Universidad de Concepción

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Partícula libre con simetrías descritas por las álgebras de Poincaré Generalizadas $\mathfrak{B}_4$ y $\mathfrak{B}_5$

Tesis presentada por Alexander Ian Smith Clark
para optar al grado de Magister en Ciencias con Mención en Física

2016

Departamento de Física

Director de Tesis	:	Dr. Patricio Salgado Arias
Comisión	:	Dr. Patricio Salgado Arias
		Dr. Julio Oliva Zapata
		Dr. Luis Roa Oppliger

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer el apoyo que me ha brindado mi familia, en especial a mi madre, mi hermano y mi abuela, por su amor incondicional a lo largo de esta gran travesía. Esta tesis no hubiese sido posible sin el apoyo de mi profesor guía, Dr. Patricio Salgado quien me ha brindado una ayuda inestimable y muy valiosos consejos a lo largo de mi carrera, además de ser una persona con una profunda convicción y temple al entendimiento y la enseñanza. Adicionalmente quiero agradecer el apoyo que he recibido de muchos docentes de la Universidad de Concepción por su dedicación y entusiasmo, destacando al profesor Dr. Luis Roa, Dr. Julio Oliva, Dr. Guillermo Rubilar, Dr. Ricardo Troncoso, Dr. Fernando Izaurieta y Dr. Juán Crisóstomo. Agradezco tambien el apoyo de mis colegas, en especial a Nataly Ibarra, por sus comentarios sabios, solidaridad e inspiradora vocación.

Resumen

En la primera parte de esta tesis presentaremos la construcción de una acción para la partícula libre definida sobre el espacio coseto $\mathfrak{B}_5/SO(3,1)$, siendo $\mathfrak{B}_5$ el álgebra de Poincaré generalizada. Las álgebras de Poincaré generalizadas $\mathfrak{B}_n$ consituyen una S-expansión del álgebra AdS usando para ello una elección bien definida de un semigrupo. Teniendo en cuenta que el álgebra de Maxwell constituye el álgebra $\mathfrak{B}_4$ cuya realización dinámica en el espacio coseto $\mathfrak{B}_4/SO(3,1)$ representa a una partícula moviéndose en un campo electromagnético constante, resulta interesante plantearse el caso del álgebra $\mathfrak{B}_5$ y estudiar su realización dinámica. Para llevar a cabo esto, en los primeros cuatro capítulos expondremos el material necesario para la comprensión de esta tesis, luego en los capítulos posteriores expondremos el uso del mecanismo de las realizaciones no lineales con el fin de comprender la construcción de la acción para una partícula libre en $\mathfrak{B}_4/SO(3,1)$ y con ello llevar a cabo el objetivo de esta tesis.

Por último en la segunda parte, expondremos un trabajo en desarrollo que busca interpretar la constante de acoplamiento del álgebra de Maxwell en términos de un límite apropiado aplicado sobre una teoría gravitacional invariante bajo el grupo $AdSL_4$, tomando como punto de partida la interpretación de la constante de acoplamiento del álgebra AdS como la constante gravitacional al tomar un límite apropiado que reproduzca la acción de Einstein-Hilbert.

Tabla de Contenido

Parte I

La partícula libre y las álgebras $\mathfrak{B}_4$ y $\mathfrak{B}_5$

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis se tiene como principal objetivo, estudiar a la partícula libre con simetrías descritas por el álgebra $\mathcal{B}_5$ utilizando como marco teórico, el analisis detallado de la partícula libre en el álgebra $\mathcal{B}_4$ descrito en las refs. [1–4]. A partir de esta realización dinámica del álgebra $\mathcal{B}_5$, resulta instructivo caracterizar los generadores del álgebra en término de las coordenadas asociadas al espacio coseto $\mathcal{B}_5/Lorentz$.

En ref. [5], fue encontrado que las álgebras $\mathfrak{B}_4$ y $\mathfrak{B}_5$ y sus generalizaciones pueden ser obtenidas a partir de una contracción de Inönü-Wigner generalizada sobre las álgebra $\mathfrak{so}(d-1,1) \bigoplus \mathfrak{so}(d-2,2)$ generalizadas, denotadas por $\mathcal{AdSL}_d$. Así surge una observación importante. Si se aplica dicha contracción sobre el álgebra $\mathcal{AdSL}_m$, para cada m, surgen extensiones directas del álgebra de Poincaré. Las álgebras obtenidas para cada $m \geq 3$ reciben el nombre de *álgebras de Poincaré generalizadas* y se denotan por $\mathfrak{B}_m$, siendo $\mathfrak{B}_3$ y $\mathfrak{B}_4$ las álgebras de Poincaré y Maxwell respectivamente. Por último, usando las definiciones de [6] aplicadas tal como se señala en la ref. [5] cabe destacar que las álgebras de Poincaré generalizadas $\mathfrak{B}_m$ tambien pueden ser obtenidas como una S-expansión del álgebra $\mathfrak{so}(d-1,2)$ usando como semigrupo $S_E^{(m-2)}$, lo cual simplifica en gran medida la obtención de sus propiedades.

Por último, como segundo objetivo, se desea comparar de manera análoga a [7], las acciones construidas a partir del grupo $\mathcal{B}_4$ y el grupo $AdSL_4$, permitiendo una identificación física entre sus constantes de acomplamiento.

Capítulo 2

Preliminares Matemáticos

En este capítulo revisaremos las herramientas matemáticas que se usarán a lo largo de esta tesis. Se revisarán los conceptos de variedad, formas diferenciales y grupos de Lie entre otros, basados en las refs. [8–12].

2.1. Variedades

Una variedad n-dimensional diferenciable corresponde a un espacio topológico de *Haussdorf*[1], tal que para cada punto $p \in M$, existe un abierto $U^\alpha \in \tau$[2] y un homeomorfismo invertible $x_\alpha : U^\alpha \to \mathbb{R}^n$, tal que sobre dos abiertos $U^\alpha \cap U^\beta \neq \emptyset$, la aplicación

$$x_\alpha \circ x_\beta^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta), \tag{2.1}$$

es suave, como función definida sobre $\mathbb{R}^n$. Nótese que al pertenecer M a la topología τ, M puede escribirse como una unión finita o infinita de abiertos

$$M = \bigcup_\alpha U_\alpha.$$

[1] Se dice que un espacio topológico es de *Haussdorf* si para dos puntos distintos cualesquiera $p, q \in M$ existen dos abiertos U_p y U_q tal que $U_p \cap U_q = \emptyset$.

[2] Para este capítulo reservaremos la letra τ para denotar a una topología. Una topología corresponde a un conjunto de conjuntos $\tau =: \{U_\alpha\}$ (que puede ser no numerable) tal que todos sus uniones (que pueden ser finitas o infinitas) e intersecciones (que solo pueden ser finitas) tambien son elementos de τ.

Los abiertos U^α en conjunto con los homeomorfismos x_α forman pares, denotados por (U^α, x_α) denominados *cartas coordenadas*. El conjunto de todas las cartas coordenadas definidas sobre una variedad se denomina *Atlas*. Una vez definido el concepto de variedad, surge la necesidad de construir otras variedades a partir de aquellas conocidas, una forma de hacerlo es mediante el producto cartesiano. Supongamos que M es una variedad m-dimensional diferenciable y N es una variedad n-dimensional diferenciable, cuyas cartas coordenadas son (U^α, x_α) y (U_A, y^A) respectivamente. Luego el producto cartesiano $X = M \times N$ es una variedad $n+m$-dimensional. En efecto, basta definir las cartas coordenadas por $V^{\alpha,A} = U^\alpha \times W^A$ y el homeomorfismo $z_{\alpha,A} : U^\alpha \times W^A \to \mathbb{R}^{n+m}$ por $z_{\alpha,A}(p,q) = (x_\alpha(p), y_A(q))$.

Veamos ahora algunos ejemplos de variedades

- R^n, en efecto basta escoger $U = \mathbb{R}^n$ y el homeomorfismo identidad $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por $I(x) = x$.
- La circunferencia unitaria $\mathbb{S}^1$ definido por $\mathbb{S}^1 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, en efecto escogiendo el abierto $U^1 = \mathbb{S}^1 - \{(0,1)\}$ y el homeomorfismo $\pi_1 : \mathbb{S}^1 - \{(0,1)\} \to \mathbb{R} \times \{0\}$ definido por

$$X = \frac{x}{1-y}, \tag{2.2}$$

  donde $X \in \mathbb{R} \times \{0\}$ y $(x,y) \in \mathbb{S}^1$. Adicionalmente escogiendo el abierto $U^2 = \mathbb{S}^1 - \{(0,-1)\}$, definiendo el homeomorfismo $\pi_2 : \mathbb{S}^1 - \{(0,-1)\} \to \mathbb{R} \times \{0\}$ definido por

$$X = \frac{x}{1+y}. \tag{2.3}$$

- El cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, en efecto corresponde a un producto cartesiano de variedades.
- El toroide $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

La circunferencia unitaria $\mathbb{S}^1$ constituye un ejemplo interesante, puesto que es imposible cubrirlo con una única carta. Sin embargo en la práctica resulta útil cubrir a $\mathbb{S}^1$ mediante una solo, a través de la coordenada $\phi(x,y)$ definida por

$$(x,y) = (\cos\phi, \sin\phi), \tag{2.4}$$

sin embargo esta aplicación no es inyectiva, puesto que $\phi = 0$ y $\phi = 2\pi$ identifica un mismo punto (x, y). Una opción tentativa de solucionar este defecto sería restringir ϕ al intervalo $[0, 2\pi)$, pero este tipo de intervalos no pertenece a la topología usual definida sobre $\mathbb{R}$ y si sustituimos todos los abiertos $\tau = (a, b)$ por intervalos $\tau = [a, b)$ entonces la topología resultante sería la topología discreta, de modo que tendriamos infinitos abiertos definidos sobre $\mathbb{R}$ en contradicción con el único supuesto. A partir de esta consideración y considerando que dos abiertos U^1 y U^2 cubren la esfera, es posible inferir que son dos, la cantidad mínima de abiertos necesarios para cubrir la circunferencia unitaria.

2.2. Vectores Tangentes

Supongamos que (U, x) es una carta de coordenadas, definida sobre una variedad n-dimensional M. Se define la curva γ como la aplicación $x \circ \gamma : (a, b) \to M$ definida por

$$p = (x \circ \gamma)(t), \tag{2.5}$$

donde $p \in U$ y t es un parámetro definido en el intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$. El interés de definir una curva radica en la posibilidad que nos ofrece para definir direcciones. Sea ahora una carta de coordenadas (U, x) definida sobre una variedad n-dimensional, y una curva γ que pasa sobre un punto $\gamma(t_0) = p \in U$. De esta forma se define el vector tangente sobre p, denotado por $\dot{\gamma}_p$, como una aplicación que mapea campos escalares reales y suaves $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\dot{\gamma}_p(f) = \frac{d}{dt}(f \circ x^{-1} \circ x \cdot \gamma)\bigg|_{t=t_0}. \tag{2.6}$$

Luego, utilizando la regla de la cadena es posible reescribir esta definición por

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_p(f) &= \frac{d}{dt}(f \circ x^{-1} \circ x \cdot \gamma)\bigg|_{t=t_0}, \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ x^{-1})\bigg|_{x(p)} \frac{d}{dt}(x \circ \gamma)^i\bigg|_{t=t_0}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde al definir las componentes de $\dot{\gamma}_p(f)$ por

$$\dot{\gamma}_p^i = \frac{d}{dt}(x \cdot \gamma)^i\Big|_{t=t_0}, \tag{2.8}$$

es posible escribir (2.7) por

$$\dot{\gamma}_p(f) = \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ x^{-1})\Big|_{x(p)} \dot{\gamma}_p^i. \tag{2.9}$$

Hasta ahora hemos definido la aplicación vector tangente sobre $\gamma(t_0) = p$, sin embargo una de las propiedades más importante de esta aplicación es la posibilidad de definirla sobre cada curva que pasa sobre $\gamma(t_0) = p$, en particular escogiendo n curvas diferentes es posible construir un espacio vectorial.

Proposición 2.2.1 *El conjunto de todos los vectores tangentes definidos en p, denotado por $T_p(M)$, constituye un espacio vectorial n-dimensional.*

En efecto, supongamos que p yace sobre una carta (U, x) y que $V, W \in T_p$ son los vectores tangentes a las curvas $\gamma : (a, b) \to M$ y $\sigma : (a, b) \to M$ en $\gamma(t_0) = \sigma(t_0) = p$. Luego a partir de las curvas γ y σ, es posible definir para $a, b \in \mathbb{R}$ la curva en $\mathbb{R}^n$

$$\hat{\rho}(t) = a(x \circ \gamma)(t) + b(x \circ \sigma)(t) - (a + b - 1)x(p), \tag{2.10}$$

donde $\hat{\rho}(t_0) = x(p)$. Así es posible definir la curva en U por $\rho(t) = x^{-1} \circ \hat{\rho}$, tal que al actuar sobre una función suave $f : U \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}(f) &= \frac{d}{dt}(f \circ \rho)\Big|_{t=t_0}, \\
&= \frac{d}{dt}(f \circ x^{-1} \circ x \circ \rho)\Big|_{t=t_0}, \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ x^{-1})\Big|_{x(p)} \frac{d}{dt}(x \circ \rho)^i\Big|_{t=t_0} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ x^{-1})\Big|_{x(p)} \frac{d}{dt}(x \circ x^{-1} \circ \hat{\rho})^i\Big|_{t=t_0}, \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ x^{-1})\Big|_{x(p)} \frac{d}{dt}(\hat{\rho})^i\Big|_{t=t_0},
\end{aligned} \tag{2.11}$$

y sustituyendo (2.10) en (2.11)

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho}_p(f) &= \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ x^{-1})\bigg|_{x(p)} \frac{d}{dt}(\hat{\rho}_p)^i\bigg|_{t=t_0}, \\
&= a\,\frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ x^{-1})\bigg|_{x(p)} \frac{d}{dt}(x \circ \gamma_p)^i\bigg|_{t=t_0} + b\,\frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ x^{-1})\bigg|_{x(p)} \frac{d}{dt}(x \circ \sigma_p)^i\bigg|_{t=t_0}, \\
&= a\dot{\gamma}_p(f) + b\dot{\sigma}_p(f) \\
&= aV(f) + aW(f), \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

se observa que la combinación lineal de dos vectores tangentes corresponde a un vector tangente, esto es $\dot{\rho}_p(f) \in T_p(M)$ y por lo tanto, las operaciones suma $+$ y producto por escalar $\cdot$ son clausuradas en $T_p(M)$. Con el fin de determinar la dimensión de este espacio vectorial, es suficiente determinar una base. Sean n curvas $\rho(i)$ con $i = 1, \cdots, n$, atravesando p y determinadas por

$$(x \circ \rho(i))^j = x^j(p) + t\delta_i^j, \qquad (2.13)$$

lo que nos permite definir n vectores tangentes rotulados por el índice i, cuyas componentes se identifican por j

$$\frac{d}{dt}(x \circ \rho(i))^j = \delta_i^j. \qquad (2.14)$$

Luego como existen n curvas y el índice i va generando tantos vectores tangentes como el valor de n. La dimensión del espacio tangente es igual a la dimensión de la variedad.

2.3. Vectores Cotangentes

Una vez definida de manera apropiado el espacio tangente $T_p(M)$ como un espacio vectorial, en el cual, todo elemento v_P perteneciente a él, satisface

$$v_p = v^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_P,$$

es posible definir el espacio dual $T_p^*(M)$ como el conjunto de todos los funcionales lineales

$$w = w_\mu dx_P^\mu,$$

tal que al actuar sobre un vector v_p se satisface

$$w(v) = w_\mu dx^\mu(v) = w_\mu dx^\mu \left(v^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_P \right) = w^\mu v_\nu dx_P^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_P = w^\mu v_\mu,$$

donde dx_P^ν al actuar sobre $\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_P$, se impone la condición

$$dx^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_P = \delta^\nu_\mu.$$

Esta condición que define al espacio dual $T_p^*(M)$ como al **espacio cotangente,** cuyas bases corresponden a los operadores diferenciales $\{dx^\mu\}_P$, permite definir a un **Tensor** $\binom{n}{p}$ que transforma bajo difeomorfismos por

$$T = T^{\mu_1\cdots\mu_n}{}_{\nu_1\cdots\nu_p}\partial_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\mu_n} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_p}$$

2.4. Formas Diferenciales

Se define una p-forma como un tensor $\binom{0}{p}$ que pertence al p-producto de espacios cotangentes definidos por $T_P^*(M)$, esto es

$$T_P^*(M) \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{P\ veces} T_P^*(M),$$

tal que sus componentes son completamente antisimétricas. Con el fin de garantizar esto último, resulta conveniente definir el producto cuña $\wedge$ por

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu,$$

definiendo así, una $p-$forma diferencial ω por

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}.$$

El conjunto de todas las p-formas diferenciales definidas sobre una variedad n-dimensional constituye un espacio vectorial denotado por $\Lambda_p(M)$, el cuál es subconjunto del espacio cotangente $\Lambda_p(M) \subset T_p^*(M)$. Nótese que su dimensión se relaciona con todas las posibles configuraciones $dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_k} \wedge \cdots \wedge dx^p$ que pueden realizarse dentro de éste, siendo equivalente a determinar el número de posibilidades de ordenar una n-colección de objetos dentro de una p selección sin importar el orden

$$dim(\Lambda_p(M)) = \frac{n!}{(n-p)!p!}. \tag{2.15}$$

De (2.15) se infiere que no existen formas diferenciales perteneciente a $\Lambda_p(M)$ tal que $p > n$. Es claro, que si se supone lo contario entonces $dx^{\mu_{n+1}}$ pertenecería a $\Lambda_p(M)$ y por lo tanto la dimensión del espacio cotangente no sería n, en contradiccón a lo supuesto. Así para un valor fijo de n, existen $n+1$ espacios vectoriales $\Lambda_p(M)$, donde $p = 0, \cdots, n$. En particular si $n = 3$ se tienen los siguientes casos:

(a) $dim(\Lambda_0(M)) = 1$. Este espacio corresponde al conjunto de todos los escalares que son generados por la identidad ó 1.

(b) $dim(\Lambda_1(M)) = 3$. Este espacio es constituido por todos los elementos generados por dx^1, dx^2, dx^3.

(c) $dim(\Lambda_2(M)) = 3$, Para este caso, el espacio es generado por los elementos $dx^1 \wedge dx^2,\ dx^2 \wedge dx^3,\ dx^3 \wedge dx^1$.

(d) $dim(\Lambda_3(M)) = 1$, Finalmente para éste último, todos sus elementos son generados por $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$. Esta base constituye la forma volumen asociada a la variedad M y se denota por $\mathrm{Vol}(M)$ ó $\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^3)$ para este caso.

Es claro verificar que existe una correspondencia asociada a la cardinalidad de los espacios $\Lambda_p(M)$ y $\Lambda_{n-p}(M)$, siendo útil establecer una biyección entre ámbos. Bajo esta perspectiva se define el *Dual de Hodge* de una p forma diferencial.

El duál de Hodge, corresponde a una aplicación $* : \Lambda_p(M) \to \Lambda_{n-p}(M)$ que actúa sobre

$$\alpha = \frac{1}{p!}\alpha_{\mu_1 \cdots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \ \in \Lambda_p(M), \tag{2.16}$$

y es definida por

$$* \alpha =: \frac{1}{(n-p)!} \alpha_{\nu_1 \cdots \nu_p} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}. \tag{2.17}$$

siendo sus propiedades más importantes:

(a) Propiedad involutiva: $* * \alpha = \alpha$.

(b) $\alpha \wedge * \alpha \sim \mathrm{Vol}(M)$.

Ahora bien una vez definida una p-forma, es necesario definir operaciones que conviertan una forma diferencial en otra forma diferencial. En general se definen tres operadores: El producto cuña, el operador diferencial y el operador de contracción.

2.4.1. Producto Cuña

Sea α una $p-$forma y β una $q-$forma pertenecientes a $\Lambda_p(M)$ y a $\Lambda_q(M)$ respectivamente, donde la variedad M tiene dimensión d con $p+q \leq d$, definidas por [3]

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{p!} \alpha_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_p} dx^{\mu_1} dx^{\mu_2} \cdots dx^{\mu_p}, \\ \beta &= \frac{1}{q!} \beta_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_q} dx^{\nu_1} dx^{\nu_2} \cdots dx^{\nu_q}. \end{aligned}$$

Se define la $p+q-$forma producto cuña por

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= \frac{1}{p!q!} \alpha_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_p} \beta_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_q} dx^{\mu_1} dx^{\mu_2} \cdots dx^{\mu_p} dx^{\nu_1} dx^{\nu_2} \cdots dx^{\nu_q}, \\ &= \frac{1}{(p+q)!} \left\{ \frac{(p+q)!}{p!q!} \alpha_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_p} \beta_{\mu_{p+1} \mu_{p+2} \cdots \mu_{p+q}} \right\} \\ &\qquad dx^{\mu_1} dx^{\mu_2} \cdots dx^{\mu_p} dx^{\mu_{p+1}} dx^{\mu_{p+2}} \cdots dx^{\mu_{p+q}}. \end{aligned}$$

siendo posible definir a las componentes de la $p+1-$forma por

$$(\alpha \wedge \beta)_{\mu_1 \cdots \mu_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p!q!} \alpha_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_p} \beta_{\nu_{p+1} \nu_{p+2} \cdots \nu_{p+q}} \delta^{\nu_1 \cdots \nu_{p+q}}_{\mu_1 \cdots \nu_{p+q}}.$$

[3] De ahora en adelante omitiremos la operación cuña $\wedge$.

Una característica que permite este producto es la posibilidad de crear espacios $\Lambda_2(M), \cdots \Lambda_p(M), \cdots$ a partir de $\Lambda_1(M)$, es decir el espacio de las $1-$formas diferenciales, sin embargo es necesario imponer un límite a la cantidad de espacios $\Lambda_p(M)$ en $\Lambda_d(M)$ puesto que el hecho de suponer la existencia de formas diferenciales mayores a d significaría a su vez la existencia de un espacio vectorial de dimensión infinita incluido en uno de dimensión finita, lo cual corresponde a una contradicción, esto trae consigo una poderosa implicancia asociada a la dimensionalidad que poseen los espacios vectoriales $\Lambda_p(M)$. Las propiedades que satisface el producto cuña se listan de la siguiente manera:

- Si α es una $p-$ forma y β una $q-$forma tal que $p, q \leq d$, entonces $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq}\, \beta \wedge \alpha$.
- Si $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ son $p, q, r-$formas respectivamentes tales que $p, q, r \leq d$, entonces $\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$.

2.4.2. Operador Diferencial ó Derivada Exterior

Se define el operador diferencial d como una aplicación que toma una $p-$forma

$$\alpha = \frac{1}{p!}\alpha_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p} dx^{\mu_1} dx^{\mu_2} \cdots dx^{\mu_p}$$

y la mapea a una $p+1$-forma definida por

$$d\alpha = \frac{1}{p!}\partial_\nu \alpha_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p} dx^{\nu} dx^{\mu_1} dx^{\mu_2} \cdots dx^{\mu_p}.$$

Este operador satisface las siguientes propiedades:

(a) Sea α una $p-$forma y β una q forma tal que $p, q \leq d$, luego

$$d\,(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p\, \alpha \wedge d\beta.$$

(b) Sea α una p-forma definida sobre una variedad multiplemente conexa, luego

$$d^2\alpha = 0.$$

(c) Se dice que una p-forma β es exacta si y solo si es posible expresarla en términos de un $p-1$ forma por

$$\beta = d\alpha.$$

(d) Se dice que una $p-$forma β es cerrada si y solo si

$$d\beta = 0.$$

De aquí es claro observar que todas las formas exactas son cerradas, sin embargo el inverso no es cierto. Aquellas p formas que son cerradas, pero no son exactas, perteneces a una *Cohomología* denominada **Cohomología de De Rham**.

