\kappa\eta\sigma\nu} \\ + 24R_{\rho\sigma}R^{\rho\kappa\sigma\eta}R_{\kappa\mu\eta\nu} - 24R_{\rho\sigma}R^{\rho\kappa\eta}{}_\mu R^\sigma{}_{\kappa\eta\nu} + 12R^{\rho\sigma\kappa\eta}R_{\rho\sigma\xi\mu}R_{\kappa\eta}{}^\xi{}_\nu \\ - 24R^{\rho\kappa\sigma\eta}R^\xi{}_{\rho\sigma\mu}R_{\xi\kappa\eta\nu} - 12R^{\rho\sigma\kappa}{}_\eta R_{\rho\sigma\kappa\xi}R^\eta{}_\mu{}^\xi{}_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}L^{(3)}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde (3.23)-(3.26) son los tensores de Lovelock de orden 0, 1, 2 y 3 en la curvatura, respectivamente.

### 3.1.2. Recobrando la teoría general de la relatividad

En la sección 3.1 vimos que la teoría de Lanczos-Lovelock es una generalización de la teoría general de la relatividad a una dimensión arbitraria  $D$ . Además, vimos que la teoría de Lanczos-Lovelock cumple los mismos principios con los que se sustenta la teoría general de la relatividad, es decir, la acción o las ecuaciones de campo deben ser invariantes bajo TGC's, las ecuaciones de campo deben ser de segundo orden en la métrica  $g_{\mu\nu}$  y dicha teoría debe cumplir con el principio de correspondencia.

Concentrándonos en este último punto, que la teoría de Lanczos-lovelock cumpla con el principio de correspondencia quiere decir que esta teoría contiene a la teoría general de la relatividad como caso particular. De la misma forma como la teoría general de la relatividad contiene a la teoría de Newton de la gravitación como caso particular, tal como vimos en el capítulo 2.

Si la dimensión es  $D = 4$ , entonces  $N = 2$ . Luego, de la acción de Lanczos-Lovelock (3.1) se obtiene

$$I[g_{\mu\nu}] = \int d^4x \left( \alpha_0 \mathcal{L}^{(0)} + \alpha_1 \mathcal{L}^{(1)} \right) + \int d^4x \left( \alpha_2 \mathcal{L}^{(2)} \right). \quad (3.27)$$

Luego, reemplazando (3.15)-(3.17) en (3.27) se obtiene

$$I[g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} (\alpha_0 + \alpha_1 R) + \alpha_2 \int d^4x \sqrt{-g} \left( R^2 - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\lambda\rho} R^{\mu\nu\lambda\rho} \right). \quad (3.28)$$

Ahora, usando (3.2) se tiene que (3.28) se puede reescribir como

$$I[g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} (\alpha_0 + \alpha_1 R) + \frac{\alpha_2}{2^2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta_{\beta_1 \dots \beta_4}^{\alpha_1 \dots \alpha_4} R^{\beta_1 \beta_2}{}_{\alpha_1 \alpha_2} R^{\beta_3 \beta_4}{}_{\alpha_3 \alpha_4}. \quad (3.29)$$

Luego, usando (3.9) vemos que (3.29) toma la forma

$$I[g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} (\alpha_0 + \alpha_1 R) + \alpha_2 \chi_4. \quad (3.30)$$

El segundo término del lado derecho de (3.30) corresponde a la característica de Euler 4-dimensional  $\chi_4$ . Así, variando la acción (3.30) con respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  obtenemos las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica en el vacío, es decir,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (3.31)$$



donde para obtener (3.31) usamos el hecho que la variación de la característica de Euler  $\chi_4$  no aporta a las ecuaciones de campo, ya que este término es un invariante topológico, tal como vimos en la subsección 3.1.1.

Otra forma de obtener las ecuaciones (3.31) es a partir de las ecuaciones de Lanczos-Lovelock (3.6). En efecto, si  $D = 4$ , entonces  $N = 2$ . Luego de (3.6) se obtiene

$$\alpha_0 E_{\mu\nu}^{(0)} + \alpha_1 E_{\mu\nu}^{(1)} + \alpha_2 E_{\mu\nu}^{(2)} = 0. \quad (3.32)$$

Por otro lado, usando (3.13) obtenemos que

$$E_{\mu\nu}^{(2)} \equiv 0. \quad (3.33)$$

Luego, de (3.32) y (3.33) se obtiene

$$\alpha_0 E_{\mu\nu}^{(0)} + \alpha_1 E_{\mu\nu}^{(1)} = 0. \quad (3.34)$$

Finalmente, reemplazando (3.23)-(3.24) en (3.34), y además usando (3.3) se obtiene

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.35)$$

De esta forma, en (3.31) y (3.35) hemos recobrado las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica en el vacío a partir de las ecuaciones de Lanczos-Lovelock (3.6), verificando así el principio de correspondencia.

## Capítulo 4

# Teoría de Lovelock-Horndeski

En este capítulo vamos a estudiar la teoría Lovelock-Horndeski. Antes de abordar esta teoría, vamos a hacer una breve revisión sobre las teorías tenso-escalares. En particular, vamos a estudiar la teoría de Brans-Dicke y la importancia de esta teoría en el contexto de teorías tenso-escalares. Una vez estudiada esta teoría, vamos a discutir sobre la teoría tenso-escalar de Horndeski y luego vamos a generalizar esta teoría a una dimensión arbitraria  $D$ . Habiendo obtenido esta generalización, vamos a obtener una subclase o teoría efectiva de la teoría de Horndeski generalizada, la cual vamos a denominar teoría de Lovelock-Horndeski y discutiremos sobre la importancia de esta teoría. Para una discusión más detallada de estos temas se recomienda revisar las referencias [19, 30, 41, 43, 46–51].

### 4.1. Teorías tenso-escalares

La teoría general de la relatividad de Albert Einstein es una teoría para la interacción gravitacional. Esta teoría explica esta interacción mediante la curvatura de un espaciotiempo 4-dimensional, la cual es producida por una distribución de materia o energía. Debido a esto, el espaciotiempo se entiende como una entidad geométrica, en donde el bloque fundamental o campo fundamental es el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . Así, el formalismo matemático con el que se construye esta teoría es el lenguaje tensorial de la geometría diferencial. Por esta razón la teoría general de la relatividad recibe el nombre de *teoría tensorial*. Además, cabe mencionar que la teoría general de la relatividad es la teoría tensorial más general en 4 dimensiones que conduce a ecuaciones de campo de segundo orden.

La teoría de Einstein recibió un reconocimiento muy grande a lo largo del siglo XX (y sigue recibiendo este reconocimiento hasta hoy), ya que varias predicciones de esta teoría han sido respaldadas por diferentes observaciones y experimentos [40], los cuales confirman estas predicciones con precisiones muy altas.

Sin embargo, pese al éxito de la teoría de Einstein, varios físicos han desarrollado *teorías alternativas* a la teoría general de la relatividad. Unas de las principales motivaciones que llevó al desarrollo de estas teorías, fue desarrollar teorías que per-

mitiesen explicar fenómenos como la materia oscura, la energía oscura o el proceso de inflación sufrido por el Universo temprano. Pese a que estos fenómenos no han sido observados o detectados directamente, diversas observaciones astronómicas sugieren su existencia, dando así una fuerte motivación para el desarrollo de estas teorías alternativas. Dentro de la amplia gama de teorías alternativas desarrolladas hasta hoy, nos vamos a centrar en las *teorías tenso-escalares*, las cuales son unas de las teorías alternativas mejor estudiadas hasta hoy.

En términos generales, una teoría tenso-escalar es una teoría que describe la interacción gravitacional mediante dos campos fundamentales: la métrica  $g_{\mu\nu}$  y un campo escalar  $\phi$ . En otras palabras, esta teoría incorpora un campo escalar  $\phi$  de manera no trivial mediante un *acoplamiento no-minimal* con la gravedad, la cual es descrita por la métrica  $g_{\mu\nu}$ . De esta forma una teoría tenso-escalar posee más grados de libertad que la teoría de Einstein. Además, usualmente una teoría tenso-escalar se construye de manera tal que conduzca a ecuaciones de campo de segundo orden<sup>1</sup>.

Los campos escalares juegan un rol muy importante en Física. Por ejemplo, en la teoría tenso-escalar de Brans-Dicke [47] se incluye un campo escalar como un intento de incorporar el principio de Mach<sup>2</sup> en el contexto de una teoría gravitacional. También, los campos escalares se incluyen en teorías inflacionarias, en donde estos campos son posibles candidatos a materia oscura. Por otro lado, en el contexto de la física de partículas, la detección del bosón de Higgs en el año 2012 da un respaldo sólido de la existencia de los campos escalares en la naturaleza.

El primer desarrollo formal de una teoría tenso-escalar en 4 dimensiones y con ecuaciones de campo de segundo orden fue realizado por Pascual Jordan en 1955 [46]. En su teoría Jordan introduce un campo escalar en un espaciotiempo 4-dimensional curvo, en donde este campo escalar describe una constante gravitacional dependiente del tiempo y del espacio. Así, en base a las consideraciones anteriores, Jordan presentó el lagrangiano

$$\mathcal{L}_J = \kappa\sqrt{-g} \left[ \phi_J^\gamma \left( R - \frac{\omega_J}{\phi_J^2} \nabla_\mu \phi_J \nabla^\mu \phi_J \right) \right] + \sqrt{-g} L_M(\phi_J, g_{\mu\nu}, \Psi), \quad (4.1)$$

donde  $\phi_J = \phi_J(x^\mu)$  se denomina campo escalar de Jordan,  $\gamma$  es una constante,  $\omega_J$  es una constante,  $\Psi$  es un campo de materia y  $L_M(\phi_J, \Psi)$  es el lagrangiano de materia.

El primer término del lado derecho de (4.1) representa el acoplamiento no-minimal entre el campo escalar  $\phi_J$  y la geometría, la cual está codificada en el escalar de Ricci  $R$ . Este acoplamiento no-minimal marcó el inicio de las teorías tenso-escalares.

Poco tiempo después de la formulación de la teoría tenso-escalar de Pascual Jordan, en 1961 Carl Brans y Robert Dicke retoman la teoría desarrollada por él, desa-

<sup>1</sup>Además, por construcción una teoría tenso-escalar es covariante bajo TGC's

<sup>2</sup>En este link se puede encontrar más información sobre el principio de Mach.

rollando así la teoría tenso-escalar de Brans-Dicke. En esta teoría, Brans y Dicke definieron un campo escalar de la forma  $\phi = \phi_J^{\gamma}$ . De esta forma, Brans y Dicke presentaron el lagrangiano

$$\mathcal{L}_{BD} = \kappa\sqrt{-g} \left( \phi R - \frac{\omega_0}{\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - V(\phi) \right) + \sqrt{-g} L_M(g_{\mu\nu}, \Psi), \quad (4.2)$$

donde  $\phi = \phi(x^\mu)$  es un campo escalar y  $\omega_0$  es una constante denominada *parámetro de Brans-Dicke*. Además, de (4.2) vemos que el lagrangiano de materia  $L_M$  no depende del campo escalar  $\phi$ , a diferencia del lagrangiano de materia presente en el lagrangiano de Jordan (4.1). Esto se debe a que Brans y Dicke exigieron que la materia descrita por el campo escalar  $\phi$  se desacople del lagrangiano  $L_M$ , ya que de esta forma la teoría respeta el PED, en contraste con la teoría desarrollada por Jordan.

Finalmente, la teoría desarrollada por Brans y Dicke puede ser generalizada promoviendo el parámetro de Brans-Dicke a una función del campo escalar  $\phi$ . Esto tiene importantes implicaciones en la fenomenología de la teoría en el régimen de gravedad fuerte [41]. De esta forma, el lagrangiano más general para una teoría tenso-escalar en 4 dimensiones, el cual considera un acoplamiento no-minimal entre un campo escalar  $\phi$  y gravedad, es cuadrático en las derivadas del campo  $\phi$  y conduce a ecuaciones de campo de segundo orden, es dado por

$$\mathcal{L}_{TS} = \kappa\sqrt{-g} \left( \phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - V(\phi) \right) + \sqrt{-g} L_M(g_{\mu\nu}, \Psi), \quad (4.3)$$

donde el lagrangiano (4.3) es denominado *lagrangiano tenso-escalar*. Además, se tiene que (4.3) se puede considerar como un lagrangiano efectivo de una teoría tenso-escalar más fundamental.

#### 4.1.1. Teoría de Horndeski

Sabemos que la teoría general de la relatividad de Albert Einstein es la teoría métrica más general en 4 dimensiones que conduce a ecuaciones de campo de segundo orden. Además, el único campo fundamental de esta teoría es la métrica  $g_{\mu\nu}$ .

Por otro lado, tal como vimos anteriormente, una de las teorías alternativas más conocidas (en 4 dimensiones y con ecuaciones de campo de segundo orden) son las teorías tenso-escalares (ver el lagrangiano (4.3)), las cuales describen la interacción gravitacional mediante la introducción de dos campos fundamentales: la métrica  $g_{\mu\nu}$  y un campo escalar  $\phi$ , aumentando de esta forma los grados de libertad con respecto a la teoría de Einstein. De esta manera, cualquier modificación de la teoría de Einstein debe incluir campos fundamentales no-triviales.

A partir de lo dicho anteriormente nos podemos preguntar:

*¿Cuál es la teoría tenso-escalar más general en 4 dimensiones, con un lagrangiano no necesariamente cuadrático en las derivadas del campo escalar y que dicho lagrangiano conduzca a ecuaciones de campo de segundo orden?*

Esta pregunta fue respondida por Gregory Horndeski en 1974 [19]. En efecto, Horndeski desarrolló la teoría tenso-escalar más general en 4-dimensiones que conduce a ecuaciones de campo de segundo orden, la *teoría de Horndeski*. Horndeski presentó un lagrangiano que conduce a ecuaciones de campo de segundo orden, y además dicho lagrangiano depende de potencias más altas que 2 en las derivadas del campo escalar. En efecto, el lagrangiano de esta teoría es dado por

$$\mathcal{L} = \sum_{i=2}^5 \mathcal{L}_i, \quad (4.4)$$

donde

$$\mathcal{L}_2 = \sqrt{-g} G_2(\phi, X), \quad (4.5)$$

$$\mathcal{L}_3 = \sqrt{-g} G_3(\phi, X) \square X, \quad (4.6)$$

$$\mathcal{L}_4 = \sqrt{-g} G_4(\phi, X) R - 2\sqrt{-g} \frac{\partial G_4(\phi, X)}{\partial X} \left[ (\square\phi)^2 - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla^\mu \nabla^\nu \phi \right], \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & \sqrt{-g} G_5(\phi, X) G_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \phi + \frac{\sqrt{-g}}{3} \frac{\partial G_5(\phi, X)}{\partial X} \left[ (\square\phi)^3 - 3\square\phi \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla^\mu \nabla^\nu \phi \right. \\ & \left. + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla^\mu \nabla^\sigma \phi \nabla_\sigma \nabla^\nu \phi \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

De (4.5)-(4.8) vemos que  $G_i$  son funciones arbitrarias del campo escalar  $\phi$  y  $X$  es la energía cinética del campo escalar  $\phi$ , la cual es dada por

$$X \equiv \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi. \quad (4.9)$$

#### 4.1.2. Teoría de Horndeski extendida

En el capítulo 3 vimos que la teoría de Lanczos-Lovelock es una generalización de la teoría general de la relatividad a una dimensión arbitraria  $D$ , en donde esta teoría cumple con los mismos principios con los que se sustenta la teoría de Einstein, por lo que esta teoría es consistente para describir la interacción gravitacional.

Por otro lado, en la sección 4.1 mencionamos que la teoría de Einstein es la teoría tensorial más general en 4 dimensiones y que conduce a ecuaciones de campo de segundo orden. En este sentido, la teoría de Lanczos-Lovelock es la teoría tensorial más general en una dimensión arbitraria  $D$  y que igualmente conduce a ecuaciones de campo de segundo orden.

Así, nos podemos preguntar si es posible extender la teoría de Horndeski (la cual es la teoría tenso-escalar más general en 4 dimensiones y que entrega ecuaciones de campo de segundo orden) a una dimensión arbitraria  $D$  y que entregue ecuaciones de campo de segundo orden.

En efecto, para extender la teoría de horndeski a una dimensión arbitraria  $D$  debemos considerar el siguiente lagrangiano [49]:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=2}^7 \mathcal{L}_i, \quad (4.10)$$

donde

$$\mathcal{L}_2 = \sqrt{-g} G_2(\phi, X), \quad (4.11)$$

$$\mathcal{L}_3 = \sqrt{-g} G_3(\phi, X) \square X, \quad (4.12)$$

$$\mathcal{L}_4 = \sqrt{-g} G_4(\phi, X) R - 2\sqrt{-g} \frac{\partial G_4(\phi, X)}{\partial X} \left[ (\square\phi)^2 - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla^\mu \nabla^\nu \phi \right], \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & \sqrt{-g} G_5(\phi, X) G_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \phi + \frac{\sqrt{-g}}{3} \frac{\partial G_5(\phi, X)}{\partial X} \left[ (\square\phi)^3 - 3\square\phi \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla^\mu \nabla^\nu \phi \right. \\ & \left. + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla^\mu \nabla^\sigma \phi \nabla_\sigma \nabla^\nu \phi \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\mathcal{L}_6 = G_6(\phi) \sum_{k=0}^N \alpha_k \mathcal{L}_{LL}^{(k)}, \quad (4.15)$$

$$\mathcal{L}_7 = G_7(\phi) \sum_{k=0}^N \beta_k \mathcal{L}_{LH}^{(k)}. \quad (4.16)$$

Tenemos que los lagrangianos dados en (4.11)-(4.14) coinciden con los lagrangianos dados en (4.5)-(4.8). Sin embargo, ahora hemos agregado los lagrangianos (4.15) y (4.16), de los cuales se tiene que

$$\mathcal{L}_{LL}^{(k)} = \frac{\sqrt{-g}}{2^k} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}, \quad (4.17)$$

$$\mathcal{L}_{LH}^{(k)} = \frac{\sqrt{-g}}{2^k} E_{\mu\nu}^{(k)} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi, \quad (4.18)$$

donde (4.17) es la densidad lagrangiana de Lanczos-Lovelock y (4.18) es el *lagrangiano de Lovelock-Horndeski*<sup>3</sup>. Además, el lagrangiano (4.15) juega un rol importante en la cosmología en altas dimensiones [50] y el lagrangiano (4.16) a demostrado ser importante en la descripción de agujeros negros en teorías tenso-escalares en dimensiones arbitrarias [51].

---

<sup>3</sup>Vemos que en este lagrangiano está presente el tensor de Lovelock (3.7).

Por lo tanto, el lagrangiano (4.10), el cual vamos a denominar *lagrangiano de Horndeski extendido*, es el lagrangiano más general para una teoría tenso-escalar en  $D$  dimensiones y que conduce a ecuaciones de campo de segundo orden. De esta forma, el lagrangiano (4.10) es una generalización del lagrangiano de Horndeski (4.4) a una dimensión arbitraria  $D$ .

### 4.1.3. Teoría de Lovelock-Horndeski

En la subsección 4.1.1 vimos que las funciones  $G_i$  presentes en lagrangiano de Horndeski (4.4) (y por consiguiente las que están presentes en el lagrangiano de Horndeski extendido (4.10)), son funciones arbitrarias del campo escalar  $\phi$  y de la energía cinética (4.9) de este campo. De esta forma, debido a la arbitrariedad de estas funciones, éstas se pueden fijar. Así, de esta forma se obtienen diferentes teorías efectivas o subclases de la teoría de Horndeski extendida.

En efecto, nos vamos a centrar en una subclase particular de la teoría de Horndeski extendida, la cual vamos a denominar *teoría de Lovelock-Horndeski*. Para obtener esta teoría vamos a fijar las funciones  $G_i$  presentes en (4.11)-(4.16) de la forma

$$G_2 \stackrel{!}{=} 0, G_3 \stackrel{!}{=} 0, G_4 \stackrel{!}{=} 0, G_5 \stackrel{!}{=} 0, G_6 \stackrel{!}{=} 1, G_7 \stackrel{!}{=} 1. \quad (4.19)$$

Luego, introduciendo (4.19) en el lagrangiano de Horndeski extendido (4.10) se obtiene el *lagrangiano de Lovelock-Horndeski*, el cual es dado por

$$\mathcal{L} = \sum_{k=0}^N \alpha_k \mathcal{L}_{LL}^{(k)} + \sum_{k=0}^N \beta_k \mathcal{L}_{LH}^{(k)}. \quad (4.20)$$

Luego, de (4.20) obtenemos la acción de Lovelock-Horndeski, la cual es dada por

$$I[g_{\mu\nu}, \phi] = \int d^D x \left( \sum_{k=0}^N \alpha_k \mathcal{L}_{LL}^{(k)} + \sum_{k=0}^N \beta_k \mathcal{L}_{LH}^{(k)} \right). \quad (4.21)$$

Ahora, variando la acción (4.21) con respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  obtenemos las ecuaciones de campo

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k E_{\mu\nu}^{(k)} = \sum_{k=0}^N \frac{\beta_k}{2^{2k+1}} T_{\mu\nu}^{(k)}, \quad (4.22)$$

donde  $E_{\mu\nu}^{(k)}$  es el tensor de Lovelock de orden  $k$  en la curvatura (3.7) y  $T_{\mu\nu}^{(k)}$  es el tensor energía-momentum generalizado para el campo  $\phi$  de orden  $k$  en la curvatura. Este tensor es dado por

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(k)} = & -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\phi\nabla^\beta\phi\delta_{\beta\beta_1\dots\beta_{2k}}^{\alpha\alpha_1\dots\alpha_{2k}}R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2}\dots R^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} \\
& +\nabla_\alpha\phi\nabla_{(\mu}\phi\delta_{|\nu)\beta_1\dots\beta_{2k}}^{\alpha\alpha_1\dots\alpha_{2k}}R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2}\dots R^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} \\
& +k\nabla_\alpha\phi\nabla^\beta\phi\delta_{\beta\beta_1\dots(\mu|}^{\alpha\alpha_1\dots\alpha_{2k}}R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2}\dots R^{\beta_{2k-3}\beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}}R^{\beta_{2k-1}}_{|\nu)\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} \\
& +2k\nabla^{\beta_{2k-1}}\nabla_\alpha\phi\nabla_{\alpha_{2k-1}}\nabla^\beta\phi\delta_{\beta\beta_1\dots(\nu|}^{\alpha\alpha_1\dots\alpha_{2k}}R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2}\dots R^{\beta_{2k-3}\beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}}g_{|\mu)\alpha_{2k}} \\
& +k\nabla_\alpha\phi\nabla^\gamma\phi\delta_{\beta\beta_1\dots(\nu|}^{\alpha\alpha_1\dots\alpha_{2k}}R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2}\dots R^{\beta_{2k-3}\beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}}R_{\alpha_{2k-1}\gamma}{}^{\beta_{2k-1}\beta}g_{|\mu)\alpha_{2k}}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Por otro lado, variando la acción (4.21) con respecto al campo escalar  $\phi$  obtenemos la ecuación de campo

$$\sum_{k=0}^N \frac{\beta_k}{2^k} E_{\mu\nu}^{(k)} \nabla^\mu \nabla^\nu \phi = 0. \tag{4.24}$$

Así, las ecuaciones de campo (4.22) y (4.24) son denominadas *ecuaciones de Lovelock-Horndeski*.

Si hacemos  $N = 1$  en la acción de Lovelock-Horndeski (4.21) entonces, luego de algunos cálculos, obtenemos la acción

$$I[g_{\mu\nu}, \phi] = \int d^D x \sqrt{-g} \left[ \kappa (R - 2\Lambda) - \frac{1}{2} (\alpha g_{\mu\nu} - \beta G_{\mu\nu}) \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \right]. \tag{4.25}$$

Luego, variando la acción (4.25) con respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  obtenemos las ecuaciones de campo

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{\alpha}{2\kappa} T_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{\beta}{8\kappa} T_{\mu\nu}^{(1)}, \tag{4.26}$$

donde  $T_{\mu\nu}^{(0)}$  y  $T_{\mu\nu}^{(1)}$  corresponden a los tensores energía-momentum para el campo de materia  $\phi$  de orden 0 y 1 en la curvatura, respectivamente. Luego, estos tensores son dados por

$$T_{\mu\nu}^{(0)} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi, \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(1)} = & 2\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi R - 8\nabla_\lambda \phi \nabla_{(\mu} \phi R^\lambda{}_{\nu)} - 4\nabla^\lambda \phi \nabla^\rho \phi R_{\mu\lambda\nu\rho} \\
& - 4\nabla_\mu \nabla^\lambda \phi \nabla_\nu \nabla_\lambda \phi + 4\nabla_\mu \nabla_\nu \phi \square \phi + 2G_{\mu\nu} (\nabla \phi)^2 \\
& - g_{\mu\nu} \left[ -2\nabla^\lambda \nabla^\rho \phi \nabla_\lambda \nabla_\rho \phi + 2(\square \phi)^2 - 4\nabla_\lambda \phi \nabla_\rho \phi R^{\lambda\rho} \right],
\end{aligned} \tag{4.28}$$



respectivamente.

Por otro lado, la ecuación para el campo escalar  $\phi$  de orden 1 en la curvatura es dada por

$$\alpha \square \phi - \beta G_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \phi = 0. \quad (4.29)$$

Otra forma de obtener las ecuaciones (4.26) y (4.29) es haciendo  $N = 1$  en las ecuaciones (4.22)<sup>4</sup> y (4.24), respectivamente.

Finalmente, cabe mencionar que la acción (4.25) ha demostrado ser importante para la construcción de agujeros negros asintóticamente AdS en la teoría de Lovelock-Horndeski con  $N = 1$  [30].

---

<sup>4</sup>Si hacemos  $k = 0, 1$  en (4.23), entonces recobramos los tensores energía-momentum (4.27) y (4.28).

## Capítulo 5

# Agujeros negros y objetos negros extendidos

En este capítulo estudiaremos soluciones de agujeros negros y objetos negros extendidos. En primer lugar, veremos las características generales de los agujeros negros 4-dimensionales. Luego, revisaremos las propiedades más importantes del agujero negro de Schwarzschild 4-dimensional. Posteriormente, se introducirán las propiedades generales de los agujeros negros en dimensión arbitraria. Consiguientemente, se presentará la solución de Schwarzschild-Tangherlini y cómo esta solución se puede reducir a la solución de Schwarzschild 4-dimensional. Una vez estudiada la solución de Schwarzschild-Tangherlini, se estudiarán objetos negros extendidos, en particular revisaremos las propiedades más importantes de las cuerdas negras y  $p$ -branas negras en el contexto de la teoría general de la relatividad. Finalmente, se realizará una breve revisión de la termodinámica de agujeros negros. Para una discusión más detallada de estos temas se recomienda revisar las referencias [2, 17, 36, 37, 45, 52–57].

### 5.1. Agujeros negros en 4 dimensiones

Las estrellas se pueden modelar como una distribución *esférica y estática* de un fluido ideal, donde la presión de éste es producida usualmente por reacciones de fusión nuclear o por la presión de degeneración de Fermi. La presión del fluido, la cual tiende a expandir la estrella está en equilibrio hidrostático con la presión debida a la interacción gravitacional, la cual tiende compactarla hacia su centro. En la figura (5.1) se ilustra el equilibrio hidrostático entre las dos presiones involucradas.

Cuando una estrella que se sustenta debido a la fusión nuclear agota su combustible, ésta comienza a contraerse debido a que no produce la suficiente presión para contrarrestar la presión debida a la interacción gravitacional, y además ésta comienza a enfriarse a medida que la fusión va cesando. Como consecuencia, la composición del interior de dicha estrella cambiará, dando lugar a una estrella compuesta por un plasma de núcleos atómicos y electrones, donde predomina la interacción electromagnética entre éstos. Debido a que la estrella se está contrayendo, la densidad del plasma comienza a aumentar y esto tiene como consecuencia que la interacción elec-

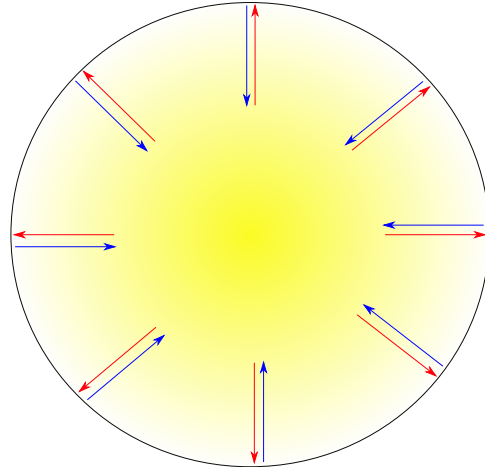
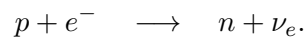


Figura 5.1: Equilibrio hidrostático entre la presión del fluido (flechas rojas) y la presión debida a la interacción gravitacional (flechas azules). *Fuente: Elaboración propia.*

tromagnética entre los núcleos atómicos y los electrones comienza a ser despreciable, dando lugar a una estrella compuesta por un gas ideal de núcleos atómicos y electrones. Por otro lado, debido a que la estrella se está enfriando, comienza a predominar la presión de degeneración de los electrones por sobre la interacción electromagnética.

Por lo tanto, cuando la estrella es suficientemente compacta y cuando la temperatura es suficientemente baja<sup>1</sup>, la contracción se detiene y el gas ideal que compone a la estrella es completamente dominado por la presión de degeneración de los electrones, dando lugar a una nueva estrella modelada como un gas ideal de Fermi completamente degenerado de electrones, una *enana blanca*.

Ahora, si agregamos masa a una enana blanca, entonces ésta comienza a contraerse, es decir, disminuye su radio. En otras palabras, la masa y el radio son cantidades inversamente proporcionales. Sin embargo, esto no ocurre indefinidamente, ya que el modelo estelar de estas estrellas predice una masa límite para ellas. Esta masa corresponde a la *masa de Chandrasekhar*, la cual es del orden de  $1,45M_{\odot}$ . Así, a medida que una enana blanca se acerca a su masa de Chandrasekhar, la densidad del núcleo se hace tan grande que se produce una reacción nuclear conocida como *decaimiento beta inverso*, la cual es dada por



Este decaimiento cambia la composición de la enana blanca a una estrella compuesta principalmente por neutrones. Luego, debido a que estas partículas son fermiones, y además como están confinadas en un espacio muy pequeño, entonces se produce una presión de degeneración muy grande, la cual contrarresta la contracción.

