Universidad de Concepción

Dirección de Postgrado

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas - Programa de Magíster en Matemática

Propiedades de las Topologías vistas como Semianillos

Tesis para optar al grado de Magíster en Matemática

SEBASTIÁN ANDRÉS BARRÍA BURGOS

CONCEPCIÓN - CHILE

2016

Profesor Guía: Jacqueline Ojeda Fuentealba

Dpto. de Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Concepción

Universidad de Concepción

Dirección de Postgrado

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas - Programa de Magíster en Matemática

Propiedades de las Topologías vistas como Semianillos

SEBASTIÁN ANDRÉS BARRÍA BURGOS

CONCEPCIÓN - CHILE

2016

Cotutor: Jorge Vielma

Comisión Evaluadora:

Carlos Martínez

Jacqueline Ojeda

Xavier Vidaux

Jorge Vielma

Dpto. de Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Concepción

Esta tesis está dedicada a mis padres, Ruth y Germán ^_^.

Índice general

Introducción

Los primeros ejemplos de semianillos aparecen en el artículo "Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen" publicado por R. Dedekind en 1894 ([11]), en el que estudia álgebras de ideales de un anillo conmutativo. Mucho después, en 1934, H. S. Vandiver en "Note on a simple type of algebra in which the cancellation law of addition does not hold" ([35]) introduce formalmente el concepto de semianillo, pero fue sólo a principios de los años 70 cuando los semianillos toman vida propia al aparecer vinculados con la informática.

Sobre el espectro primo de semianillos se define la topología de Zariski, la cual nos permite establecer una conexión entre las propiedades algebraicas de semianillos y las propiedades topológicas de su espectro primo. Sin embargo, la topología de Zariski no es muy fuerte (en el sentido de axiomas de separación), ya que sólo es T_0, y es T_1 si y sólo si todo ideal primo del semianillo es maximal. Por lo anterior nos motivamos a estudiar otras topologías más finas que la de Zariski que se han definido en los últimos años, las cuales son expuestas detalladamente en los capítulos 2, 3 y 4. Dado un espacio topológico (X, τ), se tiene que τ es un semianillo. En la literatura no se hallan trabajos relacionados con este hecho, lo cual nos motivó a estudiar propiedades de las topologías vistas como semianillos, relacionando los conceptos y resultados topológicos con los algebraicos.

Los capítulos del 1 al 4 son de carácter expositorio, mientras que el capítulo 5 está dedicado a nuevos resultados.

En el capítulo 1 se expone la teoría de semianillos necesaria para comprender el resto de los contenidos. Además, se estudian diversas propiedades de la topología de

Zariski definida sobre el espectro primo de semianillos ([23]).

Dada una topología cualquiera siempre es posible definir la menor topología Alexandroff que la contiene. En el capítulo 2, dicha topología se utiliza para caracterizar algunas de las propiedades de un semianillo con la topología de Zariski y hallar importantes relaciones para el caso de semianillos Gelfand y m-semianillos ([31]).

Utilizando ultrafiltros sobre el espectro primo de un semianillo, en el capítulo 3 se define la topología ultrafiltro ([15]) y se prueba que coincide con la topología parche sobre el espectro primo de un semianillo ([27]).

En el capítulo 4, dado un ultrafiltro $\mathscr{F}$ sobre $\mathbb{N}$, se define el $\mathscr{F}$-límite de una sucesión de ideales primos, el cual sirve para definir la $\mathscr{F}$-topología sobre el espectro primo de un semianillo ([21]). Cabe destacar que esta topología es más fina que las anteriores.

Finalmente, en el capítulo 5 se desarrollan diversas propiedades de las topologías vistas como semianillos, dándole gran énfasis al espectro primo de estas ([6]).

Capítulo 1

Semianillos y la Topología de Zariski

Introducción

Este capítulo está dedicado al concepto de semianillo y sus propiedades, y a la topología de Zariski definida sobre el espectro primo de un semianillo, puesto que los semianillos son la base en esta tesis y la topología de Zariski es uno de los modelos principales que se ha estudiado dentro de las topologías definidas sobre el espectro primo de un semianillo. Daremos algunas definiciones y propiedades necesarias para lo que sigue, como la compacidad y espectralidad del espectro primo de un semianillo.

1.1. Semianillos

Desde ahora, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ denotará el conjunto de los números naturales. Por un *espacio* nos referimos a un espacio topológico (X, τ).

Definición 1.1.1. *Un semianillo (conmutativo con identidad no nula) es una estructura algebraica* $(R, +, \cdot, 0, 1)$*, donde* R *es un conjunto con* 0 *y* 1 *elementos de* R*, y* $+$ *y* $\cdot$ *son operaciones binarias internas sobre* R *llamadas suma y multiplicación respectivamente,* *que satisfacen lo siguiente:*

(1) $(R, +, 0)$ *y* $(R, \cdot, 1)$ *son monoides conmutativos con* 0 *distinto de* 1*;*

(2) la multiplicación es distributiva con respecto a la adición;

(3) 0 *es el elemento absorvente de la multiplicación.*

Como es usual, el semianillo $(R, +, \cdot, 0, 1)$ se denotará simplemente por R. Desde ahora en adelante consideraremos R como un semianillo conmutativo con identidad no nula a menos que se especifique lo contrario.

Definición 1.1.2. *Un subconjunto no vacío* I *de* R *es un ideal de* R *si: dados* $a, b \in I$ *y* $r \in R$ *se tiene que*

(1) $a + b \in I$*;*

(2) $ar \in I$*;*

(3) $1 \notin I$*.*

Recordemos algunos otros conceptos asociados a un ideal.

Un ideal I de R es *primo* si dados $a, b \in I$ con $ab \in I$, entonces $a \in I$ o $b \in I$.

Un ideal es *maximal* si no está contenido en otro ideal.

Un ideal primo es *minimal* si el único ideal primo que contiene es si mismo.

$\mathrm{Max}(R)$ y $\mathrm{Min}(R)$ denotarán al conjunto de todos los ideales primos maximales y minimales de R respectivamente.

Dado un subconjunto no vacío X de R, el *ideal generado* por X es el conjunto de todas las combinaciones lineales de X y se denota por (X).

Dado $a \in R$, $(a) = aR = \{ar : r \in R\}$ y es llamado el *ideal principal* generado por a.

Para cada ideal I de R, definimos el *radical primo* de I como la intersección de todos los ideales primos de R que contienen a I y lo denotamos por $\eta(I)$.

Un *semianillo semilocal* es aquel con un número finito de ideales maximales.

Un *semianillo local* es aquel con un único ideal maximal.

Similar al caso de anillos conmutativos, se tienen las siguientes propiedades:

Proposición 1.1.3 ([23]). *1. Todo ideal de R está contenido en un ideal maximal de R.*

2. Todo ideal maximal de R es primo.

3. Todo ideal primo de R contiene un ideal primo minimal.

4. $\eta(I) = \{a \in R : \exists n \in \mathbb{N}, a^n \in I\}$.

Cada anillo conmutativo con identidad no nula es un semianillo. A continuación, algunos ejemplos de semianillos que no son anillos.

Ejemplo 1.1.4. *El conjunto $\mathbb{N}$ con la suma y multiplicación usuales es un semianillo. $\mathbb{N}$ es un semianillo local con ideal maximal $M = \mathbb{N} - \{1\} = (\{2, 3\})$.*

Los ideales primos de $\mathbb{N}$ son 0, $p\mathbb{N}$ con p primo y M. Ver [25] para más detalles.

Ejemplo 1.1.5. *El conjunto $\mathbb{Q}^+$ con la suma y multiplicación usuales es un semianillo al igual que $\mathbb{R}^+$ ([23]).*

Ejemplo 1.1.6. *Sea $R = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. $(R, \mathrm{Min}, +)$ es un semianillo conmutativo donde la adición es la operación de tomar el mínimo y la multiplicación es la suma ordinaria ([23]).*

Ejemplo 1.1.7. *Si (X, τ) es un espacio Hausdorff, entonces el conjunto de todas las funciones continuas acotadas de X a $\mathbb{R}^+$ es un semianillo conmutativo ([28]).*

El próximo ejemplo será fundamental en el capítulo 5.

Ejemplo 1.1.8. *Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces τ es un semianillo con $A + B = A \cup B$ y $AB = A \cap B$.*

En efecto, por definición de espacio topológico la unión y la intersección son operaciones binarias internas. Claramente $\emptyset$ y X son el neutro aditivo y multiplicativo respectivamente. Por la asociatividad y conmutatividad de la intersección y la unión de conjuntos, $(\tau, \cup, \emptyset)$ y $(\tau, \cap, X)$ son monoides conmutativos. Por las leyes de De Morgan se tiene la distributividad de $\cap$ respecto a $\cup$, y evidentemente $\emptyset$ es el elemento absorvente de $\cap$.

1.2. La Topología de Zariski

Denotaremos por $\mathrm{Spec}(R)$ al conjunto de todos los ideales primos de R. Para cada ideal I de R definamos

$$(I)_0 = \{P \in \mathrm{Spec}(R) : I \subseteq P\} \text{ y } D_0(I) = \mathrm{Spec}(R) \backslash (I)_0.$$

Proposición 1.2.1. *Sean $a \in R$ e I y J ideales de R.*

1. *Si $I \subseteq J$, entonces $(I)_0 \supseteq (J)_0$ y $D_0(I) \subseteq D_0(J)$;*
2. *$(aR)_0 = \{P \in \mathrm{Spec}(R) : a \in P\}$ y $D_0(aR) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) : a \notin P\}$.*

Demostración.

1. Si $I \subseteq J$, entonces todo ideal primo que contiene a J también contiene a I. Así, $(I)_0 \supseteq (J)_0$. Por complemento de conjuntos tenemos que $D_0(I) \subseteq D_0(J)$.
2. Sea $P \in (aR)_0$, es decir, $aR \subseteq P$. Si elegimos $r \in R$ con $r = 1$, entonces $ar = a \in P$. Ahora, sea P un ideal primo tal que $a \in P$. Como P es ideal, $ar \in P$ para todo $r \in R$, o sea, $aR \subseteq P$.

   Con un proceso análogo se tiene que $D_0(aR) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) : a \notin P\}$.

□

Notación 1.2.2. *Dado $a \in R$, denotaremos por $(a)_0$ y $D_0(a)$ a $(aR)_0$ y $D_0(aR)$ respectivamente.*

Lema 1.2.3.

1. *Si $\{I_j\}_{j\in J}$ es una familia de ideales de R, entonces $\bigcap_{j\in J}(I_j)_0 = (\sum_{j\in J} I_j)_0$.*

2. *Si I y J son ideales de R, entonces $(I)_0 \cup (J)_0 = (IJ)_0 = (I \cap J)_0$.*

Demostración. 1. Sea $\{I_j\}_{j\in J}$ una familia de ideales de R. Tenemos que $(I_j)_0 \supseteq (\sum_{j\in J} I_j)_0$ para todo $j \in J$, por lo que $\bigcap_{j\in J}(I_j)_0 \supseteq (\sum_{j\in J} I_j)_0$. Ahora, sea $P \in \bigcap_{j\in J}(I_j)_0$, es decir, $P \in (I_j)_0$ para todo $j \in J$. Luego, $P \supseteq I_j$ para todo $j \in J$. Como $\sum_{j\in J} I_j$ es el único ideal de R minimal con respecto a contener todos los I_j, necesariamente $P \supseteq \sum_{j\in J} I_j$, y así $P \in (\sum_{j\in J} I_j)_0$. De esta manera $\bigcap_{j\in J}(I_j)_0 \subseteq (\sum_{j\in J} I_j)_0$. Por lo tanto, $\bigcap_{j\in J}(I_j)_0 = (\sum_{j\in J} I_j)_0$.

2. Sean I y J ideales de R. Sea P ideal primo de R tal que $P \supseteq IJ$. Luego, $P \supseteq I$ o $P \supseteq J$, y así $(IJ)_0 \subseteq (I)_0 \cup (J)_0$. Como $IJ \subseteq I \cap J$, tenemos que $(I \cap J)_0 \subseteq (IJ)_0$. Por otra parte, es fácil ver que $(I)_0 \cup (J)_0 \subseteq (I \cap J)_0$. Así, $(I)_0 \cup (J)_0 = (IJ)_0 = (I \cap J)_0$.

□

Proposición 1.2.4. *Los conjuntos $(I)_0$ son los conjuntos cerrados de una topología sobre* $\operatorname{Spec}(R)$.

Demostración. Puesto que $(0)_0 = \operatorname{Spec}(R)$ y $(1)_0 = \emptyset$, tenemos que $\emptyset, \operatorname{Spec}(R) \in \{(I)_0 : I \text{ ideal de } R\}$. Si $\{I_j\}_{j\in J}$ es una familia de ideales de R, entonces por el lema anterior $\bigcap_{j\in J}(I_j)_0 = (\sum_{j\in J} I_j)_0 \in \{(I)_0 : I \text{ ideal de } R\}$. Finalmente, si I_1 e I_2 son ideales de R, entonces por el lema anterior $(I_1)_0 \cup (I_2)_0 = (I_1 \cap I_2)_0 \in \{(I)_0 : I \text{ ideal de } R\}$. □

Definición 1.2.5. *Los conjuntos $(I)_0$, con I un ideal de R, corresponden a los conjuntos cerrados de una topología sobre* $\operatorname{Spec}(R)$ *llamada la Topología de Zariski, que denotaremos por τ_Z.*

Proposición 1.2.6. *Considerando el espacio $(\operatorname{Spec}(R), \tau_Z)$, se tiene que:*

1. *$\{D_0(a) : a \in R\}$ es una base de abiertos para τ_z;*

2. *$\{P\}$ es cerrado si y sólo P es un ideal maximal de R;*

3. *$\overline{\{P\}} = (P)_0$;*

4. *$P \in \overline{\{Q\}}$ si y sólo $Q \subseteq P$.*

Demostración. 1. Sea A un abierto de $\operatorname{Spec}(R)$, esto es, existe un ideal I de R tal que $A = D_0(I)$, pero $D_0(I) = \bigcup\{D_0(a) : a \in I\}$. Luego, $\{D_0(a) : a \in R\}$ es una base de abiertos para τ_z.

2. Si $\{P\}$ es cerrado, entonces existe un ideal I de R tal que $\{P\} = (I)_0$. Luego, P es el único ideal primo que contiene a I, por lo que debe ser maximal. Ahora, si P es maximal, entonces por definición $(P)_0 = \{P\}$, y así $\{P\}$ es cerrado.

3. Como $\overline{\{P\}}$ es el menor cerrado que contiene $\{P\}$, tenemos que $\overline{\{P\}} \subseteq (P)_0$. Ahora, si $(I)_0$ es un cerrado que contiene a $\overline{\{P\}}$ y $Q \in (P)_0$, entonces $I \subseteq P \subseteq Q$, es decir, $Q \in (I)_0$, o sea $(P)_0 \subseteq \overline{\{P\}}$.

4. Aplicando (3), $P \in \overline{\{Q\}} = (Q)_0$ si y sólo si $Q \subseteq P$.

$\square$

Proposición 1.2.7. $(\operatorname{Spec}(R), \tau_Z)$ *es un espacio T_0.*

Demostración. Sean $P, Q \in \operatorname{Spec}(R)$ distintos. Si $P \nsubseteq Q$, entonces $Q \in D_0(P)$ y $P \notin D_0(P)$. Ahora, si $P \subseteq Q$, entonces existe $a \in Q \setminus P$ y así, $P \in D_0(a)$ y $Q \notin D_0(a)$. $\square$

Proposición 1.2.8. 1. *Si I es un ideal finitamente generado de R, entonces $D_0(I)$ es compacto.*

2. *Un abierto de* $\operatorname{Spec}(R)$ *es compacto si y sólo si es unión finita de conjuntos $D_0(a)$.*

Demostración. 1. Sea $I = (x_1, \ldots, x_n)$ un ideal finitamente generado de R. Supongamos que $D_0(I) \subset \bigcup_{s\in S} D_0(s)$ para S subconjunto de R. Por lema 1.2.3, $((S))_0 = (\sum_{s\in S}(s))_0 = \bigcap_{s\in S}(s)_0 \subseteq (I)_0$, es decir, $I \subseteq (S)$. Así, $x_i = \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij}s_{ij}$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y por lo tanto, $I \subseteq (s_{ij})_{i,j}$. De aquí, $(I)_0 \supseteq ((s_{ij})_{i,j})_0 = (\sum_{i,j}(s_{ij}))_0 = \bigcap_{i,j}(s_{ij})_0$, o equivalentemente, $D_0(I) \subseteq \bigcup_{i,j} D_0(s_{ij})$.

2. Dado un abierto A de $\operatorname{Spec}(R)$, este puede ser escrito como unión de abiertos básicos, luego estos abiertos básicos forman un cubrimiento abierto de A y por compacidad A es una unión finita de abiertos básicos.

   Ahora, si A es una unión finita de abiertos básicos, entonces por 1. A es compacto.

$\square$

Observación 1.2.9. *De la proposición anterior se deduce que* $\operatorname{Spec}(R) = D_0(1)$ *y* $D_0(a)$*, con* $a \in R$*, son compactos.*

Definición 1.2.10. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Un subconjunto no vacío* τ*-cerrado de* X *se dice irreducible si no puede ser escrito como unión de dos subconjuntos* τ*-cerrados de* X*.*

(X, τ) *se dice espacio sobrio si los subconjuntos* τ*-cerrados irreducibles de* X *son de la forma* $\overline{\{x\}}^{\tau}$ *para un único* $x \in X$*.*

Definición 1.2.11. *Un espacio* (X, τ) *se dice espectral si es compacto,* T_0*, sobrio y sus subconjuntos abiertos compactos forman una subbase para* τ*.*

Teorema 1.2.12. $(\operatorname{Spec}(R), \tau_Z)$ *es un espacio espectral.*

Demostración. Por la observación anterior y la proposición 1.2.7 $(\operatorname{Spec}(R), \tau_Z)$ es compacto y T_0.

La colección $\{D_0(I) : I$ es un ideal finitamente generado de $R\}$ es una base para τ_Z, pues contiene a la base $\{D_0(a) : a \in R\}$. Si I y J son ideales finitamente generados de R, entonces por la conmutatividad de R el producto también es un ideal finitamente generado de R tal que $D_0(I) \cap D_0(J) = D_0(IJ)$. Por la proposición 1.2.8 tenemos una base de conjuntos compactos abiertos, cerrada bajo intersecciones finitas.

Falta probar que $(\operatorname{Spec}(R), \tau_Z)$ es sobrio. Sea $(I)_0$ un τ_Z-cerrado irreducible, es decir, si $(I)_0 \subseteq (J)_0 \cup (K)_0$, entonces $(I)_0 \subseteq (J)_0$ o $(I)_0 \subseteq (K)_0$. Por el lema 1.2.3 y la proposición 1.2.1, lo anterior es equivalente a decir que si $I \supseteq JK$, entonces $I \supseteq J$ o $I \supseteq K$, por lo que I es ideal primo. Luego, por la proposición 1.2.6, $(I)_0 = \overline{\{I\}}$. $\square$

Observación 1.2.13. *De acuerdo a M. Hochster ([27]), cada espacio espectral es homeomorfo al espectro primo de un anillo conmutativo con la topología de Zariski.*

Corolario 1.2.14. *Para todo semianillo R existe un anillo conmutativo A tal que $(\mathrm{Spec}(R), \tau_Z)$ es homeomorfo a $(\mathrm{Spec}(A), \tau_Z)$.*

Demostración. Por el teorema anterior $(\mathrm{Spec}(R), \tau_Z)$ es un espacio espectral. Luego, existe un anillo conmutativo A tal que $(\mathrm{Spec}(R), \tau_Z)$ es homeomorfo a $(\mathrm{Spec}(A), \tau_Z)$. $\square$

Definición 1.2.15. *Dado $S \subseteq R$, decimos que S es un subconjunto cerrado multiplicativo de R si $1 \in S$ y S es cerrado bajo la multiplicación.*

Lema 1.2.16 (Krull)**.** *Sea S un subconjunto cerrado multiplicativo de R e I un ideal de R tal que $I \cap S = \emptyset$. Se tiene que existe un ideal P de R maximal con respecto a la propiedad $P \cap S = \emptyset$ e $I \subseteq P$. Más aún, P es un ideal primo de R.*

Demostración. Sea A el conjunto de los ideales J de R tal que $J \supseteq I$ y $J \cap S = \emptyset$. Consideremos $\{I_k\}_{k\in K}$ una cadena en A. Tenemos que $B = \bigcup_{k\in K} I_k$ es un ideal de R tal que $B \cap S = \emptyset$ y $B \supseteq I$. Así, B es una cota superior de la cadena. Por lema de Zorn, A tiene elemento maximal P.

Supongamos que P no es ideal primo, es decir, existen $a, b \in R$ tales que $ab \in P$ y $a, b \notin P$. Luego, $(P + (a)) \cap S \neq \emptyset$ y $(P + (b)) \cap S \neq \emptyset$, por lo que $a, b \in S$, y como S es cerrado bajo la multiplicación, $ab \in S$. Pero, $ab \in P \cap S$ y $P \cap S = \emptyset$ (contradicción). $\square$

Lema 1.2.17. *$P \in \mathrm{Spec}(R)$ es minimal si y sólo si para todo $x \in P$ existe $a \in R \setminus P$ tal que $ax \in \eta(0)$. En tal caso, $P = \bigcup_{a\in R\setminus P}(\eta(0) : a)$.*

Demostración. Supongamos que P es un ideal primo minimal. Sean $S = R \setminus P$ y $x \in P$. Como P es ideal, $1 \notin P$, y así $1 \in S$. Dado que $x^0 = 1$, el conjunto $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Sx^n$ es un subconjunto cerrado multiplicativo de R que contiene a S. Si $T \cap \eta(0) = \emptyset$, entonces por el Lema de Krull existe un ideal primo Q de R tal que $T \cap Q = \emptyset$. Así, $Q \subseteq P$ y $x \notin Q$, contradiciendo la minimalidad de P. Luego, $T \cap \eta(0) \neq \emptyset$ y existen $a \in S$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $ax^n \in \eta(0)$. Así, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(ax^n)^m = 0$, por lo que $(ax)^{m+n} = 0$, es decir, $ax \in \eta(0)$.

