

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



Espectros de Energía de Átomos Hidrogenoides y Expansión de Álgebras de Lie

Tesis para optar al grado académico de
Magíster en Ciencias con
mención en Física

por

Pamela Andrea Catalán Contreras

Director de Tesis : Dr. Patricio Salgado A.

Comisión : Dr. Luis Roa Opplieger
Dr. Juan Crisóstomo Sáez

Concepción, Chile
Noviembre 2013



Dedicada con cariño a mis Padres....





Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	III
Introducción	1
I Fundamentos Matemáticos	5
1. Contracción de Álgebras de Lie	7
1.1. Contracción de Inönü-Wigner	7
1.1.1. Contracción $SO(3) \rightarrow ISO(2)$.	9
2. S-Expansión de Álgebras de Lie	13
2.1. Procedimiento de S-Expansión	13
2.1.1. Ejemplo: S-Expansión del álgebra $\mathfrak{so}(4, 2)$.	14
3. Operadores de Casimir	19
3.1. Tensores Invariantes para Álgebras de Lie S-Expandidas	19
3.2. Operadores de Casimir para Álgebras S-Expandidas	19
II Fundamentos Físicos	23
4. Problema de dos-cuerpos	25
4.1. La Ecuación Radial	25
4.2. Ecuación Radial del Átomo de Hidrógeno	26
4.3. Álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$	27
5. El Problema de Kepler	29
5.1. El vector de Runge Lenz cuántico	30

5.2. Álgebra de Lie $\mathfrak{so}(4)$	31
5.3. Espectro de Energía del Átomo de Hidrógeno	32
6. La Ecuación de Onda	35
7. Álgebras Generadoras de Espectro	39
7.1. Álgebras Generadoras de Espectro (AGE)	39
7.1.1. Átomo de Hidrógeno No Relativista	41
7.1.2. Átomo de Hidrógeno Relativista	42
III Espectros de Energía obtenidos por S-Expansión	45
8. S-Expansión de $SO(\kappa)$, $\kappa = 3, 6, n$.	47
8.1. Álgebra $\mathfrak{so}(4)$ como S-Expansión del álgebra $\mathfrak{so}(3)$	47
8.2. Álgebra $\mathfrak{so}(7)$ como S-Expansión del álgebra $\mathfrak{so}(6)$	50
8.3. Álgebra $\mathfrak{so}(n + 1)$ como S-Expansión del álgebra $\mathfrak{so}(n)$	52
9. Operadores de Casimir para álgebras $\mathfrak{so}(4)$ y $\mathfrak{so}(7)$.	55
9.1. Operadores de Casimir para álgebra $\mathfrak{so}(4)$	55
9.2. Operadores de Casimir para el álgebra $\mathfrak{so}(7)$	58
10. Contraste de Métodos.	61
11. Conclusiones	63
A. Álgebras de Lie	65
A.1. Álgebras de Lie	65
Bibliografía	67

Agradecimientos

Quisiera agradecer a todas aquellas personas que directa o indirectamente me han apoyado durante el desarrollo de esta tesis. En primer lugar a mis Padres cuyo amor ha sido el generador y motor de todos mis logros.

Quisiera expresar mi gratitud a mi director de tesis, Dr. Patricio Salgado Arias por el apoyo y tranquilidad que me ha brindado durante mi formación científica. También agradezco a todos mis profesores que han contribuido en mi formación, tanto en la Licenciatura como en el Postgrado.

Agradezco también al Departamento de Física de la Universidad de Concepción y a sus funcionarios.

A mis compañeros que han contribuido durante mi formación científica, con quien he compartido muchos aspectos de mi vida académica. Muchas gracias a todos.

Mi dedicación exclusiva al programa de Doctorado ha sido posible gracias a una beca de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica CONICYT desde el año 2010 al 2013.



Resumen

Cuando existe *Simetría* en un sistema físico, es posible ocupar la *Teoría de Grupos* para simplificar tanto el tratamiento como la comprensión del sistema[18].

El Átomo de Hidrógeno puede ser descrito a través de la simetría esférica. La simetría geométrica del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ describe la invarianza bajo rotaciones tridimensionales. La simetría dinámica del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(4)$ describe los niveles de energía y su degeneración[2, 5, 33]. Pauli fue quien primero calculó el espectro de energía del Átomo de Hidrógeno de manera algebraica, relacionando el hamiltoniano a los operadores de Casimir [10].

El mecanismo de expansión de álgebras de Lie, el cual permite construir nuevas álgebras de Lie a partir de un álgebra de Lie dada, fue introducido como una generalización de la contracción de Inönü-Wigner[17]. La S-Expansión fue propuesto como un método alternativo de expansión de álgebras, el cual se basa en combinar las constantes de estructura de un álgebra de Lie \mathcal{G} con la ley de composición interna de un semigrupo abeliano S , con el propósito de definir un nuevo paréntesis de Lie [22, 23]. El procedimiento de S-Expansión permite obtener los operadores de Casimir vía S-Expansión [26].

El propósito de esta tesis es la obtención del espectro de energía de átomos hidrogenoides utilizando el método de S-Expansión de álgebras de Lie. Para esto, consideraremos la S-Expansión de los operadores de Casimir del átomo bajo estudio. Realizaremos la S-Expansión de las álgebras de Lie $\mathfrak{so}(3)$ y $\mathfrak{so}(6)$, y obtendremos sus correspondientes operadores de Casimir vía S-Expansión.

El procedimiento de S-Expansión fue modificado [23], con el fin de incluir parcialmente la O_S -reducción y sin la necesidad de conocer la descomposición en subespacios del álgebra de Lie original. Los operadores de Casimir coinciden con los obtenidos en el problema de Kepler en 3 y 6 dimensiones, y luego, su espectro coincide con los obtenidos de manera algebraica por Pauli y Schrödinger[5, 10, 18]. Además, se realizó una generalización de este procedimiento a n -dimensiones. A modo de ejemplo, se utilizó el semigrupo $S_E^{(2)}$ en la S-Expansión del álgebra $\mathfrak{so}(4,2)$, la cual pudo identificarse como un Álgebra de Maxwell, álgebra que representa una partícula inmersa en un campo electromagnético [7, 8].



Introducción

*“The mind that opens to a new idea, never returns to its original size.”*¹
A. Einstein (1870-1955).

El objetivo principal de esta tesis es encontrar el espectro de energía de átomos hidrogenoides utilizando una nueva herramienta matemática denominada S-Expansión. Se comparará los resultados obtenidos con los obtenidos por métodos previos.

Históricamente, Pauli en 1926 fue quien primero calculó de manera algebraica el espectro de energía del Átomo de Hidrógeno [10]. Su procedimiento se basó en relacionar el Hamiltoniano total a los Operadores de Casimir del sistema. Posteriormente, este problema fue analizado por Fock en 1935 [11] y por Bargmann en 1936 [12].

Los grupos y álgebras que describen el espectro de un sistema físico aparecieron por primera vez en Física Nuclear en 1959 introducidos por S. Goshen y H.J. Lipkin en la ref. [13], lo cual en un principio fue ignorado [37].

Las Álgebras Generadoras de Espectro (AGE) fueron introducidas en Física de Partículas en 1965 por A. Bohm y A.O. Barut [14], y por Y. Dothan, M. Gell-Mann y Neeman en la ref. [15], para los niveles de energía de series de hadrones. Posteriormente, en 1967 Y. Nambu realizó un estudio de multipletes en este contexto [16].

Las AGE fueron utilizadas en el contexto de simetrías dinámicas en 1980 por Iachello y Arima para introducir el Modelo de Interacción Bosón-Fermión [42, 43], en particular, el estudio de las simetrías y supersimetrías en la estructura nuclear de isótopos de Platino (Pt) y Oro (Au) [45, 47, 48, 49, 50]. Este tipo de supersimetrías han sido confirmadas en el año 2000 en una serie de experimentos, en particular el Espectrómetro Magnético de Ludwig-Maximilians Universität en Múnich, el cual puede separar solo partes de algunos [keV], ha sido posible medir espectros de ¹⁹⁶Au, ¹⁹⁴Pt, ¹⁹⁵Pt y ¹⁹⁵Au [44, 46].

Marius Sophus Lie introdujo a principios del siglo XIX los denominados Grupos y Álgebras

¹*La mente que se abre a una nueva idea, jamás volverá a su tamaño original.*

de Lie [1]. La clasificación y la representación de las álgebras de Lie fueron estudiadas por W. Killing, E. Cartan y H. Weyl [5].

El problema de encontrar nuevas álgebras de Lie ó de establecer relaciones entre ellas resulta ser de gran importancia en la generación de nuevas teorías físicas a partir de una conocida. Durante la segunda mitad del siglo XX, se han desarrollado ciertos mecanismos que permiten obtener relaciones entre distintas álgebras de Lie.

En 1951 I.E. Segal [19] introdujo la noción de contracción de álgebras de Lie. Esta idea fue estudiada en 1953 por Inönü y Wigner [17], quienes introdujeron la llamada Contracción de Inönü-Wigner. En 1991[20] E. Weimar-Woods introdujo una generalización de las contracciones de Inönü-Wigner, en 2000[21] Weimar-Woods amplió la definición de contracción y mostró que cualquier contracción es equivalente a una contracción generalizada de Inönü-Wigner.

Los mecanismos de expansión de álgebras de Lie permiten construir nuevas álgebras de Lie a partir de un álgebra de Lie dada. Este método fue introducido en 2003 por Hatsuda-Sakaguchi como una generalización de la contracción de Inönü-Wigner [24]. En el mismo año J.A. de Azcarraga, J.M. Izquierdo, M. Picon y O. Varela en [25] estudiaron este nuevo método de contracción y discutieron como puede ser aplicado cuando el álgebra \mathcal{G} es descompuesta en una suma de subespacios vectoriales. En el año 2006 F. Izaurieta, E. Rodríguez, P. Salgado [22] propusieron un método de expansión alternativo, el cual se basa en combinar las constantes de estructura del álgebra \mathcal{G} con la ley de composición interna de un semigrupo abeliano S con el fin de definir un nuevo paréntesis de Lie de una nueva álgebra llamada álgebra *S-Expandida*. En 2012 J. Díaz, O. Fierro, F. Izaurieta, N. Merino, E. Rodriguez y P. Salgado lograron la construcción de operadores de Casimir para álgebras de Lie S-expandidas [26].

Plan de Tesis

La presente tesis está dividida en tres partes:

1. Fundamentos Matemáticos
2. Fundamentos Físicos
3. Espectros de Energía obtenidos por S-Expansión

En la primera parte se introducen las herramientas matemáticas necesarias. Se incluye, una breve revisión de la Contracción de Inönü-Wigner en el capítulo 1, una revisión del procedimiento de S-Expansión en el capítulo 2 y en el capítulo 3, el procedimiento de S-Expansión de operadores de Casimir. En cada caso se incluyo un ejemplo del procedimiento. En los Fundamentos Físicos, se incluyeron diversos método de obtención de espectros de energía asociado a átomos hidrogenoides. El capítulo 4 trató el Problema de dos-cuerpos, el capítulo 5 el Problema de Kepler, en el capítulo 6 la Ecuación de Onda y en el capítulo 7 las Álgebras Generadoras de Espectro. En la parte final, Espectro de Energía obtenidos por S-Expansión, se realizaron las

S-Expansiones asociadas a las álgebras del átomo de hidrógeno y la obtención de sus operadores de Casimir. En el capítulo 12, se realizó la comparación de los diferentes métodos, junto con sus ventajas y desventajas. Luego de la Conclusión, se incluyó un apéndice con la definición de un Álgebra de Lie.





Parte I

Fundamentos Matemáticos





Capítulo 1

Contracción de Álgebras de Lie

En 1951 I.E. Segal [19] introdujo la noción de contracción de álgebras de Lie, por los siguientes motivos físicos: Si dos teorías están relacionadas por un proceso límite, entonces los correspondientes grupos de invariancia asociados deberían también estar relacionados por algún proceso límite. Esta idea fue estudiada por Inönü y Wigner, quienes introdujeron el proceso conocido como contracción de Inönü-Wigner [17].

1.1. Contracción de Inönü-Wigner

La contracción \mathcal{G}_C de un álgebra de Lie \mathcal{G} en la forma de Inönü y Wigner, es llevada a cabo con respecto a una subálgebra \mathcal{L}_0 , reescalando por medio de un parámetro los generadores base del coseto $\mathcal{G}/\mathcal{L}_0$ y luego tomando un límite singular para este parámetro.

En el álgebra contraída \mathcal{G}_C , los generadores en $\mathcal{G}/\mathcal{L}_0$ se convierten en abeliano y la subálgebra $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{G}_0$ actúa sobre ellos. Como un resultado, \mathcal{G}_C tiene la misma dimensión de \mathcal{G} , tiene una estructura semidirecta y los generadores abelianos determinan un ideal de \mathcal{G}_C [23].

Sea $\mathcal{G} = V_0 \oplus V_1$ un álgebra de Lie, donde:

- V_0 es una subálgebra de \mathcal{G} generada por $\{\mathbf{X}_{i_0}\}_{i_0=1}^{\dim V_0}$. Denotaremos indistintamente con \mathcal{L}_0 a la mencionada álgebra V_0 .
- V_1 es un subespacio de \mathcal{G} generado por $\{\mathbf{X}_{i_1}\}_{i_1=1}^{\dim V_1}$ es decir, el subespacio $\mathcal{G}/\mathcal{L}_0$ es generado por $\{\mathbf{X}_{i_1}\}_{i_1=1}^{\dim V_1}$.

El álgebra de Lie \mathcal{G} es descrita por

$$[\mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B] = C_{AB}^D \mathbf{X}_D \quad (1.1)$$

donde $A : (\mathbf{X}_{i_0}, \mathbf{X}_{i_1}) : 1, 2, \dots, \dim V_0 + \dim V_1$.

La Contracción de Inönü-Wigner consiste en:

1. Reescalar los generadores de $\mathcal{G}/\mathcal{L}_0 : \{\mathbf{X}_i\}$ por medio de un parámetro numérico λ en la forma

$$\mathbf{Y}_{i_1} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{X}_{i_1} \implies \mathbf{X}_{i_1} = \lambda \mathbf{Y}_{i_1} \quad (1.2)$$

y luego considerando el límite $\lambda \rightarrow \infty$.

2. Descomponemos el álgebra de Lie (1.1) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}_{i_0}, \mathbf{X}_{j_0}] &= C_{i_0 j_0}^{k_0} \mathbf{X}_{k_0} + C_{i_0 j_0}^{k_1} \mathbf{X}_{k_1} \\ [\mathbf{X}_{i_0}, \mathbf{X}_{j_1}] &= C_{i_0 j_1}^{k_0} \mathbf{X}_{k_0} + C_{i_0 j_1}^{k_1} \mathbf{X}_{k_1} \\ [\mathbf{X}_{i_1}, \mathbf{X}_{j_1}] &= C_{i_1 j_1}^{k_0} \mathbf{X}_{k_0} + C_{i_1 j_1}^{k_1} \mathbf{X}_{k_1} \end{aligned}$$

3. Tener en cuenta que V_0 , generado por los vectores base $\{\mathbf{X}_{i_0}\}$, es una subálgebra, lo cual significa que una parte de las constantes de estructura deben satisfacer la condición

$$C_{i_0 j_0}^{k_1} = 0 \quad (1.3)$$

4. Introducir el reescalamiento (1.2) junto con la condición (1.3). En efecto,

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}_{i_0}, \mathbf{X}_{j_0}] &= C_{i_0 j_0}^{k_0} \mathbf{X}_{k_0} \\ [\mathbf{X}_{i_0}, \lambda \mathbf{Y}_{j_1}] &= C_{i_0 j_1}^{k_0} \mathbf{X}_{k_0} + \lambda C_{i_0 j_1}^{k_1} \mathbf{Y}_{k_1} \quad \setminus : \lambda \\ [\lambda \mathbf{Y}_{i_1}, \lambda \mathbf{Y}_{j_1}] &= C_{i_1 j_1}^{k_0} \mathbf{X}_{k_0} + \lambda C_{i_1 j_1}^{k_1} \mathbf{Y}_{k_1} \quad \setminus : \lambda^2 \end{aligned}$$

5. Tomar el límite cuando $\lambda \rightarrow \infty$. En efecto al tomar el límite obtenemos

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}_{i_0}, \mathbf{X}_{j_0}] &= C_{i_0 j_0}^{k_0} \mathbf{X}_{k_0} \\ [\mathbf{X}_{i_0}, \mathbf{Y}_{j_1}] &= C_{i_0 j_1}^{k_1} \mathbf{Y}_{k_1} \\ [\mathbf{Y}_{i_1}, \mathbf{Y}_{j_1}] &= 0 \end{aligned}$$

El álgebra contraída \mathcal{G}_C es la suma semidirecta de el álgebra original \mathcal{G} y la subálgebra generada por el coseto simétrico $\mathcal{G}/\mathcal{L}_0$, donde los generadores de $\mathcal{G}/\mathcal{L}_0$ son conmutativos.

1.1.1.1. Contracción $SO(3) \rightarrow ISO(2)$.

El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ tiene elementos bases \mathbf{L}_A , $A = 1, 2, 3$ que satisfacen la relación de conmutación, $[\mathbf{L}_A, \mathbf{L}_B] = \epsilon_{ABC} \mathbf{L}_C$ donde $A : (\mathbf{L}_{a_0}, \mathbf{L}_{b_1}) : 3$.

La contracción de el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ con $\mathcal{G} = V_0 \oplus V_1$ ¹, al álgebra $\mathfrak{iso}(2) = \mathfrak{e}(2)$ en \mathcal{G}_C , consiste en:

1. Reescalar los generadores de $\mathcal{G}/\mathcal{L}_0 : \{\mathbf{L}_a\}$ por medio de un parámetro numérico R en la forma

$$\mathbf{P}_{a_1} = \frac{1}{R} \mathbf{L}_{a_1} \rightarrow L_{a_1} = R \mathbf{P}_{a_1}$$

2. Descomponer el álgebra de la siguiente manera

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}_{a_0}, \mathbf{L}_{b_0}] &= \epsilon_{a_0 b_0 c_0} \mathbf{L}_{c_0} + \epsilon_{a_0 b_0 c_1} \mathbf{L}_{c_1} \\ [\mathbf{L}_{a_0}, \mathbf{L}_{b_1}] &= \epsilon_{a_0 b_1 c_0} \mathbf{L}_{c_0} + \epsilon_{a_0 b_1 c_1} \mathbf{L}_{c_1} \\ [\mathbf{L}_{a_1}, \mathbf{L}_{b_1}] &= \epsilon_{a_1 b_1 c_0} \mathbf{L}_{c_0} + \epsilon_{a_1 b_1 c_1} \mathbf{L}_{c_1} \end{aligned}$$

3. Tener en cuenta que V_0 , generado por $\{\mathbf{L}_{a_0}\}$ es una subálgebra, lo cual significa que las constantes de estructura deben satisfacer la condición, $\epsilon_{a_0 b_0 c_1} = 0$, con $a_0, b_0 = 1, 2$.
4. Introducir el reescalamiento R , junto con la condición de subálgebra

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}_{a_0}, \mathbf{L}_{b_0}] &= \epsilon_{a_0 b_0 c_0} \mathbf{L}_{c_0} \\ [\mathbf{L}_{a_0}, R \mathbf{P}_{b_1}] &= \epsilon_{a_0 b_1 c_0} \mathbf{L}_{c_0} + \epsilon_{a_0 b_1 c_1} R \mathbf{P}_{c_1} \\ [R \mathbf{P}_{a_1}, R \mathbf{P}_{b_1}] &= \epsilon_{a_1 b_1 c_0} \mathbf{L}_{c_0} + \epsilon_{a_1 b_1 c_1} R \mathbf{P}_{c_1} \end{aligned}$$

5. Tomar el límite cuando $R \rightarrow \infty$. En efecto

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}_{a_0}, \mathbf{L}_{b_0}] &= \epsilon_{a_0 b_0 c_0} \mathbf{L}_{c_0} \\ [\mathbf{L}_{a_0}, \mathbf{P}_{b_1}] &= \epsilon_{a_0 b_1 c_1} \mathbf{P}_{c_1} \\ [\mathbf{P}_{a_1}, \mathbf{P}_{b_1}] &= 0 \end{aligned}$$

Para el álgebra del coseto simétrico $\mathcal{G}/\mathcal{L}_0$, asociada a los subíndices 1, consideraremos dos elementos \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 ^{2 3}. Luego la subálgebra \mathcal{L}_0 , asociados a los subíndices 0, contendrá un

¹Se considera $V_0 = \{\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2\}$ y $V_1 = \{\mathbf{L}_3\}$. La contracción de Inönü-Wigner abelianiza V_0 utilizando un límite singular.