<sup>1</sup>Es decir, cuando  $T \rightarrow 0 [K]$ .

Así, nace una nueva estrella compuesta por una gas ideal de neutrones completamente degenerado, la cual se denomina *estrella de neutrones*. Además, cabe mencionar que la masa de Chandrasekhar de esta estrella es del orden de  $5,72M_{\odot}$ , la cual es cuatro veces mayor que la masa de Chandrasekhar correspondiente a la enana blanca.

Acabamos de ver que tanto las enanas blancas como las estrellas de neutrones poseen una masa límite conocida como masa de Chandrasekhar. Ahora, nos podemos hacer la siguiente pregunta: ¿qué ocurre si agregamos masa a una estrella de neutrones de forma tal que se supere su masa límite? La respuesta a esta pregunta de acuerdo a la teoría general de la relatividad es que una vez que se supera la masa de Chandrasekhar de una estrella de neutrones ésta comienza a colapsar y nada puede detener este proceso. A medida que la estrella colapsa ésta se va haciendo más compacta, y esto tiene como consecuencia que el campo gravitacional cerca de la estrella se va haciendo más intenso. Luego, cuando la estrella sea suficientemente compacta se va a formar un objeto compacto que produce un campo gravitacional tan intenso que nada puede escapar de él<sup>2</sup>. Este objeto compacto recibe el nombre de *agujero negro*, debido a la característica que acabamos de mencionar.

A partir de lo anterior podemos definir un agujero negro como aquella región del espaciotiempo delimitada por una superficie llamada *horizonte de eventos*, donde la propiedad fundamental de esta región es que ésta no se puede comunicar con la región exterior al horizonte. En este sentido, toda la materia que cruza el horizonte no puede volver a salir al exterior y toda ésta se dirige inevitablemente hacia una región ubicada en el centro del agujero negro<sup>3</sup>, la cual se denomina *singularidad*.

Según la teoría general de la relatividad la singularidad es una región en donde la curvatura del espaciotiempo diverge, es decir, las ecuaciones de campo de Einstein (2.77) no sirven para describir la interacción gravitacional en esa región. En otras palabras, el comportamiento físico de la singularidad es desconocido, por lo que ésta está desconectada causalmente de la región exterior al agujero negro. De esta forma, si tenemos una *singularidad desnuda*, es decir, una singularidad que no está dentro de un horizonte de eventos, entonces el principio de causalidad puede fallar. Sin embargo, esto no ocurre en la naturaleza, ya que el colapso gravitacional de una estrella nunca va a formar un agujero negro sin un horizonte de eventos<sup>4</sup>. Así, la singularidad siempre va estar oculta dentro del horizonte de eventos y esta no va a influir en la causalidad de la región exterior al agujero negro.

Finalmente, cabe mencionar que los agujeros negros en 4 dimensiones se describen matemáticamente como soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein (2.77), es decir, mediante una métrica. En principio, existen tres cantidades que describen completamente a una solución de agujero negro en 4 dimensiones: su masa

---

<sup>2</sup>Incluso la luz.

<sup>3</sup>La singularidad es una región ubicada en el centro del agujero negro en el caso de que éste no sea rotante. Por otro lado, si el agujero negro es rotante, entonces la singularidad ya no va a corresponder a una región ubicada en el centro.

<sup>4</sup>Esto se conoce como la Conjetura de Censura Cósmica de Penrose [58].

$M$ , su momentum angular  $J$  y su carga  $Q$ , las cuales son cantidades observables<sup>5</sup>. En otras palabras, si se tiene una estrella que posee momentos multipolares de masa no nulos, distribuciones de momentum angular variables y momentos multipolares electromagnéticos no nulos, entonces cuando ésta colapsa a un agujero negro todas estas cantidades se irradian en forma de ondas gravitacionales y electromagnéticas. Así, cuando se forma el agujero negro las únicas cantidades observables son su masa, su momentum angular y su carga, las cuales son constantes.

A continuación estudiaremos un agujero negro estático y esférico en 4 dimensiones que se describe únicamente por su masa  $M$ . Éste recibe el nombre de *agujero negro de Schwarzschild*. Esta solución de las ecuaciones de campo de Einstein es útil para describir un agujero negro que se forma a partir del colapso gravitacional de una estrella que se modela como una distribución esférica y estática de un fluido ideal.

### 5.1.1. Solución de Schwarzschild

En el capítulo 2 vimos que las ecuaciones de campo de Einstein son un modelo para la interacción gravitacional, el cual determina cómo el espaciotiempo se curva debido a una distribución de materia y energía. En este sentido, dada una cierta distribución de materia y energía descrita por un tensor energía-momentum  $T_{\mu\nu}$  se tiene que las ecuaciones de campo de Einstein entregan una cierta configuración del espaciotiempo para dicha distribución, donde esta configuración es descrita por una métrica  $g_{\mu\nu}$ . En otras palabras, las ecuaciones de campo de Einstein son ecuaciones cuya incógnita es la métrica.

Por otro lado, se tiene que las ecuaciones de campo de Einstein son altamente no-lineales en la métrica, por lo que resolver analíticamente estas ecuaciones es una tarea muy difícil. La razón física de esta no-linealidad se debe a que no solo la materia y la energía curva el espaciotiempo, sino que además la propia curvatura del espaciotiempo es fuente de curvatura, es decir, la gravedad no solo se acopla a la materia y la energía, sino que además se acopla sí misma. Sin embargo, en 1916, unos meses después de que Albert Einstein terminara de formular su teoría general de la relatividad, Karl Schwarzschild encontró una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío y sin constante cosmológica.

La *solución de Schwarzschild* es una solución no-trivial de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío y sin constante cosmológica. Esta solución es *estática*, *esféricamente simétrica* y *asintóticamente plana*, por lo que ésta es apropiada para describir la geometría o el campo gravitacional fuera de una distribución de materia y energía estática, y esféricamente simétrica<sup>6</sup>.

Así, por ejemplo, el campo gravitacional producido por un planeta o una estrella que rota muy lentamente puede ser modelado de manera aproximada usando la so-

---

<sup>5</sup>Esto se denomina teorema de no-pelo.

<sup>6</sup>Ver apéndice D.

lución de Schwarzschild.<sup>7</sup>

De las ecuaciones de campo de Einstein sin constante cosmológica (2.56) vemos que si  $T_{\mu\nu} = 0$ , es decir, si consideramos el vacío o una región sin materia y energía, entonces es fácil demostrar que las ecuaciones (2.56) se reducen a

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (5.1)$$

Ahora, consideremos el ansatz estático y con simetría esférica

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_2^2, \quad (5.2)$$

donde la función  $f(r)$  se denomina *función métrica* y  $d\Omega_2^2$  es el elemento de línea de la 2-esfera, el cual es dado por

$$d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2. \quad (5.3)$$

Luego, comparando el elemento de línea (2.1) con el ansatz (5.2) se obtiene la métrica

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f^{-1}(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Ahora, tenemos que introducir la métrica (5.4) en la ecuación de Einstein en el vacío (5.1) y posteriormente determinar la función métrica  $f(r)$ . En otras palabras, lo que tenemos que hacer es determinar todas las componentes no nulas del tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  a partir de la métrica (5.4), y después plantear las ecuaciones que determinan la función métrica  $f(r)$ .

En efecto, de la métrica (5.4) vemos que la métrica inversa  $g^{\mu\nu}$  es dada por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f^{-1}(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \operatorname{cosec}^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

---

<sup>7</sup>La solución de Schwarzschild da una descripción muy precisa del campo gravitacional en estos casos. Sin embargo, si queremos dar una descripción más completa hay que considerar también el campo gravitacional producido por la rotación del planeta o la estrella. Por otro lado, si consideramos cuerpos que rotan muy rápido, entonces la solución de Schwarzschild ya no va a ser apropiada para describir el campo gravitacional fuera de estos cuerpos.

Luego, introduciendo la métrica (5.4) y la métrica inversa (5.5) en los símbolos de Christoffel (2.29), se obtienen las siguientes componentes no-nulas para los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}f(r)f'(r), \quad \Gamma^t_{tr} = \frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)}, \quad \Gamma^r_{rr} = -\frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)}, \quad (5.6)$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -f(r)r, \quad (5.7)$$

$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot(\theta), \quad \Gamma^r_{\phi\phi} = -f(r)r \sin^2(\theta), \quad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin(\theta) \cos(\theta). \quad (5.8)$$

Ahora, introduciendo las componentes de los símbolos de Christoffel dados en (5.6)-(5.8) en el tensor de Ricci (2.37), se obtienen las siguientes componentes no-nulas para el tensor de Ricci:

$$R_{tt} = \frac{f(r)}{2r} [rf''(r) + 2f'(r)], \quad (5.9)$$

$$R_{rr} = -\frac{f^{-1}(r)}{2r} [rf''(r) + 2f'(r)], \quad (5.10)$$

$$R_{\theta\theta} = -rf'(r) - f(r) + 1, \quad (5.11)$$

$$R_{\phi\phi} = -r \sin^2(\theta) f''(r) - \sin^2(\theta) f(r) + \sin^2(\theta). \quad (5.12)$$

Ahora, de la ecuación de Einstein en el vacío (5.1) y de las componentes del tensor de Ricci (5.9)-(5.12) obtenemos el conjunto de ecuaciones para la función métrica  $f(r)$ :

$$\frac{f(r)}{2r} [rf''(r) + 2f'(r)] = 0, \quad (5.13)$$

$$\frac{f^{-1}(r)}{2r} [rf''(r) + 2f'(r)] = 0, \quad (5.14)$$

$$rf'(r) + f(r) - 1 = 0, \quad (5.15)$$

$$r \sin^2(\theta) f''(r) + \sin^2(\theta) f(r) - \sin^2(\theta) = 0. \quad (5.16)$$

Así, de (5.13)-(5.16) se tiene que la solución  $f(r)$  es dada por

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r}, \quad (5.17)$$

donde  $m$  es una constate de integración con unidades de longitud.

Luego, reemplazando (5.17) en (5.2) obtenemos el elemento de línea

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2 d\Omega_2^2. \quad (5.18)$$

Ahora, tenemos que identificar la constante de integración  $m$  en términos de cantidades físicas. Para esto debemos usar el hecho de que la solución (5.18) es asintóticamente plana. En efecto, si consideramos que  $r \gg 2m$ , entonces el campo gravitacional descrito por la solución (5.18) se puede considerar débil, y por lo tanto podemos usar la aproximación de campo gravitacional débil (2.67). Luego, de la componente  $g_{00}$  de (5.18) y la componente  $g_{00}$  dada en (2.67) se obtiene

$$1 - \frac{2m}{r} = 1 + 2\phi, \quad (5.19)$$

luego

$$\phi = -\frac{m}{r}. \quad (5.20)$$

Por otro lado, el potencial gravitacional newtoniano debido a una distribución esférica de masa  $M$  es dado por

$$\phi = -\frac{M}{r}. \quad (5.21)$$

Así, comparando (5.20) con (5.21) obtenemos que la constante de integración  $m$  puede ser identificada como

$$m \stackrel{!}{=} M. \quad (5.22)$$

Luego, reemplazando (5.22) en la solución (5.18) obtenemos

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + r^2 d\Omega_2^2. \quad (5.23)$$

Por otro lado, se tiene que de (5.22) se puede obtener una escala de distancia, la cual se define como

$$r_+ := 2M. \quad (5.24)$$

La escala de distancia (5.24) es denominada *radio de Schwarzschild* de la distribución esférica de masa  $M$ . Como veremos en 5.1.2 esta escala de distancia tiene importantes propiedades. Luego, de (5.24) obtenemos que el elemento de línea (5.23) se puede escribir de la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_+}{r}\right)} + r^2 d\Omega_2^2. \quad (5.25)$$

Finalmente, debido a que (5.25) es una solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío se tiene que esta es válida en regiones donde  $r \geq R$ , donde  $R > r_+$  es la coordenada radial de la superficie de la distribución esférica de masa  $M$ . Por esta razón a la solución (5.25) se le denomina *solución exterior de Schwarzschild*.



### 5.1.2. Agujero negro de Schwarzschild

En esta subsección vamos a estudiar la solución (5.25) en el caso cuando  $r \rightarrow r_+$ . Dicho de otra manera, vamos a analizar la geometría de un espaciotiempo esféricamente simétrico producido por una masa  $M$ , la cual es suficientemente compacta para que la coordenada radial de la superficie  $r$  sea menor que  $r_+$ .

Tenemos que el *invariante de Kretschmann* para la solución (5.25) es dado por

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{12r_+^2}{r^6}. \quad (5.26)$$

Luego, de (5.26) vemos que existe una singularidad cuando

$$r = 0. \quad (5.27)$$

Por otro lado, tenemos que el horizonte de eventos del espaciotiempo descrito por (5.25) es dado por la condición

$$g_{rr} \rightarrow \infty. \quad (5.28)$$

Luego, de (5.25) y (5.28) vemos que el horizonte de eventos es dado por

$$r = r_+. \quad (5.29)$$

Por otro lado, la superficie de redshift infinito del espaciotiempo descrito por (5.25) es dado por la condición

$$g_{tt} = 0. \quad (5.30)$$

Luego, de (5.25) y (5.30) vemos que la superficie de redshift infinito es dada por

$$r = r_+. \quad (5.31)$$

Finalmente, de (5.29) y (5.31) vemos que el horizonte de eventos y la superficie de redshift infinito coinciden para el espaciotiempo descrito por (5.25).

Resumiendo, de los resultados obtenidos en (5.27), (5.29) y (5.31), vemos que las componentes métricas de (5.25) poseen el siguiente comportamiento

$$g_{tt} \rightarrow \infty, \quad g_{rr} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0, \quad (5.32)$$

$$g_{tt} \rightarrow 0, \quad g_{rr} \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow r_+. \quad (5.33)$$

Luego, de (5.32) y (5.33) vemos que la solución (5.25) parece tener un mal comportamiento cuando  $r \rightarrow 0$  y  $r \rightarrow r_+$ , es decir,  $r = 0$  y  $r = r_+$  representan *singularidades*.

Sin embargo, hay que distinguir entre dos tipos de singularidades: las *singularidades coordenadas* y las *singularidades intrínsecas*. Las singularidades coordenadas son aquellas que se generan por una mala elección de un sistema coordenado, por lo que éstas son totalmente removibles por un cambio de coordenadas apropiado. Por otro lado, las singularidades intrínsecas son aquellas que no pueden ser removidas por cambios de coordenadas, es decir, son singularidades físicas o singularidades del espaciotiempo, en donde la curvatura de éste diverge.

Para verificar si un espaciotiempo contiene singularidades intrínsecas hay que calcular cantidades que no dependan de la elección del sistema coordenado, es decir, hay que calcular escalares. Esto se debe a que los escalares son cantidades invariantes bajo transformaciones de coordenadas. De esta forma, debido a que las singularidades intrínsecas son regiones en donde la curvatura diverge se tiene que estas singularidades pueden ser obtenidas a partir de escalares construidos a partir del tensor de curvatura de Riemann  $R^\rho{}_{\mu\nu\lambda}$ . El escalar más conocido construido de esta forma es el invariante de Kretschmann, el cual es dado por  $R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}$ .

Por lo tanto, del invariante calculado en (5.26) vemos que  $r = 0$  es una singularidad intrínseca del espaciotiempo descrito por (5.25), mientras que  $r = r_+$  es una singularidad coordenada que puede ser removida por un cambio de coordenadas. Sin embargo, como veremos a continuación la región definida por  $r = r_+$  posee importantes propiedades.

Ahora vamos a explorar la estructura causal del espaciotiempo descrito por el elemento de línea (5.25), es decir, vamos a estudiar la propagación de fotones en dicho espaciotiempo. En efecto, si consideramos curvas radiales tipo luz, entonces de (5.25) vemos que

$$dt = \pm \frac{dr}{\left|1 - \frac{r_+}{r}\right|}. \quad (5.34)$$

Luego, integrando (5.34) obtenemos

$$t - t_0 = \pm \left[ r - r_0 + r_+ \ln \left( \frac{r - r_+}{r_0 - r_+} \right) \right], \quad (5.35)$$

donde el signo  $+$  corresponde al caso de fotones salientes o que se alejan del centro de simetría y el signo  $-$  corresponde al caso de fotones entrantes o que se acercan al centro de simetría.

Para obtener (5.35) se hizo uso de la integral

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\left|1 - \frac{r_{\pm}}{r}\right|} = \pm \left[ r - r_0 + r_{\pm} \ln \left( \frac{r - r_{\pm}}{r_0 - r_{\pm}} \right) \right], \quad (5.36)$$

donde el signo  $+$  corresponde al caso cuando  $r, r_0 > r_+$  (fuera del horizonte de eventos) y el signo  $-$  corresponde al caso cuando  $r, r_0 < r_+$  (dentro del horizonte de eventos).

En (5.29) y en (5.31) vimos que la superficie  $r = r_+$  es un horizonte de eventos, y además es una superficie de redshift infinito. Debido a esto, se tiene que la coordenada temporal de la trayectoria de los fotones aumenta indefinidamente a medida que estos se acercan al horizonte de eventos, lo cual es consistente con la ecuación (5.35). En la figura (5.2) se ilustran las curvas radiales nulas que siguen los fotones en el espaciotiempo de Schwarzschild en coordenadas de curvatura, es decir, en el espaciotiempo dado por (5.25).

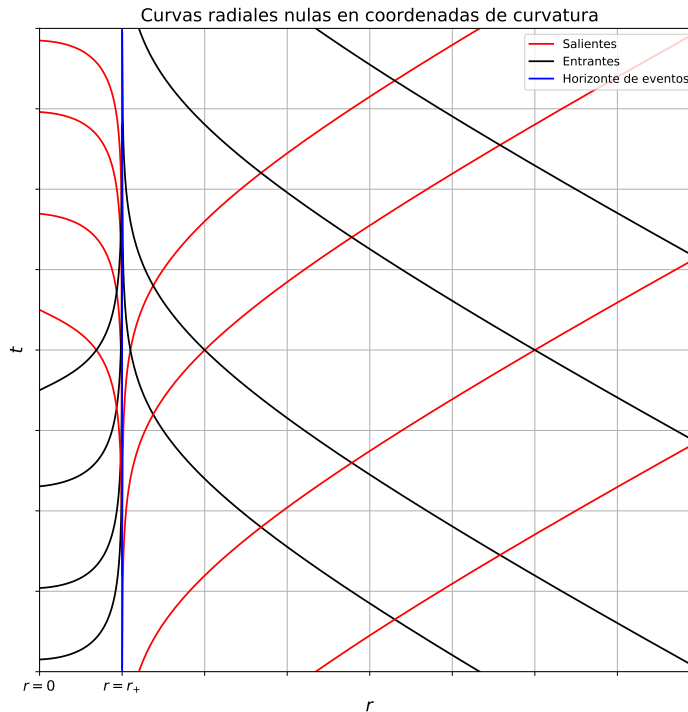


Figura 5.2: Curvas radiales nulas en coordenadas de curvatura. *Fuente: Elaboración propia.*

De esta forma, si consideramos un observador en reposo ubicado fuera del horizonte de eventos, el cual registra cómo los fotones van cayendo hacia el agujero negro, entonces se tiene que este observador nunca registra que los fotones lleguen al horizonte de eventos. Esto se debe a que a medida que los fotones se acercan al horizonte

de eventos estos se desplazan infinitamente hacia el rojo y van perdiendo su energía hasta que desaparecen, ya que como vimos el horizonte de eventos corresponde a una superficie de redshift infinito. Esto se puede ver en la figura (5.2) en donde los conos de luz (formados por la intersección de las curvas radiales entrantes y salientes de los fotones) se van comprimiendo a medida que se acercan al horizonte de eventos, lo que se manifiesta en el aumento indefinido de la coordenada temporal o en el corrimiento infinito hacia el rojo de los fotones en el horizonte de eventos.

Por otro lado, vimos que  $r = r_+$  es una singularidad coordenada que puede ser removida por un cambio apropiado de coordenadas. Debido a esto, se puede encontrar un sistema coordenado en el que el espaciotiempo de Schwarzschild en coordenadas de curvatura, el cual es descrito por la solución (5.25), no tenga un mal comportamiento en  $r = r_+$ . En otras palabras, queremos encontrar un nuevo sistema coordenado en donde no esté presente el efecto de redshift infinito del que hablamos anteriormente.

En efecto, se define la *coordenada de Eddington-Finkelstein retardada* como

$$\bar{t}(t, r) := t + r_+ \ln |r - r_+|. \quad (5.37)$$

Luego, de (5.35) y (5.37) vemos que la trayectoria de fotones salientes y entrantes en coordenadas de Eddington-Finkelstein viene dada por

$$\bar{t} - \bar{t}_0 = r - r_0 + 2r_+ \ln \left( \frac{r - r_+}{r_0 - r_+} \right), \quad (5.38)$$

y

$$\bar{t} - \bar{t}_0 = r_0 - r, \quad (5.39)$$

respectivamente.

Por otro lado, de (5.25) y (5.37) vemos que el espaciotiempo de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein es dado por la solución

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{r_+}{r} \right) d\bar{t}^2 + \frac{2r_+}{r} d\bar{t}dr + \left( 1 + \frac{r_+}{r} \right) dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (5.40)$$

donde (5.40) ya no presenta un mal comportamiento en  $r = r_+$ .

Así, de (5.39) vemos que la trayectoria de fotones entrantes corresponden a líneas rectas con pendiente  $-1$  con respecto al eje  $r$ . Además, de (5.39) vemos que la coordenada temporal del fotón entrante no aumenta indefinidamente al acercarse a  $r = r_+$ , lo cual es consistente con que (5.40) no sea singular en  $r = r_+$ . En la figura

(5.3) se ilustran las curvas radiales nulas que siguen los fotones en el espaciotiempo de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein, es decir, en el espaciotiempo dado por (5.40).

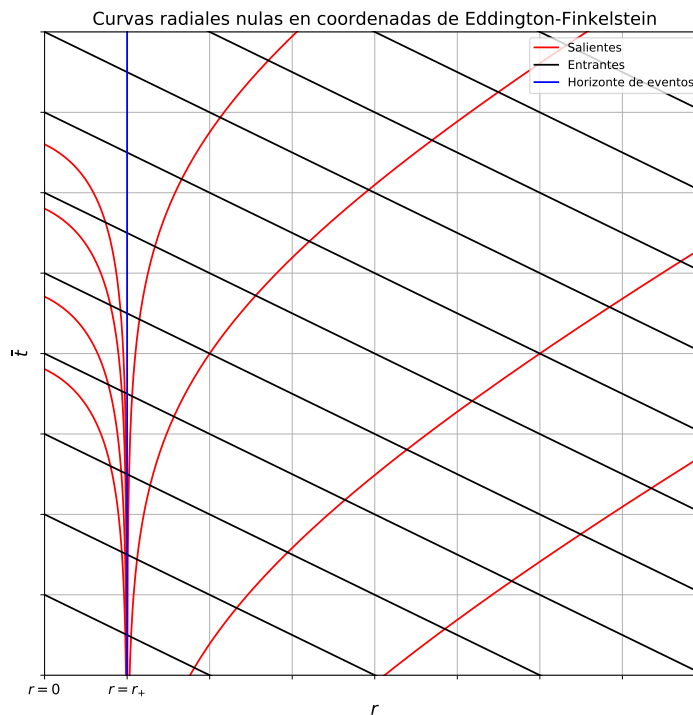


Figura 5.3: Curvas radiales nulas en coordenadas de Eddington-Finkelstein. *Fuente: Elaboración propia.*

De esta forma concluimos que el horizonte de eventos  $r = r_+$  es una superficie en donde solo pueden cruzar partículas entrantes (no solo fotones) o que caen hacia el agujero negro, y una vez que cruzan el horizonte de eventos estas se dirigen inevitablemente hacia la singularidad central, la cual está ubicada en  $r = 0$ . Este comportamiento se puede ver tanto en la figura (5.2) como en la (5.3), donde los conos de luz ubicados dentro del horizonte de eventos se voltean hacia  $r = 0$ . Además, la superficie  $r = r_+$  es un horizonte de eventos en el sentido que no permite a un observador ubicado fuera de esta superficie obtener información de lo que ocurre dentro de ésta, tal como vimos en el caso de fotones cayendo radialmente en el espaciotiempo de Schwarzschild en coordenadas de curvatura.

## 5.2. Agujeros negros en altas dimensiones y objetos negros extendidos

Las teorías gravitacionales en altas dimensiones ( $d > 4$ ) han sido objeto de intenso estudio durante la última década. Específicamente las soluciones de agujeros negros en altas dimensiones que surgen de estas teorías. Las principales motivaciones para el estudio de estas soluciones en este contexto son:

- La teoría de cuerdas es una teoría que contiene a la gravedad, y además ésta predice la existencia de dimensiones extras en nuestro universo. En particular, en el contexto de esta teoría fue posible calcular la entropía de un agujero negro 5-dimensional [59].
- La correspondencia AdS/CFT relaciona las propiedades de un agujero negro  $d$ -dimensional con una teoría cuántica de campos en un espaciotiempo  $d - 1$ -dimensional [60].
- La producción de agujeros negros en dimensiones altas en futuros aceleradores de partículas puede ser posible en escenarios que involucren gravedad en escalas de energía del orden de los  $TeV$  [61, 62].

Hasta el momento se han identificado dos características que solo están presentes en las soluciones de agujeros negros en altas dimensiones. La primera es que estas soluciones presentan una dinámica de rotación diferente y la segunda es la aparición de objetos negros extendidos o agujeros negros con un horizonte de eventos extendido.

Existen dos aspectos que caracterizan la dinámica de rotación de un agujero negro en altas dimensiones. El primero es la existencia de varios planos de rotación independientes y el segundo es que la rotación es afectada por la presencia de un potencial newtoniano de la forma  $-GM/r^{d-3}$  y un potencial centrífugo de la forma  $J^2/M^2r^2$  [63].

Por otro lado, cuando consideramos teorías gravitacionales en altas dimensiones, pueden aparecer soluciones de objetos negros extendidos o agujeros negros con horizontes de eventos extendidos, los cuales poseen una topología más general que la  $(d - 2)$ -esfera. Los ejemplos más conocidos de estas soluciones son las *cuerdas negras* y las *p-branas negras*. La razón de la existencia de estas soluciones es que cuando consideramos teorías gravitacionales en altas dimensiones, estas no ponen restricciones topológicas a la hora de querer encontrar soluciones de agujeros negros, por lo que aparece un amplio espectro de estas soluciones, los cuales pueden poseer diferentes topologías. Sin embargo, las soluciones de agujeros negros en relatividad general 4-dimensional están restringidas por teoremas de unicidad, los cuales aseguran que cualquier solución de agujero negro de esta teoría presenta un horizonte de eventos con topología esférica, por lo que los únicos agujeros negros posibles son los pertenecientes a la familia de Kerr-Newman<sup>8</sup> [3–9].

---

<sup>8</sup>Ver apéndice D.

### 5.2.1. Agujero negro de Schwarzschild-Tangherlini

Existe una solución de agujero negro a las ecuaciones de campo de Lanczos-Lovelok (3.6), la cual recibe el nombre de *agujero negro de Schwarzschild-Tangherlini*. En efecto, esta solución es dada por

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 \gamma_{ij} dz^i dz^j, \quad (5.41)$$

donde la función métrica  $f(r)$  presente en la solución (5.41) es determinada por la ecuación polinomial<sup>9</sup>

$$\frac{M}{(d-2) V_{d-2}^{(\gamma)}} = \sum_{k=0}^N \frac{(d-3)!}{(d-2k-1)!} \alpha_k r^{d-2k-1} [\gamma - f(r)]^k, \quad (5.42)$$

donde  $M$  es la masa y  $V_{d-2}^{(\gamma)}$  es el área del espaciotiempo  $(d-2)$ -dimensional con curvatura constante  $\gamma = 0, \pm 1$ .

La solución (5.41) describe un agujero negro  $d$ -dimensional en la teoría de Lanczos-Lovelock, y además el tercer término de (5.41) describe un espaciotiempo  $(d-2)$ -dimensional con curvatura constante  $\gamma = 0, \pm 1$ .

Ahora, si hacemos  $N = 1$  y  $\Lambda = 0$ , y consideramos una dimensión arbitraria  $d$  en la ecuación polinomial (5.42), se obtiene que la función métrica  $f(r)$  es dada por

$$f(r) = \gamma - \left(\frac{r_+}{r}\right)^{d-3}, \quad (5.43)$$

donde  $r_+^{d-3}$  es el *radio de Schwarzschild generalizado*, el cual se define como

$$r_+^{d-3} := \frac{16\pi M}{(d-2) V_{d-2}^{(\gamma)}}. \quad (5.44)$$

Así, reemplazando (5.43) en (5.41) se obtiene

$$ds^2 = - \left[ \gamma - \left(\frac{r_+}{r}\right)^{d-3} \right] dt^2 + \frac{dr^2}{\left[ \gamma - \left(\frac{r_+}{r}\right)^{d-3} \right]} + r^2 \gamma_{ij} dz^i dz^j, \quad (5.45)$$

donde (5.45) describe una solución de agujero negro en  $d$ -dimensiones de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío y sin constante cosmológica. Luego, si hacemos  $d = 4$  y  $\gamma = 1$  en (5.45), entonces recobramos la solución de Schwarzschild (5.25)<sup>10</sup>.

<sup>9</sup>Esta ecuación polinomial es obtenida usando la solución (5.41) y las definiciones (E.54)-(E.55).

<sup>10</sup>Este resultado es de esperar, ya que como vimos en el capítulo 3 la teoría de Lanczos-Lovelock contiene a la teoría general de la relatividad como caso particular.

