



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**DEMOSTRACIÓN EXPERIMENTAL DE
ALGUNAS ESTRUCTURAS CONTEXTUALES
BÁSICAS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA**

Profesor Guía: Dr. Gustavo Moreira Lima
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción
2015

**Tesis para ser presentada en Dirección de Postgrado
para optar al grado de Magíster en Ciencias con
mención en Física**

**MAURICIO ARIAS CONTRERAS
CONCEPCIÓN - CHILE 2015**



Director de Tesis : Dr. Gustavo Moreira Lima

Comisión : Dr. Gustavo Moreira Lima

Dr. Aldo Delgado Hidalgo

Dr. Guilherme Barreto Xavier





*Dedicado a
mi familia*





Agradecimientos

Este trabajo marca el fin de un largo camino, lleno de aprendizajes tanto académicos como de la vida misma. En este trayecto debo reconocer que nunca he estado solo, ha sido la compañía y apoyo de la gente que amo y estimo la que me ha dado el aliento necesario para no desistir. Además he tenido mucha suerte de haber encontrado personas que me han dado oportunidades valiosas y a ellas también les debo este trabajo. Mis primeros agradecimientos van para mi familia, no estaría acá si no fuera por ellos. Gracias a mi madre, por ser esa fuente de energía infinita e incondicional, aquella que me enseñó a nunca rendirme, siempre terminar lo que he empezado, y sobre todo, a hacerlo de la mejor forma. A mi padre y hermano les debo la sensibilidad y la confianza, que me ha permitido ver más allá de las fórmulas, darle un sentido e interpolar a la vida diaria los problemas de mi trabajo, los que también han sabido interpretar y dejarme ser en mis silencios y caídas.

También agradecer al Dr. Gustavo Lima, por confiar en mi desde un principio y darme esta oportunidad de colaborar y aprender en un excelente grupo de trabajo. A los chicos del laboratorio 203 y 204 por su paciencia, sobre todo a Gustavo Cañas quien tuvo la gentileza de ayudarme a llevar a cabo este experimento y aconsejarme en cada paso que daba.

A mis amigos y compañeros de la facultad, aquellos que siguen y otros que ya se han ido, por todos esos cafes, conversaciones, reflexiones y momentos divertidos que me daban una pausa reponedora a mis labores académicos. En especial a Matias, Marcela, Carolina, Pamela, quienes siempre han sabido escucharme y darme apoyo académicamente y emocionalmente.

Finalmente quiero dar las gracias a los que han sido mis profesores, ayudantes y gente perteneciente al departamento de física y la facultad, pues gracias ha ellos me he formado profesionalmente y al Centro de Óptica y Fotónica, los que me han acogido y ayudado a llevar adelante mi carrera como científico.



Resumen

En esta tesis se presenta una realización experimental de la violación de dos desigualdades no contextuales (NC) asociadas a los grafos de exclusividad C^7 y \bar{C}^7 . Recientemente, Cabello, Severini y Winter han probado que la teoría cuántica viola desigualdades de correlaciones clásicas usando test *yes-no* si y solo si el grafo de exclusividad asociado a estas desigualdades contiene ciclos impares C^n , con $n \geq 5$, o sus complementos \bar{C}^n como subgrafos inducidos. Experimentos ya han confirmado la violación de la desigualdad NC para C^5 de Wright y Klyachko *et al* y además esta prueba es equivalente para \bar{C}^5 pues estos dos grafos son isomorfos, sin embargo aún no se han documentado experimentos que demuestren alguna de las desigualdades NC para los ciclos impares C^n y \bar{C}^n , con $n \geq 7$. La violación de las desigualdades NC para C^7 y \bar{C}^7 fueron realizadas usando el momentum transversal lineal de fotones individuales. Estos dos experimentos requirieron implementar sistemas cuánticos de dimensión 3 y 5, respectivamente.

Índice general

Resumen	II
Lista de figuras	V
1. Introducción	1
2. Teoría de grafos	3
2.1. Definiciones básicas	3
2.1.1. Caminos y ciclos	6
2.2. Teorema fuerte (y débil) de los grafos perfectos	8
2.3. Representación ortogonal y Número de Lovász	9
2.3.1. Propiedades del número de Lovász para los ciclos impares y sus complementos	11
3. Conceptos de mecánica cuántica	13
3.1. Conceptos básicos	13
3.1.1. Estado cuántico y operadores de medida	14
3.1.2. Representación matricial	17
3.1.3. Probabilidad y medida	19
3.2. Contextualidad cuántica	21
3.2.1. Teorema de Kochen-Specker	21
3.2.1.1. Demostración en dimensión 6	23
3.3. Grafos de exclusividad	25

3.3.1. Desigualdades NC asociadas a grafos de exclusividad básicos . . .	28
4. Metodología y resultados	32
4.1. Montaje experimental	33
4.2. Resultados experimentales	35
5. Conclusión	41



Índice de figuras

2.1. Grafo K^3	4
2.2. Grafo G y dos subgrafos G' y G'' : G' es un subgrafo inducido de G , pero no G''	5
2.3. Un grafo isomorfo a su complemento. El grafo de la derecha considera como sus aristas (en negro) los pares de vértices del grafo de la izquierda sin uniones (color gris) y viceversa.	6
2.4. Ciclos impares y sus grafos complementarios de orden 5 o mayor: (a) C^5 , (b) C^7 , (c) C^9 , (d) C^{11} , (e) \bar{C}^5 , (f) \bar{C}^7 , (g) \bar{C}^9 , (h) \bar{C}^{11}	7
3.1. (a) El grafo de compatibilidad de experimento CHSH. (b) El grafo de exclusividad de la desigualdad (3.44).	26
3.2. (a) El grafo C^7 (b) El grafo \bar{C}^7	28
4.1. Montaje experimental. La etapa de preparación de los estados consta de una fuente de fotones individuales atenuados y dos SLMs usados par codificar cualquiera de los estados C^7 y \bar{C}^7 en el momento transversal lineal del fotón. Estos SLMs estan conectados a computadores (PC) los cuales, por simplicidad, no son mostrados en la figura. En la etapa de las medidas proyectivas se emplean otras dos SLMs que proyectan aleatoriamente el estado inicial en uno de los estados de C^7 y \bar{C}^7 . Una unidad FPGA controla todo el montaje experimental para testear las desigualdades no contextuales.	33

- 4.2. Test de exclusividad en base a las relaciones de ortogonalidad dictadas por los grafos C^7 y \bar{C}^7 : (a) realizados para los 7 estados del grafo C^7 . En estos test, cada estado $|u_k\rangle$ es ortogonal a los estados medidos $|u_{k\oplus 1}\rangle$ y $|u_{k\oplus 1}\rangle$, idealmente. La linea discontinua muestra el parámetro $\bar{\epsilon}_{C^7}$ definido en el texto, (b) realizados para los 7 estados del grafo \bar{C}^7 . En estos test, cada estado $|v_k\rangle$ es ortogonal a los estados medidos $|v_{k\oplus 2}\rangle$, $|v_{k\oplus 3}\rangle$, $|v_{k\oplus 4}\rangle$, $|v_{k\oplus 5}\rangle$ y $|v_{k\oplus 6}\rangle$, idealmente (sin embargo *no son mutuamente ortogonales*). La linea discontinua muestra el parámetro $\bar{\epsilon}_{\bar{C}^7}$ definido en el texto. 36
- 4.3. Resultados experimentales para las desigualdades definidas en (3.46) y (3.47): (a) usando como estado inicial cada uno de los 7 estados del grafo C^7 más el estado “maximal” $|\Psi_{\max}\rangle$. La desigualdad (3.46) es violada para este estado maximal, a diferencia de los demás, cuyos valores estan en buen término con el valor teórico (3.56) (indicada por la primera linea discontinua de la izquierda). NCHV (ideal) indica el límite no contextual en el caso ideal donde $\bar{\epsilon} = 0$. NCHV (upper bound) indica el límite recalculado tomando en cuenta el valor actual de $\bar{\epsilon}$ obtenido del test de exclusividad para C^7 . La última linea indica el valor teórico de $S(C^7)$ usando el estado maximal $|\Psi_{\max}\rangle$. (b) usando como estado inicial cada uno de los 7 estados del grafo \bar{C}^7 más el estado “maximal” $|\bar{\Psi}_{\max}\rangle$. La desigualdad (3.47) es violada para este estado maximal, a diferencia de los demás, cuyos valores estan en buen término con el valor teórico (3.57) (indicada por la primera linea discontinua de la izquierda). Análogamente, NCHV (ideal) indica el límite no contextual en el caso ideal, NCHV (upper bound) indica el límite recalculado tomando en cuenta el valor actual de $\bar{\epsilon}$ obtenido del test de exclusividad para \bar{C}^7 y la última linea indica el valor teórico de $S(\bar{C}^7)$ usando el estado maximal $|\bar{\Psi}_{\max}\rangle$. . . 37
- 4.4. Violación experimental de (3.46). Ver detalles abajo. 39

4.5. Valores experimentales de las violaciones de la desigualdades (3.46) y (3.47) usando los estados maximales de las LOOR asociadas a C^7 (y \bar{C}^7). NC limit (ideal) representa el valor teórico para el límite de $S(C^7)$ ($S(\bar{C}^7)$) usando teorías de variables ocultas no contextuales. NC limit es el límite no contextual cuando $\bar{\epsilon}_{C^7} = 0,0161$ ($\bar{\epsilon}_{\bar{C}^7} = 0,0067$). Q limit (lower bound) es el límite inferior cuántico obtenido con el test de exclusividad. Q limit es el valor teórico para $S(C^7)$ ($S(\bar{C}^7)$) usando el estado maximal correspondiente. Q limit (upper bound) es el límite superior cuántico obtenido con el test de exclusividad. 39



Capítulo 1

Introducción

El teorema de Kochen-Specker (KS) es un teorema de imposibilidad (*no-go theorem* en inglés), el cual enuncia que para cualquier sistema cuántico de dimensión $d \geq 3$, siempre existirá un set de preguntas *yes-no* para los cuales, sin importar como el sistema este preparado, las predicciones de la teoría cuántica no son posibles de reproducir con cualquier teoría que asuma que los resultados de la mediciones estan predefinidos y son independientes de otras medidas compatibles en el experimento [1]. Aparte de estos sets KS existen otros donde la manera en que esté preparado el sistema tiene relevancia para que las correlaciones presentes no puedan ser explicadas clasicamente. Este teorema es de especial relevancia en la aplicación de la teoría cuántica a la comunicación y computación cuántica [2–6]. Las correlaciones contextuales cuánticas son detectadas experimentalmente a través de la violación de desigualdades considerando teorías de variables ocultas no contextuales, llamadas desigualdades no contextuales (NC) [7, 8].

El trabajo que se expone en esta tesis partió como una propuesta dada por Adan Cabello. La idea era bastante simple; en la búsqueda de principios fundamentales que expliquen porqué la naturaleza funciona tal como dice la mecánica cuántica (esto es, las razones de que ciertas preparaciones de experimentos presentan correlaciones distintas a lo que predicen teorías de variables deterministas y realistas y porqué estas correlaciones no son más fuertes de lo que permiten teorías de probabilidades generalizadas) uno de los caminos posibles consiste en analizar como son las relaciones entre eventos

de un grupo de preguntas yes-no, esto es, un conjunto de medidas proyectivas de rango 1 con ciertas relaciones de ortogonalidad. El uso de grafos es apropiado en este sentido, ya que nos permite ordenar, relacionar con elementos simples tales conexiones y catalogar grafos según sus propiedades, las que encierran características importantes para la teoría cuántica. En efecto, se ha probado una condición necesaria para que existan correlaciones contextuales cuánticas usando la teoría de grafos: la teoría cuántica solo viola desigualdades NC si su grafo de exclusividad asociado contiene ciclos impares de 5 o más vértices, o sus complementos, como subgrafos inducidos. Es por esta razón que el primer capítulo estará enteramente dedicado a introducir y dar las herramientas necesarias para entender como trabajar con grafos en su definición más simple. En el segundo capítulo se abordará una introducción de conceptos básicos de mecánica cuántica, de contextualidad cuántica y la exposición de la teoría de grafos de exclusividad que es fundamental en la demostración experimental llevada a cabo en este trabajo de tesis. El tercer capítulo abarca los detalles experimentales y la fundamentación de por qué es útil y apropiado para el fin de esta tesis. Finalmente se mostrarán los resultados experimentales tanto como las conclusiones respectivas.

Capítulo 2

Teoría de grafos

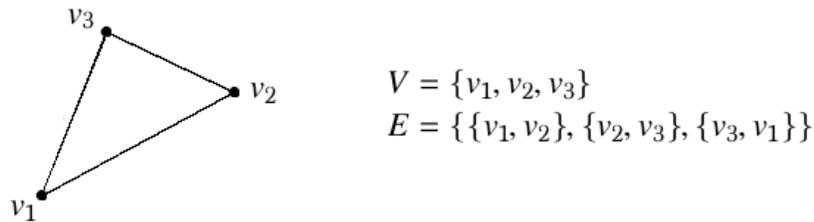
2.1. Definiciones básicas

La Teoría de Grafos en su versión más simple trabaja dos elementos básicos; vértices y aristas, las últimas correspondientes a uniones entre vértices. Luego, un grafo $G = (V, E)$ es un objeto matemático conformado por un conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, y un conjunto de pares ordenados (aristas) $E = \{\{v_i, v_j\}, \{v_k, v_l\}, \dots\}$, donde uno debe especificar cuales pares de vértices están unidos. En la figura 2.1 podemos ver un ejemplo del grafo completo K^3 .

