

# UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN



## **FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**

Departamento de Geofísica

### **FÍSICA: INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA Y CALOR**

Proyecto de Docencia 02-16

Prof. Juan Carlos Inzunza B.

Concepción  
2007

2002 FÍSICA: INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA.  
Universidad de Concepción

Registro Propiedad Intelectual N° 127.438

I.S.B.N. 956-8029-35-4

Primera Edición Agosto 2002

Impresión:  
Talleres Dirección de Docencia  
Edmundo Larenas 64-A  
Barrio Universitario  
Concepción

**IMPRESO EN CHILE / PRINTED IN CHILE**

## PROLOGO

El enseñar es para mí la mejor forma de aprender. En la enseñanza de la física el objetivo es enseñar a pensar y razonar, y para eso se debe estimular el aprendizaje por problemas, no sólo teóricos, sino que también prácticos. El aprendizaje por problemas debe tender a terminar con la clase magistral y fomentar el trabajo en grupo de los alumnos, con el propósito de que aprendan por sí solos. Por ello, este curso de Física estará disponible en formato pdf en la página web [www2.udec.cl/~jinzunza/fisica](http://www2.udec.cl/~jinzunza/fisica), para que los alumnos puedan de forma más expedita obtener sus documentos para estudiar de manera autónoma. Lo ideal sería que la asistencia al aula fuera para aclarar las dudas y resolver los problemas que se le presentan durante su autoestudio.

En el mundo globalizado, en la era de las comunicaciones, el estudiante debe estar preparado para aprender a través de su propio esfuerzo investigativo, sobre la base de problemas que se le plantean y que el alumno debe resolver individual o en grupo. Los alumnos pueden trabajar de forma autónoma y después relacionarse con el profesor y el resto de sus compañeros, pero para ello deben realizar un trabajo previo de estudio y tener preguntas para plantearlas o respuestas para darlas a los otros compañeros que preguntan. Esto supone un cambio de mentalidad, un cambio cultural en los alumnos, donde él debe aprender a aprender, y eso hay que producirlo, no se produce solo. El alumno está acostumbrado a una forma de trabajo en la cual viene a la Universidad a oír al profesor, donde el primero es el que sabe y el otro el que aprende, no a trabajar en forma autónoma. Hay que evitar que el alumno pase seis o más horas diarias, cinco días a la semana, escuchando, y luego se va a tratar de aprender a su casa; lo más sensato sería que dedicara un alto porcentaje de ese tiempo directamente a aprender. Para eso hay que tratar de centrar la actividad docente en el aprendizaje y no en la enseñanza, donde el profesor debiera preocuparse de que los alumnos retengan lo expuesto y no solamente tratar de cumplir el programa de estudio.

Este texto a nivel básico de Introducción a la Mecánica y Calor, se basa en la experiencia de varios años de docencia de pregrado y posgrado en el Departamento de Geofísica de la Universidad de Concepción. En particular se trató de escribir las clases de la asignatura de Física, parte de Mecánica y Calor, la rama de la física que se ocupa de describir el movimiento y las transformaciones de energía producidas por variaciones de temperatura, realizadas durante

los últimos años en las aulas. Está diseñado para alumnos que realizan un primer curso de física universitaria de las carreras de ciencias básicas, ingenierías, tecnológicas, pedagogías y en general para toda carrera que requiera un curso de este nivel. Se profundiza la descripción de algunos fenómenos en particular, con el uso de matemáticas de nivel intermedio, como cálculo diferencial e integral elemental, pero en todos los casos esta descripción se puede obviar si el alumno no tiene la formación en esas herramientas matemáticas, sin que ésta pierda su validez. La descripción de los fenómenos físicos se complementa con figuras esquemáticas, en un intento por dar la mayor claridad posible al problema. En el texto se ha pretendido hacer la descripción necesaria, evitando escribir más de lo que se requiere, para no cansar al alumno con lectura de párrafos extensos.

Cada tema tratado se complementa con ejemplos seleccionados, resueltos detalladamente, que tienen como objetivo reforzar la comprensión de la teoría. Al final de cada capítulo se plantean un número considerado suficiente de problemas, muchos de ellos originales preparados por el autor, especialmente para hacer notar la aplicación de los contenidos teóricos a situaciones reales en diferentes áreas de la física. La dificultad de su resolución se puede considerar en general de nivel apropiado a un primer curso de Física universitaria, aunque siempre se presenta alguno de elevada dificultad. Se dan los resultados de un número importante de problemas y aquellos que no tienen respuesta es porque su resultado va a depender de los valores que el alumno asigne a las variables o porque su resolución es similar a otro problema que ya tiene respuesta, por lo que el alumno se puede asegurar que su resultado ha sido obtenido por un procedimiento correcto. Los resultados se dan al final de cada problema, evitando así el engorroso proceso de ir a las últimas páginas del texto a ver la respuesta, generalmente del problema impar.

Juan C. Inzunza  
Concepción, Chile  
Marzo de 2007.

## **CONTENIDOS.**

**CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA.**

**CAPÍTULO 2. MOVIMIENTO EN UNA DIMENSIÓN.**

**CAPÍTULO 3. MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES.**

**CAPÍTULO 4. DINAMICA DE LA PARTICULA.**

**CAPÍTULO 5. TRABAJO Y ENERGIA.**

**CAPÍTULO 6. TORQUE Y EQUILIBRIO DE CUERPO RIGIDO.**

**CAPÍTULO 7. MOMENTO LINEAL Y CHOQUES.**

**CAPÍTULO 8. DINAMICA DE ROTACIÓN.**

**CAPÍTULO 9. LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL.**

**CAPÍTULO 10. MECANICA ELEMENTAL DE FLUIDOS.**

**CAPÍTULO 11. MOVIMIENTO OSCILATORIO.**

**CAPÍTULO 12. TEMPERATURA, DILATACION TERMICA Y GASES.**

**CAPÍTULO 13. CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA.**

**CAPÍTULO 14. MECANISMOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR.**

**CAPÍTULO 15. SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA Y ENTROPIA.**



# INDICE.

<b>PROLOGO</b>	v
<b>CONTENIDOS</b>	vii
<b>INDICE</b>	ix
<b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA.</b>	13
1.1 Introducción	13
1.2 Definiciones	16
1.3 El método científico	18
1.4 Sistemas de magnitudes y unidades	19
1.5 Múltiplos, submúltiplos y prefijos	21
1.5.1 Orden de magnitud	22
1.5.2 Estimación	24
1.5.3 Transformación de unidades	24
1.5.4 Análisis dimensional	24
1.6 Sistemas de referencia	25
1.6.1 Coordenadas cartesianas o rectangulares	25
1.6.2 Coordenadas polares	26
1.7 Conceptos básicos de vectores	28
1.7.1 Igualdad de vectores	28
1.7.2 Multiplicación de un vector por un escalar	29
1.7.3 Vectores especiales	29
1.7.4 Adición de vectores y algunas de sus propiedades	30
1.7.5 Representación de los vectores en coordenadas cartesianas	30
1.7.6 Igualdad de vectores en componentes	31
1.7.7 Suma, resta y multiplicación por un escalar	32
1.7.8 Producto escalar entre vectores	32
1.7.9 Producto vectorial de vectores	33
Problemas	36
<b>CAPÍTULO 2. MOVIMIENTO EN UNA DIMENSION.</b>	39
2.1 Definiciones	39
2.2 Velocidad y aceleración	42
2.2.1 Velocidad media	42
2.2.2 Velocidad instantánea	43
2.2.3 Aceleración media	44
2.2.4 Aceleración instantánea	44
2.3 Descripción del movimiento en una dimensión con aceleración constante	47
2.4 Cálculo gráfico de $\Delta x$ y $\Delta v$	55
2.5 Cuerpos en caída libre	59
2.5.1 Efectos de $g$ en las personas	62
Problemas	64
<b>CAPÍTULO 3. MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES.</b>	75
3.1 Descripción del movimiento en dos dimensiones	75
3.2 Movimiento de proyectiles	77
3.3 Movimiento circunferencial	84
3.4 Velocidad y aceleración angular	89
3.4.1 Cinemática de rotación	90
3.4.2 Relación entre las variables angulares y lineales.	91
3.5 Movimiento relativo	94
Problemas	99

<b>CAPÍTULO 4. DINAMICA DE LA PARTICULA.</b>	105
4.1 Introducción	105
4.2 Primera ley de Newton	109
4.3 Concepto de masa	110
4.4 Segunda ley de Newton	111
4.5 Peso	112
4.6 Tercera ley de Newton	114
4.7 Fuerza de roce	121
4.8 Fuerza centrípeta	126
4.8.1 La descripción de peralte	128
4.9 Breve descripción de aplicaciones de algunas fuerzas en la medicina	131
4.9.1 Fuerza peso	131
4.9.2 Fuerza muscular	131
4.9.3 Fuerza de roce	132
Problemas	135
<b>CAPÍTULO 5. TRABAJO Y ENERGIA.</b>	143
5.1 Trabajo realizado por una fuerza constante	143
5.2 Trabajo realizado por una fuerza variable	146
5.3 Energía cinética	149
5.4 Potencia	150
5.5 Fuerzas conservativas y no conservativas	153
5.6 Energía potencial	154
5.7 Conservación de la energía mecánica	157
5.8 Energía y la máquina humana	160
5.8.1 ¿Cómo camina la máquina humana?	162
5.8.2 Articulaciones artificiales	163
Problemas	164
<b>CAPÍTULO 6. TORQUE Y EQUILIBRIO DE CUERPO RIGIDO.</b>	171
6.1 Torque de una fuerza	171
6.2 Equilibrio de un cuerpo rígido	176
6.2.1 Centro de gravedad	177
6.2.2 Centro de masa	177
6.3 Aplicaciones del torque al cuerpo humano	182
Problemas	186
<b>CAPÍTULO 7. MOMENTO LINEAL Y CHOQUES.</b>	193
7.1 Momento lineal	193
7.2 Impulso	194
7.3 Conservación del momento lineal	199
7.4 Choques	201
7.4.1 Ejemplos de choques en una dimensión	202
7.5 Choques en dos dimensiones	205
Problemas	209
<b>CAPÍTULO 8. DINAMICA DE ROTACIÓN.</b>	215
8.1 Energía cinética de rotación	215
8.2 Relación entre torque y aceleración angular	217
8.3 Trabajo, energía y potencia en el movimiento de rotación	222
8.4 Movimiento de rodadura de un cuerpo rígido	226
8.5 Momento angular de una partícula	229
8.6 Rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo	231
8.7 Conservación del momento angular	235
Problemas	239

<b>CAPÍTULO 9. LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL.</b>	247
9.1 La Ley y la fuerza gravitacional	247
9.2 Fuerza gravitacional y peso	248
9.3 Energía potencial de la fuerza gravitacional	252
9.3.1 Velocidad de escape	255
9.4 Las leyes de Kepler	258
9.4.1 La tercera ley de Kepler	259
9.4.2 La segunda ley de Kepler y la conservación del momento angular	261
9.5 El campo gravitacional	264
Problemas	266
<b>CAPÍTULO 10. NOCIONES DE MECANICA DE FLUIDOS.</b>	271
10.1 Estructura de la materia	271
10.1.1 Estados de la materia	273
10.1.2 Plasma	273
10.1.3 Fluido	274
10.2 Densidad	274
10.3 Presión	276
10.4 La ecuación hidrostática	277
10.4.1 El barómetro	280
10.5 Ley de Pascal	281
10.6 Principio de Arquímedes	282
10.7 Nociones elementales de dinámica de fluidos	285
10.8 Ecuación de continuidad	285
10.9 Ecuación de Bernoulli	288
Problemas	294
<b>CAPÍTULO 11. MOVIMIENTO OSCILATORIO.</b>	299
11.1 Movimiento armónico simple	299
11.2 Masa sujeta a un resorte	305
11.3 Energía en el movimiento armónico simple	308
11.4 El péndulo	310
11.4.1 Péndulo simple	310
11.4.2 Péndulo físico	313
11.4.3 Péndulo de torsión	316
11.5 Oscilaciones amortiguadas	317
11.6 Oscilaciones forzadas	319
Problemas	322
<b>CAPÍTULO 12. TEMPERATURA, DILATACION TERMICA Y GASES</b>	329
12.1 Temperatura y ley cero de la termodinámica.	329
12.2 Termómetros y escalas de temperatura	330
12.3 Termómetro de gas y escala Kelvin	332
12.4 Escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit	337
12.5 Dilatación térmica de sólidos y líquidos	338
12.6 Descripción macroscópica de un gas ideal	342
12.7 Teoría cinética de los gases	346
12.8 Interpretación molecular de la temperatura	350
Problemas	354
<b>CAPÍTULO 13. CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA</b>	363
13.1 Definiciones	363
13.2 Calor	364
13.3 Capacidad calórica y calor específico	366
13.4 Calor latente y cambios de estado	371
13.4.1 Vaporización o evaporación	371

13.4.2 Condensación	373
13.4.3 Fusión o derretimiento	373
13.4.4 Solidificación	373
13.4.5 Sublimación	373
13.4.6 Deposición	373
13.4.7 Ebullición	373
13.5 Trabajo en procesos termodinámicos	378
13.6 Primera ley de la termodinámica	383
13.6.1 Casos particulares	384
13.7 Procesos termodinámicos	385
13.7.1 Proceso isobárico	385
13.7.2 Proceso isovolumétrico	386
13.7.3 Proceso adiabático	386
13.7.4 Proceso isotérmico	387
13.8 Capacidad calórica de un gas ideal	389
13.9 Proceso adiabático de un gas ideal	396
Problemas	399
<b>CAPÍTULO 14. MECANISMOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR</b>	<b>407</b>
14.1 Calor y temperatura	407
14.2 Conducción de calor	408
14.3 Convección	412
14.4 Radiación	414
14.4.1 Espectro de radiación	415
14.4.2 Penetración de la radiación electromagnética	417
14.4.3 Leyes de radiación	419
Problemas	424
<b>CAPÍTULO 15. SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA Y ENTROPIA.</b>	<b>429</b>
15.1 Máquinas térmicas	430
15.1.1 Máquina térmica	430
15.1.2 Eficiencia térmica	431
15.2 Segunda Ley de la Termodinámica	431
15.2.1 Forma de Kelvin-Planck de la segunda ley de la termodinámica	432
15.2.2 Enunciado de Clausius de la segunda ley de la termodinámica	433
15.3 Procesos reversibles e irreversibles	434
15.4 Máquina de Carnot	435
15.4.1 Eficiencia de una máquina de Carnot	439
15.5 Escala de temperatura absoluta.	441
15.6 Bombas de calor y refrigeradores	441
15.7 Entropía	443
15.7.1 Entropía en un proceso reversible de un gas ideal	446
15.7.2 Entropía en la conducción de calor	447
15.7.3 Entropía en una expansión libre	448
15.7.4 Entropía en la transferencia de calor irreversible	450
Problemas	453
<b>APENDICES</b>	<b>461</b>
A. Álgebra	461
B. Geometría	463
C. Trigonometría	465
D. Derivadas e integrales	468
E. Datos comunes en el sistema solar y terrestre	470
F. Factores de conversión de unidades de medida	471
G. Letras Griegas	473

## **CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA**

### ***1.1 INTRODUCCION.***

Los adelantos de la ciencia han provocado muchos cambios en el mundo. Por ejemplo, desde Aristóteles en el 350 AC y hasta hace 500 años se creía que la Tierra era plana y que estaba en el centro del universo, hace 70 años no se conocía la televisión, los aviones jet ni la forma de prevenir las picaduras dentales, hace pocos años se descubrió la clonación de seres vivos, recientemente se descifró el código del genoma humano (dicen que Dios esta hecho un diablo por esto). La ciencia no es nueva, data de la prehistoria. El ser humano ha estado sobre la Tierra desde hace 100 mil años y desde entonces ha empezado a hacer ciencia. Por ejemplo en el comienzo se descubrieron las primeras regularidades y relaciones en la naturaleza. Una de las regularidades era la forma de los patrones de las estrellas que aparecían en el cielo nocturno. Otra evidente era el ciclo del clima a lo largo del año, distinguiéndose claramente el comienzo de la temporada de lluvias o la de calor. La gente aprendió a usar estos ciclos para hacer predicciones y surgieron los primeros pronósticos del tiempo. De este modo fueron aprendiendo más y más acerca del comportamiento de la naturaleza. Todos estos conocimientos forman parte de la ciencia, pero la parte principal esta formada por los métodos que se usan para adquirir esos conocimientos.

La ciencia es una actividad humana, formada por un conjunto de conocimientos. La ciencia es el equivalente contemporáneo de lo que se llamaba filosofía natural. La filosofía natural era el estudio de las preguntas acerca de la naturaleza que aún no tenían respuesta. A medida que se iban encontrando esas respuestas, pasaban a formar parte de lo que hoy llamamos ciencia. La ciencia hizo sus mayores progresos en el siglo XVI, cuando se descubrió que era posible describir la naturaleza por medio de las matemáticas. Cuando se expresan las ideas de la ciencia en términos matemáticos no hay ambigüedad, es mas fácil verificarlos o refutarlos por medio del experimento. La ciencia contemporánea se divide en el estudio de los seres vivos y en el estudio de los objetos sin vida, es decir, en ciencias de la vida y en ciencias físicas. Las ciencias de la vida se dividen en áreas como la biología, zoología y la botánica. Las ciencias físicas se dividen en áreas como la física, geología, astronomía y química.

La física es mas que una rama de las ciencias físicas: es la más fundamental de las ciencias. Estudia la naturaleza de realidades básicas como el movimiento, las fuerzas, energía, materia, calor, sonido, luz y el interior de los átomos. La química estudia la manera en que esta integrada la materia, la manera en que los átomos se combinan para formar moléculas y la manera en que las moléculas se combinan para formar los diversos tipos de materia que nos rodea. La biología es aún mas compleja, pues trata de la materia viva. Así, tras la biología esta la química y tras la química esta la física. Las ideas de la física se extienden a estas ciencias mas complicadas, por eso la física es la mas fundamental de las ciencias. Podemos entender mejor la ciencia en general si antes entendemos algo de física ¡es lo que vamos a prender en este curso!

El entender la naturaleza se busca por diferentes formas: la ciencia, el arte, la religión, cuyas orígenes datan de miles de años. Estas formas son distintas, pero sus dominios se traslapan. La ciencia investiga los fenómenos naturales y el arte es la creación de los objetos o eventos que estimulan los sentidos, pero ambas son comparables debido a que son esfuerzos que muestran como son las cosas y cuales son posibles. Por otra parte, los objetivos de la ciencia y la religión son diferentes, ya que esta última se ocupa del propósito de la naturaleza. Las creencias y ceremonias religiosas generan convivencia humana, sin ocuparse directamente de los métodos de la ciencia. En este sentido son diferentes, como las manzanas con las peras, pero no se contradicen, son complementarias, de manera que no es necesario elegir entre ambas, se pueden adoptar ambas, entendiendo que tratan aspectos distintos de la experiencia humana. Una persona realmente culta posee conocimientos tanto de la religión, como del arte y de la ciencia.

En este capítulo se da una breve explicación de algunas definiciones de conceptos usados en el curso. Se hace una descripción de los sistemas de unidades de medida, de las magnitudes físicas fundamentales y derivadas, se definen los múltiplos, submúltiplos y los prefijos. Se hace notar la necesidad de expresar los valores numéricos de las magnitudes en ciencias en notación científica, se explica como expresar los valores numéricos dando sólo su orden de magnitud o haciendo una estimación de su valor. Se dan reglas de análisis dimensional, lo que proporciona un método para determinar la forma funcional de las leyes físicas y permite verificar si está bien planteada. Se definen los sistemas de referencias y de coordenadas y finalmente se hace un breve repaso del álgebra vectorial y se presentan algunos ejemplos básicos.

La figura 1.1 tal vez la conozcan: es una imagen de nuestra Tierra, sobre la cual haremos la mayoría de las aplicaciones de este curso. Los colores sobre los océanos representan los valores de la temperatura de la superficie del mar, siendo mayores los tonos en rojo y menores los tonos en azul. En la imagen se observa claramente la presencia del fenómeno de El Niño en el Pacífico sur. Se representa también un esquema de las nubes en la atmósfera con tonos de color gris claro. En Chile se observa un frente ubicado entre la novena y décima regiones.

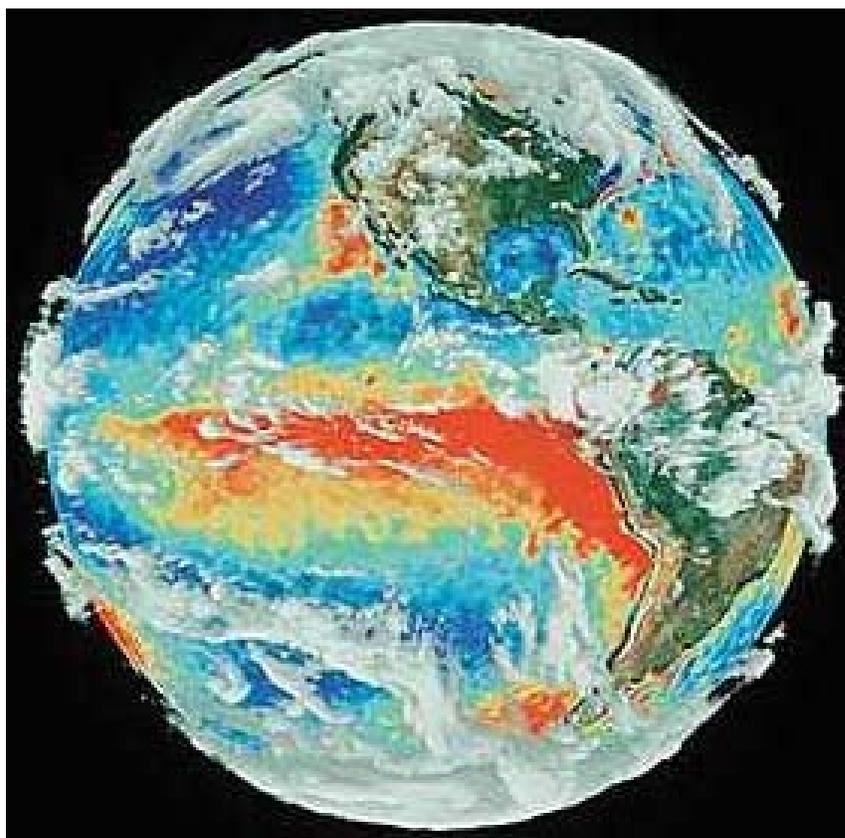


Figura 1.1. Imagen de satélite modificada de la Tierra.

Este es nuestro planeta, al que le estamos dando un muy mal trato, con todos los desperdicios y contaminantes que estamos arrojando a los ríos, lagos, océanos, tierra y atmósfera. No olvidemos que los recursos de nuestra Tierra son finitos y no renovables, por lo que a nosotros nos corresponde cuidar estos recursos, para dejarlos de la mejor forma a las futuras generaciones, que también querrán vivir en un ambiente limpio. Las mediciones ya indican que la

humanidad está consumiendo los recursos de la Tierra mas rápidamente de lo que esta es capaz de renovarlos, por lo que es clara la tendencia a que los recursos naturales se agoten. Lo peor de todo es que la distribución de los recursos no es equitativa, ya que una minoría de empresas y países mas ricos se enriquecen mas y la mayor parte de la población mundial se empobrece mas, incluyendo un importante porcentaje de la población que nada tiene. Lo más que podemos hacer nosotros como profesionales y habitantes de la Tierra, es crear conciencia para no seguir dañando nuestro ambiente, que nos permite la vida. Evitemos que el ser humano evolucione rápidamente a una nueva especie, que se podría llamar *Homo Furioso*, que al final de este siglo se pregunte ‘¿en que pensarían esos prehistóricos *Homo Sapiens* de principios de siglo que nos dejaron el planeta en estas lamentables condiciones?’

## **1.2 DEFINICIONES.**

En esta sección se dan las definiciones de algunos términos usados en ciencias y de temas relacionados, que usaremos durante el curso, sin pretender profundizar en el contenido teórico del concepto definido.

**Física:** Es una ciencia fundamental que estudia y describe el comportamiento de los fenómenos naturales que ocurren en nuestro universo. Es una ciencia basada en observaciones experimentales y en mediciones. Su objetivo es desarrollar teorías físicas basadas en leyes fundamentales, que permitan describir el mayor número posible de fenómenos naturales con el menor número posible de leyes físicas. Estas leyes físicas se expresan en lenguaje matemático, por lo que para entender sin inconvenientes el tratamiento del formalismo teórico de los fenómenos físicos se debe tener una apropiada formación en matemáticas, en este curso basta un nivel básico de matemáticas.

**Teoría científica:** Síntesis de una gran cantidad de información que abarca diversas hipótesis probadas y verificables de ciertos aspectos del mundo natural. Ningún experimento resulta aceptable a menos que sea reproducible, es decir que produzca un resultado idéntico independientemente de cuando, donde y por quien sea realizado. Los resultados de los distintos experimentos se reúnen para formar una teoría. Una teoría es la síntesis de todas las observaciones realizadas en los experimentos, que debería hacer posible predecir el resultado de nuevos experimentos antes de que se realicen. Pero no se debe esperar que una teoría explique ciertos fenómenos de una vez por todas, sino

mas bien los coordine dentro de un conjunto sistemático de conocimientos. La validez de una teoría puede probarse únicamente con el experimento.

Una teoría científica no debe contener elemento alguno metafísico o mitológico, se deben eliminar los mitos y prejuicios. Hoy en día se debe tener especial cuidado, puesto que nuestros mitos contemporáneos gustan de ataviarse con ropajes científicos, pretendiendo con ello alcanzar gran respetabilidad. Los charlatanes siempre buscan mencionar el nombre de algún gran científico en un intento por hacer creíbles sus charlatanerías.

***Mecánica.*** Es una rama de la física. Su objetivo es describir (con la cinemática) y explicar (con la dinámica) el movimiento de los cuerpos.

***Cinemática.*** Describe el movimiento de los cuerpos sin preocuparse de las causas que lo producen.

***Dinámica.*** Describe el movimiento de los cuerpos considerando las causas que lo producen, y las causas del movimiento son las fuerzas.

***Hipótesis:*** Suposición bien fundamentada, considerada como un ***hecho*** cuando se demuestra experimentalmente.

***Hecho:*** Acuerdo entre observadores competentes sobre una serie de observaciones de un fenómeno particular.

***Ley:*** Comprobación de una hipótesis sin ninguna contradicción. Una ley física se considera como tal cuando todos los experimentos obedecen esa ley, si en algún caso no se cumple, deja de ser ley física. ¿Son las leyes terrestres válidas en todo el Universo? Hay que usarlas y después evaluar su resultado. No se debe pretender buscar una nueva ley para explicar algún fenómeno en el cual las leyes ya existentes no parecen encajar satisfactoriamente, porque esto conduce al caos lógico. Aunque se debe estar dispuesto a aceptar nuevas leyes naturales si su adopción demuestra ser necesaria.

***Ciencia:*** Método para dar respuestas a preguntas teóricas. La ciencia descubre hechos y formula teorías.

***Tecnología:*** Método para resolver problemas prácticos, usa técnicas y procedimientos para aplicar los descubrimientos de la ciencia.

**Modelo:** Concepto introducido por los científicos para ayudarse a visualizar posibles procesos dentro de un sistema físico. Un modelo se usa para representar la realidad física y debe tener en cuenta dos aspectos conflictivos entre sí: a) tiene que ser lo bastante simple para como para ser elaborado con métodos matemáticamente rigurosos, b) debe ser realista para que los resultados obtenidos sean aplicables al problema considerado. La sencillez del modelo, su belleza matemática, es incompatible con la fidelidad al problema real. Lo bello raramente es fiel y lo fiel raramente es bello.

**Matemáticas:** Es el lenguaje de las ciencias, es lo que establece una conexión entre la teoría y el experimento. Las leyes Físicas se expresan en lenguaje matemático, en general de nivel muy avanzado.

**Religión:** Se ocupa del propósito de la naturaleza, no se preocupa por usar los métodos de la ciencia, tiene que ver con la Fe y la adoración de un ser supremo, que es Dios. Ciencia y religión no son contradictorias, son complementarias. No es necesario elegir entre ambas, se pueden adoptar las dos.

### **1.3 EL MÉTODO CIENTÍFICO.**

El método científico es un método efectivo para adquirir, organizar y aplicar nuevos conocimientos. Su principal fundador fue Galileo (1564-1642). Se basa en la formulación de hipótesis y en la recopilación de pruebas objetivas que traten de probar la veracidad de tales hipótesis establecidas previamente. El método científico puede dividirse a grandes rasgos en varios pasos:

- a.** Observar el medio natural.
- b.** Hacerse una pregunta sobre el comportamiento del medio.
- c.** Formular una hipótesis y derivar de ella predicciones que puedan ser demostradas.
- d.** Planear un experimento que pueda verificar esa hipótesis.
- e.** Analizar los datos obtenidos de ese experimento. Si los datos coinciden con las derivaciones de la hipótesis, se podrá decir que ésta funciona y es válida en ese contexto.
- f.** A partir de esa hipótesis demostrada, elaborar una Teoría.
- g.** Nuevamente acudir a la Naturaleza para contrastarla.

- h.* Si la Teoría se cumple y demuestra, a partir de ella se formulará una Ley, que tratará de describir el fenómeno.

Antes de Galileo, la mayor parte de los experimentos no seguían este orden de pensamiento, sino que se basaban en la observación del medio y emisión de teorías, sin mayor comprobación posterior de éstas. La novedad que trajo consigo el método científico fue que se trabajaba con hipótesis que debían ser demostradas. Todo ello supuso un gran avance para la física como ciencia, puesto que se empezó a observar la naturaleza y a afirmar expresiones, hoy en día tan comunes como “parece que va a llover”.

Este método no siempre ha sido la clave de los descubrimientos, en muchos casos gran parte del progreso de la ciencia se ha debido a resultados obtenidos por error o por casualidad.

#### ***1.4 SISTEMAS DE MAGNITUDES Y UNIDADES.***

Medir una magnitud consiste en compararla con una cantidad arbitraria fija de la magnitud. Una medición se expresa con un número seguida de un símbolo de la unidad usada. Existen medidas directas e indirectas, por ejemplo el largo y el ancho de una sala son medidas directas, pero la superficie de la sala es una medida indirecta. Gran parte de la Física tiene que ver con la medida de cantidades físicas tales como distancia, tiempo, volumen, masa, temperatura, etc. Las leyes Físicas se expresan en términos de cantidades básicas que requieren una definición clara, llamadas *magnitudes físicas fundamentales*. En mecánica las magnitudes físicas fundamentales son tres: longitud, tiempo y masa. Se llaman magnitudes físicas fundamentales porque están definidas en forma independiente de cualquier otra magnitud física.

Para que sean útiles deben ser invariables y reproducibles y se debe definir una unidad de medida única para la magnitud física, llamada patrón de medida. El *Sistema Internacional* (SI) de unidades determina el conjunto de patrones de medida. En este sistema, las unidades de medida de las magnitudes físicas fundamentales en Mecánica, son las que se dan en la tabla 1.1. Este se conoce también como el sistema MKS (abreviaturas de metro, kilogramo y segundo). También existe el sistema CGS cuyas unidades de medida son el centímetro, gramo y segundo, y el sistema inglés de ingeniería, que es extre-

madamente confuso, por lo que no lo usaremos en este curso. El SI es el que se usa mayoritariamente en todas las áreas de las ciencias.

La definición operacional actual de las magnitudes físicas fundamentales se da a continuación.

Tabla 1.1. Unidades de medida de las magnitudes físicas fundamentales en mecánica.

Magnitud Física	Unidad de medida	Símbolo
Longitud	Metro	m
Tiempo	Segundo	s
Masa	Kilogramo	kg

**Longitud:** Se han desarrollado muchos sistemas de medición de longitud, pero se han abandonado por razones de precisión. Desde 1983, la unidad de longitud, el *metro*, se define como la distancia recorrida por la luz en el vacío durante un tiempo de  $1/299792458$  segundos. De paso esta definición establece que la rapidez de la luz en el vacío es de  $299\,792\,458$  m/s.

**Tiempo:** En 1967 se definió el *segundo* como unidad de tiempo igual a  $9\,192\,631\,770$  periodos de la radiación de átomos de cesio 133. Con un reloj atómico de cesio, se puede medir la frecuencia de su radiación con una precisión de una parte en  $10^{12}$ , lo que equivale a una incertidumbre menor que un segundo cada 30000 años.

**Masa:** Desde 1987 se considera como unidad de masa, el *kilogramo*, que se define como la masa de una aleación de platino e iridio que se conserva en el Laboratorio Internacional de Pesas y Medidas en Sevres, cerca de París, Francia. Este patrón es confiable porque dicha aleación es muy estable.

Las otras magnitudes fundamentales de la Física, que con las anteriores suman siete en total, están indicadas en la tabla 1.2.

En ciencias se usan muchas otras magnitudes físicas, que se obtienen como una combinación de las magnitudes físicas fundamentales. Se llaman *magnitudes físicas derivadas*, porque se derivan de las magnitudes físicas fundamentales. Por ejemplo:

*área = longitud por longitud, se mide en  $m^2$*

*aceleración = longitud/tiempo al cuadrado, se mide en  $m/s^2$*

*fuerza = masa por aceleración, se mide en Newton,  $N = kg\ m/s^2$*

*densidad = masa/volumen, se mide en  $kg/m^3$ , etc.*

Tabla 1.2. Unidades de medida de las magnitudes físicas fundamentales.

Magnitud Física	Unidad de medida	Símbolo
Temperatura	Kelvin	K
Corriente eléctrica	Ampere	A
Intensidad luminosa	Candela	Cd
Cantidad de sustancia	Mol	mol

### 1.5 MULTIPLOS, SUBMULTIPLOS Y PREFIJOS.

Teniendo en cuenta que la Física estudia el comportamiento del universo, los valores numéricos de las magnitudes físicas varían en un rango muy amplio, desde cantidades muy pequeñas a muy grandes. Por ejemplo, para comprender el origen del Universo, a los astrofísicos y cosmólogos les preocupa actualmente saber que paso entre el Big Bang y el minúsculo instante ¡ $10^{-43}$  s!, o como determinar bien la edad del Universo cuyas últimas mediciones dan un valor de  $1.45 \times 10^{10}$  años, con una incertidumbre de un par de miles de millones de años. La Tierra tiene una edad de 4600 millones de años. Especialistas han estudiado la cronología de la Biblia para calcular cuanto tiempo ha pasado desde los días del Edén, sumando la edad de Adán y sus descendientes. En 1650 el arzobispo irlandés James Ussher propuso que Dios creo la Tierra el 22 de octubre del año 4004 antes de nuestra era, valor que no concuerda con las mediciones.

Los valores numéricos de la física pueden ser muy complicados de leer en su forma tradicional, por lo que generalmente se expresan en potencias de 10, que es la notación científica. Ejemplos de algunos valores comunes se muestran en la tabla 1.3.

Tabla 1.3. Algunos valores numéricos de magnitudes físicas conocidas.

Masa (kg)	Sol	$2 \times 10^{30}$
	Humano	70
	Electrón	$9.1 \times 10^{-31}$
Longitud (m)	Distancia Tierra - Sol	$1.5 \times 10^{11}$
	Cancha de fútbol	90
	Diámetro núcleo atómico	$10^{-14}$
Tiempo (s)	Edad de la Tierra	$1.5 \times 10^{17}$
	Edad de estudiante UdeC	$5 \times 10^8$
	Duración choque nuclear	$10^{-22}$

Si el exponente de la potencia de 10 es positivo (o negativo) el valor de la magnitud física es un múltiplo (o submúltiplo). Para medir magnitudes muy grandes o muy pequeñas se expresan los valores en potencias de 10 y se usan los *prefijos* del SI que es el nombre que se le da a la potencia de 10. Existen algunas unidades de medición que tienen nombres especiales, como por ejemplo el *año luz* que es la distancia que recorre la luz en un año, igual a  $9.45 \times 10^{15} \text{ m}$ , o el Angstrom que es igual a  $10^{-10} \text{ m}$ . En la tabla 1.4 se dan los nombres de los prefijos del Sistema Internacional.

### 1.5.1 Orden de magnitud.

El orden de magnitud es la potencia de 10 más cercana al valor verdadero de una magnitud física conocida cuyo valor numérico se conoce. Para indicarla se usa el símbolo vírgula,  $\sim$ . Cuando se compara entre magnitudes físicas similares, se dice que una magnitud física difiere de la otra en un orden de magnitud, cuando es mayor o menor en un factor de 10.

**Ejemplo 1.1.** El orden de magnitud de 1 es cero ó  $10^0$ , el orden de magnitud de 10 es uno ó  $10^1$ , el orden de magnitud de 100 es dos ó  $10^2$ , etc.

**Ejemplo 1.2.** a) Determinar el orden de magnitud de la masa de la Tierra, cuyo valor es aproximadamente  $6 \times 10^{24} \text{ kg}$ . b) Si la masa del Sol  $\sim 10^{30} \text{ kg}$ , ¿en cuantos órdenes de magnitud difiere de la masa de la Tierra?

Solución:

a) considerando que 6 es un valor mas cercano a  $10 = 10^1$  que a  $1 = 10^0$ , su orden de magnitud es  $6 \sim 10^1$ , por lo tanto el orden de magnitud de la masa de la Tierra es  $6 \times 10^{24} \sim 10^1 \times 10^{24} \sim 10^{25} \text{ kg} \sim 10 \text{ Ykg}$  ó del orden de 25.

b) Si la masa del Sol  $\sim 10^{30} \text{ kg}$ , ¿en cuantos órdenes de magnitud difiere de la masa de la Tierra?

Solución: 
$$\frac{\text{masa del Sol}}{\text{masa de la Tierra}} = \frac{10^{30}}{10^{25}} = 10^5$$

Por lo tanto la masa del Sol es 5 órdenes de magnitud mayor (cien mil veces mas grande) que la masa de la Tierra.

Tabla 1.4 Prefijos del Sistema Internacional.

Potencia $10^x$	Prefijo	Símbolo
-24	yocto	y
-21	zepto	z
-18	atto.	a
-15	femto	f
-12	pico	p
-9	nano	n
-6	micro	$\mu$
-3	mili	m
-2	centi	c
-1	deci	d
1	deca	da
2	hecto	h
3	kilo	k
6	mega	M
9	giga	G
12	tera	T
15	peta	P
18	exa	E
21	zeta	Z
24	yota	Y

### 1.5.2 Estimación.

Hacer una estimación es asignar un valor numérico razonable a una magnitud Física conocida, cuyo valor verdadero, en el momento de usar esa magnitud, no se conoce.

#### **Ejemplo 1.3.** Estimar la edad de los alumnos del curso de Física I.

*Solución:* Considerando que los alumnos ingresan a la universidad a la edad aproximada de 18 años, que el curso de Física I lo realizan en el segundo semestre, que algunos alumnos ingresan a la carrera tiempo después de egresar de la enseñanza media y que es probable que el curso de física no lo estén cursando en el semestre que corresponde, se puede considerar que la edad de los alumnos del curso de Física I varía entre 18 y 22 años, por lo que se puede estimar como edad de cualquier alumno en  $\sim 20$  años. Su orden de magnitud es  $\sim 10$  años.

### 1.5.3 Transformación de unidades.

Muchos cálculos en Física requieren convertir unidades de un sistema a otro. Las unidades pueden convertirse sustituyéndolas por cantidades equivalentes. En toda respuesta numérica de los problemas siempre debe escribirse las unidades en el resultado final.

#### **Ejemplo 1.4.** Transformar 18 km/hora a m/s.

*Solución:* Se sabe que  $1h = 3600 s$  y que  $1 km = 1000 m$ , entonces:

$$18 \frac{km}{hr} \times \frac{1hr}{3600s} \times \frac{1000m}{1km} = 5 \frac{m}{s}$$

### 1.5.4 Análisis dimensional.

Se usa para verificar que todos los términos de una ecuación tengan las mismas dimensiones, lo que garantiza que la ecuación está planteada en forma

correcta. Cuando se hace el análisis dimensional, los términos no se operan con el álgebra corriente, por ejemplo las unidades de medida no se suman o restan, solo se comparan sus unidades entre términos de la ecuación a dimensionar, generalmente se usa el símbolo [ ] en cada término al hacer el análisis.

**Ejemplo 1.5.** Hacer el análisis dimensional para el siguiente modelo físico  $v^2 = v_o^2 + 2ax$ , donde  $v$  se mide en  $m/s$ ,  $x$  en  $m$  y  $a$  en  $m/s^2$ .

*Solución:* se escriben las unidades de medida en cada término de la ecuación, considerando que las unidades no se suman ni restan y que el 2 es un número sin unidades de medida que no multiplica a la unidad de medida:

$$v^2 = v_o^2 + 2ax \Rightarrow$$

$$\left[ \left( \frac{m}{s} \right)^2 \right] = \left[ \left( \frac{m}{s} \right)^2 \right] + \left[ \frac{m}{s^2} \right] [m] = \left[ \frac{m^2}{s^2} \right] = \left[ \left( \frac{m}{s} \right)^2 \right]$$

Por lo tanto la expresión es dimensionalmente consistente.

## 1.6 SISTEMAS DE REFERENCIA.

En mecánica se tratan problemas relacionados con la descripción del movimiento de un objeto en el espacio, por lo que se requiere un método para conocer la posición de ese objeto. Para esto se definen los sistemas de coordenadas y marcos de referencia. Un sistema de coordenadas usado para indicar las posiciones en el espacio consta de:

1. Un punto de referencia fijo O, llamado origen.
2. Un conjunto de ejes o direcciones con una escala apropiada.
3. Instrucciones sobre como identificar un punto en el espacio respecto al origen y a los ejes.

### 1.6.1 Coordenadas cartesianas o rectangulares.

Un sistema de coordenadas frecuentemente usado es el sistema de **coordenadas cartesianas o rectangular**, que se muestra en la figura 1.2, con ejes  $x$  sa-

liendo del plano de la figura, eje  $y$  horizontal y eje  $z$  vertical. En este sistema un punto  $P$  arbitrario se identifica con tres coordenadas identificadas por  $(x,y,z)$ , con los valores positivos de los ejes hacia fuera del plano de la figura, hacia la derecha y hacia arriba, respectivamente en cada eje, como se indica en la figura 1.2. Es el espacio común en el que vivimos, se llama espacio tridimensional porque tiene tres dimensiones, para indicarlo usamos en símbolo 3D. En ocasiones bastan dos o una coordenadas para fijar la posición del objeto, estos se llaman espacio bidimensional (2D) o unidimensional (1D), respectivamente.

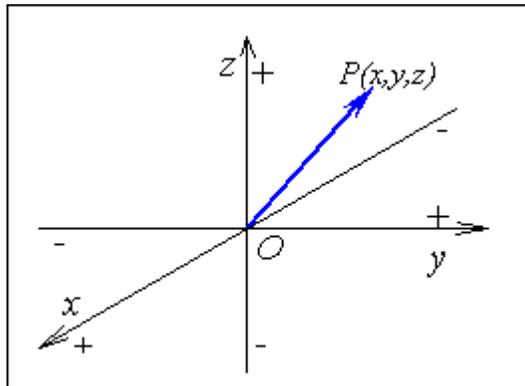


Figura 1.2. Coordenadas cartesianas.

### 1.6.2 Coordenadas polares.

Otro sistema de coordenadas conocido es el de las **coordenadas polares**  $(r, \theta)$  (figura 1.3), donde  $r$  es la distancia desde el origen al punto  $(x,y)$ , generalmente llamado radio, y  $\theta$  el ángulo entre el eje  $x$  y  $r$ , por convención, considerado positivo cuando es medido en sentido antihorario desde el eje  $x$  hacia  $r$ . La relación entre las coordenadas cartesianas y polares es

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Se deja como ejercicio al alumno demostrar que sus relaciones inversas son:

$$\tan \theta = \frac{y}{x},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

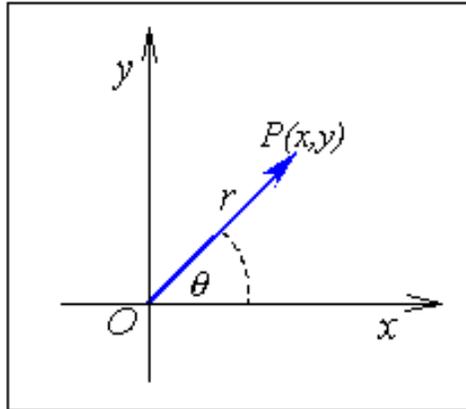


Figura 1.3. Coordenadas polares.

De paso aprovechemos de recordar el teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas básicas seno, coseno y tangente, que se definen para un triángulo rectángulo, como el que se muestra en la figura 1.4, estas son:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r}$$

$$\text{tan } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{y}{x}$$

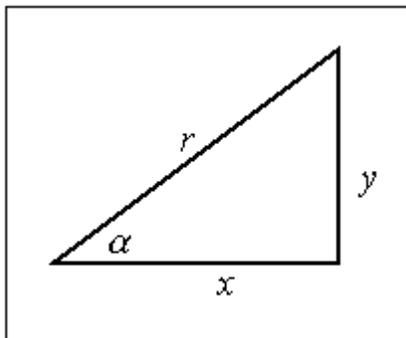


Figura 1.4. Un triángulo rectángulo.

### 1.7 CONCEPTOS BÁSICOS DE VECTORES.

Las magnitudes físicas con las que trataremos en el curso pueden ser escalares o vectoriales. Las **magnitudes físicas escalares** quedan completamente definidas mediante un número y sus respectivas unidades de medida, por ejemplo la densidad del agua de  $1 \text{ gr/cm}^3$  o la temperatura del aire de  $20^\circ \text{ C}$ , son un escalar. Para las **magnitudes físicas vectoriales** debe especificarse su **magnitud** (un número con sus unidades), su **dirección** (un número que puede ser un ángulo si el espacio es bi o tridimensional) y su **sentido** (que indica hacia adonde se dirige o apunta el vector), por ejemplo una velocidad de  $80 \text{ km/h}$  hacia el noreste. Un vector se representa gráficamente como un trazo dirigido (flecha) y se simboliza mediante letras mayúsculas o minúsculas, con una flecha sobre la letra o escrita en negrita, como  $V$  o  $\vec{V}$ ,  $r$  o  $\vec{r}$ ,  $OP$  o  $\vec{OP}$ . La longitud de la flecha indica la magnitud relativa del vector, el punto desde donde se comienza a dibujar el vector se llama **punto de aplicación**, la dirección se mide desde algún eje de referencia, generalmente horizontal, el sentido esta dado por la punta de la flecha y la recta sobre la cual se ubica el vector se llama **línea de acción**. En la figura 1.5, el vector  $A$  tiene magnitud  $A$ , su punto de aplicación es  $O$  y su dirección es  $\alpha$  grados sobre la horizontal.

#### 1.7.1 Igualdad de vectores.

Dos o más vectores son iguales si: a) apuntan en la misma dirección, b) si sus magnitudes son iguales. En la figura 1.6,  $\vec{a} = \vec{b} = \vec{c} = \vec{d}$  independientemente de la ubicación de los vectores en el espacio.

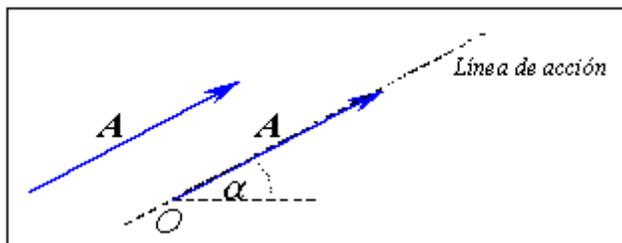


Figura 1.5. Representación de un vector.

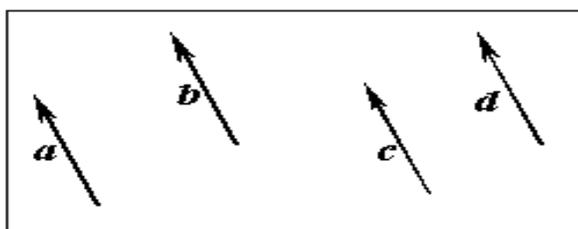


Figura 1.6 Igualdad de vectores.

### 1.7.2 Multiplicación de un vector por un escalar.

El resultado de multiplicar un vector por un escalar  $\lambda$  es un vector, de magnitud distinta y de dirección igual (o contraria) al vector original. En la figura 1.7 se muestra que  $\vec{B} = 2\vec{b}$  y  $\vec{D} = -2/3\vec{d}$ .

