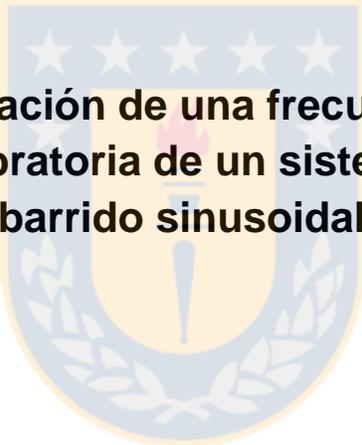




Universidad de Concepción  
Dirección de Postgrado  
Facultad de Ingeniería - Programa de Magister en Ciencias de la Ingeniería con  
mención en Ingeniería Mecánica



**Modelo para la estimación de una frecuencia natural a partir  
de la respuesta vibratoria de un sistema sometido a un  
barrido sinusoidal**

Tesis para optar al grado de Magister en Ciencias de la Ingeniería  
con mención en Ingeniería Mecánica

IGNACIO DANIEL TOMASOV SILVA  
CONCEPCIÓN-CHILE  
2016

Profesor Guía: Dr. Ing. Cristian Rodríguez Godoy  
Dpto. de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería  
Universidad de Concepción



*A la paciencia, que abundó en los corazones  
de los que siempre estuvieron presentes.*



## Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todos aquellos que me brindaron apoyo en el transcurso de esta tesis de grado. Sus aportes, ya sean técnicos o humanos, fueron vertidos íntegramente en esta investigación.

Ofrezco un personal agradecimiento al Dr. ing. Cristian Rodriguez, profesor guía de esta investigación, por la paciencia y tiempo invertidos. Su influencia, enfocada al quehacer prolijo, quedará por siempre presente.

Quiero dar las gracias a los miembros del laboratorio de vibraciones mecánicas, y a los docentes del departamento de ingeniería mecánica de la Universidad de Concepción, por la colaboración prestada en el desarrollo de este trabajo.

En especial a mi familia y a mi pareja. A mis amigos y a mis colegas. A todos ellos, los pilares invisibles de esta publicación, muchas gracias.



## Resumen

Una forma de determinar una frecuencia natural es a partir de la respuesta vibratoria debido a una excitación de frecuencia variable. Cuando la frecuencia de la excitación se acerca a la frecuencia natural, se producirá un aumento en la amplitud vibratoria. Las frecuencias naturales se pueden aproximar al valor de las frecuencias de excitación en las que se detectan los máximos valores de amplitud de vibración. Si la tasa con la que varía la frecuencia de la excitación es alta en relación a la frecuencia natural, entonces la máxima amplitud vibratoria se produce cuando la frecuencia de la excitación es distinta a la frecuencia natural. Esta diferencia puede inducir a errores al momento de determinar una frecuencia natural durante una partida o parada de una máquina. En este trabajo se evalúa la diferencia entre la frecuencia de máxima amplitud y la frecuencia natural de un sistema lineal de un grado de libertad cuando la excitación es un barrido sinusoidal de amplitud constante. Se propone un ajuste de manera de obtener la frecuencia natural a partir de la frecuencia de máxima amplitud vibratoria. El ajuste propuesto se diferencia de los ajustes disponibles en la literatura debido a que entrega un rango posible para las frecuencias naturales, situación que no es considerada en los modelos propuestos por la literatura. Se demuestra, a través de los resultados experimentales, que el valor de una frecuencia natural estimada a partir del modelo propuesto es una mejor aproximación que el obtenido al estimar dicha frecuencia natural como la frecuencia de excitación en la que ocurre la máxima respuesta vibratoria.

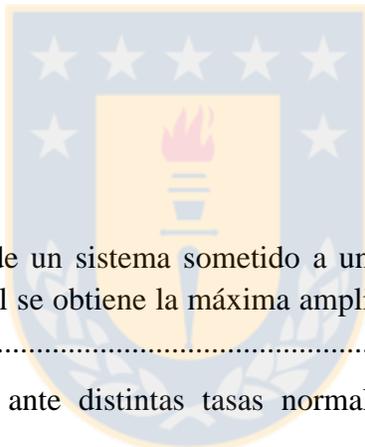
## Abstract

A natural frequency can be determined from the vibratory response due to a variable frequency excitation. There is a rise in vibratory amplitudes at the moment the frequency of excitation is close to natural frequency. If the change rate in the excitation frequency is high in comparison to natural frequency, then the maximum vibration amplitude will occur when the excitation frequency is different to natural frequency. This difference could induce errors in the determination of natural frequencies during startup and shutdown. In this investigation we assess the difference between natural frequency and maximum amplitude frequency, and an adjustment is proposed to obtain natural frequency from maximum amplitude frequency. Proposed adjustment differs to those available in literature because it considers a range for natural frequencies. It is concluded using numerical modeled and experimental data that the proposed adjustment allows to obtain a more accurate estimation of natural frequency.

# Contenidos

Agradecimientos.....	iv
Resumen .....	v
Contenidos.....	vi
Listado de figuras .....	vii
Listado de tablas.....	viii
Nomenclatura .....	ix
Capítulo 1 Introducción.....	11
Capítulo 2 Respuesta vibratoria a una excitación de barrido sinusoidal.....	14
2.1 Respuesta estacionaria.....	14
2.2 Ecuación del movimiento de un sistema de un grado de libertad sometido a un barrido sinusoidal con tasa de cambio de frecuencia constante.....	15
2.3 Respuesta numérica mediante la integral de convolución .....	17
2.4 Envolvente de la respuesta mediante la función error compleja.....	19
2.5 Respuesta vibratoria vs. respuesta estacionaria.....	20
2.6 Influencia de la tasa normalizada de aceleración $\alpha$ en $\eta_R$ .....	21
2.7 Influencia de las condiciones iniciales del barrido sinusoidal .....	22
2.8 Influencia del factor de amortiguamiento .....	25
Capítulo 3 Modelo para la estimación de la frecuencia natural .....	27
3.1 Modelo para la estimación de $\eta_{R,med}$ y $\eta_{R,alt}$ .....	27
3.2 Intervalo de ajuste .....	28
3.3 Error de ajuste numérico .....	28
3.4 Estimación de la frecuencia natural a partir del modelo propuesto .....	29
3.5 Modelos matemáticos propuestos por otros autores .....	30
3.6 Norma ISO-7626 para barridos sinusoidales .....	32
Capítulo 4 Diseño e implementación del banco de ensayos .....	34
4.1 Sistema implementado .....	34
4.2 Sistema de excitación .....	36

4.3 Sistema de medición.....	36
4.4 Análisis modal experimental del sistema implementado .....	37
4.5 Ensayos de barrido sinusoidal .....	38
4.6 Verificación de la sincronización entre el sistema de excitación y el sistema de medición .....	40
Capítulo 5 Comparación del modelo propuesto con resultados experimentales.....	42
5.1 Resultados de los ensayos de barrido sinusoidal.....	42
5.2 Estimación de la frecuencia natural del sistema.....	44
Conclusiones .....	46
Perspectivas .....	47
Referencias .....	48



## Listado de figuras

Figura 1.1 Respuesta vibratoria de un sistema sometido a un barrido sinusoidal. Se destaca la frecuencia de excitación en la cual se obtiene la máxima amplitud de vibración, y los parámetros modales del sistema.....	12
Figura 2.1 Respuesta vibratoria ante distintas tasas normalizadas de excitación respecto al tiempo.....	18
Figura 2.2 Comparación de la respuesta vibratoria del sistema $x(\Omega)$ y su envolvente con la respuesta estacionaria $X_o(\Omega)$ . $\alpha = 0.02$ .....	20
Figura 2.3 Influencia de la tasa normalizada $\alpha$ sobre $\eta_R$ . .....	22
Figura 2.4 Valores $\eta_R$ obtenidos mientras se varía la condición inicial $\beta$ , cuando se aplica un barrido con una tasa normalizada con $\alpha = 0.02$ y $\eta_S = 0$ . Se destaca el rango valores $\eta_R$ obtenido. ....	23
Figura 2.5 Valores $\eta_R$ obtenidos mientras se varía la condición inicial $\eta_S$ , cuando se aplica un barrido con una tasa normalizada con $\alpha = 0.02$ y $\beta = 0$ . Se destaca el rango valores $\eta_R$ obtenido. ....	23
Figura 2.6 Valores $\eta_R$ obtenidos mientras se varía la condición inicial $\beta$ y $\eta_S$ , cuando se aplica un barrido con una tasa normalizada con $\alpha = 0.02$ .....	24
Figura 2.7 $\eta_R$ en función de $\alpha$ . Se destacan las funciones $\eta_{R,med}$ y $\eta_{R,alt}$ . .....	25

Figura 2.8 Valor de $\eta_R$ en función del factor de amortiguamiento del sistema. $\alpha = 0.02$ , $\beta = 0$ y $\eta_S = 0$ . En el eje y se utiliza el mismo rango que el presentado en las Figuras 2.4, 2.5 y 2.6. ....	25
Figura 3.1 Error de ajuste del modelo $\eta_{R,med}$ sobre los resultados numéricos. ....	29
Figura 3.2 Error de ajuste del modelo $\eta_{R,alt}$ sobre los resultados numéricos. ....	29
Figura 3.3 Comparación modelos para la estimación de $\eta_R$ . ....	31
Figura 4.1 Esquema del sistema dinámico implementado. ....	34
Figura 4.2 Montaje de la viga empotrada excitada por shaker. ....	35
Figura 4.3 Detalle de la unión entre la viga y el shaker. Se destacan los sensores ubicados en el extremo de la viga. ....	35
Figura 4.4 Recorrido de la señal de fuerza a aplicar sobre el sistema. ....	36
Figura 4.5 Sistema de medición del sistema implementado. ....	37
Figura 4.6 Diagrama de estabilidad del sistema. Se obtiene que la primera frecuencia natural del sistema tiene un valor $\omega_1 = 23.63 \text{ Hz}$ y un factor de amortiguamiento $\xi_1 = 1.36\%$ . ....	38
Figura 4.7 Respuesta vibratoria experimental ante un barrido sinusoidal. ....	39
Figura 4.8 Respuesta vibratoria durante el ensayo de barrido, durante la pausa y luego tras un impulso de sincronización. $\alpha = 0.04$ . ....	40
Figura 4.9 Zoom sobre el impulso de sincronización. Se destaca el posible error de sincronización entre el impulso y la respuesta vibratoria. ....	41
Figura 5.1 Comparación de $\eta_R$ experimental vs $\eta_R$ predicho por modelo matemático. ....	42
Figura 5.2 Error de los valores $\eta_{R,med}$ y $\eta_{R,alt}$ obtenidos experimentalmente respecto a los estimados por el modelo propuesto. ....	43
Figura 5.3 Error en la determinación de $\omega_1$ . Comparación del error obtenido al determinar $\omega_1$ según el método propuesto v/s la estimación de $\omega_1$ como el valor de la frecuencia de máxima amplitud de respuesta vibratoria. ....	44

## Listado de tablas

Tabla 4.1 Tasas normalizadas ensayadas de valor positivo, se presentan las frecuencias iniciales, finales, y el tiempo de duración de cada ensayo. ....	38
Tabla 4.2 Tasas normalizadas ensayadas de valor negativo, se presentan las frecuencias iniciales, finales, y el tiempo de duración de cada ensayo. ....	39