Supongamos que P no es primo minimal, es decir, existe un ideal primo minimal Q de R propiamente contenido en P, por lo que existe $x \in P \setminus Q$. Luego, por hipótesis existe $a \in R \setminus P$ tal que $ax \in \eta(0) \subset Q$, pero como Q es primo, $a \in Q$ o $x \in Q$ (contradicción). $\square$

Teorema 1.2.18. *Son equivalentes:*

a) *todo ideal primo de R es maximal;*

b) $(\mathrm{Spec}(R), \tau_Z)$ *es un espacio T_1;*

c) $(\mathrm{Spec}(R), \tau_Z)$ *es un espacio T_2.*

Demostración. Como un espacio es T_1 si y sólo si todo singleton es cerrado, por la proposición 1.2.6.*2*, *a*) y *b*) son equivalentes. Claramente *c*) $\Rightarrow$ *b*). Basta probar *a*) $\Rightarrow$ *c*). Sean P y Q elementos distintos de $\mathrm{Spec}(R)$. Luego, existe $a \in P \setminus Q$. Como todo ideal primo de R es maximal, también todo ideal primo de R es minimal, sino existiría un ideal maximal contenido en otro. Por la minimalidad de P y el lema anterior, existe $b \in R \setminus P$ tal que ab es nilpotente, es decir, $ab \in \eta(0)$. Supongamos que I pertenece a $D_0(a)$ y $D_0(b)$, o sea, $a \notin I$ y $b \notin I$. Así, $ab \notin I$, pero $\eta(0) \subseteq I$ (contradicción). De esta manera, $D_0(a)$ y $D_0(b)$ son vecindades disjuntas de Q y P respectivamente. $\square$

Capítulo 2

Semianillos Gelfand y m-Semianillos

Introducción

Los anillos Gelfand son caracterizados en [6] como aquellos anillos en los cuales el espectro primo maximal es un retracto del espectro primo con la topología de Zariski. Veremos una extensión de este resultado para semianillos Gelfand. Por otro lado, en los últimos años se han encontrado otras caracterizaciones relacionadas con la menor topología Alexandroff que contiene a la topología de Zariski, $\overline{\tau_Z}$. Por ejemplo, que R es un semianillo Gelfand si y sólo si para todo $M \in \mathrm{Max}(R)$, $\ker(M)$(el conjunto de los τ_Z-abiertos que contienen a M) es un $\overline{\tau_Z}$-clopen de $\mathrm{Spec}(R)$ y que en un semianillo Gelfand semilocal: $\overline{\tau_Z}$-compacidad, $\overline{\tau_Z}$-nearly compacidad y $\overline{\tau_Z}$-casi compacidad son condiciones equivalentes sobre su espectro primo.

Por otra parte, J. Avila en [4] introduce el concepto de m-anillo para describir algunos axiomas de separación del espectro primo de un anillo conmutativo con la topología de Zariski. Extendiendo la definición a semianillos, mostraremos que los m-semianillos pueden ser caracterizados utilizando la topología $\overline{\tau_Z}$. Por ejemplo, R es un m-semianillo si y sólo si $\mathrm{Min}(R)$ es un retracto de $(\mathrm{Spec}(R), \overline{\tau_Z})$ si y sólo si para todo $M \in \mathrm{Min}(R)$, $(M)_0$ es clopen en $\overline{\tau_Z}$.

2.1. Topologías Alexandroff

Sea (X, τ) un espacio topológico. Dado $x \in X$, $\ker_\tau(x)$ denotará la intersección de todos los τ-abiertos que contienen a x.

Proposición 2.1.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

1. *Si $x, y \in X$, entonces $x \in \overline{\{y\}}$ si y sólo si $y \in \ker_\tau(x)$.*

2. *(X, τ) es T_0 si y sólo si $\{x\} = \overline{\{x\}} \cap \ker_\tau(x)$ para todo $x \in X$.*

Demostración.

1. Sean $x, y \in X$. Tenemos que $x \in \overline{\{y\}}$ si y sólo si $y \in A$ para todo abierto A de x si y sólo si $y \in \ker_\tau(x)$.

2. Sea $y \in \overline{\{x\}} \cap \ker_\tau(x)$. Por 1., $x \in \overline{\{y\}}$. Si $y \neq x$, entonces como X es T_0 existe un abierto A tal que $x \notin A$ e $y \in A$, por lo que $x \notin \overline{\{y\}}$ (contradicción).

   Ahora, supongamos que X no es T_0, es decir, existen $x, y \in X$ distintos tales que para todo abierto A; $x, y \in A$. Luego, $\ker_\tau(x) = \ker_\tau(y)$. Por *1*, $y \in \overline{\{x\}}$, y así

   $$y \in \overline{\{x\}} \cap \ker_\tau(x) \cap \overline{\{y\}} \cap \ker_\tau(y).$$

   Pero, $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$, esto es, $\left(\overline{\{x\}} \cap \ker_\tau(x)\right) \cap \left(\overline{\{y\}} \cap \ker_\tau(y)\right) = \emptyset$ (contradicción).

□

El siguiente corolario es consecuencia directa de la proposiciones 1.2.6, 1.2.7 y precedente.

Corolario 2.1.2. *Consideremos el espacio $(\mathrm{Spec}(R), \tau_Z)$.*

1. *Si $P, Q \in \mathrm{Spec}(R)$, entonces $P \in \overline{\{Q\}}$ si y sólo si $P \in (Q)_0$ si y sólo si $Q \in \ker_{\tau_Z}(P)$.*

2. *Si $P \in \mathrm{Spec}(R)$, entonces $\{P\} = \overline{\{P\}} \cap \ker_{\tau_Z}(P) = (P)_0 \cap \ker_{\tau_Z}(P)$.*

3. *Si $M \in \mathrm{Max}(R)$, entonces $P \in \ker_{\tau_Z}(M)$ si y sólo si $P \subseteq M$.*

Definición 2.1.3. *Una topología es Alexandroff si es cerrada bajo intersecciones arbitrarias.*

Observación 2.1.4. *Se deduce de la definición que una topología es Alexandroff si es cerrada bajo uniones arbitrarias de conjuntos cerrados.*

Sea (X, τ) un espacio topológico. Identificando cada subconjunto de X con su función característica, podemos ver a τ como un subconjunto de $\{0,1\}^X$. Se puede mostrar que considerando $\{0,1\}^X$ con la topología producto, la clausura de τ, $\overline{\tau}$, es también una topología y es la menor topología Alexandroff que contiene a τ ([34]). Por otro lado, τ^* denotará la familia de subconjuntos τ-cerrados de X.

En la siguiente proposición recopilaremos algunos resultados que ocuparemos más adelante. Para más detalles ver [8] y [34].

Proposición 2.1.5. *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

1. *Dado $x \in X$, $\ker_{\overline{\tau}}(x)$ es el menor $\overline{\tau}$-abierto que contiene a x.*

2. *$\overline{\tau}^*$ es una topología Alexandroff sobre X.*

3. *$\mathrm{cl}_\tau(\{x\}) = \mathrm{cl}_{\overline{\tau}}(\{x\})$ para todo $x \in X$.*

4. *$\ker_\tau(x) = \ker_{\overline{\tau}}(x)$ para todo $x \in X$.*

Demostración. 1. Por definición de $\ker_{\overline{\tau}}(x)$.

2. Claramente $\emptyset, X \in \overline{\tau}^*$. Sea $\{A_i\}_{i\in\Delta}$ una familia en $\overline{\tau}^*$, es decir, una familia de subconjuntos $\overline{\tau}$-cerrados de X. Por definición de topología y observación precedente, $\bigcup\{A_i : i \in \Delta\}$ y $\bigcap\{A_i : i \in \Delta\}$ son subconjuntos $\overline{\tau}$-cerrados de X, es decir, pertenecen a $\overline{\tau}^*$.

3. Sea $x \in X$. Dado que $\overline{\overline{\tau}} = \overline{\tau}$, por el teorema 3.3 de [34] se tiene que

$$y \in \mathrm{cl}_\tau(\{x\}) \Leftrightarrow y \in \mathrm{cl}_{\overline{\tau}}(\{x\}).$$

4. Sea $x \in X$. Por proposición 2.1.1 y *3*,

$$y \in \ker_\tau(x) \Leftrightarrow x \in \mathrm{cl}_\tau(\{y\}) \Leftrightarrow x \in \mathrm{cl}_{\overline{\tau}}(\{y\}) \Leftrightarrow y \in \ker_{\overline{\tau}}(x).$$

$\square$

El siguiente corolario es consecuencia directa de las proposiciones 1.2.6 y 2.1.5.

Corolario 2.1.6. *Consideremos los espacios* $(\mathrm{Spec}(R), \tau_Z)$ *y* $(\mathrm{Spec}(R), \overline{\tau_Z})$.

1. *Dado* $P \in \mathrm{Spec}(R)$, $(P)_0 = \mathrm{cl}_{\tau_Z}(\{P\}) = \mathrm{cl}_{\overline{\tau_Z}}(\{P\})$.

2. *Dado* $P \in \mathrm{Spec}(R)$, $\ker_{\tau_Z}(P) = \ker_{\overline{\tau_Z}}(P)$.

Observación 2.1.7. *Desde ahora en adelante para todo* $P \in \mathrm{Spec}(R)$, $\ker_{\tau_Z}(P)$ *y* $\ker_{\overline{\tau_Z}}(P)$ *se denotarán simplemente* $\ker(P)$.

2.2. Semianillos Gelfand

Definición 2.2.1. *Un semianillo es Gelfand si todo ideal primo está contenido en un único ideal maximal.*

Ejemplo 2.2.2. *El conjunto* $\mathbb{N}$ *con la suma y multiplicación usuales es un semianillo Gelfand puesto que tiene un único ideal maximal* $M = \mathbb{N} - \{1\} = (\{2, 3\})$.

Lema 2.2.3. *Si* A *es un conjunto de ideales primos de* R, *entonces* $\overline{A}^{\tau_Z} = (\bigcap A)_0$.

Demostración. Como $(\bigcap A)_0$ es un cerrado de $\mathrm{Spec}(R)$ y $A \subseteq (\bigcap A)_0$, tenemos que $\overline{A} \subseteq (\bigcap A)_0$.

Ahora, sea $P \in (\bigcap A)_0$. Puesto que $\overline{A}$ es un cerrado de $\mathrm{Spec}(R)$, $\overline{A} = (I)_0$ para algún ideal I de R. Como $A \subseteq \overline{A} = (I)_0$, todos los elementos de A contienen a I, y así $I \subseteq \bigcap A \subseteq P$. Por lo tanto, $P \in (I)_0 = \overline{A}$. $\square$

Durante el resto del capítulo $\mathrm{Max}(R)$ estará equipado con la topología de subespacio heredada de $(\mathrm{Spec}(R), \tau_Z)$.

Lema 2.2.4. *Consideremos* $(\mathrm{Spec}(R), \tau_Z)$. *Sean* R *un semianillo Gelfand y* $\mu : \mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Max}(R)$ *la función definida por* $\mu(P) = M_P$, *donde* M_P *es el único ideal maximal de* R *que contiene a* P. *Si* D *es un cerrado de* $\mathrm{Max}(R)$, $Q \in \mathrm{Spec}(R)$ *y* $Q \subseteq \bigcup\{M : M \in D\}$, *entonces* $\mu(Q) \in D$.

Demostración. Dado que R es un semianillo Gelfand, la función μ está bien definida. Como D es cerrado de $\mathrm{Max}(R)$, existe un cerrado A de $\mathrm{Spec}(R)$ tal que $D = A \cap \mathrm{Max}(R)$, y así $\bigcap A \subseteq \bigcap D$. Por otro lado, $Q + \bigcap D \subseteq \bigcup\{M : M \in D\}$, por lo que existe un ideal maximal M de R tal que $Q + \bigcap D \subseteq M$. Puesto que $\bigcap D \subseteq M$, tenemos que $\bigcap A \subseteq M$, y por el lema precedente, $M \in (\bigcap A)_0 = \overline{A} = A$. Por lo tanto, $\mu(Q) = M \in A \cap \mathrm{Max}(R)$. $\square$

Sea (X, τ) un espacio topológico y A un subespacio de X. Decimos que A es un *retracto* de X si existe una aplicación continua de X a A que es la identidad sobre A.

El siguiente teorema es conocido para anillos conmutativos ([12]).

Teorema 2.2.5. *Un semianillo* R *es Gelfand si y sólo si* $\mathrm{Max}(R)$ *es un retracto de* $(\mathrm{Spec}(R), \tau_Z)$.

Demostración. Sea $\mu : \mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Max}(R)$ la función definida por $\mu(P) = M_P$, donde M_P es el único ideal maximal que contiene a P. Dado que μ es la identidad sobre $\mathrm{Max}(R)$ basta mostrar que es continua.

Sean D un cerrado de $\mathrm{Max}(R)$, $B = \bigcup\{M : M \in D\}$ e $I = \bigcap\{P \in \mathrm{Spec}(R) : \mu(P) \in D\}$. Sea $P \in (I)_0$, es decir, $I \subseteq P$. Definamos $S = R \setminus B$, $T = R \setminus P$ y elijamos $s \in S$ y $t \in T$. Como $I \subseteq P$, tenemos que $t \notin I$, es decir, existe $P' \in \mu^{-1}(D)$ tal que $t \notin P'$. Puesto que $P' \subseteq \mu(P') \in D$, por definición de S, $s \notin P'$, y como P' es un ideal primo, $st \notin P'$. De esta manera, $st \notin I$. Por otro lado, como B es una unión de ideales primos, $1 \notin B$, y como P es un ideal primo, $1 \notin P$. Así, $1 \in S$ y $1 \in T$, por lo que $1 \in ST$. Dado que ST es cerrado bajo la multiplicación, ST es un subconjunto cerrado multiplicativo, que no intersecta a I. Por el Lema de Krull (1.2.16), existe un ideal primo Q que contiene a I y es disjunto de ST. Como $1 \in S$

y $1 \in T$, Q es disjunto de S y T, por lo que $Q \subseteq B$ y $Q \subseteq P$. Por el lema anterior, $\mu(P) = \mu(Q) \in D$, es decir, $P \in \mu^{-1}(D)$ y $(I)_0 \subseteq \mu^{-1}(D)$.

Ahora, si $P \in \mu^{-1}(D)$, entonces $P \supseteq I$. Luego, $\mu^{-1}(D) \subseteq (I)_0$. De esta forma $(I)_0 = \mu^{-1}(D)$, es decir, μ es continua.

Recíprocamente, sea ϕ una aplicación de $\mathrm{Spec}(R)$ a $\mathrm{Max}(R)$ continua y que es la identidad sobre $\mathrm{Max}(R)$. Sea $P \in \mathrm{Spec}(R)$ con $\phi(P) = M$. Luego, $P \in \phi^{-1}(\{M\})$. Por proposición 1.2.6, $\phi^{-1}(\{M\})$ es cerrado en $\mathrm{Spec}(R)$. Así, $\overline{\{P\}} \subseteq \phi^{-1}(\{M\})$. Si $M_1 \in \mathrm{Max}(R)$ y $P \subseteq M_1$, entonces por proposición 1.2.6, $M_1 \in (P)_0 = \overline{\{P\}}$. Por lo tanto, $M_1 \subseteq \phi^{-1}(\{M\})$, es decir, $M_1 = \phi(M_1) = M$, y así R es un semianillo Gelfand. $\square$

Durante el resto del capítulo, consideraremos $\mathrm{Spec}(R)$ con la topología de Zariski τ_Z y también con la menor topología Alexandroff que contiene a τ_Z, $\overline{\tau_Z}$, haciendo las distinciones adecuadas.

Lema 2.2.6. *Sea $P \in \mathrm{Spec}(R)$. Si $\ker(P)$ es $\overline{\tau_Z}$-cerrado, entonces $P \in \mathrm{Max}(R)$.*

Demostración. Sea P es un ideal primo de R. Supongamos que $\ker(P)$ es $\overline{\tau_Z}$-cerrado. Por corolario 2.1.6, $(P)_0 = \mathrm{cl}_{\overline{\tau_Z}}(P) \subseteq \ker(P)$, y por corolario 2.1.2, $\{P\} = (P)_0 \bigcap \ker(P)$. Por lo tanto, $\{P\} = (P)_0$, y por proposición 1.2.6, P es un ideal maximal de R. $\square$

Teorema 2.2.7. *Un semianillo R es Gelfand si y sólo si para todo $M \in \mathrm{Max}(R)$, $\ker(M)$ es $\overline{\tau_Z}$-clopen.*

Demostración. Sea $M \in \mathrm{Max}(R)$. Dado que por la proposición 2.1.5, $\ker(M)$ es $\overline{\tau_Z}$-abierto, basta probar que también es $\overline{\tau_Z}$-cerrado. Sean $P \in \ker(M)$ y $Q \in (P)_0$. Por corolario 2.1.2, $P \subseteq M$. Como $P \subseteq Q$ y R es un semianillo Gelfand, si M_Q es el único ideal maximal que contiene a Q, entonces $M_Q = M$. Puesto que $Q \subseteq M$, por corolario 2.1.2, $Q \in \ker(M)$. Luego, $(P)_0 \subseteq \ker(M)$, y así $\bigcup\{(P)_0 : P \in \ker(M)\} = \ker(M)$. Por corolario 2.1.6, $\ker(M)$ es $\overline{\tau_Z}$-cerrado.

Ahora, sean P es un ideal primo y M_1, M_2 ideales maximales que contienen a P. Por corolario 2.1.2, $P \in \ker(M_1)$ y $P \in \ker(M_2)$. Por corolario 2.1.6 e hipótesis, $(P)_0 =$

$\mathrm{cl}_{\overline{\tau_Z}}(P) \subseteq \ker(M_2)$. Además, como $M_1 \in (P)_0$, por corolario 2.1.2, $M_1 \in \ker(M_2)$, por lo que $M_1 = M_2$. Por lo tanto, R es un semianillo Gelfand. □

Lema 2.2.8. $\{\ker(M) : M \in \mathrm{Max}(R)\}$ *es un cubrimiento* $\overline{\tau_Z}$*-abierto de* $\mathrm{Spec}(R)$.

Demostración. Por proposición 2.1.5, $\ker(M)$ es $\overline{\tau_Z}$-abierto para todo $M \in \mathrm{Max}(R)$. Sea $P \in \mathrm{Spec}(R)$. Por proposición 1.1.3, existe un ideal maximal M que contiene a P, y por corolario 2.1.2 $P \in \ker(M)$. Por lo tanto, $\{\ker(M) : M \in \mathrm{Max}(R)\}$ es un cubrimiento $\overline{\tau_Z}$-abierto de $\mathrm{Spec}(R)$. □

Recordemos la siguiente definición:

Definición 2.2.9. *Un espacio topológico* (X, τ) *se dice nearly-compacto (respectivamente casi compacto) si todo cubrimiento* τ*-abierto* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ *de* X *contiene una subfamilia finita* $\{U_{\alpha_i} : i = 1, \ldots, n\}$ *tal que* $X = \bigcup_{i=1}^{n} int\left(\overline{U_{\alpha_i}}\right)$ *(respectivamente* $X = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}$*).*

Dadas dos topologías τ y τ' sobre un conjunto X, $\tau \wedge \tau'$ denotará la intersección de estas.

Teorema 2.2.10. *Sea* R *un semianillo Gelfand. Son equivalentes:*

a) $(\mathrm{Spec}(R), \overline{\tau_Z})$ *es compacto;*

b) $(\mathrm{Spec}(R), \overline{\tau_Z})$ *es nearly-compacto;*

c) $(\mathrm{Spec}(R), \overline{\tau_Z})$ *es casi-compacto;*

d) R *es un semianillo semilocal;*

e) $(\mathrm{Spec}(R), \overline{\tau_Z} \wedge \overline{\tau_Z}^*)$ *es compacto.*

Demostración. Es inmediato que $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c)$. Probemos $c) \Rightarrow d)$. Por el lema precedente $\{\ker(M) : M \in \mathrm{Max}(R)\}$ es un cubrimiento $\overline{\tau_Z}$-abierto de $\mathrm{Spec}(R)$. Por $c)$ y teorema 2.2.7, existe un subcubrimiento finito $\{\mathrm{cl}_{\overline{\tau_Z}}(\ker(M_i))\}_{i=1}^{n} = \{\ker(M_i)\}_{i=1}^{n}$

de $\operatorname{Spec}(R)$. Luego, si $M \in \operatorname{Max}(R)$, entonces $M \in \ker(M_i)$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por corolario 2.1.2, $M \subseteq M_i$. Así, existe un número finito de ideales maximales en R.

Demostremos $d) \Rightarrow a)$. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un cubrimiento $\overline{\tau_Z}$-abierto de $\operatorname{Spec}(R)$. Por $d)$, existe un número finito de ideales maximales M_i con $i = 1, \ldots, n$. Para todo M_i, existe α_i tal que $M_i \in U_{\alpha_i}$. Así, $\ker(M_i) \subseteq U_{\alpha_i}$. Dado que por el lema precedente $\{\ker(M_i)\}_{i=1}^n$ es un cubrimiento $\overline{\tau_Z}$-abierto de $\operatorname{Spec}(R)$, tenemos que $\{U_{\alpha_i}\}$ es un subcubrimiento finito de $\operatorname{Spec}(R)$.