### 5.2.2. Cuerdas negras y $p$ -branas negras

En la subsección 5.1.1 vimos que la solución de Schwarzschild en 4 dimensiones (5.25) es encontrada resolviendo las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío y sin constante cosmológica (5.1). Por otro lado, se sabe que si consideramos un espaciotiempo 4-dimensional esféricamente simétrico, el cual es solución de las ecuaciones de campo (5.1), entonces este espaciotiempo debe ser estático. Luego, el único espaciotiempo que cumple estas características es el descrito por la solución (5.25)<sup>11</sup>. A partir de lo dicho anteriormente, surge la siguiente pregunta: ¿Qué ocurre si consideramos un espaciotiempo con una dimensión arbitraria  $d > 4$ ?

Si consideramos un espaciotiempo  $d$ -dimensional, entonces las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío y sin constante cosmológica (5.1) tienen la misma forma, es decir,

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (5.46)$$

donde  $\mu, \nu = 0, 1, \dots, d - 1$ .

Por otra parte, en la subsección 5.2.1 vimos que el elemento de línea (5.45) es solución de las ecuaciones de campo (5.46). Esta solución describe un agujero negro con un horizonte de eventos con una topología más general que la  $(d - 2)$ -esfera. Además, esta solución corresponde a una generalización de la solución de Schwarzschild a una dimensión arbitraria. Sin embargo, el elemento de línea (5.45) no es la única solución a las ecuaciones de campo (5.46).

En efecto, consideremos un espaciotiempo de  $D = d + p$  dimensiones descrito por un elemento de línea de la forma

$$ds^2 = d\tilde{s}_d^2 + \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (5.47)$$

donde el elemento de línea  $d\tilde{s}_d^2$  describe un espaciotiempo  $d$ -dimensional, el elemento de línea  $\delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$  describe un espaciotiempo plano  $p$ -dimensional, y además  $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, p$ . Adicionalmente, si el elemento de línea  $d\tilde{s}_d^2$  describe un agujero negro  $d$ -dimensional, entonces el elemento de línea (5.47) describe un *objeto negro con un horizonte de eventos extendido*, o simplemente un *objeto negro extendido*.

Por otro lado, las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío y sin constante cosmológica se pueden reescribir de la forma

$$R_{AB} = 0, \quad (5.48)$$

---

<sup>11</sup>Ver apéndice D.



donde los índices  $A, B$  se dividen de tal forma que si  $\{A, B, \dots\} = \{\mu, \nu, \dots\} = \{0, 1, \dots, d-1\}$ , entonces estos índices corren sobre el espaciotiempo descrito por el elemento de línea  $d\tilde{s}_d^2$ . Por otro lado, si  $\{A, B, \dots\} = \{\alpha, \beta, \dots\} = \{1, 2, \dots, p\}$ , entonces estos índices corren sobre el espaciotiempo descrito por el elemento de línea  $\delta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ <sup>12</sup>. Luego, si el elemento de línea correspondiente a la brana satisface las ecuaciones de campo (5.46), entonces es simple verificar que el elemento de línea (5.47) satisface las ecuaciones de campo (5.48).

Ahora, consideremos el elemento de línea

$$ds^2 = - \left[ \gamma - \left( \frac{r_+}{r} \right)^{d-3} \right] dt^2 + \frac{dr^2}{\left[ \gamma - \left( \frac{r_+}{r} \right)^{d-3} \right]} + r^2 \gamma_{ij} dz^i dz^j + dz^2. \quad (5.49)$$

Comparando (5.47) con (5.49) se puede ver el elemento de línea correspondiente a la brana es dado por

$$d\tilde{s}_d^2 = - \left[ \gamma - \left( \frac{r_+}{r} \right)^{d-3} \right] dt^2 + \frac{dr^2}{\left[ \gamma - \left( \frac{r_+}{r} \right)^{d-3} \right]} + r^2 \gamma_{ij} dz^i dz^j, \quad (5.50)$$

y el elemento de línea correspondiente a las direcciones extendidas es dado por

$$\delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dz^2. \quad (5.51)$$

Anteriormente vimos que el elemento de línea (5.50) es solución de las ecuaciones de campo (5.46), luego es simple verificar que el elemento de línea (5.49) satisface las ecuaciones de campo (5.48). Luego, la solución (5.49) describe un objeto negro extendido, el cual recibe el nombre de *cuerda negra homogénea*. De esta forma, la cuerda negra homogénea construida en (5.49) posee un horizonte de eventos cilíndrico, y además posee una densidad de masa finita. No obstante, si la dirección extendida es compacta, entonces la masa total de la cuerda negra homogénea es finita.

Por otro lado, consideremos el elemento de línea

$$ds^2 = - \left[ \gamma - \left( \frac{r_+}{r} \right)^{d-3} \right] dt^2 + \frac{dr^2}{\left[ \gamma - \left( \frac{r_+}{r} \right)^{d-3} \right]} + r^2 \gamma_{ij} dz^i dz^j + \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (5.52)$$

Comparando (5.47) con (5.52) se puede ver el elemento de línea correspondiente a la brana es dado por

---

<sup>12</sup>Desde ahora en adelante al elemento de línea  $d\tilde{s}_d^2$  le llamaremos la brana y al elemento de línea  $\delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$  le llamaremos direcciones extendidas.

$$d\tilde{s}_d^2 = - \left[ \gamma - \left( \frac{r_+}{r} \right)^{d-3} \right] dt^2 + \frac{dr^2}{\left[ \gamma - \left( \frac{r_+}{r} \right)^{d-3} \right]} + r^2 \gamma_{ij} dz^i dz^j, \quad (5.53)$$

y el elemento de línea correspondiente a las direcciones extendidas es dado por

$$\delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dx_1^2 + \dots + dx_p^2. \quad (5.54)$$

Luego, la solución (5.52) describe un objeto negro extendido, el cual recibe el nombre de *p-brana negra homogénea*. De esta forma, la brana negra homogénea construida en (5.52) posee un horizonte de eventos con una topología más general que la cuerda negra homogénea (5.49). Sin embargo, si hacemos  $p = 1$  en la solución (5.52), entonces recobramos la solución (5.49), es decir, una cuerda negra corresponde a una 1-brana negra.

Hasta el momento hemos encontrado soluciones de cuerda negra homogénea y *p*-brana negra homogénea de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío y sin constante cosmológica en una dimensión arbitraria. Estas soluciones se construyeron simplemente agregando direcciones extendidas planas al elemento de línea correspondiente a la brana. En otras palabras, el elemento de línea correspondiente a la brana se *oxida* al agregar dichas direcciones. De esta manera, es simple verificar que las ecuaciones de campo a lo largo de la brana son compatibles con las ecuaciones de campo a lo largo de las direcciones extendidas, tanto en el caso de la cuerda negra homogénea como en el caso de la *p*-brana negra homogénea. Luego, debido a la compatibilidad de las ecuaciones de campo se puede ver que la construcción de cuerdas negras homogéneas y *p*-branas negras homogéneas es consistente en el caso considerado. Ahora, basándonos en los resultados obtenidos anteriormente, surge la siguiente pregunta: ¿Es posible construir cuerdas negras homogéneas y *p*-branas negras homogéneas si se consideran las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío y con constante cosmológica en una dimensión arbitraria? A continuación veremos que la respuesta a esta pregunta es negativa.

Si consideramos las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío y con constante cosmológica en una dimensión arbitraria, entonces no es posible la construcción de soluciones analíticas de cuerdas negras homogéneas y *p*-branas negras homogéneas, ya que las ecuaciones de campo a lo largo de la brana no son compatibles con las ecuaciones de campo a lo largo de las direcciones extendidas. Sin embargo, si es posible construir soluciones numéricas de cuerdas negras no-homogéneas y *p*-branas negras no-homogéneas en este contexto por medio de la introducción de factores de deformación [64, 65]. Sin embargo, la introducción de estos factores de deformación complican el análisis de la estabilidad dinámica de estas soluciones. No obstante, a continuación mostraremos que si consideramos la teoría general de la relatividad con una constante cosmológica negativa acoplada minimalmente a campos escalares sin masa, los cuales tienen una dependencia lineal en las direcciones extendidas, entonces sí es posible construir soluciones analíticas de cuerda negra homogénea y *p*-brana

negra homogénea.

En efecto, consideremos la teoría general de la relatividad en una dimensión  $D = d + p$  acoplada minimalmente a  $p$  campos escalares  $\phi_{(k)}$ , donde  $k = 1, 2, \dots, p$ . En este caso las ecuaciones de campo para la métrica son dadas por

$$\mathcal{E}_{AB} := G_{AB} + \Lambda g_{AB} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p T_{AB}^{(k)} = 0, \quad (5.55)$$

donde el tensor energía-momentum  $T_{AB}^{(k)}$  es dado por

$$T_{AB}^{(k)} = \nabla_A \phi_{(k)} \nabla_B \phi_{(k)} - \frac{1}{2} g_{AB} \nabla_C \phi_{(k)} \nabla^C \phi_{(k)}. \quad (5.56)$$

Por otro lado, las ecuaciones de campo para los campos escalares son dadas por

$$\square \phi_{(k)} = 0. \quad (5.57)$$

Ahora, consideremos el ansatz

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 \gamma_{ij} dz^i dz^j + \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (5.58)$$

Además, a partir de las ecuaciones de campo para los campos escalares (5.57) podemos postular un ansatz para dichos campos de tal forma que solo dependan de las direcciones extendidas, es decir,

$$\phi_{(k)} = \lambda x^k, \quad (5.59)$$

donde  $\lambda$  es una constante de integración.

Introduciendo (5.58) y (5.59) en las ecuaciones de campo (5.55) se obtiene que las ecuaciones de campo a lo largo de la brana son dadas por

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \left( \Lambda + \frac{p\lambda^2}{4} \right) g_{\mu\nu} = 0, \quad (5.60)$$

y las ecuaciones de campo a lo largo de las direcciones extendidas son dadas por

$$\mathcal{E}^{(p)} = R - 2\Lambda + \left( 1 - \frac{p}{2} \right) \lambda^2 = 0. \quad (5.61)$$

Luego, tomando la traza de las ecuaciones de campo (5.60) se obtiene

$$g^{\mu\nu}\mathcal{E}_{\mu\nu} = R - \frac{2d}{(d-2)}\left(1 + \frac{p\lambda^2}{4}\right) = 0. \quad (5.62)$$

En general, la compatibilidad de las ecuaciones (5.61) y (5.62) induce más condiciones sobre la función métrica  $f(r)$  que las ecuaciones de campo a lo largo de la brana (5.60). Sin embargo, esto puede ser evitado imponiendo la condición de compatibilidad off-shell  $g^{\mu\nu}\mathcal{E}_{\mu\nu} \sim \mathcal{E}^{(p)}$ , la cual fija la constante de integración  $\lambda$  de la forma

$$\lambda = \sqrt{-\frac{4\Lambda}{d+p-2}}. \quad (5.63)$$

Ahora, usando las ecuaciones de campo a lo largo de la brana (5.60) y la constante de integración (5.63) se obtiene que la función métrica  $f(r)$  es dada por<sup>13</sup>

$$f(r) = \gamma - \frac{16\pi M}{(d-2)V_{d-2}^{(\gamma)}L^p r^{d-3}} - \frac{2\Lambda r^2}{(d-1)(d+p-2)}. \quad (5.64)$$

Finalmente, reemplazando la constante de integración (5.63) en el ansatz (5.59) se obtiene

$$\phi_{(k)} = \sqrt{-\frac{4\Lambda}{d+p-2}}x^k, \quad (5.65)$$

y además reemplazando (5.64) en el ansatz (5.58) se obtiene

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left[ \gamma - \frac{16\pi M}{(d-2)V_{d-2}^{(\gamma)}L^p r^{d-3}} - \frac{2\Lambda r^2}{(d-1)(d+p-2)} \right] dt^2 \\ & + \frac{dr^2}{\left[ \gamma - \frac{16\pi M}{(d-2)V_{d-2}^{(\gamma)}L^p r^{d-3}} - \frac{2\Lambda r^2}{(d-1)(d+p-2)} \right]} + r^2 \gamma_{ij} dz^i dz^j + \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Por lo tanto, los campos escalares (5.65) y el elemento de línea (5.66) describen una solución de  $p$ -brana negra homogénea de las ecuaciones de campo (5.55) y (5.57). Adicionalmente, si hacemos  $p = 1$  en (5.65) y (5.66), entonces obtenemos una solución de cuerda negra homogénea, la cual es dada por

<sup>13</sup>En este caso el radio de Schwarzschild generalizado  $r_{+,d}$  es definido por la expresión  $r_{+,d} := (16\pi M) / \left( (d-2)V_{d-2}^{(\gamma)}L^p \right)$ , donde  $L$  es el largo correspondiente a una 1-brana.

$$\phi_{(1)} = \sqrt{-\frac{4\Lambda}{d-1}}x^1, \quad (5.67)$$

y

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left[ \gamma - \frac{16\pi M}{(d-2)V_{d-2}^{(\gamma)}Lr^{d-3}} - \frac{2\Lambda r^2}{(d-1)(d+p-2)} \right] dt^2 \\ & + \frac{dr^2}{\left[ \gamma - \frac{16\pi M}{(d-2)V_{d-2}^{(\gamma)}Lr^{d-3}} - \frac{2\Lambda r^2}{(d-1)(d+p-2)} \right]} + r^2 \gamma_{ij} dz^i dz^j + dx_1^2. \end{aligned} \quad (5.68)$$

En el capítulo 6 extenderemos los resultados obtenidos en (5.67) y (5.68) a un escenario que considere teorías de Lovelock con potencias arbitrarias en la curvatura, es decir, construiremos una solución de cuerda negra homogénea en teorías de Lovelock con acoplamientos no-minimales con campos escalares.

### 5.3. Breve introducción a la termodinámica de agujeros negros

Desde que Jacob Bekenstein y Stephen Hawking publicaron sus conocidos artículos [66, 67] entendemos a los agujeros negros como sistemas que poseen propiedades termodinámicas. En efecto, a estos sistemas se les puede asociar una temperatura y una entropía. Como consecuencia, un agujero negro puede emitir radiación, la cual se denomina *radiación de Hawking*. Actualmente la radiación de Hawking no ha sido directamente observada, ya que un agujero negro astrofísico debiese tener una temperatura del orden de los microkelvin, la cual es mucho menor que la temperatura del fondo cósmico de microondas. No obstante, las propiedades termodinámicas de los agujeros negros han sido bien estudiadas hasta ahora, ya que estas propiedades se han analizado mediante métodos independientes, los cuales conducen a los mismos resultados. De esta manera, la temperatura de un agujero negro se define como

$$T := \frac{\kappa_s}{2\pi}, \quad (5.69)$$

donde  $\kappa_s$  es la gravedad superficial.

Por otro lado, la entropía de un agujero negro es dada por la expresión

$$S = \frac{A}{4}, \quad (5.70)$$

donde  $A$  es el área del horizonte de eventos.

De la mecánica estadística se sabe que las propiedades termodinámicas de un sistema corresponden a la manifestación macroscópica de diferentes comportamientos que pueden tener los constituyentes microscópicos de dicho sistema. Dentro de estas propiedades termodinámicas se encuentra la temperatura, la cual es una cantidad que mide la energía promedio de los constituyentes microscópicos de un sistema. Además, a partir del número de microestados de un sistema se puede encontrar la entropía, la cual tiene relación muy estrecha con la temperatura. Considerando lo mencionado anteriormente nos podemos preguntar: ¿Es posible usar estas mismas propiedades termodinámicas para lograr entender los agujeros negros a un nivel microscópico? Hasta hace aproximadamente 20 años no se conocía nada sobre el comportamiento microscópico de los agujeros negros. Sin embargo, actualmente se conoce mucho sobre el comportamiento microscópico de estos sistemas.

### 5.3.1. Las cuatro leyes de la termodinámica de agujeros negros

Como hemos dicho anteriormente, los agujeros negros se pueden entender como sistemas que poseen propiedades termodinámicas. Por otro lado, debido a un teorema de Stephen Hawking [68] se tiene que el área  $A$  del horizonte de eventos nunca disminuye (siempre que la energía de la materia sea positiva y el espaciotiempo sea regular). Posteriormente, a partir de este teorema Jacob Bekenstein propuso que a los agujeros negros se les puede asignar una entropía  $S$ , la cual es proporcional al área del horizonte de eventos. Así, la entropía de un agujero negro es dada por la expresión (5.70), la cual nos dice que la entropía de un agujero negro tiene una relación muy estrecha con el área del horizonte de eventos. Poco tiempo después del trabajo de Jacob Bekenstein, se formularon *las cuatro leyes de la termodinámica de agujeros negros* [69], dentro de las cuales se incluye el teorema de Stephen Hawking, y además se agregan otras tres leyes adicionales. En efecto, estas cuatro leyes son:

- **Ley cero:** La gravedad superficial  $\kappa_s$  es constante en el horizonte de eventos.
- **Primera Ley:** Si tenemos dos agujeros negros estacionarios, los cuales difieren solo por pequeñas variaciones de los parámetros  $M$ ,  $J$  y  $Q$ <sup>14</sup>, entonces se cumple que

$$dM = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ, \quad (5.71)$$

donde  $\Omega$  es la velocidad angular y  $\Phi$  es el potencial eléctrico, ambos evaluados en el horizonte de eventos.

- **Segunda Ley:** El área del horizonte de eventos nunca disminuye, es decir,

$$dA \geq 0. \quad (5.72)$$

- **Tercera Ley:** Es imposible reducir la gravedad superficial  $\kappa_s$  a cero en un número finito de pasos.

---

<sup>14</sup>Ver apéndice D.

Finalmente, cabe mencionar que la gravedad superficial  $\kappa_s$  puede ser definida de la forma [45]

$$\kappa_s := \frac{1}{2} \frac{df}{dr}, \quad (5.73)$$

donde  $f = f(r)$  es la función métrica y la derivada presente en la definición (5.73) está evaluada en el horizonte de eventos. Luego, usando (5.73) se obtiene que la expresión para la temperatura dada en (5.69) puede ser reescrita como

$$T = \frac{1}{4\pi} \frac{df}{dr}. \quad (5.74)$$

### 5.3.2. Entropía de Wald

Consideremos un lagrangiano  $L$  con una dependencia de la forma

$$L = L(g_{\mu\nu}, R_{\mu\nu\lambda\rho}, \nabla_{\xi_1} R_{\mu\nu\lambda\rho}, \dots, \nabla_{(\xi_1} \nabla_{\xi_2} \dots \nabla_{\xi_{n-1}} \nabla_{\xi_n)} R_{\mu\nu\lambda\rho}, \nabla_{\xi_1} \psi, \dots, \nabla_{(\xi_1} \nabla_{\xi_2} \dots \nabla_{\xi_{l-1}} \nabla_{\xi_l)} \psi), \quad (5.75)$$

donde  $\psi$  denota un campo de materia arbitrario,  $\nabla_\mu$  es la derivada covariante asociada a la métrica  $g_{\mu\nu}$  y  $R_{\mu\nu\lambda\rho}$  es el tensor de curvatura de Riemann.

Ahora, considerando el lagrangiano introducido en (5.75), y además considerando un espaciotiempo de dimensión  $d$ , el cual posee una superficie de bifurcación tipo espacio  $\Sigma$  de  $(d-2)$  dimensiones se tiene que la entropía de Wald es definida como [70]

$$S := -2\pi \oint \frac{\delta L}{\delta R_{\mu\nu\lambda\rho}} \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\lambda\rho} dV_{d-2}, \quad (5.76)$$

donde  $dV_{d-2}$  es el elemento de volumen de  $\Sigma$ ,  $\epsilon_{\mu\nu}$  es un vector binormal normalizado de la forma  $\epsilon_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu} = -2$  y  $\delta L / \delta R_{\mu\nu\lambda\rho}$  es la variación funcional del lagrangiano (5.75) con respecto al tensor de curvatura de Riemann  $R_{\mu\nu\lambda\rho}$ , la cual es dada por

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta R_{\mu\nu\lambda\rho}} = & \frac{\partial L}{\partial R_{\mu\nu\lambda\rho}} \\ & - \nabla_{\xi_1} \left( \frac{\partial L}{\partial \nabla_{\xi_1} R_{\mu\nu\lambda\rho}} \right) \\ & + \dots + (-1)^n \nabla_{(\xi_1} \nabla_{\xi_2} \dots \nabla_{\xi_{n-1}} \nabla_{\xi_n)} \left( \frac{\partial L}{\partial \nabla_{(\xi_1} \nabla_{\xi_2} \dots \nabla_{\xi_{n-1}} \nabla_{\xi_n)} R_{\mu\nu\lambda\rho}} \right). \end{aligned} \quad (5.77)$$

Finalmente, determinemos la entropía usando la fórmula de Wald (5.76) para el caso de la teoría general de la relatividad en el vacío. En efecto, considerando la

acción (2.74) sin la parte de materia y usando (5.76)-(5.77) se obtiene que la entropía es dada por

$$S = \frac{A}{4}. \quad (5.78)$$



## Capítulo 6

# Cuerdas negras homogéneas en Lovelock-Horndeski

En este capítulo vamos a construir soluciones de cuerdas negras homogéneas en la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet acoplada a dos campos escalares. Luego, se estudiarán las propiedades térmicas de las soluciones encontradas anteriormente. Posteriormente, extenderemos los resultados encontrados en el caso de la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet acoplada a dos campos escalares a un escenario que considere teorías de Lovelock acopladas no-minimalmente a campos escalares. Finalmente, utilizando el mismo método para la construcción de cuerdas negras homogéneas en teorías de Lovelock acopladas no-minimalmente a campos escalares, se construirán dos soluciones extras en la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet, las cuales corresponden a extensiones cilíndricas de una solución de agujero de gusano y una solución de agujero negro rotante. Este capítulo está basado en el paper [71], el cual fue publicado en la revista *European Physical Journal C*. El cálculo detallado de los resultados que se muestran a lo largo de este capítulo se encuentra en los apéndices C, E y F.

### 6.1. Cuerdas negras homogéneas en la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet

Consideremos la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet en una dimensión arbitraria  $D$  acoplada minimalmente a un campo escalar  $\psi$ , y además acoplada no-minimalmente a un campo escalar  $\chi$ . En efecto, la acción de esta teoría es dada por

$$I[g_{AB}, \psi, \chi] = \int d^D x \sqrt{-g} \left[ R - 2\Lambda + \alpha L^{(2)} - \frac{1}{2} g_{AB} \nabla^A \psi \nabla^B \psi + \frac{\beta}{2} G_{AB} \nabla^A \chi \nabla^B \chi \right], \quad (6.1)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son las constantes de acoplamiento.

Ahora, variando la acción (6.1) con respecto a la métrica  $g_{AB}$  se obtienen las ecuaciones de campo

$$\mathcal{E}_{AB} := G_{AB} + \Lambda g_{AB} + \alpha E_{AB}^{(2)} - \frac{1}{2} T_{AB}^{(0)} - \frac{\beta}{8} T_{AB}^{(1)} = 0, \quad (6.2)$$

donde  $T_{AB}^{(0)}$  es el tensor energía-momentum de orden 0 en la curvatura y  $T_{AB}^{(1)}$  es el tensor energía-momentum de orden 1 en la curvatura, los cuales son dados por

$$T_{AB}^{(0)} = \nabla_A \psi \nabla_B \psi - \frac{1}{2} g_{AB} \nabla_C \psi \nabla^C \psi, \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} T_{AB}^{(1)} = & 2\nabla_A \chi \nabla_B \chi R - 8\nabla_C \chi \nabla_{(A} \chi R^C{}_{B)} - 4\nabla^C \chi \nabla^D \chi R_{ACBD} \\ & - 4\nabla_A \nabla^C \chi \nabla_B \nabla_C \chi + 4\nabla_A \nabla_B \chi \square \chi + 2G_{AB} (\nabla \chi)^2 \\ & - g_{AB} \left[ -2\nabla^C \nabla^D \chi \nabla_C \nabla_D \chi + 2(\square \chi)^2 - 4\nabla_C \chi \nabla_D \chi R^{CD} \right], \end{aligned} \quad (6.4)$$

respectivamente.

Por otro lado, variando la acción (6.1) con respecto a los campos escalares  $\psi$  y  $\chi$  se obtienen las ecuaciones de campo

$$g_{AB} \nabla^A \nabla^B \psi = 0, \quad G_{AB} \nabla^A \nabla^B \chi = 0, \quad (6.5)$$

respectivamente.

Ahora, consideremos el ansatz

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 \gamma_{ij} dz^i dz^j + dz^2. \quad (6.6)$$

Además, a partir de las ecuaciones de campo para los campos escalares (6.5) podemos postular un ansatz para dichos campos de tal forma que solo dependan de la dirección extendida  $z$ , es decir,

$$\psi(z) = c_0 z, \quad \chi(z) = c_1 z. \quad (6.7)$$

Introduciendo (6.6) y (6.7) en las ecuaciones de campo (6.2) se obtiene que las ecuaciones de campo a lo largo de la brana son dadas por

$$\mathcal{E}^\mu{}_\nu = -2 \left( \Lambda + \frac{c_0^2}{4} \right) E^{(0)\mu}{}_\nu + \left( 1 - \frac{\beta c_1^2}{4} \right) E^{(1)\mu}{}_\nu + \alpha E^{(2)\mu}{}_\nu = 0, \quad (6.8)$$

y la ecuación de campo a lo largo de la dirección extendida es dada por

$$\mathcal{E}^z_z = \left( \Lambda - \frac{c_0^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\beta c_1^2}{4} \right) R - \frac{\alpha}{2} L^{(2)} = 0. \quad (6.9)$$

Luego, tomando la traza de las ecuaciones de campo (6.8) se obtiene

$$g^{\mu\nu} \mathcal{E}_{\mu\nu} = \left( \Lambda + \frac{c_0^2}{4} \right) d + \left( 1 - \frac{\beta c_1^2}{4} \right) \left( 1 - \frac{d}{2} \right) R + \alpha \left( 2 - \frac{d}{2} \right) L^{(2)} = 0. \quad (6.10)$$

La compatibilidad entre las ecuaciones (6.9) y (6.10) induce más condiciones sobre la función métrica  $f(r)$  que las ecuaciones de campo a lo largo de la brana (6.8). Sin embargo, esto puede ser evitado imponiendo la condición de compatibilidad off-shell  $g^{\mu\nu} \mathcal{E}_{\mu\nu} \sim \mathcal{E}^z_z$ , la cual fija las constantes de integración  $c_0^2$  y  $c_1^2$  de la forma

$$c_0 = \sqrt{-\frac{8\Lambda}{d-2}}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{4}{(d-3)\beta}}. \quad (6.11)$$

Ahora, reemplazando las constantes de integración (6.11) en las ecuaciones de campo a lo largo de la brana (6.8) se obtiene

$$\frac{(d-3)(d-4)}{(d-2)} \Lambda g_{\mu\nu} + (d-4) G_{\mu\nu} + (d-3) \alpha E_{\mu\nu}^{(2)} = 0. \quad (6.12)$$

Luego, de las ecuaciones de campo (6.12) se puede verificar que la mínima dimensión que permite la existencia de un horizonte de eventos es  $d = 5$ . Así, para poder construir soluciones de cuerdas negras homogéneas en la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet hay que considerar como mínimo una dimensión  $D = 5 + 1$ .

Por otra parte, de las ecuaciones de campo (6.12) se obtiene una ecuación polinomial cuya incógnita es la función métrica  $f(r)$ , la cual es dada por

$$m = (d-2) V_{d-2}^{(\gamma)} \sum_{k=0}^2 \frac{(d-4)}{(d-k-2)} \frac{(d-3)!}{(d-2k-1)!} \alpha_k r^{d-2k-1} (\gamma - f(r))^k, \quad (6.13)$$

donde  $m$  es la densidad de masa y  $V_{d-2}^{(\gamma)}$  denota el área del espaciotiempo  $(d-2)$ -dimensional descrito por la métrica  $\gamma_{ij}$ .

Por otro lado, reemplazando las constantes de integración (6.11) en el ansatz (6.7) se obtiene

$$\psi(z) = \sqrt{-\frac{8\Lambda}{d-2}} z, \quad \chi(z) = \sqrt{\frac{4}{(d-3)\beta}} z. \quad (6.14)$$

Así, las soluciones de la ecuación polinomial (6.13) y los campos escalares (6.14) describen soluciones de cuerdas negras homogéneas de las ecuaciones de campo (6.2) y (6.5), las cuales pueden ser asintóticamente  $\text{AdS}_d \times R$  siempre y cuando se incluya el término cosmológico.

Ahora, de la acción (6.1) vemos que el lagrangiano de la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet en una dimensión arbitraria  $D$  acoplado minimalmente a un campo escalar  $\psi$ , y además acoplado no-minimalmente a un campo escalar  $\chi$  es dado por

$$L(g_{AB}, \psi, \chi) = R - 2\Lambda + \alpha L^{(2)} - \frac{1}{2} g_{AB} \nabla^A \psi \nabla^B \psi + \frac{\beta}{2} G_{AB} \nabla^A \chi \nabla^B \chi. \quad (6.15)$$

Luego, de la entropía de Wald (5.76), del lagrangiano (6.15) y de los campos escalares (6.14) se obtiene que la entropía por unidad de longitud de la cuerda negra homogénea descrita por las soluciones de la ecuación polinomial (6.13) y los campos escalares (6.14) es dada por

$$s = 4\pi \sum_{k=0}^2 \frac{k(d-4)}{(d-k-2)} \frac{(d-2)}{(d-2k)} \frac{(d-3)!}{(d-2k-1)!} \alpha_k r_+^{d-2k} \gamma^{k-1} V_{d-2}^{(\gamma)}, \quad (6.16)$$

donde  $s = S/L$  y  $r_+$  es la coordenada radial del horizonte de eventos.