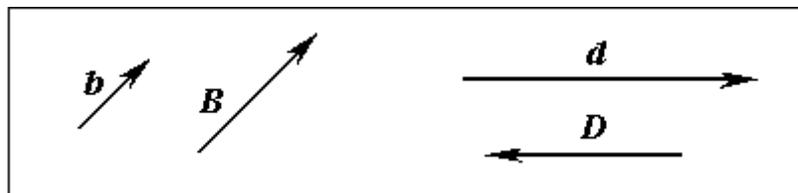


Figura 1.7.

### 1.7.3 Vectores especiales.

- Vector nulo: es un vector de magnitud igual a cero (0).

- Vector unitario: vector de magnitud igual a uno (1).

### 1.7.4 Adición de vectores y algunas de sus propiedades.

Los vectores se pueden sumar en forma geométrica por diversos métodos, tales como los que se muestran en la figura 1.8, a) el método del polígono o b) el método del paralelogramo.

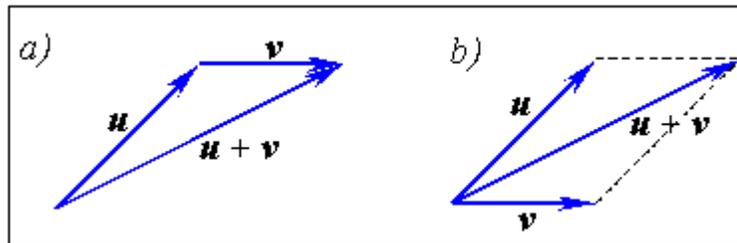


Figura 1.8. a) Método del polígono, b) método del paralelogramo.

Además los vectores cumplen con las siguientes propiedades del álgebra:

- Conmutatividad de la suma:  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ .
- Asociatividad de la suma:  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ .
- Distributividad de la multiplicación por un escalar en la suma de vectores.
- Conmutatividad del producto:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$ .
- Asociatividad del producto:  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
- Inverso aditivo: si  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ , entonces  $\mathbf{b}$  es el inverso aditivo de  $\mathbf{a}$  y se escribe  $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ .
- La resta de vectores es un caso especial de adición, donde el vector restado se suma con su inverso aditivo:  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ .
- La división entre vectores no está definida.

### 1.7.5 Representación de los vectores en coordenadas cartesianas.

Las componentes vectoriales de un vector son aquellas que sumadas dan como resultado el vector original. Las componentes vectoriales de un vector en el espacio se calculan a lo largo de un conjunto de 3 líneas mutuamente perpen-

diculares que se cortan en un mismo punto, es decir en líneas paralelas a los ejes de un sistema de coordenadas cartesiano. Los vectores unitarios y las componentes vectoriales del vector  $\mathbf{A}$  en estas direcciones se designan por  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  y por  $A_x, A_y, A_z$ , respectivamente, tal que:

$$\mathbf{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

En el plano  $(x, y)$  de la figura 1.9, se tiene:

Vector:  $\mathbf{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$

Componentes:  $A_x = A \cos \alpha, A_y = A \sin \alpha$

Magnitud:  $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

Dirección:  $\tan \alpha = A_y/A_x$

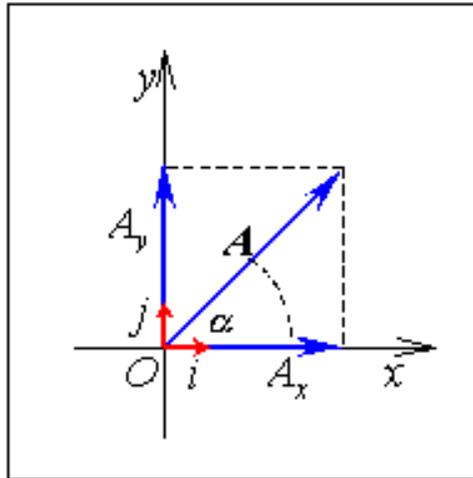


Figura 1.9. Componentes de un vector.

### 1.7.6 Igualdad de vectores en componentes.

Dos vectores son iguales si todas sus componentes son iguales, esto es,  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$  si  $A_x = B_x, A_y = B_y$  y  $A_z = B_z$ .

**1.7.7 Suma, resta y multiplicación por un escalar.**

Se opera sobre las componentes escalares análogas de los vectores. Para el caso tridimensional se realizan tres operaciones escalares por cada operación vectorial, como se indica, donde  $\lambda$  representa un escalar:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) + (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z + B_z) \hat{k}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) - (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x) \hat{i} + (A_y - B_y) \hat{j} + (A_z - B_z) \hat{k}$$

$$\lambda \vec{A} = (\lambda A_x) \hat{i} + (\lambda A_y) \hat{j} + (\lambda A_z) \hat{k}$$

**1.7.8 Producto escalar entre vectores.**

El producto escalar entre vectores da como resultado un escalar, se lee  $A$  punto  $B$ , y se define como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \alpha$$

donde  $A$  y  $B$  es la magnitud y  $\alpha$  es el ángulo entre los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ . Aplicado a vectores unitarios y a las componentes de un vector, se tiene:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

**1.7.9 Producto vectorial de vectores.**

El producto vectorial entre vectores da como resultado un vector, se lee *A cruz B*, y se define como:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}, \quad \text{con } |\vec{C}| = AB \text{sen} \alpha$$

donde  $A$  y  $B$  es la magnitud y  $\alpha$  es el ángulo entre los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , y la dirección de  $\mathbf{C}$  esta dada por la regla de la mano derecha o del tornillo derecho,  $\mathbf{C}$  es un vector perpendicular al plano formado por  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ . El producto vectorial se calcula resolviendo el siguiente determinante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Aplicado a vectores unitarios, se obtiene que:

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

**Ejemplo 1.6.** *Un gato se mueve en el plano (x,y) desde la posición  $P_1$  en (-3,-5) m hasta la posición  $P_2$  en (10,2) m. (a) Dibujar los vectores de posición y escribirlos en coordenadas cartesianas. Calcular (b) la variación de la posición del gato, (c) magnitud la variación y (d) su dirección.*

*Solución: a) en la figura 1.10 se dibuja el diagrama vectorial.*

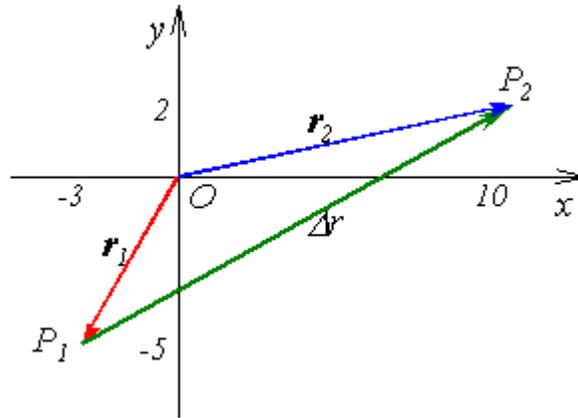


Figura 1.10. Ejemplo 6.

Posiciones:

$$r_1 = x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} \quad r_1 = -3\hat{i} - 5\hat{j}$$

$$r_2 = x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} \quad r_2 = 10\hat{i} + 2\hat{j}$$

b) La variación de la posición es la diferencia entre las posiciones del objeto, esto es la posición final menos la posición inicial denotada por  $\Delta r$ .

$$\Delta r = r_2 - r_1 = (10\hat{i} + 2\hat{j}) - (-3\hat{i} - 5\hat{j}) = 13\hat{i} + 7\hat{j} \text{ m}$$

c) Magnitud:  $|\Delta r| = \sqrt{(13)^2 + (7)^2} = 14,8\text{m}$

d) Dirección:  $\tan \theta = \frac{7}{13} \Rightarrow \theta = 28.3^\circ$

**Ejemplo 1.7:** Una hormiga camina por el borde de un CD de 6 cm de radio, rodeando la mitad del disco. Calcular: (a) la variación de su posición, (b) ¿cuánto camina?, (c) su variación de posición si completa el círculo.

**Solución:** Usando el sistema de referencia de la figura 1.11, donde  $i$  es la posición inicial, que se elige en el origen, y  $f$  la posición final.

a)  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$ , de la figura 11

$$\vec{r}_i = 0\hat{i} + 0\hat{j}, \quad \vec{r}_f = 12\hat{i} + 0\hat{j}$$

$$\Delta \vec{r} = 12\hat{i} \text{ cm}$$

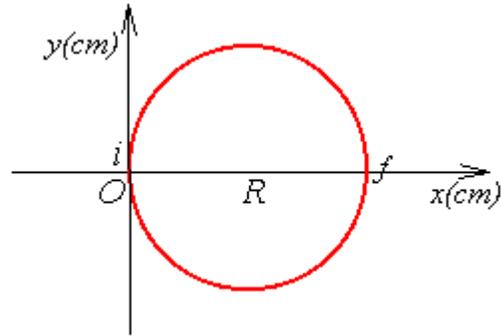


Figura 1.11.

b) Se pide distancia  $d$  recorrida desde  $i$  hasta  $f$  por el borde (por ejemplo el superior) del disco, si  $P$  es el perímetro, entonces:

$$d = \frac{1}{2}P = \frac{1}{2}2\pi R = \pi R = 6\pi \text{ cm} = 18.8 \text{ cm}$$

se observa que  $d \neq |\Delta \vec{r}|$

c) Hay que calcular  $\Delta \vec{r}$  después que la hormiga ha dado una vuelta completa.

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i = 0 \Rightarrow \Delta \vec{r} = 0\hat{i} - 0\hat{j} = \vec{0} \text{ cm}$$

**PROBLEMAS.**

- 1.1 Escribir usando prefijos, en unidades del Sistema Internacional: longitud del ecuador, radios del núcleo y átomo, segundos de un milenio, edad de la Tierra, volumen de una pulga, masa del Sol, distancia de la estrella más cercana a la Tierra (después del Sol).
- 1.2 El Sol es un ‘adulto joven’ de apenas casi 5 mil millones de años, escriba la edad del Sol sin y con prefijos del Sistema Internacional. (Cuando el Sol se apague, se acabará la fuente de energía que mantiene todos los procesos sobre la Tierra y por lo tanto la vida sobre ella.) R:  $1.57 \times 10^{17}$  s.
- 1.3 La energía que la Tierra recibe del Sol es del orden de  $220 \text{ watts/m}^2$ , estimar la cantidad de energía sobre toda la superficie terrestre. Expresar el resultado con prefijos.
- 1.4 Estimar la cantidad de kilómetros que tu has caminado desde que naciste a la fecha.
- 1.5 Estimar el número de pinos y su valor en pesos para un bosque de pinos típico de la 8ª Región.
- 1.6 Si durante un evento de lluvia en la zona cayeron 25 mm de agua, esto es  $25 \text{ lt/m}^2$ , estime la cantidad de agua que cayó sobre la Bahía Concepción. ¿A cuantas casas se podría abastecer con agua durante todo un día con esa cantidad?
- 1.7 Transformar  $10 \text{ m/s}$  a  $\text{km/h}$ ,  $300000 \text{ km/h}$  a  $\text{m/s}$ ,  $250 \text{ Glt}$  a  $\text{m}^3$ ,  $1.25 \text{ kg/m}^3$  a  $\text{gr/cm}^3$ ,  $500 \text{ hPa}$  a  $\text{atm}$ ,  $4500 \text{ m}^2$  a  $\text{cm}^2$ .
- 1.8 La Tierra tiene una edad de 4600 millones de años y el ser humano ha estado sobre ella desde hace unos 150 mil años. Si la edad la Tierra la hacemos equivalente a un día, ¿cuántos segundos tiene el ser humano sobre la Tierra?
- 1.9 Para las expresiones  $x = At + Bt^3$  y  $v = A + 3Bt^2$  donde  $x$  se mide en  $m$ ,  $t$  en  $s$  y  $v$  en  $m/s$ , determine las unidades de medida de  $A$  y de  $B$ .

- 1.10 Demuestre que las ecuaciones  $p + (1/2)\rho v^2 + \rho gh = cte$ ,  $v^2 = v_0^2 + 2ax$  y  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$  son dimensionalmente correctas, donde  $x$ ,  $h$  y  $\lambda$  son longitudes,  $v$  y  $v_0$  son velocidad ( $m/s$ ),  $a$  y  $g$  aceleración ( $m/s^2$ ),  $T$  tiempo ( $s$ ),  $p$  presión ( $kg/ms^2$ ), y  $\rho$  densidad ( $kg/m^3$ ).
- 1.11 Un vector de 5 unidades se orienta en dirección positiva del eje  $x$ , y otro de 3 unidades se orienta en  $230^\circ$ . Determine la suma y la resta de estos vectores, gráfica y analíticamente.
- 1.12 El vector  $A$  se extiende desde el origen hasta un punto que tiene coordenadas polares  $(8,60^\circ)$  y el vector  $B$  se extiende desde el origen hasta un punto que tiene coordenadas polares  $(3,340^\circ)$ . Calcular su producto escalar, vectorial y el ángulo que forman los vectores.
- 1.13 Si  $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$  y  $\vec{B} = -\hat{i} + 5\hat{j}$ , calcular su producto escalar, vectorial y el ángulo que forman los vectores. Dibujar todos los vectores.
- 1.14 Para los siguientes vectores:  $\vec{V}_1 = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ ,  $\vec{V}_2 = -3\hat{i} + 1.5\hat{j} + 2\hat{k}$ ,  $\vec{V}_3 = 2.5\hat{i} - 7\hat{j} - 5\hat{k}$ , calcular la magnitud y dirección de cada vector.
- 1.15 Para los vectores del problema 1.14 calcular: a) su suma, b)  $3\vec{V}_2 - \vec{V}_1$ , c)  $5\vec{V}_3 + \vec{V}_2$ , d)  $2\vec{V}_1 + 3\vec{V}_2 - 0.5\vec{V}_3$ . Dibujar los vectores y los resultados.
- 1.16 Para los vectores del problema 1.14, calcular a) el producto escalar entre cada par de vectores, f) el producto vectorial entre cada par.
- 1.17 El vector  $F_1$  tiene una magnitud de 5 unidades y el vector  $F_2$  tiene una magnitud de 10 unidades. Ambos vectores forman un ángulo de  $120^\circ$  entre si. Calcular su producto escalar y vectorial.
- 1.18 Demostrar que:  $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$
- 1.19 Demostrar que:  $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$
- 1.20 Demostrar que:  $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ ,  $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$ ,  $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

## CAPITULO 2. MOVIMIENTO EN UNA DIMENSION.

La cinemática es la rama de la mecánica que estudia la geometría del movimiento. Usa las magnitudes fundamentales longitud, en forma de camino recorrido, de posición y de desplazamiento, con el tiempo como parámetro. La magnitud física masa no interviene en esta descripción. Además surgen como magnitudes físicas derivadas los conceptos de velocidad y aceleración.

Para conocer el movimiento del objeto es necesario hacerlo respecto a un sistema de referencia, donde se ubica un observador en el origen del sistema de referencia, que es quien hace la descripción. Para un objeto que se mueve, se pueden distinguir al menos tres tipos de movimientos diferentes: *traslación* a lo largo de alguna dirección variable pero definida, *rotación* del cuerpo alrededor de algún eje y *vibración*. Generalmente el movimiento de traslación en el espacio está acompañado de rotación y de vibración del cuerpo, lo que hace que su descripción sea muy compleja. Por esto, se considera un estudio con simplificaciones y aproximaciones, en el cual se propone un modelo simple para estudiar cada movimiento en forma separada,. La primera aproximación es considerar al cuerpo como una partícula, la segunda es considerar sólo el movimiento de traslación, una tercera aproximación es considerar el movimiento en una sola dirección.

### 2.1 DEFINICIONES.

Antes de hacer la descripción del movimiento, es necesario definir algunos conceptos y variables físicas que se usarán en este curso.

**Cinemática:** describe el movimiento de los cuerpos en el universo, sin considerar las causas que lo producen.

**Movimiento:** es el cambio continuo de la posición de un objeto en el transcurso del tiempo.

**Partícula:** el concepto intuitivo que tenemos de partícula corresponde al de un objeto muy pequeño que puede tener forma, color, masa, etc., como por ejemplo un grano de arena. El concepto físico abstracto es una idealización de un objeto considerado como un punto matemático sin dimensiones, que tendrá sólo posición, masa y movimiento de traslación. Esto significa que cualquier

objeto puede ser considerado como partícula, independiente de su tamaño, considerando su masa concentrada en un punto que lo representa. Ejemplos de objetos que se pueden considerar como una partícula son un átomo, una hormiga, un avión, la Tierra, etc., en este último caso se justifica si se estudia su movimiento de traslación en torno al Sol.

**Posición:** es la ubicación de un objeto (partícula) en el espacio, relativa a un sistema de referencia. Es un vector y se denota por:

$$\vec{P} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (2.1)$$

donde  $x$ ,  $y$  y  $z$  son los valores de la posición en cada dirección, e  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  son los vectores unitarios en la dirección de cada eje  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. En una dimensión es simplemente  $\vec{P} = x\hat{i}$ . Es una de las variables básicas del movimiento, junto con el tiempo, en el SI se mide en metros. La posición se puede dibujar en un sistema de referencia en una y dos dimensiones como se muestra en la figura 2.1a y 2.1b respectivamente:

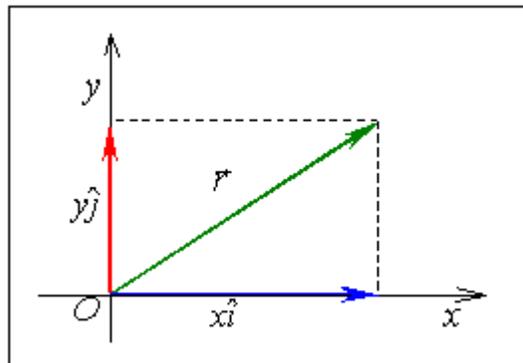
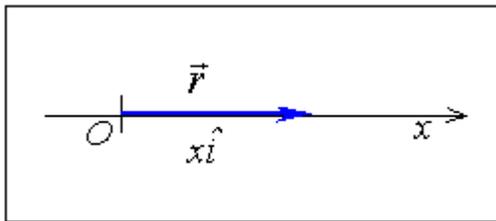


Figura 2.1a: Posición en una dimensión. Figura 2.1b: Posición en dos dimensiones.

**Desplazamiento:** el desplazamiento se define como el cambio de posición de una partícula en el espacio (para indicar cambios o diferencias finitas de cualquier variable en física se usa el símbolo delta,  $\Delta$ ). Es independiente de la trayectoria que se siga para cambiar de posición. Para determinarlo se debe conocer la posición inicial  $\vec{P}_i$  y final  $\vec{P}_f$  de la partícula en movimiento. El des-

plazamiento es un vector, que puede ser positivo, negativo o cero, en el SI se mide en metros; se dibuja en el esquema de la figura 2.2. En una dimensión y en dos dimensiones, el desplazamiento es:

$$\Delta x = (x_f - x_i)\hat{i} \quad (2.2)$$

$$\Delta \vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = (x_f\hat{i} + y_f\hat{j}) - (x_i\hat{i} + y_i\hat{j})$$

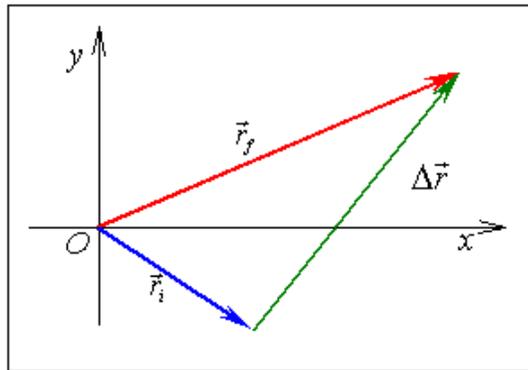


Figura 2.2. Vector desplazamiento en dos dimensiones.

**Trayectoria:** es la curva geométrica que describe una partícula en movimiento en el espacio, y se representa por una ecuación de la trayectoria. En una dimensión es una recta  $y = cte$ , paralela al eje  $x$ ; en dos dimensiones puede ser una parábola  $y = a + bx^2$  o una circunferencia  $x^2 + y^2 = r^2$  u otra curva.

**Distancia:** es la longitud que se ha movido una partícula a lo largo de una trayectoria desde una posición inicial a otra final. Su valor numérico en general no coincide con el valor numérico del desplazamiento, excepto en casos muy particulares.

**Tiempo:** ¿Qué es el tiempo? No es fácil definir físicamente el concepto de tiempo. Es más simple hablar de intervalo de tiempo, que lo podemos definir como la duración de un evento, o si consideramos la posición y sus cambios, podemos decir que el tiempo es lo que tarda una partícula en moverse desde una posición inicial a otra final.

## 2.2 VELOCIDAD Y ACELERACION.

Para describir el movimiento debemos definir otras variables cinemáticas, que son la *velocidad* y la *aceleración*.

### 2.2.1 Velocidad media.

Para una partícula que se mueve en dirección del eje  $x$ , desde la posición inicial  $x_i$  que en un instante inicial  $t_i$  se encuentra en el punto  $P$ , hasta la posición final  $x_f$  que en un instante final  $t_f$  se encuentra en el punto  $Q$ , el desplazamiento de la partícula en el intervalo de tiempo  $\Delta t = t_f - t_i$  es  $\Delta x = x_f - x_i$ . Se elige el sistema de referencia que se muestra en la figura 2.3. Se define la componente  $x$  de la velocidad media  $\bar{v}_{mx}$  de la partícula como el cambio de posición en un intervalo de tiempo por la expresión:

$$\bar{v}_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \quad (2.3)$$

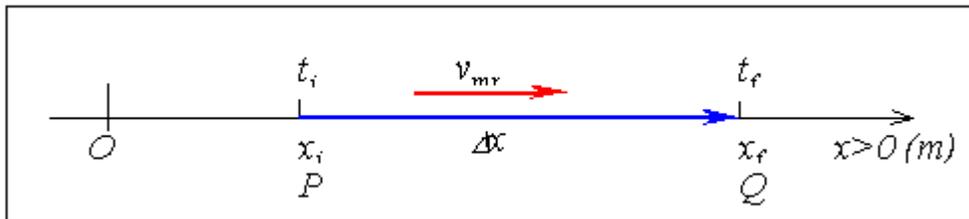


Figura 2.3 Sistema de referencia en una dimensión para definir la velocidad media.

De su definición se obtiene que la unidad de medida de la velocidad media en el SI es el cociente entre la unidad de medida de longitud y de tiempo, esto es  $m/s$ , que se lee metros por segundo. La velocidad media es independiente de la trayectoria en el movimiento desde  $P$  a  $Q$ , es un vector y puede ser positiva, negativa o cero, según el signo o valor del desplazamiento (ya que  $\Delta t > 0$  siempre). En una dimensión, si la posición  $x$  aumenta con el tiempo ( $x_f > x_i$ )  $\Delta x > 0$ , entonces  $\bar{v}_{mx} > 0$ , y la partícula se mueve en dirección positiva del eje  $x$ , y viceversa si  $\Delta x < 0$ .

Una interpretación geométrica de la velocidad media se puede ilustrar en un gráfico  $x/t$  llamado gráfico **posición - tiempo**. La recta  $PQ$  es la hipotenusa del triángulo de lados  $\Delta x$  y  $\Delta t$ , que se muestra en la figura 2.4. La pendiente de la recta  $PQ$ , que tiene el mismo valor numérico que la  $v_{mx}$ , está dada por la tangente del ángulo  $\alpha$  que forma la pendiente con el eje horizontal, cuyo valor es:

$$\tan \alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{pendiente}$$

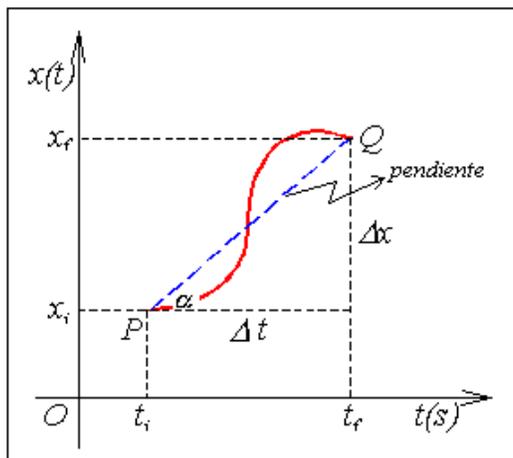


Figura 2.4a

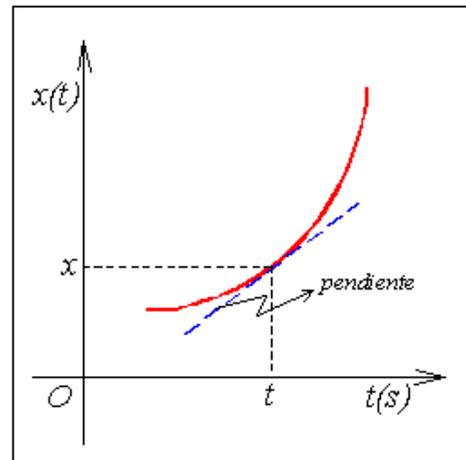


Figura 2.4b

Notar que el gráfico de la figura 2.4 no es un sistema de referencia en dos dimensiones, a pesar de tener dos ejes, ya que el eje horizontal no es de posición, sino de tiempo.

### 2.2.2 Velocidad instantánea.

Es la velocidad de la partícula en un instante determinado. Si se considera que el intervalo de tiempo  $\Delta t$  se puede hacer cada vez más y más pequeño, de tal manera que el instante final  $t_f$  tiende a coincidir con el instante inicial  $t_i$ , entonces se dice que el intervalo de tiempo tiende a cero, o sea  $\Delta t \rightarrow 0$ . En el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta v$  también tiende a cero, por lo que la partícula se encuentra en una posición instantánea. Por lo tanto se puede definir el vector velocidad instantánea  $\vec{v}$  de la siguiente forma:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.4)$$

La velocidad instantánea, que llamaremos simplemente velocidad, puede ser positiva (negativa) si la partícula se mueve en dirección positiva (negativa) del eje  $x$ , o cero, en este caso se dice que la partícula está en reposo. La velocidad tiene la misma interpretación geométrica que la velocidad media y en la figura 2.4b se ilustra en el gráfico  $x/t$  una curva de pendiente positiva, que representa una velocidad positiva.

### **Rapidez.**

Se define como rapidez instantánea  $v$  a la magnitud o valor numérico del vector velocidad, por lo tanto es siempre positiva.

### **2.2.3 Aceleración media.**

Lo normal es que la velocidad de una partícula en movimiento varíe en el transcurso del tiempo, entonces se dice que la partícula tiene **aceleración**. Se define la aceleración media  $\mathbf{a}_m$  como el cambio de velocidad en un intervalo de tiempo, lo que se escribe como:

$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} \quad (2.5)$$

La aceleración media es un vector, su unidad de medida en el SI es el resultado de dividir la unidad de medida de velocidad y de tiempo, esto es  $(m/s)/s$ , que se lee  $m/s^2$ .

### **2.2.4 Aceleración instantánea.**

Es la aceleración  $\mathbf{a}$  de la partícula en un instante determinado. De manera análoga a la definición de la velocidad, se escribe:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.6)$$

Como vector, si la aceleración es positiva (negativa) apunta en dirección positiva (negativa) del eje  $x$ , independientemente de la dirección del movimiento de la partícula. Puede existir una aceleración positiva o negativa y la partícula puede estar aumentando su velocidad, y viceversa. En el esquema de la figura 2.5 se muestra para algunos casos el sentido de la aceleración para diferentes valores y signos de la velocidad.

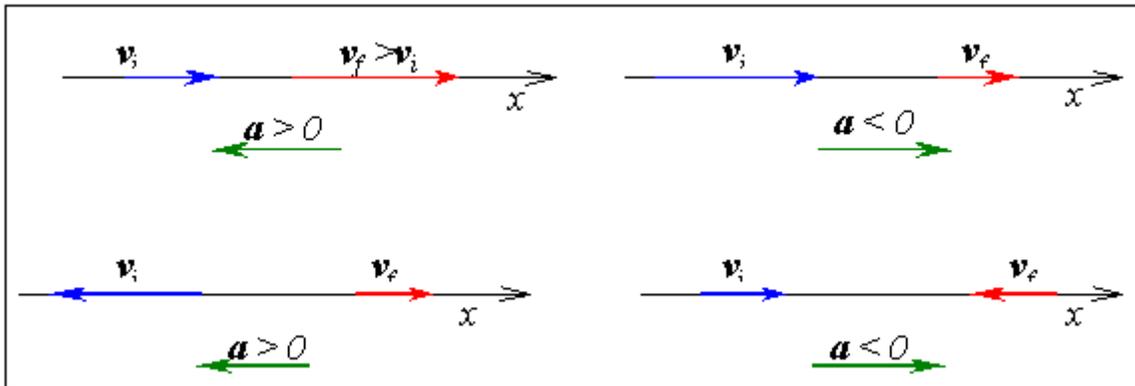


Figura 2.5 Esquema de diferentes sentidos de la aceleración.

Si la aceleración es constante, entonces la rapidez promedio se puede calcular como el promedio aritmético entre los distintos valores de rapidez de la forma:

$$v_m = \frac{1}{2}(v_i + v_f)$$

Una interpretación geométrica de la aceleración se obtiene del gráfico rapidez versus tiempo o gráfico  $v/t$ , donde la pendiente de la curva representa el valor numérico de la aceleración, como se ve en la figura 2.6. Si la rapidez, esto es la pendiente de la curva, es positiva (negativa), la aceleración es positiva (negativa). En el gráfico se observa una curva con pendiente positiva que dismi-

nuye su valor hasta cero, que representa un movimiento con aceleración positiva, pero disminuyendo su valor, luego la pendiente se hace negativa, aumentando negativamente su valor y lo mismo ocurre con la aceleración.

$$\tan \alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{pendiente} = a$$

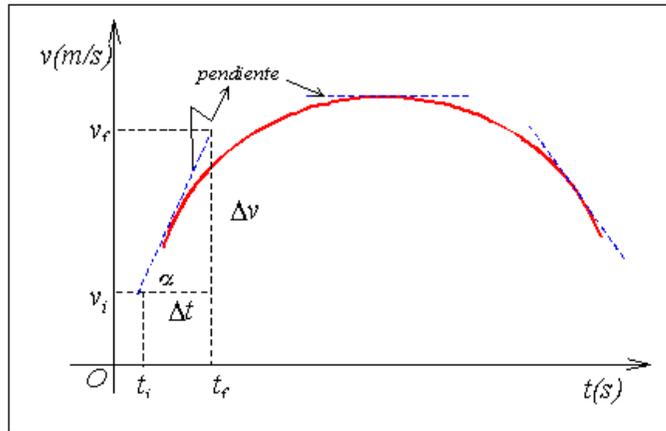


Figura 2.6 Gráfico rapidez versus tiempo.

La aceleración también se puede escribir como:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

que corresponde a la segunda derivada de la posición respecto al tiempo.

La aceleración también puede variar en el tiempo, pero esa variación no tiene significado físico de importancia, por lo que no se le da un nombre en particular. Aunque  $da/dt$  podría representar o llamarse algo así como “sacudón” o “empujón”. También puede existir un  $d(\text{empujón})/dt$  y así hasta el infinito.

**Ejemplo 2.1:** Una partícula se mueve en dirección  $x > 0$  durante 10 s con rapidez constante de 18 km/h, luego acelera hasta 25 m/s durante 5 s. Calcular: a) su desplazamiento en los primeros 10 s, b) la aceleración media en cada intervalo de tiempo, c) la rapidez media del movimiento.

**Solución:** Datos  $\Delta t_1 = 10 \text{ s}$ ,  $v_i = 18 \text{ km/h} = 5 \text{ m/s}$ ,  $\Delta t_2 = 5 \text{ s}$ ,  $v_f = 25 \text{ m/s}$

$$a) \quad v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = v\Delta t = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 10 \text{ s} = 50 \text{ m}$$

b) para  $\Delta t_1$ :  $v_i = \text{cte} \Rightarrow a = 0$

$$\text{para } \Delta t_2: \quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(25 - 5) \text{ m/s}}{5 \text{ s}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$c) \quad v_m = \frac{v_i + v_f}{2} = \frac{(5 + 25) \text{ m/s}}{2} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### 2.3 DESCRIPCIÓN CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO EN UNA DIMENSIÓN CON ACELERACIÓN CONSTANTE.

El movimiento de una partícula se describe por completo si se conoce su posición en cualquier instante. Para encontrar leyes que expliquen los diferentes cambios de los cuerpos en el tiempo, se deben registrar los cambios y describirlos. Algunos cambios son difíciles de describir, como por ejemplo los movimientos de una nube, formada por billones de gotitas de agua que se mueven al azar y pueden evaporarse o unirse para formar gotas más grandes, o bien los cambios de opinión de una mujer.

Describir el movimiento significa poder responder a la pregunta ¿en que posición se encuentra el cuerpo en movimiento en cualquier instante de tiempo? Si la aceleración  $\vec{a}$  varía en el tiempo el movimiento puede ser muy complejo y difícil de analizar. Un caso simple de movimiento es aquel que se realiza en una dirección con aceleración constante. Si la aceleración es constante, entonces la  $\vec{a} = \vec{a}_m$ , lo que significa que la velocidad cambia de manera uniforme en todo el movimiento.

Consideremos primero el caso de una partícula que se mueve en dirección del eje  $x$  con la magnitud de la aceleración  $a$  constante. Si  $v_0$  es el valor de la velocidad o rapidez en el instante inicial  $t_0$ , y  $v$  su valor en el instante  $t$ , de la definición de  $a$  se tiene:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a dt = a \int_{t_0}^t dt$$

$$v - v_0 = a(t - t_0) \Rightarrow$$

$$\boxed{v(t) = v_0 + a(t - t_0)} \quad (2.7)$$

La ecuación 2.7 permite determinar la velocidad  $v = v(t)$  de una partícula que se mueve en una dirección con aceleración  $a$  constante, para cualquier instante  $t > t_0$ . Como  $v_0$ ,  $a$  y  $t_0$  son valores conocidos, se observa que  $v$  es una función lineal del tiempo  $t$ , por lo tanto el gráfico rapidez versus tiempo o gráfico  $v/t$  es de la forma que se muestra en la figura 2.7a. Para  $a < 0$ , y para el caso de una partícula que está disminuyendo su rapidez, los gráficos  $v/t$  y  $a/t$  se muestran en la figura 2.7b.

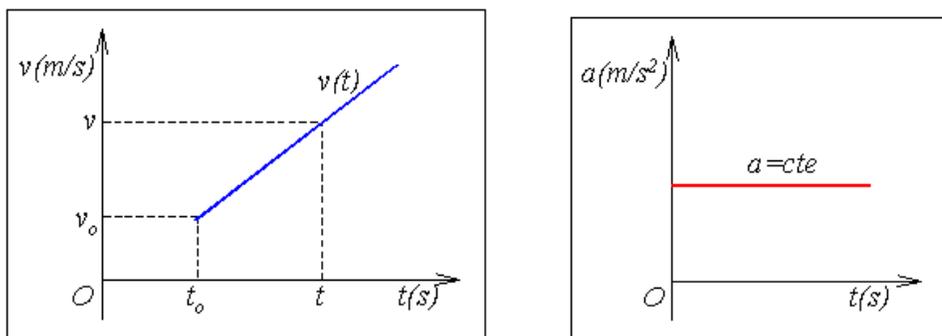


Figura 2.7a. Gráficos  $v/t$  y  $a/t$ , para  $a > 0$ .

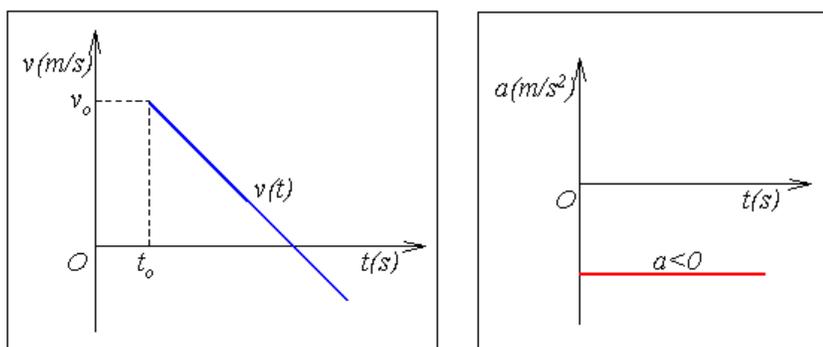


Figura 2.7b. Gráficos  $v/t$  y  $a/t$ , para  $a < 0$ .

El valor de la pendiente de la tangente a la curva  $v(t)$  en el gráfico  $v/t$  es igual al valor numérico de la aceleración. Para el movimiento con aceleración constante  $v(t)$  es la ecuación de una recta.

Conocida  $v = v(t)$  se puede usar la definición de la velocidad para obtener la posición de la partícula en cualquier instante.

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt \Rightarrow \int dx = \int v dt$$

Si inicialmente, para  $t = t_0$ , la partícula se encuentra en la posición  $x_0$  y en cualquier instante  $t$  se encuentra en la posición  $x$ , la velocidad en función del tiempo es  $v(t) = v_0 + a(t - t_0)$ , reemplazando en la integral, con los límites de integración correspondientes queda:

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)] dt = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2$$

Escrita en forma vectorial, se obtiene:

$$\vec{x} - \vec{x}_0 = \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a}(t - t_0)^2$$

Como  $x_0$ ,  $v_0$  y  $a$  son los valores conocidos para  $t = t_0$ , se deduce que  $x$  es sólo función del tiempo, así la ecuación que describe la posición de una partícula en movimiento en función del tiempo  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  es:

$$\boxed{\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a}(t - t_0)^2} \quad (2.8)$$

La ecuación 2.8 es la expresión que permite determinar el valor de la posición de la partícula en cualquier instante, conocido los valores iniciales. El gráfico posición/tiempo es una parábola, ya que la ecuación  $x = x(t)$  es cuadrática en  $t$ . La pendiente de la tangente a la curva en cualquier instante  $t$  representa el valor numérico de la velocidad de la partícula (figura 2.8). Esta ecuación  $x(t)$  también se conoce como “*ecuación de itinerario*”.

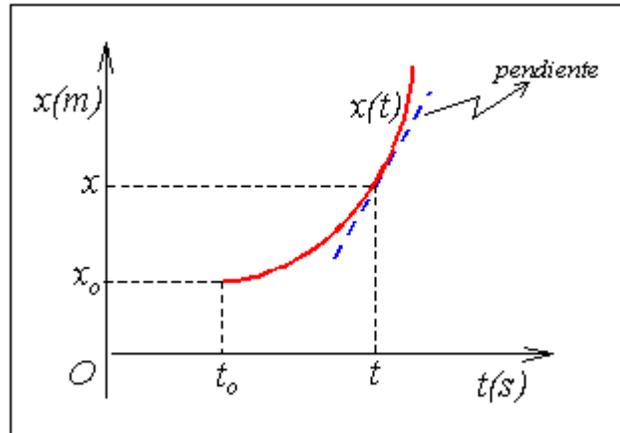


Figura 2.8 Gráfico x/t

Las ecuaciones  $x = x(t)$ ,  $v = v(t)$  y  $a = cte.$ , forman el conjunto de ecuaciones cinemáticas, que permiten describir el movimiento simple de una partícula que se mueve con aceleración constante en una dirección, y como con esas ecuaciones se pueden determinar los valores de esas variables para la partícula en cualquier instante, el movimiento queda completamente descrito. Para el caso particular de un movimiento con rapidez constante, la aceleración de la partícula es cero, y las ecuaciones del movimiento 2.7 y 2.8 se reducen a:

$$x = x_0 + v_0(t - t_0)$$

$$v = v_0 = cte.$$

**Ejemplo 2.2:** Demostrar que si la aceleración de una partícula en movimiento es constante, se tiene que  $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$ .

*Solución:*

De  $v(t) = v_0 + a(t - t_0)$ , se despeja  $t - t_0 = \frac{v - v_0}{a}$ ,

reemplazando en  $x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$ ,

$$x - x_0 = v_0 \frac{(v - v_0)}{a} + \frac{1}{2}a \left( \frac{v - v_0}{a} \right)^2$$

$$x - x_0 = \frac{v_0 v}{a} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{(v^2 - 2vv_0 + v_0^2)}{2a}, \quad \text{dividiendo por } 2a$$

$$2a(x - x_0) = 2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2vv_0 + v_0^2 = v^2 - v_0^2$$

$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

Esta es una expresión escalar independiente del tiempo, no es una ecuación general, por lo que no se puede usar en cualquier problema, es de utilidad restringida ya que sólo permite obtener la magnitud de las variables que contiene.

**Ejemplo 2.3.** *un móvil parte desde el reposo en el instante  $t = 5$  s y acelera hacia la derecha a razón de  $2 \text{ m/s}^2$  hasta  $t = 10$  s. A continuación mantiene su velocidad constante durante 10 s. Finalmente frena hasta detenerse, lo que logra hacer 3 segundos más tarde. a) Determinar a qué distancia del punto de partida se encuentra en  $t = 10$  s. b) ¿Con qué velocidad se mueve en ese instante? c) ¿A qué distancia de la partida se encuentra cuando empieza a frenar? d) ¿Dónde se detiene respecto al punto de partida? e) Escriba las ecuaciones correspondientes a:  $a(t)$ ,  $v(t)$ ,  $x(t)$  para cada etapa del movimiento.*

**Solución:** Se puede elegir el SR como el cliente guste; una posibilidad se ilustra en la figura 2.9, donde inicialmente se ubica a la partícula en el origen  $O$  y se empieza a medir el tiempo desde el instante inicial 5 s.

a) Se pide evaluar  $x(t)$  para  $t = 10$  s, con las condiciones  $x_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ ,  $a_0 = 2 \text{ m/s}^2$ ,  $t_0 = 5 \text{ s}$ ,  $t_1 = 10 \text{ s}$ , en el tramo A

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2$$

$$x(10) = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{m}{s^2} (10 - 5)^2 s^2 = 25m$$

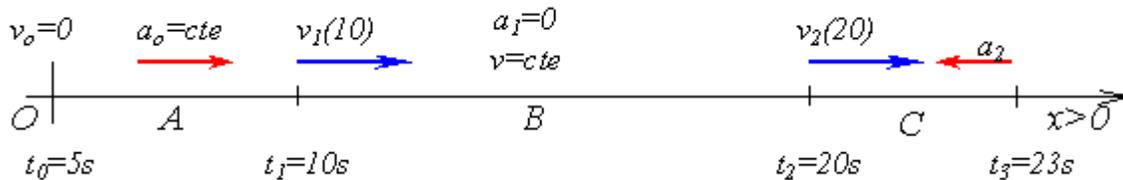


Figura 2.9

b) Ahora hay que calcular  $v(t)$  en  $t = 10$  s, usando la ecuación:

$$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0)$$

$$v(10) = 0 + 2 \frac{m}{s^2} (10 - 5)s = 10 \text{ m/s}$$

c) Piden evaluar  $x(t)$  para  $t = 20$  s, usando esquema y datos del tramo B:

$$x(t) = x_{10} + v_{10}(t - t_1) + \frac{1}{2}a_1(t - t_1)^2$$

$$x(20) = 25m + 10 \frac{m}{s} (20 - 10)s + 0 = 125m$$

d) Aquí se pide calcular  $x(t)$  para  $t = 23$  s, se conoce  $v_f = 0$ ,  $t_3 = 23$  s, pero no se conoce  $a_2$ , por lo que se debe calcular.

$$x(t) = x_{20} + v_{20}(t_3 - 20) + \frac{1}{2}a_2(t - 20)^2$$

cálculo de  $a_2$ :

$$v = v_2 + a_2(t - t_2) \text{ en el tramo C}$$

$$0 = v_2 + a_2(t_3 - 20) \Rightarrow a_2 = -\frac{v_2}{t_3 - 20}$$

Pero  $v_2 = \text{cte}$  en el tramo B  $v_2 = 10 \text{ m/s}$

$$a = -\frac{10 \text{ m/s}}{(23 - 20) \text{ s}} = -\frac{10 \text{ m}}{3 \text{ s}^2}$$

$$x(t) = 125 + 10(23 - 20) - \frac{1}{2} \frac{10}{3} \cdot (23 - 20)^2 = 140 \text{ m}$$

$$\Rightarrow x(23) = 140 \text{ m}$$

e) Ecuaciones de movimiento:

$$\text{Para el tramo A: } x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0(t - t_0)^2$$

Con  $x_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ ,  $a_0 = 2 \text{ m/s}^2$ ,  $t_0 = 5 \text{ s}$

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0(t - 5)^2 \Rightarrow x(t) = (t - 5)^2$$

$$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0) \Rightarrow v(t) = 2(t - 5)$$

Las ecuaciones para los tramos B y C las puede deducir el alumnos de los resultados obtenidos en c) y d), donde basta reemplazar los valores en las funciones de posición y rapidez en función de  $t$ .

**Ejemplo 2.4.** *Un auto ingresa en Concepción al puente nuevo a San Pedro con una rapidez de 54 km/h, la que mantiene constante mientras recorre el puente. En el mismo instante en San Pedro otro auto ingresa lentamente al puente con una rapidez inicial de 10.8 km/h hacia Concepción, acelerando a  $1 \text{ m/s}^2$ . Si la longitud del puente es de 1838 m. Calcular a) la posición donde se cruzan, b) la rapidez del auto de San Pedro en el instante en que se cruzan, ¿qué comentario puede hacer de este resultado?*

Solución: Datos:  $t_{0A} = t_{0B} = 0$ ,  $x_{0A} = 0$ ,  $x_{0B} = 1838m$

$$v_{0A} = 54 \frac{km}{h} \times \frac{1h}{3600s} \times \frac{1000m}{1km} = 15 \frac{m}{s}, a_A = 0$$

$$v_{0B} = 10.8 km/h = 3 m/s, a_B = 1m/s^2$$

El esquema de la figura 2.10, muestra el sistema de referencia elegido:



Figura 2.10.

a) El movimiento es en una dimensión con  $a = cte$ , las ecuaciones para cada móvil (A en Concepción, B en San Pedro) son:

$$x_A = x_{0A} + v_{0A}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_A(t - t_0)^2 \Rightarrow x_A = v_{0A}t \Rightarrow x_A = 15t$$

$$v_A = v_{0A} + a_A(t - t_0) \Rightarrow v_A = v_{0A} \Rightarrow v_A = 15 m/s$$

$$x_B = x_{0B} + v_{0B}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_B(t - t_0)^2 \Rightarrow x_B = 1838 - 3t - \frac{1}{2}t^2$$

$$v_B = v_{0B} + a_B(t - t_0) \Rightarrow v_B = -3 - t$$

Cuando se cruzan:  $x_A = x_B$ , entonces

$$15t = 1838 - 3t - 0,5t^2 \Rightarrow 0,5t^2 + 18t - 1838 = 0$$

$$t = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 + 4(0.5)(1838)}}{1} \Rightarrow t_1 = 45.2s, \quad t_2 = -40.6s$$

$$\therefore x(45.2) = 15(45.2) = 678m$$

b)  $v_B(45.2) = -3 - 45.2 = -48.2m/s = 173.5 \text{ km/h}$

El automóvil de San Pedro no puede acelerar durante todo ese tiempo, porque alcanzaría una rapidez muy alta, superando en mucho la máxima permitida y posible de alcanzar.

#### 2.4 CALCULO GRÁFICO DE $\Delta x$ Y $\Delta v$ .

El proceso de integración es gráficamente equivalente a encontrar el área bajo la curva  $y = f(x)$ . Se puede usar esta propiedad de las integrales para calcular gráficamente el valor del desplazamiento  $\Delta x$  y el cambio de rapidez  $\Delta v$  de una partícula en movimiento.

