

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



Teoría de Einstein-Maxwell en AdS_3 : Cargas conservadas, agujeros negros y estructura asintótica

Tesis en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado académico de
Doctor en Ciencias Físicas

por

Miguel Angel Riquelme Osses

Director de Tesis : Dr. Ricardo Troncoso

Comisión : Dr. Mauricio Cataldo
Dr. Cristian Martínez
Dr. Patricio Salgado

Concepción, Chile
Enero 2016

Para mis padres



Agradecimientos

Primero que todo quiero agradecer a mi familia, en particular a mi padres: Sandra y Miguel, por su constante apoyo, cariño y entendimiento. Gracias por acompañarme en este camino y hacer mi carga menos pesada. Esto no habría sido posible sin ustedes. Al mismo tiempo, te agradezco a ti Trinidad, por tu sonrisa sincera y tus abrazos que llenan el alma.

Quiero agradecer además la amistad de mis compañeros de la Universidad de Concepción y del Centro de Estudios Científicos, especialmente a Marcela Cárdenas, Marcelo Calderón, Claudio Catalán, Patrick Concha, Cristian Erices, Ernesto Frodden, Oscar Fuentealba, Cristóbal Gatica, Hernán González, Javier Matulich, Nicolás Mayorga, Diego Molina, Juan Oliva, Pablo Pais, Arash Ranjbar, Evelyn Rodríguez, Patricio Salgado-Rebolledo y Adolfo Toloza.

Agradezco además la oportunidad de haber contado con excelentes profesores. Por sus palabras, por su siempre desinteresada guía, por su constante apoyo, por su paciencia y su gentileza, especialmente a los profesores Jaime Araneda, Hernán Astudillo, Cristian Martínez, Luis Roa, Patricio Salgado y Jorge Zanelli. Agradezco también la oportunidad de haber podido trabajar con Alfredo Pérez, David Tempo y Ricardo Troncoso. Fue un verdadero privilegio trabajar con ustedes.

Agradezco también la siempre excelente disposición y paciencia de las secretarias tanto de la Universidad de Concepción como del Centro de Estudios Científicos, en particular, agradezco a Soledad Daroch, Patricia Fernandoy, Yulia Iakovleva y Mónica Tiznado ¡Sin ustedes no seríamos nada!

No podría dejar de agradecer la amistad, la preocupación y el siempre acertado comentario de mi profesor guía Ricardo Troncoso. Ha sido un verdadero honor trabajar contigo.

Por último, pero no menos importante, quiero agradecer a Francisca por su compañía, su paciencia, su amor incondicional así como su empuje y su humor tan especial.

La investigación realizada durante mi doctorado ha sido posible gracias a la beca de doctorado nacional de CONICYT, periodo 2011-2015 y al Centro de Estudios Científicos a través del Programa de Financiamiento Basal de CONICYT.

Resumen

La presente tesis explora y analiza la teoría de Einstein minimalmente acoplada a un campo de Maxwell en un espaciotiempo de tres dimensiones con constante cosmológica negativa. Las soluciones de esta teoría poseen un comportamiento asintótico relajado en comparación al propuesto por Brown y Henneaux lo cual oscurece el análisis de sus cargas conservadas. Sin embargo, en el contexto del formalismo Hamiltoniano, se demuestra que la variación de los generadores canónicos asociados a los vectores de Killing asintóticos es finita cuando se requiere que estos generen la derivada de Lie de los campos. Las integrales de superficie asociadas a los generadores canónicos adquieren entonces contribuciones explícitas provenientes del campo electromagnético, y se vuelven bien definidas siempre y cuando satisfagan ciertas condiciones de integrabilidad.

Se mostrará además, que existe un conjunto de condiciones de borde etiquetadas por una constante sin variación el cual es compatible con el grupo conforme de manera tal que el álgebra de los generadores canónicos está dada por la suma directa de dos copias del álgebra de Virasoro con la extensión central estándar.

Alternativamente, el mismo conjunto de condiciones de borde es obtenido al requerir su compatibilidad con las simetrías de Lorentz y de escalamientos para soluciones estacionarias y circularmente simétricas de la teoría.

Notablemente, para este conjunto de condiciones de borde se encuentra que el espectro de energía del agujero negro con rotación y carga eléctrica es no negativo, y además, para un valor fijo de la masa, la carga eléctrica adquiere una cota superior.

Esta tesis está basada en los resultados presentados en las siguientes publicaciones:

- *“Conserved charges and black holes in the Einstein-Maxwell theory on AdS_3 reconsidered”*
Alfredo Pérez, Miguel Riquelme, David Tempo and Ricardo Troncoso,
JHEP 1510 (2015) 161 [arXiv:1509.01750v2 [hep-th]]
- *“Asymptotic structure of the Einstein-Maxwell theory on AdS_3 ”*
Alfredo Pérez, Miguel Riquelme, David Tempo and Ricardo Troncoso,
Enviado a JHEP [arXiv:1512.01576v1 [hep-th]]



Índice general

Agradecimientos	I
1. Introducción	1
2. Gravitación en 2+1-dimensiones	4
2.1. Relatividad General	4
2.1.1. Comportamiento asintótico de la Relatividad General con constante cosmológica negativa	5
2.2. Relatividad General en 2+1-dimensiones	6
2.2.1. Solución de agujero negro BTZ	7
2.3. Teoría de Einstein-Maxwell en 2+1-dimensiones	10
2.3.1. Agujero negro con rotación y carga eléctrica en 2+1-dimensiones	10
3. Cargas conservadas y agujeros negros para la teoría de Einstein-Maxwell en AdS_3	14
3.1. Principio de acción reducido: Soluciones estacionarias, condiciones de integrabilidad y cargas conservadas	15
3.1.1. Compatibilidad de las condiciones de borde con las simetrías de Lorentz y de escalamientos	20
3.2. Espectro del agujero negro y condiciones de borde invariantes de Lorentz: Elección más simple vs. elección holográfica	22
3.2.1. Agujero negro estático con carga eléctrica	22
3.2.2. Agujero negro con rotación y carga eléctrica	24
3.3. Comentarios finales	27
4. Estructura asintótica de la teoría de Einstein-Maxwell en AdS_3	29
4.1. Decaimiento de los campos y simetrías asintóticas	31
4.2. Estructura canónica	33
4.2.1. Cargas conservadas finitas y sus condiciones de integrabilidad	34
4.3. Compatibilidad de las condiciones de borde con las simetrías asintóticas	36
4.3.1. Transformaciones de gauge $U(1)$ asintóticas	37

4.3.2. Vectores de Killing asintóticos	37
4.3.3. Álgebra de los generadores canónicos	39
4.4. Masa y momento angular del agujero negro con rotación y carga eléctrica	40
4.5. Comentarios finales	44
5. Conclusiones	46



Capítulo 1

Introducción

En la actualidad conocemos cuatro interacciones fundamentales: débil, fuerte, electromagnética y gravitacional. Mientras que el rango de acción de las interacciones débil y fuerte se restringe a los núcleos atómicos, es decir, al orden de los femtómetros ($1 \text{ fm} = 1 \times 10^{-15} \text{ m}$), el rango de acción para las interacciones electromagnética y gravitacional es infinito. Por otra parte, se observa que las interacciones débil, fuerte y electromagnética poseen un esquema de cuantización en el cual incluso pueden ser unificadas, mientras que la interacción gravitacional ha planteado uno de los mayores retos de la física contemporánea: la descripción del campo gravitacional a un nivel microscópico.

Aunque este problema aún no está resuelto, ha habido diferentes propuestas como supergravedad, teoría de cuerdas, gravedad cuántica de lazos y la correspondencia entre teorías de gauge y gravedad (véase, por ejemplo, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13] y [14]). Algunas de estas propuestas persiguen un objetivo aún más ambicioso: construir una única teoría que describa a la materia y sus interacciones. Sin embargo, debido a que ninguna de las propuestas es completamente satisfactoria, una parte de la comunidad ha seguido en paralelo un camino más modesto, enfocándose en “modelos de juguete” que capturen los aspectos claves del campo gravitacional. Por ejemplo, Relatividad General formulada en 3 dimensiones resulta ser mucho más simple que su contraparte cuatridimensional, y por lo tanto, muchas cosas pueden aprenderse.

En el caso de Relatividad General con constante cosmológica negativa en tres dimensiones, los agujeros negros son obtenidos a través de identificaciones en el espacio AdS_3 [15, 16]. Esta simplicidad es heredada por la propuesta de Strominger [17] para el conteo microscópico del crecimiento asintótico del número de estados de un agujero negro, el cual permitió recuperar la entropía de Bekenstein-Hawking en términos de la fórmula de Cardy. Esta idea se basa en el conocido resultado de Brown y Henneaux [18], el cual establece que las simetrías asintóticas de la

Relatividad General con $\Lambda < 0$ en tres dimensiones son generadas por el álgebra del grupo conforme en dos dimensiones con una extensión central precisa. Este resultado sugiere naturalmente que una teoría cuántica de la gravitación en tres dimensiones sería descrita en términos de una teoría de campo conforme en dos dimensiones.

En este contexto, el conocimiento preciso del comportamiento de los campos y de la estructura del espaciotiempo en la región asintótica donde se realizan las mediciones cobra relevancia. En Relatividad General el rol de las propiedades asintóticas del espaciotiempo resulta ser crucial debido a la ausencia de una noción local de energía [19]. Es por esta razón que surge la necesidad de una definición adecuada de cantidades conservadas, las cuales deben ser finitas y que resulta ser indispensable para discriminar entre configuraciones que son físicas de las que no lo son. En otras palabras, es el primer chequeo que una solución exacta debe satisfacer para determinar si es físicamente realizable. La existencia de soluciones bien comportadas también puede ser usada para discriminar entre distintas teorías de la gravedad [20].

En la actualidad, se conocen algunos ejemplos interesantes donde los campos de materia pueden modificar el comportamiento asintótico estándar de la métrica, de manera que el decaimiento es más lento que el de la Relatividad General en el vacío [18, 21, 22]. En los casos explorados en [23, 24, 25, 26, 27], el campo escalar adquiere un decaimiento muy lento en infinito, lo cual genera una fuerte *backreaction* (i.e., una fuerte respuesta por parte del campo gravitacional) de manera tal que las condiciones asintóticas estándar de AdS se tengan que relajar. Como consecuencia, el espacio de soluciones admisibles se agranda de manera tal que incluye agujeros negros con pelo [23, 26, 28, 29, 30], solitones e instantones [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37].

El plan de trabajo es el siguiente. En la sección (2) se hace un repaso de los aspectos más generales de la gravitación en 2+1-dimensiones, en particular, se muestra el rol de las condiciones asintóticas propuestas por Brown y Henneaux en la definición de la energía para la solución de agujero negro BTZ. Además se hace una introducción a la teoría de Einstein-Maxwell en 2+1-dimensiones y se repasa de manera general los aspectos claves de la solución de agujero negro con rotación y carga eléctrica descubierta de manera independiente en [38], [39].

En la sección (3) se analiza una clase de soluciones estacionarias y circularmente simétricas para la teoría de Einstein-Maxwell en 2+1-dimensiones. En el contexto del formalismo Hamiltoniano, se muestra que es posible construir cargas conservadas finitas mediante una elección particular de multiplicador de Lagrange para el campo electromagnético. Estas cargas conservadas reciben contribuciones explícitas provenientes del campo electromagnético y además se estudia la compatibilidad de las condiciones de borde consistentes con la integrabilidad de la energía con las simetrías de Lorentz y de escalamientos. Finalmente se muestra que para una elección

especial de condiciones de borde compatibles con las simetrías de Lorentz y de escalamientos, el espectro de energía del agujero negro con rotación y carga eléctrica es no negativo y además, que para un valor fijo de la masa existe una cota superior en la carga eléctrica de la solución.

En la sección (4) se estudia la estructura asintótica de la teoría de Einstein-Maxwell en tres dimensiones con constante cosmológica negativa. Se muestra que a pesar de que el comportamiento asintótico de los campos es relajado con respecto a las condiciones de Brown-Henneaux, la variación de los generadores canónicos asociados a los vectores de Killing asintóticos resulta ser finita cuando se exige que generen la derivada de Lie de los campos. Se muestra además que las integrales de superficie están bien definidas siempre y cuando satisfagan ciertas condiciones de integrabilidad, las cuales relacionan funcionalmente a los términos dominantes de la forma asintótica del campo electromagnético. Si se exige la compatibilidad de las condiciones de borde con el grupo conforme entonces se obtiene un conjunto especial de condiciones de borde, el cual coincide con el conjunto de condiciones de borde encontrados previamente en la sección (3).

Notablemente, el álgebra de los generadores canónicos está dada por la suma directa de dos copias del álgebra de Virasoro con carga central y $U(1)$. En la sección (5) concluimos con algunos comentarios y observaciones.

Capítulo 2

Gravitación en 2+1-dimensiones

Si la Gravitación corresponde a una interacción fundamental entonces debería ser susceptible de admitir una descripción cuántica, es decir, la descripción del campo gravitacional a un nivel microscópico. Esta premisa ha resultado ser uno de los problemas más desafiantes de la física teórica y luego de un siglo aún permanece sin respuesta. Es en este contexto entonces que resulta natural preguntarse por modelos más simples que capturen las características fundamentales de la Relatividad General, pero sin las complicaciones asociadas a esta. Una de las posibilidades consiste en el estudio de la Relatividad General en diversas dimensiones para poder determinar si los aspectos relevantes de la teoría son genéricos o sólo un accidente en cuatro dimensiones.

2.1. Relatividad General

La Relatividad General es una teoría que describe al campo gravitacional en términos de la dinámica de la geometría del espaciotiempo. En esta teoría, el espaciotiempo es una variedad pseudo Riemanniana \mathcal{M} dotada de una métrica Lorentziana $g_{\mu\nu}$ y es descrita por la acción de Einstein-Hilbert dada por

$$I_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + I_{mat}, \quad (2.1)$$

donde D es la dimensión del espaciotiempo, κ está relacionada con la constante Newton según $\kappa = 8\pi G$, Λ es la constante cosmológica y I_{mat} corresponde a la acción que describe a los campos de materia. Además consideraremos unidades tales que la constante de Planck y la velocidad de la luz son iguales a la unidad, es decir, $\hbar = c = 1$.

2.1.1. Comportamiento asintótico de la Relatividad General con constante cosmológica negativa

Una simetría asintótica corresponde a una transformación de coordenadas que deja la clase de métricas bajo consideración dentro de la misma familia. El comportamiento asintótico para Relatividad General con constante cosmológica negativa ha sido ampliamente estudiado en el contexto de simetrías, cargas conservadas y la correspondencia AdS/CFT [18, 21, 22, 40, 12].

El comportamiento asintótico de la métrica para $D \geq 3$ está dado por [21, 22]

$$\begin{aligned}\Delta g_{rr} &= \mathcal{O}(r^{-(D+1)}) , \\ \Delta g_{rm} &= \mathcal{O}(r^{-D}) , \\ \Delta g_{mn} &= \mathcal{O}(r^{-D+3}) ,\end{aligned}\tag{2.2}$$

donde los índices del espacio tiempo se separan según $\mu = (r, m)$, siendo m el tiempo y las $D - 2$ coordenadas angulares. La métrica asintótica se escribe como $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \Delta g_{\mu\nu}$, donde $\Delta g_{\mu\nu}$ corresponde a la desviación respecto a la métrica de AdS,

$$d\bar{s}^2 = - \left(\frac{r^2}{l^2} + 1 \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} + 1 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2 ,\tag{2.3}$$

donde $d\Omega_{D-2}^2$ es el elemento de línea de la esfera S^{D-2} , y la constante cosmológica se relaciona con el radio de AdS l de acuerdo a

$$\Lambda = - \frac{(D-1)(D-2)}{2l^2} .\tag{2.4}$$

El comportamiento asintótico en (2.2) satisface los siguientes requerimientos [21]

- Son invariantes bajo el grupo AdS $SO(D-1, 2)$.
- Decaen suficientemente lento como para contener soluciones de interés físico en la región asintótica.
- Implican que las integrales de superficie asociadas a los generadores de $SO(D-1, 2)$ son finitas.

Para el conjunto (2.2), las simetrías asintóticas corresponden entonces a los difeomorfismos

$$x^{\mu'} = x^\mu + \xi^\mu ,\tag{2.5}$$

que mapean el comportamiento asintótico (2.2) en si mismo, i.e., ξ^μ genera una simetría asintótica si se satisface que

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \mathcal{O}(\Delta g_{\mu\nu}) .\tag{2.6}$$

Debido a que en la región asintótica lejos del objeto en cuestión sólo los términos dominantes son relevantes para calcular la energía, se concluye que no es necesario requerir la existencia de vectores de Killing exactos.

2.2. Relatividad General en 2+1-dimensiones

En el año 1986 Brown y Henneaux [18] estudiaron las simetrías asintóticas del espacio Anti de Sitter (AdS_3) en tres dimensiones y encontraron que ellas forman dos copias del álgebra de Virasoro con carga central $c = 3l/2G$. Este es uno de los primeros ejemplos de una teoría de campo que admite una carga central clásica e implica que cualquier teoría cuántica de la gravedad en AdS_3 es dual a una teoría de campo conforme (CFT) en dos dimensiones.

En tres dimensiones la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica negativa está dada por

$$I = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} \left(R + \frac{2}{l^2} \right), \quad (2.7)$$

donde la métrica asintótica se escribe como $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \Delta g_{\mu\nu}$, y $\Delta g_{\mu\nu}$ corresponde a las desviaciones

$$\begin{aligned} \Delta g_{rr} &= \frac{f_{rr}}{r^4} + \mathcal{O}(r^{-5}), \\ \Delta g_{rm} &= \frac{f_{rm}}{r^3} + \mathcal{O}(r^{-4}), \\ \Delta g_{mn} &= f_{mn} + \mathcal{O}(r^{-1}), \end{aligned} \quad (2.8)$$

con respecto de la métrica de AdS en tres dimensiones.

Las condiciones asintóticas (2.8) se mapean en si mismas bajo los difeomorfismos de la forma

$$\begin{aligned} \xi^\pm &= T^\pm + \frac{l^2}{2r^2} \partial_\mp^2 T^\mp + \dots \\ \xi^r &= -\frac{r}{2} (\partial_+ T^+ + \partial_- T^-) + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde $T^\pm = T^\pm(x^\pm)$, con $x^\pm = \frac{t}{l} \pm \phi$, y los puntos suspensivos (\dots) representan términos subdominantes que no son relevantes para el análisis.