2.4.3. Operador de Contracción

Se define el operador I_ξ de contracción de una $p-$forma, con respecto a un $1-$vector o un vector contravariante $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$ por la $p-1$ forma

$$I_\xi \alpha = \frac{1}{(p-1)!} \xi^\mu \alpha_{\mu\mu_2 \cdots \mu_p} dx^{\mu_2} \cdots dx^{\mu_p}.$$

Este operador satisface propiedades análogas al operador diferencial:

(a) $I_\xi (\alpha \wedge) = I_\xi \alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge I_\xi \beta.$

(b) $I_\xi^2 \alpha = 0.$

Una vez definida la derivada exterior el operador de contracción, es posible y útil definir el operador derivada de Lie asociado a un vector $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$ por

$$\mathcal{L}_\xi = [d, I_\xi]_+ = dI_\xi + I_\xi d$$

siendo d el operador diferencial e I_ξ el operador de contracción, definido sobre un vector contravariante ξ. Bajo esta definición resulta interesante ver que ocurre cuando actúa sobre una $p-$forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi\alpha &= dI_\xi\alpha + I_\xi d\alpha, \\
&= d\left(\frac{1}{(p-1)!}\xi^\nu\alpha_{\nu\mu_2\cdots\mu_p}dx^{\mu_2}\cdots dx^{\mu_p}\right) + I_\xi\left(\frac{1}{(p+1)!}\partial_\nu\alpha_{\mu_1\cdots\mu_p}dx^\nu dx^{\mu_1}\cdots dx^{\mu_p}\right), \\
&= \frac{1}{p!}\partial_{\mu_1}\left(\xi^v\alpha_{\nu\mu_2\cdots\mu_p}\right)dx^{\mu_1}dx^{\mu_2}\cdots dx^{\mu_p} + \frac{1}{p!}\xi^\nu\partial_\nu\alpha_{\mu_1\cdots\mu_p}dx^{\mu_1}\cdots dx^{\mu_p}. \\
&= \frac{1}{p!}\left(\alpha_{\nu\mu_2\cdots\mu_p}\partial_{\mu_1}\xi^\nu + \xi^\nu\partial_{\mu_1}\alpha_{\nu\mu_2\cdots\mu_p} + \xi^\nu\partial_\nu\alpha_{\mu_1\cdots\mu_p}\right)dx^{\mu_1}\cdots dx^{\mu_p}.
\end{aligned}$$

En particular, en presencia de una isometría $\mathcal{L}_\xi\alpha = 0$, se verifica

$$\alpha_{\nu\mu_2\cdots\mu_p}\partial_{\mu_1}\xi^\nu + \xi^\nu\partial_{\mu_1}\alpha_{\nu\mu_2\cdots\mu_p} + \xi^\nu\partial_\nu\alpha_{\mu_1\cdots\mu_p} = 0$$

definiéndose así un conjunto de vectores contravariantes, los cuales forman un álgebra bajo el conmutador. Así es posible postular un álgebra de Lie.

2.5. Grupos de Lie

2.5.1. Definiciones

Un grupo de Lie corresponde a una variedad de Haussdorf G y a un producto $\cdot$ que satisface las propiedades de un grupo

- Asociatividad: Para cada elemento $g, h, l \in G$, $(g\cdot h)\cdot l = g\cdot(h\cdot l)$
- Existencia Elemento Neutro: Existe un elemento $1 \in G$, tal que para cada elemento $g \in G$ se satisface $g\cdot 1 = 1\cdot g = g$
- Existencia Elemento Inverso: Para cada elemento $g \in G$, existe un elemento $g^{-1} \in G$ tal que $g\cdot g^{-1} = g^{-1}\cdot g = 1$

Debido a que G es una variedad, para cada elemento g es posible definir $T_g(G)$ siendo éste espacio vectorial el álgebra $\mathcal{G}$ asociada a G. En particular, considerando que $1 \in G$, resulta útil definir la base de este espacio vectorial. Para ello sea

$$g = 1 + \delta g + \frac{1}{2!}(\delta g)^2 + \frac{1}{3!}(\delta g)^3 + \cdots$$

con $\delta g = \delta g^A T_A$, siendo T_A la base asociada al espacio vectorial $T_1(G)$. Luego considerando que para todo grupo G existe un elemento γ tal que para todo $\alpha, \beta \in G$

$$\alpha\beta\alpha^{-1} = \gamma\beta$$

es posible despejar γ por

$$\gamma = \alpha\beta\left(\beta\alpha\right)^{-1}.$$

Nótese que si el grupo es abeliano, entonces $\gamma = 1$, donde $1 \in G$ es el elemento identidad. Expandiendo α y β hasta segundo orden

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + \delta\alpha^A T_A + \frac{1}{2}\delta\alpha^A \delta\alpha^B T_A T_B \\ \beta &= 1 + \delta\beta^A T_A + \frac{1}{2}\delta\beta^A \delta\beta^B T_A T_B \end{aligned}$$

es posible escribir

$$\gamma = 1 + \delta\alpha^A \delta\beta^B [T_A, T_B]$$

definiéndose el conmutador de Lie por

$$[T_A, T_B] = T_A T_B - T_B T_A,$$

de esta forma, al considerar que $\gamma \in G$ es necesario imponer que para cada valor de A y B, debe existir un T_C para el cuál sea proporcional a $[T_A, T_B]$. Estas constantes de proporcionalidad se denominan **constantes de estructura** y satisfacen

$$[T_A, T_B] = C_{AB}{}^C T_C. \tag{2.18}$$

La ecuación (2.18) define un conjunto de vectores base pertenecientes a $T_1(G)$ que satisfacen un producto bajo el anticonmutador, dichos elementos se denominan **generadores** y el conjunto de ellos constituye un *álgebra de Lie*. Finalmente conociendo una realización ó representación para T_A es posible escribir cada elemento de un grupo de Lie, por

$$g = e^{\theta^A T_A}. \tag{2.19}$$

Capítulo 3

Grupo de Poincaré Generalizado $\mathcal{B}_4$

En este capítulo detallaremos las principales características del grupo $\mathcal{B}_4$, cuya álgebra asociada $\mathfrak{B}_4$ se construye mediante el formalismo de la S-expansión [6] usando el semigrupo abeliano resonante $S_E^{(2)}$ [5]. Esta álgebra coincide con la llamada álgebra de Maxwell [1–4], cuya realización dinámica en el espacio homogeneo $\mathcal{B}_4/Lorentz$ describe la acción de un campo electromagnético constante sobre una partícula libre relativista.

3.1. Definición de $\mathcal{B}_4$

Consideremos un espacio homogeneo $\mathcal{B}_4/Lorentz$, siendo $\mathcal{B}_4$ el grupo de Poincaré generalizado el cual contiene el grupo de Lorentz. Dicho espacio caracteriza a cada punto, por un conjunto de coordenadas (x, ϕ), las cuales transforman bajo dos tipos de transformaciones: (pseudo-) traslaciones y transformaciones de Lorentz [1].

$$(a, \epsilon)(x, \phi) = (x + a, \phi + x \wedge a + \epsilon) = \left(x^\mu + a^\mu, \phi^{\rho\sigma} + \frac{1}{2}(x^\rho a^\sigma - x^\sigma a^\rho) + \epsilon^{\rho\sigma} \right), \tag{3.1}$$

$$\Lambda(x, \phi) = (\Lambda x, \Lambda\phi) = \left(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \Lambda^\mu{}_\gamma \Lambda^\mu{}_\tau \phi^{\gamma\tau} \right). \tag{3.2}$$

[1]En este capítulo usaremos la operación $\wedge$ en un sentido unívoco a (3.1)

Luego componiendo las traslaciones con las transformaciones de Lorentz

$$(x', \phi') = (\Lambda x + a, \Lambda\phi + \Lambda x \wedge a + \epsilon)\,.$$

se construye la siguiente transformación general para cada coordenada

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu} x^{\nu} + a^{\mu}, \tag{3.3}$$

$$\phi'^{\rho\sigma} = \Lambda^{\mu}{}_{\gamma}\Lambda^{\nu}{}_{\tau}\phi^{\gamma\tau} + \frac{1}{2}\left[(\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}x^{\gamma})a^{\sigma} - (\Lambda^{\sigma}{}_{\tau}x^{\tau})a^{\rho}\right] + \epsilon^{\rho\sigma}. \tag{3.4}$$

La composición de dos transformaciones consecutivas vienen dadas por

$$\begin{aligned}
x''^{\mu} &= \Lambda_2^{\mu}{}_{\nu}x'^{\nu} + a_2^{\mu}, \\
&= \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\gamma}x^{\gamma} + \Lambda^{\mu}{}_{\nu}a_1^{\nu} + a_2^{\mu} && (3.5)\\
\phi''^{\rho\sigma} &= (\Lambda_2\Lambda_1)^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}\,\phi^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left[(\Lambda_2\Lambda_1)^{\rho}{}_{\mu}\,x^{\mu}\Lambda_2^{\sigma}{}_{\tau}a_1^{\tau} - (\Lambda_2\Lambda_1)^{\sigma}{}_{\nu}\,x^{\nu}\Lambda_2^{\rho}{}_{\gamma}\,a_1^{\gamma}\right], \\
&+ \Lambda_2^{\rho\sigma}{}_{\gamma\tau}\epsilon_1^{\gamma\tau} + \frac{1}{2}\Big[(\Lambda_2\Lambda_1)^{\rho}{}_{\mu}\,x^{\mu}a_2^{\sigma} + \Lambda_2^{\rho}{}_{\gamma}a_1^{\gamma}a_2^{\sigma} - (\Lambda_2\Lambda_1)^{\rho}{}_{\mu}\,x^{\nu}a_2^{\rho} && (3.6)\\
&-\Lambda_2^{\rho}{}_{\tau}a_1^{\tau}a_2^{\rho}] + \epsilon_2^{\rho\sigma}, \\
&= (\Lambda_2\Lambda_1)^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}\,\phi^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left[(\Lambda_2\Lambda_1x)^{\rho}(\Lambda_2a_1 + a_2)^{\sigma} - (\Lambda_2\Lambda_1x)^{\sigma}(\Lambda_2a_1 + a_2)^{\rho}\right], \\
&+ \frac{1}{2}\left[(\Lambda_2a_1)^{\rho}a_2^{\sigma} - (\Lambda_2a_1)^{\sigma}a_2^{\rho}\right] + (\Lambda_2\epsilon_1)^{\gamma\tau} + \epsilon_2^{\rho\sigma}. && (3.7)
\end{aligned}$$

Escribiendo un elemento de $\mathcal{B}_4$ por (Λ, a, ϵ), y compararando (3.5), (3.7) con (3.3) y (3.4) respectivamente, es posible escribir el siguiente elemento producto para los elementos del grupo

$$(\Lambda_2, a_2, \epsilon_2)\cdot(\Lambda_1, a_1, \epsilon_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2a_1 + a_2, (\Lambda_2a_1)\wedge a_2 + \Lambda_2\epsilon_1 + \epsilon_2). \tag{3.8}$$

Identificando al elemento identidad por $(1, 0, 0)$ y el elemento inverso de (Λ, a, ϵ) por

$$(\Lambda, a, \epsilon) = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a, -\Lambda^{-1}\epsilon) \tag{3.9}$$

Se puede ver que $\mathcal{B}_4$ constituye un producto directo entre las dos traslaciones y el grupo de Lorentz. Nótese además que las traslaciones en x^{μ} no conmutan a diferencia de aquellas definidas para ϵ que sí lo hacen, lo que tiene consecuencias físicas que se discutirán más adelante. Finalmente cabe señalar que al igual que en el grupo de Lorentz, $\mathcal{B}_4$ se descompone en cuatro piezas que pueden ser identificadas por $\det \Lambda$ y $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ i.e

$$\mathcal{B}^{\uparrow}_{4+}, \;\; \mathcal{B}^{\downarrow}_{4+}, \;\; , \mathcal{B}^{\uparrow}_{4-}, \mathcal{B}^{\downarrow}_{4-}. \tag{3.10}$$

Ahora bien, si nos restringimos en la componente $\mathcal{B}^{\uparrow}_{4+}$ es posible determinar el álgebra de Lie asociada al grupo completo usando (3.8). En particular, considerando una representación fiel de $\mathcal{B}^{\uparrow}_{4+}$

$$(\Lambda, a, \epsilon) \rightarrow g(\Lambda, a, \epsilon) \tag{3.11}$$

definida por

$$g(\Lambda, a, \epsilon) = \exp\left\{1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} + ia_{\mu}P^{\mu} + \frac{i}{2}\epsilon_{\rho\sigma}Z^{\rho\sigma}\right\} \tag{3.12}$$

tal que

$$g(\Lambda_2, a_2, \epsilon_2)g(\Lambda_1, a_1, \epsilon_1) = g(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2, (\Lambda_2 a_1) \wedge a_2 + \Lambda_2\epsilon_1 + \epsilon_2) \tag{3.13}$$

y

$$g^{-1}(\Lambda, a, \epsilon) = g(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a, -\Lambda^{-1}\epsilon) \tag{3.14}$$

es posible obtener las relaciones de conmutación entre los diferentes generadores definidos en (3.12).

3.2. Álgebra de Poincaré Generalizada $\mathfrak{B}_4$

Consideremos la siguiente composición de factores, usando para ello (3.8)

$$\begin{aligned} &g^{-1}(\Lambda, 0, 0)g(\Lambda', a', \epsilon'^{-1}, 0, 0)g(\Lambda'\Lambda, a', \epsilon') \\ &= g(\Lambda^{-1}\Lambda'^{-1}a'^{-1}\epsilon'). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Desarrollando infinitesimalmente $g(\Lambda', a', \epsilon')$ en el lado izquierdo de (3.15)

$$g^{-1}(\Lambda,0,0)\left(1-\frac{i}{2}\omega'_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}+ia'_{\mu}P^{\mu}+\frac{i}{2}\epsilon'_{\rho\sigma}Z^{\rho\sigma}\right)g(\Lambda,0,0)$$
$$=1-\frac{i}{2}\omega'_{\rho\sigma}g^{-1}(\Lambda,0,0)J^{\rho\sigma}g(\Lambda,0,0)+ia'_{\mu}g^{-1}(\Lambda,0,0)P^{\mu}g(\Lambda,0,0)$$
$$+\frac{i}{2}\epsilon'_{\rho\sigma}g^{-1}(\Lambda,0,0)Z^{\rho\sigma}g(\Lambda,0,0), \tag{3.16}$$

desarrollando infinitesimalmente el lado derecho de (3.15)

$$g(\Lambda^{-1}\Lambda'^{-1}a'^{-1}\epsilon')$$
$$=1-\frac{i}{2}(\Lambda^{-1}\omega'\Lambda)_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}+i(\Lambda^{-1}a')_{\mu}P^{\mu}+\frac{i}{2}(\Lambda^{-1}\epsilon')_{\rho\sigma}Z^{\rho\sigma}$$
$$=1-\frac{i}{2}\left(\Lambda^{-1}\right)_{\rho}{}^{\mu}\omega'_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma}+i\left(\Lambda^{-1}\right)_{\mu}{}^{\nu}a'_{\nu}P^{\mu}+\frac{i}{2}\left(\Lambda^{-1}\right)^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{v}{}_{\sigma}\epsilon'_{\mu\nu}Z^{\rho\sigma}$$
$$=1-\frac{i}{2}\omega'_{\rho\sigma}\Lambda^{\rho}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}J^{\mu\nu}+ia'_{\mu}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu}+\frac{i}{2}\epsilon'_{\rho\sigma}\Lambda^{\rho}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}Z^{\mu\nu}, \tag{3.17}$$

igualando el lado izquierdo (3.16) con el derecho se satisface

$$g^{-1}(\Lambda,0,0)J^{\rho\sigma}g(\Lambda,0,0)=\Lambda^{\rho}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}J^{\mu\nu}, \tag{3.18}$$
$$g^{-1}(\Lambda,0,0)P^{\mu}g(\Lambda,0,0)=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu}, \tag{3.19}$$
$$g^{-1}(\Lambda,0,0)Z^{\rho\sigma}g(\Lambda,0,0)=\Lambda^{\rho}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}Z^{\mu\nu}. \tag{3.20}$$

Expandiendo el lado izquierdo y derecho de (3.18), (3.19) y (3.20), considerando que

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}=\delta^{\mu}_{\nu}+\omega^{\mu}_{\nu} \tag{3.21}$$

obtenemos las siguientes relaciones de conmutación

$$\left[J^{\alpha\beta},J^{\rho\sigma}\right]=-i\left(\eta^{\rho\alpha}J^{\beta\sigma}-\eta^{\rho\beta}J^{\alpha\sigma}-\eta^{\sigma\beta}J^{\alpha\rho}+\eta^{\sigma\alpha}J^{\beta\rho}\right), \tag{3.22}$$
$$\left[J^{\alpha\beta},P^{\mu}\right]=-i\left(\eta^{\mu\alpha}P^{\beta}-\eta^{\mu\beta}P^{\alpha}\right), \tag{3.23}$$
$$\left[J^{\alpha\beta},Z^{\rho\sigma}\right]=-i\left(\eta^{\rho\alpha}Z^{\beta\sigma}-\eta^{\rho\beta}Z^{\alpha\sigma}-\eta^{\sigma\beta}Z^{\alpha\rho}+\eta^{\sigma\alpha}Z^{\beta\rho}\right). \tag{3.24}$$

Consideremos ahora la siguiente composición de factores

$$\begin{aligned} & g^{-1}(1,a,0)g(\Lambda',a',\epsilon')g(1,a,0), \\ & = g(1,-a,0)g(\Lambda',\Lambda'a+a',(\Lambda'a)\wedge a'+\epsilon') \\ & = g\left(\Lambda',\Lambda'a+a'-a,(\Lambda'a+a')\wedge(-a)+(\Lambda'a)\wedge a'+\epsilon'\right). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Fijando Λ' en la identidad

$$g^{-1}(1,a,0)g(1,a',\epsilon')g(1,0,0) = g(1,a',2a\wedge a'+\epsilon') \tag{3.26}$$

Expandiendo análogamente a (3.16) y (3.17), el lado izquierdo (3.26)

$$\begin{aligned} & g^{-1}(1,a,0)g(1,a',\epsilon')g(1,0,0) \\ & = 1 + ia'_\nu g^{-1}(1,a,0)P^\nu g(1,a,0) + \frac{i}{2}\epsilon'_{\nu\lambda}g^{-1}(1,a,0)Z^{\nu\lambda}g(1,a,0) \end{aligned} \tag{3.27}$$

y el derecho de (3.26)

$$g(1,a',2a\wedge a'+\epsilon') = 1 + ia'_\nu\left(P^\nu + a_\lambda Z^{\nu\lambda}\right) + \frac{i}{2}\epsilon'_{\nu\lambda}Z^{\nu\lambda} \tag{3.28}$$

e igualando (3.27) con (3.28) se tiene

$$g^{-1}(1,a,0)Z^{\nu\lambda}g(1,a,0) = Z^{\nu\lambda}, \tag{3.29}$$

$$g^{-1}(1,a,0)P^{\nu}g(1,a,0) = P^\nu + a_\lambda Z^{\nu\lambda}. \tag{3.30}$$

A partir de las ecuaciones (3.29) se tienen las siguientes relaciones de conmutación

$$[Z^{\alpha\beta},P^\mu] = 0 \tag{3.31}$$

$$[P^\nu,P^\gamma] = -iZ^{\nu\gamma} \tag{3.32}$$

Finalmente, considerando la siguiente composición de factores

$$g^{-1}(1,0,\epsilon)g(\Lambda',a',\epsilon')g(1,0,\epsilon) = g(\Lambda',a',\Lambda'\epsilon+\epsilon'-\epsilon) \tag{3.33}$$

donde al fijar $\Lambda' = 1$ y $a' = 0$, se tiene

$$g^{-1}(1,0,\epsilon)g(1,0,\epsilon)g(1,0,\epsilon')g(1,0,\epsilon) = g(1,0,\epsilon') \tag{3.34}$$

y siguiendo el mismo razonamiento anterior

$$g^{-1}(1,0,\epsilon)Z^{\nu\lambda}g(1,0,\epsilon) = Z^{\nu\lambda} \tag{3.35}$$

se obtiene la siguiente regla de conmutación,

$$[Z^{\alpha\beta}, Z^{\nu\lambda}] = 0 \tag{3.36}$$

Los resultados anteriores (3.22), (3.23) (3.24) (3.31) (3.32) y (3.36) muestran que los generadores (P_a, J_{bc}, Z_{cd}) del álgebra de Maxwell satisfacen las siguientes reglas de conmutación

$$\begin{aligned}
&[P_a, P_b] = -iZ_{ab} \\
&[Z_{ab}, P_c] = 0 \\
&[Z_{ab}, Z_{cd}] = 0 \\
&[J_{ab}, P_c] = -i(\eta_{ac}P_b - \eta_{bc}P_a) \\
&[J_{ab}, Z_{cd}] = -i\left(\eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{ad}Z_{bc} - \eta_{bc}Z_{ad} + \eta_{bd}Z_{ac}\right) \\
&[J_{ab}, J_{cd}] = -i\left(\eta_{ac}J_{bd} - \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{bc}J_{ad} + \eta_{bd}Z_{ac}\right)
\end{aligned}$$

donde el cambio de índices de griegos a latinos, se hace con la intención de reservar los índices griegos a los elementos que transforman bajo transformaciones generales de coordenadas. En particular, despues de absorber todas las constantes

$$[P_a, P_b] = Z_{ab}, \tag{3.37}$$

$$[J_{ab}, P_c] = \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b, \tag{3.38}$$

$$[J_{ab}, Z_{cd}] = \eta_{bc}Z_{ad} + \eta_{ad}Z_{bc} - \eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{bd}Z_{ac}, \tag{3.39}$$

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{bc}J_{ad} + \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac}, \tag{3.40}$$

$$[Z_{ab}, Z_{cd}] = 0, \tag{3.41}$$

$$[P_a, Z_{bc}] = 0. \tag{3.42}$$

3.3. Operadores de Casimir

Una vez conocida el álgebra resulta necesario determinar los invariantes del álgebra, con el fin de poder etiquetar a todas las posibles representaciones del grupo.