De la definición de velocidad se tiene:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v(t)dt \Rightarrow$$

$$\Delta x = \int_{t_0}^t v(t)dt$$

donde  $v(t)$  es la velocidad en cualquier instante. Si se conoce la forma analítica de  $v(t)$  se puede calcular la integral, pero si no se conoce, se puede evaluar gráficamente y por definición de integral, la expresión anterior se interpreta como (ver figura 2.11a):

$$\text{desplazamiento} = \text{área bajo la curva } v/t$$

Considerando primero el caso en que la partícula se mueve con rapidez constante  $v_0$  (significa que su aceleración es cero), entonces del gráfico  $v/t$ , que se

muestra en la figura 2.11a, el desplazamiento es el área del rectángulo de lados  $v_o$  y  $\Delta t$ , esto es:

desplazamiento = área rectángulo

$$\Delta x = v_o \Delta t, \text{ con } v_o = cte.$$

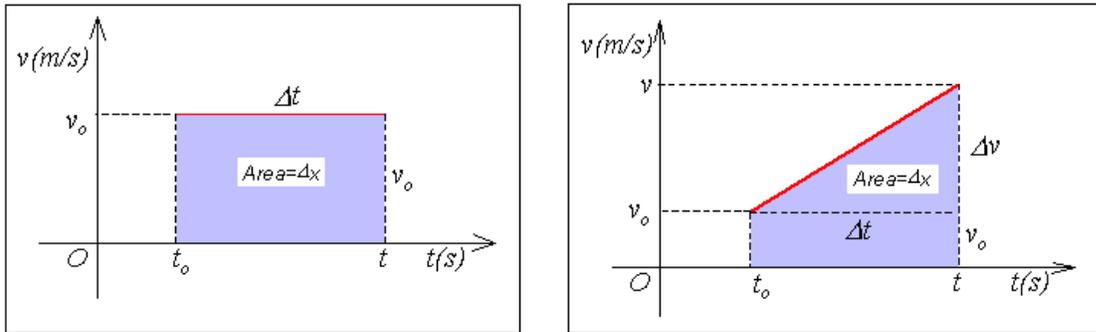


Figura 2.11 a) izquierda, b) derecha.

Considerando ahora el caso en que la partícula se mueve con rapidez  $v(t)$  función lineal del tiempo (en este caso la aceleración es constante), o sea  $v(t) = v_o + a(t - t_o)$ , el desplazamiento  $\Delta x$  de la partícula durante el intervalo de tiempo desde  $t_o$  a  $t$  es igual al área bajo la recta  $v(t)$  de la figura 2.11b:

desplazamiento = área rectángulo + área triángulo

$$\Delta x = v_o \Delta t + \frac{1}{2} \Delta v \Delta t \Rightarrow$$

$$\Delta x = v_o \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

De manera similar se obtiene el calculo gráfico para el cambio de rapidez. Considerar una partícula que se mueve con rapidez  $v_o$  en el instante inicial  $t_o$  y con rapidez  $v$  en el instante  $t$ , que aumenta su aceleración linealmente con el tiempo, o sea  $a(t) = a_o + k(t - t_o)$ , donde  $a_o$  es el valor inicial de la aceleración

y  $k$  representa el valor de la pendiente de la recta en el gráfico aceleración versus tiempo, que debe tener unidad de medida de  $m/s^3$ . En este caso estamos extendiendo la descripción del movimiento al caso de una partícula con aceleración variable, dejando de lado la restricción impuesta al principio de este capítulo. El cambio de rapidez  $\Delta v$  de la partícula durante el intervalo de tiempo desde  $t_o$  a  $t$  es igual al área bajo la recta  $a(t)$  de la figura 2.12:

cambio de rapidez = área rectángulo + área triángulo

$$\Delta v = a_o \Delta t + \frac{1}{2} \Delta a \Delta t$$

Como se propuso,  $a$  es una función lineal de  $t$  de la forma  $a(t) = a_o + k(t - t_o)$ , entonces  $a(t) - a_o = k(t - t_o)$ , o bien  $\Delta a = k \Delta t$ , reemplazando se tiene:

$$\Delta v = a_o \Delta t + \frac{1}{2} k (\Delta t)^2$$

Observar que en este caso se tiene un método para describir un movimiento con aceleración variable (en este caso linealmente) en el tiempo.

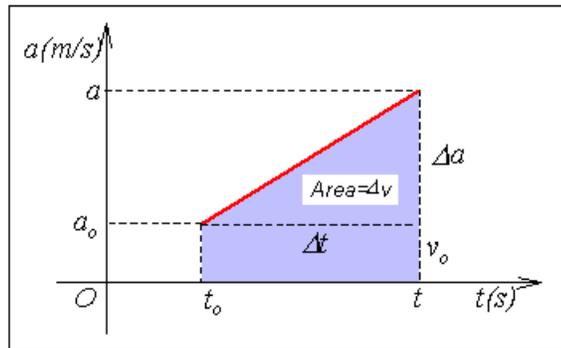


Figura 2.12

**Ejemplo 2.5:** En la figura 2.13 se muestra el gráfico rapidez/tiempo para una partícula que se mueve en dirección positiva del eje  $x$ . a) calcular el desplazamiento de la partícula, b) hacer el gráfico aceleración/tiempo, c) determinar las ecuaciones de movimiento en cada intervalo de tiempo, d) calcular su posición en los instantes 5, 10 y 20 segundos.

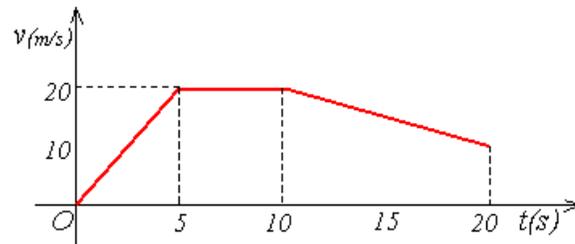


Figura 2.13 Ejemplo 5.

**Solución.** a) El desplazamiento es igual al área (A) bajo la curva  $v/t$ , que es conveniente calcular por intervalos de tiempo, entonces:

$$0 \leq t < 5s: \quad A_1 = \Delta x_1 = \frac{1}{2} \left( 20 \frac{m}{s} \right) (5s) = 50m$$

$$5 \leq t < 10s: \quad A_2 = \Delta x_2 = \left( 20 \frac{m}{s} \right) (5s) = 100m$$

$$10 \leq t \leq 20s: \quad A_3 = \Delta x_3 = \frac{1}{2} \left( 10 \frac{m}{s} \right) (10s) + \left( 10 \frac{m}{s} \right) (10s) = 150m$$

$$\Delta x_T = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 50 + 100 + 150 = 300m$$

b) Los valores de la aceleración que se pueden calcular de la pendiente del gráfico  $v/t$  en cada intervalo de tiempo, se indican en el gráfico  $a/t$  de la figura 2.14.

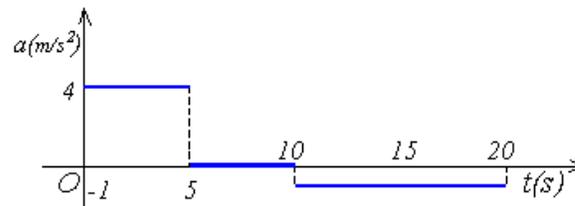


Figura 2.14. Ejemplo 5, parte b).

c) Determinación de las ecuaciones de movimiento, suponiendo que  $x_o = 0$  para  $t_o = 0$ .

$$0 \leq t < 5s : \quad x(t) = v_o t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow x(t) = 2t^2$$

$$5 \leq t < 10s : \quad x(t) = x(5) + v_o(t-5) + \frac{1}{2} a(t-5)^2 \Rightarrow \\ x(t) = 50 + 20(t-5)$$

$$10 \leq t \leq 20s : \quad x(t) = x(10) + v_o(t-10) + \frac{1}{2} a(t-10)^2 \Rightarrow \\ x(t) = 150 + 20(t-10) - \frac{1}{2}(t-10)^2$$

d) La posición en los instantes pedidos (y en cualquier otro tiempo) se puede calcular con las ecuaciones de movimiento anteriores

$$\text{para } t = 5s: x(t) = 2t^2 \Rightarrow x(5) = 2(5)^2 = 50 \text{ m}$$

$$\text{para } t = 10s: x(t) = 50 + 20(t-5) \Rightarrow x(10) = 50 + 20(10-5) = 150 \text{ m}$$

$$\text{para } t = 20s: x(t) = 150 + 20(t-10) - \frac{1}{2}(t-10)^2 \Rightarrow x(20) = 300 \text{ m}$$

*Ejercicio: calcular la posición en los instantes 2.5, 8 y 15 segundos.*

## 2.5 CUERPOS EN CAÍDA LIBRE.

Un caso particular de movimiento en una dimensión, es aquel de los objetos que se mueven libremente en dirección vertical cerca de la superficie de la Tierra, que se conoce como movimiento de caída libre. Galileo (1564 – 1642), físico y astrónomo italiano, fue el primero en estudiar el movimiento de caída libre, al observar que dos cuerpos diferentes, al dejarlos caer desde la torre inclinada de Pisa, llegaban al suelo casi al mismo tiempo.

Experimentalmente se demuestra que todos los cuerpos que se dejan caer cerca de la superficie de la Tierra, lo hacen con una aceleración aproximadamente constante. Esta aceleración, que se llama aceleración de gravedad, es producida por una fuerza que existe entre cuerpos con masa, llamada fuerza de atracción gravitacional, cuyo origen será explicado en el Capítulo 9.

La aceleración de gravedad, que se denota por  $\vec{g}$  es un vector que apunta hacia el centro de la Tierra, su magnitud aumenta levemente al aumentar la latitud, es decir desde el ecuador hacia los polos, y disminuye al aumentar la altura sobre la superficie terrestre. Su valor medio en la superficie de la Tierra es aproximadamente de  $9.8 \text{ m/s}^2$ .

Se dice que un objeto está en caída libre cuando se mueve bajo la influencia sólo de la aceleración de gravedad, despreciando la resistencia (es otra fuerza que se resiste al movimiento y que también será estudiada más adelante) que el aire opone a los cuerpos en movimiento, sin importar la velocidad inicial del objeto. ***Todos los cuerpos que se lanzan hacia arriba o hacia abajo, o se dejan caer, lo hacen libremente una vez que se dejan en libertad. La aceleración que adquieren es siempre la aceleración de gravedad, vertical hacia abajo, cualquiera sea la dirección inicial del movimiento.***

Como el movimiento de caída libre es en una dimensión, con aceleración constante, se puede adoptar como dirección del movimiento al eje vertical  $y$ . Por lo tanto se pueden aplicar las ecuaciones para el movimiento en una dimensión, tomando al eje  $y$  en la dirección del movimiento de caída, por convención positivo hacia arriba. Con esta convención, un movimiento de caída libre de ascenso o de descenso tiene una aceleración  $g$  negativa. También se debe tener en cuenta que si el cuerpo asciende (desciende) su velocidad será positiva (negativa) en este sistema de referencia. De esta forma las ecuaciones de movimiento 2.7 y 2.8 se transforman en las ecuaciones para caída libre:

$$y = y_o + v_{oy} - \frac{1}{2} g(t - t_o)^2 \quad (2.9)$$

$$v_y = v_{oy} - g(t - t_o) \quad (2.10)$$

Los gráficos posición/tiempo, velocidad/tiempo y aceleración/tiempo para una partícula que se lanza verticalmente hacia arriba, desde una posición inicial  $y_o$ , que no tiene porque ser el suelo, son los que se muestran en la figura 2.15

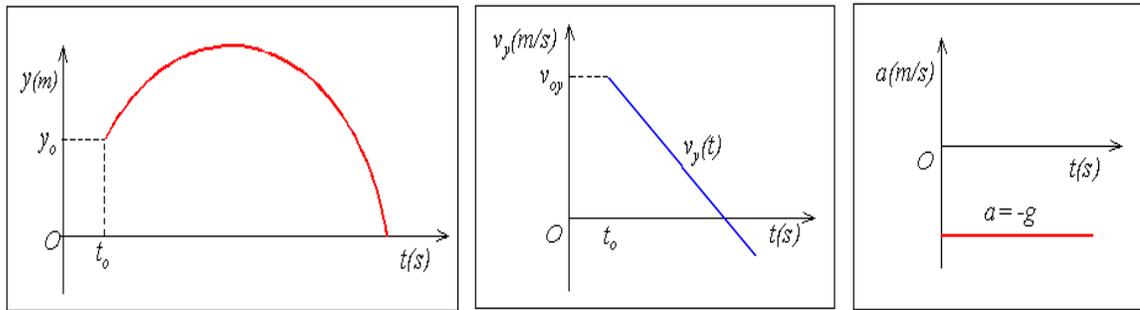


Figura 2.15. Gráficos  $y/t$ ,  $v_y/t$  y  $a/t$ , para  $a = -g$

**Ejemplo 2.6:** Tito lanza una piedra hacia arriba desde la terraza de un edificio de 50 m de alto, con una rapidez inicial de 20 m/s. Cuando está cayendo la piedra pasa justo por el costado del edificio. Calcular a) el tiempo para que la piedra alcance su altura máxima, b) la altura máxima, c) el tiempo que tarda en pasar por el punto inicial, d) la velocidad de la piedra en ese instante, e) el tiempo que tarda en llegar al suelo, f) la velocidad en ese instante.

**Solución:** Considerando un sistema de referencia que se muestra en la figura 2.16, con el eje  $y$  positivo vertical hacia arriba y el origen  $y_0 = 0$  donde comienza el movimiento de la piedra, con  $t_0 = 0$  y  $v_0 = 20$  m/s.

a) Cuando la piedra alcanza la máxima altura  $v = 0$ :

$$v(t) = v_0 - gt = 0 \Rightarrow v_0 = gt \Rightarrow t = \frac{20\text{m/s}}{10\text{m/s}^2} = 2\text{s}$$

b) Se pide evaluar  $y(t)$  para  $t = 2$  s

$$y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_{\max} = y(2) = (20\text{m/s})(2\text{s}) - \frac{1}{2}(10\text{m/s}^2)(2\text{s})^2 = 20\text{m}$$

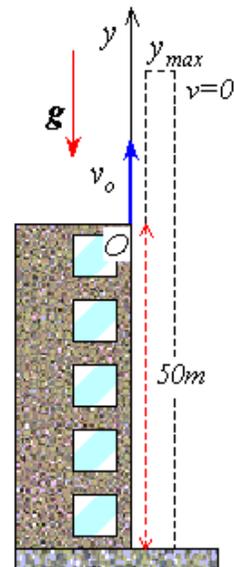


Figura 2.16

c) Cuando pasa por el punto inicial  $y = 0 \Rightarrow$

$$y = v_o t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \Rightarrow \left( v_o - \frac{1}{2} g t \right) t = 0 \Rightarrow$$

$$t_1 = 0 \text{ y } v_o - \frac{1}{2} g t = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_o}{g} = \frac{(2)(20)}{10} = 4s$$

d) Hay que evaluar  $v$  para  $t = 4s$

$$v(t) = v_o - g t \Rightarrow v(4) = 20 - (10)(4) = -20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e) En esta posición  $y = -50 \text{ m} \Rightarrow$

$$y = v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow -50 = 20t - 5t^2$$

$$t^2 - 4t - 10 = 0 \Rightarrow t_1 = 5.7s \text{ y } t_2 = -1.7s$$

Se descarta el tiempo negativo, porque físicamente no es posible.

$$f) \quad v(t) = v_o - g t \Rightarrow v(5.7) = 20 - (10)(5.7) = -37 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### 2.5.1 Efectos de $g$ en las personas.

La capacidad de una persona para soportar una aceleración depende tanto de la magnitud como de la duración de ésta. Debido a la inercia de la sangre y de los órganos dilatables, las aceleraciones pequeñas tienen poca importancia si duran sólo fracciones de segundo. El límite de tolerancia se encuentra cercano a  $10g$  y depende de la resistencia estructural de los cuerpos. La mayoría de las personas han experimentado aceleraciones verticales moderadas en los ascensores. La sangre circula por vasos dilatables de manera que cuando el cuerpo es acelerado hacia arriba, la sangre se acumula en la parte inferior de éste. Cuando la aceleración es hacia abajo, aumenta el volumen de sangre en la par-

te superior del cuerpo, a su vez los órganos internos no se mantienen rígidos en su sitio y su desplazamiento durante la aceleración puede producir sensaciones desagradables.

Cuando un avión despegue, aterrice o realice giros muy rápidos, está sometido a aceleraciones de hasta  $9g$ . El grado de tolerancia de un humano a esta aceleración dependerá entre otros factores del peso, edad y condición física de la persona. A modo de ejemplo, un piloto que en tierra pesa 80 kilos, cuando es sometido a este valor de aceleración siente repentinamente que su peso es alrededor de 720 kilos. Esta misma aceleración hace que la sangre fluya hacia los pies del piloto, esto disminuye el retorno venoso al corazón con lo cual la presión baja y el piloto puede perder la visión temporalmente, para luego perder la conciencia. También existen aceleraciones negativas durante el vuelo en la cual el piloto experimenta la aceleración en posición invertida. En ese caso la aceleración hace que la sangre fluya al cerebro, el piloto sufre de palidez y su visión se torna roja.

Estudios han determinado que los humanos pueden soportar hasta  $9g$  de aceleraciones positivas y  $3g$  para aceleraciones negativas. Un piloto que viaja en aviones modernos que incluso alcanzan velocidades cercanas a la del sonido, podría detenerse sin peligro en una distancia aproximada de 200 m, pero si esta velocidad fuese unas 100 veces mayor (valores que pueden ser alcanzados en viajes interplanetarios), la distancia de frenado que necesitaría para no producir efectos nocivos en sus tripulantes debe ser de aproximadamente 16000km. La razón de esta diferencia está en que la cantidad total de energía que se disipa durante la desaceleración es proporcional al cuadrado de la velocidad, lo que es suficiente para aumentar la distancia unas 10000 veces. Por esta razón se han creado procedimientos y aparatos especiales para proteger a los pilotos del colapso circulatorio que aparece durante aceleraciones positivas. Primero, si el piloto aprieta sus músculos abdominales en grado extremo y se inclina hacia adelante para comprimir el abdomen, puede evitar la acumulación de sangre en los grandes vasos abdominales, evitando así la pérdida de conciencia. Además se han diseñado trajes “anti-g” para prevenir el estancamiento de sangre en la parte más baja del abdomen y las piernas. Este tipo de traje aplica una presión positiva en piernas y abdomen, inflando compartimientos de aire a medida que aumenta la aceleración positiva. Además el cuerpo humano presenta de 1 a 2 cm de tejido blando externo, lo que aumenta la distancia de desaceleración y por lo tanto disminuye la fuerza de impacto, por ejemplo, durante una caída.

**PROBLEMAS.**

- 2.1 Cuando Carlos viaja en una autopista, pasa por la marca de 260 km. Después sigue moviéndose hasta la marca de 150 km. y luego se devuelve hasta la marca 175 km. ¿Cuál es su desplazamiento resultante respecto a la marca de 260 km.? **R:**  $-85$  km.
- 2.2 Un gato negro se encuentra en una posición final de 3.6 m en dirección  $240^\circ$  respecto a  $x$ , después de realizar un desplazamiento de 120 cm en  $135^\circ$  respecto de  $x$ . Determine su posición inicial. **R:** 4.1m,  $256.5^\circ$ .
- 2.3 La luz del Sol llega a la Tierra en 8.3 min. La rapidez de la luz es de  $3 \times 10^8$  m/s. Calcular la distancia de la Tierra al Sol. **R:**  $1.5 \times 10^{11}$  m.
- 2.4 Usted y un amigo conducen recorriendo 50 km. Usted viaja a 90 km/h y su amigo a 95 km/h. ¿Cuánto tiempo tiene que esperar a su amigo al final del viaje? **R:** 1.8 min.
- 2.5 Ana conduce calle abajo a 55 km/h. Repentinamente un niño atraviesa la calle. Si Ana demora 0.75 s en reaccionar y aplicar los frenos, ¿cuántos metros alcanza a moverse antes de comenzar a frenar? **R:** 11 m.
- 2.6 Las condiciones de movimiento de una partícula que se mueve en dirección  $x$  son  $\vec{x}_o = 7\hat{i}$  m,  $\vec{v}_o = -3\hat{i}$  m/s,  $\vec{a} = -4\hat{i}$  m/s<sup>2</sup>, en el instante inicial  $t_o = 0$ . a) Escribir las ecuaciones vectoriales de la posición y velocidad del cuerpo en cualquier instante. b) Calcular la posición del cuerpo respecto al origen a los 10 s de iniciado el movimiento. c) Averiguar si el cuerpo se detiene en algún instante. **R:** b)  $-223\hat{i}$  m, c) no.
- 2.7 Una partícula se mueve a lo largo del eje  $x$  de acuerdo con la ecuación  $x(t) = (3t^2 - 2t + 3)$  m. Calcular a) la rapidez promedio entre  $t = 2$  s y  $t = 3$  s, y b) la velocidad instantánea en  $t = 2$  s y  $t = 3$  s, c) la aceleración promedio entre  $t = 2$  s y  $t = 3$  s y d) la aceleración instantánea en  $t = 2$  s y  $t = 3$  s.
- 2.8 Una partícula se mueve a lo largo del eje  $x$  de acuerdo con la ecuación  $x(t) = 2 + 3t - t^2$ , donde  $x$  está en metros y  $t$  en segundos. Para  $t = 3$  s, calcular a) la posición de la partícula, b) su velocidad c) su aceleración. **R:** a) 2m, b)  $-3$  m/s, c)  $-2$  m/s<sup>2</sup>.

- 2.9 Las ecuaciones de movimiento para dos partículas A y B que se mueven en la misma dirección son las siguientes ( $x$  en  $m$  y  $t$  en  $s$ ).

$$x_A(t) = 3.2t^2 - 6t - 20$$

$$x_B(t) = 29 + 8.5t - 4.1t^2$$

Calcular: a) el instante para el cual las posiciones de A y B coinciden, b) las velocidades de A y B en el instante en que se encuentran en la misma posición. R: a) 3.8s, b) 18.3 m/s, -22.7 m/s.

- 2.10 Un electrón en un tubo de rayos catódicos acelera de  $2 \times 10^4 \text{ m/s}$  hasta  $6 \times 10^6 \text{ m/s}$  en  $1.5 \text{ cm}$ . a) ¿Cuánto tiempo tarda el electrón en recorrer esta distancia? b) ¿Cuál es su aceleración?
- 2.11 Un electrón tiene una velocidad inicial de  $3 \times 10^5 \text{ m/s}$ . Si experimenta una aceleración de  $8 \times 10^{14} \text{ m/s}^2$ , a) ¿Cuánto tardara en alcanzar una velocidad de  $5.4 \times 10^5 \text{ m/s}$ , y b) qué distancia recorre en ese tiempo?
- 2.12 Determine la velocidad final de un protón que tiene una velocidad inicial de  $2.35 \times 10^5 \text{ m/s}$ , y es acelerado uniformemente en un campo eléctrico a razón de  $-1.10 \times 10^{12} \text{ m/s}^2$  durante  $1.5 \times 10^{-7} \text{ s}$ . **R:**  $7.0 \times 10^4 \text{ m/s}$ .
- 2.13 Un jet supersónico que vuela a  $145 \text{ m/s}$  acelera uniformemente a razón de  $23.1 \text{ m/s}^2$  durante  $20 \text{ s}$ . a) ¿Cuál es su velocidad final? b) La rapidez del sonido en el aire es  $331 \text{ m/s}$ . ¿Cuántas veces mayor es la velocidad final del avión comparada con la del sonido? **R:** a)  $607 \text{ m/s}$ , b) 1.83 veces la rapidez del sonido.
- 2.14 Dos autos A y B se mueven en línea recta en dirección positiva del eje  $x$ . En el instante inicial A está en reposo y acelera con  $2 \text{ m/s}^2$ . El movimiento de B es con rapidez constante de  $20 \text{ m/s}$ . Calcular: a) la distancia que recorren en un minuto, b) el tiempo que demoraría A en igualar la rapidez de B, c) la distancia que los separa cuando sus rapidezces son iguales, d) la aceleración que debería ejercerse sobre B para que pudiera detenerse en  $4 \text{ s}$ . **R:** a)  $3600 \text{ m}$ ,  $1200 \text{ m}$ , b)  $10 \text{ s}$ , c)  $100 \text{ m}$ , d)  $-5 \text{ m/s}^2$ .

- 2.15 Un auto que se mueve con aceleración constante recorre en 6 s la distancia de 60 m que separa dos puntos; su rapidez al pasar por el segundo punto es de 14 m/s. Calcular: a) la aceleración del auto, b) su velocidad al pasar por el primer punto, c) la posición donde se encontraba en reposo. R: a)  $4/3 \text{ m/s}^2$ , b) 6 m/s, c)  $-14.4\text{m}$ .
- 2.16 Dos autos viajan a lo largo de una carretera recta. En el instante  $t = 0\text{h}$ , el auto A tiene una posición  $x_A = 48 \text{ km}$  y una rapidez constante de 36 km/h. Más tarde en  $t=0.5\text{h}$ , el auto B está en la posición  $x_B=0 \text{ km}$  con una rapidez de 48 km/h. Responda las siguientes preguntas: primero, gráficamente, haciendo una gráfica de posición versus tiempo; segundo, algebraicamente, escribiendo las ecuaciones para las posiciones  $x_A$  y  $x_B$  en función del tiempo  $t$ . a) ¿Cuál es la lectura del cronómetro cuando el auto B sobrepasa al auto A? b) ¿En qué posición A es alcanzado por B? c) ¿Cuánto tiempo transcurre desde que A estaba en su punto de referencia hasta que B lo alcanza? R: a) 6 h, b) 260 km, c) 7.3 h.
- 2.17 Un auto y un tren se mueven al mismo tiempo a lo largo de trayectorias paralelas a  $25\text{m/s}$ . Debido a una luz roja el auto experimenta una aceleración uniforme de  $-2.5\text{m/s}^2$  y se detiene. Permanece en reposo durante 45s, después acelera hasta una velocidad de  $25\text{m/s}$  a una tasa de  $25\text{m/s}^2$ . ¿A qué distancia del tren está el auto cuando alcanza la velocidad de  $25\text{m/s}$ , suponiendo que la velocidad del tren se ha mantenido en  $25\text{m/s}$ ?
- 2.18 Una partícula parte desde el reposo de la parte superior de un plano inclinado y se desliza hacia abajo con aceleración constante. El plano inclinado tiene 2m de largo, y la partícula tarda 3s en alcanzar la parte inferior. Determine a) la aceleración de la partícula, b) su velocidad en la parte inferior de la pendiente, c) el tiempo que tarda la partícula en alcanzar el punto medio del plano inclinado, y d) su velocidad en el punto medio. R: a)  $0.44\text{m/s}^2$ , b) 1.3m/s, c) 2.1s, d) 0.94m/s.
- 2.19 Dos trenes expresos inician su recorrido con una diferencia de 5 min. A partir del reposo cada uno es capaz de alcanzar una velocidad máxima de  $160\text{km/h}$  después de acelerar uniformemente en una distancia de 2km. a) ¿Cuál es la aceleración de cada tren? b) ¿A que distancia está el primer tren cuando el segundo inicia su trayecto? c) ¿Qué tan separados se encuentran cuando ambos viajan a máxima velocidad?

- 2.20 Un automóvil que se mueve a una velocidad constante de  $30\text{m/s}$  pierde velocidad repentinamente en el pie de una colina. El auto experimenta una aceleración constante de  $-2\text{ m/s}^2$  (opuesta a su movimiento) mientras efectúa el ascenso. a) escriba ecuaciones para la posición y la velocidad como funciones del tiempo considerando  $x = 0$  en la parte inferior de la colina, donde  $v_o = 30\text{m/s}$ . b) Determine la distancia máxima recorrida por el auto después de que pierde velocidad. R: a)  $-30t - t^2$ ,  $-30 - 2t$  b)  $225\text{m}$ .
- 2.21 Paco manejando a  $30\text{m/s}$  entra en un túnel de una sola pista. Después observa una camioneta que se mueve despacio  $155\text{m}$  adelante viajando a  $5\text{m/s}$ . Paco aplica sus frenos pero puede desacelerar sólo a  $2\text{m/s}^2$ , debido a que el camino está húmedo. ¿Chocará? Si es así, calcular a qué distancia dentro del túnel y en qué tiempo ocurre el choque. Si no choca, calcular la distancia de máximo acercamiento entre el auto de Paco y la camioneta. R:  $11.4\text{s}$ ,  $212\text{m}$ .
- 2.22 Una bala indestructible de  $2\text{cm}$  de largo se dispara en línea recta a través de una tabla que tiene  $10\text{cm}$  de espesor. La bala entra en la tabla con una velocidad de  $420\text{m/s}$  y sale con una velocidad de  $280\text{m/s}$ . a) ¿Cuál es la aceleración promedio de la bala a través de la tabla? b) ¿Cuál es el tiempo total que la bala está en contacto con la tabla? c) ¿Qué espesor de la tabla se requeriría para detener la bala?
- 2.23 Un africano que se encuentra a  $20\text{ m}$  de un león hambriento arranca con una rapidez constante de  $36\text{ km/hr}$ , alejándose en línea recta del león, que está inicialmente detenido. El león tarda  $2$  segundos en reaccionar cuando empieza a perseguir al africano con una aceleración de  $4\text{ m/s}^2$ , siempre en línea recta hacia el africano, que huye hacia un árbol que se encuentra más adelante en la misma recta. a) Hacer un esquema ilustrativo de la situación. b) ¿Cuál debe ser la máxima distancia a la que debe estar el árbol para que el africano pueda subirse justo antes que el león lo alcance? c) Calcular la rapidez con la que el león llega al árbol. R: b)  $116\text{m}$ , c)  $30.4\text{ m/s}$ .
- 2.24 Un camión se mueve a  $90\text{ km/hr}$  en una carretera recta. Cuando se encuentra a  $70\text{ m}$  de un árbol atravesado en la carretera, el conductor se da cuenta de ello, tardando  $0.5\text{ s}$  en reaccionar y presionar los frenos del camión que le imprimen una aceleración de  $-5\text{ m/s}^2$ . Determinar si el

camión choca o no con el árbol cruzado en la carretera. R: si a 25.5 km/h.

2.25 Dos autos se aproximan uno al otro; ambos se mueven hacia el oeste, uno a 78 km/h y el otro a 64 km/h. a) ¿Cuál es la velocidad del primer auto relativa al (en el sistema de referencia del) segundo auto? b) ¿Cambian su velocidad relativa después de que el uno sobrepasa al otro? R: a) 14km/h, oeste, b) no.

2.26 En la figura 2.17 se muestra el gráfico rapidez/tiempo para una partícula que se mueve en dirección del eje  $x$ . a) Dibujar el gráfico posición/tiempo, b) calcular el desplazamiento de la partícula, c) hacer el gráfico aceleración/tiempo, d) calcular su posición en los instantes 5, 10, 20, 25, 30 y 40 segundos, e) calcular el cambio de rapidez en los intervalos 0 y 5, 5 y 20, 20 y 25, 25 y 40 segundos.

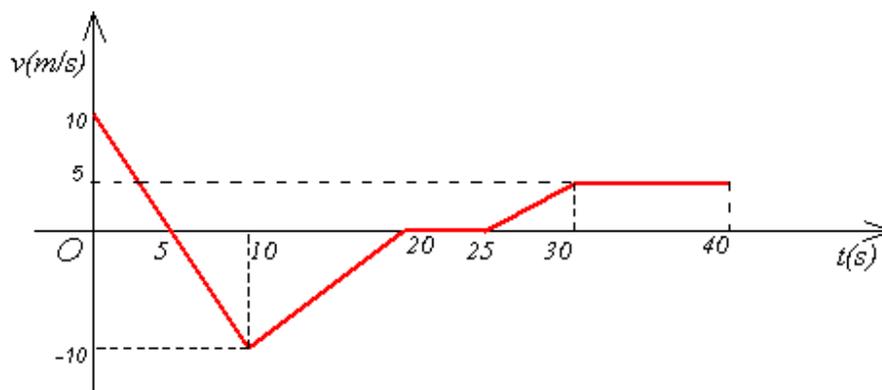


Figura 2.17. Problema 2.26.

2.27 Dos autos viajan a lo largo de una línea en la misma dirección, el que va adelante a  $25\text{m/s}$  y el otro a  $30\text{m/s}$ . En el momento en que los autos están a  $40\text{m}$  de distancia, el conductor del auto delantero aplica los frenos de manera que el vehículo acelera a  $-2\text{ m/s}^2$ . a) ¿Cuánto tiempo tarda el carro para detenerse? b) suponiendo que el carro trasero frena al mismo tiempo que el carro delantero, ¿Cuál debe ser la aceleración negativa mínima del auto trasero de manera que no choque con el auto delantero? c) ¿Cuánto tiempo tarda en detenerse el auto trasero? R: a) 1.25s, b)  $-2.3\text{m/s}^2$  c) 13.1s.

- 2.28 Un automovilista conduce por un camino recto a una velocidad constante de  $15\text{m/s}$ . Cuando pasa frente a un policía motociclista estacionado, éste empieza a acelerar a  $2\text{ m/s}^2$  para alcanzarlo. Suponiendo que el policía mantiene esta aceleración, determine a) el tiempo que tarda el policía en alcanzar al automovilista, encuentre b) la velocidad y c) el desplazamiento total del policía cuando alcanza al automovilista.
- 2.29 Dos objetos se conectan mediante una barra rígida de longitud  $L$ . Los objetos deslizan a lo largo de rieles perpendiculares, como se muestra en la figura 2.18. Si el que está en el eje  $x$  se desliza hacia la izquierda con rapidez constante  $v_o$ , calcular la rapidez del otro cuando  $\alpha = 60^\circ$ . R:  $0.58v_o$ .

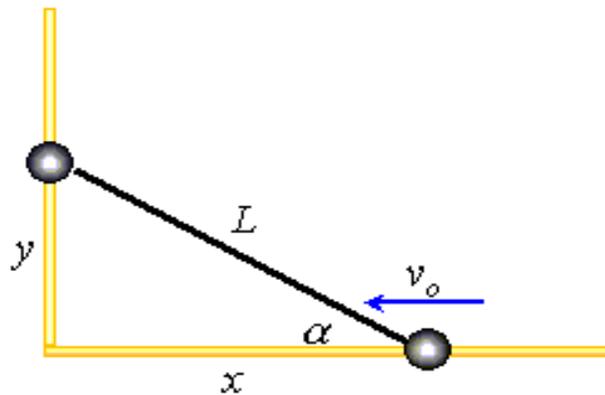


Figura 2.18 Problema 2.29.

- 2.30 Un tren viaja de la siguiente manera: en los primeros 60 minutos se desplaza con velocidad  $v$ , en los siguientes 30 minutos lleva una velocidad de  $3v$ , en los 90 minutos que le siguen viaja con una velocidad  $v/2$ ; en los 120 minutos finales, se mueve con una velocidad de  $v/3$ . a) Dibuje la gráfica velocidad-tiempo para este recorrido. b) ¿Qué distancia recorre el tren en el viaje? c) ¿Cuál es la velocidad promedio del tren en el viaje completo?
- 2.31 Un tren puede minimizar el tiempo  $t$  entre dos estaciones acelerando a razón de  $a_1 = 0.1\text{ m/s}^2$  por un tiempo  $t_1$  y después experimenta una aceleración negativa  $a_1 = -0.5\text{ m/s}^2$  cuando el maquinista usa los frenos durante un tiempo  $t_2$ . Puesto que las estaciones están separadas sólo por  $1\text{km}$ , el tren nunca alcanza su velocidad máxima. Encuentre el tiempo mínimo de viaje  $t$  y el tiempo  $t_1$ . R: 155s, 129s.

- 2.32 Cuando un semáforo cambia a verde, un auto arranca con una aceleración constante de  $6 \text{ m/s}^2$ . En el instante en que comienza a acelerar es sobrepasado por un camión con una velocidad constante de  $21 \text{ m/s}$ . a) ¿Qué distancia recorre el auto antes de alcanzar el camión? b) ¿Qué velocidad tendrá el auto cuando alcance el camión? R: 150 m, b)  $42 \text{ m/s}$
- 2.33 El conductor de un auto que viaja a  $90 \text{ km/h}$  súbitamente ve las luces de una barrera que se encuentra  $40 \text{ m}$  adelante. Transcurren  $0.75 \text{ s}$  antes de que él aplique los frenos; la aceleración media durante la frenada es  $-10 \text{ m/s}^2$ . a) Determine si el carro choca contra la barrera. b) ¿Cuál es la rapidez máxima a la cual puede viajar el auto para no chocar contra la barrera? Suponga aceleración constante. R: a) Si, golpea la barrera, b)  $22 \text{ m/s}$ .
- 2.34 Con el fin de proteger su alimento de osos, un boy scout eleva su paquete de comida, de masa  $m$ , con una cuerda que lanza sobre la rama de un árbol de altura  $h$ . El scout camina alejándose de la cuerda vertical con velocidad constante  $v_s$  mientras sostiene en sus manos el extremo libre. a) Hacer un esquema de la situación. b) Demuestre que la velocidad  $v_p$  del paquete de comida es  $x(x^2 + h^2)^{-1/2} v_s$ , donde  $x$  es la distancia que el muchacho ha caminado alejándose de la cuerda vertical. c) Demuestre que la aceleración  $a_p$  del paquete de comida es  $h^2(x^2 + h^2)^{-3/2} v_s^2$ . d) ¿Qué valores de la aceleración y la velocidad se tienen después que él se aleja de la cuerda vertical? e) ¿A qué valores se aproximan la velocidad y la aceleración cuando la distancia  $x$  continúa aumentando?
- 2.35 Un objeto se mueve en un medio donde experimenta una aceleración de resistencia al movimiento proporcional a su rapidez, esto es  $a = -kv$ , donde  $k$  es una constante positiva igual a  $0.5 \text{ s}^{-1}$ . a) Calcular la rapidez y posición del objeto en cualquier instante. b) Si para  $t = 0$  el objeto se encuentra en el origen moviéndose con una rapidez de  $10 \text{ m/s}$ , calcular la posición donde se detiene. R: b)  $20 \text{ m}$ .

NOTA: En algunos problemas de caída libre, se usa  $g = 10 \text{ m/s}^2$

- 2.36 Un astronauta deja caer una pluma a 1.2 m de la superficie de la Luna. Si la aceleración de la gravedad en la Luna es  $1.62 \text{ m/s}^2$ , ¿cuánto tiempo emplea la pluma en llegar a la superficie? R: 1.2 s.
- 2.37 Una piedra cae libremente desde el reposo durante 8 s. a) Calcule la velocidad de la piedra a los 8 s. b) ¿Cuál es el desplazamiento de la piedra durante ese tiempo? R: a)  $-78 \text{ m/s}$ , hacia abajo, b)  $-310 \text{ m}$ .
- 2.38 Un estudiante deja caer una roca al agua desde un puente de 12 m de altura. ¿Cuál es la rapidez de la roca cuando llega al agua? R:  $15.5 \text{ m/s}$ .
- 2.39 Un globo meteorológico flota a una altura constante sobre la Tierra cuando deja caer un paquete. a) Si el paquete choca contra el piso a una velocidad de  $-73.5 \text{ m/s}$ , ¿Qué distancia recorrió el paquete? b) Durante cuánto tiempo cayó el paquete? R: a)  $-276 \text{ m}$ , b)  $7.5 \text{ s}$ .
- 2.40 Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de  $10 \text{ m/s}$  desde una altura de  $10 \text{ m}$  respecto al suelo. Determine a) su posición en el punto más alto, b) su velocidad cuando pasa por el punto inicial, c) su velocidad y aceleración justo antes de golpear el suelo. R: a)  $15 \text{ m}$
- 2.41 Un globo inflado con aire caliente se eleva verticalmente con una rapidez constante de  $5 \text{ m/s}$ . Cuando está a  $50 \text{ m}$  sobre el suelo, se deja caer un paquete desde el globo. a) Calcular el tiempo que tarda el globo en llegar a los  $50 \text{ m}$ . b) ¿Cuánto tiempo demora el paquete en llegar al suelo después que se ha soltado? c) ¿Cuál es la velocidad del paquete justo antes de llegar al suelo? d) Repetir b) y c) para el caso en que el globo desciende a  $5 \text{ m/s}$  desde una altura de  $50 \text{ m}$ . R: a)  $10 \text{ s}$ , b)  $3.7 \text{ s}$ , c)  $-32 \text{ m/s}$ .
- 2.42 Un globo sonda meteorológico se lanza desde la superficie de la tierra con una velocidad inicial vertical hacia arriba de magnitud  $18 \text{ km/h}$ , la que mantiene constante durante 15 min. A partir de ese instante se comienza a comportar como partícula libre. Calcular: a) la altura máxima que alcanza, b) su velocidad justo antes de llegar nuevamente al suelo. R: a)  $4501.25 \text{ m}$ .

- 2.43 Se deja caer una piedra desde el borde de un acantilado. Una segunda piedra se lanza hacia abajo desde el mismo lugar un segundo más tarde con una rapidez inicial de  $15 \text{ m/s}$ . a) Si ambas piedras golpean el suelo simultáneamente, determine la altura del acantilado. b) Calcular la velocidad de cada piedra justo antes de llegar al suelo. R: a) 20m, b)  $-20$  y  $-25 \text{ m/s}$ .
- 2.44 Un cohete parte del reposo y sube con aceleración neta constante vertical hacia arriba de  $5 \text{ m/s}^2$  durante un minuto. A partir de ese momento deja de acelerar y sigue subiendo, pero comportándose como partícula libre. Determinar: a) la altura que alcanza el cohete durante el primer minuto, b) su velocidad en ese instante, c) la altura máxima que alcanza, d) el tiempo total de vuelo. R: a) 9000m, b) 300m/s, c) 13.5km, d) 142s.
- 2.45 Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de  $10 \text{ m/s}$ . Un segundo más tarde se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de  $25 \text{ m/s}$ . Determinar a) el tiempo que tarda la piedra en alcanzar la misma altura que la pelota, b) la velocidad de la pelota y de la piedra cuando se encuentran a la misma altura, c) el tiempo total que cada una está en movimiento antes de regresar a la altura original, d) la altura máxima de las dos. R: a) 0.2s, b)  $-2$  y  $23 \text{ m/s}$ , c) 2 y 6s.
- 2.46 Angélica deja caer una pelota de tenis desde la terraza de un edificio, y un segundo después tira verticalmente hacia abajo otra pelota con una rapidez de  $20 \text{ m/s}$ . Calcular la altura mínima del edificio para que la segunda pelota pueda alcanzar a la primera. R: 11.25m
- 2.47 Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de  $15 \text{ m/s}$ . Calcular: a) el tiempo que la pelota tarda en alcanzar su altura máxima, b) la altura máxima, c) la velocidad y la aceleración de la pelota para  $t = 2 \text{ s}$ . R: a) 1.5s, b) 11.5m, c)  $-4.6 \text{ m/s}$ , g.
- 2.48 La altura de un helicóptero sobre el suelo está representada por  $h = 3t^3$ , donde h está en metros y t en segundos. Después de  $2 \text{ s}$ , el helicóptero deja caer una pequeña valija con la correspondencia. ¿Cuánto tiempo tarda la valija en llegar al suelo? R: 8s

- 2.49 Una pelota se deja caer al suelo desde una altura de  $2m$ . En el primer rebote la pelota alcanza una altura de  $1.85m$ , donde es atrapada. Encuentre la velocidad de la pelota a) justo cuando hace contacto con el suelo y b) justo cuando se aleja del suelo en el rebote. c) Ignore el tiempo que la pelota mantiene contacto con el suelo y determine el tiempo total que necesita para ir del punto en que se suelta al punto donde es atrapada. R: a)  $-6.3 \text{ m/s}$ , b)  $6 \text{ m/s}$ , c)  $1.25 \text{ s}$ .
- 2.50 Una pelota de tenis que se deja caer al piso desde una altura de  $1.2 \text{ m}$ , rebota hasta una altura de  $1 \text{ m}$ . a) ¿Con qué velocidad llega al piso? b) ¿Con qué velocidad deja el piso al rebotar? c) Si la pelota de tenis está en contacto con el piso durante  $0.01 \text{ s}$ , calcular su aceleración durante este tiempo, compárela con  $g$ . R: a)  $-4.85 \text{ m/s}$ , b)  $4.43 \text{ m/s}$ , c)  $+930 \text{ m/s}^2$ ,  $93g$ .
- 2.51 Una pulga salta  $20 \text{ cm}$  en un salto vertical. a) Calcular su rapidez inicial. b) Si ha alcanzado esa rapidez encogiéndose y luego estirando sus patas una longitud del orden de  $1 \text{ mm}$ , calcular su aceleración inicial. c) La distancia de aceleración en una persona adulta es del orden de  $50 \text{ cm}$ , si una persona saltara con la misma aceleración que una pulga, ¿a qué altura llegaría? R: a)  $2 \text{ m/s}$ , b)  $2000 \text{ m/s}^2$ , c)
- 2.52 Cuando las ranas saltan, típicamente aceleran en una distancia vertical de unos  $10 \text{ cm}$ , y pueden alcanzar alturas de hasta  $30 \text{ cm}$ , medidas desde el suelo. Calcular: (a) la velocidad de despegue de la rana, y (b) la aceleración media que ella siente entre que comienza el salto y el momento del despegue. Suponga una aceleración constante.

## CAPITULO 3. MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES.

En general el movimiento de los objetos verdaderos se realiza en el espacio real tridimensional. El movimiento de una partícula que se realiza en un plano es un movimiento en dos dimensiones, si el movimiento se realiza en el espacio, se produce en tres dimensiones. En este capítulo se estudia la cinemática de una partícula que se mueve sobre un plano. Ejemplos de un movimiento en dos dimensiones son el de un cuerpo que se lanza al aire, tal como una pelota, un disco girando, el salto de un canguro, el movimiento de planetas y satélites, etc. El movimiento de los objetos que giran en una órbita cuya trayectoria es una circunferencia, se conoce como movimiento circunferencial; es un caso de movimiento en dos dimensiones, que también es estudiado en este capítulo. El vuelo de una mosca, el de un avión o el movimiento de las nubes se produce en tres dimensiones.

### 3.1 DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES.

Continuamos restringiendo el estudio del movimiento al caso de una *partícula que se mueve con aceleración constante*, es decir que su magnitud y dirección no cambian durante el movimiento. El vector posición de una partícula que se mueve en el plano  $xy$  es una función del tiempo, se escribe como:

$$\vec{P}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

Por definición, la velocidad de la partícula en movimiento en el plano  $xy$  es, el cambio de posición en el transcurso del tiempo y se puede determinar por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

es decir,

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j}$$

donde  $v_x$  y  $v_y$  son las componentes de la velocidad en la dirección  $x$  e  $y$ . Si la aceleración es constante, sus componentes  $a_x$  en la dirección  $x$ , y  $a_y$  en la dirección  $y$ , también lo son. Aplicando las ecuaciones cinemáticas de la velocidad deducidas para el movimiento en una dimensión, independientemente en cada dirección  $x$  e  $y$ , para una partícula que en el instante inicial  $t_o$  se mueve con velocidad inicial  $\vec{v}_o = v_{ox}\hat{i} + v_{oy}\hat{j}$  se obtienen las componentes de la velocidad en función del tiempo:

$$v_x = v_{ox} + a_x(t - t_o)$$

$$v_y = v_{oy} + a_y(t - t_o)$$

reemplazando en la expresión de  $\vec{v}(t)$ , se obtiene la velocidad en cualquier instante  $t$ :

$$\vec{v}(t) = [v_{ox} + a_x(t - t_o)]\hat{i} + [v_{oy} + a_y(t - t_o)]\hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = (v_{ox}\hat{i} + v_{oy}\hat{j}) + (a_x\hat{i} + a_y\hat{j})(t - t_o)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_o + \vec{a}(t - t_o) \quad (3.1)$$

De manera similar reemplazando las expresiones de la posición en función del tiempo en cada dirección  $x$  e  $y$ , para una partícula que en el instante inicial  $t_o$  se encuentra en la posición inicial  $\vec{r}_o = x_o\hat{i} + y_o\hat{j}$  se obtiene la posición  $\vec{r}(t)$  de la partícula, en cualquier instante  $t$ :

$$x = x_o + v_{ox}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_x(t - t_o)^2$$

$$y = y_o + v_{oy}(t - t_o) + \frac{1}{2} a_y (t - t_o)^2$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_o + \vec{v}_o(t - t_o) + \frac{1}{2} \vec{a}(t - t_o)^2 \quad (3.2)$$

Se concluye que el movimiento bidimensional con aceleración constante es equivalente a dos movimientos independientes en las direcciones  $x$  e  $y$  con aceleraciones constantes  $a_x$  y  $a_y$ . A esta propiedad se le llama ***principio de independencia del movimiento***.

### 3.2 MOVIMIENTO DE PROYECTILES.

Cualquier objeto que sea lanzado en el aire con una velocidad inicial  $\vec{v}_o$  de dirección arbitraria, se mueve describiendo una trayectoria curva en un plano. Si para esta forma común de movimiento se supone que: a) la aceleración de gravedad es constante en todo el movimiento (aproximación válida para el caso en que el desplazamiento horizontal del cuerpo en movimiento sea pequeño comparado con el radio de la Tierra) y b) se desprecia el efecto de las moléculas de aire sobre el cuerpo (aproximación no muy buena para el caso en que la rapidez del cuerpo en movimiento sea alta), entonces a este tipo de movimiento se le llama ***movimiento de proyectil*** y se produce en dos dimensiones.

