



Universidad de Concepción  
Dirección de Postgrado  
Facultad de Ingeniería - Programa de Magíster en Ciencias de la Ingeniería con mención en  
Ingeniería Mecánica

## **Influencia del amortiguamiento no lineal en el desempeño de las suspensiones de motocicletas**

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería con  
mención en Ingeniería Mecánica

FELIPE ANDRES VASQUEZ STUARDO  
CONCEPCIÓN-CHILE  
2016

Profesor Guía: Cristián Molina Vicuña  
Dpto. de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería  
Universidad de Concepción

## Resumen

En esta tesis se utiliza un modelo mono-suspensión de un grado de libertad para investigar la influencia que tiene el amortiguamiento no lineal en la disipación de energía, desplazamiento y aceleración de las motocicletas durante los aterrizajes. La fuerza de amortiguamiento se considera como la suma de funciones potencia de la velocidad de compresión o expansión del amortiguador con exponentes reales positivos, dado que se conoce el significado físico de algunos órdenes (exponentes). Se simulan aterrizajes desde cuatro alturas para comparar cuatro fuerzas de amortiguamiento de un orden. También se simula una fuerza de amortiguamiento de dos órdenes y se compara con el amortiguamiento lineal. Los resultados muestran que para aterrizajes desde bajas alturas, al aumentar el orden de amortiguamiento, la disipación de energía y las aceleraciones disminuyen y los desplazamientos aumentan. Sin embargo, si la altura del aterrizaje aumenta lo suficiente (sobre 0.1 [m] con los valores considerados), el comportamiento se invierte. Los resultados también muestran que la fuerza de amortiguamiento de dos órdenes puede mejorar el desempeño de la suspensión comparado con un amortiguador lineal, lo que permite suponer que en optimizaciones, a mayor cantidad de órdenes considerados en la fuerza de amortiguamiento, mejor se deberían cumplir las funciones objetivo del problema

# Índice

Resumen .....	ii
Índice .....	iii
Índice de figuras .....	v
Índice de tablas .....	v
Abreviaciones .....	vi
1 Introducción.....	1
1.1 Objetivo general .....	3
1.2 Objetivos específicos.....	3
2 Modelo mono-suspensión de una motocicleta.....	4
2.1 Consideraciones generales.....	4
2.2 Disipación de energía .....	5
2.3 Desplazamiento, velocidad y aceleración.....	9
2.3.1 Desplazamiento .....	9
2.3.2 Velocidad.....	10
2.3.3 Aceleración.....	11
2.3.4 Solución general .....	12
2.3.5 Condiciones iniciales.....	12
3 Simulaciones.....	14
3.1 Motocicleta.....	14
3.2 Amortiguamiento de un orden.....	15

3.3 Amortiguamiento de dos órdenes.....	16
3.4 Banda de fricción.....	17
4 Resultados.....	18
4.1 Resultados numéricos.....	18
4.1.1 Disipación de energía.....	18
4.1.2 Desplazamiento.....	21
4.1.3 Aceleración.....	22
4.2 Modelo analítico.....	23
4.2.1 Desplazamiento.....	23
4.2.2 Aceleración.....	24
4.3 Amortiguamiento de dos órdenes.....	25
4.3.1. Disipación de energía.....	25
4.3.2 Desplazamiento.....	26
4.3.3 Aceleración.....	27
5 Conclusiones.....	30
Referencias.....	31

## Índice de figuras

Figura 1: Aterrizaje de una motocicleta mono-suspensión. ....	5
Figura 2: Representación gráfica de la disipación de energía durante el aterrizaje. ....	7
Figura 3: Amortiguamiento vertical de la mono-suspensión delantera. La medición experimental se muestra junto a los amortiguadores analizados. ....	16
Figura 4: Fuerza de compresión del amortiguador lineal y combinado. ....	17
Figura 5: Disipación de energía del sistema vs el desplazamiento de la suspensión en los cuatro escenarios. ....	19
Figura 6: Porcentaje de energía disipada en la primera compresión de un aterrizaje con respecto a la energía total a ser disipada. ....	20
Figura 7: Evolución del desplazamiento de la suspensión en el tiempo. ....	21
Figura 8: Evolución de las aceleraciones en el tiempo. ....	22
Figura 9: Comparación de desplazamientos peak numéricos y analíticos normalizados por la altura inicial vs el orden de amortiguamiento. ....	23
Figura 10: Comparación de aceleraciones peak numéricos y analíticos vs el orden de amortiguamiento. ....	24
Figura 11: Disipación de energía del amortiguador lineal y combinado. ....	26
Figura 12: Evolución de los desplazamientos en el tiempo con el amortiguador lineal y combinado. ....	27
Figura 13: Evolución de las aceleraciones en el tiempo con el amortiguador lineal y combinado. ....	28

## Índice de tablas

Tabla 1: Coeficientes de rigidez y amortiguamiento por unidad de masa. ....	15
---	----

## Abreviaciones

$A$	Amplitud
$b$	Coeficiente de amortiguamiento por unidad de masa
$c^2$	Coeficiente de elasticidad por unidad de masa
$D$	Coeficiente de amortiguamiento
$E$	Energía mecánica del sistema por unidad de masa
$F_d$	Fuerza de amortiguamiento
$i$	Orden de elasticidad
$k$	Orden de amortiguamiento
$M$	Masa suspendida
$S$	Coeficiente de elasticidad
$x$	Posición del sistema
$\phi$	Fase
$\Gamma(\cdot)$	Función Gamma



## 1 Introducción

Las motocicletas poseen el sistema de suspensión para proveer confort al piloto y mantener las ruedas en contacto con el suelo. Provee amortiguamiento por dos mecanismos: roce de Coulomb y fuerzas viscosas. El roce de Coulomb se presenta en los sellos, bujes y uniones de las barras de la suspensión, mientras que la fuerza viscosa se genera al forzar el paso de un fluido viscoso de una cámara a otra del amortiguador, a través de unos orificios del pistón que va unido al extremo interno del vástago. En los amortiguadores antiguos, los orificios tienen un área constante, mientras que en los amortiguadores actuales, el área del orificio está controlada por una válvula de resorte que abre en función del caudal que fluye de una cámara a otra. A su vez, este caudal, depende de la geometría interna del amortiguador y de la velocidad con la que se extiende o comprime el amortiguador.

La fuerza de roce  $F_{d,f}$  presenta dos comportamientos: si existe desplazamiento relativo entre partes, la fuerza es constante  $D$ , se opone al movimiento y depende de la fuerza normal y del coeficiente de roce dinámico. Por el contrario, si no existe un desplazamiento, la fuerza puede asumir cualquier valor entre 0 y  $D$  en cada sentido.  $D$  depende de la fuerza normal y del coeficiente de roce estático, que se asume igual al dinámico para simplificar la descripción. Bajo estas consideraciones, la fuerza de amortiguamiento debido a la fricción se escribe como en la Ecuación (1).

$$\begin{cases} F_{d,f} = -D \frac{|\dot{x}|}{\dot{x}}, & \dot{x} \neq 0 \\ -D < F_{d,f} < D, & \dot{x} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

En los amortiguadores con orificios de área constante, la fuerza es proporcional al cuadrado de la velocidad entre los extremos del amortiguador, Ecuación (2) [1,2]. De forma diferente, en los amortiguadores con orificios de área variable, la fuerza depende del pistón y de la configuración de la válvula, con lo que se pueden obtener amortiguamientos lineales, progresivos y digresivos independientemente para la carrera de compresión y extensión, [2]. En el amortiguamiento progresivo la pendiente  $\frac{dF_d}{d\dot{x}}$  aumenta con la velocidad –por ejemplo el amortiguamiento cuadrático–; mientras que en el amortiguamiento digresivo, la pendiente disminuye con la velocidad. Si el caudal aumenta una vez que la válvula se encuentra completamente abierta, el área de paso no cambia, por lo que el comportamiento es cuadrático. Es por esto que el comportamiento lineal, progresivo o digresivo se logra dentro de un rango de velocidades de compresión y expansión del amortiguador, pues para velocidades suficientemente altas, el comportamiento siempre es cuadrático.

La fuerza de amortiguamiento se considera proporcional a la función potencia de la velocidad con exponente  $k$ , Ecuación (3), donde  $k \in \mathbb{R}^+$  y la función valor absoluto asegura que la fuerza sea una función impar para cualquier exponente. De esta forma, los amortiguadores digresivos se describen por  $k < 1$  mientras que los progresivos por  $k > 1$ . Para una descripción general de la fuerza de amortiguamiento, se suman las funciones potencias, Ecuación (4).

$$F_d = -D\dot{x}|\dot{x}| \quad (2)$$

$$F_d = -D\dot{x}|\dot{x}|^{k-1} \quad (3)$$

$$F_d = -\sum_k D_k \dot{x}|\dot{x}|^{k-1} \quad (4)$$



La dinámica de vehículos y motocicletas con amortiguadores lineales se encuentra bien documentada (ver [3,4]). Más aun, las optimizaciones de las suspensiones de motocicletas se realizan considerando amortiguamiento lineal (ver [5]). Sin embargo, la fuerza de amortiguamiento no es lineal [6-9], y el efecto que tiene en vehículos sólo se encuentra descrito cualitativamente para ciertos órdenes: por ejemplo, Dixon [2] describe el amortiguamiento de orden cero y dos en vehículos de cuatro ruedas, y Cossalter [3] describe el amortiguamiento progresivo y digresivo en motocicletas. Pero al conocimiento del autor, no existe un estudio sistemático de la influencia del orden de amortiguamiento en el desempeño de la suspensión.

### ***1.1 Objetivo general***

Investigar el efecto del orden del amortiguamiento en el comportamiento de la suspensión de una motocicleta.