Actualmente existen muchas definiciones de grafos, con sus respectivas cualidades. Este trabajo tratará solo de grafos *simples*, o sea, de grafos que solo aceptan una sola arista uniendo dos vértices cualquiera (cuando acepta dos o más aristas esto se llama *multigrafo* o *pseudografo*). Existen otros tipos de grafos (grafos dirigidos, hipergrafos, etc.) pero estos no serán relevantes en esta investigación.

La forma usual de representar un grafo es dibujar un punto por cada vértice y unir dos vértices con líneas si estos forman una arista. Es bueno notar que la forma en que estos puntos y líneas están dibujados es irrelevante: lo único que importa es que la información de qué pares de vértices están unidos y qué pares no estén fielmente mostrada.

Un grafo cuyo conjunto de vértices es V se denomina grafo *en* V . Al conjunto de

Figura 2.1: Grafo K^3 .

vértices de G se le denomina $V(G)$ y al conjunto de aristas $E(G)$. Esta convención es independiente de los nombres que actualmente tengan ambos conjuntos. Por ejemplo, el conjunto de vértices del grafo $W = (H, F)$ es $V(W)$ y no $H(W)$ así como el conjunto de aristas es $E(W)$ y no $F(W)$.

El número de vértices de un grafo G es llamado *orden* de G y se denota $|G|$ mientras que el número de aristas se denota $\|G\|$. Un grafo puede ser *finito* o *infinito* dependiendo de su orden y en general, a menos que se especifique lo contrario, cada vez que se habla de un grafo G se asume que es finito. Para los propósitos de este trabajo basta con considerar cualquier grafo como finito.

Un vértice v es *incidente* con una arista e si $v \in e$; luego e es una arista en v . Los dos vértices incidentes con una arista se denominan *extremos* y una arista *une* ambos extremos. Una arista $\{x, y\}$ generalmente se escribe como xy o yx .

Dos vértices x, y de G son *adyacentes* o *vecinos* si xy es una arista de G . Dos aristas e, f de G son *adyacentes* si tienen algún extremo en común. Si todos los vértices de G son adyacentes de a pares decimos que G es un grafo *completo*. Un grafo completo de orden n (n vértices) se denomina K^n . K^3 es llamado *triángulo*.

Si existen vértices o aristas no adyacentes de a pares estos son llamados *independientes*. Formalmente, un conjunto de vértices o aristas es *independiente* (o *estable*) si ningún par de estos son adyacentes.

Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos. Decimos que G y G' son *isomorfos*, y lo denotamos como $G \simeq G'$ si existe una biyección $\varphi : V \rightarrow V'$ con $xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$ para todo $x, y \in V$. Tal mapeo φ es llamado un *isomorfismo* y $G = G'$ es llamado un *automorfismo*. En general no se hace distinción entre grafos isomorfos y luego se usa la

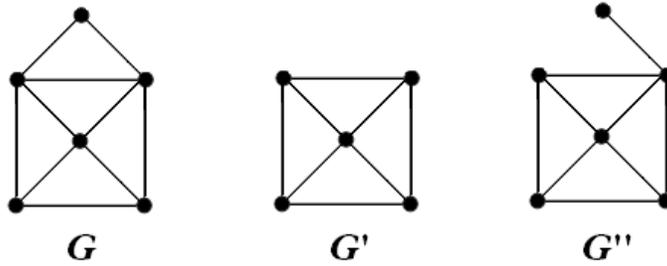


Figura 2.2: Grafo G y dos subgrafos G' y G'' : G' es un subgrafo inducido de G , pero no G'' .

notación $G = G'$ en vez de $G \simeq G'$. Un mapeo que tiene grafos como argumentos es llamado un *invariante de un grafo* si asigna los mismos valores a grafos isomorfos entre si. El número de vértices y el número de aristas son dos simples invariantes de grafos; el mayor número de vértices adyacentes de a pares es otro.

Escribimos $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$ y $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$. Si $G \cap G' = \emptyset$ entonces G y G' son *disjuntos*. Si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$ entonces G' es un *subgrafo* de G (y G es un *supergrafo* de G') y se denota como $G' \subseteq G$. Se suele decir que G *contiene* a G' .

Si $G' \subseteq G$ y G' contiene *todas* las aristas $xy \in E$ con $x, y \in V'$, entonces G' es un *subgrafo inducido* de G ; decimos que V' *induce* o *expande* G' en G , y luego escribimos $G' =: G[V']$. Luego, si $U \subseteq V$ es un conjunto de vértices, entonces $G[U]$ denota el grafo en U cuyas aristas son precisamente las aristas de G cuyos dos extremos estan en U . Si H es un subgrafo de G , no necesariamente inducido, abreviamos $G[V(H)]$ a $G[H]$. Finalmente. $G' \subseteq G$ es un subgrafo *de expansión* de G si V' expande todo los elementos de G ; esto es, si $V = V'$.

Si U es un conjunto cualquiera de vértices (usualmente con vértices comunes a G) llamamos $G - U$ a $G[V \setminus U]$. En otras palabras $G - U$ se obtiene de G al eliminar todos los vértices en $U \cap V$ con sus respectivas aristas incidentes. Si $U = \{v\}$ es un conjunto unitario se suele escribir $G - v$ en vez de $G - \{v\}$. En vez de $G - V(G')$ se suele escribir $G - G'$. Para un subconjunto F de $[V]^2$ escribimos $G - F := (V, G \setminus F)$ y $G + F := (V, G \cup F)$; así también $G - \{e\}$ y $G + \{e\}$ son abreviados como $G - e$ y $G + e$. Decimos es G es *arista-maximal* con una cierta propiedad de grafos si G en si mismo tiene tal propiedad

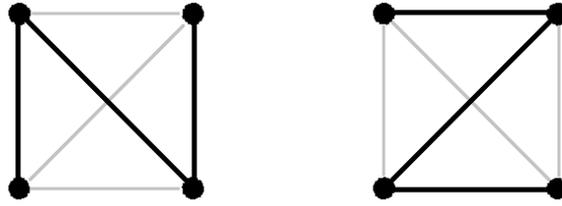


Figura 2.3: Un grafo isomorfo a su complemento. El grafo de la derecha considera como sus aristas (en negro) los pares de vértices del grafo de la izquierda sin uniones (color gris) y viceversa.

pero no $G + xy$, para dos vértices no adyacentes $x, y \in G$.

En general, cuando llamamos a un grafo *minimal* o *maximal* bajo alguna propiedad pero no hemos especificado ningún ordenamiento en particular nos estamos refiriendo a una relación de un subgrafo. Cuando nos referimos a un conjunto minimal o maximal de vértices o aristas, la referencia es solo a la inclusión de un conjunto de estos.

Si G y G' son disjuntos, escribimos como $G * G'$ al grafo obtenido de $G \cup G'$ uniendo todos los vértices de G a todos los vértices de G' . Por ejemplo $K^2 * K^3 = K^5$. El *complemento* \bar{G} de G es el grafo en V con conjunto de aristas $[V]^2 \setminus E = \bar{E}$, luego $\bar{G} = (V, \bar{E})$. En palabras simples, en \bar{G} se unen todos los vértices que no estaban unidos en G y se separan todos los que iban unidos en G .

2.1.1. Caminos y ciclos

Un camino es un grafo no vacío (osea $E(G) \neq \emptyset$) $P = (V, E)$ de la forma

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \quad E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\},$$

donde los x_i son todos distintos. Los vértices x_0 y x_k están *vinculados* por P y son llamados sus *extremos*. Los vértices x_1, \dots, x_{k-1} son los vértices *internos* o *interiores* de P . El número de aristas de un camino es su *largo* y el camino de largo k es denotado como P^k . Notemos que k puede ser cero, luego $P^0 = K^1$.

Podemos referirnos a un camino con la notación $P = x_0x_1 \dots x_k$ y llamar a P como el camino de x_0 a x_k (o entre x_0 y x_k).

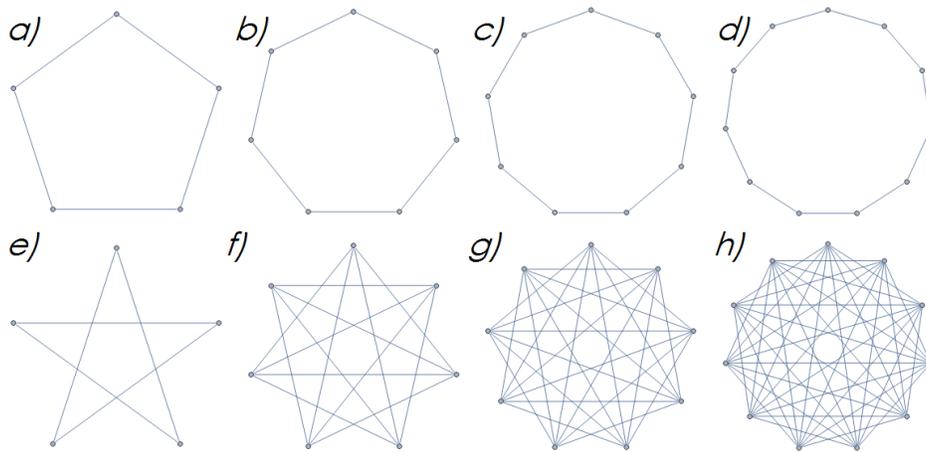


Figura 2.4: Ciclos impares y sus grafos complementarios de orden 5 o mayor: (a) C^5 , (b) C^7 , (c) C^9 , (d) C^{11} , (e) \bar{C}^5 , (f) \bar{C}^7 , (g) \bar{C}^9 , (h) \bar{C}^{11} .

Si $P = x_0x_1 \dots x_{k-1}$ es un camino con $k \geq 3$, entonces el grafo $G = P + x_{k-1}x_0$ es llamado un *ciclo*. Así como con los caminos, se puede denotar a un ciclo por su secuencia cíclica de vértices; el ciclo C mencionado arriba se escribe como $x_0 \dots x_{k-1}x_0$. El *largo* de un ciclo es su número de aristas (o vértices); el ciclo de largo k se llama k -ciclo y se denota como C^k . Como ejemplos, la figura 2.4 muestra algunos ciclos de orden impar y sus complementos, además en la figura 2.1 vemos que el grafo K^3 también es un ciclo, luego $K^3 = C^3$.

El mínimo largo de un ciclo contenido en un grafo G es el *grosor* $g(G)$ de G ; el máximo largo de un ciclo en G es su *circunferencia* (Si G no contiene ciclos el grosor se define ∞ y su circunferencia se define nula). Una arista que une dos vértices de un ciclo pero no es una arista propia del ciclo se llama una *cuerda* de ese ciclo. Luego, un *ciclo inducido* en G (un ciclo en G formando un subgrafo inducido) es aquel que no contiene cuerdas.

Se llama *agujero* de G a un ciclo inducido C^k en G con $k \geq 4$, osea, a un subgrafo inducido de G que es un ciclo de largo igual o mayor a 4. Un antiagujero de G es un subgrafo inducido en G cuyo complemento es un agujero en \bar{G} .

Un grafo G es *Berge* si cada agujero o antiagujero en G es de largo *par*.

2.2. Teorema fuerte (y débil) de los grafos perfectos

Empezaremos dando algunas definiciones. Un grafo G presenta un *clique* si contiene como subgrafo inducido un grafo completo K^n (en general, un grafo cualquiera puede tener uno o varios cliques). Se define el número clique $\omega(G)$ como el orden del mayor clique $K^n \subseteq G$. Si el clique de G más grande es K^m , entonces $\omega(G) = m$. Por otro lado, el mayor entero m tal que $\bar{K}^m \subseteq G$ es el *número de independencia* $\alpha(G)$ de G donde \bar{K}^m corresponde a un grafo de m vértices sin ninguna conexión entre ellos (grafo vacío). Claramente $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$ y $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$.

Una *vértice coloración* (o simplemente *coloración*) de un grafo $G(V, E)$ es un mapeo $c : V \rightarrow S$ tal que $c(v) \neq c(w)$ siempre que v y w sean adyacentes. Los elementos del conjunto S son llamados los *colores* disponibles. La información interesante sobre S es su tamaño: típicamente lo que interesa es saber cual es el menor entero k tal que G tenga una k -vértice coloración $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Este k es el (vértice-)número cromático de G y se denota por $\chi(G)$. Esta cantidad esta asociada a otra denotada como $\bar{\chi}(G) = \chi(\bar{G})$ la cual se define como el mínimo número de subgrafos completos tal que cubren todos los vértices de G .