Se elige el sistema de coordenadas  $(x, y)$  tradicional como se ve en la figura 3.1, donde se dibuja la trayectoria de una partícula en movimiento en dos dimensiones, junto con los vectores velocidad y aceleración de gravedad. Suponiendo que en el instante inicial  $t = t_o$  el proyectil se encuentra en la posición inicial  $(x_o, y_o)$  moviéndose con una velocidad inicial  $\vec{v}_o$  que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal, bajo la acción de la aceleración de gravedad  $\vec{g}$ , las ecuaciones para la posición del cuerpo en movimiento en dos dimensiones, se pueden escribir, a partir de la ecuación general de posición 3.2, para cada componente  $x$  e  $y$  por separado. Pero del gráfico  $(x, y)$  de la figura 3.1 se pueden obtener las componentes de la velocidad inicial  $\vec{v}_o$ , de magnitud  $v_o$ , y las componentes de la aceleración  $\vec{a}$  de magnitud  $g$ :

### Cap. 3 Movimiento en dos Dimensiones

$$v_{ox} = v_o \cos \alpha, \quad v_{oy} = v_o \operatorname{sen} \alpha,$$

$$a_x = 0, \quad a_y = g$$

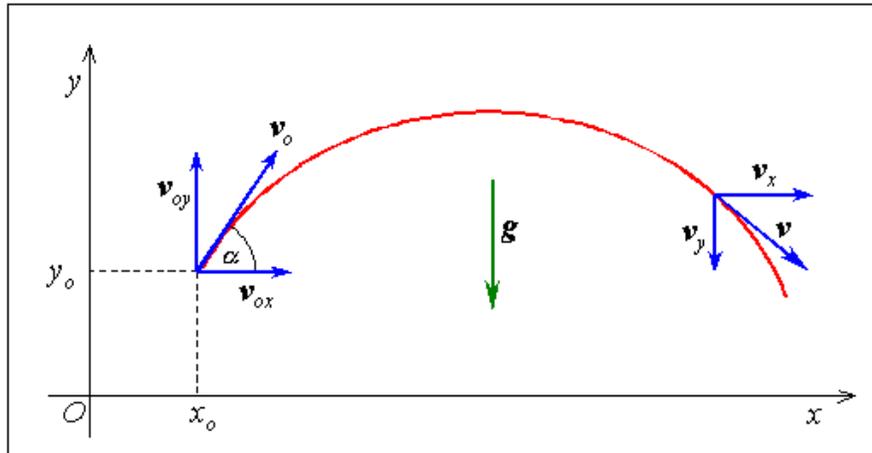


Figura 3.1 Sistema de referencia para el movimiento de un proyectil.

Reemplazando en las componentes de la ecuación 3.2, se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= x_o + v_o \cos \alpha (t - t_o) \\ y &= y_o + v_o \operatorname{sen} \alpha (t - t_o) - \frac{1}{2} g (t - t_o)^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para las componentes de la velocidad se obtiene:

$$\begin{aligned} v_x &= v_o \cos \alpha \\ v_y &= v_o \operatorname{sen} \alpha - g (t - t_o) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Como no hay aceleración en la dirección horizontal  $x$ , la componente  $x$  de la velocidad es constante, y como la aceleración en la dirección vertical  $y$  es  $g$ , las componentes de la posición y de la velocidad en esa dirección son idénticas a las ecuaciones para caída libre, con  $\alpha = 90^\circ$ . Entonces el movimiento de proyectil se compone de la superposición de un movimiento en dirección  $x$  con velocidad constante y un movimiento en dirección  $y$  de caída libre: es el principio de superposición del movimiento.

La ecuación de la trayectoria, esto es la curva geométrica que describe el cuerpo durante el movimiento del proyectil, se puede obtener despejando el parámetro  $t - t_o$  de la ecuación en  $x$  y reemplazando en la ecuación para  $y$ :

$$t - t_o = \frac{x - x_o}{v_o \cos \alpha}$$

$$y = y_o + v_o \operatorname{sen} \alpha \frac{(x - x_o)}{v_o \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \frac{(x - x_o)^2}{v_o^2 \cos^2 \alpha}$$

$$y = y_o + \tan \alpha (x - x_o) - \frac{g}{2v_o^2 \cos^2 \alpha} (x - x_o)^2 \quad (3.5)$$

que es la ecuación de una parábola, por lo tanto la trayectoria del proyectil es parabólica y queda totalmente conocida si se conoce  $v_o$  y  $\alpha$ . La velocidad del proyectil es siempre tangente a la trayectoria en cualquier instante, por lo que la dirección y la magnitud de la velocidad en cualquier instante se puede calcular en forma geométrica de las ecuaciones:

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

**Ejemplo 3.1:** Para un proyectil que se lanza en el instante inicial  $t_o = 0$  desde el origen, con una velocidad inicial  $v_o$  formando un ángulo  $\alpha$  con la horizontal, calcular: a) la altura máxima, b) la distancia horizontal.

**Solución:** la situación se puede graficar en el esquema de la figura 3.2.

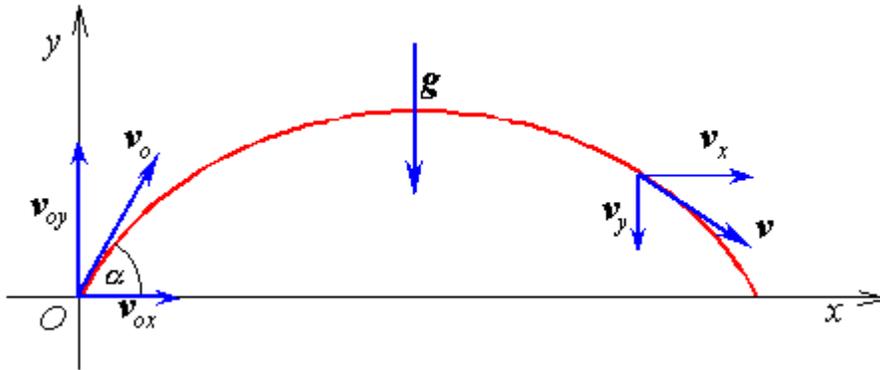


Figura 3.2 Ejemplo 1.

a) Cuando el proyectil alcanza su máxima altura, la componente y de la velocidad es cero ya que no sigue subiendo, además eso significa que la velocidad en esa posición es horizontal, entonces de  $v_y$  se obtiene:

$$v_y = v_o \operatorname{sen} \alpha - gt = 0$$

$$t = \frac{v_o}{g} \operatorname{sen} \alpha$$

que es el tiempo que tarda en llegar a la altura máxima. Reemplazando en  $y$

$$y = y_{\max} = v_o \operatorname{sen} \alpha \left( \frac{v_o}{g} \operatorname{sen} \alpha \right) - \frac{1}{2} g \left( \frac{v_o}{g} \operatorname{sen} \alpha \right)^2$$

$$y_{\max} = \frac{v_o^2}{2g} \operatorname{sen}^2 \alpha$$

b) Para determinar la distancia horizontal, conocido también como alcance horizontal, usamos la condición que en esa posición el proyectil se encuentra en  $(x,y) = (x,0)$ , así que igualando la ecuación para  $y$  a cero se obtiene:

$$0 = v_o \operatorname{sen} \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = 2 \frac{v_o}{g} \operatorname{sen} \alpha$$

que es el tiempo que demora el proyectil en llegar a la posición  $(x,0)$ , se observa que es el doble del tiempo que demora en llegar a la altura máxima. Reemplazando este tiempo en  $x$  se obtiene la distancia horizontal  $x$  o alcance:

$$x = v_o \cos \alpha \left( 2 \frac{v_o}{g} \operatorname{sen} \alpha \right) = \frac{v_o^2}{g} \operatorname{sen} 2\alpha$$

Como consecuencia de esta expresión para la distancia horizontal, se puede obtener el alcance máximo para una velocidad inicial  $v_o$  conocida, este se produce cuando  $\operatorname{sen} 2\alpha = 1$ , entonces

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

El alcance máximo se produce para un ángulo de lanzamiento igual a  $45^\circ$ , como se muestra en la figura 3.3a. Además para cualquier ángulo distinto de  $45^\circ$  se puede obtener un mismo alcance para dos ángulos complementarios, tales como  $\alpha = 30^\circ$  y  $\alpha = 60^\circ$ , situación que se ilustra en la figura 3.3b.

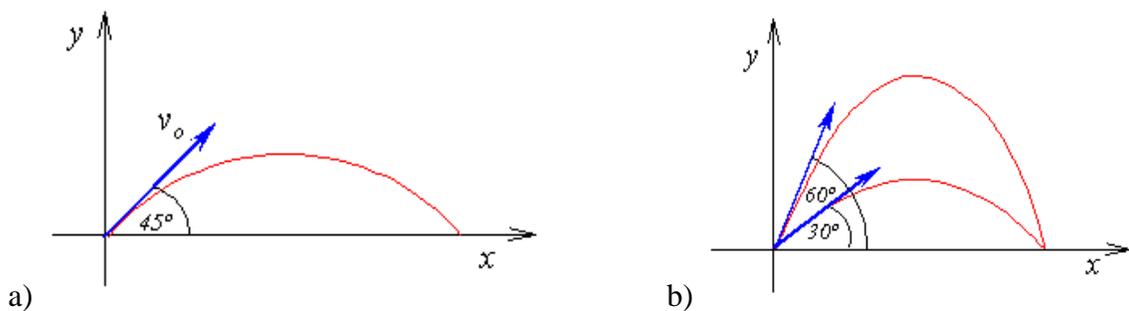


Figura 3.3. a) Alcance máximo, b) igual alcance para ángulos complementarios.

**Ejemplo 3.2.** Se lanza un proyectil de manera que la distancia horizontal que recorre es el doble de su altura máxima, calcular su ángulo de lanzamiento

Solución: Dado  $x = 2y_{\max}$ , se pide calcular  $\alpha$ . De los resultados obtenidos en el ejemplo 1 para altura máxima y distancia horizontal, se tiene:

$$y_{\max} = \frac{v_o^2}{2g} \text{sen}^2\alpha \quad \text{y} \quad x = \frac{v_o^2}{g} \text{sen}2\alpha$$

$$x = 2y_{\max} \Rightarrow \frac{v_o^2}{g} \text{sen}2\alpha = 2 \frac{v_o^2}{2g} \text{sen}^2\alpha$$

$$\text{sen}2\alpha = \text{sen}^2\alpha$$

Usando la identidad trigonométrica  $\text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha \cos\alpha$  y separando  $\text{sen}^2\alpha$  en sus factores, se obtiene la expresión:

$$2\text{sen}\alpha \cos\alpha = (\text{sen}\alpha)(\text{sen}\alpha) \Rightarrow 2\cos\alpha = \text{sen}\alpha$$

de donde se concluye que:

$$\tan\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 63.4^\circ.$$

**Ejemplo 3.3.** Se lanza una pelota desde la terraza de un edificio, con una rapidez inicial de 10 m/s en un ángulo de  $20^\circ$  debajo de la horizontal, y demora 3s en llegar al suelo. Calcular a) la distancia horizontal que recorre la pelota b) la altura desde donde se lanzó, c) el tiempo que tarda en llegar a 10 m debajo del punto de lanzamiento, d) la ecuación de la trayectoria.

**Solución:** se debe hacer un esquema en un sistema de referencia con la información que se da en el enunciado del ejemplo; uno apropiado puede ser el que se muestra en la figura 3.4, pero dejamos en claro que este no es el único posible, por ejemplo, se puede cambiar el origen  $O$  y ubicarlo donde comienza el

movimiento y no en el suelo, como en este caso (y no es necesario dibujar el edificio).

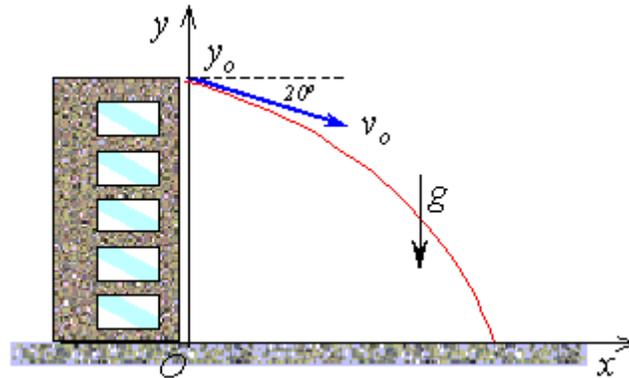


Figura 3.4 Sistema de referencia para el ejemplo 3.

Reemplazando los datos iniciales en las ecuaciones generales para el movimiento de proyectil (ec. 3.3), se tiene:

$$x = x_0 + v_0 (\cos \alpha)t \Rightarrow x = 10(\cos 20)t = 9.4t$$

$$y = y_0 - v_0 \text{sen} \alpha t - 5t^2 \Rightarrow y = y_0 - 10(\text{sen} 20)t - 5t^2$$

a) Para  $t = 3s$ , reemplazando en  $x$ ,

$$x = 9.4 \times 3 = 28.2m$$

b) En  $t = 3s$  la pelota llega al suelo donde  $y = 0$ , reemplazando en  $y$ ,

$$0 = y_0 - 10\text{sen} 20 \times 3 - 5 \times 3^2$$

$$\Rightarrow y_0 = 55.2 m$$

c) Se pide calcular  $t$  cuando  $y = y_0 - 10 = 45.2 m$ , reemplazando en  $y$ :

$$45.2 = 55.2 - 10(\text{sen} 20)t - 5t^2$$

$$5t^2 + 3.4t - 10 = 0$$

$$t = \frac{-3.4 \pm \sqrt{(3.4)^2 + 4 \times 5 \times 10}}{10} = \frac{-3.4 \pm 14.5}{10}$$

$$\Rightarrow t_1 = 1.1s \text{ y } t_2 = -1.8s$$

El valor válido es  $t_1$ , el tiempo  $t_2$  negativo es un resultado matemático correcto, pero no es físicamente posible.

d) Para encontrar la ecuación de la trayectoria  $y = y(x)$ , es conveniente despejar  $t$  de la ecuación  $x = 9.4 t \Rightarrow t = x/9.4$ ; y reemplazar este valor de  $t$  en la ecuación para  $y$ :

$$y = 55.2 - 3.4t - 5t^2$$

$$y = 55.2 - 3.4 \frac{x}{9.4} - \frac{5x^2}{(9.4)^2} \Rightarrow$$

$$y(x) = 55.2 - 0.36x - 0.056x^2$$

**Ejercicio:** dibujar la ecuación de la trayectoria usando Excel, para ello dar valores a  $x$  en el rango  $0 < x < 28$  y calcular los valores de  $y$ .

### 3.3 MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL.

Otro caso particular de movimiento en dos dimensiones es el de una partícula que se mueve describiendo una trayectoria circular, con velocidad  $v$ . Para un objeto que se mueve en una trayectoria circular, si la **rapidez**  $v$  es **constante**, el movimiento se llama circular uniforme. Si en el instante inicial  $t_i$  el objeto tiene una velocidad inicial  $v_i$  y un instante posterior  $t_f$  tiene una velocidad final  $v_f$ , como la rapidez es constante entonces  $v_i = v_f$  y cambia sólo la dirección de la velocidad. Se puede calcular la aceleración media  $a_m$  de la partícula usando su definición:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{\Delta t}$$

De la figura 3.5 se puede obtener  $\Delta v$  geoméricamente. En la circunferencia (figura 3.5a) la longitud del arco  $\Delta s$ , subtendido por el ángulo  $\Delta\theta$ , es aproximadamente igual al lado del triángulo que une los puntos de  $v_i$  y  $v_f$ . Observando que los triángulos de lados  $r(\Delta s)r$  en la circunferencia y de lados  $-v_i(\Delta v)v_f$  de la figura 3.5b son semejantes, entonces como  $v_i = v_f$ , se tiene la siguiente relación de semejanza de triángulos:

$$\frac{r}{\Delta s} = \frac{v}{\Delta v} \Rightarrow \Delta v = \frac{v}{r} \Delta s$$

Reemplazando este valor de  $\Delta v$  en la magnitud de la aceleración media, se obtiene:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

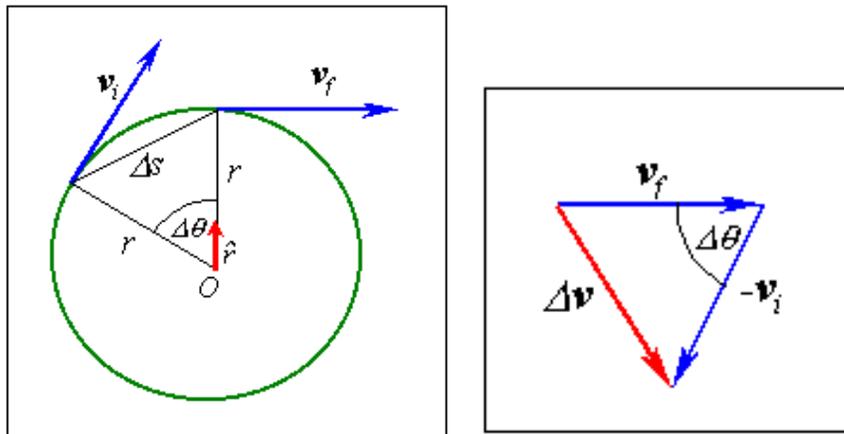


Figura 3.5 a) izquierda, b) derecha.

Si  $\Delta t$  es muy pequeño, tendiendo a cero,  $\Delta s$  y  $\Delta v$  también lo son, y  $\Delta v$  se hace perpendicular a  $v$ , por lo tanto apunta hacia el centro de la circunferencia. En el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $a_m \rightarrow a$  y se puede escribir:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v \Delta s}{r \Delta t} = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{r} v \Rightarrow a = \frac{v^2}{r}$$

Entonces en el movimiento circunferencial con rapidez constante, la aceleración apunta hacia el centro de la circunferencia (ya que en el límite  $\Delta v$  apunta hacia el centro), por lo que se llama aceleración centrípeta  $a_c$  (también se usan los nombres central o radial) y el vector con su magnitud es:

$$\vec{a}_c = \frac{v^2}{r} (-\hat{r}), \quad a_c = \frac{v^2}{r} \quad (3.6)$$

donde  $\hat{r}$  es un vector unitario radial dirigido desde el centro de la circunferencia hacia fuera, que se muestra en la figura 3.5a.

Para el caso en que durante el movimiento circunferencial de la partícula cambia la velocidad tanto en dirección como en magnitud, la velocidad siempre es tangente a la trayectoria (figura 3.6), pero ahora la aceleración ya no es radial, sino que forma un ángulo cualquiera con la velocidad. En este caso es conveniente escribir la aceleración en dos componentes vectoriales, una radial hacia el centro  $a_r$  y otra tangente a la trayectoria  $a_t$ , entonces  $a$  se escribe como:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t = a_r (-\hat{r}) + a_t \hat{t},$$

donde  $\hat{t}$  es un vector unitario tangente a la trayectoria, en la dirección del movimiento. En esta ecuación, la componente radial de la aceleración es la aceleración centrípeta originada por el **cambio en la dirección** de la velocidad y la

componente tangencial es producida por el **cambio en la magnitud** de la velocidad, por lo tanto su valor numérico es:

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

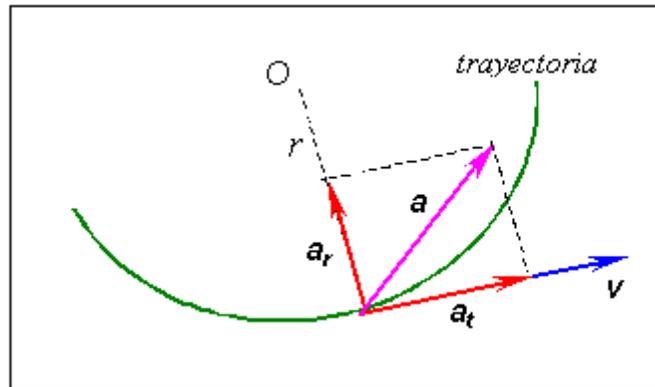


Figura 3.6

Entonces la aceleración total en el movimiento circunferencial es:

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \hat{r} + \frac{dv}{dt} \hat{t} \quad (3.7)$$

En la figura 3.7 se ven los vectores unitarios para un movimiento circunferencial. Observar que en el caso del movimiento circunferencial uniforme  $v = cte$ , entonces  $dv/dt = 0$  y  $\vec{a} = \vec{a}_r = \vec{a}_c$ . Y si no cambia la dirección de  $\vec{v}$ ,  $r \rightarrow \infty$ ,  $a_r = 0$ , el movimiento es en una dimensión con  $\vec{a} = \vec{a}_t = d\vec{v}/dt$ .

Aunque esta deducción fue realizada para el movimiento circunferencial, es válida para cualquier trayectoria curva, considerando el radio de curvatura de la trayectoria desde el punto donde se miden las variables hasta el centro de curvatura de la trayectoria en ese punto.

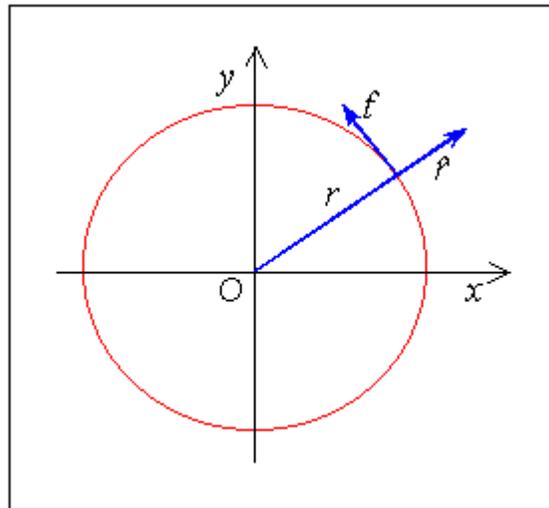


Figura 3.7

**Ejemplo 3.4.** Calcular la rapidez orbital de la traslación terrestre alrededor del Sol y la aceleración centrípeta correspondiente.

*Solución:* la distancia media entre el Sol y la Tierra es  $d_{ST} = 149.6 \times 10^6 \text{ km}$ . La Tierra completa una vuelta en torno al Sol en un año o 365.242199 días, entonces la rapidez orbital es:

$$x = x_0 + v(t - t_0) \Rightarrow x - x_0 = v(t - t_0) \Rightarrow v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{\Delta t}$$

$$v = \frac{2\pi d_{TS}}{1 \text{ año}} = \frac{2\pi \times 1.496 \times 10^{11} \text{ m}}{365.24 \times 24 \times 3600 \text{ s}} = 2.98 \times 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 29.8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Notar que la Tierra tiene una rapidez de traslación enorme en su movimiento en torno al Sol, es uno de los objetos mas veloces que cualquier otro que se mueva sobre la superficie terrestre. Pero su aceleración centrípeta es muy pequeña (comparada con  $g$  por ejemplo), como se obtiene del calculo siguiente:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{d_{TS}} = \frac{(2.98 \times 10^4)^2}{1.496 \times 10^{11}} = 5.9 \times 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

### 3.4 VELOCIDAD Y ACELERACIÓN ANGULAR.

Una partícula que gira ubicada en un punto  $P$  a una distancia  $r$  del origen, describe una circunferencia en torno al origen. La posición de la partícula se puede expresar en coordenadas polares  $(r, \theta)$ , donde la única coordenada que cambia en el tiempo es el ángulo  $\theta$ . Si la partícula se mueve desde el eje  $x$  positivo, donde  $\theta = 0$  hasta un punto  $P$ , el arco de longitud  $s$  recorrido por la partícula, y el ángulo, como se ve en la figura 3.8, se definen como:

$$s = r\theta \Rightarrow \theta = \frac{s}{r} \quad (3.8)$$

Se observa que el ángulo es una variable adimensional, pero se le asigna como unidad de medida el nombre del ángulo, llamado **radian**, con símbolo *rad*. De la ecuación 3.8, se define un radian como el ángulo subtendido por un arco de circunferencia de igual longitud que el radio de la misma. Como en una circunferencia,  $s = 2\pi r$ , y  $2\pi (rad) = 360^\circ$ , se puede encontrar la relación entre radianes y grados:

$$\theta(rad) = \frac{2\pi}{360^\circ} \theta^\circ$$

De aquí se deduce que el valor en grados de un radian es  $1 rad = 57.3^\circ$ , y que por ejemplo,  $45^\circ = \pi/4 rad$ .

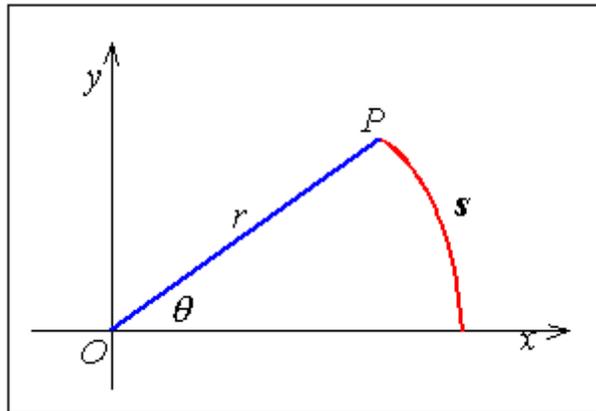


Figura 3.8

Cuando una partícula se mueve desde  $P$  hasta  $Q$  según la figura 3.9, en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , el radio se mueve un ángulo  $\Delta\theta$ , que es el desplazamiento angular. De manera análoga al movimiento lineal, se definen la rapidez angular  $\omega$  y aceleración angular  $\alpha$  como:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Sus unidades de medida son  $rad/s$  y  $rad/s^2$ , recordando que el radian no es una unidad de medida, por lo que en el análisis dimensional se obtienen para estas variables las dimensiones de  $1/s$  y  $1/s^2$ . De la definición de estas variables se deduce además que para la rotación de un cuerpo alrededor de un eje, todas las partículas tienen la misma velocidad angular y la misma aceleración angular.

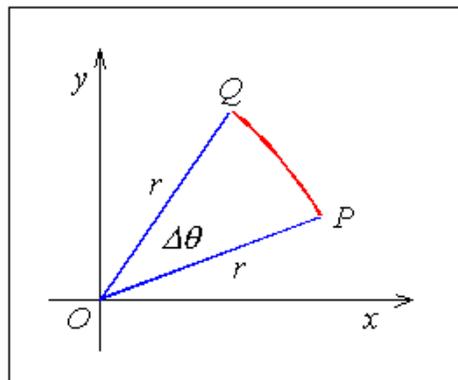


Figura 3.9 Desplazamiento angular  $\Delta\theta$  desde  $P$  a  $Q$ .

### 3.4.1 Cinemática de rotación.

El desplazamiento, velocidad y aceleración angular son análogos a sus similares variables lineales. Así las ecuaciones cinemáticas del movimiento de rotación con aceleración angular constante tienen la misma forma que las correspondientes al movimiento lineal haciendo los reemplazos  $x$  por  $\theta$ ,  $v$  por  $\omega$  y  $a$  por  $\alpha$ , por lo que las ecuaciones cinemáticas del movimiento angular son:

$$\theta = \theta_o + \omega_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_o)^2 \quad (3.9)$$

$$\omega = \omega_o + \alpha(t - t_o) \quad (3.10)$$

### 3.4.2 Relación entre las variables angulares y lineales.

Para toda partícula que gira describiendo una trayectoria circular, existe una relación entre las magnitudes angulares con las correspondientes lineales. Si la partícula recorre una distancia lineal  $s$ , moviéndose un ángulo  $\theta$  sobre una trayectoria circular de radio  $r$ , tiene una velocidad que por ser tangente a la trayectoria se llama velocidad tangencial, y tiene aceleración tangencial y centrípeta, entonces las relaciones entre las variables son:

$$\begin{aligned} s &= r\theta \\ v &= \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = r\omega \\ a_t &= \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_t = r\alpha \\ a_c &= \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

La magnitud de la aceleración en el movimiento circular es:

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$$

Por último se debe decir que se usa comúnmente como unidad de medida de la variación angular el término revolución, que corresponde a una vuelta completa, ó  $360^\circ$  ó  $2\pi$  (*rad*). Y para velocidad angular se usan las vueltas o revoluciones por minuto, con unidad de medida *rev/min*. Siempre se debe tener en mente que las vueltas o revoluciones son medidas de ángulo, por lo tanto son un número adimensional.

**Ejemplo 3.5.** Transformar 12 *rev/min* a *rad/s*.

**Solución:**

$$12 \frac{\text{rev}}{\text{min}} = 12 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{2\pi(\text{rad})}{1 \text{ rev}} = 1.26 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \equiv 1.26 \text{ s}^{-1}$$

**Ejemplo 3.6.** Calcular la rapidez angular, la velocidad tangencial y aceleración centrípeta a) en un punto sobre el ecuador para la rotación terrestre, b) para la traslación de la Tierra en torno al Sol.

**Solución:** a) la Tierra da una vuelta en 23 horas 56' 4" o un día y su radio medio es 6371 km. Para un punto sobre el ecuador se tiene:

$$\omega = \frac{2\pi}{T_{\text{día}}} = \frac{2\pi}{86400 \text{ s}} = 7.27 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$v_t = \omega R_T = 7.27 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} (6.371 \times 10^6 \text{ m}) = 463.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_c = \frac{v^2}{R_T} = \omega^2 R_T = \left( 7.27 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 6.371 \times 10^6 \text{ m} = 3.37 \times 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) La traslación de la Tierra en torno al Sol se completa en un año y la distancia media de la Tierra al Sol es aproximadamente  $150 \times 10^6$  km:

$$\omega = \frac{2\pi}{T_{\text{año}}} = \frac{2\pi}{365 \times 86400} = 1.99 \times 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$v_t = \omega R_{ST} = 1.99 \times 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \times 1.5 \times 10^{11} \text{ m} = 2.98 \times 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 29.8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \left( 1.99 \times 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \times 1.5 \times 10^{11} \text{ m} = 6 \times 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

**Ejemplo 3.7.** Un disco de 10 cm de radio que gira a 30 rev/min demora un minuto en detenerse cuando se lo frena. Calcular: a) su aceleración angular, b) el número de revoluciones hasta detenerse, c) la rapidez tangencial de un punto del borde del disco antes de empezar a frenar, d) la aceleración centrípeta, tangencial y total para un punto del borde del disco.

**Solución:** Datos:  $r = 0.1\text{m}$ ,  $\Delta t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ . Primero se transforman las 30 rev/min a rad/s.

$$\omega_o = 30 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{2\pi(\text{rad})}{1\text{rev}} \times \frac{1\text{min}}{60\text{s}} = 3.14 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(a) Usando las ecuaciones de cinemática de rotación:  $\omega = \omega_o + \alpha(t - t_o)$ , se despeja  $\alpha$ , cuando se detiene  $\omega = 0$ :

$$0 = \omega_o + \alpha \Delta t \Rightarrow \alpha = -\frac{\omega_o}{\Delta t} = -\frac{3.14 \text{ rad/s}}{60\text{s}} = -0.05 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

(b) Se pide calcular  $\Delta\theta$ , usando la ecuación

$$\theta = \theta_o + \omega_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_o)^2$$

reemplazando los datos, se obtiene:

$$\theta - \theta_o = 3.14 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \times 60\text{S} - \frac{1}{2} 0.05 \times (60)^2 = 94.2\text{rad}$$

$$\Delta\theta = 94.2\text{rad} \times \frac{1\text{rev}}{2\pi(\text{rad})} = 15\text{rev}$$

(c) Se puede calcular la rapidez con la ecuación:  $v = r\omega$

$$v = 0.1\text{m} \times 3.14 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 0.314 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(d) La aceleración centrípeta, tangencial y total es:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(0.314)^2}{0.1} = 0.98 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_t = r\alpha = 0.1 \times 0.05 = 0.005 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{(0.98)^2 + (0.005)^2} \approx 0.98 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

### 3.5 MOVIMIENTO RELATIVO.

Para una partícula en movimiento, observadores ubicados en sistemas de referencia diferentes medirán valores distintos de las variables cinemáticas, aunque el movimiento es el mismo. Por ejemplo, un objeto que se deja caer desde un vehículo en movimiento: el observador en el vehículo que deja caer el objeto lo ve caer verticalmente, pero un observador en tierra lo ve moverse como movimiento parabólico en dos dimensiones. Es un mismo movimiento visto en forma diferente por observadores en sistemas de referencia diferentes, se llama movimiento relativo, se produce en dos dimensiones.

Para describir el movimiento relativo consideramos observadores en dos sistemas de referencia: un sistema de referencia  $(x,y)$  fijo respecto a la Tierra con origen  $O$  y otro sistema de referencia  $(x',y')$  que se mueve respecto al fijo, con

origen  $O'$ , como se ve en la figura 3.10, donde los ejes  $x$  y  $x'$  están superpuestos. Supongamos además que el sistema de referencia móvil se mueve en línea recta en dirección  $x$  con velocidad constante  $\vec{u}$  respecto al sistema de referencia fijo.

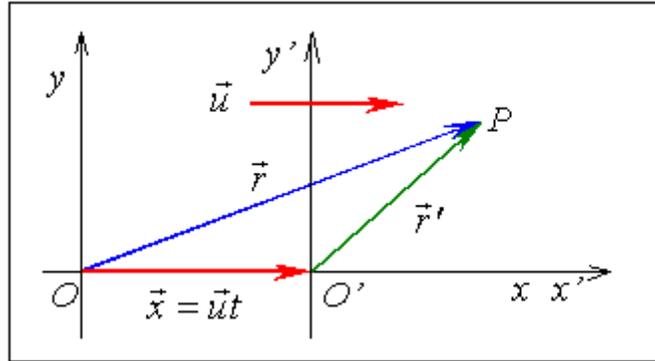


Figura 3.10. Vectores de posición de una partícula en movimiento relativo.

La posición de la partícula  $P$  en movimiento respecto al sistema de referencia fijo será  $\mathbf{r}$  y respecto al sistema de referencia móvil será  $\mathbf{r}'$ . Si en  $t_0 = 0$  ambos orígenes coinciden,  $x_0 = 0$ , y como  $\mathbf{u} = cte$ , la posición del sistema de referencia móvil en el instante  $t$  será:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ut + \frac{1}{2} at^2 \\ \Rightarrow x &= ut \end{aligned}$$

Del diagrama de vectores de la figura 3.10, se obtiene que la posición de la partícula cumple la siguiente relación vectorial:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{r}' \Rightarrow$$

$$\mathbf{r} = ut + \mathbf{r}'$$

De esta expresión se puede obtener la velocidad de la partícula

$$\frac{d\mathbf{r}^{\mathcal{P}}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}^{\mathcal{P}'}}{dt} + \mathbf{u} \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}^{\mathcal{P}} = \mathbf{v}^{\mathcal{P}'} + \mathbf{u}$$

Entonces, la velocidad  $\mathbf{v}$  de la partícula medida en el sistema de referencia fijo es igual a la velocidad  $\mathbf{v}'$  respecto al sistema de referencia móvil más la velocidad  $\mathbf{u}$  del sistema de referencia móvil respecto al sistema de referencia fijo. Esta ecuación se conoce como la transformación galileana de velocidades.

La aceleración se puede obtener derivando la velocidad

$$\frac{d\mathbf{v}^{\mathcal{P}}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}^{\mathcal{P}'}}{dt} + \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

como  $\mathbf{u} = cte \Rightarrow \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0$ , entonces  $\mathbf{a}^{\mathcal{P}} = \mathbf{a}^{\mathcal{P}'}$

Se concluye que dos observadores ubicados en sistemas de referencia diferentes miden velocidades diferentes para la partícula, pero si la velocidad del sistema de referencia móvil es constante, los dos miden la misma aceleración de la partícula en movimiento.

Usaremos la siguiente notación: si P es la partícula, F el sistema de referencia fijo y M el sistema de referencia móvil, entonces la velocidad  $\mathbf{v}_{PF}$  de la partícula respecto al sistema de referencia fijo es igual a la velocidad  $\mathbf{v}_{PM}$  de la partícula respecto al sistema de referencia móvil más la velocidad  $\mathbf{v}_{MF}$  del sistema de referencia móvil respecto al sistema de referencia fijo, esto es:

$$\mathbf{v}_{PF}^{\mathcal{P}} = \mathbf{v}_{PM}^{\mathcal{P}} + \mathbf{v}_{MF}^{\mathcal{P}} \quad (3.12)$$

**Ejemplo 3.8.** La rapidez del agua de un río es 5 km/h uniforme hacia el este. Un bote que se dirige hacia el norte cruza el río con una rapidez de 10 km/h respecto al agua. a) Calcular la rapidez del bote respecto a un observador en la orilla del río. b) Calcular la dirección donde debe dirigirse el bote si se quiere llegar justo al frente en la orilla opuesta. c) Calcular ahora su rapidez respecto a la tierra.

**Solución:** El sistema de referencia fijo es la tierra, el sistema de referencia móvil el río y la partícula es el bote, entonces:

$v_{PM} = 10$  km/h : rapidez del bote (partícula) respecto al agua (SR móvil)  
 $v_{MF} = 5$  km/h : rapidez del agua (SR móvil) respecto a tierra (SR fijo)  
 $v_{PF} = ?$  : rapidez del bote (partícula) respecto a tierra (SR fijo)

a) Es conveniente hacer el diagrama de vectores de velocidades, que se muestra en la figura 3.11a:

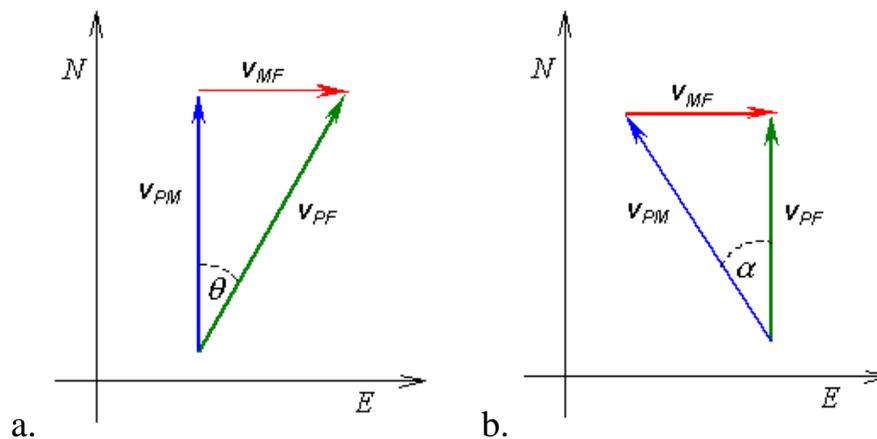


Figura 3.11 Ejemplo 8.

La magnitud de la velocidad del bote respecto a tierra  $v_{PF}$ , que tiene una componente a favor de la corriente, se puede calcular del triángulo rectángulo de vectores de la figura 3.11a

$$v_{PF}^2 = v_{PM}^2 + v_{MF}^2$$

$$v_{PF}^2 = 10^2 + 5^2 = 125$$

$$v_{PF} = 11.2 \frac{km}{h}$$

su dirección es:

$$\tan \theta = \frac{v_{MF}}{v_{PM}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 26.6^\circ \text{ NE}$$

b) Si quiere llegar justo al frente desde donde sale, como la corriente del río lo arrastra hacia el este, haciendo el diagrama de vectores, figura 3.11b, se observa que debe apuntar en dirección  $\alpha$  hacia el noroeste, entonces:

$$\text{sen} \alpha = \frac{v_{MF}}{v_{PM}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

c) Ahora, la rapidez  $v_{PF}$  es:

$$v_{PM}^2 = v_{MF}^2 + v_{PF}^2 \Rightarrow v_{PF}^2 = v_{PM}^2 - v_{MF}^2$$

$$v_{PF}^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \Rightarrow v_{PF} = 8.7 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Como debe remar con una componente de la velocidad en contra de la corriente, la velocidad resultante del bote en este caso es menor que en la parte a), donde una componente de la velocidad es a favor de la corriente.

**PROBLEMAS.**

- 3.1. Se dispara un proyectil desde el piso con velocidad  $\vec{v} = (12\hat{i} + 24\hat{j}) \text{ m/s}$ . a) ¿Cuál es la velocidad después de 4 s? b) Cuáles es la posición del punto en el cual la altura es máxima? c) ¿Cuál es la distancia horizontal? R: a)  $12\hat{i}-15\hat{j} \text{ m/s}$ , b)  $30\hat{i}+30\hat{j} \text{ m}$ .
- 3.2. Desde el borde de un acantilado se lanza una piedra horizontalmente con una rapidez de 15 m/s. El acantilado está 50 m de altura respecto a una playa horizontal. a) ¿En que instante la piedra golpeará la playa bajo el acantilado?, b) ¿Dónde golpea? c) ¿Con qué rapidez y ángulo golpeará la playa? d) Encontrar la ecuación de la trayectoria de la piedra. R: a) 3.16s, b) 47.4m, c) 35m/s,  $65^\circ$ , d)  $y=50-(x^2/45)$ .
- 3.3. Un balón de fútbol que se patea a un ángulo de  $50^\circ$  con la horizontal, recorre una distancia horizontal de 20 m antes de chocar contra el suelo. Calcular a) la rapidez inicial del balón b) el tiempo que permanece en el aire y c) la altura máxima que alcanza. R: a) 14.2m/s, b) 2.2s, c) 6m.
- 3.4. Se lanza horizontalmente una pelota desde la parte superior de un edificio que tiene 35 m de alto. La pelota choca contra el piso en un punto que se encuentra a 80 m de la base del edificio. Calcular: a) el tiempo que la pelota se encuentra en el aire, b) su rapidez inicial y c) la velocidad justo antes de que choque contra el suelo. R: a) 2.6s, b) 30 m/s, c)  $30\hat{i}-26\hat{j} \text{ m/s}$ .
- 3.5. Se lanza una piedra de manera que la distancia horizontal que recorre es el triple de su altura máxima, calcular su ángulo de lanzamiento. R:  $53.1^\circ$ .
- 3.6. En el próximo partido de Chile con la selección de Micomicon, el Che Copete deberá patear un tiro libre desde un punto a 25m del arco cuya altura es 2.5m. Cuando patea, la pelota sale del césped con una rapidez de 20m/s en un ángulo de  $20^\circ$  sobre la cancha. Suponiendo que la pelota no sufre ninguna alteración de su trayectoria, a) ¿se convierte o no el gol? b) ¿Con qué velocidad cruza por el arco? c) Obtenga la ecuación de la trayectoria de la pelota. (Por cuanto perderá Chile con los Micomicones). R: a) si, pasa a 0.25m del suelo, b)  $18.8\hat{i}-6.5\hat{j} \text{ m/s}$ .

- 3.7. Se lanza un cohete formando un ángulo de  $60^\circ$  con la horizontal con una rapidez inicial de  $100 \text{ m/s}$ . El cohete se mueve a lo largo de su dirección inicial de movimiento con una aceleración de  $30 \text{ m/s}^2$  durante  $3 \text{ s}$ . En ese instante deja de acelerar y empieza a moverse como un proyectil. Calcular: a) la altura máxima alcanzada por el cohete; b) su tiempo total de vuelo, c) la distancia horizontal. R: a) 1730m, b) 38s, c) 3543m.
- 3.8. Un proyectil se dispara desde cierta altura  $y_0$  en un ángulo de  $45^\circ$ , con la intención que golpee a un móvil que se mueve con velocidad constante de  $21 \text{ m/s}$  hacia la derecha, que se encuentra ubicado a  $70 \text{ m}$  del origen sobre el eje  $x$  en el instante del disparo. Si el proyectil impacta al móvil al cabo de  $10 \text{ s}$ , calcular a) la rapidez inicial del proyectil, b) su posición inicial, c) su altura máxima desde el suelo. R: a) 39.6m/s, b) 220m, c) 259.2m.
- 3.9. Katy le lanza un chicle (nuevo) desde una altura de  $1.5 \text{ m}$  a Pepe, que se encuentra separado a  $3 \text{ m}$  de Katy. El chicle pasa un segundo después a una altura de  $1 \text{ m}$  por donde está Pepe, pero como él estaba 'pajareando' no lo toma. a) Hacer un esquema de la situación en un SR. b) Calcular la velocidad inicial que Katy le imprime al chicle. c) ¿A qué distancia detrás de Pepe caerá el chicle?, en este caso qué se debe suponer? d) Determinar la ecuación de la trayectoria del chicle de Katy. R: b)  $3\mathbf{i}+4.5\mathbf{j}$  m/s, c) 0.45m.
- 3.10. Lucho se encuentra a  $5 \text{ m}$  de una pared vertical cuando lanza una pelota de básquetbol desde  $2.25 \text{ m}$  de altura, con una velocidad inicial de  $-10\mathbf{i} + 10\mathbf{j} \text{ m/s}$ . Cuando la pelota choca con la pared, la componente horizontal de la velocidad de la pelota se invierte y la componente vertical no cambia su dirección (pero si su magnitud). a) Hacer el esquema de la situación. b) ¿A que distancia de Lucho tocará el suelo la pelota? R: b) 12m detrás.
- 3.11. Un tren se mueve con rapidez constante de  $54 \text{ km/h}$ . Desde una ventana del tren ubicada a  $2 \text{ m}$  del suelo, un cabrochico tira un objeto horizontal y perpendicularmente a la dirección de movimiento del tren, con una rapidez de  $5 \text{ m/s}$ . Calcular la posición donde caerá el objeto respecto al punto de lanzamiento. R:  $3.15\mathbf{i}+9.45\mathbf{j}+0\mathbf{k} \text{ m}$ .

- 3.12. Se apunta un rifle horizontalmente a través de su mira hacia el centro de un blanco grande que esta a 200 m. La velocidad inicial de la bala es de 500 m/s. a) ¿En dónde golpea la bala en el blanco? b) Calcular el ángulo de elevación del cañón para dar en el centro del blanco. R: a) 0.8m debajo de la altura del rifle, b)  $0.23^\circ$ .
- 3.13. Un cañón dispara un proyectil con una rapidez inicial  $v_o$  inclinado en un ángulo  $\alpha$ . Si el ángulo se cambia a  $\beta$ , el alcance del proyectil aumenta en una distancia D. Demuestre que

$$D = \frac{v_o^2}{g} (\text{sen}2\beta - \text{sen}2\alpha)$$

- 3.14. La distancia horizontal máxima a la que puede patear la pelota un arquero es 120 m. En un saque desde el arco, golpea la pelota con la misma rapidez inicial con la que alcanza esa distancia máxima, pero formando un ángulo de  $25^\circ$  con la horizontal. Calcular a que distancia del arco llegará la pelota con un chute del arquero.
- 3.15. Una pulga puede saltar una altura vertical  $h$ . a) ¿Cuál es la distancia horizontal máxima que puede recorrer? b) ¿Cuál es su permanencia en el aire en ambos casos?
- 3.16. Un camión se mueve al norte con una velocidad constante de 10 m/s en un tramo de camino horizontal. Un cabrochico que pasea en la parte posterior del camión desea lanzar una pelota mientras el camión se está moviendo y atraparla después de que el camión haya recorrido 20 m. a) Despreciando la resistencia del aire, ¿a qué ángulo de la vertical debería ser lanzada la pelota? b) Cuál debe ser la rapidez inicial de la pelota? c) Cuál es la forma de trayectoria de la pelota vista por el cabrochico? d) Una persona sobre la tierra observa que el muchacho lanza la pelota y la atrapa. En este marco de referencia fijo del observador, determine la forma general de la trayectoria de la pelota y la velocidad inicial de esta.
- 3.17. Un cabrochico tira una pelota al aire lo más fuerte que puede y luego corre como una liebre para poder atrapar la pelota. Si su rapidez máxima en el lanzamiento de la pelota es 20 m/s y su mejor tiempo para recorrer 20 m es 3 s, calcular la altura de la pelota para que pueda tomarla.