### ***1.2 Objetivos específicos***

- Simular numéricamente el aterrizaje de una motocicleta y respaldarlo con un modelo analítico.
- Comparar la disipación de energía, desplazamientos y aceleraciones en un aterrizaje utilizando amortiguamientos de diferentes órdenes.
- Comparar un amortiguamiento de dos órdenes con uno lineal.

## 2 Modelo mono-suspensión de una motocicleta

### 2.1 Consideraciones generales

Para determinar la influencia que tiene el amortiguamiento no lineal en los aterrizajes, un modelo de un grado de libertad es suficiente para obtener las características generales del movimiento. Este modelo se denomina Modelo mono-suspensión [3] para motocicletas y es equivalente al modelo de un cuarto de auto de los vehículos de cuatro ruedas.

La ecuación del movimiento que describe el movimiento vertical de la motocicleta con fuerzas elástica y de amortiguamiento no lineales, cuando está en contacto con el suelo es:

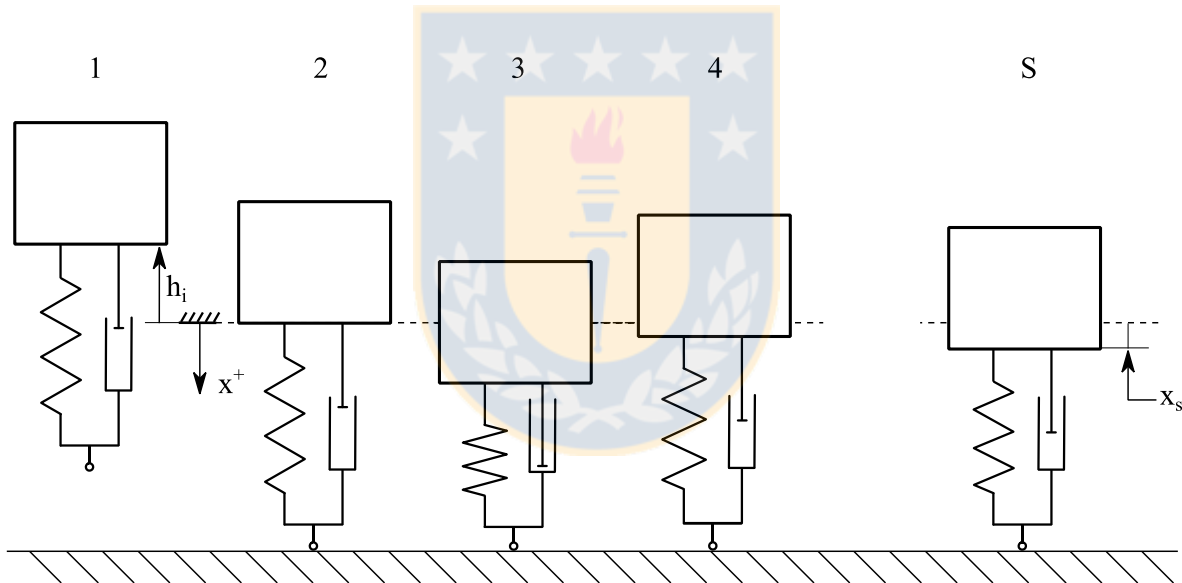
$$M\ddot{x} + \sum_k D_k \dot{x} |\dot{x}|^{k-1} + \sum_i S_i x |x|^{i-1} - Mg = 0 \quad (5)$$

Donde  $M$  corresponde a la masa suspendida delantera o trasera,  $D_k$  son los coeficientes de amortiguamiento correspondientes a cada orden de amortiguamiento,  $S_i$  son los coeficientes elásticos correspondientes a cada orden  $i \in \mathbb{R}^+$  y  $g$  es la aceleración de gravedad. Dividiendo la ecuación (5) por la masa, se obtiene la representación tradicional de la ecuación del movimiento:

$$\ddot{x} + 2 \sum_k b_k \dot{x} |\dot{x}|^{k-1} + \sum_i c_i^2 x |x|^{i-1} - g = 0 \quad (6)$$

Donde  $c_i$  son los coeficientes de elasticidad por unidad de masa y  $b_k$  son los coeficientes de amortiguamiento por unidad de masa.

Debido a irregularidades en el camino, la motocicleta puede saltar o ser levantada del suelo. Después de esta situación ocurre el aterrizaje y los siguientes instantes son de interés (figura 1). En el instante 1, la masa suspendida se encuentra en la altura máxima  $h_i$ , con velocidad vertical cero, y comienza una caída libre. En el instante 2, el sistema toca el suelo en la posición  $x = 0$  y la suspensión comienza la carrera de compresión. En el instante 3, la masa está en el punto más bajo, y comienza la carrera de expansión. En el instante 4, la motocicleta termina la expansión, vuelve a tener velocidad vertical cero y comienza una nueva compresión. Las oscilaciones pueden continuar hasta que el sistema se detiene en la posición  $x_s$ , en el instante S.



**Figura 1: Aterrizaje de una motocicleta mono-suspensión.**

## 2.2 Disipación de energía

Desde el punto de vista de la energía, se desea que la suspensión disipe la energía en la menor cantidad de oscilaciones y lo más rápido posible para poder enfrentar el siguiente evento del camino sin energía remanente de eventos previos.

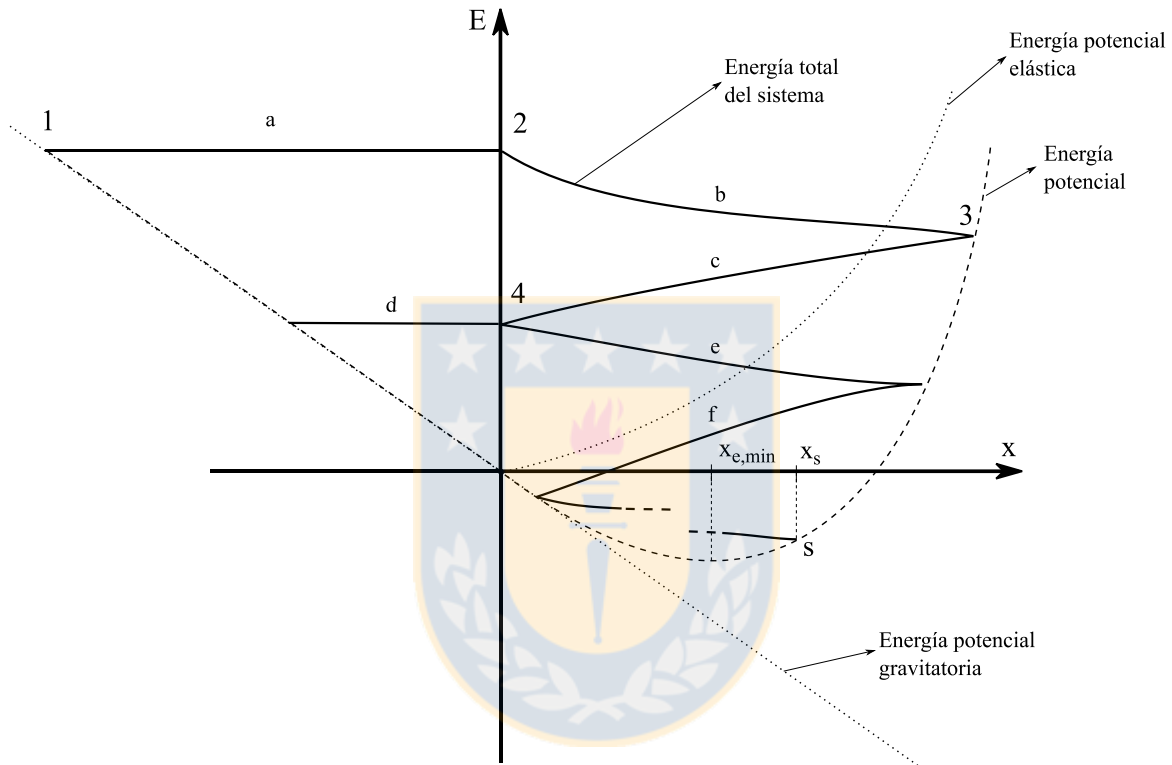
La energía con respecto al desplazamiento de la suspensión se muestra esquemáticamente en la Figura 2. Durante la caída libre, la energía total se mantiene constante (segmento a) debido a que se ignoran las fuerzas aerodinámicas. Luego, en la carrera de compresión (segmento b) el amortiguador disipa energía a través de su válvula de compresión y el movimiento se detiene en la posición donde la energía total del sistema es igual a la energía potencial que tiene en dicha posición. A continuación, en la carrera de expansión (segmento c), la energía se disipa a través de la válvula de expansión del amortiguador. En el instante 4, si hay energía suficiente en el sistema, éste salta (segmento d) hasta una altura proporcional a la energía remanente representada por la línea segmentada de la izquierda. Luego el sistema aterriza y las carreras de compresión (segmento e) y expansión (segmento f) siguen en una cantidad que depende de cada sistema, hasta que llega a la posición estática  $x_s$  en el instante  $S$ . Esta posición coincide con la posición de mínima energía potencial  $x_{e,min}$ , excepto si existe roce, con el cual, el movimiento se detiene en un punto diferente de la curva de energía potencial.

Cuando la motocicleta está en contacto con el suelo, la energía potencial del sistema consiste en la suma de la energía potencial elástica y gravitatoria, sin embargo si no está en contacto, la energía potencial consiste solamente en la energía gravitatoria.

Modificando las ecuaciones presentas por Cveticanin [10] para considerar la energía potencial gravitatoria, la energía mecánica por unidad de masa del sistema se muestra en la ecuación (7) y la razón de cambio de la energía a través de la carrera, en la ecuación (8).