Por otro lado, usando la expresión para la temperatura (5.74) y la ecuación polinomial (6.13) se obtiene que la temperatura de la cuerda negra homogénea descrita por las soluciones de la ecuación polinomial (6.13) y los campos escalares (6.16) es dada por

$$T = \frac{1}{4\pi} \frac{\sum_{k=0}^2 \frac{(d-2k-1)(d-4)}{(d-k-2)} \frac{(d-3)!}{(d-2k-1)!} \alpha_k r_+^{d-2k-2} \gamma^k}{\sum_{p=0}^2 \frac{p(d-4)}{(d-p-2)} \frac{(d-3)!}{(d-2p-1)!} \alpha_p r_+^{d-2p-1} \gamma^{p-1}}. \quad (6.17)$$

Ahora, usando la ecuación polinomial (6.13), la densidad de entropía (6.16) y la temperatura (6.17) se puede verificar que se cumple la primera ley de la termodinámica (5.71) para la cuerda negra homogénea descrita por las soluciones de la ecuación polinomial (6.13) y los campos escalares (6.14), es decir,

$$dm = T ds. \quad (6.18)$$

### 6.1.1. Cuerdas negras homogéneas en la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet en $D = 5 + 1$

Ahora, vamos a analizar las soluciones de cuerdas negras homogéneas en  $D = 5 + 1$ . En efecto, haciendo  $d = 5$  en la ecuación polinomial (6.13), y además considerando  $\Lambda \neq 0$  se obtiene que la función métrica  $f(r)$  es dada por

$$f(r) = \gamma + \frac{r^2}{8\alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{16}{9}\alpha\Lambda + \frac{32}{3V_3^{(\gamma)}} \frac{m\alpha}{r^4}} \right). \quad (6.19)$$

Además, haciendo  $d = 5$ , y además considerando  $\Lambda \neq 0$  en los campos escalares (6.14) se obtiene

$$\psi(z) = \sqrt{-\frac{8\Lambda}{3}}z, \quad \chi(z) = \sqrt{\frac{2}{\beta}}z. \quad (6.20)$$

Por otro lado, haciendo  $d = 5$  en la ecuación polinomial (6.13), y además considerando  $\Lambda = 0$  se obtiene que la función métrica  $f(r)$  es dada por

$$f(r) = \gamma + \frac{r^2}{8\alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{32}{3V_3^{(\gamma)}} \frac{m\alpha}{r^4}} \right). \quad (6.21)$$

Además, haciendo  $d = 5$ , y además considerando  $\Lambda = 0$  en los campos escalares (6.14) se obtiene

$$\chi(z) = \sqrt{\frac{2}{\beta}}z. \quad (6.22)$$

A continuación, en la figura (6.1) se muestran dos gráficos con el comportamiento de las funciones métricas dadas en (6.19) y (6.21) en el caso  $\gamma = 1$ .

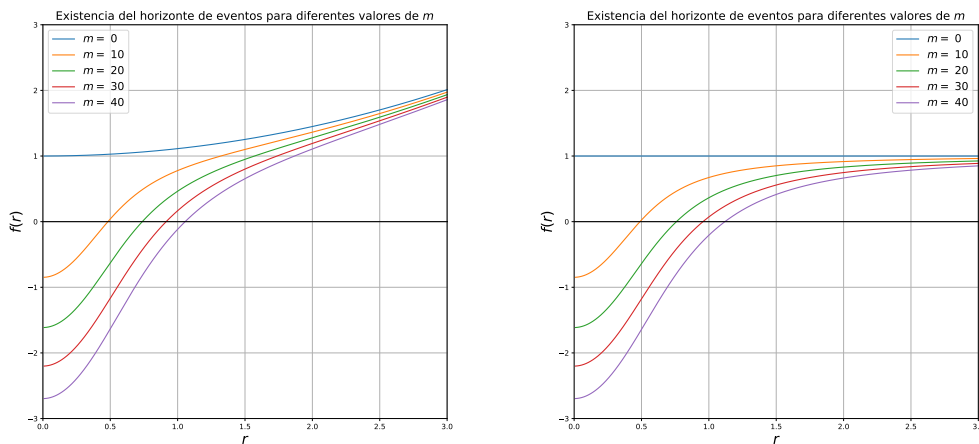


Figura 6.1: Comportamiento de la función métrica (6.19) (izquierda) y de la función métrica (6.21) (derecha) en el caso  $\gamma = 1$ . Fuente: *Elaboración propia*.

Ahora, reemplazando (6.19) en el ansatz (6.6) se obtiene

$$ds^2 = - \left[ \gamma + \frac{r^2}{8\alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{16}{9}\alpha\Lambda + \frac{32}{3V_3^{(\gamma)}} \frac{m\alpha}{r^4}} \right) \right] dt^2 + \frac{dr^2}{\left[ \gamma + \frac{r^2}{8\alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{16}{9}\alpha\Lambda + \frac{32}{3V_3^{(\gamma)}} \frac{m\alpha}{r^4}} \right) \right]} + r^2 \gamma_{ij} dz^i dz^j + dz^2. \quad (6.23)$$

De esta forma, los campos escalares (6.20) y el elemento de línea (6.23) describen una solución de cuerda negra homogénea de las ecuaciones de campo (6.2) y (6.5). Además, del gráfico izquierdo de la figura (6.1) vemos la cuerda negra homogénea descrita por (6.20) y (6.23) es asintóticamente  $\text{AdS}_5 \times R$ .

Por otro lado, reemplazando (6.21) en el ansatz (6.6) se obtiene

$$ds^2 = - \left[ \gamma + \frac{r^2}{8\alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{32}{3V_3^{(\gamma)}} \frac{m\alpha}{r^4}} \right) \right] dt^2 + \frac{dr^2}{\left[ \gamma + \frac{r^2}{8\alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{32}{3V_3^{(\gamma)}} \frac{m\alpha}{r^4}} \right) \right]} + r^2 \gamma_{ij} dz^i dz^j + dz^2. \quad (6.24)$$

Así, el campo escalar (6.22) y el elemento de línea (6.24) describen una solución de cuerda negra homogénea de las ecuaciones de campo (6.2) y (6.5). Además, del gráfico derecho de la figura (6.1) vemos la cuerda negra homogénea descrita por (6.22) y (6.24) es asintóticamente plana.

Por otro lado, haciendo  $d = 5$  y  $\gamma = 1$  en (6.16) se obtiene que la entropía por unidad de longitud de la cuerda negra homogénea descrita por los campos escalares (6.20) y el elemento de línea (6.23) es dada por

$$s = 4\pi^3 r_+^3 + 96\pi^3 r_+ \alpha. \quad (6.25)$$

Además, se puede verificar que el primer término de la densidad de entropía obtenida en (6.25) recibe una contribución de los campos escalares (6.20), es decir, la entropía debida a la relatividad general (5.78) recibe una corrección del sector de materia.

Por otro lado, haciendo  $d = 5$  y  $\gamma = 1$  en (6.17) se obtiene que la temperatura de la cuerda negra homogénea descrita por los campos escalares (6.20) y el elemento de línea (6.23) es dada por

$$T = \frac{2r_+^3 + 9r_+}{2\pi (9r_+^2 - 2l^4 + 18l^2)}, \quad (6.26)$$

donde  $l$  es el radio de curvatura.

### 6.1.2. Cuerdas negras homogéneas en la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet en $D = 6 + 1$

Ahora, vamos a analizar las soluciones de cuerdas negras homogéneas en  $D = 6+1$ . En efecto, haciendo  $d = 6$  en la ecuación polinomial (6.13), y además considerando  $\Lambda \neq 0$  se obtiene que la función métrica  $f(r)$  es dada por

$$f(r) = \gamma + \frac{r^2}{18\alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{27}{10}\alpha\Lambda + \frac{27}{2V_4^{(\gamma)}} \frac{m\alpha}{r^5}} \right). \quad (6.27)$$

Además, haciendo  $d = 6$ , y además considerando  $\Lambda \neq 0$  en los campos escalares (6.14) se obtiene

$$\psi(z) = \sqrt{-2\Lambda}z, \quad \chi(z) = \sqrt{\frac{4}{3\beta}}z. \quad (6.28)$$

Por otro lado, haciendo  $d = 6$  en la ecuación polinomial (6.13), y además considerando  $\Lambda = 0$  se obtiene que la función métrica  $f(r)$  es dada por

$$f(r) = \gamma + \frac{r^2}{18\alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{27}{2V_4^{(\gamma)}} \frac{m\alpha}{r^5}} \right). \quad (6.29)$$

Además, haciendo  $d = 6$ , y además considerando  $\Lambda = 0$  en los campos escalares (6.14) se obtiene

$$\chi(z) = \sqrt{\frac{4}{3\beta}}z. \quad (6.30)$$

A continuación, en la figura (6.2) se muestran dos gráficos con el comportamiento de las funciones métricas dadas en (6.27) y (6.29) en el caso  $\gamma = 1$ .

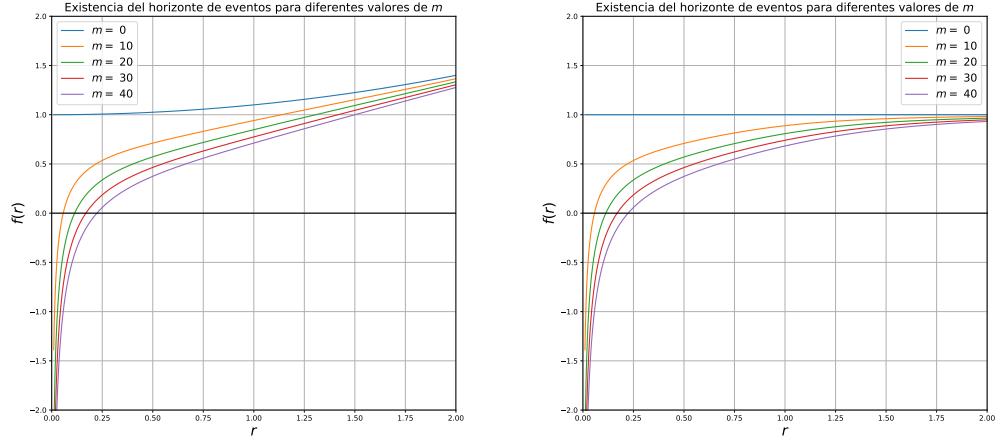


Figura 6.2: Comportamiento de la función métrica (6.27) (izquierda) y de la función métrica (6.29) (derecha) en el caso  $\gamma = 1$ . Fuente: *Elaboración propia*.

Ahora, reemplazando (6.27) en el ansatz (6.6) se obtiene

$$ds^2 = - \left[ \gamma + \frac{r^2}{18\alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{27}{10}\alpha\Lambda + \frac{27}{2V_4^{(\gamma)}} \frac{m\alpha}{r^5}} \right) \right] dt^2 + \frac{dr^2}{\left[ \gamma + \frac{r^2}{18\alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{27}{10}\alpha\Lambda + \frac{27}{2V_4^{(\gamma)}} \frac{m\alpha}{r^5}} \right) \right]} + r^2 \gamma_{ij} dz^i dz^j + dz^2. \quad (6.31)$$

De esta forma, los campos escalares (6.28) y el elemento de línea (6.31) describen una solución de cuerda negra homogénea de las ecuaciones de campo (6.2) y (6.5). Además, del gráfico izquierdo de la figura (6.2) vemos la cuerda negra homogénea descrita por (6.28) y (6.31) es asintóticamente  $\text{AdS}_5 \times R$ .

Por otro lado, reemplazando (6.29) en el ansatz (6.6) se obtiene

$$ds^2 = - \left[ \gamma + \frac{r^2}{18\alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{27}{2V_4^{(\gamma)}} \frac{m\alpha}{r^5}} \right) \right] dt^2 + \frac{dr^2}{\left[ \gamma + \frac{r^2}{18\alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{27}{2V_4^{(\gamma)}} \frac{m\alpha}{r^5}} \right) \right]} + r^2 \gamma_{ij} dz^i dz^j + dz^2. \quad (6.32)$$

Así, el campo escalar (6.30) y el elemento de línea (6.32) describen una solución de cuerda negra homogénea de las ecuaciones de campo (6.2) y (6.5). Además, del



gráfico derecho de la figura (6.2) vemos la cuerda negra homogénea descrita por (6.30) y (6.32) es asintóticamente plana.

Por otro lado, haciendo  $d = 6$  y  $\gamma = 1$  en (6.16) se obtiene que la entropía por unidad de longitud de la cuerda negra homogénea descrita por los campos escalares (6.28) y el elemento de línea (6.31) es dada por

$$s = \frac{64}{9}\pi^3 r_+^4 + 256\pi^3 r_+^2 \alpha. \quad (6.33)$$

Además, se puede verificar que el primer término de la densidad de entropía obtenida en (6.33) recibe una contribución de los campos escalares (6.28), es decir, la entropía debida a la relatividad general (5.78) recibe una corrección del sector de materia.

Por otro lado, haciendo  $d = 6$  y  $\gamma = 1$  en (6.17) se obtiene que la temperatura de la cuerda negra homogénea descrita por los campos escalares (6.28) y el elemento de línea (6.31) es dada por

$$T = \frac{15r_+^4 + 120r_+^2 - 3l^4 + 40l^2}{8\pi r_+ (20r_+^2 - 3l^4 + 40l^2)}, \quad (6.34)$$

donde  $l$  es el radio de curvatura.

## 6.2. Cuerdas negras homogéneas en la teoría de Lanczos-Lovelock

Consideremos la teoría de Lanczos-Lovelock en un dimensión arbitraria  $D$  acoplada no-minimalmente a  $N$  campos escalares  $\phi_{(k)}$ , donde  $k = 0, 1, \dots, N$ . En efecto, la acción de esta teoría es dada por

$$I[g_{AB}, \phi_{(k)}] = \int d^D x \left[ \sum_{k=0}^{N+1} \alpha_k \mathcal{L}^{(k)} + \sum_{k=0}^N \beta_k \mathcal{L}_M^{(k)} \right], \quad (6.35)$$

donde  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  son constantes de acoplamiento. Además, se tiene que el sector geométrico de la acción (6.35) es dado por la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}^{(k)}$ , la cual es dada por

$$\mathcal{L}^{(k)} = \frac{\sqrt{-g}}{2^k} \delta_{B_1 \dots B_{2k}}^{A_1 \dots A_{2k}} R^{B_1 B_2}{}_{A_1 A_2} \dots R^{B_{2k-1} B_{2k}}{}_{A_{2k-1} A_{2k}}, \quad (6.36)$$

y el sector de materia de la acción (6.35) es dado por la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}_M^{(k)}$ , la cual es dada por

$$\mathcal{L}_M^{(k)} = -\frac{\sqrt{-g}}{2^{2k+1}} \nabla_C \phi_{(k)} \nabla^D \phi_{(k)} \delta_{DB_1 \dots B_{2k}}^{CA_1 \dots A_{2k}} R^{B_1 B_2}_{A_1 A_2} \dots R^{B_{2k-1} B_{2k}}_{A_{2k-1} A_{2k}}. \quad (6.37)$$

Ahora, variando la acción (6.35) con respecto a la métrica  $g_{AB}$  se obtienen las ecuaciones de campo

$$\mathcal{E}_{AB} := \sum_{k=0}^{N+1} \alpha_k E_{AB}^{(k)} - \sum_{k=0}^N \frac{\beta_k}{2^{2k+1}} T_{AB}^{(k)} = 0, \quad (6.38)$$

donde  $E_{AB}^{(k)}$  es el tensor de Lovelock de orden  $k$  en la curvatura, el cual es dado por

$$E_{AB}^{(k)} = -\frac{1}{2^{k+1}} g_{(A|C} \delta_{|B)B_1 \dots B_{2k}}^{CA_1 \dots A_{2k}} R^{B_1 B_2}_{A_1 A_2} \dots R^{B_{2k-1} B_{2k}}_{A_{2k-1} A_{2k}}. \quad (6.39)$$

Además,  $T_{AB}^{(k)}$  es el tensor energía-momentum generalizado para los campos  $\phi_{(k)}$  de orden  $k$  en la curvatura, el cual es dado por

$$\begin{aligned} T_{AB}^{(k)} = & -\frac{1}{2} g_{AB} \nabla_C \phi_{(k)} \nabla^D \phi_{(k)} \delta_{DB_1 \dots B_{2k}}^{CA_1 \dots A_{2k}} R^{B_1 B_2}_{A_1 A_2} \dots R^{B_{2k-1} B_{2k}}_{A_{2k-1} A_{2k}} \\ & + \nabla_C \phi_{(k)} \nabla_{(A|} \phi_{(k)} \delta_{|B)B_1 \dots B_{2k}}^{CA_1 \dots A_{2k}} R^{B_1 B_2}_{A_1 A_2} \dots R^{B_{2k-1} B_{2k}}_{A_{2k-1} A_{2k}} \\ & + k \nabla_C \phi_{(k)} \nabla^D \phi_{(k)} \delta_{DB_1 \dots (A|}^{CA_1 \dots A_{2k}} \\ & \times R^{B_1 B_2}_{A_1 A_2} \dots R^{B_{2k-3} B_{2k-2}}_{A_{2k-3} A_{2k-2}} R^{B_{2k-1} B_{2k}}_{|B) A_{2k-1} A_{2k}} \\ & + 2k \nabla^{B_{2k-1}} \nabla_C \phi_{(k)} \nabla_{A_{2k-1}} \nabla^D \phi_{(k)} \delta_{DB_1 \dots (B|}^{CA_1 \dots A_{2k}} \\ & \times R^{B_1 B_2}_{A_1 A_2} \dots R^{B_{2k-3} B_{2k-2}}_{A_{2k-3} A_{2k-2}} g_{|A) A_{2k}} \\ & + k \nabla_C \phi_{(k)} \nabla^E \phi_{(k)} \delta_{DB_1 \dots (B|}^{CA_1 \dots A_{2k}} \\ & \times R^{B_1 B_2}_{A_1 A_2} \dots R^{B_{2k-3} B_{2k-2}}_{A_{2k-3} A_{2k-2}} R_{A_{2k-1} E}^{B_{2k-1} D} g_{|A) A_{2k}}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Por otro lado, variando la acción (6.35) con respecto a los campos escalares  $\phi_{(k)}$  se obtienen las ecuaciones de campo

$$\beta_k E_{AB}^{(k)} \nabla^A \nabla^B \phi_{(k)} = 0. \quad (6.41)$$

Ahora, consideremos el ansatz

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 \gamma_{ij} dz^i dz^j + dz^2. \quad (6.42)$$

Además, a partir de las ecuaciones de campo para los campos escalares (6.41) podemos postular un ansatz para dichos campos de tal forma que solo dependan de las direcciones extendidas, es decir,

$$\phi_{(k)} = c_k z, \quad (6.43)$$

donde  $c_k$  son constantes de integración.

Por otro lado, conviene reescribir las ecuaciones de campo para la métrica (6.38) de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^A_B = & \alpha_0 E^{(0)A}_B + \alpha_1 E^{(1)A}_B + \alpha_2 E^{(2)A}_B + \alpha_3 E^{(3)A}_B + \dots + \alpha_{N+1} E^{(N+1)A}_B \\ & - \frac{\beta_0}{2} T^{(0)A}_B - \frac{\beta_1}{8} T^{(1)A}_B - \frac{\beta_2}{32} T^{(2)A}_B - \dots - \frac{\beta_N}{2^{2N+1}} T^{(N)A}_B = 0. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Ahora, introduciendo (6.42) y (6.43) en las ecuaciones de campo (6.44) se obtiene que las ecuaciones de campo a lo largo de la brana son dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\mu_\nu = & -\frac{\tilde{\alpha}_0}{2} \delta^\mu_\nu - \frac{\tilde{\alpha}_1}{4} \delta_{\nu\beta_1\beta_2}^{\mu\alpha_1\alpha_2} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} - \frac{\tilde{\alpha}_2}{8} \delta_{\nu\beta_1\dots\beta_4}^{\mu\alpha_1\dots\alpha_4} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} R^{\beta_3\beta_4}_{\alpha_3\alpha_4} - \dots \\ & - \frac{\tilde{\alpha}_N}{2^{N+1}} \delta_{\nu\beta_1\dots\beta_{2N}}^{\mu\alpha_1\dots\alpha_{2N}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2N-1}\beta_{2N}}_{\alpha_{2N-1}\alpha_{2N}} \\ & - \frac{\tilde{\alpha}_{N+1}}{2^{N+2}} \delta_{\nu\beta_1\dots\beta_{2N+2}}^{\mu\alpha_1\dots\alpha_{2N+2}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2N+1}\beta_{2N+2}}_{\alpha_{2N+1}\alpha_{2N+2}} = 0, \end{aligned} \quad (6.45)$$

y la ecuación de campo a lo largo de la dirección extendida  $z$  es dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^z_z = & -\frac{\hat{\alpha}_0}{2} - \frac{\hat{\alpha}_1}{4} \delta_{\beta_1\beta_2}^{\alpha_1\alpha_2} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} - \frac{\hat{\alpha}_2}{8} \delta_{\beta_1\dots\beta_4}^{\alpha_1\dots\alpha_4} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} R^{\beta_3\beta_4}_{\alpha_3\alpha_4} - \dots \\ & - \frac{\hat{\alpha}_N}{2^{N+1}} \delta_{\beta_1\dots\beta_{2N}}^{\alpha_1\dots\alpha_{2N}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2N-1}\beta_{2N}}_{\alpha_{2N-1}\alpha_{2N}} \\ & - \frac{\hat{\alpha}_{N+1}}{2^{N+2}} \delta_{\beta_1\dots\beta_{2N+2}}^{\alpha_1\dots\alpha_{2N+2}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2N+1}\beta_{2N+2}}_{\alpha_{2N+1}\alpha_{2N+2}} = 0. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Luego, tomando la traza de las ecuaciones de campo (6.45) se obtiene

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \mathcal{E}_{\mu\nu} = & -\frac{\tilde{\alpha}_0}{2} d - \frac{\tilde{\alpha}_1}{4} (d-2) \delta_{\beta_1\beta_2}^{\alpha_1\alpha_2} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \\ & - \frac{\tilde{\alpha}_2}{8} (d-4) \delta_{\beta_1\dots\beta_4}^{\alpha_1\dots\alpha_4} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} R^{\beta_3\beta_4}_{\alpha_3\alpha_4} - \dots \\ & - \frac{\tilde{\alpha}_N}{2^{N+1}} (d-2N) \delta_{\beta_1\dots\beta_{2N}}^{\alpha_1\dots\alpha_{2N}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2N-1}\beta_{2N}}_{\alpha_{2N-1}\alpha_{2N}} \\ & - \frac{\tilde{\alpha}_{N+1}}{2^{N+2}} (d-2N-2) \delta_{\beta_1\dots\beta_{2N+2}}^{\alpha_1\dots\alpha_{2N+2}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2N+1}\beta_{2N+2}}_{\alpha_{2N+1}\alpha_{2N+2}} = 0. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Además, en las ecuaciones de campo (6.45)-(6.47) hemos introducido las constantes de acoplamiento efectivas  $\tilde{\alpha}_k$  y  $\hat{\alpha}_k$ , las cuales son dadas por

$$\tilde{\alpha}_k = \begin{cases} \alpha_k - \frac{\beta_k}{2^{k+1}} c_k^2 & \text{si } 0 \leq k \leq N \\ \alpha_k & \text{si } k = N + 1 \end{cases}, \quad (6.48)$$

y

$$\hat{\alpha}_k = \begin{cases} \alpha_k + \frac{\beta_k}{2^{k+1}} c_k^2 & \text{si } 0 \leq k \leq N \\ \alpha_k & \text{si } k = N + 1 \end{cases}, \quad (6.49)$$

respectivamente.

En general, la compatibilidad de las ecuaciones (6.46) y (6.47) induce más condiciones sobre la función métrica  $f(r)$  que las ecuaciones de campo a lo largo de la brana (6.45). Sin embargo, esto puede ser evitado imponiendo la condición de compatibilidad off-shell  $g^{\mu\nu} \mathcal{E}_{\mu\nu} \sim \mathcal{E}^z_z$ , y además introduciendo una constante de proporcionalidad  $\xi$ . Así, obtenemos que

$$\hat{\alpha}_k = \xi (d - 2k) \tilde{\alpha}_k, \quad (6.50)$$

y

$$\xi (d - 2(N + 1)) = 1. \quad (6.51)$$

Luego, de las constantes de acoplamiento efectivas (6.48)-(6.49) y de las condiciones de compatibilidad off-shell (6.50)-(6.51) obtenemos que las constantes de integración  $c_k$  son fijadas de la forma

$$c_k = \sqrt{\frac{2^{k+1} (N + 1 - k) \alpha_k}{(d - k - N - 1) \beta_k}}. \quad (6.52)$$

Ahora, usando las ecuaciones de campo a lo largo de la brana (6.45) y las constantes de integración (6.52) se obtiene una s es la función métrica  $f(r)$ , la cual es dada por

$$m = (d - 2) V_{d-2}^{(\gamma)} \sum_{k=0}^{N+1} \frac{(d - 2N - 2)}{(d - k - N - 1)} \frac{(d - 3)!}{(d - 2k - 1)!} \alpha_k r^{d-2k-1} (\gamma - f(r))^k, \quad (6.53)$$

donde  $m$  es la densidad de masa y  $V_{d-2}^{(\gamma)}$  denota el área del espaciotiempo  $(d - 2)$ -dimensional descrito por la métrica  $\gamma_{ij}$ .

Por otro lado, reemplazando las constantes de integración (6.52) en el ansatz (6.43) se obtiene

$$\phi_{(k)} = \sqrt{\frac{2^{k+1} (n+1-k) \alpha_k}{(d-k-n-1) \beta_k}} z. \quad (6.54)$$

Así, las soluciones de la ecuación polinomial (6.53) y los campos escalares (6.54) describen soluciones de cuerdas negras homogéneas de las ecuaciones de campo (6.38) y (6.41), las cuales pueden ser asintóticamente  $\text{AdS}_d \times R$  siempre y cuando se incluya el término cosmológico. Adicionalmente, es simple verificar que la ecuación polinomial (6.53) se reduce a la ecuación polinomial (6.13) en el caso  $N = 1$ . También, se puede verificar que los campos escalares (6.54) se reducen a los campos escalares dados en (6.14) en el caso  $N = 1$ .

Ahora, de la acción (6.35) vemos que el lagrangiano de la teoría de Lanczos-Lovelock en una dimensión arbitraria  $D$  acoplado no-minimalmente a  $k$  campos escalares  $\phi_{(k)}$  es dado por

$$L(g_{AB}, \phi_{(k)}) = \sum_{k=0}^{N+1} \alpha_k L^{(k)} + \sum_{k=0}^N \beta_k L_M^{(k)}, \quad (6.55)$$

donde

$$L^{(k)} = \frac{1}{2^k} \delta_{B_1 \dots B_{2k}}^{A_1 \dots A_{2k}} R^{B_1 B_2}{}_{A_1 A_2} \dots R^{B_{2k-1} B_{2k}}{}_{A_{2k-1} A_{2k}}, \quad (6.56)$$

y

$$L_M^{(k)} = -\frac{1}{2^{2k+1}} \nabla_C \phi_{(k)} \nabla^D \phi_{(k)} \delta_{DB_1 \dots B_{2k}}^{CA_1 \dots A_{2k}} R^{B_1 B_2}{}_{A_1 A_2} \dots R^{B_{2k-1} B_{2k}}{}_{A_{2k-1} A_{2k}}. \quad (6.57)$$

Luego, de la entropía de Wald (5.76), del lagrangiano (6.56) y de los campos escalares (6.54) se obtiene que la entropía por unidad de longitud de la cuerda negra homogénea descrita por las soluciones de la ecuación polinomial (6.53) y los campos escalares (6.54) es dada por

$$s = 4\pi \sum_{k=0}^{N+1} \frac{k(d-2N-2)}{(d-k-N-1)} \frac{(d-2)}{(d-2k)} \frac{(d-3)!}{(d-2k-1)!} \alpha_k r_+^{d-2k} \gamma^{k-1} V_{d-2}^{(\gamma)}, \quad (6.58)$$

donde  $s = S/L$  y  $r_+$  es la coordenada radial del horizonte de eventos. Además, es simple verificar que la densidad de entropía (6.58) se reduce a la densidad de entropía encontrada en (6.16) en el caso  $N = 1$ .

Por otro lado, usando la expresión para la temperatura (5.74) y la ecuación polinomial (6.53) se obtiene que la temperatura de la cuerda negra homogénea descrita por las soluciones de la ecuación polinomial (6.53) y los campos escalares (6.54) es dada por

$$T = \frac{1}{4\pi} \frac{\sum_{k=0}^{N+1} \frac{(d-2k-1)(d-2N-2)}{(d-k-N-1)} \frac{(d-3)!}{(d-2k-1)!} \alpha_k r_+^{d-2k-2} \gamma^k}{\sum_{p=0}^{N+1} \frac{p(d-2N-2)}{(d-p-N-1)} \frac{(d-3)!}{(d-2p-1)!} \alpha_p r_+^{d-2p-1} \gamma^{p-1}}. \quad (6.59)$$

Nuevamente, es simple verificar que la temperatura (6.59) se reduce a la temperatura encontrada en (6.17) en el caso  $N = 1$ .

Ahora, usando la ecuación polinomial (6.53), la densidad de entropía (6.58) y la temperatura (6.59) se puede verificar que se cumple la primera ley de la termodinámica (5.71) para la cuerda negra homogénea descrita por las soluciones de la ecuación polinomial (6.53) y los campos escalares (6.54), es decir,

$$dm = T ds. \quad (6.60)$$

### 6.3. Soluciones extras

El método que hemos usado a lo largo de este capítulo para la construcción de soluciones de cuerdas negras homogéneas se puede utilizar para construir otro tipo de soluciones, es decir, usando la ecuación polinomial (6.53) y los campos escalares (6.54) se puede construir cualquier solución de las ecuaciones de campo (6.38) y (6.41) de la forma

$$ds^2 = d\tilde{s}_d^2 + dz^2. \quad (6.61)$$

Por ejemplo, consideremos el elemento de línea<sup>1</sup>

$$ds^2 = l^2 \left[ -\cosh^2(\rho - \rho_0) dt^2 + d\rho^2 + \cosh^2 \rho d\Sigma_3^2 \right] + dz^2, \quad (6.62)$$

y además consideremos los campos escalares

$$\psi(z) = \frac{2\sqrt{3}}{l} z, \quad \chi(z) = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} z. \quad (6.63)$$

Podemos verificar que el elemento de línea (6.62) y los campos escalares (6.63) satisfacen las ecuaciones de campo (6.2) y (6.5) en 6 dimensiones. De esta forma, el

<sup>1</sup> $d\Sigma_3^2$  corresponde al elemento de línea de un espaciotiempo euclidiano tridimensional.

elemento de línea (6.62) describe una extensión cilíndrica de una solución de agujero de gusano 5-dimensional [72].