²Recordar se que debe conservar la dimensión de la nueva álgebra contraída

³El caso en que consideremos dos elementos de la subálgebra \mathcal{L}_0 y un único elemento en el coseto simétrico, el espacio de $\mathcal{G}/\mathcal{L}_0$ no es abelianizado

único elementos al que denominaremos \mathbf{L}_3 . De esta manera, tenemos que las relaciones de conmutación de el álgebra contraída $\mathfrak{iso}(2) = \mathfrak{e}(2)$, son

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}_3, \mathbf{P}_1] &= -\mathbf{P}_2 \\ [\mathbf{L}_3, \mathbf{P}_2] &= +\mathbf{P}_1 \\ [\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2] &= 0 \end{aligned}$$

Los tres operadores $\{\mathbf{L}_3, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2\}$ generan el Grupo de Movimiento Euclideo en el plano, $E(2)$, o de Transformaciones Inhomógeneas Ortogonales en el plano \mathbb{R}^2 , $ISO(2)$. Este grupo consiste de rotaciones en el eje-z, generadas por \mathbf{L}_3 , y el desplazamiento del origen en la dirección-x e dirección-y, generadas por $\mathbf{P}_1 = \partial_1$ y $\mathbf{P}_2 = \partial_2$.

Para verificar esta representación podemos imaginar el grupo $SO(3)$ que actúa en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ en la vecindad de el polo norte $(0, 0, R)$.

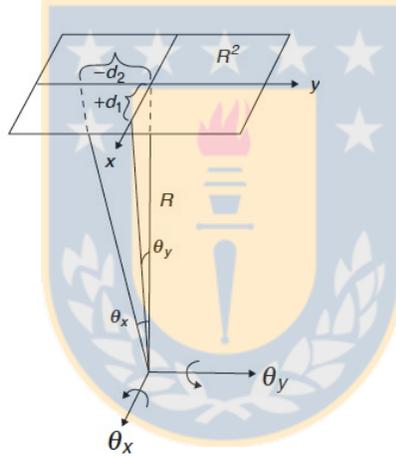


Figura 1.1: Rotaciones en la superficie de una esfera de radio R

Un elemento en el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ puede ser escrito como $O[SO(3)] = \theta_1 \mathbf{L}_1 + \theta_2 \mathbf{L}_2 + \theta_3 \mathbf{L}_3$. Los parámetros θ_1, θ_2 y d_1, d_2 están relacionados por $d_1 = +R\theta$ y $d_2 = -R\theta$, luego

$$O[SO(3)] = (-d_2) \frac{\mathbf{L}_1}{R} + (+d_1) \frac{\mathbf{L}_2}{R} + \theta_3 \mathbf{L}_3$$

En el límite $R \rightarrow \infty$ podemos encontrar

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \mathbf{L}_1 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} (x^2 \partial_3 - x^3 \partial_2) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - R \frac{\partial}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} = -\partial_2 = -\mathbf{P}_2 \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \mathbf{L}_2 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} (x^3 \partial_1 - x^1 \partial_3) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \left(R \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} = +\partial_1 = +\mathbf{P}_1 \end{aligned}$$

En el límite contraído del operador \mathbf{L}_1 y \mathbf{L}_2 en el límite de la esfera de radio infinito, corresponden a los operadores $-\mathbf{P}_2$ y \mathbf{P}_1 los que describen el desplazamiento en la dirección $-y$ e $+x$. En el límite de radio muy largo, los dos ángulos θ_1 y θ_2 se vuelven un producto muy pequeño $R\theta_i$ ($i = 1, 2$) acercándose a un límite bien definido. Este corresponde a una rotación a través de los ángulos $\theta_2 = d/R$ en el eje- y produciendo el desplazamiento de d_1 en la dirección- ox , y una rotación a través de un ángulo $\theta_1 = d_2/R$ en el eje- x produciendo un desplazamiento de $-d_2$ en la dirección- oy [18].





Capítulo 2

S-Expansión de Álgebras de Lie

El método de expansión de álgebras de Lie es un procedimiento para obtener nuevas álgebras de Lie a partir de una dada. Fue propuesto el año 2006 [22], procedimiento que se basa en combinar las constantes de estructura del álgebra \mathcal{G} con la ley de composición interna de un semigrupo abeliano S , con el fin de definir un paréntesis de Lie de una nueva álgebra, llamada S-Expandida. La idea es generalizar de una manera natural el procedimiento de contracción de Inönü-Wigner, donde en lugar de multiplicar los generadores por un parámetro numérico, dichos generadores sean multiplicados por los elementos de un semigrupo abeliano.

2.1. Procedimiento de S-Expansión

En esta sección realizaremos una revisión general del procedimiento de expansión que considera semigrupos abelianos. Sea un \mathcal{G} un álgebra de Lie y S un semigrupo abeliano. De acuerdo al Teorema III.1 de la ref. [22]:

Teorema 1 : Sea $S = \{\lambda_\alpha\}$ un semigrupo abeliano, sea $K_{\alpha\beta}^\gamma$ un 2-selector y sea \mathcal{G} un álgebra de Lie de base $\{\mathbf{T}_A\}$ y constantes de estructura C_{AB}^C . Un elemento de la base del espacio generado por el producto directo $S \otimes \mathcal{G}$ será denotado por $\mathbf{T}_{(A,\alpha)} = \lambda_\alpha \mathbf{T}_A$.

Si se define el producto algebraico en el espacio $S \otimes \mathcal{G}$ como

$$[\mathbf{T}_{(A,\alpha)}, \mathbf{T}_{(B,\beta)}] = \lambda_\alpha \lambda_\beta [\mathbf{T}_A, \mathbf{T}_B] \quad (2.1)$$

entonces $S \otimes \mathcal{G}$ será un álgebra de Lie cuya constantes de estructura vienen dadas por

$$C_{(A,\alpha)(B,\beta)}^{(C,\gamma)} = K_{\alpha\beta}^\gamma C_{AB}^C$$

En el caso que \mathcal{G} se pueda descomponer en una suma de subespacios, es decir si

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{p \in I} V_p$$

donde I es un conjunto de índices, se tiene el siguiente Teorema (Teo. IV.2 de la ref. [22])

Teorema 2 : Sea $\mathcal{G} = \bigoplus_{p \in I} V_p$ una descomposición en subespacios de \mathcal{G} , con una estructura dada por

$$[V_p, V_q] \subset \bigoplus_{r \in i(p,q)} V_r$$

y sea $S = \bigcup_{p \in I} S_p$ una descomposición resonante del semigrupo abeliano S , es decir, una descomposición del tipo

$$S_p \times S_q \subset \bigcap_{r \in i(p,q)} S_r$$

Si $W_p = S_p \otimes V_p$, $p \in I$ son subespacios de $\mathfrak{g} = S \otimes \mathcal{G}$, entonces

$$\mathfrak{g}_R = \bigoplus_{p \in I} W_p = \bigoplus_{p \in \mathcal{G}} S_p \otimes V_p$$

es una subálgebra del álgebra expandida $\mathfrak{g} = S \otimes \mathcal{G}$, conocida como subálgebra resonante.

2.1.1. Ejemplo: S-Expansión del álgebra $\mathfrak{so}(4, 2)$.

Una base para el álgebra $\mathcal{G} = \mathfrak{so}(4, 2)$ es dada por generadores $\{\tilde{\mathbf{L}}_{ab}, \tilde{\mathbf{M}}_c\}$, que satisfacen las siguientes relaciones de conmutación :

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{L}}_{ab}, \tilde{\mathbf{L}}_{cd}] &= \eta_{cb} \tilde{\mathbf{L}}_{ad} - \eta_{ca} \tilde{\mathbf{L}}_{bd} - \eta_{da} \tilde{\mathbf{L}}_{cb} + \eta_{bd} \tilde{\mathbf{L}}_{ca} \\ [V_0, V_0] &\subset V_0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{L}}_{ab}, \tilde{\mathbf{M}}_c] &= \eta_{cb} \tilde{\mathbf{M}}_a - \eta_{ca} \tilde{\mathbf{M}}_b \\ [V_0, V_1] &\subset V_1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{M}}_a, \tilde{\mathbf{M}}_b] &= \tilde{\mathbf{L}}_{ab} \\ [V_1, V_1] &\subset V_0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde $\mathcal{G} = V_0 \oplus V_1$, con V_0 una subálgebra generada por $\tilde{\mathbf{L}}_{ab}$ y V_1 es un subespacio generado por $\tilde{\mathbf{M}}_a$ ¹.

¹Con una constante de estructura $\eta_{ab} = (+, +, +, +, -, -)$.

- *Expansión del álgebra $\mathcal{G} = \mathfrak{so}(4, 2)$.*

Si $S = S_E^{(2)}$ y $\mathcal{G} = \mathfrak{so}(4, 2)$, donde $S_E^{(2)} = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ es un semigrupo dotado del producto abeliano

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \begin{cases} \lambda_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha + \beta \leq 2 \\ \lambda_3 & \text{si } \alpha + \beta > 2 \end{cases} \quad (2.5)$$

entonces el álgebra expandida es

$$\mathfrak{g} = S_E^{(2)} \otimes \mathcal{G}$$

Definiendo los generadores del álgebra expandida como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}_{ab,\alpha} &= \lambda_\alpha \tilde{\mathbf{L}}_{ab} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{a,\alpha} &= \lambda_\alpha \tilde{\mathbf{M}}_a \end{aligned}$$

tenemos que una base para el álgebra expandida es dada por

$$\left\{ \tilde{\mathbf{L}}_{ab,0}; \tilde{\mathbf{L}}_{ab,1}; \tilde{\mathbf{L}}_{ab,2}; \tilde{\mathbf{L}}_{ab,3}; \tilde{\mathbf{M}}_{a,0}; \tilde{\mathbf{M}}_{a,1}; \tilde{\mathbf{M}}_{a,2}; \tilde{\mathbf{M}}_{a,3} \right\}.$$

Gráficamente tenemos la Figura (2.1).

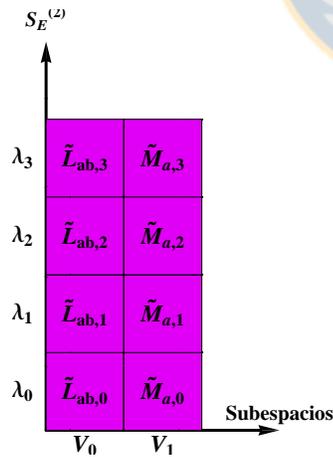


Figura 2.1: Álgebra de $S_E^{(2)} \otimes \mathfrak{so}(4, 2)$ expandida

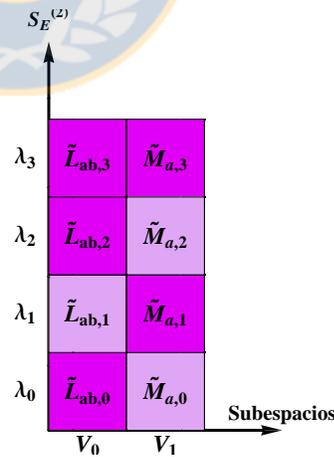


Figura 2.2: Álgebra de $S_E^{(2)} \otimes \mathfrak{so}(4, 2)$ resonante

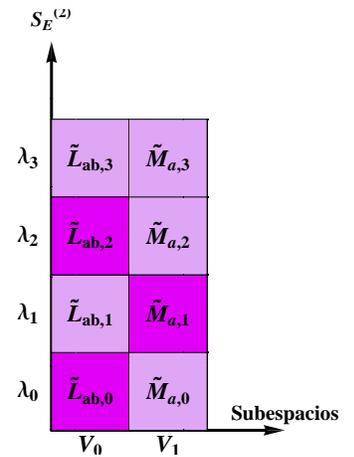


Figura 2.3: Álgebra de $S_E^{(2)} \otimes \mathfrak{so}(4, 2)$ reducida

- *Subálgebra Resonante.*

La subálgebra resonante $\mathfrak{g}_R = W_0 \oplus W_1$, con $W_0 = S_0 \otimes V_0$ y $W_1 = S_1 \otimes V_1$ es obtenida usando la partición $S_E^{(2)} = S_0 \cup S_1$, resonante con $\mathcal{G} = V_0 \oplus V_1$ dada por

$$\begin{aligned} W_0 &= S_0 \otimes V_0 = \{\lambda_0, \lambda_2, \lambda_3\} \otimes V_0 = \{\lambda_0 \otimes V_0, \lambda_2 \otimes V_0, \lambda_3 \otimes V_0\} \\ W_1 &= S_1 \otimes V_1 = \{\lambda_1, \lambda_3\} \otimes V_1 = \{\lambda_1 \otimes V_1, \lambda_3 \otimes V_1\} \end{aligned}$$

de modo que el álgebra resonante $\mathfrak{g}_R = W_0 \oplus W_1$ es generado por $\{\tilde{\mathbf{L}}_{ab,0}; \tilde{\mathbf{L}}_{ab,2}; \tilde{\mathbf{L}}_{ab,3}; \tilde{\mathbf{M}}_{a,1}; \tilde{\mathbf{M}}_{a,3}\}$. (Ver Figura (2.2)).

- *Álgebra Resonante Reducida.*

Se obtiene particionando el semigrupo en la forma $S_p = \hat{S}_p \cup \check{S}_p$. Si consideramos la partición

$$\begin{aligned} \hat{S}_p &= \{0_S\} \\ \check{S}_p &= S_p - \{0_S\} \end{aligned}$$

tenemos

$$\mathfrak{g}_R = \bigoplus S_p \otimes V_p = \bigoplus (\hat{S}_p \cup \check{S}_p) \otimes V_p = \bigoplus (\hat{S}_p \otimes V_p) \cup (\check{S}_p \otimes V_p)$$

de manera que $\mathfrak{g}_R = \check{\mathfrak{g}}_R \oplus \hat{\mathfrak{g}}_R$ donde

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{g}}_R &= \bigoplus \hat{S}_p \otimes V_p = 0 \\ \check{\mathfrak{g}}_R &= \bigoplus \check{S}_p \otimes V_p = \bigoplus S_p \otimes V_p \end{aligned}$$

y dado que $0_S = \lambda_3$ es el elemento cero del semigrupo, tenemos

$$\check{\mathfrak{g}}_R = (\lambda_0 \otimes V_0, \lambda_2 \otimes V_0) \oplus (\lambda_1 \otimes V_1)$$

Así tenemos que una base para el álgebra expandida resonante reducida es $\{\tilde{\mathbf{L}}_{ab,0}; \tilde{\mathbf{M}}_{a,1}; \tilde{\mathbf{L}}_{ab,2}\}$, ver figura (2.3), donde $\tilde{\mathbf{L}}_{ab,0}$ y $\tilde{\mathbf{M}}_{a,1}$ son los generadores del álgebra $\mathfrak{so}(4, 2)$. Redefiniendo los generadores como:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{ab} &= \tilde{\mathbf{L}}_{ab,0} = \lambda_0 \tilde{\mathbf{L}}_{ab} \\ \mathbf{F}_{ab} &= \tilde{\mathbf{L}}_{ab,2} = \lambda_2 \tilde{\mathbf{L}}_{ab} \\ \mathbf{P}_a &= \tilde{\mathbf{M}}_{a,1} = \lambda_1 \tilde{\mathbf{M}}_a \end{aligned}$$

tenemos las siguientes relaciones de conmutación para el álgebra expandida

$$\begin{aligned}
[\mathbf{L}_{ab}, \mathbf{L}_{cd}] &= \eta_{cb}\mathbf{L}_{ad} - \eta_{cd}\mathbf{L}_{ab} + \eta_{db}\mathbf{L}_{ac} - \eta_{da}\mathbf{L}_{cb} \\
[\mathbf{L}_{ab}, \mathbf{P}_c] &= \eta_{bc}\mathbf{P}_a - \eta_{ca}\mathbf{P}_b \\
[\mathbf{L}_{ab}, \mathbf{F}_{cd}] &= \eta_{cd}\mathbf{F}_{ad} - \eta_{ca}\mathbf{F}_{bd} + \eta_{db}\mathbf{F}_{ca} - \eta_{da}\mathbf{F}_{cb} \\
[\mathbf{F}_{ab}, \mathbf{F}_{cd}] &= 0 \\
[\mathbf{F}_{ab}, \mathbf{P}_c] &= 0 \\
[\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b] &= \mathbf{F}_{ab}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

El álgebra obtenida de la S-Expansión del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(4, 2)$ es conocida como *Álgebra de Maxwell* [6, 7, 8] y representa el álgebra de una partícula elemental en un campo electromagnético externo, donde \mathbf{F}_{ab} es el *Tensor de Campo Electromagnético* o *Tensor de Faraday*, cuyas componentes se reflejan como parte eléctrica y parte magnética del campo. En el caso de considerar el límite relativista singular ², se obtiene el tensor dual \mathbf{G}_{ab} , con $[\mathbf{G}_{ab}, \mathbf{G}^{cd}] = 0$. La relación de conmutación (2.2) representa el *Álgebra de Lorentz*, y la relación de conmutación (2.3) representa el *Álgebra de Poincaré* [7], donde $\tilde{\mathbf{L}}_{ab}$ corresponde al generador de transformaciones de Lorentz y \mathbf{M}_a corresponde al generador de traslaciones.

² $\mathbf{E}/c \rightarrow \mathbf{B}$ y $\mathbf{B}/c \rightarrow \mathbf{E}$.



Capítulo 3

Operadores de Casimir

3.1. Tensores Invariantes para Álgebras de Lie S-Expandidas

La construcción de Tensores Invariantes para álgebras de Lie S-Expandidas fue introducido en la referencia [22, 23]. El método de S-expansión de álgebras de Lie permite obtener un tensor invariante para el álgebra de Lie S-expandida \mathcal{G} dado un tensor invariante para el álgebra original \mathfrak{g} .