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \sum_i \frac{c_i^2 x^{i+1}}{i+1} - gx \quad (7)$$

$$\frac{dE}{dx} = -\sum_k 2^{\frac{k+2}{2}} b_k \left| E + gx - \sum_i \frac{c_i^2 x^{i+1}}{i+1} \right|^{\frac{k}{2}} \quad (8)$$



**Figura 2: Representación gráfica de la disipación de energía durante el aterrizaje.**

En la ecuación (8) se puede ver que la disipación de energía a través de la carrera, depende de la cantidad instantánea de energía por unidad de masa  $E$ , la posición instantánea  $x$  y los coeficientes elásticos y de amortiguamiento y de los órdenes de elasticidad y amortiguamiento.

La ecuación (8) se resuelve analíticamente para dos casos. Los casos considerados son a) amortiguamiento de orden 0 y elasticidad de orden 1, que representa una suspensión

con resortes lineales amortiguado por roce, que fue el primer tipo de amortiguamiento en las motocicletas, y b) amortiguamiento de orden 2 y elasticidad de orden 1, que presenta una suspensión con resortes lineales y amortiguadores de orificios de área fija.

- Caso a

Reemplazando términos, la ecuación (8) se reduce a (9):

$$\frac{dE}{dx} = -2b_0 \quad (9)$$

Que tiene la siguiente solución:

$$E(x) = E(0) - 2b_0x \quad (10)$$

- Caso b

Reemplazando términos, la ecuación (8) se convierte en (11):

$$\frac{dE}{dx} + 4b_2E - 2b_2c_1^2x^2 + 4b_2gx = 0 \quad (11)$$

Con solución (12):

$$E(x) = \left( E(0) - \frac{g}{4b_2} - \frac{c_1^2}{16b_2^2} \right) e^{-4b_2x} + \frac{c_1^2x^2}{2} - \left( g + \frac{c_1^2}{4b_2} \right) x + \frac{c_1^2}{16b_2^2} + \frac{g}{4b_2} \quad (12)$$

Comparando los resultados de la ecuación (10) y (12), se observan claras diferencias entre las dos disipaciones de energía. Para el amortiguamiento de orden 0, la disipación de la energía es proporcional al desplazamiento; mientras que para el amortiguamiento de orden 2, la disipación de energía es una función exponencial y cuadrática del desplazamiento.

Estas soluciones representan la disminución de la energía para la primera compresión. Para la siguiente expansión, la ecuación (8) se reevalúa con el coeficiente de amortiguamiento negativo y con la energía y desplazamiento inicial correspondientes a los valores finales de la compresión anterior. Para los siguientes ciclos, se repite el procedimiento.

### ***2.3 Desplazamiento, velocidad y aceleración***

Con respecto al desplazamiento de la suspensión, se desea que éste se mantenga en su rango de movimiento, porque una suspensión completamente comprimida o extendida no es capaz de seguir las irregularidades del camino. También es importante mantener las aceleraciones lo más bajo posible para entregarle confort al piloto. En esta sección se presenta una solución analítica aproximada de la ecuación del movimiento con amortiguamiento y elasticidad de un orden.

#### ***2.3.1 Desplazamiento***

Una solución aproximada a la ecuación del movimiento homogénea con un orden de elasticidad y amortiguamiento, ecuación (13), es presentada por Cveticanin [10]. La solución se basa en un método de promedios y consiste en una función sinusoidal de amplitud y fase variable en el tiempo, ecuación (14).

$$\ddot{x} + 2b_k \dot{x} |\dot{x}|^{k-1} + c_i^2 x |x|^{i-1} = 0 \quad (13)$$

$$x(t) = A(t) \sin \phi(t) \quad (14)$$

Donde

$$A(t) = \begin{cases} A_0 \left( 1 - \frac{(1-k)Q_k b_k}{(A_0^{(i+1)/2} P_{ie} c_i)^{1-k}} t \right)^{\frac{2}{(i+1)(1-k)}}, & k < 1 \\ \frac{A_0}{(1+(k-1)Q_k b_k (A_0^{(i+1)/2} P_{ie} c_i)^{(k-1)} t)^{\frac{2}{(i+1)(k-1)}}}, & k > 1 \end{cases} \quad (15)$$

$$\phi(t) = \phi_0 - \frac{\Gamma(k)}{2^{k-2} k \Gamma^2\left(\frac{k}{2}\right)} \ln \left| \frac{A}{A_0} \right| - \frac{(i+1)c_i^{2-k} P_{ie}^{2-k} A_0^{\frac{2i-ki-k}{2}}}{(2i-ki-k)Q_k b_k} \left( 1 - \frac{(1-k)Q_k b_k}{(A_0^{(i+1)/2} P_{ie} c_i)^{1-k}} t \right)^{\frac{2i-ki-k}{(i+1)(1-k)}} \quad (16)$$

Donde  $A_0$  es la amplitud inicial de la vibración;  $\phi_0$  es la fase inicial;  $\Gamma(\cdot)$  es la función gamma;  $Q_k$  es un término que depende de  $i$  y de  $k$ , ecuación (17); y  $P_{ie}$  depende de  $i$ , ecuación (18).

$$Q_k(k, i) = \frac{2^{k+1} i+1}{\pi} \frac{k}{i+3} \frac{\Gamma^2(k/2)}{\Gamma(k)} \quad (17)$$

$$P_{ie}(i) = \sqrt{\frac{\sqrt{\pi} (i+1) \Gamma\left(\frac{i+3}{2(i+1)}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{1}{i+1}\right)}} \quad (18)$$

### 2.3.2 Velocidad

La velocidad del sistema, ecuación (19) se obtiene diferenciando la ecuación (14) con respecto al tiempo.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x} = \frac{dA(t)}{dt} \sin \phi(t) + A(t) \cos \phi(t) \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (19)$$



Donde, la amplitud y la fase son las ecuaciones (15) y (16) respectivamente y las razones de cambio de la amplitud y la fase están dadas por las ecuaciones (20) y (21) respectivamente.

$$\frac{dA(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{-2A_0 Q_k b_k}{(i+1)(A_0^{(i+1)/2} P_{ie} c_i)^{1-k}} \left( 1 - \frac{(1-k)Q_k b_k}{(A_0^{(i+1)/2} P_{ie} c_i)^{1-k}} t \right)^{\frac{2}{(i+1)(1-k)}-1}, & k < 1 \\ \frac{-2A_0 Q_k b_k \left( \frac{i+1}{A_0^2 P_{ie} c_i} \right)^{k-1}}{(i+1) \left( 1 + (k-1)Q_k b_k \left( \frac{i+1}{A_0^2 P_{ie} c_i} \right)^{(k-1)} t \right)^{\frac{2}{(i+1)(k-1)}+1}}, & k > 1 \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(t)}{dt} = & - \frac{2\Gamma(k)Q_k b_k \frac{d}{dt} \left| \left( 1 - \frac{(1-k)Q_k b_k}{(A_0^{(i+1)/2} P_{ie} c_i)^{1-k}} t \right)^{\frac{2}{(i+1)(1-k)}} \right| \left( 1 - \frac{(1-k)Q_k b_k}{(A_0^{(i+1)/2} P_{ie} c_i)^{1-k}} t \right)^{\frac{2}{(i+1)(1-k)}-1}}{2^{k-2} k \Gamma^2\left(\frac{k}{2}\right) (i+1) (A_0^{(i+1)/2} P_{ie} c_i)^{1-k} \left| \left( 1 - \frac{(1-k)Q_k b_k}{(A_0^{(i+1)/2} P_{ie} c_i)^{1-k}} t \right)^{\frac{2}{(i+1)(1-k)}} \right|} + \\ & \frac{(c_i P_{ie})^{2-k} A_0^{\frac{2i-ki-k}{2}}}{(A_0^{(i+1)/2} P_{ie} c_i)^{1-k}} \left( 1 - \frac{(1-k)Q_k b_k}{(A_0^{(i+1)/2} P_{ie} c_i)^{1-k}} t \right)^{\frac{2i-ki-k}{(i+1)(1-k)}-1} \end{aligned} \quad (21)$$

### 2.3.3 Aceleración

Una vez que se conoce el desplazamiento y la velocidad, la aceleración del sistema se obtiene directamente de la ecuación (13):

$$\ddot{x}(t) = -2b_k \dot{x}(t) |\dot{x}(t)|^{k-1} + c_i^2 x(t) |x(t)|^{i-1} \quad (22)$$

### 2.3.4 Solución general

Para considerar el efecto de la gravedad, se suma una solución particular a la solución homogénea. La ecuación (23) es una solución particular que representa el punto de equilibrio del sistema en un tiempo infinito.

$$x = \left(\frac{g}{c_i^2}\right)^{1/i} \quad (23)$$

Como resultado, la solución general que describe el movimiento de la motocicleta durante el aterrizaje es:

$$x(t) = A(t) \sin \phi(t) + \left(\frac{g}{c_i^2}\right)^{1/i} \quad (24)$$

### 2.3.5 Condiciones iniciales

Los términos  $A_0$  y  $\phi_0$  de la ecuación (24) (ecuaciones (15) y (16)) se obtienen a partir de las condiciones iniciales, ecuación (25).