Las condiciones asintóticas (2.8) no sólo son invariantes bajo la acción del grupo $SO(2, 2)$, sino que también resultan ser invariantes bajo la acción del grupo conforme infinito-dimensional en dos dimensiones, cuya álgebra de Lie corresponde a dos

copias del álgebra de Virasoro con una extensión central dada por

$$\begin{aligned} [L_m^\pm, L_n^\pm] &= (m-n) L_{m+n}^\pm + \frac{c}{12} m^2 (m-1) \delta_{m+n,0}, \\ [L_m^+, L_n^-] &= 0. \end{aligned}$$

donde $c = 3l/2G$ corresponde a la carga central.

Se ha mostrado en la literatura que hay casos en los cuales el comportamiento asintótico (2.8) para gravitación acoplada a campos de materia puede ser relajado con el fin de acomodar soluciones de interés físico, manteniendo las simetrías asintóticas [23, 24, 25, 26, 27].

2.2.1. Solución de agujero negro BTZ

A pesar de que gravitación en 2+1-dimensiones ha sido ampliamente reconocida como un laboratorio útil para el estudio de aspectos conceptuales, se creía que era poco realista desde el punto de vista físico puesto que no posee límite Newtoniano ni grados de libertad propagantes. Es por esta razón que el descubrimiento de una solución de agujero negro (conocida en la literatura como agujero negro BTZ) [15, 16] para Relatividad General con constante cosmológica negativa resultó ser una gran sorpresa para la comunidad.

La solución de agujero negro BTZ está contenida dentro del conjunto de condiciones asintóticas propuesto en (2.8) y su métrica está dada por

$$ds^2 = - (N^\perp)^2 dt^2 + f^{-2} dr^2 + r^2 (N^\phi dt + d\phi)^2, \quad (2.10)$$

donde la función *lapse* y *shift* están dadas, respectivamente, por

$$(N^\perp)^2 = f^2 = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}; \quad N^\phi = -\frac{J}{2r^2}; \quad |J| \leq Ml, \quad (2.11)$$

con $-\infty < t < \infty$, $0 < r < \infty$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Las constantes de integración M y J en (2.11) son las cantidades conservadas asociadas a la invariancia asintótica de la acción bajo desplazamientos temporales (masa) e invariancia rotacional (momento angular), respectivamente. Estas cargas están dadas por integrales de superficie en el infinito tipo espacio.

La función *lapse* se anula para los siguientes valores de r

$$r_\pm = l \left[\frac{M}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml} \right)^2} \right) \right]^{1/2}, \quad (2.12)$$

mientras que la componente g_{00} se anula en

$$r_{erg} = lM^{1/2}, \quad (2.13)$$

estos tres valores especiales de r obedecen la siguiente relación

$$r_- \leq r_+ \leq r_{erg}, \quad (2.14)$$

tal como ocurre en 3+1-dimensiones para la métrica de Kerr, r_+ es el horizonte de eventos del agujero negro, r_{erg} es la superficie de *redshift* infinito y la región entre r_+ y r_{erg} es la ergoesfera. Para que esta solución corresponda efectivamente a un agujero negro se debe cumplir que

$$M > 0; |J| \leq Ml. \quad (2.15)$$

Se satisface la primera ley de la termodinámica [41],

$$dM = TdS - \Omega_+ dJ, \quad (2.16)$$

donde Ω_+ es la velocidad angular medida en el horizonte. La temperatura de Hawking y la entropía pueden ser expresadas como

$$\begin{aligned} \Omega_+ &= -\frac{r_- l}{r_+}, \\ T &= \frac{r_+^2 - r_-^2}{2\pi l^2 r_+}, \\ S &= \frac{2\pi r_+}{4G}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

La métrica dada por (2.10), (2.11) posee sólo dos cargas conservadas, las cuales pueden ser expresadas en términos de los modos cero del generador L_0^\pm tal que $M = \frac{1}{l}(L_0^+ + L_0^-)$, $J = L_0^+ - L_0^-$. Sin embargo, actuando con el grupo de simetría, se podría dotar a esta solución con otras cargas, tal como se podría dotar a la solución de Schwarzschild con momento lineal mediante un boost.

Finalmente, y para concluir esta subsección, siguiendo la deducción de Strominger [17], con el fin de obtener la entropía microscópica para el agujero negro BTZ consideramos los valores de L_0^\pm , dados por

$$\Delta_\pm = \frac{1}{2}(Ml \pm J), \quad (2.18)$$

Por consiguiente, si se asume que la teoría cuántica para la Relatividad General con constante cosmológica negativa existe y es descrita por una teoría de campo conforme

(CFT) dual en el borde, los estados físicos deben formar una representación del álgebra con una carga central dada por $c = 3l/G$, luego, si la CFT satisface ciertas propiedades entonces el crecimiento asintótico del número de estados es dado por la fórmula de Cardy¹ [42]. La entropía, calculada en el ensamble microcanónico como el logaritmo de la densidad de estados, está dada por

$$S = 2\pi\sqrt{\frac{c}{6}\Delta_+} + 2\pi\sqrt{\frac{c}{6}\Delta_-} = \frac{2\pi r_+}{4G}. \quad (2.19)$$

Notablemente, la fórmula de Cardy da el resultado esperado aún cuando se carece de una descripción precisa para los estados microscópicos.



¹Esta fórmula nos permite hacer un conteo de los estados microscópicos para valores de la energía muy grande en comparación con el *gap* que hay entre el cero y el estado fundamental.

2.3. Teoría de Einstein-Maxwell en 2+1-dimensiones

El acoplamiento de un campo electromagnético a la Relatividad General en 2+1-dimensiones ha sido ampliamente estudiado (véase, por ejemplo, [43, 44, 45, 46, 15, 38, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 39, 55, 56, 57, 58] y [59]). Sin embargo, en esta sección nos enfocaremos en la solución de agujero negro con carga eléctrica y estático ($N^\phi(r) = 0$) para la teoría de Einstein-Maxwell en tres dimensiones con constante cosmológica negativa encontrada en [15], descrita por el siguiente elemento de línea

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(N^\perp)^2 dt^2 + f^{-2} dr^2 + r^2 d\phi^2, \\ A &= -Q \log(r) dt, \end{aligned} \quad (2.20)$$

con

$$(N^\perp)^2 = f^2 = -M + \frac{r^2}{l^2} - \frac{1}{2} Q^2 \log(r). \quad (2.21)$$

El tensor de energía-momentum para la solución de agujero negro con carga eléctrica no es cero, por lo tanto, el espaciotiempo ya no es de curvatura constante. En particular, ya no es posible expresar esta solución como un cociente entre el espacio AdS y un subgrupo de isometrías. La solución de agujero negro con rotación y carga eléctrica fue encontrada de manera independiente en [38], [39]. A continuación, haremos una pequeña revisión acerca de sus propiedades.

2.3.1. Agujero negro con rotación y carga eléctrica en 2+1-dimensiones

En esta subsección revisaremos las principales propiedades de la solución de agujero negro con rotación y carga eléctrica siguiendo el enfoque adoptado en [39].

Consideremos la acción de Einstein-Maxwell en tres dimensiones

$$I = \int d^3x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} (R - 2\Lambda) - \frac{\epsilon_0}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right], \quad (2.22)$$

donde la constante de Newton G y el radio l están definidos a través de $\kappa = 8\pi G$ y $\Lambda = -l^{-2}$, respectivamente. La “permeabilidad del vacío” ϵ_0 tiene unidades de longitud, y se asumirá igual a la unidad. Supongamos que la solución buscada es estacionaria y circularmente simétrica,

$$ds^2 = -N^2 f^2 dt^2 + f^{-2} dr^2 + r^2 (N^\phi dt + d\phi)^2$$

con $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \phi < 2\pi$ y $t_1 \leq t \leq t_2$.

En el contexto del formalismo Hamiltoniano se muestra que no es directo resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales que se obtienen de extremizar la acción

reducida respecto a N , N^ϕ , f^2 , p y A_ϕ , donde p es la única componente no nula del momento canónico conjugado al campo gravitacional $\pi^{r\phi}$. Debido a la dificultad para resolver el sistema, en [39] se consideran algunos casos límite como lo son el agujero negro BTZ ($Q = 0$, $J \neq 0$, $M \neq 0$) y el agujero negro con carga eléctrica estático ($Q \neq 0$, $J = 0$, $M \neq 0$), con el fin de ganar un poco de intuición respecto a las propiedades que debería tener solución general ($Q \neq 0$, $J \neq 0$, $M \neq 0$).

Debido a que las propiedades del agujero negro BTZ ya están bien establecidas [15, 16], nos centraremos en lo que ocurre para el agujero negro estático con carga eléctrica. En este caso, rápidamente nos encontramos con una característica que pareciera ser inherente a soluciones para la teoría de Einstein-Maxwell en tres dimensiones: energía aparentemente divergente. Este aspecto es simplemente un reflejo de que en tres dimensiones, el comportamiento asintótico de los campos es relajado con respecto al prescrito por Brown y Henneaux [18].

La supuesta divergencia presente en la energía fue manejada encerrando al sistema en un círculo de radio r_0 y luego considerando el límite $r_0 \rightarrow \infty$. La remoción de esta divergencia nos permite analizar la solución en el plano masa-carga para la cual existen agujeros negros. Los agujeros negros existen siempre que²

$$M - \left(\frac{Q}{2}\right)^2 \left[1 - \log\left(\frac{Q}{2}\right)^2\right] \geq 0. \quad (2.23)$$

Como se enfatiza en [39], para esta definición de la energía,

1. El agujero negro con carga eléctrica existe para valores arbitrariamente negativos de su masa.
2. No existe una cota superior en la carga eléctrica

Consideremos la solución cargada y estática. Es posible dotar a esta solución de momento angular mediante un boost de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{t - \omega\phi}{\sqrt{1 - \omega^2}}, \\ \tilde{\phi} &= \frac{\phi - \omega t}{\sqrt{1 - \omega^2}}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

junto con una redefinición adecuada de la coordenada radial. Este procedimiento claramente produce una solución de las ecuaciones de campo debido a que sólo se está

²Para mayores detalles ver figura 1(a) 3.1.

llevando a cabo una transformación de coordenadas. Por lo tanto, si consideramos un elemento de línea de la forma

$$ds^2 = -f^2 d\tilde{t}^2 + f^{-2} dr^2 + r^2 d\tilde{\phi}, \quad (2.25)$$

y aplicamos el boost (2.24), obtenemos

$$ds^2 = -N^2 F^2 dt^2 + F^{-2} dR^2 + R^2 (d\phi + N^\phi dt)^2, \quad (2.26)$$

con

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{r^2 - \omega^2 f^2}{1 - \omega^2}, \\ F^2 &= \left(\frac{dR}{dr} \right)^2 f^2, \\ N &= \frac{r}{R} \left(\frac{dr}{dR} \right) = \frac{dr^2}{dR^2}, \\ N^\phi &= \frac{\omega (f^2 - r^2)}{(1 - \omega^2) R^2}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde $f^2 = r^2 - \tilde{M} - \frac{1}{4} \tilde{Q}^2 \log r^2$. Aplicando la misma transformación para el potencial electromagnético $A = -\tilde{Q} \log(r) d\tilde{t}$ se obtiene,

$$A = -\frac{\tilde{Q}}{\sqrt{1 - \omega^2}} \log(r) (dt - \omega d\phi). \quad (2.28)$$

A partir de la forma asintótica de la solución es posible relacionar los parámetros \tilde{M} , \tilde{Q} con M , Q y J los cuales corresponden a la masa, la carga eléctrica y el momento angular de la solución cargada y rotante,

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{1 - \omega^2} \left(\tilde{M} (1 + \omega^2) - \frac{\omega^2}{2} \tilde{Q}^2 \right), \\ J &= \frac{2\omega}{1 - \omega^2} \left(\tilde{M} - \frac{\tilde{Q}^2}{4} \right), \\ Q &= \frac{\tilde{Q}}{\sqrt{1 - \omega^2}}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

No obstante, si quisiéramos expresar la métrica de la solución de agujero negro en términos de las cargas en el infinito, deberíamos ser capaces de invertir las relaciones (2.29) para expresar \tilde{M} , \tilde{Q} y ω como funciones de M , Q y J . Lo anterior puede ser complicado debido a que estas relaciones dan lugar a la siguiente ecuación cúbica para ω ,

$$\frac{Q^2}{4} \omega^3 - \frac{J}{2} \omega^2 + \left(M - \frac{Q^2}{4} \right) \omega - \frac{J}{2} = 0. \quad (2.30)$$

Para ganar algo de intuición, en [39] se consideran casos límite de esta ecuación ($Q = 0$ y $Q \neq 0$), sin embargo concluyen que no es posible expresar M , J y Q de manera tal que la ecuación (2.30) admita una única solución real tal que $\omega^2 < 1$.

En el siguiente capítulo se extenderá el estudio de cargas conservadas en la teoría de Einstein-Maxwell en tres dimensiones con constante cosmológica negativa al caso de soluciones estacionarias con simetría circular y se mostrará que mediante una elección adecuada de condiciones de borde, el espectro de energía de la solución de agujero negro con rotación y carga eléctrica es no negativo y además, para un valor fijo de la masa, la carga eléctrica posee una cota superior.



Capítulo 3

Cargas conservadas y agujeros negros para la teoría de Einstein-Maxwell en AdS_3

En un espaciotiempo de tres dimensiones, el decaimiento del campo electromagnético para una distribución localizada de carga es muy lento, por consiguiente, genera una fuerte backreaction en el comportamiento asintótico de la métrica. Por lo tanto, encontrar una forma de regularizar la energía en este tipo de casos resulta ser un gran problema [43], incluso en el caso con constante cosmológica negativa [39]. Una situación similar ocurre para Relatividad General en AdS_3 acoplada minimalmente a un campo escalar [23] o a una dos-forma [60] donde, a pesar de que el comportamiento asintótico es relajado en comparación al de Brown-Henneaux [18], las cargas conservadas asociadas a las simetrías asintóticas resultan ser finitas, y adquieren términos que manifiestamente dependen de los campos de materia. La solución de agujero negro eléctricamente cargado en la teoría de Einstein-Maxwell con constante cosmológica negativa exhibe propiedades consideradas patológicas. En efecto, la energía no posee un valor inferior mínimo, y para un valor fijo de la masa, no hay cota superior en la carga eléctrica [39]. Estas características sugieren que la solución puede ser inestable lo cual también impediría su inclusión en una teoría de supergravedad [61]. Por consiguiente, si se toma en cuenta que tanto la geometría del agujero negro como el Lagrangiano de Einstein-Maxwell son bien comportados, esto parece ser una situación muy inesperada. Con el fin de clarificar este punto, es importante hacer hincapié en que de acuerdo al principio de acción, la teoría no puede ser bien entendida a menos que un conjunto preciso de condiciones de borde sea especificado.

En este capítulo consideramos soluciones estacionarias y circularmente simétricas de la Relatividad General acoplada a un campo de Maxwell en AdS_3 , y se muestra que mediante una elección adecuada de la forma asintótica del multiplicador de Lagrange electromagnético (A_t), la acción posee un extremo siempre que satisfaga una condición de integrabilidad no trivial. Por lo tanto, como en el caso de los campos escalares y las dos-formas, para una elección genérica de condiciones de borde, la masa y el momento angular son automáticamente finitos, y adquieren contribuciones explícitas del campo de materia. Se muestra que al requerir la compatibilidad de las condiciones de borde con la simetría de escalamientos y de Lorentz para la clase de soluciones estacionarias, se determina un conjunto muy especial de *condiciones de borde holográficas invariantes de Lorentz*, el cual es caracterizado por una función arbitraria de una sola variable parametrizada por una constante arbitraria, pero fija y sin variación.

Por último, se comparan las cargas globales que se obtienen para el caso de la solución de agujero negro con rotación y carga eléctrica para diferentes elecciones de condiciones de borde. Se muestra que el resultado estándar en [39] corresponde a la elección más simple de condiciones de borde invariantes de Lorentz. Notablemente, si las condiciones de borde son compatibles con las simetrías de escalamientos y de Lorentz, el espectro de energía del agujero negro con carga eléctrica y rotación es no negativo, y además, para un valor fijo de la masa, la carga eléctrica posee una cota superior.

3.1. Principio de acción reducido: Soluciones estacionarias, condiciones de integrabilidad y cargas conservadas

Consideremos un campo electromagnético minimalmente acoplado a Relatividad General con constante cosmológica negativa en un espaciotiempo de tres dimensiones cuya acción está dada por (4.5). En la literatura se ha encontrado una gran familia de soluciones exactas, estacionarias y circularmente simétricas (véase, por ejemplo, [43, 44, 45, 46, 15, 38, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 39, 55, 56, 57, 58] y [59]).

De aquí en adelante consideraremos configuraciones genéricas estacionarias y circularmente simétricas de manera tal que la métrica del espaciotiempo puede escribirse

$$ds^2 = -\mathcal{N}(r)^2 \mathcal{F}(r)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\mathcal{F}(r)^2} + \mathcal{R}(r)^2 (\mathcal{N}^\phi(r) dt + d\phi)^2, \quad (3.1)$$

y el campo de gauge puede elegirse como¹

$$A = \mathcal{A}_t(r) dt + \mathcal{A}_\phi(r) d\phi. \quad (3.2)$$

Es claro entonces que la forma de (3.1) y (3.2) se mapea en si misma bajo la acción de un boost de Lorentz en el “cilindro $t - \phi$ ”. Es importante señalar también que tanto la métrica como el campo de gauge son invariantes bajo escalamientos de la forma

$$r \rightarrow \lambda r, \quad t \rightarrow \lambda^{-1} t, \quad \phi \rightarrow \lambda^{-1} \phi, \quad (3.3)$$

tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\rightarrow \lambda \mathcal{F}, \quad \mathcal{R} \rightarrow \lambda \mathcal{R}, \quad \mathcal{A}_\phi \rightarrow \lambda \mathcal{A}_\phi, \\ \mathcal{N} &\rightarrow \mathcal{N}, \quad \mathcal{N}^\phi \rightarrow \mathcal{N}^\phi, \quad \mathcal{A}_t \rightarrow \lambda \mathcal{A}_t. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Estas simetrías son entonces automáticamente incorporadas en las ecuaciones de campo reducidas que son obtenidas de la acción (2.22) para configuraciones estacionarias y circularmente simétricas.