Dado que $\overline{\tau_Z} \wedge \overline{\tau_Z}^* \subseteq \overline{\tau_Z}$, tenemos que $a) \Rightarrow e)$. Probemos $e) \Rightarrow a)$. Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es un cubrimiento $\overline{\tau_Z}$-abierto de $\operatorname{Spec}(R)$, entonces para cada $M \in \operatorname{Max}(R)$ existe $\alpha_M \in \Lambda$ tal que $M \in U_{\alpha_M}$. Luego, $\ker(M) \subseteq U_{\alpha_M}$. Como $\{\ker(M) : M \in \operatorname{Max}(R)\}$ es un cubrimiento $\overline{\tau_Z}$-abierto de $\operatorname{Spec}(R)$, por teorema 2.2.7, $\{\ker(M) : M \in \operatorname{Max}(R)\}$ es un cubrimiento $\overline{\tau_Z} \wedge \overline{\tau_Z}^*$-abierto de $\operatorname{Spec}(R)$. Así, existe un subcubrimiento finito $\{\ker(M_i) : M_i \in \operatorname{Max}(R); i = 1, \ldots, n\}$ de $\operatorname{Spec}(R)$, y por lo tanto $\{U_{\alpha_i} : i = 1, ..., n\}$ es un subcubrimiento finito de $\operatorname{Spec}(R)$. $\square$

Proposición 2.2.11. *Si R es un semianillo Gelfand y $(\operatorname{Spec}(R), \overline{\tau_Z})$ es conexo, entonces R es un semianillo local.*

Demostración. Sea M un ideal maximal de R. Por teorema 2.2.7, $\ker(M)$ es $\overline{\tau_Z}$-clopen, y como $\ker(M) \neq \emptyset$, por conexidad, $\operatorname{Spec}(R) = \ker(M)$. Ahora, si M_1 es un ideal maximal de R, entonces $M_1 \in \ker(M)$, y por corolario 2.1.2, $M_1 \subseteq M$. Por lo tanto, M es el único ideal maximal de R. $\square$

Lema 2.2.12. *Si R es un semianillo local, entonces $(\operatorname{Spec}(R), \overline{\tau_Z})$ es conexo.*

Demostración. Sean M el único ideal maximal de R, U un $\overline{\tau_Z}$-clopen no vacío de $\operatorname{Spec}(R)$ y $P \in \operatorname{Spec}(R)$. Si $P \in U$, entonces por corolario 2.1.6 $(P)_0 = \operatorname{cl}_{\overline{\tau_Z}}(P) \subseteq U$. Luego, $M \in U$, por lo que $\ker(M) \subseteq U$. Puesto que por el lema 2.2.8, $\ker(M) = \operatorname{Spec}(R)$, se sigue que $U = \operatorname{Spec}(R)$. Ahora, si $P \in \operatorname{Spec}(R) \setminus U = V$, entonces como V es $\overline{\tau_Z}$-clopen, análogamente se tiene que $V = \operatorname{Spec}(R)$. $\square$

Para continuar, recordemos que dos topologías sobre un espacio X son *complementarias* si la topología generada por la unión de estas es la discreta y su intersección es la trivial.

Lema 2.2.13. *El espacio* $(\operatorname{Spec}(R), \overline{\tau_Z})$ *es conexo si y solo si* $\overline{\tau_Z}$ *y* $\overline{\tau_Z}^*$ *son topologías complementarias.*

Demostración. Supongamos que $\overline{\tau_Z}$ y $\overline{\tau_Z}^*$ son topologías complementarias. Dado que la intersección de $\overline{\tau_Z}$ y $\overline{\tau_Z}^*$ corresponde a los $\overline{\tau_Z}$-clopen de $\operatorname{Spec}(R)$, tenemos que X y $\emptyset$ son los únicos $\overline{\tau_Z}$-clopen de $\operatorname{Spec}(R)$, es decir, $(\operatorname{Spec}(R), \overline{\tau_Z})$ es conexo.

Recíprocamente, dado que $(\operatorname{Spec}(R), \overline{\tau_Z})$ es un espacio T_0 ([34]), si $A \subseteq \operatorname{Spec}(R)$ es no vacío, entonces $A = \bigcup\{\{P\} : P \in A\} = \bigcup\{\operatorname{cl}_{\overline{\tau_Z}}(\{P\}) \cap \ker_{\overline{\tau_Z}}(P) : P \in A\}$, por lo que A pertenece a la topología generada por la unión de $\overline{\tau_Z}$ y $\overline{\tau_Z}^*$. Así, la topología generada por la unión de $\overline{\tau_Z}$ y $\overline{\tau_Z}^*$ es la discreta. Por último, como $(\operatorname{Spec}(R), \overline{\tau_Z})$ es conexo, la intersección de $\overline{\tau_Z}$ y $\overline{\tau_Z}^*$ es la topología trivial. □

Teorema 2.2.14. *Sea R un semianillo Gelfand. Son equivalentes:*

a) $(\operatorname{Spec}(R), \overline{\tau_Z})$ *es conexo;*

b) R es un semianillo local;

c) $\overline{\tau_Z}$ *y* $\overline{\tau_Z}^*$ *son topologías complementarias.*

Demostración. Por la proposición 2.2.11 y el lema 2.2.12, a) y b) son equivalentes. Por el lema precedente, a) y c) son equivalentes. □

2.3. m-Semianillos

Definición 2.3.1. *Diremos que un semianillo es un m-semianillo si cada ideal primo contiene un único ideal primo minimal.*

Ejemplo 2.3.2. *Tenemos que* $\mathbb{N}$ *con la suma y multiplicación usuales es un m-semianillo, donde* $\{0\}$ *es su único ideal primo minimal.*

Recordemos que un espacio topológico (X, τ) es *supercompacto* si X pertenece a todo cubrimiento abierto de X.

Lema 2.3.3. $\{(M)_0 : M \in \mathrm{Min}(R)\}$ *es un cubrimiento* $\overline{\tau_Z}^*$*-abierto de* $\mathrm{Spec}(R)$.

Demostración. Por la proposición 2.1.6, $(M)_0$ es un $\overline{\tau_Z}$-cerrado de $\mathrm{Spec}(R)$, es decir, es un $\overline{\tau_Z}^*$-abierto de $\mathrm{Spec}(R)$ para todo $M \in \mathrm{Min}(R)$. Sea $P \in \mathrm{Spec}(R)$. Por la proposición 1.1.3, existe un ideal primo minimal M que está contenido en P, o sea, $P \in (M)_0$. Por lo tanto, $\{(M)_0 : M \in \mathrm{Min}(R)\}$ es un cubrimiento $\overline{\tau_Z}^*$-abierto de $\mathrm{Spec}(R)$. □

Teorema 2.3.4. $(\mathrm{Spec}(R), \overline{\tau_Z}^*)$ *es un espacio supercompacto si y sólo si* R *tiene un único ideal primo minimal.*

Demostración. Sea $\Phi = \{(M)_0 : M \in \mathrm{Min}(R)\}$. Por el lema precedente Φ es un cubrimiento $\overline{\tau_Z}^*$-abierto de $\mathrm{Spec}(R)$. Por la supercompacidad del espacio $(\mathrm{Spec}(R), \overline{\tau_Z}^*)$, existe $(M)_0 \in \Phi$ tal que $\mathrm{Spec}(R) = (M)_0$. Luego, todo ideal primo minimal contiene a M, lo que implica que M es el único ideal primo minimal.

Ahora, sean Φ un cubrimiento $\overline{\tau_Z}^*$-abierto de $\mathrm{Spec}(R)$ y M el único ideal primo minimal de R. Luego, existe $A_M \in \Phi$ tal que $M \in A_M$. Dado que A_M es $\overline{\tau_Z}$-cerrado, por corolario 2.1.6, $A_M = \bigcup_{N \in A_M} \mathrm{cl}_{\overline{\tau}}(\{N\}) = \bigcup_{N \in A_M} (N)_0$, y así existe $N \in A_M$ tal que $M \in (N)_0$. De esta forma, $M = N$, y por el lema precedente $A_M = (N)_0 = \mathrm{Spec}(R)$, es decir, $(\mathrm{Spec}(R), \overline{\tau_Z}^*)$ es un espacio supercompacto. □

Lema 2.3.5. *Sea* $P \in \mathrm{Spec}(R)$*.* P *es minimal si y sólo si* $\ker(P) = \{P\}$.

Demostración. Sea $P \in \mathrm{Spec}(R)$. Tenemos que P no es minimal si y sólo si existe un ideal primo Q de R tal que $Q \subsetneq P$ si y sólo si (proposición 2.1.1) existe $Q \in \ker(P)$ tal que $Q \neq P$ si y sólo si $\ker(P) \neq \{P\}$. □

Lema 2.3.6. *Sea* $M \in \mathrm{Spec}(R)$*. Si* $(M)_0$ *es* $\overline{\tau_Z}$*-clopen, entonces* $M \in \mathrm{Min}(R)$.

Demostración. Sea P un ideal primo de R. Supongamos que $(P)_0$ es $\overline{\tau_Z}$-clopen. Luego, $\ker(P) \subseteq (P)_0$. Por corolario 2.1.2, $\{P\} = (P)_0 \cap \ker(P)$. Así, $\{P\} = \ker(P)$, y por el lema precedente P es un ideal primo minimal de R. □

Teorema 2.3.7. R *es un m-semianillo si y sólo si para cada* $M \in \mathrm{Min}(R)$, $(M)_0$ *es* $\overline{\tau_Z}$*-clopen.*

Demostración. Sea M un ideal primo minimal de R. Dado que $(M)_0$ es $\overline{\tau_Z}$-cerrado basta probar que $(M)_0$ es $\overline{\tau_Z}$-abierto. Sean $P \in (M)_0$ y $Q \in \ker(P)$. Por corolario 2.1.2, $Q \subseteq P$. Si M_Q es el único ideal primo minimal contenido en Q, entonces $M_Q \subseteq P$. Luego, M_Q es el único ideal primo minimal contenido en P, por lo que $M_Q = M$ y $Q \in (M)_0$. Por lo tanto, $(M)_0 = \bigcup_{P \in (M)_0} \ker(P)$, y así $(M)_0$ es $\overline{\tau_Z}$-abierto.

Recíprocamente, sean P un ideal primo de R y M_1, M_2 ideales primos minimales contenidos en P. Como $(M_1)_0$ y $(M_2)_0$ son $\overline{\tau_Z}$-clopen y $P \in (M_1)_0$, se sigue que $\ker(P) \subseteq (M_1)_0$. Dado que $P \in (M_2)_0$, por corolario 2.1.2 $M_2 \in \ker(P)$, y así $M_2 \in (M_1)_0$. De esta forma $M_1 = M_2$. □

Teorema 2.3.8. *R es un m-semianillo si y sólo si* $\mathrm{Min}(R)$ *es un retracto de* $(\mathrm{Spec}(R), \overline{\tau_Z})$.

Demostración. Supongamos que ϕ es una aplicación continua de $\mathrm{Spec}(R)$ a $\mathrm{Min}(R)$ que es la identidad sobre $\mathrm{Min}(R)$. Sea P un ideal primo de R y sean M_1 y M_2 ideales primos minimales contenidos en P. Por lema 2.3.5, $\{M_1\} = \ker(M_1)$ es un abierto de $\mathrm{Spec}(R)$, por lo que $\{M_1\}$ es un abierto en $\mathrm{Min}(R)$, y así $\phi^{-1}(\{M_1\})$ es un abierto de $\mathrm{Spec}(R)$ que contiene a P. Se sigue que $\ker(P) \subseteq \phi^{-1}(\{M_1\})$, y puesto que $M_2 \subseteq P$, por corolario 2.1.2, $M_2 \in \phi^{-1}(\{M_1\})$. Por lo tanto, $M_1 = M_2$ y R es m-semianillo.

Ahora, si R es un m-semianillo, entonces la función $\phi : \mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Min}(R)$, $\phi(P) = m_p$, donde m_p es el único ideal primo minimal contenido en P, está bien definida. Claramente ϕ es la identidad sobre $\mathrm{Min}(R)$. Sea A un abierto de $\mathrm{Min}(R)$. Luego,

$$\phi^{-1}(A) = \bigcup \{\phi^{-1}(\{M\}) : M \in A\} = \bigcup \{(M)_0 : M \in A\}.$$

Por teorema 2.3.7, $\phi^{-1}(A)$ es un abierto de $\mathrm{Spec}(R)$. Así, ϕ es continua. □

Lema 2.3.9. *Sea R un m-semianillo. Si* $(\mathrm{Spec}(R), \overline{\tau_Z}^*)$ *es un espacio casi compacto, entonces R tiene un número finito de ideales primos minimales.*

Demostración. Por lema 2.3.3 $\{(M)_0 : M \in \mathrm{Min}(R)\}$ es un cubrimiento $\overline{\tau_Z}^*$-abierto de $\mathrm{Spec}(R)$. Por hipótesis existe una subcolección finita $\{(M_i)_0 : i = 1, \ldots, n\}$ tal que $\mathrm{Spec}(R) = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{(M_i)_0} = \bigcup_{i=1}^{n} (M_i)_0$. Si $M \in \mathrm{Min}(R)$, entonces $M \in (M_i)_0$ para algún i, es decir, $M_i \subseteq M$. Por lo tanto, R tiene un número finito de ideales primos minimales. $\square$

Teorema 2.3.10. *Sea R un m-semianillo. Son equivalentes:*

a) $(\mathrm{Spec}(R), \overline{\tau_Z}^*)$ *es compacto;*

b) $(\mathrm{Spec}(R), \overline{\tau_Z}^*)$ *es nearly-compact;*

c) $(\mathrm{Spec}(R), \overline{\tau_Z}^*)$ *es casi-compacto;*

d) R tiene un número finito de ideales primos minimales;

e) $(\mathrm{Spec}(R), \overline{\tau_Z} \wedge \overline{\tau_Z}^*)$ *es compacto.*

Demostración. Por definición se tiene que $a \Rightarrow b \Rightarrow c$ y $a \Rightarrow e$. Por el lema precedente, $c \Rightarrow d$. Probemos $d \Rightarrow a$ (respectivamente $e \Rightarrow a$). Sea $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento $\overline{\tau_Z}^*$-abierto de $\mathrm{Spec}(R)$. Para cada ideal primo minimal M existe U_{α_M} tal que $M \in U_{\alpha_M}$. Por teorema 2.3.7, $(M)_0 \subseteq \{U_{\alpha_M}\}$ y por lema 2.3.3, $\{(M)_0 : M \in \mathrm{Min}(R)\}$ es un cubrimiento $\overline{\tau_Z}^*$-abierto (respectivamente $\overline{\tau_Z} \wedge \overline{\tau_Z}^*$-abierto por teorema 2.3.7) de $\mathrm{Spec}(R)$. Por d (respectivamente e) existe un número finito de ideales primos minimales $M_1, ..., M_k$ tal que $\bigcup\{(M_i)_0 : i = 1, ..., k\} = \mathrm{Spec}(R)$. Así, $\{U_{\alpha_{M_i}}\}$ es un subcubrimiento finito de $\mathrm{Spec}(R)$. $\square$

Proposición 2.3.11. *Si R es un m-semianillo y* $(\mathrm{Spec}(R), \overline{\tau_Z})$ *es un espacio conexo, entonces existe un único ideal primo minimal.*

Demostración. Si $M \in \mathrm{Min}(R)$, entonces por teorema 2.3.7, $(M)_0$ es un $\overline{\tau_Z}$-clopen. Dado que $(M)_0$ es no vacío, por conexidad $\mathrm{Spec}(R) = (M)_0$, por lo que M es el único ideal primo minimal de R. $\square$

Lema 2.3.12. *Si R tiene un único ideal primo minimal, entonces* $(\mathrm{Spec}(R), \overline{\tau_Z})$ *es un espacio conexo.*

Demostración. Sea M el único ideal primo minimal de R y $U \subseteq \operatorname{Spec}(R)$ un $\overline{\tau_Z}$-clopen no vacío. Si $M \in U$, entonces $(M)_0 = \operatorname{cl}_{\overline{\tau_Z}}(\{M\}) \subseteq U$. Por lema 2.3.3, $\operatorname{Spec}(R) = (M)_0 = U$. Ahora, si $M \in V = \operatorname{Spec}(R) \setminus U$, entonces V es un $\overline{\tau_Z}$-clopen no vacío y $(M)_0 \subseteq V$. Por lema 2.3.3, $\operatorname{Spec}(R) = (M)_0 = V$. □

Recordemos que un espacio topológico (X, τ) es *irreducible* si todo abierto es denso en X, o equivalentemente, si todo par de abiertos se intersecta.

Lema 2.3.13. $(\operatorname{Spec}(R), \tau_Z)$ *es un espacio irreducible si y sólo si* $\eta(0)$ *es un ideal primo de* R*. En tal caso,* $\eta(0)$ *es el único ideal primo minimal de* R*.*

Demostración. Supongamos que $(\operatorname{Spec}(R), \tau_Z)$ es un espacio irreducible y probemos que $\eta(0)$ es un ideal primo de R. Sea $ab \in \eta(0)$. Luego, $ab \in P$ para todo $P \in \operatorname{Spec}(R)$. Supongamos que $a \notin \eta(0)$ y $b \notin \eta(0)$, es decir, existen $P, Q \in \operatorname{Spec}(R)$ tales que $a \notin P$ y $b \notin Q$, o equivalentemente, $P \in D_0(a)$ y $Q \in D_0(b)$. Por hipótesis, existe un ideal primo $W \in D_0(a) \cap D_0(b)$, por lo que $a \notin W$ y $b \notin W$, lo que contradice que $ab \in W$.

Supongamos que $\eta(0)$ es un ideal primo de R y probemos que $(\operatorname{Spec}(R), \tau_Z)$ es un espacio irreducible. Sean $D_0(a)$ y $D_0(b)$ dos τ_Z-abiertos. Sean $P \in D_0(a)$ y $Q \in D_0(b)$. Dado que $\eta(0) \subseteq P$ y $\eta(0) \subseteq Q$, tenemos que $\eta(0) \in D_0(a) \cap D_0(b)$. Por lo tanto, $(\operatorname{Spec}(R), \tau_Z)$ es irreducible.

La unicidad de $\eta(0)$ se deduce de la definición. □

Teorema 2.3.14. *Son equivalentes:*

a) R *es un m-semianillo y* $(\operatorname{Spec}(R), \overline{\tau_Z})$ *es un espacio conexo;*

b) R *tiene un único ideal primo minimal;*

c) $(\operatorname{Spec}(R), \tau_Z)$ *es un espacio irreducible;*

d) $\eta(0)$ *es el único ideal primo minimal;*

e) $\overline{\tau_Z}$ *y* $\overline{\tau_Z}^*$ *son topologías complementarias.*

Demostración. Por la proposición 2.3.11 y el lema 2.3.12, $a) \Leftrightarrow b)$. Por el lema precedente, $c) \Leftrightarrow d)$. Por el lema 2.2.13, $a) \Leftrightarrow e)$. Finalmente, por definición de $\eta(0)$, $b) \Leftrightarrow d)$. $\square$

Capítulo 3

La Topología Ultrafiltro y la Topología Parche

Introducción

La primera topología definida sobre $\operatorname{Spec}(A)$, donde A es un anillo conmutativo con identidad, registrada en la literatura matemática es la topología de Zariski. Algunos años después una topología más fina que la de Zariski fue considerada sobre este mismo espacio, esta topología se conoce como topología parche ([27]) o topología constructible ([3]). Se conoce que $\operatorname{Spec}(A)$ con la topología parche es Hausdorff ([3]), a diferencia que con la topología de Zariski es Hausdorff si y sólo si todo ideal primo de A es maximal.

En el primer capítulo, se estudió la topología de Zariski sobre $\operatorname{Spec}(R)$, donde R es un semianillo, de modo que se logró extender esta topología para la estructura más general de semianillo. Similar al caso de anillos, en este capítulo se define la topología parche para semianillos y se muestra que la topología parche coincide con otra topología, llamada la topología ultrafiltro ([15]).

3.1. La Topología Parche

Vimos que la topología de Zariski tiene interesantes propiedades relacionadas a aspectos topológicos en el estudio del conjunto de ideales primos de semianillos, por ejemplo, $(\mathrm{Spec}(R), \tau_Z)$ es un espacio compacto. Por otro lado, en el capítulo 1, se mostró que $(\mathrm{Spec}(R), \tau_Z)$ sólo es T_0, y es Hausdorff si y sólo si todo ideal primo de R es maximal. Por lo anterior, muchos autores han considerado una topología más fina, conocida como *topología parche* ([27]) o *topología constructible* ([3] o [24]), la cual puede ser definida a partir de la topología de Zariski.

Consideremos dos colecciones de subconjuntos de $\mathrm{Spec}(R)$:

(1) los conjuntos $(I)_0$;

(2) los conjuntos $D_0(a)$, donde $a \in R$.

Definición 3.1.1. *La topología parche es la menor topología en la cual los conjuntos anteriores son cerrados. Denotemos esta τ_P.*

A partir de la definición podemos ver que los conjuntos $D_0(a)$ son también τ_P-abiertos, o sea, son clopen, y que la topología parche es un refinamiento de la topología de Zariski. Mostremos que el espacio $(\mathrm{Spec}(R), \tau_P)$ es Hausdorff.

Proposición 3.1.2. $(\mathrm{Spec}(R), \tau_P)$ *es un espacio Hausdorff.*

Demostración. Sean $P, Q \in \mathrm{Spec}(R)$ con $P \neq Q$. Sea $a \in P \setminus Q$. Luego, $P \in (a)_0$ y $Q \in D_0(a)$. Como $D_0(a)$ es un abierto básico de la topología de Zariski, también es abierto en la topología parche. Por lo tanto, hemos encontrado dos abiertos que separan P y Q. □

3.2. La Topología Ultrafiltro

Definiremos otra topología sobre $\mathrm{Spec}(R)$ introduciendo la noción de ultrafiltro.