Proposición 3.3.1 *El operador*

$$\Pi_1 = P_\mu P^\mu - J_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}, \tag{3.43}$$

es un operador de Casimir del álgebra de maxwell, i.e conmuta con todos los generadores del álgebra

$$[J_{\mu\nu}, \Pi_1] = 0, \tag{3.44}$$

$$[P_\mu, \Pi_1] = 0, \tag{3.45}$$

$$[Z_{\mu\nu}, \Pi_1] = 0. \tag{3.46}$$

Demostración. Verificando las condiciones (3.44) (3.45) (3.46)

(a)

$$
\begin{aligned}
[J_{\mu\nu}, \Pi_1] &= [J_{\mu\nu}, P^{\rho}P_{\rho} - J_{\rho\lambda}Z^{\rho\lambda}] \\
&= [J_{\mu\nu}, P^{\rho}]P_{\rho} + P^{\rho}[J_{\mu\nu}, P_{\rho}] - [J_{\mu\nu}, J_{\rho\lambda}]Z^{\rho\lambda} - J_{\rho\lambda}[J_{\mu\nu}, Z^{\rho\lambda}] \\
&= \eta^{\rho\sigma}[J_{\mu\nu}, P_{\sigma}]P_{\rho} + P^{\rho}[J_{\mu\nu}, P_{\rho}] - [J_{\mu\nu}, J_{\rho\lambda}]Z^{\rho\lambda} - \eta^{\rho\sigma}\eta^{\lambda\gamma}J_{\rho\lambda}[J_{\mu\nu}, Z_{\sigma\gamma}] \\
&= -i\eta^{\rho\sigma}(\eta_{\mu\sigma}P_{\nu} - \eta_{\nu\sigma}P_{\mu})P_{\rho} - iP^{\rho}(\eta_{\mu\rho}P_{\nu} - \eta_{\nu\rho}P_{\mu}) \\
&+ i(\eta_{\mu\rho}J_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\lambda}J_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}J_{\mu\lambda} + \eta_{\nu\lambda}J_{\mu\rho})Z^{\rho\lambda} \\
&= -i[P_{\nu}, P_{\mu}] - i[P_{\mu}, P_{\nu}] + i(\eta_{\mu\rho}J_{\nu\lambda}Z^{\rho\lambda} - \eta^{\lambda\gamma}J_{\nu\lambda}Z_{\mu\gamma}) \\
&- i(\eta_{\mu\lambda}J_{\nu\rho}Z^{\rho\lambda} - \eta^{\rho\sigma}J_{\nu\rho}Z_{\mu\sigma}) - i(\eta_{\nu\rho}J_{\mu\lambda}Z^{\rho\lambda} - \eta^{\lambda\gamma}J_{\mu\lambda}Z_{\nu\gamma}) \\
&+ i(\eta_{\nu\lambda}J_{\mu\rho}Z^{\rho\lambda} - \eta^{\rho\sigma}J_{\rho\mu}Z_{\nu\sigma}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
[P_{\mu}, \Pi_1] &= [P_{\mu}, P^{\rho}P_{\rho} - J^{\rho\lambda}Z_{\rho\lambda}] \\
&= [P_{\mu}, P^{\rho}]P_{\rho} + P^{\rho}[P_{\mu}, P_{\rho}] + [P_{\mu}, J^{\rho\lambda}]Z_{\rho\lambda} + J^{\rho\lambda}[J_{\mu}, Z_{\rho\lambda}] \\
&= \eta^{\rho\sigma}[P_{\mu}, P_{\sigma}]P_{\rho} + P^{\rho}[P_{\mu}, P_{\rho}] + \eta^{\rho\gamma}\eta^{\lambda\sigma}[P_{\mu}, J_{\gamma\sigma}]Z_{\rho\lambda} + J^{\rho\lambda}[P_{\mu}, Z_{\rho\lambda}] \\
&= -iZ_{\mu\sigma}P^{\sigma} - iP^{\rho}Z_{\mu\rho} + iZ_{\mu\lambda}P^{\lambda} + iP^{\rho}Z_{\mu\rho} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
[Z_{\mu\nu}, \Pi_1] &= [Z_{\mu\nu}, P^{\rho}P_{\rho} - J_{\rho\lambda}Z^{\rho\lambda}] \\
&= [Z_{\mu\nu}, P^{\rho}P_{\rho}] - [Z_{\mu\nu}, J_{\rho\lambda}Z^{\rho\lambda}] \\
&= [J_{\rho\lambda}, Z_{\mu\nu}]Z^{\rho\lambda} \\
&= -i(\eta_{\rho\mu}Z_{\lambda\nu} - \eta_{\rho\nu}Z_{\lambda\mu} - \eta_{\lambda\nu}Z_{\rho\mu})Z^{\rho\lambda} \\
&= -2i\eta^{\lambda\sigma}[Z_{\lambda\nu}, Z_{\mu\sigma}] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Proposición 3.3.2 *El operador*

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu}, \tag{3.47}$$

es un operador de Casimir del álgebra de Maxwell, i.e

$$[J_{\mu\nu}, \Pi_2] = 0 \tag{3.48}$$

$$[P_{\mu}, \Pi_2] = 0 \tag{3.49}$$

$$[Z_{\mu\nu}, \Pi_2] = 0 \tag{3.50}$$

Demostración. Las condiciones (3.49) y (3.50) son triviales. Verificando solo la primera (3.50):

$$\begin{aligned}
[J_{\mu\nu}, \Pi_2] &= [J_{\mu\nu}, \frac{1}{2} Z_{\rho\lambda} Z^{\rho\lambda}], \\
&= \frac{1}{2} \left\{ [J_{\mu\nu}, Z_{\rho\lambda}] Z^{\rho\lambda} + Z_{\rho\lambda} [J_{\mu\nu}, Z^{\rho\lambda}] \right\}, \\
&= \frac{1}{2} [J_{\mu\nu}, Z_{\rho\lambda}] Z^{\rho\lambda} + \frac{1}{2} \eta^{\rho\gamma} \eta^{\lambda\sigma} Z_{\rho\lambda} [J_{\mu\nu}, Z_{\gamma\sigma}], \\
&= -\frac{i}{2} (\eta_{\mu\rho} Z_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\lambda} Z_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} Z_{\mu\lambda} + \eta_{\nu\lambda} Z_{\mu\rho}) Z^{\rho\lambda}, \\
&- \frac{i}{2} \eta^{\rho\gamma} \eta^{\lambda\sigma} Z_{\rho\lambda} (\eta_{\mu\gamma} Z_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} Z_{\nu\gamma} - \eta_{\nu\gamma} Z_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} Z_{\mu\gamma}), \\
&= -\frac{i}{2} (\eta_{\mu\rho} Z_{\nu\lambda} Z^{\rho\lambda} - \eta_{\lambda\sigma} Z_{\nu\lambda} Z_{\mu\sigma}) + \frac{i}{2} (\eta_{\mu\lambda} Z_{\nu\rho} Z^{\rho\lambda} - \eta^{\rho\gamma} Z_{\rho\nu} Z_{\mu\gamma}), \\
&+ \frac{i}{2} (\eta_{\nu\rho} Z_{\mu\lambda} Z^{\rho\lambda} - \eta^{\lambda\sigma} Z_{\mu\lambda} Z_{\nu\sigma}) - \frac{i}{2} (\eta_{\nu\lambda} Z_{\mu\rho} Z^{\rho\lambda} - \eta^{\rho\gamma} Z_{\rho\mu} Z_{\nu\gamma}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Proposición 3.3.3 *El operador*

$$\Pi_3 = \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} Z^{\mu\nu} Z^{\rho\lambda}, \tag{3.51}$$

es un operador de Casimir del álgebra de Maxwell, i.e

$$[J_{\mu\nu}, \Pi_3] = 0, \tag{3.52}$$

$$[P_{\mu}, \Pi_3] = 0, \tag{3.53}$$

$$[Z_{\mu\nu}, \Pi_3] = 0. \tag{3.54}$$

Demostración. Las condiciones (3.53) y (3.54) son triviales. Verificando solo la primera:

$$\begin{aligned}
[J_{\mu\nu}, \Pi_3] &= \left[J_{\mu\nu}, \epsilon_{\rho\lambda\gamma\delta} Z^{\rho\lambda} Z^{\gamma\delta}\right], \\
&= \epsilon_{\rho\lambda\gamma\delta} \left[J_{\mu\nu}, Z^{\rho\lambda} Z^{\gamma\delta}\right], \\
&= \epsilon^{\rho\lambda\gamma\delta} \left\{\left[J_{\mu\nu}, Z_{\rho\lambda}\right] Z_{\gamma\delta} + Z_{\rho\lambda}\left[J_{\mu\nu}, Z_{\gamma\delta}\right]\right\}, \\
&= -i\epsilon^{\rho\lambda\gamma\delta}\{\left(\eta_{\gamma\mu} Z_{\nu\gamma} - \eta_{\gamma\nu} Z_{\mu\delta} - \eta_{\delta\nu} Z_{\mu\gamma} + \eta_{\delta\mu} Z_{\nu\gamma}\right) Z_{\gamma\delta} \\
&+ Z_{\gamma\delta}\left(\eta_{\gamma\mu} Z_{\nu\gamma} - \eta_{\gamma\nu} Z_{\mu\delta} - \eta_{\delta\nu} Z_{\mu\gamma} + \eta_{\delta\mu} Z_{\nu\gamma}\right) Z_{\gamma\delta}\}, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Capítulo 4

Teorías de Gauge

4.1. Teoría de Gauge Invariante Bajo $U(1)$ Local

Sea ϕ un campo que bajo el grupo $U(1)$, transforma como

$$\phi(x) \to e^{i\alpha(x)}\phi(x) . \tag{4.1}$$

Notemos que a pesar de que $\phi(x)$ transforma bien bajo el grupo $U(1)$, su derivada exterior no lo hace, en efecto

$$d\phi \to e^{i\alpha(x)}d\phi + id\alpha(x)\phi,$$

no transforma de acuerdo a (4.1) debido a la presencia del segundo término. Con el fin de solucionar este problema, una posibilidad consiste en definir un nuevo operador diferencial que sí transforme de acuerdo a (4.1). El operador que satisface estas condiciones se denomina **Derivada Covariante** y se define por

$$D\phi = d + A, \tag{4.2}$$

donde A es el correspondiente campo de gauge denominado **Conexión**, el cual transforma bajo $U(1)$ como

$$A' = A - id\alpha.$$

La correspondiente 2−forma **intensidad de campo** es definida como

$$F = dA \tag{4.3}$$

que constituye el término cinético asociado al campo A, a partir de la cuál podemos construir la acción

$$S_{YM}[A] = \int F \wedge F^{\star}. \tag{4.4}$$

donde $F^{\star}$ corresponde al dual de Hodge. En lenguaje tensorial, la acción (4.4) es

$$S[A] = \alpha \int d^4x \; F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ corresponde a la intensidad de campo asociado al grupo $U(1)$ local. Nótese además que al variar la acción respecto a A con respecto a A se encuentran las siguientes ecuaciones de campo

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

Definiendo $F_{0i} = E_i$ y $F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B^{jk}$ donde $\vec{E}$ y $\vec{B}$ corresponden al campo eléctrico y magnético, se encuentran las ecuaciones de Maxwell en el vacío, siempre y cuando $\alpha = -\frac{1}{4}$. Así la electrodinámica puede reformularse como una teoría de gauge abeliana.

4.2. Teorías de Gauge No-Abelianas

Siguiendo el mismo procedimiento que hemos ocupado para postular un teoría de gauge bajo el grupo local $U(1)$ es posible sintetizar la idea general para construir una teoría de gauge invariante bajo un grupo compacto G cualquiera. En este caso la derivada covariante es dada por

$$D = d + A$$

donde ahora A corresponde a una 1−forma conexión que transforma como

$$A \to gAg^{-1} - g^{-1}dg.$$

La 2-forma curvatura es definida ahora por

$$F = dA + A^2.$$

y la correspondiente acción

$$S_{YM}[A] = \alpha \int F \wedge F^{\star}. \tag{4.5}$$

siendo $F^{\star}$ el dual de Hodge. definido sobre F. Nótese que si escogemos $A = -g^{-1}dg$ conocido como *gauge puro*, al utilizar la igualdad (2.19) es posible expresar a A por

$$A = \zeta^A T_A \tag{4.6}$$

donde T_A corresponde al generador del álgebra asociada a la teoría de gauge. La ecuación (4.6) corresponde a la $1-$forma de Maurer-Cartán.

4.2.1. Ejemplo: Teoría de Gauge invariante SU(2)

Una forma de ilustrar como es posible formular una teoría de gauge bajo el grupo $SU(2)$ consideremos

$$A = A^a_\nu \frac{\sigma_a}{2} dx^\nu$$

donde $\sigma_a/2$ son los generadores asociados al grupo $SU(2)$ y σ^a corresponde a las matrices de Pauli con $a = 1, 2, 3$. Calculando la $2-$forma curvatura

$$\begin{aligned}
F &= \partial_\mu A^a_\nu \frac{\sigma_a}{2} dx^\mu dx^\nu + \frac{1}{4} A^a_\mu A^b_\nu \sigma_a \sigma_b dx^\mu dx^\nu \\
&= \partial_\mu A^a_\nu \frac{\sigma_a}{2} dx^\mu dx^\nu + \frac{1}{8} A^a_\mu A^b_\nu [\sigma_a, \sigma_b] dx^\mu dx^\nu \\
&= \frac{1}{4} \left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu\right) \sigma_a dx^\mu dx^\nu + \frac{1}{4} A^a_\mu A^b_\nu i\varepsilon_{ab}{}^{c} \sigma_c dx^\mu dx^\nu \\
&= \frac{1}{2} \left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + i\varepsilon_{bc}{}^{a} A^b_\mu A^c_\nu\right) \frac{\sigma_a}{2} dx^\mu dx^\nu \\
&= \frac{1}{2} \left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + i\varepsilon^{abc} A_{b\mu} A_{c\nu}\right) \frac{\sigma_a}{2} dx^\mu dx^\nu
\end{aligned}$$

siendo sus componentes

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + i\varepsilon^{abc} A_{b\mu} A_{c\nu}$$

donde es posible postular la acción

$$S_{YM}[A] = \alpha \int F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a$$

donde α se ajusta de acuerdo a las propiedades asociadas a las ecuaciones de campo.

Capítulo 5

Realizaciones No-Lineales

5.1. Motivación

En este capítulo, expondremos las ideas principales descritas en las refs. [13–15] con el fin de construir una acción para una partícula libre definida en un espacio coseto. A modo de contextualizar la discusión, presentaremos algunas definiciones útiles, y un ejemplo que ilustra sus alcances.

Definición 5.1.1 *Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo de G. Se define al espacio coseto, como el conjunto de todos los cosetos de G sobre H y se denota por G/H. En particular si el subgrupo H es normal, entonces G/H constituye un grupo.*

Definición 5.1.2 *Sea G el grupo de Lie de todas las simetrías de una variedad m-dimensional M y H un subgrupo de G. Si $m \in M$ es un punto invariante bajo la acción de H, entonces H constituye el subgrupo de estabilidad de m. En particular m se conoce como punto isométrico o estabilizador.*

Usando las definiciones anteriores, ilustraremos como es posible identificar un espacio coseto. Consideremos una esfera S^n embebida en $\mathbb{R}^{n+1}$. ¿Es posible identificar una rotación $r \in SO(n+1)$ como una operación que mueve un punto de la esfera fijo $p \in S^n$ a otro punto p' de S^n?. En particular, es posible identificar a cada elemento $r \in SO(n)$ por cada punto p', sin importar la rotación producida sobre p. Este hecho puede reescribirse señalando que la acción de $SO(n+1)$ sobre S^n es transitiva.

Por otra parte, nótese que $p \in M$ queda invariante al ser sometido en la acción de $SO(n)$ (restringida a un hiperplano tangente a p), siendo así $SO\,(n)$ el subgrupo de estabilidad sobre $p \in S^n$. Con el fin de probar la inyectividad de la correspondencia entre el coseto $rSO(n+1)$ [1] y un punto p', nótese que si $r_aSO(n)$ y $r_bSO(n)$ son dos cosetos que actúan sobre el mismo punto p y se satisface,

$$r_aSO(n)p = r_ap = r_bp = r_bSO(n)p, \tag{5.2}$$

es posible escribir la siguiente proposición

$$r_aSO(n) = r_bSO(n) \tag{5.3}$$

siendo ámbos cosetos iguales, así es posible identificar a cada punto de la esfera por cada coseto $rSO(n)$, actuando sobre un punto fijo $p \in S^n$ que denominaremos polo. De manera análoga es posible considerar al espacio de Minkowski como el espacio coseto entre el grupo de Poincaré $\mathcal{P}$ y el subgrupo de Lorentz $\mathcal{L}$, es decir $M_n = \mathcal{P}/\mathcal{L}$. Donde es posible interpretar a los espacios homogéneos como cuocientes entre el grupo de todas las simetrías que actúan sobre él y su correspondiente subgrupo de estabilidad. La generalización de esta discusión radica en la posibilidad de construir espacios coseto como por ejemplo, $\mathcal{B}_4/SO(3,1)$.

5.2. Realizaciones No-Lineales

Sea G un grupo de Lie n-paramétrico y sea H un subgrupo semisimple y conectado. Denotemos con $\{V_i\}_{i=1}^{n-d}$ $(i = 1, 2, \cdots, n-d)$ los generadores de H y denotemos por A los restantes generadores, elegidos de modo que V_i y A_i forman juntos un conjunto completo de generadores de G, los cuales son ortonormales respecto al producto interno de Cartán ($[V_i, A_j] \sim A_k$). Usando la identidad $g = \exp\left(\xi^a T_a\right)$ válida para

[1] Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo de G, si $g \in G$ es posible definir al coseto izquierdo de H respecto a g como el conjunto

$$gH = \{gh : \forall h \in H\} \tag{5.1}$$

el cúal es un grupo si H es normal. Véase [9].

los elementos de $g \in G$ que se encuentran en la vecindad del elemento identidad y usando familiares propiedades de las exponenciales se tiene que, en alguna vecindad de la identidad G, todo elemento del grupo G puede ser descompuesto unívocamente en un producto de la forma

$$g = e^{\xi \cdot A} e^{\mu \cdot V}$$

donde

$$\xi \cdot A = \sum_l \xi^l A_l \;\; ; \;\; \mu \cdot V = \sum_i \mu^i V_i$$

y donde ξ^l y μ^i son parámetros reales. Esta descomposición equivale a una particular parametrización del espacio de los cosetos izquierdos G/H por medio de los parámetros ξ^l. Adicionalmente esta descomposición nos dice que para todo elemento $g_0 \in G$ podemos escribir

$$g_0 e^{\xi \cdot A} = e^{\xi' \cdot A} e^{\mu' \cdot V} \tag{5.4}$$

donde $\xi' = \xi'(\xi, g_0)$ y $\mu' = \mu'(\xi, g_0)$ son funciones de las variables indicadas, las cuales son detereminadas por la estructura del grupo.

Teorema 5.2.1 *Si H es un subgrupo de G y sea $h \in H$ tal que*

$$h : \psi \rightarrow D(h)\psi$$

es una representación lineal y unitaria del subgrupo H, entonces las transformaciones

$$g_0 : \;\; \xi \rightarrow \xi', \quad \psi \rightarrow D(h)\psi \tag{5.5}$$

constituyen una realización no lineal del grupo G.

Demostración. Sea un elemento $g_0 \in G$. Luego considerando que todo elemento de $g = e^{\xi \cdot A} e^{\mu \cdot V}$ se puede escribir por

$$g_0 e^{\xi \cdot A} = e^{\xi' \cdot A} h_1(\xi, g_0) \tag{5.6}$$

es posible inducir una transformación de simetría $\xi \rightarrow \xi'(\xi, g_0)$ y del mismo modo se induce una transformación $\mu' \rightarrow \mu'(\xi, g_0)$. De esta forma el problema se reduce a encontrar todas las posibles representaciones definidas sobre H. Una vez conocida una representación apropiada, se satisface la siguiente ley de transformación

$$\psi \to D\left(h_1\right)\psi = D\left(e^{\mu' \cdot V}\right)\psi.$$

Lo que completa la prueba. ■

Consideremos ahora las realizaciones no lineales de un grupo G, las cuales tienen la propiedad de ser lineales cuando son restringidas al subgrupo continuo H de G. Se probará, eligiendo coordenadas de modo conveniente *que cualquier variedad sobre la cual estas realizaciones son inducidas es equivalente a una que transforma de acuerdo a la forma estandar dada por*

$$\begin{aligned} g_0 e^{\xi \cdot A} &= e^{\xi' \cdot A} e^{\mu' \cdot V} \\ g_0 &: \quad \xi \to \xi', \quad \psi \to D\left(e^{\mu' \cdot V}\right)\psi \end{aligned}$$

Esta forma estandar tiene la importante propiedad que el espacio de los parámetros ξ_l es transitivo bajo el grupo de las transformaciones. Comenzaremos re-fraseando el problema en una forma más abstracta.

Sea M una variedad analítica real $n-$dimensional, y sea G un grupo de Lie que es realizado como un grupo de transformaciones sobre M. En las ecuaciones

$$\xi : x \to T_g x$$

se usa el símbolo x para denotar el punto de la variedad así como el $n-$ vector real formado por las coordenadas del punto en algún sistema coordenado. Supondremos que T_g es una función analítica tanto de g como de x. Si identificamos los campos de una teoría fenomenológica con algún conjunto particular de coordenadas sobre la variedad, entonces el problema de encontrar todas sus posibles leyes de transformación bajo un grupo G, es equivalente a encontrar todas las posibles maneras de realizar el grupo como transformaciones sobre una variedad. La ventaja de formular el problema de esta manera es que el pasaje desde uno de estos campos a otro, lo cuál como se sabe no debe tener efecto sobre las predicciones físicas de una teoría fenomenológica, se convierte en el pasaje de un conjunto de coordenadas a otra de la variedad, lo cuál no afecta al problema geométrico. La suposición de analiticidad en la variedad problema es necesaria debido a que en la teoría de campos aparece la expansión en series de potencia. Sin embargo existen ciertas consideraciones que deben tomarse en cuenta. En primer lugar, las transformaciones generales de coordenadas no son permitidas: se sabe, de las propiedades de lagrangianos no lineales, que un cambio de coordenadas debe dejar invariante el origen de coordenadas. Por lo tanto asumiremos que existe un punto especial de la variedad O, al cuál llamaremos el origen, y solo permitiremos sistemas coordenados tales que el origen es siempre representado por el vector cero. Por último, debido a que los campos son usados en última instancia, no es necesario intentar caracterizar la acción del grupo globalmente siendo suficiente hacer un estudio sólo en la vecindad del origen O.

Existen elementos del grupo que dejan invariante el origen. La totalidad de dichos elementos forma un subgrupo H de G. El subgrupo H es llamado el subgrupo de estabilidad del origen y podría en particular consistir solo del elemento identidad o, como otro caso extremo, podría consistir del grupo completo G.

Con esta reformulación del problema de encontrar todas las posibles leyes de transformación bajo un grupo a encontrar todas las posibles formas de realizar no linealmente un grupo G las cuales se convierten en lineales cuando nos restringimos al subgrupo H. Con la idea de probar esta proposición, sea M una variedad diferenciable $n-$dimensional, realizado como un grupo de transformaciones sobre la variedad

$$g : z \rightarrow gz \tag{5.7}$$

Sea O un punto arbitrario de M conocido como origen, de modo que todos los elementos que lo dejan invariante constituyen un subgrupo $H \subset G$. Así cerca de la vecindad de la identidad, es posible escribir

$$g = e^{\xi^l A_l} e^{\mu^i V_i} = e^{\xi^l A_l}, \tag{5.8}$$

$$h = e^{\mu^i V_i}. \tag{5.9}$$

y considerar la ley de multiplicación (5.4), donde $\xi' = \xi'(g_0, \xi)$ y $\mu' = \mu'(g_0, \xi)$. De esta forma, cuando se aplica un elemento sobre el origen

$$g_0 O = e^{\xi'^l A_l} h O = e^{\xi'^l A_l} O \in N, \tag{5.10}$$

de donde vemos que N es parametrizado por los parámetros ξ^l, lo cuál significa que $\{\xi^l\}_l$ constituyen un buen conjunto de coordenadas para N, siendo $\xi = 0$ las coordenadas del punto O. Si aplicamos un elemento arbitrario $g \in G$ sobre un elemento de N

$$g\left(e^{\xi^l A_l} O\right) = e^{\xi'} h_1(g_0, \xi) O = e^{\xi'} O \in N, \tag{5.11}$$

se verifica que al actuar G sobre N, el resultado pertenece a N.

Puesto que N es d dimensional y está dotado naturalmente con las coordenadas ξ^l, es necesario introducir $n - d$ coordenadas ψ^A sobre M. Así, por convención, un punto de N posee coordenadas $\psi^A = 0$. Estas coordenadas pueden ser escogidas de acuerdo a lo enunciado en el lema de linealización.

Lema 5.2.2 *Si H es un subgrupo de G, que consiste de todos los elementos que dejan el origen invariante*

$$hO = O, \quad \forall h \in H,$$

entonces, existe un conjunto de coordenadas ψ, válidas en una vecindad de O en N tal que en estas coordenadas

$$h\psi = D(h)\psi \tag{5.12}$$

donde $D(h)$ es una representación lineal de h.

Así, es posible parametrizar a M por $\xi' = \xi(g_0, \xi)$ y $\psi' = D(H)\psi$.