El principio de acción reducido se obtiene al reemplazar la forma de la métrica y el campo de gauge dados por (3.1) y (3.2), respectivamente en (2.22),

$$I = -2\pi (t_2 - t_1) \int dr (\mathcal{N}\mathcal{H} + \mathcal{N}^\phi \mathcal{H}_\phi + \mathcal{A}_t \mathcal{G}) + B, \quad (3.5)$$

donde B es un término de borde que es agregado para asegurar que la acción posea un extremo. Es claro que \mathcal{N} , \mathcal{N}^ϕ , \mathcal{A}_t son los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos dados por

$$\mathcal{H} = -\frac{\mathcal{R}}{\kappa l^2} + 4\kappa \mathcal{R} (\pi^{r\phi})^2 + \frac{(p^r)^2}{2\mathcal{R}} + \frac{\mathcal{F}^2 (\mathcal{A}'_\phi)^2}{2\mathcal{R}} + \frac{(\mathcal{F}^2)' \mathcal{R}'}{2\kappa} + \frac{\mathcal{F}^2 \mathcal{R}''}{\kappa}, \quad (3.6)$$

$$\mathcal{H}_\phi = -p^r \mathcal{A}'_\phi - 2 (\mathcal{R}^2 \pi^{r\phi})', \quad (3.7)$$

$$\mathcal{G} = -\partial_r p^r, \quad (3.8)$$

donde los momenta $\pi^{r\phi}$ y p^r están dados por

$$\pi^{r\phi} = -\frac{\mathcal{N}^{\phi'} \mathcal{R}}{4\kappa \mathcal{N}}; \quad p^r = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{N}} (\mathcal{A}'_\phi \mathcal{N}^\phi - \mathcal{A}'_t), \quad (3.9)$$

¹Se ha asumido que el campo de gauge es estacionario y circularmente simétrico. Si hubiéramos hecho el mismo supuesto para el tensor de intensidad de campo $F_{\mu\nu}$, habríamos obtenido una clase de configuraciones aún más grande, de manera que (3.2) correspondería a una de las dos posibles ramas de soluciones (véase, por ejemplo, [59] y [62]).

En efecto, variando la acción con respecto a los multiplicadores de Lagrange se deduce que

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\phi = \mathcal{G} = 0, \quad (3.10)$$

mientras que la variación con respecto a \mathcal{A}_ϕ , \mathcal{F} , \mathcal{R} , conduce a las siguientes ecuaciones de campo

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}^2 \mathcal{N} \mathcal{R} \mathcal{A}'_\phi)' &= 2\mathcal{F}^2 \mathcal{N} \mathcal{R}' \mathcal{A}'_\phi + \mathcal{R}^2 (\mathcal{N}^\phi p^r)', \\ \mathcal{R}'' - [\log(\mathcal{N})]' \mathcal{R}' &= -\kappa (\mathcal{A}'_\phi)^2 \mathcal{R}^{-1}, \\ \kappa [\mathcal{A}'_\phi{}^2 \mathcal{F}^2 + (p^r)^2] \mathcal{R}^{-2} &= (\mathcal{F}^2)'' + 2 \left[\mathcal{N}'' \mathcal{F}^2 + \frac{3}{2} \mathcal{N}' (\mathcal{F}^2)' + 4\kappa \mathcal{N}^{\phi'} \mathcal{R} \pi^{r\phi} \right] \mathcal{N}^{-1} \\ &\quad + 8 (\kappa \pi^{r\phi})^2 + 2\Lambda. \end{aligned} \quad (3.11)$$

La acción reducida (3.5) posee entonces un extremo ($\delta I = 0$) de manera tal que la variación del término de borde B es dada por

$$\delta B = - (t_2 - t_1) \delta Q(r)|_{r \rightarrow \infty},$$

donde

$$\begin{aligned} \delta Q(r) &= \frac{2\pi}{\kappa} \left[\mathcal{N} \mathcal{F} \left(\mathcal{F}' \delta \mathcal{R} - \delta (\mathcal{F} \mathcal{R}') - \kappa \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} \mathcal{A}'_\phi \delta \mathcal{A}_\phi \right) + \mathcal{N}' (\mathcal{F}^2 \delta \mathcal{R}) \right] \\ &\quad + 2\pi \mathcal{N}^\phi [p^r \delta \mathcal{A}_\phi + 2\delta (\pi^{r\phi} \mathcal{R}^2)] + 2\pi \mathcal{A}_t \delta p^r. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Con el fin de integrar este término de borde es necesario conocer el comportamiento de los campos en la región asintótica. Dados los vínculos y las ecuaciones de campo en (3.10) y (3.11), respectivamente, se observa que las soluciones que son asintóticamente AdS₃ poseen el siguiente perfil de decaimiento

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^2 &= r^2 - \frac{\kappa l^2}{\pi} \left[h_{\mathcal{R}} \log\left(\frac{r}{l}\right) - \frac{f_{\mathcal{R}}}{2} \right] + \dots \\ \mathcal{F}^2 &= \frac{r^2}{l^2} - \frac{\kappa}{\pi} \left[\left(2h_{\mathcal{R}} + \frac{1}{4\pi} (q_t^2 + q_\phi^2) \right) \log\left(\frac{r}{l}\right) + f_{\mathcal{F}} \right] + \dots \\ \mathcal{N}^\phi &= N_\infty^\phi + \frac{\kappa}{2\pi} N_\infty \left[\frac{l}{2\pi} q_t q_\phi \log\left(\frac{r}{l}\right) - j \right] \frac{1}{r^2} + \dots \\ \mathcal{N} &= N_\infty + \dots \\ \mathcal{A}_t &= -\frac{1}{2\pi} (q_t N_\infty + q_\phi l N_\infty^\phi) \log\left(\frac{r}{l}\right) + N_\infty^\phi \varphi_\phi + N_\infty \frac{\varphi_t}{l} - \Phi + \dots \\ \mathcal{A}_\phi &= -\frac{q_\phi l}{2\pi} \log\left(\frac{r}{l}\right) + \varphi_\phi + \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde $h_{\mathcal{R}}, f_{\mathcal{R}}, f_{\mathcal{F}}, j, \varphi_t, \varphi_\phi, q_t, q_\phi$ pueden variar en el principio de acción, mientras que N_∞, N_∞^ϕ , y Φ corresponden a constantes arbitrarias sin variación, cuyos valores están fijos en el borde. Los puntos suspensivos “...” en el perfil de decaimiento corresponden a términos subdominantes que son irrelevantes para el análisis.

Además, los parámetros que caracterizan a la deformación de la superficie tipo espacio en el infinito, N_∞ y N_∞^ϕ , han sido manifiestamente incorporados en la forma asintótica del potencial electromagnético \mathcal{A}_t . Esto debe ser así para preservar la fijación de gauge del campo electromagnético bajo tales deformaciones. En otras palabras, esto garantiza que el generador canónico asociado a los parámetros de deformación genere la derivada de Lie del campo de gauge a lo largo de ellos. Este procedimiento mejora al Hamiltoniano con una contribución adicional que viene del generador $U(1)$ (véase, por ejemplo, [63]).

En espaciotiempos de $d \geq 4$ dimensiones, esta mejora equivale simplemente a una transformación de gauge propia la cual no cambia las integrales de superficie asociadas a los generadores canónicos. Sin embargo, en el caso de tres dimensiones, debido a que el perfil de decaimiento del campo electromagnético es extremadamente lento, esta mejora resulta generar una transformación de gauge impropia, es decir, modifica las cargas globales de una manera no trivial. Por lo tanto, notablemente, las divergencias logarítmicas que surgen en el término de borde del Hamiltoniano original se cancelan automáticamente, sin la necesidad de ningún procedimiento de regularización. Por consiguiente, para el perfil de decaimiento en (3.13), la variación de las cargas globales (3.12) se reduce a

$$\delta Q = N_\infty \delta M - N_\infty^\phi \delta J - \Phi \delta q_t, \quad (3.14)$$

el cual es manifiestamente finito. De acuerdo a [64], la ec. (3.14) permite identificar $\delta q_t, \delta J$ y δM con la variación de la carga eléctrica, el momento angular, y la masa, respectivamente. El momento angular integra directamente de acuerdo a

$$J = j + \frac{l}{4\pi} q_t q_\phi - q_t \varphi_\phi, \quad (3.15)$$

mientras que la variación de la masa, dada por

$$\delta M = \delta \left[f_{\mathcal{R}} + f_{\mathcal{F}} + h_{\mathcal{R}} + \frac{1}{l} (q_\phi \varphi_\phi) \right] - \frac{1}{l} (\varphi_\phi \delta q_\phi - \varphi_t \delta q_t), \quad (3.16)$$

implica una condición de integrabilidad no trivial que involucra a $\varphi_t, \varphi_\phi, q_t, q_\phi$. Debido a que la condición de integrabilidad es independiente de N_∞ y N_∞^ϕ , sin pérdida de generalidad, es conveniente expresarla de una forma manifiestamente covariante de Lorentz. Lo anterior se realiza al asumir que la métrica del borde

está dada por la métrica plana $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-l^{-2}, 1)$, módulo una transformación conforme. La ecuación (3.16) puede escribirse como

$$\delta M = \delta \left[f_{\mathcal{R}} + f_{\mathcal{F}} + h_{\mathcal{R}} + \frac{1}{l} (q_{\phi} \varphi_{\phi}) \right] - \frac{1}{l} \varphi_{\mu} \delta q^{\mu}, \quad (3.17)$$

con $q_{\mu} = (l^{-1}q_t, q_{\phi})$, y $\varphi_{\mu} = (l^{-1}\varphi_t, \varphi_{\phi})$.

La condición de integrabilidad de la energía está dada

$$\delta^2 M = -\frac{1}{l} (\delta\varphi_{\mu} \wedge \delta q^{\mu}) = 0, \quad (3.18)$$

lo que implica que φ_{μ} y q_{μ} están funcionalmente relacionados. La condición (3.18) es resuelta por

$$\varphi_{\mu} = -\frac{\delta\mathcal{V}}{\delta q^{\mu}}, \quad (3.19)$$

donde $\mathcal{V} = \mathcal{V}(q^{\mu})$ es una función arbitraria de q_t y q_{ϕ} . Por consiguiente, la masa y el momento angular se leen

$$M = f_{\mathcal{R}} + f_{\mathcal{F}} + h_{\mathcal{R}} + \frac{1}{l} \left(\mathcal{V} - q_{\phi} \frac{\delta\mathcal{V}}{\delta q_{\phi}} \right), \quad (3.20)$$

$$J = j + \frac{l}{4\pi} q_t q_{\phi} + q_t \frac{\delta\mathcal{V}}{\delta q_{\phi}}, \quad (3.21)$$

los que manifiestamente adquieren contribuciones del campo electromagnético también de la función \mathcal{V} , que caracteriza a el conjunto de condiciones de borde que son compatibles con la integrabilidad de la energía.

Notablemente, a diferencia de dimensiones mayores, para $d = 3$, el valor de la masa y el momento angular dependen explícitamente de la elección de condiciones de borde. Note que un efecto similar ocurre en el caso de campos escalares con perfil de decaimiento lento en el infinito [23]. Sin embargo, en este último caso, este efecto sólo se manifiesta en la masa, pero no en el momento angular.

3.1.1. Compatibilidad de las condiciones de borde con las simetrías de Lorentz y de escalamientos

Como es el caso de las extensiones auto adjuntas en mecánica cuántica, es natural preguntarse acerca de condiciones de borde que sean consistentes con un espectro de energía bien definido. Para tener una guía, es interesante explorar si el conjunto de condiciones de borde es compatible con las simetrías de las configuraciones estacionarias y circularmente simétricas de la forma (3.1) y (3.2). Por lo tanto, debido a que un conjunto consistente de condiciones de borde resulta ser especificado por la función $\mathcal{V} = \mathcal{V}(q^\mu)$, al requerir su invariancia bajo transformaciones de Lorentz de la métrica del borde (conformalmente) plana, implica que la función permitida debe ser de la forma

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(q^2) , \quad (3.22)$$

con $q^2 = \eta^{\mu\nu} q_\mu q_\nu = q_\phi^2 - q_t^2$. Nótese que la elección mas simple de condiciones de borde invariantes de Lorentz corresponde a $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0$, donde \mathcal{V}_0 es una constante arbitraria fija sin variación, la cual se puede anular debido a la arbitrariedad en la elección de la energía del background de referencia.

Como se explicó al principio de este capítulo, la clase de configuraciones estacionarias y circularmente simétricas (3.1), (3.2), es invariante bajo escalamientos de la forma (3.3), (3.4). En efecto, la acción reducida (3.5) en el bulk escala como $I \rightarrow \lambda^2 I$, de manera que las ecuaciones de campo son invariantes bajo la simetría de escalamientos². Por lo tanto, es interesante buscar un conjunto de condiciones de borde holográficas que sea compatible con esta simetría de escalamientos. La forma precisa de la función $\mathcal{V}(q^\mu)$ se encuentra tomando en cuenta que φ_μ y q_μ están funcionalmente relacionados y transforman de una forma diferente bajo la simetría de escalamientos. Las reglas de transformación de φ_μ y q_μ se heredan de las leyes de transformación de la coordenada radial r y del campo de gauge A , que de acuerdo a (3.3) y (3.4), están dadas por $r \rightarrow \lambda r$, y $\mathcal{A}_\mu \rightarrow \lambda \mathcal{A}_\mu$, y por lo tanto

$$\varphi_\mu \rightarrow \lambda \left(\varphi_\mu + \frac{l}{2\pi} q_\mu \log(\lambda) \right) ; \quad q_\mu \rightarrow \lambda q_\mu .$$

La relación funcional entre φ_μ y q_μ implica entonces que

$$\varphi_\mu(\lambda q_\mu) = \lambda \left(\varphi_\mu + \frac{l}{2\pi} q_\mu \log(\lambda) \right) . \quad (3.23)$$

²En [65] se ha reportado una simetría de escalamientos similar, bajo la cual la acción reducida es invariante.

Tomando la derivada de (3.23) con respecto a λ , y evaluando para $\lambda = 1$, conduce a la siguiente ecuación diferencial

$$q^\nu \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial q^\nu \partial q^\mu} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q^\mu} - \frac{l}{2\pi} q_\mu ,$$

donde \mathcal{V} está definida en la ec. (3.19). El conjunto de condiciones de borde holográficas compatible con la simetría de escalamientos está dado por

$$\mathcal{V} = q_t^2 F\left(\frac{q_\phi}{q_t}\right) + \frac{l}{8\pi} (q_t^2 [\log(q_t^2) - 1] - q_\phi^2 [\log(q_\phi^2) - 1]) , \quad (3.24)$$

salvo una constante arbitraria sin variación y donde $F = F(q_\phi/q_t)$ es una función arbitraria.

Nótese que, como se esperaba, la función \mathcal{V} en (3.24) transforma anómalamente bajo escalamientos, i.e., $\mathcal{V}(\lambda q_\mu) = \lambda^2 \left(\mathcal{V} - \frac{q_t^2 l}{4\pi} \log(\lambda) \right)$.

Curiosamente, si uno requiere simultáneamente simetría bajo Lorentz y escalamientos simultáneamente, la consistencia de (3.22) con (3.24) fija la forma de la función F de acuerdo a

$$F(x) = \frac{l}{8\pi} \left[\log \left[\frac{\kappa}{8\pi^2} (1 - x^2) \right] - x^2 \log \left[\frac{\kappa}{8\pi^2} (x^{-1} - 1) \right] + \gamma (1 - x^2) \right] ,$$

donde γ es una constante arbitraria, pero fija. Por consiguiente, el conjunto de condiciones de borde holográficas invariantes de Lorentz corresponde a la siguiente elección

$$\mathcal{V} = \frac{l}{8\pi} (q_t^2 - q_\phi^2) \left[\log \left(\frac{\kappa}{8\pi^2} (q_t^2 - q_\phi^2) \right) + \gamma - 1 \right] . \quad (3.25)$$

3.2. Espectro del agujero negro y condiciones de borde invariantes de Lorentz: Elección más simple vs. elección holográfica

Enfoquémonos en el análisis de las cargas globales en el caso de soluciones de agujero negro con rotación y carga eléctrica para una elección genérica de condiciones de borde. Nos concentraremos entonces en las elecciones invariantes de Lorentz para los casos más simples así como también para el caso holográfico. Por simplicidad, comenzaremos describiendo la solución estática y luego ampliaremos el análisis al caso rotante.

3.2.1. Agujero negro estático con carga eléctrica

Siguiendo el enfoque adoptado en [94], escribimos la métrica de la solución estática y con carga eléctrica encontrada en [15] como

$$ds^2 = -N_\infty^2 \left(\frac{r^2}{l^2} - \frac{r_+^2}{l^2} - \frac{\kappa q_t^2}{4\pi^2} \log \left(\frac{r}{r_+} \right) \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{l^2} - \frac{r_+^2}{l^2} - \frac{\kappa q_t^2}{4\pi^2} \log \left(\frac{r}{r_+} \right)} + r^2 d\phi^2, \quad (3.26)$$

$$A = \left(-\frac{q_t}{2\pi} N_\infty \log \left(\frac{r}{l} \right) + N_\infty \frac{\varphi_t}{l} - \Phi \right) dt, \quad (3.26)$$

donde el horizonte de eventos se ubica en $r = r_+$, siempre que la carga eléctrica esté acotada de acuerdo a

$$q_t^2 \leq \frac{8\pi^2}{\kappa l^2} r_+^2. \quad (3.27)$$

Esta cota se satura para el caso extremo. De acuerdo a (3.13), el comportamiento asintótico es tal que $q_\phi = \varphi_\phi = h_{\mathcal{R}} = f_{\mathcal{R}} = 0$, y

$$f_{\mathcal{F}} = \frac{\pi r_+^2}{\kappa l^2} - \frac{q_t^2}{4\pi} \log \left(\frac{r_+}{l} \right),$$

de manera que las cargas globales pueden calcularse a partir de (3.20), (3.21).