Definición 3.2.1. *Sea S un conjunto cualquiera no vacío. Diremos que una colección de subconjuntos de S es un ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre S si satisface las siguientes condiciones:*

(1) si $A \in \mathscr{U}$ y $A \subseteq B \subseteq S$, entonces $B \in \mathscr{U}$;

(2) si $A, B \in \mathscr{U}$, entonces $A \cap B \in \mathscr{U}$;

(3) si $A \cup B \in \mathscr{U}$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \in \mathscr{U}$ ó $B \in \mathscr{U}$.

Recordemos algunas de sus propiedades.

Proposición 3.2.2. *Sean S un conjunto y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre S. Se tiene que*

1. $S \in \mathscr{U}$.

2. $\emptyset \notin \mathscr{U}$.

3. Si $A \cup B \in \mathscr{U}$, entonces $A \in \mathscr{U}$ o $B \in \mathscr{U}$.

4. Si $A \subseteq S$, entonces $A \in \mathscr{U}$ ó $S \backslash A \in \mathscr{U}$.

Demostración. 1. Por (1) todo ultrafiltro sobre un conjunto S cumple que $S \in \mathscr{U}$.

2. Dado que $S \in \mathscr{U}$, por (3), $\emptyset \notin \mathscr{U}$.

3. Si $A \cup B \in \mathscr{U}$ y puesto que $A \cup B = (A \backslash B) \cup B$, entonces por (3), $A \backslash B \in \mathscr{U}$ ó $B \in \mathscr{U}$. Ahora, si $A \setminus B \in \mathscr{U}$, entonces por (1), $A \in \mathscr{U}$. Si $B \in \mathscr{U}$, entonces A puede estar o no en $\mathscr{U}$.

4. Si $A \subseteq S$, entonces por (1), $A \cup (S \backslash A) = S \in \mathscr{U}$. Luego, por (3), $A \in \mathscr{U}$ ó $(S \backslash A) \in \mathscr{U}$.

□

Observamos que un ultrafiltro sobre un conjunto S es siempre un subconjunto propio del conjunto potencia de S. .

Proposición 3.2.3. *Sean S un conjunto y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre S.*

1. *Si* $A \in \mathscr{U}$*, entonces* $\mathscr{U}|_A = \{A \cap U : U \in \mathscr{U}\}$ *es un ultrafiltro sobre* A*.*

2. *Si* $\sigma : \Delta \to S$ *es una biyección y* $\mathscr{V} = \{\sigma^{-1}(U) : U \in \mathscr{U}\}$*, entonces* $\mathscr{V}$ *es un ultrafiltro sobre* Δ*.*

3. *Si* $\sigma : S \to \Delta$ *es una sobreyección, entonces* $\sigma(\mathscr{U})$ *es un ultrafiltro sobre* Δ*.*

Demostración.

1. Supongamos que $A \in \mathscr{U}$. Sea $X \in \mathscr{U}|_A$ y $X \subseteq Y \subseteq A$. Tenemos que $X = A \cap B$, con $B \in \mathscr{U}$. Como $A \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro, $X = A \cap B \in \mathscr{U}$. Luego, $Y \in \mathscr{U}$ y así $Y = A \cap Y \in \mathscr{U}|_A$.

   Sean $X, Y \in \mathscr{U}|_A$. Luego, existen $B, B' \in \mathscr{U}$ tal que

   $$X \cap Y = (A \cap B) \cap (A \cap B') = A \cap (B \cap B').$$

   Como $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro, $B \cap B' \in \mathscr{U}$ y así $X \cap Y \in \mathscr{U}|_A$.

   Sea $X \cup Y \in \mathscr{U}|_A$ con $X \cap Y = \emptyset$. Por definición existe $B \in \mathscr{U}$ tal que $X \cup Y = A \cap B$. Como $A \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ es ultrafiltro, $A \cap B \in \mathscr{U}$, y así $X \cup Y \in \mathscr{U}$. Dado que $\mathscr{U}$ es ultrafiltro, $X \in \mathscr{U}$ ó $Y \in \mathscr{U}$. Por lo tanto, $X = A \cap X \in \mathscr{U}|_A$ ó $Y = A \cap Y \in \mathscr{U}|_A$.

2. Sea $A \in \mathscr{V}$ y $A \subseteq B \subseteq \Delta$. Luego, existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $A = \sigma^{-1}(U) \subseteq B \subseteq \Delta$. Puesto que σ es una biyección, tenemos que $U \subseteq \sigma(B) \subseteq \sigma(\Delta) = S$. Como $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro sobre S, $\sigma(B) \in \mathscr{U}$, y por definición $B = \sigma^{-1}(\sigma(B)) \in \mathscr{V}$.

   Sean $A, B \in \mathscr{V}$. Existen $U_1, U_2 \in \mathscr{U}$ tales que $A = \sigma^{-1}(U_1)$ y $B = \sigma^{-1}(U_2)$. Como $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro sobre S, $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{U}$, por lo que $A \cap B = \sigma^{-1}(U_1 \cap U_2) \in \mathscr{V}$.

   Por último, sean $A, B \subseteq \Delta$ con $A \cup B \in \mathscr{V}$ y $A \cap B = \emptyset$. Existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $A \cup B = \sigma^{-1}(U)$, y por la biyectividad de σ, $\sigma(A) \cup \sigma(B) = \sigma(A \cup B) = U \in \mathscr{U}$. Dado que $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$, $\sigma(A) \in \mathscr{U}$ ó $\sigma(B) \in \mathscr{U}$, es decir, $A \in \mathscr{V}$ ó $B \in \mathscr{V}$.

3. Similar a 2.

$\square$

Definición 3.2.4. *Sean $C \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre C. El conjunto*

$$P_{\mathscr{U}} = \{a \in R : (a)_0 \cap C \in \mathscr{U}\}$$

es llamado punto límite ultrafiltro de C.

Proposición 3.2.5. *Sean $C \subsetneq \mathrm{Spec}(R)$ y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre C. Tenemos que $P_{\mathscr{U}} \in \mathrm{Spec}(R)$.*

Demostración. Debemos probar que $P_{\mathscr{U}}$ es un ideal primo de R.

Sean $a, b \in P_{\mathscr{U}}$. Puesto que $(a)_0 \cap C \in \mathscr{U}$ y $(b)_0 \cap C \in \mathscr{U}$, por lema 1.2.3 y definición de ultrafiltro tenemos que

$$(a+b)_0 \cap C = ((a)_0 \cap (b)_0) \cap C = ((a)_0 \cap C) \cap ((b)_0 \cap C) \in \mathscr{U}.$$

Así, $a + b \in P_{\mathscr{U}}$.

Sean $a \in P_{\mathscr{U}}$ y $b \in R$. Puesto que $(a)_0 \cap C \in \mathscr{U}$ y $(a)_0 \cap C \subseteq ((a)_0 \cup (b)_0) \cap C$, por lema 1.2.3 y definición de ultrafiltro tenemos que $(ab)_0 \cap C = ((a)_0 \cup (b)_0) \cap C \in \mathscr{U}$. De esta manera, $ab \in P_{\mathscr{U}}$.

Por último, sean $a, b \in R$ tal que $ab \in P_{\mathscr{U}}$. Por lema 1.2.3,

$$((a)_0 \cap C) \cup ((b)_0 \cap C) = ((a)_0 \cup (b)_0) \cap C = (ab)_0 \cap C \in \mathscr{U},$$

y por proposición precedente $(a)_0 \cap C \in \mathscr{U}$ o $(b)_0 \cap C \in \mathscr{U}$. Así, $a \in P_{\mathscr{U}}$ o $b \in P_{\mathscr{U}}$. $\square$

Definición 3.2.6. *Dado un ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre un conjunto S, diremos que $\mathscr{U}$ es principal o fijo si existe $s \in S$ tal que $\mathscr{U} = \{A \subseteq S : s \in A\}$ y lo denotaremos por $\mathscr{U}_s$. Un ultrafiltro que no es principal se dice no principal o libre.*

Proposición 3.2.7 ([10])**.** *Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto S.*

1. *$\mathscr{U}$ es principal si y sólo si $\bigcap \mathscr{U} \neq \emptyset$.*

2. *Si S es un conjunto finito, entonces $\mathscr{U}$ es principal.*

Observación 3.2.8. *De la proposición anterior deducimos que sobre un conjunto finito sólo existen ultrafiltros principales.*

Se puede usar el Lema de Zorn para probar que existen ultrafiltros no principales sobre todo conjunto infinito ([10]).

Proposición 3.2.9. *Sean* $C \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ *y* $\mathscr{U}_P$ *un ultrafiltro principal sobre* C*. Tenemos que* $P_{\mathscr{U}_P} = P$*.*

Demostración. Por definición de ultrafiltro y punto límite ultrafiltro se tiene que

$$a \in P_{\mathscr{U}_P} \Leftrightarrow (a)_0 \cap C \in \mathscr{U}_P \Leftrightarrow (a)_0 \in \mathscr{U}_P \Leftrightarrow P \in (a)_0 \Leftrightarrow a \in P.$$

□

Observación 3.2.10. *Por observación anterior y proposición precedente asumiremos que los ultrafiltros son libres (en particular, los conjuntos son infinitos). De otra forma, los resultados son de fácil verificación.*

Definición 3.2.11. *Sea* $C \subseteq \mathrm{Spec}(R)$*. Diremos que* C *es un cerrado ultrafiltro si contiene todos sus puntos límite ultrafiltro.*

Teorema 3.2.12. *Los subconjuntos cerrados ultrafiltro son los cerrados de una topología sobre* $\mathrm{Spec}(R)$.

Demostración. Por la proposición 3.2.5, $\mathrm{Spec}(R)$ contiene todos sus puntos límite ultrafiltro. Luego, $\mathrm{Spec}(R)$ es un cerrado ultrafiltro y evidentemente $\emptyset$ también lo es.

Supongamos que $C_1, \ldots, C_n$ son cerrados ultrafiltro de $\mathrm{Spec}(R)$. Sean $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre C. Mostraremos que $P_{\mathscr{U}} \in C$. Por proposición 3.2.2, al menos uno de los C_i está en $\mathscr{U}$. Supongamos que $C_1 \in \mathscr{U}$. Por proposición 3.2.3, $\mathscr{U}|_{C_1} = \{C_1 \cap B : B \in \mathscr{U}\}$ es un ultrafiltro sobre C_1.

Por otro lado, $P_{\mathscr{U}|_{C_1}} = P_{\mathscr{U}}$. De hecho, sea $d \in P_{\mathscr{U}|_{C_1}}$, esto es $(d)_0 \cap C_1 \in \mathscr{U}|_{C_1}$. Dado que existe $B \in \mathscr{U}$ tal que $(d)_0 \cap C_1 = C_1 \cap B$, $C_1 \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}$ es ultrafiltro, $(d)_0 \cap C_1 \in \mathscr{U}$. Como $(d)_0 \cap C_1 \subseteq (d)_0 \cap C$, tenemos que $(d)_0 \cap C \in \mathscr{U}$. Así, $d \in P_{\mathscr{U}}$. Sea $d \in P_{\mathscr{U}}$. Como $(d)_0 \cap C \in \mathscr{U}$ y $(d)_0 \cap C_1 = ((d)_0 \cap C) \cap C_1 \in \mathscr{U}|_{C_1}$, se tiene que $d \in P_{\mathscr{U}|_{C_1}}$.

Como C_1 es cerrado ultrafiltro, $P_{\mathscr{U}} = P_{\mathscr{U}|_{C_1}} \in C_1 \subseteq C$. Por lo tanto, $P_{\mathscr{U}} \in C$, es decir, C es cerrado ultrafiltro.

Supongamos que $\{C_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una colección de cerrados ultrafiltro de $\mathrm{Spec}(R)$. Sean $C = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre C. Mostremos que $P_{\mathscr{U}} \in C$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, la colección $\mathscr{U}_\lambda = \{B \subseteq C_\lambda : B \cap C \in \mathscr{U}\}$ es un ultrafiltro sobre C_λ, su prueba es similar a la del numeral 1 de la proposición 3.2.3. Además, como

$$d \in P_{\mathscr{U}_\lambda} \Leftrightarrow (d)_0 \cap C_\lambda \in \mathscr{U}_\lambda \Leftrightarrow (d)_0 \cap C_\lambda \cap C \in \mathscr{U} \Leftrightarrow (d)_0 \cap C \in \mathscr{U} \Leftrightarrow d \in P_{\mathscr{U}},$$

tenemos que $P_{\mathscr{U}_\lambda} = P_{\mathscr{U}}$.

Dado que C_λ es cerrado ultrafiltro, $P_{\mathscr{U}_\lambda} \in C_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$, por lo que $P_{\mathscr{U}_\lambda} \in C$. Como $P_{\mathscr{U}_\lambda} = P_{\mathscr{U}}$, $P_{\mathscr{U}} \in C$, o sea, C es cerrado ultrafiltro. $\square$

Definición 3.2.13. *Los conjuntos cerrados ultrafiltro corresponden a los conjuntos cerrados de una topología sobre* $\mathrm{Spec}(R)$ *llamada la topología ultrafiltro que denotaremos por* τ_U.

Es natural preguntarse como se compara esta topología con las otras topologías que hemos definido sobre $\mathrm{Spec}(R)$. Probaremos que la topología ultrafiltro coincide con la topología parche sobre $\mathrm{Spec}(R)$.

3.3. La Igualdad de las Topologías Parche y Ultrafiltro

Proposición 3.3.1. *Si* $C \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ *es cerrado en la topología parche, entonces* C *es cerrado en la topología ultrafiltro.*

Demostración. Consideremos por separado cada clase de cerrados para la topología parche.

Sea $C = (I)_0$ para algún ideal I de R. Sean $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre C, $a \in I$ y $P \in C$. Luego, $a \in P$, y así $C \subseteq (a)_0$. Por proposición 3.2.2, $C \in \mathscr{U}$, implicando que

$(a)_0 \cap C = C \in \mathscr{U}$. Así, $a \in P_{\mathscr{U}}$ e $I \subseteq P_{\mathscr{U}}$, es decir, $P_{\mathscr{U}} \in C$. Por lo tanto, C es cerrado ultrafiltro.

Sea $C = D_0(a)$ para algún $a \in R$ y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre C. Como $(a)_0 \cap C = \emptyset$, $(a)_0 \cap C \notin \mathscr{U}$. Luego, $a \notin P_{\mathscr{U}}$ y, por definición, $P_{\mathscr{U}} \in C$. Por lo tanto, C es cerrado ultrafiltro.

□

Hemos probado que la topología ultrafiltro es más fina que la topología parche.

Definición 3.3.2. *Sean (X, τ) un espacio topológico, $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre X y $x \in X$. Decimos que $\mathscr{U}$ converge a x si toda vecindad abierta de x está en $\mathscr{U}$.*

Una conocida caracterización de compacidad dice que un espacio topológico (X, τ) es compacto si y sólo si todo ultrafiltro sobre X converge a un elemento de X ([14]).

Teorema 3.3.3. $(\mathrm{Spec}(R), \tau_U)$ *es un espacio compacto.*

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre $\mathrm{Spec}(R)$. Queremos probar que $\mathscr{U}$ τ_U-converge a $P_{\mathscr{U}}$. Supongamos que $\mathscr{U}$ no τ_U-converge a $P_{\mathscr{U}}$, es decir, existe A τ_U-abierto que contiene a $P_{\mathscr{U}}$ tal que $A \notin \mathscr{U}$. Luego, $C = \mathrm{Spec}(R) \backslash A \in \mathscr{U}$ y por proposición 3.2.3, $\mathscr{U}|_C = \{U \cap C : U \in \mathscr{U}\}$ es un ultrafiltro sobre C. Como C es τ_U-cerrado, $P_{\mathscr{U}|_C} \in C$.

Probemos que $P_{\mathscr{U}|_C} = P_{\mathscr{U}}$. En efecto, si $a \in P_{\mathscr{U}}$, entonces $(a)_0 = (a)_0 \cap \mathrm{Spec}(R) \in \mathscr{U}$, y de esta manera, $(a)_0 \cap C \in \mathscr{U}|_C$, es decir, $a \in P_{\mathscr{U}|_C}$. Si $b \in P_{\mathscr{U}|_C}$, entonces $(b)_0 \cap C \in \mathscr{U}|_C$, por lo que existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $(b)_0 \cap C = U \cap C$. Dado que $U \cap C \in \mathscr{U}$, $(b)_0 \cap C \in \mathscr{U}$, por lo cual $(b)_0 = (b)_0 \cap \mathrm{Spec}(R) \in \mathscr{U}$, o sea, $b \in P_{\mathscr{U}}$. Así, $P_{\mathscr{U}|_C} = P_{\mathscr{U}}$.

Por lo tanto, $P_{\mathscr{U}} \in C$, lo cual es una contradicción. □

Antes de probar el último resultado recordemos lo siguiente:

Proposición 3.3.4 ([14], Corollary 3.1.14)**.** *Sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre un conjunto X con τ_1 más fina que τ_2. Si (X, τ_1) es un espacio compacto y (X, τ_2) es un espacio Hausdorff, entonces $\tau_1 = \tau_2$.*

Corolario 3.3.5. *La topología ultrafiltro y la topología parche son iguales sobre* $\mathrm{Spec}(R)$.

Demostración. Por proposiciones 3.1.2 y 3.3.1 y el teorema anterior, $(\mathrm{Spec}(R), \tau_P)$ es un espacio Hausdorff, τ_U es más fina que τ_P y $(\mathrm{Spec}(R), \tau_U)$ es un espacio compacto. Así, por la proposición precedente, $\tau_U = \tau_P$. $\square$

Capítulo 4

La Topología $\mathscr{F}$-límite

Introducción

El objetivo principal de este capítulo es definir nuevas topologías sobre $\mathrm{Spec}(R)$, más finas que la topología parche.

Al comienzo del capítulo definimos el $\mathscr{F}$-límite de una familia de ideales primos y damos sus propiedades básicas. Luego, se estudia la topología ultrafiltro (parche) utilizando $\mathscr{F}$-límites. En la tercera sección se utilizan sucesiones de ideales primos para definir nuevas topologías sobre $\mathrm{Spec}(R)$. En la cuarta sección se introducen nuevas topologías sobre la compactificación de Stone-Cech de los números naturales que nos ayudarán a probar que las nuevas topologías sobre $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$ no son compactas. Finalmente, las propiedades básicas de las nuevas topologías son explicadas en la última sección.

4.1. El $\mathscr{F}$-límite de una Sucesión de Ideales Primos

Definición 4.1.1. *Dada una familia* $\{P_i\}_{i\in\Delta}$ *en* $\mathrm{Spec}(R)$ *y* $\mathscr{F}$ *un ultrafiltro sobre* Δ*, definimos el* $\mathscr{F}$*-límite de la familia de ideales primos* P_i *por*

$$\mathscr{F} - \lim_{i\in\Delta} P_i = \{a \in R : \{i \in \Delta : a \in P_i\} \in \mathscr{F}\}.$$

Observación 4.1.2. *En la definición anterior se permite la repetición de los ideales primos indexados.*

Cabe destacar que el $\mathscr{F}$-límite puede ser definido para cualquier familia de ideales de un semianillo no necesariamente primos.

Proposición 4.1.3. *Sea $\{P_i : i \in \Delta\} \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ y $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre Δ.*

1. *Si $A_i, B_i \in \mathrm{Spec}(R)$ y $A_i \subseteq B_i$ para todo $i \in \Delta$, entonces $\mathscr{F} - \mathrm{lím}_{i\in\Delta} A_i \subseteq \mathscr{F} - \mathrm{lím}_{i\in\Delta} B_i$.*

2. *$\mathscr{F} - \mathrm{lím}_{i\in\Delta} P_i \in \mathrm{Spec}(R)$.*

3. *$\mathscr{F} - \mathrm{lím}_{i\in\Delta} P_i = \bigcup_{A\in\mathscr{F}} \left(\bigcap_{i\in A} P_i\right)$.*

Demostración.

1. Sea $a \in \mathscr{F} - \mathrm{lím}_{i\in\Delta} A_i$, es decir, $\{i \in \Delta : a \in A_i\} \in \mathscr{F}$. Como $A_i \subseteq B_i$ para todo $i \in \Delta$, tenemos que $\{i \in \Delta : a \in A_i\} \subseteq \{i \in \Delta : a \in B_i\}$. Dado que $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro sobre Δ, $\{i \in \Delta : a \in B_i\} \in \mathscr{F}$, o sea, $a \in \mathscr{F} - \mathrm{lím}_{i\in\Delta} B_i$.

2. Mostraremos que $\mathscr{F} - \mathrm{lím}_{i\in\Delta} P_i$ es un ideal primo de R. Para ello, sean $a, b \in \mathscr{F} - \mathrm{lím}_{i\in\Delta} P_i$ y $r \in R$. Por definición, $\{i \in \Delta : a \in P_i\} \in \mathscr{F}$ y $\{i \in \Delta : b \in P_i\} \in \mathscr{F}$. Además, como $\{i \in \Delta : a \in P_i\} \cap \{i \in \Delta : b \in P_i\} \subseteq \{i \in \Delta : a + b \in P_i\}$ y $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro sobre Δ, $\{i \in \Delta : a \in P_i\} \cap \{i \in \Delta : b \in P_i\} \in \mathscr{F}$ y $\{i \in \Delta : a + b \in P_i\} \in \mathscr{F}$, es decir, $a + b \in \mathscr{F} - \mathrm{lím}_{i\in\Delta} P_i$.

   Por otro lado, como $\{i \in \Delta : a \in P_i\} \subseteq \{i \in \Delta : ar \in P_i\}$, tenemos que $\{i \in \Delta : ar \in P_i\} \in \mathscr{F}$, es decir, $ar \in \mathscr{F} - \mathrm{lím}_{i\in\Delta} P_i$.