## Nomenclatura

- $F(t)$  : Fuerza excitadora en función del tiempo, [N]  
 $F_o$  : Amplitud de la fuerza excitadora, [N]  
 $\Omega(t)$  : Velocidad de rotación en función del tiempo, [rad/s]  
 $m$  : Masa del modelo SDOF, [kg]  
 $c$  : Amortiguamiento del modelo SDOF, [N/(m/s )]  
 $k$  : Rigidez del modelo SDOF, [N/m]  
 $\omega_n$  : Frecuencia natural del sistema SDOF, [rad/s]  
 $\xi$  : Factor de amortiguamiento del sistema SDOF  
 $x(t)$  : Respuesta vibratoria, [m]  
 $x_{est}(t)$  : Respuesta estacionaria, [m]  
 $X_o(\Omega)$  : Amplitud de la respuesta estacionaria en función de la velocidad de rotación, [m]  
 $\phi_x$  : Fase de la respuesta respecto a la fase de la excitación, [rad]  
 $a$  : Tasa de cambio de la frecuencia de excitación, [rad/s<sup>2</sup>]  
 $a_{max}$  : Tasa de excitación recomendada por la norma ISO-7626, [Hz/min]  
 $\omega_s$  : Velocidad de rotación inicial de la excitación de frecuencia variable, [rad/s]  
 $\beta$  : Posición angular inicial o fase de la excitación de frecuencia variable, [rad]  
 $\tau$  : Tiempo normalizado por la frecuencia natural  
 $\alpha$  : Tasa normalizada de cambio de la frecuencia de excitación  
 $\eta_s$  : Velocidad inicial normalizada de la excitación de frecuencia variable  
 $h(\tau)$  : Respuesta impulsional del sistema SDOF respecto al tiempo normalizado  
 $F(\tau)$  : Fuerza de excitación respecto el tiempo normalizado, [N]  
 $x(\tau)$  : Respuesta vibratoria en función del tiempo normalizado, [m]  
 $x_{env}(\tau)$  : Envolvente de la respuesta estacionaria respecto al tiempo normalizado, [m]  
 $w(v)$  : Función error compleja  
 $v(\tau)$  : función compleja en función del tiempo normalizado

- $B$  : Constante compleja
- $\eta$  : Frecuencia normalizada de excitación
- $\omega_m$  : Frecuencia de máxima amplitud de respuesta vibratoria
- $\eta_R$  : Frecuencia normalizada de máxima amplitud de respuesta vibratoria
- $\eta_{R,med}$  : Valor medio del intervalo de valores  $\eta_R$  posibles para una tasa normalizada de excitación en particular
- $\eta_{R,alt}$  : Diferencia entre el valor medio y los valores extremos existente en el intervalo de valores  $\eta_R$  posibles para una tasa normalizada de excitación en particular
- $\omega_{m,med}$  : Valor medio del intervalo de valores  $\omega_m$  posibles para una tasa normalizada de excitación en particular
- $\omega_{m,alt}$  : Diferencia entre el valor medio y los valores extremos existente en el intervalo de valores  $\omega_m$  posibles para una tasa normalizada de excitación en particular



# Capítulo 1

## Introducción

La respuesta vibratoria obtenida a partir de una excitación de tipo barrido sinusoidal permite estimar los parámetros modales de una máquina o estructura. Los barridos sinusoidales son excitaciones armónicas de frecuencia variable, éstos se utilizan para excitar sistemas dinámicos que no pueden ser excitados convencionalmente mediante cargas impulsivas o mediante excitaciones basadas en la aplicación de ruidos de gran ancho de banda.

Una forma de estimar una frecuencia natural, consiste en medir la amplitud de la vibración que experimenta un sistema, mientras se aplica un barrido sinusoidal. Se asume que el valor de una frecuencia natural es igual al valor de la frecuencia de excitación en la que se experimenta la máxima amplitud de la vibración. Este método permite obtener solamente una aproximación del valor real de una frecuencia natural cuando la tasa de cambio en la frecuencia del barrido es alta respecto a al valor de dicha frecuencia natural, ya que no se consideran las alteraciones que experimenta la respuesta vibratoria durante un barrido sinusoidal.

Cuando la tasa de cambio en la frecuencia del barrido utilizado es extremadamente baja, la envolvente de la respuesta vibratoria coincide con la respuesta estacionaria del sistema. Por el contrario, cuando el cambio de frecuencia del barrido es alto, la máxima amplitud de vibración obtenida es menor que la amplitud máxima de la respuesta estacionaria y ocurre en una frecuencia diferente al valor de la frecuencia natural [1]. Este fenómeno se ejemplifica en la Figura 1.1, en el cual un barrido de media-alta aceleración (1.88 Hz/s) produce que la frecuencia en la cual se observa la amplitud máxima aproximadamente sea un 10% mayor que el valor real de la frecuencia natural (10 Hz).

La norma ISO-7626, con el fin de limitar esta desviación, define la metodología a utilizar para determinar frecuencias naturales a partir de barridos sinusoidales, y sugiere un valor límite de tasa de cambio en la frecuencia de barridos sinusoidales [2]. La recomendación propuesta por ISO-7626 no es de utilidad práctica cuando la frecuencia natural a identificar es baja y el factor de amortiguamiento se estima de bajo valor, ya que el valor de tasa de cambio de frecuencia recomendada resulta en barridos de exagerada duración [3].

La complejidad del desarrollo de un modelo que prediga la respuesta vibratoria ante un barrido sinusoidal, recae en la incapacidad de solucionar de forma analítica la ecuación

diferencial que modela dicho fenómeno. Varios autores han contribuido en el desarrollo de aproximaciones teóricas o soluciones numéricas para resolver dicha ecuación diferencial [4-8], entre otros. El trabajo más recientemente desarrollado en este campo fue realizado por Markert [8], quien propone a partir de una solución analítica aproximada ecuaciones que estiman la máxima amplitud vibratoria y la frecuencia del barrido en que ocurre la amplitud máxima. Cabe destacar que los modelos propuestos por diferentes autores tienen la finalidad de predecir la amplitud máxima que puede experimentar la respuesta vibratoria en función de la tasa de cambio de frecuencia del barrido utilizado, entregando además expresiones para aproximar el valor de la frecuencia en la que ocurre la amplitud máxima de dicha respuesta, no siendo estas expresiones propuestas con la finalidad de estimar el valor de una frecuencia natural a partir de la respuesta a un barrido sinusoidal.

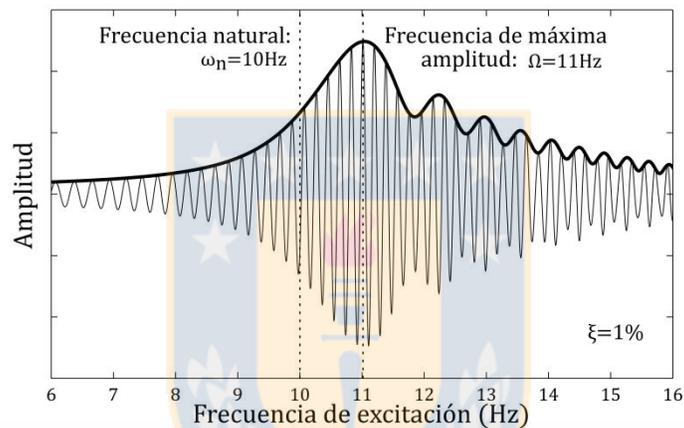


Figura 1.1 Respuesta vibratoria de un sistema sometido a un barrido sinusoidal. Se destaca la frecuencia de excitación en la cual se obtiene la máxima amplitud de vibración, y los parámetros modales del sistema.

En esta investigación se estudia la frecuencia en la cual se obtiene la amplitud máxima de respuesta vibratoria cuando la excitación es un barrido sinusoidal de amplitud constante y de tasa de cambio de frecuencia constante. Se analiza como las condiciones iniciales del barrido, es decir la frecuencia y la fase inicial de la excitación sinusoidal, influyen sobre el valor de la frecuencia en la cual se observa la máxima amplitud de vibración. Se demuestra, tanto numérica como experimentalmente, que las condiciones iniciales del barrido influyen significativamente sobre el valor de la frecuencia de excitación en la cual se observa la máxima amplitud de vibración cuando se aplica una tasa de cambio de frecuencias alta respecto a la frecuencia natural del sistema. Estas variaciones pueden significar hasta  $\pm 10\%$  del valor de la frecuencia natural sobre el valor medido de la frecuencia en la que ocurre la máxima amplitud cuando se evalúan los barridos de mayor tasa de cambio de frecuencia utilizados experimentalmente en esta investigación.

En esta investigación se propone además un modelo para estimar una frecuencia natural de un sistema dinámico sometido a un barrido sinusoidal de alta tasa de cambio de frecuencia. Este se obtiene a partir del ajuste de resultados numéricos, en los que se incorporan el efecto de las condiciones iniciales del barrido. Se realiza una comparación del modelo propuesto con mediciones experimentales. Se obtiene que el valor de una frecuencia natural obtenido a partir del modelo propuesto, es una mejor aproximación que el obtenido al estimar dicha frecuencia natural, como el valor de la frecuencia de excitación en el que ocurre la máxima amplitud de respuesta vibratoria.



## Capítulo 2

### Respuesta vibratoria a una excitación de barrido sinusoidal

En este capítulo se analiza la respuesta vibratoria de un sistema lineal de un grado de libertad ante una excitación de barrido sinusoidal que varía de frecuencia linealmente respecto al tiempo. Se presentan dos métodos numéricos para obtener la respuesta vibratoria a partir de la ecuación diferencial que modela este fenómeno. Luego se compara la respuesta vibratoria ante un barrido con la respuesta estacionaria del sistema, se cuantifican las desviaciones entre estas, y se analiza cómo los parámetros del barrido sinusoidal utilizado repercuten sobre las desviaciones existentes entre la respuesta al barrido y la respuesta estacionaria.

#### 2.1 Respuesta estacionaria

La respuesta estacionaria del sistema de un grado de libertad con masa  $m$ , amortiguamiento  $c$  y rigidez  $k$ , sometido a una fuerza sinusoidal de frecuencia  $\Omega$  de amplitud máxima  $F_o$  es:

$$x_{\text{est}}(t) = X_o \sin(\Omega t + \phi_X) \quad (2.1)$$

Donde,  $X_o$  es la amplitud de la respuesta estacionaria (2.2), y  $\phi_X$  es el desfase entre la respuesta vibratoria y la fuerza (2.3).

$$X_o(\Omega) = \frac{F_o}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi\Omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (2.2)$$

$$\tan(\phi_X - \phi_F) = \frac{\frac{2\xi\Omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (2.3)$$

La fase  $\phi_F$  corresponde al ángulo inicial del vector oscilatorio de fuerza. Se definen el factor de amortiguamiento  $\xi$  y la frecuencia natural del sistema  $\omega_n$  como:

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad (2.4)$$

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (2.5)$$

Para el caso estacionario, la frecuencia para la cual se obtiene la máxima amplitud de respuesta vibratoria es:

$$\max(X_o(\Omega)) = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \approx \omega_n \quad (2.6)$$

Dado que el factor de amortiguamiento es comúnmente bajo, la frecuencia en la que se obtiene la máxima amplitud estacionaria se puede suponer igual al valor de la frecuencia natural del sistema (2.6).

## 2.2 Ecuación del movimiento de un sistema de un grado de libertad sometido a un barrido sinusoidal con tasa de cambio de frecuencia constante.

Un barrido sinusoidal de tasa constante es una excitación oscilatoria en la cual la frecuencia  $\Omega(t)$  de la fuerza excitadora  $F(t)$  cambia a una tasa constante en el tiempo:

$$\Omega(t) = at + \omega_s \quad (2.7)$$

Donde  $a$  corresponde a la tasa con que varía la frecuencia de la excitación, y  $\omega_s$  es la frecuencia de la fuerza excitadora para tiempo  $t = 0$ . La amplitud de la excitación puede definirse como una constante o una función de la velocidad de rotación. Considerando, en este caso, la amplitud de la excitación como un valor constante, la función de excitación es:

$$F(t) = F_o \sin\left(\int_0^t \Omega(t)dt\right) = F_o \sin\left(\frac{at^2}{2} + \omega_s t + \beta\right) \quad (2.8)$$

Donde  $\beta$  corresponde a la fase de la excitación o posición angular inicial de la excitación, análogo a  $\phi_F$  en (2.3). La ecuación del movimiento que modela la respuesta vibratoria de un sistema de un grado de libertad, ante una excitación de barrido sinusoidal de amplitud constante, es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin\left(\frac{at^2}{2} + \omega_s t + \beta\right) \quad (2.9)$$

Notar que, valores de excitación  $a$  positivos corresponden a barridos que aumentan de frecuencia con el transcurso del tiempo. Mientras que valores de  $a$  negativos corresponden a barridos que disminuyen de frecuencia.

