



Universidad de Concepción  
Dirección de Postgrado  
Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas  
Programa de Magister en Economía de Recursos Naturales y del Medio Ambiente

**Efecto de la Forma funcional en la Demanda de Agua  
Residencial bajo Tarifa por Bloques: Estimación Usando  
Modelos de Elección Discreto - Continua**

José Ignacio Hernández Hernández  
Concepción, Chile  
2016

Tesis para optar al grado de Magister en Economía de Recursos Naturales y del Medio  
Ambiente

Profesor Guía: Felipe Vásquez Lavín  
Depto. de Economía, Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas  
Universidad de Concepción



# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Objetivos</b>	<b>4</b>
2.1. Objetivo General . . . . .	4
2.2. Objetivos Específicos . . . . .	4
<b>3. Marco de Referencia</b>	<b>5</b>
3.1. Demanda de Agua y Formas Funcionales . . . . .	5
3.2. Tarifa por Bloques y Simultaneidad: Modelos de Elección Discreto-Continua . . . . .	8
<b>4. Hipótesis</b>	<b>10</b>
<b>5. Metodología</b>	<b>10</b>
5.1. El modelo DCC: Modelo teórico y econométrico . . . . .	11
5.1.1. Formas funcionales logarítmica y semilogarítmica. . . . .	11
5.1.2. Forma funcional lineal y Stone - Geary . . . . .	12
5.2. Estimación . . . . .	13
5.3. Valor Esperado y Elasticidades . . . . .	14
5.3.1. Formas Funcionales Logarítmica y Semilogarítmica . . . . .	14
5.3.2. Formas Funcionales Lineal y Stone - Geary . . . . .	16
5.4. Pruebas de Hipótesis . . . . .	17
<b>6. Datos</b>	<b>19</b>
<b>7. Resultados</b>	<b>20</b>
<b>8. Conclusiones</b>	<b>26</b>
<b>Appendices</b>	<b>30</b>
<b>A. Derivación de la ecuación de demanda de agua Stone - Geary</b>	<b>30</b>
<b>B. Valor esperado y elasticidades para modelos con errores multiplicativos</b>	<b>31</b>
<b>C. Valor esperado y elasticidades para modelos con errores aditivos</b>	<b>34</b>

## Índice de cuadros

1.	Formas funcionales utilizadas en demanda de agua residencial . . . . .	6
2.	Formas funcionales utilizadas en el presente estudio . . . . .	7
3.	Estadística Descriptiva . . . . .	20
4.	Resultados de la Estimación: Modelo DCC . . . . .	21
5.	Valor Esperado y Elasticidad: Modelo DCC . . . . .	22
6.	Valores t de prueba de diferencia de medias de consumo esperado. . . . .	24
7.	Valores t de prueba de diferencia de medias de elasticidad precio. . . . .	25



## Índice de figuras

1.	Ejemplo de un sistema de tres bloques y precio creciente. . . . .	8
2.	Efecto de un sistema de precios no lineal sobre la restricción presupuestaria. . . . .	9
3.	Promedio del consumo esperado e intervalos al 95 % de confianza. . . . .	23
4.	Promedio de elasticidad e intervalos al 95 % de confianza . . . . .	23

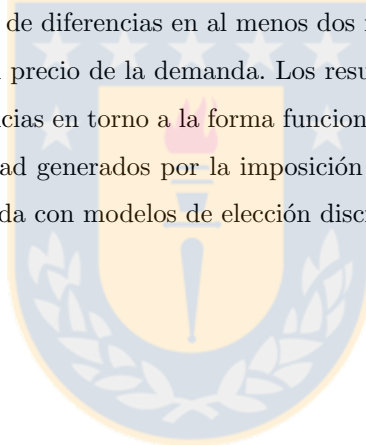


## Resumen Ejecutivo

La forma funcional utilizada puede ser un factor de variabilidad en los resultados de la demanda de agua residencial. Si bien existe evidencia que confirma ésta afirmación, no toda la literatura considera la estimación de varias formas funcionales para determinar el consumo esperado o elasticidad precio de la demanda.

La presencia de sistemas de tarifa por bloques en demanda de agua impone nuevos desafíos en términos econométricos. Estos desafíos son tratados a través de la estimación de modelos de elección discreto - continua para demanda de agua. Sin embargo, la literatura en ésta materia solo ha sido desarrollada en torno a una sola forma funcional, y no considera la posible variabilidad de los resultados al utilizar distintas formas para la ecuación de demanda.

A través de distintas estimaciones de demanda de agua usando el modelo de elección discreto - continua, se confirma la existencia de diferencias en al menos dos formas funcionales en los resultados de consumo esperado y elasticidad precio de la demanda. Los resultados de éste trabajo confirman la literatura previa respecto a diferencias en torno a la forma funcional usada, pero además considera los posibles problemas de simultaneidad generados por la imposición de sistemas de tarifas múltiples, al realizar la estimación de la demanda con modelos de elección discreto - continua.



## Agradecimientos

A mis amigos, por elegir estar a mi lado en las buenas, en las malas, y en las peores, especialmente a Álvaro Silva, mi compañero de curso y consejero durante el paso por ésta etapa, y compartir el sueño (ya no tan lejano) de ser investigadores.

A mis profesores, quienes me vieron nacer en mis primeros y pequeños pasos como investigador. Mención especial a Hugo Salgado, por depositar su confianza en mi desde un principio, a Felipe Vásquez, por su apoyo como docente, profesor guía, consejero, psicólogo, etc. hasta hoy, y Roberto Daniel Ponce, por sus comentarios durante ésta tesis, y recordarme que no todo en la vida es trabajo y estrés.

A la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT), del gobierno de Chile, por su apoyo financiero como beneficiario del programa de becas de Magister Nacional, año 2014.

Al *International Development Research Centre* (IDRC-Canada), por su apoyo en el marco del proyecto “Welfare and Economic Evaluation of Climatic Change Impacts on Water Resources at River Basin Scale: EEC2 – Water Project”. (No. 106924-001)

Ignacio

# 1. Introducción

La estimación de la demanda de agua residencial es un tema recurrente en la literatura. Desde Headley (1963) y Howe y Linaweaver (1967) a la fecha, se ha desarrollado un número creciente de estudios destinados a determinar la demanda de agua, analizar los factores que influyen en el consumo, o analizar el impacto de variables económicas sobre la demanda de agua, lo cual ha motivado revisiones de la literatura existente (Arbués et al. (2003) y Ferrara (2008), por ejemplo), e incluso el desarrollo de meta-análisis destinados a analizar las características metodológicas de un estudio que impactan sobre sus resultados (Espey et al. (1997), y posteriormente Dalhuisen et al. (2003)).

En particular, Arbués et al. (2003) en su revisión encuentra diferencias en la literatura de demanda de agua de acuerdo a la forma funcional utilizada, y que, si bien existen algunas formas que predominan, los autores normalmente no argumentan razones para utilizar una determinada función, y solo algunos estudios buscan mitigar esto utilizando más de una forma funcional para comparar sus resultados.

En efecto, la forma funcional utilizada en un estudio puede ser un factor de variabilidad en los resultados de un estudio de demanda de agua residencial, como lo muestra Dalhuisen et al. (2003) en su meta-análisis de factores que afectan la elasticidad precio e ingreso de consumo de agua. Este resultado sugiere que los trabajos que estudien la demanda de agua deben tener en consideración la posible variabilidad de los resultados al utilizar una determinada forma funcional en sus conclusiones. Si bien utilizar más de una forma funcional para estimar la demanda de agua no soluciona el problema, sí entrega mayor información al investigador respecto a los resultados de consumo de agua y efectos sobre la demanda, al permitir calcular la predicción y elasticidades de consumo para cada una de las funciones propuestas.

Sumado a lo anterior, existen dos desafíos al modelar la demanda de agua residencial: la presencia de estructuras de precio no lineales, como los sistemas de tarifa por bloques, y la posible existencia de simultaneidad entre el precio y el consumo de agua. El primer problema tiene implicancias en la determinación del óptimo del consumidor, al presentarse una restricción presupuestaria no lineal (Taylor, 1975). Una solución aceptada en la literatura de agua es presentada por Nordin (1976).

El segundo problema es más complejo: Si existe un nivel de consumo y un sistema de precios múltiples con tarifa por bloques, existe la posibilidad de que la decisión de consumo de agua de un individuo y el precio asociado a este sean simultáneas. Si no se considera la posible existencia de este fenómeno, los resultados de la estimación pueden ser sesgados Olmstead et al. (2007). Para solucionar este problema Hewitt y Hanemann (1995) proponen utilizar un caso particular del modelo de elección discreto - continua de Hanemann (1984) orientado a la estimación de la demanda de agua ante tarifa



por bloques.

Si bien los trabajos de Hewitt y Hanemann (1995) y Olmstead et al. (2007) consideran los dos problemas anteriores en sus trabajos, solo consideran una determinada forma funcional para estimar la demanda de agua, lo cual no es adecuado si seguimos los resultados de Dalhuisen et al. (2003). Por lo tanto, existe una brecha en la literatura respecto al uso de distintas formas funcionales y sus resultados en la demanda de agua y elasticidades de consumo, considerando la posible existencia de simultaneidad en la decisión de consumo y precio, bajo un sistema de tarifa por bloques.

El presente trabajo pretende contribuir en la literatura económica de agua, al analizar las diferencias sobre los resultados de consumo esperado de agua y elasticidad precio de la demanda bajo distintas formas funcionales prevalentes en la literatura, utilizando el modelo de elección discreto - continua propuesto por Hewitt y Hanemann (1995). Los resultados de este estudio pueden contribuir a que investigaciones posteriores de demanda de agua puedan considerar posibles efectos del uso de una determinada forma funcional en sus resultados, y en un caso igual, elegir la forma funcional más adecuada.

## **2. Objetivos**

### **2.1. Objetivo General**

Determinar la existencia de diferencias al utilizar determinadas formas funcionales en la demanda esperada de agua y elasticidad precio de la demanda, usando el modelo de elección discreto - continua.

### **2.2. Objetivos Específicos**

- Estimar la demanda de agua residencial, consumo esperado de agua y elasticidad precio para cada forma funcional propuesta.
- Determinar expresiones matemáticas adecuadas para el valor esperado del consumo de agua y elasticidad precio para cada forma funcional.
- Probar si existen diferencias significativas en la demanda de agua estimada y elasticidad precio para cada forma funcional.

## 3. Marco de Referencia

### 3.1. Demanda de Agua y Formas Funcionales

El estudio del agua como elemento determinante en la economía se remonta al menos a fines del siglo XIX, posiblemente con Marshall (1879). Sin embargo, el mayor desarrollo en este campo se observa en la historia reciente.