   Supongamos ahora que $1 \in \mathscr{F} - \mathrm{lím}_{i\in\Delta} P_i$, esto es, $\{i \in \Delta : 1 \in P_i\} \in \mathscr{F}$. Como cada P_i es un ideal primo de R, $\emptyset = \{i \in \Delta : 1 \in P_i\} \in \mathscr{F}$, lo cual no puede ser porque $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro.

   Por último, supongamos que $ab \in \mathscr{F} - \mathrm{lím}_{i\in\Delta} P_i$. Dado que $\{i \in \Delta : ab \in P_i\} \in \mathscr{F}$ y $\{i \in \Delta : ab \in P_i\} \subseteq \{i \in \Delta : a \in P_i\} \cup \{i \in \Delta : b \in P_i\}$, tenemos que $\{i \in \Delta : a \in P_i\} \cup \{i \in \Delta : b \in P_i\} \in \mathscr{F}$. Luego, por proposición 3.2.2

$\{i \in \Delta : a \in P_i\} \in \mathscr{F}$ o $\{i \in \Delta : b \in P_i\} \in \mathscr{F}$, es decir, $a \in \mathscr{F} - \text{lím}_{i\in\Delta} P_i$ o $b \in \mathscr{F} - \text{lím}_{i\in\Delta} P_i$.

3. Sea $a \in \mathscr{F} - \text{lím}_{i\in\Delta} P_i$, esto es $A = \{i \in \Delta : a \in P_i\} \in \mathscr{F}$. Luego, $a \in \bigcap_{i\in A} P_i \subseteq \bigcup_{A\in\mathscr{F}} \left(\bigcap_{i\in A} P_i\right)$.

   Ahora, sea $a \in \bigcup_{A\in\mathscr{F}} \left(\bigcap_{i\in A} P_i\right)$. Así, existe $A \in \mathscr{F}$ tal que $a \in \bigcap_{i\in A} P_i$, es decir, $a \in P_i$ para todo $i \in A$. Como $A \subseteq \{i \in \Delta : a \in P_i\}$ y $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro sobre Δ, tenemos que $\{i \in \Delta : a \in P_i\} \in \mathscr{F}$. De esta manera $a \in \mathscr{F} - \text{lím}_{i\in\Delta} P_i$.

□

Observación 4.1.4. *Sea $\{P_i\}_{i\in\Delta}$ una familia en $\text{Spec}(R)$. Si $\mathscr{F}_k$ es un ultrafiltro principal sobre Δ, entonces por la proposición anterior*

$$\mathscr{F}_k - \underset{i\in\Delta}{\text{lím}}\, P_i = \bigcup_{A\in\mathscr{F}_k} \left(\bigcap_{i\in A} P_i\right) = \bigcup_{\{A\subseteq\Delta : k\in A\}} \left(\bigcap_{i\in A} P_i\right) = P_k.$$

Dado lo anterior, desde ahora sólo consideraremos ultrafiltros libres a menos que se diga lo contrario, ya que de otra forma los resultados son fáciles de probar.

Recordemos que, si $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro sobre un conjunto Δ y $A \in \mathscr{F}$, entonces $\mathscr{F}|_A = \{A \cap F : F \in \mathscr{F}\}$ es un ultrafiltro sobre A (proposición 3.2.3).

Teorema 4.1.5. *Sean Δ un conjunto infinito, $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre Δ y $\{P_i : i \in \Delta\} \subseteq \text{Spec}(R)$.*

1. *Si $A \in \mathscr{F}$, entonces*

$$\mathscr{F} - \underset{i\in\Delta}{\text{lím}}\, P_i = \mathscr{F}|_A - \underset{i\in A}{\text{lím}}\, P_i.$$

2. *Supongamos que $\Gamma \subseteq \Delta$ y $\mathscr{G}$ es un ultrafiltro sobre Γ tal que $\mathscr{F} = \{F \subseteq \Delta : \exists G \in \mathscr{G}, G \subseteq F\}$. Luego,*

$$\mathscr{F} - \underset{i\in\Delta}{\text{lím}}\, P_i = \mathscr{G} - \underset{i\in\Gamma}{\text{lím}}\, P_i.$$

3. *Sean Γ un conjunto infinito y $\sigma : \Delta \to \Gamma$ una función sobreyectiva tal que para cada $j \in \Gamma$, si $\sigma(i) = j$ entonces $P_j = P_i$. Luego,*

$$\mathscr{F} - \underset{i\in\Delta}{\text{lím}}\, P_i = \mathscr{G} - \underset{j\in\Gamma}{\text{lím}}\, P_j,$$

para $\mathscr{G} = \sigma(\mathscr{F})$.

Demostración. 1. Tenemos que

$$\begin{aligned} a \in \mathscr{F} - \lim_{i \in \Delta} P_i &\Rightarrow \{i \in \Delta : a \in P_i\} \in \mathscr{F} \\ &\Rightarrow A \cap \{i \in \Delta : a \in P_i\} \in \mathscr{F}|_A \\ &\Rightarrow \{i \in A : a \in P_i\} \in \mathscr{F}|_A \\ &\Rightarrow a \in \mathscr{F}|_A - \lim_{i \in A} P_i. \end{aligned}$$

Así, $\mathscr{F} - \lim_{i \in \Delta} P_i \subseteq \mathscr{F}|_A - \lim_{i \in A} P_i$.

Sea $a \in \mathscr{F}|_A - \lim_{i \in A} P_i$ y supongamos que $a \notin \mathscr{F} - \lim_{i \in \Delta} P_i$, es decir, $\{i \in \Delta : a \in P_i\} \notin \mathscr{F}$. Por proposición 3.2.2, $\Delta \setminus \{i \in \Delta : a \in P_i\} = \{i \in \Delta : a \notin P_i\} \in \mathscr{F}$. Luego, $\{i \in A : a \notin P_i\} = A \cap \{i \in \Delta : a \notin P_i\} \in \mathscr{F}|_A$, pero por hipótesis $\{i \in A : a \in P_i\} \in \mathscr{F}|_A$ (contradicción). Así, $\mathscr{F}|_A - \lim_{i \in A} P_i \subseteq \mathscr{F} - \lim_{i \in \Delta} P_i$.

2. Observemos que $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro sobre Δ. Por definición de $\mathscr{F}$, $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$, $\Gamma \in \mathscr{F}$ y $\mathscr{F}|_\Gamma = \mathscr{G}$. Por 1.,

$$\mathscr{G} - \lim_{i \in \Gamma} P_i = \mathscr{F}|_\Gamma - \lim_{i \in \Gamma} P_i = \mathscr{F} - \lim_{i \in \Delta} P_i.$$

3. Por proposición 3.2.3, $\mathscr{G}$ es un ultrafiltro sobre Γ. Notemos que $\{i \in \Delta : a \in P_i\} \in \mathscr{F}$ si y sólo si $\{j \in \Gamma : a \in P_j\} \in \mathscr{G}$. En efecto, si $\{i \in \Delta : a \in P_i\} \in \mathscr{F}$, entonces $\{\sigma(i) \in \Gamma : a \in P_i\} = \{j \in \Gamma : a \in P_j\} \in \sigma(\mathscr{F}) = \mathscr{G}$. Ahora, si $\{j \in \Gamma : a \in P_j\} \in \mathscr{G} = \sigma(\mathscr{F})$, entonces $\{j \in \Gamma : a \in P_j\} = \sigma(F)$ para algún $F \in \mathscr{F}$. Como σ es sobreyectiva, $F \subseteq \sigma^{-1}(\{j \in \Gamma : a \in P_j\}) = \{i \in \Delta : a \in P_i\} \subseteq \Delta$. Dado que $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro sobre Δ, tenemos que $\{i \in \Delta : a \in P_i\} \in \mathscr{F}$.

   Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a \in \mathscr{F} - \lim_{i \in \Delta} P_i &\Leftrightarrow \{i \in \Delta : a \in P_i\} \in \mathscr{F} \\ &\Leftrightarrow \{j \in \Gamma : a \in P_j\} \in \mathscr{G} \\ &\Leftrightarrow a \in \mathscr{G} - \lim_{j \in \Gamma} P_j. \end{aligned}$$

$\square$

4.2. La Topología Ultrafiltro

En el capítulo anterior definimos la topología ultrafiltro sobre $\operatorname{Spec}(R)$. Definamos esta topología en el contexto de $\mathscr{F}$-límites de familias de ideales primos.

Lema 4.2.1. *Si $C \subseteq \operatorname{Spec}(R)$ es no vacío y $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro sobre C, entonces existe una familia $\{P_i : i \in \Delta\} \subseteq C$ y un ultrafiltro $\mathscr{G} = \sigma^{-1}(\mathscr{F})$ sobre Δ, con $\sigma : \Delta \to C$ una biyección, tal que $P_{\mathscr{F}} = \mathscr{G} - \lim_{i\in\Delta} P_i$.*

Demostración. Sean $\sigma : \Delta \to C$ una biyección y $\mathscr{G} = \{\sigma^{-1}(F) : F \in \mathscr{F}\}$. Por proposición 3.2.3, $\mathscr{G}$ es un ultrafiltro sobre Δ.

Para cada $i \in \Delta$, sea $\sigma(i) = P_i$. Notemos que si $a \in R$, entonces

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}((a)_0 \cap C) = \sigma^{-1}((a)_0) \cap \sigma^{-1}(C) = \sigma^{-1}((a)_0) &= \{i \in \Delta : \sigma(i) \in (a)_0\}\\ &= \{i \in \Delta : a \in \sigma(i)\}\\ &= \{i \in \Delta : a \in P_i\}.\end{aligned}$$

Luego,

$$a \in P_{\mathscr{F}} \Leftrightarrow (a)_0 \cap C \in \mathscr{F} \Leftrightarrow \sigma^{-1}((a)_0 \cap C) = \{i \in \Delta : a \in P_i\} \in \mathscr{G} \Leftrightarrow a \in \mathscr{G} - \lim_{i\in\Delta} P_i,$$

Por lo tanto, $P_{\mathscr{F}} = \mathscr{G} - \lim_{i\in\Delta} P_i$. ◻

Teorema 4.2.2. *Tenemos que $C \subseteq \operatorname{Spec}(R)$ es cerrado ultrafiltro si y sólo si para cada conjunto infinito Δ con $\{P_i : i \in \Delta\} \subseteq C$ y $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre Δ, se tiene que $\mathscr{F} - \lim_{i\in\Delta} P_i \in C$.*

Demostración. Sea $C \subseteq \operatorname{Spec}(R)$ un cerrado ultrafiltro. Supongamos que Δ es un conjunto infinito, $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro sobre Δ y $P_i \in C$ cualquiera sea $i \in \Delta$. Por la aseveración 3 del teorema 4.1.5, asumamos que $|\Delta| \leq |C|$. Ahora, agreguemos elementos a Δ para que $\Delta' = \Delta \cup \Gamma$ y C tengan la misma cardinalidad, y consideremos el ultrafiltro $\mathscr{F}' = \{E \subseteq \Delta' : \exists F \in \mathscr{F}, F \subseteq E\}$ sobre Δ'. Observemos que $\Delta \in \mathscr{F}'$ y $\mathscr{F}'|_\Delta = \mathscr{F}$. Aumentemos la cardinalidad de Γ para definir una sobreyección

$\sigma : \Delta' \to C$ que satisfaga $\sigma(i) = P_i$ para todo $i \in \Delta$. Por proposición 3.2.3, $\sigma(\mathscr{F}') = \{\sigma(F) : F \in \mathscr{F}'\} = \mathscr{G}$ es un ultrafiltro sobre C. Así,

$$\begin{aligned} a \in \mathscr{F} - \lim_{i\in\Delta} P_i &\Longrightarrow \{i \in \Delta : a \in P_i\} \in \mathscr{F} \\ &\Longrightarrow \{i \in \Delta' : a \in \sigma(i)\} \in \mathscr{F}' \\ &\Longrightarrow \{\sigma(i) \in C : a \in \sigma(i)\} \in \mathscr{G} \\ &\Longrightarrow (a)_0 \cap C \in \mathscr{G} \\ &\Longrightarrow a \in P_{\mathscr{G}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} a \in P_{\mathscr{G}} &\Longrightarrow V(a) \cap C \in \mathscr{G} \\ &\Longrightarrow \sigma^{-1}(V(a) \cap C) = \{i \in \Delta' : a \in \sigma(i)\} \in \mathscr{F}' \\ &\Longrightarrow \{i \in \Delta : a \in P_i\} \in \mathscr{F} \\ &\Longrightarrow a \in \mathscr{F} - \lim_{i\in\Delta} P_i \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathscr{F} - \lim_{i\in\Delta} P_i = P_{\mathscr{G}} \in C$.

Sean $C \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ que satisface las condiciones del teorema y $\mathscr{G}$ un ultrafiltro sobre C. Por Lema 4.2.1, existen $\{P_i : i \in \Delta\} \subseteq C$ y un ultrafiltro $\mathscr{F}$ sobre Δ tal que $P_{\mathscr{G}} = \mathscr{F} - \lim_{i\in\Delta} P_i \in C$. Así, C es un cerrado ultrafiltro. $\square$

En el capítulo anterior probamos que $(\mathrm{Spec}(R), \tau_U)$ es compacto. A continuación daremos una demostración alternativa de este resultado utilizando $\mathscr{F}$-límites.

Teorema 4.2.3. $(\mathrm{Spec}(R), \tau_U)$ *es un espacio compacto.*

Demostración. Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre $\mathrm{Spec}(R)$. Probaremos que $\mathscr{F}$ τ_U-converge a $P_{\mathscr{F}}$. Sea $V = \mathrm{Spec}(R)\backslash C$ una vecindad de $P_{\mathscr{F}}$, con C un cerrado ultrafiltro de $\mathrm{Spec}(R)$. Por el lema 4.2.1, existe una familia $\{P_i : i \in \Delta\} \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ y un ultrafiltro $\mathscr{G} = \sigma^{-1}(\mathscr{F})$ sobre Δ, con σ una biyección de Δ a $\mathrm{Spec}(R)$, tal que $P_{\mathscr{F}} = \mathscr{G} - \lim_{i\in\Delta} P_i$. Sea $A = \{i \in \Delta : P_i \in C\}$. Si $A \in \mathscr{G}$, entonces por los teoremas 4.1.5 y 4.2.2, $P_{\mathscr{F}} = \mathscr{G} - \lim_{i\in\Delta} P_i = \mathscr{G}|_A - \lim_{i\in A} P_i \in C$ (contradicción). Luego, $B = \Delta\backslash A \in \mathscr{G}$.

Ahora, $B = \sigma^{-1}(F)$ para algún $F \in \mathscr{F}$, por lo que $\{P_i : i \in B\} = \{\sigma(i) : i \in B\} = \sigma(B) \in \mathscr{F}$ y $\{P_i : i \in B\} \subseteq V$. Dado que $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro, $V \in \mathscr{F}$. Así, $\mathscr{F}$ τ_U-converge a $P_{\mathscr{F}}$. □

4.3. La Topología $\mathscr{F}$-límite

En esta sección definiremos una nueva topología sobre $\mathrm{Spec}(R)$ que surge naturalmente de los resultados de la sección anterior.

Definición 4.3.1. *Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$. Decimos que $C \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ es $\mathscr{F}$-cerrado si para toda sucesión $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en C tenemos que $\mathscr{F} - \text{lím}_{n\in\mathbb{N}} P_n \in C$.*

Teorema 4.3.2. *Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$. Los subconjuntos $\mathscr{F}$-cerrados son los cerrados de una topología sobre $\mathrm{Spec}(R)$.*

Demostración. Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathrm{Spec}(R)$. Por proposición 4.1.3, $\mathscr{F} - \text{lím}_{n\in\mathbb{N}} P_n \in \mathrm{Spec}(R)$. Así, $\mathrm{Spec}(R)$, y evidentemente $\emptyset$, son subconjuntos $\mathscr{F}$-cerrados. Sean C_1 y C_2 subconjuntos $\mathscr{F}-$cerrados de $\mathrm{Spec}(R)$. Sea $C = C_1 \cup C_2$ y sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en C. Como $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : P_n \in C_1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : P_n \in C_2\} \in \mathscr{F}$, por proposición 3.2.2 $\{n \in \mathbb{N} : P_n \in C_1\} \in \mathscr{F}$ o $\{n \in \mathbb{N} : P_n \in C_2\} \in \mathscr{F}$. Asumamos que $A = \{n \in \mathbb{N} : P_n \in C_1\} \in \mathscr{F}$. Por definición y teorema 4.1.5, $\mathscr{F} - \text{lím}_{n\in\mathbb{N}} P_n = \mathscr{F}|_A - \text{lím}_{n\in A} P_n \in C_1 \subseteq C$. Considerando la definición, es fácil ver que la intersección de $\mathscr{F}-$cerrados es $\mathscr{F}-$cerrado. □

Definición 4.3.3. *Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$. Los conjuntos $\mathscr{F}$-cerrados definen una topología sobre $\mathrm{Spec}(R)$ llamada la $\mathscr{F}$-topología que denotaremos por $\tau_{\mathscr{F}}$.*

El siguiente corolario es consecuencia directa de la definición precedente y del teorema 4.2.2.

Corolario 4.3.4. *Dado un ultrafiltro $\mathscr{F}$ sobre Δ, $\tau_U \subseteq \tau_{\mathscr{F}}$ sobre $\mathrm{Spec}(R)$.*

Proposición 4.3.5. *Si $\mathscr{F}$ un ultrafiltro principal sobre $\mathbb{N}$, entonces $\tau_{\mathscr{F}}$ es la topología discreta.*

Demostración. Sea $C \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ no vacío y $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en C. Por la observación 4.1.4, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathscr{F} - \lim_{n\in\mathbb{N}} P_n = P_k \in C$. Por lo tanto, C es $\mathscr{F}$-cerrado y $\tau_{\mathscr{F}}$ es la topología discreta. □

Proposición 4.3.6. $(\mathrm{Spec}(R), \tau_{\mathscr{F}})$ *es un espacio Hausdorff para todo ultrafiltro* $\mathscr{F}$ *sobre* $\mathbb{N}$.

Demostración. Por proposición 3.1.2, $(\mathrm{Spec}(R), \tau_U)$ es un espacio Hausdorff. Puesto que por corolario 4.3.4, $\tau_U \subseteq \tau_{\mathscr{F}}$, tenemos que $(\mathrm{Spec}(R), \tau_{\mathscr{F}})$ es un espacio Hausdorff. □

Ahora mostraremos que $(\mathrm{Spec}(R), \tau_{\mathscr{F}})$ es un espacio contablemente compacto (Hausdorff y todo subconjunto infinito tiene un punto de acumulación) para todo ultrafiltro $\mathscr{F}$ sobre $\mathbb{N}$. Primero probaremos un resultado que se basa en la prueba del teorema 4.2.3.

Lema 4.3.7. *Sea* $\mathscr{F}$ *un ultrafiltro sobre* $\mathbb{N}$. *Si* $\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ *es un conjunto infinito, entonces* $\mathscr{F} - \lim_{n\in\mathbb{N}} P_n$ *es un punto de acumulación de* $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración. Sea $V = \mathrm{Spec}(R)\backslash C$ un abierto que contiene a $\mathscr{F} - \lim_{n\in\mathbb{N}} P_n$. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : P_n \in C\}$. Si $A \in \mathscr{F}$, entonces por teorema 4.1.5, $\mathscr{F} - \lim_{n\in\mathbb{N}} P_n = \mathscr{F}|_A - \lim_{n\in A} P_n \in C$ (contradicción). Por proposición 3.2.2 $B = \mathbb{N}\backslash A \in \mathscr{F}$ y así $\{P_n : n \in B\} \subseteq V$. Por lo tanto, $\mathscr{F} - \lim_{n\in\mathbb{N}} P_n$ es un punto de acumulación de $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$. □

Teorema 4.3.8. *Si* $\mathscr{F}$ *es un ultrafiltro sobre* $\mathbb{N}$, *entonces* $(\mathrm{Spec}(R), \tau_{\mathscr{F}})$ *es un espacio contablemente compacto.*

Demostración. Por proposición 4.3.6 $(\mathrm{Spec}(R), \tau_F)$ es un espacio Hausdorff y por el lema anterior todo subconjunto infinito de $\mathrm{Spec}(R)$ tiene un punto de acumulación. Por lo tanto, $(\mathrm{Spec}(R), \tau_{\mathscr{F}})$ es un espacio contablemente compacto. □

Dado que un espacio es contablemente compacto si y sólo si todo cubrimiento abierto contable del espacio tiene un subcubrimiento finito ([14], Theorem 3.10.3), todo espacio contablemente compacto contable es compacto.

Corolario 4.3.9. *Si* $\operatorname{Spec}(R)$ *es contable, entonces* $\tau_{\mathscr{F}} = \tau_U$ *para todo ultrafiltro* $\mathscr{F}$ *sobre* $\mathbb{N}$.

Demostración. Como $\tau_U \subseteq \tau_{\mathscr{F}}$, $(\operatorname{Spec}(R), \tau_{\mathscr{F}})$ es compacto y $(\operatorname{Spec}(R), \tau_U)$ es Hausdorff, por proposición 3.3.4 tenemos que $\tau_{\mathscr{F}} = \tau_U$. $\square$

Este es el caso para $\mathbb{N}$, dado que $\operatorname{Spec}(\mathbb{N}) = \{(p) : p \text{ es un número primo}\} \cup \{(2,3)\} \cup \{0\}$.

4.4. La $\mathscr{F}$-topología sobre $\beta(\mathbb{N})$

Sea $\beta(\mathbb{N})$ el conjunto de todos los ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$. Cada número natural n se identifica con el ultrafiltro principal $\mathscr{G}_n = \{A \subseteq \mathbb{N} : n \in A\}$. De esta forma $\mathbb{N}$ se puede considerar como un subconjunto de $\beta(\mathbb{N})$. Denotemos $\mathbb{N}^* = \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$. En este contexto, $\mathbb{N}$ son los ultrafiltros principales sobre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}^*$ son los ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$.