La ecuación (2.9) puede ser reescrita en función de su frecuencia natural  $\omega_n$  y de su factor de amortiguamiento  $\xi$ :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \left(\frac{F_0}{m}\right) \sin\left(\frac{at^2}{2} + \omega_s t + \beta\right) \quad (2.10)$$

Con el objetivo de analizar cómo los parámetros de la ecuación (2.10) afectan en la respuesta vibratoria, se define el tiempo normalizado  $\tau$ :

$$\tau = t \cdot \omega_n \quad (2.11)$$

Las funciones derivadas y dependientes de  $t$ , serán dependientes de  $\tau$  a través de la regla de la cadena:

$$\frac{d(\dots)}{dt} = \frac{d(\dots)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d(\dots)}{d\tau} \omega_n \quad (2.12)$$

$$\frac{d^2(\dots)}{dt^2} = \frac{d^2(\dots)}{d\tau^2} \frac{d\tau^2}{dt^2} = \frac{d^2(\dots)}{d\tau^2} \omega_n^2 \quad (2.13)$$

Se definen la aceleración normalizada o tasa normalizada de aceleración  $\alpha$  y la velocidad inicial normalizada  $\eta_s$ .

$$\alpha = a/\omega_n^2 \quad (2.14)$$

$$\eta_s = \omega_s/\omega_n \quad (2.15)$$

Notar que la aceleración normalizada  $\alpha$  tiene unidades de medida igual a  $rad/s^2$  divididos por  $rad^2/s^2$ , lo que resulta  $rad^{-1}$ , de este modo al cuantificar el valor de  $\alpha$  este puede ser

escrito sin unidades de medida siempre y cuando este haya sido calculado a partir de magnitudes en radianes y en segundos.

La ecuación diferencial planteada en (2.10), expresada en función del tiempo normalizado " $\tau$ ", y con las sustituciones previamente descritas, es:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\xi \frac{dx}{d\tau} + x = \left( \frac{F_o}{m\omega_n^2} \right) \sin \left( \frac{\alpha\tau^2}{2} + \eta_s\tau + \beta \right) \quad (2.16)$$

Esta forma de representar la ecuación diferencial deja en evidencia que la respuesta vibratoria no está en función de la tasa de las excitaciones  $\alpha$ , sino que en función de la tasa  $\alpha$  y de los parámetros  $\beta$ ,  $\xi$ , y  $\eta_s$ . El coeficiente  $\left( \frac{F_o}{m\omega_n^2} \right)$  afecta proporcionalmente la amplificación de la respuesta, y no influye sobre el valor de la frecuencia en el cual se alcanza la amplitud máxima.

### 2.3 Respuesta numérica mediante la integral de convolución

La respuesta vibratoria descrita por la ecuación (2.16) puede ser calculada mediante la integral de convolución, para esto es necesario definir la respuesta impulsional  $h(\tau)$  del sistema, y precisar la excitación  $F(\tau)$  a la cual este está sometido.

$$h(\tau) = \frac{e^{-\xi\tau}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left( \tau\sqrt{1-\xi^2} \right) \quad (2.17)$$

$$F(\tau) = \left( \frac{F_o}{m\omega_n^2} \right) \sin \left( \frac{\alpha\tau^2}{2} + \eta_s\tau + \beta \right) \quad (2.18)$$

La respuesta del sistema, expresada mediante la integral de convolución, queda definida según:

$$x(\tau) = \left( \frac{F_o}{m\omega_n^2} \right) \int_0^\lambda \sin \left( \frac{\alpha\lambda^2}{2} + \eta_s\lambda + \beta \right) \frac{e^{\xi(\lambda-\tau)}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left( (\tau - \lambda)\sqrt{1-\xi^2} \right) d\lambda \quad (2.19)$$

Donde  $\lambda$  es la variable de integración. La ecuación previamente descrita no tiene solución analítica debido a que no existe una solución analítica para el término  $\int \sin(\lambda^2) d\lambda$ . Por este motivo, para evaluar los resultados y compararlos con los resultados experimentales, se resolverá la integral de convolución de forma numérica.

La integral de convolución puede ser calculada en el software Matlab mediante el comando conv, de modo que la respuesta vibratoria de un sistema con respuesta impulsional  $h$  y excitación  $F$  se computa como

$$\begin{aligned} u &= \text{conv}(F, h) * dt; \\ x &= u(1:\text{length}(t)); \end{aligned} \tag{2.20}$$

Donde el valor  $dt$  es el paso del vector de tiempo normalizado de los vectores discretos  $h$  y  $F$ .

La forma de onda de la respuesta vibratoria obtenida para distintas tasas normalizadas de aumento de frecuencia  $\alpha$  se grafican a continuación.

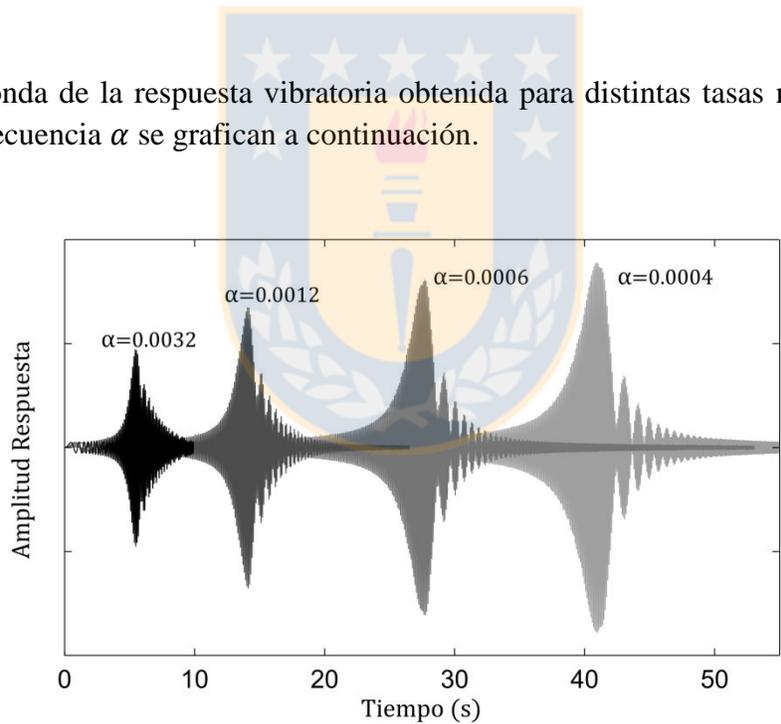


Figura 2.1 Respuesta vibratoria ante distintas tasas normalizadas de excitación respecto al tiempo.

Se observa de la Figura 2.1 que la duración de un ensayo de barrido sinusoidal es menor en la medida que la aceleración del barrido es mayor. La magnitud máxima que alcanza la respuesta vibratoria disminuye cuando la aceleración del barrido aumenta. Estas y otras repercusiones de la tasa del barrido serán analizadas en las secciones siguientes.

## 2.4 Envoltente de la respuesta mediante la función error compleja

Markert [8] propone una solución aproximada para la respuesta vibratoria ante un barrido sinusoidal de tasa constante. Esta se basa en un desarrollo analítico evaluado numéricamente mediante la función matemática llamada “función error compleja”. Esta solución permite calcular la envoltente de la respuesta vibratoria, la que omitiendo ciertos términos, esta descrita por la expresión:

$$x_{\text{env}}(\tau) \approx |B \cdot w(v)| \quad (2.21)$$

Donde  $w$  es la llamada función error compleja, dada por:

$$w(v) = e^{-v^2} \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^v e^{u^2} du \right) \quad (2.22)$$

$v$  es una función compleja en función del tiempo normalizado

$$v(\tau) = -\frac{1+i}{2\sqrt{\alpha}} \left( \alpha\tau + \eta_s - \xi i - \sqrt{1 - \xi^2} \right) \quad (2.23)$$

y  $B$  es una constante compleja

$$B = \frac{1-i}{4\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left( \frac{F_0}{k} \right) \quad (2.24)$$

La función error compleja necesaria para determinar la respuesta vibratoria debe ser evaluada de forma numérica ya que el término  $\int_0^v e^{u^2} du$  no posee solución analítica. El

desarrollo previamente presentado no considera el efecto de la fase inicial de las excitaciones  $\beta$  mostrado en la ecuación (2.8).

Un análisis completo de la respuesta vibratoria determinada por este método se muestra en [8].

La función error compleja puede ser obtenida utilizando el software Matlab, mediante la utilización de la librería “Complex Erf (Error Function)”.

La envolvente de la respuesta vibratoria ante un barrido sinusoidal estimada mediante el modelo previamente implementado, brinda una buena aproximación de cómo varía la amplitud máxima de la respuesta en función de la tasa normalizada de la excitación, y entrega una aproximación del valor esperado de la frecuencia en la que ocurre la amplitud máxima. Sin embargo en esta aproximación no se considera el efecto de la fase inicial de la excitación.

## 2.5 Respuesta vibratoria vs. respuesta estacionaria

La función frecuencia de excitación  $\Omega(t)$ , puede utilizarse como variable independiente para graficar la amplitud respuesta vibratoria, esto permite compararla con la respuesta estacionaria del sistema  $X_o(\Omega)$ .

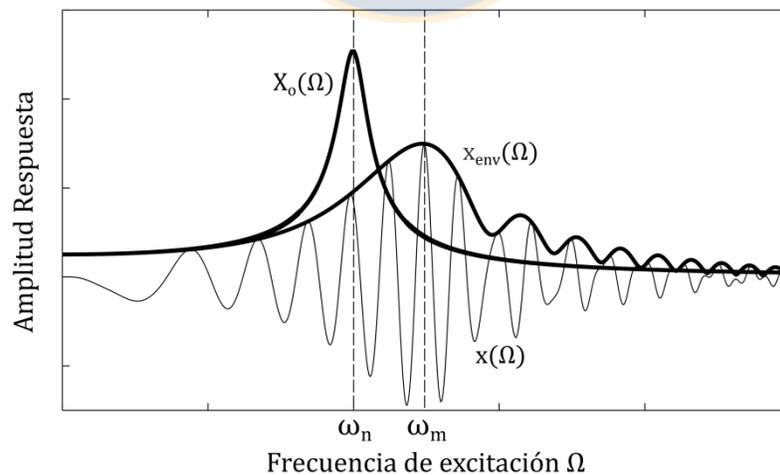


Figura 2.2 Comparación de la respuesta vibratoria del sistema  $x(\Omega)$  y su envolvente con la respuesta estacionaria  $X_o(\Omega)$ .  $\alpha = 0.02$ .

Se observa de la Figura 2.2 que la envolvente de la respuesta vibratoria  $x_{env}(\Omega)$ , tiene una forma diferente a la respuesta estacionaria del sistema, dichas diferencias son las llamadas alteraciones de la respuesta vibratoria. Estas se caracterizan por tener una menor amplitud máxima respecto a la respuesta estacionaria, y por experimentar dicha amplitud máxima en una frecuencia diferente a la frecuencia natural. También es característico de la respuesta vibratoria ante un barrido sinusoidal, la aparición de máximos locales de vibración tras el paso por una frecuencia natural. Estos pueden ser interpretados como “beats” producto de la suma de dos vibraciones con frecuencias muy cercanas, una a la frecuencia de la excitación, y otra a la frecuencia natural del sistema.

Para estudiar de forma cuantitativa las alteraciones que se producen en la respuesta vibratoria debido a un barrido sinusoidal, se define la frecuencia en la cual se experimenta la máxima amplitud de respuesta vibratoria como  $\omega_m$ . Para independizar la frecuencia de la excitación  $\Omega$ , de la frecuencia natural del sistema, se define la frecuencia normalizada de excitación  $\eta$ . Esta corresponde al valor de la frecuencia de la excitación dividido por la frecuencia natural del sistema.

$$\eta = \Omega/\omega_n \quad (2.25)$$

Del mismo modo, es posible normalizar el valor de  $\omega_m$  respecto al valor de la frecuencia natural del sistema.

$$\eta_R = \omega_m/\omega_n \quad (2.26)$$

Esta normalización permite cuantificar la desviación que presenta la frecuencia de amplitud máxima, independiente del valor de la frecuencia natural.