Comprender el agua como un bien económico requiere comprender su trascendencia en el desarrollo de la vida, además de la magnitud de su escasez. La trascendencia del agua para el ser humano ha generado un debate respecto si el agua debe ser considerada como un bien económico: por una parte, se argumenta que el agua es un recurso propiedad de la tierra, y por su importancia, debe ser considerada como un derecho humano (Barlow y Clarke, 2002). Baumann y Boland (1998) plantea algo distinto: el agua no es un bien distinto a otros considerados “esenciales” que sí se transan en mercados, como la comida y el abrigo, por lo que no existen razones para que esta no sea transada en mercados.

Si bien lo anterior aún es materia de debate, ciertamente el agua es un recurso escaso: el aumento sostenido de la población en los últimos 100 años ha significado un incremento del consumo de agua en el mundo. Sin embargo, solo un 3 % del agua de la tierra es apta para uso humano, y solo una pequeña fracción de esta es actualmente accesible, lo cual deja solo un 1 % utilizable para el ser humano Jackson et al. (2001).

Headley (1963) realiza uno de los primeros estudios económicos de demanda de agua doméstica, analizando el impacto del ingreso sobre el consumo de agua. Años más tarde, Howe y Linaweaver (1967) y Wong (1972) incluyen la noción del precio como un determinante para el consumo doméstico de agua. Si bien estos tres trabajos postulan una posible relación entre variables económicas y el consumo de agua, el estudio de Wong (1972) también incorpora el posible efecto de variables climáticas en la demanda. Sin embargo, estimar el efecto del precio sobre el consumo como un objetivo explícito no es observado hasta Young (1973), donde se observa por primera vez la noción de la elasticidad precio del consumo de agua.

Young (1973) y sus antecesores marcan una pauta para el desarrollo posterior de la literatura de demanda de agua. Parte de ésta es recopilada por Arbués et al. (2003) y Ferrara (2008), quienes revisan alrededor de 50 estudios de demanda de agua e identifican factores de consenso y debate en la literatura. Principalmente, la mayor parte de los estudios de estimación de demanda de agua coinciden en que existen factores económicos (como el precio y el ingreso), sociodemográficos o asociados a características del hogar (composición de individuos, presencia de lavadora o ducha, tipo de vivienda),

y climáticos (temperatura, precipitación, presencia de fenómenos climáticos) que pueden afectar el consumo de agua promedio en un hogar.

Sin embargo, existe un conjunto de puntos en que la literatura aún no encuentra consenso, principalmente relacionados a aspectos metodológicos, de disponibilidad de datos, y econométricos. Un punto particular de debate en la literatura es la forma funcional a utilizar en la ecuación de demanda de agua. Arbués et al. (2003) señala a lo menos tres formas funcionales utilizadas en la literatura: la forma funcional lineal, la forma logarítmica, y la forma semilogarítmica, lo cual es coincidente con Dalhuisen et al. (2003) (ver cuadro 1).

Cuadro 1: Formas funcionales utilizadas en demanda de agua residencial

	Ecuación	De Dalhuisen et al. (2003)	De Arbués et al. (2003)
Logarítmica	$\ln w = \beta \ln X + \mu$	28	16
Semilogarítmica	$\ln w = \beta X + \mu$	3	8
Lineal	$w = \beta X + \mu$	24	29
Otras formas		3	2
Más de una forma		10 (26,3%)	11 (35,4%)

Fuente: Elaboración propia.

La forma funcional lineal es característica de los primeros estudios de demanda de agua, en la cual la relación del consumo de agua ( $w$ ) y las variables explicativas ( $X$ ) es lineal. Se caracteriza por su simplicidad de derivación, además de presentar efectos marginales constantes. Sin embargo, posee una clara limitación: al graficar esta forma funcional en un plano, presenta un punto en que las personas no consumen agua, lo cual contradice la esencialidad del agua, característica mostrada por Hanemann (2005). La forma funcional logarítmica permite obtener de forma directa la elasticidad de la demanda desde un coeficiente, mientras que la forma funcional semilogarítmica es un punto intermedio entre las dos formas citadas anteriormente, la cual permite calcular semielasticidades: efectos proporcionales del consumo ante cambios absolutos de la variable independiente (Arbués et al., 2003)

El debate respecto a la forma funcional a utilizar en la ecuación de demanda genera dos preguntas: ¿por qué utilizar una determinada forma funcional sobre otra?, y ¿son éstas formas funcionales adecuadas para modelar la demanda de agua?. Respecto a la primera pregunta, la literatura muestra que la mayor parte de los estudios de demanda de agua eligen una determinada forma funcional, pero no dan mayores razones para elegirla (Arbués et al., 2003). Por lo tanto, es posible que un autor elija una sola forma funcional que puede no ser adecuada para estimar la demanda de agua, y considerando

los resultados de Dalhuisen et al. (2003), la forma funcional utilizada puede afectar los resultados de elasticidad precio en agua. Una estrategia para mitigar este problema es estimar la demanda de agua utilizando distintas formas funcionales y, si es posible, analizar si existen diferencias significativas en los resultados. Si bien esto no soluciona el problema de la forma funcional adecuada, al menos sí permite capturar un mayor rango de posibilidades respecto a los resultados posibles de un estudio de demanda.

La segunda pregunta requiere preguntarse: ¿qué se espera de una ecuación de demanda de agua?. En primer lugar, ésta función debería tener un respaldo teórico, por ejemplo de la teoría del consumidor en microeconomía. Además, al ser el agua un bien esencial, debería existir un nivel mínimo de consumo de éste, y la ecuación de demanda debería considerar esto en su construcción. Sin embargo, recordando lo expresado por Arbués et al. (2003), la mayor parte de los autores de estudios de demanda de agua asumen una determinada forma funcional, no expresando mayores razones para usarla.

Al-Qunaibet y Johnston (1985) y Gaudin et al. (2001) buscan solucionar este problema utilizando la forma funcional Stone - Geary para estimar la demanda de agua, y comparandola con otras formas funcionales. La forma funcional utilizada se caracteriza por considerar la existencia de un nivel mínimo de consumo desde el problema de maximización del consumidor, por lo que la ecuación de demanda resultante captura en su construcción la posible existencia de este nivel mínimo.

Cuadro 2: Formas funcionales utilizadas en el presente estudio

	Ecuación
Función logarítmica	$\ln w = Z\delta + \alpha \ln P + \gamma \ln Y + \mu$
Función semilogarítmica	$\ln w = Z\delta + \alpha P + \gamma Y + \mu$
Función lineal	$w = Z\delta + \alpha P + \gamma Y + \mu$
Función Stone - Geary	$w = Z\delta + \alpha(Y/P) + \gamma(1/P) + mu$

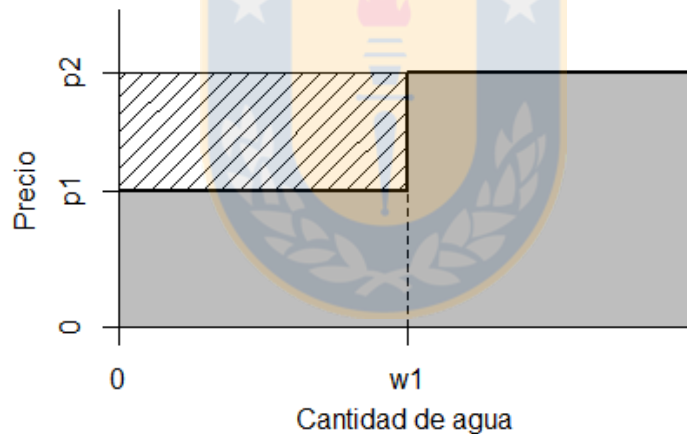
Fuente: Elaboración propia.

Dado lo anterior, para el logro de los objetivos presentado, se utilizan las tres formas funcionales más usadas en la literatura, expresadas en el cuadro 1, y además se incorpora la forma Stone - Geary, dado que esta considera algunos fenómenos particulares del agua. El resumen de las formas funcionales a utilizar en detalle se muestra en el cuadro 2, donde  $w$  es el consumo de agua,  $Z$  es un conjunto de variables explicativas sociodemográficas y climáticas,  $P$  es el nivel de precios, y  $Y$  es el ingreso.

### 3.2. Tarifa por Bloques y Simultaneidad: Modelos de Elección Discreto-Continua

Un problema latente al estimar la demanda de agua es la presencia de estructuras de precio no lineales, como es el caso de sistemas de tarifa por bloques (ver figura 1). Este problema no es poco común en la literatura (más de un 40% de los estudios de Dalhuisen et al. (2003) presentan tarifas múltiples o no lineales), y presenta desafíos al momento de incorporar el precio en la ecuación de demanda. Por una parte, utilizar el precio marginal sobreestima (en un sistema de tarifas creciente) el efecto del precio sobre el consumo, al considerar que todas las unidades de agua son pagadas al precio de la última unidad, mientras que utilizar un promedio de los precios presenta problemas de sobreestimación o subestimación del efecto sobre el consumo, dependiendo si el precio por unidad es menor o mayor a este promedio respectivamente. Además, el precio promedio es aún más nocivo si los rangos de cada bloque de consumo no son iguales.

Figura 1: Ejemplo de un sistema de tres bloques y precio creciente.

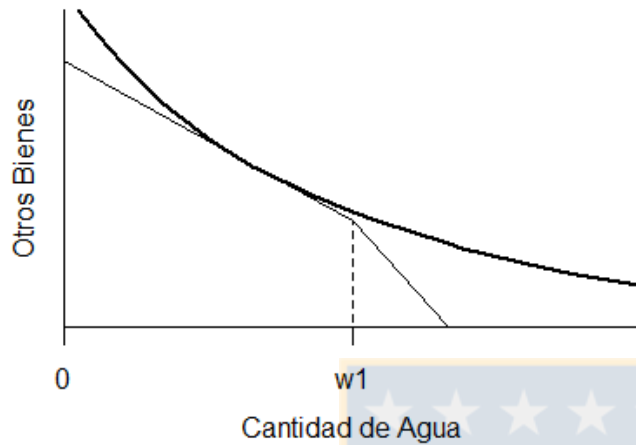


Fuente: Elaboración propia en base a Olmstead et al. (2007).

El precio adecuado a incorporar en la ecuación de demanda no es trivial: Taylor (1975) muestra que un sistema de precios no lineal transforma la restricción presupuestaria en el problema del consumidor, provocando que ésta también sea no lineal (y en algunos casos no convexa), como se muestra en la figura 2. Lo anterior tiene impactos en la determinación del equilibrio del consumidor, además del tramo de la recta en la cual se interseca la curva de indiferencia del consumidor de agua. Posteriormente, Nordin (1976) propone una forma de capturar las diferencias de precio entre bloques a través de una

compensación al ingreso por las unidades consumidas a precios intramarginales, lo cual se conoce como “diferencia de Nordin”.