Para una elección genérica de $\mathcal{V} = \mathcal{V}(q_t)$ el momento angular es cero, y la masa se reduce a

$$M = \frac{\pi r_+^2}{\kappa l^2} - \frac{q_t^2}{4\pi} \log \left(\frac{r_+}{l} \right) + \frac{1}{l} \mathcal{V}. \quad (3.28)$$

Caso más simple de condiciones de borde invariantes de Lorentz.- En el caso $\mathcal{V} = 0$, el resultado en (3.28) coincide con el encontrado en [39]. Note que en el caso extremo, la masa es dada por

$$M_{ext} = \frac{q_t^2}{8\pi} \left[1 - \log \left(\frac{\kappa q_t^2}{8\pi^2} \right) \right]. \quad (3.29)$$

Como se explica en [39], el espectro de energía no posee una cota inferior, y para un valor fijo de la masa, la carga eléctrica no posee un límite superior; véase figura 1 (a)(3.1).

Condiciones de borde holográficas invariantes de Lorentz.- En este caso, de acuerdo a (3.25), las condiciones de borde consistentes con la simetría de escalamientos están determinadas determinadas por

$$\mathcal{V} = \frac{l}{8\pi} q_t^2 \left[\log \left(\frac{\kappa}{8\pi^2} q_t^2 \right) + \gamma - 1 \right],$$

la cual depende de un único parámetro fijo γ . La masa del agujero negro en (3.28) está dada por

$$M = \frac{\pi r_+^2}{\kappa l^2} + \frac{q_t^2}{8\pi} \left[\log \left(\frac{\kappa l^2}{8\pi^2} \frac{q_t^2}{r_+^2} \right) + \gamma - 1 \right], \quad (3.30)$$

de manera que en el caso extremo se reduce a

$$M_{ext} = \frac{\gamma}{8\pi} q_t^2. \quad (3.31)$$

Notablemente, si el parámetro arbitrario es tal que $\gamma > 0$, el espectro es no negativo, y para un valor fijo de la masa, la carga eléctrica está acotada por arriba. Esto está representado en la figura 1 (b)(3.1). Para $\gamma = 0$, el espectro de energía es no negativo, pero la carga eléctrica no posee una cota superior. El caso $\gamma < 0$ es patológico, debido a que la energía no está acotada por debajo y no hay cota superior para la carga eléctrica.

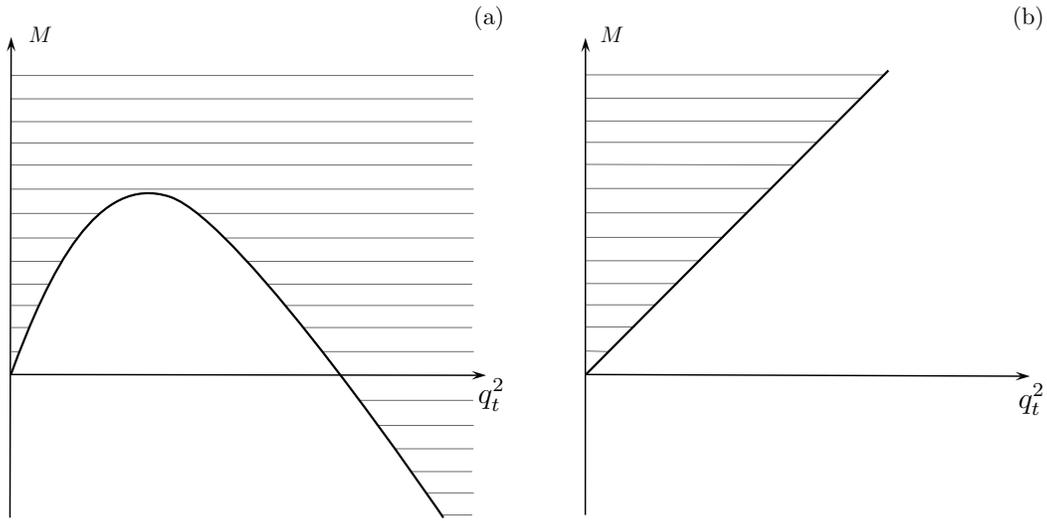


Figura 3.1: Agujeros negros con carga eléctrica existen en la región del plano (M, q_t^2) definida para $M \geq M_{ext}$, la cual es delimitada por la curva que corresponde a la solución extrema. La figura (a) describe al caso estándar, que corresponde a la elección más simple de condiciones de borde invariantes de Lorentz: $\mathcal{V} = 0$, de manera que $M_{ext} = \frac{q_t^2}{8\pi} \left[1 - \log \left(\frac{\kappa q_t^2}{8\pi^2} \right) \right]$. El espectro de energía no posee una cota inferior, y para un valor fijo de la masa no hay una cota superior para la carga eléctrica. La figura (b) ilustra el caso de las condiciones de borde invariante de Lorentz holográficas: $\mathcal{V} = \frac{l}{8\pi} q_t^2 \left[\log \left(\frac{\kappa}{8\pi^2} q_t^2 \right) + \gamma - 1 \right]$, tal que $M_{ext} = \frac{\gamma}{8\pi} q_t^2$, para $\gamma > 0$. El espectro de energía es no negativo y, para un valor fijo de la masa la carga eléctrica posee una cota superior.

3.2.2. Agujero negro con rotación y carga eléctrica

La solución de agujero negro con rotación y carga eléctrica ha sido obtenida de manera independiente en [38], [39]. Es conveniente expresar esta solución como en [94], tal que la métrica del espaciotiempo y el campo de gauge pueden escribirse

como en las ecs. (3.1), (3.2)

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^2 &= r^2 + \left(\frac{\omega^2}{1 - \omega^2} \right) r_+^2 + \frac{\kappa}{4\pi^2} (q_t \omega l)^2 \log \left(\frac{r}{r_+} \right), \\
\mathcal{N}^\phi &= N_\infty^\phi - \left(\frac{\omega}{1 - \omega^2} \right) \left(\frac{r^2}{l^2} - \mathcal{F}^2 \right) \frac{l}{\mathcal{R}^2} N_\infty, \\
\mathcal{N}^2 &= \frac{r^2}{\mathcal{R}^2} N_\infty^2, \\
\mathcal{F}^2 &= \frac{r^2}{l^2} - \frac{r_+^2}{l^2} - \frac{\kappa}{4\pi^2} q_t^2 (1 - \omega^2) \log \left(\frac{r}{r_+} \right), \\
\mathcal{A}_t &= -\frac{q_t}{2\pi} [N_\infty - \omega l N_\infty^\phi] \log \left(\frac{r}{l} \right) + N_\infty^\phi \varphi_\phi + N_\infty \frac{\varphi_t}{l} - \Phi, \\
\mathcal{A}_\phi &= \frac{q_t \omega l}{2\pi} \log \left(\frac{r}{l} \right) + \varphi_\phi.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Esta configuración posee un horizonte de eventos en $r = r_+$, siempre que la carga eléctrica q_t y el parámetro de rotación ω satisfagan las siguientes cotas

$$\omega^2 \leq 1, \tag{3.33}$$

$$q_t^2 \leq \frac{8\pi^2}{\kappa l^2} \frac{r_+^2}{1 - \omega^2}, \tag{3.34}$$

las cuales se saturan en los casos extremos. Las contribuciones relevantes a las cargas globales en (3.20), (3.21) pueden leerse directamente desde el comportamiento asintótico en (3.13), las cuales están determinadas por

$$\begin{aligned}
h_{\mathcal{R}} &= -\frac{\omega^2 q_t^2}{4\pi} ; \quad f_{\mathcal{R}} = \frac{2\pi}{\kappa l^2} \frac{r_+^2 \omega^2}{1 - \omega^2} - \frac{q_t^2 \omega^2}{2\pi} \log \left(\frac{r_+}{l} \right), \\
q_\phi &= -q_t \omega ; \quad f_{\mathcal{F}} = \frac{\pi r_+^2}{\kappa l^2} - \frac{q_t^2 (1 - \omega^2)}{4\pi} \log \left(\frac{r_+}{l} \right).
\end{aligned}$$

Por consiguiente, para una elección genérica de condiciones de borde dadas por $\mathcal{V} = \mathcal{V}(q^\mu)$, la masa y el momento angular se reducen a

$$M = \frac{\pi r_+^2}{\kappa l^2} \left(\frac{1 + \omega^2}{1 - \omega^2} \right) - \frac{q_t^2}{4\pi} \left(\omega^2 + (1 + \omega^2) \log \left(\frac{r_+}{l} \right) \right) + \frac{1}{l} \left(\mathcal{V} - q_\phi \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta q_\phi} \right), \tag{3.35}$$

$$J = \frac{2\pi r_+^2 \omega}{\kappa l (1 - \omega^2)} - \frac{q_t^2 \omega l}{4\pi} \left(1 + \log \left(\frac{r_+}{l^2} \right) \right) + q_t \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta q_\phi}, \tag{3.36}$$

respectivamente.

Nótese que para una elección genérica de condiciones de borde, el valor de la masa y el momento angular pueden ser sensibles al valor de la carga eléctrica, o incluso

el signo del momento angular podría ser opuesto al del parámetro de rotación, lo cual es curioso, pero no necesariamente inconsistente³. En este sentido, a pesar de que las cargas globales han adquirido contribuciones explícitas debido a la presencia de la función arbitraria \mathcal{V} , en el límite (ingenuo) de rotación extrema ($\omega^2 \rightarrow 1$) se relacionan como en el caso eléctricamente neutro [15], [16], i.e., $J/Ml = 1$.

Además, es directo chequear la validez de la primera ley de la termodinámica cuando las cargas globales están dadas genéricamente por (3.35), (3.36), lo cual se sabe que ocurre por adelantado, debido a que sólo es un reflejo del hecho de que la acción reducida Euclídea posee un extremo para soluciones suaves. En efecto, el exigir la regularidad de la geometría Euclídea y del campo de gauge en torno al horizonte de eventos, se obtiene

$$N_\infty^2 = \frac{4\pi^2 l^4 r_+^2}{1 - \omega^2} \left(r_+^2 - \frac{\kappa l^2}{8\pi^2} q_t^2 (1 - \omega^2) \right)^{-2}, \quad (3.37)$$

$$N_\infty^\phi = \frac{\omega}{l} N_\infty, \quad (3.38)$$

$$\Phi = -\frac{q_t}{2\pi} (N_\infty - \omega l N_\infty^\phi) \log\left(\frac{r_+}{l}\right) - N_\infty^\phi \frac{\delta\mathcal{V}}{\delta q_\phi} + \frac{1}{l} N_\infty \frac{\delta\mathcal{V}}{\delta q_t}, \quad (3.39)$$

de manera tal que la variación de la entropía, $S = \frac{A}{4G} = \frac{\pi\mathcal{R}(r_+)}{2G}$, satisface

$$\delta S = N_\infty \delta M - N_\infty^\phi \delta J - \Phi \delta q_t. \quad (3.40)$$

Por lo tanto, N_∞ corresponde al inverso de la temperatura de Hawking $\beta = T^{-1}$, mientras que el producto de β con los potenciales químicos asociados al momento angular y la carga eléctrica se identifican con N_∞^ϕ , y Φ , respectivamente.

Caso más simple de condiciones de borde invariantes de Lorentz.- Al requerir la consistencia de las condiciones de borde con la invariancia de Lorentz en el borde se obtiene que $\mathcal{V} = \mathcal{V}(q^2)$. Es importante señalar que, de acuerdo a las ecs. (3.20) y (3.21), esto asegura que el momento angular posee el mismo signo que el parámetro de rotación, y también garantiza que la masa y el momento angular no dependen del signo de la carga eléctrica q_t .

Nótese además que, en el caso más simple, $\mathcal{V} = 0$, las expresiones (3.35) y (3.36) concuerdan con los resultados obtenidos en [39].

³En efecto, el signo de J puede diferir del signo de ω para agujeros negros en teorías de la gravitación con términos de paridad impar en la acción, como en el caso de gravedad topológicamente masiva (véase, por ejemplo, [66]). Por otra parte, como se mostró recientemente en [67], en el caso de agujeros negros en AdS_3 dotados de campos de espín 4, el rango permitido de las cargas positivas de espín 4 es mayor que el rango de las negativas. Además, el rango permitido para las cargas de espín 4 es consistente, y concuerda precisamente, con el rango que se obtiene de las cotas que se obtienen a partir de la extensión hipersimétrica localmente de la teoría.

Condiciones de borde holográficas invariantes de Lorentz.- Las condiciones de borde en (3.25) en este caso están dadas por

$$\mathcal{V} = \frac{l}{8\pi} q_t^2 (1 - \omega^2) \left[\log \left(\frac{\kappa}{8\pi^2} q_t^2 (1 - \omega^2) \right) + \gamma - 1 \right], \quad (3.41)$$

de manera tal que la masa y el momento angular en (3.35) y (3.36) se reducen a

$$M = \frac{\pi}{\kappa} \left(\frac{1 + \omega^2}{1 - \omega^2} \right) \frac{r_+^2}{l^2} + \frac{q_t^2 (1 + \omega^2)}{8\pi} \left(\log \left[\frac{\kappa}{8\pi^2} \frac{q_t^2 l^2}{r_+^2} (1 - \omega^2) \right] + \gamma - 1 \right), \quad (3.42)$$

$$J = \frac{2l\omega}{1 + \omega^2} M. \quad (3.43)$$

Es interesante destacar que la relación (3.43) no involucra a la carga eléctrica y, por lo tanto, concuerda precisamente con la que se obtiene para el caso del agujero negro BTZ eléctricamente neutro. En el caso extremo para el cual la cota (3.34) se satura, la masa del agujero negro se lee

$$M_{ext} = \frac{\gamma}{8\pi} q_t^2 (1 + \omega^2). \quad (3.44)$$

Es claro entonces que el espectro de energía y la cota superior en la carga eléctrica son bien comportados incluso en el caso rotante.

3.3. Comentarios finales

En este capítulo se mostró que la masa y el momento angular de soluciones estacionarias y circularmente simétricas de la teoría de Einstein-Maxwell en AdS₃ genéricamente adquieren contribuciones debidas al campo electromagnético, y resultan ser sensibles a la elección de condiciones de borde. Este efecto no sólo se manifiesta para campos de espín 1, sino que también se sabe que ocurre para campos escalares [23], [24], [68] e incluso para campos de espín superior [69] en tres dimensiones.

Es interesante destacar además, que de acuerdo a una serie de resultados en la literatura [50], [39], [56], [70], [71], [72], [73], [74], [75], [76], [77], el valor preciso de la masa del agujero negro eléctricamente cargado pareciera depender de los distintos esquemas de regularización. En este sentido, nuestros resultados podrían clarificar este acertijo debido a que diferentes resultados podrían corresponder a elecciones inequivalentes de condiciones de borde. Sería interesante explorar el efecto de distintas elecciones de la función \mathcal{V} , en el contexto de la superconductividad holográfica [78], [79], [80], [81], [82], [83].

Además se muestra que existe una elección muy especial de condiciones de borde que son obtenidas al requerir su compatibilidad con las simetrías de Lorentz y de escalamientos. Este conjunto de condiciones de borde holográficas está caracterizado por un parámetro fijo γ , el cual, en el contexto de la mecánica cuántica, jugaría el rol de la longitud de la caja para una partícula confinada. Las condiciones de borde holográficas pueden interpretarse también como un análogo de las condiciones de borde de Robin. Vale la pena destacar que este parámetro aparece manifiestamente en el espectro de energía de la solución de agujero negro con rotación y carga eléctrica, tal que para $\gamma > 0$ es no negativo, y para un valor fijo de la energía existe una cota superior para la carga eléctrica.

Sería interesante reconsiderar si los agujeros negros eléctricamente cargados pueden ser incluidos apropiadamente dentro de una teoría de supergravedad. En este caso, uno esperaría que el caso extremo saturara las cotas de energía que vienen de la supersimetría. Note que, de acuerdo a la ec. (3.31), la cota de energía debería ser cuadrática en la carga eléctrica, lo cual parece ir de la mano con la no linealidad del álgebra superconforme con $\mathcal{N} > 1$ (véase, por ejemplo, [84] y [85]).

En la próxima sección veremos que es posible relajar las condiciones asintóticas de Brown-Henneaux [18] de manera consistente, con el fin de acomodar agujeros negros eléctricamente cargados en la teoría de Einstein-Maxwell en AdS_3 [98].

Capítulo 4

Estructura asintótica de la teoría de Einstein-Maxwell en AdS_3

La primera solución de agujero negro acoplado a un campo de materia fue encontrada por Reissner y Nordström [87], [88]. Sus propiedades han sido ampliamente exploradas (véase, por ejemplo, [89], [90] y [91]), lo cual parece ser una consecuencia natural de la interacción de dos de las más grandes teorías de campo que se han formulado: Relatividad General y Electromagnetismo. La solución de Reissner-Nordström puede ser generalizada para incluir rotación [92], [93] incluso si la teoría de Einstein-Maxwell incluye una constante cosmológica en diversas dimensiones. Sin embargo, en tres dimensiones, el análisis de las propiedades de la solución de agujero negro con carga eléctrica (rotante) [15], [38], [39] puede verse un tanto oscurecido debido al decaimiento logarítmico del campo de gauge, lo cual modifica severamente el comportamiento asintótico de la métrica. En efecto, encontrar una definición adecuada de cargas conservadas globales en este contexto resulta ser una tarea muy sutil [43], [39]. No obstante, en el caso de soluciones estacionarias y esféricamente simétricas, se ha mostrado recientemente que los generadores canónicos asociados a la masa y el momento angular pueden ser naturalmente definidos sin la necesidad de ningún tipo de regularización [94]. Además, como se mostró en el capítulo anterior (3), las integrales de superficie adquieren contribuciones explícitas provenientes del campo electromagnético, y por consiguiente, se vuelven manifiestamente sensibles a la elección de condiciones de borde¹. Este efecto parece reconciliar los diferentes resultados que se han obtenido siguiendo distintos métodos de regularización en la literatura para la masa del agujero negro (rotante) con carga eléctrica [50], [49],

¹Nos gustaría enfatizar que de aquí en adelante en adelante haremos una diferencia entre “condiciones asintóticas” y “condiciones de borde”. Por condiciones asintóticas nos referimos al decaimiento de los campos en la región asintótica, la cual corresponde a un conjunto abierto; mientras que por condiciones de borde nos referimos a las condiciones que son mantenidas fijas en el borde.