5.3. Invariante izquierdo de Maurer-Cartán

Consideremos la acción de G sobre G/H definida en (5.5), en particular, escogiendo $h_1 = e^{\gamma' \cdot V}$ con $\gamma' = \gamma'(\xi, g_0)$ y aplicando la derivada exterior, se satisface

$$\begin{aligned} dg_0 e^{\xi \cdot A} + g_0 de^{\xi \cdot A} &= (d\xi'^{\xi' \cdot A} e^{\gamma' \cdot V} + e^{\xi' \cdot A} d\gamma'^{\gamma' \cdot V}), \\ &= e^{\xi' \cdot A} e^{\gamma' \cdot V} \left(d\xi'(\xi, g_0) \cdot A + d\gamma'(\xi, g_0) \cdot V \right). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Por otra parte, si g_0 es fijo, pero arbitrario, el término dg_0 se anula. Adicionalmente, escogiendo a $g_0 = e^{-\xi \cdot A}$, se satisface

$$e^{-\xi \cdot A} de^{\xi \cdot A} = d\xi'(\xi, g_0(\xi)) \cdot A + d\gamma'(\xi, g_0(\xi)) \cdot V. \tag{5.14}$$

De esta forma es posible definir la 1-forma izquierda de Maurer-Cartán por

$$\Omega = e^{-\xi \cdot A} de^{\xi \cdot A} \equiv p \cdot A + v \cdot V, \tag{5.15}$$

donde al considerar $g = e^{\xi \cdot A} \in G/H$

$$\Omega = g^{-1} dg \equiv p \cdot A + v \cdot V. \tag{5.16}$$

siendo p y v, 1-formas en ξ. Una característica importante de Ω es la invariancia de la 1-forma $p(\xi)$ bajo h_1; en efecto, usando la acción de G sobre G/H

$$\begin{aligned} \Omega'^{-\xi' \cdot A} de^{-\xi' \cdot A} &= h_1 (g_0 e^{\xi \cdot A})^{-1} d(g_0 e^{\xi \cdot A} h_1^{-1}), \\ &= h_1 \left[(g_0 e^{\xi \cdot A})^{-1} d(g_0 e^{\xi \cdot A}) \right] h_1^{-1} + h_1 \left[(g_0 e^{\xi \cdot S})^{-1} d(g_0 e^{\xi \cdot A}) \right] dh_1^{-1}, \\ &= h_1 e^{-\xi \cdot A} de^{\xi \cdot A} h_1^{-1} + h_1 dh_1^{-1}, \\ &= h_1 \Omega h_1^{-1} + h_1 dh_1^{-1}, \end{aligned} \tag{5.17}$$

luego usando la definición (5.16),

$$\begin{aligned} \Omega' &= p' \cdot A + v' \cdot V \\ &= h_1 (p \cdot A + v \cdot V) h_1^{-1} + h_1 dh_1^{-1} \\ &= h_1 p h_1^{-1} \cdot A + h_1 v h_1^{-1} \cdot V + h_1 dh_1^{-1} \end{aligned} \tag{5.18}$$

donde es posible identificar

$$p' \cdot A = h_1 p h_1^{-1} \cdot A, \tag{5.19}$$

$$v' \cdot V = h_1 v h_1^{-1} \cdot V + h_1 d h_1^{-1}. \tag{5.20}$$

De acuerdo con la expresión (5.19), la 1-forma p es invariante bajo h_1, mientras que v' transforma como una conexión de gauge bajo la acción de h_1, la importancia de v' radica en la construcción de una derivada covariante bajo h_1. Ahora bien, aplicando la derivada exterior sobre (5.5), donde $D(h_1) = e^{\gamma' \cdot V}$, se satisface

$$\begin{aligned} d\psi' &= d\gamma'^{\gamma' \cdot V} \psi + \gamma e^{\gamma' \cdot V} d\psi \\ &= e^{\gamma' \cdot V} \left[d\psi + (d\gamma' \cdot V)\psi \right] && (5.21) \\ &= D(h_1) \left[d\psi + (d\gamma' \cdot V)\psi \right] && (5.22) \end{aligned}$$

Esto implica que la derivada sobre ψ definida por,

$$\mathcal{D}\psi = d\psi + (v \cdot V)\psi \tag{5.23}$$

constituye un vector covariante bajo h_1. En general usando p y la derivada exterior $\mathcal{D}$, es posible construir acciones invariantes bajo h_1 y por consiguiente invariantes bajo G por

$$S = \int L(\xi, \mathcal{D}\xi) \tag{5.24}$$

5.4. Un ejemplo esférico

Consideremos el espacio coseto $SU(2)/\{e\}$ siendo e la identidad [16]. Considerando una parametrización en término de los ángulos de Euler

$$g = \exp\left(i\psi\frac{\sigma^3}{2}\right)\exp\left(i\theta\frac{\sigma^2}{2}\right)\exp\left(i\varphi\frac{\sigma^3}{2}\right) \tag{5.25}$$

donde σ^1, σ^2 y σ^3 son las matrices de Pauli definidas por

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.26}$$

se encuentra

$$g = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\psi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}(\psi+\varphi)} & \sin\frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}(\psi-\varphi)} \\ -\sin\frac{\theta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\psi-\varphi)} & \cos\frac{\theta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\psi-\varphi)} \end{pmatrix}, \tag{5.28}$$

cuya inversa es dada por

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\psi+\varphi)} & -\sin\frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}(\psi-\varphi)} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\psi-\varphi)} & \cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}(\psi-\varphi)} \end{pmatrix}. \tag{5.29}$$

Calculando la 1-forma izquierda de Maurer-Cartán

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(d\varphi + \cos\theta d\psi) & \frac{1}{2}\left[(\cos\varphi d\theta + \sin\varphi\sin\theta d\psi) - i(\sin\varphi d\theta - \sin\theta\cos\varphi d\psi)\right] \\ \frac{1}{2}\left[(\cos\varphi d\theta + \sin\varphi\sin\theta d\psi) + i(\sin\varphi d\theta - \sin\theta\cos\varphi d\psi)\right] & -\frac{1}{2}(d\varphi + \cos\theta d\psi) \end{pmatrix} \tag{5.30}$$

Al descomponer en términos de las matrices de Pauli σ^i, se encuentra

$$\Omega = (\cos\varphi d\theta + \sin\varphi\sin\theta d\psi)\frac{\sigma^1}{2} + (\sin\varphi d\theta - \sin\theta\cos\varphi d\psi)\frac{\sigma^2}{2} + (d\varphi + \cos\theta d\psi)\frac{\sigma^3}{2}. \tag{5.31}$$

Definiendo sus componentes por

$$\lambda^1 = \cos\varphi d\theta + \sin\varphi\sin\theta d\psi, \tag{5.32}$$

$$\lambda^2 = \sin\varphi d\theta - \sin\theta\cos\varphi d\psi, \tag{5.33}$$

$$\lambda^3 = d\varphi + \cos\theta d\psi, \tag{5.34}$$

es posible construir la acción invariante

$$S = \int \alpha_i \lambda^{*i}$$
$$= \int d\lambda\, \alpha_1(\cos\varphi\dot{\theta} + \sin\varphi\sin\theta\dot{\psi}) + \alpha_2(\sin\varphi\dot{\theta} - \sin\theta\cos\varphi\dot{\psi}) + \alpha_3(\dot{\varphi} \tag{5.35}$$
$$+ \cos\theta\dot{\psi}) \tag{5.36}$$

donde λ^{*i} corresponde al pullback de la 1-forma λ^i sobre la linea de mundo de una partícula y α_i son constantes. Una advertencia es necesaria, debido a que existe una analogía entre α_i y los generadores $\sigma^i/2$ otra acción invariante puede construirse imponiendo el operador de casimir sobre α_i, considerando a α_i como un vector covariante bajo $SU(2)$.

$$\alpha_i\alpha^i = \ell(\ell+1). \tag{5.37}$$

Sin embargo no detallaremos este caso. Ahora bien de (5.36), el término $\alpha_3\dot{\varphi}$ puede ser eliminado de la acción puesto que corresponde a una derivada total de λ, así φ no genera dinámica, siendo posible removerla usando las ecuaciones de E. Lagrange.

$$0 = \frac{\partial L}{\partial\varphi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right), \tag{5.38}$$
$$= \alpha_1(-\sin\varphi\dot{\theta} + \cos\varphi\sin\theta\dot{\psi}) + \alpha_2(\cos\varphi\dot{\theta} + \sin\theta\sin\varphi\dot{\psi}), \tag{5.39}$$
$$= \sin\varphi(-\alpha_1\dot{\theta} + \alpha_2\sin\theta\dot{\psi}) + \cos\varphi(\alpha_1\sin\theta\dot{\psi} + \alpha_2\dot{\theta}) \tag{5.40}$$

lo cual implica que

$$\tan\varphi = \frac{\alpha_1\sin\theta\dot{\psi} + \alpha_2\dot{\theta}}{\alpha_1\dot{\theta} - \alpha_2\sin\theta\dot{\psi}} \tag{5.41}$$

o equivalentemente

$$\cos\varphi = \pm\frac{\alpha_1\dot{\theta} - \alpha_2\sin\theta\dot{\psi}}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\left[\sin^2\theta\,\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2\right]^{1/2}} \tag{5.42}$$
$$\sin\varphi = \pm\frac{\alpha_1\sin\theta\dot{\psi} + \alpha_2\dot{\theta}}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\left[\sin^2\theta\,\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2\right]^{1/2}} \tag{5.43}$$

Insertando (5.42) y (5.43) en (5.36), teniendo en cuenta únicamente las soluciones positivas y la extracción de $\alpha_3\dot{\varphi}$

$$S = \int d\lambda \, \frac{\alpha_1^2\dot{\theta}^2 - \alpha_1\alpha_2 \sin\theta\dot{\psi}\dot{\theta} + \alpha_1^2 \sin^2\theta\dot{\psi}^2 + \alpha_1\alpha_2 \sin\theta\dot{\psi}\dot{\theta} + \alpha_2\alpha_1 \sin\theta\dot{\psi}\dot{\theta} + \alpha_2^2\dot{\theta}^2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\left[\sin^2\theta\,\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2\right]^{1/2}}$$
$$\frac{-\alpha_2\alpha_1 \sin^2\theta\dot{\psi}\dot{\theta} + \alpha_2^2 \sin^2\theta\dot{\psi}^2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\left[\sin^2\theta\,\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2\right]^{1/2}} + \alpha_3\cos\theta\dot{\psi}$$
$$= \int d\lambda \, \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\sqrt{\sin^2\theta\,\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2} + \alpha_3\cos\theta\dot{\psi}. \tag{5.44}$$

Finalmente absorbiendo α_1 y α_2, se satisface la siguiente acción

$$S = \beta \int d\lambda \, \sqrt{\sin^2\theta\,\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2} + \alpha_3\cos\theta\dot{\psi}, \tag{5.45}$$

donde (5.45) puede interpretarse como una partícula moviéndose sobre una esfera con momento magnético $\vec{\mu} = \mu_0\dot{\varphi}\hat{r}$ sobre un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\hat{z}$, tal que $\alpha_3 = \mu_0 B_0$, siendo posible postular la siguiente realización física de esta acción por

$$S = \beta \int d\lambda \, \sqrt{\sin^2\theta\,\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2} + \vec{\mu}\cdot\vec{B}. \tag{5.46}$$

donde β es una constante que depende del sistema de unidades.

Por último una observación debe hacerse. Si $\sigma_3 \to 0$ entonces en (5.25), se tiene un elemento perteneciente a $U(1)$, esto implica que es posible construir una acción física que realize $SU(2)/U(1)$ tomando únicamente $\alpha_3 = 0$ en la acción (5.45). Así es posible observar que una partícula libre en el espacio $SU(2)/U(1)$ es equivalente a una partícula en $\mathbb{R}^3$ vinculada sobre la superficie de una esfera.

5.5. Transformaciones de simetría

5.5.1. Definiendo una nueva notación

Con el fin de obtener las transformaciones de simetría a partir de la acción de G sobre el coseto G/H, resulta útil introducir la operación $\wedge$ [15] definida por

$$1 \wedge X = X \wedge 1 = X \tag{5.47}$$

$$X \wedge Y = [X, Y] \tag{5.48}$$

$$X^2 \wedge Y = [X, [X, Y]] \tag{5.49}$$

$$X^3 \wedge Y = [X, [X, [X, Y]]] \tag{5.50}$$

$$\vdots \tag{5.51}$$

$$X^{n+1} \wedge Y = [X, X^n \wedge Y] \quad n \geq 1 \tag{5.52}$$

Donde 1 corresponde a la identidad. Para una función analítica en $x = 0$ definida sobre operadores

$$f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n X^n \tag{5.53}$$

es posible probar que

$$f(X) \wedge Y = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (X^n \wedge Y) = f_0 + f_1[X, Y] + f_2[X, [X, Y]] + f_3[X, [X, [X, Y]]] + \cdots, \tag{5.54}$$

surgiendo una forma equivalente para $X^n \wedge Y$ por

$$X^n \wedge Y = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} X^{n-p} Y X^p, \tag{5.55}$$

la cual puede probarse usando el método de inducción matemática. A partir de estas definiciones, se verifica

$$g(X) \wedge (f(X) \wedge Y) = [g(x) f(x)] \wedge Y, \tag{5.56}$$

siendo posible enunciar el siguiente lema

Lema 5.5.1 *Sean X, Y elementos de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, luego las siguientes proposiciones son válidas*

$$e^{-X} Y e^{X} = e^{-X} \wedge Y \tag{5.57}$$

$$e^{-X} \delta e^{X} = \frac{1 - e^{-X}}{X} \wedge \delta X \tag{5.58}$$

Demostración. La primera proposición (5.57) es una consecuencia de la proposición (5.56), considerando una representación en serie de la función exponencial.

Para la segunda (5.58), sea la siguiente función integral

$$f(t) = e^{-tX} \delta e^{tX}, \tag{5.59}$$

donde al considerar su derivada

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(t) &= -X e^{-tx} \delta e^{tX} + e^{-tX} \frac{d}{dt}\left(\delta e^{tX}\right), \\ &= -X e^{-tX} \delta e^{tX} + e^{-tX} (\delta X\, e^{tX} + X \delta e^{tX}), \\ &= -X e^{-tX} \delta e^{tX} + e^{-tX} \delta X e^{tX} + X e^{-tX} \delta e^{tX}, \\ &= e^{-tX} \delta X e^{tX}, \end{aligned} \tag{5.60}$$

y ocupando el primer teorema fundamental del cálculo y la proposición (5.57)

$$\begin{aligned} e^{-X} \delta e^{X} &= \int_0^1 dt\, \frac{df}{dt}(t) = \int_0^1 dt\, e^{-tX} \delta X e^{tX}, \\ &= \int_0^1 dt\, e^{-tx} \wedge \delta X, \\ &= \left. \frac{-e^{-tX}}{X} \right|_0^1 \wedge \delta X, \\ &= \frac{1 - e^{-X}}{X} \wedge \delta X. \end{aligned} \tag{5.61}$$

■

5.5.2. Transformaciones de Simetría

Con el fin de obtener las transformaciones de simetría a partir de la acción de G sobre el coseto G/H, es necesario aplicar una variación sobre g_0 en (5.4), esto implica

$$\begin{aligned}
\delta g_0 e^{\xi\cdot A} &= \left(e^{\xi'\cdot A} + \delta e^{\xi'\cdot A}\right)(h_1 + \delta h_1) - e^{\xi'\cdot A} h_1 \\
\delta g_0 e^{\xi\cdot A_a} &= e^{\xi'\cdot A}\delta h_1 + \delta e^{\xi'\cdot A} h_1 \\
e^{-\xi^a A_a}\delta g_0 e^{\xi^a A_a} - e^{-\xi^a A_a}\delta e^{\xi^a A_a} &= \delta h_1 \qquad (5.62)
\end{aligned}$$

en particular considerando que g_0 y h_1 son infinitesimales, es posible escribir

$$e^{-\xi^a A_a}(g_0 - 1)e^{\xi^a A_a} - e^{-\xi^a A_a}\delta e^{\xi^a A_a} = h_1 - 1. \qquad (5.63)$$

ocupando las proposiciones (5.57) y (5.58) del lema (5.5.1), es posible escribir (5.63) por

$$e^{-\xi\cdot A} \wedge (g_0 - 1) - \frac{1 - e^{-\xi\cdot A}}{(-\xi\cdot A)} \wedge (-\delta\xi\cdot A) = h_1 - 1 \qquad (5.64)$$

de modo que se tienen dos casos posibles para g_0

(a) $g_0 = e^{\xi_0\cdot A}$

En este caso, el lado izquierdo contiene únicamente generadores del coseto, mientras que el lado derecho contiene generadores asociados al subgrupo de estabilidad $H \subset G$, siendo válido afirmar que

$$e^{-\xi\cdot A} \wedge (\xi_0\cdot A) - \frac{1 - e^{-\xi\cdot A}}{(-\xi\cdot A)} \wedge (-\delta\xi\cdot A) = 0 \qquad (5.65)$$

determinando así $\delta\xi$.

(b) $g_0 = h_0 \in H$
Este caso es trivial, puesto que usando la regla de multiplicación (5.6), se asegura que ξ tranforma linealmente bajo H. En efecto

$$\begin{aligned}
h e^{\xi\cdot A} &= e^{\xi'\cdot A} h_1(\xi, g_0), 4 \\
\Rightarrow e^{\xi'\cdot A} &= h e^{\xi\cdot A} h_1^{-1}, \qquad (5.66)
\end{aligned}$$

de modo que al fijar $h = h_1$, puesto que $h_1 \in H$

$$e^{\xi' \cdot A} = h e^{\xi \cdot A} h^{-1}. \tag{5.67}$$

Escogiendo una representación

$$h = \exp(\mu \cdot V) \tag{5.68}$$

y considerando únicamente los términos infinitesimales en (5.67)

$$\begin{aligned} 1 + \xi'^a A_a &= (1 + \mu^a V_a)\left(1 + \xi^b A_b\right)(1 - \mu^c V_c) \\ &= 1 + \xi^a A_a + \mu^a [V_a, A_b] \xi^b, \end{aligned} \tag{5.69}$$

de modo que al considerar la representación adjunta de los generadores A_a en H, se satisface $[V_a, A_b] = C_{ab}{}^c A_c$ y por lo tanto

$$\delta \xi^a = (\mu^c C_{cb}{}^a) \xi^b \tag{5.70}$$

Capítulo 6

Partícula libre con simetrías descritas por el álgebra $\mathfrak{B}_4$

En este capítulo se tiene como objetivo principal, la exposición de la construcción de un lagrangiano que describa a una partícula libre y sus propiedades en un espacio coseto $\mathcal{B}_4/Lorentz$. Una construcción detallada en [1, 2] y [18], sugiere interpretar al background electromegnético constante $f_{\mu\nu}$ como un término de interacción y no como simetrías adicionales del espaciotiempo plano. Con el fin de exponer con claridad estas ideas, comenzaremos detallando la construcción de un lagrangiano asociado a una partícula libre en el espacio de Minkowski, para luego deformarlo introduciendo un término de interacción, construido a partir de las realizaciones no lineales de $\mathfrak{B}_4$ sobre el grupo de Lorentz. A continuación postularemos una métrica sobre este espacio coseto, formulando de manera alternativa un lagrangiano que conlleva a las mismas ecuaciones del movimiento descritas por el lagrangiano deformado. Finalmente detallaremos nuevas posibilidades que nos entrega este acercamiento teórico.

6.1. Partícula libre Relativista

Sea $\mathcal{P}$ el grupo de Poincaré compuesto por una suma directa entre las transformaciones de Lorentz $SO(3,1)$ y el subgrupo abeliano de las traslaciones. Este hecho permite identificar a cada punto del espaciotiempo por una traslación asociada a un punto fijo (o de estabilidad). Cláramente si el punto esta fijo, este no se mueve y por lo tanto los boost de Lorentz no lo modifican, por otro lado si se realizan rotaciones en un sistema coordenado con el origen en este punto, no hay cambio. Así el subgrupo de las transformaciones de Lorentz constituyen un subgrupo de estabilidad sobre el punto fijo. De acuerdo con lo señalado, un elemento del espacio de Minkowski $\mathcal{P}$/Lorentz, puede ser representado por

$$g = e^{-x^a P_a} \tag{6.1}$$

siendo P^a y J^{ab} los generadores asociados al álgebra de Poincaré (A) [1]. Calculando la 1-forma izquierda de Maurer-Cartán

$$\Omega = -g^{-1}dg = -g^{-1}(-dx^b P_b e^{-x^a P_a}) = g^{-1} g dx^a P_a = dx^a P_a, \tag{6.2}$$

donde

$$e^a = dx^a \tag{6.3}$$

transforma como un vector contravariante de Lorentz. De esta forma postulando el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \pi_a \dot{x}^a \tag{6.4}$$

con π_a un vector covariante, observamos que el correspondiente momento canónico coincide con este vector, en efecto

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} = \pi_a. \tag{6.5}$$

Luego considerando que p_a es la variable conjugada a $\dot{x}^a$ y e^a es la 1-forma dual a P_a, es posible identificar a π_a con el generador P_a, imponiendo así el operador de casimir invariante bajo Poincaré sobre la variable conjugada π^a

$$\frac{1}{2}(\pi^2 + m^2) = 0, \tag{6.6}$$

[1] En la primera parte de esta tesis supondremos todas las constantes de acoplamiento incluidas en los generadores.

incorporando este vínculo usando el método de los multiplicadores de Lagrange, es posible postular el lagrangiano de *primer orden* por

$$\mathcal{L} = \pi_a \dot{x}^a - \frac{e}{2}(\pi^2 + m^2). \tag{6.7}$$

donde e es un multiplicador de Lagrange. Variando (6.7) con respecto a π_a

$$\dot{x}^a - e\pi^a = 0 \Leftrightarrow \pi^a = \frac{\dot{x}^a}{e}, \tag{6.8}$$

de modo que al sustituir

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x}^a \dot{x}_a}{2e} - \frac{m^2}{2}e. \tag{6.9}$$

Este lagrangiano se denomina de *Hooft Polyakov* para la partícula libre, el cual muestra de manera manifiesta la invariancia de gauge bajo reparametrización de la partícula relativista. Un aspecto útil que nos permite esta acción es la descripción de la dinámica asociada a una partícula libre sin masa (massless).

Por último variando (6.9) con respecto a e

$$-\frac{\dot{x}^a \dot{x}_a}{2} e^{-2} - \frac{m^2}{2} = 0 \Leftrightarrow e = \frac{\sqrt{-\dot{x}^a \dot{x}_a}}{m} \tag{6.10}$$

se satisface

$$\mathcal{L} = -m\sqrt{-\dot{x}^a \dot{x}_a} \tag{6.11}$$

que corresponde a la acción de segundo orden o de *Nambu-Goto*. Hasta ahora hemos descrito tres posibilidades para la acción de una partícula relativista donde el lagrangiano de *Primer orden* (6.7) presenta el inconveniente de estar definido en el espacio de fase, mientras que el de *Nambu-Goto* (6.11) resulta inutil en la descripción de una partícula sin masa. Ahora bien usando el formalismo de las realizaciones no-lineales, es posible, en adición, determinar las simetrías infinitesimales que actúan sobre este lagrangiano.

6.1.1. Simetrías y Operadores de Casimir

Sea $g \in SO(3,1)$, de modo que al considerar la ecuación

$$h_1(g_0, x^a) e^{-x^a P_a} h_1^{-1}(g_0, x^a) = e^{-x'_a P_a}. \tag{6.12}$$

y expandir el lado izquierdo en términos infinitesimales

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{1}{2}\lambda^{ab} J_{ab}\right)(1 - x^c P_c)\left(1 - \frac{1}{2}\lambda^{de} J_{de}\right) = 1 - x^c P_c - \frac{1}{2}\lambda^{ab} x^c [J_{ab}, P_c] \\
&= 1 - x^c P_c - \frac{1}{2}\lambda^{ab} x^c [J_{ab}, P_c] \\
&= 1 - x^c P_c - \frac{1}{2}\lambda^{ab} x^c \left(\eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b\right),
\end{aligned} \tag{6.13}$$

y el lado derecho

$$1 - x'^c P_c, \tag{6.14}$$

e insertando (6.13) y (6.14) en (6.12)

$$x'^a = x^a + \lambda^a_b x^b \quad \Leftrightarrow \quad \delta x^a = \lambda^a_b x^c. \tag{6.15}$$

Sea ahora $g \in \mathcal{P}/SO(3,1)$, luego usando la ecuación (5.63)

$$e^{-x_a P_a} \wedge (-a \cdot P) - \frac{1 - e^{-x_a P_a}}{-x \cdot P} \wedge -\delta x \cdot P = 0, \tag{6.16}$$

se tiene

$$-a \cdot P + \delta x \cdot P = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta x^a = a^a. \tag{6.17}$$

Así, a partir de (6.15) y (6.17) se satisfacen las siguientes transformaciones de simetrías infinitesimales

$$\begin{aligned}
P_a : &\quad \delta_P x^a = a^a, \\
J_{ab} : &\quad \delta_J x^a = \lambda^a_b x^b,
\end{aligned}$$

de modo que al construir las cargas conservadas de Noether que realizan el álgebra de Poincaré, se satisface la siguiente realización del álgebra

$$\mathcal{P}_a = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\delta_P x^a = -\pi_a \tag{6.18}$$

$$\mathcal{J}_{ab} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\delta_J x^a = -\left(x_a\pi_b - x_b\pi_a\right). \tag{6.19}$$

Realizando así los operadores de Casimir por

$$\mathcal{P}_a\mathcal{P}^a = \pi^2 = -m^2, \tag{6.20}$$

$$W_aW^a = \left(\frac{1}{2}\epsilon^{abcd}\mathcal{P}_a\mathcal{J}_{cd}\right)^2 = \left[\frac{1}{2}\epsilon^{abcd}(-\pi_b)(-\left(x_c\pi_d - x_d\pi_c\right))\right]^2 \tag{6.21}$$

$$= \left(\epsilon^{abcd}\pi_b x_c\pi_d\right)^2. \tag{6.22}$$

El primer operador de casimir corresponde al operador de masa y se encuentra intimamente relacionado con la causalidad y la geometría del espaciotiempo donde yace la partícula, mientras que el segundo se encuentra relacionado con el operador de spin y por lo tanto con la naturaleza intrínseca de la partícula.