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (25)$$

Reemplazando la ecuación (24) en (25) se obtiene una expresión con  $A_0$  y  $\phi_0$ , ecuación (26):

$$\phi_0 = \arcsin\left(-\frac{1}{A_0} \left(\frac{g}{c_i^2}\right)^{\frac{1}{i}}\right) + \frac{(i+1)(c_i P_{ie})^{2-k} A_0^{\frac{2i-ki-i}{2}}}{(2i-ki-i) Q_k b_k} \quad (26)$$

Reemplazando la velocidad, ecuación (19), en (25), se obtiene (27);

$$\dot{x}_0 = \frac{2Q_k b_k (A_0 \kappa_0)^{k-1}}{i+1} \left(\frac{g}{c_i^2}\right)^{\frac{1}{i}} + \sqrt{1 - \frac{1}{A_0^2} \left(\frac{g}{c_i^2}\right)^{\frac{2}{i}}} \left(A_0 \kappa_0 + \frac{16A_0 (A_0 \kappa_0)^{k-1} b_k}{\pi(k+1)(i+3)}\right) \quad (27)$$

Resolviendo la ecuación (27), se obtiene  $A_0$ . Solo son posibles físicamente valores reales positivos debido a que la motocicleta solo oscila en desplazamientos positivos. A continuación, reemplazando  $A_0$  en la ecuación (26) se obtiene  $\phi_0$ .

De las ecuaciones (19), (22) y (23) se puede ver que la influencia del orden de amortiguamiento en el desplazamiento, velocidad y aceleraciones son funciones intrincadas de las que no se pueden extraer conclusiones por simple inspección.



### 3 Simulaciones

Para entender cuantitativamente el efecto del orden de amortiguamiento se realizan simulaciones de la mono-suspensión. Los escenarios considerados son aterrizajes desde cuatro alturas diferentes: 0.01 [m], 0.05 [m], 0.1 [m] and 0.5 [m], denominadas S1, S2, S3 y S4 respectivamente. Los escenarios S1 y S2 son típicos en condiciones de caminos pavimentados, mientras que los escenarios S3 y S4 se encuentran en el manejo off-road.

#### 3.1 Motocicleta

Se considera la mono-suspensión delantera de una motocicleta off-road, Yamaha YZ 250 F 2009. La masa del modelo corresponde a la masa suspendida delantera, la que es calculada a través de mediciones de la motocicleta completa con el piloto en posición de manejo y la masa no suspendida. El resorte del modelo corresponde a la rigidez vertical de la suspensión delantera, la que es calculada considerando el ángulo de ataque de la horquilla (ángulo entre la horquilla y una línea perpendicular al suelo) y el coeficiente elástico real del resorte que es determinado experimentalmente con cargas estáticas. El amortiguador del modelo corresponde al amortiguamiento vertical de la suspensión delantera el que es calculado considerando el ángulo de ataque de la horquilla y la fuerza de amortiguamiento real, que es medida con un ensayo sinusoidal en un dinamómetro de amortiguadores.

El coeficiente de elasticidad por unidad de masa  $c_i$  se calcula considerando la rigidez vertical y la masa suspendida. De modo diferente, se calculan dos coeficientes de amortiguamiento por unidad de masa  $b_{1,c}$  y  $b_{1,e}$  que son calculados usando los coeficientes

de amortiguamiento lineal de compresión y expansión respectivamente y la masa suspendida, tabla 1.

**Tabla 1 Coeficientes de rigidez y amortiguamiento por unidad de masa.**

Aspecto	Valor
Coeficiente de rigidez $c_1$	11.81 [1/s]
Coeficiente de amortiguamiento de compresión $b_{1,c}$	2.61 [1/s]
Coeficiente de amortiguamiento de expansión $b_{1,e}$	7.52 [1/s]

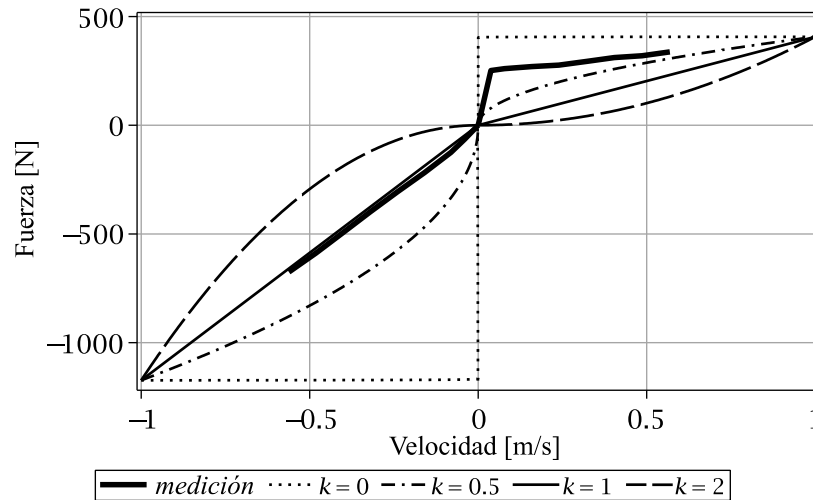
### 3.2 Amortiguamiento de un orden

Para comparar las fuerzas de amortiguamiento de un orden se eligen los órdenes 0, 0.5, 1 y 2, que representan un amortiguamiento constante, digresivo, lineal y progresivo respectivamente. Se consideran los mismos coeficientes de amortiguamiento para los cuatro amortiguadores, ecuaciones (28) y (29) lo que implica que todos los amortiguadores ejercen la misma fuerza a  $\dot{x} = 1 \left[ \frac{m}{s} \right]$  y  $\dot{x} = -1 \left[ \frac{m}{s} \right]$ .

$$b_{k,c} = b_{0,c} = b_{0.5,c} = b_{1,c} = b_{2,c} \quad (28)$$

$$b_{k,e} = b_{0,e} = b_{0.5,e} = b_{1,e} = b_{2,e} \quad (29)$$

La fuerza de amortiguamiento vertical se obtiene para velocidades menores que  $\pm 1 [m/s]$ , por lo que las mediciones se extrapolan a  $\pm 1 [m/s]$ . Este valor luego es usado para ajustar los coeficientes de amortiguamiento de los cuatro amortiguadores en estudio, Figura 3. Las velocidades positivas representan la carrera de compresión y las velocidades negativa, la de expansión.



**Figura 3: Amortiguamiento vertical de la mono-suspensión delantera. La medición experimental se muestra junto a los amortiguadores analizados.**

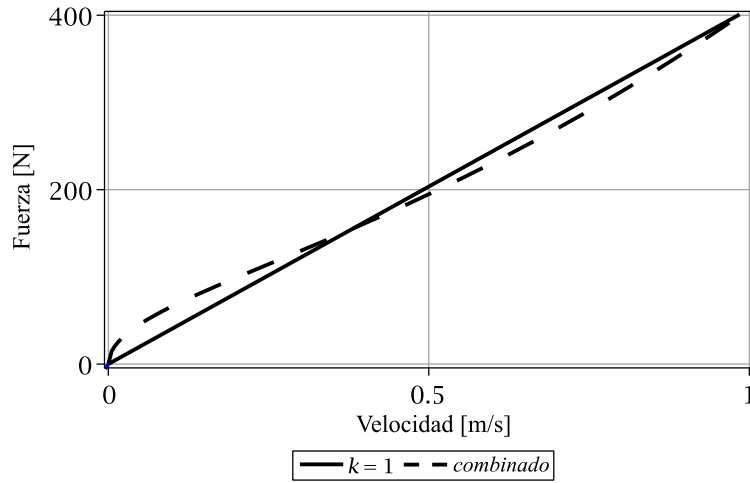
Los factores de amortiguamiento con amortiguador lineal  $\left(\xi = \frac{D}{\sqrt{4SM}}\right)$  son 0.22 y 0.63 en compresión y expansión respectivamente.

### 3.3 Amortiguamiento de dos órdenes.

La fuerza de amortiguamiento de dos órdenes se escoge con órdenes 0.5 y 2 combinados en igual proporción, ecuación (30), y es comparada al amortiguador lineal. La figura 4 muestra la fuerza de compresión del amortiguador combinado y del lineal. La extensión es equivalente (no mostrada).

$$F_d = b_2 \dot{x} |\dot{x}|^1 + b_{0.5} \dot{x} |\dot{x}|^{-0.5} \quad (30)$$

La razón de cambio de la energía con un amortiguador combinado es la suma de un término con  $k = 0.5$  y otro con  $k = 2$ , ecuación (31) y la ecuación del movimiento es la ecuación (32).



**Figura 4: Fuerza de compresión del amortiguador lineal y combinado.**

$$\frac{dE}{dx} = -2^{\frac{2.5}{2}} b_{0.5} \left| E + gx - \frac{c_1^2 x^2}{2} \right|^{\frac{1}{4}} - 4b_2 \left| E + gx - \frac{c_1^2 x^2}{2} \right| \quad (31)$$

$$\ddot{x} + b_2 \dot{x} |\dot{x}|^1 + b_{0.5} \dot{x} |\dot{x}|^{-0.5} + c_1^2 x - g = 0 \quad (32)$$

### 3.4 Banda de fricción

El amortiguamiento con fricción requiere una consideración especial. Como la fuerza de roce existe incluso cuando la velocidad es cero, la fuerza restauradora debe vencer al roce para iniciar cada movimiento.

Los desplazamientos del resorte requeridos para comenzar una extensión y una compresión están dados por la ecuación (33) y (34) respectivamente.

$$c^2 x - g > 2b_e \rightarrow x > 0.178 \text{ [m]} \quad (33)$$

$$g - c^2 x > 2b_c \rightarrow x < 0.033 \text{ [m]} \quad (34)$$

Esto significa que si una carrera termina en el intervalo  $x \in [0.033, 0.178]$ , llamada banda de fricción en [2], el movimiento no se reanuda.