- 3.18. Una pelota de golf sale desde el piso en un ángulo  $\alpha$  y golpea a un árbol a una altura  $H$  del suelo. Si el árbol se encuentra a una distancia horizontal  $D$  del punto de lanzamiento, a) demuestre que  $\tan\alpha = 2H/D$ . b) Calcular la rapidez inicial de la pelota en términos de  $D$  y  $H$ .
- 3.19. Una partícula comienza a girar desde el reposo hasta una rapidez angular de  $15 \text{ rad/s}$  en  $3$  segundos. Calcular a) su aceleración angular, b) el número de vueltas en ese tiempo.
- 3.20. Una rueda de bicicleta de  $30 \text{ cm}$  de radio comienza a girar desde el reposo con una aceleración angular constante de  $3 \text{ rad/s}^2$ . Después de  $10$  segundos calcular: a) su rapidez angular, b) el desplazamiento angular, c) la rapidez tangencial de un punto del borde, d) su aceleración total para un punto del borde. R: a)  $30 \text{ rad/s}$ , b)  $150 \text{ rad}$ , c)  $9 \text{ m/s}$ , d)  $270 \text{ m/s}^2$ .
- 3.21. Busque la información necesaria para calcular la aceleración centrípeta al nivel del mar de un punto sobre el Ecuador, en Concepción, en  $45^\circ$  de latitud sur y en el Polo Sur. R:  $0.034 \text{ m/s}^2$ ,  $0.027 \text{ m/s}^2$ ,  $0.024 \text{ m/s}^2$ ,  $0$ .
- 3.22. La órbita de la Luna alrededor de la Tierra es aproximadamente circular, con un radio promedio de  $3.84 \times 10^8 \text{ m}$ . La Luna completa una revolución en torno a la Tierra y en torno a su eje en  $27.3$  días. Calcular a) la rapidez orbital media de la Luna, b) la rapidez angular, c) aceleración centrípeta. R: a)  $1023 \text{ m/s}$ , b)  $2.7 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$ , c)  $2.7 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$ .
- 3.23. Calcular la rapidez orbital media de la Tierra en torno al Sol y su rapidez angular en torno a su eje de rotación. R:  $29.8 \text{ km/h}$ ,  $7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ .
- 3.24. A la partícula del extremo de un péndulo de largo un metro se la hace girar de forma tal que su movimiento describe una circunferencia en un plano horizontal. Cuando el péndulo se ha desviado  $30^\circ$  de la vertical, la partícula completa una vuelta cada  $3$  segundos. Calcular a) su rapidez angular b) su rapidez tangencial, c) su aceleración centrípeta. R: a)  $2.1 \text{ rad/s}$ , b)  $1.05 \text{ m/s}$ , c)  $2.2 \text{ m/s}^2$ .
- 3.25. Una centrífuga cuyo tambor tiene  $50 \text{ cm}$  de diámetro, comienza a girar desde el reposo hasta alcanzar una rapidez angular de  $1000 \text{ rpm}$  en  $10 \text{ s}$ . a) Calcular su aceleración angular. b) Si después de los  $10 \text{ s}$  gira con ra-

- pidez constante durante 5 minutos, calcular el número de vueltas que da cada minuto. c) calcular la rapidez tangencial, aceleración centrípeta y tangencial en las paredes del tambor. d) Si después de los 5 minutos tarda 20 s en detenerse, calcular su aceleración angular. R: a)10.5rad/s, b)10<sup>3</sup>, d)-5.2/s<sup>2</sup>.
- 3.26. Un disco comienza a girar desde el reposo con aceleración angular constante hasta una rapidez angular de 12 rad/s en 3 s. Calcular: a) la aceleración angular del disco, b) el ángulo que describe. R: a) 4rad/s<sup>2</sup>, b) 18rad.
- 3.27. Un motor eléctrico hace girar un disco a razón de 100 rev/min. Cuando se apaga el motor, su aceleración angular es  $-2 \text{ rad/s}^2$ . Calcular: a) el tiempo que demora el disco en detenerse, b) el número de vueltas que gira en ese tiempo. R: a) 5.2 s, b) 27.5 rad.
- 3.28. Un disco comienza a girar desde el reposo con aceleración angular constante de  $5 \text{ rad/s}^2$  por 8 s. Luego el disco se lleva al reposo con una aceleración angular constante en 10 revoluciones. Calcular: a) su aceleración angular, b) el tiempo que demora en detenerse. R: a)  $-12.7 \text{ rad/s}^2$ , b)  $\pi \text{ s}$ .
- 3.29. Un volante de 2 m de diámetro, comienza a girar desde el reposo con aceleración angular constante de  $4 \text{ rad/s}^2$ . En el instante inicial un punto P del borde del volante forma un ángulo de  $57.3^\circ$  con la horizontal. Calcular para el instante 2 s: a) su rapidez angular, b) la rapidez lineal de P, c) la aceleración lineal de P, d) la posición de P. R: a) 8 rad/s, b) 8 m/s, d) 9 rad.
- 3.30. Un disco de 8 cm de radio, gira con una rapidez angular constante de 1200 rev/min. Calcular: a) la rapidez angular del disco, b) la rapidez lineal de un punto a 3 cm del disco, c) la aceleración radial de un punto en el borde del disco, d) la distancia total recorrida por un punto del borde en 2 s. R: a) 126 rad/s b) 3.8 m/s, c)  $1.26 \text{ km/s}^2$ , d) 20.1m.
- 3.31. La posición de una partícula que se mueve en el plano  $xy$  varía con el tiempo según la ecuación  $\mathbf{r} = a \cos(\omega t)\mathbf{i} + a \sin(\omega t)\mathbf{j}$ , en donde  $r$  y  $a$  se miden en  $m$ ,  $\omega$  en  $s^{-1}$  y  $t$  en  $s$ . a) Demuestre que la trayectoria de la partícula es una circunferencia que tiene  $a \text{ m}$  de radio y su centro está en el origen. b) determine los vectores de velocidad y de aceleración c)

Demuestre que el vector aceleración siempre apunta hacia el origen (opuesto a  $r$ ) y tiene una magnitud de  $v^2/r$ .

- 3.32. Superman (no el Vargas, el de verdad), que le anda echando el ojo a Luisa Lane, vuela hacia el noreste, donde se encuentra ella, con una rapidez de  $54 \text{ km/h}$  respecto al aire. El viento sopla hacia el noroeste a  $7.5 \text{ m/s}$  respecto de tierra. a) Calcular la rapidez de Superman respecto de tierra. b) Superman, que no aprobó Física I, no se encuentra con Luisa ¿por qué? R: a)  $60.3 \text{ km/h}$ , b) porque se desvía  $26.6^\circ$ .
- 3.33. Un cóndor (no el Rojas, sino uno de verdad) vuela hacia el este con una rapidez de  $12 \text{ km/h}$  respecto del aire, en presencia de un viento que sopla hacia el noreste (a  $45^\circ$ ) con una rapidez de  $5 \text{ m/s}$ . a) Calcular la rapidez resultante del cóndor. b) ¿Qué distancia se desvía cada minuto respecto a la dirección este? R: a)  $27.8 \text{ km/h}$ , b)  $212 \text{ m}$ .
- 3.34. El piloto de un avión se orienta hacia el oeste en presencia de un viento que sopla hacia el sur a  $75 \text{ km/h}$ . Si la rapidez del avión respecto al viento es  $500 \text{ km/h}$ , a) ¿Cuál es su rapidez respecto a la tierra? b) ¿en qué dirección se desvía el avión? c) ¿en qué dirección debe dirigirse el avión para ir hacia el oeste? d) En este caso ¿cuál será su rapidez respecto a la tierra? R: a)  $506 \text{ km/h}$ , b)  $8.5^\circ$ , c)  $8.6^\circ$ , d)  $494.3 \text{ km/h}$ .
- 3.35. El piloto de una avión observa que la brújula indica que va dirigiéndose hacia el oeste. La rapidez del avión respecto al aire es de  $150 \text{ km/h}$ . Si existiera un viento de  $30 \text{ km/h}$  hacia el norte, calcule la velocidad del avión respecto a la Tierra. R:  $153 \text{ km/h}$ ,  $11.3^\circ \text{NW}$ .
- 3.36. Un pescador desea cruzar un río de  $1 \text{ km}$  de ancho, el cual tiene una corriente de  $5 \text{ km/h}$  hacia el norte. El pescador está sobre el lado oeste. Su bote se impulsa con una rapidez de  $4 \text{ km/h}$  respecto del agua. a) ¿En qué dirección deberá apuntar para hacer el cruce en un tiempo mínimo?, b) ¿Cuánto tiempo le tomará para cruzar?, c) Determine la velocidad del bote con respecto a un observador estacionario en la Tierra, d) Encuentre el desplazamiento final corriente abajo. R: a) este, b)  $15 \text{ min}$ , c)  $6.4 \text{ km/h}$ ,  $51.3^\circ \text{NE}$ , d)  $1.25 \text{ km}$ .

## CAPÍTULO 4. DINÁMICA DE LA PARTÍCULA.

### 4.1 INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se sigue considerando un modelo para hacer el estudio de la dinámica sólo para el caso de partículas. Un modelo se usa para representar la realidad física y debe tener en cuenta dos aspectos conflictivos entre sí: a) tiene que ser lo bastante simple para como para ser elaborado con métodos matemáticamente rigurosos, b) debe ser realista para que los resultados obtenidos sean aplicables al problema considerado. Estos dos aspectos hacen que la sencillez del modelo, su belleza matemática, sea incompatible con la fidelidad al problema real.

La *dinámica* estudia el movimiento de los cuerpos considerando las causas que lo producen. Es una rama de la Mecánica que abarca casi toda la Mecánica Clásica. En la Mecánica Clásica se restringe el estudio a los cuerpos (partículas) grandes comparados con el tamaño de un átomo ( $\sim 10^{-10} m$ ) y para velocidades pequeñas comparadas con la de la luz ( $\sim 3 \times 10^8 m/s$ ). Isaac Newton (1642-1727) es el principal creador de la Mecánica Clásica. La Mecánica Relativista estudia el movimiento de las partículas subatómicas, que se mueven a muy altas velocidades, es más general que la Mecánica Clásica a la que incluye como caso particular. Su creador fue A. Einstein (1879 – 1955).

En los primeros estudios, Galileo Galilei (1564-1642), hizo un gran avance en la comprensión del movimiento. Las ideas de Galileo eran revolucionarias para su época, él propuso la teoría científica que la Tierra giraba en torno al Sol, teoría contraria a las doctrinas de la iglesia que imponían la creencia que la Tierra era el centro del Universo, sin tener fundamentos para hacer esa afirmación. Quienes se oponían a esas creencias eran severamente castigados, con penas tales como morir quemado en la hoguera u otras barbaries impuestas por la religión católica. Galileo se encontró en esa situación peligrosa, por lo que no pudo publicar sus resultados y fue obligado a retractarse públicamente. Posteriormente, la inquisición española propicio que todas sus universidades aprobaran y estudiaran la tesis de Galileo. Durante el Jubileo 2000 la Iglesia Católica tuvo que pedir perdón al mundo científico por no haber creído en la teoría de Galileo y le pidió perdón a Galileo mismo. Pero un filósofo contemporáneo de Galileo, Giordano Bruno (1548-1600) tuvo un final trágico, ya que

murió en Roma en 1600 quemado en la hoguera de la Inquisición, por defender las mismas ideas de Galileo. En la actualidad, la Iglesia Católica continúa con sus ideas retrógradas y dictatoriales porque, por ejemplo, acepta la tesis abortiva de la ‘píldora del día después’, a pesar de que se ha demostrado científicamente que no es abortiva, o se oponía a la aprobación de leyes como la Ley del Divorcio, o pone trabas para la realización del programa Jornadas de Conversación, Afectividad y Sexualidad, JOCAS, de educación sexual en los Liceos. Sin embargo la iglesia se resiste a aceptar las sanciones en contra de sus sacerdotes que son acusados de abusos deshonestos, y los defiende ¿Cómo eso va a ser algo aceptable? Ojalá que no se deba esperar otros 500 años para que la iglesia reconozca este nuevo error.

Antes de Galileo la mayoría de los filósofos pensaba que se necesitaba una ‘*influencia externa*’ para mantener a un cuerpo en movimiento. Creían que un cuerpo se encontraba en su estado natural cuando estaba en reposo, y que para que el cuerpo se moviera en línea recta con velocidad constante, tenía que moverlo continuamente algún agente externo, de otra manera naturalmente se detendría. Para probar esa idea, Galileo empezó por encontrar una forma de liberar a un cuerpo de toda influencia externa. En la naturaleza eso no se puede lograr, porque aún cuerpos muy alejados de un cuerpo de prueba pueden ejercer una influencia sobre él y cambiar su movimiento. Pero se puede hacer que las influencias externas sean muy pequeñas (es el modelo) y pensar que realmente no existen para tener una idea de cómo sería el movimiento. La experiencia de Galileo fue deslizar un bloque de madera sobre una superficie bajo una influencia externa (por ejemplo la mano que lo empuja), si se elimina la influencia externa el bloque se detiene, por eso los filósofos pensaban que permanentemente tenía que estar actuando la influencia externa para mantener el movimiento. Pero si se elige como cuerpo una esfera y se hace deslizar sobre una superficie muy lisa, al ponerla en movimiento lo hará con mucha facilidad sin ninguna influencia externa, (el contacto entre las dos superficies es otra influencia externa que se desprecia). En el caso que no exista ninguna influencia externa sobre un cuerpo después que se lo pone en movimiento, nunca más se detendría. A la influencia externa que hace que un cuerpo este detenido o en movimiento se le llama una *fuerza*.

### *¿Qué es fuerza?*

En la vida cotidiana se considera *fuerza* a una sensación común asociada con la dificultad para mover o levantar un cuerpo. En Física se identifica una fuerza por el efecto que produce. Uno de los efectos de una fuerza es cambiar el

estado de reposo o de movimiento del cuerpo, más concretamente, una fuerza cambia la velocidad de un objeto, es decir produce una aceleración. Cuando se aplica una fuerza sobre un cuerpo y no se produce movimiento, entonces puede cambiar su forma, aún si el cuerpo es muy rígido. La deformación puede o no ser permanente. Entonces los efectos de la fuerza neta son dos: cambiar el estado de movimiento de un cuerpo o producir una deformación, o ambas cosas simultáneamente.

Normalmente sobre un cuerpo pueden actuar varias fuerzas, entonces el cuerpo acelerará cuando el efecto de la fuerza neta que actúa sobre él no es cero. Se llama **fuerza neta** o *fuerza resultante* a la suma de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo. Si la fuerza neta es cero, la aceleración es cero, el movimiento es con velocidad igual a cero (cuerpo detenido) o con velocidad constante. Cuando un cuerpo está en reposo o se mueve con velocidad constante, se dice que está en **equilibrio**. Para una fuerza usaremos el símbolo ***F***.

Se pueden distinguir dos grandes clases de fuerzas: fuerzas de contacto, representan el resultado del contacto físico entre el cuerpo y sus alrededores, por ejemplo mover un carro o estirar un resorte; y fuerzas de acción a distancia que actúan a través del espacio sin que haya contacto físico entre el cuerpo y sus alrededores, por ejemplo la fuerza con que la Tierra atrae a los cuerpos que caen en caída libre. Todas las diferentes formas de fuerzas se encuentran dentro de esas dos grandes clasificaciones.

Para describir el mundo, la física contemporánea recurre a cuatro interacciones o fuerzas fundamentales, que actúan sobre las partículas de materia (y sobre las antipartículas), vehiculadas por partículas llamadas *vectores de interacción*, que son: fotón (interacción electromagnética), bosón (interacción débil), gluón (interacción fuerte) y gravitón (interacción gravitacional).

- 1) Fuerzas electromagnéticas de atracción o repulsión entre partículas cargadas en reposo o en movimiento, explica la cohesión de los átomos, es mucho más intensa que la fuerza gravitacional.
- 2) Fuerzas nucleares intensas entre partículas subatómicas, responsable de la existencia del núcleo atómico asegura la cohesión interna de los constituyentes del núcleo atómico, protones y neutrones, y es responsable de un gran número de reacciones y de desintegraciones; es la de mayor magnitud ( $10^2 - 10^3$  veces la fuerza electromagnética).

- 3) Fuerzas nucleares débiles de corto alcance, rige algunos procesos radiactivos, establece la estabilidad de algunos núcleos, es varios órdenes de magnitud ( $10^{12}$ ) menor que la fuerza electromagnética.
- 4) Fuerza de atracción gravitacional entre cuerpos debido a sus masas, entre otras cosas hace que caigan las manzanas y que suba la marea, es la fuerza de menor magnitud comparada con las otras.

Para que el concepto de fuerza sea exacto se debe establecer un método para medirla. Una fuerza se puede medir por el efecto que produce. Por ejemplo se puede usar la deformación que una fuerza produce en un resorte, como en la figura 4.1. Si se aplica una fuerza verticalmente a un resorte y se estira una unidad (figura 4.1a), le asignamos a la fuerza una magnitud unitaria de valor  $F$ . Se aplica ahora otra fuerza al mismo resorte horizontalmente (figura 4.1b), produciéndole un estiramiento de dos unidades, la magnitud de la fuerza será de  $2F$ . Si se aplican simultáneamente las dos fuerzas, el resorte se inclina, como en la figura 4.1c, y se estira  $\sqrt{5}$  veces. La fuerza equivalente que produce ese estiramiento del resorte es la suma vectorial de  $F$  y  $2F$ . Es decir, la fuerza es un vector.

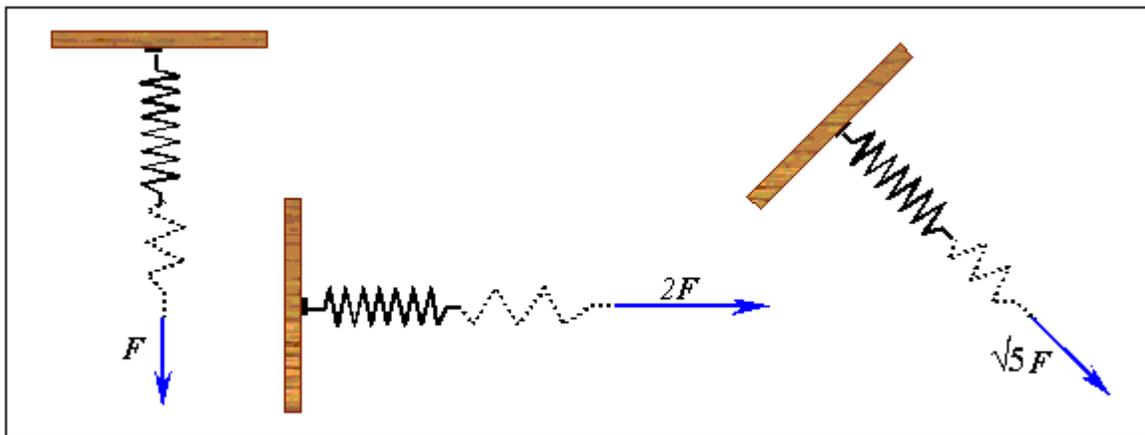


Figura 4.1 a) izquierda, b) centro, c) derecha.

El instrumento para medir fuerzas se llama *dinamómetro*, es un resorte que se estira sobre una escala. Si se aplica una fuerza de una unidad sobre el dinamómetro, el resorte se estira hasta que ejerce una fuerza igual y contraria a la

aplicada. En la escala se mide el alargamiento del resorte y se le asigna una unidad de fuerza. De esa manera se calibra el dinamómetro y se usa para medir fuerzas, por ejemplo se aplica una fuerza sobre el dinamómetro y si se estira 2.5 unidades, entonces la fuerza aplicada es 2.5 veces la unidad de fuerza. Este procedimiento es válido para pequeños alargamientos del resorte, ya que si la fuerza es muy intensa, se puede deformar y no volver a su forma original.

#### 4.2 PRIMERA LEY DE NEWTON.

Antes de 1600 los filósofos afirmaban que el estado natural de la materia era el reposo. Galileo fue el primero que tuvo una idea distinta del movimiento haciendo experimentos. Esencialmente sus experimentos consistían en analizar en forma semi-cuantitativa el movimiento de los cuerpos, tratando de eliminar toda influencia externa que lo alterará, concluyendo que el estado natural de los cuerpos no es el reposo, sino el resistirse a una aceleración. Posteriormente, Newton, que nació el año en que murió Galileo, perfeccionó los experimentos de Galileo realizando cuidadosas mediciones experimentales, lo que le permitió formular las ahora conocidas tres Leyes del Movimiento de Newton. La primera Ley de Newton se puede enunciar de la siguiente manera:

*“Un cuerpo en reposo permanecerá en reposo y uno en movimiento continuará en movimiento con velocidad constante, a menos que actúe una fuerza sobre el cuerpo que altere su estado de reposo o de movimiento”.*

En otros términos se enuncia de la siguiente forma: si la suma de fuerzas que actúa sobre un cuerpo es cero, su aceleración es cero. Esto significa que la partícula se encuentra en equilibrio de traslación, y se cumple la condición:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 \quad (4.1)$$

Es importante darse cuenta que esta ley no ha sido probada real y verdaderamente, ya que no es posible eliminar totalmente las fuerzas que actúan sobre un cuerpo. Es una generalización de la experiencia.

La primera Ley de Newton se conoce también como **Ley de Inercia**, porque define un *sistema de referencia inercial*. Un **sistema de referencia inercial** es aquel en el cual si sobre un cuerpo no actúa fuerza alguna, este se mueve con velocidad constante. En este sistema de referencia se cumple la primera Ley de Newton.

La Tierra no es un sistema de referencia inercial porque tiene una aceleración de  $5.9 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$  por su traslación alrededor del Sol y una aceleración por rotación en torno a su eje, que en el ecuador vale  $3.4 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ . Como estos son valores pequeños comparados con  $g$ , se puede suponer que la tierra es un sistema de referencia inercial. En la naturaleza no existen los sistemas de referencia inercial. Un marco de referencia inercial que se mueve con velocidad constante respecto a las estrellas muy lejanas, aparentemente fijas, es la mejor aproximación a un sistema de referencia inercial. Para nuestros efectos, en la mayoría de los casos consideraremos a la tierra como un sistema de referencia inercial, ya que para los objetos que se mueven distancias cortas comparadas con el radio terrestre sobre la superficie, se pueden despreciar los movimientos de la Tierra.

### 4.3 CONCEPTO DE MASA.

¿Qué efecto tendrá una misma fuerza sobre cuerpos diferentes? No es lo mismo golpear con el pie una pelota que un adoquín. La masa es la propiedad del cuerpo que determina el efecto de una fuerza aplicada sobre él. Cuando se quiere cambiar el estado de movimiento de un cuerpo, este se resiste al cambio. La **inercia** es la propiedad de la materia que hace que se resista a cualquier cambio de su movimiento, ya sea en su dirección o rapidez. Por ejemplo, los pasajeros de un automóvil que acelera sienten contra la espalda la fuerza del asiento, que vence su inercia y aumenta su velocidad. Cuando éste frena, los pasajeros tienden a seguir moviéndose y se mueven hacia delante, por lo que deben apoyarse en el asiento delantero para no salir del suyo. Si se realiza un giro, un paquete situado sobre el asiento se desplazará lateralmente, porque la inercia del paquete hace que tienda a seguir moviéndose en línea recta.

La masa es el término que se usa para cuantificar la inercia. Como mide la resistencia de un cuerpo a cambiar su estado de movimiento o de reposo, se le llama **masa inercial**, y está determinada por la razón entre la fuerza neta sobre el cuerpo y su aceleración.

Otro método para encontrar la masa consiste en comparar la fuerzas gravitacionales ejercidas sobre dos objetos, uno de ellos de masa desconocida y el otro de masa conocida. El objeto de masa desconocida se coloca en uno de los platillos de una balanza y en el otro platillo el conocido. Cuando los dos brazos están balanceados la fuerza gravitacional es la misma sobre cada uno de ellos. Entonces las masas de los cuerpos son iguales; cuando la masa se mide de esta forma se llama *masa gravitacional*. Experimentos muy precisos indican que ambas masas, inercial y gravitacional, son iguales.

La masa es una propiedad del cuerpo, es independiente del medio que la rodea y del método usado para medirla, para un cuerpo determinado tiene el mismo valor en cualquier lugar del universo. Es un escalar por lo que cumple las reglas de la aritmética común, en el SI se mide en kg.

#### **4.4 SEGUNDA LEY DE NEWTON.**

Cuando la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo no es cero, el cuerpo se mueve con una aceleración en la dirección de la fuerza. Experimentalmente se demuestra que para una masa fija, si aumenta el valor de la fuerza, su aceleración aumenta proporcionalmente; por ejemplo si  $F$  aumenta a  $2F$  la aceleración  $a$  aumenta a  $2a$ . Por otra parte, si se aplica una fuerza fija, pero se aumenta el valor de la masa, la aceleración del cuerpo disminuye proporcionalmente al aumento de masa, por ejemplo si  $m$  aumenta a  $2m$  la aceleración  $a$  disminuye a  $(1/2)a$ . Lo opuesto se observa si en lugar de considerar aumento de fuerza o de masa, se consideran disminuciones.

La Segunda Ley de Newton se enuncia basándose en estos resultados experimentales, resumiendo esas observaciones en el siguiente enunciado:

***“La aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo e inversamente proporcional a su masa.”***

Escrita en términos matemáticos, si  $\sum \vec{F}$  es la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo de masa  $m$ , la Segunda Ley de Newton se expresa como:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (4.2)$$

Esta ecuación fundamental muy sencilla y completa, encierra razonamientos físicos muy profundos, producto de la experiencia, se conoce como la **ecuación fundamental de movimiento**. Permite describir el movimiento y la mayor parte de los fenómenos de la Mecánica Clásica, (excepto los cambios de opinión de una mujer que se rigen por una fuerza de voluntad o se producen por motivos de fuerza mayor, son aleatorios, caóticos e impredecibles). Como la Mecánica Clásica es válida para cuerpos ‘grandes’ que se mueven con  $v \ll c$ , la misma restricción vale para las Leyes de Newton.

La Segunda Ley de Newton es una expresión vectorial y equivale a tres ecuaciones escalares, una en cada dirección  $x$ ,  $y$  y  $z$ ,

$$\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y, \quad \sum F_z = ma_z.$$

La Segunda Ley de Newton se puede usar para definir la unidad de medida de una fuerza. En el sistema internacional, la unidad de medida de fuerza se llama **Newton**, que se simboliza por  $N$ , se define como la fuerza necesaria para mover una masa de un  $kg$  produciéndole una aceleración de un  $m/s^2$ , entonces  $1 N = 1 kg m/s^2$ .

Se observa que la primera Ley de Newton es un caso particular de la segunda ley cuando la fuerza neta es cero, ya que en ese caso la aceleración debe ser cero, por lo tanto es una consecuencia de la segunda ley.

#### 4.5 PESO.

Todos los cuerpos que se dejan en libertad cerca de la superficie terrestre caen con la aceleración de gravedad. Lo que los hace caer es la fuerza fundamental de atracción gravitacional con que la Tierra atrae a cualquier cuerpo con masa. Si dos partículas que tienen masas  $m_1$  y  $m_2$  están separadas una distancia  $r$

medida desde sus centros, como se ve en la figura 4.2, la fuerza de atracción gravitacional  $F_G$  ejercida por la masa  $m_1$  sobre la masa  $m_2$  tiene una magnitud:

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

donde  $G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ . El cuerpo a su vez ejerce una fuerza de atracción sobre la Tierra, pero como la masa de cualquier objeto sobre la Tierra es mucho menor que la masa de la Tierra, el movimiento que el cuerpo le imprime a la Tierra no se aprecia. A la fuerza de atracción gravitacional que la Tierra ejerce sobre un cuerpo en sus cercanías se le llama **peso** del cuerpo, se simboliza con  $P$ . Es un vector fuerza dirigido hacia el centro de la Tierra, en la dirección de  $g$ , se mide en  $N$ .

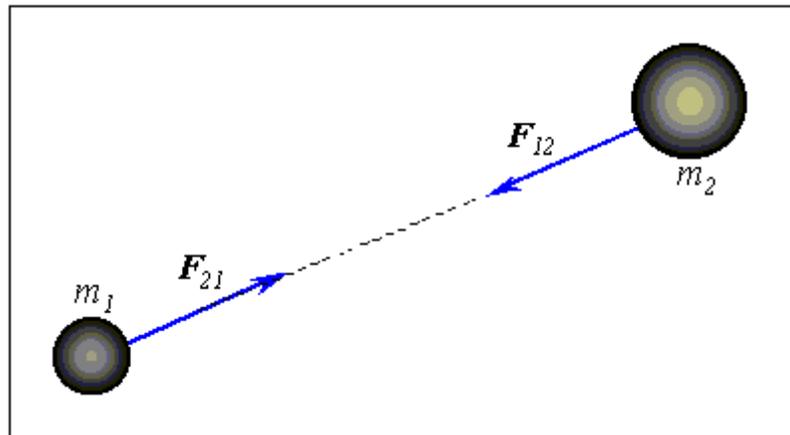


Figura 4.2 Fuerza de atracción gravitacional entre masas.

Cuando un cuerpo que es dejado en libertad en las cercanías de la superficie terrestre, cae con la aceleración de gravedad, es la fuerza peso  $P$  la que le imprime al cuerpo una aceleración  $g$ , entonces de la Segunda Ley de Newton, el peso es:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow$$

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

Si se quiere evitar que un cuerpo caiga, se debe ejercer una fuerza igual y contraria al peso, para que la fuerza neta sea cero. De aquí se obtiene que la magnitud de la fuerza peso es  $P = mg$ .

Como  $g$  es la misma para dos cuerpos, la relación de los pesos es igual a la relación de las masas de los cuerpos, o sea:

$$g = \frac{P_1}{m_1} = \frac{P_2}{m_2}$$

El peso depende de  $g$ , varía con la ubicación geográfica y disminuye con la altura, por lo tanto no es una propiedad del cuerpo y no se debe confundir con la masa. Una balanza que es un instrumento para comparar fuerzas, se usa en la práctica para comparar masas. Generalmente se dice que un ‘kilo’ de azúcar ‘pesa’ 1 kg, aunque el kilogramo es una unidad de masa, no de fuerza.

#### **4.6 TERCERA LEY DE NEWTON.**

Cada vez que un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro cuerpo, este reacciona ejerciendo una fuerza sobre el primero. Las fuerzas en cada cuerpo son de igual magnitud, y actúan en la misma línea de acción, pero son de sentido contrario, como se ve en la figura 4.2. Esto significa que no es posible que exista una fuerza aislada, es decir, no existe un cuerpo aislado en la naturaleza, cualquier fuerza individual es un aspecto de una interacción mutua entre dos cuerpos, que puede ser por contacto directo o por acción a distancia.

Esta propiedad de las fuerzas fue demostrada experimentalmente y expresada por Newton en su Tercera Ley de Movimiento, que se enuncia como sigue:

***“Si dos cuerpos interactúan, la fuerza que el cuerpo 1 ejerce sobre el cuerpo 2 es igual y opuesta a la fuerza que el cuerpo 2 ejerce sobre el cuerpo 1”.***

Escrita en términos de una ecuación se puede escribir:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (4.3)$$

donde  $F_{12}$  ( $F_{21}$ ) es la fuerza que ejerce el cuerpo de masa  $m_1$  ( $m_2$ ) sobre el cuerpo de masa  $m_2$  ( $m_1$ ). Si una de las fuerzas que intervienen en la interacción entre dos cuerpos se llama **acción**, la otra recibe el nombre de **reacción**, por esto la Tercera Ley de Newton se conoce también con el nombre **Ley de Acción y Reacción**.

Las fuerzas de acción y reacción actúan siempre en pareja y sobre cuerpos diferentes. Si actuaran sobre el mismo cuerpo no existiría el movimiento acelerado, porque la resultante siempre sería cero. Entonces, para que una pareja de fuerzas se consideren como fuerzas de acción y reacción, deben cumplir los siguientes requisitos simultáneamente: deben tener igual magnitud, la misma dirección, sentido opuesto, actuar en cuerpos diferentes y actuar en parejas.

De las tres leyes de Newton, sólo la segunda y la tercera son independientes, ya que la primera es una consecuencia de la segunda, cuando la velocidad es constante o la aceleración es cero.

Al aplicar las leyes de Newton se deben identificar todas las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo y dibujar un diagrama de cuerpo libre. Un **diagrama de cuerpo libre** es un esquema donde se muestra el cuerpo aislado o un punto que lo representa, en el que se dibujan todas las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo. Sobre este esquema se elige un sistema de referencia conveniente para aplicar las leyes de Newton. Cuando se considera un sistema mecánico con varios cuerpos, se debe hacer el diagrama de cuerpo libre y aplicar las leyes de Newton para cada componente del sistema. La fuerza que produce una superficie sobre un cuerpo que se encuentra apoyado en la superficie se llama fuerza **normal**  $N$ , las fuerzas que ejercen cuerdas y cables sobre un cuerpo se llaman fuerza de **tensión**  $T$ . A menos que se diga lo contrario, las cuerdas y poleas que formen parte de un sistema mecánico se considerarán de masa despreciable comparada con la masa de los cuerpos en estudio y las cuerdas y cables se considerarán inextensibles, esto significa que sirven sólo para cambiar la dirección de la tensión cuando pasan por una polea; se dice que son ideales.

**Ejemplo 4.1.** Un bloque de 50N de peso se ubica sobre un plano inclinado en un ángulo  $\alpha$  de  $30^\circ$  con la horizontal. El bloque se sujeta con una cuerda ideal que se encuentra fija en la parte superior del plano inclinado, como se muestra en la figura 4.3a. Calcular la tensión de la cuerda y la fuerza normal.

**Solución:** Se identifican las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, estas son:

Fuerza de atracción de la Tierra, que es su peso  $P$

Fuerza de la cuerda que lo sostiene, que es la tensión  $T$

Fuerza que el plano ejerce sobre el cuerpo, que es la normal  $N$

El diagrama de cuerpo libre (DCL) del bloque se muestra en la figura 4.3b.

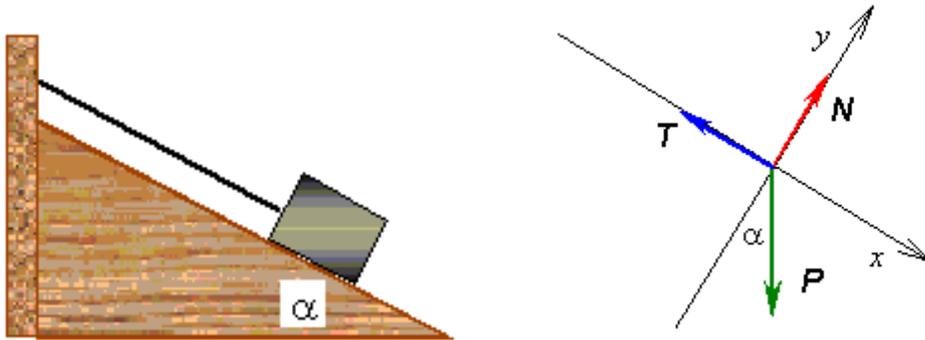


Figura 4.3. Ejemplo 1, a) izquierda, b) derecha.

Como el sistema está en equilibrio, se aplica la primera Ley de Newton en cada dirección  $x$  e  $y$ :

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0$$

Del diagrama de cuerpo libre se obtiene:

$$\text{eje } x: -T + P \operatorname{sen} \alpha = 0$$

$$\text{eje } y: N - P \operatorname{cos} \alpha = 0$$

Despejando  $T$  y  $N$ , y reemplazando los valores numéricos, se obtiene:

$$T = P \operatorname{sen} \alpha = 50 \operatorname{sen} 30 = 25 \text{ N}$$

$$N = P \operatorname{cos} \alpha = 50 \operatorname{cos} 30 = 43.2 \text{ N}$$

**Ejemplo 4.2.** El sistema de la figura 4.4a se encuentra en equilibrio. Los cables forman ángulos de  $30^\circ$  y  $60^\circ$  con la horizontal y el bloque pesa  $100 \text{ N}$ . Calcular la tensión en los cables.

**Solución:** Se hace un diagrama de cuerpo libre para el bloque (figura 4.4b) y en el nudo de unión de las cuerdas (figura 4.4c).

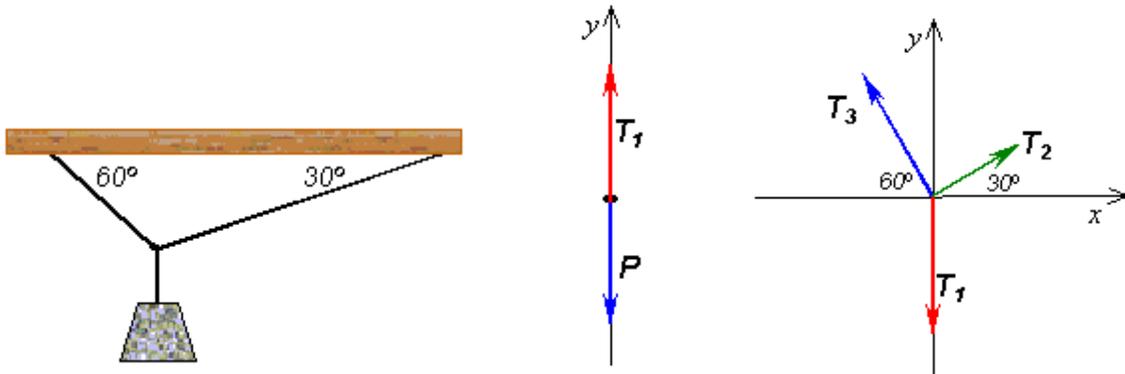


Figura 4.4 Ejemplo 2 a) izquierda, b) centro, c) derecha.

Como el sistema está en equilibrio, se aplica la primera Ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0$$

Del DCL del bloque y en el nudo se obtienen las ecuaciones:

bloque:  $\text{eje } y: T_1 - P = 0 \quad (1)$

nudo:  $\text{eje } x: -T_3 \operatorname{cos} 60 + T_2 \operatorname{cos} 30 = 0 \quad (2)$

$\text{eje } y: T_3 \operatorname{sen} 60 + T_2 \operatorname{sen} 30 - T_1 = 0 \quad (3)$

De la ecuación (1) se obtiene:  $T_1 = P \Rightarrow T_1 = 100 \text{ N}$

De la ecuación (2):

$$T_3 \cos 60 = T_2 \cos 30 \quad \Rightarrow \quad T_3 = T_2 \frac{\cos 30}{\cos 60}$$

Reemplazando en la ecuación (3):

$$T_2 \frac{\cos 30}{\cos 60} \operatorname{sen} 60 + T_2 \operatorname{sen} 30 = 100$$

$$T_2 (\cos 30 \tan 60 + \operatorname{sen} 30) = 100 \Rightarrow 2T_2 = 100 \Rightarrow T_2 = 50 \text{ N}$$

Finalmente:

$$T_3 = 50 \frac{\cos 30}{\cos 60} \Rightarrow T_3 = 86.6 \text{ N}$$

**Ejemplo 4.3.** Si un bloque de masa  $m$  se ubica sobre un plano sin roce, inclinado un ángulo  $\alpha$  con la horizontal, como se muestra en la figura 4.5a, partiendo del reposo, resbalará una distancia  $D$  a lo largo del plano. Describir su movimiento.

**Solución:** como el sistema está en movimiento, se aplica la segunda Ley de Newton, en componentes:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y$$

Las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo de masa  $m$  son la fuerza de atracción de la Tierra, que es su peso  $P$  y la fuerza normal  $N$  del plano sobre el cuerpo.

Del diagrama de cuerpo libre (figura 4.5b), considerando que el bloque resbala en dirección del plano, o sea en dirección  $x$ , tiene sólo  $a_x$  y no  $a_y$ , se obtiene:

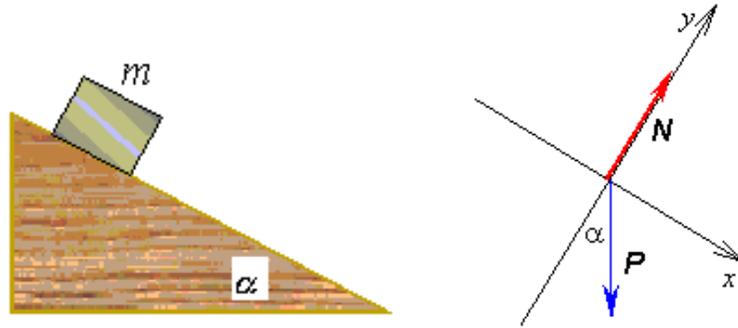


Figura 4.5. Ejemplo 3: a) izquierda, b) derecha.

$$\text{eje } x: P \operatorname{sen} \alpha = m a_x \quad (1)$$

$$\text{eje } y: N - P \operatorname{cos} \alpha = m a_y = 0 \quad (2)$$

Despejando  $a_x$  de (1) y  $N$  de (2), considerando que  $P = mg$ , se obtiene:

$$a_x = g \operatorname{sen} \alpha$$

$$N = mg \operatorname{cos} \alpha$$

Se concluye que la aceleración del bloque en dirección del plano inclinado es la componente de  $g$  en esa dirección. Estudiando ahora el movimiento del bloque, considerando que parte del reposo y se desliza una distancia  $D$ , se puede calcular la rapidez con que llega a la base del plano. Si se considera que el movimiento del bloque comienza desde el reposo, se puede usar:

$$v^2 = v_o^2 + 2a_x \Delta x$$

$$v^2 = 0 + 2(g \operatorname{sen} \alpha)D \quad \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{2gD \operatorname{sen} \alpha}$$

ecuación válida solo para este caso particular. Esto completa la descripción del movimiento del bloque sobre el plano inclinado.

**Ejemplo 4.4.** En el sistema mecánico de la figura 4.6a, el bloque de masa  $M$  se ubica sobre el plano liso inclinado en un ángulo  $\alpha$ . La polea por donde cuelga otro bloque de masa  $m$  conectado a  $M$  es ideal y la cuerda se considera inextensible y de masa despreciable. Calcular la aceleración de las masas  $M$  y  $m$  y la tensión de la cuerda.

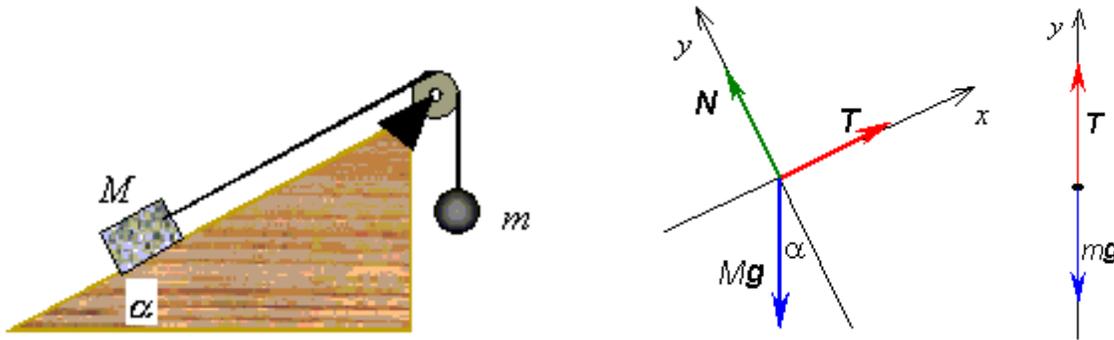


Figura 4.6 Ejemplo 4: a) izquierda, b) centro, c) derecha.

**Solución:** El sistema está en movimiento, por lo que se aplica la segunda Ley de Newton a cada masa:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y$$

Como no se conoce la dirección del movimiento, podemos suponer que el cuerpo de masa  $M$  sube por el plano inclinado, lo que determina el sentido de la aceleración del sistema, entonces del DCL para  $M$  (figura 4.6b) y para  $m$  (figura 4.6c), se obtiene:

Para  $M$

$$\text{eje } x: T - Mg \operatorname{sen} \alpha = Ma \quad (1)$$

$$\text{eje } y: N - Mg \operatorname{cos} \alpha = 0 \quad (2)$$

Para  $m$

$$\text{eje } y: T - mg = -ma \quad (3)$$

De (3) se despeja  $T$  y se reemplaza en (1):

$$T = mg - ma \quad \Rightarrow \quad mg - ma - Mg \operatorname{sen} \alpha = Ma$$

$$Ma + ma = g(m - M \operatorname{sen} \alpha) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m - M \operatorname{sen} \alpha}{m + M} g$$

Se observa que el signo de  $a$  depende del término  $m - M \operatorname{sen} \alpha$ . Ahora se calcula el valor de la tensión reemplazando el valor de  $a$  en  $T$ :

$$T = mg - m \left( \frac{m - M \operatorname{sen} \alpha}{m + M} g \right)$$

$$T = \frac{mM}{m + M} g (1 + \operatorname{sen} \alpha)$$

#### 4.7 FUERZA DE ROCE.

Cuando un cuerpo es arrojado sobre una superficie común o cuando un objeto se mueve a través de un medio viscoso como agua o aire, después de cierto tiempo se detiene, porque experimenta una resistencia a su movimiento debido a la interacción del cuerpo con el medio que lo rodea. Esa resistencia cambia la velocidad del cuerpo, por lo tanto se mide con una fuerza. Una fuerza de resistencia de esa naturaleza se llama **fuerza de roce o de fricción**. Son muy importantes en la vida cotidiana, ya que por ejemplo nos permiten caminar y son necesarias para que se realice el movimiento de vehículos.

La fuerza de roce es paralela a la superficie en el punto de contacto entre dos cuerpos y tiene dirección opuesta al movimiento, nunca ayudan al movimiento. Las evidencias experimentales indican que esta fuerza se produce por la irregularidad de las superficies, de modo que el contacto se realiza sólo en unos cuantos puntos, como se ve en una vista ampliada de las superficies que se muestra en la figura 4.7. La fuerza de roce a escala microscópica es más compleja de lo que aquí se presenta, ya que corresponde a fuerzas electrostáticas entre átomos o moléculas en los puntos donde las superficies están en contacto.

Si se tiene un bloque en reposo sobre una mesa horizontal y se aplica una pequeña fuerza  $F$  (figura 4.8), que se puede medir con un dinamómetro, el cuerpo no se moverá. En esta situación la fuerza de roce equilibra la fuerza aplicada (figura 4.8a). La fuerza de roce que actúa sobre los cuerpos en reposo se llama fuerza de roce estático,  $F_E$ . La máxima fuerza de roce estática es igual a la mínima fuerza necesaria para iniciar el movimiento.

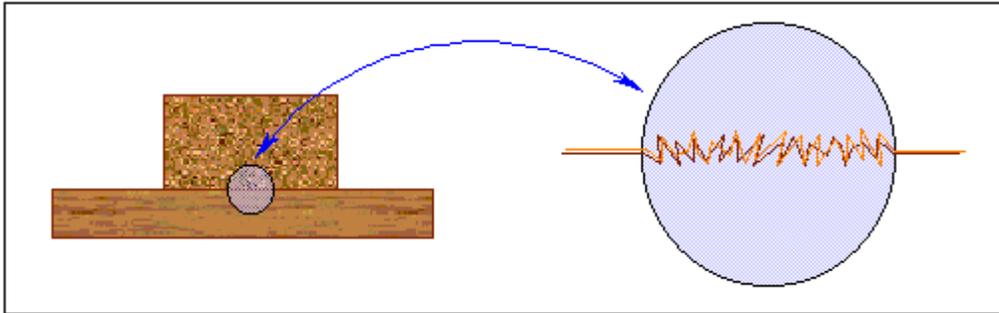


Figura 4.7 La irregularidad de la superficie produce la fuerza de roce.

Si aumenta la fuerza aplicada  $F$  (figura 4.8b) hasta que el bloque se mueve, entonces aumenta la fuerza de roce. Cuando el bloque está apunto de moverse, la fuerza de roce estático es máxima. Al aumentar la fuerza aplicada a un valor mayor que  $F_{E_{max}}$ , entonces comienza el movimiento y el bloque acelera hacia la derecha. Cuando el bloque está en movimiento, la fuerza de roce se hace menor que la  $F_{E_{max}}$ , en este caso se llama fuerza de roce cinética  $F_C$ . La fuerza aplicada no equilibrada con la  $F_C$  produce la aceleración del cuerpo (figura 4.4b). Si la fuerza aplicada es igual a la  $F_C$  el bloque se mueve con velocidad constante. Si deja de actuar la fuerza aplicada, entonces la fuerza de roce, que continua actuando, se opone al movimiento hasta detener al bloque.

Experimentalmente se encuentra que para dos tipos de superficies dadas, las fuerzas de roce estática y cinética son aproximadamente independientes del tamaño del área de las superficies en contacto y son proporcionales a la fuerza normal  $N$ .