Teorema 3 *Sea S un semigrupo abeliano con $\lambda_i \neq 0$, $i = 0, \dots, N$ y $\lambda_{N+1} = 0$. Sea \mathcal{G} un álgebra de Lie de base $\{\mathbf{T}_A\}$, y sea $\langle \mathbf{T}_{A_1} \dots \mathbf{T}_{A_n} \rangle$ un tensor invariante para \mathcal{G} . Entonces, la cantidad*

$$|\mathbf{T}_{(A_1, i_1)} \dots \mathbf{T}_{(A_n, i_n)}| = \alpha_j K_{i_1 \dots i_n}^j \langle T_{A_1} \dots T_{A_n} \rangle,$$

siendo α_j constantes arbitrarias, corresponde a un tensor invariante para el álgebra O_S -reducida obtenida de $\mathfrak{g} = S \times \mathcal{G}$.

3.2. Operadores de Casimir para Álgebras S-Expandidas

Sea \mathcal{G} un álgebra de Lie y sean $\{\mathbf{T}_A, A = 1, \dots, \dim \mathcal{G}\}$ los generadores de \mathcal{G} . Un operador de Casimir \mathbf{C}_m de rango m puede ser escrito como

$$\mathbf{C}_m = C^{A_1 \dots A_m} \mathbf{T}_{A_1} \dots \mathbf{T}_{A_m} \quad (3.1)$$

que, por definición, satisface las condición $[\mathbf{T}_{A_0}, \mathbf{C}_m] = 0$, $\forall \mathbf{T}_{A_0} \in \mathcal{G}$, donde los coeficientes $C^{A_1 \dots A_m}$ forman un tensor invariante simétrico para el grupo de Lie asociado a \mathcal{G} . Esto significa que los operadores \mathbf{C}_m ($m = 2, 3, \dots$) son invariantes del álgebra. Usando (3.1) tenemos

$$[\mathbf{T}_{A_0}, \mathbf{C}_m] = \left(\sum_{p=1}^m f_{A_0 B}^{A_p} C^{A_1 \dots A_{p-1} B A_{p+1} \dots A_m} \right) \mathbf{T}_{A_1} \dots \mathbf{T}_{A_m}$$

donde $f_{AB}{}^C$ son las constantes de estructura del álgebra \mathcal{G} . La “Condición de Casimir”, es entonces equivalente a

$$\sum_{p=1}^m f_{A_0 B}{}^{(A_p C^{A_1 \dots A_{p-1} | B | A_{p+1} A_m)} = 0 \quad (3.2)$$

La forma estándar, es decir, el operador de Casimir cuadrático (de rango $m = 2$), viene dada de acuerdo con la ecuación (3.2), por

$$f_{A_0 B}{}^{A_1 C^{BA_2}} + f_{A_0 B}{}^{A_2 C^{A_1 B}} = 0 \quad (3.3)$$

Por otro lado, la constante de estructura de el álgebra de Lie S-expandida es dada por

$$f_{(A,\alpha)(B,\beta)}{}^{(C,\gamma)} = K_{\alpha\beta}{}^\gamma f_{AB}{}^C \quad (3.4)$$

donde $K_{\alpha\beta}{}^\gamma$ es el “2-selector” del semigrupo S . La condición de Casimir (cuadrática) para el álgebra de Lie es entonces S-expandida es

$$K_{\alpha_0\beta}{}^{\alpha_1} f_{A_0 B}{}^{A_1 C^{(B,\beta)(A_2,\alpha_2)}} + K_{\alpha_0\beta}{}^{\alpha_2} f_{A_0 B}{}^{A_2 C^{(A_1,\alpha_1)(B,\beta)}} = 0 \quad (3.5)$$

Consideremos ahora el siguiente ansatz para las componente de el operador de Casimir (cuadrático) de un álgebra S-expandida;

$$C^{(A,\alpha)(B,\beta)} = m^{\alpha\beta} C^{AB} \quad (3.6)$$

donde C^{AB} son las componentes de los operadores de Casimir para el álgebra original \mathcal{G} y $m^{\alpha\beta}$ son las componentes del tensor simétrico, asociado al semigrupo S , que debe ser determinado.

Introduciendo (3.6) en (3.5) obtenemos

$$K_{\alpha_0\beta}{}^{\alpha_1} m^{\beta\alpha_2} f_{A_0 B}{}^{A_1 C^{BA_2}} + K_{\alpha_0\beta}{}^{\alpha_2} m^{\alpha_1\beta} f_{A_0 B}{}^{A_2 C^{A_1 B}} = 0 \quad (3.7)$$

La ecuación (3.7) se cumple si la siguiente condición se satisface

$$K_{\alpha_0\beta}{}^{\alpha_1} m^{\beta\alpha_2} = K_{\alpha_0\beta}{}^{\alpha_2} m^{\alpha_1\beta} \quad (3.8)$$

Para revisar esto, vamos a conectar la ecuación (3.7) en la ecuación (3.8) para encontrar

$$\begin{aligned} & K_{\alpha_0\beta}{}^{\alpha_1} m^{\beta\alpha_2} f_{A_0 B}{}^{A_1 C^{BA_2}} + K_{\alpha_0\beta}{}^{\alpha_2} m^{\alpha_1\beta} f_{A_0 B}{}^{A_2 C^{A_1 B}} \\ &= K_{\alpha_0\beta}{}^{\alpha_1} m^{\beta\alpha_2} (f_{A_0 B}{}^{A_1 C^{BA_2}} + f_{A_0 B}{}^{A_2 C^{A_1 B}}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde hemos ocupado la ecuación (3.3).

El siguiente teorema proporciona la herramienta para encontrar el tensor $m^{\alpha\beta}$ con las propiedades requeridas.

Teorema 4 Sea $K_{\alpha\beta}{}^\gamma$ un dos selector para un semigrupo abeliano S , si definimos

$$m_{\alpha\beta} = \alpha_\gamma K_{\alpha\beta}{}^\gamma$$

donde α_γ son coeficientes numéricos, entonces si los α_γ son elegidos de manera tal que $m_{\alpha\beta}$ es una “métrica invertible”, se tiene que $m^{\alpha\beta}$, (que, por definición, satisface $m^{\alpha\lambda}m_{\lambda\beta} = \delta^\alpha_\beta$) y la métrica invertible $m_{\alpha\beta}$ cumplen la ecuación (3.8) [26]¹.

Esto significa que si

$$\mathbf{C} = C^{AB}\mathbf{T}_A\mathbf{T}_B \quad (3.9)$$

es el operador de Casimir cuadrático para el álgebra original \mathcal{G} , entonces

$$\mathbf{C} = m^{\alpha\beta}C^{AB}\mathbf{T}_{(A,\alpha)}\mathbf{T}_{(B,\beta)} \quad (3.10)$$

es el operador de Casimir cuadrático para el álgebra de Lie S-expandida.



¹Este teorema se desarrollo para obtener la extensión semi-simple de una (super) álgebra de Poincaré [27, 28, 29, 30].



Parte II

Fundamentos Físicos





Capítulo 4

Problema de dos-cuerpos

Consideremos dos partículas, etiquetadas con 1 y 2, interactuando a través de un potencial $V(\hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2)$. El Espacio de Hilbert para este sistema compuesto es $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, donde \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 corresponden a partículas aisladas [32].

El Hamiltoniano del sistema compuesto es

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_2} + V(\hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2) \quad (4.1)$$

Un conjunto de observables canónicos conjugados para el sistema $\{\hat{\mathbf{p}}_T, \hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{r}}\}$, debe cumplir $[\hat{\mathbf{R}}_\alpha, \hat{\mathbf{P}}_{T\beta}] = [\hat{\mathbf{r}}_\alpha, \hat{\mathbf{p}}_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha,\beta}$ y $[\hat{\mathbf{R}}_\alpha, \hat{\mathbf{p}}_\beta] = [\hat{\mathbf{r}}_\alpha, \hat{\mathbf{P}}_{T\beta}] = 0$. Una posible elección de dicho conjunto es $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{M}(m_1\hat{\mathbf{r}}_1 + m_2\hat{\mathbf{r}}_2)$, $\hat{\mathbf{p}}_T = \hat{\mathbf{p}}_1 + \hat{\mathbf{p}}_2$, $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2$ y $\hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{M}(m_2\hat{\mathbf{p}}_1 - m_1\hat{\mathbf{p}}_2)$ con $M = m_1 + m_2$ [33].

Así tenemos que $\hat{\mathbf{H}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_T^2}{2M} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + V(\hat{\mathbf{r}})$, donde μ es la *masa reducida* $\mu = m_1m_2/M$. Luego

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{\hat{\mathbf{P}}_T^2}{2M} + \hat{\mathbf{H}}_0$$

con $\hat{\mathbf{H}}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + V(\hat{\mathbf{r}})$.

4.1. La Ecuación Radial

Consideremos el caso de un potencial esféricamente simétrico, $V(\hat{\mathbf{r}}) = V(\hat{r})$. Una partícula de masa reducida μ , moviéndose bajo la influencia de tal potencial estará descrito por el

Hamiltoniano $\hat{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}) = \hat{\mathbf{p}}^2/2\mu + V(\hat{r})$. La función de onda Ψ_{Elm} satisface la ecuación de Schrödinger en coordenadas polares esféricas

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}\Psi_{Elm}(\vec{r}) &= E\Psi_{Elm}(\vec{r}) \\ \left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) - E \right\} \Psi_{Elm}(\vec{r}) &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones son del tipo $\Psi_{Elm}(\vec{r}) = R_{Elm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$. Con la sustitución de $u_{El}(r) = rR_{El}(r)$ se obtiene

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - U(r) + \kappa^2 \right] u_{kl}(r) = 0 \quad (4.2)$$

Ecuación conocida como la *Ecuación Radial de Schrödinger*, donde $U(r)$ y κ^2 vienen dados por $U(r) = 2\mu/\hbar^2 V(r)$ y $E = \hbar^2 \kappa^2 / 2\mu$ [33].

4.2. Ecuación Radial del Átomo de Hidrógeno

Analizamos las propiedades de la Ecuación Radial de Schrödinger (4.2), considerando el caso particular del *Átomo de Hidrógeno*. Consideremos una partícula de masa μ ligada por un Potencial Coulombiano atractivo, de la forma $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$. Nuestro propósito es encontrar los estados ligados, o sea, los estados estacionarios con energía $E < 0$. Para la ecuación (4.2), definamos $\kappa > 0$ a través de $E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2\mu}$ [33]. Con esta nomenclatura la ecuación radial de Schrödinger, para el presente problema, es dado por

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \kappa^2 + \frac{2\kappa N}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_{kl}(r) = 0$$

con $N \equiv \frac{\mu Z e^2}{\hbar^2}$. La ecuación radial de Schrödinger para $r \rightarrow \infty$ es $\left[\frac{d^2}{dr^2} - \kappa^2 \right] u(r) = 0$ tiene dos soluciones linealmente independientes son $u(r) = e^{\kappa r}$ y $u(r) = e^{-\kappa r}$. La primera de estas es físicamente inaceptable, pues $u(r)$ debe tender a cero para grandes valores de r . Cerca del origen $r \rightarrow 0$, la ecuación radial de Schrödinger toma la forma $\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u(r) = 0$ soluciones del tipo $u(r) = r^\alpha$. Con este Ansatz se obtiene $\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} - l(l+1)r^{\alpha-2} = 0$, es decir, $\alpha_1 = -l$ y $\alpha_2 = l+1$. Como $u(r)$ debe ser regular en el origen, el primer valor de α resulta ser inaceptable¹. Luego la solución física se comporta cerca del origen de la forma $u(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} r^{l+1}$. La discusión anterior sugiere introducir la función $f(r)$ definida por $u(r) = r^{l+1} e^{-\kappa r} f(r)$. La ecuación diferencial para $f(r)$ es

$$f'' + 2 \left[\frac{l+1}{r} - \kappa \right] f' + \frac{2}{r} \kappa [N - (l+1)] f = 0.$$

¹Este caso corresponde al oscilador armónico tres dimensional

Si cambiamos de variable a, $\rho \equiv 2\kappa r$, y llamamos $\bar{f}(\rho) = f(r)$

$$\left[\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + (2l + 2 - \rho) \frac{d}{d\rho} - (l + 1 - N) \right] \bar{f}(\rho) = 0.$$

Ecuación, que satisface una Función Hipergeométrica [32]. La solución en el origen es $\bar{f}(\rho) = {}_1F_1(l + 1 - N, 2l + 2; \rho)$. La serie hipergeométrica debe ser un polinomio para que el comportamiento de $u(r)$ para $r \rightarrow \infty$ sea aceptable. Esto implica que el término $n = -(l + 1 - N)$ debe ser un entero no negativo, o sea $n = N - l - 1$ con $n = 0, 1, 2, \dots$. De esta relación se deduce que $N = n + l + 1$, es decir, N a su vez también debe ser un entero positivo. Esta condición nos permite obtener los Niveles discretos de Energía que posee el sistema. Los autoestados se obtiene de la expresión

$$E_N = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2\mu} = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\mu^2 Z^2 e^2}{\hbar^4 N^2} \right) = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2\hbar^2 N^2} = -\frac{1}{2} \frac{Z^2 e^2}{a_0} \frac{1}{N^2} = -\frac{RZ^2}{N^2}$$

La energía depende sólo de N , el *número cuántico principal*.² $R = 13,6[eV]$ es la constante de Rydberg y $a_0 = \hbar^2/\mu e^2 = 0,53\text{\AA}$ es el *Radio de Bohr*.

Durante la transición de un electrón desde el nivel E_N a otro nivel $E_{N'}$, el átomo emite un fotón de energía $\hbar\omega_{NN'} = E_N - E_{N'}$. Reemplazando E_N (o $E_{N'}$) obtenemos $\omega_{NN'} = \left(\frac{1}{N'^2} - \frac{1}{N^2}\right)$, $N' < N$ y frecuencia $\nu_{NN'} = R\left(\frac{1}{N'^2} - \frac{1}{N^2}\right)$. La cantidad E_N/\hbar es conocida como *Término espectral*. La diferencia entre estos términos determina $\omega_{NN'}$.

El incremento del número cuántico principal N , decrece la diferencia entre estos niveles de energía, es decir, $\lim_{N \rightarrow \infty} E_N = 0$ y $\lim_{N \rightarrow \infty} (E_N - E_{N-1}) = 0$. Estas energías son positivas y muy cercanas. El continuo describe a un átomo ionizado. La energía de ionización es la energía de enlace negativa. Todas las frecuencias que intervienen en transiciones que terminan en el mismo estado inferior forman un *Espectro de Energía*³ [32].

4.3. Álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$

El Átomo de Hidrógeno tiene Simetría Esférica la cual puede ser descrita por medio del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$. Esta álgebra tiene dimensión 3 y rango 1, cuyos generadores $\{\hat{\mathbf{L}}_i\}_{i=1}^3$ satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\hat{\mathbf{L}}_i, \hat{\mathbf{L}}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{L}}_k \quad (4.3)$$

donde ϵ_{ijk} corresponden al tensor de Levi-Civita y \hbar es la constante de Planck.

² n_r es el número cuántico radial

³No todas las transiciones son permitidas, están sujetas a Reglas de Selección.

De acuerdo con el *Teorema de Racah*, que tenga rango 1 implica que tiene un Operador de Casimir $\hat{\mathbf{L}}^2$ [31], el cual caracteriza de manera única los multipletes del grupo. $\hat{\mathbf{L}}^2$ es invariante bajo rotaciones, y además satisface $[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{\mathbf{L}}_i] = 0$. Se tiene que $\{\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{\mathbf{L}}_i\}$ forman un conjunto de observables compatibles. Al diagonalizar dicho conjunto, el espacio de Hilbert se desglosa en subespacios \mathcal{H}_i , caracterizados por un valor bien definido de $\hat{\mathbf{L}}^2$, $\hbar^2 l(l+1)$, con l enteros o semi-enteros. Dichos espacios poseen dimensión $(2l+1)$ y una base $\{|lm\rangle, m = -l, -l+1, \dots, l-1, l\}$. La base esta caracterizada por las ecuaciones $\hat{\mathbf{L}}^2 |lm\rangle = \hbar^2 l(l+1) |lm\rangle$ y $\hat{\mathbf{L}}_z |lm\rangle = \hbar m |lm\rangle$. Así tenemos, que $\hat{\mathbf{L}}^2 = \hbar^2 l(l+1)$. Para un l fijo los valores que m puede tomar son $m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$.



Capítulo 5

El Problema de Kepler

El Problema de Kepler ¹ constituye un ejemplo similar al Problema del Átomo de Hidrógeno [10]². El Hamiltoniano del Problema de Kepler es dado por

$$H = \frac{1}{2} \frac{\vec{p}^2}{\mu} + V(|\vec{r}|) \quad (5.1)$$

Aquí, la energía potencial es $V(|\vec{r}|) = -\kappa/r$, μ la *masa reducida* del sistema y $\kappa > 0$ es una cantidad positiva para la interacción gravitatoria. En el caso del Átomo de Hidrógeno $\kappa = Ze^2$.

La solución del Problema de Kepler en coordenadas polares cilíndricas $\mathbf{r} = (r, \phi)$, es $\mathbf{r}(r, \phi) = l/[1 + \epsilon \cos(\phi)]$. Si $0 \leq \epsilon \leq 1$ la cónica es una elipse³. ϵ es conocida como la *excentricidad* y l como *latus rectum*.⁴

Mientras H sea independiente del tiempo, la Energía total E es una constante de movimiento; y, debido a que H posee simetría rotacional, el momento angular orbital $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ es una constante de movimiento.

En coordenadas esféricas, el Hamiltoniano correspondiente a la ecuación (5.1), es

$$H = \frac{\vec{p}_r^2}{2\mu} + \frac{\vec{L}^2}{2\mu r^2} - \frac{\kappa}{r}$$

¹EL problema de Kepler determina el movimiento de un cuerpo bajo la ley de fuerza proporcional al inverso del cuadrado de la distancia.

²En el caso de no considerarse los efectos cuánticos a escalas pequeñas [31].

³Las soluciones del Problema Clásico de Kepler son elipses. La distancia desde el perihelio P al afelio A es llamada $2a$, denotando el doble del semieje mayor. Si b denota la longitud del semieje menor, la excentricidad ϵ es $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ y la distancia f desde el foco M al centro geométrico es $f = a \cdot \epsilon$.

⁴El latus rectum de una sección cónica es la cuerda (segmento de línea) que pasa a través del foco, es perpendicular al eje mayor y tienen ambos puntos finales en la curva.