6.2. Deformación del lagrangiano de la partícula libre relativista

Consideremos el espacio coseto $\mathcal{B}_4/\mathcal{L}$ donde $\mathcal{B}_4$ corresponde al álgebra de Poincaré S-expandida [5] en el semigrupo $S_R^{(3)}$ el cual coincide con el álgebra de Maxwell [2]. La idea que sugieren, [1–3] y [18] consiste en agregar un término de interacción al lagrangiano de la partícula libre relativista, de modo que el lagrangiano completo sea invariante bajo $\mathcal{B}_4$. Sea el álgebra de Maxwell descrita por (3.37), (3.38), (3.39), (3.40), (3.41) y (3.42). Luego, realizando un elemento del grupo coseto $\mathcal{B}_4/\mathcal{L}$ por

$$g = \exp\left(-x^aP_a - \frac{1}{2}\phi^{ab}Z_{ab}\right) = \exp\left(-\phi\right), \tag{6.23}$$

y calculando la 1-forma de Maurer-Cartán utilizando (5.58) con $X = \phi =: x^a P_a + \frac{1}{2}\phi^{ab} Z_{ab}$

$$
\begin{aligned}
\Omega &= -g^{-1}dg \\
&= -\left(\frac{1-e^{\phi}}{\phi}\right)\wedge d\phi \\
&= -\left(\frac{1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\phi^n}{\phi}\right)\wedge d\phi \\
&= -\left(\frac{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\phi^n}{\phi}\right)\wedge d\phi \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\phi^{n-1}\wedge d\phi
\end{aligned}
\tag{6.24}
$$

teniendo en cuenta

$$
\begin{aligned}
d\phi &= dx^c P_c + \frac{1}{2}d\phi^{ab}Z_{ab}, \\
\phi\wedge d\phi &= \left(x^a P_a + \frac{1}{2}\phi^{ab}Z_{ab}\right)\wedge\left(dx^c P_c + \frac{1}{2}d\phi^{cd}Z_{cd}\right), \\
&= x^a dx^c P_a\wedge P_c + \frac{1}{2}x^a d\phi^{cd}P_a\wedge Z_{cd} + \frac{1}{2}\phi^{ab}dx^c Z_{ab}\wedge P_c \\
&\quad + \frac{1}{4}\phi^{ab}d\phi^{cd}Z_{ab}\wedge Z_{cd}, \\
&= \frac{1}{2}\left(x^a dx^c - x^c dx^a\right)Z_{ab}, \\
\phi\wedge\phi\wedge d\phi &= \left(x^a P_a + \frac{1}{2}\phi^{ab}Z_{ab}\right)\wedge\left(x^c P_c + \frac{1}{2}\phi^{cd}Z_{cd}\right)\wedge\left(dx^e P_e + \frac{1}{2}d\phi^{ef}Z_{ef}\right), \\
&= \left(x^a x^c P_a\wedge P_c + \frac{1}{2}x^a\phi^{cd}P_a\wedge Z_{cd} + \frac{1}{2}\phi^{ab}x^c Z_{ab}\wedge P_c + \frac{1}{4}\phi^{ab}\phi^{cd}Z_{ab}\wedge Z_{cd}\right) \\
&\quad \wedge\left(dx^e P_e + \frac{1}{2}d\phi^{ef}Z_{ef}\right), \\
&= \frac{1}{2}\left(x^a dx^c - x^c dx^a\right)Z_{ab}\wedge\left(dx^e P_e + \frac{1}{2}d\phi^{ef}Z_{ef}\right), \\
&= 0, \\
&\ \ \vdots \\
\overbrace{\phi\wedge\cdots\wedge\phi}^{n\ veces}\wedge d\phi &= 0,
\end{aligned}
$$

donde se han ocupado los conmutadores, es posible escribir

$$\begin{aligned}
\Omega &= dx^a P_a + \frac{1}{2} d\phi^{ab} Z_{ab} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(x^a dx^b - x^b dx^a\right) Z_{ab} + 0 + \cdots + 0 + \cdots , \\
&= dx^a P_a + \frac{1}{2}\left(d\phi^{ab} + \frac{1}{2}\left(x^a dx^b - x^b dx^a\right)\right) Z_{ab}, \\
&= e^a P_a + \frac{1}{2} k^{ab} Z_{ab}.
\end{aligned}$$

Se satisfacen las siguientes componentes duales a P_a y a Z_{ab}

$$e^a = dx^a \tag{6.25}$$

$$k^{ab} = d\phi^{ab} + \frac{1}{2}\left(x^a dx^b - x^b dx^a\right) \tag{6.26}$$

respectivamente. Nótese que si $Z_{ab} \to 0$ se restaura el grupo de Poincaré, por lo tanto la 1-forma e^a construye la acción de una partícula libre relativista, mientras que la otra 1-forma k^{ab} construye el término de interacción, obtienendose el siguiente lagrangiano invariante de primer orden

$$\mathcal{L} = \underbrace{\left(\pi_a \dot{x}^a - \frac{e}{2}(\pi^2 + m^2)\right)}_{Part.Lib.Rel.} + \underbrace{\frac{1}{2} f_{ab} k_\tau^{ab}}_{Inter.Elect.} \tag{6.27}$$

siendo k_τ^{ab} el pullback de k^{ab} sobre la linea de mundo de la partícula. De (6.27), se tienen dos campos π_a y f_{ab}. El primer campo π_a corresponde al momento canónico asociado a la partícula libre relativista vinculado a permanecer en la cascara de masa, nótese que la inclusión de este vínculo en el lagrangiano, mediante el multiplicador e, permite considerar a π_a como un conjunto de cantidades linealmente independientes, las cuales pueden ser removidas del lagrangiano usando las ecuaciones del movimiento. El segundo campo f_{ab} representa una variable dinámica que acopla una interacción asociada al generador Z_{ab} que en un principio puede ser cualquiera. Así es posible considerar la siguiente reducción en el espacio de configuración

$$\left(x^a, \pi_a, \phi^{ab}, f_{ab}\right) \to \left(x^a, \phi^{ab}, f_{ab}\right). \tag{6.28}$$

Calculando los momentas canónicos asociados a $\dot{x}^a$, ϕ^{ab} y f_{ab}

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a} = \pi_a + \frac{1}{2} f_{ab} x^b, \tag{6.29}$$

$$p_{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{ab}} = f_{ab}, \tag{6.30}$$

$$p^f_{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}_{ab}} = 0. \tag{6.31}$$

siendo posible identificar los siguientes vínculos

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}(\pi^2 + m^2) = 0, \qquad \pi_a = p_a - \frac{1}{2} f_{ab} x^b, \\ C_{ab} &= p_{ab} - f_{ab} = 0, \\ C^f_{ab} &= p^f_{ab} = 0. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Veamos ahora la implicación física de (6.27). Para ello removiendo la cantidad π_a variando $\mathcal{L}$ con respecto a ella

$$\delta_\pi \mathcal{L} = (\dot{x}^a - e\pi^a)\,\delta\pi_a = 0 \Leftrightarrow \pi_a = \frac{\dot{x}_a}{e} \tag{6.33}$$

sustituyendo (6.33) en (6.27), es posible expresar el lagrangiano de Hooft-Polyakov de la partícula libre asociado al término de interacción por

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x}^2}{2e} - \frac{m^2}{2} e + \frac{1}{2} f_{ab} \left(\dot{\phi}^{ab} + \frac{1}{2}\left(x^a \dot{x}^b - x^b \dot{x}^a\right)\right). \tag{6.34}$$

Calculando las ecuaciones del movimiento en el gauge del tiempo propio

$$\delta e : \quad e = \frac{\sqrt{-\dot{x}^2}}{m} \tag{6.35}$$

$$\delta x^a : \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}_a}{e}\right) + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2} f_{ab} x^b\right) + \frac{1}{2} f_{ab} \dot{x}^b = 0 \tag{6.36}$$

$$\delta f_{ab} : \quad \dot{\phi}^{ab} = \frac{1}{2}\left(x^a \dot{x}^b - x^b \dot{x}^a\right) \tag{6.37}$$

$$\delta \phi^{ab} : \quad \dot{f}_{ab} = 0 \tag{6.38}$$

teniendo en cuenta la dependencia temporal de f_{ab} y la ecuación del movimiento asociada a e, es posible reescribir todas las ecuaciones anteriores por

$$\delta x^a : \quad m\ddot{x}_a = f_{ab}\dot{x}^b \tag{6.39}$$

$$\delta f_{ab} : \quad \dot{\phi}^{ab} = -\frac{1}{2}\left(x^a\dot{x}^b - x^b\dot{x}^a\right) \tag{6.40}$$

$$\delta\phi^{ab} : \quad \dot{f}_{ab} = 0. \tag{6.41}$$

Las ecuaciones de movimiento (6.39) y (6.41) describen a una partícula libre relativista, moviendose en un campo electromagnético externo constante, asociado a un potencial $A_a = \frac{1}{2}f_{ab}k^{ab}$. La ecuación (6.40) relaciona a las nuevas coordenadas ϕ^{ab} con el momentum angular de la partícula, de modo que es posible interpretar a ϕ_{ab} como una cantidad relacionada con el momento magnético asociado al campo. Nótese además que si sustituimos (6.41) en (6.39), obtenemos la ecuación del movimiento descrita por el lagrangiano (6.34).

6.2.1. Simetrias y operadores de Casimir

Usando el formalismo de las realizaciones no-lineales es posible encontrar las transformaciones de simetría generadas por los generadores P_a y Z_{ab} usando las ecuación (5.65). En efecto calculando la simetría generada por P_a y Z_{ab}

$$e^{\phi}\wedge\left(-\epsilon^a P_a - \frac{1}{2}\epsilon^{ab}Z_{ab}\right) - \left(\frac{1-e^{\phi}}{\phi}\right)\wedge\delta\left(x^a P_a + \frac{1}{2}\delta\phi^{ab}Z_{ab}\right) = 0. \tag{6.42}$$

Expandiendo y reduciendo el primer término, teniendo en cuenta que $P^n \wedge P = 0$ para todo $n > 2$ y $Z^n \wedge P = Z \wedge P^n = 0$ para todo entero n positivo

$$\begin{aligned}
&\left[1 + \left(x^a P_a + \frac{1}{2}\phi^{ab}Z_{ab}\right) + \frac{1}{2!}\left(x^a P_a + \frac{1}{2}\phi^{ab}Z_{ab}\right)^2 + \cdots\right]\wedge\left(-\epsilon^c P_c - \frac{1}{2}\epsilon^{cd}Z_{cd}\right)\\
&= -\epsilon^c P_c - x^a\epsilon^c P_a\wedge P_c - \frac{1}{2}\epsilon^{cd}Z_{cd}\\
&= -\epsilon^c P_c - \frac{1}{2}(x^a\epsilon^c - x^c\epsilon^a)Z_{ac} - \frac{1}{2}\epsilon^{cd}Z_{cd}\\
&= -\epsilon^c P_c + \frac{1}{2}\left(\epsilon^a x^c - \epsilon^c x^a\right)Z_{ac} - \frac{1}{2}\epsilon^{cd}Z_{cd}.
\end{aligned} \tag{6.43}$$

Del mismo modo, sobre el segundo término

$$-\left(\frac{1-e^{\phi}}{\phi}\right)\wedge\delta\phi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\phi^{n-1}\wedge\delta\phi$$

donde

$$\begin{aligned}\delta\phi &= \delta x^a P_a+\frac{1}{2}\delta\phi^{ab}Z_{ab}\\ \phi\wedge\delta\phi &= \frac{1}{2}\left(x^a\delta x^b-x^b\delta x^a\right)Z_{ab}\\ &\vdots\\ \phi^n\wedge\delta\phi &= 0,\quad n>1\end{aligned}$$

Así el conjunto de todos los términos satisface

$$\begin{aligned}&-\epsilon^a P_a+\frac{1}{2}\left(\epsilon^a x^b-\epsilon^b x^a\right)Z_{ab}-\frac{1}{2}\epsilon^{ab}Z_{ab}+\delta x^a P_a+\frac{1}{2}\delta\phi^{ab}Z_{ab}\\ &\quad+\frac{1}{4}(x^a\delta x^b-x^b\delta x^a)Z_{ab}=0\end{aligned}\tag{6.44}$$

o equivalentemente

$$(\epsilon^a-\delta x^a)P_a+\frac{1}{2}\left[\epsilon^a x^b-\epsilon^b x^a-\epsilon^{ab}+\delta\phi^{ab}+\frac{1}{2}\left(x^a\delta x^b-x^b\delta x^a\right)\right]Z_{ab}=0\tag{6.45}$$

esto implica

$$\delta x^a=\epsilon^a,\qquad \delta\phi^{ab}=\epsilon^{ab}-\frac{1}{2}(\epsilon^a x^b-\epsilon^b x^a),\qquad \epsilon^{ab}+\epsilon^{ba}=0.\tag{6.46}$$

Ahora debemos encontrar las transformaciones de Lorentz, asociadas al generador J_{ab} usando el formalismo de las realizaciones no-lineales para ello. En efecto, usando la propiedad (5.6) se satisface

$$e^{-\bar{x}^a P_a-\frac{1}{2}\bar{\phi}^{ab}Z_{ab}}=e^{\frac{1}{2}\lambda^{ab}J_{ab}}e^{-x^a P_a-\frac{1}{2}\phi^{ab}Z_{ab}}e^{-\frac{1}{2}\lambda^{ab}J_{ab}}.\tag{6.47}$$

Expandiendo el lado derecho, usando las reglas de conmutación (3.37), (3.38), (3.39), (3.40), (3.41) y (3.42) e igualando el lado derecho con el izquierdo, se tienen las siguientes transformaciones infinitesimales de simetría

$$\delta x^a = \lambda^a{}_b x^b, \qquad \delta\phi^{ab} = \lambda^{[a}{}_c \phi^{cb]}, \qquad \lambda^{ab} + \lambda^{ba} = 0. \tag{6.48}$$

Por otro lado el hecho de imponer que f_{ab} sea un tensor covariante de Lorentz, implica que la transformación de simetría generada por J_{ab} satisface

$$\delta f_{ab} = \lambda^c_{[a} f_{cb]}, \qquad \lambda^{ab} + \lambda^{ba} = 0. \tag{6.49}$$

Usando las ecuaciones (6.46), (6.48) y (6.49) es posible calcular las cargas de Noether

$$\begin{aligned}
-\mathcal{P} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a}\delta_P x^a + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^{ab}}\delta_P \phi^{ab} + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}_{ab}}\delta_P f_{ab} \\
&= p_a \delta_P x^a + \frac{1}{2} p_{ab}\delta_P \phi^{ab} \\
&= p_a \epsilon^a + \frac{1}{2} p_{ab}\left(-\frac{1}{2}\epsilon^a x^b + \frac{1}{2}\epsilon^b x^a\right) \\
&= p_a \epsilon^a + \frac{1}{4} p_{ab}\epsilon^c \left(-\delta^a_c x^b + \delta^b_c x^a\right) \\
&= p_a \epsilon^a + \frac{1}{4}\epsilon^c(-p_{cb}x^b - p_{ca}x^a) \\
&= \epsilon^a \left(p_a - \frac{1}{2}p_{ab}x^b\right) \qquad (6.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\mathcal{Z} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a}\delta_Z x^a + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^{ab}}\delta_Z \phi^{ab} + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}_{ab}}\delta_Z f_{ab} \\
&= \frac{1}{2} p_{ab}\epsilon^{ab} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{ab}(p_{ab}) \qquad (6.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\mathcal{J} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a}\delta_J x^a + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^{ab}}\delta_J \phi^{ab} + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}_{ab}}\delta_J f_{ab} \\
&= p_a \lambda^a{}_b x^b + \frac{1}{2} p_{ab}\lambda^{[a}{}_c \phi^{cb]} + \frac{1}{2} p^f_{ab}\lambda^{[a}{}_c f^{cb]} \\
&= \frac{1}{2} p_{[a} x_{b]}\lambda^{ab} + \frac{1}{2} p_{[ab}\lambda^{[ac}\phi_c{}^{b]} + \frac{1}{2} p^f_{[ab}\lambda^{ac} f_{c]}{}^b \\
&= \frac{1}{2}\lambda^{ab}\left(p_{[a} x_{b]} + p_{[ac}\phi^c{}_b + p^f_{[ac} f^c{}_{b]}\right) \qquad (6.52)
\end{aligned}$$

Luego teniendo en cuenta que las cargas de Noether están asociadas a cada generador por

$$\mathcal{P} = e^a \mathcal{P}_a, \quad \mathcal{Z} = \frac{1}{2}\epsilon^{ab}\mathcal{Z}_{ab}, \quad \mathcal{J}_{ab} = \frac{1}{2}\lambda^{ab}\mathcal{J}_{ab}, \qquad (6.53)$$

es posible realizar al álgebra de Maxwell por

$$\mathcal{P}_a = -\left(p_a - \frac{1}{2}p_{ab}x^b\right) \tag{6.54}$$

$$\mathcal{Z}_{ab} = -p_{ab} \tag{6.55}$$

$$\mathcal{J}_{ab} = -\left(p_{[a}x_{b]} + p_{[ac}\phi^c{}_{b]} + p^f_{[ac}f^c{}_{b]}\right). \tag{6.56}$$

Usando esta realización del álgebra y los vínculos (6.32) es posible representar a los operadores de casimir (3.43), (3.47) y (3.51) por

$$C_1 = \mathcal{P}^2 - \mathcal{J}_{ab}\mathcal{Z}^{ab} = \pi^2 = -m^2 \tag{6.57}$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\mathcal{Z}^2 = \frac{1}{2}(-p_{ab})(-p^{ab}) = \frac{1}{2}f_{ab}f^{ab} = \frac{1}{2}f^2 \tag{6.58}$$

$$C_3 = \frac{1}{2}\mathcal{Z}\tilde{\mathcal{Z}} = \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}f^{ab}f^{cd} \tag{6.59}$$

A partir de estos operadores de Casimir es posible notar que C_1 corresponde a la cáscara de masa que impone condiciones de causalidad sobre los sistemas de referencias, mientras que C_2 y C_3 corresponden a los invariantes electromagnéticos que define el tensor electromagnético f^{ab}.

6.3. Sustituyendo el espaciotiempo de Minkowski por $\mathcal{B}_4/Lorentz$

Usando las 1-formas de Maurer Cartan duales a P_a y Z_{ab} respectivamente, es posible postular el siguiente elemento de linea definido sobre $\mathcal{B}_4/\mathcal{L}$

$$ds^2 = dx^a dx_a + \frac{e}{2m}\left(d\phi^{ab} + \frac{1}{2}(x^a dx^b - x^b dx^a)\right)^2 \tag{6.60}$$

donde los indices se suben y bajan usando la métrica $\eta_{ab} = diag(-,+,+,+)$. Considerando que en cada sistema de referencia inercial ds^2 es invariante, en un sistema de referencia comovil sobre un fotón se satisface

$$-d\tau^2 = dx^a dx_a + \frac{e}{2m}\left(\dot{\phi}^{ab} + \frac{1}{2}(x^a\dot{x}^b - x^b\dot{x}^a)\right)^2 \tag{6.61}$$

o equivalentemente

$$-1 = \dot{x}^2 + \frac{e}{2m}\left(\dot{\phi}^{ab} + \frac{1}{2}(x^a\dot{x}^b - x^b\dot{x}^a)\right)^2 \tag{6.62}$$

siendo (6.62) un vínculo de la teoría. Ahora bien, considerando que el tiempo propio $d\tau = ds^2/c$ es una cantidad que no depende del sistema de referencia inercial escogido. La acción más simple que podemos postular debe ser proporcional al tiempo propio, esto es

$$S = -m\int\sqrt{-ds^2} = -m\int d\tau\left\{-\left[\dot{x}^2 + \frac{e}{2m}\left(\dot{\phi}^{ab} + \frac{1}{2}(x^a\dot{x}^b - x^b\dot{x}^a)\right)^2\right]\right\}^{1/2} \tag{6.63}$$

siendo el lagrangiano del sistema definido por

$$\mathcal{L} = -m\sqrt{-\left[\dot{x}^2 + \frac{e}{2m}\left(\dot{\phi}^{ab} + \frac{1}{2}(x^a\dot{x}^b - x^b\dot{x}^a)\right)^2\right]} \tag{6.64}$$

Calculando las ecuaciones del movimiento para una partícula libre en este espacio sobre ϕ^{cd}

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^{cd}} &= \frac{m}{2\sqrt{\%}}\left[\frac{e}{m}\left(\dot{\phi}^{ab} + \frac{1}{2}(x^a\dot{x}^b - x^b\dot{x}^a)\right)\eta_{ac}\eta_{bd}\right] \\
&= \frac{e}{2\sqrt{\%}}\left(\dot{\phi}_{cd} + \frac{1}{2}(x_c\dot{x}_d - x_d\dot{x}_c)\right) \\
&= -\frac{e}{2}\left(\dot{\phi}_{cd} + \frac{1}{2}(x_c\dot{x}_d - x_d\dot{x}_c)\right) \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^{cd}} &= 0 \\
\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^{cd}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^{cd}} &= \frac{d}{d\tau}\left[-\frac{e}{2}\left(\dot{\phi}_{cd} + \frac{1}{2}(x_c\dot{x}_d - x_d\dot{x}_c)\right)\right] = 0.
\end{aligned} \tag{6.65}$$

Definiendo el tensor f_{cd} por

$$f_{cd} = \dot{\phi}_{cd} + \frac{1}{2}(x_c \dot{x}_d - x_d \dot{x}_c) \tag{6.66}$$

se satisface

$$\dot{f}_{cd} = 0 \tag{6.67}$$

Por otra parte, definiendo $\% = .\sqrt{-\left[\dot{x}^2 + \frac{e}{2m}\left(\dot{\phi}^{ab} + \frac{1}{2}(x^a \dot{x}^b - x^b \dot{x}^a)\right)^2\right]}$ y calculando las ecuaciones del movimiento para x^a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^c} &= \frac{m}{2\sqrt{\%}}\left[2\dot{x}^c + \frac{e}{m}\left(\dot{\phi}^{ab} + \frac{1}{2}(x^a \dot{x} b - x^b \dot{x}^a)\right)\left(\frac{1}{2}(x_a \eta_{bc} - x_b \eta_{ac})\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\%}}\left[m\dot{x}_c + \frac{e}{4}\left(\dot{\phi}^{ab} + \frac{1}{2}(x^a \dot{x} b - x^b \dot{x}^a)\right)(x_a \eta_{bc} - x_b \eta_{ac})\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\%}}\left[m\dot{x}_c + \frac{e}{2}\left(\dot{\phi}_{ac} + \frac{1}{2}(x_a \dot{x}_c - x_c \dot{x}_a)\right) x^a\right] \\
&= -m\dot{x}_c - \frac{e}{2} f_{ac} x^a \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^c} &= \frac{e}{2\sqrt{\%}}\left(\dot{\phi}^{ab} + \frac{1}{2}(x^a \dot{x}^b - x^b \dot{x}^a)\right)\left(\frac{1}{2}(\eta_{ac} \dot{x}^b - \eta_{bc} \dot{x}^a)\right) \\
&= \frac{e}{\sqrt{\%}}\left[-\frac{1}{2}\left(\dot{\phi}_{ac} + \frac{1}{2}(x_a \dot{x}_c - x_c \dot{x}_a)\right)\right] \dot{x}^a \\
&= \frac{e}{2} f_{ac} \dot{x}^a \\
\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^c}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^c} &= -m\ddot{x}_c - \frac{e}{2}\dot{f}_{ac} x^a - \frac{e}{2} f_{ac} \dot{x}^a - \frac{e}{2} f_{ac} \dot{x}^a = 0
\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$m\ddot{x}_c = e f_{ca} \dot{x}^a + e \dot{f}_{ca} x^a \tag{6.68}$$

Finalmente sustituyendo (6.66) en (6.68) se satisfacen las siguientes ecuaciones del movimiento

$$\dot{f}_{cd} = 0, \qquad f_{ab} = \dot{\phi}_{ab} + \frac{1}{2}(x_a \dot{x}_b - x_b \dot{x}_a) \tag{6.69}$$

$$m\ddot{x}_a = e f_{ab} \dot{x}^b \tag{6.70}$$

Lo cual puede interpretarse tambien como una partícula libre relativista moviéndose sobre un campo electromagnético constante. La diferencia que este punto de vista entrega en comparación al descrito en la sección anterior, radica en la posibilidad de interpretar al campo $f_{\mu\nu}$ como una cantidad que llena completamente el espacio que depende únicamente de las simetrías definidas sobre este espacio, de manera tal que no es posible detectarlas de manera directa.

Capítulo 7

La Partícula Libre y el álgebra de Poincaré Generalizada $\mathcal{B}_5$

En este capítulo se tiene como objetivo, encontrar el lagrangiano de la partícula libre definida sobre un espacio coseto $\mathcal{B}_5/Lorentz$, interpretando a los términos adicionales como términos de interacción. Por otra parte analizaremos las simetrías de este espacio, estudiando la realización dinámica de los generadores del álgebra.

7.1. El álgebra de Poincaré generalizada $\mathcal{B}_5$

El álgebra de Poincaré generalizada $\mathcal{B}_5$ corresponde a un tipo de álgebra $S-$expandida utilizando como semigrupo a $S_E^{(3)}$ [5] lo que conduce a una extensión del álgebra de Maxwell incorporando un generador parametrizado por Z_a. Esta álgebra satisface las siguientes reglas de conmutación

$$
\begin{aligned}
[P_a, P_b] &= Z_{ab}, \\
[J_{ab}, P_c] &= \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b, \\
[J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{bc}Z_{ad} + \eta_{ad}Z_{bc} - \eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{bd}Z_{ac}, \\
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{bc}J_{ad} + \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac}, \\
[Z_{ab}, P_c] &= \eta_{bc}Z_a - \eta_{ac}Z_b, \\
[J_{ab}, Z_c] &= \eta_{bc}Z_a - \eta_{ac}Z_b,
\end{aligned}
$$

con todas las combinaciones restantes nulas.