Figura 2: Efecto de un sistema de precios no lineal sobre la restricción presupuestaria.



Fuente: Elaboración propia en

base a Taylor (1975).

Si bien la propuesta de Nordin (1976) es una solución que permite solucionar el problema de la incorporación del precio en la ecuación de demanda, los resultados de Taylor (1975) muestran un problema adicional: el cambio de uno o más precios en la restricción presupuestaria puede determinar no solo un cambio en la cantidad de equilibrio, sino que también un cambio en el tramo de la restricción, lo cual es un cambio en el precio que el individuo paga para maximizar su utilidad. De lo anterior, se puede inferir que un sistema de precios múltiple puede generar problemas de simultaneidad en la elección del individuo entre el nivel de consumo y el precio que desea pagar. Si el problema no es considerado, los resultados de la estimación serán sesgados.

Hewitt y Hanemann (1995) proponen una solución a este problema, a través de la utilización del modelo de elección discreto - continuo para un caso particular de demanda de agua, basado en los modelos de Hanemann (1984), Moffitt (1986), entre otros. En este trabajo, proponen el modelo teórico orientado a demanda de agua, el método de estimación, la derivación del valor esperado del consumo de agua, y un método adecuado de calcular la elasticidad ante cambios proporcionales del vector de precios. Posteriormente, Olmstead et al. (2007) complementa este estudio, proponiendo una expresión matemática para la determinación de la elasticidad de un cambio proporcional de precios en la demanda de agua.

Si bien los trabajos de Hewitt y Hanemann (1995) y Olmstead et al. (2007) consideran la mayor

parte de los problemas de estimación de la demanda de agua presentados en este trabajo, no consideran más de una forma funcional para la ecuación de demanda, y solo utilizan la forma logarítmica para obtener sus resultados. El presente trabajo pretende complementar la literatura, estimando la demanda de agua residencial para las cuatro formas funcionales citadas previamente, proponiendo expresiones matemáticas para el valor esperado y elasticidad ante cambios proporcionales del precio para cada una de estas formas funcionales, y analizando si existen diferencias significativas entre las estimaciones de valor esperado y elasticidades.

## 4. Hipótesis

El objetivo principal de el presente trabajo busca analizar la existencia de diferencias en el valor esperado y elasticidad de la demanda de agua residencial al utilizar una determinada forma funcional en modelos de elección discreto - continua. Para el logro de este objetivo, se plantean las siguientes hipótesis:

**Hipótesis 1:** *En promedio, el valor esperado de la demanda de agua es estadísticamente distinto, dependiendo de la forma funcional usada.*

La hipótesis 1 afirma que el consumo esperado de agua es distinto para cada forma funcional usada. Si esta afirmación es correcta, entonces la utilización de una determinada forma funcional no es trivial al estimar la demanda de agua.

La hipótesis 2 es similar a la anterior, pero relacionada a la elasticidad de la demanda:

**Hipótesis 2:** *En promedio, la elasticidad ante cambios proporcionales del vector de precios es estadísticamente distinta, dependiendo de la forma funcional usada.*

La hipótesis 2 complementa el resultado de Dalhuisen et al. (2003), en el cual se afirma que existen diferencias en términos de elasticidad precio de la demanda al usar una determinada forma funcional. En este caso, se probará la hipótesis usando la elasticidad ante cambios proporcionales en el precio.

## 5. Metodología

El presente trabajo busca determinar la existencia de diferencias en los resultados de elasticidad precio al utilizar distintas formas funcionales. En esta sección se proponen expresiones matemáticas para el valor esperado del consumo de agua y elasticidad ante cambios proporcionales en el precio

para el modelo de elección discreto continua, para cada forma funcional propuesta en la sección 3. Con estas expresiones, más los resultados de la estimación del modelo, se obtiene el valor promedio y error estándar para el consumo esperado y elasticidad para cada forma funcional. Finalmente, con estos resultados, se construyen gráficos de intervalos de confianza y se realiza un conjunto de pruebas de hipótesis para determinar diferencias en el promedio de consumo esperado y elasticidad.

## 5.1. El modelo DCC: Modelo teórico y econométrico

En un sistema de tarifa por bloques, la determinación del consumo de un individuo presenta algunas diferencias respecto a modelos estándar. Para el caso simple de 2 bloques de consumo existen dos precios asociados a cada uno de estos:  $p_1$  y  $p_2$ , además de un punto de corte  $w_1$ , que separa el bloque 1 del bloque 2.

En el modelo de elección discreto - continua, la **demanda condicional** representa la decisión de consumo de agua del individuo, dado que este se ubica en un bloque de consumo determinado. La demanda condicional a un bloque de consumo  $k$  es igual a la ecuación de demanda evaluada en el precio marginal para el respectivo bloque ( $p_k$ ), y el ingreso del hogar, más la compensación al ingreso propuesta por Nordin (1976) ( $d_k$ ), donde:

$$d_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 1, \\ \sum_{j=1}^{k-1} (p_{j+1} - p_j)w_k & \text{si } k > 1. \end{cases} \quad (1)$$

No obstante, la demanda condicional solo representa el nivel de consumo dado que el individuo consumo agua en un determinado bloque, por lo que esta no representa la decisión completa del consumidor.

La **demanda incondicional** es una función de todos los bloque de consumo y puntos de corte, por lo que captura la decisión completa del consumidor, y representa la ecuación relevante a estimar en el modelo.

### 5.1.1. Formas funcionales logaritmica y semilogaritmica.

En particular, la demanda condicional bajo la forma funcional logaritmica es igual a:

$$w(p_k, y + d_k) = \exp(Z\delta)p_k^\alpha(y + d_k)^\gamma \quad (2)$$

Para la forma funcional semilogaritmica la demanda condicional es igual a:



$$w(p_k, y + d_k) = \exp(Z\delta + \alpha p_k + \gamma(y + d_k)) \quad (3)$$

La demanda incondicional asociada a (2) y (3) para el caso simple de  $k = 2$  bloques captura la decisión completa del individuo respecto a todos los bloques de consumo y puntos de corte:

$$\ln w = \begin{cases} \ln w_1^* & \text{si } \ln w_1^* < \ln w_1 \\ \ln w_1 & \text{si } \ln w_1 < \ln w_1^* \text{ y } \ln w_1 > \ln w_2^* \\ \ln w_2^* & \text{si } \ln w_2^* > \ln w_1 \end{cases} \quad (4)$$

Donde  $w$  representa el consumo observado de agua,  $w_k^* = w_k^*(Z, p_k, (y + d_k); \alpha, \gamma, \delta)$  es el consumo óptimo de agua en el bloque  $k$ , y  $w_1$  es el punto de corte entre el bloque 1 y 2.

La ecuación (4) representa el modelo teórico, desconocido para el investigador. El modelo econométrico incorpora dos términos de error, siguiendo a Burtless y Hausman (1978), Moffitt (1986), y Hewitt y Hanemann (1995):  $\eta$  captura la heterogeneidad entre cada hogar, no capturada por las variables sociodemográficas y climáticas de  $Z$ , y  $\varepsilon$  captura el error estocástico, que representa características no observadas ni por el investigador ni por los hogares (Olmstead et al., 2007). Se asume que  $\eta$  y  $\varepsilon$  son independientes y normalmente distribuidos con medias cero y varianzas  $\sigma_\eta^2$  y  $\sigma_\varepsilon^2$  respectivamente.

Considerando lo anterior, la demanda incondicional (4) es igual a:

$$\ln w = \begin{cases} \ln w_1^* + \eta + \varepsilon & \text{si } -\infty < \eta < \ln w_1 - \ln w_1^* \\ \ln w_1 + \varepsilon & \text{si } \ln w_1 - \ln w_1^* < \eta < \ln w_1 - \ln w_2^* \\ \ln w_2^* + \eta + \varepsilon & \text{si } \ln w_1 - \ln w_2^* < \eta < \infty \end{cases} \quad (5)$$

### 5.1.2. Forma funcional lineal y Stone - Geary

Bajo una forma funcional lineal, la demanda condicional a un bloque  $k$  es igual a:

$$w(p_k, y + d_k) = Z\delta + \alpha p_k + \gamma(y + d_k) \quad (6)$$

Mientras que bajo la forma funcional Stone - Geary:

$$w(p_k, y + d_k) = Z\delta + \alpha \left( \frac{(y + d_k)}{p_k} \right) + \gamma \left( \frac{1}{p_k} \right) \quad (7)$$

Las ecuaciones anteriores no requieren una transformación logarítmica. Para el caso simple de 2 bloques, la demanda incondicional para la forma funcional lineal y Stone - Geary es una modificación de la ecuación (4):

$$w = \begin{cases} w_1^* & \text{si } w_1^* < w_1 \\ w_1 & \text{si } w_1 < w_1^* \text{ y } w_1 > w_2^* \\ w_2^* & \text{si } w_2^* > w_1 \end{cases} \quad (8)$$

El modelo econométrico asociado a (8) incorpora los errores de heterogeneidad de hogares ( $\eta$ ) y estocástico ( $\varepsilon$ ):

$$w = \begin{cases} w_1^* + \eta + \varepsilon & \text{si } -\infty < \eta < w_1 - w_1^* \\ w_1 + \varepsilon & \text{si } w_1 - w_1^* < \eta < w_1 - w_2^* \\ w_2^* + \eta + \varepsilon & \text{si } w_1 - w_2^* < \eta < \infty \end{cases} \quad (9)$$

La incorporación de los términos de error permite que las ecuaciones (5) y (9) puedan ser estimadas a través de máxima verosimilitud.