[53], [39], [56], [70], [71], [72], [73], [74], [76], [77], debido a que podrían corresponder distintas elecciones de condiciones de borde. Es interesante entonces explorar si el efecto se extiende a configuraciones genéricas, que podrían no ser estáticas ni circularmente simétricas. Con este objetivo, en la próxima sección abordamos algunos de los aspectos geométricos relevantes de espaciotiempos que son asintóticamente AdS_3 en la teoría de Einstein-Maxwell. Se muestra que poseen un comportamiento relajado comparado con el de Brown-Henneaux [18].

La realización canónica de las simetrías asintóticas se realiza a continuación en la sección 4.2, donde se muestra que la variación de los generadores asociados a los vectores de Killing asintóticos se vuelve automáticamente finita una vez que se requiere que generen la derivada de Lie de los campos. Las integrales de superficie genéricamente adquieren contribuciones provenientes del campo electromagnético y están sujetas a condiciones de integrabilidad no triviales, lo cual implica una relación funcional entre los términos dominantes de la forma asintótica del campo electromagnético. Como los generadores canónicos dependen explícitamente de la elección de condiciones de borde, en la sección 4.3 se estudia la compatibilidad de distintas elecciones con las simetrías asintóticas. Se muestra que para condiciones de borde genéricas, las simetrías asintóticas se quiebran a $\mathbb{R} \otimes U(1) \otimes U(1)$. Sin embargo, hay dos conjuntos diferentes de condiciones de borde para los cuales sólo una de las copias quirales de las simetrías asintóticas de Virasoro se preserva. Vale la pena destacar que al requerir la preservación del grupo conforme completo, se selecciona un conjunto muy especial de condiciones de borde, el cual es etiquetado por un parámetro constante fijo único. La realización canónica del álgebra de las simetrías asintóticas entonces está dada por la suma directa de $U(1)$ con dos copias del álgebra de Virasoro con la extensión central usual.

La sección 4.4 está dedicada al cálculo de las cargas globales del agujero negro con rotación y carga eléctrica, las cuales resultan coincidir con las expresiones encontradas recientemente en [94] del análisis de configuraciones estacionarias y esféricamente simétricas. Concluimos con algunos comentarios adicionales en la sección 4.5.

4.1. Decaimiento de los campos y simetrías asintóticas

El comportamiento asintótico de los campos se puede obtener siguiendo el criterio descrito en [21, 23, 66, 95]. Para una teoría genérica, los requerimientos que deben cumplirse pueden enunciarse de la siguiente forma:

- El conjunto debe contener tantas simetrías asintóticas como sea posible.
- El decaimiento de los campos debe ser lo suficientemente relajado como para contener soluciones de interés físico.
- Simultáneamente, el decaimiento debe ser lo suficientemente rápido para asegurar que la variación de las cargas globales sea finita.
- Las condiciones de borde deben garantizar que la variación de las cargas pueda ser integrada.

Una vez que se consideran estos cuatro requerimientos para espaciotiempos que son asintóticamente AdS_3 en la teoría de Einstein-Maxwell, podemos proponer el siguiente perfil de decaimiento para la métrica y el campo de gauge:

$$\begin{aligned}
 g_{\pm\pm} &= \frac{\kappa l^2}{4\pi^2} q_{\pm}^2 \log\left(\frac{r}{l}\right) + f_{\pm\pm} + \mathcal{O}\left(\log\left(\frac{r}{l}\right) r^{-1}\right), \\
 g_{+-} &= -\frac{r^2}{2} + f_{+-} + \mathcal{O}\left(\log\left(\frac{r}{l}\right) r^{-1}\right), \\
 g_{rr} &= \frac{l^2}{r^2} + \frac{f_{rr}}{r^4} + \mathcal{O}\left(\log\left(\frac{r}{l}\right) r^{-5}\right), \\
 g_{r\pm} &= \mathcal{O}\left(\log\left(\frac{r}{l}\right) r^{-3}\right),
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
 A_{\pm} &= -\frac{l}{2\pi} q_{\pm} \log\left(\frac{r}{l}\right) + \varphi_{\pm} + \mathcal{O}\left(\log\left(\frac{r}{l}\right) r^{-2}\right), \\
 A_r &= \mathcal{O}\left(\log\left(\frac{r}{l}\right) r^{-3}\right),
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $f_{\pm\pm}$, f_{+-} , f_{rr} y q_{\pm} corresponden a funciones arbitrarias independientes las cuales sólo dependen de las coordenadas $x^{\pm} = \frac{t}{l} \pm \phi$. Debe ser enfatizado que las funciones φ_{\pm} están relacionadas funcionalmente con q_{\pm} de una forma precisa. Como se explica en la sección 4.2, esto debe ser así con el fin de asegurar la integrabilidad de la variación de las cargas globales.

Nótese que el comportamiento asintótico de la métrica en (4.1) podría haber incluido términos adicionales de la forma $\mathcal{O}(\log(r/l))$ y $\mathcal{O}(\log(r/l)r^{-4})$, en g_{+-} y g_{rr} respectivamente, los cuales no consideramos debido a que pueden ser eliminados de manera consistente. En efecto, es por esta razón que el decaimiento asintóticamente AdS_3 de la rama de soluciones estacionarias y esféricamente simétricas estudiadas en [94] está contenido en la estructura asintótica descrita en (4.1) y (4.2). Consecuentemente, el comportamiento asintótico propuesto en [98] no sólo acomoda a un gran conjunto de soluciones que poseen estas simetrías [15], [48], [50], [51], [52], [53], [54], [39], [55], [56], [57], [58], [59], sino que a una clase de configuraciones aún más grande, incluyendo aquellas que no son estacionarias ni circularmente simétricas.

Estas simetrías asintóticas corresponden al subconjunto de difeomorfismos y simetrías de gauge $U(1)$, parametrizadas por $\xi^\mu = \xi^\mu(x^\nu)$ y $\eta = \eta(x^\mu)$ respectivamente, que preservan el comportamiento asintótico de los campos, es decir, que satisfacen la siguiente condición

$$\begin{aligned}\delta_{\xi,\eta}g_{\mu\nu} &= \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \mathcal{O}(g_{\mu\nu}) , \\ \delta_{\xi,\eta}A_\mu &= \mathcal{L}_\xi A_\mu + \partial_\mu\eta = \mathcal{O}(A_\mu) .\end{aligned}\tag{4.3}$$

Considerando (4.1) y (4.2), los vectores de Killing asintóticos y la forma asintótica del parámetro $U(1)$ están dados por

$$\begin{aligned}\xi^\pm &= T^\pm + \frac{l^2}{2r^2}\partial_\mp^2 T^\mp + \mathcal{O}\left(\log\left(\frac{r}{l}\right)r^{-4}\right) , \\ \xi^r &= -\frac{r}{2}(\partial_+T^+ + \partial_-T^-) + \mathcal{O}(r^{-1}) , \\ \eta &= \lambda + \mathcal{O}\left(\log\left(\frac{r}{l}\right)r^{-2}\right) ,\end{aligned}\tag{4.4}$$

respectivamente, los cuales son descritos por tres funciones arbitrarias $T^\pm = T^\pm(x^\pm)$ y $\lambda = \lambda(x^+, x^-)$. Note que los vectores de Killing asintóticos ξ^\pm en (4.4) decaen más lento que los de Brown-Henneaux [18].

Por último, cabe señalar que sólo un subconjunto de las simetrías asintóticas generadas por (4.4) están asociadas a generadores canónicos. Esto se explica a continuación.

4.2. Estructura canónica

Consideremos la acción de Einstein-Maxwell en un espaciotiempo de tres dimensiones, dada por

$$I[g_{\mu\nu}, A_\mu] = \int d^3x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]. \quad (4.5)$$

La forma Hamiltoniana de la acción, asumiendo la descomposición ADM estándar (véase, por ejemplo, [96] y [97]) es

$$I = \int d^3x \left\{ \pi^{ij} \dot{\gamma}_{ij} + p^i \dot{A}_i - N^\perp \mathcal{H}_\perp - N^i \mathcal{H}_i - \eta \mathcal{G} \right\}, \quad (4.6)$$

salvo un término de borde, donde los vínculos están dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\perp &= \frac{2\kappa}{\sqrt{\gamma}} (\pi^{ij} \pi_{ij} - \pi^2) - \frac{\sqrt{\gamma}}{2\kappa} ({}^{(2)}R - 2\Lambda) + \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \gamma_{ij} p^i p^j + \frac{1}{4} \sqrt{\gamma} F_{ij} F^{ij}, \\ \mathcal{H}_i &= -2\nabla_j \pi_i^j + p^j F_{ij}, \\ \mathcal{G} &= -\partial_i p^i, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde π^{ij} y p^i corresponden a los momenta asociados a los campos dinámicos γ_{ij} y A_i , respectivamente. El Hamiltoniano total *smeared*² puede entonces separarse de la siguiente forma

$$\begin{aligned} H(\xi, \eta) &= \int d^3x [\epsilon^\perp \mathcal{H}_\perp + \epsilon^i \mathcal{H}_i + \eta \mathcal{G}], \\ &= \mathcal{H}(\xi) + \mathcal{G}(\eta), \end{aligned} \quad (4.8)$$

con

$$\epsilon^\perp = N^\perp \xi^t; \quad \epsilon^i = \xi^i + N^i \xi^t. \quad (4.9)$$

Debe enfatizarse que el generador $\mathcal{H}(\xi)$ no conduce a la derivada de Lie del campo de gauge, sino que un “difeomorfismo puro” dado por $\delta_\xi A_\mu = \{A_\mu, \mathcal{H}(\xi)\} = \xi^\nu F_{\nu\mu}$. Por consiguiente, con el fin de hacer contacto con las simetrías asintóticas en (4.3), el generador debe ser suplementado con una transformación de gauge adecuada. El generador mejorado se obtiene a partir de (4.8), siempre que el parámetro de la transformación de gauge sea de la forma $\eta = \lambda + \xi^\mu A_\mu$ (véase, por ejemplo, [63] y [60]), de manera que el Hamiltoniano total ahora puede separarse de acuerdo a

$$H(\xi, \lambda) = \tilde{\mathcal{H}}(\xi) + \mathcal{G}(\lambda), \quad (4.10)$$

²El smeared generator corresponde al vínculo multiplicado por el parámetro e integrado en la sección espacial.

donde

$$\tilde{\mathcal{H}}(\xi) = \mathcal{H}(\xi) + \mathcal{G}(\xi^\mu A_\mu), \quad (4.11)$$

corresponde al generador mejorado que satisface la propiedad que estamos buscando, es decir,

$$\{A_\mu, H(\xi, \lambda)\} = \left\{A_\mu, \tilde{\mathcal{H}}(\xi) + \mathcal{G}(\lambda)\right\} = \mathcal{L}_\xi A_\mu + \partial_\mu \lambda. \quad (4.12)$$

Notablemente, una vez que el generador mejorado $\tilde{\mathcal{H}}(\xi)$ es suplementado con un término de borde apropiado de manera que esté bien definido en toda la variedad incluyendo el borde [64], la variación de las correspondientes integrales de superficie es automáticamente finita. En efecto, la integral de superficie asociada a $\mathcal{G}(\xi^\mu A_\mu)$ cancela exactamente a la divergencia que proviene de la integral de superficie asociada al generador de difeomorfismos puros $\mathcal{H}(\xi)$.

Este efecto ocurre debido al decaimiento lento del campo electromagnético en tres dimensiones, de manera que el término mejorado corresponde a una transformación de gauge impropia que regulariza las cargas globales. Para espaciotiempos AdS de $d \geq 4$, lo anterior no ocurre debido a que el término mejorado en (4.11) sólo corresponde a una transformación de gauge propia que no modifica las integrales de superficie asociadas a los generadores canónicos. Esto será mostrado de manera explícita en la sección (4.5).

4.2.1. Cargas conservadas finitas y sus condiciones de integrabilidad

La variación de los términos de borde que aseguran que los generadores canónicos $\tilde{\mathcal{H}}(\xi)$ y $\mathcal{G}(\lambda)$ estén bien definidos se denotan por $\delta Q_{\tilde{\mathcal{H}}}(\xi)$ y $\delta Q_{\mathcal{G}}(\lambda)$, respectivamente. Considerando el perfil de decaimiento en (4.1), (4.2), la variación del generador $U(1)$ es finita e integra directamente como

$$Q_{\mathcal{G}}(\lambda) = \int dS_l \lambda p^l = \frac{1}{2\pi} \int d\phi \lambda (q_+ + q_-) = \frac{1}{2\pi} \int d\phi \lambda q_t. \quad (4.13)$$

La variación de la integral de superficie asociada al generador mejorado, que corresponde a $\delta Q_{\tilde{\mathcal{H}}}(\xi)$, es también finita, pero está sujeta a condiciones de integrabilidad no triviales.

Con el fin de ver como el mecanismo de regularización está incorporado intrínsecamente, a partir de la ec. (4.11), es instructivo separar la variación de la integral de superficie de la siguiente forma

$$\delta Q_{\tilde{\mathcal{H}}}(\xi) = \delta Q_{\mathcal{H}}(\xi) + \delta Q_{\mathcal{G}}(\xi^\mu A_\mu). \quad (4.14)$$

con

$$\begin{aligned} \delta Q_{\mathcal{H}}(\xi) = \int dS_l \left[\frac{1}{2\kappa} \epsilon^\perp G^{ijkl} \nabla_k \delta \gamma_{ij} - \frac{1}{2\kappa} \nabla_k \epsilon^\perp G^{ijkl} \delta \gamma_{ij} + 2\epsilon^j \delta(\gamma_{jk} \pi^{kl}) \right. \\ \left. - \epsilon^l \pi^{jk} \delta \gamma_{jk} - \epsilon^\perp \sqrt{\gamma} F^{li} \delta A_i - (\epsilon^l p^i - \epsilon^i p^l) \delta A_i \right], \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\delta Q_{\mathcal{G}}(\xi^\mu A_\mu) = \int dS_l \xi^\mu A_\mu \delta p^l,$$

donde $G^{ijkl} = \frac{1}{2} \gamma^{1/2} (\gamma^{ik} \gamma^{jl} + \gamma^{il} \gamma^{jk} - 2\gamma^{ij} \gamma^{kl})$.

Al hacer uso del decaimiento asintótico de los campos (4.1), (4.2), así como también los vectores de Killing asintóticos (4.4), la variación de las integrales de superficie se reduce a

$$\begin{aligned} \delta Q_{\mathcal{G}}(T^+, T^-) &= \delta Q_{\mathcal{G}}^+(T^+) + \delta Q_{\mathcal{G}}^-(T^-), \\ \delta Q_{\mathcal{H}}(T^+, T^-) &= \delta Q_{\mathcal{H}}^+(T^+) + \delta Q_{\mathcal{H}}^-(T^-), \end{aligned} \quad (4.16)$$

con

$$\begin{aligned} \delta Q_{\mathcal{G}}^\pm(T^\pm) &= -\frac{1}{2\pi} \int d\phi T^\pm \left[\frac{l}{2\pi} (q_\pm \delta q_+ + q_\pm \delta q_-) \log\left(\frac{r}{l}\right) - \varphi_\pm (\delta q_+ + \delta q_-) \right], \\ \delta Q_{\mathcal{H}}^\pm(T^\pm) &= \frac{1}{2\pi} \int d\phi T^\pm \left[\frac{l}{2\pi} (q_\pm \delta q_+ + q_\pm \delta q_-) \log\left(\frac{r}{l}\right) \pm q_\pm (\delta \varphi_+ \mp \delta \varphi_-) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int d\phi T^\pm \left[\delta \left(\frac{2\pi}{l\kappa} f_{\pm\pm} \mp \frac{l}{4\pi} q_\pm (q_+ - q_-) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Por lo tanto, es claro que las divergencias logarítmicas en (4.17) se cancelan exactamente, de manera tal que la variación del generador mejorado (4.14) está dada por

$$\delta Q_{\tilde{\mathcal{H}}}(T^+, T^-) = \delta Q_{\tilde{\mathcal{H}}}^+(T^+) + \delta Q_{\tilde{\mathcal{H}}}^-(T^-) = \int d\phi T^+ \delta \mathcal{L}_+ + \int d\phi T^- \delta \mathcal{L}_-, \quad (4.18)$$

donde

$$\delta \mathcal{L}_\pm = \frac{1}{2\pi} \delta \left(\frac{2\pi}{l\kappa} f_{\pm\pm} \mp \frac{l}{4\pi} q_\pm (q_+ - q_-) \pm q_\pm (\varphi_+ - \varphi_-) \right) + \frac{1}{2\pi} [\varphi_+ \delta q_- + \varphi_- \delta q_+]. \quad (4.19)$$

Nótese que los términos entre paréntesis cuadrados en (4.19) conducen a condiciones de integrabilidad no triviales de la forma

$$\delta^2 Q_{\tilde{\mathcal{H}}}^\pm = \frac{1}{2\pi} \int d\phi T^\pm [\delta \varphi_+ \wedge \delta q_- + \delta \varphi_- \wedge \delta q_+] = 0, \quad (4.20)$$

lo cual implica que φ_{\pm} y q_{\pm} están relacionados funcionalmente. Asumiendo que q_+ y q_- varían independientemente, las condiciones de integrabilidad se resuelven por cualquier función arbitraria $\mathcal{V} = \mathcal{V}(q_+, q_-)$ que satisfaga

$$\varphi_{\pm} = \frac{1}{2} \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta q_{\mp}}. \quad (4.21)$$

Por consiguiente, las integrales de superficie asociadas a los generadores canónicos mejorados integran como

$$Q_{\mathcal{H}}^{\pm}(T^{\pm}) = \int d\phi T^{\pm} \mathcal{L}_{\pm}, \quad (4.22)$$

con

$$\mathcal{L}_{\pm} = \frac{1}{l\kappa} f_{\pm\pm} \mp \frac{lq_{\pm}}{8\pi^2} \left[q_+ - q_- - \frac{2\pi}{l} \left(\frac{\delta \mathcal{V}}{\delta q_-} - \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta q_+} \right) \right] + \frac{1}{4\pi} \mathcal{V}. \quad (4.23)$$

Al igual que en la sección (3), las integrales de superficie manifiestamente adquieren contribuciones provenientes del campo electromagnético, y además, dependen explícitamente de una función arbitraria \mathcal{V} , que debe ser especificada por las condiciones de borde con el fin de garantizar la integrabilidad de las cargas globales. Este punto es crucial porque de otra forma, si la variación de los generadores canónicos no fuera integrable, la estructura canónica dejaría de existir debido a que se entraría en conflicto con el hecho de que los corchetes de Poisson satisfacen la identidad de Jacobi.