De estas dos definiciones se puede deducir que $1 \leq \chi(G) \leq n$ pues los únicos grafos 1-coloreables son los grafos sin aristas (\bar{K}^n) y cuando un grafo simple tiene todas las aristas posibles (osea es un grafo completo K^n) si o si requiere de un color distinto para cada vértice pues todos los vértices estan unidos entre si ($\chi(K^n) = n$). Además, si $\omega(G) = k$ (si G contiene un clique de orden k y es el mayor clique), entonces *a lo menos* son necesarios k colores para colorear el clique (pues en un grafo completo se necesita colorear si o si cada uno de sus vértices con un color distinto, y esto condiciona una cota inferior para la coloración del grafo entero). En otras palabras $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Cuando en un grafo G se da que $\omega(H) = \chi(H)$ para cualquiera de sus subgrafos inducidos $H \subseteq G$ (y obviamente $\omega(G) = \chi(G)$), este grafo se denomina *perfecto*. El surgimiento del estudio de los grafos perfectos se atribuye a Claude Berge [9] y estuvo motivado en parte por un problema de Teoría de la Información sobre la capacidad de Shannon de un grafo [10]. En 1961 Berge propuso dos conjeturas sobre grafos perfectos.

Ya que la segunda implica la primera, fueron conocidas como las conjeturas *débil* y *fuerte* de los grafos perfectos, respectivamente, aunque actualmente ambos son teoremas:

1. El complemento de un grafo perfecto también es perfecto.
2. Un grafo es perfecto si y solo si es Berge.

El primer teorema fue probado por Lovász [11] en 1972. El segundo fue probado por Thomas *et al.* [12] en 2006. Ambas demostraciones presentan una gran longitud y complejidad por lo que no serán desarrolladas en este texto.

2.3. Representación ortogonal y Número de Lovász

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple y $\overline{G} = (V, \overline{E})$ su complemento. Una *representación ortogonal* del grafo G en \mathbb{R}^d asigna a cada vértice $i \in V$ un vector $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^d$ tal que $\mathbf{u}_i^\top \mathbf{u}_j = 0$ si $ij \in \overline{E}$. Una *representación ortonormal* es aquella donde $\mathbf{u}_i^\top \mathbf{u}_i = 1, \forall i \in V$.

Notemos que no hemos especificado acerca de si deben asociarse vectores distintos a vértices distintos o si vectores asociados a vértices adyacentes deben ser mapeados a vectores no ortogonales. Si estas condiciones son exigidas en una representación ortogonal, esta se denomina una representación *fiel*. Por ejemplo, todo grafo tiene una representación trivial en $\mathbb{R}^{|G|}$ donde cada vértice i es representado por un vector de la base estandar \mathbf{e}_i . Por supuesto, está *no* es una representación fiel a menos que G no tenga aristas.

También existen representaciones que requieren menos cantidad de vectores que número de vértices presentes en el grafo. Tomando el ciclo $C^5 = x_0x_1x_2x_3x_4x_0$ podemos realizar una representación trivial simplemente asignando 3 vectores ortonormales; el vector \mathbf{u}_1 a los vértices x_0 y x_1 , otro vector \mathbf{u}_2 a los vértices x_2 y x_3 y un último vector \mathbf{u}_3 al vértice x_4 , donde $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ y \mathbf{u}_3 forman la base estandar en \mathbb{R}^3 .

Existe una forma distinta de crear una representación ortonormal que puede ser asociada geoméricamente a la forma de un *paraguas*. Tomemos de nuevo el ciclo C^5 ; consideremos cinco vectores unitarios en \mathbb{R}^3 cuya disposición es como la de las varillas

de un paraguas semiabierto. Luego abrimos las varillas de forma que las varillas no consecutivas formen un ángulo recto entre ellas; de esta forma se obtienen cinco vectores unitarios $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ y \mathbf{u}_5 asignados a los vértices de C^5 tal que cada \mathbf{u}_i forma el mismo ángulo con el eje central (el *mango* del paraguas) y cualquier par de vértices no adyacentes están asignados a vectores ortogonales.

Naturalmente surge una interrogante: ¿qué es lo que hace más conveniente una representación que otra?. Esto obviamente depende de con qué finalidad se quiere realizar tal representación. Existe una función llamada *función theta de Lovász*, también llamada simplemente número de Lovász, que está asociada a un grafo G y a una representación ortonormal especial y se define como

$$\vartheta(G) = \frac{1}{\cos^2(\phi)} = \min_{(\mathbf{u}_i), \mathbf{c}} \max_{i \in V} \frac{1}{(\mathbf{c}^\top \mathbf{u}_i)^2} \quad (2.1)$$

donde el mínimo es tomado sobre todas las representaciones ortonormales $(\mathbf{u}_i : i \in V)$ y todos los vectores unitarios \mathbf{c} (los que se denominan usualmente como el *mango* de la representación). Para tal representación se puede visualizar un cono de revolución en dimensión arbitraria en cuya (hiper)superficie residen todos los vectores de la representación y entonces ϕ sería el ángulo medio más pequeño de tal cono.

Este número surgió al intentar calcular una función llamada *capacidad de Shannon*, la cual es necesaria en teoría de la información pues da un límite a la cantidad de palabras enviadas por un cierto canal con ruido tal que dos palabras nunca se puedan confundir entre sí. En [14] Shannon la definió como

$$\Theta(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\alpha(G^{\boxtimes k})} \quad (2.2)$$

donde α es el número de independencia y $G^{\boxtimes k}$ es el producto fuerte de k copias de G . Ya que en general se cumple que $\alpha(G \boxtimes G') \leq \alpha(G)\alpha(G')$ y en consecuencia $\alpha(G^{\boxtimes k}) \leq \alpha(G)^k$, se puede derivar que $\Theta(G) \geq \alpha(G)$. En [10] Lovász demostró que $\Theta(G) \leq \vartheta(G)$ lo que sumado a considerar el *teorema del sandwich* [13] nos proporciona la siguiente relación:

$$\alpha(G) \leq \Theta(G) \leq \vartheta(G) \leq \chi(\bar{G}). \quad (2.3)$$

Veremos que la relación (2.3) será muy útil al definir propiedades de los grafos de interés fundamental en esta tesis. Es fácil notar que para todo grafo perfecto la relación (2.3) se convierte en igualdad:

$$\alpha(G) = \Theta(G) = \vartheta(G) = \chi(\bar{G}) \quad (2.4)$$

ya que, llamando a los teoremas fuerte y débil de los grafos perfectos, $\omega(G) = \chi(G)$ y luego $\omega(\bar{G}) = \chi(\bar{G}) \Leftrightarrow \alpha(G) = \chi(\bar{G})$. Esto nos proporciona una poderosa conclusión: basta que un grafo G contenga al menos un agujero impar o antiagujero impar de orden $k \geq 5$ para que G no sea perfecto, y en consecuencia la relación (2.3) cambie a lo siguiente:

$$\alpha(G) < \Theta(G) \leq \vartheta(G) < \chi(\bar{G}). \quad (2.5)$$

2.3.1. Propiedades del número de Lovász para los ciclos impares y sus complementos

Los ciclos impares y sus complementos poseen ecuaciones bien conocidas para el número de independencia y de Lovász (esta última mostrada por Shannon en [10]) los que se muestran a continuación:

$$\alpha(C^n) = \frac{n-1}{2}, \quad \alpha(\bar{C}^n) = 2, \quad (2.6)$$

$$\vartheta(C^n) = \frac{n \cos(\pi/n)}{1 + \cos(\pi/n)}, \quad \vartheta(\bar{C}^n) = \frac{1 + \cos(\pi/n)}{\cos(\pi/n)}, \quad (2.7)$$

donde es interesante mostrar como caso particular $\vartheta(C^5) = \vartheta(\bar{C}^5) = \sqrt{5} \approx 2,2361$. Para este ciclo se tiene también que $\alpha(C^5) = 2$ y $\chi(\bar{C}^5) = \chi(C^5) = 3$, esto último ya que $C^5 = \bar{C}^5$ es un automorfismo (osea C^5 es *autocomplementario*). En la tabla 2.1 se muestra una serie de valores aproximados del número de independencia y número de Lovász para los ciclos impares $k = 5$ hasta $k = 13$ y el complemento del ciclo \bar{C}^7 que es el antiagujero más pequeño que no es autocomplementario.

k	5	7	9	11	13	k	7
$\alpha(C^k)$	2	3	4	5	6	$\alpha(\bar{C}^k)$	2
$\vartheta(C^k)$	2.2361	3.3177	4.3601	5.3863	6.4042	$\vartheta(\bar{C}^k)$	2.1099

Tabla 2.1: $\alpha(G)$ y $\vartheta(G)$ para algunos C^k y \bar{C}^k

La función de Lovász permite definir un cierto tipo de representación ortogonal llamada *representación ortonormal Lovász-óptima* (*Lovász-optimum orthonormal representation* o LOOR). Una representación ortonormal de G es Lovász-óptima si existe un vector unitario $|\Psi\rangle$, llamado *handle* (*manilla* o *mango*), tal que

$$\sum_{j=1}^n |\langle v_j | \Psi \rangle|^2 = \vartheta(\bar{G}). \quad (2.8)$$

donde los $\{|v_j\rangle\}_{j=1,n}$ son los vectores de la representación ortonormal (notese que aún cuando la representación ortonormal es de G , el número de Lovász obtenido corresponde al grafo complementario \bar{G}).

Capítulo 3

Conceptos de mecánica cuántica

En este capítulo revisaremos algunas definiciones y notaciones básicas de la teoría cuántica que serán utilizadas a lo largo de la tesis. Cabe notar que los sistemas cuánticos implementados en el experimento son, bajo ciertas hipótesis, de dimensión finita y que los estados cuánticos que los representan son puros. También desarrollaremos una introducción al fenómeno de contextualidad seguida de una breve demostración del teorema de Kochen Specker propuesto por Adán Cabello *et al.* [23] y desarrollado experimentalmente por Gustavo Lima *et al.* [24]. Finalizaremos este capítulo con el formalismo de los grafos de exclusividad que constituyen bloques fundamentales para la teoría cuántica y que son pieza clave en la demostración experimental desarrollada en este trabajo de tesis.

3.1. Conceptos básicos

El formalismo matemático usado en mecánica cuántica es el de los espacios vectoriales complejos. La notación usada regularmente es la notación de *kets* y *bras* desarrollada por P. A. M. Dirac. Mas precisamente, se considera un espacio vectorial complejo cuyas características son delimitadas por la naturaleza del sistema físico bajo consideración, esto es, la cantidad de grados de libertad presentes en él. Así, por ejemplo, en el experimento de Stern-Gerlach el único grado de libertad es el spin de un átomo y la

dimensionalidad viene determinada por la cantidad de caminos posibles que pueden tomar los átomos después de atravesar el aparato de medida que genera una zona de campo magnético no uniforme.

3.1.1. Estado cuántico y operadores de medida

Un *estado cuántico* (o *vector de estado*) es un objeto matemático que contiene toda la información sobre un sistema cuántico, el que está representado por un vector unitario $|\psi\rangle$ en el espacio vectorial complejo \mathcal{H} . Siguiendo la notación de Dirac, llamaremos a tal vector un *ket*. Así también, llamaremos *bra* y denotaremos por $\langle\psi|$ a cualquier elemento del espacio dual de Hilbert. Se postula que existe una correspondencia uno-a-uno entre el espacio de kets y el espacio de bras (*correspondencia dual* o *CD*):

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &\stackrel{CD}{\leftrightarrow} \langle\alpha| \\ |a'\rangle, |a''\rangle, \dots &\stackrel{CD}{\leftrightarrow} \langle a'|, \langle a''|, \dots \\ |\alpha\rangle + |\beta\rangle &\stackrel{CD}{\leftrightarrow} \langle\alpha| + \langle\beta| \\ c_\alpha|\alpha\rangle + c_\beta|\beta\rangle &\stackrel{CD}{\leftrightarrow} c_\alpha^*\langle\alpha| + c_\beta^*\langle\beta|. \end{aligned}$$

Notemos que uno de los postulados físicos es que $|\psi\rangle$ y $c|\psi\rangle$ describen el mismo estado físico. En otras palabras, solo la *dirección* en el espacio vectorial es relevante y muchas veces se prefiere usar el término *rayo* en vez de vector para este elemento.

En la teoría cuántica, el *producto interno* se define como una operación entre un bra y un ket. Este producto se escribe como sigue,

$$\langle\beta|\alpha\rangle = (\langle\beta| \cdot (|\alpha\rangle)), \quad (3.1)$$

y, en general, da como resultado un número complejo.

Con respecto a este producto, en la teoría se postulan dos propiedades fundamentales. Primero,

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*. \quad (3.2)$$

En otras palabras, $\langle\beta|\alpha\rangle$ y $\langle\alpha|\beta\rangle$ son complejos conjugados uno del otro. De esta última ecuación se deduce que $\langle\alpha|\alpha\rangle$ debe ser un número real.

El segundo postulado sobre el producto interno es

$$\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0, \quad (3.3)$$

donde la igualdad se cumple solo si $|\alpha\rangle$ es un *ket nulo*. Este postulado es esencial en la interpretación probabilística de la mecánica cuántica.

Dos kets $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ se dicen ortogonales si

$$\langle\beta|\alpha\rangle = 0. \quad (3.4)$$

Dado un ket no nulo, se obtiene el ket normalizado $|\hat{\alpha}\rangle$, de la siguiente forma:

$$|\hat{\alpha}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}} \right) |\alpha\rangle, \quad (3.5)$$

con la propiedad $\langle\hat{\alpha}|\hat{\alpha}\rangle = 1$. El término $\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}$ es conocido como *norma* de $|\alpha\rangle$. Ya que $|\alpha\rangle$ y $c|\alpha\rangle$ representan el mismo estado físico, se exige que cualquier vector que represente un estado físico esté debidamente normalizado, en el sentido de (3.5).