## 5.2. Estimación

Seguendo a Hewitt y Hanemann (1995) y Olmstead et al. (2007), la función de verosimilitud asociada a la ecuación (5) es igual a:

$$\ln L = \sum \ln \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-s_1^2/2)}{\sigma_v} (\Phi(r_1^*)) \right) \\ & + \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-s_2^2/2)}{\sigma_v} (1 - \Phi(r_1^*)) \right) \\ & + \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-u_1^2/2)}{\sigma_\varepsilon} (\Phi(t_2^*) - \Phi(t_1^*)) \right) \end{aligned} \right] \quad (10)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \rho &= \text{corr}(\varepsilon + \eta, \eta); & v &= \eta + \varepsilon \\ s_k^* &= (\ln w_i - \ln w_k^*(\cdot)) / \sigma_v; & u_k^* &= (\ln w_i - \ln w_k) / \sigma_\varepsilon \\ t_k^* &= (\ln w_1 - \ln w_k^*(\cdot)) / \sigma_\eta; & r_k^* &= (t_k^* - \rho s_k^*) / \sqrt{1 - \rho^2} \end{aligned}$$

La función de verosimilitud para estimar la ecuación (9) se basan en los trabajos iniciales de Moffitt (1986) y Moffitt (1989):

$$\ln L = \sum \ln \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-s_1^2/2)}{\sigma_v} (\Phi(r_1)) \right) \\ & + \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-s_2^2/2)}{\sigma_v} (1 - \Phi(r_1)) \right) \\ & + \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-u_1^2/2)}{\sigma_\varepsilon} (\Phi(t_2) - \Phi(t_1)) \right) \end{aligned} \right] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} s_k &= (w_i - w_k) / \sigma_v; & u_k &= (w_i - w_k) / \sigma_\varepsilon \\ t_k &= (w_1 - w_k^*(\cdot)) / \sigma_\eta; & r_k &= (t_k - \rho s_k) / \sqrt{1 - \rho^2} \end{aligned}$$

### 5.3. Valor Esperado y Elasticidades

La particularidad del modelo de elección discreto - continua es que captura la decisión del individuo en función de cada bloque de consumo y punto de corte. En base a lo anterior, el consumo esperado de agua depende de todos los vectores de precios y puntos de corte, y no solo del nivel de precio en el cual consume el individuo. Además, es razonable esperar que los cambios en el nivel de consumo de agua no solo dependan de un solo precio marginal, sino que de ambos precios en conjunto.

A continuación se presentan las expresiones simplificadas del valor esperado y elasticidad precio de la demanda de agua para un cambio proporcional en el vector de precios. La derivación completa de las expresiones matemáticas se presentan en los apéndices B y C.

#### 5.3.1. Formas Funcionales Logarítmica y Semilogarítmica

Las demandas de agua logarítmica y semilogarítmica corresponden a una transformación de una ecuación Cobb-Douglas, y una modificación de ésta respectivamente. La incorporación de los errores de heterogeneidad y estocástico para estimar la ecuación (5) implica que, en su forma no transformada, las demandas condicionales incorporan éstos términos de error de forma multiplicativa. Así para la forma logarítmica:

$$w_k^*(p_k, y + d_k) = \exp(Z\delta)p_k^\alpha(y + d_k)^\gamma \exp(\eta) \exp(\varepsilon) \quad (12)$$

Mientras que en la forma semilogarítmica:

$$w_k^*(p_k, y + d_k) = \exp(Z\delta + \alpha p_k + \gamma(y + d_k)) \exp(\eta) \exp(\varepsilon) \quad (13)$$

Recordar que  $\eta$  y  $\varepsilon$  distribuyen de forma normal, por lo que  $\exp(\eta)$  y  $\exp(\varepsilon)$  distribuyen de forma log-normal. Olmstead et al. (2007) desarrolla en detalle la expresión matemática del valor esperado para ecuaciones de demanda con términos multiplicativos en el modelo de elección discreto - continua. Para el caso simple de 2 bloques de consumo, el valor esperado de la demanda de agua corresponde a:

$$E(W) = e^{\sigma_\eta^2/2} e^{\sigma_\varepsilon^2/2} (w_1^*(p_1, y + d_1) * \pi_1^* + w_2^*(p_2, y + d_2) * \pi_2^*) + e^{\sigma_\varepsilon^2/2} w_1 * \lambda_1^* \quad (14)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\pi_1^* &= \Phi \left( \frac{\ln(w_1/w_1^*)}{\sigma_{eta}} - \sigma_\eta \right) \\
\pi_2^* &= 1 - \Phi \left( \frac{\ln(w_1/w_2^*)}{\sigma_{eta}} - \sigma_\eta \right) \\
\lambda_1^* &= \Phi \left( \frac{\ln(w_1/w_2^*)}{\sigma_{eta}} \right) - \Phi \left( \frac{\ln(w_1/w_1^*)}{\sigma_{eta}} \right)
\end{aligned}$$

De la ecuación (14) se puede inferir que la demanda esperada de agua depende no solo de una demanda condicional, sino que de toda la estructura de consumo, además de las probabilidades de que un individuo consuma en cada bloque o punto de corte. Además, existe un valor esperado de demanda de agua para cada individuo, que depende de sus características sociodemográficas, su nivel de ingreso y el vector de precios que enfrenta. Por lo tanto, para efectos de análisis y pruebas de hipótesis, se reporta en los resultados el promedio del valor esperado, calculado como la suma de todos los valores esperados para cada individuo, dividido por el número de observaciones.

Otra característica relevante de la ecuación (14) es que, dado que depende de las demandas condicionales, también depende de los parámetros estimados por máxima verosimilitud. Esto permite aplicar el método delta para obtener el error estándar del promedio del valor esperado, y también generar intervalos de confianza para probar las hipótesis de forma empírica.

Dada la estructura de precio múltiple del modelo de elección discreto - continua, analizar la elasticidad de un solo precio sobre el consumo no es adecuado. Hewitt y Hanemann (1995) calcula la elasticidad precio simulando un aumento del 1% en todos los precios, recalculando el valor esperado bajo los nuevos precios y obteniendo la diferencia porcentual. Olmstead et al. (2007) amplía esta noción desarrollando una expresión analítica para la elasticidad precio de la demanda ante un cambio proporcional  $\theta$  en el vector de precios para la forma funcional logarítmica:

$$\frac{\partial E(W)}{\partial \theta} \frac{1}{E(W)} = \left( \alpha (w_1^* \psi_1 + w_2^* \psi_2 + w_1 (\chi_1 - \chi_2)) + \gamma \left( d_2 \left( \frac{w_2^*}{(y + d_2)} \right) \left( \psi_2 - \left( \frac{w_1}{w_2^*} \right) \chi_2 \right) \right) \right) / \Omega \quad (15)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \pi_1^* - \frac{1}{\sigma_\eta} \phi \left( \frac{\ln(w_1/w_1^*)}{\sigma_\eta} - \sigma_\eta \right) \\
\psi_2 &= \pi_2^* + \frac{1}{\sigma_\eta} \phi \left( \frac{\ln(w_1/w_2^*)}{\sigma_\eta} - \sigma_\eta \right) \\
\chi_1 &= \frac{1}{\sigma_\eta * e^{\sigma_\eta^2/2}} \phi \left( \frac{\ln(w_1/w_1^*)}{\sigma_\eta} \right) \\
\chi_2 &= \frac{1}{\sigma_\eta * e^{\sigma_\eta^2/2}} \phi \left( \frac{\ln(w_1/w_2^*)}{\sigma_\eta} \right)
\end{aligned}$$

$$\Omega = w_1^*(p_1, y + d_1) * \pi_1^* + w_2^*(p_2, y + d_2) * \pi_2^* + e^{-\sigma_\eta^2/2} w_1 * \lambda_1$$

Al igual que la demanda esperada de agua, la ecuación (15) entrega la elasticidad respecto a un cambio proporcional para cada individuo, por lo que para efectos de análisis se reporta el valor promedio de la elasticidad. Además, ésta ecuación es una función de los parámetros estimados, lo cual permite aplicar el método delta para calcular el error estándar y realizar pruebas de hipótesis sobre la elasticidad, lo cual es parte del objetivo de este trabajo.

La elasticidad de la forma funcional semilogarítmica es una modificación del desarrollo de Olmstead et al. (2007):

$$\frac{\partial E(W)}{\partial \theta} \frac{1}{E(W)} = \left( \alpha (w_1^* p_1 \psi_1 + w_2^* p_2 \psi_2 + w_1 (p_1 \chi_1 - p_2 \chi_2)) + \gamma \left( w_2^* d_2 \left( \psi_2 - \left( \frac{w_1}{w_2^*} \right) \chi_2 \right) \right) \right) / \Omega \quad (16)$$

Al igual que la elasticidad de la forma logarítmica, la ecuación (16) calcula el cambio porcentual en el consumo de agua esperado para cada individuo, por lo que se reporta el valor promedio de esta.

### 5.3.2. Formas Funcionales Lineal y Stone - Geary

A diferencia de las formas funcionales presentadas en la subsección anterior, para estimar la ecuación de demanda lineal y Stone - Geary en el modelo de elección discreto continua, los errores de heterogeneidad y estocástico se incorporan de forma **aditiva**. Así, para la forma funcional lineal:

$$w_k^*(p_k, y + d_k) = Z\delta + \alpha p_k + \gamma(y + d_k) + \eta + \varepsilon \quad (17)$$

Mientras que bajo la forma funcional Stone - Geary:

$$w_k^*(p_k, y + d_k) = Z\delta' + \alpha \left( \frac{(y + d_k)}{p_k} \right) + \gamma \left( \frac{1}{p_k} \right) + \eta + \varepsilon \quad (18)$$

La expresión matemática del valor esperado para las formas funcionales con errores aditivos es desarrollada por Moffitt (1989):

$$E(W) = w_1^* \pi_1 + w_2^* \pi_2 + w_1 \lambda_1 + \sigma_\eta \left( \phi \left( \frac{w_1 - w_2^*}{\sigma_\eta} \right) - \phi \left( \frac{w_1 - w_1^*}{\sigma_\eta} \right) \right) \quad (19)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \Phi \left( \frac{w_1 - w_1^*}{\sigma_{eta}} \right) \\ \pi_2 &= 1 - \Phi \left( \frac{w_1 - w_2^*}{\sigma_{eta}} \right) \\ \lambda_1 &= \Phi \left( \frac{w_1 - w_2^*}{\sigma_{eta}} \right) - \Phi \left( \frac{w_1 - w_1^*}{\sigma_{eta}} \right) \end{aligned}$$

La ecuación (19) depende de las demandas condicionales de agua, que a su vez dependen de los parámetros estimados del modelo de elección discreto continua, por lo que es posible obtener errores estándar e intervalos de confianza a través del método delta.

Para la forma funcional lineal, la elasticidad para un cambio proporcional de los precios es igual a:

$$\frac{\partial E(W)}{\partial \theta} \frac{1}{E(W)} = (\alpha (p_1 \pi_1 + p_2 \pi_2) + \gamma d_2 \pi_2) / E(W) \quad (20)$$

Mientras que la elasticidad para la forma funcional Stone - Geary es igual a:

$$\frac{\partial E(W)}{\partial \theta} \frac{1}{E(W)} = \left( \alpha \left( \frac{1}{p_2} d_2 \pi_2 - \frac{y + d_1}{p_1} \pi_1 - \frac{y + d_2}{p_2} \pi_2 \right) - \gamma \left( \frac{1}{p_1} \pi_1 + \frac{1}{p_2} \pi_2 \right) \right) / E(W) \quad (21)$$

Tanto la ecuación (20) como la ecuación (21) dependen de su respectiva demanda condicional, y a su vez de los parámetros estimados, por lo que los errores estándar e intervalos de confianza pueden ser obtenidos a través del método delta.