## 2.6 Influencia de la tasa normalizada de aceleración $\alpha$ en $\eta_R$

La aceleración normalizada  $\alpha$  depende de la tasa  $a$  y del valor de la frecuencia natural del sistema (ecuación 2.14). Cuando la tasa de cambio de frecuencia de excitación es baja respecto la frecuencia natural del sistema, la tasa normalizada  $\alpha$  es de bajo valor, esto provoca una respuesta vibratoria cuya envolvente se asemeja a la respuesta estacionaria. Cuando la magnitud de  $a$  es alta, o la frecuencia natural a evaluar es baja, la tasa normalizada  $\alpha$  del barrido es de mayor magnitud, acrecentando las alteraciones de la respuesta vibratoria. Esto se traduce en un mayor distanciamiento del valor de la frecuencia de amplitud máxima  $\omega_m$  respecto a  $\omega_n$ , o un distanciamiento del valor de  $\eta_R$  del valor 1, y

en una menor amplitud máxima. En la Figura 2.3 se presenta la envolvente de la respuesta vibratoria ante dos barridos de tasas distintas respecto a la respuesta estacionaria del sistema.

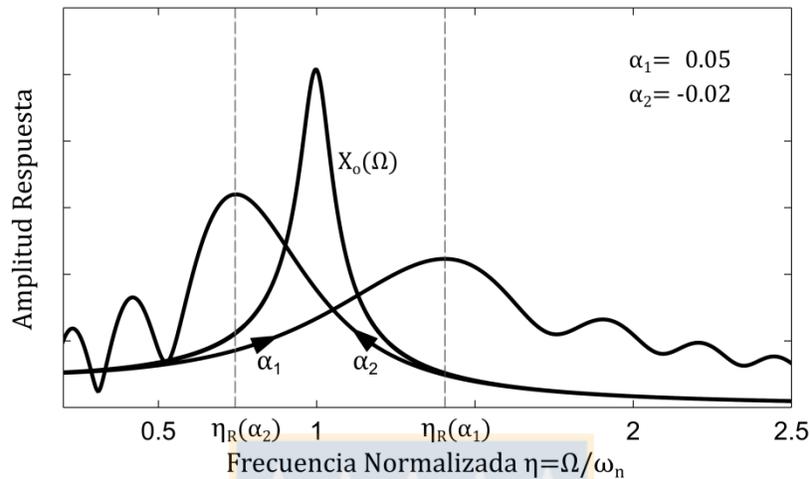


Figura 2.3 Influencia de la tasa normalizada  $\alpha$  sobre  $\eta_R$ .

Notar que para valores de  $\alpha$  positivos el valor de  $\eta_R$  es mayor que 1, mientras que para valores de  $\alpha$  negativos, de  $\eta_R$  es menor que 1.

Para analizar de forma cuantitativa la influencia de  $\alpha$  sobre  $\eta_R$  es necesario considerar las condiciones iniciales del barrido.

## 2.7 Influencia de las condiciones iniciales del barrido sinusoidal

Las condiciones iniciales del barrido, corresponden a los valores  $\eta_s$  y  $\beta$ , (ecuaciones 2.15 y 2.9 respectivamente). Al calcular la respuesta vibratoria ante una excitación de barrido sinusoidal con una tasa de cambio de frecuencia  $\alpha$  en particular, se observa que distintos valores de condiciones iniciales  $\eta_s$  y  $\beta$  producen distintos valores de  $\eta_R$ .

Se presenta a modo de ejemplo en la Figura 2.4, los valores de  $\eta_R$  obtenidos para una tasa  $\alpha$  en particular, cuando se hace variar la condición inicial  $\beta$ . En ella se observa que para distintos valores de condición inicial  $\beta$  se obtienen distintos valores de  $\eta_R$ , y que además cada  $180^\circ$  de ángulo  $\beta$  se obtiene el mismo intervalo de valores  $\eta_R$ . Esto se debe a que el valor absoluto de la respuesta vibratoria ante un barrido sinusoidal es idéntico al valor

absoluto de la respuesta vibratoria ante el mismo barrido con condición inicial  $\beta$  desfasado en  $180^\circ$ .

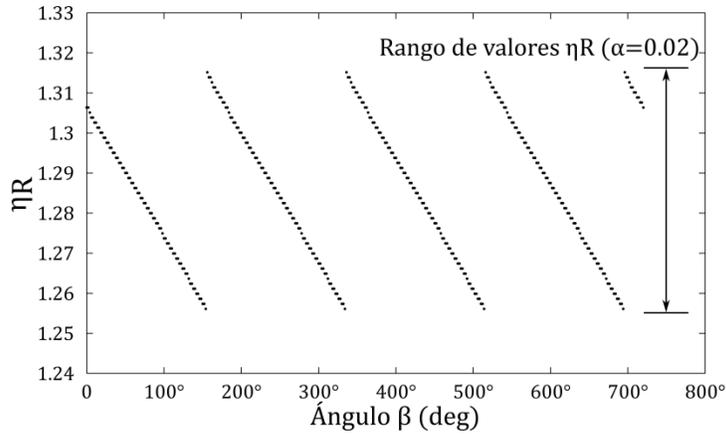


Figura 2.4 Valores  $\eta_R$  obtenidos mientras se varía la condición inicial  $\beta$ , cuando se aplica un barrido con una tasa normalizada con  $\alpha = 0.02$  y  $\eta_s = 0$ . Se destaca el rango valores  $\eta_R$  obtenido.

De forma análoga al ejemplo previamente presentado, es posible graficar los valores de  $\eta_R$  obtenidos para la misma tasa  $\alpha$  en particular, cuando la condición inicial  $\eta_s$  varía. En la Figura 2.5 se presenta el rango de valores obtenido cuando varía la condición inicial  $\eta_s$  para la misma tasa normalizada de excitaciones presentadas en la Figura 2.4.

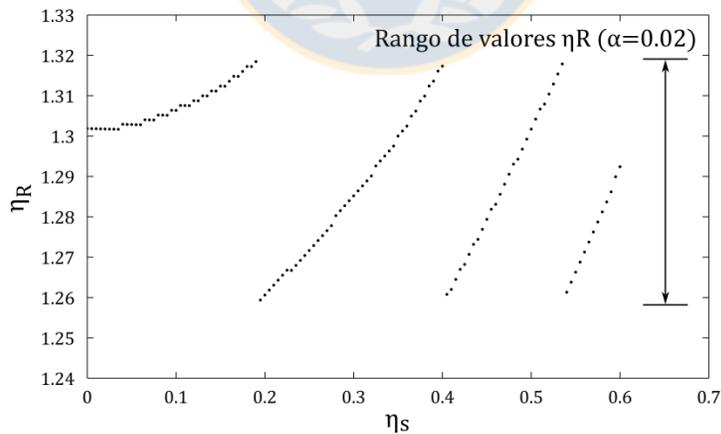


Figura 2.5 Valores  $\eta_R$  obtenidos mientras se varía la condición inicial  $\eta_s$ , cuando se aplica un barrido con una tasa normalizada con  $\alpha = 0.02$  y  $\beta = 0$ . Se destaca el rango valores  $\eta_R$  obtenido.

Se observa que para distintos valores de condición inicial  $\eta_s$  se obtienen distintos valores de  $\eta_R$ , estos valores quedan contenidos en un rango similar, al encontrado cuando se varía la condición inicial  $\beta$ , cuando se aplica un barrido con la misma tasa en particular ( $1.26 < \eta_R < 1.32$  aproximadamente).

El rango de valores posibles de  $\eta_R$  que puede experimentar el sistema ante una tasa normalizada en particular se determina variando las dos condiciones iniciales  $\beta$  y  $\eta_s$  al mismo tiempo. Los valores  $\eta_R$  resultantes para la misma tasa utilizada en los ejemplos anteriores se presentan en la Figura 2.6. Se observa que la variación simultánea de las condiciones iniciales produce prácticamente el mismo rango de valores de  $\eta_R$  que el obtenido por la variación individual de cualquiera de estos parámetros. Esta conclusión se cumple para cualquier valor de  $\alpha$ , sea positivo o negativo.

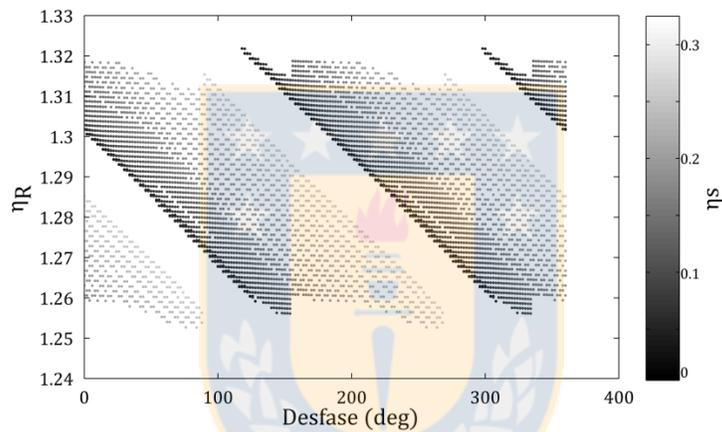


Figura 2.6 Valores  $\eta_R$  obtenidos mientras se varía la condición inicial  $\beta$  y  $\eta_s$ , cuando se aplica un barrido con una tasa normalizada con  $\alpha = 0.02$ .

Los distintos valores de  $\eta_R$  obtenidos, tanto por la variación de  $\beta$  como la de  $\eta_s$ , quedan contenidos en un rango. Este rango puede ser caracterizado mediante un valor medio  $\eta_{R,med}$  y un valor alterno  $\eta_{R,alt}$  según el valor de la tasa normalizada  $\alpha$  utilizada. La Figura 2.7 presenta el rango de valores  $\eta_R$  definido según  $\eta_{R,med}$  y  $\eta_{R,alt}$  en función de la tasa normalizada  $\alpha$  utilizada.

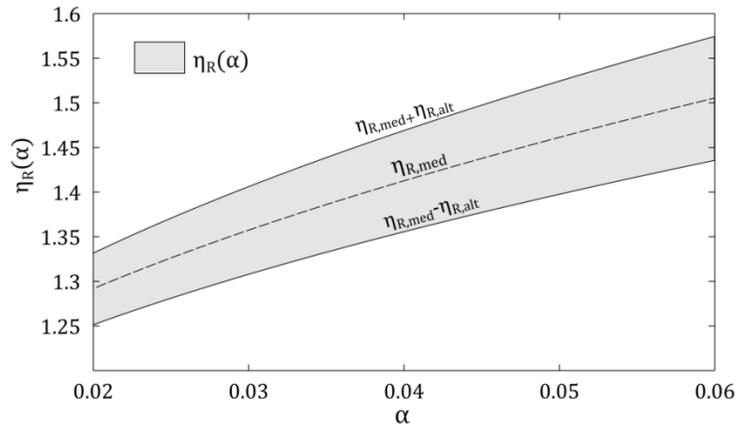


Figura 2.7  $\eta_R$  en función de  $\alpha$ . Se destacan las funciones  $\eta_{R,med}$  y  $\eta_{R,alt}$ .

Notar que para un barrido sinusoidal con una tasa de excitación  $\alpha$  en específico, existe un único valor de  $\eta_{R,med}$  y  $\eta_{R,alt}$ , de este modo es posible encontrar una modelo que ajuste los valores de  $\eta_{R,med}$  y  $\eta_{R,alt}$  en función de la tasa de las excitaciones  $\alpha$ .