5.1. El vector de Runge Lenz cuántico

La simetría rotacional de H implica que la órbita se encuentra en algún plano a través del centro de gravedad M . Existe otra cantidad, además de H y \vec{L} , que es constante de movimiento. Este vector es conocido como el *Vector de Runge-Lenz*, el que tiene la forma

$$\vec{M} = \vec{p} \times \frac{\vec{L}}{\mu} - \kappa \frac{\vec{r}}{r}. \quad (5.2)$$

Con el propósito de tratar el Problema de Kepler en Mecánica Cuántica, tenemos que reemplazar las funciones clásicas por operadores considerando la cuantización canónica, lo que se puede hacer fácilmente para \vec{r} , \vec{p} y \vec{L} . Sin embargo, el producto de operadores $\hat{\vec{p}} \times \hat{\vec{L}}$ y $-\hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{p}}$ no es idéntico, debido a que las componentes de $\hat{\vec{L}}$ y $\hat{\vec{p}}$ no conmutan. Luego, la ecuación (5.2) es elegida con operadores hermíticos, quedando como:

$$\hat{\vec{M}} = \frac{1}{2\mu} \left(\hat{\vec{p}} \times \hat{\vec{L}} - \hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{p}} \right) - \kappa \frac{\vec{r}}{r} \quad (5.3)$$

Podemos mostrar tres importantes relaciones:

$$[\hat{\vec{M}}, \hat{H}] = 0 \quad (5.4)$$

$$\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{M}} = \hat{\vec{M}} \cdot \hat{\vec{L}} = 0 \quad (5.5)$$

$$\hat{\vec{M}}^2 = \frac{2\hat{H}}{\mu} \left(\hat{\vec{L}}^2 + \hbar^2 \right) + \kappa^2 \quad (5.6)$$

Las relaciones (5.3)-(5.6) fueron ocupadas por Pauli en 1926 para calcular los niveles de energía del Átomo de Hidrógeno [10, 31]. Pauli consideró las tres componentes de $\hat{\vec{M}}$ como generadores de transformaciones infinitesimales. Siguiendo este método deduciremos el álgebra generada por $\hat{\vec{L}}$ y $\hat{\vec{M}}$, que consiste de 15 relaciones de conmutación. Tres de estas son las conocidas relaciones que satisface las componentes del momento angular:

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{L}_k \quad (5.7)$$

$$[\hat{M}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{M}_k \quad (5.8)$$

$$[\hat{M}_i, \hat{M}_j] = \left(-\frac{2\hat{H}}{\mu} \right) i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{L}_k \quad (5.9)$$

Los conmutadores (5.8) producen nueve relaciones. Las componentes de $\hat{\vec{L}}$ generan un álgebra cerrada, y generan el grupo $SO(3)$. Consideraremos los estados ligados $E < 0$, y de esta manera

$\hat{\mathbf{M}}$ es reemplazada por $\hat{\mathbf{M}}' = \sqrt{-\frac{\mu}{2E}}\hat{\mathbf{M}}$, luego (5.8) y (5.9) son transformadas en

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{L}}_i, \hat{\mathbf{L}}_j] &= i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{L}}_k \\ [\hat{\mathbf{M}}'_i, \hat{\mathbf{L}}_j] &= i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{M}}'_k \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$[\hat{\mathbf{M}}'_i, \hat{\mathbf{M}}'_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{L}}_k \quad (5.11)$$

5.2. Álgebra de Lie $\mathfrak{so}(4)$

Los seis generadores de $\hat{\mathbf{L}}$ y $\hat{\mathbf{M}}'$ generan un Álgebra de Lie. Se reetiquetaran los índices de las componente de $\hat{\mathbf{L}}$. Primero se escribirá $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ y $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$, ocupamos $[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ y $\hat{L}_{ij} = r_i\hat{p}_j - r_j\hat{p}_i$, considerando las coordenadas $\hat{\mathbf{L}} = (\hat{L}_{23}, \hat{L}_{31}, \hat{L}_{12})$.

Ahora vamos a extender los índices a $i, j = 1, 2, 3, 4$ al introducir la cuarta componente r_4 y \hat{p}_4 : $\hat{M}'_x = \hat{L}_{14}$, $\hat{M}'_y = \hat{L}_{24}$ y $\hat{M}'_z = \hat{L}_{34}$. Podemos escribir todo en un único tensor de cuatro dimensiones

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}_{ij} &= \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{L}}_k \\ \hat{\mathbf{T}}_{i4} &= \hat{\mathbf{M}}'_i \end{aligned}$$

Este grupo corresponde al Grupo de Rotaciones Propias en cuatro dimensiones, es decir, $\text{SO}(4)$. Esta simetría no representa una Simetría Geométrica del Átomo de Hidrógeno, debido a que la cuarta componente r_4 y \hat{p}_4 es ficticia y no pueden ser identificados con variables geométricas. Por esta razón $\text{SO}(4)$ se dice que describe una *Simetría Dinámica del Átomo de Hidrógeno*. El grupo $\text{SO}(3)$ generado por el operador de momentum angular \hat{L}_i es un subgrupo de $\text{SO}(4)$ [31]. Los generadores de $\text{SO}(4)$ son obtenidos por la restricción a los estados ligados ($E < 0$). Para estados continuos, E es positivo y el signo dentro de la raíz cuadrada de $\hat{\mathbf{M}}'$ tiene que ser cambiado, para que $\hat{\mathbf{M}}'$ sea hermitico. Luego el signo de la derecha de (5.9) cambia y la identificación de \hat{M}'_i ya no es posibles. Resulta que el grupo de simetría dinámica en este caso es isomórfico al Grupo de Transformaciones de Lorentz $\text{SO}(3, 1)$, correspondientes a estados excitados o de scattering ($E > 0$) [5].

5.3. Espectro de Energía del Átomo de Hidrógeno

Definimos los operadores $\hat{\mathbf{I}} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{M}}')$ y $\hat{\mathbf{K}} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{L}} - \hat{\mathbf{M}}')$, los cuales satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\hat{\mathbf{I}}_i, \hat{\mathbf{I}}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{I}}_k \quad (5.12)$$

$$[\hat{\mathbf{K}}_i, \hat{\mathbf{K}}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{K}}_k \quad (5.13)$$

$$[\hat{\mathbf{I}}_i, \hat{\mathbf{K}}_j] = 0 \quad (5.14)$$

$$[\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{H}}] = [\hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{H}}] = 0 \quad (5.15)$$

Debido a (5.14), el álgebra de los $\hat{\mathbf{I}}_k$ y $\hat{\mathbf{K}}_k$ es desacoplada. El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(4)$ es la suma directa de dos álgebras de Lie tipo $\mathfrak{so}(3)$. Los siguientes eigenvalores se obtienen por los métodos conocidos [31]

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{I}}^2 \rangle &= i(i+1)\hbar^2 & i = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \\ \langle \hat{\mathbf{K}}^2 \rangle &= k(k+1)\hbar^2 & k = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \end{aligned}$$

A partir de las relaciones (5.12-5.15) podemos ver que el grupo $\text{SO}(4)$ es de rango 2, debido a que los operadores $\hat{\mathbf{I}}_i$ y los operadores $\hat{\mathbf{K}}_j$ forman un sistema maximal de generadores que conmutan[32]. Así, existen dos Operadores de Casimir que pueden ser elegidos como $\hat{\mathbf{I}}^2 = \frac{1}{4} (\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{M}}')^2$ y $\hat{\mathbf{K}}^2 = \frac{1}{4} (\hat{\mathbf{L}} - \hat{\mathbf{M}}')^2$. Alternativamente ellos pueden ser elegidos como

$$\hat{\mathbf{C}}_1 = \hat{\mathbf{I}}^2 + \hat{\mathbf{K}}^2 = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{L}}^2 + \hat{\mathbf{M}}'^2) \quad (5.16)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_2 = \hat{\mathbf{I}}^2 - \hat{\mathbf{K}}^2 = \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{M}}' \quad (5.17)$$

La ecuación (5.5) muestra que $\hat{\mathbf{C}}_2 = 0$, por lo que solo debería ocuparse aquellos donde $\hat{\mathbf{I}}^2 = \hat{\mathbf{K}}^2$. Así, si $i = k$ los posibles eigenvalores de $\hat{\mathbf{C}}_1$ son $C_1 = 2k(k+1)\hbar^2$, $k = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$. Transformando (5.16) al tomar en consideración (5.6), obtenemos

$$\hat{\mathbf{C}}_1 = \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{L}}^2 - \frac{\mu}{2E} \hat{\mathbf{M}}'^2 \right) = -\frac{\mu\kappa^2}{4E} - \frac{1}{2}\hbar^2$$

tal que, los eigenvalores de energía encontrados son

$$E = -\frac{1}{2} \frac{\mu\kappa^2}{\hbar^2} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

con $k = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$. Si consideramos $N = n + l + 1 = 2k + 1$, donde n es el número cuántico radial $n = 0, 1, 2, \dots$ y l es el número cuántico del momentum angular $l = 0, 1, 2, \dots$, μ es la masa del electrón, o mas precisamente la masa reducida del par electrón-protón, c la velocidad de la luz y $\kappa = Ze^2$, tenemos

$$E = -\frac{1}{2} \frac{\mu \kappa^2}{\hbar^2} \frac{1}{(2k+1)^2} = -\frac{1}{2} \mu c^2 (Z\alpha)^2 \cdot \frac{1}{N^2}$$

donde α es la constante de Estructura Fina [34].⁵

Las relaciones de movimiento en la presencia de un potencial gravitacional y el movimiento en cuatro dimensiones fue obtenido por Fock en el año 1935 [11].



⁵ La constante de estructura fina es $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,03599796} = 0,0072973525313$.



Capítulo 6

La Ecuación de Onda

La derivación de Schrödinger para la función de onda comenzó con la relación de dispersión relativista de la partícula libre $p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = (mc^2)^2$ [5]. En término de la energía E y los tres momentum \mathbf{p} , esto es $E^2 - (\mathbf{p}c)^2 = (mc^2)^2$. Interacciones de una partícula cargada q con el campo electromagnético es descrito por el principio de acoplamiento electromagnético minimal $p_\mu \rightarrow \pi_\mu = p_\mu - \left(\frac{q}{c}\right) A_\mu$, donde el cuadripotencial $A_\mu = \left(\frac{\Phi}{c}, \mathbf{A}\right)$ consiste de el potencial escalar Φ y el vector potencial \mathbf{A} .¹ Para un electrón $q = -e$, donde e es la carga del protón, positiva por convención. El campo de Coulomb establecido por un protón $\Phi = \frac{e}{r}$ y $\mathbf{A} = 0$, de modo que $E \rightarrow E + \frac{e^2}{r}$. Aquí r es la distancia entre el protón y electrón. La prescripción de Schrödinger para convertir una relación de dispersión en la ecuación de onda es reemplazado por $\mathbf{p} \rightarrow \left(\frac{\hbar}{i}\right) \nabla = -i\hbar\nabla$ y permitir que la ecuación resultante actúe en una función espacial $\psi(\mathbf{x})$. Esta prescripción resulta en la siguiente ecuación de onda, *La ecuación de Klein-Gordon* $\{E^2 - (c\mathbf{p})^2\} \psi(x) = (mc^2)^2 \psi(x)$, reemplazando encontramos

$$\left\{ E^2 - (mc^2)^2 + 2E \left(\frac{e^2}{r} \right) + \left(\frac{e^2}{r} \right)^2 - (-i\hbar c \nabla)^2 \right\} \psi(x) = 0 \quad (6.1)$$

Puesto que la energía de enlace es aproximadamente $13,6[eV]$ y la energía en reposo del electrón mc^2 esta cerca de $510,000[eV]$, esto toma sentido al escribir $E = mc^2 + W$, donde la parte principal de la energía relativista E es la energía en reposo del electrón y la energía no relativista W es una pequeña perturbación de ambos ($\simeq 0,0025\%$). Bajo esta sustitución, y descartando los términos de orden $(W + e^2/r)^2/mc^2$, obtenemos la forma no relativista de la ecuación (6.1), *La ecuación de Schrödinger*:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{r} - W \right\} \psi(\mathbf{x}) = 0. \quad (6.2)$$

¹Estos obedecen $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ y $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \left(\frac{1}{c}\right) \left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)$.

Consideremos la separación de variables. Ya que las dos ecuaciones obtenidas previamente tienen simetría esférica, es útil introducir coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) . Las eigenfunciones son los armónicos esféricos $Y_m^l(\theta, \phi)$ y su espectro de eigenvalores es $Y_m^l(\theta, \phi) = -l(l+1)Y_m^l(\theta, \phi)$. Los enteros (l, m) satisfacen $l = 0, 1, 2, \dots$ y $-l \leq m \leq +l$. La ecuación diferencial parcial (6.1) y (6.2) son reducidas a una ecuación diferencial ordinaria estándar, al sustituir el ansatz $\psi(r, \theta, \phi) \rightarrow \frac{1}{r}R(r)Y_m^l(\theta, \phi)$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{A}{r^2} + \frac{B}{r} + C \right] R(r) = 0$$

Los coeficientes son obtenidos de las ecuaciones (6.1-6.2)

Ecuación	A	B	C
Klein-Gordon	$-l(l+1) + \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2$	$\frac{2Ee^2}{(\hbar c)^2}$	$\frac{E^2 - (mc^2)^2}{(\hbar c)^2}$
Schrödinger	$-l(l+1)$	$\frac{2me^2}{\hbar^2}$	$\frac{2mW}{\hbar^2}$

Utilizaremos el método de Frobenius para solucionar la ecuación diferencial ordinaria, donde consideramos

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{A}{r^2} R(r) + \frac{B}{r} R(r) + CR(r) = 0 \quad (6.3)$$

Tenemos dos tipos de singularidades en r , cuando $r \rightarrow 0$ y $r \rightarrow \infty$. El comportamiento analítico en el punto singular $r \rightarrow 0$, $R \simeq r^\lambda$ es $\lambda(\lambda-1) + Cr^2 + rB + A = 0$, igualando términos similares, tenemos $\lambda^2 - \lambda + A = 0$ con $\lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - A}$. En el segundo punto singular $r \rightarrow \infty$, $R \simeq e^{fr}$ es $f^2 + C + \frac{1}{r}B + \frac{A}{r^2} = 0$, igualando término similares, tenemos $f = -\sqrt{-C}$. Ocupemos la solución en serie de potencias de la forma

$$R = \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^{k+\lambda},$$

de donde obtenemos

$$0 = A_0 r^{\lambda-2} [\lambda(\lambda-1) + A] + BA_0 r^{\lambda-1} + A_1 r^{\lambda-1} [\lambda(\lambda+1) + A] + \sum_{k=2}^{\infty} [(k+\lambda)(k+\lambda-1)A_k + AA_k + BA_{k-1} + CA_{k-2}] r^{k+\lambda-2}$$

Para el coeficiente A_0 recuperamos la solución de una de las raíces, ya obtenidas previamente $A = -\lambda(\lambda-1)$. Con los coeficientes de la sumatoria obtenemos una relación de recursión

$$0 = (k+\lambda)(k+\lambda-1)A_{k+1} - \lambda(\lambda-1)A_{k+1} + BA_k + CA_{k-1}$$

de donde obtenemos $A_{k+1} = -[CA_{k-1} + BA_k]/[k(k+1) + 2\lambda(k+1)]$. El coeficiente en C lo obtenemos de la solución de una de las raíces ya calculadas $CA_{k-1} = 2f(k+\lambda)A_k$, luego

$$A_{k+1} = -\frac{[2f(k+\lambda) + B]}{[k(k+1) + 2\lambda(k+1)]}A_k$$

Finalmente, la condición para la cuantización la obtenemos de los coeficientes que no se anulan, con $n = k$, $n + \lambda = -\frac{B}{2f}$. De las raíces, tenemos $\lambda = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - A}$ y $f = -\sqrt{-C}$ al reemplazar obtenemos

$$n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - A} = \frac{B}{2\sqrt{-C}}$$

Ahora solo debemos reemplazar los valores de A , B y C para cada una de las ecuaciones. Los niveles de energía del Átomo de Hidrógeno ² son

Ecuación de Klein-Gordon

Ecuación de Schrödinger

$$E(n, l) = \frac{\mu c^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{N'}\right)^2}}$$

$$E(n, l) = -\frac{1}{2}\mu c^2 \alpha^2 \frac{1}{N^2}$$

$$N' = n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}$$

$$N = n + l + 1$$

² Muchas partículas cargadas pueden formar Átomos Hidrogenoides a través de su interacción electrostática (e^\pm , μ^\pm , τ^\pm , p^\pm , etc) [5].

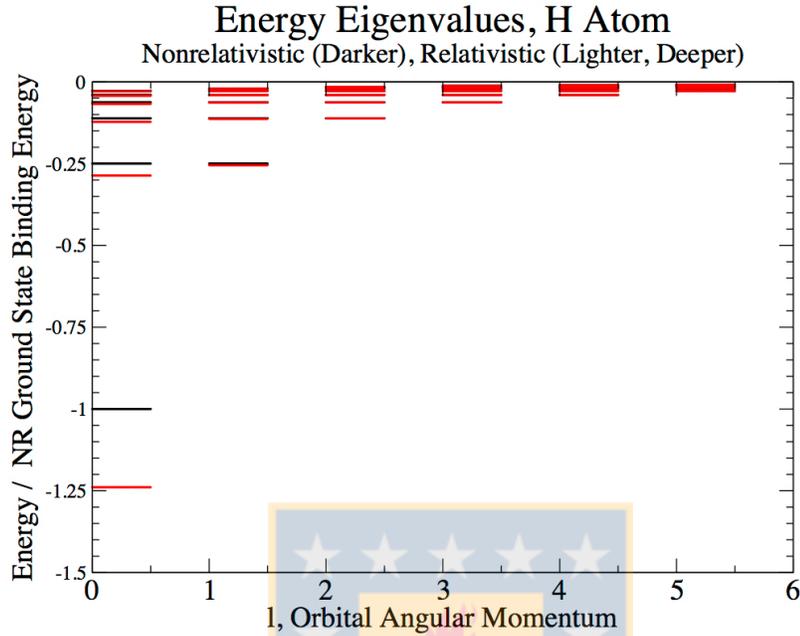


Figura 6.1: Espectro del Átomo de Hidrógeno, normalizado por la energía del estado fundamental. El espectro no relativista es oscuro. El espectro relativista ha sido simulado para $Z = 50$. Estas energías han sido calculadas al reemplazar $\alpha \rightarrow Z\alpha$ [5].

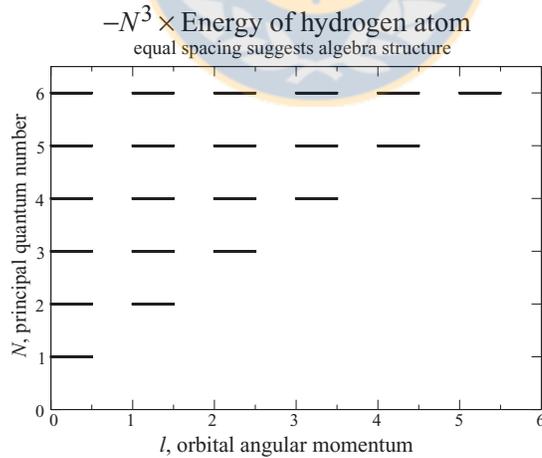


Figura 6.2: Espectro no relativista de el Átomo de Hidrógeno. Se ha multiplicado cada nivel de energía por $-N^3$ [5].

Capítulo 7

Álgebras Generadoras de Espectro

7.1. Álgebras Generadoras de Espectro (AGE)

Una aplicación de las álgebras de Lie ha sido el estudio de sistemas físicos en los que los operadores de un sistemas físicos \mathbf{T} junto con su Hamiltoniano H pueden ser escritos en término de los elementos G_α de un álgebra de Lie \mathcal{G}

$$\begin{aligned} H &= f(G_\alpha) & G_\alpha \in \mathcal{G} \\ T &= t(G_\alpha) & G_\alpha \in \mathcal{G} \end{aligned} \tag{7.1}$$

Las álgebras de Lie de este tipo de problemas se denominan *Álgebras Generadoras de Espectro* (AGE) [3]. Los funcionales f y t son usualmente polinomios en los elementos de G_α , aunque se ha estudiado casos del tipo $1/H$, como ocurre en el Problema de Kepler.