7.2. El Lagrangiano invariante bajo $\mathcal{B}_5$

Consideremos ahora una deformación del lagrangiano asociado a la partícula libre relativista, introduciendo para ello dos términos de interacción. Uno de ellos corresponde al término asociado al generador Z_{ab}, cuya magnitud se especifica por un campo f_{ab}, mientras que el otro se encuentra asociado al generador Z_a y su magnitud se especifica por un camo f_a

$$
\mathcal{L} = \underbrace{\left(\pi_a \dot{x}^a - \frac{e}{2}(\pi^2 + m^2)\right)}_{Part.Lib.Rel.} + \underbrace{\frac{1}{2} f_{ab} k_\tau^{ab}}_{Inter.Z_{ab}} + \underbrace{\frac{1}{2} f_a k_\tau^a}_{Inter.Z_a},
$$

donde k_τ^{ab} y k_τ^a corresponden a las 1-formas de Maurer-Cartán asociadas a Z_{ab} y a Z_a, ámbas definidas sobre el espacio coseto $\mathcal{B}_5$. Los campos f_{ab} y f_a cuyas coordenadas se imponen covariantes de Lorentz, en conjunto con las coordenadas x^a, ϕ^{ab} y θ^a tienen la propiedad de parametrizar el espacio de fase.

Sea el espacio coseto $\mathcal{B}_5/Lorentz$, el cual caracteriza a cada elemento $g \in \mathcal{B}_5/Lorentz$

por

$$g = \exp\left(-x^a P_a - \frac{1}{2}\phi^{ab} Z_{ab} - \theta^a Z_a\right)$$

donde P_a, Z_{ab} y Z_a corresponde a los generadores asociados al álgebra $\mathcal{B}_5$. Luego calculando la $1-$forma de Maurer-Cartán, teniendo en cuenta que $\phi = x^a P_a + \frac{1}{2}\phi^{ab} + \theta^a Z_a$

$$\begin{aligned}
\Omega &= -g^{-1}dg, \\
&= -\left(\frac{1-e^{\phi}}{\phi}\right) \wedge d\phi, \\
&= -\left(\frac{1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\phi^n}{\phi}\right) \wedge d\phi, \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\phi^{n-1} \wedge d\phi, \\
&= d\phi + \frac{1}{2!}\phi \wedge d\phi + \frac{1}{3!}\phi \wedge \phi \wedge d\phi + \frac{1}{n!}\overbrace{\phi \wedge \cdots \wedge \phi}^{n\ veces} \wedge d\phi + \cdots,
\end{aligned}$$

de modo que al calcular cada término por separado

$$d\phi = dx^a P_a + \frac{1}{2}d\phi^{ab} Z_{ab} + d\theta^a Z_a$$

$$
\begin{aligned}
\phi \wedge d\phi &= \left(x^a P_a + \frac{1}{2}\phi^{ab} Z_{ab} + \theta^a Z_a \right) \wedge \left(dx^c P_c + \frac{1}{2} d\phi^{cd} Z_{cd} + d\theta^c Z_c \right) \\
&= \Bigg(x^a dx^c P_a \wedge P_c + \frac{1}{2} x^a d\phi^{cd} P_a \wedge Z_{cd} + x^a d\theta^c P_a \wedge Z_c + \frac{1}{2}\phi^{ab} dx^c Z_{ab} \wedge P_c \\
&\quad + \frac{1}{4}\phi^{ab} d\phi^{cd} Z_{ab} \wedge Z_{cd} + \frac{1}{2}\phi^{ab} d\theta^c Z_{ab} \wedge Z_c + \theta^a dx^c Z_a \wedge P_c + \frac{1}{2}\theta^a d\phi^{cd} Z_a \wedge Z_{cd} \\
&\quad + \theta^a d\theta^c Z_a \wedge Z_c) \\
&= x^a dx^c P_a \wedge P_c + \frac{1}{2}\left(\phi^{ab} dx^c - x^c d\phi^{ab} \right) Z_{ab} \wedge P_c \\
&= \frac{1}{2}\left(x^a dx^c - x^c dx^a \right) Z_{ac} + \frac{1}{2}\left(\phi^{ab} dx^c - x^c d\phi^{ab} \right)\left(\eta_{bc} Z_a - \eta_{ac} Z_b \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x^a dx^b - x^b dx^a \right) Z_{ab} + \frac{1}{2}\phi^{ab} dx^c \eta_{bc} Z_a - \frac{1}{2}\phi^{ab} dx^c \eta_{ac} Z_b - \frac{1}{2} x^c d\phi^{ab} \eta_{bc} Z_a \\
&\quad + \frac{1}{2} x^c d\phi^{ab} \eta_{ac} Z_b \\
&= \frac{1}{2}\left(x^a dx^b - x^b dx^a \right) Z_{ab} + \frac{1}{2}\phi^{ab} dx^c \eta_{bc} Z_a + \frac{1}{2}\phi^{ab} dx^c \eta_{bc} Z_a - \frac{1}{2} x^c d\phi^{ab} \eta_{bc} Z_a \\
&\quad - \frac{1}{2} x^c d\phi^{ab} \eta_{bc} Z_a \\
&= \frac{1}{2}\left(x^a dx^b - x^b dx^a \right) Z_{ab} + \left(\phi^{ab} dx^c \eta_{bc} - x^c d\phi^{ab} \eta_{bc} \right) Z_a \\
&= \frac{1}{2}\left(x^a dx^b - x^b dx^a \right) Z_{ab} + \left(\phi^{ab} dx_b - x_b d\phi^{ab} \right) Z_a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi \wedge \phi \wedge d\phi &= \left(x^a P_a + \frac{1}{2}\phi^{ab} Z_{ab} + \theta^a Z_a \right) \wedge \left(x^c P_c + \frac{1}{2}\phi^{cd} Z_{cd} + \theta^c Z_c \right) \\
&\wedge \left(dx^e P_e + \frac{1}{2} d\phi^{ef} Z_{ef} + d\theta^e Z_e \right) \\
&= x^a x^c dx^e P_a \wedge P_c \wedge P_e \\
&= x^a x^c dx^e P_a \wedge (P_c \wedge P_e) \\
&= x^a x^c dx^e (P_a \wedge Z_{ce}) \\
&= -x^a x^c dx^e (Z_{ce} \wedge P_a) \\
&= -x^a x^c dx^e \left(\eta_{ea} Z_c - \eta_{ca} P_e \right) \\
&= x^a x^c dx^e \left(\eta_{ca} P_e - \eta_{ea} Z_c \right) \\
&= \left(x_c x^c dx^a - x^c x^a dx_c \right) Z_a \\
\phi \wedge \phi \wedge \phi \wedge d\phi &= 0 \\
&\vdots \\
\frac{1}{n!} \overbrace{\phi \wedge \cdots \wedge \phi}^{n \ veces} \wedge d\phi &= 0, \quad n > 3 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

se satisface

$$
\begin{aligned}
\Omega &= dx^a P_a + \frac{1}{2} \left(d\phi^{ab} + \frac{1}{2} \left(x^a dx^b - x^b dx^a \right) \right) Z_{ab}, \\
&+ \left(d\theta^a + \frac{1}{2} \left(\phi^{ab} dx_b - x_b d\phi^{ab} \right) + \frac{1}{6} \left(x_c x^c dx^a - x^c x^a dx_c \right) \right) Z_a,
\end{aligned}
$$

o equivalentemente

$$
\Omega = e^a P_a + \frac{1}{2} k^{ab} Z_{ab} + k^a Z_a.
$$

donde

$$e^a = dx^a, \tag{7.1}$$

$$k^{ab} = d\phi^{ab} + \frac{1}{2}\left(x^a dx^b - x^b dx^a\right), \tag{7.2}$$

$$k^a = d\theta^a + \frac{1}{2}\left(\phi^{ab} dx_b - x_b d\phi^{ab}\right) + \frac{1}{6}\left(x_c x^c dx^a - x^c x^a dx_c\right), \tag{7.3}$$

Esto nos permite postular el siguiente lagrangiano.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \pi_a \dot{x}^a + \frac{1}{2} f_{ab}\left\{\dot{\phi}^{ab} + \frac{1}{2}\left(x^a \dot{x}^b - x^b \dot{x}^a\right)\right\} \\ &\quad + f_a\left\{\dot{\theta}^a + \frac{1}{2}\left(\phi^{ab}\dot{x}_b - x_b\dot{\phi}^{ab}\right) + \frac{1}{6}\left(x_c x^c \dot{x}^a - x^c x^a \dot{x}_c\right)\right\} \\ &\quad - \frac{\lambda}{2}\left(\pi^2 + m^2\right)\end{aligned}$$

introduciendo los campos π^a, f_{ab} y f_a. La cantidad λ corresponde a un multiplicador de Lagrange que vincula las cantidades π^a, dado el vínculo $\dot{x}^2 = -1$. Este lagrangiano de primer orden introduce un nuevo campo que corresponde a f_a introduciendo así un nuevo término que podría tener consecuencias cosmológicas interesantes. Construyendo la acción de Hooft-Polyakov, variando π^a se satisface

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{\dot{x}^2}{2\lambda} - \frac{\lambda}{2} m^2 + \frac{1}{2} f_{ab}\left\{\dot{\phi}^{ab} + \frac{1}{2}\left(x^a \dot{x}^b - x^b \dot{x}^a\right)\right\} \\ &\quad + f_a\left\{\dot{\theta}^a + \frac{1}{2}\left(\phi^{ab}\dot{x}_b - x_b\dot{\phi}^{ab}\right) + \frac{1}{6}\left(x_b x^b \dot{x}^a - x^b x^a \dot{x}_b\right)\right\}.\end{aligned}$$

Lagrangiano útil al considerar partículas sin masa. Por último a partir de $\delta\lambda$ se puede postular la acción de Nambu-Goto de la partícula libre por

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -m\sqrt{-\dot{x}^2} + \frac{1}{2} f_{ab}\left\{\dot{\phi}^{ab} + \frac{1}{2}\left(x^a \dot{x}^b - x^b \dot{x}^a\right)\right\} \\ &\quad + f_a\left\{\dot{\theta}^a + \frac{1}{2}\left(\phi^{ab}\dot{x}_b - \dot{\phi}^{ab} x_b\right) + \frac{1}{6}\left(x_c \dot{x}^a x^c - x^c \dot{x}_c x^a\right)\right\}.\end{aligned} \tag{7.4}$$

A partir de aquí es posible calcular las ecuaciones del movimiento para una partícula masiva al considerar $\delta\mathcal{L} = 0$ y $x^a\dot{x}_a = 0$

$$\begin{aligned}
\delta f_a &: \quad \dot{\theta}^a = -\frac{1}{2}\left(\phi^{ab}\dot{x}_b - x_b\dot{\phi}^{ab}\right) - \frac{1}{6}\dot{x}^a x^c x_c && (7.5)\\
\delta f_{ab} &: \quad \dot{\phi}^{ab} = -\frac{1}{2}\left(x^a\dot{x}^b - x^b\dot{x}^a\right) && (7.6)\\
\delta\phi^{ab} &: \quad \dot{f}_{ab} = \frac{1}{2}\left(f_a\dot{x}_b - f_b\dot{x}_a\right) && (7.7)\\
\delta\theta^a &: \quad \dot{f}_a = 0 && (7.8)\\
\delta x^a &: \quad m\ddot{x}_c = f_{cb}\dot{x}^b + \frac{1}{4}f_a x^a\dot{x}_c = f_{cb}\dot{x}^b - \frac{1}{2}\dot{f}_{cb}x^b && (7.9)
\end{aligned}$$

7.3. Simetrías y Cargas de Noether

7.3.1. Simetrías

A partir de las realizaciones no lineales de $\mathcal{B}_5$, teniendo en cuenta al grupo de Lorentz como subgrupo de estabilidad, es posible determinar las simetrías asociadas a los generadores P_a, Z_{ab} y Z_a, de modo análogo a (6.42). Así, a partir de $\phi = x^aP_a + \frac{1}{2}\phi^{ab}Z_{ab} + \theta^aZ_a$

$$e^{\phi}\wedge\left(-\epsilon^aP_a - \frac{1}{2}\epsilon^{ab}Z_{ab} - \rho^aZ_a\right) - \left(\frac{1-e^{\phi}}{\phi}\right)\wedge\delta\left(x^aP_a + \frac{1}{2}\phi^{ab}Z_{ab} + \theta^aZ_a\right) = 0. \tag{7.10}$$

donde al calcular el primer término del lado izquierdo de (7.10)

$$\begin{aligned}
&e^{\phi}\wedge\left(-\epsilon^aP_a - \frac{1}{2}\epsilon^{ab}Z_{ab} - \rho^aZ_a\right)\\
=\ &\left(1 + \left(x^aP_a + \frac{1}{2}\phi^{ab}Z_{ab} + \theta^aZ_a\right) + \frac{1}{2}\left(x^aP_a + \frac{1}{2}\phi^{ab}Z_{ab} + \theta^aZ_a\right)^2 + \cdots\right)\\
&\wedge\left(-\epsilon^aP_a - \frac{1}{2}\epsilon^{ab}Z_{ab} - \rho^aZ_a\right)\\
=\ &\left(-\epsilon^aP_a - \frac{1}{2}\epsilon^{ab}Z_{ab} - \rho^aZ_a\right) + \left(x^aP_a + \frac{1}{2}\phi^{ab}Z_{ab} + \theta^aZ_a\right)\wedge\left(-\epsilon^aP_a - \frac{1}{2}\epsilon^{ab}Z_{ab} - \rho^aZ_a\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(x^aP_a + \frac{1}{2}\phi^{ab}Z_{ab} + \theta^aZ_a\right)^2\wedge\left(-\epsilon^aP_a - \frac{1}{2}\epsilon^{ab}Z_{ab} - \rho^aZ_a\right).
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Luego, calculando cada miembro por separado de (7.11)

$$\begin{aligned}
& \left(x^a P_a + \frac{1}{2}\phi^{ab} Z_{ab} + \theta^a Z_a\right) \wedge \left(-\epsilon^a P_a - \frac{1}{2}\epsilon^{ab} Z_{ab} - \rho^a Z_a\right), \\
= \;& \frac{1}{2}\left(\epsilon^a x^b - \epsilon^b x^a\right) Z_{ab} + \left(\epsilon^{ab} x_b - \phi^{ab}\epsilon_b\right) Z_a, \qquad (7.12) \\
& \left(x^a P_a + \frac{1}{2}\phi^{ab} Z_{ab} + \theta^a Z_a\right)^2 \wedge \left(-\epsilon^a P_a - \frac{1}{2}\epsilon^{ab} Z_{ab} - \rho^a Z_a\right), \\
= \;& -\left(x^c \epsilon^a x_c - x^c \epsilon_c x^a\right) Z_a + \left(\phi^a{}_c \epsilon^{cd} x_d - \phi^a{}_c \phi^{cd}\epsilon_d\right) Z_a, \qquad (7.13)
\end{aligned}$$

y sustituyendo (7.12), (7.13) en (7.11)

$$\begin{aligned}
& e^{\phi} \wedge \left(-\epsilon^a P_a - \frac{1}{2}\epsilon^{ab} Z_{ab} - \rho^a Z_a\right), \\
= \;& -\epsilon^a P_a - \frac{1}{2}\epsilon^{ab} Z_{ab} - \rho^a Z_a + \frac{1}{2}\left(\epsilon^a x^b - \epsilon^b x^a\right) Z_{ab} + \left(\epsilon^{ab} x_b - \phi^{ab}\epsilon_b\right) Z_a, \\
& -\frac{1}{2}\left(x^c \epsilon^a x_c - x^c \epsilon_c x^a\right) Z_a + \left(\phi^a{}_c \epsilon^{cd} x_d - \phi^a{}_c \phi^{cd}\epsilon_d\right) Z_a.
\end{aligned}$$

Calculando el segundo término del lado izquierdo de (7.10)

$$-\left(\frac{1-e^{\phi}}{\phi}\right) \wedge \delta\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\phi^{n-1} \wedge \delta\phi \qquad (7.14)$$

donde los conmutadores no nulos, satisfacen

$$\begin{aligned}
\delta\phi &= \delta x^c P_c + \frac{1}{2}\delta\phi^{cd} Z_{cd} + \delta\theta^c Z_c \qquad (7.15) \\
\phi \wedge \delta\phi &= \left(x^a P_a + \frac{1}{2}\phi^{ab} Z_{ab} + \theta^a Z_a\right) \wedge \left(\delta x^c P_c + \frac{1}{2}\delta\phi^{cd} Z_{cd} + \delta\theta^c Z_d\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x^a \delta x^b - x^b \delta x^a\right) Z_{ab} + \left(\phi^{ac}\delta x_c - \delta\phi^a x_b\right) Z_a \qquad (7.16) \\
\phi \wedge \phi \wedge \delta\phi &= \left(x^c \delta x^a x_c - x^c x^a \delta x_c\right) Z_a \qquad (7.17)
\end{aligned}$$

siendo posible sustuir (7.15), (7.16), y (7.17) en (7.14), obteniendo

$$
\begin{aligned}
-\left(\frac{1-e^{-\phi}}{\phi}\right)\wedge\delta\phi &= \delta x^a P_a + \frac{1}{2}\delta\phi^{ab}Z_{ab} + \delta\theta^a Z_a + \frac{1}{4}\left(x^a\delta x^b - x^b\delta x^a\right)Z_{ab} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\phi^{ab}\delta x_b - x_b\delta\phi^{ab}\right)Z_a + \frac{1}{3!}\left(x^b\delta x^a - x^a\delta x^b\right)x_b Z_a.
\end{aligned}
$$

y por lo tanto la expresión completa satisface

$$
\begin{aligned}
& -\epsilon^a P_a - \frac{1}{2}\epsilon^{ab}Z_{ab} - \rho^a Z_a + \frac{1}{2}\left(\epsilon^a x^b - \epsilon^b x^a\right)Z_{ab} + \left(\epsilon^{ab}x_b - \phi^{ab}\epsilon_b\right)Z_a \\
& -\frac{1}{2}\left(x^c\epsilon^a x_c - x^c\epsilon_c x^a\right)Z_a + \frac{1}{2}\left(\phi^a{}_c\epsilon^{cd}x_d - \phi^a{}_c\phi^{cd}\epsilon_d\right)Z_a \\
& +\delta x^a P_a + \frac{1}{2}\delta\phi^{ab}Z_{ab} + \delta\theta^a Z_a + \frac{1}{4}\left(x^a\delta x^b - x^b\delta x^a\right)Z_{ab} \\
& +\frac{1}{2}\left(\phi^{ab}\delta x_b - \delta\phi^{ab}x_b\right)Z_a + \frac{1}{6}\left(x^c\delta x^a x_c - x^c\delta x_c x^a\right)Z_a \\
= {} & 0,
\end{aligned}
$$

permitiendo definir las siguientes traslaciones asociadas a los generadores P_a, Z_{ab} y Z_a en el espacio $\mathcal{B}_5/Lorentz$:

$$
\begin{aligned}
\delta x^a &= \epsilon^a, \\
\delta\phi^{ab} &= \epsilon^{ab} - \frac{1}{2}\left(\epsilon^a x^b - \epsilon^b x^a\right), \qquad \epsilon^{ab}+\epsilon^{ba}=0, \\
\delta\theta^a &= \rho^a + \frac{1}{2}\left(\phi^{ab}\epsilon_b - \epsilon^{ab}x_b\right) - \frac{1}{2}\phi^a{}_c\left(\epsilon^{cd}x_d - \phi^{cd}\epsilon_d\right) + \frac{1}{12}x_c\left(\epsilon^a x^c - \epsilon^c x^a\right).
\end{aligned}
$$

Ahora bien, puesto que el grupo de Lorentz es el subgrupo de estabilidad asociado a la realización no lineal del grupo $\mathcal{B}_5$, es directo verificar que transforma linealmente bajo éste. Así

$$
\delta x^a = \lambda^a{}_b x^b, \qquad \delta\phi^{ab} = \lambda^{[a}{}_c\phi^{cb]}, \qquad \delta\theta^a = \lambda^a{}_b\theta^b, \qquad \lambda_{ab}+\lambda_{ba}=0.
$$

Por último, debido a que las campos f_a y f_{ab} se postularon covariantes bajo el grupo de Lorentz

$$
\delta f_{ab} = \lambda_{[a}{}^c f_{cb]}, \qquad \delta f_a = \lambda_a{}^b f_b.
$$

7.3.2. Cargas de Noether y la Realización del Álgebra

Calculando ahora las cargas conservadas

$$\begin{aligned}
-\mathcal{P} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\delta_{\epsilon^a}x^a + \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^{ab}}\delta_{\epsilon^a}\phi^{ab} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^a}\delta_{\epsilon^a}\theta^a \\
&= p_a\epsilon^a + \frac{1}{2}p_{ab}\left(-\frac{1}{2}\left(\epsilon^a x^b - \epsilon^b x^a\right)\right) + f_a\left(\frac{1}{2}\phi^{ab}\epsilon_b + \frac{1}{2}\phi^a{}_c\phi^c{}_a\epsilon^a + \frac{1}{12}x_c\epsilon^a x^c - \frac{1}{12}x_c\epsilon^c x^a\right) \\
&= \epsilon^a\left(p_a - \frac{1}{2}p_{ab}x^b + \frac{1}{2}\left[f_b\phi^b{}_a + f_b\phi^b{}_c\phi^c{}_a + \frac{1}{6}\left(f_a x^2 - f_c x_a x_c\right)\right]\right) \\
-\mathcal{Z} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\delta_{\epsilon^{ab}}x^a + \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^{ab}}\delta_{\epsilon^{ab}}\phi^{ab} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^a}\delta_{\epsilon^{ab}}\theta^a \\
&\quad \frac{1}{2}\epsilon^{ab}\left[p_{ab} - f_a x^b - f_c\phi^c{}_a x_b\right] \\
-\mathcal{J} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\delta_{\lambda^{ab}}x^a + \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^{ab}}\delta_{\lambda^{ab}}\phi^{ab} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^a}\delta_{\lambda^{ab}}\theta^a \\
&= \frac{1}{2}\lambda^{ab}\left(p_{[a}x_{b]} + p_{[ac}\phi^c{}_{b]} + f_{[a}\theta_{b]}\right) \\
-\bar{\mathcal{Z}} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\delta_{\rho^a}x^a + \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^{ab}}\delta_{\rho^a}\phi^{ab} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^a}\delta_{\rho^a}\theta^a \\
&= f_a\rho^a
\end{aligned}$$

es posible verificar que se satisfacen las corrientes de Noether

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_a &= -\left\{p_a - \frac{1}{2}p_{ab}x^b + \frac{1}{2}\left[f_b\phi^b{}_a + f_b\phi^b{}_c\phi^c{}_a + \frac{1}{6}\left(f_a x^2 - f_c x_a x_c\right)\right]\right\} \\
\mathcal{J}_{ab} &= -\left\{f_{[a}\theta_{b]} + p_{[a}x_{b]} + p_{[ac}\phi^c{}_{b]}\right\} \\
Z_{ab} &= -\left\{p_{ab} - f_a x^b - f_c\phi^c{}_a x_b\right\} \\
Z_a &= -f_a
\end{aligned}$$

Realizando así el álgebra $\mathcal{B}_5$

Parte II

El origen de las constantes de acoplamiento entre el álgebra de Maxwell y $AdSL_4$

Capítulo 8

Fundamentos de la Relatividad General

En este capítulo detallaremos los aspectos escenciales de la Teoría General de la Relatividad, recalcando tanto en su formulación de Palatini como de Cartán. Así, el objetivo de este capítulo consiste en sentar los fundamentos necesarios para construir acciones invariantes bajo Poincaré, Maxwell y $AdSL_4$, incorporando los parámetros de cada álgebra y la constante fundamental G, que servirán como referentes para los capítulos posteriores. Paralelamente, considerando que que la álgebra de Maxwell constituye una extensión central del álgebra de Poincaré, del mismo modo que el álgebra $AdSL_4$ lo es de AdS y el álgebra de Poincare constituye una contracción tipo Inönü-Wigner/S-expansión del álgebra AdS, como Maxwell lo es del álgebra $AdSL_4$; es de esperarse que las diferentes acciones gravitacionales invariantes que se construyan, se puedan obtener a partir de un límite apropiado, permitiendo adicionalmente su estudio desde un enfoque *no relativista*.