#### 5.4. Pruebas de Hipótesis

A través de los resultados de la estimación del modelo y las expresiones matemáticas de valor esperado y elasticidad, es posible probar empíricamente las hipótesis planteadas en la sección 4. Formalmente, la hipótesis 1 es representada como:

$$H_0 : E(W)_i - E(W)_j = 0$$

$$H_A : E(W)_i - E(W)_j \neq 0$$

Donde  $E(W)_i$  es el valor esperado del consumo de agua para la forma funcional  $i$ , y  $E(W)_j$  es el equivalente para una forma funcional  $j$ , con  $ineqj$ . La expresión anterior asume como hipótesis nula que no existen diferencias significativas en el valor esperado del consumo de agua entre dos formas funcionales distintas. Si  $H_0$  es falsa, entonces la hipótesis planteada en la sección 4 es verdadera.

La hipótesis 2 se representa formalmente como:

$$H_0 : \frac{\partial E(W)_i}{\partial \theta} \frac{1}{E(W)_i} - \frac{\partial E(W)_j}{\partial \theta} \frac{1}{E(W)_j} = 0$$

$$H_A : \frac{\partial E(W)_i}{\partial \theta} \frac{1}{E(W)_i} - \frac{\partial E(W)_j}{\partial \theta} \frac{1}{E(W)_j} \neq 0$$

Similar a la expresión anterior, si  $H_0$  es verdadera, entonces no existen diferencias entre el valor promedio de la elasticidad ante cambios proporcionales del vector de precios entre dos formas funcionales distintas. En caso contrario, si  $H_0$  es falsa, entonces la hipótesis 2 de este trabajo es verdadera.

Una forma “aparentemente” conveniente de probar las hipótesis planteadas anteriormente es a través de la generación de intervalos de confianza para la media de  $E(W)_i$ ,  $E(W)_j$  y sus respectivas elasticidades. Si los intervalos de confianza no se traslapan entre sí, entonces es posible afirmar que el valor esperado del consumo de agua (o la elasticidad, dependiendo del caso) es estadísticamente distinto entre formas funcionales diferentes. Sin embargo, Schenker y Gentleman (2001) y Payton et al. (2003) muestran que este enfoque puede llevar a resultados incorrectos, al existir casos en que los intervalos de confianza para la media se traslapan, pero las medias evaluadas son estadísticamente significativas.

La solución al problema anterior es realizar una prueba de hipótesis puntual sobre la media del valor esperado del consumo de agua y elasticidad, a través de una prueba T de comparación de medias:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{S_X^2 + S_Y^2 - 2 * Cov(X, Y)}}$$

Donde  $X$  e  $Y$  corresponden al consumo esperado (o elasticidad) para dos formas funcionales distintas. El principal desafío de este método es determinar error estándar del consumo esperado de agua para cada forma funcional, y la covarianza entre ellas. Sin embargo, es posible observar que las expresiones del consumo esperado y elasticidad son funciones de sus respectivos parámetros estimados. Para solucionar el problema de la obtención de covarianzas, Vásquez (1998) utiliza la solución planteada por Turner y Rockel (1988), quienes muestran que es posible obtener un estimador de las covarianzas de dos modelos distintos. Para ello, se plantea la hipótesis general:

$$\theta = G(\beta, \gamma)$$

Donde  $\beta$  es un vector de parámetros  $k \times 1$  de un primer modelo  $Y_1 = f(X, \beta, \varepsilon_1)$ , y  $\gamma$  es un vector  $q \times 1$  de parámetros estimados de un segundo modelo  $Y_2 = f(Z, \gamma, \varepsilon_2)$ , donde  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son serialmente independientes y homocedásticos para observaciones distintas, es decir,  $E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t'}) = 0$ , para  $t \neq t'$ , pero correlacionados para la misma observación, con  $E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}) = \sigma_{12}$ .  $G$  es una función continuamente diferenciable de los parámetros  $\beta$  y  $\gamma$ . Considerando que los estimadores de máxima verosimilitud de  $\beta$  y  $\gamma$  son consistentes (Amemiya, 1985),  $\hat{\theta} = G(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$  es un estimador consistente de  $\theta = G(\beta, \gamma)$ , y por lo tanto, Turner y Rockel (1988) plantea que la matriz de varianzas y covarianzas puede ser obtenida a través del método delta:

$$V(\hat{\theta}) = g' \Omega g$$

Donde  $g$  es un vector  $(k + q) \times 1$  de primeras derivadas parciales (o gradiente) de  $G$  respecto a  $\beta$  y  $\gamma$  respectivamente, y  $\Omega$  es una matriz  $(k + q) \times (k + q)$  de varianzas y covarianzas asintóticas, igual a:

$$\Omega = \begin{bmatrix} A & C' \\ C & B \end{bmatrix}$$

Donde  $A$  es la matriz  $k \times k$  de varianzas y covarianzas de  $\hat{\beta}$ ,  $B$  es la matriz  $q \times q$  de varianzas y covarianzas de  $\hat{\gamma}$ , y  $C$  es la matriz  $q \times k$  de covarianzas entre  $\hat{\beta}$  y  $\hat{\gamma}$ , donde:

$$C = B \frac{\partial l_2}{\partial \gamma} \left( \frac{\partial l_1}{\partial \beta} \right)' A$$

Donde  $\frac{\partial l_2}{\partial \gamma}$  es el vector gradiente de la función de verosimilitud del modelo 2, y  $\frac{\partial l_1}{\partial \beta}$  es el vector gradiente de la función de verosimilitud del modelo 1.

## 6. Datos

La base de datos utilizada para estimar el modelo de elección discreto - continua corresponde a una muestra aleatoria de 490 hogares en la ciudad colombiana de Manizales, entre los meses de enero de 2001 y diciembre de 2013, utilizada en el trabajo de Orrego et al. (2015).

El sistema de precios de agua residencial de Manizales es de tarifa por dos bloques creciente. El primer bloque de consumo corresponde al rango de 0 a 20 metros cúbicos de agua. Sobre los 20 metros cúbicos el consumidor de agua debe pagar una tarifa de sobreconsumo, mayor a la tarifa del bloque 1. Además, existe un sistema de subsidios cruzados en función del estrato socioeconómico al cual



pertenece el hogar, por lo que la base de datos utilizada contiene la información de precio marginal para cada individuo en cada período de tiempo.

Adicionalmente, se cuenta con información de características de cada hogar, como número de baños, tamaño del hogar, presencia de lavadora en casa o tipo de vivienda. Se incluye información de temperatura promedio y precipitación para cada una de las unidades de observación como variables climáticas, de acuerdo a la literatura revisada. El cuadro 3 presenta los principales estadísticos descriptivos de las variables utilizadas.

Cuadro 3: Estadística Descriptiva

Variable	Promedio	Desv. Est.	Mín	Máx
Características del Hogar				
DHouse	0,895	0,307	0	1
DWasher	0,873	0,333	0	1
Baths	1,373	0,575	1	4
HHSize	3,574	1,518	1	10
Variables de Consumo, Precio e Ingreso				
WaterQ	17,566	11,201	1	231
PMg1	1132,557	210,622	700,310	1322,560
PMg2	1137,548	202,388	850,040	1322,560
KinkPoint	20	0	20	20
IncNordin1	1260350	868096	587897,3	5896322
IncNordin2	1260450	868090,8	587897,3	5896322
Variables Climáticas				
Temp	17,082	0,690	15,250	20,050
Precip	181,862	95,799	8,740	541,440

Fuente: Elaboración propia.

## 7. Resultados

Los resultados de la estimación del modelo de elección discreto - continua se encuentran en el cuadro 4 para cada forma funcional propuesta. Los coeficientes estimados son significativos al 99% de confianza, por lo que es posible construir las funciones de valor esperado del consumo y elasticidad

Cuadro 4: Resultados de la Estimacion: Modelo DCC

	Logarítmica	Semilogarítmica	Lineal	Stone-Geary
Constante	5,807*** (0,138)	3,385*** (0,081)	3,530*** (0,132)	1,796*** (0,125)
Casa	0,306*** (0,009)	0,295*** (0,009)	0,313*** (0,015)	0,313*** (0,015)
Num. Baños	0,076*** (0,005)	0,082*** (0,005)	0,165*** (0,008)	0,166*** (0,008)
Tamaño familia	0,051*** (0,002)	0,052*** (0,002)	0,058*** (0,003)	0,058*** (0,003)
Lavadora	0,119*** (0,008)	0,126*** (0,008)	0,074*** (0,013)	0,077*** (0,013)
Temperatura	-0,048*** (0,004)	-0,050*** (0,004)	-0,091*** (0,007)	-0,092*** (0,007)
Precipitación	-0,003*** ( $3 * 10^{-4}$ )	-0,003*** ( $3 * 10^{-4}$ )	-0,005*** ( $4 * 10^{-4}$ )	-0,005*** (0,001)
Precio	-0,496*** (0,014)	- $4 * 10^{-4}$ *** ( $1 * 10^{-5}$ )	-0,001*** ( $2 * 10^{-5}$ )	
Ingreso	0,078*** (0,005)	$3 * 10^{-5}$ *** ( $3 * 10^{-6}$ )	$3 * 10^{-6}$ *** ( $5 * 10^{-7}$ )	
Ingreso/Precio				$3 * 10^{-5}$ *** ( $5 * 10^{-6}$ )
1/Precio				8,742*** (0,258)
$\sigma_{\eta}$	0,478*** (0,113)	0,504*** (0,050)	0,946*** (0,031)	0,884*** (0,045)
$\sigma_{\varepsilon}$	0,462*** (0,116)	0,435*** (0,057)	0,544*** (0,053)	0,639*** (0,062)
N	63724.000	63724.000	63724.000	63724.000
AIC	128697.253	128792.105	191662.473	191724.893
RMSE	10.957	10.966	10.881	10.884

Errores estándar entre paréntesis.

\*\*\*  $p < 0,001$ , \*\*  $p < 0,01$ , \*  $p < 0,05$

Cuadro 5: Valor Esperado y Elasticidad: Modelo DCC

	Logarítmica	Semilogarítmica	Lineal	Stone-Geary
Valor Esperado	18,160***	18,164***	17,566***	17,568***
(Err. Est.)	(0,054)	(0,054)	(0,043)	(0,043)
C.I. al 95 %	[18,055; 18,265]	[18,059; 18,269]	[17,481; 17,650]	[17,483; 17,653]
Elasticidad	-0,495***	-0,531***	-0,561***	-0,477***
(Err. Est.)	(0,014)	(0,015)	(0,015)	(0,013)
C.I. al 95 %	[-0,522; -0,467]	[-0,561; -0,502]	[-0,591; -0,531]	[-0,502; -0,451]

Errores estándar entre paréntesis.