Por otra parte, consideremos el elemento de línea

$$ds^2 = d\bar{s}_L^2 + \left( \frac{1}{L^2} - \frac{1}{l^2} \right) \rho^2(r, \mu) k_\alpha k_\beta dx^\alpha dx^\beta + dz^2, \quad (6.64)$$

donde el elemento de línea  $d\bar{s}_L^2$  es dado por

$$\begin{aligned} d\bar{s}_L^2 = & - \left( 1 + \frac{r^2}{L^2} \right) \frac{\Delta(\mu)}{\Xi_a \Xi_b} dt^2 + \frac{r^2 \rho^2 dr^2}{\left( 1 + \frac{r^2}{L^2} \right) (r^2 + a^2) (r^2 + b^2)} + \frac{\rho^2 d\mu^2}{\Delta(\mu) (1 - \mu^2)} \\ & + \frac{(r^2 + a^2) (1 - \mu^2)}{\Xi_a} d\phi^2 + \frac{(r^2 + b^2) \mu^2}{\Xi_b} d\psi^2, \end{aligned} \quad (6.65)$$

y además

$$k_\alpha dx^\alpha = \frac{\Delta(\mu)}{\Xi_a \Xi_b} dt + \frac{r^2 \rho^2 dr}{\left( 1 + \frac{r^2}{L^2} \right) (r^2 + a^2) (r^2 + b^2)} + \frac{a(1 - \mu^2)}{\Xi_a} d\phi + \frac{b\mu^2}{\Xi_b} d\psi, \quad (6.66)$$

donde

$$\Xi_a = 1 - \frac{a^2}{L^2}, \quad \Xi_b = 1 - \frac{b^2}{L^2}, \quad (6.67)$$

$$\Delta(\mu) = \Xi_a \mu^2 + \Xi_b (1 - \mu^2), \quad \rho^2(r, \mu) = r^2 + a^2 \mu^2 + b^2 (1 - \mu^2). \quad (6.68)$$

Podemos verificar que el elemento de línea (6.64) y los campos escalares (6.63) satisfacen las ecuaciones de campo (6.2) y (6.5) en 6 dimensiones. De esta forma, el elemento de línea (6.64) describe una extensión cilíndrica de la solución de Kerr-Schild en  $\text{AdS}_5$  [73].

Finalmente, hay que recalcar que para poder construir las soluciones (6.62) y (6.64) hay que fijar las constantes de acoplamiento de la forma

$$\alpha = \frac{l^2}{8}, \quad \alpha\Lambda = -\frac{9}{16}, \quad (6.69)$$

ya que de esta forma las ecuaciones de campo a lo largo de la brana son compatibles con la ecuación de campo a lo largo de la dirección extendida  $z$ .

## Capítulo 7

# Conclusiones

En esta tesis se han construido nuevas soluciones exactas de cuerdas negras homogéneas. Estas soluciones fueron encontradas en un escenario que considera teorías de Lovelock  $D$ -dimensionales con potencias arbitrarias en la curvatura. Además, se analizaron distintas propiedades térmicas de estas soluciones. En particular, se determinó la densidad de entropía, la temperatura y la densidad de masa. De esta forma, a partir de los resultados encontrados en esta tesis se puede concluir lo siguiente:

- Para asegurar la existencia de soluciones exactas de cuerdas negras homogéneas en teorías de Lovelock  $D$ -dimensionales con potencias arbitrarias en la curvatura se tiene que acoplar no-minimalmente dicha teoría con campos escalares sin masa y con densidad de energía finita. Específicamente, los acoplamientos no-minimales con tales campos escalares son construidos a partir del tensor de Lovelock, ya que de esta forma se asegura que las ecuaciones de campo de la teoría resultante sean de segundo orden. Luego, los acoplamientos no-minimales con los campos escalares hacen que las ecuaciones de campo a lo largo de la brana sean compatibles con la ecuación de campo a lo largo de la dirección extendida. Adicionalmente, de las ecuaciones de campo para los campos escalares se obtiene que éstos son proporcionales a la dirección extendida. Luego, la compatibilidad entre las ecuaciones de campo a lo largo de la brana con la ecuación de campo a lo largo de la dirección extendida fija las constantes de proporcionalidad en términos de las constantes de acoplamiento de la teoría.
- Las propiedades térmicas de las soluciones exactas de cuerdas negras homogéneas encontradas en el contexto de teorías de Lovelock  $D$ -dimensionales con acoplamientos no-minimales con campos escalares reciben contribuciones de parte de estos campos. En particular, se mostró que la densidad de entropía de tales soluciones recibe una contribución de los campos escalares, la cual corrige la densidad de entropía debida a los términos puramente geométricos de la teoría considerada. Esto es interesante, ya que el patrón de transiciones entre una cuerda negra y un agujero negro puede cambiar debido a la presencia de estos campos escalares.
- El método que hemos usado para la construcción de soluciones de cuerdas negras homogéneas se puede extender a todo tipo de soluciones, es decir, a partir de



la ecuación polinomial (6.53) y los campos escalares (6.54) se puede construir cualquier solución de las ecuaciones de campo (6.38) y (6.41) de la forma (6.61). En otras palabras, al interpretar dichas soluciones como compactificaciones con flujos escalares no-triviales a lo largo de la dirección extendida se obtiene una teoría efectiva de Lovelock inducida en la brana. Luego, a partir de esta idea se encontró la solución (6.62), la cual describe una extensión cilíndrica de una solución de agujero de gusano 5-dimensional. Además, se encontró la solución (6.64), la cual describe una extensión cilíndrica de la métrica de Kerr-Schild en  $\text{AdS}_5$ .

Finalmente, los resultados obtenidos a lo largo esta tesis abren los siguientes problemas:

- Analizar la estabilidad gravitacional de soluciones de cuerdas negras asintóticamente planas en la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet.
- Encontrar soluciones que describan  $p$ -branas negras en teorías de Lovelock  $D$ -dimensionales con acoplamientos no-minimales con campos de Maxwell.

## Apéndice A

# Variaciones con respecto al tensor métrico

A continuación se presentan las variaciones con respecto al tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  de las cantidades más importantes de la geometría diferencial, las cuales fueron definidas en el capítulo 2. Estas variaciones nos serán útiles a la hora de querer obtener ecuaciones de campo por medio de la variación de cierta acción que involucre una dependencia funcional con el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , es decir, una acción de la forma  $I = I[g_{\mu\nu}, \Psi]$ , donde  $\Psi$  corresponde a un cierto campo de materia independiente del tensor métrico.

En efecto, la variación con respecto a la métrica de los símbolos de Christoffel (2.29) es dada por

$$\delta\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left[ g_{\mu\lambda} \nabla_\nu \delta g^{\lambda\sigma} + g_{\nu\lambda} \nabla_\mu \delta g^{\lambda\sigma} - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^\sigma \delta g^{\alpha\beta} \right]. \quad (\text{A.1})$$

La variación con respecto a la métrica del tensor de curvatura de Riemann (2.36) es dada por

$$\delta R^\rho{}_{\mu\lambda\nu} = \nabla_\lambda \delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}. \quad (\text{A.2})$$

La variación con respecto a la métrica del tensor de Ricci (2.37) es dada por

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho \delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\rho{}_{\mu\rho}. \quad (\text{A.3})$$

La variación con respecto a la métrica del escalar de curvatura (2.38) es dada por

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}, \quad (\text{A.4})$$

donde

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_\mu \nabla_\nu \left( -\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \right). \quad (\text{A.5})$$

Finalmente, la variación con respecto a la métrica de la raíz cuadrada del determinante del tensor métrico es dada por

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.6})$$

## Apéndice B

# Delta de Kronecker generalizada

La delta de Kronecker generalizada  $d$ -dimensional es un tensor de rango  $(k, k)$ , el cual se define como el determinante de una matriz de rango  $k \times k$  cuyas entradas son deltas de Kronecker usuales <sup>1</sup>, es decir,

$$\delta_{\beta_1 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} := \begin{vmatrix} \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} & \delta_{\beta_2}^{\alpha_1} & \dots & \delta_{\beta_k}^{\alpha_1} \\ \delta_{\beta_1}^{\alpha_2} & \delta_{\beta_2}^{\alpha_2} & \dots & \delta_{\beta_k}^{\alpha_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{\beta_1}^{\alpha_{k-1}} & \delta_{\beta_2}^{\alpha_{k-1}} & \dots & \delta_{\beta_k}^{\alpha_{k-1}} \\ \delta_{\beta_1}^{\alpha_k} & \delta_{\beta_2}^{\alpha_k} & \dots & \delta_{\beta_k}^{\alpha_k} \end{vmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

De la definición (B.1) vemos que si  $k = 1$ , entonces recobramos la delta de Kronecker usual  $\delta_{\beta_1}^{\alpha_1}$ .

A continuación vamos a mencionar algunas de las propiedades más importantes de la delta de Kronecker generalizada, las cuales se pueden demostrar directamente a partir de la definición (B.1). Estas propiedades van a ser muy importantes para los cálculos que se realizarán a lo largo de esta tesis.

1. Permutación de índices de la delta de Kronecker generalizada:

$$\delta_{\beta_1 \dots \beta_h \dots \beta_r \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_h \dots \alpha_r \dots \alpha_k} = -\delta_{\beta_1 \dots \beta_h \dots \beta_r \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_r \dots \alpha_h \dots \alpha_k}, \quad (\text{B.2})$$

$$\delta_{\beta_1 \dots \beta_h \dots \beta_r \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_h \dots \alpha_r \dots \alpha_k} = -\delta_{\beta_1 \dots \beta_r \dots \beta_h \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_h \dots \alpha_r \dots \alpha_k}, \quad (\text{B.3})$$

donde (B.2) y (B.3) se cumplen para todo  $h \neq r$ ,  $1 \leq h$  y  $r \leq k$ .

---

<sup>1</sup>La delta de Kronecker  $d$ -dimensional es un tensor de rango  $(1, 1)$ , el cual se define como el conjunto de  $d^2$  valores dados por

$$\delta_{\nu}^{\mu} := \begin{cases} 1, & \text{si } \mu = \nu \\ 0, & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases}$$

2. Anulación de la delta de Kronecker generalizada:

$$\delta_{\beta_1 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} \equiv 0, \quad (\text{B.4})$$

donde (B.4) se cumple si  $k > d$ .

3. Descomposición de la delta de Kronecker generalizada:

$$\delta_{\beta_1 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} \delta_{\beta_2 \dots \beta_k}^{\alpha_2 \dots \alpha_k} - \delta_{\beta_1}^{\alpha_2} \delta_{\beta_2 \beta_3 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_k} + \dots + (-1)^{k+1} \delta_{\beta_1}^{\alpha_k} \delta_{\beta_2 \dots \beta_{k-1}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}}, \quad (\text{B.5})$$

$$\delta_{\beta_1 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} \delta_{\beta_2 \dots \beta_k}^{\alpha_2 \dots \alpha_k} - \delta_{\beta_2}^{\alpha_1} \delta_{\beta_1 \beta_3 \dots \beta_k}^{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k} + \dots + (-1)^{k+1} \delta_{\beta_k}^{\alpha_1} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{k-1}}^{\alpha_2 \dots \alpha_k}, \quad (\text{B.6})$$

donde (B.5) y (B.6) se cumplen si  $k \leq d$ .

4. Contracción de índices de la delta de Kronecker generalizada:

$$\delta_{\beta_1 \dots \beta_{k-1} \alpha_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k} = (d - k + 1) \delta_{\beta_1 \dots \beta_{k-1}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}}, \quad (\text{B.7})$$

$$\delta_{\beta_1 \dots \beta_s \alpha_{s+1} \dots \alpha_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_s \alpha_{s+1} \dots \alpha_k} = \frac{(d - s)!}{(d - k)!} \delta_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_s}, \quad (\text{B.8})$$

$$\delta_{\alpha_1 \dots \alpha_t \beta_{t+1} \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_t \alpha_{t+1} \dots \alpha_k} = \frac{(d - k + t)!}{(d - k)!} \delta_{\beta_{t+1} \dots \beta_k}^{\alpha_{t+1} \dots \alpha_k}, \quad (\text{B.9})$$

$$\delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \frac{d!}{(d - k)!}, \quad (\text{B.10})$$

donde (B.7)-(B.10) se cumplen si  $k \leq d$ .

5. Contracción de la delta de Kronecker generalizada con tensores completamente antisimétricos:

Si  $A_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$  es un tensor completamente antisimétrico de rango  $(0, k)$  y  $A^{\alpha_1 \dots \alpha_k}$  es un tensor completamente antisimétrico de rango  $(k, 0)$ , entonces al contraer estos tensores con una delta de Kronecker generalizada de rango  $(k, k)$  se obtiene

$$\delta_{\beta_1 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} A_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = k! A_{\beta_1 \dots \beta_k}, \quad (\text{B.11})$$

$$\delta_{\beta_1 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} A^{\beta_1 \dots \beta_k} = k! A^{\alpha_1 \dots \alpha_k}, \quad (\text{B.12})$$

donde (B.11) y (B.12) se cumplen si  $k \leq d$ .

## Apéndice C

# Cálculo de ecuaciones de campo

En este apéndice se mostrará el cálculo explícito por medio del principio de mínima acción de las ecuaciones de campo más importantes presentadas a lo largo de esta tesis. Con el fin de simplificar los cálculos, cuando sea necesario se definirá un vector  $A_i^{\mu 1}$  de forma tal que cuando se varíe la respectiva acción aparezca un término de la forma

$$\nabla_\mu A_i^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} A_i^\mu), \quad (\text{C.1})$$

donde se define el término de borde

$$B_i := \partial_\mu (\sqrt{-g} A_i^\mu). \quad (\text{C.2})$$

Así, debido a que  $B_i$  es un término de borde al integrarlo en la variedad este no va a contribuir a las ecuaciones de campo, ya que

$$\int_{\mathcal{M}} d^D x B_i = \oint_{\partial \mathcal{M}} d^{D-1} \Sigma \sqrt{-g} A_i^\mu n_\mu = 0, \quad (\text{C.3})$$

donde  $n_\mu$  es el vector unitario exterior ortogonal a  $\partial \mathcal{M}$  en cada punto.

Además, cuando se necesite se ocuparan las variaciones dadas en (A.1)-(A.6), y además se ocuparan las propiedades (B.2)-(B.12).

## Ecuaciones de campo de Einstein en el vacío

Del capítulo 2 se tiene que la acción de Einstein-Hilbert en el vacío es dada por

$$I[g_{\mu\nu}] = \kappa \int d^4 x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda). \quad (\text{C.4})$$

---

<sup>1</sup> $i = 1, 2, 3, \dots$

De (C.4) vemos que el lagrangiano de Einstein-Hilbert en el vacío es dado por

$$\mathcal{L} = \kappa\sqrt{-g}(R - 2\Lambda). \quad (\text{C.5})$$

Variando (C.5) con respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  se obtiene

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \kappa\delta\sqrt{-g}R + \kappa\sqrt{-g}\delta R - 2\kappa\Lambda\delta\sqrt{-g} \\ &= -\frac{\kappa}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}R + \kappa\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \kappa\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + \kappa\Lambda\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{\kappa}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}R + \kappa\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \kappa\Lambda\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\ &\quad + \kappa\sqrt{-g}\underbrace{\nabla_\mu \nabla_\nu (-\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta})}_{=:A_1^\mu} \\ &= -\frac{\kappa}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}R + \kappa\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \kappa\Lambda\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \kappa\underbrace{\partial_\mu(\sqrt{-g}A_1^\mu)}_{=:B_1} \\ &= \kappa\sqrt{-g}G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \kappa\Lambda\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \kappa B_1. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Ahora, variando la acción (C.4) con respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  se obtiene

$$\delta I = \int d^4x \delta\mathcal{L} = 0. \quad (\text{C.7})$$

Luego, reemplazando (C.6) en (C.7) se obtiene luego de algunos cálculos

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{C.8})$$

Por lo tanto, en (C.8) hemos obtenido la ecuaciones de campo para la métrica  $g_{\mu\nu}$ .

## Ecuaciones de campo de Lanczos-Lovelock

Del capítulo 3 se tiene que la acción de la teoría de Lanczos-Lovelock es dada por

$$I[g_{\mu\nu}] = \int d^Dx \sum_{k=0}^N \alpha_k \mathcal{L}^{(k)}, \quad (\text{C.9})$$

donde

$$\mathcal{L}^{(k)} = \frac{1}{2^k} \sqrt{-g} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}. \quad (\text{C.10})$$

Variando (C.10) con respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  se obtiene

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}^{(k)} &= \frac{1}{2^k} \delta\sqrt{-g} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\
&\quad + \frac{1}{2^k} \sqrt{-g} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} \delta \left( R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \right) \\
&= -\frac{1}{2^{k+1}} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\
&\quad + \frac{k}{2^k} \sqrt{-g} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} \delta R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}.
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Por otro lado, del último término de (C.11) vemos que

$$\delta R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} = \delta g^{\beta_{2k} \gamma} R^{\beta_{2k-1}}_{\gamma \alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} + g^{\beta_{2k} \gamma} \delta R^{\beta_{2k-1}}_{\gamma \alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}. \tag{C.12}$$

Luego, reemplazando (C.12) en (C.11) se obtiene

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}^{(k)} &= -\frac{1}{2^{k+1}} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\
&\quad + \frac{k}{2^k} \sqrt{-g} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} \delta g^{\beta_{2k} \gamma} R^{\beta_{2k-1}}_{\gamma \alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\
&\quad + \frac{k}{2^k} \sqrt{-g} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g^{\beta_{2k} \gamma} \delta R^{\beta_{2k-1}}_{\gamma \alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\
&= -\frac{1}{2^{k+1}} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\
&\quad + \frac{k}{2^k} \sqrt{-g} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} \delta g^{\beta_{2k} \gamma} R^{\beta_{2k-1}}_{\gamma \alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\
&\quad + \frac{2k}{2^k} \sqrt{-g} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g^{\beta_{2k} \gamma} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \delta \Gamma^{\beta_{2k-1}}_{\alpha_{2k} \gamma}.
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Ahora, del último término de (C.13) podemos ver que



$$\begin{aligned}
& \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g^{\beta_{2k} \gamma} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \delta \Gamma^{\beta_{2k-1} \alpha_{2k} \gamma} \\
= & \nabla_{\alpha_{2k-1}} \left( \underbrace{\delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g^{\beta_{2k} \gamma} \delta \Gamma^{\beta_{2k-1} \alpha_{2k} \gamma}}_{=: A_1^{\alpha_{2k-1}}} \right) \\
& - (k-1) \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-5} \beta_{2k-4}}_{\alpha_{2k-5} \alpha_{2k-4}} \\
& \times \nabla_{[\alpha_{2k-1}} R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}}] g^{\beta_{2k} \gamma} \delta \Gamma^{\beta_{2k-1} \alpha_{2k} \gamma} \\
= & \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\alpha_{2k-1}} \left( \underbrace{\sqrt{-g} A_1^{\alpha_{2k-1}}}_{=: B_1} \right) \\
& - (k-1) \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-5} \beta_{2k-4}}_{\alpha_{2k-5} \alpha_{2k-4}} \\
& \times \nabla_{[\alpha_{2k-1}} R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}}] g^{\beta_{2k} \gamma} \delta \Gamma^{\beta_{2k-1} \alpha_{2k} \gamma} \\
= & \frac{1}{\sqrt{-g}} B_1 \\
& - (k-1) \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-5} \beta_{2k-4}}_{\alpha_{2k-5} \alpha_{2k-4}} \\
& \times \nabla_{[\alpha_{2k-1}} R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}}] g^{\beta_{2k} \gamma} \delta \Gamma^{\beta_{2k-1} \alpha_{2k} \gamma}. \tag{C.14}
\end{aligned}$$

Luego, usando la identidad (2.33) se tiene que (C.14) se reduce a

$$\delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g^{\beta_{2k} \gamma} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \delta \Gamma^{\beta_{2k-1} \alpha_{2k} \gamma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} B_1. \tag{C.15}$$

Así, reemplazando (C.15) en (C.13) se obtiene

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}^{(k)} &= -\frac{1}{2^{k+1}}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\delta_{\beta_1\cdots\beta_{2k}}^{\alpha_1\cdots\alpha_{2k}}R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2}\cdots R^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} \\
&\quad +\frac{k}{2^k}\sqrt{-g}\delta_{\beta_1\cdots\beta_{2k}}^{\alpha_1\cdots\alpha_{2k}}R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2}\cdots R^{\beta_{2k-3}\beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}}\delta g^{\beta_{2k}\gamma}R^{\beta_{2k-1}}_{\gamma\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} \\
&\quad +\frac{2k}{2^k}B_1 \\
&= -\frac{1}{2^{k+1}}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\delta_{\beta_1\cdots\beta_{2k}}^{\alpha_1\cdots\alpha_{2k}}R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2}\cdots R^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} \\
&\quad +\frac{k}{2^k}\sqrt{-g}\delta_{\beta_1\cdots\beta_{2k-1}\nu}^{\alpha_1\cdots\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}}R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2}\cdots R^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}}\delta g^{\nu\alpha}g_{\alpha\beta_{2k}} \\
&\quad +\frac{2k}{2^k}B_1 \\
&= -\frac{1}{2^{k+1}}\sqrt{-g}g_{\alpha\mu}\delta g^{\nu\alpha}\delta_{\nu\beta_1\cdots\beta_{2k}}^{\mu\alpha_1\cdots\alpha_{2k}}R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2}\cdots R^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} \\
&\quad +\frac{k}{2^k}\sqrt{-g}g_{\alpha\mu}\delta g^{\nu\alpha}\delta_{\nu\beta_1\cdots\beta_{2k}}^{\mu\alpha_1\cdots\alpha_{2k}}R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2}\cdots R^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} \\
&\quad +\frac{2k}{2^k}B_1 \\
&= -\frac{1}{2^{k+1}}\sqrt{-g}g_{\alpha\mu}\delta g^{\nu\alpha}\left(\delta_{\nu\beta_1\cdots\beta_{2k}}^{\mu\alpha_1\cdots\alpha_{2k}}-2k\delta_{\beta_1}^{\mu}\delta_{\nu\beta_2\cdots\beta_{2k}}^{\alpha_1\cdots\alpha_{2k}}\right) \\
&\quad \times R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2}\cdots R^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} \\
&\quad +\frac{2k}{2^k}B_1 \\
&= -\frac{1}{2^{k+1}}\sqrt{-g}g_{\alpha\mu}\delta g^{\nu\alpha}\delta_{\nu\beta_1\cdots\beta_{2k}}^{\mu\alpha_1\cdots\alpha_{2k}}R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2}\cdots R^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} \\
&\quad +\frac{2k}{2^k}B_1 \\
&= -\frac{1}{2^{k+1}}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}g_{(\mu|\alpha}\delta_{|\nu)\beta_1\cdots\beta_{2k}}^{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_{2k}}R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2}\cdots R^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} \\
&\quad +\frac{2k}{2^k}B_1. \tag{C.16}
\end{aligned}$$

Ahora, variando la acción (C.9) con respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  se obtiene

$$\delta I = \int d^D x \sum_{k=0}^N \alpha_k \delta\mathcal{L}^{(k)} = 0. \tag{C.17}$$

Luego, reemplazando (C.16) en (C.17) se obtiene luego de algunos cálculos

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = \sum_{k=0}^N \alpha_k E_{\mu\nu}^{(k)} = 0, \tag{C.18}$$

donde

$$E_{\mu\nu}^{(k)} = -\frac{1}{2^{k+1}} g_{(\mu|\alpha} \delta_{|\nu)\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha \alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}. \quad (\text{C.19})$$

Por lo tanto, en (C.18) hemos obtenido la ecuaciones de campo para la métrica  $g_{\mu\nu}$ .

## Ecuaciones de campo de la teoría de Lovelock-Horndeski

Del capítulo 4 se tiene que la acción de la teoría de Lovelock-Horndeski es dada por

$$I[g_{\mu\nu}, \phi] = \int d^D x \left( \sum_{k=0}^N \alpha_k \mathcal{L}_{LL}^{(k)} + \sum_{k=0}^N \beta_k \mathcal{L}_{LH}^{(k)} \right), \quad (\text{C.20})$$

donde

$$\mathcal{L}_{LL}^{(k)} = \frac{1}{2^k} \sqrt{-g} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}, \quad (\text{C.21})$$

$$\mathcal{L}_{LH}^{(k)} = -\frac{1}{2^{2k+1}} \sqrt{-g} \nabla_\mu \phi \nabla^\nu \phi \delta_{\nu \beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu \alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}. \quad (\text{C.22})$$

Variando (C.21) con respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  se obtiene

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{LL}^{(k)} = & -\frac{1}{2^{k+1}} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\ & + \frac{k}{2^k} \sqrt{-g} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} \delta R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Por otro lado, del último término de (C.23) vemos que

$$\delta R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} = \delta g^{\beta_{2k} \gamma} R^{\beta_{2k-1}}_{\gamma \alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} + g^{\beta_{2k} \gamma} \delta R^{\beta_{2k-1}}_{\gamma \alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}. \quad (\text{C.24})$$

Luego, reemplazando (C.24) en (C.23) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{LL}^{(k)} = & -\frac{1}{2^{k+1}} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\ & + \frac{k}{2^k} \sqrt{-g} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} \delta g^{\beta_{2k} \gamma} R^{\beta_{2k-1}}_{\gamma \alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\ & + \frac{2k}{2^k} \sqrt{-g} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g^{\beta_{2k} \gamma} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \delta \Gamma^{\beta_{2k-1}}_{\alpha_{2k} \gamma}. \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Ahora, del último término de (C.25) podemos ver que

$$\begin{aligned}
& \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g^{\beta_{2k} \gamma} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \delta \Gamma^{\beta_{2k-1}}_{\alpha_{2k} \gamma} \\
= & \nabla_{\alpha_{2k-1}} \underbrace{\left( \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g^{\beta_{2k} \gamma} \delta \Gamma^{\beta_{2k-1}}_{\alpha_{2k} \gamma} \right)}_{=: A_1^{\alpha_{2k-1}}} \\
& - (k-1) \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-5} \beta_{2k-4}}_{\alpha_{2k-5} \alpha_{2k-4}} \\
& \times \nabla_{\alpha_{2k-1}} R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g^{\beta_{2k} \gamma} \delta \Gamma^{\beta_{2k-1}}_{\alpha_{2k} \gamma} \\
= & \frac{1}{\sqrt{-g}} \underbrace{\partial_{\alpha_{2k-1}} (\sqrt{-g} A_1^{\alpha_{2k-1}})}_{=: B_1} \\
& - (k-1) \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-5} \beta_{2k-4}}_{\alpha_{2k-5} \alpha_{2k-4}} \\
& \times \nabla_{[\alpha_{2k-1}} R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}}] g^{\beta_{2k} \gamma} \delta \Gamma^{\beta_{2k-1}}_{\alpha_{2k} \gamma} \\
= & \frac{1}{\sqrt{-g}} B_1 \\
& - (k-1) \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-5} \beta_{2k-4}}_{\alpha_{2k-5} \alpha_{2k-4}} \\
& \times \nabla_{[\alpha_{2k-1}} R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}}] g^{\beta_{2k} \gamma} \delta \Gamma^{\beta_{2k-1}}_{\alpha_{2k} \gamma}. \tag{C.26}
\end{aligned}$$

Luego, usando la identidad (2.33) se tiene que (C.26) se reduce a

$$\delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g^{\beta_{2k} \gamma} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \delta \Gamma^{\beta_{2k-1}}_{\alpha_{2k} \gamma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} B_1. \tag{C.27}$$

Así, reemplazando (C.27) en (C.25) se obtiene

$$\delta \mathcal{L}_{LL}^{(k)} = - \frac{1}{2^{k+1}} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} g_{(\mu|\alpha} \delta_{|\nu)\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha \alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} + \frac{2k}{2^k} B_1. \tag{C.28}$$

Ahora, variando (C.22) con respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  se obtiene

$$\begin{aligned}
(-2^{2k+1}) \delta \mathcal{L}_{LH}^{(k)} = & \delta \sqrt{-g} g^{\nu\alpha} \nabla_\mu \phi \nabla_\alpha \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\
& + \sqrt{-g} \delta g^{\nu\alpha} \nabla_\mu \phi \nabla_\alpha \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\
& + \sqrt{-g} g^{\nu\alpha} \nabla_\mu \phi \nabla_\alpha \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} \delta \left( R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \right) \\
= & - \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \nabla_\mu \phi \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\
& + \sqrt{-g} \delta g^{\nu\alpha} \nabla_\mu \phi \nabla_\alpha \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\
& + k \sqrt{-g} \nabla_\mu \phi \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} \\
& \times \delta R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}. \tag{C.29}
\end{aligned}$$

Por otro lado, del último término de (C.29) vemos que

$$\delta R^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} = \delta g^{\beta_{2k}\gamma} R^{\beta_{2k-1}}_{\gamma\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} + g^{\beta_{2k}\gamma} \delta R^{\beta_{2k-1}}_{\gamma\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}}. \quad (\text{C.30})$$

Luego, reemplazando (C.30) en (C.29) se obtiene

$$\begin{aligned} \left(-2^{2k+1}\right) \delta \mathcal{L}_{LH}^{(k)} &= -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi \delta^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}}_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} \\ &\quad + \sqrt{-g} \delta g^{\nu\alpha} \nabla_{\mu} \phi \nabla_{\alpha} \phi \delta^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}}_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} \\ &\quad + k \sqrt{-g} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi \delta^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}}_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3}\beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}} \\ &\quad \times \delta g^{\beta_{2k}\gamma} R^{\beta_{2k-1}}_{\gamma\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} \\ &\quad + k \sqrt{-g} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi \delta^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}}_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3}\beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}} \\ &\quad \times g^{\beta_{2k}\gamma} \delta R^{\beta_{2k-1}}_{\gamma\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} \\ &= -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi \delta^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}}_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} \\ &\quad + \sqrt{-g} \delta g^{\nu\alpha} \nabla_{\mu} \phi \nabla_{\alpha} \phi \delta^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}}_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} \\ &\quad + k \sqrt{-g} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi \delta^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}}_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3}\beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}} \\ &\quad \times \delta g^{\beta_{2k}\gamma} R^{\beta_{2k-1}}_{\gamma\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} \\ &\quad + 2k \sqrt{-g} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi \delta^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}}_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3}\beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}} \\ &\quad \times g^{\beta_{2k}\gamma} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \delta \Gamma^{\beta_{2k-1}}_{\alpha_{2k}\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