Un *observable*, tal como el momentum o las componentes de spin, se representan por un *operador* A en el espacio vectorial en cuestión. Usualmente un operador actúa sobre un ket por la izquierda

$$A \cdot (|\psi\rangle) = A|\psi\rangle, \quad (3.6)$$

el cual es simplemente otro ket. En general, $A|\psi\rangle$ no es una constante por $|\psi\rangle$. Sin embargo, existen ciertos kets importantes llamados *eigenkets* del operador A denotados como $|a'\rangle$, $|a''\rangle$, $|a'''\rangle$, ... con la propiedad

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle, \quad A|a''\rangle = a''|a''\rangle, \quad \dots \quad (3.7)$$

donde a' , a'' , ... son solo números (en general $a', a'', \dots \in \mathbb{C}$). El conjunto de números $\{a', a'', a''', \dots\}$ es llamado el conjunto de *eigenvalores* del operador A . Notemos que un

espacio vectorial N -dimensional puede ser expandido por los N eigenkets del observable A . Cualquier ket arbitrario $|\alpha\rangle$ puede ser escrito como

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'}^N c_{a'} |\alpha'\rangle, \quad (3.8)$$

donde los $c_{a'}$ son componentes complejos. Esta expansión es única pues el conjunto de eigenkets $\{|\alpha'\rangle\}$ es ortonormal y forman un conjunto linealmente independiente.

Estos operadores respetan las reglas de conmutación y asociatividad para la adición, y en general son lineales (salvo, por ejemplo, el operador de inversión temporal). Sin embargo, las operaciones de multiplicación entre ellos en general *no son conmutativas*, esto es,

$$XY \neq YX \quad (3.9)$$

aunque si son asociativas ($X(YZ) = (XY)Z = XYZ$). Un operador siempre actúa sobre un bra por la derecha y sobre un ket por la izquierda. El ket $X|\alpha\rangle$ y el bra $\langle\alpha|X$ en general no son duales. Luego, se define el símbolo X^\dagger como

$$X|\alpha\rangle \stackrel{CD}{\leftrightarrow} \langle\alpha|X^\dagger \quad (3.10)$$

El operador X^\dagger es llamado *operador adjunto* de X . Un operador X es *hermítico* (o *auto-adjunto*) si

$$X = X^\dagger. \quad (3.11)$$

Los eigenvalores de un operador hermítico son *reales* y los eigenkets correspondientes a diferentes eigenvalores son ortogonales entre sí. La ortogonalidad de los eigenkets se resume en la ecuación

$$\langle a'' | a' \rangle = \delta_{a'' a'}. \quad (3.12)$$

En teoría cuántica solo se consideran operadores hermíticos para representar cantidades observables, esto es, operadores relacionados a cantidades físicas medibles. Esto tiene sentido ya que los eigenvalores de un operador representan los *posibles resultados de medir un cierto observable* y no correspondería considerarlos como valores complejos.

Habíamos visto ya que los eigenket de un observable A sirven como base para expandir cualquier estado $|\alpha\rangle$. Si multiplicamos ambos lados de la ecuación (3.8) por

$\langle a''|$ por la izquierda y usamos la propiedad de ortogonalidad (3.12) inmediatamente encontramos una expresión para el coeficiente de expansión,

$$c_{a'} = \langle a'|\alpha\rangle. \quad (3.13)$$

Usando esta expresión en (3.8) tenemos

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'}^N |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle. \quad (3.14)$$

Ya que $|\alpha\rangle$ es un ket arbitrario, tenemos que

$$\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'| = 1, \quad (3.15)$$

donde el uno del lado derecho debe ser entendido como el *operador identidad*. La ecuación (3.15) es conocida como *relación de completitud o cierre*. Esta relación, usando el hecho de que para un estado $|\alpha\rangle$ bien normalizado se cumple $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$, implica que

$$\sum_{a'} |c_{a'}|^2 = \sum_{a'} |\langle a'|\alpha\rangle|^2 = 1. \quad (3.16)$$

Al observar la expresión (3.14) vemos que el operador $|a'\rangle\langle a'|$ selecciona una porción del ket $|\alpha\rangle$ paralela a $|a'\rangle$. Por esta propiedad $|a'\rangle\langle a'|$ es conocido como el *operador de proyección* o simplemente *proyector* a lo largo del ket base $|a'\rangle$. Usaremos la notación $\Pi_{a'}$,

$$\Pi_{a'} \equiv |a'\rangle\langle a'|. \quad (3.17)$$

Finalmente, la relación de completitud (3.15) la reescribimos como

$$\sum_{a'} \Pi_{a'} = 1. \quad (3.18)$$

3.1.2. Representación matricial

Sabiendo ya que se puede expresar cualquier estado cuántico usando una base ortogonal formada por los eigenkets de cierto observable X , pasamos a usar esta propiedad para la representación matricial de este operador. Usando la propiedad de cierre dos veces escribimos el operador X como

$$X = \sum_{a''} \sum_{a'} |a''\rangle \langle a''|X|a'\rangle \langle a'|. \quad (3.19)$$

Esta ecuación presenta una serie de N^2 números de la forma $\langle a''|X|a'\rangle$ donde N es la dimensión del espacio de kets. Todos estos términos pueden ser ordenados dentro de una matriz cuadrada $N \times N$ tal que cada elemento en una columna y fila específica sea indicada como sigue:

$$\begin{array}{c} \text{fila} \\ \langle a''| \\ X \\ |a'\rangle \end{array} \begin{array}{c} \text{columna} \\ |a'\rangle \end{array}. \quad (3.20)$$

Explícitamene, la matriz se escribe como

$$X \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|X|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(1)}|X|a^{(2)}\rangle & \dots \\ \langle a^{(2)}|X|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(2)}|X|a^{(2)}\rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

donde el símbolo \doteq quiere decir “es representado por”. Notemos que para cada elemento de esta matriz se cumple $\langle a''|X|a'\rangle = \langle a'|X^\dagger|a''\rangle^*$. Es gracias a esta propiedad con la que identificamos al operador hermítico con la *matriz compleja conjugada transpuesta* (obviamente $\langle a''|X|a'\rangle = \langle a'|X|a''\rangle^*$ si X es hermítico).

De la misma forma, recordando la expresión (3.14) vemos que es directa la representación siguiente

$$|\alpha\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\alpha\rangle \\ \langle a^{(2)}|\alpha\rangle \\ \langle a^{(3)}|\alpha\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

y por consiguiente para el bra $\langle \alpha| = \sum_{a'} \langle \alpha|a'\rangle \langle a'|$ se tiene

$$\langle \alpha| \doteq (\langle \alpha|a^{(1)}\rangle, \langle \alpha|a^{(2)}\rangle, \langle \alpha|a^{(3)}\rangle, \dots) \quad (3.23)$$

$$\doteq (\langle a^{(1)}|\alpha\rangle^*, \langle a^{(2)}|\alpha\rangle^*, \langle a^{(3)}|\alpha\rangle^*, \dots). \quad (3.24)$$

El producto interno $\langle \beta|\alpha\rangle$ es representado como el producto de $\langle \beta|$ en su forma de matriz fila con la matriz columna que representa a $|\alpha\rangle$:

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \sum_{a'} \langle \beta | a' \rangle \langle a' | \alpha \rangle \quad (3.25)$$

$$= (\langle a^{(1)} | \beta \rangle^*, \langle a^{(2)} | \beta \rangle^*, \dots) \begin{pmatrix} \langle a^{(1)} | \alpha \rangle \\ \langle a^{(2)} | \alpha \rangle \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

La representación del observable A se vuelve simple si usamos sus propios eigenkets. Primero tenemos que

$$A = \sum_{a''} \sum_{a'} |a''\rangle \langle a'' | A | a'\rangle \langle a'|. \quad (3.27)$$

Sin embargo, la matriz cuadrada $\langle a'' | A | a'\rangle$ es obviamente diagonal, lo que se hace evidente si vemos que $\langle a'' | A | a'\rangle = a' \delta_{a'a''}$ y por lo tanto

$$A = \sum_{a'} a' |a'\rangle \langle a'| \quad (3.28)$$

$$= \sum_{a'} a' \Pi_{a'}. \quad (3.29)$$

3.1.3. Probabilidad y medida

Habíamos dicho que el observable A representa una cantidad física posible de medir. Antes que la medida del observable A sea realizada, asumimos que el estado del sistema está descrito por cierta combinación lineal

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'} |a'\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a' | \alpha \rangle. \quad (3.30)$$

Luego de haber realizado tal medición, el sistema “cae dentro” de uno de sus eigenestados, por ejemplo el eigenket $|a'\rangle$ del observable A . En otras palabras

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{\text{medición de } A} |a'\rangle. \quad (3.31)$$

Esto se interpreta como que el estado del sistema reside en una superposición de “direcciones” arbitrarias representadas por cada uno de los eigenkets base $|a'\rangle$ de A . Por lo tanto, después de la medida el sistema colapsa en uno de ellos. Entonces, en general,

una medición cambia el estado. La única excepción ocurre cuando el sistema ya está en uno de los eigenestados del observable a medir por lo que en ese caso $|a'\rangle \xrightarrow{\text{med. } A} |a'\rangle$ con certeza. Es en este sentido que el resultado de una medición desemboca en uno de los eigenvalores del observable que es medido.

Sin embargo, aunque sabemos cual es la descripción del sistema antes de la medición, no somos capaces de saber a priori en cual de los varios $|a'\rangle$ el sistema colapsará. Es por ello que se postula que la probabilidad de que el sistema caiga en un $|a'\rangle$ en particular está dada por

$$\text{Probabilidad para } a' = |\langle a'|\alpha\rangle|^2, \quad (3.32)$$

dado que $|\alpha\rangle$ está normalizado.

Aunque hemos hablado de un solo sistema físico, para determinar la probabilidad (3.32) debemos considerar un gran número de medidas realizadas sobre un *ensemble puro* o colección de sistemas físicos idénticamente preparados, o sea, todos ellos caracterizados por el mismo ket $|\alpha\rangle$.

La interpretación probabilística de (3.32) para el cuadrado del producto interno $|\langle a'|\alpha\rangle|^2$ es uno de los postulados fundamentales de la mecánica cuántica, y entonces no puede ser probado.

Definimos el *valor de expectación* (o valor promedio) de A con respecto al estado $|\alpha\rangle$ como

$$\langle A \rangle \equiv \langle \alpha | A | \alpha \rangle. \quad (3.33)$$

La ecuación (3.33) es una definición pero hace sentido con la noción intuitiva de valor de medida promedio puesto que puede ser escrita como

$$\langle A \rangle = \sum_{a'} \sum_{a''} \langle \alpha | a'' \rangle \langle a'' | A | a' \rangle \langle a' | \alpha \rangle \quad (3.34)$$

$$= \sum_{a'} \underbrace{\langle \alpha | a' \rangle \langle a' | \alpha \rangle}_{\text{prob. obtener } a'} \overset{\text{valor medido } a'}{a'}. \quad (3.35)$$

3.2. Contextualidad cuántica

La teoría cuántica muestra que la naturaleza se manifiesta de formas que son contra intuitivas y que no se logran evidenciar en el ámbito cotidiano. La propiedad de los sistemas de partículas de poder entrelazarse es una de las grandes interrogantes que plantea la mecánica cuántica pues demuestra que existen conexiones no locales entre sistemas separados espacialmente que permiten la transmisión superlumínica de información de una parte a otra, contrario a los postulados en que se basa la Teoría de la Relatividad [15].

Aparte de que los sistemas cuánticos muestran no localidad en sus correlaciones, también existen otros conceptos que distinguen a la teoría cuántica con teorías clásicas como el de contextualidad. El teorema de Kochen Specker [1] (teorema KS) es un teorema de imposibilidad que restringe a las teorías de variables ocultas no contextuales que quieran describir los resultados de experimentos sobre un conjunto de operadores simultáneamente medibles. La mecánica cuántica predice que los valores de estas medidas no existen hasta que se realiza la medición, por lo que preasignar estos valores con anterioridad, y siguiendo una estadística clásica, llevaría a contradicciones al compararlos con los resultados después de la medida, lo que se ve reflejado en la violación de desigualdades no contextuales usando los llamados set KS [17].

3.2.1. Teorema de Kochen-Specker

La contextualidad es una propiedad de la mecánica cuántica y nos dice que si preasignamos valores a los resultados de un set de medidas proyectivas llegamos a contradicciones con respecto a las predicciones que la teoría cuántica dicta para el mismo experimento. Estas contradicciones son reveladas teórica y experimentalmente con desigualdades para teorías de variables ocultas no contextuales, las que son violadas si usamos los llamados sets de Kochen-Specker y estados cuánticos de un espacio de Hilbert de dimensión 3 o mayor. El teorema fue demostrado por Simon B. Kochen and Ernst Specker [1] en 1967 pero también fue demostrado en ese mismo año por J. Bell

como un corolario del teorema de Gleason [19] de 1957 .