Recordemos que si $\mathbb{N}$ está equipado con la topología discreta, entonces $\beta(\mathbb{N})$ corresponde a la compactificación de Stone-Čech de $\mathbb{N}$.

La cardinalidad de $\mathbb{R}$ se denotará por $\mathfrak{c}$.

Dado $A \subseteq \mathbb{N}$, sea $\widehat{A} = \{p \in \beta(\mathbb{N}) : A \in p\}$ y $A^* = \widehat{A} \setminus A = \{p \in \mathbb{N}^* : A \in p\}$. En la siguiente proposición recopilaremos resultados que ocuparemos más adelante. Para un estudio más detallado de $\beta(\mathbb{N})$ ver [10] o [26] .

Proposición 4.4.1. *Sea* $A \subseteq \mathbb{N}$.

1. $\{\widehat{A} : A \subseteq \mathbb{N}\}$ *es una base para* $\beta(\mathbb{N})$.

2. $\widehat{A}$ *es un subconjunto clopen básico de* $\beta(\mathbb{N})$.

3. A^* *es un subconjunto clopen básico de* $\mathbb{N}^*$.

4. $\widehat{A} = \operatorname{cl}_{\beta(\mathbb{N})} A$.

5. $\mathbb{N}^*$ *es un subconjunto cerrado de* $\beta(\mathbb{N})$.

6. $\mathbb{N}^*$ *es homeomorfo a* $\beta(\mathbb{N})$.

7. $|\beta(\mathbb{N})| = 2^{\mathfrak{c}}$.

8. *Toda función continua de* $\mathbb{N}$ *a* $[0,1]$ *se puede extender a una función continua de* $\beta(\mathbb{N})$ *a* $[0,1]$.

La noción de punto $\mathscr{F}$-límite ha sido estudiada por varios matemáticos, como Bernstein [7], Frolík [16] y Furstenberg [18] siendo una herramienta muy importante en el estudio de la compacidad contable de un espacio.

Definición 4.4.2. *Sean* (X,τ) *un espacio topológico y* $\mathscr{F}$ *un ultrafiltro sobre* $\mathbb{N}$. *Diremos que* $x \in X$ *es un punto* $\mathscr{F}$*-límite de una sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* X*, que denotaremos por* $x = \mathscr{F} - \lim_{n\to\infty} x_n$*, si para toda vecindad* V *de* x *se cumple que* $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \in \mathscr{F}$.

Proposición 4.4.3. *Sea* $\mathscr{F}$ *un ultrafiltro sobre* $\mathbb{N}$. *El punto* $\mathscr{F}-$*límite de una sucesión en un espacio Hausdorff es único cuando existe.*

Demostración. Sean (X,τ) un espacio Hausdorff, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$. Supongamos que existen $x, y \in X$ distintos tales que $x = \mathscr{F} - \lim_{n\to\infty} x_n$ e $y = \mathscr{F} - \lim_{n\to\infty} x_n$. Luego, existen dos vecindades disjuntas V y W de x e y respectivamente. Por definición, $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \in \mathscr{F}$ y $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in W\} \in \mathscr{F}$, por lo que $\emptyset = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V \cap W\} = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \cap \{n \in \mathbb{N} : x_n \in W\} \in \mathscr{F}$, lo cual contradice que $\mathscr{F}$ sea un ultrafiltro. $\square$

Observación 4.4.4. *Durante el resto del capítulo todos los espacios topológicos serán considerados Hausdorff.*

Proposición 4.4.5 ([20])**.** *Sea* (X,τ) *un espacio topológico.*

1. $x \in X$ *es un punto de acumulación de un conjunto infinito* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *si y sólo si existe un ultrafiltro* $\mathscr{F}$ *sobre* $\mathbb{N}$ *tal que* $x = \mathscr{F} - \lim_{n\to\infty} x_n$.

2. *Si* $\mathscr{F}$ *es un ultrafiltro sobre* $\mathbb{N}$ *y* $x = \mathscr{F} - \lim_{n\to\infty} x_n$*, entonces* $x \in \mathrm{cl}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$.

3. *Si (X,τ) es un espacio compacto, entonces toda sucesión en X tiene un punto $\mathscr{F}$-límite en X para todo ultrafiltro $\mathscr{F}$ sobre $\mathbb{N}$.*

Proposición 4.4.6. *Sean $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ y $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\beta(\mathbb{N})$. El conjunto $\{A\subseteq\mathbb{N} : \{n\in\mathbb{N} : A\in p_n\}\in\mathscr{F}\}$ es un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ y*

$$\mathscr{F}-\lim_{n\to\infty} p_n = \{A\subseteq\mathbb{N} : \{n\in\mathbb{N} : A\in p_n\}\in\mathscr{F}\}. \tag{4.4.1}$$

Demostración. Probemos que el conjunto $x=\{A\subseteq\mathbb{N} : \{n\in\mathbb{N} : A\in p_n\}\in\mathscr{F}\}$ es un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$.

1. Sean $A\in x$ y $A\subseteq B\subseteq\mathbb{N}$. Por definición, $\{n\in\mathbb{N} : A\in p_n\}\in\mathscr{F}$. Como p_n es un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$, tenemos que $\{n\in\mathbb{N} : A\in p_n\}\subseteq\{n\in\mathbb{N} : B\in p_n\}$. Además, como $\mathscr{F}$ también es un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$, $\{n\in\mathbb{N} : B\in p_n\}\in\mathscr{F}$, es decir, $B\in x$.

2. Sean $A,B\in x$. Por definición, $\{n\in\mathbb{N} : A\in p_n\}\in\mathscr{F}$ y $\{n\in\mathbb{N} : B\in p_n\}\in\mathscr{F}$. Así, como $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$, $\{n\in\mathbb{N} : A\in p_n\}\cap\{n\in\mathbb{N} : B\in p_n\}\in\mathscr{F}$. Ahora, dado que $\{n\in\mathbb{N} : A\in p_n\}\cap\{n\in\mathbb{N} : B\in p_n\}\subseteq\{n\in\mathbb{N} : A\cap B\in p_n\}$, tenemos que $\{n\in\mathbb{N} : A\cap B\in p_n\}\in\mathscr{F}$, o sea, $A\cap B\in x$.

3. Sea $A\cup B\in x$ tal que $A\cap B=\emptyset$. Como $\{n\in\mathbb{N} : A\cup B\in p_n\}\in\mathscr{F}$ y $\{n\in\mathbb{N} : A\cup B\in p_n\}\subseteq\{n\in\mathbb{N} : A\in p_n\}\cup\{n\in\mathbb{N} : B\in p_n\}$, tenemos que $\{n\in\mathbb{N} : A\in p_n\}\cup\{n\in\mathbb{N} : B\in p_n\}\in\mathscr{F}$. Puesto que p_n es un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$, la unión anterior es disjunta. De esta forma, $\{n\in\mathbb{N} : A\in p_n\}\in\mathscr{F}$ ó $\{n\in\mathbb{N} : B\in p_n\}\in\mathscr{F}$, es decir, $A\in x$ ó $B\in x$.

Veamos que x satisface la definición de $\mathscr{F}$-límite de la sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $\widehat{B}=\{p\in\beta(\mathbb{N}) : B\in p\}$ una vecindad básica de x. Por definición, $B\in x$, es decir, $\{n\in\mathbb{N} : p_n\in\widehat{B}\}=\{n\in\mathbb{N} : B\in p_n\}\in\mathscr{F}$. ☐

Nuestra próximo objetivo será definir una nueva topología sobre $\beta(\mathbb{N})$ usando los puntos $\mathscr{F}$-límite de sucesiones en $\beta(\mathbb{N})$.

Definición 4.4.7. *Diremos que $C \subseteq \beta(\mathbb{N})$ es $\mathscr{F}$-cerrado si para toda sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en C se tiene que $\mathscr{F} - \text{lím}_{n\to\infty} p_n \in C$.*

Teorema 4.4.8. *Los subconjuntos $\mathscr{F}$-cerrados definen una topología sobre $\beta(\mathbb{N})$.*

Demostración. Análoga a la demostración del teorema 4.3.2. □

Definición 4.4.9. *Los subconjuntos $\mathscr{F}$-cerrados definen una topología sobre $\beta(\mathbb{N})$ llamada $\mathscr{F}$-topología que denotaremos por $\sigma_{\mathscr{F}}$.*

Fijemos un ultrafiltro $\mathscr{F}$ sobre $\mathbb{N}$. Para $X \subseteq \beta(\mathbb{N})$, definimos

$$(X)_{\mathscr{F}} = \left\{\mathscr{F} - \lim_{n\to\infty} p_n : (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es una sucesión en } X\right\}.$$

Observación 4.4.10. *Tenemos que $X \subseteq (X)_{\mathscr{F}} \subseteq \text{cl}_{\beta(\mathbb{N})} X$. La primera inclusión se tiene ya que si tomamos $x \in X$, entonces por definición $x = \mathscr{F} - \text{lím}_{n\to\infty} x$. Para la segunda inclusión, si tomamos $x \in (X)_{\mathscr{F}}$, entonces por definición de punto de clausura $x \in \text{cl}_{\beta(\mathbb{N})} X$.*

Ahora, para $X \subseteq \beta(\mathbb{N})$ arbitrario, definimos $X_0 = X$, $X_1 = (X_0)_{\mathscr{F}}$ y, para todo número cardinal $\theta \leq \omega_1$, definimos inductivamente

$$X_\theta = \bigcup_{\alpha<\theta} X_\alpha \text{ si } \theta \text{ es límite, y}$$

$$X_\theta = (X_{\theta-1})_{\mathscr{F}} \text{ si } \theta \text{ no es límite.}$$

Proposición 4.4.11. *Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$. Si $X \subseteq \beta(\mathbb{N})$ es $\mathscr{F}$-cerrado, entonces $X_\theta = X$ para todo $\theta \leq \omega_1$.*

Demostración. Por definición de $\mathscr{F}$-cerrado $(X)_{\mathscr{F}} \subseteq X$, y por la observación anterior $X_0 = X = (X)_{\mathscr{F}} = (X_0)_{\mathscr{F}}$. Sea $\gamma < \omega_1$ y supongamos que $X_\theta = X$ para todo $\theta < \gamma$.

Caso 1. Si γ es límite, entonces $X_\gamma = \bigcup_{\theta<\gamma} X_\theta = X$.

Caso 2. Supongamos que $\gamma = \theta + 1$. Luego, $X_\gamma = (X_\theta)_{\mathscr{F}} = (X)_{\mathscr{F}} = X$.

Por lo tanto, $X_\theta = X$ para todo $\theta \leq \omega_1$. □

Teorema 4.4.12. *Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$. Si $X \subseteq \beta(\mathbb{N})$, entonces $\mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}} X = X_{\omega_1} \subseteq \mathrm{cl}_{\beta(\mathbb{N})} X$.*

Demostración. Sea $X \subseteq \beta(\mathbb{N})$. Primero probaremos inductivamente que $X_{\omega_1} \subseteq \mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}} X$. Es claro que $X_0 = X \subseteq \mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}} X$. Sea $\gamma < \omega_1$ y supongamos que $X_\theta \subseteq \mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}} X$ para todo $\theta < \gamma$.

Caso 1. Si γ es límite, entonces $X_\gamma = \bigcup_{\theta<\gamma} X_\theta \subseteq \mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}} X$.

Caso 2. Supongamos que $\gamma = \theta + 1$. Por hipótesis, $X_\theta \subseteq \mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}} X$, y dado que $\mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}} X$ es $\mathscr{F}$-cerrado, tenemos que $X_\gamma = (X_\theta)_{\mathscr{F}} \subseteq (\mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}} X)_{\mathscr{F}} = \mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}} X$.

Así, $X_{\omega_1} \subseteq \mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}} X$.

Ahora probaremos que X_{ω_1} es $\mathscr{F}$-cerrado. Sea $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X_{ω_1}. Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $\theta_n < \omega$ tal que $p_n \in X_{\theta_n}$. Sea $\theta = \sup\{\theta_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por definición, $\mathscr{F} - \mathrm{lím}_{n\to\infty} p_n \in X_{\theta+1} \subseteq X_{\omega_1}$. De esta forma X_{ω_1} es $\mathscr{F}$-cerrado. Además, como $X \subseteq X_{\omega_1}$, se tiene que $\mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}} X \subseteq X_{\omega_1}$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}} X = X_{\omega_1}$.

Por la observación 4.4.10 $(X)_{\mathscr{F}} \subseteq \mathrm{cl}_{\beta(\mathbb{N})} X$, e inductivamente se puede mostrar que $X_{\omega_1} \subseteq \mathrm{cl}_{\beta(\mathbb{N})} X$. De esta manera, concluimos que $\mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}} X = X_{\omega_1} \subseteq \mathrm{cl}_{\beta(\mathbb{N})} X$. □

Corolario 4.4.13. *$C \subseteq \beta(\mathbb{N})$ es $\mathscr{F}$-cerrado si y sólo si $C = C_{\omega_1}$.*

Demostración. Sea $C \subseteq \beta(\mathbb{N})$ $\mathscr{F}$-cerrado. Por la proposición precedente, tomando $\theta = \omega_1$, $C = C_{\omega_1}$.

Ahora, sea $C = C_{\omega_1}$. Por el teorema precedente $C_{\omega_1} = \mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}} C$, es decir, C es $\mathscr{F}$-cerrado. □

Teorema 4.4.14. *Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ y $X \subseteq \mathbb{N}^*$. Si $p \in \mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}} X$, entonces existe un conjunto contable $Y \subseteq X$ tal que $p \in \mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*} Y$.*

Demostración. Sea $p \in \mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}} X$. Por el teorema anterior, $p \in X_{\omega_1}$ con $X_{\omega_1} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$. Procedamos por inducción. Si $p \in X = X_0$, entonces consideramos el conjunto $Y = \{p\}$. Supongamos que la conclusión se cumple para todos los puntos en $\bigcup_{\alpha<\theta} X_\alpha$ con $\theta < \omega_1$. Sea $p \in X_\theta$.

Caso 1. Si θ es límite, entonces $p \in \bigcup_{\alpha<\theta} X_\alpha$, y aplicamos la hipótesis de inducción.

Caso 2. Supongamos que $\theta = \alpha + 1$. Luego, $p \in X_\theta = (X_\alpha)_{\mathscr{F}}$, es decir, $p = \mathscr{F} - \text{lím}_{n\to\infty} p_n$ para alguna sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X_α. Por hipótesis, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $Y_n \subseteq X$ tal que $p_n \in \text{cl}_{\mathbb{N}^*} Y_n$. De esta manera $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n \subseteq X$ es un conjunto contable. Por observación 4.4.10 y dado que $\mathbb{N}^*$ es un subconjunto cerrado de $\beta(\mathbb{N})$ tenemos que

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \text{cl}_{\mathbb{N}^*} Y_n\right)_{\mathscr{F}} \subseteq \left(\text{cl}_{\mathbb{N}^*}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right)\right)_{\mathscr{F}} \subseteq \text{cl}_{\beta(\mathbb{N})}(\text{cl}_{\mathbb{N}^*}(Y)) = \text{cl}_{\mathbb{N}^*}(Y).$$

Por lo tanto, $p \in \text{cl}_{\mathbb{N}^*}(Y)$. □

A continuación, consideramos el anillo $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ de todas las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}$. Describamos la relación entre la topología $\tau_{\mathscr{F}}$ sobre $\text{Spec}(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$ y la topología $\sigma_{\mathscr{F}}$ sobre $\beta(\mathbb{N})$.

Considerando la descripción de los ideales maximales en anillos de funciones continuas dada por el Teorema de Gelfand-Kolmogoroff ([22], 7.3), se tiene que los ideales maximales de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ son de la forma

$$M^p = \{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : p \in \widehat{Z(f)}\} = \{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : Z(f) \in p\} \tag{4.4.2}$$

para cada $p \in \beta(\mathbb{N})$, donde $Z(f) = \{x \in \mathbb{N} : f(x) = 0\}$. Estos ideales son distintos para distintos p. Luego, para todo ideal primo I de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, existe $p \in \beta(\mathbb{N})$ tal que $I \subseteq M^p$ y M^p es el único ideal maximal que contiene a I (ver [22], 7.15).

Probemos algunas propiedades de los $\mathscr{F}-$límites de ideales maximales de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

Lema 4.4.15. *Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ y $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\beta(\mathbb{N})$ tal que $p = \mathscr{F} - \text{lím}_{n\to\infty} p_n$. Si $(M^{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de ideales maximales de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, entonces $\mathscr{F} - \text{lím}_{n\in\mathbb{N}} M^{p_n} = M^p$.*

Demostración. Si $f \in \mathscr{F} - \text{lím}_{n\in\mathbb{N}} M^{p_n}$ y $A = \{n \in \mathbb{N} : f \in M^{p_n}\}$, entonces por 4.4.1

$$A = \{n \in \mathbb{N} : Z(f) \in p_n\} \in \mathscr{F}.$$

Si $f \notin M^p$, entonces $Z(f) \notin p$, y así $\{n \in \mathbb{N} : Z(f) \in p_n\} \notin \mathscr{F}$ (contradicción). Luego, $f \in M^p$, por lo que $\mathscr{F} - \lim_{n\in\mathbb{N}} M^{p_n} \subseteq M^p$.

Ahora, supongamos que $f \in M^p$, es decir, $Z(f) \in p$. Por definición de $\mathscr{F}$-límite, $\{n \in \mathbb{N} : Z(f) \in p_n\} = \{n \in \mathbb{N} : f \in M^{p_n}\} \in \mathscr{F}$. Esto es, $f \in \mathscr{F} - \lim_{n\in\mathbb{N}} M^{p_n}$. Por lo tanto, $M^p \subseteq \mathscr{F} - \lim_{n\in\mathbb{N}} M^{p_n}$. $\square$

Para evitar una posible confusión, a un subconjunto $\mathscr{F}$-cerrado de $\operatorname{Spec}(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$ lo llamaremos $\tau_{\mathscr{F}}$-cerrado, y a un conjunto $\mathscr{F}$-cerrado de $\beta(\mathbb{N})$ lo llamaremos $\sigma_{\mathscr{F}}$-cerrado. En lo que sigue, estableceremos una relación entre los subconjuntos $\tau_{\mathscr{F}}$-cerrados y los $\sigma_{\mathscr{F}}$-cerrados.

Definición 4.4.16. *Para $C \subseteq \beta(\mathbb{N})$ definimos*

$$C_S = \{I \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}) : \exists p \in C, I \subseteq M^p\}.$$

Para $C \subseteq \operatorname{Spec}(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$ definimos

$$C_{\mathbb{N}} = \{p \in \beta(\mathbb{N}) : \exists I \in C, I \subseteq M^p\}.$$

Se sigue de la definición que si $C \subseteq \beta(\mathbb{N})$ es no vacío, entonces C_S también lo es, pues si $p \in C$, entonces $M^p \in C_S$. Análogamente, si $C \subseteq \operatorname{Spec}(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$ es no vacío, entonces $C_{\mathbb{N}}$ también lo es.

Teorema 4.4.17. *Si $C \subseteq \beta(\mathbb{N})$ es $\sigma_{\mathscr{F}}$-cerrado, entonces C_S es un subconjunto $\tau_{\mathscr{F}}$-cerrado de $\operatorname{Spec}(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$.*

Demostración. Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en C_S. Por definición, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $p_n \in C$ tal que $P_n \subseteq M^{p_n}$. Como C es $\sigma_{\mathscr{F}}$-cerrado, se tiene que $p = \mathscr{F} - \lim_{n\to\infty} p_n \in C$. Por proposición 4.1.3 y lema 4.4.15, $\mathscr{F} - \lim_{n\in\mathbb{N}} P_n \subseteq \mathscr{F} - \lim_{n\in\mathbb{N}} M^{p_n} = M^p \in C_S$. $\square$

Teorema 4.4.18. *Si $C \subseteq \operatorname{Spec}(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$ es $\tau_{\mathscr{F}}$-cerrado, entonces $C_{\mathbb{N}}$ es un subconjunto $\sigma_{\mathscr{F}}$-cerrado de $\beta(\mathbb{N})$.*

Demostración. Sea $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C_{\mathbb{N}}$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $P_n \in C$ tal que $P_n \subseteq M^{p_n}$. Dado que C es $\tau_{\mathscr{F}}$-cerrado tenemos que $\mathscr{F} - \lim_{n\in\mathbb{N}} P_n \in C$.

Por proposición 4.1.3 y lema 4.4.15, $\mathscr{F} - \lim_{n\in\mathbb{N}} P_n \subseteq \mathscr{F} - \lim_{n\in\mathbb{N}} M^{p_n} = M^p$, donde $p = \mathscr{F} - \lim_{n\to\infty} p_n$. Por lo tanto, $p \in C_\mathbb{N}$ y $C_\mathbb{N}$ es $\sigma_\mathscr{F}$-cerrado. □

Teorema 4.4.19. *Si $C \subseteq \beta(\mathbb{N})$, entonces $C = (C_S)_\mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $p \in (C_S)_\mathbb{N}$. Luego, existe $I \in C_S$ tal que $I \subseteq M^p$. Por definición, existe $q \in C$ tal que $I \subseteq M^q$, pero como p es el único ultrafiltro con esta propiedad, se tiene que $p = q$. Así, $p \in C$ y $(C_S)_\mathbb{N} \subseteq C$.

Ahora, si $p \in C$, entonces $M^p \in C_S$. Luego, $p \in (C_S)_\mathbb{N}$, y por tanto, $C \subseteq (C_S)_\mathbb{N}$. □

Teorema 4.4.20. *Si $C \subseteq \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}^\mathbb{N})$, entonces*

$$(C_\mathbb{N})_S = C^* = \{I \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}^\mathbb{N}) : \textit{existen } p \in \beta(\mathbb{N}) \textit{ y } J \in C, J \subseteq M^p \textit{ e } I \subseteq M^p\}.$$

Demostración. Si $I \in (C_\mathbb{N})_S$, entonces existe $p \in C_\mathbb{N}$ tal que $I \subseteq M^p$. Dado que $p \in C_\mathbb{N}$, existe $J \in C$ tal que $J \subseteq M^p$, por lo que $I \in C^*$.