## 2.8 Influencia del factor de amortiguamiento

Se estudia si el factor de amortiguamiento influye sobre el valor  $\eta_R$  obtenido ante un barrido sinusoidal. Para esto se grafica el valor  $\eta_R$  obtenido cuando un barrido en particular excita sistemas con distinto factor de amortiguamiento:

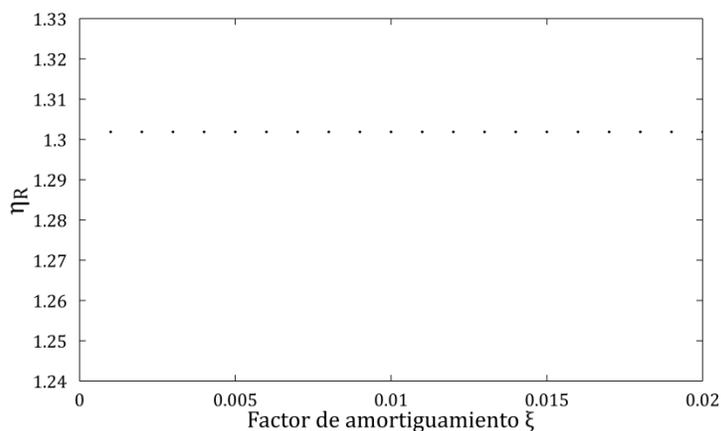


Figura 2.8 Valor de  $\eta_R$  en función del factor de amortiguamiento del sistema.  $\alpha = 0.02$ ,  $\beta = 0$  y  $\eta_s = 0$ . En el eje y se utiliza el mismo rango que el presentado en las Figuras 2.4, 2.5 y 2.6.

En la Figura 2.8 se observa que, independiente del valor del factor de amortiguamiento del sistema, el valor  $\eta_R$  obtenido de respuesta vibratoria ante un mismo barrido, es siempre idéntico. Se concluye que el factor de amortiguamiento del sistema no tiene influencia sobre el valor de  $\eta_R$ .

Esta conclusión se cumple para cualquier combinación de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\eta_s$  utilizados.



## Capítulo 3

### Modelo para la estimación de la frecuencia natural

Se propone un modelo para predecir el rango de valores posibles  $\eta_R$  en función de la tasa de aceleración normalizada  $\alpha$ . Luego se compara el modelo matemático propuesto con modelos planteados por otros autores. Se analiza también la recomendación de tasa normalizada propuesta por la norma ISO-7626, mientras se relaciona dicha tasa recomendada con el nivel de desviación predicho por los modelos matemáticos estudiados.

#### 3.1 Modelo para la estimación de $\eta_{R,med}$ y $\eta_{R,alt}$

Una vez calculados los intervalos de valores definidos por  $\eta_{R,med}$  y  $\eta_{R,alt}$  en función de la tasa normalizada de las excitaciones  $\alpha$ , se realiza un ajuste de estos sobre un modelo que describa su comportamiento, el modelo se presenta en las ecuaciones 3.1 y 3.2:

$$\eta_{R,med} = 1 + a_o\sqrt{|\alpha|} \quad (3.1)$$

$$\eta_{R,alt} = a_1\sqrt{|\alpha|} \quad (3.2)$$

Este cumple con la razón de proporcionalidad observada entre  $\sqrt{|\alpha|}$  y los valores de  $\eta_{R,med}$  y  $\eta_{R,alt}$ , y cumple con la evaluación del caso estacionario ( $\alpha = 0$ ):

$$\eta_{R,med}(\alpha = 0) = 1 \quad (3.3)$$

$$\eta_{R,alt}(\alpha = 0) = 0 \quad (3.4)$$

Los coeficientes  $a_o$  y  $a_1$  se obtienen mediante un ajuste de mínimos cuadrados de los resultados numéricos sobre el modelo dado por las ecuaciones 3.1 y 3.2. De este modo las expresiones que modelan el rango de valores  $\eta_R$  de respuesta ante una excitación de barrido sinusoidal de tasa lineal y amplitud máxima de fuerza constante son:

$$\eta_{R,med} = 1 + 2.057\text{sign}(\alpha)\sqrt{|\alpha|} \quad (3.4)$$

$$\eta_{R,alt} = 0.413\sqrt{|\alpha|} \quad (3.5)$$

El intervalo de valores de  $\alpha$  en el cual es realizado el ajuste, y el error asociado al ajuste de mínimos cuadrados sobre el modelo escogido se presenta a continuación.

### 3.2 Intervalo de ajuste

El ajuste de los resultados numéricos sobre el modelo presentado en las ecuaciones 3.1 y 3.2, es realizado en el intervalo de valores  $0.0001 < \alpha < 0.06$  y  $-0.06 < \alpha < -0.0001$ . Para tasas menores al valor de  $|\alpha| = 0.0001$  las desviaciones del valor  $\omega_m$  respecto a la frecuencia natural son inferiores al 1.3%. Por este motivo el modelo propuesto no tiene una validez práctica cuando los barridos utilizados tienen tasas menores a dicho valor y no se consideran dentro del rango a ajustar.

El valor superior del intervalo propuesto ( $|\alpha| = 0.06$ ) es escogido también por una razón práctica, ya que para valores superiores a este, la forma de onda de la respuesta vibratoria no permite distinguir fácilmente el peak en el cual ocurre la máxima respuesta vibratoria. Cabe destacar que para una tasa de  $\alpha = 0.06$  el error respecto a la frecuencia natural puede alcanzar un 60%.

### 3.3 Error de ajuste numérico

Se determina el error en el ajuste de los resultados numéricos sobre el modelo propuesto por las ecuaciones 3.4 y 3.5. El error del ajuste para los valores  $\eta_{R,med}$  y  $\eta_{R,alt}$  según la tasa normalizada de excitación  $\alpha$  se presentan en la Figura 3.1 y en la Figura 3.2 respectivamente.

Se destaca de la Figura 3.2 un error significativo en el ajuste del valor  $\eta_{R,alt}$  (120%) cuando la tasa normalizada es de bajo valor. Este error podría ser corregido cambiando la forma del modelo matemático sobre el cual se realiza el ajuste. Sin embargo el ajuste de la expresión propuesta para el valor medio  $\eta_{R,med}$  modela bien los resultados numéricos obtenidos sin sobrepasar el 2.5% de error en el ajuste.

Por este motivo el modelo matemático propuesto se considera aceptable, manteniendo la consideración que la expresión del valor  $\eta_{R,alt}$  no puede ser utilizada cuando los barridos

aplicados tengan una baja tasa normalizada de excitación ( $|\alpha| < 0.01$ ), y considerando que la estimación de la frecuencia natural presenta mejores resultados por medio de la expresión propuesta para  $\eta_{R,med}$ .

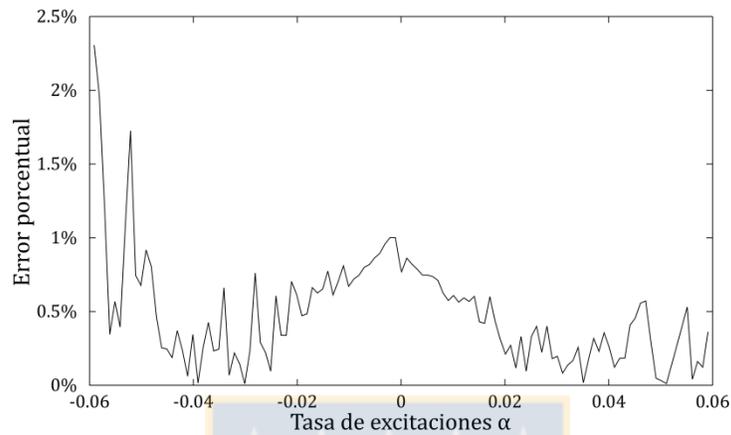


Figura 3.1 Error de ajuste del modelo  $\eta_{R,med}$  sobre los resultados numéricos.

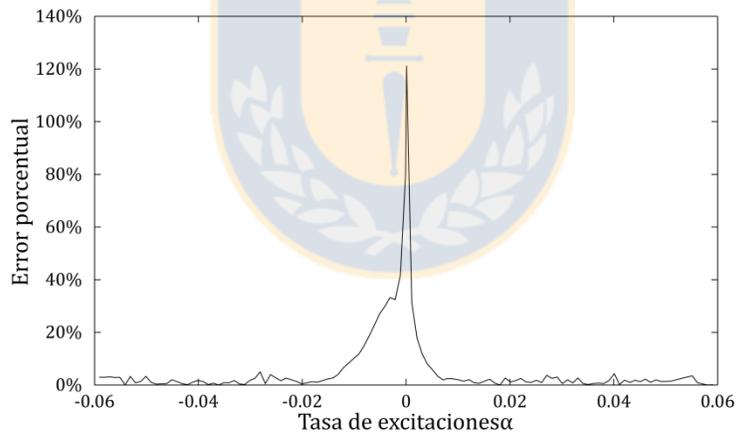


Figura 3.2 Error de ajuste del modelo  $\eta_{R,alt}$  sobre los resultados numéricos.

### 3.4 Estimación de la frecuencia natural a partir del modelo propuesto

Los valores  $\eta_{R,med}$  y  $\eta_{R,alt}$  pueden ser representados según la definición dada por la ecuación 2.26:

$$\eta_{R,med} = \omega_{m,med}/\omega_n \quad (3.6)$$

$$\eta_{R,alt} = \omega_{m,alt}/\omega_n \quad (3.7)$$

De este modo, siendo conocido el valor de  $\omega_{m,med}$  o  $\omega_{m,alt}$ , y el valor de la tasa  $\alpha$  aplicada en el barrido sinusoidal, es posible estimar el valor real de la frecuencia natural por medio del modelo propuesto, la expresión resultante se presenta a continuación:

$$\omega_n = \omega_{m,med}/1 + 2.057\text{sign}(\alpha)\sqrt{|\alpha|} \quad (3.8)$$

$$\omega_n = \frac{\omega_{m,alt}}{0.413\sqrt{|\alpha|}} \quad (3.9)$$

Los valores  $\omega_{m,med}$  y  $\omega_{m,alt}$  pueden ser determinados experimentalmente analizando un número representativo de respuestas vibratorias, ante un barrido para una tasa de excitación  $\alpha$  en específico.

### 3.5 Modelos matemáticos propuestos por otros autores

Conocer la amplitud máxima que puede experimentar la respuesta vibratoria de un rotor durante la partida o parada es fundamental el diseño y la operación de estos. Es por esto que varios autores han propuesto aproximaciones para la respuesta vibratoria de un sistema lineal SDOF sometido a una excitación de barrido sinusoidal que pasa por una zona resonante [3-7]. Al entregar expresiones aproximadas para la amplitud máxima de la respuesta vibratoria, también ofrecen aproximaciones para predecir la frecuencia en la que ocurre dicha amplitud máxima, no siendo estos modelos propuestos con el objetivo de obtener una mejor aproximación del valor de una frecuencia natural a partir de la respuesta a un barrido sinusoidal, el cual es el objetivo del modelo propuesto en esta investigación.

Se compararán a continuación dos aproximaciones aceptadas para la estimación de  $\eta_R$ .

Markert [8] obtiene analíticamente una función aproximada que relaciona la frecuencia en la cual ocurre la máxima amplitud de la respuesta vibratoria con la tasa normalizada de las excitaciones:

$$\eta_R = 1 + 2.157 \text{sign}(\alpha) \sqrt{|\alpha|} \quad (3.10)$$

Leul (1994) propone una aproximación analítica basada en un método de variación de parámetros para aproximar la solución de la ecuación diferencial que modela la respuesta de un barrido sinusoidal.

$$\eta_R = 1 + \text{sign}(\alpha) \frac{2.222\sqrt{|\alpha|}}{1 + 0.556\xi/\sqrt{|\alpha|}} \quad (3.11)$$

Notar que ambas expresiones entregan un único valor de  $\eta_R$  para una tasa de excitaciones  $\alpha$  en particular. Esto difiere del modelo propuesto en esta investigación, donde se propone que para una tasa de excitación  $\alpha$ , existe un rango de valores posibles para  $\eta_R$ , producto de las diferentes condiciones iniciales con las que puede realizarse un barrido sinusoidal.