La importancia de la demostración del Teorema de Kochen-Specker radica en su aplicación para la investigación del procesamiento de información cuántica, por ejemplo para realizar protocolos de detección de correlaciones totalmente no locales [20], juegos con ventaja cuántica independiente del estado [21] y comunicaciones cuánticas con cero error, entre otros [22]. El teorema enuncia que ninguna teoría de variables ocultas no contextuales (non-contextual hidden variables o NCHV) logra reproducir las predicciones de la mecánica cuántica en un sistema de dimensión 3 o mayor. Cualquier modelo no contextual que intente reproducir las predicciones de la mecánica cuántica debe asumir que existe una función que mapea del espacio de los observables al de los valores (osea que el resultado en una medición esta determinado por esta supuesta función que asigna tal valor al observable respectivo) y que esta función conserva las propiedades algebraicas de los operadores compatibles. En términos más sencillos, esto quiere decir que dentro de la teoría se debe generar una asignación de valores (la que en ingles es llamada *KS value assignment*). El teorema se prueba con un set de operadores (KS set) dados por proyectores de rango 1 para el cuál esta asignación de valores no concuerda con la estadística cuántica. Matemáticamente, una teoría no contextual debe asumir que:

1. *Existe una función que asigna valores $v(\hat{r}) \in \{0, 1\}$ para un determinado rayo \hat{r} que es independiente de la base en la que se encuentre.*

Un rayo se define como un proyector tal que

$$\hat{r} = \frac{|r\rangle\langle r|}{\langle r|r\rangle}, \quad \text{donde} \quad (3.36)$$

$$r = (r_1, r_2, \dots, r_d) \quad y \quad (3.37)$$

$$|r\rangle = \sum_{i=1}^d r_i |i\rangle \quad , \quad d \geq 3 \quad (3.38)$$

2. *Se preserva la estructura algebraica de los observables compatibles:*

$$v(\hat{r}_1 + \hat{r}_2) = v(\hat{r}_1) + v(\hat{r}_2) \quad y \quad v(\hat{r}_1 \hat{r}_2) = v(\hat{r}_1)v(\hat{r}_2) \quad (3.39)$$

Esta función debe ser tal que en una base ortonormal asigne a un solo rayo el valor 1 mientras que al resto el valor asignado debe ser 0. Luego, dos rayos ortogonales no pueden tener valor 1 al mismo tiempo. Sin embargo, existen sets de rayos elegidos convenientemente (KS sets) donde tal función no existe. Por ejemplo, cuando se intenta realizar la asignación de valores se ve que las reglas algebraicas 1. y 2. propias de los proyectores no se cumplen. Esto es porque aun cuando la regla de producto de proyectores obliga siempre a obtener un valor cero cuando dos de estos son medidos y ellos son ortogonales (ya que solo uno de ellos dará 1), en la práctica existen situaciones donde que un proyector de resultado 1 o 0 depende de que base o “contexto” pertenezca tal proyector y esto puede desembocar en que aunque $v(\hat{r}_1\hat{r}_2) = 0$, $v(\hat{r}_1)v(\hat{r}_2) = 1$, lo que es claramente una contradicción. O por ejemplo, siguiendo tal asignación de valores se puede llegar a que en una base completa la asignación de valores asigna a todos los proyectores el valor 0, siendo que cuánticamente si o si uno de ellos debe desembocar en el valor 1.

3.2.1.1. Demostración en dimensión 6

Para la demostración del teorema KS se necesitan los denominados “contextos”, que son bases ortonormales en el espacio de Hilbert del sistema. Entre estos contextos pueden repetirse algunos vectores (que forman los rayos), y veremos más adelante que esta característica es fundamental. La primera demostración del teorema KS requería de 132 contextos [1], sin embargo mostraremos una demostración con 21 vectores en dimensión 6 (denominada KS21) [23] [24], que son agrupados en solo 7 contextos, siendo la demostración con menor número de contextos en la actualidad, los que se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & B_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \omega & \omega^2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \omega^2 & \omega \\ 0 & 1 & \omega & \omega^2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \omega^2 & \omega & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 B_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \omega^2 & \omega \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \omega & \omega^2 \\ 0 & 1 & \omega^2 & \omega & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & B_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & \omega & \omega^2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \omega & \omega^2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \omega^2 & \omega & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 B_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & \omega^2 & \omega \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \omega & \omega^2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & \omega & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \omega & \omega^2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & B_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \omega & \omega^2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \omega^2 & \omega & 1 \\ 0 & \omega & \omega^2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \omega^2 & \omega & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 B_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \omega^2 & \omega & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \omega & \omega^2 & 1 \\ 0 & \omega^2 & \omega & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \omega & \omega^2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

donde $\omega = e^{2\pi i/3}$ y los vectores forman las columnas de cada matriz. Se han omitido los factores de normalización por simplicidad. Vemos que el set contiene 21 vectores diferentes y que cada vector pertenece a dos bases distintas. *No hay forma de que la asignación de valores requerida por una teoría no contextual mapee uno y solo uno de los vectores*

en cada base a 1 puesto que el número de bases es impar y cada vector pertenece a dos bases distintas. Esto se puede expresar con una desigualdad para la suma de probabilidades de los eventos en que una cierta medida proyectiva del set de como resultado 1 (respuesta *yes*); una teoría de variables ocultas no contextuales predice un límite superior para la desigualdad

$$\Sigma = 2 \times \sum_{i=1}^{21} P(\Pi_i = 1) \stackrel{\text{NCHV}}{\leq} 6 \quad (3.40)$$

donde $\Pi_i = |\text{KS}_i\rangle\langle\text{KS}_i|$ es un proyector formado por el vector i del set de 21 vectores distintos $\{|\text{KS}_i\rangle\}_{i=1}^{21}$ y $P(\Pi_i = 1) = |\langle\text{KS}_i|\psi\rangle|^2$ es la probabilidad de que se proyecte el estado $|\psi\rangle$ sobre Π_i . Esta desigualdad es violada por la teoría cuántica para cualquier estado en el espacio de Hilbert de dimensión 6 con un valor de

$$\Sigma \stackrel{\text{Q}}{=} 7. \quad (3.41)$$

Como ya mencionamos, la violación de la desigualdad (3.40) es independiente del estado cuántico usado, incluso si es puro o mezcla (esto es, si no hay certeza de cual es el estado que describe exactamente al sistema cuántico).

3.3. Grafos de exclusividad

Existen dos grafos que se asocian a cualquier desigualdad NC. Por un lado estan los gráficos de compatibilidad, donde los vértices representan los observables de la desigualdad NC y los vértices unidos implican que ambos observables son compatibles (ed. simultaneamente medibles) [16]. Tomemos como ejemplo la desigualdad CHSH,

$$\beta = \langle A_0 B_0 \rangle + \langle A_0 B_1 \rangle + \langle A_1 B_0 \rangle - \langle A_1 B_1 \rangle \leq 2, \quad (3.42)$$

donde $\langle A_i B_j \rangle$ representa el valor de espectación de los productos de los resultados de medir los observables A_i y B_j , cada uno teniendo como posibles resultados 0 o -1 o 1, y ≤ 2 indica que 2 es el máximo valor de β para teorías no contextuales de variables ocultas (non-contextual hidden variables, NCHV). En esta desigualdad hay

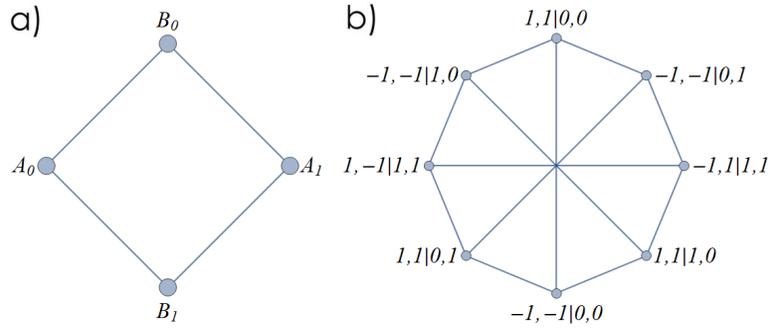


Figura 3.1: (a) El grafo de compatibilidad de experimento CHSH. (b) El grafo de exclusividad de la desigualdad (3.44).

4 observables: A_0 , B_0 , A_1 y B_1 y los únicos pares de observables no compatibles son (A_0, A_1) y (B_0, B_1) . El grafo de compatibilidad asociado a la desigualdad es un cuadrado con vértices sucesivos A_0 , B_0 , A_1 y B_1 .

Por otro lado, los grafos de exclusividad [25] son aquellos donde los vértices representan eventos y los vértices adyacentes implican que ambos eventos no pueden ocurrir al mismo tiempo (ed. son excluyentes). Tomando en cuenta que

$$\pm \langle A_i B_j \rangle = 2[P(1, \pm 1|i, j) + P(-1, \mp 1|i, j)] - 1, \quad (3.43)$$

donde $P(a, b|i, j)$ es la probabilidad de que el evento “el resultado a se obtenga cuando se mida A_i y el resultado b se obtenga cuando se mida B_j ”, la desigualdad (3.42) se reescribe como

$$\begin{aligned} S &= \frac{\beta}{2} + 2 \\ &= P(1, 1|0, 0) + P(-1, -1|0, 0) + P(1, 1|0, 1) + P(-1, -1|0, 1) \\ &\quad + P(1, 1|1, 0) + P(-1, -1|1, 0) + P(1, -1|1, 1) + P(-1, 1|1, 1) \stackrel{NCHV}{\leq} 3, \end{aligned} \quad (3.44)$$

donde la desigualdad ahora se ha convertido en una suma convexa de probabilidades de eventos. Los grafos de compatibilidad y exclusividad de la desigualdad CHSH son mostrados en la figura 3.1.

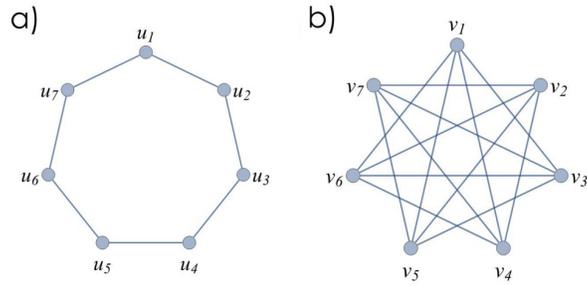
La importancia del grafo de exclusividad G es que el máximo valor de S para teorías de variables ocultas no contextuales está exáctamente dado por el número de independencia $\alpha(G)$ [25] (el cual es el máximo número de vértices sin uniones entre ellos del grafo G) mientras que el máximo valor en mecánica cuántica está limitado superiormente (y en algunos casos es exactamente alcanzado) por el número de Lovasz $\vartheta(G)$.

Lo que se desprende de esta afirmación es que cualquier experimento que presente correlaciones contextuales se asocia a un grafo de exclusividad G donde $\alpha(G) < \vartheta(G)$ (notese que la desigualdad es *estricta*). Este grafo, según la terminología seguida en [26] es llamado *grafo contextual cuántico* (*quantum contextual graph* o QCG) y en consecuencia, un grafo G para el que $\alpha(G) = \vartheta(G)$ es llamado *grafo no contextual cuántico* (*quantum noncontextual graph* o QNCG).

Las siguientes conclusiones extraídas de [26] son trascendentales pues revelan las condiciones para que un experimento presente correlaciones contextuales:

Teorema. Sea G un grafo de exclusividad asociado a una desigualdad NC. Si G es perfecto, entonces G es QNCG y como consecuencia, la desigualdad NC no es violada por la mecánica cuántica.

De esto se desprende que si G es QCG entonces G *no es perfecto*. Por el teorema de grafos perfectos fuerte (ver sección 2.2) concluimos que cualquier desigualdad NC que es violada por la mecánica cuántica contiene, como subgrafos inducidos, ciclos impares de orden 5 o mayor y/o sus grafos complementarios. Además, ningún ciclo impar o complemento de un ciclo impar tiene como subgrafo inducido un ciclo impar o complemento de un ciclo impar por lo que estos grafos pueden ser usados como grafos básicos en la descomposición de un grafo de exclusividad. **Por estas razones es que los agujeros y antiagujeros impares de orden mayor o igual a 5 son considerados QCG básicos, pues sin ellos el experimento asociado al grafo de exclusividad no presentará correlaciones contextuales.**


 Figura 3.2: (a) El grafo C^7 (b) El grafo \bar{C}^7 .