Ahora, sea $I \in C^*$. Luego, existen $p \in \beta(\mathbb{N})$ y $J \in C$ tales que $J \subseteq M^p$ e $I \subseteq M^p$. Por lo tanto, $p \in C_\mathbb{N}$, y así $I \in (C_\mathbb{N})_S$. □

Lema 4.4.21. *Sea $\{C^i : i \in \Delta\}$ una familia de subconjuntos no vacíos de $\beta(\mathbb{N})$. Si $\bigcap_{i\in\Delta} C^i_S \neq \emptyset$, entonces $\bigcap_{i\in\Delta} C^i \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $I \in \bigcap_{i\in\Delta} C^i_S$. Para todo $i \in \Delta$, existe $p_i \in C^i$ tal que $I \subseteq M^{p_i}$. Por la propiedad de unicidad de los ideales maximales de $\mathbb{Q}^\mathbb{N}$, tenemos que $p_i = p$ para todo $i \in \Delta$. Así, $p \in \bigcap_{i\in\Delta} C^i$. □

Definición 4.4.22 (K. Kunen, [29])**.** *Sea $p \in \mathbb{N}^*$. Diremos que p es un P-punto débil de $\mathbb{N}^*$ si para todo conjunto contable $A \subseteq \mathbb{N}^* \setminus \{p\}$, $p \notin \mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*} A$.*

K. Kunen mostró en [29] la existencia de P-puntos débiles en $\mathbb{N}^*$ y J. van Mill probó en [30] que hay $2^\mathfrak{c}$ P-puntos débiles en $\mathbb{N}^*$.

Recordamos que dado un espacio topológico (X, τ), un subconjunto D de X es C^*-*embedded* (en X) si para todo $f \in C(D, [0,1])$ existe $g \in C(X, [0,1])$ tal que $g|_D = f$. Por otra parte, un subconjunto D de X se dice *discreto* si para todo $p \in D$ existe un abierto U de X tal que $U \cap D = \{p\}$. El próximo resultado se obtiene de un teorema de Z. Frolík ([17]) que enunciamos a continuación.

Teorema 4.4.23 ([9], Lemma 8.2)**.** *Sea (X, τ) un espacio topológico donde todo subespacio discreto contable es C^*-embedded. Si A y B son subespacios discretos contables de X y $p \in \mathrm{cl}_\tau A \cap \mathrm{cl}_\tau B$, entonces $p \in \mathrm{cl}_\tau(A \cap \mathrm{cl}_\tau B) \cup \mathrm{cl}_\tau(B \cap \mathrm{cl}_\tau A)$.*

Corolario 4.4.24. *Si A y B son conjuntos contables disjuntos de P-puntos débiles de $\mathbb{N}^*$, entonces $\mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*} A \cap \mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*} B = \emptyset$.*

Demostración. Dado que $\beta(\mathbb{N})$ es la compactificación de Stone-Čech de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}^*$ es homeomorfo a $\beta(\mathbb{N})$, todo subespacio discreto contable de $\mathbb{N}^*$ es C^*-embedded en $\mathbb{N}^*$. Además, si D es un conjunto contable de P-puntos débiles de $\mathbb{N}^*$, entonces D es discreto. En efecto, dado $x \in D$, $x \notin \mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*}(D \setminus \{x\})$, por lo que existe un abierto $U = \mathbb{N}^* \setminus \mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*}(D \setminus \{x\})$ de $\mathbb{N}^*$ tal que $U \cap D = \{x\}$. Así, D es discreto.

Sean A y B conjuntos contables disjuntos de P-puntos débiles de $\mathbb{N}^*$. Por lo anterior, A y B son subespacios discretos contables de $\mathbb{N}^*$. Supongamos que $\mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*} A \cap \mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*} B \neq \emptyset$. Por el teorema anterior, $\mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*}(A \cap \mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*} B) \cup \mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*}(B \cap \mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*} A) \neq \emptyset$, es decir, $A \cap \mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*} B \neq \emptyset$ o $B \cap \mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*} A \neq \emptyset$. Supongamos que existe $p \in A \cap \mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*} B$, es decir, p es un P-punto débil en A y $p \in \mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*} B$. Como A y B son disjuntos, $B \subseteq \mathbb{N}^* \setminus \{p\}$, pero como B es contable se contradice el hecho de que p sea P-punto débil. $\square$

Teorema 4.4.25. *Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$. Tenemos que $(\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}), \tau_{\mathscr{F}})$ no es un espacio compacto.*

Demostración. Mostraremos que existe una colección de subconjuntos $\tau_{\mathscr{F}}$-cerrados de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$ con la propiedad de intersección finita cuya intersección es vacía. Sea

$$W = \{p \in \mathbb{N}^* : p \text{ es un } P\text{-punto débil}\}.$$

Considerando que $|W| = 2^{\mathfrak{c}}$, sea $\{A_\alpha : \alpha < 2^{\mathfrak{c}}\}$ una partición de W en infinitos subconjuntos contables. Sea $C_0 = W$ y, para todo $\alpha < 2^{\mathfrak{c}}$, se define

$$C_\alpha = \mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}}(W \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta).$$

La familia $\{C_\alpha : \alpha < 2^{\mathfrak{c}}\}$ forma una cadena descendente de subconjuntos $\sigma_{\mathscr{F}}$-cerrados de $\beta(\mathbb{N})$, por lo que tiene la propiedad de intersección finita. Supongamos que existe

$p \in \bigcap_{\alpha<2^{\mathfrak{c}}} C_\alpha$. Como $p \in C_\omega = \mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}}(W \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$, por el teorema 4.4.14 existe un conjunto contable $B \subseteq W \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ tal que $p \in \mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*} B$. Dado que B es contable, existe $\beta < \omega_1$ tal que $B \subseteq \bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha$. Como $p \in C_\beta$, por el teorema 4.4.14 nuevamente existe un conjunto contable $D \subseteq W \setminus \bigcup_{\lambda<\beta} A_\lambda$ tal que $p \in \mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*} D$. Luego, $p \in \mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*} B \cap \mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*} D$. Por otra parte, como B y D son subconjuntos contables disjuntos de $\mathbb{N}^*$, por el corolario anterior $\mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*} B \cap \mathrm{cl}_{\mathbb{N}^*} D = \emptyset$ (contradicción). De esta forma, $\bigcap_{\alpha<2^{\mathfrak{c}}} C_\alpha = \emptyset$, y consecuentemente por el lema 4.4.21, $\bigcap_{\alpha<2^{\mathfrak{c}}} (C_\alpha)_S = \emptyset$. Como la familia $\{(C_\alpha)_S : \alpha < 2^{\mathfrak{c}}\}$ tiene la propiedad de intersección finita, $(\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}), \tau_{\mathscr{F}})$ no es compacto. $\square$

Corolario 4.4.26. *Sobre* Spec($\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$), *$\tau_{\mathscr{F}}$ es estrictamente más fina que τ_U para todo ultrafiltro $\mathscr{F}$ sobre* $\mathbb{N}$.

Demostración. Por teorema 3.3.3, $(\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}), \tau_U)$ es un espacio compacto. Por el teorema anterior $\tau_{\mathscr{F}}$ contiene estrictamente a τ_U sobre Spec($\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$). $\square$

4.5. Algunas Propiedades de las $\mathscr{F}$-topologías sobre Spec(R)

Sabemos que $(\mathrm{Spec}(R), \tau_{\mathscr{F}})$ es un espacio Hausdorff y por teorema 4.4.25 no es en general un espacio compacto. Nuestro objetivo en esta sección es dar otras propiedades interesantes de la topología $\tau_{\mathscr{F}}$, como $\mathscr{F}$-compacidad y la cardinalidad de los conjuntos cerrados de esta topología. Además, probaremos la existencia de $2^{\mathfrak{c}}$ $\mathscr{F}$-topologías diferentes sobre Spec($\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$). Para hacerlo, primero estudiaremos las $\sigma_{\mathscr{F}}$-topologías sobre $\beta(\mathbb{N})$.

Una propiedad natural más fuerte que la compacidad contable es la siguiente:

Definición 4.5.1. *Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$. Un espacio topológico (X, τ) es $\mathscr{F}$-compacto si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, existe $p \in X$ tal que $p = \mathscr{F} - \mathrm{lím}_{n\to\infty} x_n$.*

Proposición 4.5.2. *Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre* $\mathbb{N}$.

1. *Todo espacio compacto es $\mathscr{F}$-compacto.*

2. *Todo espacio $\mathscr{F}$-compacto es contablemente compacto.*

3. *Un subconjunto cerrado de un espacio $\mathscr{F}$-compacto es $\mathscr{F}$-compacto.*

4. *El producto de espacios $\mathscr{F}$-compactos es $\mathscr{F}$-compacto.*

Demostración. *1., 2. y 3.* se deducen de la proposición 4.4.5. Para *4.* ver [7]. □

Lema 4.5.3. *Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$. Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en* $\mathrm{Spec}(R)$*, entonces $\mathscr{F}-\mathrm{lím}_{n\in\mathbb{N}} P_n$ es el punto $\mathscr{F}$-límite de la sucesión $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en la topología $\tau_{\mathscr{F}}$, es decir, $\mathscr{F}-\mathrm{lím}_{n\in\mathbb{N}} P_n = \mathscr{F}-\mathrm{lím}_{n\to\infty} P_n$.*

Demostración. Sea $V = \mathrm{Spec}(R)\backslash C$ un $\tau_{\mathscr{F}}$-abierto que contiene a $\mathscr{F}-\mathrm{lím}_{n\in\mathbb{N}} P_n$, con C un subconjunto $\mathscr{F}$-cerrado. Sea $A = \{n\in\mathbb{N} : P_n \in C\}$. Si $A\in\mathscr{F}$, entonces por teorema 4.1.5, $\mathscr{F}-\mathrm{lím}_{n\in\mathbb{N}} P_n = \mathscr{F}|_A-\mathrm{lím}_{n\in A} P_n \in C$ (contradicción). Por proposición 3.2.2, $\{n\in\mathbb{N} : P_n\in V\} = \mathbb{N}\backslash A \in \mathscr{F}$. □

Corolario 4.5.4. *Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$. Tenemos que* $(\mathrm{Spec}(R), \tau_{\mathscr{F}})$ *es un espacio $\mathscr{F}$-compacto.*

Observación 4.5.5. *Con un razonamiento similar, es posible mostrar que $(\beta(\mathbb{N}), \sigma_{\mathscr{F}})$ es un espacio $\mathscr{F}$-compacto para todo ultrafiltro $\mathscr{F}$ sobre $\mathbb{N}$.*

El siguiente corolario es consecuencia directa del lema 4.5.3.

Corolario 4.5.6. *Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$. Tenemos que $C \subseteq$* $\mathrm{Spec}(R)$ *(respectivamente de $\beta(\mathbb{N})$) es $\mathscr{F}$-compacto si y sólo si es $\tau_{\mathscr{F}}$-cerrado (respectivamente $\sigma_{\mathscr{F}}$-cerrado).*

Con el fin de establecer una comparación entre las topologías $\tau_{\mathscr{F}}$ para diferentes ultrafiltros $\mathscr{F}$ sobre $\mathbb{N}$, usaremos el preorden Comfort sobre $\mathbb{N}^*$.

Definición 4.5.7. *Sean $\mathscr{F},\mathscr{G}\in\mathbb{N}^*$. Diremos que $\mathscr{F}\leq_C\mathscr{G}$ si todo espacio $\mathscr{G}$-compacto es $\mathscr{F}$-compacto. A $\leq_C$ le llamaremos preorden Comfort.*

Para conocer algunas propiedades de este preorden ver [19].

Teorema 4.5.8. *Sean $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \mathbb{N}^*$. Son equivalentes:*

1. $\mathscr{F} \leq_C \mathscr{G}$;

2. $\tau_{\mathscr{G}} \subseteq \tau_{\mathscr{F}}$ *sobre* $\mathrm{Spec}(R)$:

3. $\tau_{\mathscr{G}} \subseteq \tau_{\mathscr{F}}$ *sobre* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$;

4. $\sigma_{\mathscr{G}} \subseteq \sigma_{\mathscr{F}}$ *sobre* $\beta(\mathbb{N})$;

5. $\mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}} \mathbb{N} \subseteq \mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{G}}} \mathbb{N}$;

6. $(\beta(\mathbb{N}), \sigma_{\mathscr{G}})$ *es* $\mathscr{F}$*-compacto;*

7. $(\mathrm{Spec}(R), \tau_{\mathscr{G}})$ *es* $\mathscr{F}$*-compacto;*

8. $(\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}), \tau_{\mathscr{G}})$ *es* $\mathscr{F}$*-compacto.*

Demostración. Por corolario 4.5.4 y 4.5.5 se deduce que *1.* implica *6, 7* y *8*. Además, *2* implica *3* y *7* implica *8* son evidentes.

1 $\Rightarrow$ 2. Sea $C \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ $\tau_{\mathscr{G}}$-cerrado. Dado que por corolario 4.5.4 $(\mathrm{Spec}(R), \tau_{\mathscr{G}})$ es un espacio $\mathscr{G}$-compacto, por proposición 4.5.2, C es $\mathscr{G}$-compacto. Por hipótesis, C es $\mathscr{F}$-compacto. Aplicando el corolario 4.5.6 tenemos que C es $\tau_{\mathscr{F}}$-cerrado. Así, $\tau_{\mathscr{G}} \subseteq \tau_{\mathscr{F}}$.

3 $\Rightarrow$ 4. Sea $C \subseteq \beta(\mathbb{N})$ un $\sigma_{\mathscr{G}}$-cerrado. Por Teorema 4.4.17, sabemos que C_S es $\tau_{\mathscr{G}}$-cerrado y por hipótesis, C_S es $\tau_{\mathscr{F}}$-cerrado. Luego, por Teoremas 4.4.18 y 4.4.19 tenemos que $C = (C_S)_{\mathbb{N}}$ es $\sigma_{\mathscr{G}}$-cerrado. De esta manera, $\sigma_{\mathscr{G}} \subseteq \sigma_{\mathscr{F}}$.

4 $\Rightarrow$ 5. Por hipótesis, $\mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{G}}} \mathbb{N}$ es un conjunto $\sigma_{\mathscr{F}}$-cerrado que contiene a $\mathbb{N}$. Por otro lado, $\mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}} \mathbb{N}$ es el conjunto $\sigma_{\mathscr{F}}$-cerrado más pequeño que contiene a $\mathbb{N}$. Luego, $\mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}} \mathbb{N} \subseteq \mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{G}}} \mathbb{N}$.

5 $\Rightarrow$ 1. Por el corolario 4.5.6, $\mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}} \mathbb{N} = \bigcap\{Y : \mathbb{N} \subseteq Y \subseteq \beta(\mathbb{N}) \text{ e } Y \text{ es } \mathscr{F}\text{-compacto}\}$. Luego, por el teorema 2.3 de [19] se tiene que $\mathscr{F} \leq_C \mathscr{G}$.

$6 \Rightarrow 5$. Como $\mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{G}}} \mathbb{N}$ es $\sigma_{\mathscr{G}}$-cerrado y $(\beta(\mathbb{N}), \sigma_{\mathscr{G}})$ es $\mathscr{F}$-compacto, por proposición 4.5.2 tenemos que $\mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{G}}} \mathbb{N}$ es $\mathscr{F}$-compacto. Luego, por Corolario 4.5.6, $\mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{G}}} \mathbb{N}$ es $\sigma_{\mathscr{F}}$-cerrado, y por definición de clausura, $\mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{F}}} \mathbb{N} \subseteq \mathrm{cl}_{\sigma_{\mathscr{G}}} \mathbb{N}$.

$8 \Rightarrow 3$. Sea C un $\tau_{\mathscr{G}}$-cerrado de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$. Como $(\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}), \tau_{\mathscr{G}})$ es $\mathscr{F}$-compacto, por proposición 4.5.2 tenemos que C es $\mathscr{F}$-compacto. Por corolario 4.5.6, C es $\tau_{\mathscr{F}}$-cerrado. □

Para el siguiente resultado usaremos el preorden Rudin-Keisler sobre $\mathbb{N}^*$. Para más detalles de este preorden ver [19].

Definición 4.5.9. *Sean $p, q \in \mathbb{N}^*$. Diremos que $p \leq_{RK} q$ si existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\overline{f}(q) = p$, donde $\overline{f} : \beta(\mathbb{N}) \to \beta(\mathbb{N})$ es la extensión de Stone de f. A $\leq_{RK}$ se le conoce como preorden Rudin-Keisler sobre $\mathbb{N}^*$.*

Teorema 4.5.10. *Existen $2^{\mathfrak{c}}$ $\mathscr{F}$-topologías sobre* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$ *no homeomórficas dos a dos.*

Demostración. P. Simon mostró la existencia de un conjunto W que consiste de $2^{\mathfrak{c}}$ P-puntos débiles de $\mathbb{N}^*$ RK-incomparables dos a dos ([33]). Por otro lado, el preorden Rudin-Keisler es equivalente al preorden Comfort sobre el conjunto de P-puntos débiles de $\mathbb{N}^*$ ([19]). Como la $\mathscr{F}$-compacidad es una propiedad topológica, por el teorema 4.5.8 las topologías $\tau_{\mathscr{F}}$, con $\mathscr{F} \in W$, no son homeomórficas dos a dos.

□

Si describimos la clausura de un subconjunto de $(\mathrm{Spec}(R), \tau_{\mathscr{F}})$ de una forma similar a como lo hicimos en la sección anterior, entonces obtenemos resultados análogos.

Dados $X \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ y $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$, definimos

$$(X)_{\mathscr{F}} = \{\mathscr{F} - \lim_{n\in\mathbb{N}} P_n : (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es una sucesión en } X\}.$$

Notar que $X \subseteq (X)_{\mathscr{F}}$. Definimos $X_0 = X$, $X_1 = (X_0)_{\mathscr{F}}$ y para todo cardinal $\theta \leq \omega_1$, definimos inductivamente

$$X_\theta = \bigcup_{\alpha<\theta} X_\alpha \text{ si } \theta \text{ es límite, y}$$

$$X_\theta = (X_{\theta-1})_{\mathscr{F}} \text{ si } \theta \text{ no es límite.}$$

Así, por un análogo al teorema 4.4.12, si $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ y $X \subseteq \operatorname{Spec}(R)$, entonces $\operatorname{cl}_{\tau_{\mathscr{F}}} X = X_{\omega_1}$.

Teorema 4.5.11. *Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$. Si $X \subseteq \operatorname{Spec}(R)$, entonces $|\operatorname{cl}_{\tau_{\mathscr{F}}} X| \leq |X|^\omega$.*

Demostración. Procedamos por inducción. Claramente para $X_0 = X$ se cumple que $|X_0| \leq |X|^\omega$. Sea $\nu < \omega_1$ y supongamos que $|X_\theta| \leq |X|^\omega$ para todo $\theta < \nu$. Si ν es límite, entonces $X_\nu = \bigcup_{\theta<\nu} X_\theta$ y $|X_\nu| \leq \sum_{\theta<\nu} |X_\theta| \leq |X|^\omega$. Si $\nu = \theta + 1$, entonces

$$|X_\nu| = |(X_\theta)_{\mathscr{F}}| \leq (|X|^\omega)^\omega = |X|^\omega.$$

Por lo tanto, $|\operatorname{cl}_{\tau_{\mathscr{F}}} X| \leq |X|^\omega$. $\square$

Capítulo 5

Propiedades de las Topologías vistas como Semianillos

Introducción

En el ejemplo 1.1.8 mostramos que dado un espacio topológico (X, τ) se tiene que τ es un semianillo donde la unión y la intersección corresponden a la suma y la multiplicación respectivamente, donde los conjuntos $\emptyset$ y X corresponden a los neutros aditivo y multiplicativo respectivamente.

En este capítulo estudiaremos las topologías vistas como semianillos relacionando propiedades algebraicas de τ con propiedades topológicas de (X, τ) ([6]). Por ejemplo, veremos que si (X, τ) es un espacio compacto y Hausdorff, entonces τ es un semianillo Gelfand. También estudiaremos algunas propiedades de la topología de complemento finito sobre un conjunto infinito.

5.1. Ideales y Espectro de Evitación de una Topología

Lema 5.1.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $a_1, \ldots, a_n \in \tau$, entonces*

$$(a_1, \ldots, a_n) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} a_i \right).$$

Demostración. Es evidente que $(\bigcup_{i=1}^{n} a_i) \subseteq (a_1, \ldots, a_n)$. Para la otra inclusión procederemos por inducción. Para $n = 1$ es trivial. Supongamos que $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n-1} a_i)$. Probemos que $(a_1, \ldots, a_n) \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} a_i)$. Sea $x \in (a_1, \ldots, a_n)$, es decir, existe $r_1, \ldots, r_n \in \tau$ tal que

$$x = \bigcup_{i=1}^{n} (r_i \cap a_i) = \bigcup_{i=1}^{n-1} (r_i \cap a_i) \cup (r_n \cap a_n).$$

Dado que $\bigcup_{i=1}^{n-1} (r_i \cap a_i) \in (a_1, \ldots, a_{n-1})$, por hipótesis de inducción existe $r \in \tau$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n-1} (r_i \cap a_i) = r \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} a_i$. Así, si $a = \bigcup_{i=1}^{n-1} a_i$, entonces

$$x = (r \cap a) \cup (r_n \cap a_n) = [r \cup (r_n \cap a_n)] \cap (a \cup r_n) \cap (a \cup a_n).$$

Como $r' = [r \cup (r_n \cap a_n)] \cap (a \cup r_n) \in \tau$, tenemos que $x = r' \cap \bigcup_{i=1}^{n} a_i$. Por lo tanto, $(a_1, \ldots, a_n) \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} a_i)$. □

El siguiente teorema es consecuencia directa del lema anterior.