## 4 Resultados

Las ecuaciones de la energía, ecuaciones (8) y (31) son integradas numéricamente en cada carrera utilizando el método Runge-Kutta-Falberg (orden 4 y 5) con paso de tiempo automático considerando un error absoluto  $1e - 7$  y error relativo  $1e - 6$  en el software Maple. El cálculo se realiza a partir del instante 2 (Figura 1), considerando solamente las situaciones en las que el sistema está en el suelo (es decir, desplazamientos positivos), hasta la cuarta carrera y/o hasta que menos del 5% de toda la energía a ser disipada quede al comienzo de una carrera.

El desplazamiento en el tiempo se obtiene por integración numérica de la ecuación (13) y (32) hasta el tiempo  $t = 2$  [s]. La asimetría del amortiguamiento se considera cambiando el coeficiente de amortiguamiento de la ecuación (13) cada vez que la velocidad es cero.

### 4.1 Resultados numéricos

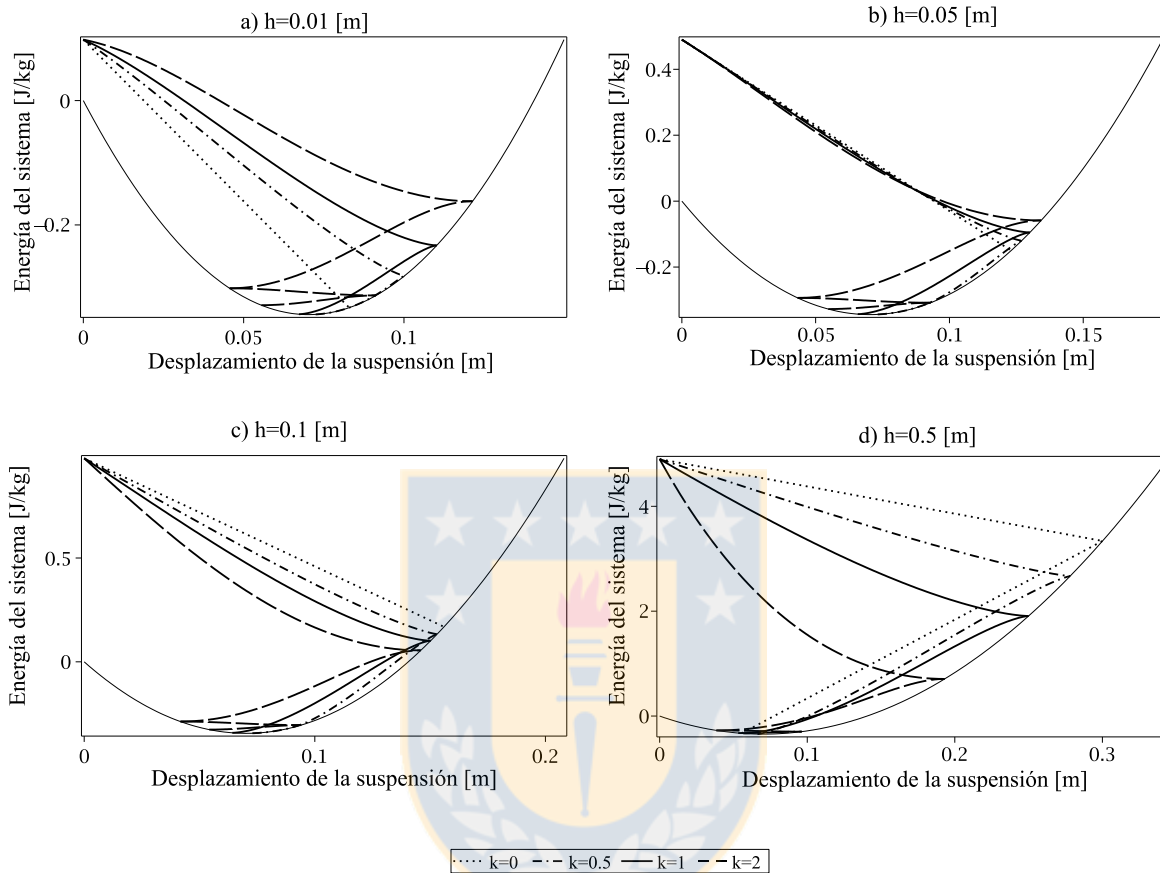
#### 4.1.1 Disipación de energía

Los resultados muestran que el número de ciclos requeridos para disipar la energía inicial aumenta al aumentar el orden de amortiguamiento, Figura 5.

En los escenarios S1, S2 y S3 (Figura 5a, 5b, 5c), el amortiguador constante ( $k = 0$ ) detiene el movimiento al final de la primera compresión en una posición dentro de la banda de fricción; los amortiguadores digresivo ( $k = 0.5$ ) y lineal ( $k = 1$ ), disipan la energía en dos carreras; y el amortiguador progresivo ( $k = 2$ ) requiere más de cuatro carreras para disipar la energía del movimiento. En el escenario S4, el amortiguador constante ( $k = 0$ ) detiene el movimiento en dos carreras, debido a que la primera carrera



termina fuera de la banda de fricción y los demás amortiguadores se comportaron como en los escenarios previos.

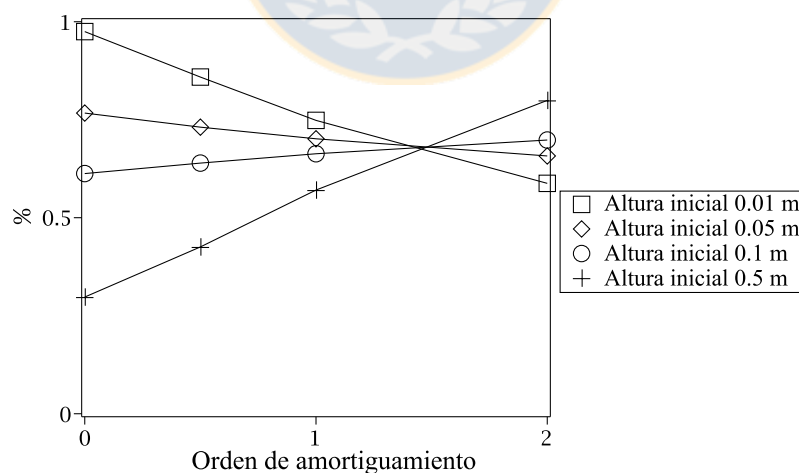


**Figura 5: Disipación de energía del sistema vs el desplazamiento de la suspensión en los cuatro escenarios.**

Al comparar las pendientes en la primera carrera de los amortiguadores digresivo ( $k = 0.5$ ), lineal ( $k = 1$ ) y progresivo ( $k = 2$ ), usando el amortiguador constante ( $k = 0$ ) como referencia, dado que es la misma en cada escenario, Ecuación (10), se puede ver que al aumentar la energía inicial, las pendientes se vuelven más inclinadas y el cambio es mayor para los amortiguamientos de mayor orden. También es posible observar que en el escenario S2, los cuatro amortiguadores tienen aproximadamente la misma pendiente, mientras que los escenarios S3 y S4 las pendientes son más inclinadas que la referencia y

en el escenario S1 menos inclinadas. Esto significa que la energía inicial  $\sim 0.5 \left[ \frac{J}{kg} \right]$  ( $h \sim 0.05 [m]$ ) es un umbral entre amortiguadores disipando menos o más energía por unidad de desplazamiento que el amortiguador de roce.

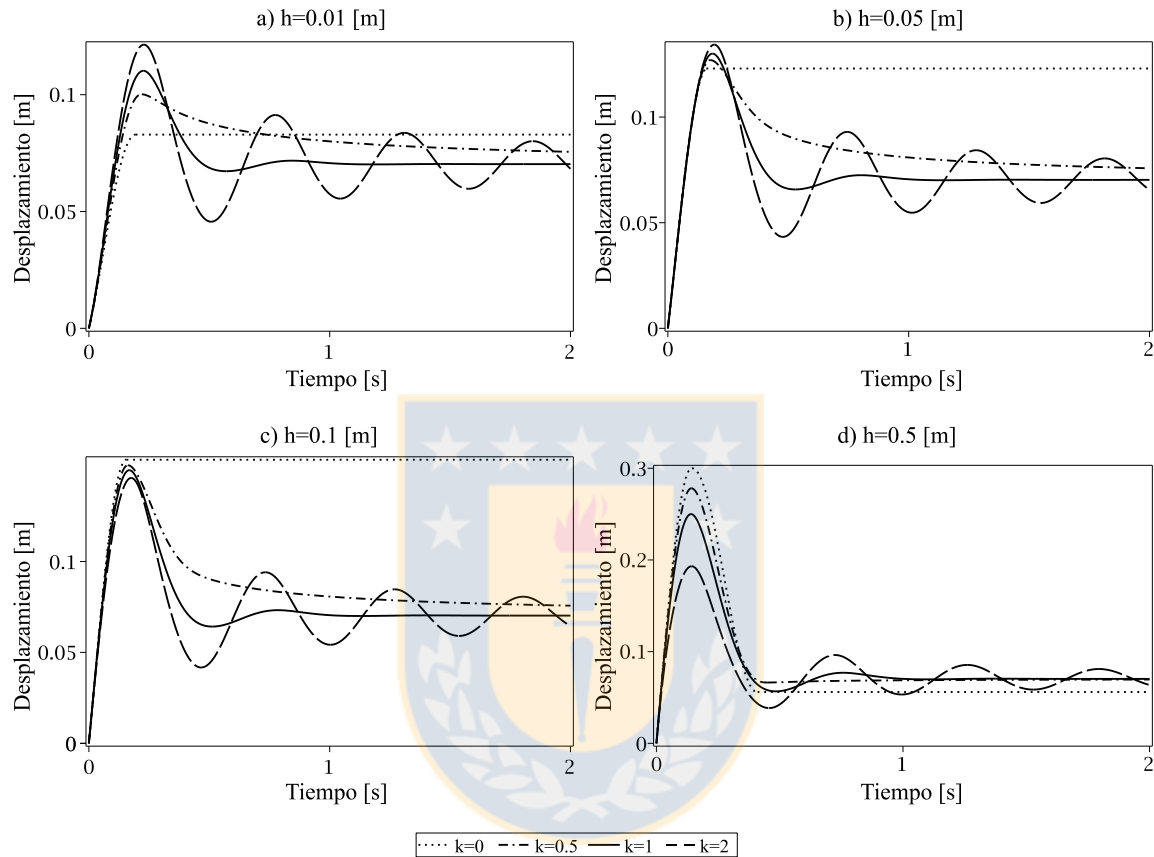
Los resultados de estas simulaciones muestran que el porcentaje de energía disipada en la primera compresión por cada tipo de amortiguador, con respecto a la energía total a ser disipada, depende de la energía inicial (Figura 6). Si la energía inicial es mayor que  $\sim 1 \left[ \frac{J}{kg} \right]$  ( $h \sim 0.1 [m]$ ), el amortiguador progresivo ( $k = 2$ ) disipa más energía que el digresivo, mientras que para energías menores que  $\sim 0.5 \left[ \frac{J}{kg} \right]$  ( $h \sim 0.05 [m]$ ) ocurre lo contrario. Considerando que cada carrera comienza con menos energía inicial que en la anterior y observando la Figura 6, se puede inferir que los amortiguadores de orden menor a 1.4 aproximadamente aumentan el porcentaje de energía disipada tras cada ciclo, mientras que los de orden mayor a 1.4 lo disminuyen.