3.3.1. Desigualdades NC asociadas a grafos de exclusividad básicos

Como ya mencionamos, la desigualdad NC asociada a un grafo de exclusividad G tiene una cota superior para teorías de variables ocultas no contextuales dictada por el número de independencia y una cota superior para la mecánica cuántica dictada por el número de Lovász de G . En particular, para todo ciclo C^n con n impar ≤ 5 , existe una desigualdad NC tal que:

$$S(C^n) \stackrel{\text{NCHV}}{\leq} \alpha(C^n) \stackrel{\text{Q}}{\leq} \vartheta(C^n), \quad (3.45)$$

donde $S(C^n)$ denota una suma de probabilidades de eventos que respetan las relaciones de exclusividad representadas por C^n y tanto $\stackrel{\text{NCHV}}{\leq} \alpha(C^n)$ como $\stackrel{\text{Q}}{\leq} \vartheta(C^n)$ son especificados por las ecuaciones (2.6) y (2.7). Adán Cabello *et al.* [26] reportan expresiones explícitas para la forma de los vectores de las representaciones ortonormales Lovász-óptima de estos ciclos y sus complementos necesarios para implementar los test *yes-no*, elementos necesarios para las demostraciones del teorema de Kochen-Specker de contextualidad cuántica con desigualdades de probabilidades. Aquí mostramos una versión más simplificada de estas que sin embargo da paso a los mismos vectores. Notemos que existe literatura [25,26] donde, a diferencia de la definición matemática de una representación ortogonal, se considera que los vértices de G unidos por aristas se representan (si y solo si) por vectores ortogonales. Acá, sin embargo, recalcaremos que tal representación le corresponde al grafo complementario \bar{G} y que la utilidad de este cambio reside en que, a diferencia de la ecuación (2.1), la definición $\sum_{j=1}^n |\langle v_j | \Psi_{\max} \rangle|^2 = \vartheta(G)$ es

igual a la suma de productos internos de *estados cuánticos* y obviamente el paralelismo con la teoría cuántica es directo. Finalmente, aunque se pueden generalizar estas ecuaciones para cualquier ciclo impar (o sus complementos), para este trabajo solo serán necesarias las expresiones de los LOOR de C^7 y \bar{C}^7 pues solo se realizaron estos dos experimentos.

Para los grafos C^7 y \bar{C}^7 las siguientes desigualdades construidas como una suma de probabilidades de eventos representados por:

$$S(C^7) := \sum_{k=1}^7 P(1, 0|k, k \oplus 1) \stackrel{\text{NCHV}}{\leq} 3 \stackrel{\text{Q}}{\leq} \frac{7 \cos(\frac{\pi}{7})}{1 + \cos(\frac{\pi}{7})} \approx 3,3177, \quad (3.46)$$

$$S(\bar{C}^7) := \sum_{k=1}^7 P(1, 0, 0|k, k \oplus 2, k \oplus 4) \stackrel{\text{NCHV}}{\leq} 2 \stackrel{\text{Q}}{\leq} \frac{1 + \cos(\frac{\pi}{7})}{\cos(\frac{\pi}{7})} \approx 2,1099, \quad (3.47)$$

donde $P(1, 0|k, k \oplus 1)$ es la probabilidad de obtener los resultados 1 y 0 cuando se miden en conjunto las preguntas yes-no k y $k \oplus 1$, $P(1, 0, 0|k, k \oplus 2, k \oplus 4)$ es la probabilidad de obtener los resultados 1, 0 y 0 cuando se miden en conjunto las preguntas yes-no k , $k \oplus 2$ y $k \oplus 4$, \oplus es el símbolo de suma en modulo 7, y siguiendo la numeración de los vértices de C^7 y \bar{C}^7 como lo indica la figura 3.2, tienen exáctamente las relaciones de exclusividad representadas por C^7 y \bar{C}^7 . Los máximos cuánticos para $S(C^7)$ y $S(\bar{C}^7)$ son logrados con medidas sobre sistemas de dimensión 3 y 5, respectivamente, pero no en sistemas de dimensión inferior [26].

Si el grafo de exclusividad es $G = C^7$, una LOOR (para \bar{C}^7) esta dada por

$$|\Psi_{\max}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |u_k\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1) \\ \sin(\phi_1) \cos(\phi_2) \\ \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

donde

$$\cos(\phi_1) = \sqrt{\frac{\cos(\frac{\pi}{7})}{1 + \cos(\frac{\pi}{7})}}, \quad (3.49)$$

$$\phi_2 = \frac{6\pi k}{7}, \quad (3.50)$$

k	$u_{k,1}$	$u_{k,2}$	$u_{k,3}$
1	0.6884	-0.6535	0.3147
2	0.6884	0.4522	-0.5671
3	0.6884	-0.1614	0.7071
4	0.6884	-0.1614	-0.7071
5	0.6884	0.4522	0.5671
6	0.6884	-0.6535	-0.3147
7	0.6884	0.7253	0

Tabla 3.1: Proyectores a medir en el experimento C^7 .

k	$v_{k,1}$	$v_{k,2}$	$v_{k,3}$	$v_{k,4}$	$v_{k,5}$
1	0.5490	-0.1032	0.4522	0.4335	0.5436
2	0.5490	-0.4179	-0.2013	-0.1547	0.6779
3	0.5490	0.2892	-0.3626	-0.6264	0.3017
4	0.5490	0.2892	0.3626	-0.6264	-0.3017
5	0.5490	-0.4179	0.2013	-0.1547	-0.6779
6	0.5490	-0.1032	-0.4522	0.4335	-0.5436
7	0.5490	0.4638	0	0.6953	0

Tabla 3.2: Proyectores a medir en el experimento \bar{C}^7 .

con $k = 1, \dots, 7$.

Los valores numéricos explícitos de estos vectores para C^7 están dados en la tabla 3.1.

Por otro lado, si el grafo de exclusividad es $G = \bar{C}^7$, una LOOR (para C^7) está dada por

$$|\bar{\Psi}_{\max}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |v_k\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2) \cos(\varphi_3) \\ \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2) \sin(\varphi_3) \\ \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) \cos(\varphi_4) \\ \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) \sin(\varphi_4) \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

donde

$$\cos(\varphi_1) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\frac{\pi}{7})}{7 \cos(\frac{\pi}{7})}}, \quad (3.52)$$

$$\cos(\varphi_2) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \sqrt{\frac{2 \cos(\frac{\pi}{7})}{-1 + 6 \cos(\frac{\pi}{7})}}, \quad (3.53)$$

$$\varphi_3 = \frac{2\pi 2k}{7}, \quad (3.54)$$

$$\varphi_4 = \frac{2\pi k}{7}, \quad (3.55)$$

con $k = 1, \dots, 7$. Los valores numéricos explícitos de estos vectores para \bar{C}^7 están dados en la tabla 3.2.

Recordemos que estas LOOR en conjunto con los estados iniciales (3.48) y (3.51) llevan a la máxima violación de las desigualdades (3.46) y (3.47) dados por el número de Lovász de ambos grafos. Ambas desigualdades, a diferencia de desigualdades del tipo (3.40), son dependientes del estado inicial del sistema, lo que quiere decir que dependiendo del estado de entrada se logrará o no una violación del límite no contextual. Como ejemplo, si usamos uno de los mismos estados de cada set correspondiente a cada grafo, vemos que las sumas de probabilidades son:

$$S(C^7)_{u_k} = \sum_{j=1}^7 |\langle u_j | u_k \rangle|^2 \approx 2,54 \stackrel{\text{NCHV}}{<} 3, \quad (3.56)$$

$$S(\bar{C}^7)_{v_k} = \sum_{j=1}^7 |\langle v_j | v_k \rangle|^2 \approx 1,62 \stackrel{\text{NCHV}}{<} 2. \quad (3.57)$$

Si, por otro lado, usamos como estado inicial los vectores que maximizan las desigualdades lo que se obtiene es

$$S(C^7)_{\mathcal{Q}} = \sum_{j=1}^7 |\langle u_j | \Psi_{\max} \rangle|^2 \approx 3,3177, \quad (3.58)$$

$$S(\bar{C}^7)_{\mathcal{Q}} = \sum_{j=1}^7 |\langle v_j | \bar{\Psi}_{\max} \rangle|^2 \approx 2,1099. \quad (3.59)$$

Capítulo 4

Metodología y resultados

Para poder codificar información cuántica en dimensión d empleamos el momento transversal lineal de fotones individuales. Por ejemplo, un estado cuántico en dimensión d es creado definiendo d posibles caminos para la transmisión de un fotón a través de una apertura difractante. Para producir cada uno de los estados requeridos (7 para C^7 y 7 para \bar{C}^7) usamos un conjunto de d rendijas paralelas generadas usando una secuencia de dos moduladores espaciales de luz (*spatial light modulators* o *SLMs*). Estos SLMs son elementos ópticos usualmente compuestos de una pantalla de cristal líquido y polarizadores lineales [27,28]. Para este experimento, la configuración de los SLMs se ha optimizado gracias al uso de láminas de cuarto de onda (*quarter wave plates* o *QWPs*) colocadas entre los polarizadores lineales con el propósito de realizar las modulaciones de fase requeridas para la generación de los estados de los grafos C^7 y \bar{C}^7 .

Si la longitud de coherencia transversal del haz es mayor que la distancia separando la primera y la d -ésima rendija, el estado del fotón transmitido está dado por [29,30]

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{C}} \sum_{l=-l_d}^{l_d} \sqrt{t_l} e^{i\phi_l} |l\rangle \quad (4.1)$$

donde $l_d = \frac{d-1}{2}$ y $|l\rangle$ representa el estado del fotón transmitido por la l -ésima rendija [29]. t_l (ϕ_l) es la transmisividad (fase) definida para cada rendija y C es una constante de normalización. Las rendijas implementadas fueron de $64 \mu\text{m}$ de ancho y poseen una separación entre ellas de $128 \mu\text{m}$. La ventaja de usar SLMs para implementar las ren-

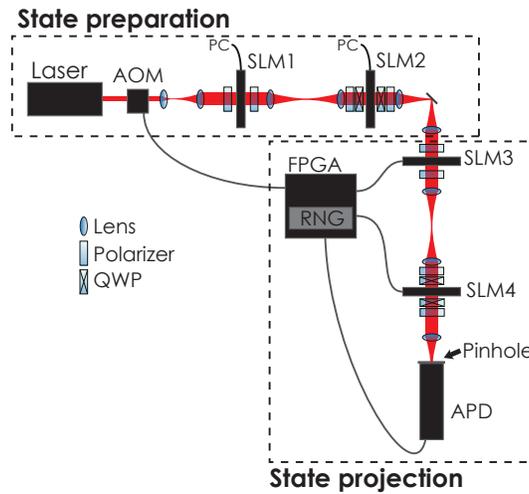


Figura 4.1: Montaje experimental. La etapa de preparación de los estados consta de una fuente de fotones individuales atenuados y dos SLMs usados par codificar cualquiera de los estados C^7 y \bar{C}^7 en el momento transversal lineal del fotón. Estos SLMs estan conectados a computadores (PC) los cuales, por simplicidad, no son mostrados en la figura. En la etapa de las medidas proyectivas se emplean otras dos SLMs que proyectan aleatoriamente el estado inicial en uno de los estados de C^7 y \bar{C}^7 . Una unidad FPGA controla todo el montaje experimental para testear las desigualdades no contextuales.

dijas es que estas nos permiten controlar t_l y ϕ_l independientemente para cada rendija modulada. La versatilidad de los SLMs ha sido probada y es crucial en investigaciones relacionadas con información cuántica en altas dimensiones [31–38].

4.1. Montaje experimental

El montaje experimental es mostrado en la figura 4.1. Este consta de dos etapas fundamentales, una etapa inicial de preparación de estados y otra etapa de proyección de estados. En la práctica, los fotones individuales usados en el experimento estan en un estado debilmente coherente producto de la generación de pulsos opticos muy atenuados. Para la generación de los pulsos, un modulador acusto-óptico (*acoustic optic modulator* o *AOM*) es colocado a la salida de un diodo laser de onda continua a 690 nm.

Finalmente, los estados debilmente coherentes son generados con un atenuador óptico. Como mencionamos, la modulación de amplitud y fase requeridas son obtenidas con una combinación de dos SLMs, SLM1 y SLM2. SLM1 controla la parte real de los coeficientes de los estados generados, mientras que SLM2 sus fases [37].

El estado generado es propagado a través de un conjunto de lentes formando un sistema de telescopio hacia la etapa de proyección. La función de esta etapa es proyectar el estado transmitido dentro de los conjuntos de proyectores (o estados que forman estos proyectores) de C^7 y \bar{C}^7 permitiendonos implementar el conjunto de preguntas *yes-no* requeridas. De forma similar a la etapa de preparación, dos SLMs son usadas también, SLM3 para la modulación de amplitudes y SLM4 para las fases. Un generador de números aleatorio (*random number generator* o *RNG*) idQuantique Quantis es usado para escoger una de las medidas proyectivas que se deba aplicar. La proyección finaliza después que la luz de salida del SLM4 es enfocada con una lente y detectada por un detector puntual de fotones individuales de avalancha (*avalanche photon detector* o *APD*) situado en el centro del plano focal [35, 39, 40]. El detector puntual es implementado con un pinhole de $10 \mu\text{m}$ de diametro situado frente al APD. En esta configuración, la probabilidad de detección de un fotón individual es proporcional a $|\langle \Pi_i | \Psi \rangle|^2$ [35], con i etiquetando al proyector i -ésimo $|\Pi_i\rangle\langle \Pi_i|$ y donde $|\Psi\rangle$ es el estado preparado.

Todo el montaje experimental es controlado activamente por una matriz electrónica de puertas lógicas programables (*field-programmable gate array* o *FPGA*) para automatizar las medidas. Una sola unidad es usada para enviar los pulsos de disparo al AOM a una tasa de repetición de 30 Hz para crear los pulsos ópticos tenues. Esta misma unidad es usada para sincronizar el cambio de mascararas en SLM3 y SLM4 en cada pulso para posteriormente registrar si a ocurrido o no una detección para ese pulso. La unidad graba la información de todas las detecciones y sus correspondientes combinaciones de $|\Psi\rangle$ y $|\Pi_i\rangle$. Finalmente, de la estadística de los resultados grabados obtenemos el valor experimental de $S(C^7)$ y $S(\bar{C}^7)$. Por ejemplo, la probabilidad $|\langle \Pi_i | \Psi \rangle|^2$ se obtiene de hacer el cociente entre el número de detecciones cuando el estado $|\Psi\rangle$ es proyectado sobre $|\Pi_i\rangle\langle \Pi_i|$ y el número total de detecciones registradas cuando el mismo estado $|\Psi\rangle$

es proyectado sobre una base completa que contenga a $|\Pi_i\rangle$.