Teorema 5.1.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Todo ideal finitamente generado de τ es principal.*

Corolario 5.1.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Tenemos que τ es un semianillo noetheriano si y sólo si todo ideal de τ es principal.*

Demostración. Dado que un semianillo es noetheriano si y sólo si todos sus ideales son finitamente generados ([23], proposición 6.16), por el teorema precedente se tiene lo pedido. □

Teorema 5.1.4. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si I es un ideal de τ, entonces $I \subseteq (\bigcup\{a : a \in I\})$.*

Demostración. Sea I un ideal de τ y $b \in I$. Luego, $b = \bigcup\{a : a \in I\} \cap b$. Por lo tanto, $b \in (\bigcup\{a : a \in I\})$. □

Lema 5.1.5. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Tenemos que todo ideal maximal de τ que no es un cubrimiento de X es principal. Más aún, si M es un ideal maximal de τ que no es un cubrimiento de X, entonces $M = (\bigcup\{a : a \in M\})$.*

Demostración. Sea M un ideal maximal de τ que no es un cubrimiento de X. Luego, $\bigcup\{a : a \in M\} \neq X$, y así $(\bigcup\{a : a \in M\}) \neq \tau$. Por el teorema precedente, $M \subseteq (\bigcup\{a : a \in M\})$, y por definición de ideal maximal se tiene lo pedido. □

Teorema 5.1.6. *Sea (X, τ) un espacio compacto. Tenemos que todo ideal maximal de τ es principal. Más aún, si M es un ideal maximal de τ, entonces $M = (\bigcup\{a : a \in M\})$.*

Demostración. Sea M un ideal maximal de τ. Tenemos que M no es un cubrimiento de X, sino existiría una familia $\{a_i : i \in \Gamma\}$ en M tal que $\bigcup\{a_i : i \in \Gamma\} = X$, y por compacidad existirían $a_1, \ldots, a_n \in M$ tal que $\bigcup\{a_i : i = 1, \ldots, n\} = X$, por lo que $X \in M$, pero M es un ideal primo (contradicción). Por el lema precedente, $M = (\bigcup\{a : a \in M\})$. □

Ahora definiremos una aplicación que conecta directamente un espacio topológico con el espectro primo de la topología correspondiente, la cual nos será de gran utilidad para probar los principales resultados de este capítulo.

Teorema 5.1.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico. El conjunto $\{A \in \tau : x \notin A\}$ es un ideal primo de τ para todo $x \in X$. Además, la función*

$$\begin{aligned} \phi : (X, \tau) &\to (\operatorname{Spec}(\tau), \tau_Z) \\ x &\mapsto \phi(x) = \{A \in \tau : x \notin A\} \end{aligned}$$

es continua.

Demostración. Veamos que la función ϕ está bien definida. Sean $P = \phi(x)$ y $Q = \phi(y)$ distintos con $x, y \in X$. Por definición, existe un abierto $A \in \tau$ tal que $x \in A$ e $y \notin A$, por lo que x e y son distintos.

Ahora, sea $x \in X$. Sean $A, B \in \phi(x)$ y $V \in \tau$. Como $x \notin A$ y $x \notin B$, se tiene que $x \notin A \cup B$, por lo que $A \cup B \in \phi(x)$. Claramente $A \cap V \in \phi(x)$ y $X \notin \phi(x)$. Si $A \cap B \in \phi(x)$, entonces por propiedades de conjuntos $A \in \phi(x)$ o $B \in \phi(x)$. Por lo tanto, $\phi(x)$ es un ideal primo de τ.

Finalmente, sea $V \in \tau$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(D_0(V)) &= \{x \in X : \phi(x) \in D_0(V)\} \\
&= \{x \in X : V \notin \phi(x)\} \\
&= \{x \in X : x \in V\} \\
&= V.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, ϕ es continua. $\square$

Definición 5.1.8. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Llamaremos ideal de evitación de x al conjunto $\{A \in \tau : x \notin A\}$. Además, el conjunto de todos los ideales de evitación de elementos de x es llamado espectro de evitación de τ.*

Teorema 5.1.9. *Si (X, τ) es un espacio T_0, entonces:*

1. *ϕ es inyectiva;*
2. *$\phi(x)$ es un ideal maximal si y sólo si $\{x\}$ es τ-cerrado en X;*
3. *$\phi(X)$ es un subespacio denso en $(\mathrm{Spec}(\tau), \tau_Z)$.*

Demostración.

1. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Como (X, τ) es T_0, existe $V \in \tau$ tal que $x \in V$ e $y \notin V$, por lo que $\phi(x) \neq \phi(y)$. Así, ϕ es inyectiva.
2. Si $\phi(x)$ es un ideal maximal, entonces por proposición 1.2.6 $\{\phi(x)\}$ es τ_Z-cerrado. Como ϕ es inyectiva y continua, $\phi^{-1}(\{\phi(x)\}) = \{x\}$ es τ-cerrado.

Si $\{x\}$ es τ-cerrado, entonces $X - \{x\}$ es τ-abierto, por lo que $X - \{x\} \in \phi(x)$. Supongamos que $\phi(x)$ no es un ideal maximal, o sea, existe P ideal de τ y $A \in P$ tal que $\phi(x) \subseteq P$ y $A \notin \phi(x)$. Dado que $x \in A$, se tiene que $X = A \cup (X - \{x\}) \in P$ (contradicción). Por lo tanto, $\phi(x)$ es un ideal maximal.

3. Sea $P \in \operatorname{Spec}(\tau)$ y $D_0(V)$ un abierto que contiene a P. Supongamos que para todo $x \in X$, $\phi(x) \notin D_0(V)$, es decir, $V \in \phi(x)$. Luego, $x \notin V$ para todo $x \in X$, o sea, $V = \emptyset$. Por hipótesis, $\emptyset = V \notin P$ (contradicción). Por lo tanto, $\phi(X)$ es denso en $(\operatorname{Spec}(\tau), \tau_Z)$.

□

5.2. Resultados Principales

Teorema 5.2.1. *Si (X, τ) es un espacio topológico T_0 y conexo, entonces $(\operatorname{Spec}(\tau), \tau_Z)$ es un espacio conexo.*

Demostración. Dado que (X, τ) es conexo y que por teorema 5.1.7 ϕ es continua, tenemos que $\phi(X)$ es conexo. Como (X, τ) es T_0, por teorema 5.1.9.3, $\mathrm{cl}_{\tau_Z}(\phi(X)) = \operatorname{Spec}(\tau)$. Por lo tanto, $(\operatorname{Spec}(\tau), \tau_Z)$ es conexo. □

Teorema 5.2.2. *Si (X, τ) es un espacio compacto Hausdorff, entonces τ es un semianillo Gelfand.*

Demostración. Sea P un ideal primo de τ. Tenemos que $\bigcup_{A \in P} A \neq X$, sino por compacidad existiría una familia finita $A_1, \ldots, A_n$ en P tal que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$, por lo que $X \in P$, lo cual contradice el hecho que P sea un ideal primo. Así, $X - \bigcup_{A \in P} A \neq \emptyset$.

Supongamos que $X - \bigcup_{A \in P} A$ tiene al menos dos puntos distintos x_1 y x_2. Como (X, τ) es T_2, existen dos abiertos disjuntos V y W que contienen a x_1 y x_2 respectivamente. Dado que $V, W \notin P$ y $V \cap W = \emptyset \in P$ se tiene una contradicción ya que P es un ideal primo.

Ahora, $X - \bigcup_{A \in P} A = \{x_0\}$ para algún $x_0 \in X$. Luego, $P \subseteq \phi(x_0)$ y dado que $\{x_0\}$ es cerrado, por teorema 5.1.9, $\phi(x_0)$ es un ideal maximal de τ. Supongamos que existe un ideal maximal Q que contiene a P y que no está contenido en $\phi(x_0)$. Como Q es un ideal primo, $X - \bigcup_{A\in Q} A = \{x_1\}$ para algún $x_1 \in X$. Si $x_0 = x_1$, entonces $Q \subseteq \phi(x_0)$ (contradicción), por lo que $x_0 \neq x_1$. Dado que $P \subseteq Q$, $\{x_1\} \subseteq \{x_0\}$ (contradicción). Por lo tanto, τ es un semianillo Gelfand. $\square$

Hasta el momento hemos estudiado topologías arbitrarias y probado propiedades generales de ellas. Ahora, estudiaremos una topología en particular. Durante el resto de la sección consideraremos X como un conjunto infinito y τ_F como la topología de complemento finito sobre X.

Recordemos que la topología de complemento finito sobre un conjunto no vacío A se define como el conjunto $\{B \subseteq A : A \setminus B \text{ es finito }\} \cup \{\emptyset\}$. Además, un espacio con esta topología es T_1, compacto y conexo.

Teorema 5.2.3. *τ_F es un m-semianillo.*

Demostración. Probemos que $\{\emptyset\}$ es un ideal primo de τ_F suponiendo lo contrario. Sean V y W τ_F-abiertos no vacíos tal que $V \cap W = \emptyset$. Así, $(X \setminus V) \cup (X \setminus W) = X$, pero $X \setminus V$ y $X \setminus W$ son conjuntos finitos y X es un conjunto infinito (contradicción). Por lo tanto, $\{\emptyset\}$ es un ideal primo de τ_F. Además, $\{\emptyset\}$ es el único ideal primo minimal de τ_F, ya que todo ideal primo lo contiene. De esta forma τ_F es un m-semianillo. $\square$

Teorema 5.2.4. *Sea P un ideal primo de τ_F y $K_P = |X - \bigcup_{V\in P} V|$. Se tiene que $K_P \neq 0$, K_P es finito y P está contenido en K_P ideales maximales.*

Demostración. Sea P ideal primo de τ_F. Tenemos que $\bigcup_{V\in P} V \neq X$, sino por la compacidad de (X, τ_F) existiría una familia finita $V_1, \dots, V_n$ en P tal que $\bigcup_{i=1}^{n} V_i = X$ (contradicción). Así, $X - \bigcup_{V\in P} V \neq \emptyset$ y $K_P \neq 0$. Además, $\bigcup_{V\in P} V \in \tau_F$, por lo que $X - \bigcup_{V\in P} V$ es finito, es decir, K_P es finito.

Supongamos que $X - \bigcup_{V\in P} V = \{x_1, ..., x_n\}$. Luego, $P \subseteq \phi(x_i)$ para $i = 1, \dots, n$. Dado que (X, τ_F) es T_1, $\{x_i\}$ es τ_F-cerrado y por teorema 5.1.9.2, $\phi(x_i)$ es maximal para $i = 1, \dots, n$. Por lo tanto, P está contenido en $n = K_P$ ideales maximales. $\square$

Teorema 5.2.5. *La función*

$$\begin{aligned} \phi : (X, \tau_F) &\to (\mathrm{Spec}(\tau_F), \tau_Z) \\ x &\mapsto \phi(x) = \{A \in \tau_F : x \notin A\} \end{aligned}$$

es un homeomorfismo sobre su imagen.

Demostración. Por los teoremas 5.1.7 y 5.1.9, ϕ es continua e inyectiva, por lo que es continua y biyectiva sobre su imagen. Sólo basta probar que la inversa de ϕ, ϕ^{-1}, es continua. Sea A un cerrado de (X, τ_F), es decir, $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ con $x_1, \ldots, x_n \in X$. Luego,

$$(\phi^{-1})^{-1}(A) = \{P \in \phi(X) : \phi^{-1}(P) \in A\} = \{\phi(x_i) : i = 1, \ldots, n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{\phi(x_i)\}.$$

Por teorema 5.1.7.2, $\phi(x_i)$ es un ideal maximal, y por la proposición 1.2.6, $\{\phi(x_i)\}$ es cerrado en $(\phi(X), \tau_Z)$ para $i = 1, \ldots, n$. Así, $(\phi^{-1})^{-1}(A)$ es cerrado en $(\phi(X), \tau_Z)$ y ϕ^{-1} es continua. □

Teorema 5.2.6. (X, τ_F) *se puede sumergir como un subespacio denso de un espacio espectral.*

Demostración. Por teorema 5.1.9.3, $\phi(X)$ es denso en $(\mathrm{Spec}(\tau_F), \tau_Z)$ y por teorema 1.2.12 $(\mathrm{Spec}(\tau_F), \tau_Z)$ es un espacio espectral. Por el teorema anterior se tiene lo pedido. □

5.3. Una Aplicación del Teorema de la Dualidad de Stone

M. Stone (1938) dió un prueba topológica de que todo retículo distributivo acotado es isomorfo a un retículo de conjuntos (ordenado por inclusión): dado un retículo L (distributivo y acotado) podemos construir un espacio topológico (X, τ) tal que L es isomorfo al retículo de conjuntos abiertos compactos de (X, τ). El espacio (X, τ) es el conjunto de los ideales primos de L con la topología de Zariski, $(\mathrm{Spec}(L), \tau_Z)$. Dado que una topología es un retículo distributivo acotado, donde las operaciones de sup e inf son la unión y la intersección respectivamente, toda topología es isomorfa al conjunto de τ_Z-abiertos compactos de su espectro primo.

Definición 5.3.1. *Sea R un semianillo. Diremos que R es un semianillo cero dimensional si todo ideal primo de R es maximal.*

Lema 5.3.2. *Si (X, τ) es un espacio T_0 y τ es un semianillo cero dimensional, entonces (X, τ) es T_2.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ distintos. Como ϕ es inyectiva, $\phi(x) \neq \phi(y)$. Por teorema 1.2.18 sabemos que τ es un semianillo cero dimensional si y sólo si $(\mathrm{Spec}(\tau), \tau_Z)$ es T_2. Así, existen U, V τ_Z-abiertos tales que $\phi(x) \in U$, $\phi(y) \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Luego, $x \in \phi^{-1}(U)$ e $y \in \phi^{-1}(V)$ con $\phi^{-1}(U) \cap \phi^{-1}(V) = \emptyset$. Por la continuidad de ϕ, $\phi^{-1}(U)$ y $\phi^{-1}(V)$ son τ-abiertos y se tiene lo pedido. □

Teorema 5.3.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Tenemos que τ es la topología discreta si y solo si (X, τ) es un espacio T_0 y τ un semianillo cero dimensional.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio T_0 y τ un semianillo cero dimensional. Por el teorema de la dualidad de Stone, τ es isomorfo al retículo de los conjuntos abiertos compactos de $(\mathrm{Spec}(\tau), \tau_Z)$. Como todo ideal primo de τ es maximal, por el teorema 1.2.18, $(\mathrm{Spec}(\tau), \tau_Z)$ es Hausdorff, y dado que un conjunto compacto de un espacio Hausdorff es cerrado, el retículo anterior corresponde a los conjuntos clopen de $(\mathrm{Spec}(\tau), \tau_Z)$, y así es un álgebra de Boole. Luego, τ también es un álgebra de Boole. Por otra parte, por el lema 5.3.2 sabemos que (X, τ) es Hausdorff, por lo que τ es la topología discreta.

Recíprocamente, supongamos que τ es la topología discreta. Claramente (X, τ) es un espacio T_0. Sea P un ideal primo de τ y sea N un ideal primo de τ que contiene estrictamente a P. Así, existe $U \in N \setminus P$. Como $U \cap (X \setminus U) = \emptyset \in P$, tenemos que $X \setminus U \in P$. De esta manera, $U \cup (X \setminus U) = X \in N$ (contradicción). Por lo tanto, P es un ideal maximal de τ. □

Observación 5.3.4. *Notemos que si* (X, τ) *no es un espacio* T_0*, entonces no se cumple el teorema. Por ejemplo, si* τ *es la topología trivial sobre un conjunto* X*, entonces* τ *es un semianillo cero dimensional, pero no es la topología discreta.*

Teorema 5.3.5 ([34], Corollary 3.4)**.** *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Tenemos que:*

1. (X, τ) *es* T_0 *si y solo si* $(X, \overline{\tau})$ *es* T_0.

2. (X, τ) *es* T_1 *si y solo si* $\overline{\tau}$ *es la topología discreta.*

Corolario 5.3.6. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Tenemos que* (X, τ) *es* T_1 *si y solo si* (X, τ) *es* T_0 *y* $\overline{\tau}$ *es un semianillo cero dimensional.*

Demostración. Si (X, τ) es T_1, entonces por el teorema precedente $\overline{\tau}$ es la topología discreta. Así, (X, τ) es un espacio T_0, y por el teorema 5.3.3, $\overline{\tau}$ es un semianillo cero dimensional.

Recíprocamente, sea (X, τ) un espacio T_0 y $\overline{\tau}$ un semianillo cero dimensional. Por el teorema precedente, $(X, \overline{\tau})$ es T_0, y por el teorema 5.3.3, $\overline{\tau}$ es la topología discreta. Por el teorema precedente, (X, τ) es T_1. □

Bibliografía

[1] F. Alarcón and D. D. Anderson, *Commutative semirings and their lattices of ideals*, Houston J. Math., 20 (4), (1994) 571–590.

[2] P. J. Allen and L. Dale, *Ideal theory in the semiring Z^+*, Publ. Math. Debrecen, 22, (1975) 219–224.

[3] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Reading, MA; Addison-Wesley, 1969.

[4] J. A. Ávila, Spec(R) *y Axiomas de Separación entre T_0 y T_1*, Divulgaciones Matemáticas, 13 (2) (2005) 90–98.

[5] B. Banaschewski and S. B. Niefield, *Proyective and supercoherent frames*, J. Pure Appl. Algebra, 70, (1991) 45–51.

[6] S. Barría and J. Vielma, *Some spectral properties of topologies*, Sometido a publicación.

[7] A. R. Bernstein, *A new kind of compactness for topological spaces*, Fund. Math., 66, (1970) 185–193.

[8] M. L. Colasante, C. Uzcátegui and J. Vielma, *Boolean algebras and low separation axioms*, Topology Proceedings, 34, (2009) 1–15.

[9] W. W. Comfort, *Ultrafilters: Some old and some new results*, Bull. Amer. Math. Soc., 83, (1977) 417–455.

[10] W. W. Comfort and S. Negrepontis, *The Theory of Ultrafilters*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[11] R. Dedekind, *Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen*, Suplement XI to P. G. Lejeune Dirichlet: *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 4 Aufl., Druck und Verlag, Braunschweig, (1894).

[12] G. De Marco and A. Orsatti, *Commutative rings in which every ideal is contained in a unique maximal ideal*, Proc. Amer. Math. Soc., 30 (3), (1971) 459–466.

[13] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, New York: Springer, 1994.

[14] R. Engelking, *General Topology*, Berlin: Heldermann, 1989.

[15] M. Fontana and K. A. Loper, *The patch topology and the ultrafilter topology on the prime spectrum of a commutative ring*, Comm. Algebra, 36, (2008) 2917–2922.

[16] Z. Frolík, *Sums of ultrafilters*, Bull. Amer. Math. Soc., 73, (1967) 87–91.

[17] Z. Frolík, *Homogeineity problems for extremally disconnected spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae, 8, (1967) 757–763.

[18] H. Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton: Princeton University Press (1981) .

[19] S. García-Ferreira, *Three Orderings on* $\beta(\omega) \setminus \omega$, Topology and Its Applications, 50, (1993) 199–216.

[20] S. García Ferreira, *Some aplications of* $\mathscr{F}$*-limit points in topology, analysis and algebra*, Bol. Mat., 18 (1), (2011) 1–38.

[21] S. García-Ferreira and L. M. Ruza-Montilla, *The* $\mathscr{F}$*-limit of a sequence of prime ideals*, Communications in Algebra, 39, (2011) 2532-2544.

[22] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of Continuos Functions*, Graduate Text in Mathematics, Vol. 43, Springer-Verlag, 1960.

[23] J. S. Golan, *Semirings and their applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[24] A. Grothendieck and J. Dieudonné, *Elements de Géometrie Algébrique I*, Berlin: Springer, 1970.

[25] V. Gupta and J. N. Chaudhari, *Prime ideals in semirings*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2), 34 no. 2 (2011) 417–421.

[26] N. Hindman and D. Strauss, *Algebra in the Stone-$\widehat{C}$ech Compactification*, Walter de Gruyter, Berlin, 1998.

[27] M. Hochster, *Prime ideal structure in commutative rings*, Trans. AMS 142 (1969) 43–60.

[28] K. Iséki and Y. Miyanaga, *Notes on topological spaces IV. Function semiring on topological spaces*, Proc. Japan. Acad., 32, (1956) 392–395.

[29] K. Kunen, *Weak P-points in ω^**, Colloq. Math. Soc. János Bolyai on Topology, Budapest, 23 (1978) 741–749.

[30] J. van Mill, *A introduction to $\beta\omega$*, In: K. Kunen, J. E. Vaughan, eds. *Handbook of Set-Theoretic Topology*, North-Holland, (1984) 503–567.

[31] L. M. Ruza and J. Vielma, *Gelfand Semirings, m-Semirings and the Zariski Topology*, International Journal of Algebra, Vol. 3, no. 20 (2009) 981–991.

[32] L. M. Ruza and J. Vielma, *The equality of the Patch topology and the Ultrafilter topology: A shorcut*, Applied General Topology, Vol. 12, no. 1 (2011) 15–16.

[33] P. Simon (1985), *Applications of Independent Linked Families*, Topology, Theory and Applications (Eger 1993), Colloquia Mathematica Societais János Bolyai 41 (1993) 561–580.

[34] C. Uzcátegui and J. Vielma, *Alexandroff Topologies viewed as closed subsets of the Cantor cube*, Divulg. Mat. 13 (2005) 45–53.

[35] H. S. Vandiver, *Note on a simple type of algebra in which the cancellation law of addition does not hold*, Bull. Amer. Math. Soc., 40 (12), (1934) 914–920.