**Figura 6: Porcentaje de energía disipada en la primera compresión de un aterrizaje con respecto a la energía total a ser disipada.**

#### 4.1.2 Desplazamiento.

Se encuentra que el movimiento experimentado por el sistema durante la primera compresión es similar con los cuatro amortiguadores y luego es diferente (Figura 7).



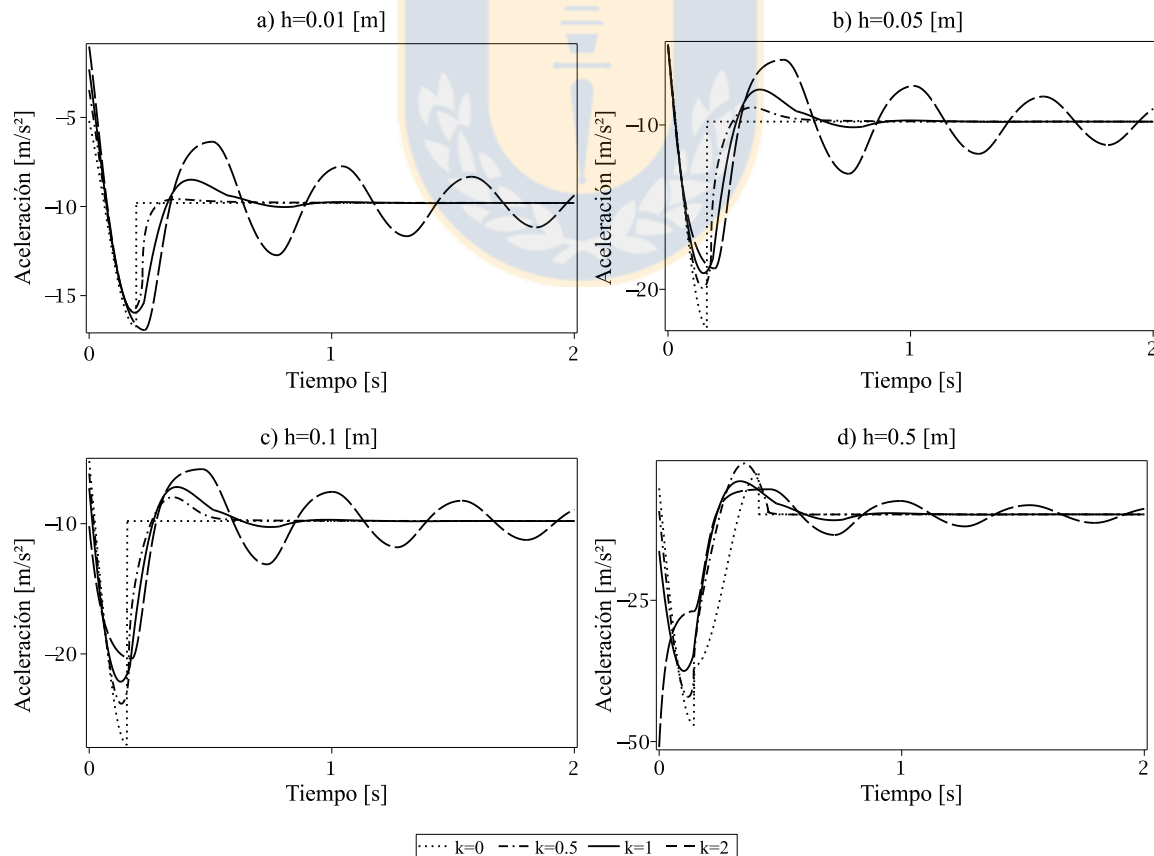
**Figura 7: Evolución del desplazamiento de la suspensión en el tiempo.**

La primera compresión termina en diferentes posiciones con cada amortiguador y es discutida en detalle en la sección 4.2.1. Luego, se observa que el movimiento tiene más oscilaciones al aumentar el orden de amortiguamiento. El movimiento tiende al equilibrio en la posición  $x = 0.07$  [m], excepto para el amortiguador por roce ( $k = 0$ ).

El período de oscilación también es diferente en todos los casos. Comparando el tiempo en el cual el sistema llega a la máxima compresión, se observa que se llega más rápido con el amortiguador por roce ( $k = 0$ ) que con el progresivo ( $k = 2$ ).

#### 4.1.3 Aceleración

Las aceleraciones también son diferentes con cada amortiguador y escenario (Figura 8). Se puede ver que al aumentar el orden de amortiguamiento hay más oscilaciones, siguiendo el comportamiento del desplazamiento y tienden a  $-9.8 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$ . Las aceleraciones peak ocurren al final de la primera compresión, excepto con el amortiguamiento cuadrático ( $k = 2$ ) en el escenario S4 que ocurre al comienzo del aterrizaje. Las diferencias en las aceleraciones peak se discute en detalle en la sección 4.2.2.



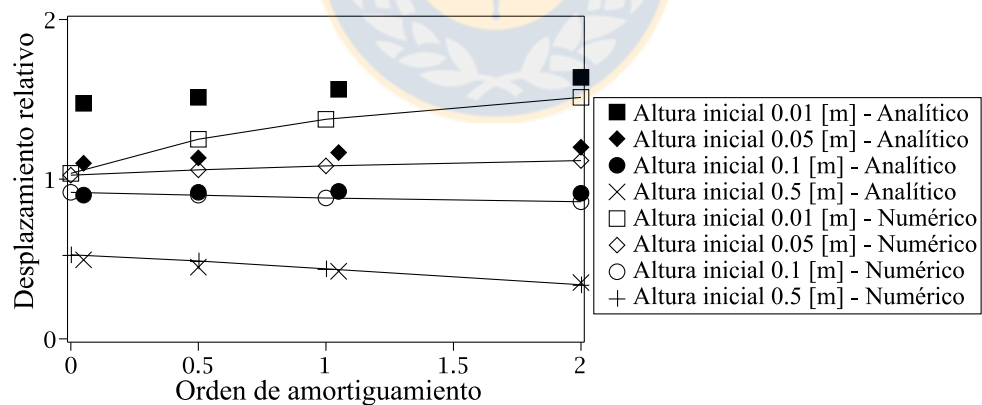
**Figura 8: Evolución de las aceleraciones en el tiempo.**

Al comparar la aceleración peak con el desplazamiento peak, es interesante notar que el amortiguador que produce el menor desplazamiento en cada escenario no necesariamente produce la mayor aceleración peak y viceversa. Por ejemplo, en el escenario S2, el menor desplazamiento ocurre con el amortiguador  $k = 0$ , y también la mayor aceleración peak; mientras que en el escenario S3 el menor desplazamiento ocurre con el amortiguador  $k = 2$ , pero a la vez produce la menor aceleración peak.

## 4.2 Modelo analítico

### 4.2.1 Desplazamiento

Los resultados numéricos se verifican comparando el desplazamiento peak normalizado por la altura inicial con el desplazamiento obtenido por evaluación directa de la Ecuación (6) (Figura 9). La solución analítica no es válida para  $k = 0$  ni  $k = 1$ , por lo que las evaluaciones se realizan con  $k = 0.05$  y  $k = 1.05$  respectivamente.