Este último punto es crucial, pues es necesaria una base ortonormal completa para normalizar correctamente las probabilidades. Sin embargo, es fácil notar que las LOOR obtenidas para los grafos C^7 y \bar{C}^7 no nos entregan bases completas. En efecto, para el grafo C^7 , el que debe ser implementado en un espacio en dimensión 3, el número de estados mutuamente ortogonales más grande es $\omega(C^7) = 2$. Así también, en el caso del grafo \bar{C}^7 , el que debe ser implementado en un espacio en dimensión 5, el número de estados mutuamente ortogonales más grande es $\omega(\bar{C}^7) = 3$. Por lo tanto, requerimos de un vector fuera del set para generar la base de normalización para el experimento C^7 y dos vectores fuera del set para la base de normalización de \bar{C}^7 . El vector $|u_{B1}\rangle$ fue encontrado usando los primeros dos vectores de la LOOR asociada a C^7 dados en las tabla 3.1. Estos tres vectores forman una base completa en dimensión 3 de la forma $B = \{u_1, u_2, u_{B1}\}$ con,

$$u_{B1}^\top = (0,2282 \quad -0,6070 \quad 0,7611). \quad (4.2)$$

Por su parte, los vectores $|v_{\bar{B}1}\rangle$ y $|v_{\bar{B}2}\rangle$ fueron encontrados usando los vectores 1, 3 y 5 de la LOOR asociada a \bar{C}^7 dados en las tabla 3.2. Estos cinco vectores forman una base completa en dimensión 5 de la forma $\bar{B} = \{v_1, v_3, v_5, v_{\bar{B}1}, v_{\bar{B}2}\}$ con,

$$v_{\bar{B}1}^\top = (-0,2530 \quad 0,0952 \quad 0,7660 \quad -0,5754 \quad 0,0952) \quad (4.3)$$

$$v_{\bar{B}2}^\top = (-0,1782 \quad -0,8497 \quad -0,1915 \quad -0,2542 \quad 0,3807) \quad (4.4)$$

Estos cálculos se realizaron usando el software *Wolfram Mathematica 9.0*.

4.2. Resultados experimentales

El límite no contextual de las desigualdades NC (3.46) y (3.47) es derivado asumiendo que cada estado posee ciertas relaciones de ortogonalidad (exclusividad) y, en particular, que la probabilidad de obtener una respuesta tipo *yes* cuando el sistema es

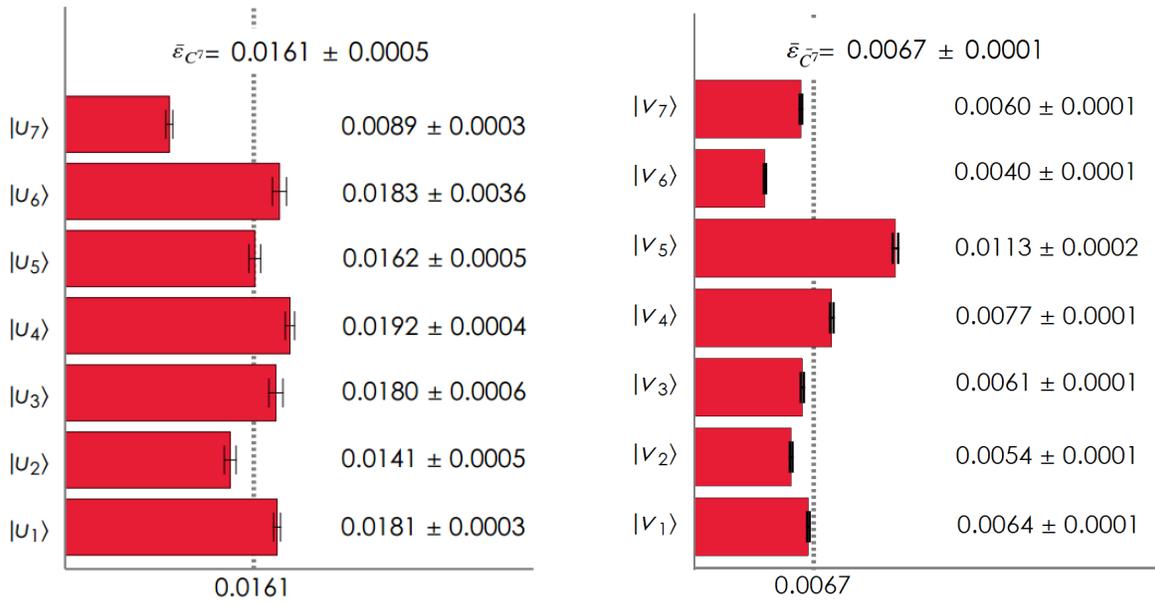
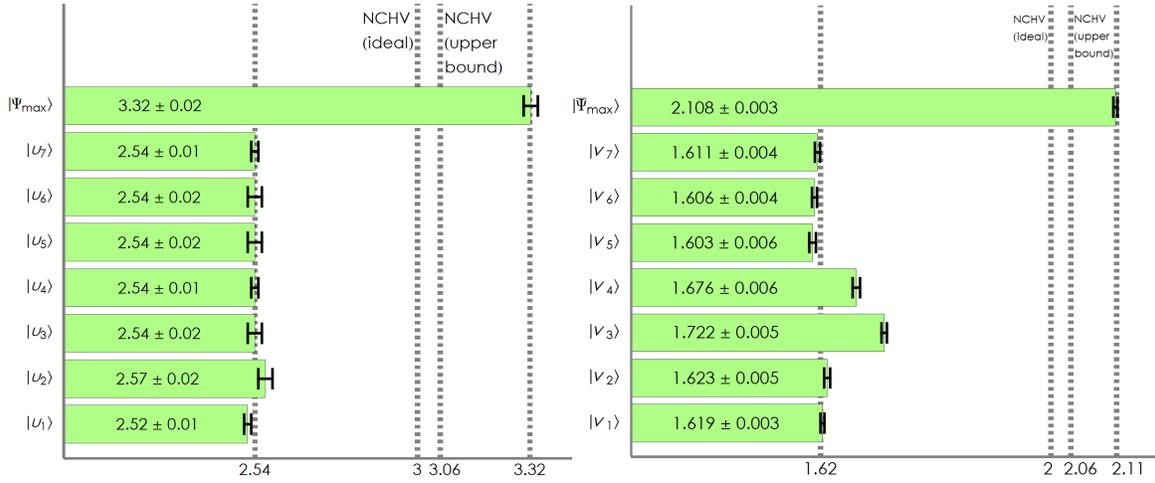
(a) Test de exclusividad para C^7 (b) Test de exclusividad para \bar{C}^7

Figura 4.2: Test de exclusividad en base a las relaciones de ortogonalidad dictadas por los grafos C^7 y \bar{C}^7 : (a) realizados para los 7 estados del grafo C^7 . En estos test, cada estado $|u_k\rangle$ es ortogonal a los estados medidos $|u_{k\oplus 1}\rangle$ y $|u_{k\oplus 2}\rangle$, idealmente. La línea discontinua muestra el parámetro \bar{e}_{C^7} definido en el texto, (b) realizados para los 7 estados del grafo \bar{C}^7 . En estos test, cada estado $|v_k\rangle$ es ortogonal a los estados medidos $|v_{k\oplus 2}\rangle$, $|v_{k\oplus 3}\rangle$, $|v_{k\oplus 4}\rangle$, $|v_{k\oplus 5}\rangle$ y $|v_{k\oplus 6}\rangle$, idealmente (sin embargo *no son mutuamente ortogonales*). La línea discontinua muestra el parámetro $\bar{e}_{\bar{C}^7}$ definido en el texto.

preparado en un estado ortogonal es cero. Sin embargo, en condiciones experimentales reales, se espera que las probabilidades correspondientes a estas proyecciones ortogonales no sean exactamente cero. Esto es originado por imperfecciones inherentes a cualquier experimento. Luego, estas imperfecciones deben ser tomadas en cuenta para corregir adecuadamente los límites no contextuales de (3.46) y (3.47). Como se explica en Ref. [21], esto se logra calculando cual es la fracción de experimentos en los que se ha obtenido un resultado “erroneo”. En nuestro caso, se ha obtenido que las fracciones son, promediando sobre todas las ortogonalidades en cada experimento, $\bar{e}_{C^7} = 0,0161 \pm 0,0005$ y $\bar{e}_{\bar{C}^7} = 0,0067 \pm 0,0001$. Las figuras 4.2(a) y (b) muestran como


 (a) Resultados experimentales para $S(C^7)$

 (b) Resultados experimentales para $S(\bar{C}^7)$

Figura 4.3: Resultados experimentales para las desigualdades definidas en (3.46) y (3.47): (a) usando como estado inicial cada uno de los 7 estados del grafo C^7 más el estado “maximal” $|\Psi_{\max}\rangle$. La desigualdad (3.46) es violada para este estado maximal, a diferencia de los demás, cuyos valores están en buen término con el valor teórico (3.56) (indicada por la primera línea discontinua de la izquierda). NCHV (ideal) indica el límite no contextual en el caso ideal donde $\bar{\epsilon} = 0$. NCHV (upper bound) indica el límite recalculado tomando en cuenta el valor actual de $\bar{\epsilon}$ obtenido del test de exclusividad para C^7 . La última línea indica el valor teórico de $S(C^7)$ usando el estado maximal $|\Psi_{\max}\rangle$. (b) usando como estado inicial cada uno de los 7 estados del grafo \bar{C}^7 más el estado “maximal” $|\bar{\Psi}_{\max}\rangle$. La desigualdad (3.47) es violada para este estado maximal, a diferencia de los demás, cuyos valores están en buen término con el valor teórico (3.57) (indicada por la primera línea discontinua de la izquierda). Análogamente, NCHV (ideal) indica el límite no contextual en el caso ideal, NCHV (upper bound) indica el límite recalculado tomando en cuenta el valor actual de $\bar{\epsilon}$ obtenido del test de exclusividad para \bar{C}^7 y la última línea indica el valor teórico de $S(\bar{C}^7)$ usando el estado maximal $|\bar{\Psi}_{\max}\rangle$.

estas fracciones difieren con respecto a las ortogonalidades de cada estado $|u_k\rangle$ y $|v_k\rangle$ (2 estados mutuamente ortogonales para C^7 y 4 para \bar{C}^7). Ya que $S(C^7)$ y $S(\bar{C}^7)$

son sumas de 7 probabilidades, es directo calcular el límite no contextual corregido asumiendo que el límite ideal solo es valido para una fracción $(1-\bar{\epsilon})$ de los experimentos y asumiendo el peor caso para la fracción restante (esto quiere decir, asumiendo que cada probabilidad aporta con esta fracción de error). Este cálculo entrega un límite superior para $S(C^7)$ y $S(\bar{C}^7)$ igual a $3(1 - \bar{\epsilon}_{C^7}) + 7\bar{\epsilon}_{C^7} \approx 3,06$ y $2(1 - \bar{\epsilon}_{\bar{C}^7}) + 7\bar{\epsilon}_{\bar{C}^7} \approx 2,06$ [21], los cuales aún son más bajos que el valor cuántico en el caso de un experimento ideal, los cuales son $\approx 3,32$ y $\approx 2,11$, respectivamente. Notemos que se debe hacer el mismo razonamiento para recalculer los límites ideales cuánticos, lo que conlleva a límites inferiores y superiores, los que detallamos a continuación

$$\text{- para } C^7, \quad 3,32(1 - \bar{\epsilon}_{C^7}) \approx 3,26 \quad (\text{límite cuántico inferior}), \quad (4.5)$$

$$3,32(1 - \bar{\epsilon}_{C^7}) + 7\bar{\epsilon}_{C^7} \approx 3,38 \quad (\text{límite cuántico superior}), \quad (4.6)$$

$$\text{- para } \bar{C}^7, \quad 2,11(1 - \bar{\epsilon}_{\bar{C}^7}) \approx 2,10 \quad (\text{límite cuántico inferior}), \quad (4.7)$$

$$2,11(1 - \bar{\epsilon}_{\bar{C}^7}) + 7\bar{\epsilon}_{\bar{C}^7} \approx 2,14 \quad (\text{límite cuántico superior}). \quad (4.8)$$

Este procedimiento es crucial para estimar correctamente los rangos de validez para nuestros valores experimentales obtenidos de las desigualdes NC. En efecto, aun cuando se han recalculado estos límites, los límites superiores no contextuales y los inferiores cuánticos no llegan a traslaparse, lo que nos da un margen dentro del cual se certifica la autenticidad de los resultados experimentales, evidencia del testeo genuino de correlaciones cuánticas.