La **fuerza de roce estático**,  $F_E$ , es opuesta a la fuerza aplicada y la constante de proporcionalidad con la normal se llama coeficiente de roce estático,  $\mu_E$ , entonces la magnitud de la fuerza de roce estático es:

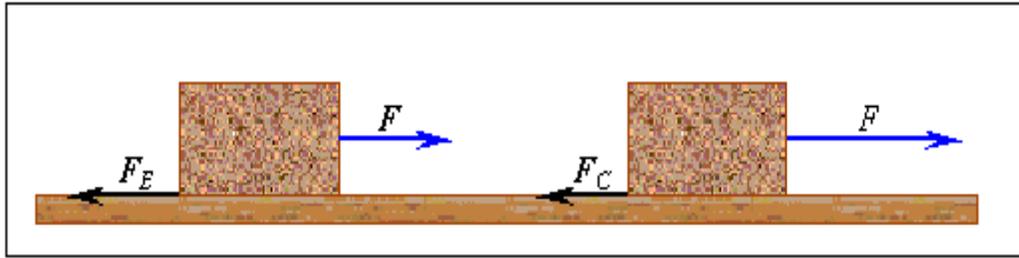


Figura 4.8 a) izquierda, b) derecha.

$$F_E \leq \mu_E N$$

Cuando el bloque está apunto de moverse, la fuerza de roce estático es máxima,  $F_{Emáx}$ , lo mismo que el coeficiente de roce es máximo,  $\mu_{Emáx}$ , entonces:

$$F_{Emáx} = \mu_{Emáx} N$$

La **fuerza de roce cinético** es opuesta al movimiento, es aproximadamente independiente de la velocidad con que se mueven las superficies, para velocidades ‘pequeñas’, si la velocidad aumenta hasta valores muy altos, comienza a sentirse el efecto de la fricción con el medio donde se mueve el cuerpo. La constante de proporcionalidad con la normal se llama coeficiente de roce cinético,  $\mu_C$ , entonces la magnitud de la fuerza de roce cinético es:

$$F_C = \mu_C N$$

Las expresiones de  $F_C$  y  $F_E$  son empíricas, no representan leyes físicas fundamentales.

Los coeficientes de roce estático  $\mu_E$  y cinético  $\mu_C$  son constantes adimensionales. Sus valores dependen de la naturaleza de las superficies en contacto y en general para un par de superficies dadas  $\mu_{Emáx} > \mu_C$ . Algunos valores de los coeficientes de roce se dan en la tabla 4.1.

El gráfico de la magnitud de la fuerza aplicada  $F$  versus la fuerza de roce se muestra en la figura 4.9. Cuando el cuerpo no está en movimiento, la fuerza de roce estático se equilibra con la fuerza aplicada, hasta que el bloque esta a punto de moverse, donde la fuerza  $F_E$  alcanza su valor máximo. Luego que comienza el movimiento del bloque, surge la fuerza de roce cinético  $F_C$ , que disminuye rápidamente a un valor constante menor que la fuerza de roce estático máxima  $F_{Emax}$ , independientemente del valor de la fuerza aplicada.

Tabla 4.1 Algunos valores de coeficientes de roce.

Superficies	$\mu_E$	$\mu_C$
Madera- madera	0.25-0.5	0.2
Acero- acero	0.74	0.57
Vidrio- vidrio	0.94	0.40
Caucho- concreto	0.15	0.06
Cobre- vidrio	0.68	0.53
Hielo- hielo	0.1	0.03
Articulaciones humanas	0.01	0.003

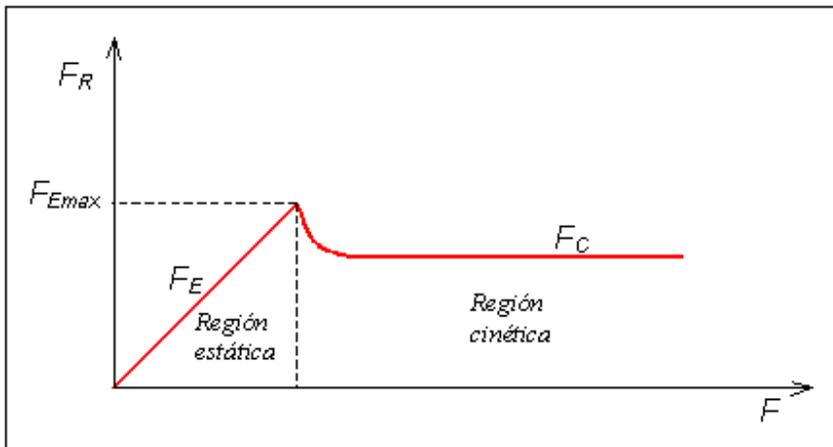


Figura 4.9. Gráfico de la fuerza de roce.

**Ejemplo 4.5.** En el sistema mecánico de la figura 4.10a, se aplica una fuerza  $F$  inclinada un ángulo  $\alpha$  sobre el cuerpo de masa  $m$ , ubicado sobre la mesa horizontal con coeficiente de roce  $\mu$ . La polea por donde cuelga otro bloque de masa  $M$  no tiene roce y la cuerda se considera inextensible y de masa despreciable. Calcular la aceleración de las masas y la tensión de la cuerda.

**Solución:** El sistema está en movimiento, por lo que se aplica la segunda Ley de Newton a cada masa:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y$$

Como no se conoce la dirección del movimiento, podemos suponer que el cuerpo de masa  $M$  desciende y tira a  $m$  hacia la derecha, lo que determina el sentido de la aceleración del sistema, entonces del DCL para  $m$  (figura 4.10b) y para  $M$  (figura 4.10c), en cada dirección  $x$  e  $y$ , se obtiene:

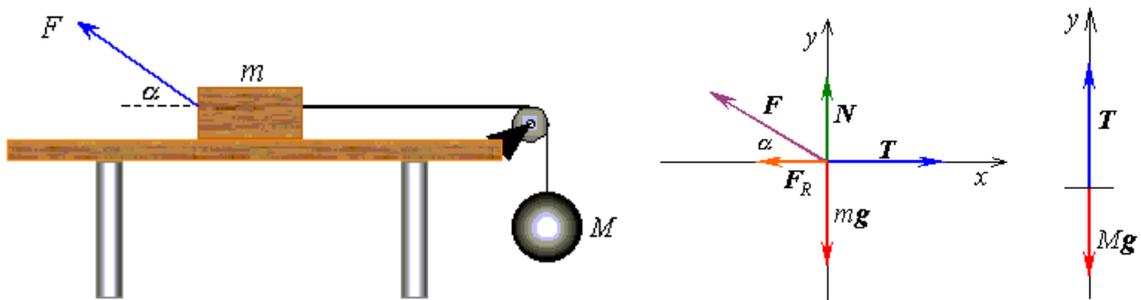


Figura 4.10. Ejemplo 5. a) izquierda, b) centro, c) derecha.

Para  $m$

$$\text{eje } x: T - F\cos\alpha - F_R = ma \quad (1)$$

$$\text{eje } y: N + F\sin\alpha - mg = 0 \quad (2)$$

Para  $M$

$$\text{eje } y: T - Mg = -Ma \quad (3)$$

Además se sabe que por definición, la fuerza de roce es:  $F_R = \mu N$ .

De (2) se despeja  $N$  y se reemplaza en  $F_R$ :

$$N = mg - F\sin\alpha \Rightarrow F_R = \mu(mg - F\sin\alpha) \quad (4)$$

$$\text{De (3) se despeja } T: \quad T = Mg - Ma \quad (5)$$

Ahora (4) y (5) se reemplazan en (1), lo que permite despejar la aceleración

$$Mg - Ma - F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = ma \Rightarrow$$

$$a = \frac{(M - \mu m)g - F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{M + m}$$

y la tensión  $T$

$$T = Mg - M \frac{(M - \mu m)g - F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{M + m}$$

#### 4.8 FUERZA CENTRÍPETA.

Una partícula que se mueve sobre una trayectoria circular de radio  $R$  con rapidez constante, se encuentra sometida a una aceleración radial de magnitud  $v^2/R$ . Por la segunda ley de Newton, sobre la partícula actúa una fuerza en la dirección de  $\mathbf{a}$ , hacia el centro de la circunferencia, cuya magnitud es:

$$F_c = ma_c = m \frac{v^2}{R}$$

Por ser proporcional a la aceleración centrípeta, la fuerza  $F_c$  se llama **fuerza centrípeta**. Su efecto es cambiar la dirección de la velocidad de un cuerpo. Se puede sentir esta fuerza cuando se hace girar a un objeto atado a una cuerda, ya que se nota el tirón del objeto. Las fuerzas centrípetas no son diferentes de otras fuerzas ya conocidas, su nombre se debe a que apunta hacia el centro de una trayectoria circunferencial. Cualquiera de las fuerzas ya conocida pueden actuar como fuerza centrípeta si producen el efecto correspondiente, como ser la tensión de una cuerda, una fuerza de roce, alguna componente de la normal, la fuerza gravitacional en el caso de movimientos de planetas y satélites, etc.

**Ejemplo 4.6.** Un cuerpo de masa  $m$ , sujeto al extremo de una cuerda de longitud  $L$ , que describe una trayectoria circular en el plano horizontal, genera una superficie cónica (figura 4.11a), por lo que se llama péndulo cónico. Calcular la rapidez y el período de revolución de la masa.

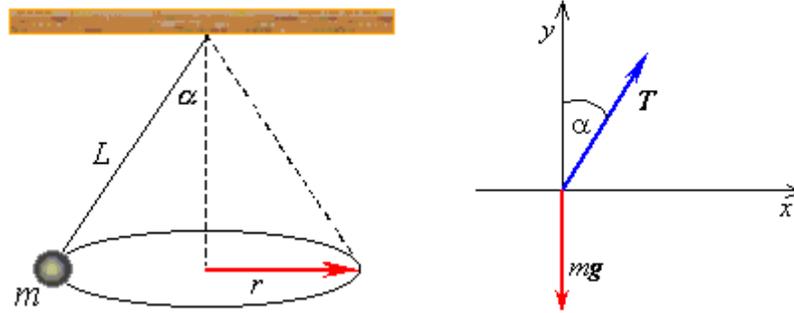


Figura 4.11 Ejemplo 6. a) izquierda, b) derecha.

**Solución:** La partícula está sometida a una aceleración centrípeta, y la *fuerza centrípeta* correspondiente está dada por la componente de la tensión de la cuerda en dirección radial hacia el centro de la circunferencia. De la segunda Ley de Newton

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y$$

aplicada al DCL de  $m$  que se muestra en la figura 4.11b), se tiene:

$$\text{eje } x: T \operatorname{sen} \alpha = ma = m v^2 / r$$

$$\text{eje } y: T \operatorname{cos} \alpha - mg = 0$$

Despejando  $T$  de la ecuación del eje  $y$  y reemplazando en la ecuación del eje  $x$ ,

$$\frac{mg}{\operatorname{cos} \alpha} \operatorname{sen} \alpha = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow$$

$$\tan \alpha = \frac{v^2}{rg}$$

De la geometría de la figura,  $r = L \operatorname{sen} \alpha$ , reemplazando se puede despejar la rapidez de  $m$ :

$$v^2 = gL \operatorname{sen} \alpha (\tan \alpha) \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{gL \operatorname{sen} \alpha (\tan \alpha)}$$

Para calcular el periodo  $\tau$ , esto es el tiempo que demora en dar una vuelta, se sabe que  $\Delta x = v \Delta t$ , con  $\Delta x = 2\pi r$ , entonces:

$$\Delta t = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi L \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{Lg \operatorname{sen} \alpha (\tan \alpha)}} \Rightarrow$$

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \alpha}{g}}$$

Se puede observar que el periodo es independiente del valor de la masa  $m$  del péndulo.

#### 4.8.1 La descripción del peralte.

Para un cuerpo como un vehículo o un vagón de tren que se mueven describiendo una trayectoria curva de radio  $r$ , sobre el vehículo debe actuar una *fuerza centrípeta* para evitar que continúe moviéndose en línea recta y se salga de la pista; esta es la fuerza para hacer que el vehículo gire por la pista curva. La fuerza centrípeta necesaria la da el roce de los neumáticos o las pestañas de las ruedas del tren. Para no tener que confiar en el roce o reducir el desgaste de los rieles y pestañas, la carretera o la vía pueden inclinarse, como en la figura 4.12a. A la inclinación de la pista o vía se le llama ángulo de **peralte**,  $\alpha$ . En este caso la componente de la normal dirigida hacia el centro de curvatura proporciona la fuerza necesaria para mantener al móvil en la pista.

Para una pista curva de radio  $r$ , con ángulo de peralte  $\alpha$ , para la que se considera la fuerza de roce  $F_R$ , la fuerza centrípeta corresponde a las componentes de la normal y de la fuerza de roce hacia el centro de curvatura de la pista. Son estas componentes las que producen la aceleración centrípeta que mantiene al vehículo de masa  $m$  sobre la pista. Del diagrama de cuerpo libre de la figura

4.12b, se puede calcular la fuerza de roce necesaria para que el vehículo no se salga de la pista, por la segunda ley de Newton, se obtiene:

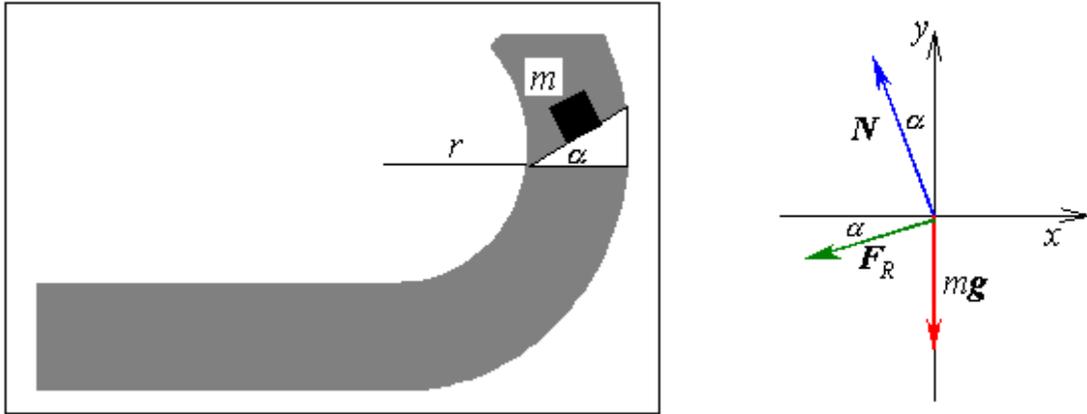


Figura 4.12 a) Angulo de peralte en una pista curva (izquierda), b) DCL de  $m$  (izquierda).

$$\begin{aligned} \text{eje } x: -N \operatorname{sen} \alpha - F_R \cos \alpha &= -m \frac{v^2}{r} \\ \text{eje } y: N \cos \alpha - F_R \operatorname{sen} \alpha - mg &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando por  $\cos \alpha$  la ecuación en  $x$  y por  $\operatorname{sen} \alpha$  la ecuación en  $y$ , y sumándolas, se obtiene:

$$F_R = m \left( \frac{v^2}{r} \cos \alpha - g \operatorname{sen} \alpha \right)$$

*Casos particulares.*

a) Si no se considera el roce, la  $F_R = 0$  y la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{v^2}{r} \cos \alpha - g \operatorname{sen} \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{v^2}{rg}$$

Se observa que el ángulo de peralte  $\alpha$  depende de la rapidez y del radio de la trayectoria curva y es independiente de la masa del vehículo. Para un cierto valor del radio, no existe un ángulo que satisfaga la ecuación para todas las rapideces, por lo tanto las curvas se peraltan para una rapidez media. Por ejemplo, si  $v = 72 \text{ km/hr} = 20 \text{ m/s}$ , y  $r = 100 \text{ m}$ , se obtiene:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{20^2}{100 \times 9.8}\right) = 22.2^\circ$$

b) Para el caso en que la curva o vía no tiene peralte,  $\alpha = 0$ , la expresión para  $F_R$  se reduce a:

$$F_R = m \frac{v^2}{r}$$

La rapidez máxima que puede tener el móvil al girar sobre una carretera o vía sin peralte, corresponde a aquella en la cual está a punto de resbalar hacia afuera, en este caso debe actuar la  $F_{R\text{máx}}$  para obtener la rapidez máxima, que no se debe superar para que el vehículo no se salga de la pista:

$$F_{R\text{máx}} = \mu_{E\text{máx}} N = \mu_{E\text{máx}} mg \Rightarrow$$

$$\mu_{E\text{máx}} mg = m \frac{v_{\text{máx}}^2}{r} \Rightarrow v_{\text{máx}} = \sqrt{\mu_{E\text{máx}} rg}$$

Este tratamiento completa una descripción básica para entender como se deben inclinar las vías de trenes o carreteras en las curvas, para que los vehículos al entrar en las curvas no se salgan de su pista para evitar accidentes.

## **4.9 BREVE DESCRIPCIÓN DE APLICACIONES DE ALGUNAS FUERZAS EN LA MEDICINA.**

### **4.9.1 Fuerza peso.**

La fuerza de gravedad que ejerce la Tierra sobre los objetos cerca de su superficie se conoce como el *peso* del cuerpo. Esta fuerza es la que hace que todos los cuerpos en caída libre caigan con  $g$ . La fuerza de gravedad sobre un cuerpo extenso, requiere una especial consideración, porque actúa sobre cada partícula del objeto, la suma de todas estas fuerzas representa el *peso del cuerpo*. El punto donde se considera que actúa esta fuerza total de gravedad se denomina centro de gravedad del cuerpo (c.g.) Si el cuerpo es simétrico, el centro de gravedad se ubica en el centro geométrico, y puede estar localizado dentro o fuera del cuerpo. Si el objeto es asimétrico tal como el brazo de una persona, que se muestra en la figura 4.13, el c.g. se ubicará más cerca de su parte más masiva y si además el objeto es flexible, como el cuerpo humano, la posición del centro de gravedad varía si el objeto cambia de forma, por ejemplo el c.g. estando parado es diferente que estando inclinado, en el primer caso se ubica cerca del ombligo (dentro del cuerpo) y en el segundo caso incluso puede estar fuera del cuerpo.

### **4.9.2 Fuerza muscular.**

La postura y el movimiento de los animales están controlados por fuerzas producidas por los músculos. Un músculo consta de un gran número de fibras cuyas células son capaces de contraerse al ser estimuladas por impulsos que lleguen a ellas procedentes de los nervios. Un músculo está generalmente unido en sus extremos a dos huesos diferentes por medio de tendones (figura 4.13). Los dos huesos están enlazados por una conexión flexible llamada articulación. La contracción del músculo produce dos pares de fuerzas que actúan sobre los huesos y los músculos en el punto donde están ligados los tendones. La fuerza máxima que puede ejercer un músculo depende del área de su sección transversal, y en el hombre es de unos 30 a 40  $\text{N}/\text{cm}^2$ . Esto es, para producir una fuerza muscular de 600N se necesita un músculo con una sección transversal 15 a 20  $\text{cm}^2$ . El estudio del funcionamiento de las fuerzas musculares para producir movimiento y equilibrio en el hombre recibe el nombre de Kinesiología o biomecánica. Es de particular importancia para atletas y terapeutas físicos, quienes necesitan saber qué fuerzas se requieren para producir movimientos específicos del cuerpo.

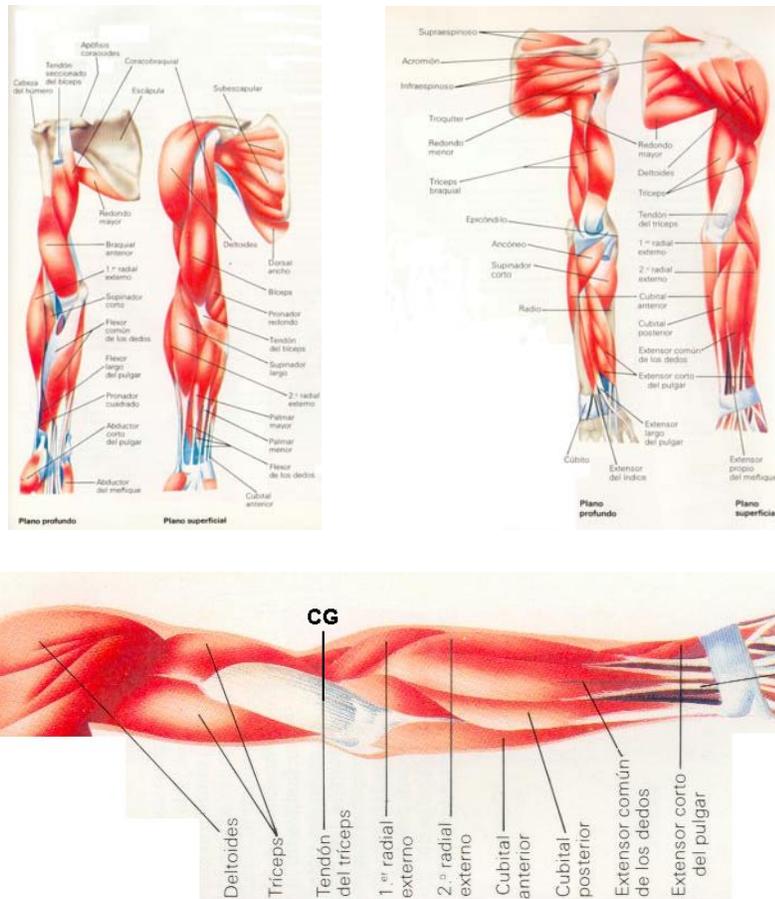


Figura 4.13 Músculos del brazo y ubicación del centro de gravedad.

### 4.9.3 Fuerza de roce.

Si un objeto se mueve dentro de un fluido la fuerza de roce se denomina fuerza de roce viscoso, y su valor es pequeño si se compara con el roce entre superficies sólidas. Por lo tanto el uso de líquidos lubricantes como el aceite, que se interpone entre las superficies en contacto, disminuye bastante el roce. Análogamente, una capa de aire suministra un soporte casi sin roce para los vehículos aerodeslizantes o para mesas experimentales de aire.

Al caminar o correr, no advertimos roce en las rodillas ni en las articulaciones de las piernas. Estas y muchas otras articulaciones se encuentran bien lubricadas mediante el **líquido sinovial**, que pasa a través del cartílago que las reviste cuando ellas se mueven (figura 4.14). Este lubricante tiende a ser absorbido, cuando la articulación está en reposo, aumentando entonces el rozamiento y facilitando el mantener una posición fija. Esto constituye un excelente ejemplo

de la sabia ingeniería biológica empleada por la naturaleza. El roce, por un lado limita la eficiencia de máquinas y motores, pero por otro lado, hacemos uso del roce en un gran número de situaciones, como en el frenar de automóviles, las correas transportadoras, al escribir, caminar...etc.

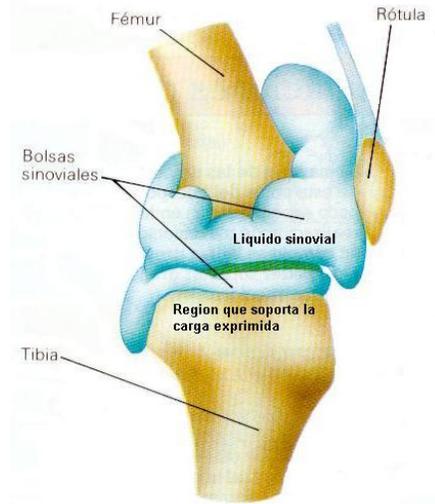


Figura 4.14 Lubricación de articulaciones por el líquido sinovial.

**Ejemplo 4.7.** La figura 4.15 muestra la forma del tendón del cuádriceps al pasar por la rótula. Si la tensión  $T$  del tendón es 1400 N. Calcular la a) la magnitud y b) la dirección de la fuerza de contacto  $F$  ejercida por el fémur sobre la rótula.

**Solución.** El diagrama de fuerzas correspondiente a la rótula, se muestra en la misma figura 4.15. Como el sistema está en equilibrio, se aplica la primera ley de Newton, que en componentes se escribe de la siguiente forma:

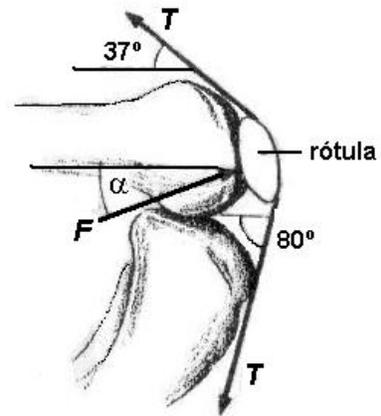


Figura 4.15 Ejemplo 7.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F \cos \alpha - T \cos 37^\circ - T \cos 80^\circ = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F \operatorname{sen} \alpha + T \operatorname{sen} 37^\circ - T \operatorname{sen} 80^\circ = 0$$

Reemplazando los valores de la fuerza T se tiene:

$$F \cos \alpha - 1400 \cos 37^\circ - 1400 \cos 80^\circ = 0$$

$$F \operatorname{sen} \alpha + 1400 \operatorname{sen} 37^\circ - 1400 \operatorname{sen} 80^\circ = 0$$

De la primera ecuación se obtiene:  $F \cos \alpha = 1361.2N$

De la segunda ecuación se obtiene:  $F \operatorname{sen} \alpha = 536.2N$

Los valores obtenidos corresponden a las componentes rectangulares de  $F$ , por lo tanto su magnitud es:

$$F = \sqrt{536.2^2 + 1361.2^2}$$

$$F = 1463N$$

Y su dirección es:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{F \operatorname{sen} \alpha}{F \cos \alpha} = \frac{536.2}{1361.2} = 0.39$

$$\alpha = 21.5^\circ$$

Por lo tanto la fuerza de compresión  $F$  que ejerce el hueso sobre la rótula tiene un valor de 1463 N y actúa en un ángulo de 21,5° respecto a la horizontal.

### PROBLEMAS.

- 4.1. Este libro de Física, está apoyado en el extremo superior de un resorte vertical, que a su vez esta ‘parado’ sobre una mesa. Para cada componente del sistema libro-resorte-mesa-tierra: a) dibujar el diagrama de cuerpo libre, b) identificar todos los pares de fuerzas de acción y reacción.
- 4.2. De acuerdo con la leyenda, un caballo aprendió las leyes de Newton. Cuando se le pidió que tirara una carreta, se negó rotundamente argumentando que si él tiraba la carreta hacia delante, de acuerdo con la tercera ley de Newton habría una fuerza igual hacia atrás. De esta manera, las fuerzas estarían balanceadas y de acuerdo con la segunda ley de Newton, la carreta no aceleraría. Pero como usted es mas diablazo que el caballo, sabe que la carreta se mueve ¿Cómo podría usted razonar con este misterioso caballo, para hacerlo entender?
- 4.3. Dos alumnos ubicados en los bordes opuestos de un camino recto tiran a un carro por el camino, con fuerzas de  $160\text{ N}$  y  $200\text{ N}$ , que forman un ángulo de  $30^\circ$  y  $60^\circ$  respectivamente, con la dirección del camino. a) Calcular la magnitud de la fuerza resultante y la dirección en la que se moverá el carro. b) Calcular la fuerza necesaria para que el carro se mueva en la dirección del camino. R: a)  $256.1\text{N}$ ,  $-21.3^\circ$ , b)  $F_2 = 128\text{N}$ .
- 4.4. Una fuerza dependiente del tiempo,  $\mathbf{F} = (8i - 4tj)\text{ N}$  (donde  $t$  está en segundos), se aplica a un objeto de  $2\text{ kg}$  inicialmente en reposo. a) ¿En qué tiempo el objeto se moverá con una velocidad de  $15\text{ m/s}$ ? b) ¿A qué distancia está de su posición inicial cuando su velocidad es  $15\text{ m/s}$ ? c) ¿Cuál es la posición del objeto en este tiempo? R: a)  $3\text{s}$ , b)  $20.1\text{m}$ , c)  $18i-9j\text{ m}$
- 4.5. Tres fuerzas  $\mathbf{F}_1 = (-2i + 2j)\text{N}$ ,  $\mathbf{F}_2 = (5i - 3j)\text{N}$ , y  $\mathbf{F}_3 = (-45i)\text{N}$  que actúan sobre un objeto le producen una aceleración de valor  $3\text{ m/s}^2$ . a) ¿Cuál es la dirección de la aceleración? b) Cuál es la masa del objeto? c) Si el objeto esta inicialmente en reposo, calcular su velocidad después de  $10\text{s}$ ? R: a)  $1.4^\circ$ , b)  $14\text{ kg}$ , c)  $30\text{ m/s}$ .

- 4.6. Calcular la tensión en cada cuerda en los sistemas que se muestran en las figuras 4.13, 4.14 y 4.15. Las masas son de  $m$  kg y la inclinación de los planos es  $\alpha$  grados. Hacer todas las suposiciones necesarias.
- 4.7. Una masa de  $5\text{kg}$  cuelga de una cuerda de  $1\text{m}$  de longitud que se encuentra sujeta a un techo. Calcular la fuerza horizontal que aplicada a la masa la desvíe  $30\text{ cm}$  de la vertical y la mantenga en esa posición. R:  $15.7\text{ N}$ .

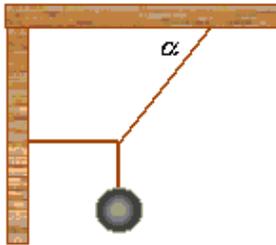


Figura 4.13

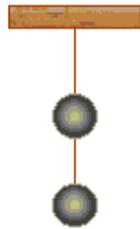


Figura 4.14

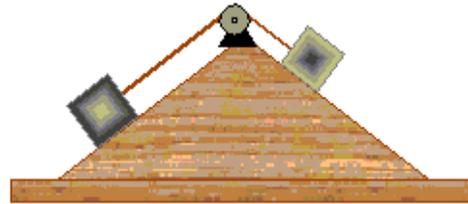


Figura 4.15

- 4.8. Una araña de  $2 \times 10^{-4}\text{ kg}$  está suspendida de una hebra delgada de telaraña. La tensión máxima que soporta la hebra antes de romperse es  $2.1 \times 10^{-3}\text{ N}$ . Calcular la aceleración máxima con la cual la araña puede subir por la hebra con toda seguridad. R:  $0.5\text{m/s}^2$ .
- 4.9. Una fuerza  $\mathbf{F}$  aplicada sobre una masa  $m_1$  le produce una aceleración de  $3\text{m/s}^2$ . La misma fuerza aplicada a una masa  $m_2$  le produce una aceleración de  $1\text{m/s}^2$ . a) Calcular el valor de la proporción  $m_1/m_2$ . b) Si se combinan  $m_1$  y  $m_2$ , calcular la aceleración producida por  $\mathbf{F}$ . R: a)  $1/3$ , b)  $0.75\text{ m/s}^2$ .
- 4.10. La velocidad promedio de una molécula de nitrógeno en el aire es cercana a  $6.7 \times 10^2\text{ m/s}$  y su masa aproximadamente de  $4.68 \times 10^{-26}\text{ kg}$ . a) Si se requieren  $3 \times 10^{-13}\text{ s}$  para que una molécula de nitrógeno golpee una pared y rebote con la misma rapidez pero en dirección opuesta, calcular la aceleración promedio de la molécula durante ese intervalo de tiempo. b) Calcular la fuerza promedio que ejerce la molécula sobre la pared. R: a)  $4.5 \times 10^{15}\text{ m/s}^2$ , b)  $2.1 \times 10^{10}\text{ N}$ .

- 4.11. Sobre el planeta X un objeto pesa 12 N. En el planeta Y, donde la magnitud de la aceleración de caída libre es  $1.6g$ , el objeto pesa 27 N. Calcular: a) la masa del objeto y b) la aceleración de caída libre en el planeta X? R: a) 1.7 kg, b)  $7\text{m/s}^2$ .
- 4.12. Los instrumentos de un globo sonda meteorológico tienen una masa de 1 kg. a) El globo se suelta y ejerce una fuerza hacia arriba de 5 N sobre los instrumentos. ¿Cuál es la aceleración del globo y de los instrumentos? b) Después de que el globo ha acelerado durante 10 segundos, los instrumentos se sueltan. ¿Cuál es velocidad de los instrumentos en el momento en que se sueltan? c) ¿cuál es la fuerza neta que actúa sobre los instrumentos después de que se sueltan? d) ¿En qué momento la dirección de su velocidad comienza a ser hacia abajo?
- 4.13. Una mano ejerce una fuerza horizontal de 5 N para mover hacia la derecha a dos bloques en contacto entre sí uno al lado del otro, sobre una superficie horizontal sin roce. El bloque de la izquierda tiene una masa de 2 kg y el de la derecha de 1 kg. a) Dibujar el diagrama de cuerpo libre para cada bloque. Calcular: b) la aceleración del sistema, c) la aceleración y fuerza sobre el bloque de 1 kg, d) la fuerza neta actuando sobre cada cuerpo. R: b)  $5/3 \text{ m/s}^2$ , c)  $5/3 \text{ m/s}^2$ ,  $5/3\text{N}$ , d) 5 N.
- 4.14. Dos bloques de masas  $M$  y  $3M$  ubicado a la derecha de  $M$ , que están sobre una mesa horizontal lisa se unen entre sí con una varilla de alambre horizontal, de masa despreciable. Una fuerza horizontal de magnitud  $2Mg$  se aplica sobre  $M$  hacia la izquierda. a) Hacer los diagrama de cuerpo libre. b) Calcular la aceleración del sistema. c) Calcular la tensión del alambre. R: b)  $5 \text{ m/s}^2$ , c)  $15M (N)$ .
- 4.15. Dos bloques de 1 y 2 kg, ubicados sobre planos lisos inclinados en  $30^\circ$ , se conectan por una cuerda ligera que pasa por una polea sin roce, como se muestra en la figura 4.15. Calcular: a) la aceleración de cada bloque, b) la tensión en la cuerda.
- 4.16. Respecto al problema anterior, si la aceleración cuando los planos son rugosos fuera  $\frac{1}{2}$  de la calculada en ese problema, calcular: a) el coeficiente de roce, b) la tensión en la cuerda.

- 4.17. Un trineo de 50 kg de masa se empuja a lo largo de una superficie plana cubierta de nieve. El coeficiente de rozamiento estático es 0.3, y el coeficiente de rozamiento cinético es 0.1. a) ¿Cuál es el peso del trineo? b) ¿Qué fuerza se requiere para que el trineo comience a moverse? c) ¿Qué fuerza se requiere para que el trineo se mueva con velocidad constante? d) Una vez en movimiento, ¿qué fuerza total debe aplicársele al trineo para acelerarlo a  $3 \text{ m/s}^2$ ?
- 4.18. Pepe anda esquiando, cuando en algún momento sube  $5 \text{ m}$  deslizándose por la pendiente de un cerrito nevado en sus esquíes, saliendo desde la cima ubicada a  $3 \text{ m}$  de altura respecto a la horizontal, con una rapidez de  $10 \text{ m/s}$ . El coeficiente de roce entre la nieve y los esquíes es 0.1. a) Calcular la rapidez con la cual el esquiador comienza a subir la pendiente. b) Determine la distancia horizontal que vuela Pepe cuando sale de la punta del cerro. R: a)  $13 \text{ m/s}$ , b)  $12.8 \text{ m}$ .
- 4.19. Dos bloques de masas  $1$  y  $2 \text{ kg}$  (figura 4.16) cuelgan de los extremos de una cuerda ligera y flexible que pasa por una polea sin roce, sujeta al techo; el sistema se llama máquina de Atwood. Si en el instante inicial los cuerpos se encuentran en reposo y a  $1$  y  $2 \text{ m}$  respectivamente del suelo, a) dibujar el diagrama de cuerpo libre para cada bloque. b) Escribir las ecuaciones de movimiento para cada cuerpo. c) Determinar la posición y la velocidad de cada cuerpo un segundo después de empezar a moverse. d) Calcular el valor de la tensión de la cuerda cuando el sistema está en movimiento. R: c)  $8/3 \text{ m}$ ;  $1/3 \text{ m}$ ;  $10/3 \text{ m/s}$ , d)  $13.3 \text{ N}$ .
- 4.20. El bloque de masa  $m$  de la figura 4.17 parte del reposo, deslizándose desde la parte superior del plano inclinado  $30^\circ$  con la horizontal. El coeficiente de roce cinético es 0.3. a) Calcular la aceleración del bloque mientras se mueve sobre el plano. b) Calcular la longitud del plano si el bloque sale con una rapidez de  $5 \text{ m/s}$ . c) Si el bloque cae al suelo a una distancia horizontal de  $3 \text{ m}$  desde el borde del plano, determine el tiempo total del movimiento. R: a)  $2.4 \text{ m/s}^2$ , b)  $5.2 \text{ m}$ , c)  $2.8 \text{ s}$ .
- 4.21. En el sistema de la figura 4.18, se aplica una fuerza  $\mathbf{F}$  sobre  $m$ . El coeficiente de roce es  $\mu$  entre cada cuerpo y los planos. Deducir la expresión de la magnitud de  $\mathbf{F}$  para que el sistema se mueva: a) con rapidez constante, b) con aceleración constante.  
R: b)  $Mg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha) + \mu mg + a(m+M)$ .

- 4.22. En el sistema de la figura 4.19, la fuerza  $F$  paralela al plano inclinado empuja al bloque de masa  $m$  haciéndolo subir sobre el plano, de coeficiente de roce  $\mu$ . Calcular en función de  $m$ ,  $F$ ,  $g$ ,  $\mu$  y  $\alpha$ , la aceleración del bloque. R:  $F/m - g(\mu \cos \alpha + \text{sen} \alpha)$ .
- 4.23. Una fuerza  $F$  se aplica a un pequeño bloque de masa  $m$  para hacerlo moverse a lo largo de la parte superior de un bloque de masa  $M$  y largo  $L$ . El coeficiente de roce es  $\mu$  entre los bloques. El bloque  $M$  desliza sin roce en la superficie horizontal. Los bloques parten del reposo con el pequeño en un extremo del grande, como se ve en la figura 4.20. a) Calcular la aceleración de cada bloque relativa a la superficie horizontal. b) Calcular el tiempo que el bloque  $m$  demora en llegar al otro extremo de  $M$ , en función de  $L$  y las aceleraciones. R: a)  $(F - \mu mg)/m$ ,  $\mu mg/(m+M)$ , b)  $[2L/(a_1 - a_2)]^{1/2}$ .
- 4.24. En el sistema de la figura 4.21, el brazo del péndulo es de longitud  $\lambda$  y la cuerda de largo  $L$ . a) Calcular la rapidez tangencial para que el sistema gire en torno al eje de rotación que pasa por la barra vertical, de modo que la cuerda que sostiene a la masa  $m$  forme un ángulo de  $30^\circ$  con la vertical. b) Calcular la tensión de la cuerda. c) Si el sistema da una vuelta en 30 s, determinar el ángulo que forma la cuerda con la vertical. R: a)  $[(l + L \text{sen} \alpha) g \tan \alpha]^{1/2}$ , b)  $mg/\cos \alpha$ .

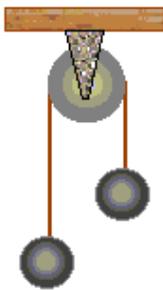


Figura 4.16

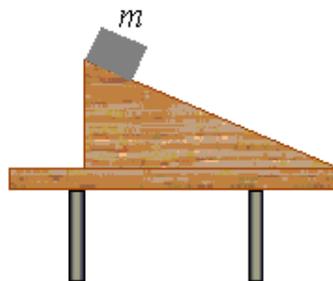


Figura 4.17

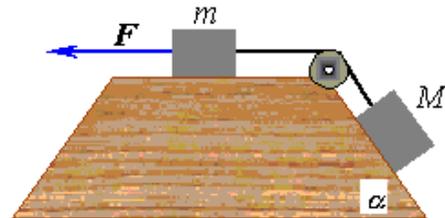


Figura 4.18

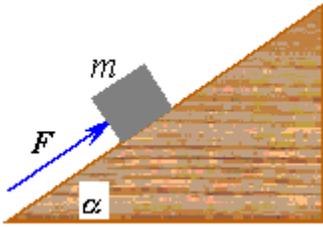


Figura 4.19

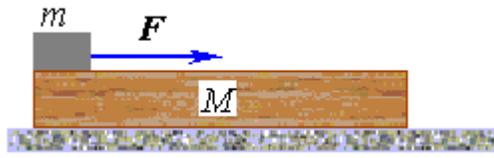


Figura 4.20

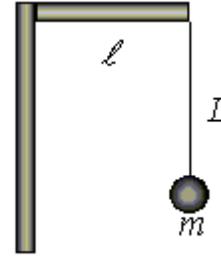


Figura 4.21

- 4.25. Para que un satélite tenga una órbita circular con rapidez constante, su aceleración centrípeta debe ser inversamente proporcional al cuadrado del radio  $r$  de la órbita. a) Demuestre que la rapidez tangencial del satélite es proporcional a  $r^{-1/2}$ . b) Demuestre que el tiempo necesario para completar una órbita es proporcional a  $r^{3/2}$ .
- 4.26. Un bloque de masa  $M$  se ubica sobre un pequeño plano inclinado un ángulo  $\alpha$  sin roce, que tiene su extremo inferior fijo a un eje vertical que puede girar. En algún momento el eje gira con el plano con rapidez constante. Demostrar que si la masa asciende desde la base del plano, su rapidez cuando ha subido una distancia  $L$  es  $v = \sqrt{gL \sin \alpha}$ .
- 4.27. La masa  $m_1$  sobre una mesa horizontal sin fricción se conecta a la masa  $m_2$  por medio de una polea móvil y una polea fija sin masas (figura 4.22). a) Si  $a_1$  y  $a_2$  son magnitudes de las aceleraciones de  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente, determinar una relación entre estas aceleraciones. Determinar expresiones para: b) las tensiones en las cuerdas, y c) las aceleraciones  $a_1$  y  $a_2$  en función de  $m_1$ ,  $m_2$  y  $g$ .
- 4.28. Calcular la fuerza  $F$  que debe aplicarse sobre un bloque A de  $20 \text{ kg}$  para evitar que el bloque B de  $2 \text{ kg}$  caiga (figura 4.23). El coeficiente de fricción estático entre los bloques A y B es  $0.5$ , y la superficie horizontal no presenta fricción. R:  $480 \text{ N}$ .

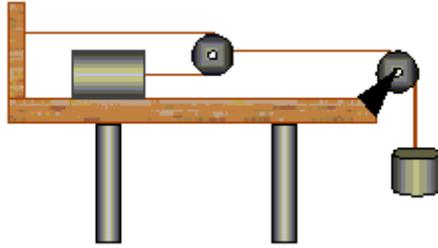


Figura 4.22



Figura 4.23

- 4.29. Demuestre que la rapidez máxima que un móvil puede tener en una carretera sin peralte es  $v_{max} = \sqrt{\mu Rg}$ , donde  $\mu$  es el coeficiente de roce y  $R$  el radio de la curva.
- 4.30. Calcular el ángulo de peralte de una carretera en una curva de radio  $150m$ , para que un camión de 15 toneladas pueda girar con una rapidez de  $70km/hr$ , sobre un pavimento cubierto de escarcha. R:  $14^\circ$ .
- 4.31. La figura 4.24 muestra la cabeza de un paciente en tracción de cuello sobre una plataforma móvil sin roce. Se tienen las siguientes fuerzas:  $F_a$  fuerza ejercida por la venda sobre la cabeza,  $F_c$  fuerza ejercida por el cuello sobre la cabeza,  $N$  fuerza ejercida por la mesa sobre la cabeza,  $P$  peso de la cabeza. a) Dibujar el diagrama de fuerzas correspondiente a la cabeza. b) Indicar la reacción a cada una de las fuerzas anteriores. c) ¿Sobre quién actúa la fuerza gravitacional? d) ¿En la base a qué leyes se obtiene el valor de la tensión en las vértebras del cuello? e) ¿Cuál es el valor de la tensión en el cuello?

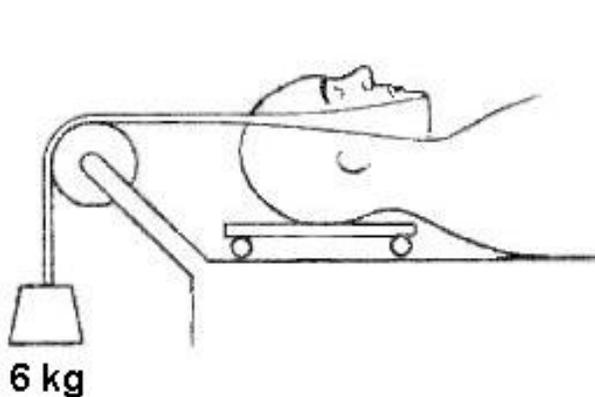


Figura 4.24

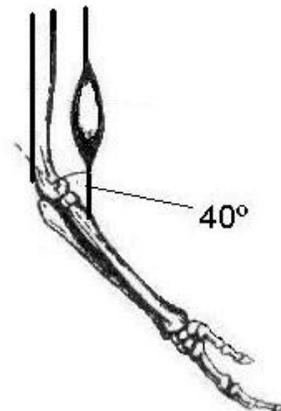


Figura 4.25

- 4.32. El tendón del bíceps de la figura 4.25 ejerce una fuerza  $F$  de 70 N sobre el antebrazo. El brazo aparece doblado, de tal manera que esta fuerza forma un ángulo de  $40^\circ$  con el antebrazo. Hallar las componentes de  $F$ : a) Paralela al antebrazo (fuerza estabilizadora), b) Perpendicular al antebrazo (fuerza de sostén).
- 4.33. Calcular la fuerza total aplicada a la cabeza del paciente por el dispositivo de tracción de la figura 4.26.
- 4.34. La figura 4.27 representa la cabeza de un niño inclinada sobre un libro. La cabeza pesa 30N y está sostenida por la fuerza muscular ejercida por los extensores del cuello y por la fuerza del contacto  $F_m$  ejercida en la articulación atlantooccipital. Dado que el módulo de  $F_m$  es 45 N y que está dirigido  $35^\circ$  por debajo de la horizontal, calcular: a) la magnitud y b) la dirección de  $F_c$ .

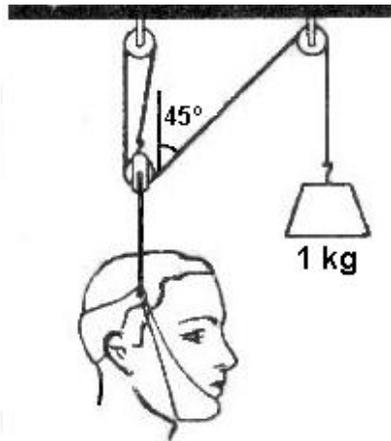


Figura 4.26

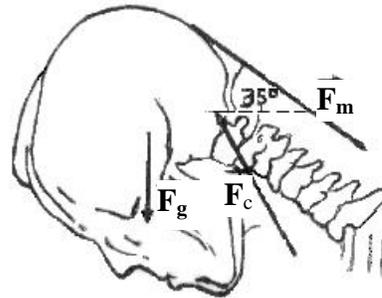


Figura 4.27

## CAPITULO 5. TRABAJO Y ENERGIA.

El problema fundamental de la Mecánica es describir como se moverán los cuerpos si se conocen las fuerzas aplicadas sobre él. La forma de hacerlo es aplicando la segunda Ley de Newton, pero si la fuerza no es constante, es decir la aceleración no es constante, no es fácil determinar la velocidad del cuerpo ni tampoco su posición, por lo que no se estaría resolviendo el problema.

Los conceptos de trabajo y energía se fundamentan en las Leyes de Newton, por lo que no se requiere ningún principio físico nuevo. Con el uso de estas dos magnitudes físicas, se tiene un método alternativo para describir el movimiento, espacialmente útil cuando la fuerza no es constante, ya que en estas condiciones la aceleración no es constante y no se pueden usar las ecuaciones de la cinemática anteriormente estudiadas. En este caso se debe usar el proceso matemático de integración para resolver la segunda Ley de Newton. Ejemplos de fuerzas variables son aquellas que varían con la posición, comunes en la naturaleza, como la fuerza gravitacional o las fuerzas elásticas.

### 5.1 TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE.

Si la fuerza  $F$  que actúa sobre una partícula es constante (en magnitud y dirección) el movimiento se realiza en línea recta en la dirección de la fuerza. Si la partícula se desplaza una distancia  $x$  por efecto de la fuerza  $F$  (figura 5.1), entonces se dice que la fuerza ha realizado trabajo  $W$  sobre la partícula de masa  $m$ , que en este caso particular se define como:

$$W = F x$$

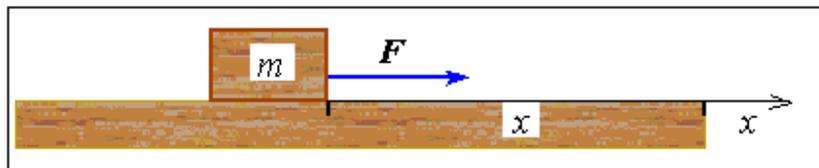


Figura 5.1 Fuerza horizontal constante que realiza un desplazamiento  $x$ .