Ahora, del último término de (C.31) podemos ver que



Ahora, del primer término de (C.34) se tiene que

$$\begin{aligned}
& \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g_{\lambda \alpha_{2k}} \nabla^{\beta_{2k-1}} \delta g^{\lambda \beta_{2k}} \\
&= \nabla^{\beta_{2k-1}} \underbrace{\left( \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g_{\lambda \alpha_{2k}} \delta g^{\lambda \beta_{2k}} \right)}_{A_{\beta_{2k-1}}^3} \\
&\quad - \nabla^{\beta_{2k-1}} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g_{\lambda \alpha_{2k}} \delta g^{\lambda \beta_{2k}} \\
&\quad - \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\beta_{2k-1}} \nabla^{\nu} \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g_{\lambda \alpha_{2k}} \delta g^{\lambda \beta_{2k}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}} \underbrace{\partial_{\beta_{2k-1}} \left( \sqrt{-g} A_3^{\beta_{2k-1}} \right)}_{=: B_3} \\
&\quad - \nabla^{\beta_{2k-1}} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g_{\lambda \alpha_{2k}} \delta g^{\lambda \beta_{2k}} \\
&\quad - \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\beta_{2k-1}} \nabla^{\nu} \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g_{\lambda \alpha_{2k}} \delta g^{\lambda \beta_{2k}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}} B_3 \\
&\quad - \nabla^{\beta_{2k-1}} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g_{\lambda \alpha_{2k}} \delta g^{\lambda \beta_{2k}} \\
&\quad - \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\beta_{2k-1}} \nabla^{\nu} \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g_{\lambda \alpha_{2k}} \delta g^{\lambda \beta_{2k}}.
\end{aligned} \tag{C.35}$$

Por otro lado, del segundo término de (C.34) se tiene que

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3}\beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}} \nabla_{\alpha_{2k}} \delta g^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}} \\
& = - \frac{1}{2} \nabla_{\alpha_{2k}} \underbrace{\left( \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3}\beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}} \delta g^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}} \right)}_{=:A_4^{\alpha_{2k}}} \\
& \quad + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha_{2k}} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3}\beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}} \delta g^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}} \\
& \quad + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_{\mu} \phi \nabla_{\alpha_{2k}} \nabla^{\nu} \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3}\beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}} \delta g^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}} \\
& = - \frac{1}{2\sqrt{-g}} \underbrace{\partial_{\alpha_{2k}} (\sqrt{-g} A_4^{\alpha_{2k}})}_{=:B_4} \\
& \quad + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha_{2k}} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3}\beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}} \delta g^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}} \\
& \quad + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_{\mu} \phi \nabla_{\alpha_{2k}} \nabla^{\nu} \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3}\beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}} \delta g^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}} \\
& = - \frac{1}{2\sqrt{-g}} B_4 \\
& \quad + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha_{2k}} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3}\beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}} \delta g^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}} \\
& \quad + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_{\mu} \phi \nabla_{\alpha_{2k}} \nabla^{\nu} \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3}\beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}} \delta g^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}}.
\end{aligned} \tag{C.36}$$

Así, reemplazando (C.35) y (C.36) en (C.34) se obtiene

$$\begin{aligned}
& \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3}\beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}} g^{\beta_{2k}\gamma} \delta \Gamma^{\beta_{2k-1}}_{\alpha_{2k}\gamma} \\
& = - \nabla^{\beta_{2k-1}} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3}\beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}} g_{\lambda\alpha_{2k}} \delta g^{\lambda\beta_{2k}} \\
& \quad - \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\beta_{2k-1}} \nabla^{\nu} \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3}\beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}} g_{\lambda\alpha_{2k}} \delta g^{\lambda\beta_{2k}} \\
& \quad + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha_{2k}} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3}\beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}} \delta g^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}} \\
& \quad + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_{\mu} \phi \nabla_{\alpha_{2k}} \nabla^{\nu} \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3}\beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}} \delta g^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}} \\
& \quad + \frac{1}{\sqrt{-g}} B_3 - \frac{1}{2\sqrt{-g}} B_4.
\end{aligned} \tag{C.37}$$

Haciendo un cálculo análogo del que se hizo para obtener (C.37) se tiene que el tercer término de (C.33) se puede escribir como



$$\begin{aligned}
& \nabla_\mu \phi \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g^{\beta_{2k} \gamma} \delta \Gamma^{\beta_{2k-1}}_{\alpha_{2k} \gamma} \\
= & - \nabla^{\beta_{2k-1}} \nabla_\mu \phi \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g \lambda_{\alpha_{2k}} \delta g^{\lambda \beta_{2k}} \\
& - \nabla_\mu \phi \nabla^{\beta_{2k-1}} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g \lambda_{\alpha_{2k}} \delta g^{\lambda \beta_{2k}} \\
& + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha_{2k}} \nabla_\mu \phi \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} \delta g^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}} \\
& + \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_{\alpha_{2k}} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} \delta g^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}} \\
& + \frac{1}{\sqrt{-g}} B_5 - \frac{1}{2\sqrt{-g}} B_6. \tag{C.38}
\end{aligned}$$

Así, reemplazando (C.37) y (C.38) en (C.33) se obtiene

$$\begin{aligned}
& \nabla_\mu \phi \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g^{\beta_{2k} \gamma} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \delta \Gamma^{\beta_{2k-1}}_{\alpha_{2k} \gamma} \\
= & \nabla^{\beta_{2k-1}} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_\mu \phi \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g \lambda_{\alpha_{2k}} \delta g^{\lambda \beta_{2k}} \\
& + \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_\mu \phi \nabla^{\beta_{2k-1}} \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g \lambda_{\alpha_{2k}} \delta g^{\lambda \beta_{2k}} \\
& + \nabla^{\beta_{2k-1}} \nabla_\mu \phi \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g \lambda_{\alpha_{2k}} \delta g^{\lambda \beta_{2k}} \\
& + \nabla_\mu \phi \nabla^{\beta_{2k-1}} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g \lambda_{\alpha_{2k}} \delta g^{\lambda \beta_{2k}} \\
& - \frac{1}{2} \nabla_{\alpha_{2k}} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_\mu \phi \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} \delta g^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}} \\
& - \frac{1}{2} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla_\mu \phi \nabla_{\alpha_{2k}} \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} \delta g^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}} \\
& - \frac{1}{2} \nabla_{\alpha_{2k}} \nabla_\mu \phi \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} \delta g^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}} \\
& - \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_{\alpha_{2k}} \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} \delta g^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}} \\
& + \frac{1}{\sqrt{-g}} B_2 - \frac{1}{\sqrt{-g}} B_3 + \frac{1}{2\sqrt{-g}} B_4 - \frac{1}{\sqrt{-g}} B_5 + \frac{1}{2\sqrt{-g}} B_6. \tag{C.39}
\end{aligned}$$

Luego, reemplazando (C.39) en (C.31) se obtiene luego de algunos cálculos

$$\begin{aligned}
(-2^{2k+1}) \delta \mathcal{L}_{LH}^{(k)} = & - \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \phi \nabla^\beta \phi \delta_{\beta\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \delta g^{\mu\nu} \\
& + \sqrt{-g} \nabla_\alpha \phi \nabla_\mu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \delta g^{\mu\nu} \\
& + k \sqrt{-g} \nabla_\alpha \phi \nabla^\beta \phi \delta_{\beta\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} \\
& \times R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} R^{\beta_{2k-1}}_{\nu\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \delta g^{\mu\nu} \\
& + 2k \sqrt{-g} \nabla^{\beta_{2k-1}} \nabla_\alpha \phi \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla^\beta \phi \delta_{\beta\beta_1 \dots \nu}^{\alpha\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} \\
& \times R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g_{\mu\alpha_{2k}} \delta g^{\mu\nu} \\
& + k \sqrt{-g} \nabla_\alpha \phi \nabla^\gamma \phi \delta_{\beta\beta_1 \dots \nu}^{\alpha\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} \\
& \times R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} R_{\alpha_{2k-1} \gamma}^{\beta_{2k-1} \beta} g_{\mu\alpha_{2k}} \delta g^{\mu\nu} \\
& + 2k B_2 - 2k B_3 + k B_4 - 2k B_5 + k B_6, \tag{C.40}
\end{aligned}$$

donde para obtener (C.40) se hizo uso del conmutador de derivadas covariantes (2.12) en el caso de torsión nula.

Ahora, variando la acción (C.20) con respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  se obtiene

$$\delta I = \int d^D x \left( \sum_{k=0}^N \alpha_k \delta \mathcal{L}_{LL}^{(k)} + \sum_{k=0}^N \beta_k \delta \mathcal{L}_{LH}^{(k)} \right) = 0. \quad (\text{C.41})$$

Luego, reemplazando (C.28) y (C.40) en (C.41) se obtiene luego de algunos cálculos

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k E_{\mu\nu}^{(k)} = \sum_{k=0}^N \frac{\beta_k}{2^{2k+1}} T_{\mu\nu}^{(k)}, \quad (\text{C.42})$$

donde  $E_{\mu\nu}^{(k)}$  es dado por

$$E_{\mu\nu}^{(k)} = -\frac{1}{2^{k+1}} g_{(\mu|\alpha} \delta_{|\nu)\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha \alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}, \quad (\text{C.43})$$

y  $T_{\mu\nu}^{(k)}$  es dado por

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(k)} = & -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \phi \nabla^\beta \phi \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha \alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\ & + \nabla_\alpha \phi \nabla_{(\mu} \phi \delta_{|\nu)\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha \alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\ & + k \nabla_\alpha \phi \nabla^\beta \phi \delta_{\beta_1 \dots (\mu}^{\alpha \alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{|\nu) \alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\ & + 2k \nabla^{\beta_{2k-1}} \nabla_\alpha \phi \nabla_{\alpha_{2k-1}} \nabla^\beta \phi \delta_{\beta_1 \dots (\nu)}^{\alpha \alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{|\mu) \alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\ & + k \nabla_\alpha \phi \nabla^\gamma \phi \delta_{\beta_1 \dots (\nu)}^{\alpha \alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-3} \beta_{2k-2}}_{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} R_{\alpha_{2k-1} \gamma}^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}} g_{|\mu) \alpha_{2k}}. \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

Ahora, variando (C.22) con respecto al campo escalar  $\phi$  se obtiene

$$\begin{aligned} (-2^{2k+1}) \delta \mathcal{L}_{LH}^{(k)} = & \sqrt{-g} \nabla_\mu \delta \phi \nabla^\nu \phi \delta_{\nu \beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu \alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\ & + \sqrt{-g} \nabla_\mu \phi \nabla^\nu \delta \phi \delta_{\nu \beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu \alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}. \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

Del primer término de (C.45) se tiene que

$$\begin{aligned}
& \nabla_\mu \delta\phi \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\
&= \nabla_\mu \underbrace{\left( \delta\phi \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \right)}_{=: A_1^\mu} \\
&\quad - \delta\phi \nabla_\mu \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}} \underbrace{\partial_\mu (\sqrt{-g} A_1^\mu)}_{=: B_1} \\
&\quad - \delta\phi \nabla_\mu \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}} B_1 \\
&\quad - \delta\phi \nabla_\mu \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}. \tag{C.46}
\end{aligned}$$

Haciendo un cálculo análogo del que se hizo para obtener (C.46) se tiene que el segundo término de (C.45) se puede escribir como

$$\begin{aligned}
& \nabla_\mu \phi \nabla^\nu \delta\phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}} B_2 \\
&\quad - \nabla^\nu \nabla_\mu \phi \delta\phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}. \tag{C.47}
\end{aligned}$$

Así, reemplazando (C.46) y (C.47) en (C.45) se obtiene

$$\begin{aligned}
(-2^{2k+1}) \delta\mathcal{L}_{LH}^{(k)} &= - \delta\phi \nabla_\mu \nabla^\nu \phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\
&\quad - \nabla^\nu \nabla_\mu \phi \delta\phi \delta_{\nu\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} \\
&\quad + B_1 + B_2. \tag{C.48}
\end{aligned}$$

Ahora, variando la acción (C.20) con respecto a al campo escalar  $\phi$  se obtiene

$$\delta I = \int d^D x \sum_{k=0}^N \beta_k \delta\mathcal{L}_{LH}^{(k)} = 0. \tag{C.49}$$

Luego, reemplazando (C.48) en (C.49) se obtiene luego de algunos cálculos

$$\sum_{k=0}^N \frac{\beta_k}{2^k} E_{\mu\nu}^{(k)} \nabla^\mu \nabla^\nu \phi = 0. \tag{C.50}$$

Por lo tanto, en (C.42) hemos obtenido la ecuación de campo para la métrica  $g_{\mu\nu}$  y en (C.50) hemos obtenido la ecuación de campo para el campo escalar  $\phi$ .

## Ecuaciones de campo de la teoría de Lovelock-Horndeski con $N = 1$

Del capítulo 4 se tiene que la acción de la teoría de Lovelock-Horndeski con  $N = 1$  es dada por

$$I[g_{\mu\nu}, \phi] = \int d^D x \sqrt{-g} \left[ \kappa (R - 2\Lambda) - \frac{1}{2} (\alpha g_{\mu\nu} - \beta G_{\mu\nu}) \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \right]. \quad (\text{C.51})$$

De (C.51) vemos que el lagrangiano de Lovelock-Horndeski con  $N = 1$  es dado por

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ \kappa (R - 2\Lambda) - \frac{1}{2} (\alpha g_{\mu\nu} - \beta G_{\mu\nu}) \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \right]. \quad (\text{C.52})$$

Por otro lado, se tiene que (C.52) puede ser reescrito de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, \quad (\text{C.53})$$

donde

$$\mathcal{L}_1 := \kappa \sqrt{-g} R - 2\kappa \Lambda \sqrt{-g}, \quad (\text{C.54})$$

$$\mathcal{L}_2 := -\frac{\alpha}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \frac{\beta}{2} \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{\beta}{4} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi. \quad (\text{C.55})$$

Variando (C.53) con respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  se obtiene

$$\delta \mathcal{L} = \delta \mathcal{L}_1 + \delta \mathcal{L}_2. \quad (\text{C.56})$$

De (C.54) y (C.56) vemos que

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_1 &= \kappa \delta \sqrt{-g} R + \kappa \sqrt{-g} \delta R - 2\kappa \Lambda \delta \sqrt{-g} \\ &= -\frac{\kappa}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} R + \kappa \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \kappa \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \kappa \Lambda \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{\kappa}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} R + \kappa \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \kappa \Lambda \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\ &\quad + \kappa \sqrt{-g} \underbrace{\nabla_\mu \nabla_\nu \left( -\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \right)}_{=: A_1^\mu} \\ &= -\frac{\kappa}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} R + \kappa \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \kappa \Lambda \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \kappa \underbrace{\partial_\mu (\sqrt{-g} A_1^\mu)}_{=: B_1} \\ &= \kappa \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \kappa \Lambda \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \kappa B_1. \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

Ahora, variando (C.55) con respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  se obtiene

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_2 &= \frac{\alpha}{4}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}(\nabla\phi)^2 - \frac{\alpha}{2}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{\beta}{4}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}R^{\lambda\rho}\nabla_\lambda\phi\nabla_\rho\phi \\ &+ \frac{\beta}{2}\sqrt{-g}\delta R^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + \frac{\beta}{8}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}R(\nabla\phi)^2 - \frac{\beta}{4}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi \\ &- \frac{\beta}{4}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2 - \frac{\beta}{4}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi.\end{aligned}\quad (\text{C.58})$$

Del cuarto término de (C.58) se puede ver que

$$\delta R^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi = 2\delta g^{\mu\nu}\nabla_\lambda\phi\nabla_{(\mu}\phi R^{\lambda}_{\nu)} + \delta R_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi. \quad (\text{C.59})$$

Así, reemplazando (C.59) en (C.58) se obtiene

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_2 &= \frac{\alpha}{4}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}(\nabla\phi)^2 - \frac{\alpha}{2}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{\beta}{4}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}R^{\lambda\rho}\nabla_\lambda\phi\nabla_\rho\phi \\ &+ \beta\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\lambda\phi\nabla_{(\mu}\phi R^{\lambda}_{\nu)} + \frac{\beta}{2}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi + \frac{\beta}{8}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}R(\nabla\phi)^2 \\ &- \frac{\beta}{4}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{\beta}{4}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2 - \frac{\beta}{4}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi \\ &= \frac{\alpha}{4}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}(\nabla\phi)^2 - \frac{\alpha}{2}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{\beta}{4}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}R^{\lambda\rho}\nabla_\lambda\phi\nabla_\rho\phi \\ &+ \beta\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\lambda\phi\nabla_{(\mu}\phi R^{\lambda}_{\nu)} + \frac{\beta}{2}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi - \frac{\beta}{4}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}G_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2 \\ &- \frac{\beta}{4}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{\beta}{4}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi.\end{aligned}\quad (\text{C.60})$$

Ahora, del quinto término de (C.60) se tiene que

$$\delta R_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi = \nabla_\rho\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi - \nabla_\nu\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi. \quad (\text{C.61})$$

Del primer término de (C.61) se puede ver que

$$\begin{aligned}\nabla_\rho\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi &= -\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}\nabla_\rho\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi - \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla_\rho\nabla^\nu\phi + \nabla_\rho(\underbrace{\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi}_{=:A_2^\rho}) \\ &= -\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}\nabla_\rho\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi - \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla_\rho\nabla^\nu\phi + \frac{1}{\sqrt{-g}}\underbrace{\partial_\rho(\sqrt{-g}A_2^\rho)}_{=:B_2} \\ &= -\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}\nabla_\rho\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi - \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla_\rho\nabla^\nu\phi + \frac{1}{\sqrt{-g}}B_2.\end{aligned}\quad (\text{C.62})$$

Del segundo término de (C.61) se puede ver que

$$\begin{aligned}
-\nabla_\nu \delta\Gamma^\rho_{\rho\mu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi &= \delta\Gamma^\rho_{\rho\mu} \nabla_\nu \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi + \delta\Gamma^\rho_{\rho\mu} \nabla^\mu \phi \nabla_\nu \nabla^\nu \phi - \nabla_\nu \underbrace{(\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi)}_{=:A_3'} \\
&= \delta\Gamma^\rho_{\rho\mu} \nabla_\nu \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi + \delta\Gamma^\rho_{\rho\mu} \nabla^\mu \phi \nabla_\nu \nabla^\nu \phi - \frac{1}{\sqrt{-g}} \underbrace{\partial_\nu (\sqrt{-g} A_3')}_{=:B_3} \\
&= \delta\Gamma^\rho_{\rho\mu} \nabla_\nu \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi + \delta\Gamma^\rho_{\rho\mu} \nabla^\mu \phi \nabla_\nu \nabla^\nu \phi - \frac{1}{\sqrt{-g}} B_3. \quad (C.63)
\end{aligned}$$

Luego, reemplazando (C.62) y (C.63) en (C.61) se obtiene

$$\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi &= -\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi - \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla_\rho \nabla^\nu \phi + \delta\Gamma^\rho_{\rho\mu} \nabla_\nu \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \\
&\quad + \delta\Gamma^\rho_{\rho\mu} \nabla^\mu \phi \nabla_\nu \nabla^\nu \phi + \frac{1}{\sqrt{-g}} B_2 - \frac{1}{\sqrt{-g}} B_3. \quad (C.64)
\end{aligned}$$

Ahora, del primer término de (C.64) se tiene que

$$\begin{aligned}
-\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi &= \frac{1}{2} \nabla_\alpha \delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla^\alpha \phi + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla^\alpha \phi \nabla_\nu \phi \\
&\quad - \frac{1}{2} \nabla^\alpha \delta g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi. \quad (C.65)
\end{aligned}$$

El primer término de (C.65) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \nabla_\alpha \delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla^\alpha \phi &= -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla^\alpha \phi - \frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla_\alpha \nabla^\alpha \phi \\
&\quad + \frac{1}{2} \nabla_\alpha \underbrace{(\delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla^\alpha \phi)}_{=:A_4'} \\
&= -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla^\alpha \phi - \frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla_\alpha \nabla^\alpha \phi \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{-g}} \underbrace{\partial_\alpha (\sqrt{-g} A_4')}_{=:B_4} \\
&= -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla^\alpha \phi - \frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla_\alpha \nabla^\alpha \phi \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{-g}} B_4. \quad (C.66)
\end{aligned}$$

El segundo término de (C.65) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\nabla_\alpha\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\phi &= -\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\nu\phi \\
&\quad + \frac{1}{2}\nabla_\alpha\underbrace{(\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\phi)}_{=:A_5^\alpha} \\
&= -\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\nu\phi \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{-g}}\underbrace{\partial_\alpha(\sqrt{-g}A_5^\alpha)}_{=:B_5} \\
&= -\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\nu\phi \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_5. \tag{C.67}
\end{aligned}$$

El tercer término de (C.65) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\nabla^\alpha\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi &= \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla_\alpha\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\mu\phi\nabla^\alpha\nabla_\nu\phi \\
&\quad - \frac{1}{2}\nabla^\alpha\underbrace{(\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi)}_{=:A_6^\alpha} \\
&= \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla_\alpha\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\mu\phi\nabla^\alpha\nabla_\nu\phi \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{-g}}\underbrace{\partial_\alpha(\sqrt{-g}A_6^\alpha)}_{=:B_6} \\
&= \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla_\alpha\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\mu\phi\nabla^\alpha\nabla_\nu\phi \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_6. \tag{C.68}
\end{aligned}$$

Reemplazando (C.66)-(C.68) en (C.65) se obtiene

$$\begin{aligned}
-\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\nabla_\rho\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi &= -\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\nabla^\alpha\phi - \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\nabla_\alpha\nabla^\alpha\phi \\
&\quad - \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\nu\phi \\
&\quad + \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla_\alpha\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\mu\phi\nabla^\alpha\nabla_\nu\phi \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_4 + \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_5 - \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_6. \tag{C.69}
\end{aligned}$$

Ahora, del segundo término de (C.64) se tiene que

$$\begin{aligned}
-\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla_\rho\nabla^\nu\phi &= \frac{1}{2}\nabla_\alpha\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi + \frac{1}{2}\nabla_\alpha\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi \\
&\quad - \frac{1}{2}\nabla^\alpha\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\alpha\nabla_\nu\phi.
\end{aligned} \tag{C.70}$$

El primer término de (C.70) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\nabla_\alpha\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi &= -\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi - \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\alpha\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi \\
&\quad + \frac{1}{2}\nabla_\alpha\underbrace{(\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi)}_{=:A_7^\alpha} \\
&= -\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi - \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\alpha\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{-g}}\underbrace{\partial_\alpha(\sqrt{-g}A_7^\alpha)}_{=:B_7} \\
&= -\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi - \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\alpha\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_7.
\end{aligned} \tag{C.71}$$

El segundo término de (C.70) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\nabla_\alpha\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi &= -\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla^\alpha\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu\phi \\
&\quad + \frac{1}{2}\nabla_\alpha\underbrace{(\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)}_{=:A_8^\alpha} \\
&= -\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla^\alpha\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu\phi \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{-g}}\underbrace{\partial_\alpha(\sqrt{-g}A_8^\alpha)}_{=:B_8} \\
&= -\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla^\alpha\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu\phi \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_8.
\end{aligned} \tag{C.72}$$

El tercer término de (C.70) se puede reescribir como



$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\nabla^\alpha\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\alpha\nabla_\nu\phi &= \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla_\mu\phi\nabla_\alpha\nabla_\nu\phi + \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla^\alpha\nabla_\alpha\nabla_\nu\phi \\
&\quad - \frac{1}{2}\nabla^\alpha\underbrace{(\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\alpha\nabla_\nu\phi)}_{=:A_9^\alpha} \\
&= \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla_\mu\phi\nabla_\alpha\nabla_\nu\phi + \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla^\alpha\nabla_\alpha\nabla_\nu\phi \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{-g}}\underbrace{\partial_\alpha(\sqrt{-g}A_9^\alpha)}_{=:B_9} \\
&= \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla_\mu\phi\nabla_\alpha\nabla_\nu\phi + \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla^\alpha\nabla_\alpha\nabla_\nu\phi \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_9. \tag{C.73}
\end{aligned}$$

Reemplazando (C.71)-(C.73) en (C.70) se obtiene

$$\begin{aligned}
-\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla_\rho\nabla^\nu\phi &= -\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi - \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\alpha\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi \\
&\quad - \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla^\alpha\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu\phi \\
&\quad + \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla_\mu\phi\nabla_\alpha\nabla_\nu\phi + \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla^\alpha\nabla_\alpha\nabla_\nu\phi \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_7 + \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_8 - \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_9. \tag{C.74}
\end{aligned}$$

Ahora, del tercer término de (C.64) se tiene que

$$\delta\Gamma^\rho{}_{\rho\mu}\nabla_\nu\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\delta g^{\mu\nu}\nabla_\beta\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi. \tag{C.75}$$

El primer término de (C.75) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\delta g^{\mu\nu}\nabla_\beta\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\beta\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi \\
&\quad - \frac{1}{2}\nabla_\alpha\underbrace{(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\beta\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi)}_{=:A_{10}^\alpha} \\
&= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\beta\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{-g}}\underbrace{\partial_\alpha(\sqrt{-g}A_{10}^\alpha)}_{=:B_{10}} \\
&= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\beta\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_{10}. \tag{C.76}
\end{aligned}$$

Reemplazando (C.76) en (C.75) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\rho{}_{\rho\mu}\nabla_\nu\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\beta\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_{10}. \end{aligned} \quad (\text{C.77})$$

Finalmente, del cuarto término de (C.64) se tiene que

$$\delta\Gamma^\rho{}_{\rho\mu}\nabla^\mu\phi\nabla_\nu\nabla^\nu\phi = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\beta\nabla^\beta\phi. \quad (\text{C.78})$$

El primer término de (C.78) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\beta\nabla^\beta\phi &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla^\alpha\phi\nabla_\beta\nabla^\beta\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla^\beta\phi \\ &\quad - \frac{1}{2}\nabla_\alpha\left(\underbrace{g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\beta\nabla^\beta\phi}_{=:A_{11}^\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla^\alpha\phi\nabla_\beta\nabla^\beta\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla^\beta\phi \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{-g}}\underbrace{\partial_\alpha(\sqrt{-g}A_{11}^\alpha)}_{=:B_{11}} \\ &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla^\alpha\phi\nabla_\beta\nabla^\beta\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla^\beta\phi \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_{11}. \end{aligned} \quad (\text{C.79})$$

Reemplazando (C.79) en (C.78) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\rho{}_{\rho\mu}\nabla^\mu\phi\nabla_\nu\nabla^\nu\phi &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla^\alpha\phi\nabla_\beta\nabla^\beta\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla^\beta\phi \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_{11}. \end{aligned} \quad (\text{C.80})$$

Así, reemplazando (C.69), (C.74), (C.77) y (C.80) en (C.64) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi &= -\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\alpha\nabla_\nu\phi\nabla^\alpha\phi + \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\lambda\nu\rho}\nabla^\lambda\phi\nabla^\rho\phi - \delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\Box\phi \\ &\quad - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}R^{\lambda\rho}\nabla_\lambda\phi\nabla_\rho\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi \\ &\quad + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}(\Box\phi)^2 + g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\beta\nabla^\beta\nabla_\alpha\phi\nabla^\alpha\phi + \frac{1}{\sqrt{-g}}B_2 - \frac{1}{\sqrt{-g}}B_3 \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_4 + \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_5 - \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_6 + \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_7 \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_8 - \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_9 - \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_{10} - \frac{1}{2\sqrt{-g}}B_{11}, \end{aligned} \quad (\text{C.81})$$

donde para obtener (C.81) se hizo uso del conmutador de derivadas covariantes (2.12) en el caso de torsión nula. Luego, se tiene que (C.81) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{2}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi &= -\frac{\beta}{2}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\alpha\nabla_\nu\phi\nabla^\alpha\phi + \frac{\beta}{2}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\lambda\nu\rho}\nabla^\lambda\phi\nabla^\rho\phi \\
&\quad -\frac{\beta}{2}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\Box\phi - \frac{\beta}{4}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}R^{\lambda\rho}\nabla_\lambda\phi\nabla_\rho\phi \\
&\quad + \frac{\beta}{4}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi + \frac{\beta}{4}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}(\Box\phi)^2 \\
&\quad + \frac{\beta}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\beta\nabla^\beta\nabla_\alpha\phi\nabla^\alpha\phi + \frac{\beta}{2}B_2 - \frac{\beta}{2}B_3 + \frac{\beta}{4}B_4 \\
&\quad + \frac{\beta}{4}B_5 - \frac{\beta}{4}B_6 + \frac{\beta}{4}B_7 + \frac{\beta}{4}B_8 - \frac{\beta}{4}B_9 - \frac{\beta}{4}B_{10} - \frac{\beta}{4}B_{11}.
\end{aligned} \tag{C.82}$$

Por otro lado, del octavo término de (C.60) se tiene que

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi = -\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi + g_{\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla_\alpha\delta g^{\mu\nu}\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi. \tag{C.83}$$

Del primer término de (C.83) se tiene que

$$\begin{aligned}
-\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi &= 2\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi - \nabla_\mu\underbrace{\left(\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi\right)}_{=:A_{12}^\mu} \\
&= 2\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\underbrace{\left(\sqrt{-g}A_{12}^\mu\right)}_{=:B_{12}} \\
&= 2\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi - \frac{1}{\sqrt{-g}}B_{12}.
\end{aligned} \tag{C.84}$$