Una vez realizado los test de exclusividad, se procede a calcular las desigualdades NC (3.46) y (3.47) usando como estado inicial cada uno de los 7 estados $|u_k\rangle$ y $|\Psi_{\max}\rangle$ para $S(C^7)$, y por otra parte los 7 estados $|v_k\rangle$ y $|\bar{\Psi}_{\max}\rangle$ para $S(\bar{C}^7)$. Recordemos que $|\Psi_{\max}\rangle$ y $|\bar{\Psi}_{\max}\rangle$ brindan la máxima violación predicha por la mecánica cuántica para $S(C^7)$ y $S(\bar{C}^7)$. Por cada estado inicial, para ambos experimentos, se realizaron 3.0×10^5 pulsos en cada proceso de medición. En este lapso, para cada pulso, se aplicó una proyección aleatoria. Luego de esto, se procedió a calcular los valores de las desigualdades para cada estado inicial en base a los resultados registrados. Los resultados finales son

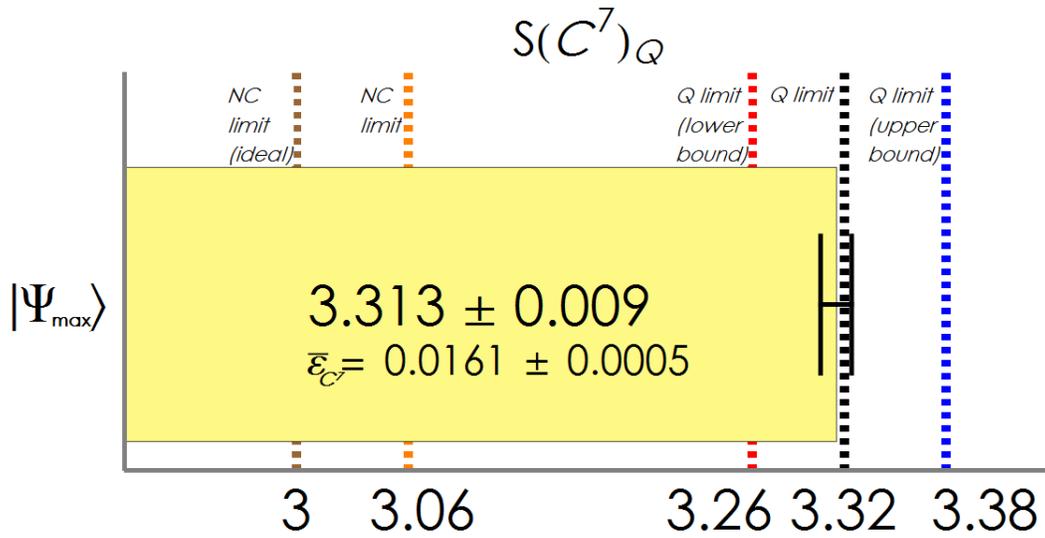


Figura 4.4: Violación experimental de (3.46). Ver detalles abajo.

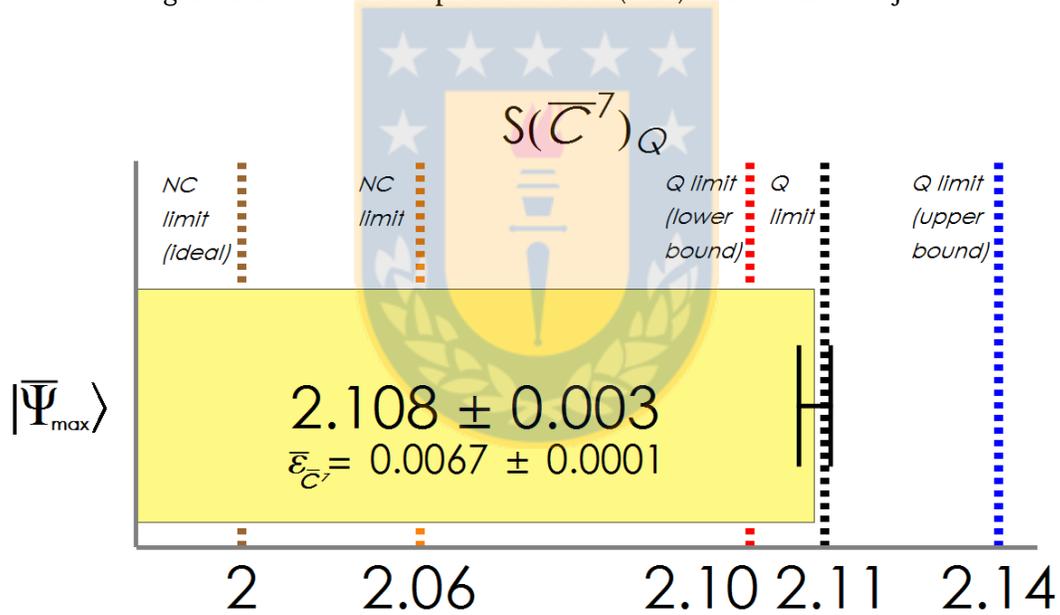


Figura 4.5: Valores experimentales de las violaciones de la desigualdades (3.46) y (3.47) usando los estados maximales de las LOOR asociadas a C^7 (y \bar{C}^7). NC limit (ideal) representa el valor teórico para el límite de $S(C^7)$ ($S(\bar{C}^7)$) usando teorías de variables ocultas no contextuales. NC limit es el límite no contextual cuando $\bar{\epsilon}_{C^7} = 0,0161$ ($\bar{\epsilon}_{\bar{C}^7} = 0,0067$). Q limit (lower bound) es el límite inferior cuántico obtenido con el test de exclusividad. Q limit es el valor teórico para $S(C^7)$ ($S(\bar{C}^7)$) usando el estado maximal correspondiente. Q limit (upper bound) es el límite superior cuántico obtenido con el test de exclusividad.

mostrados en las figuras 4.3(a) y (b). En ellos vemos que, si usamos uno de los estados del grafo como estado inicial, el valor experimental es aproximadamente el valor teórico predicho en (3.56) y (3.57). Notamos también que usando como estado inicial los estados $|\Psi_{\max}\rangle$ y $|\bar{\Psi}_{\max}\rangle$, las desigualdades son violadas satisfactoriamente con respecto a la predicción cuántica, incluso cuando las imperfecciones experimentales son tomadas en cuenta. Esto se puede ver detalladamente en las figuras 4.4 y 4.5, en las cuales el valor cuántico experimental está graficado en la barra solida y en ambos casos estos reside entre los límites cuánticos deducidos mediante los test de exclusividad respectivos, simbolizados con las lineas discontinuas roja y azul.



Capítulo 5

Conclusión

Hemos presentado las primeras demostraciones experimentales de violación de dos desigualdades no contextuales fundamentales de la teoría cuántica. Específicamente, hemos demostrado que usando sistemas cuánticos en dimensión 3 y 5 usando el momento transversal de fotones individuales se ha alcanzado los valores cuánticos máximos de dos desigualdades no contextuales asociadas a los grafos C^7 y \bar{C}^7 , pertenecientes a dos familias de desigualdades las que han sido descubiertas como estructuras fundamentales pues constituyen estructuras básicas indispensables para que un experimento presente correlaciones no clásicas.

Hemos confirmado la validez de estas violaciones usando los test de exclusividad correspondientes. En efecto, aunque este método obliga a recalcular los límites teóricos para las sumas de probabilidades obtenidas experimentalmente, los valores máximos cuánticos caen satisfactoriamente dentro de los rangos esperados, los que residen fuera del máximo recalculado para teorías de correlaciones clásicas.

Finalmente, confirmamos la versatilidad a la hora de implementar sistemas cuánticos en altas dimensiones, lo que nos ha permitido realizar ambos experimentos, los cuales necesitaban sistemas cuánticos de dimensión distinta. Además, la posibilidad de manipular tanto fases relativas como amplitudes nos ha abierto una amplia gama de estados cuánticos codificables lo que nos ha dado la seguridad para llevar a cabo todas las generaciones y medidas proyectivas necesarias. Esto último sugiere la posibilidad

de poder seguir testeando este tipo correlaciones, diferentes de los típicos test de Bell, y que tienen muchas aplicaciones en el procesamiento de información cuántica.



Bibliografía

- [1] S. Kochen and E.P. Specker, *J. Math. Mech.* **17**, 59 (1967)
- [2] A. K. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 661 (1991).
- [3] R. W. Spekkens, D. H. Buzacott, A. J. Keehn, B. Toner, and G. J. Pryde, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 010401 (2009).
- [4] J. Anders and D. E. Browne, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 050502 (2009).
- [5] H. Buhrman, R. Cleve, S. Massar, and R. de Wolf, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 665 (2010).
- [6] E. Nagali, V. D'Ambrosio, F. Sciarrino, and A. Cabello, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 090501 (2012).
- [7] A. A. Klyachko, M. A. Can, S. Binicioglu, and A. S. Shumovsky, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 020403 (2008).
- [8] P. Badziag, I. Bengtsson, A. Cabello, and I. Pitowsky, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 050401 (2009).
- [9] C. Berge, *Färbung von Graphen, deren sämtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind*, *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe* **10**, 114 (1961).
- [10] L. Lovász, *IEEE Trans. Inform. Theory* **IT-25**, 1 (1979).
- [11] L. Lovász, *J. Combin. Theory* **13**, 95–98 (1972).
- [12] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas **164**, 51–229 (2006)

- [13] D. E. Knuth, *Electr. J. Comb.* **1**, A1 (1994).
- [14] C. E. Shannon, *IRE Trans. Inform. Theory*, **IT-2**, 3, 8-19 (1956).
- [15] J. S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964).
- [16] M. Arujo, M. T. Quintino, C. Budroni, M. Terra Cunha, and A. Cabello, *Phys. Rev. A* **88**, 022118 (2013).
- [17] M. Pavicic, J.-P. Merlet, B. McKay, and N. D. Megill, *J. Phys. A* **38**, 1577 (2005).
- [18] J. R. Portillo et al, arXiv:1211.5825.
- [19] A. Gleason, *J. of Math. and Mech.* **6** (1957).
- [20] L. Aolita, R. Gallego, A. Acín, A. Chiuri, G. Vallone, P. Mataloni, and A. Cabello, *Phys. Rev. A* **85**, 032107 (2012).
- [21] V. D'Ambrosio, I. Herbauts, E. Amselem, E. Nagali, M. Bourennane, F. Sciarrino, and A. Cabello, *Phys. Rev. X* **3**, 011012 (2013).
- [22] T. S. Cubitt, D. Leung, W. Matthews, and A. Winter, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 230503 (2010).
- [23] P. Lisoněk, P. Badziąg, J. R. Portillo, and A. Cabello, *Phys. Rev. A* **89**, 042101 (2014).
- [24] G. Cañas, M. Arias, S. Etcheverry, E. S. Gómez, A. Cabello, G. B. Xavier, and G. Lima, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 090404 (2014).
- [25] A. Cabello, S. Severini and A. Winter, arXiv:1010.2163
- [26] A. Cabello, L. E. Danielsen, A. J. López-Tarrida and J. R. Portillo, *Phys. Rev. A* **88**, 032104 (2013)
- [27] D. G. Grier, *Nature (London)* **424**, 810 (2003).

- [28] I. Moreno, P. Velázquez, C. R. Fernández-Pousa, and M. M. Sánchez-López, *J. Appl. Phys.* **94**, 3697 (2003).
- [29] L. Neves, G. Lima, J. G. Aguirre Gómez, C. H. Monken, C. Saavedra, and S. Pádua, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 100501 (2005).
- [30] G. Lima, A. Vargas, L. Neves, R. Guzmán, and C. Saavedra, *Opt. Express* **17**, 10688 (2009).
- [31] M. Hendrych, R. Gallego, M. Mičuda, N. Brunner, A. Acín, and J. P. Torres, *Nat. Phys.* **8**, 588 (2012).
- [32] G. Lima, A. Vargas, L. Neves, R. Guzmán, and C. Saavedra, *Opt. Express* **17**, 10688 (2009).
- [33] W. M. Pimenta, B. Marques, M. A. D. Carvalho, M. R. Barros, J. G. Fonseca, J. Ferraz, M. Terra Cunha, and S. Pádua, *Opt. Express* **18**, 24423 (2010).
- [34] A. C. Dada, J. Leach, G. S. Buller, M. J. Padgett, and E. Andersson, *Nat. Phys.* **7**, 677 (2011).
- [35] G. Lima, L. Neves, R. Guzmán, E. S. Gómez, W. A. T. Nogueira, A. Delgado, A. Vargas, and C. Saavedra, *Opt. Express* **19**, 3542 (2011).
- [36] M. A. Solís-Prosser, A. Arias, J. J. M. Varga, L. Rebón, S. Ledesma, C. Iemmi, and L. Neves, *Opt. Lett.* **38**, 4762 (2013).
- [37] S. Etcheverry, G. Cañas, E. S. Gómez, W. A. T. Nogueira, C. Saavedra, G. B. Xavier, and G. Lima, *Sci. Rep.* **3**, 2316 (2013).
- [38] V. D'Ambrosio, F. Cardano, E. Karimi, E. Nagali, E. Santamato, L. Marrucci, and F. Sciarrino, *Sci. Rep.* **3**, 2726 (2013).
- [39] G. Lima, E. S. Gómez, A. Vargas, R. O. Vianna, and C. Saavedra, *Phys. Rev. A* **82**, 012302 (2010).
- [40] M. A. Solís-Prosser and L. Neves, *Phys. Rev. A* **82**, 055801 (2010).