La comparación de los modelos propuestos por Markert y Leul, con el modelo propuesto en esta investigación se grafican en la Figura 3.3:

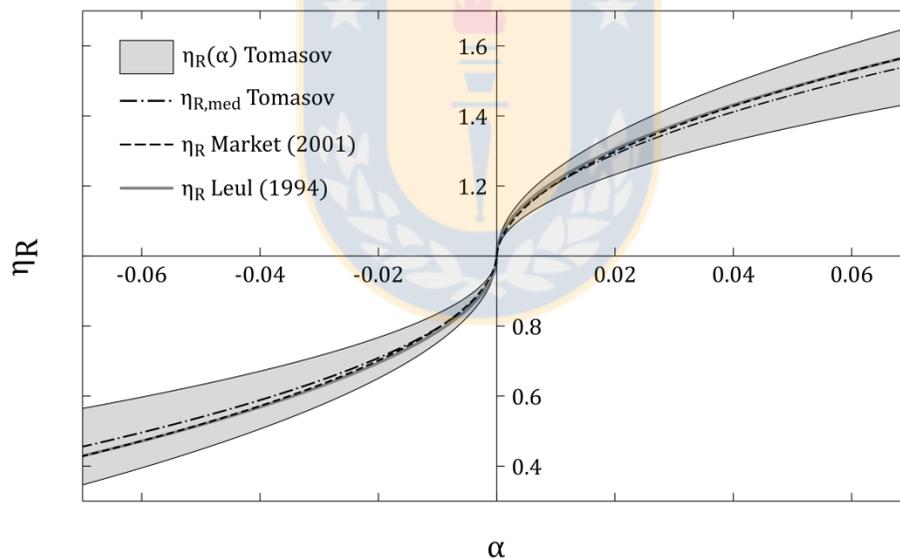


Figura 3.3 Comparación modelos para la estimación de  $\eta_R$ .

Se observa en la Figura 3.3 que, tanto el modelo propuesto por Markert como el modelo Propuesto por Leul, quedan contenidos dentro del rango definido con el modelo propuesto en esta investigación.

### 3.6 Norma ISO-7626 para barridos sinusoidales

La norma ISO-7626 se encarga de estandarizar la aplicación de diversas técnicas de determinación experimental de la función respuesta en frecuencia FRF. En la sección 3 de dicha norma se aborda la determinación de parámetros modales a partir de excitaciones externas como barridos armónicos o sinusoidales, barridos periódicos o multi-sinusoidales, y excitaciones aleatorias.

Los barridos sinusoidales son comúnmente aplicados como barridos lineales y barridos logarítmicos. En general la norma ISO-7626 provee las siguientes recomendaciones para los barridos sinusoidales.

- “Cualquier forma de onda de excitación, cuyo espectro abarque toda la gama de frecuencias de interés, puede ser utilizada siempre que las señales de excitación y de respuesta se procesen correctamente”.
- “La función de respuesta en frecuencias se calcula usando sólo aquellas componentes de la respuesta y señales de excitación correspondientes a la frecuencia de excitación”.
- “Se elegirá la tasa de barrido de manera que, el rango de frecuencias abarcado esté dentro del  $\pm 10\%$  del valor de la frecuencia natural, donde la magnitud de la respuesta de la estructura medida está dentro de 5% del valor de operación.”

Además la norma provee una recomendación para las tasas máximas para las excitaciones de barridos sinusoidales lineales y logarítmicos. Para un barrido lineal, la tasa máxima  $a_{\max}$  es recomendada como:

$$a_{\max} = \frac{54f_r^2}{Q^2} ; [Hz/min] \quad (3.12)$$

Donde,  $f_r$  corresponde a la zona resonante estimada a estudiar, y  $Q$  corresponde a la amplificación dinámica en la zona resonante estimada como:

$$Q = 1/(2\xi) \quad (3.13)$$

Reemplazando el valor de  $Q$  y la ecuación (2.14) en la ecuación (3.12) se obtiene el valor de la tasa normalizada máxima recomendada:

$$\alpha_{\max} = 1.8 \frac{\xi^2}{\pi} \quad (3.14)$$

Notar que, si se desea determinar una frecuencia natural de un modo de vibrar con un factor de amortiguamiento de 1%, la norma ISO-7626 sugiere utilizar un barrido sinusoidal con una tasa normalizada de  $5.7E - 5$ . Si bien este valor garantiza que el error en la determinación de la frecuencia natural será despreciable, un ensayo a esta tasa puede ser de muy larga duración si la frecuencia natural del sistema es baja.

Otra observación importante, es que la aceleración del barrido sugerido por la norma, depende del valor del factor de amortiguamiento al cuadrado. En un caso práctico no se conoce a priori el valor del factor de amortiguamiento del sistema, de este modo si este valor es supuesto, una diferencia en la suposición entre un valor de  $\xi = 0.1\%$  o  $\xi = 1\%$ , puede significar una diferencia de 100 veces entre las tasas recomendadas por la norma ISO-7626.



## Capítulo 4

### Diseño e implementación del banco de ensayos

En este capítulo se describe la implementación y análisis de los datos obtenidos en un banco de ensayos fabricado con el objetivo de obtener la respuesta vibratoria de un sistema dinámico ante un barrido sinusoidal de tasa lineal de amplitud constante que pasa por una zona resonante. Se describe la implementación del sistema de medición utilizado para medir el valor de la frecuencia en la que ocurre la amplitud máxima de vibración. Se obtienen además, los parámetros modales del sistema implementado mediante ensayos de análisis modal experimental.

#### 4.1 Sistema implementado

Con el fin de evaluar el modelo propuesto, se diseña un banco de ensayos para medir la respuesta vibratoria de un sistema de frecuencias naturales conocidas, ante una excitación de barrido sinusoidal de tasa y condiciones iniciales controlables.

El sistema implementado consiste en una viga empotrada, excitada en un extremo mediante un Shaker (Figura 4.1). Este sistema tiene la ventaja de poder modificar el valor de la frecuencia natural mediante la longitud de la viga. Se asume que el primer modo de vibrar de la viga unida al shaker tendrá un comportamiento como el modelado para un sistema lineal de un grado de libertad.

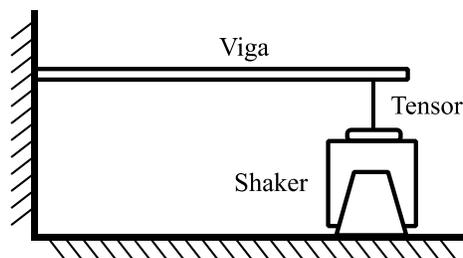


Figura 4.1 Esquema del sistema dinámico implementado.

La viga se une al shaker en el extremo mediante un cable tenso, el cual se mantiene siempre en tracción en el transcurso de los ensayos. El montaje de la viga empotrada y el shaker se presenta en la Figura 4.2:

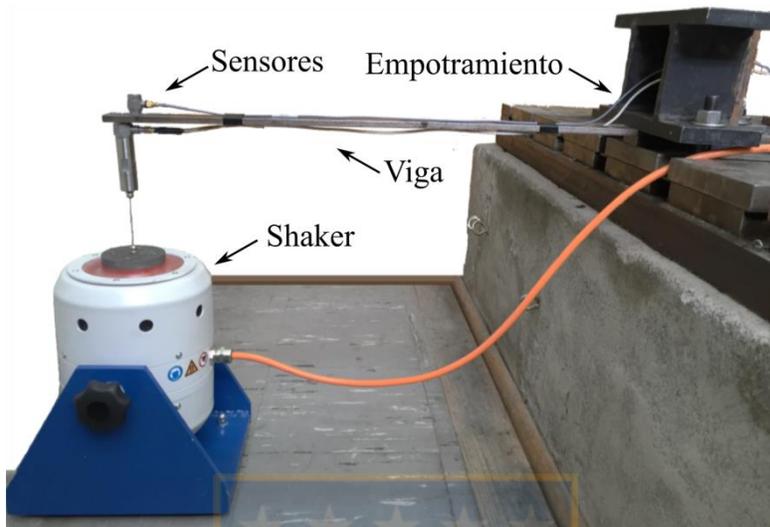


Figura 4.2 Montaje de la viga empotrada excitada por shaker.

En la Figura 4.2 se observan sensores ubicados en el extremo de la viga, estos corresponden a un acelerómetro y un transductor de fuerzas. El detalle de la unión entre el shaker y la viga se presentan a continuación (Figura 4.3):

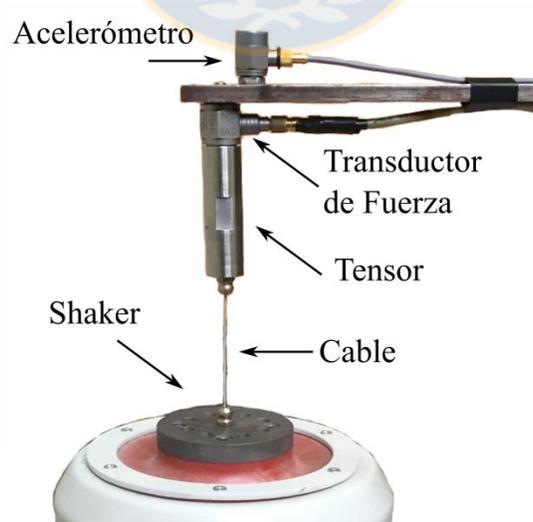


Figura 4.3 Detalle de la unión entre la viga y el shaker. Se destacan los sensores ubicados en el extremo de la viga.

El transductor de fuerzas instalado entre el shaker y la viga cumple con verificar que la tensión del cable se mantenga en el transcurso de los ensayos de barrido sinusoidal. Notar que la tensión del cable es variable, transmitiendo la excitación de barrido sinusoidal sin perder en ningún momento su tensión. El modelo y funcionamiento de los sensores es tratado con mayor profundidad en la sección 4.3 El funcionamiento del sistema de excitación y el shaker se presenta en la siguiente sección.

## 4.2 Sistema de excitación

El sistema implementado es excitado en el extremo de la viga mediante un Shaker modelo TIRA vib s 51110. La señal de excitación es programada mediante el software LabVIEW y generada mediante la tarjeta NI 6711, luego es amplificada en el amplificador TIRA BAA 120 de modo que la amplitud de la corriente suministrada al shaker, y por tanto, la fuerza magnética oscilatoria ejercida por el shaker sobre el sistema sea de magnitud constante.

La Figura 4.3 resume los equipos utilizados para generar la excitación aplicada sobre el sistema dinámico.

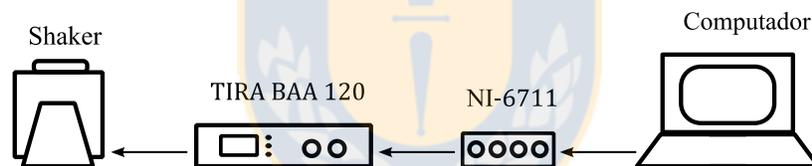


Figura 4.4 Recorrido de la señal de fuerza a aplicar sobre el sistema.

## 4.3 Sistema de medición

Las aceleraciones y la fuerza excitadora se registran en el extremo de la viga simultáneamente mediante una tarjeta NI 9233. Las aceleraciones son medidas mediante el acelerómetro Brüel & Kjær 4513-001 y las fuerzas aplicadas son medidas por el transductor modelo PCB 208 B02. Un esquema del sistema de medición se presenta en la Figura 4.4:

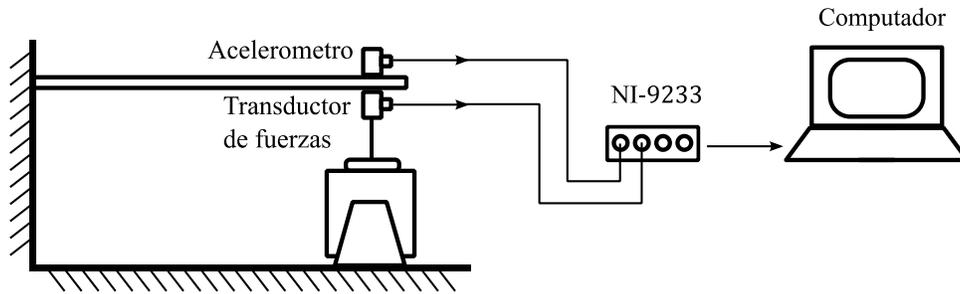


Figura 4.5 Sistema de medición del sistema implementado.