\*\*\* $p < 0,001$ , \*\* $p < 0,01$ , \* $p < 0,05$

precio de la demanda a partir de los resultados de la estimación, y obtener un estimador consistente de las varianzas y covarianzas a través del método delta generalizado, propuesto en la metodología del presente trabajo.

El criterio de información de Akaike muestra preferencia por los modelos con forma funcional logarítmica y semilogarítmica, con pequeñas diferencias en el valor del criterio, mientras que la raíz del error cuadrático medio muestra preferencia por los modelos lineal y Stone - Geary, con pequeñas diferencias entre ellas. Sin embargo, estas dos criterios para evaluar modelos deben ser observados con cuidado, ya que por una parte, el criterio de información de Akaike es calculado a partir de la función de verosimilitud y el número de parámetros estimados, por lo que su valor depende de la función de verosimilitud, la cual varía entre las formas con errores multiplicativos y las funciones con errores multiplicativos. Respecto a la raíz del error cuadrático medio, las variaciones entre formas funcionales son menores a 0,1 metros cúbicos, lo cual es casi no apreciable respecto al valor promedio del consumo observado.

El cuadro 5 muestra los valores promedio del consumo esperado y elasticidad precio para cada forma funcional, además del error estándar calculado a través del método delta, y un intervalo de confianza al 95 %.

El promedio del valor esperado del consumo de agua se ubica entre 17,56 y 18,16 metros cúbicos, valor cercano al promedio observado de 17,56 metros cúbicos calculado a partir de la muestra, y mostrado en el cuadro 3. El valor promedio de la elasticidad se ubica entre -0,47 para el caso menos elástico bajo la forma funcional Stone - Geary, y -0.56 para el caso más elástico bajo la forma funcional

lineal. Sin embargo, el valor promedio para todas las elasticidades se ubica por debajo de 1 (en valor absoluto), por lo que todas las formas funcionales son inelásticas respecto a un cambio proporcional en el vector de precios.

Figura 3: Promedio del consumo esperado e intervalos al 95% de confianza.

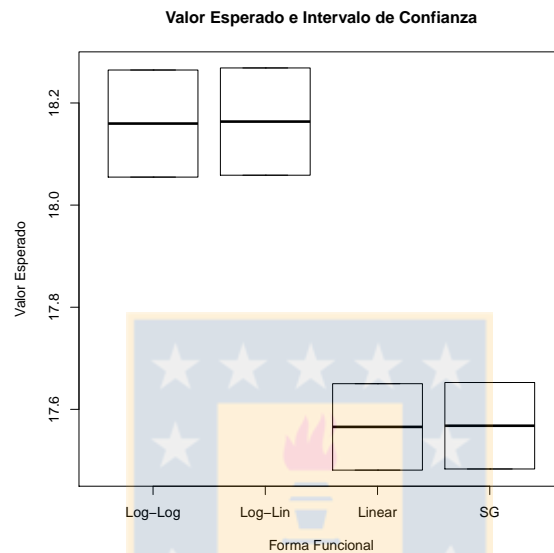
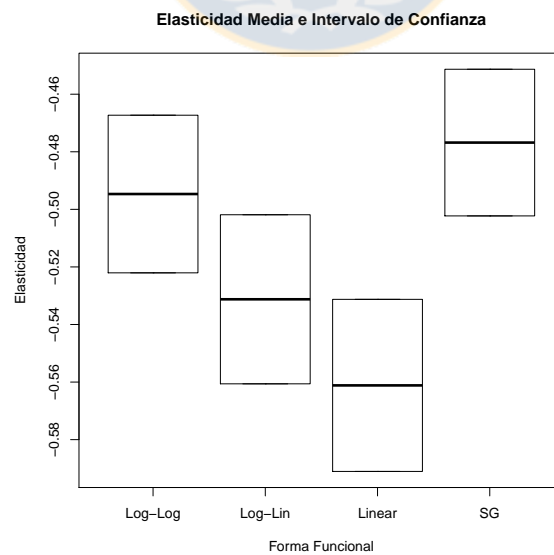


Figura 4: Promedio de elasticidad e intervalos al 95% de confianza



A través de la figura 3, es posible observar que existen dos casos en que los intervalos de confianza para el consumo esperado se traslapan. No es posible rechazar a priori la hipótesis de igualdad en el consumo esperado entre las formas funcionales logarítmica y semilogarítmica, ni entre las formas lineal y Stone - Geary.

Análogamente, la figura 4 muestra que existen casos mixtos de intervalos de confianza traslapados, por lo que no es posible afirmar aún que existen diferencias significativas entre distintas formas funcionales. Sin embargo, como lo muestra Schenker y Gentleman (2001) y Payton et al. (2003), la prueba de intervalos de confianza no es concluyente si existen casos en que éstos se traslapan entre sí. Por lo tanto, se requiere aplicar la prueba de hipótesis puntual para diferencia de medias, propuesta en la metodología del presente trabajo.

Cuadro 6: Valores t de prueba de diferencia de medias de consumo esperado.

	Logarítmica	Semilogarítmica	Lineal	Stone-Geary
Logarítmica	-	-0.05	8.65***	8.61***
Semilogarítmica	-	-	8.67***	8.65***
Lineal	-	-	-	-0.04
Stone-Geary	-	-	-	-

\*\*\*  $p < 0,001$ , \*\*  $p < 0,01$ , \*  $p < 0,05$

El cuadro 6 muestra los resultados de la prueba de diferencia de valores promedio del consumo esperado entre todas las combinaciones de formas funcionales utilizadas en el estudio, a través del estadístico de prueba. El estadístico calculado posee una distribución T de Student, con grados de libertad asintóticamente tendientes a infinito, por lo que el estadístico de contraste es equivalente a la distribución normal estándar. Bajo un 95 % de confianza, si el valor absoluto del estadístico calculado es mayor a 1.96, se rechaza la hipótesis de igualdad de medias, y el consumo esperado es estadísticamente distinto entre dos formas funcionales. Al observar los resultados, no es posible rechazar la hipótesis de igualdad de promedio del consumo esperado entre las formas logarítmica y semilogarítmica, ni entre las formas lineal y Stone Geary bajo un 95 % de confianza. Por otro lado, sí es posible afirmar que entre las formas funcionales logarítmica y lineal el promedio del consumo esperado de agua es estadísticamente distinto, al igual que entre las formas logarítmica y Stone - Geary, entre las formas semilogarítmica y Lineal, y entre las formas semilogarítmica y Stone - Geary.

El cuadro 7 muestra los resultados de la prueba de hipótesis de diferencia de medias de elasticidad precio para modelos de elección discreto - continua para cada combinación de formas funcionales. El

Cuadro 7: Valores t de prueba de diferencia de medias de elasticidad precio.

	Logarítmica	Semilogarítmica	Lineal	Stone-Geary
Logarítmica	-	1.79	3.22***	-0.94
Semilogarítmica	-	-	1.40	-2.75***
Lineal	-	-	-	-4.34***
Stone-Geary	-	-	-	-

\*\*\* $p < 0,001$ , \*\* $p < 0,01$ , \* $p < 0,05$

criterio de contraste es idéntico a los resultados del cuadro 6: bajo un 95 % de confianza, si el valor absoluto del estadístico calculado es mayor a 1.96, entonces se rechaza la hipótesis de igualdad de medias, y la elasticidad entre dos formas funcionales es estadísticamente distinta. En este caso, se rechaza la hipótesis entre las formas logarítmica y lineal, entre las formas semilogarítmica y Stone - Geary, y entre las formas lineal y Stone - Geary, y se puede afirmar que la media de la elasticidad precio es estadísticamente distinta entre dichas combinaciones de formas funcionales. Si bien no es posible afirmar que la elasticidad de la forma funcional logarítmica es estadísticamente distinta a la elasticidad de la forma funcional semilogarítmica al 95 % de confianza, sí es posible hacerlo al 90 % de confianza, sin embargo es un criterio más débil y no se considera como resultado concluyente.

Si bien los resultados obtenidos de las pruebas de significancia anteriores son mixtos, éstos sí permiten confirmar las hipótesis planteadas en la sección 4. Lo anterior se justifica en que, si bien existen casos en que no se puede afirmar que el promedio del consumo esperado es distinto entre algunas formas funcionales, sí lo es en al menos un caso (específicamente en 2 combinaciones), por lo que es posible confirmar la hipótesis 1 del presente trabajo: el consumo esperado sí presenta diferencias al utilizar distintas formas funcionales. El resultado es análogo para el caso de la elasticidad precio, ya que existe al menos una combinación de formas funcionales cuyas elasticidades son estadísticamente significativas, lo que confirma la hipótesis 2 del estudio: existen diferencias significativas en la elasticidad del consumo de agua ante cambios proporcionales en el precio, al utilizar distintas formas funcionales.

## 8. Conclusiones

La literatura existente en demanda de agua residencial sugiere que la forma funcional de la ecuación de consumo puede afectar los resultados de demanda, sin embargo, ésta hipótesis no había sido probada en modelos de elección discreto - continua.

Para probar ésta afirmación, se estimó el modelo de elección discreto - continua para cuatro formas funcionales, tres de las cuales usadas frecuentemente en la literatura, y otra forma que considera la esencialidad del agua en su construcción, y se obtuvieron las medidas de consumo esperado y elasticidad ante cambios proporcionales del precio. Finalmente, se realizaron pruebas de diferencias de consumo esperado y elasticidades entre todas las combinaciones de formas funcionales.

Los resultados obtenidos del consumo esperado y elasticidades son congruentes con la literatura previa: el consumo esperado del modelo discreto - continuo para todas las formas funcionales ronda en torno al consumo observado, y la elasticidad ante cambios proporcionales en el vector de precios muestra valores menores a 1 (en valor absoluto), lo cual indica que el agua es un bien inelástico. Las pruebas finales de análisis de diferencias de medias muestran que existen combinaciones de formas funcionales que presentan diferencias en términos de consumo esperado y/o elasticidad precio. Esto permite confirmar las hipótesis planteadas en el presente estudio, y afirmar que la forma funcional puede ser un factor de variabilidad en los resultados de la demanda de agua residencial cuando se utilizan modelos de elección discreto - continua para capturar los posibles problemas de simultaneidad entre el precio y el consumo.

De lo anterior, es posible preguntarse cuál es la forma funcional más adecuada para estimar demanda por agua. Si bien este trabajo muestra que existen diferencias en los resultados de demanda al utilizar distintas formas para la ecuación de demanda en el modelo discreto - continuo, no se aborda la determinación de la forma funcional más adecuada, lo cual puede considerarse como una limitación del estudio. Sin embargo, dado que se muestra que la forma funcional afecta el consumo estimado y la elasticidad precio, los resultados obtenidos sí permiten motivar el desarrollo de futuros estudios orientados a probar la forma funcional más adecuada para la demanda de agua, o desarrollar nuevas especificaciones para ésta.