8.1. Relatividad General: Fundamentos

La **Relatividad General** es una teoría que explica el origen de la interacción gravitacional y su fenomenología en términos de la *geometría* asociada a una entidad dinámica conocida como el *espaciotiempo.* La idea de un *espaciotiempo* se fundamenta a través de un principio físico clave: **El principio de equivalencia**. Este principio afirma que *sobre cada punto del espaciotiempo es posible fijar un sistema de referencia local lorentziano, en el cual los postulados de la Relatividad Especial son válidos.* De esta forma, representando a cada sistema de referencia local por una carta coordenada (x^a, U_a) donde x^a son las coordenadas definidas en U_a, el espaciotiempo constituye una **Variedad Diferenciable**. Así, para cada punto del espaciotiempo existe un abierto U_a y un homeomorfismo x^a diferenciable que mapea a cada punto $p \in U_a$ al **Espacio-tiempo de Minkowski**. Despues de introducir estos conceptos, la concepción del espaciotiempo es clara; por muy intrincado que sea el espaciotiempo, siempre será posible identificar una carta coordenada a cada punto de la variedad y mapearla al espacio-tiempo de Minkowski.

Por otra parte, la geometría del espaciotiempo se define en términos de las transformaciones *entre* abiertos, o transformaciones entre coordenadas. El postulado que gobierna la *geometría* es el principio de covariancia de la física: *Todas las cantidades definidas en términos del espaciotiempo deben ser covariantes o transformar de acuerdo al grupo de las transformaciones generales de coordenadas.* Así es posible definir un tensor T de rango $\binom{n}{p}$ en una base $\{\partial_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\mu_n} \otimes dx^{\nu_1} \cdots dx^{\nu_p}\}$ como un objeto matemático, cuyas componentes transforman de acuerdo a

$$\bar{T}^{\mu_1 \cdots \mu_n}{}_{\nu_1 \cdots \nu_p}(p) = \frac{\partial \bar{x}^{\mu_1}}{\partial x^{\lambda_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{\mu_n}}{\partial x^{\lambda_n}} \frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial \bar{x}^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\rho_p}}{\partial \bar{x}^{\nu_p}} T^{\lambda_1 \cdots \lambda_n}{}_{\rho_1 \cdots \rho_p}(p),$$

siendo $\{\partial_\mu\}$ la base del espacio tangente y $\{\partial^\nu\}$ la base del espacio cotangente, ámbas definidas sobre un punto del espaciotiempo.
En la geometría de Riemman, las propiedades métricas quedan completamente determinadas por un tensor $g_{\mu\nu}$ de rango $\binom{0}{2}$ llamado tensor métrico y definido por

$$g_{\mu\nu}(p) = \partial_\mu(p) \cdot \partial_\nu(p).$$

Este tensor constituye el campo dinámico que la Teoría General de la Relatividad postula, de modo que la dinámica del espaciotiempo Nótese que $g_{\mu\nu}$ es simétrico en sus índices inferiores, de modo que de las 16 grados de libertad originales solo sobreviven 10, de los cuales, en un sistema de referencia local Lorenziano, 4 se asocian a *Traslaciones* (e^a) y 6 se asocian a *Transformaciones de Lorentz* (ω^{ab}).

8.2. Relatividad General: Formulación de Palatini

Consideremos un vector contravariante V^μ definido en un punto Q con coordenadas $x + \delta x$, cerca de un punto P con coordenadas x. Así, con el fin de comparar V^μ definido en P con el definido en Q, resulta necesario definir una operación tal que al actuar sobre el vector V^μ, lo transporte de Q a P conservando su orientación, puesto que tanto $V^\mu(x+\delta x)$ como $V^\mu(x)$ pertenecen a espacios tangentes distintos. Un anzsat apropiado sería una perturbación lineal definida por

$$\begin{aligned} V^\mu_{||}(x+\delta x, x) &= V^\mu(x+\delta x) + \Gamma^\mu{}_{v\lambda}(x+\delta x)V^\lambda(x+\delta x)\delta x^\nu \\ &\approx \text{[1]}V(x+\delta x) + \Gamma^\mu{}_{v\lambda}(x)V^\lambda(x)\delta x^\nu \end{aligned}$$

de modo que al compararlos

$$\begin{aligned} V^\mu_{||}(x+\delta x, x) - V^\mu(x) &= V^\mu(x+\delta x) + \Gamma^\mu{}_{v\lambda}(x)V^\lambda(x)\delta x^\nu - V^\mu(x) \\ &= [\partial_\nu V^\mu(x) + \Gamma^\mu{}_{v\lambda}(x)V^\lambda(x)]\delta x^\nu \\ &\equiv \nabla_\nu V^\mu \delta x^\nu \end{aligned}$$

definiendo así la **Derivada Covariante** de un vector contravariante V^μ por

$$\nabla_\nu V^\mu(x) = \partial_\nu V^\mu(x) + \Gamma^\mu_{v\lambda}(x)V^\lambda(x).$$

Lo que permite definir a $\nabla_\nu V^\mu$ como un tensor de rango $\binom{1}{1}$, modificando las propiedades de transformación de $\Gamma^\mu_{v\lambda}(x)$. De esta forma, es posible denotar a este objeto matemático por *conexión afín,* el cual debe transformar de acuerdo a la siguiente ley

$$\bar{\Gamma}^\mu_{v\lambda}(x) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\lambda}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\lambda}\frac{\partial^2 \bar{x}^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}.$$

Nótemos que esta propiedad no depende de la métrica, de modo que existen dos cantidades que en un principio pueden ser independientes: la métrica y la conexión (formalismo de primer orden); sin embargo el hecho de postular a $g_{\mu\nu}$ como el único campo dinámico de la teoría, significa que las cantidades $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ deben depender únicamente del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ o sus derivadas (formalismo de segundo orden). Esto implica que la conexión afín debe ser simétrica en sus dos índices covariantes

$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} = \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}$, de modo que el tensor de **torsión** definido por

$$T^{\mu}{}_{\nu\lambda} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu} \equiv 0 \tag{8.1}$$

se anula en todo punto. Así, los grados de libertad existentes $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}$ se pueden escribir en términos de la métrica $g_{\mu\nu}$ (ó ω^{ab} en términos de e^{a}). Bajo estas consideraciones la conexión afín adopta la siguiente forma funcional

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma}(\partial_{\nu} g_{\lambda\sigma} + \partial_{\lambda} g_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{v\lambda})$$

cuyas componentes corresponden a los símbolos de Christoffel de segunda clase. Consideremos ahora cuatro puntos P, Q, R y S con coordenadas x^{μ}, $x^{\mu} + dx^{\mu}_{1}$, $x^{\mu} + dx^{\mu}_{1} + dx^{\mu}_{2}$ y $x^{\mu} + dx^{\mu}_{2}$ respectivamente. Sea V^{μ} un vector contravariante, el cual transportaremos a lo largo de PQR y PSR comparando sus valores, así sobre PQR

$$\begin{aligned}
V^{\mu}_{PQR}(R) &= V^{\mu}(Q) + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}(Q) V^{\lambda}(Q) dx^{\nu}_{2} \\
&= V^{\mu}(P) + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}(P) V^{\lambda}(P) dx^{\nu}_{1} \\
&\quad + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}(Q) \left(V^{\lambda}(P) + \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}(P) V^{\alpha}(P) dx^{\beta}_{1} \right) dx^{\nu}_{2} \\
&= V^{\mu}(P) + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}(P) V^{\nu}(P) dx^{\lambda}_{1} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}(Q) V^{\lambda}(P) dx^{\nu}_{2} \\
&\quad + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}(Q) \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}(P) V^{\alpha}(P) dx^{\beta}_{1} dx^{\nu}_{2}
\end{aligned}$$

donde al considerar que

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}(Q) = \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}(x^{\mu} + dx^{\mu}_{1}) = \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}(x) + \partial_{\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}(x) dx^{\alpha}_{1} = \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}(P) + \partial_{\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}(P) dx^{\alpha}_{1}$$

y sustituyendo en

$$\begin{aligned}
V^\mu(R) &= V^\mu(P) + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(P)V^\lambda(P)dx_1^\nu + (\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(P) + \partial_\alpha\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(P)dx_1^\alpha)\, V^\lambda(P)dx_2^\nu \\
&\quad + (\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(P) + \partial_\alpha\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(P)dx_1^\alpha)\, \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}(P)V^\alpha(P)dx_1^\beta dx_2^\nu \\
&= V^\mu(P) + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(P)V^\lambda(P)dx_1^\nu + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(P)V^\lambda(P)dx_2^\nu \\
&\quad + \partial_\alpha\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(P)V^\lambda(P)dx_1^\alpha dx_2^\nu + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(P)\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}(P)V^\alpha(P)dx_1^\beta dx_2^\nu \\
&= V^\mu + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}V^\lambda dx_1^\nu + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}V^\lambda dx_2^\nu \\
&\quad + \left(\partial_\beta\Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}\right) V^\alpha dx_1^\beta dx_2^\nu
\end{aligned}$$

Del mismo modo, sobre PSR

$$\begin{aligned}
V^\mu_{PSR}(R) &= V^\mu(P) + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(P)V^\lambda(P)dx_2^\nu + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(P)V^\lambda(P)dx_1^\nu \\
&\quad + \partial_\alpha\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(P)V^\lambda(P)dx_2^\alpha dx_1^\nu + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(P)\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}(P)V^\alpha(P)dx_2^\beta dx_1^\nu \\
&= V^\mu + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}V^\lambda dx_2^\nu + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}V^\lambda dx_1^\nu \\
&\quad + \left(\partial_\nu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}\right) V^\alpha dx_2^\nu dx_1^\beta
\end{aligned}$$

Así al calcular la diferencia entre ámbas

$$\begin{aligned}
V^\mu_{PQR} - V^\mu_{PSR} &= \left(\partial_\beta\Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} - \partial_\nu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}\right) V^\alpha dx_2^\nu dx_1^\beta \\
&= \left(\partial_\beta\Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} - \partial_\nu\Gamma^\mu{}_{\beta\alpha} + \Gamma^\lambda{}_{\beta\alpha}\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}\Gamma^\mu{}_{\beta\lambda}\right) V^\alpha dx_2^\nu dx_1^\beta \\
&= R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}V^\alpha dx_2^\nu dx_1^\beta
\end{aligned}$$

se puede observar que V^μ donde $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ es el tensor de Riemman de primera clase definido por

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\beta\Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} - \partial_\nu\Gamma^\mu{}_{\beta\alpha} + \Gamma^\lambda{}_{\beta\alpha}\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}\Gamma^\mu{}_{\beta\lambda} \tag{8.2}$$

Esto implica que el transporte paralelo es una cantidad que depende exclusivamente de la curva escogida, es por ello que al considerar el conmutador entre las derivadas covariantes (el cual es no nulo) es posible construir tensores más generales, en efecto

$$
\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\lambda &= \nabla_\mu\nabla_\nu V^\lambda - \nabla_\nu\nabla_\mu V^\lambda \\
&= \nabla_\mu \left(\partial_\nu V^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho}V^\rho\right) - \nabla_\mu \left(\partial_\nu V^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho}V^\rho\right) \\
&= \partial_{[\mu}\partial_{\nu]}V^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{[\nu\rho}\left(\partial_{\mu]}V^\rho\right) + \Gamma^\lambda{}_{[\mu\gamma}\left(\partial_{\nu]}V^\gamma\right) - \Gamma^\gamma{}_{[\mu\nu]}\left(\partial_\gamma V^\lambda\right) \\
&\quad + \left(\partial_{[\mu}\Gamma^\lambda{}_{\nu]\rho} + \Gamma^\lambda{}_{[\mu\gamma}\Gamma^\gamma{}_{\nu]\rho} - \Gamma^\gamma{}_{[\mu\nu]}\Gamma^\lambda{}_{\gamma\rho}\right)V^\rho \\
&= \left(\partial_{[\mu}\Gamma^\lambda{}_{\nu]\rho} + \Gamma^\lambda{}_{[\mu\gamma}\Gamma^\gamma{}_{\nu]\rho}\right)V^\rho - \Gamma^\gamma{}_{[\mu\nu]}\left(\partial_\gamma V^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\gamma\rho}V^\rho\right) \\
&= R^\lambda{}_{\nu\mu\rho}V^\rho - T^\gamma{}_{\mu\nu}\nabla_\gamma V^\rho
\end{aligned}
$$

donde $R^\lambda{}_{\nu\mu\rho}$ es el tensor de Riemman de primera clase (8.2) y $T^\gamma{}_{\mu\nu}$ es el tensor de torsión (8.1). Una vez definidos los tensores $R^\lambda{}_{\nu\mu\rho}$ y $T^\gamma{}_{\mu\nu}$ asociados a los grados de libertad $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ y $g_{\mu\nu}$ respectivamente (los cuales son linealmente dependientes entre si), resulta importante preguntarse si estos tensores entregan nueva información al operar la derivada covariante sobre ellos, nótese que al imponer el vínculo $T^\gamma{}_{\mu\nu} = 0$ no se tiene nueva información al operar la derivada covariante sobre $T^\gamma{}_{\mu\nu}$, por lo tanto operando la derivada covariante sobre $R^\lambda{}_{\nu\mu\rho}$ se satisface

$$
\nabla_{[\gamma}R^\lambda{}_{\nu\mu\rho]} = 0 \tag{8.3}
$$

identidad conocida como la **Identidad de Bianchi.** Finalmente, al considerar que los únicos tensores (no nulos) de la teoría son $g_{\mu\nu}$ y $R^\lambda{}_{\nu\mu\rho}$ es posible construir contracciones del tensor $R^\lambda{}_{\nu\mu\rho}$ como el tensor $R^\lambda{}_{\nu\lambda\rho} = R_{\nu\rho}$ conocido como **Tensor de Ricci** y por consiguiente el escalar $R = g^{\nu\rho}R_{\nu\rho}$ conocido como **Escalar de Ricci** ó **Escalar de Curvatura,** postulando así la acción de Einstein-Hilbert por

$$
S_{E-H} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\,\sqrt{-g}R \tag{8.4}
$$

donde g es el determinante de la métrica y la constante $1/16\pi G$ se ajusta a partir del límite nor relativista.

8.3. Relatividad General: Formulación de Cartán:

Aunque el formalismo de Palatini fue aquel con el que originalmente se concibió la Relatividad General, existe un formalismo alternativo descubierto por Èlite Cartan que promueve la noción de *localidad e independencia* entre la estructura métrica y afín del espaciotiempo, manteniendo la noción de una cantidad invariante bajo transformaciones locales de Lorentz. La estructura métrica del espaciotiempo se define, en términos de cualquier sistema coordenado, por la métrica $g_{\mu\nu}$. En particular, considerando que para cada punto P siempre puede escogerse un conjunto de vectores base $\{e_a\}$ que sean ortogonales entre si (a diferencia de ∂_μ) , se satisface

$$e_a \cdot e_b = e_a{}^{\mu} e_b{}^{\nu} g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \tag{8.5}$$

donde $\eta_{ab} = diag(-1, +1, +1, +1)$ es la métrica de Minkwoski. Las cantidades $\{e_a{}^{\mu}\}$ corresponden a las componentes de la matriz cambio de base de $\{\partial_\mu\}$ a $\{e_a\}$ de modo que $e_a = e_a{}^{\mu}\partial_\mu$. Luego como un cambio de coordenadas debe ser una aplicación biyectiva, la inversa de la matriz cambio de base debe ser invertible. Así, las componentes $e^a{}_{\mu}$ definidas sobre $\{dx^\mu\}$ tal que $e^a = e^a{}_{\mu} dx^\mu$ deben satisfacer

$$e^a{}_{\mu} e^{\mu}{}_{b} = \delta^a_b, \qquad e^a{}_{\nu} e^{\mu}{}_{a} = \delta^\mu_\nu$$

siendo posible expresar la $g_{\mu\nu}$en términos de las componentes $e^a{}_\mu$ por

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_{\mu} e^b{}_{\nu} \eta_{ab}. \tag{8.6}$$

Bajo estas consideraciones, se define el **vielbein** e^a asociado a la métrica $g_{\mu\nu}$ por $e^a = e^a{}_{\mu} dx^\mu$ cuyas componentes $e^a{}_{\mu}$ y las componentes inversas $e_a{}^{\mu}$ satisfacen las ecuaciones (8.6) y (8.5) respectivamente. Una propiedad importante del vielbein, que se deduce de la definición, es la no-unicidad que existe en su elección, puesto que si se hace una elección $\bar{e}^a$ tal que

$$\bar{e}^a = \Lambda^a{}_{b} e^b \tag{8.7}$$

al sustituir en (8.7) se satisface

$$\Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d \eta_{ab} = \eta_{cd}$$

existendo infinitas elecciones para una métrica $g_{\mu\nu}$. Adicionalmente se observa, de (8.7), que e^a transforma como un vector de Lorentz y como una 1-forma bajo transformaciones generales de coordenadas.

Por otra parte, la estructura afín del espaciotiempo nace de la construcción de un operador diferencial $D = dx^\mu D_\mu$ que permita construir tensores locales de Lorentz en su operación sobre tensores locales de Lorentz. Cláramente $d = dx^\mu \partial_\mu$ no es un operador diferencial apropiado puesto que al actuar sobre (8.7)

$$d\bar{e}^a = \Lambda^a{}_b de^b + d\Lambda^a{}_b e^b$$

el cual no transforma como un 1-vector de Lorentz, debido al término inhomogeneo $-\omega^a{}_b e^b = d\Lambda^a{}_b e^b$. De aquí es posible corregir el operador d de modo que la condición pedida sea satisfecha, definiendo para ello el operador

$$De^a = de^a + \omega^a{}_b e^b,$$

siendo ω^{ab} una 2-forma bajo transformaciones generales de coordenadas, que deberá corregir la inhomogeneidad del operador d. Luego, al imponer

$$D\bar{e}^a = \Lambda^a{}_b De^b,$$

ω^{ab} deberá transformar de acuerdo a la siguiente ley

$$\bar{\omega}^a{}_b = \Lambda^a{}_c \Lambda_b{}^d \omega^c{}_d - \Lambda_b{}^c d\Lambda^a{}_c,$$

definiendo, bajo esta ley de transformación, a ω^{ab} como una conexión, denominada **conexión de spín** y a D como el operador **Derivada Covariante**. Finalmente imponiendo que el operador D, al actuar sobre un vector V, debe ser consistente con aquel definido en el formalismo de Palatini ∇, debe imponerse la siguiente igualdad

$$DV = \nabla V,$$

de modo que para DV se satisface

$$DV = \left(\partial_\mu V^a + \omega^a{}_{b\mu} V^b\right) dx^\mu \otimes e_a = \left(V^\nu \partial_\mu e^a{}_\nu + \partial_\mu V^\nu + \omega^a{}_{b\mu} e^b{}_\nu V^\nu\right) dx^\mu \otimes \partial_\nu,$$

mientras que para ∇V

$$\nabla V = \left(\partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} V^\lambda\right) dx^\mu \otimes \partial_\nu,$$

donde al reetiquetar los índices de manera apropiada

$$\partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} V^\lambda = V^\nu \partial_\mu e^a{}_\nu + \partial_\mu V^\nu + \omega^a{}_{b\mu} e^b{}_\nu V^\nu = V^\lambda \partial_\mu e^a{}_\lambda + \partial_\mu V^\nu + \omega^a{}_{b\mu} e^b{}_\lambda V^\lambda,$$

se verifica la siguiente condición

$$\mathcal{D}_\mu e^a{}_\lambda = \partial_\mu e^a{}_\lambda - \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} + \omega^a{}_{b\mu} e^b{}_\lambda = 0. \tag{8.8}$$

conocida como el **Postulado del Vielbein.** Ahora bien, equipados con la derivada covariante D y las 1-formas e^a y ω^{ab} resulta posible construir cantidades covariantes bajo transformaciones locales de Lorentz, aplicando de manera sucesiva D sobre e^a.

8.3.1. Torsión y Curvatura

Al operar la derivada covariante D, de manera sucesiva sobre el vielbein, se satisface

$$\begin{aligned}
De^a &= de^a + \omega^a{}_b e^b \\
D^2 e^a &= D\left(de^a\right) + D\left(\omega^a{}_b e^b\right) \\
&= d\left(de^a\right) + \omega^a{}_b \left(de^b\right) + \left(D\omega^a{}_b\right) e^b - \omega^a{}_b De^b \\
&= \left(d^2 e^a + \omega^a{}_b de^b\right) + \left(d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \omega^c{}_b - \omega^c{}_b \omega^a{}_c\right) e^b - \omega^a{}_b \left(de^b + \omega^b{}_c e^c\right) \\
&= R^a{}_b e^b
\end{aligned}$$

donde se definen las 2-formas, **Torsión** y **Curvatura** por

$$T^a = De^a \tag{8.9}$$

$$R^{ab} = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c\omega^{cb} \tag{8.10}$$

Al aplicar nuevamente la derivada covariantes sobre estas 2-formas

$$DT^a = D\left(De^a\right) = R^a{}_b e^b \tag{8.11}$$

$$DR^{ab} = 0 \tag{8.12}$$

Identidades conocidas en la literatura (véase [17]) como **Identidades de Bianchi**. De las identidades de Bianchi es claro que al operar sucesivamente la derivada covariante sobre R^{ab} y T^a se obtienen las mismas 2-formas de manera cíclica, siendo las únicas que se pueden construir mediante derivaciones sucesiva sobre el vielbein e^a. Expresando estas 2-formas en término de sus componentes

$$\begin{aligned} T^a &= \frac{1}{2}T^a{}_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu \\ R^{ab} &= \frac{1}{2}R^{ab}{}_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned}$$

se satisfacen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} T^a{}_{\mu\nu} &= \omega^a{}_{\mu\nu} - \omega^a{}_{\nu\mu} \\ R^{ab} &= \partial_\nu\omega^a{}_\mu - \partial_\mu\omega^a{}_\nu + \omega^a{}_\mu\omega^{\mu b} - \omega^a{}_\nu\omega^{\nu b} \end{aligned}$$

donde al fijar $T^a = 0$, ω^{ab} dependería de e^a y por lo tanto toda la información tanto métrica como afín dependería del tensor métrico, fijandose la conexión afín por los símbolos de Christoffel $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$.

8.3.2. Acción Invariante Bajo el Grupo de Poincaré

Ahora bien, equipados con los tensores R^a y T^a es posible postular una acción invariante localmente bajo el grupo de Lorentz, mediante los tensores invariantes de

Poincaré η_{ab} y ε_{abcd}. La equivalente a la de Einstein-Hilbert satisface

$$S = \frac{1}{64\pi G} \int \varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d$$

donde la acción S corresponde a una 4-forma. Veamos ahora las propiedades de esta acción al aplicar por un lado el operador variacional y las simetrías asociadas al grupo de Poincaré. Realizando la variación se satisface

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{64\pi G} \int \varepsilon_{abcd} \delta R^{ab} e^c e^d + \varepsilon_{abcd} R^{ab} \delta e^c e^d + \varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c \delta e^d \\ &= \frac{1}{64\pi G} \int \varepsilon_{abcd} \delta R^{ab} e^c e^d + 2\varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c \delta e^d \end{aligned} \tag{8.13}$$

donde se verifica

$$\begin{aligned} \delta R^{ab} &= \delta \left(d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \omega^{cb} \right) \\ &= \delta d\omega^{ab} + \delta \omega^a{}_c \omega^{cb} + \omega^a{}_c \delta \omega^{cb} \\ &= d\delta \omega^{ab} + \delta \omega^{ac} \omega_c{}^b + \omega^a{}_c \delta \omega^{cb} \\ &= d\delta \omega^{ab} + \omega^b{}_c \delta \omega^{ac} + \omega^a{}_c \delta \omega^{cb} \\ &= D \left(\delta \omega^{ab} \right) \end{aligned} \tag{8.14}$$

de modo que al sustituir (8.14) en (8.13)

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{64\pi G} \int \varepsilon_{abcd} D \left(\omega^{ab} \right) e^c e^d + 2\varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c \delta e^d, \\ &= \frac{1}{64\pi G} \left\{ \int d \left(\varepsilon_{abcd} \delta \omega^{ab} e^c e^d \right) + 2 \int \varepsilon_{abcd} T^c e^d \delta \omega^{ab} + \int \varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c \delta e^d \right\} \end{aligned}$$

donde el primer término corresponde a un término de borde que puede ser anulado imponiendo que $\delta\omega^{ab}$ se anule en la frontera del espacio tiempo (Condición de Dirichlet) ó que el espaciotiempo no tenga borde (Condición de Neumann), mientras que del segundo y el tercero surgen las ecuaciones de campo, al considerar δe^a y $\delta\omega^{ab}$

linealmente independientes, por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{abcd} T^a e^b &= 0 \\ \varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c &= 0 \end{aligned}$$

Nótese que la primera ecuación satisface

$$\begin{aligned} \varepsilon_{abcd} T^a e^b \delta\omega^{cd} &= -\left(T^{\mu}{}_{\mu\beta} \delta^{\beta\delta}_{\lambda\rho} - T^{\mu}{}_{\lambda\beta} \delta^{\beta\delta}_{\mu\rho} + T^{\mu}{}_{\rho\beta} \delta^{\beta\delta}_{\mu\lambda} \right) \sqrt{-g} e_c{}^{\lambda} e_d{}^{\rho} \left[\delta\omega\right]^{cd}{}_{\delta} \, d^4x \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde se verifica que $T^{\lambda}{}_{\lambda\nu} = 0$, de modo que $T^{\mu}{}_{\nu\lambda} = 0$. Esto permite expresar al vielbein e^a en términos de la conexión de spin a través de la ecuación

$$T^a = de^a + \omega^a{}_b e^b = 0.$$

Capítulo 9

La escala microscópica del espaciotiempo como el origen de la constante gravitacional

En este capítulo expondremos las ideas principales detalladas en [7] y sus observaciones con el fin de aplicar comparaciones entre el álgebra $\mathfrak{B}_4$ $AdSL_4$. La velocidad de la luz (c), la constante de planck ($\hbar$) y la constante gravitacional (G) proveen un conjunto de números con dimensiones de longitud, masa y tiempo, de modo que cada unidad de longitud, masa y tiempo puede ser expresada en término de estos números, sin embargo la constante gravitacional a diferencia de de las otras dos se encuentra atada a una teoría dinámica particular lo cual resulta insatisfactorio en muchos aspectos. La escala de longitud que G determina es la longitud de Plack, aproximadamente 10^{-33} cm, siendo esta escala en la que se vuelven importantes las correciones introducidas por la gravedad cuántica, sin embargo estas correciones son infinitas y no pueden ser removidas mediante el proceso de renormalización. Esto nos dice que la solución a este problema no se alcanzará a menos que haya un entendimiento detallado del origen de la constante gravitacional.