#### 4.4 Análisis modal experimental del sistema implementado

Con el fin de conocer los parámetros modales reales del sistema, se realiza un análisis modal experimental mediante un ensayo de golpe. Debido a que los parámetros modales del sistema pueden variar con la manipulación del sistema, estos son registrados antes, durante, y al terminar la rondas de ensayos de barrido sinusoidal, de este modo los resultados obtenidos a partir del análisis modal experimental son considerados como los valores reales y de referencia al momento de analizar los resultados obtenidos con excitaciones de barrido sinusoidal. Se verifica que los parámetros modales del sistema son los mismos cuando el shaker se encuentra encendido o apagado. La excitación impulsiva es aplicada con un martillo bruel and kjaer 8206 y es registrada simultáneamente a la respuesta vibratoria mediante la tarjeta NI-9233. Tanto el punto de excitación como de medición se escoge como el extremo de la viga.

Las funciones respuesta obtenidas son promediadas y procesadas mediante el algoritmo least squares complex exponential (LSCE) y un diagrama de estabilidad [9], este se presenta en la Figura 4.6.

En la Figura 4.6 se observa además que los modos de mayor frecuencia tienen una amplificación aproximadamente de la misma magnitud que el primer modo de vibrar del sistema. Para prevenir medir cualquier efecto de estos modos en la respuesta al barrido, se aplica un filtro pasabajo que no altera la fase de la onda sobre la respuesta vibratoria del sistema. Este filtro es solo de carácter preventivo, ya que el barrido sinusoidal solo excitará el primer modo del sistema.

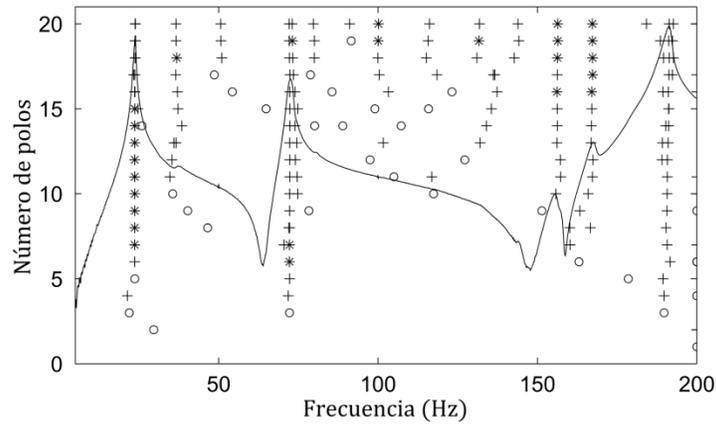


Figura 4.6 Diagrama de estabilidad del sistema. Se obtiene que la primera frecuencia natural del sistema tiene un valor  $\omega_1 = 23.63 \text{ Hz}$  y un factor de amortiguamiento  $\xi_1 = 1.36\%$ .

#### 4.5 Ensayos de barrido sinusoidal

Mediante el software LabView se programan distintos barridos sinusoidales a aplicar sobre el banco de ensayos implementado. Las tasas normalizadas, la frecuencia inicial y final, y el tiempo de cada ensayo se presentan en las Tablas 4.1 y 4.2.

Tabla 4.1 Tasas normalizadas ensayadas de valor positivo, se presentan las frecuencias iniciales, finales, y el tiempo de duración de cada ensayo.

Tasa ( $\alpha$ )	$\Omega_{ini}(\text{Hz})$	$\Omega_{fin}(\text{Hz})$	Tiempo (s)
1E - 3	12	35	6.34
1E - 2	2	60	1.62
2E - 2	2	70	0.95
4E - 2	2	70	0.47
6E - 2	2	70	0.31

Tabla 4.2 Tasas normalizadas ensayadas de valor negativo, se presentan las frecuencias iniciales, finales, y el tiempo de duración de cada ensayo.

Tasa ( $\alpha$ )	$\Omega_{ini}$ (Hz)	$\Omega_{fin}$ (Hz)	Tiempo (s)
-1E - 3	35	12	6.34
-1E - 2	60	2	1.62
-2E - 2	70	2	0.95
-4E - 2	70	2	0.47
-6E - 2	70	2	0.31

Cada una de las tasas previamente presentadas es ensayada para un conjunto de distintos valores de condición inicial  $\beta$ . La condición inicial  $\eta_s$  es constante en cada tasa normalizada ensayada dada según el valor  $\Omega_{ini}$  utilizado.

Las respuestas vibratorias obtenidas tienen la forma deseada, y no se presencian alteraciones que impidan obtener la frecuencia en la que ocurre la amplitud máxima. Un ejemplo de una respuesta vibratoria se presenta en la Figura 4.7.

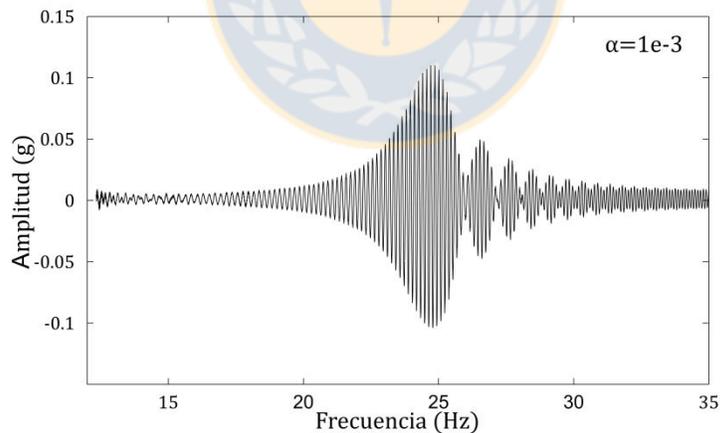


Figura 4.7 Respuesta vibratoria experimental ante un barrido sinusoidal.

No se observa pérdida de tensión en el cable para ninguno de los ensayos realizados.

#### 4.6 Verificación de la sincronización entre el sistema de excitación y el sistema de medición

Para realizar un análisis correcto de la frecuencia instantánea en la que se determina la máxima amplitud de vibración, es necesario conocer correctamente qué amplitud de vibración existe en cada frecuencia de excitación. Un error en la sincronización entre el sistema que genera la excitación y el sistema que mide respuesta vibratoria podría causar errores significativos en la determinación de la frecuencia real en la que ocurre la amplitud máxima de vibración. Para garantizar la sincronización entre la frecuencia del barrido sinusoidal y la respuesta vibratoria medida, todas las señales de excitación se programan para que una vez terminado el barrido se mantengan un tiempo sin excitar el sistema, para luego dar una excitación impulsiva que pueda ser observada en la respuesta vibratoria, un ejemplo se presenta a continuación en la Figura 4.8:

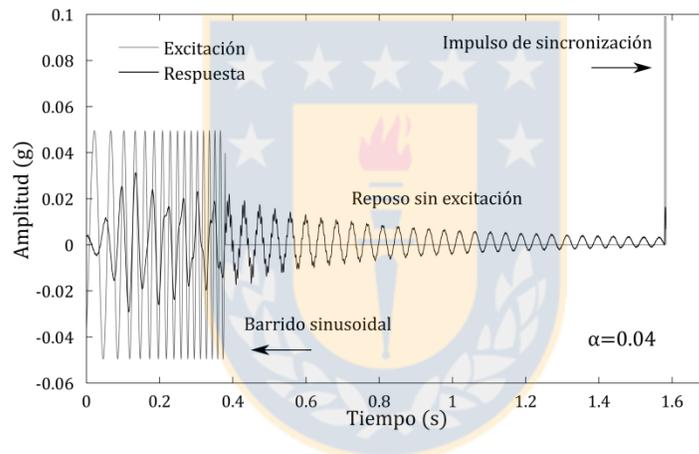


Figura 4.8 Respuesta vibratoria durante el ensayo de barrido, durante la pausa y luego tras un impulso de sincronización.  $\alpha = 0.04$ .

El objetivo del impulso aplicado en el instante final del ensayo es crear una referencia visible en la respuesta vibratoria con la cual sincronizar la señal de excitación aplicada sobre el sistema con la respuesta vibratoria de este. Realizando un zoom sobre el impulso de sincronización (Figura 4.9), es posible observar la respuesta del sistema ante este impulso.

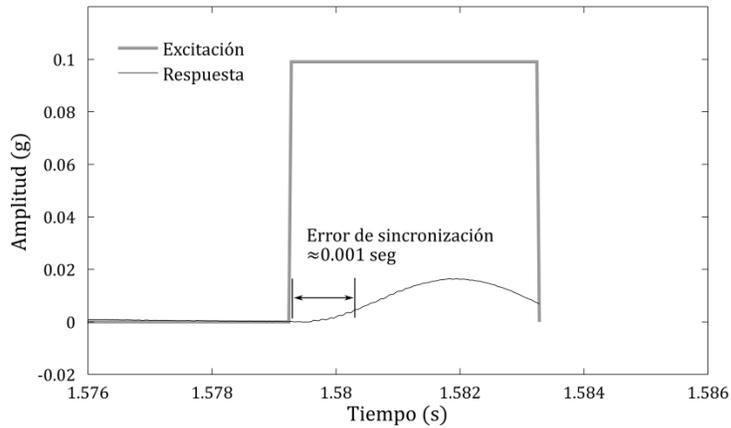


Figura 4.9 Zoom sobre el impulso de sincronización. Se destaca el posible error de sincronización entre el impulso y la respuesta vibratoria.

Como no es posible conocer exactamente cuánto tarda el sistema en reaccionar ante este impulso, se puede suponer que existe un error de sincronización. Suponiendo, a partir de la respuesta observada que en la Figura 4.9, que el desfase en tiempo entre la excitación impulsiva y la respuesta del sistema corresponde a un valor de 0.001 segundos en el caso más desfavorable, el desfase en la sincronización de la frecuencia de excitación con la amplitud de la respuesta vibratoria puede estimarse según la ecuación 3.14:

$$\Delta\Omega(t) = a\Delta t \quad (3.14)$$

Donde  $\Delta\Omega$  corresponde al cambio de frecuencia observado ante un  $\Delta t$  en un barrido con aceleración  $a$ . Como la mayor aceleración ensayada corresponde a  $a = 0.06\omega_1^2$ , entonces el máximo desfase de frecuencia posible a medir corresponde a 0.21 Hz. Este desfase se considera despreciable para dicha tasa de excitación. De este modo se considera que la respuesta vibratoria está sincronizada con la frecuencia de excitación para todas las tasas ensayadas.

## Capítulo 5

### Comparación del modelo propuesto con resultados experimentales.

En este capítulo se realiza una comparación de los valores  $\eta_{R,med}$  y  $\eta_{R,alt}$  obtenidos de forma experimental con los valores entregados por el modelo matemático propuesto. Luego se utiliza el modelo propuesto para obtener una mejor aproximación del valor de la primera frecuencia natural del sistema a partir de los valores de  $\omega_m$  medidos experimentalmente.

#### 5.1 Resultados de los ensayos de barrido sinusoidal.

Luego de registrar la respuesta vibratoria para las tasas indicadas en las tablas 4.1 y 4.2, para distintos valores de condición inicial  $\beta$ , se obtiene la frecuencia en la cual se obtiene la amplitud máxima  $\omega_m$  para cada una de estas. Luego se obtiene el valor  $\eta_R$  para cada medición normalizando el valor de  $\omega_m$  por el valor de la frecuencia natural  $\omega_n$  (ecuación 2.26) obtenida por medio del análisis modal experimental. Este conjunto de datos permite obtener el rango de valores  $\eta_R$  experimentales en función de la tasa normalizada de excitaciones.