Por último, debe enfatizarse que el cumplimiento de las condiciones de integrabilidad implica que sólo un subconjunto de las simetrías asintóticas puramente geométricas en (4.4) está reflejado en la realización canónica. En efecto, la cantidad de simetrías asintóticas que son generadas por los generadores canónicos depende de la elección de condiciones de borde especificadas por \mathcal{V} . Lo anterior se explica en la siguiente sección.

4.3. Compatibilidad de las condiciones de borde con las simetrías asintóticas

Las condiciones de borde que se caracterizan por una función arbitraria \mathcal{V} que, de acuerdo a (4.21), especifican la relación funcional de los términos dominantes en la expansión asintótica del campo de gauge, es decir, $\varphi_{\pm} = \varphi_{\pm}(q_+, q_-)$. En consecuencia, una elección genérica de condiciones de borde resulta ser incompatible

con el conjunto completo de simetrías asintóticas en (4.4), debido a que las reglas de transformación de φ_{\pm} y q_{\pm} deben ser consistentes con

$$\delta\varphi_{\pm} = \frac{\delta\varphi_{\pm}}{\delta q_{+}}\delta q_{+} + \frac{\delta\varphi_{\pm}}{\delta q_{-}}\delta q_{-}. \quad (4.24)$$

En lo que sigue se analiza lo anterior, primero para transformaciones de gauge $U(1)$ y luego para los vectores de Killing asintóticos.

4.3.1. Transformaciones de gauge $U(1)$ asintóticas

En el caso de transformaciones de gauge $U(1)$ asintóticas generadas por (4.4) con $T^{\pm} = 0$, las funciones φ_{\pm} y q_{\pm} transforman de acuerdo a

$$\delta\varphi_{\pm} = \partial_{\pm}\lambda; \quad \delta q_{\pm} = 0. \quad (4.25)$$

Por lo tanto, la ec. (4.24) es compatible con la ley de transformación en (4.25) sólo si $\partial_{\pm}\lambda = 0$. Uno concluye entonces que, si q_{+} y q_{-} varían de manera independiente, sólo el modo cero de λ es consistente, sin importar la elección de las condiciones de borde. Por lo tanto, sólo hay una única carga global que es conservada, la cual corresponde a (4.13) evaluada para $\lambda = \lambda_0$ constante. Esta es la carga eléctrica \mathcal{Q} .

Alternativamente, es posible verificar la ausencia de corrientes conservadas adicionales a partir de la integral de superficie en (4.13). En efecto, haciendo uso de la ecuación de Maxwell en la región asintótica, dada por $\partial_{+}q_{-} + \partial_{-}q_{+} = \partial_{\phi}q_{\phi} - l\partial_t q_t = 0$, y al requerir que $\dot{Q}_{\mathcal{G}}(\lambda) = 0$, se concluye que λ se aproxima asintóticamente a una constante. Entonces podemos deshacernos del parámetro constante $U(1)$ de manera que (4.13) concuerde con la fórmula de Gauss.

Es importante destacar que, debido a que los modos restantes de λ no dan lugar a cargas conservadas, estas no pueden ser tratadas como simetrías asintóticas legítimas ya que no poseen generadores canónicos³.

4.3.2. Vectores de Killing asintóticos

Bajo la acción de un vector de Killing asintótico genérico dado por (4.4) con $\lambda = 0$, las leyes de transformación de φ_{\pm} y q_{\pm} están dadas por

$$\begin{aligned} \delta\varphi_{\pm} &= \partial_{\pm}(\varphi_{\pm}T^{\pm}) + T^{\mp}\partial_{\mp}\varphi_{\pm} + \frac{\ell}{4\pi}q_{\pm}(\partial_{+}T^{+} + \partial_{-}T^{-}), \\ \delta q_{\pm} &= \partial_{\pm}(q_{\pm}T^{\pm}) + T^{\mp}\partial_{\mp}q_{\pm}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

³Nótese que corrientes $U(1)$ adicionales podrían ser consistentes, pero para diferentes clases de condiciones de borde que no fueron consideradas en este trabajo. En efecto, este sería el caso si se hubiera considerado que q_{+} o q_{-} , se anularan sin variación, de manera que los modos de $Q_{\mathcal{G}}(\lambda)$ corresponderían a los generadores de corrientes quirales.

En el caso de las simetrías asintóticas quirales generadas por T^+ (con $T^- = 0$), la compatibilidad de la ley de transformación en (4.26) con la ec. (4.24) implica las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\ell}{4\pi} q_+ + \frac{1}{2} \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta q_-} - \frac{1}{2} q_+ \frac{\delta^2 \mathcal{V}}{\delta q_+ \delta q_-} \right) \partial_+ T^+ &= 0, \\ \left(\frac{\ell}{4\pi} q_- - \frac{1}{2} q_+ \frac{\delta^2 \mathcal{V}}{\delta q_+^2} \right) \partial_+ T^+ &= 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Por lo tanto, para una elección genérica de \mathcal{V} , las ecs. (4.27) sólo pueden satisfacerse si $\partial_+ T^+ = 0$, es decir, sólo para el modo cero de T^+ . Al requerir que el conjunto completo de modos de T^+ sea compatible con las condiciones en (4.27) implica que la función \mathcal{V} debe satisfacer ambas ecuaciones diferenciales dentro de los paréntesis en (4.27). El conjunto de condiciones de borde que resulta de exigir esta compatibilidad es caracterizado por

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ = \frac{lq_+q_-}{2\pi} [\log(q_+) - 1] + q_+ \mathcal{C}_+(q_-), \quad (4.28)$$

donde \mathcal{C}_+ es una función arbitraria de una sola variable.

Si las simetrías asintóticas corresponden a aquellas generadas por T^- , la compatibilidad de (4.26) con (4.24) implica que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\ell}{4\pi} q_- + \frac{1}{2} \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta q_+} - \frac{1}{2} q_- \frac{\delta^2 \mathcal{V}}{\delta q_+ \delta q_-} \right) \partial_- T^- &= 0, \\ \left(\frac{\ell}{4\pi} q_+ - \frac{1}{2} q_- \frac{\delta^2 \mathcal{V}}{\delta q_-^2} \right) \partial_- T^- &= 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Análogamente, para condiciones de borde genéricas especificadas por \mathcal{V} , ambas ecuaciones en (4.29) pueden satisfacerse sólo para el modo cero de T^- . La familia de condiciones de borde que es consistente con el conjunto completo de modos de T^- corresponde entonces a la elección de \mathcal{V} que satisface las ecuaciones diferenciales entre paréntesis en (4.29). Este conjunto se describe por una función arbitraria $\mathcal{C}_-(q_+)$, de manera que, salvo una constante aditiva, se obtiene

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^- = \frac{lq_+q_-}{2\pi} [\log(q_-) - 1] + q_- \mathcal{C}_-(q_+). \quad (4.30)$$

Notablemente, se concluye entonces que el conjunto completo de vectores de Killing asintóticos, generados por T^+ y T^- , resulta ser compatible con la integrabilidad de los generadores canónicos siempre que las condiciones de borde sean especificadas

por un conjunto muy especial, etiquetado por un único parámetro constante arbitrario ζ sin variación. Esto se debe a que la preservación simultánea de los modos quirales, implica que $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ = \mathcal{V}^-$. Por lo tanto, en virtud de (4.28) y (4.30), el conjunto especial de condiciones de borde que preserva al grupo conforme completo está determinado por la elección

$$\mathcal{V} = \frac{l}{2\pi} q_+ q_- \log(\zeta q_+ q_-) . \quad (4.31)$$

Este resultado concuerda con el encontrado en la sección (3.1.1) y en [94], el cual se obtuvo a partir de un enfoque completamente diferente. En efecto, la misma elección de condiciones de borde es recuperada, pero requiriendo la compatibilidad con simetrías de escalamiento y de Lorentz para la clase de soluciones estacionarias y circularmente simétricas bajo consideración.

4.3.3. Álgebra de los generadores canónicos

De los resultados obtenidos anteriormente, se concluye que el álgebra de los generadores canónicos depende de la elección de condiciones de borde especificadas por \mathcal{V} .

Para una elección genérica de \mathcal{V} , las simetrías asintóticas que son compatibles con las condiciones de borde corresponden sólo a los modos cero de T^+ , T^- , λ en (4.4). Por lo tanto, sólo hay tres cargas conservadas dadas por (4.13) y (4.22) con parámetros constantes. Por consiguiente, debido a que las simetrías asintóticas resultan ser generadas por ∂_t , ∂_ϕ y una transformación $U(1)$ global, el grupo de simetría asintótico está dado por $\mathbb{R} \otimes U(1) \otimes U(1)$, de manera que las cargas globales corresponden a la masa, el momento angular y la carga eléctrica.

En caso de escoger el conjunto especial de condiciones de borde dado por \mathcal{V} en (4.31), las simetrías asintóticas legítimas que poseen generadores canónicos bien definidos corresponden al grupo conforme generado por T^+ , T^- , y la transformación $U(1)$ global generada por el modo cero de λ . Las integrales de superficie asociadas a los generadores canónicos mejorados en (4.22) son tal que en este caso la ec. (4.23) se reduce a

$$\mathcal{L}_\pm = \frac{1}{l\kappa} f_{\pm\pm} + \frac{lq_\pm^2}{8\pi^2} \log(\zeta q_+ q_-) . \quad (4.32)$$

Vale la pena destacar que las componentes $+r$ y $-r$ de las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales están dadas por

$$\partial_\mp f_{\pm\pm} + \frac{\kappa\ell^2}{8\pi^2} \left[q_\mp \partial_\pm q_\pm \pm \frac{2\pi}{\ell} q_\pm \left(\partial_- \left(\frac{\delta\mathcal{V}}{\delta q_-} \right) - \partial_+ \left(\frac{\delta\mathcal{V}}{\delta q_+} \right) + \frac{3\ell}{2\pi} \partial_+ q_- \right) \right] = 0 , \quad (4.33)$$

en este caso se reducen a

$$\partial_{\mp} \mathcal{L}_{\pm} = 0. \quad (4.34)$$

En consecuencia, debido a que los corchetes de Poisson satisfacen $\{Q(Y_1), Q(Y_2)\} = \delta_{Y_2} Q(Y_1)$, el álgebra de los generadores canónicos se puede obtener fácilmente a partir de la ley de transformación de q_{\pm} en (4.25), (4.26), así como de la ley de transformación para $f_{\pm\pm}$:

$$\delta f_{\pm\pm} = 2f_{\pm\pm} \partial_{\pm} T^{\pm} + T^{\pm} \partial_{\pm} f_{\pm\pm} - \frac{\ell^2}{2} \partial_{\pm}^3 T^{\pm} - \frac{\kappa \ell^2}{8\pi^2} q_{\pm}^2 (\partial_{+} T^{+} + \partial_{-} T^{-}) + T^{\mp} \partial_{\mp} f_{\pm\pm}. \quad (4.35)$$

Por lo tanto, la ley de transformación para \mathcal{L}_{\pm} en (4.32) se lee

$$\delta \mathcal{L}_{\pm} = 2\mathcal{L}_{\pm} \partial_{\pm} T^{\pm} + T^{\pm} \partial_{\pm} \mathcal{L}_{\pm} - \frac{l}{2\kappa} \partial_{\pm}^3 T^{\pm}. \quad (4.36)$$

Expandiendo en modos de Fourier, $\mathcal{L}_{\pm} = \frac{1}{2\pi} \sum_m \mathcal{L}_m^{\pm} e^{im\phi}$, el álgebra de los generadores canónicos se puede escribir como

$$\begin{aligned} i \{ \mathcal{L}_m^{\pm}, \mathcal{L}_n^{\pm} \} &= (m - n) \mathcal{L}_{m+n}^{\pm} + \frac{c}{12} m^3 \delta_{m+n,0}, \\ i \{ \mathcal{L}_m^{\pm}, \mathcal{Q} \} &= 0, \\ i \{ \mathcal{Q}, \mathcal{Q} \} &= 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

con $c = 3l/2G$, la cual cooresponde a la suma directa de $U(1)$ y dos copias del álgebra de Virasoro con la extensión central estándar.

Como comentario final de esta subsección, vale la pena mencionar que si las condiciones de borde fueran escogidas de manera que $\mathcal{V} = \mathcal{V}^{+}$ en (4.28), las simetrías asintóticas legítimas son generadas por T^{+} , y los modos cero de T^{-} y λ . Los generadores canónicos corresponden entonces a \mathcal{L}_m^{+} , \mathcal{L}_0^{-} , y \mathcal{Q} , cuya álgebra está dada por la suma directa de la copia derecha del álgebra de Virasoro con la extensión central de Brown-Henneaux con dos generadores Abelianos. Análogamente, para la elección $\mathcal{V} = \mathcal{V}^{-}$ en (4.30), lo mismo ocurre para la copia izquierda.

4.4. Masa y momento angular del agujero negro con rotación y carga eléctrica

Por conveniencia escribiremos la métrica y el campo de gauge de la solución cargada y rotante como en la sección (3.2.2) y en [94]. En estas coordenadas se tiene que

$$\begin{aligned} ds^2 &= -N^2 F^2 dt^2 + \frac{d\rho^2}{F^2} + R^2 (N^{\phi} dt + d\phi)^2, \\ A &= A_t dt + A_{\phi} d\phi, \end{aligned} \quad (4.38)$$

con

$$\begin{aligned}
R^2 &= \rho^2 + \left(\frac{\omega^2}{1 - \omega^2} \right) r_+^2 + \frac{\kappa}{4\pi^2} (q_t \omega l)^2 \log \left(\frac{\rho}{r_+} \right), \\
N^\phi &= - \left(\frac{\omega}{1 - \omega^2} \right) \left(\frac{\rho^2}{l^2} - F^2 \right) \frac{l}{R^2}, \\
N^2 &= \frac{\rho^2}{R^2}, \\
F^2 &= \frac{\rho^2}{l^2} - \frac{r_+^2}{l^2} - \frac{\kappa}{4\pi^2} q_t^2 (1 - \omega^2) \log \left(\frac{\rho}{r_+} \right), \\
A_t &= -\frac{q_t}{2\pi} \log \left(\frac{\rho}{l} \right) + \frac{\varphi_t}{l}, \\
A_\phi &= \frac{q_t \omega l}{2\pi} \log \left(\frac{\rho}{l} \right) + \varphi_\phi,
\end{aligned} \tag{4.39}$$

donde r_+ , ω , q_t , φ_t , φ_ϕ corresponden a constantes arbitrarias. Los multiplicadores de Lagrange han sido escogidos de manera tal que $N_\infty = 1$, y $N_\infty^\phi = \Phi = 0$. Nótese que en la región asintótica, $\rho \rightarrow \infty$, las componentes de la métrica g_{+-} y $g_{\rho\rho}$ poseen términos de la forma $\mathcal{O}(\log(\rho/l))$ y $\mathcal{O}(\log(\rho/l)\rho^{-4})$, respectivamente, los cuales pueden ser consistentemente eliminados mediante una transformación de coordenadas, tal como fue explicado en la sección (4.1). En efecto, cambiando las coordenadas de acuerdo a $x^\pm = \frac{t}{l} \pm \phi$, y $\rho = r + \frac{\kappa l^2}{16\pi^2} q_t^2 (1 - \omega^2) \log\left(\frac{r}{l}\right) r^{-1}$, el comportamiento asintótico de la solución está dado por

$$\begin{aligned}
g_{\pm\pm} &= \frac{\kappa l^2}{4\pi^2} q_\pm^2 \log \left(\frac{r}{l} \right) + f_{\pm\pm} + \mathcal{O} \left(\log \left(\frac{r}{l} \right) r^{-1} \right), \\
g_{+-} &= -\frac{r^2}{2} + f_{+-} + \mathcal{O} \left(\log \left(\frac{r}{l} \right) r^{-1} \right), \\
g_{rr} &= \frac{l^2}{r^2} + \frac{f_{rr}}{r^4} + \mathcal{O} \left(\log \left(\frac{r}{l} \right) r^{-5} \right), \\
g_{r\pm} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
A_\pm &= -\frac{l}{2\pi} q_\pm \log \left(\frac{r}{l} \right) + \varphi_\pm + \mathcal{O} \left(\log \left(\frac{r}{l} \right) r^{-2} \right), \\
A_r &= 0,
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
q_{\pm} &= \frac{1}{2} (q_t \pm q_{\phi}) ; q_{\phi} = -\omega q_t , \\
f_{\pm\pm} &= \left(\frac{1 \mp \omega}{1 \pm \omega} \right) \frac{r_+^2}{4} - \frac{l^2 q_t^2 \kappa (1 \mp \omega)^2}{16\pi^2} \log \left(\frac{r_+}{l} \right) , \\
f_{+-} &= \frac{4\pi^2 r_+^2 - l^2 q_t^2 \kappa \log \left(\frac{r_+}{l} \right) (1 - \omega^2)}{16\pi^2} , \\
f_{rr} &= 8l^2 \pi^2 r_+^2 + l^4 q_t^2 \kappa (1 - \omega^2) \left(1 - \log \left(\frac{r_+}{l^2} \right) \right) , \\
\varphi_{\pm} &= \frac{1}{2} (\varphi_t \pm \varphi_{\phi}) ,
\end{aligned} \tag{4.41}$$

el cual se acomoda perfectamente dentro del conjunto de condiciones asintóticas dado por (4.1), (4.2). En consecuencia, las cargas globales restantes pueden ser obtenidas de las integrales de superficie (4.13) y (4.22).