La mayoría de las soluciones analíticas para las ecuaciones diferenciales ordinarias que involucran una única variable pueden ser transformadas a la forma estándar (6.3). Es posible determinar soluciones de estas ecuaciones ocupando operadores que son cerrados bajo conmutación. Estos son los generadores de un álgebra de Lie. El grupo correspondiente es llamado *Grupo Generador de Espectro*[5]. Luego podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y}{dy^2} + f(y) Y &= 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + \left[\frac{P}{y^2} + Qy^2 + R \right] Y &= 0 \end{aligned} \tag{7.2}$$

donde $Y = Y(y)$. P , Q y R son contantes, pero Q y R dependen del parámetro de la energía E ¹. El álgebra de Lie compleja $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ tiene dos formas reales no isomorfas. Una corresponde al

¹En este capítulo conservaremos la notación histórica ocupada en la referencia [2], pero la ecuación (7.2) es igual a la ecuación (6.3).

álgebra $\mathfrak{so}(3)$, isomorfa a $\mathfrak{su}(2)$, conocida como forma real compacta. La otra, es la forma real no compacta, que corresponde a 3 álgebras de Lie isomorfas $\mathfrak{su}(1, 1)$, $\mathfrak{so}(2, 1)$ y $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Estas álgebras son conocidas por ser AGE.

La Complejización² de $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ es $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Conociendo la complejización podemos considerar una combinación lineal de ρ_k como una nueva base, considerando un mapeo ϕ por $\phi(X) = i\rho_1 - \rho_2$, $\phi(Y) = i\rho_1 + \rho_2$ y $\phi(H) = i\rho_3$. Tal como en el caso de $\mathfrak{so}(3)$, para determinar la complejización de una AGE, como por ejemplo $\mathfrak{su}(1, 1)$, debemos seleccionar una base $X = -A_1 - iA_2$, $Y = -A_1 + iA_2$ y $H = iA_3$, donde estos X , Y y H obedecen las mismas relaciones de conmutación que la base estándar de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ³. Así tenemos $\mathfrak{su}(1, 1)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

AGE- $\mathfrak{su}(1, 1)$ [35]

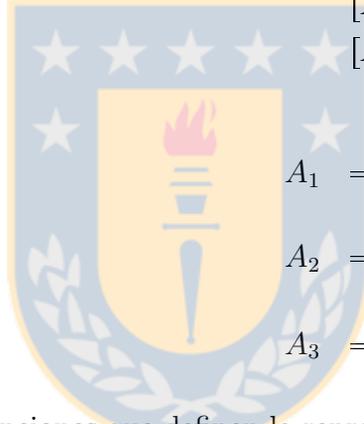
$$\begin{aligned} [A_1, A_2] &= -A_3 \\ [A_2, A_3] &= A_1 \\ [A_3, A_1] &= A_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= i \left[\frac{d^2}{dy^2} + a_1(y) \right] \\ A_2 &= k(y) \frac{d}{dy} + a_2(y) \\ A_3 &= i \left[\frac{d^2}{dy^2} + a_3(y) \right] \end{aligned}$$

AGE- $\mathfrak{so}(2, 1)$ [9, 41]

$$\begin{aligned} [A_1, A_2] &= -iA_3 \\ [A_2, A_3] &= iA_1 \\ [A_3, A_1] &= iA_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{d^2}{dy^2} + a_1(y) \\ A_2 &= i \left[k(y) \frac{d}{dy} + a_2(y) \right] \\ A_3 &= \frac{d^2}{dy^2} + a_3(y) \end{aligned}$$



donde $a_1(y)$, $a_2(y)$ y $a_3(y)$ son funciones que definen la representación de los operadores [9]. Considerando las constantes de integración nulas, a excepción de α , obtenemos una forma estándar para los generadores de AGE- $\mathfrak{su}(1, 1)$.

$$A_1 = i \left[\frac{d^2}{dy^2} + \frac{\alpha}{y^2} + \frac{y^2}{16} \right] \quad A_2 = -\frac{y}{2} \frac{d}{dy} - \frac{1}{4} \quad A_3 = i \left[\frac{d^2}{dy^2} + \frac{\alpha}{y^2} - \frac{y^2}{16} \right] \quad (7.3)$$

Podemos escribir el operador diferencial de segundo orden, en término de los generadores de $\mathfrak{su}(1, 1)$. Así tenemos que la ecuación (7.2) queda como

$$\left[\left(\frac{1}{2} + 8Q \right) A_1 + \left(\frac{1}{2} - 8Q \right) A_3 + iR \right] Y = 0 \quad (7.4)$$

²La Complejización $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ de un Álgebra de Lie \mathfrak{g} , es obtenida del reemplazo del campo base \mathbb{R} con \mathbb{C} . La complejización de un álgebra de Lie real es única, pero un álgebra de Lie compleja \mathfrak{h} puede tener variadas formas reales no isomorfas, todas tienen a \mathfrak{h} como su complejización [35].

³ La base de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ obedece $[H, X] = X$, $[H, Y] = -Y$ y $[X, Y] = 2H$

La ecuación (7.4) puede ser simplificada al efectuar una rotación a través de un ángulo arbitrario θ [35], $\tilde{Y} = e^{-\theta A_2} Y$ y $\tilde{Y} = e^{-\theta A_3} Y$. De la diagonalización y reducción de los operadores podemos escribir la solución de los eigenvalores como

$$A_3 \tilde{Y} = \frac{-R}{4\sqrt{-Q}} \tilde{Y} \quad A^2 \tilde{Y} = -\left(\frac{P}{4} + \frac{3}{16}\right) \tilde{Y}$$

Para cualquier representación irreducible acotada inferiormente del operador A^2 los eigenvalores son de la forma $\lambda(\lambda - 1)$ y los eigenvalores de $A_3(H)$ son de la forma $\lambda, \lambda + 1, \lambda + 2, \dots$

$$\lambda + k = \frac{-R}{4\sqrt{-Q}} \quad \lambda(\lambda - 1) = -\frac{P}{4} - \frac{3}{16}$$

y por lo tanto $\lambda = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{4} - P}\right)$. Ocupando estos resultados obtenemos la relación

$$4k + 2 + \sqrt{1 - 4P} = \frac{-R}{\sqrt{-Q}} \quad (7.5)$$

7.1.1. Átomo de Hidrógeno No Relativista

Para el Átomo de Hidrógeno no relativista con el Potencial $V = -Ze^2/r$. Con separación de variables encontramos que la función radial obedece [35]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R &= 0 \\ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[\frac{t}{r} + \frac{u}{r^2} + v \right] R &= 0 \end{aligned} \quad (7.6)$$

donde

$$t = \frac{2Ze^2\mu}{\hbar^2} \quad u = -l(l+1) \quad v = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$$

Para convertir esta ecuación a la forma (7.2), consideramos $r = y^2$ y $R(y) = y^a Y(y)$, al expandir y considerar $a = -\frac{3}{2}$ para eliminar los términos Y' . Obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \left(\frac{4u - \frac{3}{4}}{y^2} + 4vy^2 + 4t \right) Y &= 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + \left[\frac{P}{y^2} + Qy^2 + R \right] Y &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$P = 4u - \frac{3}{4} \quad Q = 4v \quad R = 4t$$

(7.5) se transforma en

$$2n + 1 \pm \sqrt{1 - 4u} = \frac{-t}{\sqrt{-v}} \quad (7.7)$$

Reemplazando y descartando la raíz negativa, obtenemos

$$\begin{aligned} 2(n + l + 1) &= \frac{-2Ze^2\mu}{\hbar^2\sqrt{-2\mu E}} \\ E &= -\frac{1}{2}\mu c^2 (Z\alpha)^2 \cdot \frac{1}{N^2} \end{aligned}$$

(donde $N = n + l + 1$) reproduce los Niveles de Energía.

7.1.2. Átomo de Hidrógeno Relativista

La energía E de la partícula clásica no relativista en un potencial V es $E = \frac{1}{2\mu}p^2 + V$, y la Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi + V\psi$, obtenida de la cuantización de la ecuación clásica. Con el propósito de encontrar los eigenestados de energía asumiremos que la función de onda depende armónicamente de t , de donde obtenemos la Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo $E\psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi + V\psi$. Ahora, la correspondiente relación de energía relativista es $[E - V]^2 = p^2c^2 + \mu^2c^4$, donde cuantizada obtenemos $[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - V]^2\psi = -\hbar^2c^2\nabla^2\psi + \mu^2c^4\psi$ esta ecuación es conocida como la *Ecuación de Klein-Gordon* [36]. En el caso independiente del tiempo, esta se transforma en ⁴

$$[E - V]^2\psi = -\hbar^2c^2\nabla^2\psi + \mu^2c^4\psi.$$

Separando variables obtenemos la Ecuación Radial de Schrödinger

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[\frac{E^2}{c^2\hbar^2} - \frac{\mu^2c^2}{\hbar^2} + \frac{2Ze^2E}{c^2\hbar^2}\frac{1}{r} + \frac{Z^2e^4}{c^2\hbar^2}\frac{1}{r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0$$

con

$$t = \frac{2Ze^2E}{c^2\hbar^2} \quad u = \frac{Z^2e^4}{c^2\hbar^2} - l(l+1) \quad v = \frac{E^2}{c^2\hbar^2} - \frac{\mu^2c^2}{\hbar^2}$$

Sustituyendo en (7.5) y ocupando $\alpha = e^2/\hbar c$, obtenemos

$$-\frac{2Z\alpha E}{\sqrt{\mu^2c^4 - E^2}} = 2n + 1 + \sqrt{(2l + 1)^2 - 4(Z\alpha)^2}$$

⁴La Ecuación de Klein-Gordon resulta ser inadecuada para la descripción detallada de una sola partícula cuántica relativista. Sin embargo, estamos interesados sólo en los niveles de energía y la ecuación de Klein-Gordon es suficiente para la determinación de estos niveles [35].

la que nos permite obtener la formula de la energía relativista

$$E = \mu c^2 \left[1 + \left(\frac{Z\alpha}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{(l + \frac{1}{2})^2 - (Z\alpha)^2}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (7.8)$$

En (7.8), n es un entero positivo, pero no sabemos cuáles son los valores j , el momento angular total. Donde j es un número entero positivo semientero.





Parte III

Espectros de Energía obtenidos por S-Expansión





Capítulo 8

S-Expansión de $\mathbf{SO}(\kappa)$, $\kappa = 3, 6, n$.

En este capítulo consideraremos la S-Expansión [22] de las álgebras de Lie $\mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{so}(6)$ y $\mathfrak{so}(n)$, para obtener $\mathfrak{so}(4)$, $\mathfrak{so}(7)$ y $\mathfrak{so}(n+1)$. El álgebra $\mathfrak{so}(4)$ esta asociada al Problema de Kepler en 3 dimensiones y el álgebra $\mathfrak{so}(7)$ esta asociada al Problema de Kepler en 6 dimensiones [3].

8.1. Álgebra $\mathfrak{so}(4)$ como S-Expansión del álgebra $\mathfrak{so}(3)$

En el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$, con 3 generadores y dimensión $N = 3$, es conveniente considerar la descomposición $\mathbf{L}_1 = \hbar\mathbf{T}_{23}$, $\mathbf{L}_2 = \hbar\mathbf{T}_{31}$, $\mathbf{L}_3 = \hbar\mathbf{T}_{12}$. Con estas definiciones la relación de conmutación de el álgebra $\mathfrak{so}(n)$ (A.3), toma la forma ¹

$$[\mathbf{L}_a, \mathbf{L}_b] = i\hbar \epsilon_{abc} \mathbf{L}_c \quad a, b, c = 1, 2, 3 \quad (8.1)$$

Consideremos la descomposición de $\mathcal{G} = \mathfrak{so}(3) = V_0 \oplus V_1$. Vamos a suponer que no necesitamos conocer la descomposición de $\mathfrak{so}(3)$ en una subálgebra V_0 y un subespacio $\mathcal{G}/V_0 \sim V_1$ (coseto simétrico). ²

- *Expansión de $\mathcal{G} = \mathfrak{so}(3)$* : Sea $S = S_E^{(1)} = \{\lambda_0, \lambda_1\}$ y $\mathcal{G} = \mathfrak{so}(3)$. El semigrupo se ha escogido de manera que coincida con el semigrupo cíclico \mathbb{Z}_2 , el cual es definido por la siguiente tabla de multiplicación

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \begin{cases} \lambda_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha + \beta \leq 1 \\ \lambda_{\alpha+\beta-2} & \text{si } \alpha + \beta > 1 \end{cases} \quad (8.2)$$

Este semigrupo genera la siguiente tabla de multiplicación

¹ Se agrego la Constante de Planck \hbar a los generadores, para que coincidan con las unidades del Momentum Angular.

²El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ es semisimple, por lo cual, sí existe una descomposición de esta álgebra.

$$\begin{array}{c|cc} & \lambda_0 & \lambda_1 \\ \hline \lambda_0 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{array}$$

El álgebra expandida es

$$\mathfrak{g} = S_E^{(1)} \otimes \mathcal{G} = \{\lambda_0, \lambda_1\} \otimes \{V_0, V_1\} = \lambda_0 \otimes V_0 \oplus \lambda_0 \otimes V_1 \oplus \lambda_1 \otimes V_0 \oplus \lambda_1 \otimes V_1$$

Dado que podemos asociar $V_0 \leftrightarrow \{\mathbf{L}_a\}$ y $V_1 \leftrightarrow \{\mathbf{M}_a\}$. Tenemos que el álgebra S-Expandida es generada por $\{\lambda_0 \mathbf{L}_a; \lambda_1 \mathbf{L}_a; \lambda_0 \mathbf{M}_a; \lambda_1 \mathbf{M}_a\}$. Definiendo los generadores del álgebra expandida como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}_{a,\alpha} &= \lambda_\alpha \mathbf{L}_a \\ \tilde{\mathbf{M}}_{a,\alpha} &= \lambda_\alpha \mathbf{M}_a \quad \alpha = 0, 1 \end{aligned}$$

tenemos que la base para el álgebra $S_E^{(1)} \otimes \mathfrak{so}(3)$ expandida es dada por $\{\tilde{\mathbf{L}}_{a,0}; \tilde{\mathbf{L}}_{a,1}; \tilde{\mathbf{M}}_{a,0}; \tilde{\mathbf{M}}_{a,1}\}$. Gráficamente lo podemos ver en la Figura (8.1).

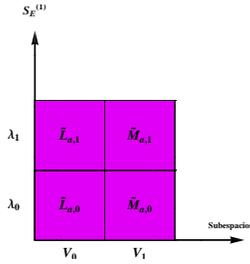


Figura 8.1: Álgebra de $S_E^{(1)} \otimes \mathfrak{so}(3)$ expandida

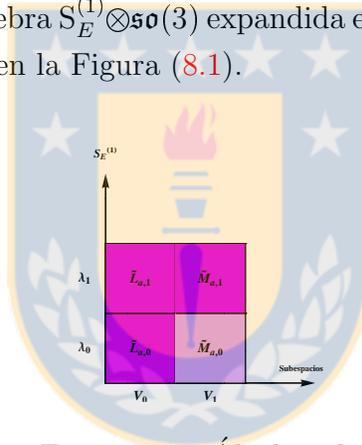


Figura 8.2: Álgebra de $S_E^{(1)} \otimes \mathfrak{so}(3)$ resonante

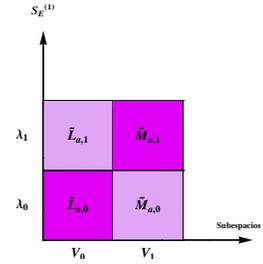


Figura 8.3: Álgebra de $S_E^{(1)} \otimes \mathfrak{so}(3)$ reducida

- *Subálgebra Resonante* \mathfrak{g}_R : donde $\mathfrak{g}_R = W_0 \oplus W_1$ con $W_0 = S_0 \otimes V_0$ y $W_1 = S_1 \otimes V_1$ obtenida de la partición $S_E^{(1)} = S_0 \cup S_1$, resonante con $\mathcal{G} = V_0 \oplus V_1$, donde la partición escogida es

$$\begin{aligned} S_0 &= \{\lambda_0, \lambda_1\} \\ S_1 &= \{\lambda_1\} \end{aligned}$$

Esta partición se dice resonante, mientras satisfaga el Teorema 1. Del Teorema 2, podemos asumir que \mathfrak{g}_R es una subálgebra resonante de $S_E^{(1)} \otimes \mathcal{G}$, donde

$$\begin{aligned} W_0 &= (S_0 \times V_0) = \{\lambda_0, \lambda_1\} \otimes \{\mathbf{L}_a\} = \{\lambda_0 \mathbf{L}_a, \lambda_1 \mathbf{L}_a\} \\ W_1 &= (S_1 \times V_1) = \{\lambda_1\} \otimes \{\mathbf{M}_a\} = \{\lambda_1 \mathbf{M}_a\} \end{aligned}$$

De modo que el álgebra resonante es generada por $\{\tilde{\mathbf{L}}_{a,0}; \tilde{\mathbf{L}}_{a,1}; \tilde{\mathbf{M}}_{a,1}\}$. Gráficamente los podemos ver en la Figura (8.2).

- *Álgebra Resonante Reducida:* Se obtiene particionando el semigrupo en la forma $S_p = \hat{S}_p \cup \check{S}_p$. Si consideramos la partición $\hat{S}_p = \{0_S\}$ y $\check{S}_p = S_p - \{0_S\}$ y dado que $\mathfrak{g}_R = \bigoplus \left(\hat{S}_p \otimes V_p \right) \cup \left(\check{S}_p \otimes V_p \right)$ con $\mathfrak{g}_R = \check{\mathfrak{g}}_R \oplus \hat{\mathfrak{g}}_R$, donde $\hat{\mathfrak{g}}_R = \bigoplus \hat{S}_p \otimes V_p$ y $\check{\mathfrak{g}}_R = \bigoplus \check{S}_p \otimes V_p$. Así tenemos $\hat{\mathfrak{g}}_R = \{0_S\} \otimes V_p = 0$ y $\check{\mathfrak{g}}_R = \bigoplus (S_p - \{0_S\})$. En este caso particular, $\lambda_1 = 0_S$ es el elemento cero del semigrupo. Vamos a considerar $S_1 - \{0_S\} = \{\lambda_1\}$ y solo extraeremos el elemento cero del semigrupo de $S_0 - \{0_S\} = \{\lambda_0\}$

$$\check{\mathfrak{g}}_R = (S_0 - \{0_S\}) \otimes V_0 \oplus (S_1 - \{0_S\}) \otimes V_1 = (\lambda_0 \otimes V_0) \oplus (\lambda_1 \otimes V_1)$$

Así, tenemos que una base para el álgebra $S_E^{(1)} \otimes \mathfrak{so}(3)$ expandida, resonante y reducida es dada por $\{\tilde{\mathbf{L}}_{a,0}; \tilde{\mathbf{M}}_{a,1}\}$ Gráficamente lo podemos ver en la Figura (8.3), donde $\tilde{\mathbf{L}}_{a,0}$ y $\tilde{\mathbf{M}}_{a,1}$ son los nuevos generadores del álgebra $\mathfrak{so}(3)$ forzada y reducida.