Ahora, el primer término de (C.84) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
2\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi &= -2\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi - 2\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla^\lambda\phi\nabla_\nu\nabla_\lambda\phi \\
&\quad + 2\nabla_\nu\underbrace{\left(\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi\right)}_{=:A_{13}^\nu} \\
&= -2\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi - 2\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla^\lambda\phi\nabla_\nu\nabla_\lambda\phi \\
&\quad + \frac{2}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\underbrace{\left(\sqrt{-g}A_{13}^\nu\right)}_{=:B_{13}} \\
&= -2\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi - 2\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla^\lambda\phi\nabla_\nu\nabla_\lambda\phi \\
&\quad + \frac{2}{\sqrt{-g}}B_{13}.
\end{aligned} \tag{C.85}$$

Luego, reemplazando (C.85) en (C.84) se obtiene

$$\begin{aligned} -\nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi &= -2\delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi - 2\delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla^\lambda \phi \nabla_\nu \nabla_\lambda \phi \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{-g}} B_{12} + \frac{2}{\sqrt{-g}} B_{13}. \end{aligned} \quad (\text{C.86})$$

Del segundo término de (C.83) se tiene que

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla_\alpha \delta g^{\mu\nu} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi &= -2g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \delta g^{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi + \nabla^\alpha \underbrace{\left( g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \delta g^{\mu\nu} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi \right)}_{=:A_{14}^\alpha} \\ &= -2g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \delta g^{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi + \frac{1}{\sqrt{-g}} \underbrace{\partial_\alpha (\sqrt{-g} A_{14}^\alpha)}_{=:B_{14}} \\ &= -2g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \delta g^{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi + \frac{1}{\sqrt{-g}} B_{14}. \end{aligned} \quad (\text{C.87})$$

Ahora, el primer término de (C.87) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} -2g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \delta g^{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi &= 2g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi + 2g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla^\lambda \phi \nabla_\alpha \nabla_\lambda \phi \\ &\quad - 2\nabla_\alpha \underbrace{\left( g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi \right)}_{=:A_{15}^\alpha} \\ &= 2g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi + 2g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla^\lambda \phi \nabla_\alpha \nabla_\lambda \phi \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{-g}} \underbrace{\partial_\alpha (\sqrt{-g} A_{15}^\alpha)}_{=:B_{15}} \\ &= 2g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi + 2g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla^\lambda \phi \nabla_\alpha \nabla_\lambda \phi \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{-g}} B_{15}. \end{aligned} \quad (\text{C.88})$$

Luego, reemplazando (C.87) en (C.88) se obtiene

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla_\alpha \delta g^{\mu\nu} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi &= 2g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi + 2g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla^\lambda \phi \nabla_\alpha \nabla_\lambda \phi \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{-g}} B_{14} - \frac{2}{\sqrt{-g}} B_{15}. \end{aligned} \quad (\text{C.89})$$

Así, reemplazando (C.86) y (C.89) en (C.83) se obtiene

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi &= -2\delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi - 2\delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla^\lambda \phi \nabla_\nu \nabla_\lambda \phi \\ &\quad + 2g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi + 2g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla^\lambda \phi \nabla_\alpha \nabla_\lambda \phi \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{-g}} B_{12} + \frac{2}{\sqrt{-g}} B_{13} + \frac{1}{\sqrt{-g}} B_{14} - \frac{2}{\sqrt{-g}} B_{15}. \end{aligned} \quad (\text{C.90})$$

Luego, se tiene que (C.90) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
-\frac{\beta}{4}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi &= \frac{\beta}{2}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi + \frac{\beta}{2}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla^\lambda\phi\nabla_\nu\nabla_\lambda\phi \\
&\quad - \frac{\beta}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla^\alpha\nabla^\lambda\phi\nabla_\lambda\phi \\
&\quad - \frac{\beta}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\lambda\nabla^\rho\phi\nabla_\lambda\nabla_\rho\phi \\
&\quad + \frac{\beta}{4}B_{12} - \frac{\beta}{2}B_{13} - \frac{\beta}{4}B_{14} + \frac{\beta}{2}B_{15}.
\end{aligned} \tag{C.91}$$

Reemplazando (C.82) y (C.91) en (C.60) se obtiene

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_2 &= \frac{\alpha}{4}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}(\nabla\phi)^2 - \frac{\alpha}{2}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{\beta}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}R^{\lambda\rho}\nabla_\lambda\phi\nabla_\rho\phi \\
&\quad + \beta\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\lambda\phi\nabla_{(\mu}\phi R^\lambda_{\nu)} - \frac{\beta}{4}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}G_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2 - \frac{\beta}{4}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi \\
&\quad + \frac{\beta}{2}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\lambda\nu\rho}\nabla^\lambda\phi\nabla^\rho\phi - \frac{\beta}{2}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\Box\phi + \frac{\beta}{4}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}(\Box\phi)^2 \\
&\quad + \frac{\beta}{2}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla^\lambda\phi\nabla_\nu\nabla_\lambda\phi - \frac{\beta}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\lambda\nabla^\rho\phi\nabla_\lambda\nabla_\rho\phi \\
&\quad + \frac{\beta}{2}B_2 - \frac{\beta}{2}B_3 + \frac{\beta}{4}B_4 + \frac{\beta}{4}B_5 - \frac{\beta}{4}B_6 + \frac{\beta}{4}B_7 + \frac{\beta}{4}B_8 - \frac{\beta}{4}B_9 - \frac{\beta}{4}B_{10} \\
&\quad - \frac{\beta}{4}B_{11} + \frac{\beta}{4}B_{12} - \frac{\beta}{2}B_{13} - \frac{\beta}{4}B_{14} + \frac{\beta}{2}B_{15}.
\end{aligned} \tag{C.92}$$

Ahora, variando la acción (C.51) con respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  se obtiene

$$\delta I = \int d^Dx (\delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2) = 0, \tag{C.93}$$

donde para obtener (C.93) se ha hecho uso de (C.52) y (C.56).

Luego, reemplazando (C.57) y (C.92) en (C.93) se obtiene después de algunos cálculos

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{\alpha}{2\kappa}T_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{\beta}{8\kappa}T_{\mu\nu}^{(1)}, \tag{C.94}$$

donde  $T_{\mu\nu}^{(0)}$  y  $T_{\mu\nu}^{(1)}$  corresponden a los tensores energía-momentum para el campo de materia  $\phi$  de orden 0 y 1 en la curvatura, respectivamente. Luego, estos tensores son dados por

$$T_{\mu\nu}^{(0)} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi, \quad (\text{C.95})$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(1)} = & 2\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi R - 8\nabla_\lambda \phi \nabla_{(\mu} \phi R^{\lambda}_{\nu)} - 4\nabla^\lambda \phi \nabla^\rho \phi R_{\mu\lambda\nu\rho} \\ & - 4\nabla_\mu \nabla^\lambda \phi \nabla_\nu \nabla_\lambda \phi + 4\nabla_\mu \nabla_\nu \phi \square \phi + 2G_{\mu\nu} (\nabla \phi)^2 \\ & - g_{\mu\nu} \left[ -2\nabla^\lambda \nabla^\rho \phi \nabla_\lambda \nabla_\rho \phi + 2(\square \phi)^2 - 4\nabla_\lambda \phi \nabla_\rho \phi R^{\lambda\rho} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.96})$$

Ahora, variando (C.53) con respecto al campo escalar  $\phi$  se obtiene

$$\delta \mathcal{L} = \delta \mathcal{L}_2. \quad (\text{C.97})$$

De (C.55) vemos que

$$\delta \mathcal{L}_2 = -\sqrt{-g} (\alpha g_{\mu\nu} - \beta G_{\mu\nu}) \nabla^\mu \delta \phi \nabla^\nu \phi. \quad (\text{C.98})$$

Del primer término de (C.98) vemos que

$$\begin{aligned} -(\alpha g_{\mu\nu} - \beta G_{\mu\nu}) \nabla^\mu \delta \phi \nabla^\nu \phi &= (\alpha g_{\mu\nu} - \beta G_{\mu\nu}) \delta \phi \nabla^\mu \nabla^\nu \phi - \nabla^\nu \underbrace{[(\alpha g_{\mu\nu} - \beta G_{\mu\nu}) \delta \phi \nabla^\nu \phi]}_{=: A_1^\nu} \\ &= (\alpha g_{\mu\nu} - \beta G_{\mu\nu}) \delta \phi \nabla^\mu \nabla^\nu \phi - \frac{1}{\sqrt{-g}} \underbrace{\partial_\nu (\sqrt{-g} A_1^\nu)}_{=: B_1} \\ &= (\alpha g_{\mu\nu} - \beta G_{\mu\nu}) \delta \phi \nabla^\mu \nabla^\nu \phi - \frac{1}{\sqrt{-g}} B_1. \end{aligned} \quad (\text{C.99})$$

Así, reemplazando (C.99) en (C.98) se obtiene

$$\delta \mathcal{L}_2 = \sqrt{-g} (\alpha g_{\mu\nu} - \beta G_{\mu\nu}) \delta \phi \nabla^\mu \nabla^\nu \phi - B_1. \quad (\text{C.100})$$

Ahora, variando la acción (C.51) con respecto al campo escalar  $\phi$  se obtiene

$$\delta I = \int d^D x \delta \mathcal{L}_2 = 0, \quad (\text{C.101})$$

donde para obtener (C.101) se ha hecho uso de (C.52) y (C.56).

Luego, reemplazando (C.100) en (C.101) se obtiene luego de algunos cálculos

$$\alpha \square \phi - \beta G_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \phi = 0. \quad (\text{C.102})$$

Por lo tanto, en (C.94) hemos obtenido las ecuaciones de campo para la métrica  $g_{\mu\nu}$  y en (C.102) hemos obtenido la ecuación de campo para el campo escalar  $\phi$ .

## Apéndice D

# Teoremas de unicidad

En este apéndice se mostrarán los teoremas de unicidad, los cuales son muy importantes a la hora de querer encontrar soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein 4-dimensionales (2.77). Antes de mostrar estos teoremas vamos a dar la definición de un espaciotiempo estacionario y la definición de un espaciotiempo estático, las cuales son importantes para poder entender los teoremas de unicidad.

**Definición D.0.1** *Un espaciotiempo 4-dimensional asintóticamente plano es estacionario si y solo si existe un vector de Killing tipo tiempo  $\xi_{(t)}^\mu = (1, 0, 0, 0)$  en infinito. Luego, existe un sistema coordenado en el que el elemento de línea de dicho espaciotiempo se puede escribir de la forma*

$$ds^2 = g_{tt}(\vec{x}) dt^2 + 2g_{ti}(\vec{x}) dt dx^i + g_{ij}(\vec{x}) dx^i dx^j, \quad (D.1)$$

donde la presencia del término cruzado  $g_{ti}(\vec{x}) dt dx^i$  en (D.1) indica que el espaciotiempo es estacionario.

**Definición D.0.2** *Un espaciotiempo 4-dimensional asintóticamente plano es estático si y solo si existe un vector de Killing tipo tiempo  $\xi_{(t)}^\mu = (1, 0, 0, 0)$  en infinito, y además este espaciotiempo es invariante bajo inversiones temporales, es decir, es invariante bajo  $t \rightarrow -t$ . Luego, existe un sistema coordenado en el que el elemento de línea de dicho espaciotiempo se puede escribir de la forma*

$$ds^2 = g_{tt}(\vec{x}) dt^2 + g_{ij}(\vec{x}) dx^i dx^j, \quad (D.2)$$

donde la ausencia del término cruzado  $g_{ti}(\vec{x}) dt dx^i$  en (D.2) indica que el espaciotiempo es estático.

A continuación vamos a mostrar los teoremas de unicidad mencionados al inicio de este apéndice.

**Teorema D.0.1 (Teorema de Birkhoff)** *Si tenemos un espaciotiempo esféricamente simétrico 4-dimensional, el cual es solución de las ecuaciones de campo de*

*Einstein en el vacío, entonces este espaciotiempo debe ser estático. Luego, el único espaciotiempo que cumple estas características es el descrito por la solución de Schwarzschild.*

**Teorema D.0.2 (Teorema de Birkhoff generalizado)** *Si tenemos un espaciotiempo esféricamente simétrico 4-dimensional, el cual es solución de las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell, entonces este espaciotiempo debe ser estático. Luego, el único espaciotiempo que cumple estas características es el descrito por la solución de Reissner-Nordström.*

**Teorema D.0.3 (Teorema de Israel)** *Si tenemos un espaciotiempo que describe un agujero negro asintóticamente plano y estático 4-dimensional, el cual es solución de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, y además este espaciotiempo es no-singular tanto en la región interna como en la externa del horizonte de eventos, entonces este agujero negro debe ser el descrito por la solución de Schwarzschild.*

**Teorema D.0.4 (Teorema de Carter-Robinson)** *Si tenemos un espaciotiempo que describe un agujero negro asintóticamente plano y estacionario 4-dimensional, el cual es solución de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, y además este espaciotiempo es no-singular tanto en la región interna como en la externa del horizonte de eventos, entonces este agujero negro debe ser el descrito por la solución de Kerr.*

**Teorema D.0.5 (Teorema de Carter-Robinson generalizado)** *Si tenemos un espaciotiempo que describe un agujero negro asintóticamente plano y estacionario 4-dimensional, el cual es solución de las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell, y además este espaciotiempo es no-singular tanto en la región interna como en la externa del horizonte de eventos, entonces este agujero negro debe ser el descrito por la solución de Kerr-Newman.*

Finalmente, cabe mencionar que los teoremas de unicidad D.0.3, D.0.4 y D.0.5 nos dicen que si tenemos una estrella que posee momentos multipolares de masa no nulos, distribuciones de momentum angular variables y momentos multipolares electromagnéticos no nulos, entonces cuando ésta colapsa a un agujero negro todas estas cantidades se irradian en forma de ondas gravitacionales y electromagnéticas. Así, cuando se forma el agujero negro las únicas cantidades observables son su masa  $M$ , su momentum angular  $J$  y su carga  $Q$ . Luego, el agujero negro que es descrito por estas tres cantidades recibe el nombre de *agujero negro de Kerr-Newman*. De la misma forma, si tenemos una estrella que colapsa a un agujero negro descrito por su masa  $M$  y su momentum angular  $J$ , entonces éste corresponde al *agujero negro de Kerr*. Además, si tenemos una estrella que colapsa a un agujero negro descrito solo por un masa  $M$ , entonces éste corresponde al *agujero negro de Schwarzschild*. Ver [74, 75] para más detalles sobre estos agujeros negros.



## Apéndice E

# Descomposición tensorial

Consideremos un espaciotiempo  $d$ -dimensional descrito por una métrica  $g_{\mu\nu}$ , el cual se puede escribir como el producto entre un espaciotiempo  $(d-2)$ -dimensional descrito por una métrica  $\gamma_{ij}$ <sup>1</sup> y un espaciotiempo 2-dimensional descrito por una métrica  $g_{ab}$ . Luego, el elemento de línea de este espaciotiempo  $d$ -dimensional se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{ab}(y) dy^a dy^b + r^2(y) \gamma_{ij}(z) dz^i dz^j, \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

donde  $a, b = 0, 1$ ,  $i, j = 2, \dots, d-1$  y  $r = r(y)$  es un escalar que pertenece al espaciotiempo descrito por la métrica  $g_{ab}$ .

Ahora, usando (2.29) y (E.1) se obtiene que las componentes no nulas de los símbolos de Christoffel son dadas por

$$\Gamma^a{}_{bc} = \tilde{\Gamma}^a{}_{bc}, \quad \Gamma^i{}_{jk} = \hat{\Gamma}^i{}_{jk}, \quad (\text{E.2})$$

$$\Gamma^a{}_{ij} = -r D^a r \gamma_{ij}, \quad \Gamma^i{}_{ja} = \frac{D_a r}{r} \delta_j^i, \quad (\text{E.3})$$

donde el símbolo  $\sim$  denota una cantidad 2-dimensional,  $D_a$  es la derivada covariante asociada a la conexión  $\Gamma^a{}_{bc}$  y  $\hat{\Gamma}^i{}_{jk}$  son los símbolos de Christoffel asociados a la métrica  $\gamma_{ij}$ .

Por otro lado, usando (2.36) y los símbolos de Christoffel obtenidos en (E.2)-(E.3) se obtiene que las componentes no nulas del tensor de Riemann son dadas por

---

<sup>1</sup>Este espaciotiempo es maximalmente simétrico y posee una curvatura constante  $\gamma$ , la cual puede tomar los valores  $\gamma = 0, \pm 1$ . Luego, el tensor de Riemann es dado por  $R_{ijkl} = \gamma(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk})$ .

$$R^a{}_{bcd} = \tilde{R}^a{}_{bcd}, \quad (\text{E.4})$$

$$R^a{}_{ibj} = -r D^a D_b r \gamma_{ij}, \quad (\text{E.5})$$

$$R^i{}_{jkl} = \left[ \gamma - (Dr)^2 \right] (\delta_k^i \gamma_{jl} - \delta_l^i \gamma_{jk}). \quad (\text{E.6})$$

Además, los tensores de Riemann dados en (E.4)-(E.6) se pueden escribir de la forma

$$R_{abcd} = \tilde{R}_{abcd}, \quad (\text{E.7})$$

$$R_{aibj} = -r D_a D_b r \gamma_{ij}, \quad (\text{E.8})$$

$$R_{ijkl} = r^2 \left[ \gamma - (Dr)^2 \right] (\gamma_{ik} \gamma_{jl} - \gamma_{il} \gamma_{jk}). \quad (\text{E.9})$$

Luego, usando los tensores de Riemann obtenidos en (E.7)-(E.9) se obtiene que las componentes no nulas del tensor de Ricci son dadas por

$$R_{ab} = \tilde{R}_{ab} - (d-2) \frac{D_a D_b r}{r}, \quad (\text{E.10})$$

$$R_{ij} = \left\{ -r D^2 r + (d-3) \left[ \gamma - (Dr)^2 \right] \right\} \gamma_{ij}. \quad (\text{E.11})$$

Finalmente, usando los tensores de Ricci obtenidos en (E.10)-(E.11) se obtiene que el escalar de curvatura es dado por

$$R = \tilde{R} - 2(d-2) \frac{D^2 r}{r} + (d-2)(d-3) \frac{\left[ \gamma - (Dr)^2 \right]}{r^2}. \quad (\text{E.12})$$

Usando los resultados obtenidos en (E.4)-(E.12) vamos a descomponer tensorialmente las ecuaciones de campo de Lanczos-Lovelock (3.6). Con el fin de realizar este cálculo, primero vamos a descomponer tensorialmente el lagrangiano de Lanczos-Lovelock (3.5) y finalmente vamos a descomponer tensorialmente el tensor de Lovelock (3.7).

## Descomposición tensorial del lagrangiano de Lanczos-Lovelock

Del lagrangiano de Lanczos-Lovelock (3.19) se tiene que

$$L^{(0)} = 1. \quad (\text{E.13})$$

Luego, tenemos que (E.13) puede ser reescrito como

$$L^{(0)} = \frac{(d-2)!}{d!} [d(d-1)]. \quad (\text{E.14})$$

Por otro lado, del lagrangiano de Lanczos-Lovelock (3.20) se tiene que

$$L^{(1)} = R. \quad (\text{E.15})$$

Reemplazando (E.12) en (E.15) se obtiene

$$L^{(1)} = \tilde{R} - 2(d-2) \frac{D^2 r}{r} + (d-2)(d-3) \frac{[\gamma - (Dr)^2]}{r^2}. \quad (\text{E.16})$$

Luego, tenemos que (E.16) puede ser reescrito como

$$L^{(1)} = \frac{(d-2)!}{(d-2)!} \left\{ \tilde{R} - 2(d-2) \frac{D^2 r}{r} + (d-2)(d-3) \frac{[\gamma - (Dr)^2]}{r^2} \right\}. \quad (\text{E.17})$$

Por otro lado, del lagrangiano de Lanczos-Lovelock (3.21) se tiene que

$$L^{(2)} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}. \quad (\text{E.18})$$

Ahora, reemplazando (E.12) en el primer término de (E.18) se obtiene

$$\begin{aligned} R^2 &= \left\{ \tilde{R} - 2(d-2) \frac{D^2 r}{r} + (d-2)(d-3) \frac{[\gamma - (Dr)^2]}{r^2} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \tilde{R} - 2(d-2) \frac{D^2 r}{r} + (d-2)(d-3) \frac{[\gamma - (Dr)^2]}{r^2} \right\} \\ &= \tilde{R}^2 - 4(d-2) \frac{D^2 r}{r} \tilde{R} + 2(d-2)(d-3) \frac{[\gamma - (Dr)^2]}{r^2} \tilde{R} \\ &\quad - 4(d-2)^2 (d-3) \frac{D^2 r}{r} \frac{[\gamma - (Dr)^2]}{r^2} \\ &\quad + 4(d-2)^2 \frac{(D^2 r)^2}{r^2} + (d-2)^2 (d-3)^2 \frac{[\gamma - (Dr)^2]^2}{r^4}. \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Por otra parte, del segundo término de (E.18) vemos que

$$-4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = -4R_{ab}R^{ab} - 4\frac{\gamma^{ik}\gamma^{jl}}{r^4}R_{ij}R_{kl}. \quad (\text{E.20})$$

Ahora, reemplazando (E.10) y (E.11) en (E.20) se obtiene

$$\begin{aligned} -4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} &= -4\left[\tilde{R}_{ab} - (d-2)\frac{D_a D_b r}{r}\right]\left[\tilde{R}^{ab} - (d-2)\frac{D^a D^b r}{r}\right] \\ &\quad - 4\frac{\gamma^{ik}\gamma^{jl}}{r^4}\left\{-rD^2 r + (d-3)\left[\gamma - (Dr)^2\right]\right\}\gamma_{ij} \\ &\quad \times \left\{-rD^2 r + (d-3)\left[\gamma - (Dr)^2\right]\right\}\gamma_{kl} \\ &= -4\tilde{R}^{ab}\tilde{R}_{ab} + 8(d-2)\frac{D_a D_b r}{r}\tilde{R}^{ab} - 4(d-2)^2\frac{D_a D_b r D^a D^b r}{r^2} \\ &\quad - 4(d-2)\frac{(D^2 r)^2}{r^2} + 8(d-2)(d-3)\frac{D^2 r}{r}\frac{\left[\gamma - (Dr)^2\right]}{r^2} \\ &\quad - 4(d-2)(d-3)^2\frac{\left[\gamma - (Dr)^2\right]^2}{r^4}. \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Por otra parte, del tercer término de (E.18) vemos que

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho} = R_{abcd}R^{abcd} + 4\frac{\gamma^{ik}\gamma^{jl}}{r^4}R_{aibj}R^a{}_{k}{}^b{}_{l} + \frac{\gamma^{im}\gamma^{jn}\gamma^{kp}\gamma^{lq}}{r^8}R_{ijkl}R_{mnpq}. \quad (\text{E.22})$$

Ahora, reemplazando (E.7)-(E.9) en (E.22) se obtiene

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho} &= \tilde{R}_{abcd}\tilde{R}^{abcd} + 4\frac{\gamma^{ik}\gamma^{jl}}{r^4}\left[-rD_a D_b r\gamma_{ij}\right]\left[-rD^a D^b r\gamma_{kl}\right] \\ &\quad + \frac{\gamma^{im}\gamma^{jn}\gamma^{kp}\gamma^{lq}}{r^8}\left\{r^2\left[\gamma - (Dr)^2\right](\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk})\right\} \\ &\quad \times \left\{r^2\left[\gamma - (Dr)^2\right](\gamma_{mp}\gamma_{nq} - \gamma_{mq}\gamma_{np})\right\} \\ &= \tilde{R}_{abcd}\tilde{R}^{abcd} - 4(d-2)\frac{D_a D_b r D^a D^b r}{r^2} \\ &\quad + 2(d-2)(d-3)\frac{\left[\gamma - (Dr)^2\right]^2}{r^4}. \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

Reemplazando (E.19), (E.21) y (E.23) en (E.18) se obtiene

$$\begin{aligned}
L^{(2)} = & \tilde{L}^{(2)} \stackrel{=0}{=} + 8(d-2) \frac{D_a D_b r}{r} \tilde{G}^{ab} \stackrel{=0}{=} + 2(d-2)(d-3) \tilde{R} \frac{[\gamma - (Dr)^2]}{r^2} \\
& - 4(d-2)(d-3)(d-4) \frac{D^2 r}{r} \frac{[\gamma - (Dr)^2]}{r^2} \\
& + 4(d-2)(d-3) \frac{(D^2 r)^2 - D_a D_b r D^a D^b r}{r^2} \\
& + (d-2)(d-3)(d-4)(d-5) \frac{[\gamma - (Dr)^2]^2}{r^4}. \tag{E.24}
\end{aligned}$$

Luego, tenemos que (E.24) puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}
L^{(2)} = & \frac{(d-2)!}{(d-4)!} \left\{ 2\tilde{R} \frac{[\gamma - (Dr)^2]}{r^2} - 4(d-4) \frac{D^2 r}{r} \frac{[\gamma - (Dr)^2]}{r^2} \right. \\
& \left. + 4 \frac{(D^2 r)^2 - D_a D_b r D^a D^b r}{r^2} + (d-4)(d-5) \frac{[\gamma - (Dr)^2]^2}{r^4} \right\}. \tag{E.25}
\end{aligned}$$

Finalmente, de (E.14), (E.17), (E.25) vemos que el lagrangiano de Lanczos-Lovelock de orden  $k$  descompuesto tensorialmente es dado por

$$L^{(k)} = \frac{(d-2)!}{(d-2k)!} \Psi^{(k)}, \tag{E.26}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Psi^{(k)} := & (d-2k)(d-2k-1) \left[ \frac{\gamma - (Dr)^2}{r^2} \right]^k - 2(d-2k)k \frac{D^2 r}{r} \left[ \frac{\gamma - (Dr)^2}{r^2} \right]^{k-1} \\
& + 2k(k-1) \frac{(D^2 r)^2 - D_a D_b r D^a D^b r}{r^2} \left[ \frac{\gamma - (Dr)^2}{r^2} \right]^{k-2} + k\tilde{R} \left[ \frac{\gamma - (Dr)^2}{r^2} \right]^{k-1}. \tag{E.27}
\end{aligned}$$

## Descomposición tensorial del tensor de Lovelock

Del tensor de Lovelock (3.23) se tiene que

$$E_{\mu\nu}^{(0)} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}. \tag{E.28}$$

Tomando la componente  $(i, j)$  de (E.28) se obtiene

$$E_{ij}^{(0)} = -\frac{1}{2}g_{ij}. \quad (\text{E.29})$$

Ahora, reemplazando la componente métrica  $(i, j)$  de (E.1) en (E.29) vemos que

$$E_{ij}^{(0)} = -\frac{1}{2}r^2\gamma_{ij}. \quad (\text{E.30})$$

Luego, tenemos que (E.30) puede ser reescrito como

$$E^{(0)i}{}_{j} = -\frac{(d-3)!}{2(d-1)!} [(d-1)(d-2)] \delta_j^i. \quad (\text{E.31})$$

Por otro lado, del tensor de Lovelock (3.24) se tiene que

$$E_{\mu\nu}^{(1)} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (\text{E.32})$$

Tomando la componente  $(i, j)$  de (E.32) se obtiene

$$E_{ij}^{(1)} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R. \quad (\text{E.33})$$

Ahora, reemplazando la componente métrica  $(i, j)$  de (E.1), (E.11) y (E.12) en (E.33) se obtiene

$$\begin{aligned} E_{ij}^{(1)} &= \left\{ -rD^2r + (d-3) \left[ \gamma - (Dr)^2 \right] \right\} \gamma_{ij} \\ &\quad - \frac{1}{2}r^2\gamma_{ij} \left\{ \tilde{R} - 2(d-2) \frac{D^2r}{r} + (d-2)(d-3) \frac{\left[ \gamma - (Dr)^2 \right]}{r^2} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ (d-3)(d-4) \left[ \gamma - (Dr)^2 \right] - \left[ 2(d-3)rD^2r - r^2\tilde{R} \right] \right\} \gamma_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{E.34})$$

Luego, tenemos que (E.34) puede ser reescrito como

$$E^{(1)i}{}_{j} = -\frac{(d-3)!}{2(d-3)!} \left\{ (d-3)(d-4) \frac{\left[ \gamma - (Dr)^2 \right]}{r^2} - \left[ 2(d-3) \frac{D^2r}{r} - \tilde{R} \right] \right\} \delta_j^i. \quad (\text{E.35})$$

Por otro lado, del tensor de Lovelock (3.25) se tiene que

$$E_{\mu\nu}^{(2)} = 2RR_{\mu\nu} - 4R_{\mu\gamma}R^\gamma_\nu - 4R^{\gamma\delta}R_{\mu\gamma\nu\delta} + 2R_{\mu\gamma\delta\lambda}R_\nu^{\gamma\delta\lambda} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}L^{(2)}. \quad (\text{E.36})$$

Tomando la componente  $(i, j)$  de (E.36) se obtiene

$$E_{ij}^{(2)} = 2RR_{ij} - 4R_{i\gamma}R^\gamma_j - 4R^{\gamma\delta}R_{i\gamma j\delta} + 2R_{i\gamma\delta\lambda}R_j^{\gamma\delta\lambda} - \frac{1}{2}g_{ij}L^{(2)}. \quad (\text{E.37})$$

Ahora, reemplazando (E.11) y (E.12) en el primer término de (E.37) se obtiene

$$\begin{aligned} 2RR_{ij} &= 2 \left\{ \tilde{R} - 2(d-2)\frac{D^2r}{r} + (d-2)(d-3)\frac{[\gamma - (Dr)^2]}{r^2} \right\} \\ &\quad \times \left\{ -rD^2r + (d-3)[\gamma - (Dr)^2] \right\} \gamma_{ij} \\ &= \left\{ -2rD^2r\tilde{R} + 2(d-3)[\gamma - (Dr)^2]\tilde{R} + 4(d-2)(D^2r)^2 \right. \\ &\quad \left. - 6(d-2)(d-3)\frac{D^2r}{r}[\gamma - (Dr)^2] + 2(d-2)(d-3)^2\frac{[\gamma - (Dr)^2]^2}{r^2} \right\} \gamma_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{E.38})$$