Si la fuerza constante no actúa en la dirección del movimiento, el trabajo que se realiza es debido a la componente  $x$  de la fuerza en la dirección paralela al movimiento, como se ve en la figura 5.2a. La componente  $y$  de la fuerza, perpendicular al desplazamiento, no realiza trabajo sobre el cuerpo.

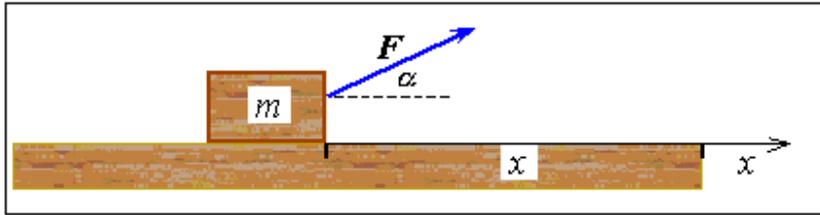


Figura 5.2a Fuerza constante que forma un ángulo  $\alpha$  con el desplazamiento  $x$ .

Si  $\alpha$  es el ángulo medido desde el desplazamiento  $x$  hacia la fuerza  $F$ , el valor del trabajo  $W$  es ahora:

$$W = (F \cos \alpha)x$$

De acuerdo a la ecuación anterior, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- si  $\alpha = 0^\circ$ , es decir, si la fuerza, como en la figura 5.1, o una componente de la fuerza, es paralela al movimiento,  $W = (F \cos 0) x = F x$ ;
- si  $\alpha = 90^\circ$ , es decir, si la fuerza o una componente de la fuerza es perpendicular al movimiento,  $W = (F \cos 90) x = 0$ , no se realiza trabajo;
- si la fuerza aplicada sobre el cuerpo no lo mueve, no realiza trabajo ya que el desplazamiento es cero;
- si  $0 < \alpha < 90^\circ$ , es decir, si la fuerza tiene una componente en la misma dirección del desplazamiento, el trabajo es positivo;
- si  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ , es decir, si la fuerza tiene una componente opuesta a la dirección del desplazamiento, el trabajo es negativo.

De estas conclusiones se deduce que el trabajo, para una fuerza constante, se puede expresar de la siguiente forma:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

El trabajo es una magnitud física escalar, obtenido del producto escalar de los vectores fuerza y posición. De la expresión anterior, por la definición de producto escalar, queda claro que el trabajo puede ser positivo, negativo o cero. Su unidad de medida en el SI es  $Nm$  que se llama *Joule*, símbolo  $J$ .

Otras fuerzas actúan sobre el cuerpo de masa  $m$  (peso, roce, normal, etc.), por lo que la ecuación anterior se refiere sólo al trabajo de la fuerza  $F$  en particular; las otras fuerzas también pueden realizar trabajo. En la figura 5.2 las fuerzas peso y normal no realizan trabajo ya que son perpendiculares al desplazamiento y la fuerza de roce realiza trabajo negativo, ya que siempre se opone al desplazamiento. El trabajo total sobre la partícula es la suma escalar de los trabajos realizados por cada una de las fuerzas.

**Ejemplo 5.1:** Con una fuerza de  $250\text{ N}$  que forma un ángulo de  $60^\circ$  con la horizontal se empuja una caja de  $50\text{ kg}$ , en una superficie áspera horizontal (figura 5.2a). La caja se mueve una distancia de  $5\text{ m}$  con rapidez constante. Calcular: a) el trabajo realizado por cada fuerza, b) el coeficiente de roce.

**Solución:** Las fuerzas que actúan sobre la caja son  $F$ , normal, roce y peso, el diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 5.2b.

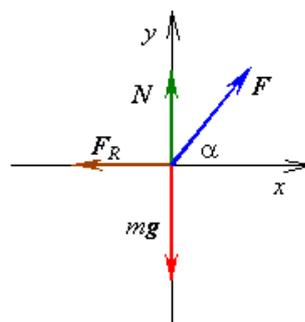


Figura 5.2b. Ejemplo 5.1

a) La definición de trabajo es  $W = \vec{F} \cdot \vec{r}$ , que se aplica a cada fuerza

Para  $F$ :  $W_F = (F \cos\alpha) x = 250 \times (\cos 60) \times 5 = 625 \text{ J}$

Para  $N$ :  $W_N = (N \cos 90) x = 0$

Para  $mg$ :  $W_P = (mg \cos 270) x = 0$

Para  $F_R$ :  $W_R = (F_R \cos 180) x,$

Como no se conoce el valor de la fuerza de roce, se debe calcular, del DCL y aplicando la primera ley de Newton, ya que la caja se mueve con rapidez constante, se obtiene:

Eje  $x$ :  $F \cos\alpha - F_R = 0$  (1)

Eje  $y$ :  $F \operatorname{sen}\alpha + N - mg = 0$  (2)

De (1)  $F_R = F \cos\alpha = 250 \times \cos 60 = 125 \text{ N}$ , reemplazando en el trabajo,

$$W_R = 125 \times \cos 180 \times 5 = -625 \text{ J}$$

b) Por definición,  $F_R = \mu N$ , despejando  $N$  de (2) se tiene  $N = mg - F \operatorname{sen}\alpha$ , entonces:

$$F_R = \mu(mg - F \operatorname{sen}\alpha) \Rightarrow \mu = \frac{F_R}{mg - F \operatorname{sen}\alpha}$$

$$\mu = \frac{125}{50 \times 10 - 250 \operatorname{sen} 60} = 0.44$$

## 5.2 TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE.

Si una fuerza variable  $F$  está moviendo a un objeto a lo largo del eje  $x$  desde una posición inicial a otra final, ya no se puede usar la expresión anterior para calcular el trabajo realizado por la fuerza. En este caso se puede hacer que el

cuerpo experimente pequeños desplazamientos  $dx$ , entonces la componente  $F_x$  de la fuerza en la dirección del desplazamiento se puede considerar aproximadamente constante en ese intervalo  $dx$  y se puede calcular un trabajo  $dW$  en ese pequeño desplazamiento como:

$$dW = F_x dx$$

Si se calcula el trabajo total en el desplazamiento desde la posición inicial a la final, este es igual a la suma de todos los pequeños trabajos  $dW$ , esto es:

$$W = \int dW \Rightarrow W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Matemáticamente, el valor de la integral es numéricamente igual al área bajo la curva de  $F_x$  versus  $x$  (figura 5.3). Si actúan más de una fuerza sobre el cuerpo, el trabajo resultante es el realizado por la componente de la fuerza resultante en dirección del desplazamiento, entonces en términos del producto escalar en tres dimensiones, el trabajo total es:

$$W_{TOTAL} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \sum \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.1)$$

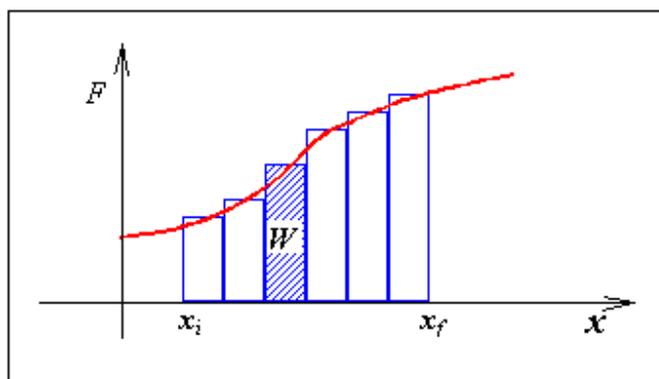


Figura 5.3

**Ejemplo 5.2:** Calcular trabajo realizado por un resorte.

Un sistema físico común en el que la fuerza varía con la posición, es el de un cuerpo conectado a un resorte. Si el resorte, orientado en dirección del eje  $x$ , se deforma desde su configuración inicial, es decir se estira o se comprime, por efecto de alguna fuerza externa sobre el resorte, instantáneamente actúa una fuerza  $F$  producida por el resorte contra el objeto que ejerce la fuerza externa, cuya magnitud es:

$$F = - k x$$

donde  $x$  es la magnitud del desplazamiento del resorte desde su posición no deformada en  $x = 0$  y  $k$  una constante positiva, llamada *constante de fuerza del resorte*, que es una medida de la rigidez (dureza) del resorte. Esta ecuación se llama **Ley de Hooke**, y es válida para pequeños desplazamientos, ya que si el resorte se estira demasiado, puede deformarse y no recuperar su forma original. El signo negativo indica que la dirección de esta fuerza es siempre opuesta al desplazamiento, como se ilustra en la figura 5.4, donde  $F$  representa la fuerza producida por el resorte.

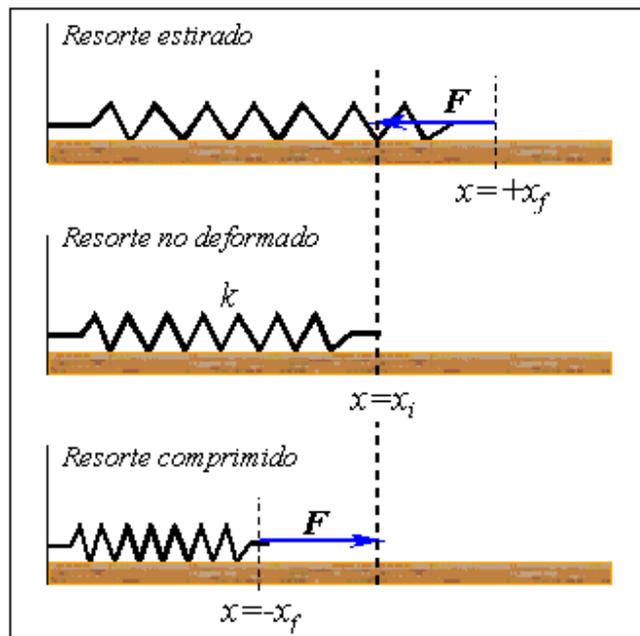


Figura 5.4

Si el cuerpo se desplaza desde una posición inicial a la final, el trabajo realizado por el resorte es:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

Por ejemplo, para un resorte de  $k = 100$  N/m, que se estira 10 cm ( $= x_f$ ), el trabajo que realiza la fuerza del resorte para recuperar su posición inicial no deformada ( $x_i = 0$ ) es 0.5 J.

### 5.3 ENERGÍA CINÉTICA.

Cuando se hace trabajo contra el roce, se observa que en la superficie de los cuerpos en contacto se produce un aumento de temperatura. Es porque se ha producido una transformación desde movimiento a calor, es decir que se ha producido una transferencia de energía de movimiento a energía calórica. En otras transformaciones se produce energía en forma de luz, sonido, eléctrica, nuclear, etc. En las transformaciones se miden cambios de energía cuando se realiza trabajo, aparecen las fuerzas que realizan trabajo, por lo tanto el trabajo es una medida de las transferencias de energía. El concepto de energía se puede generalizar para incluir distintas formas de energía conocidas como cinética, potencial, calórica, electromagnética, etc. De esta forma, la mecánica de los cuerpos en movimiento se relaciona con otros fenómenos naturales que no son mecánicos por intermedio del concepto de energía. El concepto de *energía* invade toda la ciencia y es una de las ideas unificadoras de la Física.

Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo, le produce una aceleración durante su desplazamiento. El trabajo realizado por la fuerza para mover al cuerpo es:

$$W_{TOTAL} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \sum \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Por la segunda Ley de Newton se tiene:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{d\vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v} \frac{d\vec{v}}{d\vec{r}},$$

reemplazando en el trabajo total, se obtiene:

$$W_{TOTAL} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} m\vec{v} \frac{d\vec{v}}{d\vec{r}} \cdot d\vec{r} = m \int_{v_0}^{\vec{v}} \vec{v} d\vec{v} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

La cantidad  $\frac{1}{2}mv^2$ , se llama **energía cinética**,  $E_c$ , es energía que se obtiene por el movimiento, es siempre positiva porque la rapidez está al cuadrado.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (5.2)$$

Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza resultante sobre una partícula es igual al cambio de energía cinética, enunciado que se conoce como el **Teorema del Trabajo y la Energía**. Cuando la rapidez es constante, no hay variación de energía cinética y el trabajo de la fuerza neta es cero. La unidad de medida de la energía cinética es el Joule,  $J$ .

#### 5.4 POTENCIA.

Para fines prácticos interesa también conocer la rapidez con la cual se realiza trabajo. Esta información la entrega la **potencia**, que se define como la rapidez de transferencia de energía. Si se aplica una fuerza externa a un cuerpo y se realiza trabajo  $dW$  en un intervalo de tiempo  $dt$ , la potencia instantánea  $P$  (cuidado de no confundir con el peso de un cuerpo) se define como:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

La unidad de medida de la potencia en el SI es  $J/s$ , que se llama *Watt*, símbolo  $W$  (cuidado de no confundir con el trabajo).

Como  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , se puede escribir la potencia como:

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (5.3)$$

Se puede definir una nueva unidad de energía en términos de la unidad de potencia, llamada kilowatt-hora. Un *kilowatt-hora* ( $kWh$ ) es la energía utilizada durante una hora con una potencia constante de  $1 kW$ . El valor de un kWh es:

$$1 kWh = 1000 W \cdot 3600 s = 3.6 \times 10^6 J.$$

El kWh es unidad de energía, no de potencia. Por ejemplo, para encender una ampolla de  $100 W$  de potencia se requieren entregarle  $3.6 \times 10^5 J$  de energía durante una hora, equivalente a  $0.1 kWh$ . Notemos que esta es una unidad de medida que nos indica que la energía es una magnitud física que, aunque abstracta, tiene valor comercial, se puede vender y comprar, ya que por ejemplo, todos los meses pagamos por una determinada cantidad de kilowatt-hora o energía eléctrica para nuestros hogares, en cambio no se pueden comprar 50km/h de rapidez, pero si compramos energía en forma de gasolina para hacer que un vehículo pueda moverse.

**Ejemplo 5.3:** *Un mueble de 40 kg que se encuentra inicialmente en reposo, se empuja con una fuerza de 130 N, desplazándolo en línea recta una distancia de 5 m a lo largo de un piso horizontal de coeficiente de roce 0.3 (figura 5.1). Calcular: a) el trabajo de la fuerza aplicada, b) el trabajo del roce, c) la variación de energía cinética, d) la rapidez final del mueble, e) la potencia final de la fuerza aplicada.*

**Solución:** El diagrama de cuerpo libre para el mueble de masa  $m$  de la figura 5.1 se muestra en la figura 5.5.

a)  $W = \vec{F} \cdot \vec{r} = F \cos 0^\circ x = Fx$

$$W_F = (130N)(5m) = 650J$$

b)  $F_R = \mu N = \mu mg$

$$W_R = \vec{F}_R \cdot \vec{r} = F_R (\cos 180^\circ)x = -\mu mgx$$

$$W_R = -0.3 \cdot 40 \cdot 10 \cdot 5 = -600 J$$

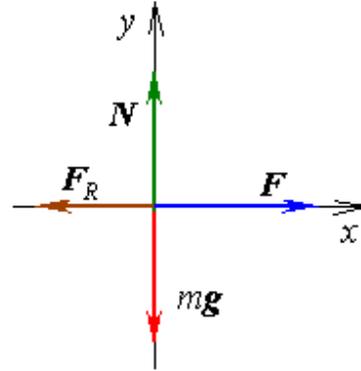


Figura 5.5 Problema 5.3

c)  $W_{Total} = \Delta E_c \Rightarrow W_F + W_N + W_R + W_P = \Delta E_c$

pero  $W_N = W_P = 0$ , ya que las fuerzas normal y peso son perpendiculares al desplazamiento, entonces:

$$\Delta E_c = W_F + W_R = 650 - 600 = 50 J$$

d) Para calcular la rapidez final, usamos el resultado anterior

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2\Delta E_c}{m}}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2\Delta E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 50}{40}} = 1.6 \frac{m}{s}$$

e) Usando la definición de potencia:

$$P_f = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cos 0^\circ v_f = Fv$$

$$P_f = 130 \times 1.6 = 208(\text{watt})$$

### 5.5 FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS.

Se llaman **fuerzas conservativas** aquellas para las cuales el trabajo realizado por las fuerzas para mover un cuerpo entre dos puntos por cualquier trayectoria arbitraria, no depende de la trayectoria que une los puntos. Las fuerzas que dependen de la posición son conservativas, por ejemplo: la gravitacional, elástica, electromagnética, etc.

Suponer que una partícula se mueve, por la acción de una fuerza, desde una posición inicial  $P$  hasta otra posición final  $Q$ , por trayectorias arbitrarias 1 y 2, como se ve en la figura 5.6a. Si la fuerza es conservativa, entonces el trabajo para mover la partícula desde  $P$  a  $Q$  sólo depende de las coordenadas inicial y final de la partícula, esto es:

$$W_{PQ} (\text{por trayectoria 1}) = W_{PQ} (\text{por trayectoria 2})$$

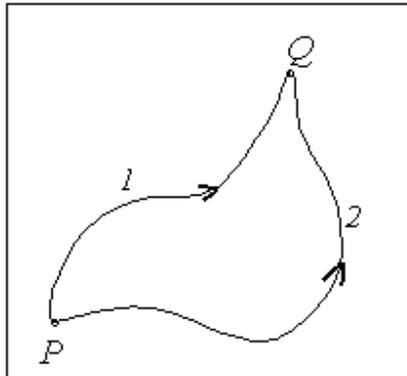


Figura 5.6a

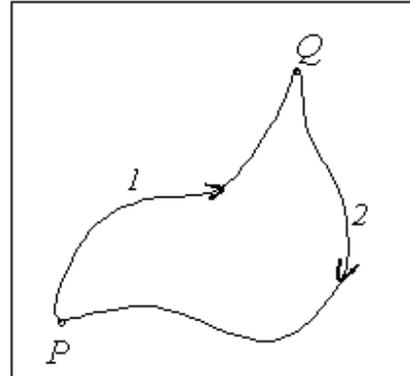


Figura 5.6b

Si ahora la partícula se mueve desde  $P$  hasta  $Q$  por la trayectoria 1 y luego regresa desde  $Q$  hasta  $P$  por la trayectoria 2 (figura 5.6b), se observa que en el regreso,  $W_{QP} (\text{por trayectoria 2}) = -W_{PQ} (\text{por trayectoria 1})$ , entonces:

$$W_{PQ}(\text{por trayectoria 1}) = -W_{QP}(\text{por trayectoria 2})$$

$$W_{PQ}(\text{por trayectoria 1}) + W_{QP}(\text{por trayectoria 2}) = 0$$

Entonces, si la partícula se mueve desde una posición inicial, realiza un circuito donde regresa a la misma posición inicial, el trabajo realizado por una fuerza conservativa en una trayectoria cerrada es cero.

Por el contrario, las *fuerzas no conservativas* o *fuerzas disipativas* son aquellas para las cuales el trabajo realizado por las fuerzas para mover una partícula entre dos puntos, depende de la trayectoria que se realice para unir los puntos. Para las fuerzas no conservativas se tiene que,  $W_{PQ}(\text{por trayectoria } 1) \neq W_{PQ}(\text{por trayectoria } 2)$ . Las fuerzas de roce, que siempre se oponen al desplazamiento, son no conservativas o disipativas, el trabajo de estas fuerzas es negativo y le hacen perder energía al sistema.

### 5.6 ENERGÍA POTENCIAL.

El trabajo realizado por una fuerza conservativa es independiente de la trayectoria y de la rapidez con la que se mueve la partícula. En este caso el trabajo es sólo función de las coordenadas, por lo que se puede asociar con una variación de energía función de la posición, similar al caso de la energía cinética que es función de la velocidad. Las fuerzas que son función de la posición generan energía de posición, a la que se llama *energía potencial*. El trabajo realizado por la fuerza se almacena como energía potencial en el objeto en movimiento. Se define la *energía potencial*  $E_P$ , a aquella que puede obtenerse en virtud de la posición del cuerpo, tal que el trabajo realizado por la fuerza conservativa entre dos posiciones, es igual a la disminución de la *energía potencial*, esto es, el trabajo realizado por una fuerza conservativa es igual al valor negativo del cambio de energía potencial asociada con la fuerza:

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_P = E_{P_i} - E_{P_f}$$

Se puede elegir una posición de referencia inicial y medir las diferencias de energía potencial respecto a ese punto y definir una función energía potencial en cualquier posición  $\mathbf{r}$  como:

$$E_p(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + E_{pi}$$

El valor de  $E_{pi}$  generalmente no se conoce, por lo que se elige una posición arbitraria, donde por convención se le asigna el valor cero a la energía potencial inicial,  $E_{pi} = 0$ , ya que por su definición, sólo tiene significado físico el cambio de energía potencial. Esta posición arbitraria se llama **nivel de referencia** y puede ser cualquiera; generalmente se toma como nivel de referencia la superficie de la Tierra o cualquier otra posición conveniente, pero una vez que se ha elegido no debe cambiarse. Con esta elección, se define la energía potencial en una posición  $\mathbf{r}$  como:

$$E_p(\vec{r}) = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.4)$$

Para las fuerzas no conservativas no existe una función de energía potencial, ya que el trabajo, que depende de la trayectoria, no es función de la posición inicial y final de la partícula.

**Ejemplo 5.4.** Calcular la energía potencial de la fuerza peso.

Se calculará el trabajo y la energía potencial para una partícula que se deja caer libremente desde una posición inicial  $y_i$  a otra posición final  $y_f$  (figura 5.7). La fuerza que produce el movimiento de la partícula es la gravitacional, que para caída libre es el peso  $P = mg$ , entonces el trabajo es:

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{y_i}^{y_f} mg(-\hat{j}) \cdot dy(-\hat{j})$$

$$W = mgy_f - mgy_i$$

Esto demuestra que la fuerza gravitacional es conservativa, ya que el trabajo realizado por esa fuerza depende sólo de las posiciones inicial y final de la partícula.

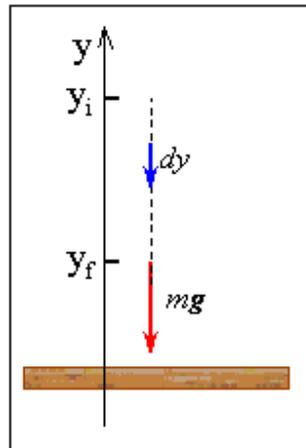


Figura 5.7. Ejemplo 5.4.

La variación de energía potencial de la partícula es:

$$\Delta E_P = -W = -(mgy_f - mgy_i) = mgy_i - mgy_f$$

Como las posiciones inicial y final son arbitrarias, se define la energía potencial de la fuerza gravitacional, o simplemente energía potencial gravitacional  $E_g$ , válida en las condiciones de caída libre, por la expresión:

$$E_g = mgy \quad (5.5)$$

**Ejemplo 5.5.** Calcular la energía potencial de la fuerza elástica.

Otra fuerza conservativa es la que ejerce un resorte deformado sobre un cuerpo fijo a él. El trabajo realizado por la fuerza elástica del resorte sobre el cuerpo ya se calculó, y es:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 = -\Delta E_P = E_{Pi} - E_{Pf}$$

Esto permite definir la energía potencial elástica  $E_E$  almacenada en un resorte como:

$$E_E = \frac{1}{2} kx^2 \quad (5.6)$$

La energía potencial elástica es cero cuando el resorte no está deformado, es máxima cuando alcanza su deformación máxima y es siempre positiva ya que es proporcional a  $x^2$ .

### 5.7 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA.

Cuando una partícula se mueve por la acción de una fuerza conservativa, por el teorema del trabajo y la energía se tiene que el trabajo realizado por la fuerza es igual a la variación de energía cinética de la partícula:

$$W = \Delta E_c$$

Pero como la fuerza es conservativa, entonces  $W = -\Delta E_p$ , donde  $E_p$  puede ser la energía potencial gravitacional, elástica o cualquier otra forma de energía potencial mecánica. Igualando ambas expresiones del trabajo se obtiene:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p \Rightarrow \Delta E_c + \Delta E_p = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta(E_c + E_p) = 0$$

esta ecuación se puede escribir también de la siguiente forma:

$$E_{ci} + E_{pi} = E_{cf} + E_{pf}$$

Se puede definir la energía mecánica total como la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$$E = E_c + E_p$$

entonces se obtiene la *ley de conservación de la energía mecánica*, que se escribe como:

$$E_i = E_f \Rightarrow E = cte \quad (5.7)$$

La *ley de conservación de la energía mecánica* establece que la energía mecánica total de un sistema permanece constante si las únicas fuerzas que realizan trabajo sobre el sistema son conservativas. Cuando una cantidad física no cambia, decimos que se conserva. Decir que la energía se conserva significa que la cantidad total de energía de un sistema natural no cambia, no se puede crear ni destruir energía, sólo se puede convertir de una forma a otra. Es una de las leyes fundamentales de la Física, deducida a partir de una de las leyes fundamentales de la mecánica, la segunda ley de Newton.

Si las fuerzas presentes en un sistema mecánico no son conservativas, como ocurre en los sistemas reales, la energía aparentemente no se conserva, porque se transforma en otro tipo de energía. Por ejemplo, la fuerza de roce se dice que es disipativa porque disipa energía, que se transforma en calor en la superficie de contacto entre los cuerpos. En efecto, se puede aplicar el teorema del trabajo y la energía tomando en cuenta la existencia de las fuerzas no conservativas. Si  $W_{NC}$  es el trabajo sobre una partícula de todas las fuerzas no conservativas y  $W_C$  el trabajo de todas las fuerzas conservativas, entonces:

$$W_{NC} + W_C = \Delta E_c$$

Como  $W_C = -\Delta E_p$  entonces:

$$\begin{aligned}
 W_{NC} &= \Delta E_C + \Delta E_P \\
 W_{NC} &= (E_{Cf} - E_{Ci}) + (E_{Pf} - E_{Pi}) \\
 W_{NC} &= (E_{Cf} + E_{Pf}) - (E_{Ci} + E_{Pi}) = E_f - E_i \\
 W_{NC} &= E_f - E_i
 \end{aligned}$$

Es decir, el trabajo realizado por todas las fuerzas no conservativas es igual al cambio de energía mecánica total del sistema.

**Ejemplo 5.6.** Conservación de la energía en el movimiento de caída libre.

Aplicando el principio de conservación de la energía para un cuerpo en caída libre, se obtiene a la siguiente expresión:

$$E = cte \Rightarrow E_{ci} + E_{gi} = E_{cf} + E_{gf}$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f$$

Si se conoce la rapidez inicial y la posición inicial y final de la partícula, se puede calcular su rapidez final:

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2g(y_i - y_f)}$$

expresión equivalente a la obtenida por métodos cinemáticos.

**Ejemplo 5.7.** Para el sistema de la figura 5.8, donde el cuerpo de masa  $m$  desliza desde una altura  $h$  por la superficie curva sin roce, calcular la compresión máxima del resorte de constante  $k$ , cuando la masa choca con él.

**Solución:** si no hay roce, se conserva la energía mecánica, entonces:

$$E = cte \Rightarrow E_{ci} + E_{gi} + E_{Ei} = E_{cf} + E_{gf} + E_{Ef}$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i + \frac{1}{2}kx_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f + \frac{1}{2}kx_f^2$$

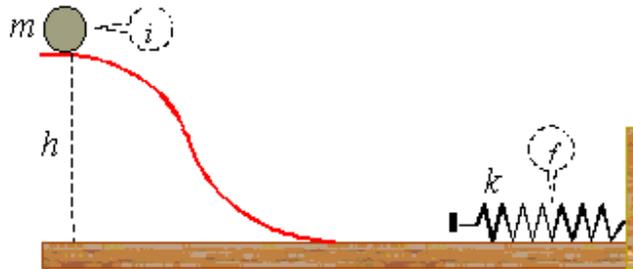


Figura 5.8 Ejemplo 5.7

Eligiendo el punto inicial  $i$  en la parte superior de la pista curva y el punto final  $f$  en la posición de la máxima compresión del resorte (figura 5.8), la energía cinética inicial y final es cero, porque  $m$  parte del reposo,  $v_i = 0$ , y en la compresión máxima del resorte  $v_f = 0$  ya que se detiene; la energía gravitacional inicial es  $mgy_i = mgh$ , ya que  $y_i = h$  y la final es cero en el suelo, porque se considera que la altura  $y_f$  es cero; la energía elástica inicial es cero porque en esa posición no hay resorte, entonces queda:

$$mgh = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2mgh}{k}}$$

donde  $x$  es la compresión máxima del resorte.

### 5.8 ENERGIA Y LA MAQUINA HUMANA.

La magnitud Física tal vez más importante en la descripción de la naturaleza es la Energía. Es un concepto difícil de definir; no siempre se advierte y cambia de aspecto con facilidad asombrosa. Las formas bajo las cuales se presenta la energía, suelen ser tan diferentes que la humanidad demoró siglos en reconocerla. Su importancia principal radica en su permanencia; veremos que puede afirmarse que la energía es una magnitud increable e indestructible. Esta calidad de permanencia constituye un concepto unificador importante, porque

fenómenos tan diversos como el funcionamiento de un motor y el movimiento del cuerpo humano, puede analizarse en función del paso continuo de energía de una a otra de sus formas y su simultánea transferencia de un cuerpo a otro.

Son diversas las formas bajo las cuales puede presentarse la energía la energía: un cuerpo por el sólo hecho de estar en movimiento posee energía cinética; el mismo cuerpo u otro en virtud de su posición respecto a un cierto nivel de referencia tiene energía potencial gravitacional; un cuerpo elástico que ha sido deformado posee energía potencial elástica. La lista de formas de energía no termina aquí. Se dice que los cuerpos que rotan, poseen energía de rotación; los que vibran, energía vibracional; las ondas como las ondas marinas transportan energía ondulatoria; las ondas luminosas, energía luminosa; los cables eléctricos transportan energía eléctrica; en el interior del átomo tenemos energía atómica, energía nuclear; en las reacciones químicas estamos en presencia de energía química, etc.

Es un hecho comprobado que hay muchos casos en los que aparentemente no se mantiene constante la suma de la energía cinética y potencial de un cuerpo o cuando se aplican fuerzas externas sobre él, el trabajo realizado no se invierte en su totalidad en aumentar la energía cinética o potencial. Por ejemplo, si dejamos caer un objeto al suelo, llega con cierta velocidad (con cierta energía cinética), pero al llegar se detiene y pierde su energía cinética sin que gane energía potencial. Si arrastramos un cuerpo por el suelo, moviéndolo con velocidad aproximadamente constante, en realidad tenemos que realizar una fuerza y por tanto, al haber desplazamiento, un trabajo, pero este trabajo no se emplea en aumentar la energía potencial, porque el cuerpo se desplaza horizontalmente, ni energía cinética, porque la velocidad no aumenta. ¿Qué ha pasado con la energía cinética en el primer caso? ¿Qué ha ocurrido, en el segundo, con la energía que en forma de trabajo se le suministró al cuerpo? La respuesta es: la energía que ha desaparecido se ha transformado en “energía interna” del suelo o del cuerpo que se mueve. Nótese que no decimos que se ha transformado en “calor”, como se podría esperar, sino en “energía interna”. En otro curso de física se hablará del calor y veremos la razón de esta distinción.

En conclusión, vivimos rodeados de energía. No sólo la energía intrínseca de las moléculas, átomos y núcleos, sino también manifestaciones de la energía a escala macroscópica como resultado de la organización parcial del movimiento molecular, tal como la energía del viento en una tormenta, la energía del agua en una catarata, de un río o de las mareas, la energía del vapor producido

en un volcán o en el interior de la Tierra, etc. Uno de los grandes problemas es diseñar los medios para que esa energía pueda aprovecharse bajo control en la forma que nos interese, esto es, como energía útil. Sin embargo, sólo sabemos transformar en energía útil una pequeñísima fracción de la energía a nuestro alrededor, debido en gran parte a la falta de organización en la materia y a que, para producir cierta organización molecular, es necesario a su vez invertir cierta energía.

### **5.8.1 ¿Cómo camina la máquina humana?**

El movimiento del cuerpo humano se explica con los mismos principios de fuerza y trabajo que describen todo movimiento. Las máquinas simples, en forma de palancas, dan la capacidad para caminar y correr. Los sistemas de palanca del cuerpo son complejos, pero en un modelo se pueden considerar cuatro partes básicas que se muestran en la figura 5.9: 1 una barra rígida (un hueso), 2 una fuente de fuerza (un músculo), 3 un punto de apoyo (articulaciones móviles entre los huesos) y 4 una resistencia (peso del cuerpo u objeto que se levanta o mueve). Los sistemas de palanca del cuerpo humano no son muy eficientes, por esto caminar y correr requiere energía (se queman calorías) y ayuda a que las personas bajen de peso.

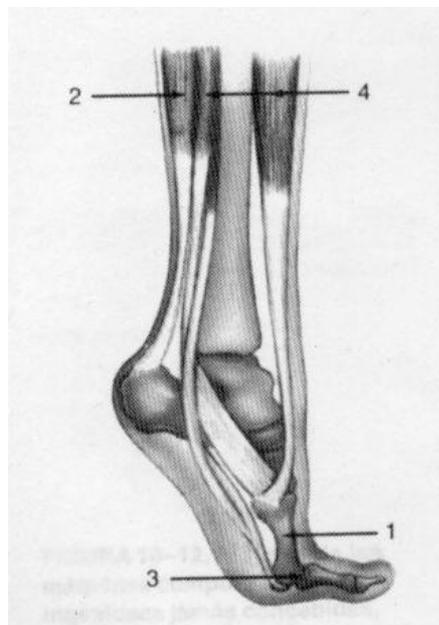


Figura 5.9. Modelo del sistema de palanca del cuerpo humano.

Cuando una persona camina, la cadera actúa como punto de apoyo y se mueve a través del arco de un círculo centrado en el pie. El centro de masa del cuerpo se mueve como una resistencia alrededor del punto de apoyo en el mismo arco. La longitud del radio del círculo es la longitud de la palanca formada por los huesos de la pierna. Los atletas de marcha incrementan su rapidez balanceando las caderas hacia arriba para aumentar este radio.

### ***5.8.2 Articulaciones artificiales.***

Se han logrado grandes avances en el diseño y sustitución de articulaciones lesionadas por articulaciones artificiales. Debido a las inmensas tensiones de las articulaciones en los brazos y las piernas, los materiales con los cuales se elaboran las partes artificiales y las uniones deben ser extremadamente fuertes. El titanio es un material común usado para elaborar articulaciones artificiales. Pero ahora se está desarrollando y probando la resistencia de plásticos ligeros y materiales similares a los huesos. Las uniones permanentes en las articulaciones artificiales generalmente se hacen por medio de cementos especiales, por fijación biológica con un sistema de 'ajuste preciso'. En la fijación biológica se usa un material poroso que permite al hueso crecer dentro de la pared artificial. Huesos de 'ajuste preciso' son hechos de manera tan exacta que encajan en su sitio alrededor de los huesos naturales. Sin importar el método usado, las articulaciones artificiales deben ser capaces de soportar las cargas normales. Las articulaciones de la cadera y el codo son las áreas que soportan el mayor esfuerzo. La articulación redondeada de la cadera soporta la mayor parte del peso del cuerpo y es esencial para caminar. Aunque el codo no es una articulación que soporte mucho peso, es el punto de apoyo de la palanca del antebrazo y debe soportar esfuerzos significativos. Por ejemplo al sostener un peso de 10N (1kg) en la palma de la mano con el codo formando un ángulo de 90°, sobre él se ejerce una fuerza de 90N (9kg).

**PROBLEMAS.**

- 5.1. Una partícula de 4 kg. se mueve desde el origen hasta la posición C que tiene coordenadas  $x=5m$  e  $y=5m$  con la influencia de la fuerza de gravedad, la cual actúa en la dirección y negativa (figura 5.10). Calcule el trabajo realizado por la gravedad al ir de O a C a lo largo de las siguientes trayectorias: a) OAC, b) OBC, c) OC. R: -200 J.
- 5.2. Una fuerza que actúa sobre una partícula que se mueve sobre el plano horizontal  $xy$  está dada por  $\vec{F} = (2y\hat{i} + x^2\hat{j})N$ , en donde  $x$  e  $y$  están en m. La partícula se mueve desde el origen hasta una posición final C de coordenadas  $x=5m$  e  $y=5m$ , como en la figura 5.10. Calcular el trabajo efectuado por la fuerza a lo largo de a) OAC, b) OBC, c) OC. d) ¿F es conservativa o no conservativa? R: a) 125 J, b) 50 J, c) 66.7 J d) No.

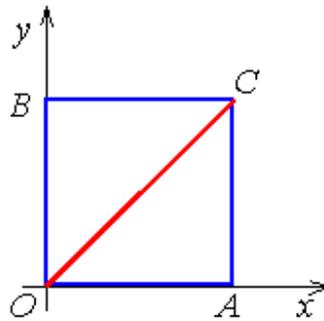


Figura 5.10 Problemas 5.1 y 5.2

- 5.3. Una sola fuerza constante  $\vec{F} = (3\hat{i} + 5\hat{j}) N$  actúa sobre una partícula de 4 kg. a) Calcule el trabajo efectuado por esta fuerza si la partícula se mueve desde el origen hasta un punto cuyo vector de posición es  $\vec{r} = (2\hat{i} - 3\hat{j}) m$ . ¿Este resultado depende de la trayectoria? Explicar b) ¿Cuál es la rapidez de la partícula en  $r$  si su rapidez en el origen es 4 m/s. c) ¿Cuál es el cambio en la energía potencial de la partícula? R: a) -9 J, b) 3.4 m/s, c) 9 J.
- 5.4. El Nico recibe un servicio del Feña con una pelota de tenis de 50 gr, la cual al llegar a la raqueta del Nico con una rapidez de 200 km/hr, la hunde 2 cm, se detiene y sale nuevamente disparada (todo eso ocurre en

un intervalo de tiempo muy pequeño). Calcular: a) la energía cinética de la pelota antes que golpee la raqueta, b) el trabajo realizado sobre la pelota durante el golpe, c) la fuerza media sobre la pelota. R: a) 77J, c) 3850N

- 5.5. Sobre un cuerpo de 2 kg que se movía inicialmente con una rapidez de 5 m/s hacia la derecha, en una superficie horizontal, se aplica una fuerza de 10 N inclinada  $30^\circ$  respecto a la horizontal. El desplazamiento mientras se ejerce la fuerza fue de 5 m, y el coeficiente de roce es 0.25. Calcular a) el trabajo realizado por cada fuerza sobre el cuerpo, b) la variación de energía cinética, c) la velocidad final del cuerpo. R: b) 24.5 J, c) 7 m/s.
- 5.6. Sobre un cuerpo de masa  $M$  que se movía inicialmente con una rapidez  $v_0$  hacia la derecha, en una superficie horizontal de coeficiente de roce  $\mu$ , se aplica una fuerza de magnitud  $F$  inclinada  $\alpha$  sobre la horizontal. El desplazamiento mientras se ejerce la fuerza fue  $D$ . Calcular: a) el trabajo realizado por  $F$  sobre el cuerpo, b) el trabajo realizado por la fuerza de roce, c) la variación de energía cinética, d) la rapidez final del cuerpo. Expresar los resultados en función de los valores conocidos  $M$ ,  $v_0$ ,  $\mu$ ,  $F$ ,  $\alpha$  y  $D$ . R: b)  $-\mu(Mg - F \sin \alpha)D$ , d)  $\sqrt{v_0^2 + (2D/M)[F \cos \alpha - \mu(Mg - F \sin \alpha)]}$ .
- 5.7. Una fuerza  $F$  paralela a un plano inclinado en  $37^\circ$ , se aplica sobre un bloque de masa 50 kg. El bloque se mueve con una rapidez constante de 10 m/s hacia arriba del plano, una distancia de 20 m. El coeficiente de roce cinético entre el bloque y el plano inclinado es 0.2. Calcular el trabajo efectuado sobre el bloque por las fuerzas a)  $F$ , b) roce y c) de gravedad. R: a) 7.5 kJ, b)  $-1.6$  kJ, c)  $-6$  kJ.
- 5.8. Un bloque de 5 kg. se pone en movimiento subiendo por un plano inclinado en un ángulo de  $30^\circ$  respecto a la horizontal, con una rapidez inicial de 8 m/s. El bloque alcanza el reposo después de recorrer 3 m a lo largo del plano inclinado áspero. Determine: a) el cambio en la energía cinética. b) el cambio en la energía potencial. c) la fuerza de roce sobre el bloque. d) el coeficiente de roce cinético. R: a)  $-160$  J, b) 73.5 J, c) 28 N, d) 0.7.

*Cap. 5 Trabajo y Energía.*

- 5.9. Algunos alumnos de Física, después de saber el resultado de su primer certamen, se premian subiendo varias veces al cerro del EULA. a) ¿Cuánto trabajo realizan en  $n$  subidas? b) Comparar la potencia cuando suben el cerro corriendo con la potencia cuando bajan lentamente. c) Un kilo de grasa entrega unos 10 kWh de energía, si se convierte grasa en energía con un rendimiento del 20%, ¿a un cerro de que altura tendrían que subir para bajar 2 kilos de ‘peso’? R: a)  $n(mgh)$ , c) si  $m=72$  kg, 20 km.
- 5.10. Por una sección unitaria del Salto del Laja fluye agua a razón de  $Q$  kg/s. Suponiendo que de la potencia generada por la caída del agua en el salto se aprovecha un 58%, ¿Cuántas ampollitas de 100 W se podrían encender con esa potencia? R: depende de valores estimados.
- 5.11. Se tiene un sistema formado por 5 esferitas de masa  $M$  unidas por cuerdas tensas de masa despreciable, separadas  $L$  entre sí, colocado inicialmente en forma horizontal. Calcular el trabajo necesario para poner una a una todas las esferitas en posición vertical. R:  $10 MgL$ .
- 5.12. Un bloque de masa  $m$  se suelta desde la parte superior de una pista lisa formada por un cuadrante cóncavo de circunferencia de radio  $R$  por la cual desliza. Cuando llega al extremo inferior choca con un resorte de constante  $k$  que se encuentra ubicado sobre una superficie horizontal. Calcular: a) la energía cinética del cuerpo justo antes de chocar con el resorte, b) la compresión máxima del resorte. R: a)  $mgR$ , b)  $\sqrt{2mgR/k}$ .
- 5.13. Una esfera de 0.5 kg desliza por un riel curvo a partir del reposo en el punto A de la figura 5.11. El tramo de A a B no tiene roce y el de B a C si tiene roce. a) Calcular la rapidez de la esfera en B. b) Si la esfera llega al reposo en C, calcular el trabajo por el roce en el tramo BC. R: a) 4.5 m/s, b) -2.5 J.
- 5.14. Un bloque de masa  $m$  comienza a moverse desde una altura  $H$  sobre un plano inclinado en  $30^\circ$ . Al llegar a la parte inferior del plano, el bloque se desliza por una superficie horizontal. Si el coeficiente de fricción en ambas superficies es  $\mu$ , calcular la distancia horizontal que deslizará el bloque antes de llegar al reposo.

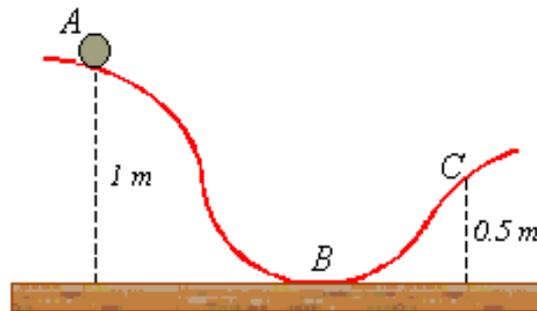


Figura 5.11 Problema 5.13.

- 5.15. Desde el extremo superior de un plano inclinado  $\alpha$  respecto a la horizontal, de coeficiente de roce de  $\mu$ , desliza desde el reposo, un bloque de masa  $M$ . El bloque se mueve una longitud  $L$  antes de comprimir a un resorte de constante  $K$  ubicado en la parte inferior del plano. a) Calcular, en función de los valores conocidos  $M$ ,  $L$ ,  $K$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$  y  $g$ , la rapidez del bloque justo antes de tocar al resorte. b) Deducir (no resolverla) la expresión que permite calcular la máxima compresión del resorte.
- 5.16. Desde la base de un plano inclinado  $30^\circ$  respecto a la horizontal, se lanza en subida un cuerpo de  $1 \text{ kg}$ . El cuerpo recorre  $0.5 \text{ m}$  y después comprime  $0.1 \text{ m}$  un resorte de constante  $100 \text{ N/m}$  ubicado en la parte superior del plano antes de detenerse. a) Si el plano es liso, determine la rapidez inicial del cuerpo. b) Si la rapidez con la que el cuerpo inicia la subida del plano fuera el doble de la calculada en a) y el coeficiente de roce entre el cuerpo y el plano fuera de  $0.2$ , ¿cuánto se comprimirá el resorte? c) ¿y si la rapidez se reduce a la mitad? R: a)  $2.64 \text{ m/s}$ , b)  $0.38 \text{ m}$ . c) no hay compresión.
- 5.17. Un bloque de  $1 \text{ kg}$  que cuelga por el costado de una mesa se conecta por una cuerda que pasa por una polea ideal a un resorte de constante  $100 \text{ N/m}$ , ubicado horizontalmente sobre la mesa, fijo en el otro extremo. Se sostiene inicialmente al bloque en reposo manteniendo al resorte sin estirar y luego se suelta. Calcular: a) el estiramiento máximo del resorte. b) la rapidez del bloque cuando el resorte se ha estirado la mitad del alargamiento máximo. R: a)  $0.2 \text{ m}$ , b)  $1 \text{ m/s}$ .
- 5.18. Una pelota describe una circunferencia vertical en el extremo de una cuerda. Si la energía total de la pelota permanece constante, demuestre

que la tensión en la cuerda en la parte más baja es mayor que la tensión en el punto más alto en seis veces el peso de la pelota.

- 5.19. A la masa de 1 kg de un péndulo de 1 m de longitud, se la impulsa con una rapidez inicial de 2 m/s en su posición más baja. Cuando la cuerda forma un ángulo de  $30^\circ$  con la vertical, calcular: a) la variación de energía gravitacional de la masa, b) la rapidez de la masa, c) la altura máxima alcanzada por la masa por sobre su posición más baja. R: a) 1.3J, b) 1.2m/s, c) 0.2m.
- 5.20. Tarzán de masa  $M$ , para impresionar a Jane, se balancea de una liana de longitud  $L$  (como un péndulo) alcanzando una rapidez  $v_o$  en su posición más baja, esto es cuando la liana se encuentra vertical. Luego, cuando la liana forma un ángulo  $\alpha$  con la vertical, calcular en función de los valores conocidos  $M$ ,  $L$ ,  $v_o$ ,  $\alpha$  y  $g$ : a) la rapidez de Tarzán, b) la tensión en la liana. c) altura máxima alcanzada por Tarzán desde su posición más baja.
- 5.21. La esfera de masa  $m$  de un péndulo de longitud  $L$  se mantiene inicialmente en posición vertical. Cuando sopla un viento con una fuerza constante  $F$  no conservativa, demuestre que si la esfera comienza a moverse desde el reposo, la altura máxima que alcanza es  $H = \frac{2L}{1 + (mg/F)^2}$ .
- 5.22. Una masa de peso  $P$  se amarra a un hilo de pesca que puede soportar hasta un peso de  $4P$ . Si la masa se suelta desde el reposo en la posición horizontal, calcular el ángulo respecto a la vertical al cual se rompe el hilo.
- 5.23. Se lanza una pelota en un ángulo  $\alpha$  respecto a la horizontal, desde una altura  $h$ , con una rapidez inicial  $v_o$ . Usar el método de la energía para calcular, cuando su altura es  $h/2$  la velocidad de la pelota.
- 5.24. Un proyectil de 1 kg se lanza desde la superficie con una rapidez inicial de 180 km/h en un ángulo de  $30^\circ$  sobre el suelo. Calcular a) el trabajo para que alcance su altura máxima, b) su energía cinética cuando se encuentra en su altura máxima, c) la potencia media entre la superficie y su altura máxima.