Podemos definir estos nuevos generadores como:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_a &= \tilde{\mathbf{L}}_{a,0} = \lambda_0 \tilde{\mathbf{L}}_a \\ \mathbf{M}_a &= \tilde{\mathbf{M}}_{a,1} = \lambda_1 \tilde{\mathbf{M}}_a \end{aligned}$$

\mathbf{L}_a y \mathbf{M}_a satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}_a, \mathbf{L}_b] &= i\hbar \epsilon_{abc} \mathbf{L}_c \\ [\mathbf{M}_a, \mathbf{L}_b] &= i\hbar \epsilon_{abc} \mathbf{M}_c \\ [\mathbf{M}_a, \mathbf{M}_b] &= i\hbar \epsilon_{abc} \mathbf{L}_c \end{aligned} \tag{8.3}$$

Identificando $\mathbf{M}_a = \mathbf{M}'_a$, obtenemos el álgebra del vector de Runge-Lenz $\hat{\mathbf{M}}'$ y el Momentum Angular $\hat{\mathbf{L}}$ que encontramos para $\mathfrak{so}(4)$ en el capítulo 5. Redefiniendo \mathbf{L}_a y \mathbf{M}_a en función de los generadores \mathbf{T}_{ab} con $a, b = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}}_{ij} &= \epsilon_{ijk} \mathbf{L}_k \quad i, j, k = 1, 2, 3 \\ \tilde{\mathbf{T}}_{i4} &= \mathbf{M}'_i \end{aligned}$$

es posible reescribir las relaciones de conmutación para \mathbf{L}_i y \mathbf{M}_i como en la relación (A.3) en cuatro dimensiones.

8.2. Álgebra $\mathfrak{so}(7)$ como S-Expansión del álgebra $\mathfrak{so}(6)$

El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(6)$, con 15 elementos de dimensión $n = 6$, puede ser encontrada de la ecuación (A.3)

$$[\mathbf{T}_{ab}, \mathbf{T}_{cd}] = -i(\delta_{bc}\mathbf{T}_{ad} - \delta_{ad}\mathbf{T}_{bc} - \delta_{bd}\mathbf{T}_{ac} + \delta_{ac}\mathbf{T}_{bd}) \quad a, b, c, d = 1, \dots, 6$$

Consideremos la descomposición $\mathcal{G} = \mathfrak{so}(6) = V_0 \oplus V_1$. Vamos a suponer que no conocemos la descomposición de $\mathfrak{so}(6)$ en una subálgebra V_0 y un subespacio V_1 ³. El álgebra $\mathfrak{so}(7)$ tiene 21 elementos de dimensión 7. Vamos a definir⁴

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{ij} &\simeq \mathbf{L}_{ij} & i, j = 1, \dots, 6 \\ \mathbf{T}_{i7} &\simeq \mathbf{M}_i \end{aligned}$$

- *Expansión del álgebra $\mathcal{G} = \mathfrak{so}(6)$* : Sea $S = S_E^{(1)} = \{\lambda_0, \lambda_1\}$ y $\mathcal{G} = \mathfrak{so}(6)$. Consideramos el semigrupo \mathbb{Z}_2 definido por la tabla de multiplicación (8.2).

El álgebra expandida es

$$\mathfrak{g} = S_E^{(1)} \otimes \mathcal{G} = \{\lambda_0, \lambda_1\} \otimes \{V_0, V_1\} = \lambda_0 \otimes V_0 \oplus \lambda_0 \otimes V_1 \oplus \lambda_1 \otimes V_0 \oplus \lambda_1 \otimes V_1$$

Dado que podemos asociar $V_0 \leftrightarrow \{\mathbf{L}_{ab}\}$ y $V_1 \leftrightarrow \{\mathbf{M}_a\}$. Tenemos que el álgebra S-Expandida es generada por $\{\lambda_0\mathbf{L}_{ab}; \lambda_1\mathbf{L}_{ab}; \lambda_0\mathbf{M}_a; \lambda_1\mathbf{M}_a\}$. Definiendo los generadores del álgebra expandida como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}_{ab,\alpha} &= \lambda_\alpha \mathbf{L}_{ab} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{a,\alpha} &= \lambda_\alpha \mathbf{M}_a \quad \alpha = 0, 1 \end{aligned}$$

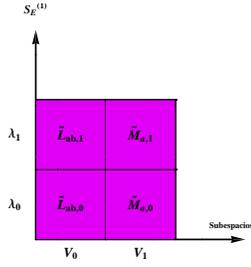
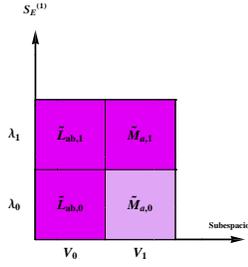
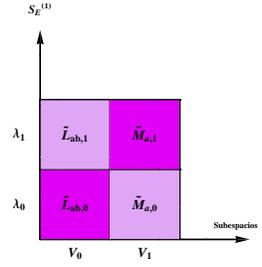
tenemos que la base para el álgebra $S_E^{(1)} \otimes \mathfrak{so}(6)$ expandida es dada por $\{\tilde{\mathbf{L}}_{a,0}; \tilde{\mathbf{L}}_{a,1}; \tilde{\mathbf{M}}_{a,0}; \tilde{\mathbf{M}}_{a,1}\}$. Gráficamente lo podemos ver en la Figura (8.4).

- *Subálgebra Resonante \mathfrak{g}_R* : donde $\mathfrak{g}_R = W_0 \oplus W_1$ con $W_0 = S_0 \otimes V_0$ y $W_1 = S_1 \otimes V_1$ obtenida de la partición $S_E^{(1)} = S_0 \cup S_1$, resonante con $\mathcal{G} = V_0 \oplus V_1$, donde la partición escogida es

$$\begin{aligned} S_0 &= \{\lambda_0, \lambda_1\} \\ S_1 &= \{\lambda_1\} \end{aligned}$$

³ El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(6)$ es semisimple.

⁴ De manera similar a como se estructuran los generadores en $\mathfrak{so}(4)$.

Figura 8.4: Álgebra de $S_E^{(1)} \otimes \mathfrak{so}(6)$ expandidaFigura 8.5: Álgebra de $S_E^{(1)} \otimes \mathfrak{so}(6)$ resonanteFigura 8.6: Álgebra de $S_E^{(1)} \otimes \mathfrak{so}(6)$ expandida, resonante y reducida

Del Teorema 2 podemos ver que \mathfrak{g}_R es una subálgebra resonante de $S_E^{(1)} \otimes \mathcal{G}$, donde

$$\begin{aligned} W_0 &= (S_0 \times V_0) = \{\lambda_0, \lambda_1\} \otimes \{\mathbf{L}_{ab}\} = \{\lambda_0 \mathbf{L}_{ab}, \lambda_1 \mathbf{L}_{ab}\} \\ W_1 &= (S_1 \times V_1) = \{\lambda_1\} \otimes \{\mathbf{M}_a\} = \{\lambda_1 \mathbf{M}_a\} \end{aligned}$$

De modo que el álgebra resonante es generada por $\{\tilde{\mathbf{L}}_{ab,0}, \tilde{\mathbf{L}}_{ab,1}, \tilde{\mathbf{M}}_{a,1}\}$. Gráficamente lo podemos ver en la Figura (8.5).

- *Álgebra Resonante Reducida:* Se obtiene particionando el semigrupo en la forma $S_p = \hat{S}_p \cup \check{S}_p$ si consideramos la partición $\hat{S}_p = \{0_S\}$ y $\check{S}_p = S_p - \{0_S\}$ y dado que $\mathfrak{g}_R = \bigoplus S_p \otimes V_p$ con $\mathfrak{g}_R = \check{\mathfrak{g}}_R \oplus \hat{\mathfrak{g}}_R$, donde $\hat{\mathfrak{g}}_R = \{0_S\} \otimes V_p = 0$ y $\check{\mathfrak{g}}_R = \bigoplus (S_p - \{0_S\}) \otimes V_p$. En este caso particular, $\lambda_1 = 0_S$ es el elemento cero del semigrupo. Vamos a considerar $S_1 - \{0_S\} = \{\lambda_1\}$ y solo extraeremos el elemento cero del semigrupo de $S_0 - \{0_S\} = \{\lambda_0\}$

$$\check{\mathfrak{g}}_R = (S_0 - \{0_S\}) \otimes V_0 \oplus (S_1 - \{0_S\}) \otimes V_1 = (\lambda_0 \otimes V_0) \oplus (\lambda_1 \otimes V_1)$$

Así, tenemos que una base para el álgebra $S_E^{(1)} \otimes \mathfrak{so}(6)$ expandida, resonante y reducida es dada por $\{\tilde{\mathbf{L}}_{ab,0}, \tilde{\mathbf{M}}_{a,1}\}$. Gráficamente lo podemos ver en la Figura (8.6), donde $\tilde{\mathbf{L}}_{ab,0}$ y $\tilde{\mathbf{M}}_{a,1}$ son los generadores del álgebra $\mathfrak{so}(6)$ forzada y reducida. Redefiniendo estos generadores como:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}}_{ab} = \mathbf{L}_{ab} &= \tilde{\mathbf{L}}_{ab,0} = \lambda_0 \tilde{\mathbf{L}}_a \\ \tilde{\mathbf{T}}_{a7} = \mathbf{M}_a &= \tilde{\mathbf{M}}_{a,1} = \lambda_1 \tilde{\mathbf{M}}_a \end{aligned}$$

\mathbf{L}_{ab} y \mathbf{M}_a satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}_{ab}, \mathbf{L}_{cd}] &= -i(\delta_{bc} \mathbf{L}_{ad} - \delta_{ad} \mathbf{L}_{bc} - \delta_{bd} \mathbf{L}_{ac} + \delta_{ac} \mathbf{L}_{bd}) \\ [\mathbf{M}_a, \mathbf{L}_{cd}] &= -i(\delta_{ac} \mathbf{M}_d - \delta_{ad} \mathbf{M}_c) \\ [\mathbf{M}_a, \mathbf{M}_c] &= i \mathbf{L}_{ac} \end{aligned} \tag{8.4}$$

Estas relaciones de conmutación son isomorfas al álgebra $\mathfrak{so}(7)$. Esta compuesta de 21 elementos, donde 15 elementos son \mathbf{L}_{ab} y 6 elementos corresponden a \mathbf{M}_a . Este problema coincide con el Problema de Kepler en 6 dimensiones [3], donde los elementos \mathbf{L}_{ab} corresponden al Tensor de Momentum Angular $\mathbf{L}_{ab} = \mathbf{x}_a \mathbf{p}_b - \mathbf{x}_b \mathbf{p}_a$ $a, b = 1, \dots, 6$, donde consideramos $\mathbf{x}_a = (\mathbf{r}, \lambda)$ y $\mathbf{p}_a = (\mathbf{p}_r, \mathbf{p}_\lambda)$, $a = 1, \dots, 6$. Las 6 componentes restantes corresponden al vector de Runge-Lenz normalizado ($m = \hbar = 1$) son

$$\mathbf{M}_a = \frac{1}{\sqrt{-2H}} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{L}_{ab} \mathbf{p}_b - \mathbf{p}_b \mathbf{L}_{ba}) - \frac{\mathbf{x}_a}{r} \right] \quad a = 1, \dots, 6$$

Los 21 elementos conmutan con el Hamiltoniano H , con $[\mathbf{L}_{ab}, H] = [\mathbf{M}_a, H] = 0$, donde $H = \frac{1}{2} (\mathbf{p}_r^2 + \mathbf{p}_\lambda^2) - \frac{1}{r}$. Ocupando las relaciones de conmutación para \mathbf{x} y \mathbf{p} , podemos mostrar que cuando $E < 0$, las 6 componentes, del momentum angular \mathbf{L}_i ($i = 1, 2, 3$) y del vector de Runge-Lenz normalizado \mathbf{M}_i ($i = 1, 2, 3$) satisfacen las relaciones de conmutación del álgebra $\mathfrak{so}(4)$ ($\hbar = 1$) (8.3). Mientras que cuando $E > 0$, ellas satisfacen las relaciones de conmutación del álgebra no compacta $\mathfrak{so}(3, 1)$ ($\hbar = 1$)

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j] &= i \epsilon_{ijk} \mathbf{L}_k \\ [\mathbf{M}_i, \mathbf{L}_j] &= i \epsilon_{ijk} \mathbf{M}_k \\ [\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j] &= -i \epsilon_{ijk} \mathbf{L}_k \quad i, j, k = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

En el caso de AGE degeneradas $\mathfrak{so}(n+1)$, las álgebras no compacta $\mathfrak{so}(n+1, 2) \supset \mathfrak{so}(n+1, 1) \supset \mathfrak{so}(n+1)$ han sido ocupadas como álgebras dinámicas [39], [40], [14].⁵

8.3. Álgebra $\mathfrak{so}(n+1)$ como S-Expansión del álgebra $\mathfrak{so}(n)$

El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n)$, con $n(n-1)/2$ elementos de dimensión n , a partir de la ecuación (A.3). Consideremos la siguiente descomposición de $\mathcal{G} = \mathfrak{so}(n) = V_0 \oplus V_1$. Vamos a suponer que no conocemos la descomposición de $\mathfrak{so}(n)$ en una subálgebra V_0 y un subespacio V_1 ⁶. Definimos $\mathbf{T}_{ij} \simeq \mathbf{L}_{ij}$ y $\mathbf{T}_{in} \simeq \mathbf{M}_i$ $i, j = 1, \dots, n$.

- *Expansión de $\mathcal{G} = \mathfrak{so}(n)$* : Sea $S = S_E^{(1)} = \{\lambda_0, \lambda_1\}$ y $\mathcal{G} = \mathfrak{so}(n)$. Consideramos el semigrupo \mathbb{Z}_2 definido por la tabla de multiplicación (8.2). El álgebra expandida es $\mathfrak{g} = \lambda_0 \otimes V_0 \oplus \lambda_0 \otimes V_1 \oplus \lambda_1 \otimes V_0 \oplus \lambda_1 \otimes V_1$. Dado que podemos asociar $V_0 \leftrightarrow \{\mathbf{L}_{ab}\}$ y $V_1 \leftrightarrow \{\mathbf{M}_a\}$.

⁵Una sencilla inmersión se obtiene mediante la introducción de una coordenada ficticia x y momentum $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$, y construyendo el álgebra $\mathfrak{so}(n+2)$. Esta álgebra, en lugar de $\mathfrak{so}(n+1, 1)$, puede ser ocupada como un álgebra dinámica de el Problema de Kepler en $N \geq 2$ dimensiones [3].

⁶En este caso no podemos asegurar que sea semisimple.

Tenemos que el álgebra S-Expandida es generada por $\{\lambda_0 \mathbf{L}_{ab}; \lambda_1 \mathbf{L}_{ab}; \lambda_0 \mathbf{M}_a; \lambda_1 \mathbf{M}_a\}$. Definiendo los generadores del álgebra expandida como $\tilde{\mathbf{L}}_{ab,\alpha} = \lambda_\alpha \mathbf{L}_{ab}$ y $\tilde{\mathbf{M}}_{a,\alpha} = \lambda_\alpha \mathbf{M}_a$, $\alpha = 0, 1$, tenemos que la base para el álgebra $S_E^{(1)} \otimes \mathfrak{so}(n)$ expandida es dada por $\{\tilde{\mathbf{L}}_{a,0}; \tilde{\mathbf{L}}_{a,1}; \tilde{\mathbf{M}}_{a,0}; \tilde{\mathbf{M}}_{a,1}\}$. Gráficamente lo podemos ver en la Figura (8.7).

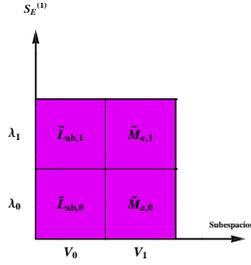


Figura 8.7: Álgebra de $S_E^{(1)} \otimes \mathfrak{so}(n)$ expandida

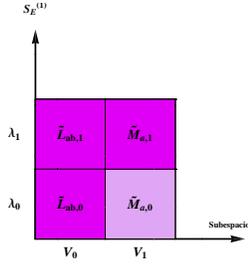


Figura 8.8: Álgebra de $S_E^{(1)} \otimes \mathfrak{so}(n)$ resonante

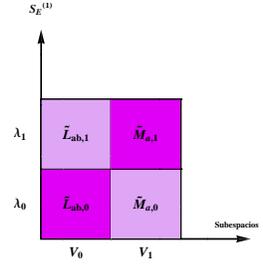


Figura 8.9: Álgebra de $S_E^{(1)} \otimes \mathfrak{so}(n)$ expandida, resonante y reducida

- *Subálgebras Resonantes \mathfrak{g}_R* : donde $\mathfrak{g}_R = W_0 \oplus W_1$ con $W_0 = S_0 \otimes V_0$ y $W_1 = S_1 \otimes V_1$ obtenida de la partición $S_E^{(1)} = S_0 \cup S_1$, resonante con $\mathcal{G} = V_0 \oplus V_1$, donde la partición escogida es $S_0 = \{\lambda_0, \lambda_1\}$ y $S_1 = \{\lambda_1\}$. Esta partición se dice resonante. Del Teorema 2, podemos asumir que \mathfrak{g}_R es una subálgebra resonante de $S_E^{(1)} \otimes \mathcal{G}$, donde $W_0 = \{\lambda_0 \mathbf{L}_{ab}, \lambda_1 \mathbf{L}_{ab}\}$ y $W_1 = \{\lambda_1 \mathbf{M}_a\}$. De modo que el álgebra \mathfrak{g}_R es generada por $\{\tilde{\mathbf{L}}_{ab,0}; \tilde{\mathbf{L}}_{ab,1}; \tilde{\mathbf{M}}_{a,1}\}$. Gráficamente lo podemos ver en la Figura (8.8).
- *Álgebra Resonante Reducida*: Se obtiene particionando el semigrupo en la forma $S_p = \hat{S}_p \cup \check{S}_p$ si consideramos la partición $\hat{S}_p = \{0_S\}$ y $\check{S}_p = S_p - \{0_S\}$ y dado que $\mathfrak{g}_R = \bigoplus S_p \otimes V_p$, con $\mathfrak{g}_R = \check{\mathfrak{g}}_R \oplus \hat{\mathfrak{g}}_R$, $\hat{\mathfrak{g}}_R = \{0_S\} \otimes V_p = 0$ y $\check{\mathfrak{g}}_R = \bigoplus (S_p - \{0_S\}) \otimes V_p$ donde $y, \lambda_1 = 0_S$ es el elemento cero del semigrupo. Vamos a considerar $S_1 - \{0_S\} = \{\lambda_1\}$ y solo extraeremos el elemento cero del semigrupo de $S_0 - \{0_S\} = \{\lambda_0\}$, así tenemos $\check{\mathfrak{g}}_R = (\lambda_0 \otimes V_0) \oplus (\lambda_1 \otimes V_1)$. Así, tenemos que una base para el álgebra $S_E^{(1)} \otimes \mathfrak{so}(N)$ expandida, resonante y reducida es dada por $\{\tilde{\mathbf{L}}_{ab,0}; \tilde{\mathbf{M}}_{a,1}\}$. Gráficamente lo podemos ver en la Figura (8.9), donde $\tilde{\mathbf{L}}_{ab,0}$ y $\tilde{\mathbf{M}}_{a,1}$ son los generadores del álgebra $\mathfrak{so}(n)$ forzada y reducida. Redefiniendo estos generadores como: $\tilde{\mathbf{T}}_{ab} = \mathbf{L}_{ab} = \tilde{\mathbf{L}}_{ab,0} = \lambda_0 \tilde{\mathbf{L}}_a$ y $\tilde{\mathbf{T}}_{a(n+1)} = \mathbf{M}_a = \tilde{\mathbf{M}}_{a,1} = \lambda_1 \tilde{\mathbf{M}}_a$.