Para una elección genérica de condiciones de borde, especificada por la función arbitraria \mathcal{V} , la carga eléctrica está dada por $\mathcal{Q} = q_t$, mientras que las cargas restantes son determinadas por \mathcal{L}_{\pm} en la ec. (4.23). Por lo tanto, la masa y el momento angular están dados por

$$\begin{aligned}
M &= \frac{2\pi}{l} (\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-) \\
&= \frac{\pi r_+^2}{\kappa l^2} \left(\frac{1 + \omega^2}{1 - \omega^2} \right) - \frac{q_t^2}{4\pi} \left[\omega^2 + (1 + \omega^2) \log \left(\frac{r_+}{l} \right) \right] + \frac{1}{l} \left(\mathcal{V} - q_{\phi} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_{\phi}} \right) ,
\end{aligned} \tag{4.42}$$

y

$$\begin{aligned}
J &= 2\pi (\mathcal{L}_+ - \mathcal{L}_-) \\
&= -\frac{2\pi r_+^2 \omega}{\kappa l (1 - \omega^2)} + \frac{l q_t^2 \omega}{4\pi} \left(1 + \log \left(\frac{r_+}{l^2} \right) \right) - q_t \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta q_{\phi}} ,
\end{aligned} \tag{4.43}$$

respectivamente. En completo acuerdo con las expresiones encontradas en la sección (3.2.2), para un minisuperespacio de configuraciones estacionarias y circularmente simétricas⁴. En el caso de condiciones de borde con $\mathcal{V} = 0$, la masa y el momento angular coinciden con los encontrados en [39].

Para el caso especial de condiciones de borde que son compatibles con la simetría conforme completa en el infinito, donde \mathcal{V} está especificado por (4.31), los modos

⁴La diferencia de signo en el momento angular se debe a que en este caso hemos elegido una orientación opuesta a la escogida en [94].

cero de los generadores de Virasoro se leen

$$\mathcal{L}_{\pm} = \frac{r_+^2}{4l\kappa} \left(\frac{1 \mp \omega}{1 \pm \omega} \right) + \frac{lq_t^2 (1 \mp \omega)^2}{32\pi^2} \left[\log \left(\frac{\kappa}{8\pi^2} \frac{q_t^2 l^2}{r_+^2} (1 - \omega^2) \right) + \gamma - 1 \right], \quad (4.44)$$

de manera tal que la masa y el momento angular se reducen a

$$M = \frac{\pi}{\kappa} \left(\frac{1 + \omega^2}{1 - \omega^2} \right) \frac{r_+^2}{l^2} + \frac{q_t^2 (1 + \omega^2)}{8\pi} \left[\log \left(\frac{\kappa}{8\pi^2} \frac{q_t^2 l^2}{r_+^2} (1 - \omega^2) \right) + \gamma - 1 \right], \quad (4.45)$$

y

$$J = -\frac{2l\omega}{1 + \omega^2} M. \quad (4.46)$$

donde la constante fija arbitraria ζ que caracteriza este conjunto de condiciones de borde ha sido redefinida de acuerdo a $\gamma = 1 + \log \left(\frac{2\pi^2}{\kappa} \zeta \right)$. En consecuencia, como se explicó en la sección (3.2.2), este parámetro puede ser interpretado como la pendiente que limita la región permitida en el espacio de los parámetros donde la solución describe a un agujero negro. Notablemente, para este conjunto de condiciones de borde, el espectro de energía del agujero negro es no negativo y, para un valor fijo de la masa, la carga eléctrica posee una cota superior.

4.5. Comentarios finales

El mejoramiento de los generadores canónicos de acuerdo a (4.11), de manera tal que generen la derivada de Lie de los campos, resultó ser crucial para develar la estructura asintótica de la teoría electromagnética acoplada a la gravitación con constante cosmológica negativa en tres dimensiones. A pesar de que el decaimiento de los campos es extremadamente relajado en comparación al caso estándar, las cargas globales resultan ser finitas, y además, adquieren contribuciones provenientes del campo electromagnético. Por otra parte, la existencia de la estructura canónica requiere de condiciones de integrabilidad no triviales que deben ser satisfechas, lo cual implica una relación funcional entre los términos dominantes en la forma asintótica del campo electromagnético. Las cargas globales entonces dependen explícitamente de la elección de las condiciones de borde. Se ha mostrado que este efecto también ocurre para Relatividad General acoplada a campos escalares y de espín superior en tres dimensiones [23], [24], [68], [69].

En el caso del campo de Maxwell, las condiciones de borde genéricamente rompen la mayoría de las simetrías puramente geométricas, pero sin embargo, existe un conjunto muy especial que resulta ser compatible con la simetría conforme completa en el infinito⁵. Es entonces claro que la posibilidad de estudiar holografía en el contexto de la correspondencia $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ [99], [100], [101], [102], se ve ampliada al caso de un campo de Maxwell con una backreaction fuerte. Más aún, las diferentes elecciones de condiciones de borde compatibles con la integrabilidad de las cargas globales pueden incluso ser de interés en el contexto de los superconductores holográficos [78], [79], [80], [81], [82], [83].

Es importante destacar que estos resultados han sido obtenidos asumiendo que las funciones que caracterizan a los términos dominantes en el decaimiento del campo electromagnético, dados por q_+ y q_- , varían de manera independiente. Esto debe ser así para acomodar la solución de agujero negro con rotación y carga eléctrica genérica dentro de las condiciones asintóticas en (4.1), (4.2). No obstante, podría construirse un conjunto diferente de condiciones de borde en el cual ya no se asume que q_+ y q_- varíen de manera independiente. Sin embargo, todo el análisis tendría que hacerse desde el principio.

Nuestro conjunto de condiciones que son asintóticamente AdS_3 difiere de los explorados previamente en el contexto de la teoría de Einstein-Maxwell [71], [86].

⁵Una situación intermedia ocurre para espaciotiempos que son asintóticamente AdS_3 en gravedad topológicamente masiva, donde las condiciones de integrabilidad son aún más severas, de manera que las condiciones de borde preservan a lo más una copia quiral del álgebra de Virasoro, mientras que para la otra copia sólo sobrevive el modo cero [95].

Finalmente, el efecto de mejorar los generadores canónicos de acuerdo a (4.11) no se manifiesta para espaciotiempos que son asintóticamente AdS en dimensiones $d \geq 4$. En efecto, en el caso de más dimensiones, el decaimiento del campo electromagnético es suficientemente lento, de manera que la métrica satisface el comportamiento asintóticamente AdS estándar [21], [22]. En consecuencia, la componentes temporal y angular de los vectores de Killing asintóticos es de orden uno $\mathcal{O}(1)$ en la región asintótica, la variación del término mejorado dado por $\int dS_l \xi^\mu A_\mu \delta p^l$, necesariamente se anula cuando $r \rightarrow \infty$. Por consiguiente, los generadores de difeomorfismos estándar y mejorado sólo difieren en una transformación de gauge propia que no contribuye a las cargas globales.



Capítulo 5

Conclusiones

Esta tesis se compone de dos partes. En la primera se consideraron soluciones estacionarias y circularmente simétricas para la teoría de Einstein-Maxwell en tres dimensiones con constante cosmológica negativa, para las cuales se mostró que tanto la masa como el momento angular adquieren contribuciones provenientes del campo electromagnético, y por lo tanto, dependen manifiestamente de la elección de condiciones de borde. Este efecto no resulta ser exclusivo para la teoría de Einstein-Maxwell, debido a que también se manifiesta en el caso de campos escalares [23] y campos de espín superior [60]. En este contexto, sería interesante explorar el efecto de escoger distintas condiciones de borde, lo cual podría conciliar la variedad de resultados encontrados en la literatura, los cuales en principio, parecen depender del esquema de regularización.

Dentro de las elecciones posibles de condiciones de borde, existe un conjunto muy particular que es determinado a partir de su compatibilidad con las simetrías de Lorentz y de escalamientos. Este conjunto especial de condiciones de borde está caracterizado por un único parámetro fijo, el cual en el contexto de la mecánica cuántica, juega el rol similar al de la longitud de la caja para una partícula libre confinada. Si este parámetro es mayor a cero, entonces el espectro de energía de la solución de agujero negro es no negativo y además, la carga eléctrica posee una cota superior para un valor fijo de la masa.

Sería interesante además explorar el efecto de distintas elecciones de condiciones de borde en el contexto de la superconductividad holográfica [78], [79], [80], [81], [82], [83], y además sería interesante reconsiderar si los agujeros negros con carga eléctrica pueden ser incluidos apropiadamente dentro de una teoría de supergravedad.

En la segunda parte de esta tesis se mostró que es posible definir los generadores canónicos de manera tal que estos generen la derivada de Lie de los campos, lo cual resultó ser crucial para develar la estructura asintótica del electromagnetismo acoplado a la gravitación con constante cosmológica negativa en tres dimensiones. A

pesar de que el decaimiento de los campos es relajado con respecto al caso estándar, las cargas globales resultan ser finitas, y además, adquieren explícitamente contribuciones provenientes del campo electromagnético.

La existencia de la estructura canónica requiere de condiciones de integrabilidad no triviales para las cargas globales que deben ser satisfechas, lo cual implica una relación funcional entre los términos dominantes en la forma asintótica del campo electromagnético, por lo tanto, las cargas globales dependen explícitamente de la elección de condiciones de borde. Genéricamente, estas condiciones de borde rompen la mayoría de las simetrías puramente geométricas; sin embargo, existe un conjunto especial que resulta ser compatible con la simetría conforme en el infinito. Lo anterior abre la posibilidad de estudiar holografía en el contexto de la correspondencia $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ para el caso de un campo de Maxwell con una backreaction muy fuerte. Es importante destacar que estos resultados se obtuvieron asumiendo que las funciones que caracterizan a los términos dominantes en el decaimiento del campo electromagnético, dados por q_+ y q_- , varían de manera independiente. Esto debe ser así con el fin de acomodar la solución de agujero negro con rotación y carga eléctrica genérica en las condiciones asintóticas en (4.1), (4.2).

Notablemente, el conjunto de condiciones de borde que es compatible con la simetría conforme en el infinito coincide con el que se obtuvo en la primera parte de la tesis al exigir compatibilidad de las condiciones de borde con las simetrías de Lorentz y de escalamientos.

En esta misma línea, debido a la existencia de esta simetría conforme, es natural preguntarse acerca de la posibilidad de escribir la entropía del agujero negro con carga eléctrica a través de la fórmula de Cardy, siguiendo una deducción similar a la hecha por Strominger para el agujero negro BTZ.

Resultados preliminares indican que esto si es posible, siempre y cuando se considere que el estado fundamental del sistema corresponde a un solitón magnético, como en [57]. De manera análoga al caso de agujeros negros con campo escalar [35], [36] y [37].

La analogía sugiere que es la energía del estado fundamental y no la carga central la que jugaría el rol principal al momento de reproducir la entropía del agujero negro con carga eléctrica mediante un conteo microscópico.

Bibliografía

- [1] P. Van Nieuwenhuizen, “Supergravity,” Phys. Rept. **68**, 189 (1981). doi:10.1016/0370-1573(81)90157-5 1
- [2] P. S. Howe, “Supergravity in Superspace,” Nucl. Phys. B **199**, 309 (1982). doi:10.1016/0550-3213(82)90349-2 1
- [3] J. H. Schwarz, “Superstring Theory,” Phys. Rept. **89**, 223 (1982). doi:10.1016/0370-1573(82)90087-4 1
- [4] B. R. Greene, “String theory on Calabi-Yau manifolds,” hep-th/9702155. 1
- [5] A. Giveon, M. Porrati and E. Rabinovici, “Target space duality in string theory,” Phys. Rept. **244**, 77 (1994) doi:10.1016/0370-1573(94)90070-1 [hep-th/9401139]. 1
- [6] C. V. Johnson, “D-brane primer,” hep-th/0007170. 1
- [7] A. Sen, “NonBPS states and Branes in string theory,” hep-th/9904207. 1
- [8] P. H. Ginsparg and G. W. Moore, “Lectures on 2-D gravity and 2-D string theory,” Yale Univ. New Haven - YCTP-P23-92 (92,rec.Apr.93) 197 p. Los Alamos Nat. Lab. - LA-UR-92-3479 (92,rec.Apr.93) 197 p. e: LANL hep-th/9304011 [hep-th/9304011]. 1
- [9] A. Perez, “Introduction to loop quantum gravity and spin foams,” gr-qc/0409061. 1
- [10] A. Ashtekar, “Lectures on nonperturbative canonical gravity,” Adv. Ser. Astrophys. Cosmol. **6**, 1 (1991). 1
- [11] C. Rovelli and L. Smolin, “Loop Space Representation of Quantum General Relativity,” Nucl. Phys. B **331**, 80 (1990). doi:10.1016/0550-3213(90)90019-A 1

- [12] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” *Phys. Rept.* **323**, 183 (2000) doi:10.1016/S0370-1573(99)00083-6 [hep-th/9905111]. 1, 2.1.1
- [13] N. Berkovits, C. Vafa and E. Witten, “Conformal field theory of AdS background with Ramond-Ramond flux,” *JHEP* **9903**, 018 (1999) doi:10.1088/1126-6708/1999/03/018 [hep-th/9902098]. 1
- [14] J. Maldacena, “The Gauge/gravity duality,” arXiv:1106.6073 [hep-th]. 1
- [15] M. Banados, C. Teitelboim and J. Zanelli, “The Black hole in three-dimensional space-time,” *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1849 (1992) doi:10.1103/PhysRevLett.69.1849 [hep-th/9204099]. 1, 2.2.1, 2.3, 2.3.1, 3.1, 3.2.1, 3.2.2, 4, 4.1
- [16] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, “Geometry of the (2+1) black hole,” *Phys. Rev. D* **48**, 1506 (1993) [*Phys. Rev. D* **88**, 069902 (2013)] doi:10.1103/PhysRevD.48.1506, 10.1103/PhysRevD.88.069902 [gr-qc/9302012]. 1, 2.2.1, 2.3.1, 3.2.2
- [17] A. Strominger, “Black hole entropy from near horizon microstates,” *JHEP* **9802**, 009 (1998) doi:10.1088/1126-6708/1998/02/009 [hep-th/9712251]. 1, 2.2.1
- [18] J. D. Brown and M. Henneaux, “Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity,” *Commun. Math. Phys.* **104**, 207 (1986). doi:10.1007/BF01211590 1, 2.1.1, 2.2, 2.3.1, 3, 3.3, 4, 4.1
- [19] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, “Gravitation,” San Francisco: W. H. Freeman (1973) ISBN-9780716703440 1
- [20] J. Crisóstomo, R. Troncoso and J. Zanelli, “Black hole scan,” *Phys. Rev. D* **62**, 084013 (2000) doi:10.1103/PhysRevD.62.084013 [hep-th/0003271]. 1
- [21] M. Henneaux and C. Teitelboim, “Asymptotically anti-De Sitter Spaces,” *Commun. Math. Phys.* **98**, 391 (1985). doi:10.1007/BF01205790 1, 2.1.1, 2.1.1, 4.1, 4.5
- [22] M. Henneaux, “Asymptotically Anti-de Sitter Universes In $D = 3, 4$ And Higher Dimensions,” in *Proceedings of the Fourth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, R. Rufini (ed.). (Elsevier Science Publishers B. V., 1986). 1, 2.1.1, 4.5

- [23] M. Henneaux, C. Martínez, R. Troncoso and J. Zanelli, “Black holes and asymptotics of 2+1 gravity coupled to a scalar field,” *Phys. Rev. D* **65**, 104007 (2002) doi:10.1103/PhysRevD.65.104007 [hep-th/0201170]. 1, 2.2, 3, 3.1, 3.3, 4.1, 4.5, 5
- [24] M. Henneaux, C. Martínez, R. Troncoso and J. Zanelli, “Asymptotically anti-de Sitter spacetimes and scalar fields with a logarithmic branch,” *Phys. Rev. D* **70**, 044034 (2004) doi:10.1103/PhysRevD.70.044034 [hep-th/0404236]. 1, 2.2, 3.3, 4.5
- [25] M. Henneaux, C. Martínez, R. Troncoso and J. Zanelli, “Asymptotic behavior and Hamiltonian analysis of anti-de Sitter gravity coupled to scalar fields,” *Annals Phys.* **322**, 824 (2007) doi:10.1016/j.aop.2006.05.002 [hep-th/0603185]. 1, 2.2
- [26] T. Hertog and K. Maeda, “Black holes with scalar hair and asymptotics in $N = 8$ supergravity,” *JHEP* **0407**, 051 (2004) doi:10.1088/1126-6708/2004/07/051 [hep-th/0404261]. 1, 2.2
- [27] A. J. Amsel and D. Marolf, “Energy Bounds in Designer Gravity,” *Phys. Rev. D* **74**, 064006 (2006) [*Phys. Rev. D* **75**, 029901 (2007)] doi:10.1103/PhysRevD.74.064006, 10.1103/PhysRevD.75.029901 [hep-th/0605101]. 1, 2.2
- [28] C. Martínez, R. Troncoso and J. Zanelli, “Exact black hole solution with a minimally coupled scalar field,” *Phys. Rev. D* **70**, 084035 (2004) doi:10.1103/PhysRevD.70.084035 [hep-th/0406111]. 1
- [29] C. Martínez, J. P. Staforelli and R. Troncoso, “Topological black holes dressed with a conformally coupled scalar field and electric charge,” *Phys. Rev. D* **74**, 044028 (2006) doi:10.1103/PhysRevD.74.044028 [hep-th/0512022]. 1
- [30] C. Martínez and R. Troncoso, “Electrically charged black hole with scalar hair,” *Phys. Rev. D* **74**, 064007 (2006) doi:10.1103/PhysRevD.74.064007 [hep-th/0606130]. 1
- [31] J. Gegenberg, C. Martínez and R. Troncoso, “A Finite action for three-dimensional gravity with a minimally coupled scalar field,” *Phys. Rev. D* **67**, 084007 (2003) doi:10.1103/PhysRevD.67.084007 [hep-th/0301190]. 1
- [32] E. Radu and E. Winstanley, “Conformally coupled scalar solitons and black holes with negative cosmological constant,” *Phys. Rev. D* **72**, 024017 (2005) doi:10.1103/PhysRevD.72.024017 [gr-qc/0503095]. 1