Con el fin de sortear esta dificultad, reemplazaremos el grupo de simetrías locales que describe el grupo de Poincaré, por las del grupo De-Sitter y consideraremos el parámetro ℓ proporcional a la longitud de Planck. Supongamos que un 4-vector se transporta alrededor de una curva cerrada con dimensiones de la longitud de Planck, luego como el parámetro $\ell \to \infty$, el conmutador asociado a las traslaciones es muy grande y por énde el 4-vector rotará significativamente alrededor de un eje perpendicular a la curva. Supongamos ahora que un 4-vector de Lorentz se transporta alrededor de una curva cerrada con dimensiones de una partícula elemental, esto es $10^{-13}cm$, de modo que el cuociente entre esta cantidad y ℓ es 10^{20}, el 4-vector debe ser transportado 10^{20} veces sobre una curva cerrada del orden de la longitud de Planck, de modo que si la dirección del 4-vector depende del camino escogido, existen 10^{20} caminos indistingibles, pero muy diferentes para que el 4-vector sea transportado, así la contribución neta es nula. En otras palabras el conmutador se abelianiza a medida que la escala se hace más grande y no lo hace mientras se hace más pequeño, lo que justifica esta elección del grupo.

9.1. Acción invariante bajo el grupo dS

Sea A una conexión definida sobre el grupo dS

$$A = \frac{1}{\ell} e^a P_a + \frac{1}{2} \omega^{ab} J_{ab}$$

donde $T_A = \{P_a,\ J_{ab}\}$ son los generadores asociados al álgebra del grupo $SO\left(D-1, D-2\right)$, siendo D la dimensión del espaciotiempo y el parámetro ℓ uno que se introduce con la idea de dejar a los campos de gauge adimensionales. Calculando su 2−forma curvatura $F = dA + A \wedge A$

$$F = -\frac{1}{\ell} T^a P_a + \frac{1}{2} \left(R^{ab} - \frac{1}{\ell^2} e^a e^b \right) J_{ab} \tag{9.1}$$

donde

$$\begin{aligned} T^a &= de^a + \omega^a{}_b e^b, \\ R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \omega^{cb}. \end{aligned}$$

Luego, si definimos $J_{a5} = P_a$

$$C^{a5} = -\frac{2}{\ell}T^a, \tag{9.2}$$

$$C^{ab} = R^{ab} - \frac{1}{\ell^2}e^a e^b, \tag{9.3}$$

es posible definir la 2−forma curvatura por

$$F = \frac{1}{2}C^{a5}J_{a5} + \frac{1}{2}C^{ab}J_a b = \frac{1}{2}C^{IJ}J_{IJ} \tag{9.4}$$

Así es posible postular la acción tipo Yang-Mills

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4}\int d^4x|e|\,\eta^{AC}\eta^{BD}g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}\,C_{AB\mu\nu}C_{CD\lambda\rho} \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\left\{-\frac{6}{\ell^4} + \frac{1}{\ell^2}R + \frac{1}{\ell^2}S_{\mu\nu a}S^{\mu\nu a} - \frac{1}{4}R_{\mu\nu ab}R_{\mu\nu ab}\right\} \end{aligned} \tag{9.5}$$

con $-\sqrt{-g} = det(e) = |e|$ y $\eta_{AB} = diag(+,-,-,-,+)$. Es directo verificar que al imponer que e^a sea el vielbein asociado al grupo de Poincaré al tomar un límite apropiado, cada término por separado construye una acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica negativa más dos invariante topológicos, sin embargo, al comparar con (8.4), dicha elección solo se cumple para

$$\ell^2 = 16\pi G. \tag{9.6}$$

El resultado descrito en (9.6) constituye un link entre la constante gravitacional y el parámetro del grupo, el cual surge de las simetrías asociadas al espaciotiempo, sin necesidad de invocar a una teoría dinámica de la gravitación. Por último, el factor numérico 16π proviene de haber fijado el factor original de la acción $\frac{1}{4}$, el cuál puede ser modificado con tal de que coincida con el valor exacto.

Nótese que la acción (9.5) es invariante bajo las transformaciones de gauge definidas sobre los campos e^a y ω^{ab} asociadas al álgebra dS, lo que conlleva a suponer educadamente que bajo un cierto límite e^a debe corresponde al vielbein definido para el grupo de Poincaré. Esta dificultad puede ser eliminada, permitiendo que la acción no sea invariante bajo las respectivas transformaciones de gauge, postulando una acción mediante las componentes T_A de la 2-forma curvatura (9.4) y una elección apropiada de los tensores invariantes [19] por

$$\begin{aligned} S &= 2\int \epsilon_{abcd}\frac{1}{4}C^{ab}C^{cd} \\ &= \int -\frac{1}{2\ell^2}\epsilon_{abcd}R^{ab}e^c e^d + \epsilon_{abcd}R_{ab}R_{cd} - \frac{1}{l^4}e^a e^b e^c e^d \end{aligned} \tag{9.7}$$

se observa que igual es posible mantener la igualdad (9.6) al contraer el grupo dS al grupo de Poincaré.

Capítulo 10

Las constantes de acoplamiento entre el álgebra de Maxwell y la álgebra $AdSL_4$

De la misma manera en la que la constante gravitacional se independiza de la teoría dinámica que describe la interacción gravitacional, sustituyendo para ello el grupo de Poincaré por el grupo dS, resultaría instructivo ver que ocurriría con las constantes de acoplamiento, al comparar, cuando se fija el grupo de Maxwell como background y se sustituye por el grupo $AdSL_4$; de la misma manera en la que se argumenta en [7].

10.1. Acción Invariante Bajo El Grupo de Maxwell

Sea ahora el grupo $\mathcal{B}_4$, cuya álgebra se encuentra definida por (3.37)-(3.42). Luego definiendo una conexión A asociada a esta álgebra por

$$A = \frac{1}{\ell} e^a P_a + \frac{1}{2} \omega^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2q\ell^2} k^{ab} Z_{ab}$$

de modo que $T_A = \{P_a,\ J_{ab},\ Z_{ab}\}$ corresponden a los generadores asociados a $\mathfrak{B}_4$ y los parámetros ℓ y e, en unidades de longitud y adimensional respectivamente, se colocan con el fin de adimensionalizar los campos de gauge. Calculando la 2−forma curvatura.

$$F = \frac{1}{\ell}T^{\alpha}P_a + \frac{1}{2}R^{ab}J_{ab} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q\ell^2}B^{ab} - \frac{1}{\ell^2}e^a e^b\right)Z_{ab} \tag{10.1}$$

Ahora bien, considerando que la acción más simple que se puede construir mediante la elección de (10.1) y , $\langle J_{ab}J_{cd}\rangle = \varepsilon_{abcd}$ y $\langle Z_{ab}J_{cd}\rangle = \varepsilon_{abcd}$

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4}\int \varepsilon_{abcd}\left[\frac{1}{q\ell^2}\left(B^{ab} - qe^a e^b\right)\wedge R^{cd}\right] + \frac{1}{4}\varepsilon_{abcd}R^{ab}\wedge R^{cd} \\ &= \int -\frac{1}{4q\ell^2}\varepsilon_{abcd}B^{ab}R^{cd} + \frac{1}{4\ell^2}\varepsilon_{abcd}R^{ab}e^c e^d - \frac{1}{4}\varepsilon_{abcd}R^{ab}R^{cd}. \end{aligned} \tag{10.2}$$

con $B^{ab} = D_\omega k^{ab}$, $T^a = D_\omega e^a$ y $R^{ab} = R_{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a{}_c\omega^{cd}$. Donde se tienen dos invariantes topológicos y un término proporcional a la acción de Einstein-Cartán.

Una conclusión nueva que puede deducirse de (10.2), corresponde a que la constante gravitacional no necesariamente puede encuentrarse atada al grupo AdS, sino que a otros grupos como lo es el grupo de Maxwell, al comparar esta acción con la de Einstein-Cartán. Esto indica que la constante gravitacional se podría encontrar relacionada con los grupos S-expandidos del álgebra AdS.

10.2. Acción invariante Bajo El Grupo $AdSL_4$

Sea ahora el grupo $\mathcal{A}d\mathcal{S}\mathcal{L}_4$, cuya álgebra se encuentra definida por

$$\begin{aligned} &[P_a, P_b] = Z_{ab}, \\ &[J_{ab}, P_c] = \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b, \\ &[J_{ab}, Z_{cd}] = \eta_{bc}Z_{ad} + \eta_{ad}Z_{bc} - \eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{bd}Z_{ac}, \\ &[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{bc}J_{ad} + \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac}, \\ &[Z_{ab}, Z_{cd}] = \eta_{bc}Z_{ad} + \eta_{ad}Z_{bc} - \eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{bd}Z_{ac}, \\ &[Z_{ab}, P_c,] = \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b, . \end{aligned}$$

Luego considerando una conexión A asociada a esta álgebra, definida por

$$A = \frac{1}{\ell}e^a P_a + \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{2\beta\ell^2}k^{ab}Z_{ab}$$

de modo que $T_A = \{P_a,\ J_{ab},\ Z_{ab}\}$ corresponden a los generadores y ℓ y β son parámetros con unidades de longitud y adimensional respectivamente con el fin de adimensionalizar los campos de gauge. Calculando su $2-$forma curvatura

$$F = \frac{1}{\ell}T^a + \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\beta\ell^2}\left(B^{ab} - \frac{1}{\beta\ell^2}k^a{}_c k^{cb}\right) - \frac{1}{\ell^2}e^a e^b\right\}Z^{ab}$$

se satisface la siguiente acción (10.1), al considerar , $\langle J_{ab}J_{cd}\rangle = \varepsilon_{abcd}$ y $\langle Z_{ab}J_{cd}\rangle = \varepsilon_{abcd}$

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4}\int \varepsilon_{abcd}\left\{\frac{1}{\beta\ell^2}\left(B^{ab} - \beta e^a e^b\right) - \frac{1}{\beta^2\ell^4}k^a{}_m k^{mb}\right\} \wedge R^{cd} + \varepsilon_{abcd}R^{ab} \wedge R^{cd} \\ &= -\int \frac{1}{4\beta\ell^2}\varepsilon_{abcd}R^{ab}B^{cd} - \frac{1}{4\ell^2}\varepsilon_{abcd}R^{ab}e^c e^d - \frac{1}{4\beta^2\ell^4}\varepsilon_{abcd}R^{ab}k^c{}_m k^{md} + \frac{1}{4}\varepsilon_{abcd}R^{ab}R^{cd} \\ &= \int -\frac{1}{4\beta\ell^2}\varepsilon_{abcd}R^{ab}B^{cd} + \frac{1}{4\ell^2}\varepsilon_{abcd}R^{ab}e^c e^d + \frac{1}{4\beta^2\ell^4}\varepsilon_{abcd}R^{ab}k^c{}_m k^{md} \\ &\qquad -\frac{1}{4}\varepsilon_{abcd}R^{ab}R^{cd} \end{aligned} \tag{10.3}$$

Donde se tiene un término proporcional a la acción de Einstein-Cartán y otro proporcional a (10.2).

10.2.1. Comentarios Adicionales

A partir de este punto, existe un trabajo en desarrollo que tiene como objetivo relacionar las constantes e, ℓ, β y G con la constante β. Para ello, una posibilidad consiste en acoplar el campo de Dirac en el lagrangiano invariante bajo Maxwell y $AdSL_4$ respectivamente una comparación entre ámbos, de modo que bajo cierto límite el lagrangiano invariante de Maxwell sea análogo al lagrangiano invariante bajo $AdSL_4$.

Capítulo 11

Conclusiones y Proyecciones

En esta tesis se han tratado dos nuevos aspectos fundamentales. El primero tiene que ver con una descripción detallada de la partícula libre en el álgebra de Poincaré generalizada $\mathcal{B}_5$, lo cual constituye un resultado nuevo. La forma en la que una nueva interacción surge a partir de esta álgebra descrita por f_a, sugiere que posibles efectos como la energía oscura que se describen en término de fuerzas, sean efectos que surgen al considerar otro grupo de simetrías y no el grupo de Poincaré como background local.

El segundo aspecto que se ha tratado, tiene que ver con un trabajo futuro que busca relacionar las constantes e, β, ℓ y G asociadas al álgebra de Maxwell y $AdSL_4$. Al sugerir la inclusión del campo de Dirac en ámbas acciones, nos sería posible asignarle un significado físico a alguno de los parámetros descritos y por lo tanto relacionar estas constantes con las simetrías que construyen estas teorías gravitacionales alternativas.

A modo de extensión del resultado nuevo presentado, resultaría interesante e instructivo construir las representaciones de estos grupos con el fin de definir el estado de la 1-partícula (One-Particle State). Esto tiene consecuencias en la formulación de una teoría de campos basada en un background definido por las simetrías de los grupos $\mathfrak{B}_4$ y $\mathfrak{B}_5$.

Apéndice A

El grupo de Poincaré

El conjunto de simetrías asociadas a la relatividad especial, son caracterizadas por el grupo de Poincaré $\mathcal{P}$, las cuales se componen por una suma directa entre las transformaciones de Lorentz y las traslaciones, constituyendo dos subgrupos respectivamente. Sea $\Lambda^a{}_b$ una transformación de Lorentz y a^a una traslación tal que al realizar una composición entre una transformación de Lorentz y una traslación

$$x'^a = \Lambda x^b + a^a$$

donde al aplicarla dos veces sucesivas

$$x''^a = \Lambda_2^a{}_b \Lambda_1^b{}_c x^c + \Lambda_2^a{}_c a_1^c + a_2^a \tag{A.1}$$

es posible definir un elemento del grupo por (Λ, a) y su producto por

$$(\Lambda_2, a_2) \cdot (\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2). \tag{A.2}$$

Usando este producto y una representación fiel de (Λ, a) es posible determinar el álgebra de Lie definida sobre el espacio tangente para cada elemento perteneciente a este grupo: *El álgebra de Poincaré*. Las relaciones de conmutación de este grupo satisfacen

$$[P^a, P^b] = 0 \tag{A.3}$$

$$[J^{ab}, P^c] = \eta^{bc}P^a - \eta^{ac}P^b \tag{A.4}$$

$$[J^{ab}, J^{cd}] = \eta^{cb}J^{ad} - \eta^{ca}J^{bd} + \eta^{bd}J^{ca} - \eta^{da}J^{cb}. \tag{A.5}$$

Para esta álgebra existen dos operadores cuadráticos de casimir, el operador de masa

$$C_1 = P_a P^a. \tag{A.6}$$

y el operador de spin

$$C_2 = W_a W^a. \tag{A.7}$$

que se construye a partir del vector de Pauli-Ljubanski

$$W_a = \epsilon_{abcd} P^b J^{cd}. \tag{A.8}$$

Apéndice B

El grupo (Anti-)de Sitter

El grupo (A)dS $G = SO(D-2,2)$ se constituye por el conjunto de las rotaciones en un espacio D dimensional con métrica $\eta_{AB} = (-,+,\cdots,+,-)$ y $A, B = 1,\ldots,D$. El álgebra asociada a este grupo satisface las siguentes relaciones de conmutación

$$[J^A B, J^{CD}] = \eta^{CB} J^{AD} - \eta^{CA} J^{BD} + \eta^{BD} J^{CA} - \eta^{DA} J^{CB}. \tag{B.1}$$

Para poder hacer una comparación explícita entre el álgebra asociada al grupo de Poincaré y esta álgebra, es necesario reescalar los generadores asociados al coseto $G/SO(3,1)$ mediante un parámetro ℓ con unidades de longitud. Desdoblando estos generadores en J^{ab} con $a,b = 1, D-1$ y $J^{aD} = \ell P^a$ se satisface

$$[P^a, P^b] = \frac{1}{\ell^2} J^{ab}, \tag{B.2}$$

$$[J^{ab}, P^c] = \eta^{bc} P^a - \eta^{ac} P^b, \tag{B.3}$$

$$[J^{ab}, J^{cd}] = \eta^{cb} J^{ad} - \eta^{ca} J^{bd} + \eta^{bd} J^{ca} - \eta^{da} J^{cb}. \tag{B.4}$$

Siendo esta forma del álgebra que ocuparemos en detalle, notemos por último que si $\ell \to \infty$, se restaura el álgebra de Poincaré, proceso conocido como *contracción de Inonü-Wigner*. Una representación para el grupo Anti-de Sitter es constituido por las *matrices gamma* Γ_a, las cuales satisfacen un álgebra de Clifford embebida en la métrica $\eta_{ab} = (-,+,+,+)$

$$\{\Gamma_a, \Gamma_b\} = 2\eta_{ab}. \tag{B.5}$$

En particular, definiendo $\Gamma_{ab} = \frac{1}{2}[\Gamma_a, \Gamma_b]$ y (B.5) se satisfacen las siguientes reglas de conmutación

$$[\Gamma_a, \Gamma_b] = 2\Gamma_{ab} \tag{B.6}$$

$$[\Gamma_{ab}, \Gamma_c] = 2(\eta^{bc} P^a - \eta^{ac} P^b) \tag{B.7}$$

$$[\Gamma_{ab}, \Gamma_c] = 2(\eta^{cb} J^{ad} - \eta^{ca} J^{bd} + \eta^{bd} J^{ca} - \eta^{da} J^{cb}) \tag{B.8}$$

de modo que $\ell\Gamma_a/2$ y $\Gamma_{ab}/2$ constituyen una representación de P^a y J^{ab} respectivamente.

Apéndice C

Métrica de Killing-Cartán

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple, definida en termino de sus generadores $\{T_A\}$ y sus constantes de estructura $C_{AB}{}^{C}$. A partir de aquí es posible definir la métrica de Killing-Cartán por

$$g_{AB} = C_{AD}{}^{C} C_{BC}{}^{D} \tag{C.1}$$

Luego considerando que $C_{AB}{}^{C}$ corresponde a la representación adjunta de T_A en función de T_B, es decir

$$R_{T_B}(T_A)^{C}{}_{D} = C_{AD}{}^{C} \tag{C.2}$$

se satisface

$$g_{AB} = C_{AD}{}^{C} C_{BC}{}^{D} = R_{T_D}(T_A)^{C}{}_{D} R_{T_C}(T_B)^{D}{}_{C} = \mathrm{Tr}\left[R_{T_D}(T_A) R_{T_C}(T_B)\right], \tag{C.3}$$

luego, considerando que la traza es una cantidad que no depende de la representación ocupada, la metrica de Killing-Cartán satisface

$$g_{AB} = \mathrm{Tr}\left[R(T_A) R(T_B)\right]. \tag{C.4}$$

Por otra parte, como el álgebra $\mathfrak{g}$ es semisimple $det(m_{\alpha\beta}) \neq 0$, siendo posible invertir g_{AB}, es decir existe g^{BC} que satisface la siguiente propiedad,

$$g_{AB} \cdot g^{BC} = \delta_A^C \tag{C.5}$$

denotando a la inversa de g_{AB} por g^{AB}, es posible construir tensores invariantes bajo el grupo g cuya álgebra asociada es el álgebra $\mathfrak{g}$, permitiendo la construcción de acciones invariantes bajo g. Por otra parte al considerar que g^{AB} es una forma bilineal invariante bajo $\mathfrak{g}$, es posible construir los operadores cuadráticos de Casimir por

$$C = g^{AB} T_A T_B \tag{C.6}$$

Bibliografía

[1] S. Bonanos, J. Gomis, K. Kamimura, and J. Lukierski *Maxwell Superalgebra and Superparticles in Constant Gauge Backgrounds* Phys. Rev. Lett. **104** (2010)

[2] J. Gomis, K. Kamimura, J. Lukierski, *Deformations of Maxwell algebra and their dynamical realizations*, JHEP **0908:039** (2009)

[3] H. Bacry, P. Combe, J. Richard *Group-Theoretical Analysis of Elementary Particles in an External Electromagnetic Field.*, I. N. Cimenta, Vol **LXVIII** (1970)

[4] R. Schrader *The Maxwell Group and the Quantum Theory of Particles in Classical Homogeneous Electromagnetic Fields*, F. der Physik **20** (1974)

[5] S. Salgado, P. Salgado, $\mathfrak{so}(D-1,1) \oplus \mathfrak{so}(D-1,2)$ *algebras and gravity*, Phys. Letter B. **728** (2014).

[6] F. Izaurieta, E. Rodriguez, Patricio Salgado, *Expanding Lie (super)algebras through abelian semigroups*, J. Math. Phys. **47** (2006).

[7] P. Townsend, *Small-scale structure of spacetime as the origin of the gravitational constant*, Phys. Rev. D **15**, 2795 (1977)

[8] T. Eguchi, P. Gilkey, A. J. Hanson Gravitation, Gauge Theories And Differential Geometry, Physics Reports **66** (1980) 213-393.

[9] Lie Groups, Physics, and Geometry. An Introduction for Physicists, Engineers and Chemists, R. Gilmore, Cambridge Press **2008**.

[10] M. Nakahara, *Geometry, Topology And Physics*, IOP Publishing Ltd 2003.

[11] S.W Hawking, G.F.R Ellis *The Large Scale Structure Of Space-Time*, Cambridge Press **1973**

[12] J. B. Gutowski, *Symmetry and Particles Physics*, Michaelmas Term 2007, Cambridge University.

[13] S. Coleman, J. Wess, B. Zumino *Structure of Phenomenological Lagrangians I*, Phys. Review **177** (1962)

[14] C. Callan, S. Coleman, J. Wess, B. Zumino *Structure of Phenomenological Lagrangians II*, Phys. Review **177** (1962)

[15] B. Zumino, *Non-Linear Realization of Supersymmetry in Anti de Sitter Space*, Nucl. Phys. B (1977)

[16] Gary W. Gibbons, Steffen Gielen, *The Petrov and Kaigorodov-Ozsvath Solutions: Spacetime as a Group Manifold*, Class. Quantum Grav. **25** (2008)

[17] V. de Sabbata, M. Gasperini, *Introduction To Gravitation*, World Scientific Publishing Co Pte Ltd 1985.

[18] S. Bonanos, J. Gomis, *A note on the Chevalley-Eilenberg cohomology for the Galilei and Poincaré algebras*, J. Phys. A: Math. Theor (2009)

[19] S. W. MacDowell and F. Mansouri, *Unified Geometric Theory of Gravity and Supergravity* Phys. Rev. Lett. **38**, 739 (1977)

[20] J. Friedman, M. Turner, D. Huterer, *Annu. Rev. Astrophys* **46**,385 (2008) arXiv: 0803.0982v1 [hep-th]

[21] J. Lukierski, Proc. Steklov Inst. Math. **272** (2011) 183, arXiv:1007.3405

[22] Wess, J.; Zumino, B., *Supergauge transformations in four dimensions*, Nuclear Physics B **70**: 39?50 (1974).

[23] K. Brading, E. Castellani, *Symmetries in Physics: Philosophical reflections*, Cambridge University Press 2003.