Relaciones de conmutación

$$\begin{aligned}
[\mathbf{L}_{ab}, \mathbf{L}_{cd}] &= -i(\delta_{bc}\mathbf{L}_{ad} - \delta_{ad}\mathbf{L}_{bc} - \delta_{bd}\mathbf{L}_{ac} + \delta_{ac}\mathbf{L}_{bd}) \\
[\mathbf{M}_a, \mathbf{L}_{cd}] &= -i(\delta_{ac}\mathbf{M}_d - \delta_{ad}\mathbf{M}_c) \\
[\mathbf{M}_a, \mathbf{M}_c] &= i\mathbf{L}_{ac}
\end{aligned} \tag{8.5}$$



Capítulo 9

Operadores de Casimir para álgebras $\mathfrak{so}(4)$ y $\mathfrak{so}(7)$.

El Operador Hamiltoniano para el Problema de Kepler ($\hbar = m = 1, \kappa = 1$) es $H = \mathbf{p}^2/2 - 1/r = -1/2\nabla^2 - 1/r$. Para los estados ligados, donde $E = \langle H \rangle < 0$, el Hamiltoniano H puede ser escrito como

$$H = -\frac{1}{2[\mathbf{C}_2(\mathfrak{so}(n+1)) + (\frac{n-1}{2})^2]} \quad (9.1)$$

El álgebra degenerada \mathcal{G}_c para el Problema de Kepler n -dimensional es $\mathfrak{so}(n+1)$ ¹. Los eigenestados son caracterizados [3] por una representación irreducible totalmente simétrica $[\omega, 0, 0, \dots, 0] = [\omega]$ de $\mathfrak{so}(n+1)$ con eigenvalores

$$E(\omega) = -\frac{1}{2[\omega(\omega + n - 1) + (\frac{n-1}{2})^2]} \quad \omega = 0, 1, \dots, \infty$$

9.1. Operadores de Casimir para álgebra $\mathfrak{so}(4)$

Esta álgebra tiene dos operadores de casimir cuadráticos $\mathbf{C}_2(\mathfrak{so}(4))$ y $\mathbf{C}_2(\mathfrak{so}(4))'$. Consideraremos la construcción de la métrica $m_{\alpha\beta}$ correspondientes al semigrupo $S_E^{(1)}$, cuya ley de multiplicación es dada por la ecuación (8.2). Los dos-selectores $K_{\alpha\beta}^\rho$ de $S_E^{(1)}$ pueden ser representados como

$$K_{\alpha\beta}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad K_{\alpha\beta}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

¹ El problema de Kepler (Coulomb) es el caso en que el Hamiltoniano H no tiene una representación lineal para los operadores de Casimir, sino mas bien es representado por su inverso $1/H$ [3].

Esto implica que la métrica $m_{\alpha\beta}$ para $S_E^{(1)}$ es dada por

$$m_{\alpha\beta} = \alpha_\lambda K_{\alpha\beta}^\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

donde α_λ son los coeficientes numéricos. La métrica inversa es dada por

$$m^{\alpha\beta} = \frac{1}{\det(m_{\alpha\beta})} \begin{pmatrix} \alpha_0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_1 & \alpha_0 \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

donde α_0 y α_1 deben ser elegidos de manera tal que $\det(m_{\alpha\beta}) = \alpha_0^2 - \alpha_1^2 \neq 0$. El operador cuadrático de Casimir para el álgebra tiene la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= C^{(\alpha,A)(\beta,B)} \mathbf{T}_{(\alpha,A)} \mathbf{T}_{(\beta,B)} \\ \mathbf{C} &= m^{\alpha\beta} C^{AB} \mathbf{T}_{(\alpha,A)} \mathbf{T}_{(\beta,B)} \\ \mathbf{C} &= m^{00} C^{ab} \mathbf{L}_a \mathbf{L}_b + m^{01} C^{ab} \mathbf{L}_a \mathbf{M}_b + m^{10} C^{ab} \mathbf{M}'_a \mathbf{L}_b + m^{11} C^{ab} \mathbf{M}_a \mathbf{M}_b \\ \mathbf{C} &= \frac{1}{\det(m_{\alpha\beta})} [\alpha_0 C^{ab} \mathbf{L}_a \mathbf{L}_b - \alpha_1 C^{ab} \mathbf{L}_a \mathbf{M}_b - \alpha_1 C^{ab} \mathbf{M}_a \mathbf{L}_b + \alpha_0 C^{ab} \mathbf{M}_a \mathbf{M}_b] \end{aligned}$$

donde $k_{A,B} = \frac{1}{Tr_1} \text{Tr}(\mathbf{T}_A, \mathbf{T}_B) = \frac{1}{Tr_1} \text{Tr}(\frac{1}{2} \{\mathbf{T}_A, \mathbf{T}_B\})$. Vamos a utilizar las propiedades de las matrices de Pauli para calcular las propiedades de las constantes de estructura del álgebra. Si consideramos que satisface la relación algebraica $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k$. Donde las matrices de Pauli satisfacen la siguiente propiedad $\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}$. Luego $k_{a,b} = \delta_{ij}$ y $k^{a,b} = \delta^{ij}$. Al reemplazar en C^{ab} nos queda

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \frac{1}{\det(m_{\alpha\beta})} [\alpha_0 (\delta^{ab} \mathbf{L}_a \mathbf{L}_b + \delta^{ab} \mathbf{M}_a \mathbf{M}_b) - \alpha_1 (\delta^{ab} \mathbf{L}_a \mathbf{M}_b + \delta^{ab} \mathbf{M}_a \mathbf{L}_b)] \\ \mathbf{C} &= \frac{1}{\det(m_{\alpha\beta})} [\alpha_0 (\mathbf{L}_a \mathbf{L}^a + \mathbf{M}_a \mathbf{M}^a) - \alpha_1 (\mathbf{L}_a \mathbf{M}^a + \mathbf{M}_a \mathbf{L}^a)] \end{aligned}$$

Tenemos que α_0 y α_1 pueden ser arbitrarios mientras satisfagan la relación (9.4) y considerando que $\det(m_{\alpha\beta}) \neq 0$. Podemos concluir que tenemos el álgebra $\mathfrak{so}(4)$ la cual obtuvimos por S-expansión tiene dos operadores de Casimir

$$\mathbf{C}_2 = \frac{\alpha_0}{\det(m_{\alpha\beta})} (\mathbf{L}_a \mathbf{L}^a + \mathbf{M}_a \mathbf{M}^a) \quad (9.5)$$

$$\mathbf{C}'_2 = \frac{-\alpha_1}{\det(m_{\alpha\beta})} (\mathbf{L}_a \mathbf{M}^a + \mathbf{M}_a \mathbf{L}^a) \quad (9.6)$$

Los cuales, después de escoger $a = 1, 2, 3$ y un reescalamiento con $\det(m_{\alpha\beta}) \neq 0$, pueden escribirse como

$$\mathbf{C}_2(\mathfrak{so}(4)) = \mathbf{L}^2 + \mathbf{M}^2 \tag{9.7}$$

$$\mathbf{C}'_2(\mathfrak{so}(4)) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{M} \tag{9.8}$$

El operador Hamiltoniano puede escribirse como

$$H = -\frac{1}{2[\mathbf{C}_2(\mathfrak{so}(4)) + 1]}$$

Tenemos que $\mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = 0$. El segundo operador de casimir no aparece en H . Los estados bases de $\mathfrak{so}(4)$ son etiquetados por dos números cuánticos $[\omega_1, \omega_2]$. Sin embargo, consideran que $\mathbf{C}'_2(\mathfrak{so}(4))$ desaparece, solo aparece la representación totalmente simétrica $[\omega] = [\omega, 0]$. Los eigenvalores de energía son obtenidos por

$$E(\omega) = -\frac{1}{2[\omega(\omega + 2) + 1]} \quad \omega = 0, 1, \dots, \infty$$

En orden de completar los estados, necesitamos considerar $\mathfrak{so}(4) \supset \mathfrak{so}(3) \supset \mathfrak{so}(2)$. Los estados son etiquetados como $|\omega, l, m\rangle$, con $l = \omega, \omega - 1, \dots, 0$ y $m = -l, \dots, l$. Es costumbre introducir el Número cuántico principal $N = \omega + 1$. En término de este número cuántico los niveles de energía son $E(N, l, m) = -1/2N^2$, esta es la celebre formula de Bohr que permite obtener los niveles de energía de el átomo de hidrógeno No Relativista. Los correspondientes niveles de energía se muestran en la Figura (9.1). Los estados $|N, l, m\rangle$ son degenerados con degeneración total N^2 . El álgebra $\mathfrak{so}(4)$ es el álgebra degenerada de el Problema de Kepler en $n = 3$ dimensiones [9].

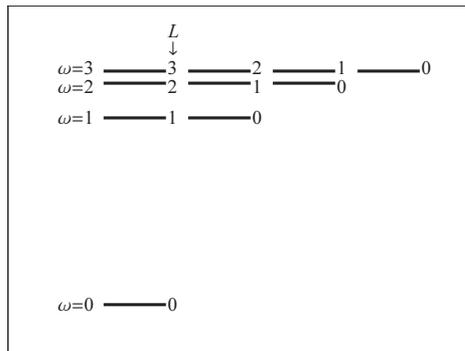


Figura 9.1: Espectro de Energía del átomo de hidrógeno en tres dimensiones. El número cuántico principal $N = \omega + 1$ [3].

9.2. Operadores de Casimir para el álgebra $\mathfrak{so}(7)$

El álgebra $\mathfrak{so}(7)$ posee tres operadores de Casimir $\mathbf{C}_2(\mathfrak{so}(7))$, $\mathbf{C}_4(\mathfrak{so}(7))$ y $\mathbf{C}_6(\mathfrak{so}(7))$. Solo obtendremos el operador de Casimir cuadrático $\mathbf{C}_2(\mathfrak{so}(7))$.

Consideremos la construcción de la métrica $m_{\alpha\beta}$ correspondientes al semigrupo $S_E^{(1)}$, cuya ley de multiplicación es dada por la ecuación (8.2). Los dos-selectores $K_{\alpha\beta}^\rho$ de $S_E^{(1)}$ pueden ser representados como (9.2). Esto implica que la métrica $S_E^{(1)}$ es dada por la ecuación (9.3), de tal manera que el determinante satisfaga (9.4).

El Operador cuadrático de Casimir para el álgebra tiene la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= C^{(\alpha,A)(\beta,B)} \mathbf{T}_{(\alpha,A)} \mathbf{T}_{(\beta,B)} \\ \mathbf{C} &= m^{\alpha\beta} C^{AB} \mathbf{T}_{(\alpha,A)} \mathbf{T}_{(\beta,B)} \\ \mathbf{C} &= m^{00} C^{ab,ac} \mathbf{L}_{ab} \mathbf{L}_{cd} + m^{01} C^{ab,c} \mathbf{L}_{ab} \mathbf{M}_c + m^{10} C^{a,bc} \mathbf{M}_a \mathbf{L}_{bc} + m^{11} C^{ab} \mathbf{M}_a \mathbf{M}_b \\ \mathbf{C} &= \frac{1}{\det(m_{\alpha\beta})} [\alpha_0 C^{ab,cd} \mathbf{L}_{ab} \mathbf{L}_{cd} + \alpha_0 C^{ab} \mathbf{M}_a \mathbf{M}_b]\end{aligned}$$

donde $C^{ab,c} = C^{a,bc} = 0$. Para los $C^{ab,cd}$ y C^{ab} tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \frac{1}{\det(m_{\alpha\beta})} [\alpha_0 \delta^{ab,cd} \mathbf{L}_{ab} \mathbf{L}_{cd} + \alpha_0 \delta^{ab} \mathbf{M}_a \mathbf{M}_b] \\ \mathbf{C} &= \frac{\alpha_0}{\det(m_{\alpha\beta})} [\mathbf{L}_{ab} \mathbf{L}^{ab} + \mathbf{M}_a \mathbf{M}^a]\end{aligned}\tag{9.9}$$

Tenemos que α_0 y α_1 pueden ser arbitrarios mientras satisfagan la relación (9.4) y considerando que $\det(m_{\alpha\beta}) \neq 0$. Podemos concluir que en este caso tenemos un único operador de casimir cuadrático para $\mathfrak{so}(7)$, el cual obtuvimos por S-Expansión

$$\mathbf{C}_2(\mathfrak{so}(7)) = \frac{\alpha_0}{\det(m_{\alpha\beta})} [\mathbf{L}_{ab} \mathbf{L}^{ab} + \mathbf{M}_a \mathbf{M}^a]\tag{9.10}$$

Luego al considerar $a, b = 1, \dots, 6$ y el reescalamiento $\det(m_{\alpha\beta}) \neq 0$, el operador de Casimir cuadrático es ²

$$\mathbf{C}_2(\mathfrak{so}(7)) = \sum_{i < j}^6 \mathbf{L}_{ij}^2 + \sum_i^6 \mathbf{M}_i^2$$

El Hamiltoniano puede escribirse como

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2[\mathbf{C}_2(\mathfrak{so}(7)) + \frac{25}{4}]}$$

²Este operador de Casimir cuadrático coincide con el obtenido en [38, 3].

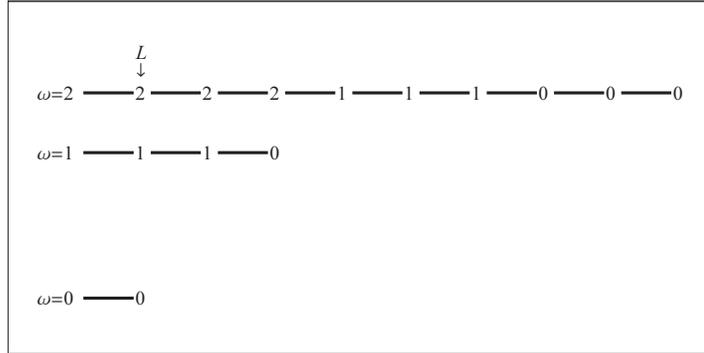


Figura 9.2: Espectro de Energía del átomo de hidrógeno en seis dimensiones [38, 3].

El valor de espectación para este Hamiltoniano en la representación $[\omega] = [\omega, 0, 0]$ es

$$E(\omega) = -\frac{1}{2[\omega(\omega + 5) + \frac{25}{4}]} \quad \omega = 0, 1, \dots, \infty$$

La representación de $\mathfrak{so}(7)$ que aparece es una representación totalmente antisimétrica de $[\omega]$, como una condición análoga a $\mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = 0$ en el caso tres dimensional. Los estados satisfacen la cadena $\mathfrak{so}(7) \supset \mathfrak{so}(6) \supset \mathfrak{so}_\rho(3) \oplus \mathfrak{so}_\lambda(3) \supset \mathfrak{so}(3) \supset \mathfrak{so}(2)$ con números cuánticos

$$\left| \begin{array}{cccccc} \mathfrak{so}(7) & \supset & \mathfrak{so}(6) & \supset & \mathfrak{so}_\rho(3) \oplus \mathfrak{so}_\lambda(3) & \supset & \mathfrak{so}(3) & \supset & \mathfrak{so}(2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \omega & & \gamma & & l_\rho, l_\lambda & & L & & M \end{array} \right\rangle$$

Aquí $\gamma = \omega, \omega - 1, \dots, 1, 0$ y los valores de l_ρ, l_λ son obtenidos por la partición de γ como $\gamma = 2n_\gamma + l_\rho + l_\lambda, n_\gamma = 0, 1, \dots$. Los valores de L son obtenidos desde $|l_\rho + l_\lambda| \geq L \geq |l_\rho - l_\lambda|$ y $M = -L, \dots, +L$ como es usual [3]. El diagrama de los niveles de energía de el Problema de Kepler en seis dimensiones se muestra en la Figura (9.2). El espectro es degenerado y el álgebra $\mathfrak{so}(7)$ es un álgebra degenerada. El problema de Kepler en seis dimensiones es de interés en el problema de tres cuerpos, en particular en un sistema de tres quarks en física hadrónica [38].



Capítulo 10

Contraste de Métodos.

El procedimiento de obtención de operadores de Casimir vía S-Expansión, a diferencia de los métodos conocidos permite, de manera general, reducir las ecuaciones y cálculos involucradas, solo se necesita conocer el semigrupo y una partición resonante para conocer los operadores de Casimir¹.

Los métodos involucrados son:

- **Problema dos-cuerpos:** Se obtiene la Ecuación Radial de Schrödinger del átomo de hidrógeno para un sistema reducido y su solución proviene de la utilización de las propiedades de la función hipergeométrica confluyente, de donde puede obtenerse los niveles de energía No Relativista del átomo de hidrógeno. En este caso no fue necesario obtener los operadores de Casimir, pero debido a que no corresponde a un procedimiento general, solo es aplicable a este caso particular.
- **Procedimiento de Pauli:** Pauli en 1926 [10] calculó los niveles de energía del átomo de hidrógeno considerando las 15 relaciones de conmutación obtenidas del análisis del Problema de Kepler cuantizado. Luego de considerar los estados ligados de energía obtuvo los operadores escaleras de los cuales se dedujo los operadores de Casimir, de donde finalmente obtienen los Niveles de Energía No Relativista del átomo de hidrógeno. Este procedimiento involucro el tratamiento del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ y $\mathfrak{so}(4)$. Este método fue analizado por Fock en 1935 [11] y por Bargmann en 1936 [12]. Estos niveles coinciden con los obtenidos desde el Problema de dos-cuerpos.
- **Procedimiento de Schrödinger:** Este procedimiento involucra la obtención y deducción de la Ecuación de Klein-Gordon para una descripción No Relativista de la ecuación de onda del Átomo de Hidrógeno y de la Ecuación de Schrödinger para energías Relativistas. En este caso no se obtuvieron los operadores de Casimir, sino que se utilizó el método en

¹Los métodos estudiados en esta tesis se introdujeron de acuerdo a la evolución histórica y mejoras realizadas por los diferentes autores.

serie de potencias de Frobenius para obtener los Niveles de Energía. Este procedimiento de agrego para poder comparar los niveles del energía relativistas del átomo de hidrógeno.

- **Álgebras Generadoras de Espectro:** Las AGE fueron introducidas en 1965 [14]. Los espectros de energía pueden ser obtenidos al considerar realizaciones de los generadores asociados al Álgebra de Lie del sistema. En el caso del átomo de hidrógeno se consideraron las Álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1, 1)$ y $\mathfrak{so}(2, 1)$, de las cuales se puede obtener los Niveles de Energía Relativista y No Relativista [35, 9]. Los niveles de energía coinciden con los obtenidos en el Procedimiento de Schrödinger.