## Referencias

- Al-Qunaibet, M. H. y Johnston, R. S. (1985). Municipal demand for water in kuwait: methodological issues and empirical results. *Water Resources Research*, 21(4):433–438.
- Amemiya, T. (1985). *Advanced econometrics*. Harvard university press.
- Arbués, F., García-Valiñas, M. n., y Martínez-Españeira, R. (2003). Estimation of residential water demand: a state-of-the-art review. *The Journal of Socio-Economics*, 32(1):81–102.
- Barlow, M. y Clarke, T. (2002). *Blue gold: The fight to stop the corporate theft of the world's water*. The New Press.
- Baumann, D. D. y Boland, J. J. (1998). The case for managing urban water. *Urban water demand management and planning*, pages 20–28.
- Burtless, G. y Hausman, J. A. (1978). The effect of taxation on labor supply: Evaluating the gary negative income tax experiment. *The Journal of Political Economy*, pages 1103–1130.
- Dalhuisen, J. M., Florax, R. J., De Groot, H. L., y Nijkamp, P. (2003). Price and income elasticities of residential water demand: a meta-analysis. *Land economics*, 79(2):292–308.
- Espey, M., Espey, J., y Shaw, W. D. (1997). Price elasticity of residential demand for water: A meta-analysis. *Water Resources Research*, 33(6):1369–1374.
- Ferrara, I. (2008). Residential water use. *OECD Journal: General Papers*, 2008(2):153–180.
- Gaudin, S., Griffin, R. C., y Sickles, R. C. (2001). Demand specification for municipal water management: evaluation of the stone-geary form. *Land Economics*, 77(3):399–422.
- Hanemann, W. M. (1984). Discrete/continuous models of consumer demand. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 541–561.
- Hanemann, W. M. (2005). The economic conception of water. *Water crisis: myth or reality*, pages 61–91.
- Headley, J. C. (1963). The relation of family income and use of water for residential and commercial purposes in the san francisco-oakland metropolitan area. *Land Economics*, pages 441–449.
- Hewitt, J. A. y Hanemann, W. M. (1995). A discrete/continuous choice approach to residential water demand under block rate pricing. *Land Economics*, pages 173–192.



- Howe, C. W. y Linaweaver, F. P. (1967). The impact of price on residential water demand and its relation to system design and price structure. *Water Resources Research*, 3(1):13–32.
- Jackson, R. B., Carpenter, S. R., Dahm, C. N., McKnight, D. M., Naiman, R. J., Postel, S. L., y Running, S. W. (2001). Water in a changing world. *Ecological applications*, 11(4):1027–1045.
- Marshall, A. (1879). Water as an element of national wealth. *Memorials of Alfred Marshall, Kelley y Millman, New York (1956)*, 134:141.
- Moffitt, R. (1986). The econometrics of piecewise-linear budget constraints: a survey and exposition of the maximum likelihood method. *Journal of Business & Economic Statistics*, 4(3):317–328.
- Moffitt, R. (1989). Estimating the value of an in-kind transfer: The case of food stamps. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 385–409.
- Nordin, J. A. (1976). A proposed modification of Taylor's demand analysis: comment. *Bell Journal of Economics*, 7(2):719–721.
- Olmstead, S. M., Hanemann, W. M., y Stavins, R. N. (2007). Water demand under alternative price structures. *Journal of Environmental Economics and Management*, 54(2):181–198.
- Orrego, S. A., Jimenez, D. F., Vasquez, F. A., Ponce, R. D., Ocampo, O. L., y J, V. J. (2015). Could urban residential water demand be affected by climate change? empirical evidence from a case study in a developing country. *Working Paper*.
- Payton, M. E., Greenstone, M. H., y Schenker, N. (2003). Overlapping confidence intervals or standard error intervals: what do they mean in terms of statistical significance? *Journal of Insect Science*, 3(1):34.
- Schenker, N. y Gentleman, J. F. (2001). On judging the significance of differences by examining the overlap between confidence intervals. *The American Statistician*, 55(3):182–186.
- Taylor, L. D. (1975). The demand for electricity: a survey. *The Bell Journal of Economics*, pages 74–110.
- Turner, R. W. y Rockel, M. L. (1988). Estimating covariances of parameter estimates from different models. *Economics Letters*, 26(2):137–140.
- Vásquez, F. (1998). Comparación de interpretaciones teóricas para el formato de pregunta binaria en valoración contingente. Master's thesis, Universidad de Concepción.

Wong, S. (1972). A model on municipal water demand: a case study of northeastern illinois. *Land Economics*, pages 34–44.

Young, R. A. (1973). Price elasticity of demand for municipal water: a case study of tucson, arizona. *Water Resources Research*, 9(4):1068–1072.



## Apéndice A Derivación de la ecuación de demanda de agua Stone - Geary

Siguiendo el trabajo de Al-Qunaibet y Johnston (1985) y Gaudin et al. (2001), la ecuación de demanda Stone - Geary proviene de la maximización de la función de utilidad:

$$U = \sum_{i=1}^N \alpha_i \ln(Q_i - \beta_i) \quad (22)$$

Donde  $Q_i$  es la cantidad consumida del bien  $i$ ,  $\beta_i$  es el nivel mínimo de consumo de dicho bien, y  $\alpha_i$  es la contribución relativa del bien  $i$  a la función de utilidad, con  $\sum \alpha_i = 1$ . Para el caso de demanda de agua residencial, el problema de maximización del consumidor se reduce a:

$$\begin{aligned} \max_{w,X} U &= \alpha \ln(w - \beta_w) + (1 - \alpha) \ln(X - \beta_X) \\ \text{s.a.} &= p * w + X = y \end{aligned} \quad (23)$$

Donde  $X$  es el nivel de consumo de todos los otros bienes, con su correspondiente nivel mínimo de consumo:  $\beta_X$ . El precio de  $X$  se asume numerario. Reemplazando la restricción en la función objetivo, el problema de maximización del consumidor de agua es igual a:

$$\max_w U = \alpha \ln(w - \beta_w) + (1 - \alpha) \ln(y - p * w - \beta_X) \quad (24)$$

Desarrollando la condición de primer orden del problema y despejando  $w$ , la demanda de agua bajo la función Stone - Geary es igual a:

$$w = (1 - \alpha)\beta_w + \alpha \left(\frac{y}{p}\right) - \alpha\beta_X \left(\frac{1}{p}\right) \quad (25)$$

Asumiendo  $\delta_0 = (1 - \alpha)\beta_w$  y  $\gamma = -\alpha\beta_X$  y agregando variables sociodemográficas a través del vector  $Z\delta$ , se obtiene la ecuación estimable:

$$w = Z\delta + \alpha \left(\frac{y}{p}\right) + \gamma \left(\frac{1}{p}\right) \quad (26)$$

Donde  $\delta_0$  se encuentra contenido dentro del vector  $Z\delta$ .

## Apéndice B Valor esperado y elasticidades para modelos con errores multiplicativos

En general, la ecuación de demanda con errores multiplicativos es igual a:

$$w = (p_k, y + d_k) * e^\eta e^\varepsilon \quad (27)$$

Para el caso simple de 2 bloques de consumo, el valor esperado del consumo de agua en modelos con errores multiplicativos es presentado por Olmstead et al. (2007):

$$E(W) = e^{\frac{\sigma_\eta^2}{2}} e^{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}} (w_1^*(p_1, y + d_1) * \pi_1^* + w_2^*(p_2, y + d_2) * \pi_2^*) + e^{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}} w_1 * \lambda_1^* \quad (28)$$

Con:

$$\begin{aligned} \pi_1^* &= \Phi \left( \frac{\ln \frac{w_1}{w_1(p_1, y + d_1)}}{\sigma_\eta} - \sigma_\eta \right) \\ \pi_2^* &= 1 - \Phi \left( \frac{\ln \frac{w_1}{w_2(p_2, y + d_2)}}{\sigma_\eta} - \sigma_\eta \right) \\ \lambda_k^* &= \Phi \left( \frac{\ln \frac{w_1}{w_2(p_2, y + d_2)}}{\sigma_\eta} \right) - \Phi \left( \frac{\ln \frac{w_1}{w_1(p_1, y + d_1)}}{\sigma_\eta} \right) \end{aligned}$$

El cambio en un precio en modelos DCC no solo puede afectar a la demanda condicional a ese precio en particular, sino que puede afectar a toda la estructura de demanda, dependiendo del bloque de consumo actual del individuo (Olmstead et al., 2007). Además, existe la posibilidad de que el cambio no sea solo en un precio, sino que puede ser en toda la estructura de precios, lo cual hace que el efecto sea variado. Se define  $\theta$  como una variable que represente un cambio proporcional en la estructura de precios, tal que  $w(\theta p_k, y + \theta d_k)$ . Derivando (28) respecto a  $\theta$ , y asumiendo  $\theta = 1$ .

$$\frac{\partial W(1)}{\partial \theta} = e^{\frac{\sigma_\eta^2}{2}} e^{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}} \left( \frac{\partial w(p_1, y + d_1)}{\partial \theta} \pi_1^* + w(p_1, y + d_1) * \frac{\partial \pi_1^*}{\partial \theta} + \frac{\partial w(p_2, y + d_2)}{\partial \theta} \pi_2^* + w(p_2, y + d_2) * \frac{\partial \pi_2^*}{\partial \theta} \right) + e^{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}} w_1 \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} \quad (29)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1^*}{\partial \theta} &= -\phi \left( \frac{\ln \frac{w_1}{w(p_1, y + d_1)}}{\sigma_\eta} - \sigma_\eta \right) \frac{1}{\sigma_\eta w(p_1, y + d_1)} \frac{\partial w(p_1, y + d_1)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \pi_2^*}{\partial \theta} &= \phi \left( \frac{\ln \frac{w_1}{w(p_2, y + d_2)}}{\sigma_\eta} - \sigma_\eta \right) \frac{1}{\sigma_\eta w(p_2, y + d_2)} \frac{\partial w(p_2, y + d_2)}{\partial \theta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} = \begin{aligned} & \phi \left( \frac{\ln \frac{w_1}{w(p_1, y + d_1)}}{\sigma_\eta} \right) \frac{1}{\sigma_\eta w(p_1, y + d_1)} \frac{\partial w(p_1, y + d_1)}{\partial \theta} \\ & - \phi \left( \frac{\ln \frac{w_1}{w(p_2, y + d_2)}}{\sigma_\eta} \right) \frac{1}{\sigma_\eta w(p_2, y + d_2)} \frac{\partial w(p_2, y + d_2)}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (30)$$