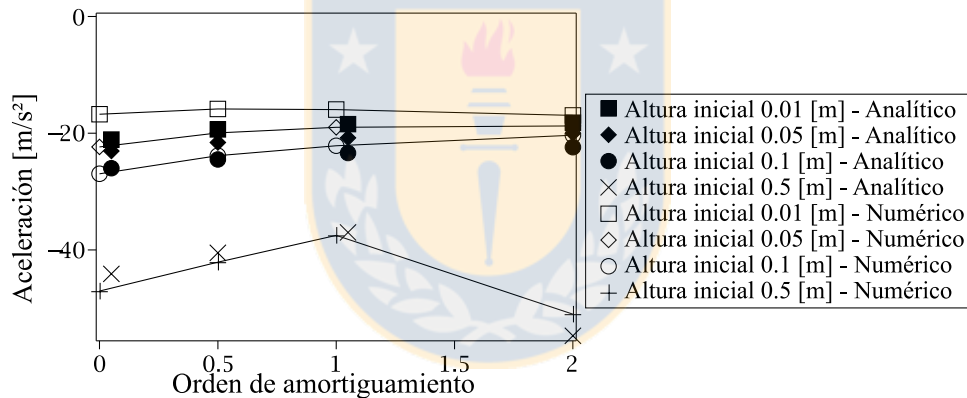
**Figura 9: Comparación de desplazamientos peak numéricos y analíticos normalizados por la altura inicial vs el orden de amortiguamiento.**

Se observa que el modelo analítico predice el mismo efecto del orden de amortiguamiento en el desplazamiento peak que el modelo numérico y muestran mayor

similitud al aumentar la altura del aterrizaje. Ambos predicen que para aterrizajes de baja altura, el desplazamiento peak aumenta con el orden de amortiguamiento, también que para una altura de aterrizaje de 0.1 [m], el desplazamiento es aproximadamente el mismo con cada amortiguador, y que para una altura de aterrizaje de 0.5 [m] el desplazamiento peak disminuye al aumentar el orden de amortiguamiento.

#### 4.2.2 Aceleración

Los resultados numéricos se verifican comparándolos a la aproximación analítica de las aceleraciones (Figura 10). Al igual que con los desplazamientos se considera  $k = 0.05$  y  $k = 1.05$  en vez de  $k = 0$  y  $k = 1$ .



**Figura 10: Comparación de aceleraciones peak numéricos y analíticos vs el orden de amortiguamiento.**

También, al igual que con los desplazamientos, el modelo analítico predice el mismo efecto del orden de amortiguamiento en las aceleraciones peak que el modelo numérico. La excepción es en el escenario S1 en el que el modelo analítico predice una disminución con mayores ordenes de amortiguamiento desde  $-21.1 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$  a  $-18.2 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$ , mientras que el modelo numérico predice la menor aceleración  $\left( -15.9 \left[ \frac{m}{s^2} \right] \right)$  con  $k = 0.5$  y la mayor  $\left( -17.0 \left[ \frac{m}{s^2} \right] \right)$  con  $k = 2$ . En los escenarios S2 y S3, las mayores aceleraciones se

producen por el amortiguador por roce y el mínimo por el progresivo y para el escenario S4 predicen que la menor aceleración se produce con el amortiguador lineal.

Al igual que en el análisis de los desplazamientos, los modelos muestran mayor similitud al aumentar la altura de caída.

Estos resultados están de acuerdo con la literatura. Para el amortiguador cuadrático, Dixon [2] indica que la vibración es lenta para desaparecer y que es áspero con velocidades de amortiguamiento altas y Thede and Parks [11] indican que son blandas para velocidades bajas y ásperas para velocidades altas.

La menor aceleración peak obtenida con el amortiguador lineal ( $k = 1$ ) en S4 permite explicar por qué en los amortiguadores con orificios de área variable de las motocicletas off-road (especialmente de motocross) donde son comunes velocidades de compresión altas, el área máxima de paso de fluido a través del pistón, es mayor que en las motocicletas on-road. Esto se debe a que mientras mayor es el área máxima de paso de fluido, mayor es la velocidad que se requiere para producir amortiguamiento cuadrático.

### ***4.3 Amortiguamiento de dos órdenes***

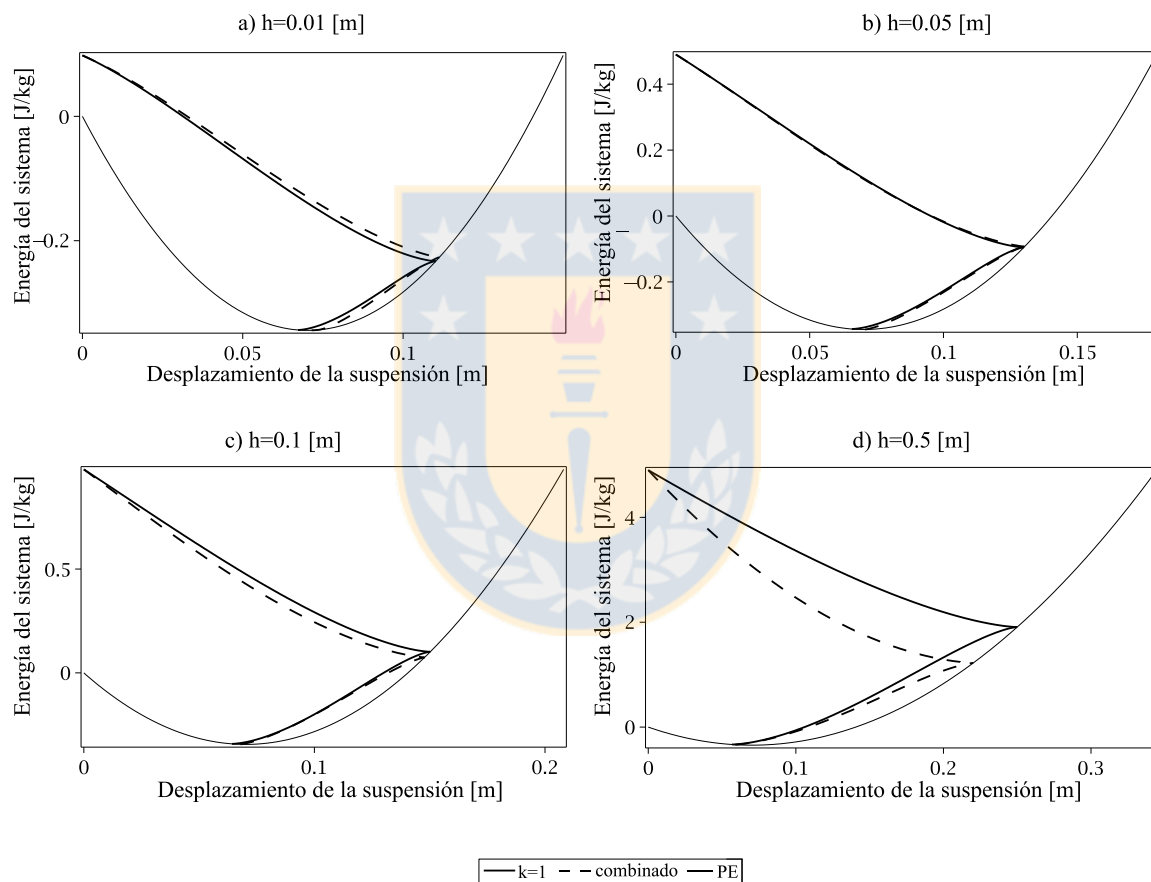
En esta sección, el amortiguamiento lineal se compara con un amortiguamiento de dos órdenes.

#### ***4.3.1. Disipación de energía***

La disipación de energía con el amortiguador combinado se muestra en la Figura 11.

Se observa que la disipación de energía en la primera compresión es similar en los primeros tres escenarios, y en el cuarto se disipa más energía con el amortiguamiento

combinado. Esto es razonable ya que en el escenario S4 el amortiguador trabaja a altas velocidades donde el término cuadrático del amortiguamiento predomina. El amortiguador combinado disipa 2% menos que el lineal en S1; lo mismo en S2; 3% más en S3 y 20% más en S4. En la siguiente extensión, el amortiguador combinado disipa 6% y 2% más energía en el escenario S1 y S2 respectivamente y 6% y 30% menos en los escenarios S3 y S4 respectivamente.



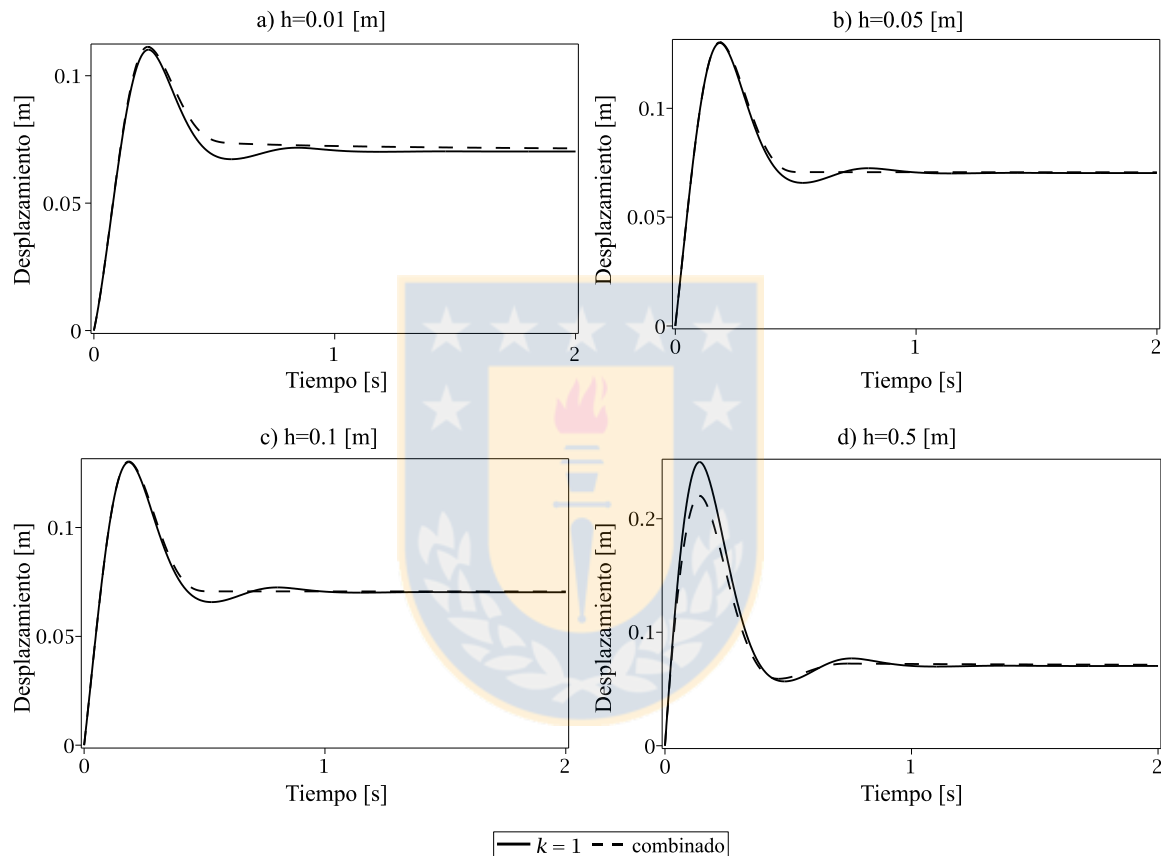
**Figura 11: Disipación de energía del amortiguador lineal y combinado.**