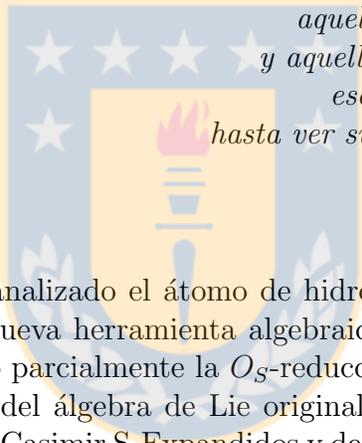
En el procedimiento de AGE es necesario obtener los operadores de Casimir y simplificar el problema considerando las diagonalizaciones de los operadores para considerar un problema de eigenvalores. La desventaja de este procedimiento es el aumento de las variables involucradas de acuerdo al aumento de las simetrías y el hecho que no todos los problemas pueden ser acomodados a este tipo de ecuaciones o se vuelven insolubles. Los operadores de Casimir, al igual que en procedimiento previos, son obtenidos de manera indirecta y no por un método estándar riguroso. Esto puede involucrar que no siempre se pueda deducir el operador de Casimir o se puedan descartar por error.

- **Procedimiento de S-Expansión:** Introducido en 2006 [22], el procedimiento de S-Expansión combina las constantes de estructura de un Álgebra de Lie con ley de composición interna de un semigrupo abeliano. La S-Expansión de operadores de Casimir fue introducido en 2012 [26]. En esta Tesis se consideró este procedimiento para obtener los operadores de Casimir asociados al átomo de hidrógeno y la deducción de sus Niveles de Energía en caso de una representación totalmente simétrica. Este procedimiento, a diferencia de procedimiento previos, considera un procedimiento estándar para la obtención de los operadores de Casimir. Además, es un procedimiento que involucra poco trabajo de calculo. En particular se obtuvo la S-Expansión del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ de donde se obtuvo $\mathfrak{so}(4)$ y se realizo la S-Expansión del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(6)$ de donde se obtuvo $\mathfrak{so}(7)$. De los operadores de Casimir de las álgebras de Lie $\mathfrak{so}(4)$ y $\mathfrak{so}(7)$ se pueden obtener los Niveles de Energía para una representación totalmente simétrica [3]. Como pudo comprobarse los operadores de Casimir coincidieron con los obtenidos en los métodos previos, y por lo tanto, también los Niveles de Energía.

La utilidad de este procedimiento esta en asociar niveles de energía a nuevas álgebras de Lie que puedan obtenerse desde el procedimiento de S-Expansión.

Capítulo 11

Conclusiones



*“Existen dos clases de individuos :
aquellos que duermen y sueñan de noche
y aquellos que sueñan despiertos y de día...
esos son peligrosos, porque no cederán
hasta ver sus sueños convertidos en realidad. ”*

T. Lawrence (1888-1935)

En la presente Tesis se ha analizado el átomo de hidrógeno, o de manera general átomos hidrogenoides, utilizando una nueva herramienta algebraica. Se calculó un caso particular de S-Expansión donde se consideró parcialmente la O_S -reducción y sin la necesidad de conocer la descomposición en subespecies del álgebra de Lie original, este procedimiento particular nos permite construir operadores de Casimir S-Expandidos y deducir sus Niveles de Energía. La idea de utilizar el procedimiento de S-Expansión de álgebras de Lie se debió a los recientes avances que surgieron en la utilización de este método en la construcción de operadores de Casimir. Para generar un álgebra de Lie con una cierta estructura debemos buscar un semigrupo con un producto apropiado y el método propuesto nos permite pasar de un álgebra de Lie de dimensión n a un Álgebra de Lie de dimensión $n + 1$. La modificación del procedimiento se ve apoyada por los resultados obtenidos.

Los capítulos de Fundamentos Matemáticos corresponden a las herramientas matemáticas necesarias para entender y utilizar de manera correcta el procedimiento de S-Expansión, junto con algunos ejemplos relacionados al átomo de hidrógeno. De manera particular, en el primer capítulo se analizó el procedimiento de contracción de álgebras introducido por Inönü y Wigner, del cual su generalización se pueden obtener métodos de expansión de álgebras. En el capítulo 2 se analizó el procedimiento de S-Expansión de álgebra de Lie que se ocupó para obtener las Álgebras de Lie asociadas al átomo de Hidrógeno.

En los Fundamentos Físicos se introdujeron los diferentes procedimientos que se utilizaron

para obtener los Niveles de Energía del átomo de hidrógeno. Se considero el Problema de dos-cuerpo, el Problema de Kepler introducido por Pauli, La Ecuación de Onda introducido por Schrödinger y Las Álgebras Generadoras de Espectro.

En la tercera parte, se obtuvieron los Espectros de Energía utilizando el procedimiento de S-Expansión. Se ha logrado obtener el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(4)$ como una S-Expansión de $\mathfrak{so}(3)$, correspondiente al Problema de Kepler en tres dimensiones, y se ha obtuvo el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(7)$ como una S-Expansión del álgebra $\mathfrak{so}(6)$, correspondiente al Problema de Kepler en seis dimensiones. Finalmente se ha analizado un generalización de este procedimiento de $\mathfrak{so}(n)$ a $\mathfrak{so}(n + 1)$.

Los operadores de Casimir obtenidos para el átomo de hidrógeno en tres y seis dimensiones, coinciden con los operadores de Casimir ya conocidos. El conocimiento de los operadores de Casimir nos permite verificar el procedimiento propuesto de S-Expansión, y de ellos podemos deducir los Niveles de Energía para una representación totalmente simétrica. En caso de querer realizar una verificación experimental, asociar los niveles de energía a una configuración simétrica determinada puede ayudar a estimar el Espectro aproximado de un sistema físico con características similares a al del átomo de hidrógeno. Pero con seguridad, se necesitará trabajar en un modelo menos idealizado.



Apéndice A

Álgebras de Lie

Una de las razones del éxito que ha tenido la Teoría de Grupos en Física, radica en el hecho que permite describir el concepto de *Simetría*. En Física, este concepto adquiere especial importancia, asociándose a la idea fundamental de garantizar la invariancia de las leyes de la naturaleza ante cambios de observador.

A.1. Álgebras de Lie

Definición 1 Un **álgebra** es un par (G, \cdot) donde G es un espacio vectorial finito dimensional y $\cdot : G \times G \rightarrow G$ es una ley de composición interna definida sobre el espacio vectorial.

Definición 2 Un **álgebra de Lie** \mathcal{G} es definida por un par $(G_K, [,])$ sobre un campo K , donde G es un espacio vectorial finito dimensional, de base $\{\mathbf{T}_A\}_{A=1}^{\dim G}$. El grupo del espacio vectorial es extendido a un anillo, donde la operación multiplicativa del anillo corresponde a una regla de composición binaria $[,]$ llamada *Multiplicación de Lie* o *Corchete de Lie*

$$(\mathbf{T}_{A_1}, \mathbf{T}_{A_2}) \rightarrow [\mathbf{T}_{A_1}, \mathbf{T}_{A_2}] \in \mathcal{G} \quad (\text{A.1})$$

es decir, la multiplicación algebraica es una operación antisimétrica, luego \mathcal{G} es un Álgebra de Lie [5].

La ley de composición satisface los siguientes axiomas:

1. *Linealidad*

$$[\alpha \mathbf{T}_{A_1} + \beta \mathbf{T}_{A_2}, \mathbf{T}_{A_3}] = \alpha [\mathbf{T}_{A_1}, \mathbf{T}_{A_3}] + \beta [\mathbf{T}_{A_2}, \mathbf{T}_{A_3}] \quad \forall \alpha, \beta \in K ; \forall \mathbf{T}_{A_1}, \mathbf{T}_{A_2}, \mathbf{T}_{A_3} \in \mathcal{G}$$

2. *Antisimetría*

$$[\mathbf{T}_{A_1}, \mathbf{T}_{A_2}] = -[\mathbf{T}_{A_2}, \mathbf{T}_{A_1}] \quad \forall \mathbf{T}_{A_1}, \mathbf{T}_{A_2} \in \mathcal{G}$$

3. *Identidad de Jacobi*

$$[\mathbf{T}_{A_1}, [\mathbf{T}_{A_2}, \mathbf{T}_{A_3}]] + [\mathbf{T}_{A_2}, [\mathbf{T}_{A_3}, \mathbf{T}_{A_1}]] + [\mathbf{T}_{A_3}, [\mathbf{T}_{A_1}, \mathbf{T}_{A_2}]] = 0 \quad \forall \mathbf{T}_{A_1}, \mathbf{T}_{A_2}, \mathbf{T}_{A_3} \in \mathcal{G}$$

A partir de un álgebra asociativa (G, \cdot) , con la ley de multiplicación $(X, Y) \rightarrow X \cdot Y$, es posible obtener un álgebra de Lie interpretando el producto de Lie $[X, Y]$ como $(X \cdot Y - Y \cdot X)$

$$[X, Y] = (X \cdot Y - Y \cdot X) \quad (\text{A.2})$$

Este ejemplo corresponde al caso de las representaciones matriciales, donde \cdot es el producto de matrices [2].

Las álgebras de Lie pueden ser construidas de operadores diferenciales que actúan sobre un espacio de funciones derivables $f(x)$. Si introducimos n coordenadas reales x_1, x_2, \dots, x_n . La construcción de un álgebra de Lie es $\mathfrak{so}(n) \doteq x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$, es decir, $\mathbf{L}_{ij} \doteq x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i < j = 1, \dots, n$ de donde obtenemos las relaciones de conmutación, con $\frac{n(n-1)}{2}$ elementos

$$[\mathbf{L}_{ij}, \mathbf{L}_{kl}] = \delta_{jk} \mathbf{L}_{il} + \delta_{il} \mathbf{L}_{jk} - \delta_{jl} \mathbf{L}_{ik} - \delta_{ik} \mathbf{L}_{jl}$$

Una base para el álgebra $\mathfrak{so}(N)$ en la representación de corchetes de Lie, es dada por la representación de matrices antisimétricas de dimensión N es $[\mathbf{T}_{AB}]_{CD} \doteq -i(\delta_{AC} \delta_{BD} - \delta_{AD} \delta_{BC})$ $A, B, C, D = 1, 2, \dots, N$. El álgebra de Lie puede ser obtenida por el calculo del conmutador de dos matrices antisimétricas $[\mathbf{T}_{AB}]_{CD}$. Lo que es dado por

$$[\mathbf{T}_{AB}, \mathbf{T}_{CD}] = -i(\delta_{BC} \mathbf{T}_{AD} - \delta_{AD} \mathbf{T}_{BC} - \delta_{BD} \mathbf{T}_{AC} + \delta_{AC} \mathbf{T}_{BD}) \quad (\text{A.3})$$

con índices $A, B, C, D = 1, 2, \dots, N$ y $\text{diag}(\delta_{AB}) = (+1, +1, \dots, +1)$ [4].

Bibliografía

■ Álgebras de Lie.

- [1] S. Lie, G. Scheffers, *Vorlesungen über Kontinuierliche Gruppen*, Leipzig, (1893).
- [2] A. O. Barut, R. Ratzka, *Theory of group representations and applications*, World Scientific, (1986).
- [3] F. Iachello, *Lie Algebras and Applications*, Lect. Notes Phys. 708 Springer, Berlin Heidelberg (2006).
- [4] Benjamin-Cumming, *Semi-Simple Lie Algebras and their Representations*, (1984).
- [5] R. Gilmore, *Lie groups, Lie algebras, and some of their applications*, Wiley-Interscience Publication, Johan Wiley Sons, (1974).
- [6] H. Bacry, J.M. LevyLeblond, *Possible Kinematics*, J. Math. Phys. **9**, (1968) 1605.
- [7] H. Bacry, PH. Combe, J.L. Richard, *Group-Theoretical Analysis of Elementary Particles in an External Electromagnetic Field. The Relativistic Particle in a Constant and Uniform Field.*, il nuovo cimento, **2** (1970) LXVII.
- [8] R. Schrader, *The Maxwell Group and the Quantum Theory of Particles in Classical Homogeneous Electromagnetics Fields*, Fortschritte der Physik, **20** (1972), 701-734.
- [9] B.G. Wybourne *Classical Group for Physicists*, Wiley, New York, (1974).

■ Precursores de Álgebras Generadoras de Espectro.

- [10] W. Pauli, *On the hydrogen spectrum from the standpoint of the new quantum mechanics*, Z. Physik **36** (1926), 336. Sources of Quantum
- [11] V. Fock, *On the theory of the hydrogen atom*, Z. Physik **98** (1935), 145.

- [12] V. Bargmann, *On the theory of the hydrogen atom. Comments on the paper of the same title by V. Fock*, Z. Physik **99** (1936), 576.

■ **Creación de Álgebras Generadoras de Espectro.**

- [13] S. Goshen, H.J. Lipkin, *A simple independent-particle system having collective properties*, Ann. Phys. **6** (1959), 301.
- [14] A.O. Barut, A. Bohm, *Dynamical groups and mass formula*, Phys. Rev. **139** (1965), B1107.
- [15] Y. Dothan, M. Gell-Mann, Y. Neéman, *Series of hadron energy levels as representations of non-compact groups*, Phys. Lett. **17**, 148 (1965).
- [16] Y. Nambu, *Proceeding of the 1967 International Conference on Particles and Fields*, C.R. Hagen, G. Guralnik, V.A. Mathur (editors) Interscience Publishers (1967), 348.

■ **Contracción de Inönü-Wigner.**

- [17] E. Inönü, E. Wigner, *On the Contraction of Groups and Their Representations*, Nat. Acad. Sci. U.S. **39** (1953) 510.
- [18] R. Gilmore, *Lie groups, physics, and geometry: An Introduction for Physicists, Engineers and Chemists*, Cambridge University Press, (2008).
- [19] I.E. Segal, *A class of operator algebras which are determined by groups*, Duke Math. J. **18** (1951) 221.
- [20] E. Weimar-Woods, *Contractions of Lie algebras representations*, Jour. Math. Phys. **32** (1991) 2660-2665.
- [21] E. Weimar-Woods, *Contractions, generalized Inönü-Wigner contractions and deformations of finite-dimensional Lie algebras*, Rev. Math. **12** (2000) 1505.

■ **Procedimiento de S-Expansión.**

- [22] F. Izaurieta, E. Rodriguez, P. Salgado, *Expanding Lie (Super) Algebras through Abelian Semigrupos*. J. Math. Phys. **47** (2006) 123512.
- [23] F. Izaurieta, *Expansión en Semigrupos y M-Supergravedad en 11 dimensiones*, Tesis Doctoral (2006), UdeC.
- [24] M. Hatsuda, M. Sakaguchi, *Wess-Zumino Term for the AdS Superstring and Generalized Inönü-Wigner Contraction*, Prog. Theor. Phys. **109** (2003) 853.

- [25] J.A. Azcárraga, J.M. Izquierdo, M. Picón, O. Varela *Generating Lie and Gauge Free Differential (Super) Algebras by Expanding Maurer-Cartan Forms and Chern-Simons Supergravity*, Nucl. Phys. B 662 (2003) **185**. Int. Jour. Theor. Phys. **46** (2007) 2738.

■ **Operadores de Casimir vía S-Expansión.**

- [26] J. Diaz, O. Fierro, F. Izaurieta, N. Merino, E. Rodriguez, P. Salgado and O. Valdivia *A generalized action for (2+1)-dimensional Chern-Simons gravity*, J. Phys. A: Math. Theor. **45** (2012) 255207
- [27] D.V. Soroka and V.A. Soroka, *Tensor extension of the Poincaré algebra*. Phys. Lett. B607 (2005) **302**; hep-th/0410012.
- [28] S.A. Dupli., D. V. Soroka and V. A. Soroka, J. Kharkov. National Univ. No. **664** (2005), Physical series Nuclei, Particles, Fields, Issue 2/27/, p.12.
- [29] D.V. Soroka, V.A. Soroka, *Semi-simple extension of the (super) Poincaré algebra*, Adv. High Energy Phys. (2009) 234147.
- [30] D.V. Soroka, V. A. Soroka, *Semi-simple $o(N)$ -extended super-Poincaré algebra*.

■ **Fundamentos Físicos en Mecánica Cuántica.**

- [31] W. Greiner, B. Müller, *Quantum Mechanics, Symmetries*, Springer 2nd Edition, (1994).
- [32] W. Greiner, *Quantum Mechanics, An introduction*, Springer 4th Edition, (2001).
- [33] N. Zettili, *Quantum Mechanics, Concepts and Applications*, John Wiley and Sons, Ltd. (2001).
- [34] G. Gabrielse, D. Hanneke, T. Kinoshita, M. Nio, B. Odom, *New Determination of the Fine Structure Constant from the Electron g Alue and QED*, Phys. Rev. Lett. **97** (2006), 030802.
- [35] J. van Ekeren, *A treatise on the Hydrogen Atom*, A dissertation, B.Sc. University of Waikato (2008).
- [36] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics*, 3rd Ed., Springer-Verlag, Berlin, (1998).

■ **Simetrías Dinámicas.**

- [37] A. Bohm, Y. Neéman, *Dynamical groups and spectrum generating algebras*.
- [38] E. Santopinto, M Giannini, F. Iachello, *Algebraic Approach to the HyperCoulomb Problem, in Symmetry in Science VII*, Edited by B. Gruber, Plenum Press, New York, (1995).

- [39] H. Bacry, *The de Sitter Group $\mathbb{L}_{4,1}$ and the Bound states of the Hydrogen Atom*, Nuovo Cimento **41A** (1966), 222.
- [40] E.C.G. Sudarshan, N. Mukunda, L.O'Raiheartaigh *Group Theory of the Kepler problem*, Phys. Lett. **19** (1965), 322.
- [41] P. Cordero, J. Daboul *Analysis of the spectrum generating algebra method for obtaining energy spectra*, J. Math. Phys. **46** (2005), 053507.

■ **Simetrías en el Núcleo.**

- [42] A. Arima, F. Iachello, *Collective nuclear states as representations of a $SU(6)$ group*, Phys. Rev. Lett. **35** (1975), 1069.
- [43] J.N. Ginicchio, M, W. Kirson, *Relationship between the Bohr collective Hamiltonian and the interacting-boson model*, Phys. Rev. Lett. **44** (1980), 1744 .
- [44] F. Iachello, *Dynamical supersymmetries in nuclei*, Phys. Rev. Lett. **44** (1980) 772.
- [45] F. Iachello, *Dynamical Symmetries in Nuclei in Group Theoretical Methods in Physics*, Ed. A. Böhm, Lange Springer, Berlin, (1979).
- [46] F. Iachello, *Symmetry in Nucleo*, Jour. of Modern Phys. E Vol. **14** (2005), 137- 145.
- [47] J. A. Cizewski, R. F. Casten, G.J. Smith, M.L. Stels, W.R. Kane, H.G. Börner, W.F. Davidson, *Evidence for a new symmetry in nuclei: The structure of ^{196}Pt and the $O(6)$ limit*, Phys. Rev. Lett. **40** (1978) 167.
- [48] A.B. Balantekin, I. Bars, F. Iachello, *$U(6/4)$ Dynamical supersymmetry in nuclei*, Phys. Rev. Lett. **47** (1981), 19.
- [49] D.D. Warner, R.F. Casten, M.L. Stelts, H.G. Börner, G. Barreau, *Nuclear structure of ^{196}Pt* , Phys. Rev. **C26** (1982) 1921.
- [50] H.-Z. Sun, D.H. Feng, M. Vallieres, R. Gilmore, P. Van Isacker, A. Frank, *Spectroscopy of the platinum isotopes and the dynamical supersymmetry $U(6/12)$* , Phys. Rev. **C31** (1985), 1899.