Las expresiones de  $(\partial w(p_1, y + d_1)/\partial \theta)$  y  $(\partial w(p_2, y + d_2)/\partial \theta)$  dependen de la forma funcional utilizada. Para la forma funcional logaritmica:

$$w(\theta p_k, y + \theta d_k) = \exp(Z\delta) \theta p_k^\alpha (y + \theta d_k)^\gamma \quad (31)$$

Derivando (31) y asumiendo  $\theta = 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(p_1, y + d_1)}{\partial \theta} &= \alpha w(p_1, y + d_1) \\ \frac{\partial w(p_2, y + d_2)}{\partial \theta} &= \alpha w(p_2, y + d_2) + \gamma \frac{w(p_2, y + d_2)}{(p_2, y + d_2)} d_2 \end{aligned}$$

Combinando todo en  $(\partial E(W)/\partial \theta)$  y dividiendo por  $E(W)$ , la elasticidad del cambio en los precios sobre la demanda esperada de agua bajo la forma funcional logaritmica es igual a:

$$\frac{\partial E(W)}{\partial \theta} \frac{1}{E(W)} = \left( \begin{aligned} & \alpha [w_1(p_1, y + d_1)\psi_1 + w_2(p_2, y + d_2)\psi_2 + w_1(\chi_1 - \chi_2)] \\ & + \gamma \left[ d_2 \frac{w_2(p_2, y + d_2)}{(y + d_2)} \left( \psi_2 - \frac{w_1}{w_2(p_2, y + d_2)} \chi_2 \right) \right] \end{aligned} \right) / \Omega \quad (32)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \pi_1^* - \frac{1}{\sigma_\eta} \phi \left( \frac{\ln \frac{w_1}{w(p_1, y + d_1)}}{\sigma_\eta} - \sigma_\eta \right) \\ \psi_2 &= \pi_2^* + \frac{1}{\sigma_\eta} \phi \left( \frac{\ln \frac{w_1}{w(p_2, y + d_2)}}{\sigma_\eta} - \sigma_\eta \right) \\ \chi_1 &= \frac{1}{\sigma_\eta e^{\sigma_\eta^2/2}} \phi \left( \frac{\ln \frac{w_1}{w_1(p_1, y + d_1)}}{\sigma_\eta} \right) \\ \chi_2 &= \frac{1}{\sigma_\eta e^{\sigma_\eta^2/2}} \phi \left( \frac{\ln \frac{w_1}{w_2(p_2, y + d_2)}}{\sigma_\eta} \right) \end{aligned}$$

$$\Omega = w(p_1, y + d_1) * \pi_1^* + w(p_2, y + d_2) * \pi_2^* + e^{-\sigma_\eta^2/2} w_1 \lambda_1^*$$

Bajo la forma funcional semilogarimica:

$$w(\theta p_k, y + \theta d_k) = \exp(Z\delta) + \alpha \theta p_k + \gamma(y + \theta d_k) \quad (33)$$

Derivando (33) y asumiendo  $\theta = 1$ , las expresiones de  $(\partial w(p_1, y + d_1)/\partial \theta)$  y  $(\partial w(p_2, y + d_2)/\partial \theta)$  cambian a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w(p_1, y + d_1)}{\partial \theta} &= \alpha p_1 w(p_1, y + d_1) \\ \frac{\partial w(p_2, y + d_2)}{\partial \theta} &= \alpha p_2 w(p_2, y + d_2) + \gamma d_2 w(p_2, y + d_2)\end{aligned}$$

Combinando las expresiones anteriores, la elasticidad precio para la forma funcional semilogaritmica es igual a:

$$\frac{\partial E(W)}{\partial \theta} \frac{1}{E(W)} = \left( \begin{aligned} &\alpha [w_1(p_1, y + d_1)p_1\psi_1 + w_2(p_2, y + d_2)p_2\psi_2 + w_1(p_1\chi_1 - p_2\chi_2)] \\ &+ \gamma \left[ w_2(p_2, y + d_2)d_2 \left( \psi_2 - \frac{w_1}{w_2(p_2, y + d_2)}\chi_2 \right) \right] \end{aligned} \right) / \Omega \quad (34)$$



## Apéndice C Valor esperado y elasticidades para modelos con errores aditivos

Para formas funcionales con errores aditivos, la ecuación de demanda es igual a:

$$w = w(p_k, y + d_k) + \eta + \varepsilon \quad (35)$$

Para el caso simple de 2 bloques de consumo, la expresión del valor esperado del consumo de agua es obtenida por Moffitt (1989):

$$E(W) = \left( \begin{array}{c} w_1^*(p_1, y + d_1)\pi_1 + w_2^*(p_2, y + d_2)\pi_2 + w_1\lambda_1 \\ + \sigma_\eta \left( \phi \left( \frac{w_1 - w_2(p_2, y + d_2)}{\sigma_\eta} \right) - \phi \left( \frac{w_1 - w_1(p_1, y + d_1)}{\sigma_\eta} \right) \right) \end{array} \right) \quad (36)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \Phi \left( \frac{w_1 - w_1(p_1, y + d_1)}{\sigma_\eta} \right) \\ \pi_2 &= 1 - \Phi \left( \frac{w_1 - w_2(p_2, y + d_2)}{\sigma_\eta} \right) \\ \lambda_1 &= \Phi \left( \frac{w_1 - w_2(p_2, y + d_2)}{\sigma_\eta} \right) - \Phi \left( \frac{w_1 - w_1(p_1, y + d_1)}{\sigma_\eta} \right) \end{aligned}$$

Al igual que en la elasticidad para modelos con errores multiplicativos, se define  $\theta$  como una variable que afecta de forma proporcional a cada uno de los precios, tal que  $w(\theta p_k, y + \theta d_k)$ . Derivando (36) respecto a  $\theta$ , y asumiendo  $\theta = 1$ :

$$\frac{\partial E(W)}{\partial \theta} = \left( \begin{array}{c} \frac{\partial w(p_1, y + d_1)}{\partial \theta} \pi_1 + w(p_1, y + d_1) \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta} \\ + \frac{\partial w(p_2, y + d_2)}{\partial \theta} \pi_2 + w(p_2, y + d_2) \frac{\partial \pi_2}{\partial \theta} \end{array} \right) + w_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta} + \sigma_\eta \left( \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi \left( \frac{w_1 - w_2^*}{\sigma_\eta} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial \theta} \phi \left( \frac{w_1 - w_1^*}{\sigma_\eta} \right) \end{array} \right) \quad (37)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta} &= -\phi \left( \frac{w_1 - w(p_1, y + d_1)}{\sigma_\eta} \right) \frac{1}{\sigma_\eta} \frac{\partial w(p_1, y + d_1)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial \theta} &= \phi \left( \frac{w_1 - w(p_2, y + d_2)}{\sigma_\eta} \right) \frac{1}{\sigma_\eta} \frac{\partial w(p_2, y + d_2)}{\partial \theta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} = \begin{aligned} & \phi \left( \frac{w_1 - w(p_1, y + d_1)}{\sigma_\eta} \right) \frac{1}{\sigma_\eta} \frac{\partial w(p_1, y + d_1)}{\partial \theta} \\ & - \phi \left( \frac{w_1 - w(p_2, y + d_2)}{\sigma_\eta} \right) \frac{1}{\sigma_\eta} \frac{\partial w(p_2, y + d_2)}{\partial \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi \left( \frac{w_1 - w(p_1, y + d_1)}{\sigma_\eta} \right) &= \phi \left( \frac{w_1 - w(p_1, y + d_1)}{\sigma_\eta} \right) \left( \frac{w_1 - w(p_1, y + d_1)}{\sigma_\eta} \right) \frac{1}{\sigma_\eta} \frac{\partial w(p_1, y + d_1)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \phi \left( \frac{w_1 - w(p_2, y + d_2)}{\sigma_\eta} \right) &= \phi \left( \frac{w_1 - w(p_2, y + d_2)}{\sigma_\eta} \right) \left( \frac{w_1 - w(p_2, y + d_2)}{\sigma_\eta} \right) \frac{1}{\sigma_\eta} \frac{\partial w(p_2, y + d_2)}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Para la forma funcional lineal, la ecuación de demanda toma la forma:

$$w(\theta p_k, y + \theta d_k) = Z\delta + \alpha p_k + \gamma(y + d_k) \quad (38)$$

Derivando (38) y asumiendo  $\theta = 1$  ( $\partial w(p_1, y + d_1)/\partial \theta$ ) y ( $\partial w(p_2, y + d_2)/\partial \theta$ ) son iguales a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(p_1, y + d_1)}{\partial \theta} &= \alpha p_1 \\ \frac{\partial w(p_2, y + d_2)}{\partial \theta} &= \alpha p_2 + \gamma d_2 \end{aligned}$$

Combinando todo lo anterior en 37 y dividiendo por  $E(W)$ , la elasticidad precio de la demanda para forma funcional lineal es igual a:

$$\frac{\partial E(W)}{\partial \theta} \frac{1}{E(W)} = (\alpha(p_1\pi_1 + p_2\pi_2) + \gamma\pi_2) / W \quad (39)$$

Para la forma funcional Stone - Geary, la ecuación de demanda es igual a:

$$w(\theta p_k, y + \theta d_k) = Z\delta + \alpha \frac{y + d_k}{p_k} + \gamma \frac{1}{p_k} \quad (40)$$

Derivando (40) y asumiendo  $\theta = 1$ , ( $\partial w(p_1, y + d_1)/\partial \theta$ ) y ( $\partial w(p_2, y + d_2)/\partial \theta$ ) son iguales a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(p_1, y + d_1)}{\partial \theta} &= -\alpha \left( \frac{y + d_1}{p_1} \right) - \gamma \left( \frac{1}{p_1} \right) \\ \frac{\partial w(p_2, y + d_2)}{\partial \theta} &= -\alpha \left( \frac{y + d_2}{p_2} \right) - \gamma \left( \frac{1}{p_2} \right) + \alpha \left( \frac{1}{p_2} d_2 \right) \end{aligned}$$

Combinando lo anterior en 37 y dividiendo por  $E(W)$ , la elasticidad precio de la demanda para la forma funcion Stone - Geary es igual a:



$$\frac{\partial E(W)}{\partial \theta} \frac{1}{E(W)} = \left( \alpha \left( \frac{1}{p_2} d_2 \pi_2 - \frac{y + d_1}{p_1} \pi_1 - \frac{y + d_2}{p_2} \pi_2 \right) - \gamma \left( \frac{1}{p_1} \pi_1 + \frac{1}{p_2} \pi_2 \right) \right) / E(W) \quad (41)$$