En la Figura 5.1 se comparan los resultados obtenidos experimentalmente con los resultados predichos por el modelo propuesto:

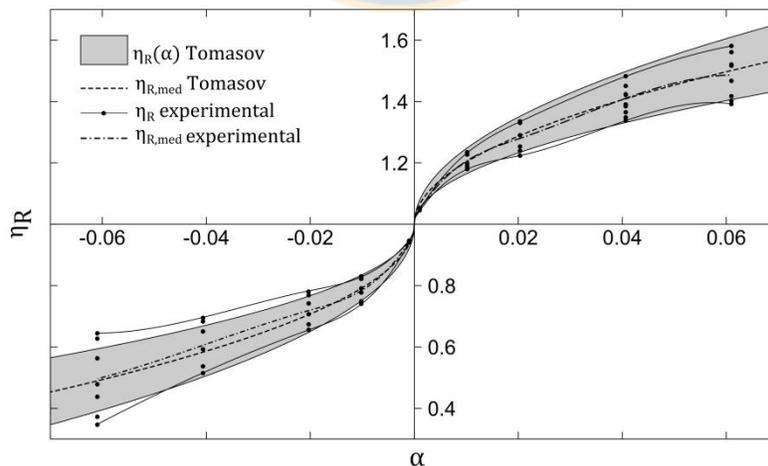


Figura 5.1 Comparación de  $\eta_R$  experimental vs  $\eta_R$  predicho por modelo matemático.

El error de los valores  $\eta_{R,med}$  y  $\eta_{R,alt}$  respecto a los valores predichos por el modelo propuesto se grafica a continuación (Figura 5.2):

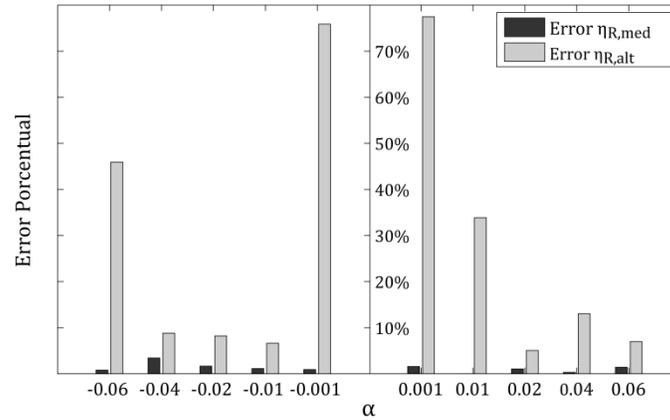


Figura 5.2 Error de los valores  $\eta_{R,med}$  y  $\eta_{R,alt}$  obtenidos experimentalmente respecto a los estimados por el modelo propuesto.

El valor  $\eta_{R,med}$  obtenido experimentalmente se asemeja al valor modelado y no supera el 3.5% de error en la estimación respecto al valor esperado. Sin embargo, el valor  $\eta_{R,alt}$  presenta desviaciones importantes respecto al valor predicho, especialmente cuando las tasas normalizadas aplicadas son de menor magnitud. Este elevado nivel de error se debe a que el modelo propuesto para  $\eta_{R,alt}$ , como se discutió en la sección 3.3, modela de forma incorrecta el comportamiento del sistema cuando la tasa normalizada utilizada es de bajo valor ( $|\alpha| < 0.01$ ). Sin embargo el bajo nivel de error observado en la predicción de  $\eta_{R,med}$  evidencia que el modelo puede ser utilizado para aproximar el valor de la primera frecuencia natural del sistema, siempre y cuando sea estimado a partir de la expresión propuesta para  $\eta_{R,med}$  en la ecuación 3.8.

El alto nivel de error observado en  $\eta_{R,alt}$  para la tasa  $\alpha = -0.06$  se atribuye a que, al ser dicho ensayo de corta duración (0.31seg) no se alcanza a atenuar la respuesta transiente que ocurre en la puesta en marcha del sistema. Si bien un filtro pasabajo es utilizado sobre la respuesta vibratoria para prevenir medir la respuesta de los modos de mayor frecuencia, solo bastaría con la respuesta transiente del primer modo de vibrar en la puesta en marcha del sistema para alterar las mediciones realizadas.

## 5.2 Estimación de la frecuencia natural del sistema

De los ensayos de barrido sinusoidal realizados, sólo se conoce el valor de  $\omega_m$  y de tasa del barrido  $a$ , y no se conoce el valor verdadero de la frecuencia natural  $\omega_1$ , es posible estimar dicha frecuencia natural a partir del modelo propuesto para  $\eta_{R,med}$  en la ecuación 3.8, de este modo la frecuencia natural se obtiene como:

$$\omega_1 = \omega_{m,med}/\eta_{R,med} = \frac{\omega_{m,med}}{1 + 2.057\text{sign}(\alpha)\sqrt{|\alpha|}} \quad (5.1)$$

Se compara el error obtenido al determinar el valor de  $\omega_1$  según el método propuesto, y el valor obtenido al asumir que la frecuencia natural  $\omega_1$  corresponde al valor de la frecuencia en la cual se observa la máxima amplitud de respuesta vibratoria ( $\omega_m$ ). Ambos errores se grafican según tasa normalizada de excitación utilizada para cada ensayo en la Figura 5.3:

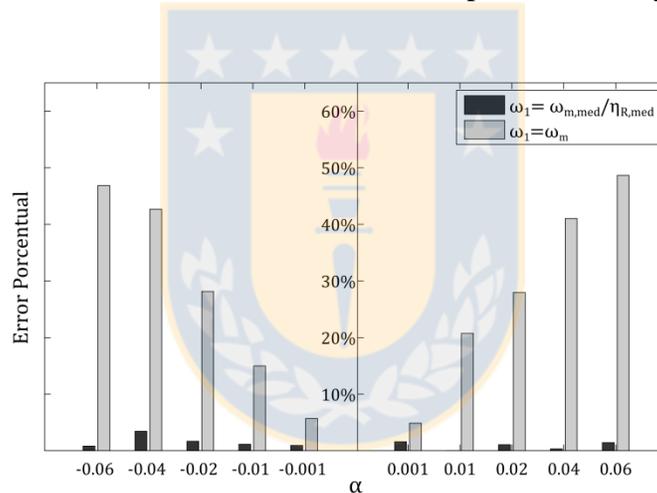


Figura 5.3 Error en la determinación de  $\omega_1$ . Comparación del error obtenido al determinar  $\omega_1$  según el método propuesto v/s la estimación de  $\omega_1$  como el valor de la frecuencia de máxima amplitud de respuesta vibratoria.

Se observa de los resultados experimentales, que la estimación de  $\omega_1$  basada en la utilización del modelo propuesto, tiene una menor desviación respecto al valor real que el estimar la frecuencia natural como la frecuencia de excitación en la cual ocurre la máxima amplitud de vibración ( $\omega_m$ ). Sin embargo, para poder utilizar el modelo propuesto, es necesario contar un conjunto de respuestas vibratorias ante barridos con una misma tasa  $\alpha$ , cada una con distintas condiciones iniciales, para obtener el valor  $\omega_{m,med}$ . Esto es una desventaja, ya que en la práctica no es siempre posible conocer las condiciones iniciales del barrido sinusoidal.

Por otro lado, el método propuesto permite estimar la frecuencia natural del sistema cuando la aceleración de las excitaciones es alta y la respuesta vibratoria es de corta duración, condición que impide obtener la frecuencia natural mediante otros métodos de procesamiento de señales. En este caso, la frecuencia natural aproximada a partir de la tasa normalizada de  $\alpha = 0.06$ , se obtiene a partir de un conjunto de respuestas vibratorias de 0.31seg de duración, mientras que para este sistema, la norma ISO-7626 sugiere la utilización de un barrido sinusoidal de 61 seg de duración con un barrido de tasa normalizada igual a  $\alpha_{\max} \approx 1E - 4$ .

Se observa de la Figura 5.3 que en la estimación de la frecuencia natural sin la utilización del método propuesto, donde se asume que la frecuencia natural corresponde a frecuencia de excitación en la cual ocurre la máxima amplitud vibratoria, presenta un error de estimación que disminuye en la medida que la magnitud de la tasa de excitación  $\alpha$  utilizada es menor. Esto evidencia que es posible elegir la aceleración de un barrido en función del error tolerable en la determinación de la frecuencia natural. El error asociado a cada tasa de excitación puede ser estimado a priori utilizando las ecuaciones 3.4 y 3.5.



## Conclusiones

Se desarrolló un modelo para predecir el rango de valores en los cuales puede ocurrir la frecuencia de máxima amplitud de respuesta vibratoria de un sistema de un grado de libertad sometido a un barrido sinusoidal de alta aceleración de tasa lineal y amplitud constante.

La estimación del valor de una frecuencia natural obtenida a partir del modelo propuesto, es una mejor aproximación que el valor obtenido al estimar dicha frecuencia natural como el valor de la frecuencia de excitación en el cual ocurre la máxima amplitud de respuesta vibratoria, cuando las excitaciones aplicadas sobre el sistema tienen una tasa normalizada mayor que el valor recomendado por la norma ISO-7626.

El nivel de error asociado a la determinación de una frecuencia natural como el valor de la frecuencia de excitación en la cual se obtiene la máxima amplitud de vibración, puede ser estimado a priori según la tasa normalizada de excitación utilizada, permitiendo elegir la aceleración de un barrido en función del error tolerable en la determinación de la frecuencia natural.



## Perspectivas

En la práctica, antes de utilizar el modelo propuesto en esta investigación para obtener de forma aproximada el valor de una frecuencia natural de una máquina o estructura que tenga una primera frecuencia natural de bajo valor la cual sea sometida por condición de operación a un barrido sinusoidal, es necesario investigar los siguientes puntos:

- Estudiar la respuesta vibratoria ante barridos sinusoidales que no tengan necesariamente tasa constante, ni amplitud máxima de fuerza constante, como el caso de un barrido sinusoidal causado por una masa desbalanceada. Luego analizar si el modelo propuesto en esta investigación se ajusta a las desviaciones que presenten dichas respuestas vibratorias.
- Estudiar la influencia que tiene un segundo modo de vibrar cercano al valor de la frecuencia natural a detectar. Una frecuencia natural cercana a la frecuencia natural a detectar podría cambiar la respuesta vibratoria esperada, modificando los valores predichos por el modelo propuesto.
- Mejorar el modelo matemático propuesto para realizar el ajuste del rango de valores alternos calculado mediante métodos numéricos. Un mejor modelo para el rango alterno permitiría estimar la frecuencia natural por medio de dos expresiones (rango alterno y rango medio).

## Referencias

- [1] C. Lalanne. “Mechanical Vibration and Shock Analysis”. ISTE. volume 1. London, UK. 2009. ISBN: 0863802184.
- [2] ISO. Vibration and Shock: Experimental Determination of Mechanical Mobility, Parts 1–5, iSO-7626/1-5.
- [3] F.M. Lewis. “Vibration during acceleration through a critical speed”. Journal of Applied Mechanics. Vol. 54, pp. 253-261. 1932.
- [4] G. Gloth, M. Sinapius. “Analysis of swept-sine runs during modal identification”, Mechanical Systems and Signal Processing. Vol. 18, Issues 6. pp. 1421–1441, Noviembre, 2004. ISSN: 0888-3270. doi: 10.1016/S0888-3270(03)00087-6.
- [5] G. Hok . “Response of linear resonant systems to excitation of a frequency varying linearly with time”, Journal of Applied Physics, Vol. 19, pp. 242–250, 1948.
- [6] R.V. Trull. “Sweep speed effects in resonant systems”, The Shock and Vibration Bulletin, Vol. 41, Part 4, pp. 95–98, Dec. 1970.
- [7] F. Leul. “Zum transienten Schwingungsverhalten beim Resonanzdurchgang linearer Systeme mit langsam veränderlichen a Parametern”. Bericht 4 des Instituts für Mechanik der Universität-GH Kassel, Germany.1994.
- [8] R. Markert. “Analytically based estimation of the maximum amplitude during passage through resonance”, International Journal of Solids and Structures. Vol. 38, Issues 10–13. pp. 1975–1992, Marzo, 2001. ISSN: 0020-7683.doi: 10.1016/S0020-7683(00)00147-5.
- [9] D. Ewins. “Modal Testing: Theory, Practice and Application”. Research Studies Press Ltd. 2nd Edition. Somerset,UK. 2000. ISBN: 0863802184.
- [10] S. Junichi. M. Dias. “Modal analysis of structures under non-stationary excitation”, Engineering Structures. Vol. 99. pp. 56–62, Septiembre, 2015. ISSN: 0141-0296. doi: 10.1016/j.engstruct.2015.04.035.