- [33] T. Hertog and G. T. Horowitz, “Towards a big crunch dual,” JHEP **0407**, 073 (2004) doi:10.1088/1126-6708/2004/07/073 [hep-th/0406134]. 1
- [34] T. Hertog and G. T. Horowitz, “Designer gravity and field theory effective potentials,” Phys. Rev. Lett. **94**, 221301 (2005) doi:10.1103/PhysRevLett.94.221301 [hep-th/0412169]. 1
- [35] F. Correa, C. Martínez and R. Troncoso, “Scalar solitons and the microscopic entropy of hairy black holes in three dimensions,” JHEP **1101**, 034 (2011) doi:10.1007/JHEP01(2011)034 [arXiv:1010.1259 [hep-th]]. 1, 5
- [36] F. Correa, C. Martínez and R. Troncoso, “Hairy Black Hole Entropy and the Role of Solitons in Three Dimensions,” JHEP **1202**, 136 (2012) doi:10.1007/JHEP02(2012)136 [arXiv:1112.6198 [hep-th]]. 1, 5
- [37] F. Correa, A. Faúndez and C. Martínez, “Rotating hairy black hole and its microscopic entropy in three spacetime dimensions,” Phys. Rev. D **87**, no. 2, 027502 (2013) doi:10.1103/PhysRevD.87.027502 [arXiv:1211.4878 [hep-th]]. 1, 5
- [38] G. Clement, “Classical solutions in three-dimensional Einstein-Maxwell cosmological gravity,” Class. Quant. Grav. **10**, L49 (1993). doi:10.1088/0264-9381/10/5/002 1, 2.3, 2.3, 3.1, 3.2.2, 4
- [39] C. Martínez, C. Teitelboim and J. Zanelli, “Charged rotating black hole in three space-time dimensions,” Phys. Rev. D **61**, 104013 (2000) doi:10.1103/PhysRevD.61.104013 [hep-th/9912259]. 1, 2.3, 2.3, 2.3.1, 2.3.1, 2.3.1, 2.3.1, 3, 3.1, 3.2.1, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.2, 3.3, 4, 4.1, 4.4
- [40] G. Barnich, “Boundary charges in gauge theories: Using Stokes theorem in the bulk,” Class. Quant. Grav. **20**, 3685 (2003) doi:10.1088/0264-9381/20/16/310 [hep-th/0301039]. 2.1.1
- [41] S. Carlip, “Quantum gravity in 2+1 dimensions,” Cambridge University Press (2003-12-04) ISBN: 9780521545884 (Print), 9780511822292 (eBook) 2.2.1
- [42] J. L. Cardy, “Operator Content of Two-Dimensional Conformally Invariant Theories,” Nucl. Phys. B **270**, 186 (1986). doi:10.1016/0550-3213(86)90552-3 2.2.1
- [43] S. Deser and P. O. Mazur, “Static Solutions in $D = 3$ Einstein-maxwell Theory,” Class. Quant. Grav. **2**, L51 (1985). doi:10.1088/0264-9381/2/3/003 2.3, 3, 3.1, 4

- [44] M.A. Melvin, Exterior solutions for electric and magnetic stars in 2+1 dimensions, *Class. Quantum Grav.* **3**, 117 (1986). 2.3, 3.1
- [45] J. R. Gott, J. Z. Simon and M. Alpert, “General Relativity in a (2+1)-dimensional Space-time: An Electrically Charged Solution,” *Gen. Rel. Grav.* **18**, 1019 (1986). doi:10.1007/BF01090483 2.3, 3.1
- [46] I. I. Kogan, “About some exact solutions for (2+1) gravity coupled to gauge fields,” *Mod. Phys. Lett. A* **7**, 2341 (1992) doi:10.1142/S0217732392002111 [hep-th/9205095]. 2.3, 3.1
- [47] P. Peldan, “Unification of gravity and Yang-Mills theory in (2+1)-dimensions,” *Nucl. Phys. B* **395**, 239 (1993) doi:10.1016/0550-3213(93)90216-C [gr-qc/9211014]. 2.3, 3.1
- [48] M. Kamata and T. Koikawa, “The Electrically charged BTZ black hole with self (antiself) dual Maxwell field,” *Phys. Lett. B* **353**, 196 (1995) doi:10.1016/0370-2693(95)00583-7 [hep-th/9505037]. 2.3, 3.1, 4.1
- [49] K. C. K. Chan, “Comment on the calculation of the angular momentum for the (anti)selfdual charged spinning BTZ black hole,” *Phys. Lett. B* **373**, 296 (1996) doi:10.1016/0370-2693(96)00145-1 [gr-qc/9509032]. 2.3, 3.1, 4
- [50] G. Clement, “Spinning charged BTZ black holes and selfdual particle - like solutions,” *Phys. Lett. B* **367**, 70 (1996) doi:10.1016/0370-2693(95)01464-0 [gr-qc/9510025]. 2.3, 3.1, 3.3, 4, 4.1
- [51] E. W. Hirschmann and D. L. Welch, “Magnetic solutions to (2+1) gravity,” *Phys. Rev. D* **53**, 5579 (1996) doi:10.1103/PhysRevD.53.5579 [hep-th/9510181]. 2.3, 3.1, 4.1
- [52] M. Cataldo and P. Salgado, “Static Einstein-Maxwell solutions in (2+1)-dimensions,” *Phys. Rev. D* **54**, 2971 (1996). doi:10.1103/PhysRevD.54.2971 2.3, 3.1, 4.1
- [53] M. Kamata and T. Koikawa, “(2+1)-dimensional charged black hole with (anti-)selfdual Maxwell fields,” *Phys. Lett. B* **391**, 87 (1997) doi:10.1016/S0370-2693(96)01461-X [hep-th/9605114]. 2.3, 3.1, 4, 4.1
- [54] M. Cataldo and P. Salgado, “Three dimensional extreme black hole with self (anti-self) dual Maxwell field,” *Phys. Lett. B* **448**, 20 (1999). doi:10.1016/S0370-2693(99)00035-0 2.3, 3.1, 4.1

- [55] M. Cataldo, “Azimuthal electric field in a static rotationally symmetric (2+1)-dimensional space-time,” *Phys. Lett. B* **529**, 143 (2002) doi:10.1016/S0370-2693(02)01188-7 [gr-qc/0201047]. 2.3, 3.1, 4.1
- [56] O. J. C. Dias and J. P. S. Lemos, “Rotating magnetic solution in three-dimensional Einstein gravity,” *JHEP* **0201**, 006 (2002) doi:10.1088/1126-6708/2002/01/006 [hep-th/0201058]. 2.3, 3.1, 3.3, 4, 4.1
- [57] M. Cataldo, J. Crisóstomo, S. del Campo and P. Salgado, “On magnetic solution to (2+1) Einstein-Maxwell gravity,” *Phys. Lett. B* **584**, 123 (2004) doi:10.1016/j.physletb.2004.01.062 [hep-th/0401189]. 2.3, 3.1, 4.1, 5
- [58] J. Matyjasek and O. B. Zaslavskii, “Extremal limit for charged and rotating (2+1)-dimensional black holes and Bertotti-Robinson geometry,” *Class. Quant. Grav.* **21**, 4283 (2004) doi:10.1088/0264-9381/21/17/014 [gr-qc/0404090]. 2.3, 3.1, 4.1
- [59] A. A. Garcia-Diaz, “Three dimensional stationary cyclic symmetric Einstein-Maxwell solutions; black holes,” *Annals of Physics* **324**, 2004 (2009) doi:10.1016/j.aop.2009.04.004 [arXiv:1307.6655 [gr-qc]]. 2.3, 3.1, 1, 4.1
- [60] C. Bunster and A. Pérez, “Superselection rule for the cosmological constant in three-dimensional spacetime,” *Phys. Rev. D* **91**, no. 2, 024029 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.91.024029 [arXiv:1412.1492 [hep-th]]. 3, 4.2, 5
- [61] O. Coussaert and M. Henneaux, “Supersymmetry of the (2+1) black holes,” *Phys. Rev. Lett.* **72**, 183 (1994) doi:10.1103/PhysRevLett.72.183 [hep-th/9310194]. 3
- [62] E. Ayon-Beato, M. Cataldo and A.A. Garcia. 2004. Electromagnetic fields in stationary cyclic symmetric 2+1 gravity, at 10th International Symposium on Particles, Strings and Cosmology (PASCOS 04 and Pran Nath Fest), Boston U.S.A. 1
- [63] M. Henneaux and C. Teitelboim, “The Cosmological Constant As A Canonical Variable,” *Phys. Lett. B* **143**, 415 (1984). doi:10.1016/0370-2693(84)91493-X 3.1, 4.2
- [64] T. Regge and C. Teitelboim, “Role of Surface Integrals in the Hamiltonian Formulation of General Relativity,” *Annals Phys.* **88**, 286 (1974). doi:10.1016/0003-4916(74)90404-7 3.1, 4.2
- [65] M. Banados and S. Theisen, “Scale invariant hairy black holes,” *Phys. Rev. D* **72**, 064019 (2005) doi:10.1103/PhysRevD.72.064019 [hep-th/0506025]. 2

- [66] M. Henneaux, C. Martínez and R. Troncoso, “Asymptotically anti-de Sitter spacetimes in topologically massive gravity,” *Phys. Rev. D* **79**, 081502 (2009) doi:10.1103/PhysRevD.79.081502 [arXiv:0901.2874 [hep-th]]. 3, 4.1
- [67] M. Henneaux, A. Perez, D. Tempo and R. Troncoso, “Hypersymmetry bounds and three-dimensional higher-spin black holes,” *JHEP* **1508**, 021 (2015) doi:10.1007/JHEP08(2015)021 [arXiv:1506.01847 [hep-th]]. 3
- [68] M. Cardenas, O. Fuentealba and C. Martínez, “Three-dimensional black holes with conformally coupled scalar and gauge fields,” *Phys. Rev. D* **90**, no. 12, 124072 (2014) doi:10.1103/PhysRevD.90.124072 [arXiv:1408.1401 [hep-th]]. 3.3, 4.5
- [69] A. Perez, D. Tempo and R. Troncoso, “Higher spin gravity in 3D: Black holes, global charges and thermodynamics,” *Phys. Lett. B* **726**, 444 (2013) doi:10.1016/j.physletb.2013.08.038 [arXiv:1207.2844 [hep-th]]. 3.3, 4.5
- [70] G. Clement, “Black hole mass and angular momentum in 2+1 gravity,” *Phys. Rev. D* **68**, 024032 (2003) doi:10.1103/PhysRevD.68.024032 [gr-qc/0301129]. 3.3, 4
- [71] M. Cadoni, M. Melis and M. R. Setare, “Microscopic entropy of the charged BTZ black hole,” *Class. Quant. Grav.* **25**, 195022 (2008) doi:10.1088/0264-9381/25/19/195022 [arXiv:0710.3009 [hep-th]]. 3.3, 4, 4.5
- [72] Y. S. Myung, Y. W. Kim and Y. J. Park, “Entropy function approach to charged BTZ black hole,” *Gen. Rel. Grav.* **42**, 1919 (2010) doi:10.1007/s10714-010-0969-5 [arXiv:0903.2109 [hep-th]]. 3.3, 4
- [73] K. Jensen, “Chiral anomalies and AdS/CMT in two dimensions,” *JHEP* **1101**, 109 (2011) doi:10.1007/JHEP01(2011)109 [arXiv:1012.4831 [hep-th]]. 3.3, 4
- [74] A. A. Garcia-Diaz, “Three dimensional stationary cyclic symmetric Einstein-Maxwell solutions; energy, mass, momentum, and algebraic tensors characteristics,” arXiv:1307.6652 [gr-qc]. 3.3, 4
- [75] G. Barnich, P. H. Lambert and P. J. Mao, “Three-dimensional asymptotically flat Einstein-Maxwell theory,” *Class. Quant. Grav.* **32**, no. 24, 245001 (2015) doi:10.1088/0264-9381/32/24/245001 [arXiv:1503.00856 [gr-qc]]. 3.3
- [76] S. H. Hendi, S. Panahiyan and R. Mamasani, “Thermodynamic stability of charged BTZ black holes: Ensemble dependency problem and its solution,” *Gen. Rel. Grav.* **47**, no. 8, 91 (2015) doi:10.1007/s10714-015-1932-2 [arXiv:1507.08496 [gr-qc]]. 3.3, 4

- [77] A. M. Frassino, R. B. Mann and J. R. Mureika, “Lower-Dimensional Black Hole Chemistry,” arXiv:1509.05481 [gr-qc]. 3.3, 4
- [78] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog and G. T. Horowitz, “Building a Holographic Superconductor,” Phys. Rev. Lett. **101**, 031601 (2008) doi:10.1103/PhysRevLett.101.031601 [arXiv:0803.3295 [hep-th]]. 3.3, 4.5, 5
- [79] D. Maity, S. Sarkar, N. Sircar, B. Sathiapalan and R. Shankar, “Properties of CFTs dual to Charged BTZ black-hole,” Nucl. Phys. B **839**, 526 (2010) doi:10.1016/j.nuclphysb.2010.06.012 [arXiv:0909.4051 [hep-th]]. 3.3, 4.5, 5
- [80] J. Ren, “One-dimensional holographic superconductor from AdS₃/CFT₂ correspondence,” JHEP **1011**, 055 (2010) doi:10.1007/JHEP11(2010)055 [arXiv:1008.3904 [hep-th]]. 3.3, 4.5, 5
- [81] T. Faulkner and N. Iqbal, “Friedel oscillations and horizon charge in 1D holographic liquids,” JHEP **1307**, 060 (2013) doi:10.1007/JHEP07(2013)060 [arXiv:1207.4208 [hep-th]]. 3.3, 4.5, 5
- [82] G. T. Horowitz, N. Iqbal and J. E. Santos, “Simple holographic model of nonlinear conductivity,” Phys. Rev. D **88**, no. 12, 126002 (2013) doi:10.1103/PhysRevD.88.126002 [arXiv:1309.5088 [hep-th]]. 3.3, 4.5, 5
- [83] P. Chaturvedi and G. Sengupta, “Rotating BTZ Black Holes and One Dimensional Holographic Superconductors,” Phys. Rev. D **90**, no. 4, 046002 (2014) doi:10.1103/PhysRevD.90.046002 [arXiv:1310.5128 [hep-th]]. 3.3, 4.5, 5
- [84] M. Henneaux, L. Maoz and A. Schwimmer, “Asymptotic dynamics and asymptotic symmetries of three-dimensional extended AdS supergravity,” Annals Phys. **282**, 31 (2000) doi:10.1006/aphy.2000.5994 [hep-th/9910013]. 3.3
- [85] A. Schwimmer and N. Seiberg, “Comments on the N=2, N=3, N=4 Superconformal Algebras in Two-Dimensions,” Phys. Lett. B **184**, 191 (1987). doi:10.1016/0370-2693(87)90566-1 3.3
- [86] G. Barnich and P. H. Lambert, “Einstein-Yang-Mills theory: Asymptotic symmetries,” Phys. Rev. D **88**, 103006 (2013) doi:10.1103/PhysRevD.88.103006 [arXiv:1310.2698 [hep-th]]. 4.5
- [87] H. Reissner, “Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie,” Annalen der Physik (in German) **50**: 106-120 (1916).4

- [88] G. Nordström, “On the energy of the Gravitational Field in Einstein’s Theory,” *Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Afdel. Natuurk., Amsterdam* **26**: 1201-1208 (1918).4
- [89] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, “The Large Scale Structure of Space-Time”. Cambridge Monographs on Mathematical Physics Cambridge University Press (2011-02-01) ISBN: 9780521200165, 9780521099066, 9780511826306 (eBook), 9780521099066 (Print) 4
- [90] P. K. Townsend, “Black holes: Lecture notes,” gr-qc/9707012. 4
- [91] L. J. Romans, “Supersymmetric, cold and lukewarm black holes in cosmological Einstein-Maxwell theory,” *Nucl. Phys. B* **383**, 395 (1992) doi:10.1016/0550-3213(92)90684-4 [hep-th/9203018]. 4
- [92] R. P. Kerr, “Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics,” *Phys. Rev. Lett.* **11**, 237 (1963). doi:10.1103/PhysRevLett.11.237 4
- [93] E. T. Newman, R. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash and R. Torrence, “Metric of a Rotating, Charged Mass,” *J. Math. Phys.* **6**, 918 (1965). doi:10.1063/1.1704351 4
- [94] A. Pérez, M. Riquelme, D. Tempo and R. Troncoso, “Conserved charges and black holes in the Einstein-Maxwell theory on AdS₃ reconsidered,” *JHEP* **1510**, 161 (2015) doi:10.1007/JHEP10(2015)161 [arXiv:1509.01750 [hep-th]]. 3.2.1, 3.2.2, 4, 4.1, 4.3.2, 4.4, 4
- [95] M. Henneaux, C. Martínez and R. Troncoso, “More on Asymptotically Anti-de Sitter Spaces in Topologically Massive Gravity,” *Phys. Rev. D* **82**, 064038 (2010) doi:10.1103/PhysRevD.82.064038 [arXiv:1006.0273 [hep-th]]. 4.1, 5
- [96] R. L. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner, “The Dynamics of general relativity,” *Gen. Rel. Grav.* **40**, 1997 (2008) doi:10.1007/s10714-008-0661-1 [gr-qc/0405109]. 4.2
- [97] A. J. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim, “Constrained Hamiltonian Systems,” RX-748, PRINT-75-0141 (IAS,PRINCETON). 4.2
- [98] A. Pérez, M. Riquelme, D. Tempo and R. Troncoso, “Asymptotic structure of the Einstein-Maxwell theory on AdS₃,” arXiv:1512.01576 [hep-th]. 3.3, 4.1

- [99] J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1113 (1999) [*Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998)] doi:10.1023/A:1026654312961 [hep-th/9711200]. 4.5
- [100] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from noncritical string theory,” *Phys. Lett. B* **428**, 105 (1998) doi:10.1016/S0370-2693(98)00377-3 [hep-th/9802109]. 4.5
- [101] E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 253 (1998) [hep-th/9802150]. 4.5
- [102] P. Kraus, “Lectures on black holes and the AdS(3) / CFT(2) correspondence,” *Lect. Notes Phys.* **755**, 193 (2008) [hep-th/0609074]. 4.5