Por otra parte, del segundo término de (E.37) vemos que

$$-4R_{i\gamma}R^\gamma_j = -4\frac{\gamma^{kl}}{r^2}R_{ik}R_{jl}. \quad (\text{E.39})$$

Ahora, reemplazando (E.11) en (E.39) se obtiene

$$\begin{aligned} -4R_{i\gamma}R^\gamma_j &= -4\frac{\gamma^{kl}}{r^2} \left\{ -rD^2r + (d-3)[\gamma - (Dr)^2] \right\} \gamma_{ik} \\ &\quad \times \left\{ -rD^2r + (d-3)[\gamma - (Dr)^2] \right\} \gamma_{jl} \\ &= \left\{ -4(D^2r)^2 + 8(d-3)\frac{D^2r}{r}[\gamma - (Dr)^2] \right. \\ &\quad \left. - 4(d-3)^2\frac{[\gamma - (Dr)^2]^2}{r^2} \right\} \gamma_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{E.40})$$

Por otra parte, del tercer término de (E.37) vemos que

$$-4R^{\gamma\delta}R_{i\gamma j\delta} = -4R^{ab}R_{iajb} - 4\frac{\gamma^{km}\gamma^{ln}}{r^4}R_{mn}R_{ikjl}. \quad (\text{E.41})$$

Ahora, reemplazando (E.8)-(E.11) en (E.41) se obtiene

$$\begin{aligned}
-4R^{\gamma\delta}R_{i\gamma j\delta} &= -4\left[\tilde{R}^{ab} - (d-2)\frac{D^a D^b r}{r}\right] [-rD_a D_b r \gamma_{ij}] \\
&\quad - 4\frac{\gamma^{km}\gamma^{ln}}{r^4} \left\{-rD^2 r + (d-3)\left[\gamma - (Dr)^2\right]\right\} \gamma_{mn} \\
&\quad \times r^2 \left[\gamma - (Dr)^2\right] (\gamma_{ij}\gamma_{kl} - \gamma_{il}\gamma_{kj}) \\
&= \left\{4r\tilde{R}^{ab}D_a D_b r - 4(d-2)D_a D_b r D^a D^b r \right. \\
&\quad \left. + 4(d-3)\frac{D^2 r}{r}\left[\gamma - (Dr)^2\right] - 4(d-3)^2\frac{\left[\gamma - (Dr)^2\right]^2}{r^2}\right\} \gamma_{ij}. \quad (\text{E.42})
\end{aligned}$$

Por otra parte, del cuarto término de (E.37) vemos que

$$2R_{i\gamma\delta\lambda}R_j^{\gamma\delta\lambda} = 4\frac{\gamma^{kl}}{r^2}R_i^a{}^b R_{jakb} + 2\frac{\gamma^{kp}\gamma^{lr}\gamma^{mq}}{r^6}R_{iprq}R_{jklm}. \quad (\text{E.43})$$

Ahora, reemplazando (E.8) y (E.9) en (E.43) se obtiene

$$\begin{aligned}
2R_{i\gamma\delta\lambda}R_j^{\gamma\delta\lambda} &= 4\frac{\gamma^{kl}}{r^2}[-rD_a D_b r \gamma_{il}][-rD_a D_b r \gamma_{jk}] \\
&\quad + 2\frac{\gamma^{kp}\gamma^{lr}\gamma^{mq}}{r^6} \left\{r^2\left[\gamma - (Dr)^2\right](\gamma_{ir}\gamma_{pq} - \gamma_{iq}\gamma_{pr})\right\} \\
&\quad \times \left\{r^2\left[\gamma - (Dr)^2\right](\gamma_{jl}\gamma_{km} - \gamma_{jm}\gamma_{kl})\right\} \\
&= \left\{4D_a D_b r D^a D^b r + 4(d-3)\frac{\left[\gamma - (Dr)^2\right]^2}{r^2}\right\} \gamma_{ij}. \quad (\text{E.44})
\end{aligned}$$

Por otra parte, de la componente métrica  $(i, j)$  de (E.1), (E.26), (E.27) y del quinto término de (E.37) vemos que

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}g_{ij} &= -\frac{1}{2}\gamma_{ij}(d-2)(d-3)r^2 \left\{(d-4)(d-5)\frac{\left[\gamma - (Dr)^2\right]^2}{r^4} \right. \\
&\quad \left. - 4(d-4)\frac{D^2 r}{r}\frac{\left[\gamma - (Dr)^2\right]}{r^2} + 4\frac{(D^2 r)^2 - D_a D_b r D^a D^b r}{r^2} + 2\tilde{R}\frac{\left[\gamma - (Dr)^2\right]}{r^2}\right\}. \quad (\text{E.45})
\end{aligned}$$

Reemplazando (E.38), (E.40), (E.42), (E.44) y (E.45) en (E.37) se obtiene



$$\begin{aligned}
E_{ij}^{(2)} = & \left\{ 4r D_a D_b r \tilde{G}^{ab} \stackrel{=0}{=} + 2(d-3) [\gamma - (Dr)^2] \tilde{R} + 4(d-2) (D^2 r)^2 \right. \\
& \left. - 6(d-2)(d-3) \frac{D^2 r}{r} [\gamma - (Dr)^2] + 2(d-2)(d-3)^2 \frac{[\gamma - (Dr)^2]^2}{r^2} \right\} \gamma_{ij} \\
& + \left\{ -4(D^2 r)^2 + 8(d-3) \frac{D^2 r}{r} [\gamma - (Dr)^2] - 4(d-3)^2 \frac{[\gamma - (Dr)^2]^2}{r^2} \right\} \gamma_{ij} \\
& + \left\{ -4(d-2) D_a D_b r D^a D^b r + 4(d-3) \frac{D^2 r}{r} [\gamma - (Dr)^2] \right. \\
& \left. - 4(d-3)^2 \frac{[\gamma - (Dr)^2]^2}{r^2} \right\} \gamma_{ij} \\
& + \left\{ 4D_a D_b r D^a D^b r + 4(d-3) \frac{[\gamma - (Dr)^2]^2}{r^2} \right\} \gamma_{ij} \\
& - \frac{1}{2} \gamma_{ij} (d-2)(d-3) r^2 \left\{ (d-4)(d-5) \frac{[\gamma - (Dr)^2]^2}{r^4} \right. \\
& \left. - 4(d-4) \frac{D^2 r}{r} \frac{[\gamma - (Dr)^2]}{r^2} + 4 \frac{(D^2 r)^2 - D_a D_b r D^a D^b r}{r^2} + 2\tilde{R} \frac{[\gamma - (Dr)^2]}{r^2} \right\}.
\end{aligned} \tag{E.46}$$

Luego, tenemos que (E.46) puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}
E^{(2)i}{}_{j} = & - \frac{(d-3)!}{(d-5)!} \left\{ (d-5)(d-6) \frac{[\gamma - (Dr)^2]^2}{r^4} \right. \\
& \left. - 2 \left[ 2(d-5) \frac{D^2 r}{r} - \tilde{R} \right] \frac{[\gamma - (Dr)^2]}{r^2} + 4 \frac{(D^2 r)^2 - D_a D_b r D^a D^b r}{r^2} \right\} \delta_j^i.
\end{aligned} \tag{E.47}$$

Finalmente, de (E.31), (E.35) y (E.47) vemos que el tensor de Lovelock de orden  $k$  descompuesto tensorialmente es dado por

$$E^{(k)i}{}_{j} = - \frac{(d-3)!}{2(d-2k-1)!} \Phi^{(k)} \delta_j^i, \tag{E.48}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Phi^{(k)} &:= (d - 2k - 1)(d - 2k - 2) \left[ \frac{\gamma - (Dr)^2}{r^2} \right]^k \\
&\quad - k \left[ 2(d - 2k - 1) \frac{D^2 r}{r} - \tilde{R} \right] \left[ \frac{\gamma - (Dr)^2}{r^2} \right]^{k-1} \\
&\quad + 2k(k - 1) \frac{(D^2 r)^2 - D_a D_b r D^a D^b r}{r^2} \left[ \frac{\gamma - (Dr)^2}{r^2} \right]^{k-2}. \tag{E.49}
\end{aligned}$$

Además, de (E.49) vemos que

$$\Phi^{(k)} = k \left[ \frac{\gamma - (Dr)^2}{r^2} \right]^{k-2} \tilde{\Phi}^{(k)}, \tag{E.50}$$

donde

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}^{(k)} &:= \frac{(d - 2k - 1)(d - 2k - 2)}{k} \left[ \frac{\gamma - (Dr)^2}{r^2} \right]^2 \\
&\quad - \left[ 2(d - 2k - 1) \frac{D^2 r}{r} - \tilde{R} \right] \left[ \frac{\gamma - (Dr)^2}{r^2} \right] \\
&\quad + 2(k - 1) \frac{(D^2 r)^2 - D_a D_b r D^a D^b r}{r^2}. \tag{E.51}
\end{aligned}$$

Así, reemplazando (E.50) en (E.48) se obtiene

$$E^{(k)i}{}_j = - \frac{k}{2} \frac{(d - 3)!}{(d - 2k - 1)!} \left[ \frac{\gamma - (Dr)^2}{r^2} \right]^{k-2} \tilde{\Phi}^{(k)} \delta_j^i. \tag{E.52}$$

De esta forma, del resultado obtenido en (E.52) obtenemos que la componente  $(i, j)$  de las ecuaciones de campo Lanczos-Lovelock (3.6) es dada por

$$\mathcal{E}^i{}_j = - \sum_{k=0}^N \frac{k \tilde{\alpha}_k}{2} \left[ \frac{\gamma - (Dr)^2}{r^2} \right]^{k-2} \tilde{\Phi}^{(k)} \delta_j^i = 0, \tag{E.53}$$

donde

$$\tilde{\alpha}_k := \frac{(d - 3)!}{(d - 2k - 1)!} \alpha_k. \tag{E.54}$$

Por otro lado, se define la *masa Misner-Sharp generalizada* [45] como

$$M := (d - 2) V_{d-2}^{(\gamma)} \sum_{k=0}^N \tilde{\alpha}_k r^{d-2k-1} [\gamma - (Dr)^2]^k, \quad (\text{E.55})$$

donde  $V_{d-2}^{(\gamma)}$  denota el área del espaciotiempo  $(d - 2)$ -dimensional descrito por la métrica  $\gamma_{ij}$ . Además, cabe mencionar que la definición (E.55) se puede entender como una ecuación polinomial cuya incógnita es la función métrica  $f(r)$ .

## Apéndice F

# Propiedades térmicas en Lovelock-Horndeski

En este apéndice se mostrará el cálculo explícito de la entropía (6.58) y la temperatura (6.59). Además, demostraremos explícitamente la primera ley de la termodinámica (6.60).

### Entropía

Utilizando los lagrangianos (6.56)-(6.57) vemos que el lagrangiano dado en (6.55) puede ser reescrito como

$$L = \sum_{k=0}^{N+1} \frac{\alpha_k}{2^k} \delta_{B_1 \dots B_{2k}}^{A_1 \dots A_{2k}} R^{B_1 B_2}_{A_1 A_2} \dots R^{B_{2k-1} B_{2k}}_{A_{2k-1} A_{2k}} - \sum_{k=0}^N \frac{\beta_k}{2^{2k+1}} \nabla_C \phi_{(k)} \nabla^D \phi_{(k)} \delta_{DB_1 \dots B_{2k}}^{CA_1 \dots A_{2k}} R^{B_1 B_2}_{A_1 A_2} \dots R^{B_{2k-1} B_{2k}}_{A_{2k-1} A_{2k}}. \quad (\text{F.1})$$

Ahora, reemplazando los ansatz (6.42)-(6.43) en el lagrangiano (F.1) se obtiene

$$L = \sum_{k=0}^{N+1} \frac{\alpha_k}{2^k} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} - \sum_{k=0}^N \frac{\beta_k c_k^2}{2^{k+1}} \frac{1}{2^k} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2k}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} R^{\beta_1 \beta_2}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{\beta_{2k-1} \beta_{2k}}_{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}. \quad (\text{F.2})$$

Por otro lado, de las constantes de integración (6.52) se puede ver que

$$\frac{\beta_k c_k^2}{2^{k+1}} = \frac{(N+1-k)}{(d-k-N-1)} \alpha_k. \quad (\text{F.3})$$

Luego, reemplazando (F.3) en (F.2) se obtiene

$$L = \sum_{k=0}^{N+1} \frac{(d-2N-2)}{(d-k-N-1)} \frac{(d-2)!}{(d-2k)!} \alpha_k \Psi^{(k)}, \quad (\text{F.4})$$

donde hemos usado el lagrangiano descompuesto tensorialmente (E.26), y además en este caso  $\Psi^{(k)}$  es dado por

$$\begin{aligned} \Psi^{(k)} := & (d-2k)(d-2k-1) \left[ \frac{\gamma - f(r)}{r^2} \right]^k - 2(d-2k)k \frac{D^2 r}{r} \left[ \frac{\gamma - f(r)}{r^2} \right]^{k-1} \\ & + 2k(k-1) \frac{(D^2 r)^2 - D_a D_b r D^a D^b r}{r^2} \left[ \frac{\gamma - f(r)}{r^2} \right]^{k-2} + k\tilde{R} \left[ \frac{\gamma - f(r)}{r^2} \right]^{k-1}. \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Finalmente, de la formula de Wald (5.76) y del lagrangiano (F.4) se obtiene luego de algunos cálculos que la entropía por unidad de longitud para la cuerda negra homogénea descrita por las soluciones de la ecuación polinomial (6.53) y los campos escalares (6.54) es dada por

$$s = 4\pi \sum_{k=0}^{N+1} \frac{k(d-2N-2)}{(d-k-N-1)} \frac{(d-2)}{(d-2k)} \frac{(d-3)!}{(d-2k-1)!} \alpha_k r_+^{d-2k} \gamma^{k-1} V_{d-2}^{(\gamma)}. \quad (\text{F.6})$$

## Temperatura

De ecuación polinomial (6.53) vemos que

$$\begin{aligned} 0 = & (d-2) V_{d-2}^{(\gamma)} \sum_{k=0}^{N+1} \frac{(d-2N-2)}{(d-k-N-1)} \frac{(d-3)!}{(d-2k-1)!} (d-2k-1) \alpha_k r^{d-2k-2} (\gamma - f(r))^k \\ & - (d-2) V_{d-2}^{(\gamma)} \sum_{p=0}^{N+1} \frac{(d-2N-2)}{(d-p-N-1)} \frac{(d-3)!}{(d-2p-1)!} p \alpha_p r^{d-2p-1} (\gamma - f(r))^{p-1} \frac{df}{dr}. \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

Ahora, despejando  $df/dr$  se obtiene que

$$\frac{df}{dr} = \frac{\sum_{k=0}^{N+1} \frac{(d-2N-2)}{(d-k-N-1)} \frac{(d-3)!}{(d-2k-1)!} (d-2k-1) \alpha_k r^{d-2k-2} (\gamma - f(r))^k}{\sum_{p=0}^{N+1} \frac{(d-2N-2)}{(d-p-N-1)} \frac{(d-3)!}{(d-2p-1)!} p \alpha_p r^{d-2p-1} (\gamma - f(r))^{p-1}}. \quad (\text{F.8})$$

Finalmente, reemplazando (F.8) en la expresión para la temperatura (5.74) se obtiene que la temperatura para la cuerda negra homogénea descrita por las soluciones de la ecuación polinomial (6.53) y los campos escalares (6.54) es dada por

$$T = \frac{1}{4\pi} \frac{\sum_{k=0}^{N+1} \frac{(d-2k-1)(d-2N-2)}{(d-k-N-1)} \frac{(d-3)!}{(d-2k-1)!} \alpha_k r_+^{d-2k-2} \gamma^k}{\sum_{p=0}^{N+1} \frac{p(d-2N-2)}{(d-p-N-1)} \frac{(d-3)!}{(d-2p-1)!} \alpha_p r_+^{d-2p-1} \gamma^{p-1}}. \quad (\text{F.9})$$

## Primera ley de la termodinámica

Evaluando la ecuación polinomial (6.53) en el horizonte de eventos se obtiene

$$m = (d-2) V_{d-2}^{(\gamma)} \sum_{k=0}^{N+1} \frac{(d-2N-2)}{(d-k-N-1)} \frac{(d-3)!}{(d-2k-1)!} \alpha_k r_+^{d-2k-1} \gamma^k. \quad (\text{F.10})$$

Ahora, variando la ecuación polinomial (F.10) con respecto al horizonte de eventos, se obtiene

$$dm = \left[ (d-2) V_{d-2}^{(\gamma)} \sum_{k=0}^{N+1} \frac{(d-2N-2)}{(d-k-N-1)} \frac{(d-3)!}{(d-2k-1)!} (d-2k-1) \alpha_k r_+^{d-2k-2} \gamma^k \right] dr_+. \quad (\text{F.11})$$

Por otro lado, de la expresión para la temperatura (F.9) vemos que

$$\begin{aligned} & 4\pi T \sum_{p=0}^{N+1} \frac{p(d-2N-2)}{(d-p-N-1)} \frac{(d-3)!}{(d-2p-1)!} \alpha_p r_+^{d-2p-1} \gamma^{p-1} \\ &= \sum_{k=0}^{N+1} \frac{(d-2k-1)(d-2N-2)}{(d-k-N-1)} \frac{(d-3)!}{(d-2k-1)!} \alpha_k r_+^{d-2k-2} \gamma^k. \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Luego, reemplazando (F.12) en (F.11) se obtiene

$$dm = 4\pi T (d-2) V_{d-2}^{(\gamma)} \left[ \sum_{k=0}^{N+1} \frac{k(d-2N-2)}{(d-k-N-1)} \frac{(d-3)!}{(d-2k-1)!} \alpha_k r_+^{d-2k-1} \gamma^{k-1} \right] dr_+. \quad (\text{F.13})$$

Por otra parte, variando la entropía (F.6) con respecto al horizonte de eventos, se obtiene

$$ds = 4\pi (d-2) V_{d-2}^{(\gamma)} \left[ \sum_{k=0}^{N+1} \frac{k(d-2N-2)}{(d-k-N-1)} \frac{(d-3)!}{(d-2k-1)!} \alpha_k r_+^{d-2k-1} \gamma^{k-1} \right] dr_+. \quad (\text{F.14})$$

Finalmente, reemplazando (F.14) en (F.13) se obtiene

$$dm = Tds. \tag{F.15}$$

Por lo tanto, en (F.15) hemos verificado que se cumple la primera ley de la termodinámica para la cuerda negra homogénea descrita por las soluciones de la ecuación polinomial (6.53) y los campos escalares (6.54).

# Bibliografía

- [1] Niels A Obers. Black holes in higher-dimensional gravity. In *Physics of Black Holes*, pages 211–258. Springer, 2009.
- [2] Gary T Horowitz. *Black holes in higher dimensions*. Cambridge University Press, 2012.
- [3] Brandon Carter. Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom. *Physical Review Letters*, 26(6):331, 1971.
- [4] W Israel. *Commun. Math. Phys.*, 8:245, 1968.
- [5] RM Wald. *Phys. Rev. Lett.*, 26:1653, 1971.
- [6] Roy P Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical review letters*, 11(5):237, 1963.
- [7] GC Debney, Roy P Kerr, and Alfred Schild. Solutions of the einstein and einstein-maxwell equations. *Journal of Mathematical Physics*, 10(10):1842–1854, 1969.
- [8] John L Friedman, Kristin Schleich, and Donald M Witt. Topological censorship. *Physical Review Letters*, 71(10):1486, 1993.
- [9] Remo Ruffini and John A Wheeler. Introducing the black hole. *Physics Today*, 1971.
- [10] Frank R Tangherlini. Schwarzschild field inn dimensions and the dimensionality of space problem. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 27(3):636–651, 1963.
- [11] Roberto Emparan and Harvey S Reall. A rotating black ring solution in five dimensions. *Physical Review Letters*, 88(10):101101, 2002.
- [12] R Gregory. R. gregory and r. laffamme, phys. rev. lett. 70, 2837 (1993). *Phys. Rev. Lett.*, 70:2837, 1993.
- [13] Ruth Gregory and Raymond Laflamme. The instability of charged black strings and p-branes. *arXiv preprint hep-th/9404071*, 1994.
- [14] Matthew Choptuik, Luis Lehner, Ignacio Inaki Olabarrieta, Roman Petryk, Frans Pretorius, and Hugo Villegas. Towards the final fate of an unstable black string. *Physical Review D*, 68(4):044001, 2003.



- [15] Luis Lehner and Frans Pretorius. Black strings, low viscosity fluids, and violation of cosmic censorship. *Physical review letters*, 105(10):101102, 2010.
- [16] Robert M Wald. *Black holes and relativistic stars*. University of Chicago Press, 1998.
- [17] Adolfo Cisterna and Julio Oliva. Exact black strings and p-branes in general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, 35(3):035012, 2018.
- [18] David Lovelock. The einstein tensor and its generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, 12(3):498–501, 1971.
- [19] Gregory Walter Horndeski. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *International Journal of Theoretical Physics*, 10(6):363–384, 1974.
- [20] Alberto Nicolis, Riccardo Rattazzi, and Enrico Trincherini. Galileon as a local modification of gravity. *Physical Review D*, 79(6):064036, 2009.
- [21] Cédric Deffayet, Gilles Esposito-Farese, and Alexander Vikman. Covariant galileon. *Physical Review D*, 79(8):084003, 2009.
- [22] C Deffayet. C. deffayet, s. deser, and g. esposito-farese, phys. rev. d 80, 064015 (2009). *Phys. Rev. D*, 80:064015, 2009.
- [23] Cristiano Germani and Alex Kehagias. New model of inflation with nonminimal derivative coupling of standard model higgs boson to gravity. *Physical review letters*, 105(1):011302, 2010.
- [24] Luca Amendola. Cosmology with nonminimal derivative couplings. *arXiv preprint gr-qc/9302010*, 1993.
- [25] Sergey V Sushkov. Exact cosmological solutions with nonminimal derivative coupling. *Physical Review D*, 80(10):103505, 2009.
- [26] Ratbay Myrzakulov and Lorenzo Sebastiani. Scalar tensor horndeski models: simple cosmological applications. *Astrophysics and Space Science*, 361(2):62, 2016.
- [27] JP Bruneton. Jp bruneton, m. rinaldi, a. kanfon, a. hees, s. schlogel, and a. fuzfa, adv. astron. 2012, 430694 (2012). *Adv. Astron.*, 2012:430694, 2012.
- [28] Massimiliano Rinaldi. Black holes with nonminimal derivative coupling. *Physical Review D*, 86(8):084048, 2012.
- [29] Eugeny Babichev and Christos Charmousis. Dressing a black hole with a time-dependent galileon. *Journal of High Energy Physics*, 2014(8):106, 2014.
- [30] Andrés Anabalón, Adolfo Cisterna, and Julio Oliva. Asymptotically locally ads and flat black holes in horndeski theory. *Physical Review D*, 89(8):084050, 2014.
- [31] Masato Minamitsuji. Solutions in the scalar-tensor theory with nonminimal derivative coupling. *Physical Review D*, 89(6):064017, 2014.

- [32] Adolfo Cisterna and Cristián Erices. Asymptotically locally ads and flat black holes in the presence of an electric field in the horndeski scenario. *Physical Review D*, 89(8):084038, 2014.
- [33] Christos Charmousis, Theodoros Kolyvaris, Eleftherios Papantonopoulos, and Minas Tsoukalas. Black holes in bi-scalar extensions of horndeski theories. *Journal of High Energy Physics*, 2014(7):85, 2014.
- [34] Adolfo Cisterna, T erence Delsate, and Massimiliano Rinaldi. Neutron stars in general second order scalar-tensor theory: The case of nonminimal derivative coupling. *Physical Review D*, 92(4):044050, 2015.
- [35] Adolfo Cisterna, T erence Delsate, Ludovic Ducobu, and Massimiliano Rinaldi. Slowly rotating neutron stars in the nonminimal derivative coupling sector of horndeski gravity. *Physical Review D*, 93(8):084046, 2016.
- [36] Guillermo Rubilar. *Teoría General de la Relatividad y T opicos en Relatividad General*. Universidad de Concepción.
- [37] Bert Janssen. *Teoría de la Relatividad General*. Universidad de Granada.
- [38] Mokhtar Hassaine and Jorge Zanelli. *Chern-Simons (super) gravity*, volume 2. World Scientific, 2016.
- [39] David Lovelock and Hanno Rund. *Tensors, differential forms, and variational principles*. Courier Corporation, 1989.
- [40] Clifford M Will. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Reviews in Relativity*, 17(1):4, 2014.
- [41] Thomas P Sotiriou. Gravity and scalar fields. In *Modifications of Einstein’s Theory of Gravity at Large Distances*, pages 3–24. Springer, 2015.
- [42] Robert Dicke. Experimental relativity. 1964.
- [43] Yasunori Fujii and Kei-ichi Maeda. *The scalar-tensor theory of gravitation*. Cambridge University Press, 2003.
- [44] Cornelius Lanczos. A remarkable property of the riemann-christoffel tensor in four dimensions. *Annals of Mathematics*, 39:842–850, 1938.
- [45] Hideki Maeda, Steven Willison, and Sourya Ray. Lovelock black holes with maximally symmetric horizons. *Classical and Quantum Gravity*, 28(16):165005, 2011.
- [46] Pascual Jordan. *Schwerkraft und Weltall: Grundlagen der theoretischen Kosmologie*, volume 107. Friedr. Vieweg & Sohn, 1955.
- [47] Carl Brans and Robert H Dicke. Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical review*, 124(3):925, 1961.

- [48] Christos Charmousis. From lovelock to horndeski's generalized scalar tensor theory. In *Modifications of Einstein's Theory of Gravity at Large Distances*, pages 25–56. Springer, 2015.
- [49] Changjun Gao. Extending horndeski theories into lovelock gravity. *arXiv preprint arXiv:1804.03535*, 2018.
- [50] Shin'ichi Nojiri, Sergei D Odintsov, and Misao Sasaki. Gauss-bonnet dark energy. *Physical Review D*, 71(12):123509, 2005.
- [51] Christos Charmousis and Minas Tsoukalas. Lovelock galileons and black holes. *Physical Review D*, 92(10):104050, 2015.
- [52] Dieter Lust and Ward Vleeshouwers. Black hole information and thermodynamics. *arXiv preprint arXiv:1809.01403*, 2018.
- [53] Stuart L Shapiro and Saul A Teukolsky. *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects*. John Wiley & Sons, 2008.
- [54] Roberto Emparan and Harvey S Reall. Black holes in higher dimensions. *Living Reviews in Relativity*, 11(1):6, 2008.
- [55] Robert B Mann. Black holes: thermodynamics, information, and firewalls. In *Black Holes: Thermodynamics, Information, and Firewalls*, pages 1–95. Springer, 2015.
- [56] Steven Carlip. Black hole thermodynamics and statistical mechanics. In *Physics of Black Holes*, pages 89–123. Springer, 2009.
- [57] Norbert Bodendorfer and Yasha Neiman. Wald entropy formula and loop quantum gravity. *Physical Review D*, 90(8):084054, 2014.
- [58] Stephen William Hawking and Roger Penrose. The singularities of gravitational collapse and cosmology. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 314(1519):529–548, 1970.
- [59] Andrew Strominger and Cumrun Vafa. Microscopic origin of the bekenstein-hawking entropy. *Physics Letters B*, 379(1-4):99–104, 1996.
- [60] Ofer Aharony, Steven S Gubser, Juan Maldacena, Hirosi Ooguri, and Yaron Oz. Large n field theories, string theory and gravity. *Physics Reports*, 323(3-4):183–386, 2000.
- [61] Marco Cavaglia. Black hole and brane production in tev gravity: A review. *International Journal of Modern Physics A*, 18(11):1843–1882, 2003.
- [62] Panagiota Kanti. Black holes in theories with large extra dimensions: A review. *International Journal of Modern Physics A*, 19(29):4899–4951, 2004.
- [63] Robert C Myers and Michael J Perry. Black holes in higher dimensional space-times. *Annals of Physics*, 172(2):304–347, 1986.

- [64] Keith Copsey and Gary T Horowitz. Gravity dual of gauge theory on  $S^2 \times S^1 \times r$ . *Journal of High Energy Physics*, 2006(06):021, 2006.
- [65] Robert B Mann, Eugen Radu, and Cristian Stelea. Black string solutions with negative cosmological constant. *Journal of High Energy Physics*, 2006(09):073, 2006.
- [66] Jacob D Bekenstein. Black holes and entropy. *Physical Review D*, 7(8):2333, 1973.
- [67] Stephen W Hawking. Black hole explosions? *Nature*, 248(5443):30, 1974.
- [68] Stephen W Hawking. Gravitational radiation from colliding black holes. *Physical Review Letters*, 26(21):1344, 1971.
- [69] James M Bardeen, Brandon Carter, and Stephen W Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Communications in mathematical physics*, 31(2):161–170, 1973.
- [70] Vivek Iyer and Robert M Wald. Some properties of the noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy. *Physical review D*, 50(2):846, 1994.
- [71] Adolfo Cisterna, Sebastián Fuenzalida, Marcela Lagos, and Julio Oliva. Homogeneous black strings in einstein–gauss–bonnet with horndeski hair and beyond. *The European Physical Journal C*, 78(11):982, 2018.
- [72] Gustavo Dotti, Julio Oliva, and Ricardo Troncoso. Static wormhole solution for higher-dimensional gravity in vacuum. *Physical Review D*, 75(2):024002, 2007.
- [73] Andrés Anabalón, Nathalie Deruelle, Yoshiyuki Morisawa, Julio Oliva, Misao Sasaki, David Tempo, and Ricardo Troncoso. Kerr–schild ansatz in einstein–gauss–bonnet gravity: an exact vacuum solution in five dimensions. *Classical and quantum gravity*, 26(6):065002, 2009.
- [74] Paul K Townsend. Black holes. *arXiv preprint gr-qc/9707012*, 1997.
- [75] Ray A d’Inverno. *Introducing Einstein’s relativity*. Clarendon Press, 1992.