#### 4.3.2 Desplazamiento

Los resultados del desplazamiento en el tiempo (Figura 12) muestran tres diferencias entre el amortiguamiento combinado y lineal. Primero, se observa que el



desplazamiento con el amortiguador combinado con respecto al lineal es igual en los escenarios S1, S2 y S3 y menor en S4. Segundo, con el amortiguador combinado no hay una segunda oscilación significativa. Y tercero, el desplazamiento al final de la primera expansión es más cercano a la posición de equilibrio con el amortiguador combinado que con el lineal en los tres primeros escenarios e igual en el cuarto.

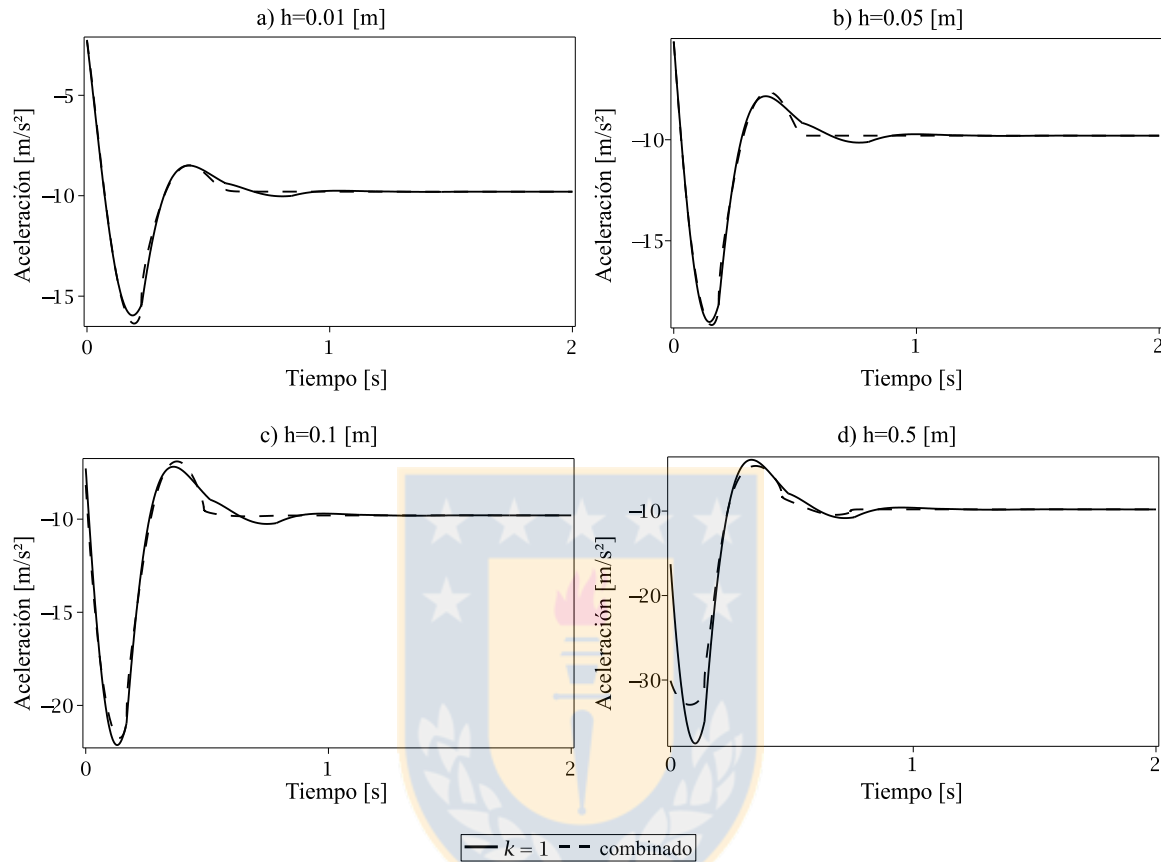


**Figura 12: Evolución de los desplazamientos en el tiempo con el amortiguador lineal y combinado.**

#### 4.3.3 Aceleración

Los resultados (Figura 13) muestran que las aceleraciones son diferentes con ambos amortiguadores. La primera oscilación es similar con ambos amortiguadores, pero la segunda tiene cambios más abruptos en la pendiente (tirón o sobre-aceleración) con el amortiguador combinado que con el lineal. Al comparar las aceleraciones peak se observa

que en los escenarios S1 y S2 estas son 3% y 1% mayor con el combinado que con el lineal respectivamente y 2% y 12% menor en los escenarios S3 y S4 respectivamente.



**Figura 13: Evolución de las aceleraciones en el tiempo con el amortiguador lineal y combinado.**

Para resumir, el amortiguamiento de dos órdenes posee ventajas sobre el amortiguamiento lineal: menor aceleración peak y desplazamiento peak en el escenario S4 y una recuperación más rápida a la posición de equilibrio en los cuatro escenarios sin empeorar significativamente los desplazamientos y aceleraciones en los otros escenarios.

A pesar de que las ventajas del amortiguador combinado con respecto al lineal son modestas en este ejemplo, se muestra que si se realiza una optimización con una fuerza

amortiguadora de dos órdenes, ésta va a cumplir mejor con las funciones objetivos que una fuerza amortiguador de un orden.

Si la optimización se realiza sobre los coeficientes de amortiguamiento y considerando solamente órdenes que se sabe cómo implementarlos en un amortiguador real (por ejemplo  $k = 0$  con roce,  $k = 1$  con una válvula de resorte y  $k = 2$  con un orificio de área fija) el resultado indica directamente cuánto se requiere de cada mecanismo para producir la fuerza óptima.



## 5 Conclusiones

- El amortiguamiento no lineal tiene un efecto significativo en el desempeño de la suspensión de las motocicletas. En aterrizajes de baja altura, al aumentar el orden de amortiguamiento, se disipa menos energía y se producen mayores desplazamientos peak. Al aumentar la altura de la caída, el comportamiento se revierte. Para el análisis realizado en una motocicleta de off-road, la energía donde cambia el comportamiento es entre 0.5 y 1  $\left[\frac{J}{kg}\right]$ .
- No hay relación directa entre la aceleración peak y el orden de amortiguamiento ya que depende de cada escenario.
- Los amortiguadores digresivos disipan un porcentaje mayor de energía tras cada oscilación, mientras que los progresivos, un porcentaje menor.
- Los resultados analíticos y numéricos concuerdan en las predicciones de desplazamiento y aceleración, y esta correlación es mejor mientras mayor es la altura inicial.
- Una fuerza amortiguadora de dos órdenes puede mejorar el desempeño de la suspensión de una motocicleta comparado a la fuerza amortiguamiento lineal, lo que permite suponer que en optimizaciones, a mayor cantidad de órdenes considerados en la fuerza de amortiguamiento, mejor se deberían cumplir las funciones objetivo del problema

## Referencias

- [1] Vliet M. Computer Aided Analysis and Design of Off- Road Motorcycle Suspensions [Tesis doctoral]. Montreal: Concordia University; 1983.
- [2] Dixon J. The Shock Absorber Handbook. 2nd ed. Chichester (England): John Wiley & Sons and Professional Engineering Publishing Ltd; c2007. 415 p.
- [3] Cossalter V. Motorcycle Dynamics. 2nd Engl. ed. Lexington (KY): Lulu Press; c2006. 360 p.
- [4] Gillespie T. Fundamentals of Vehicle Dynamics. Warrendale (PA): Society of Automotive Engineers Inc; 1992. 470 p.
- [5] Cossalter V, Doria A, Lot R. Optimum Suspension Design for Motorcycle Braking. Vehicle System Dynamics. 2000; 34(3) 175-198
- [6] Basso R, Fabbri L, Zagatti E. A method to analyse the Dynamic Behavior of a Motorcycle Front Fuspension Equipped with Sequential Dampers. Vehicle System Dynamics. 1998; 29(4): 213-230
- [7] Cossalter V, Doria A, Pegoraro R, Trombetta L. On the non-linear behavior of motorcycle shock absorbers. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering 2010, 224(1), 15-27
- [8] Boggs C, Ahmandian M, Southward S (2010) Efficient empirical modelling of a high-performance shock absorber for vehicle dynamics studies. Vehicle System Dynamics. 2010; 48(4): 481-505
- [9] Talbott M, Starkey J. An Experimentally Validated Physical Model of a High-Performance Mono-Tube Damper. SAE Technical Papers. 2002-01-3337, 2002
- [10] Cveticanin L. Oscillators with nonlinear elastic and damping forces. Computers and Mathematics with Applications. 2011; 62(4): 1745-1757
- [11] Thede P, Parks L. RaceTech's Motorcycle Suspension Bible. Minneapolis (MN): Motorbooks; c2010. 254 p.