- 5.25. Un bloque de 0.5 kg. se mueve hacia la derecha sobre una superficie horizontal áspera y choca contra un resorte horizontal, de constante 100 N/m. La rapidez del bloque justo antes del choque es 10 m/s. Después que el resorte hace rebotar al bloque hacia la izquierda, su rapidez justo cuando deja el resorte es 5 m/s. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la superficie es de 0.4, determine: a) el trabajo realizado por la fricción mientras el bloque se encuentra en contacto con el resorte y b) la máxima compresión del resorte.
- 5.26. Se coloca un bloque de masa 0.25 kg sobre un resorte vertical de constante  $k=5000 \text{ N/m}$  y se empuja hacia abajo, comprimiendo el resorte una distancia de 0.1 m. Cuando el bloque se suelta, deja el resorte y continúa su camino hacia arriba. ¿A qué altura máxima por encima del punto de liberación llega el bloque? R: 10 m.
- 5.27. Se conectan dos masas por una cuerda ligera que pasa por una polea de masa despreciable, sin fricción, como se muestra en la figura 5.12. Una masa de 5 kg se libera desde el reposo, de una altura de 2.5 m sobre el suelo. Utilizando la ley de la conservación de la energía determinar: a) la velocidad final de la masa de 5 kg, b) la velocidad de la masa de 3 kg justo cuando la masa de 5 kg choca con el piso, c) la altura máxima a la cual se elevará la masa de 3 kg. R: b) 4.5 m/s, c) 5 m.
- 5.28. El coeficiente de fricción entre el objeto de 3 kg y la superficie de la mesa que se ve en la figura 5.13, es 0.4. ¿cuál es la rapidez de la masa de 5 kg que cuelga, cuando ha caído una distancia vertical de 1 m? R: 3.1 m/s.
- 5.29. Un bloque de 2 kg sobre un plano áspero inclinado en  $37^\circ$ , se conecta a un resorte ligero de constante 100 N/m (figura 5.14). El bloque se suelta del reposo cuando el resorte no está estirado y se mueve 20 cm hacia abajo del plano antes de detenerse. Calcular el coeficiente de roce. R: 0.12.
- 5.30. Suponga que el plano inclinado del sistema descrito en el problema anterior es liso. El bloque se libera a partir del reposo con el resorte inicialmente no estirado. a) ¿Cuánto se desplaza hacia abajo del plano antes de quedar en reposo? b) ¿cuál es la aceleración del bloque al llegar a

*Cap. 5 Trabajo y Energía.*

su punto más bajo? ¿Su aceleración es constante? c) Describa las transformaciones de energía que ocurren durante el descenso del bloque.

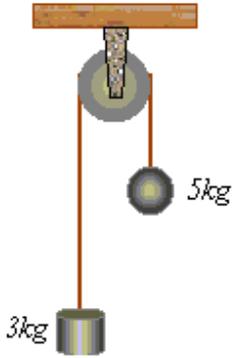


Figura 5.12.

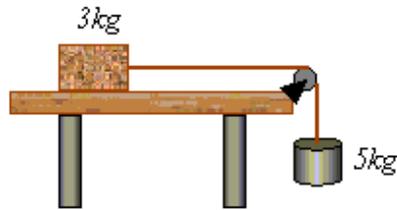


Figura 5.13. Problema 28

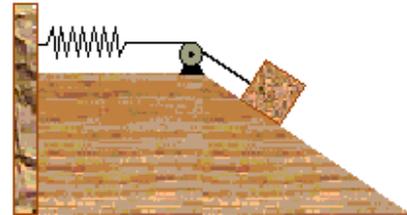


Figura 5.14. Problema 29

## CAPÍTULO 6. TORQUE Y EQUILIBRIO DE CUERPO RÍGIDO.

En general un cuerpo puede tener tres tipos distintos de movimiento simultáneamente. De traslación a lo largo de una trayectoria, de rotación mientras se está trasladando, en este caso la rotación puede ser sobre un eje que pase por el cuerpo, y si a la vez este eje esta girando en torno a un eje vertical, a la rotación del eje del cuerpo rotante se le llama movimiento de precesión (por ejemplo un trompo), y de vibración de cada parte del cuerpo mientras se traslada y gira. Por lo tanto el estudio del movimiento puede ser en general muy complejo, por esta razón se estudia cada movimiento en forma independiente.

Cuando un cuerpo está en rotación, cada punto tiene un movimiento distinto de otro punto del mismo cuerpo, aunque como un todo se esté moviendo de manera similar, por lo que ya no se puede representar por una partícula. Pero se puede representar como un objeto extendido formado por un gran número de partículas, cada una con su propia velocidad y aceleración. Al tratar la rotación del cuerpo, el análisis se simplifica si se considera como un objeto rígido y se debe tener en cuenta las dimensiones del cuerpo.

**Cuerpo rígido.** Se define como un cuerpo ideal cuyas partes (partículas que lo forman) tienen posiciones relativas fijas entre sí cuando se somete a fuerzas externas, es decir es no deformable. Con esta definición se elimina la posibilidad de que el objeto tenga movimiento de vibración. Este modelo de cuerpo rígido es muy útil en muchas situaciones en las cuales la deformación del objeto es despreciable.

El movimiento general de un cuerpo rígido es una combinación de movimiento de traslación y de rotación. Para hacer su descripción es conveniente estudiar en forma separada esos dos movimientos.

### 6.1 TORQUE DE UNA FUERZA.

Cuando se aplica una fuerza en algún punto de un cuerpo rígido, el cuerpo tiende a realizar un movimiento de rotación en torno a algún eje. La propiedad de la fuerza para hacer girar al cuerpo se mide con una magnitud física que llamamos **torque o momento** de la fuerza. Se prefiere usar el nombre torque y no momento, porque este último se emplea para referirnos al momento lineal,

al momento angular o al momento de inercia, que son todas magnitudes físicas diferentes para las cuales se usa el mismo término.

Analizaremos cualitativamente el efecto de rotación que una fuerza puede producir sobre un cuerpo rígido. Consideremos como cuerpo rígido a una regla fija en un punto  $O$  ubicado en un extremo de la regla, como se muestra en la figura 6.1, sobre el cual pueda tener una rotación, y describamos el efecto que alguna fuerza de la misma magnitud actuando en distintos puntos, produce sobre la regla fija en  $O$ . La fuerza  $\mathbf{F}_1$  aplicada en el punto  $a$  produce en torno a  $O$  una rotación en sentido antihorario, la fuerza  $\mathbf{F}_2$  aplicada en el punto  $b$  produce una rotación horaria y con mayor rapidez de rotación que en  $a$ , la fuerza  $\mathbf{F}_3$  aplicada en  $b$ , pero en la dirección de la línea de acción que pasa por  $O$ , no produce rotación (se puede decir que  $\mathbf{F}_3$  ‘empuja’ a la regla sobre  $O$ , pero no la mueve),  $\mathbf{F}_4$  que actúa inclinada en el punto  $b$  produce una rotación horaria, pero con menor rapidez de rotación que la que produce  $\mathbf{F}_2$ ;  $\mathbf{F}_5$  y  $\mathbf{F}_6$  aplicadas perpendiculares a la regla, saliendo y entrando en el plano de la figura respectivamente, no producen rotación. Por lo tanto existe una cantidad que produce la rotación del cuerpo rígido relacionada con la fuerza, que es lo que definiremos como el *torque* de la fuerza.

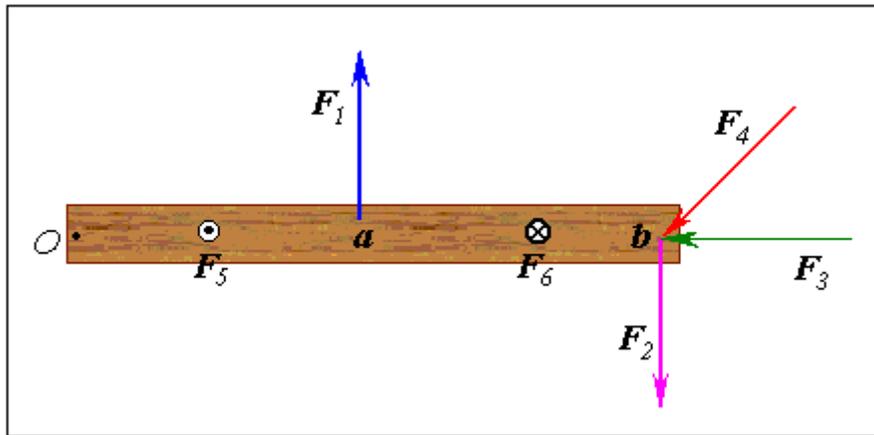


Figura 6.1

Se define el *torque*  $\tau$  de una fuerza  $\mathbf{F}$  que actúa sobre algún punto del cuerpo rígido, en una posición  $\mathbf{r}$  respecto de cualquier origen  $O$ , por el que puede pasar un eje sobre el cual se produce la rotación del cuerpo rígido, al producto vectorial entre la posición  $\mathbf{r}$  y la fuerza aplicada  $\mathbf{F}$ , por la siguiente expresión:

$$\vec{\rho} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (6.1)$$

El *torque* es una magnitud vectorial, si  $\alpha$  es el ángulo entre  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{F}$ , su valor numérico, por definición del producto vectorial, es:

$$\tau = r(F \sin \alpha) \quad (6.2)$$

su dirección es siempre perpendicular al plano de los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{F}$ , cuyo diagrama vectorial se muestra en la figura 6.2, su sentido esta dado por la regla del producto vectorial, la regla del sentido de avance del tornillo o la regla de la mano derecha. En la regla de la mano derecha los cuatro dedos de la mano derecha apuntan a lo largo de  $\mathbf{r}$  y luego se giran hacia  $\mathbf{F}$  a través del ángulo  $\alpha$ , la dirección del pulgar derecho estirado da la dirección del torque y en general de cualquier producto vectorial.

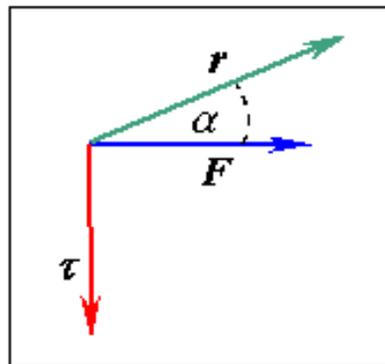


Figura 6.2

Por convención se considera el torque positivo (negativo) si la rotación que produciría la fuerza es en sentido antihorario (horario); esto se ilustra en la figura 6.3. La unidad de medida del torque en el SI es el  $Nm$  (igual que para trabajo, pero no se llama joule).

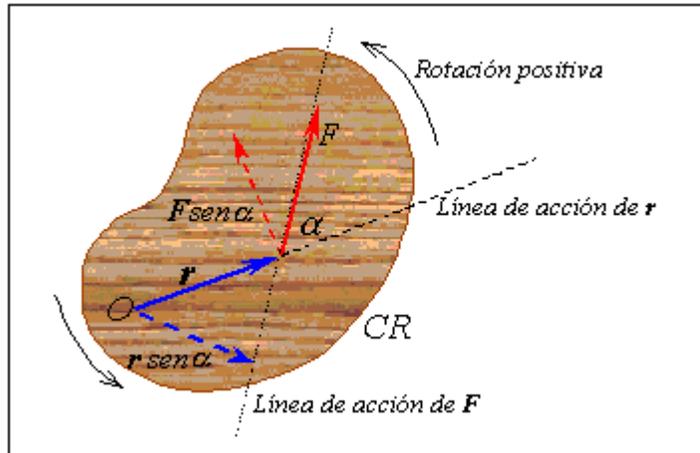


Figura 6.3

El torque de una fuerza depende de la magnitud y dirección de  $F$  y de su punto de aplicación respecto a un origen  $O$ . Si la fuerza  $F$  pasa por  $O$ ,  $r = 0$  y el torque es cero. Si  $\alpha = 0$  o  $180^\circ$ , es decir,  $F$  está sobre la línea de acción de  $r$ ,  $F \text{ sen } \alpha = 0$  y el torque es cero.  $F \text{ sen } \alpha$  es la componente de  $F$  perpendicular a  $r$ , sólo esta componente realiza torque, y se le puede llamar  $F_{\perp}$ . De la figura 6.3 también se ve que  $r_{\perp} = r \text{ sen } \alpha$  es la distancia perpendicular desde el eje de rotación a la línea de acción de la fuerza, a  $r_{\perp}$  se le llama *brazo de palanca* de  $F$ . Entonces, la magnitud del torque se puede escribir como:

$$\tau = r(F \text{ sen } \alpha) = F(r \text{ sen } \alpha) = rF_{\perp} = r_{\perp}F$$

**Ejemplo 6.1:** Calcular el torque respecto al origen, producido por una fuerza  $F = (4\hat{i} - 5\hat{j}) \text{ N}$ , que se aplica a un objeto en la posición  $r = (2\hat{i} + \hat{j}) \text{ m}$ .

**Solución:** Aplicando la definición de producto vectorial, se obtiene:

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\ell} = 0\hat{i} - 0\hat{j} - 14\hat{k} = -14\hat{k} \text{ Nm}$$

**Ejemplo 6.2:** Calcular el torque neto por los puntos A y por B en el sistema de la figura 6.4, donde  $F_1 = 10 \text{ N}$ ,  $F_2 = 5 \text{ N}$ ,  $F_3 = 15 \text{ N}$ ,  $a = 50 \text{ cm}$ ,  $b = 1 \text{ m}$ .

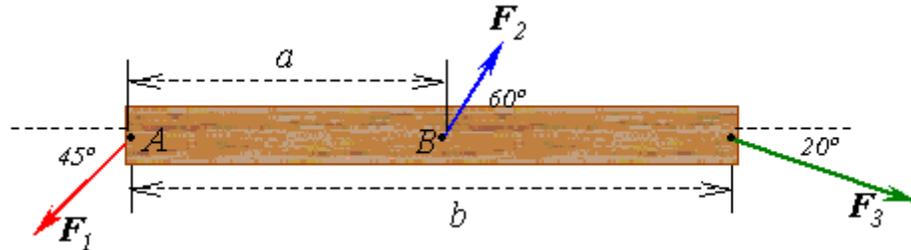


Figura 6.4 Ejemplo 6.2.

**Solución:** el torque neto es la suma de los torques realizados por cada fuerza. Los puntos A y B se consideran ejes de rotación en forma independiente, por supuesto no simultáneamente, por lo tanto los torque se calculan en forma separada en cada punto.

Para rotación en torno al punto A, considerando el sentido de la rotación que produce cada fuerza, lo que le da el signo al torque, se tiene:

$$\tau_A = F_1 r_1 \text{sen}45 + F_2 r_2 \text{sen}60 - F_3 r_3 \text{sen}20$$

los valores de las distancias son:  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = a = 0.5 \text{ m}$ ,  $r_3 = b = 1 \text{ m}$ .

$$\tau_A = (10)(0) \text{sen}45 + (5)(0.5) \text{sen}60 - (15)(1) \text{sen}20 = -3 \text{ Nm}$$

Para rotación en torno al punto B, considerando el sentido de la rotación:

$$\tau_B = + F_1 r_1 \text{sen}45 + F_2 r_2 \text{sen}60 - F_3 r_3 \text{sen}20$$

ahora los valores de las distancias son:  $r_1 = a = 0.5 \text{ m}$ ,  $r_2 = 0$ ,  $r_3 = b - a = 0.5 \text{ m}$ .

$$\tau_B = (10)(0.5) \text{sen}45 + (5)(0) \text{sen}60 - (15)(0.5) \text{sen}20 = 1 \text{ Nm}$$

## 6.2 EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO.

Por definición una partícula puede tener solo movimiento de traslación. Si la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero, la partícula está moviéndose con velocidad constante o está en reposo; en este último caso se dice que está en equilibrio estático. Pero el movimiento de un cuerpo rígido en general es de traslación y de rotación. En este caso, si la resultante tanto de las fuerzas como de los torques que actúan sobre el cuerpo rígido es cero, este no tendrá aceleración lineal ni aceleración angular, y si está en reposo, estará en *equilibrio estático*. La rama de la mecánica que estudia el equilibrio estático de los cuerpos se llama *estática*.

Para que un cuerpo rígido este en equilibrio estático se deben cumplir dos requisitos simultáneamente, llamados *condiciones de equilibrio*. La primera condición de equilibrio es la Primera Ley de Newton, que garantiza el equilibrio de traslación. La segunda condición de equilibrio, corresponde al equilibrio de rotación, se enuncia de la siguiente forma: “la suma vectorial de todos los torques externos que actúan sobre un cuerpo rígido alrededor de cualquier origen es cero”. Esto se traduce en las siguientes dos ecuaciones, consideradas como las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido:

$$1^{\text{a}} \text{ condición de equilibrio: } \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \Lambda + \vec{F}_n = 0 \quad (6.3)$$

$$2^{\text{a}} \text{ condición de equilibrio: } \sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \Lambda + \vec{\tau}_n = 0 \quad (6.4)$$

Como estas ecuaciones vectoriales son equivalentes a seis ecuaciones escalares, resulta un sistema final de ecuaciones con seis incógnitas, por lo que limitaremos el análisis a situaciones donde todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido, están en el plano  $xy$ , donde también obviamente se encuentra  $\mathbf{r}$ . Con esta restricción se tiene que tratar sólo con tres ecuaciones escalares, dos de la primera condición de equilibrio y una de la segunda, entonces el sistema de ecuaciones vectorial (6.3) y (6.4) se reduce a las siguientes ecuaciones escalares:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum \tau_o = 0$$

Cuando se tratan problemas con cuerpos rígidos se debe considerar la fuerza de gravedad o el peso del cuerpo, e incluir en los cálculos el torque producido por su peso. Para calcular el torque debido al peso, se puede considerar como si todo el peso estuviera concentrado en un solo punto, llamado *centro de gravedad*. Se han preguntado alguna vez ¿por qué no se cae la Torre de Pisa?, o ¿por qué es imposible tocarte los dedos de los pies sin caerte cuando estas de pie apoyado con los talones contra la pared? ¿Por qué cuando llevas una carga pesada con una mano, extiendes y levantas el otro brazo? Para responder a esto debemos definir los conceptos de centro de masa y de centro de gravedad y su aplicación al equilibrio estático.

### 6.2.1 Centro de gravedad.

Debido a que un cuerpo es una distribución continua de masa, en cada una de sus partes actúa la fuerza de gravedad. El *centro de gravedad* es la posición donde se puede considerar actuando la fuerza de gravedad neta, es el punto ubicado en la posición promedio donde se concentra el peso total del cuerpo. Para un objeto simétrico homogéneo, el centro de gravedad se encuentra en el centro geométrico, pero no para un objeto irregular.

### 6.2.2 Centro de masa.

Es la posición geométrica de un cuerpo rígido donde se puede considerar concentrada toda su masa, corresponde a la posición promedio de todas las partículas de masa que forman el cuerpo rígido. El centro de masa de cualquier objeto simétrico homogéneo, se ubica sobre un eje de simetría.

Cuando se estudia el movimiento de un cuerpo rígido se puede considerar la fuerza neta aplicada en el centro de masa y analizar el movimiento del centro de masa como si fuera una partícula. Cuando la fuerza es el peso, entonces se considera aplicado en el centro de gravedad. Para casi todos los cuerpos cerca de la superficie terrestre, el centro de masa es equivalente al centro de gravedad, ya que aquí la gravedad es prácticamente constante, esto es, si  $\mathbf{g}$  es cons-

tante en toda la masa, el centro de gravedad coincide con el centro de masa. Existen métodos de cálculo integral para calcular estas dos posiciones, pero aquí no las detallaremos.

Ahora se pueden responder las preguntas anteriores. Respecto a la Torre de Pisa, la respuesta a la pregunta de porque no se cae, es porque su centro de gravedad está geoméricamente dentro de su base, que se llama “*área de sustentación*”. Si la torre continúa inclinándose hasta que su centro de gravedad caiga fuera del área de sustentación, entonces se derrumbará. Pero se le han puesto apoyos en su base para evitar que continúe inclinándose. Las otras preguntas ahora las puedes responder tu.

Para aplicar las condiciones de equilibrio, es recomendable seguir las siguientes instrucciones, que corresponde a dibujar el DCL del cuerpo rígido:

- a) Aislar al cuerpo rígido del sistema con un límite imaginario.
- b) Dibujar los vectores que representen las fuerzas en el punto de aplicación donde las fuerzas efectivamente actúan.
- c) Elegir un sistema de coordenadas conveniente para descomponer las fuerzas, donde dibujar la componente perpendicular a la posición.
- d) Elegir un eje de rotación  $O$  adecuado en el cuerpo rígido, donde se anulen los torques de (algunas) fuerzas desconocidas.

**Ejemplo 6.3:** *Una barra uniforme de longitud  $L$  y peso  $P$  está articulada en  $A$  en una pared. Un alambre fijo en la pared a una distancia  $D$  sobre la articulación, sujeta a la barra por el extremo superior, como se muestra en la figura 6.5a. El alambre permanece horizontal cuando se cuelga un cuerpo de peso  $p$  en el extremo superior de la barra. Calcular la tensión del alambre y la fuerza de reacción en la articulación de la barra.*

**Solución:** se elige como eje de rotación la articulación de la barra en la pared, en el punto  $A$ , se identifican las fuerzas que actúan sobre la barra, se dibuja el DCL de la barra (figura 6.5b) y se aplican las condiciones de equilibrio.

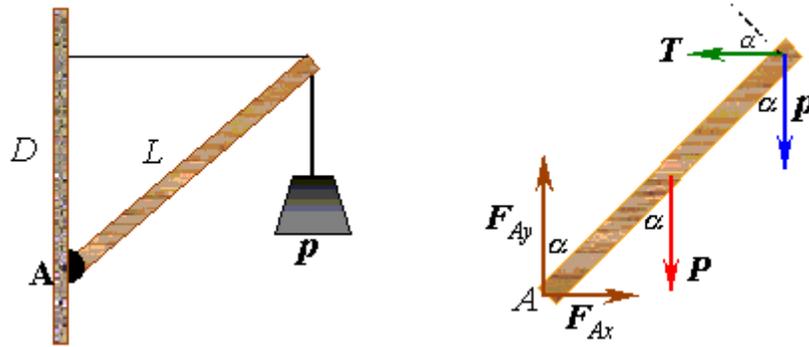


Figura 6.5 Ejemplo 6.3 a) izquierda, b) derecha.

1ª condición de equilibrio:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0 \text{ y } \sum F_y = 0$$

$$\text{eje } x: F_{Ax} - T = 0 \quad (1)$$

$$\text{eje } y: F_{Ay} - P - p = 0 \quad (2)$$

2ª condición de equilibrio:

$$\sum \tau_A = 0 \Rightarrow \tau_T + \tau_p + \tau_P = 0$$

$$+T \cos \alpha L - p \operatorname{sen} \alpha L - P \operatorname{sen} \alpha (L/2) = 0 \quad (3)$$

De la geometría de la figura se obtienen  $\operatorname{sen} \alpha$  y  $\cos \alpha$  en términos de los valores conocidos  $D$  y  $L$ :

$$\cos \alpha = \frac{D}{L}, \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{L^2 - D^2}}{L}$$

que se reemplazan en (3), luego se despeja  $T$ :

$$T = \frac{(p + P/2)\sqrt{L^2 - D^2}}{D}$$

Ahora se calculan  $F_{Ax}$  y  $F_{Ay}$  de las ecuaciones (1) y (2).

$$\text{De (1): } F_{Ax} = T = \frac{(p + P/2)\sqrt{L^2 - D^2}}{D}$$

$$\text{De (2): } F_{Ay} = P + p$$

**Ejercicio:** calcular el vector fuerza en A, su magnitud y dirección.

**Ejemplo 6.4.** En el sistema de la figura 6.6a, una fuerza horizontal  $F$ , cuya línea de acción pasa por el centro de un tambor de radio  $R$  y peso  $P$ , se aplica sobre el tambor, para hacerlo subir por un escalón de alto  $R/2$ . Hacer las suposiciones necesarias para calcular el valor de la: a) fuerza  $F$ , b) fuerza del borde del escalón en A, c) dirección de la fuerza en A.

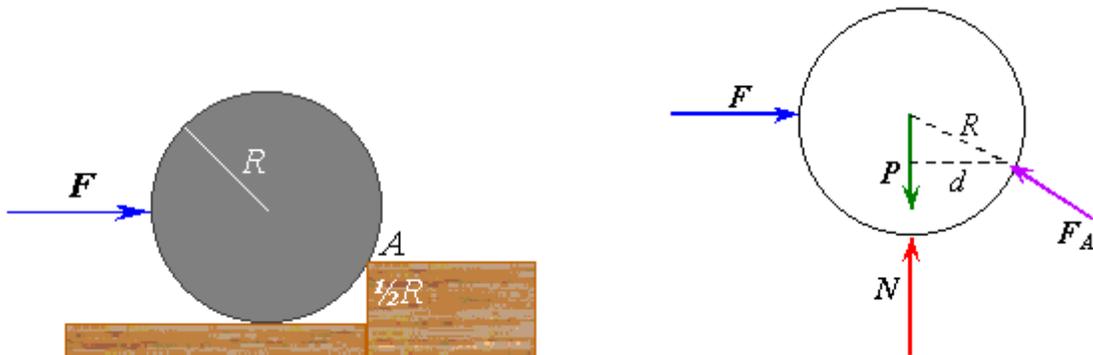


Figura 6.6 Ejemplo 6.4 a) izquierda, b) derecha.

**Solución:** Se conocen sólo el peso  $P$  y el radio del cilindro  $R$ . Hay que calcular la fuerza aplicada  $F$  y la fuerza del borde del escalón en A,  $F_A$ .

Las condiciones de equilibrio son:

$$1^{\text{a}} \text{ condición } \sum \vec{F} = 0 \text{ y } 2^{\text{a}} \text{ condición } \sum \tau_A = 0$$

Se hace el DCL (figura 6.6b), se elige como eje de rotación el punto A, y al aplicar las condiciones de equilibrio se obtiene:

$$\text{eje } x: F - F_{Ax} = 0 \quad (1)$$

$$\text{eje } y: N - P + F_{Ay} = 0 \quad (2)$$

$$\sum \tau_A : Pd - Nd - F(R/2) = 0 \quad (3)$$

donde  $d$  es la distancia perpendicular, o brazo de palanca, desde A hasta las fuerzas peso  $P$  y normal  $N$ , y el brazo de palanca de  $F$  es  $R/2$ . De la geometría de la figura, se calcula  $d$ :

$$R^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + d^2 \Rightarrow d^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3}{4}R^2$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}R \Rightarrow 2d = \sqrt{3}R$$

De (3) se obtiene el valor de la fuerza aplicada:

$$(P - N)d = \frac{FR}{2} \Rightarrow (P - N)\frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{FR}{2} \Rightarrow$$

$$F = \sqrt{3}(P - N)$$

$$\text{De (1): } F_{Ax} = \sqrt{3}(P - N)$$

$$\text{De (2): } F_{Ay} = P - N$$

El vector fuerza es:

$$\vec{F}_A = F_{Ax}\hat{i} + F_{Ay}\hat{j} = \sqrt{3}(P - N)\hat{i} + (P - N)\hat{j}$$

Su magnitud:  $|\vec{F}_A^{\mathcal{O}}| = \sqrt{3(P - N)^2 + (P - N)^2} \Rightarrow |\vec{F}_A^{\mathcal{O}}| = 2(P - N)$

Dirección de  $F_A$ :  $\tan \alpha = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \frac{(P - N)}{\sqrt{3}(P - N)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

Notar que no se conoce  $N$ , se puede suponer que  $N = 0$  cuando  $F$  es la fuerza mínima para hacer subir al tambor.

### 6.3 APLICACIONES DEL TORQUE AL CUERPO HUMANO.

La técnica para calcular el valor de las fuerzas sobre cuerpos en equilibrio, puede ser aplicada al cuerpo humano, donde existen fuerzas en músculos, huesos y articulaciones, que permiten las diferentes posturas y movimientos.

El torque producido por la fuerza de gravedad juega un papel importante en el equilibrio de un cuerpo. La fuerza de gravedad produce un torque cero en torno al centro de gravedad (c.g.) El c.g. de una persona en posición firme está sobre una línea vertical que toca el suelo a 3 cm delante de los tobillos (figura 6.7a). Si se inclina para tocar la punta de los pies, su c.g. tiende a moverse hacia delante, más allá del área de contacto, perdiéndose el equilibrio. Para evitar esto, sus piernas y nalgas se mueven hacia atrás, con lo cual el cuerpo vuelve a estar en equilibrio (figura 6.7b). Los centros de gravedad de la mayoría de las partes del cuerpo no están encima de las articulaciones de apoyo y hacen falta fuerzas musculares para mantener el equilibrio. Es así que para mantener el equilibrio y evitar que el cuerpo vuelque hacia adelante teniendo como eje la articulación del tobillo, se necesita una fuerza aplicada por el músculo del tendón de Aquiles que va unido al tobillo (figura 6.7c).

El problema de mantener el equilibrio cuando caminamos es aún mayor. Al levantar un pie del suelo, el c.g. del cuerpo tiene que desplazarse por encima del pie apoyado. Esto exige que todo el cuerpo se mueva lateralmente. Es así que al caminar el cuerpo se mueve de un lado a otro para mantener el c.g. sobre su área de apoyo, en continuo movimiento. Una buena estabilidad se obtiene teniendo el c.g. de un objeto en una posición debajo de su área de sustentación. Para un cuadrúpedo, el área de apoyo es el área que hay entre las patas, lo cual hace que el animal tenga gran estabilidad. Si el c.g. está realmente debajo del área de apoyo se logra una gran estabilidad. A lo largo de la evolución, los animales han desarrollado posturas cada vez más inestables. La ines-

tabilidad permite a los animales moverse más rápidamente, pero requiere un control neuromuscular complejo para mantener el equilibrio. La posición humana es tan mecánicamente inestable que a un niño le cuesta más de un año desarrollar el control neuromuscular suficiente para mantenerse en pie sin ayuda.

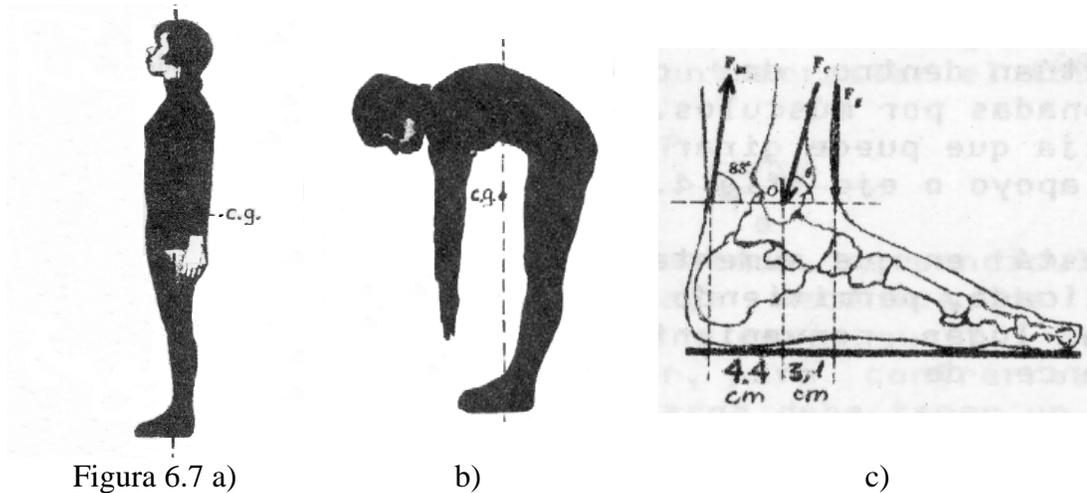


Figura 6.7 a)

b)

c)

La columna vertebral humana consta de 24 vértebras separadas por discos impregnados de un fluido. Cuando una persona se agacha para recoger aunque sea un objeto liviano, se produce una gran fuerza sobre el disco sacro lumbar que separa la última vértebra del sacro, el hueso que sostiene la columna vertebral. Si este disco se debilita puede deformarse o romperse y ejercer presión sobre los nervios próximos produciendo grandes dolores.

Para comprender por qué esta fuerza es tan grande podemos usar un modelo que trata la columna como una barra con pivote que corresponde al sacro (figura 6.8a). Los diversos músculos de la espalda los representaremos como un solo músculo que produce una fuerza  $\vec{T}$ . Si la espalda está horizontal, el ángulo  $\alpha$  que forma respecto a la columna es aproximadamente  $12^\circ$ .  $\vec{P}$  Representa el peso del torso, cabeza y brazos, que corresponde aproximadamente al 65% del peso total del cuerpo. Obsérvese que como el ángulo  $\alpha$  es pequeño, la línea de acción de  $\vec{T}$  pasa cerca del pivote (sacro), por lo cual su distancia perpendicular es pequeña. El peso  $\vec{P}$  actúa en ángulo recto respecto a la columna y su distancia perpendicular es mucho mayor. Por lo tanto, para que se equilibren los torques, la fuerza muscular  $\vec{T}$  debe ser mucho mayor que el peso  $\vec{P}$ .

Como  $\vec{T}$  es grande, también lo es su componente horizontal, por lo tanto la fuerza  $\vec{R}$  debida al sacro debe tener una componente de igual valor y sentido opuesto. La fuerza debida al sacro también debe ser mayor que el peso  $\vec{P}$ .

**Ejemplo 6.5.** Realicemos los cálculos para una persona que pesa 700 N (masa de 70kg). El valor de  $P$  es 65% de 700 = 455N. Se supone que  $P$  y  $T$  actúan a una distancia del sacro de  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{2}{3}$  del largo  $l$  de la columna (figura 6.8a). Para determinar el valor de  $T$  y  $R$  se aplican las condiciones de equilibrio.

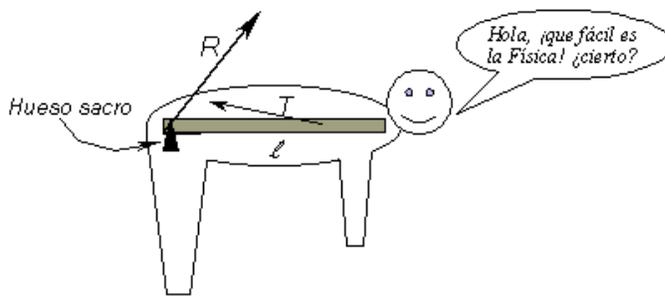
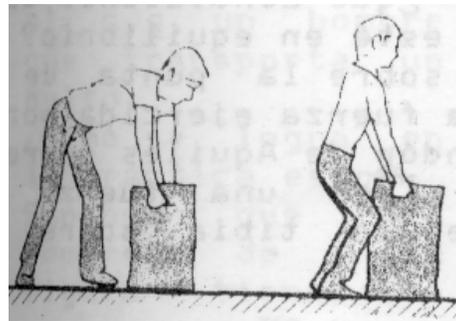


Figura 6.8 a).



b)

2ª condición de equilibrio, considerando el eje  $O$  en el hueso sacro:

$$\sum \tau_O = 0 \Rightarrow \tau_T + \tau_P = 0 \Rightarrow T \text{sen} 12 \frac{2}{3} L - P \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow T = \frac{3P}{4 \times \text{sen} 12}$$

$$T = \frac{3 \times 455}{4 \times \text{sen} 12} = 1641 \text{N}$$

1ª condición de equilibrio:

$$\sum F_x = 0: R_x - T_x = 0 \Rightarrow R_x = T_x \Rightarrow R_x = T \cos 12 = 1641 \cos 12 = 1605 \text{N}$$

$$\sum F_y = 0: R_y + T_y - P = 0 \Rightarrow R_y = P - T_y = 455 - 1641 \text{sen} 12 = 114 \text{N}$$

$$\text{Luego: } R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{1605^2 + 114^2} = 1610 \text{N}$$

Tales fuerzas en los músculos y en el disco son potencialmente peligrosas, pues el valor de dichas fuerzas son grandes aún sin levantar un cuerpo. Si se flexionan las rodillas manteniendo la espalda vertical, los centros de gravedad de todos los pesos están aproximadamente en la vertical del sacro, por lo tanto sus torques respecto al sacro son pequeños y los músculos no deben realizar gran fuerza (figura 6.8b). La fuerza sobre el disco respectivo es entonces aproximadamente, igual al peso que sostiene. El diagrama de la figura 6.9 ilustra los valores de presión (fuerza) sobre el tercer disco lumbar, en atmósferas, si la persona está de pie (A), de pie y sostiene 20kg (B), levantando correctamente un bulto de 20kg (C), levantando incorrectamente un bulto de 20kg (D). Notar como aumenta la fuerza 'lumbar' en los distintos casos.

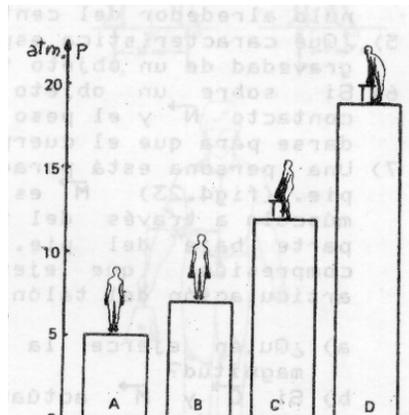


Figura 6.9

**PROBLEMAS.**

- 6.1 a) Estimar las longitudes y masas de los punteros del reloj del Campanil.  
 b) Calcular el torque en torno al eje de rotación de los punteros debido a su peso, cuando la hora marca las: 14:00, 16:45, 18:00, otra a su gusto.
- 6.2 Hacer todas las suposiciones necesarias para estimar el torque que deben ejercer las raíces de un pino radiata *D. Don*, para evitar que el pino se vuelque, cuando en un temporal de invierno se inclina por efecto de la fuerza ejercida por el viento. ¿Y si la planta es un rosál?
- 6.3 Una fuerza  $\mathbf{F} = (2i + 3j) \text{ N}$  se aplica a un objeto que está articulado alrededor de un eje fijo alineado con el eje  $z$ . Si la fuerza se aplica en la posición  $\mathbf{r} = (4i + 5j) \text{ m}$ , calcular: a) el vector torque neto en torno a  $z$ , b) la magnitud del torque neto y c) su dirección.
- 6.4 La figura 6.10 muestra las fuerzas  $F_1=40 \text{ N}$ ,  $F_2=30 \text{ N}$ ,  $F_3=50 \text{ N}$ ,  $F_4=60 \text{ N}$  aplicadas a un cuerpo rígido que puede girar en torno de un eje que pasa por  $O$ . Calcular el torque resultante. R: -10.8 Nm.
- 6.5 Calcular el torque neto sobre la rueda producido por las fuerzas  $F_1=8 \text{ N}$ ,  $F_2=10 \text{ N}$ ,  $F_3=15 \text{ N}$ , que se indican en la figura 6.11, alrededor de un eje que pase por su centro, si  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 20 \text{ cm}$  y  $\alpha = 30^\circ$ .

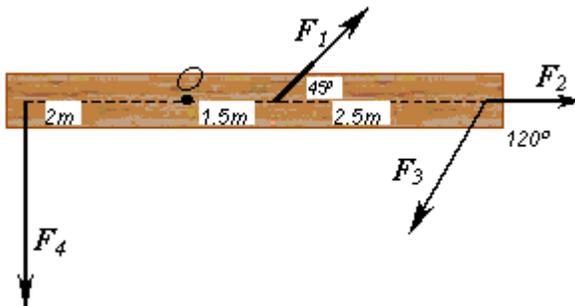


Figura 6.10 Problema 6.4

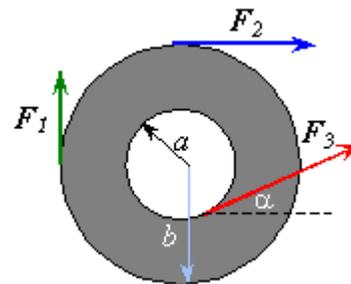


Figura 6.11 Problema 6.5

- 6.6 Dos fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  actúan a lo largo de los lados de un triángulo equilátero de lado  $a$ , como se muestra en la figura 6.12. Encuentre una tercera fuerza  $F_3$  que aplicada en el vértice a lo largo del lado produzca un torque neto en torno a  $O$  igual a cero. R:  $F_3 = F_1 + F_2$  (magnitudes).

- 6.7 Una viga uniforme de peso  $P$  y longitud  $L$ , que se apoya en los puntos  $O$  y  $Q$  soporta dos pesos,  $P_1$  sobre  $O$  y  $P_2$  a la derecha de  $Q$ , como se muestra en la figura 6.13. Calcular el valor de  $x$  para el cual la viga quedará equilibrada en el punto de apoyo  $Q$  de tal manera que la fuerza en  $O$  sea cero. R:  $[(P_1 + P)D + \frac{1}{2}LP_1]/P_2$ .

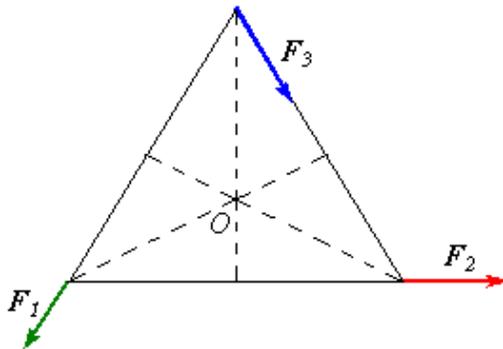


Figura 6.12 Problema 6.6

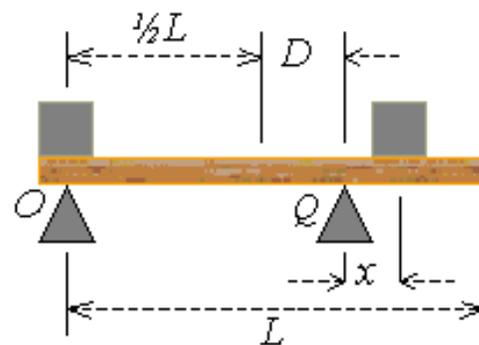


Figura 6.13 Problemas 6.7 y 6.8

- 6.8 Para el sistema de la figura 6.13, calcular el valor de  $x$  tal que la fuerza normal en  $O$  sea la mitad de la fuerza normal en  $Q$ . a) Desprecie el peso de la viga. b) Considere el peso  $P$  de la viga.
- 6.9 Un tablón uniforme de  $6m$  de longitud y  $30kg$  de masa, descansa horizontalmente sobre un andamio. Si  $1.5m$  del tablón sobresale por un extremo del andamio. ¿Cuánto puede caminar un pintor de brocha gorda de  $70kg$  por la parte sobresaliente antes de que el tablón se vuelque? R:  $0.64 m$ .
- 6.10 Un tablón uniforme de  $5 m$  de largo y  $150 kg$  está articulado en A. En B esta sostenido por una cuerda ubicada a  $1.5 m$  del extremo inferior del tablón, formando un ángulo de  $90^\circ$  con el tablón, como se ve en la figura 6.14. Calcular la tensión de la cuerda y la fuerza de la articulación en A. R:  $643 N, -514\hat{i} + 1114j N$ .
- 6.11 El tablón uniforme de la figura 6.15, de  $5 m$  de largo y peso  $P$  está articulado en A e inclinado  $\alpha$  grados con la horizontal. En el extremo opuesto está sostenido por una cuerda que forma un ángulo de  $90^\circ$  con el

tablón, sosteniendo un peso  $\frac{1}{2}P$ . Calcular: a) la tensión de la cuerda, b) la fuerza en A. R: a)  $0.6 P$ , b)  $(0.47\hat{i} + 1.14\hat{j})P$ .

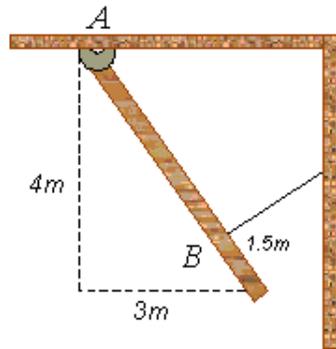


Figura 6.14 Problema 6.10

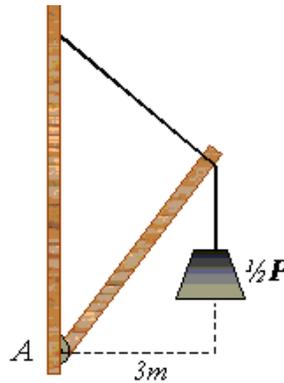


Figura 6.15 Problema 6.11

- 6.12 Una escalera homogénea de masa  $M$  descansa contra una pared vertical sin fricción, en un ángulo de  $\alpha$  con la vertical. El extremo inferior se apoya sobre un piso horizontal con un coeficiente de fricción  $\mu$ . Un pintor de brocha gorda de masa  $2M$  intenta subir la escalera. Calcular la fracción de la longitud  $L$  de la escalera subirá el pintor antes de que la escalera empiece a resbalar. R:  $(1.5\mu \operatorname{ctg} \alpha - 0.25)L$ .
- 6.13 Un tablón uniforme de  $5m$  de longitud y  $50N$  de peso, apernado en A es sostenido por una cuerda en su extremo superior, como se muestra en la figura 6.16. Una carga de  $100 N$  cuelga del tablón en un punto a una distancia  $x$  de A. Si la resistencia de ruptura de la cuerda es  $50 N$ , calcular el valor de  $x$ . Considere  $\alpha = 30^\circ$  y  $\beta = 60^\circ$ . R:  $1.29 m$ .
- 6.14 Un poste uniforme de  $1200 N$  se sostiene por un cable, como en la figura 6.17. El poste se sujeta con un perno en A la parte inferior y en la parte superior se cuelga un cuerpo de  $2000 N$ . Encuentre la tensión en el cable de soporte y las componentes de la fuerza de reacción en el perno en A. R:  $1465 N, (1328\hat{i} + 2581\hat{j}) N$ .
- 6.15 Una fuerza  $F$ , cuya línea de acción pasa por el borde superior de un tambor de radio  $R$  y peso  $P$ , se aplica sobre el tambor, para hacerlo subir por un escalón de alto  $\frac{1}{2}R$  (figura 6.18). Calcular: a) la fuerza  $F$ , b) la fuerza del vértice del escalón en A, c) la dirección de la fuerza en A. R: a)  $(\sqrt{3}/3)P$ , b)  $(\sqrt{10}/9)P$ , c)  $\tan \alpha = \sqrt{3}$ .

- 6.16 Un cilindro de masa  $M$  y radio  $r$  descansa sobre un plano inclinado sujeto por una cuerda tangente al cilindro y paralela a la superficie del plano. El plano esta inclinado en un ángulo  $\alpha$  con la horizontal, como se muestra en la figura 6.19. Calcular: a) el valor mínimo del coeficiente de fricción estático, en términos de  $\alpha$ , para que el cilindro no resbale hacia abajo del plano inclinado, b) la tensión en la cuerda en términos de  $M$ ,  $g$  y  $\alpha$ . R: a)  $0.5 \tan \alpha$ , b)  $0.5 Mg \operatorname{sen} \alpha$ .

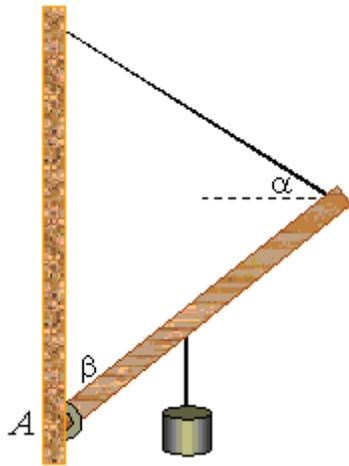


Figura 6.16 Problema 6.13

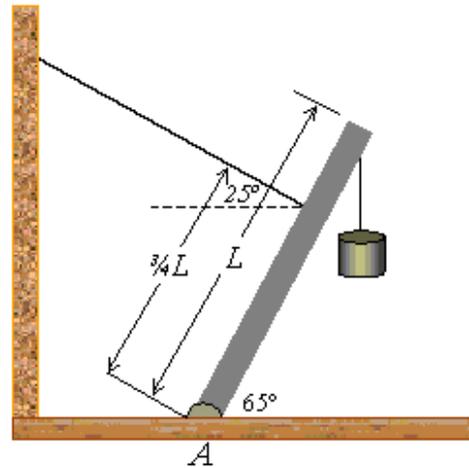


Figura 6.17 Problema 6.14

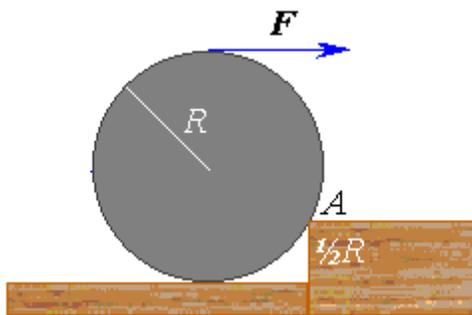


Figura 6.18 Problema 6.15

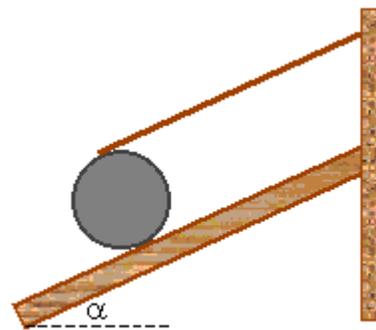


Figura 6.19 Problema 6.16

- 6.17 El antebrazo de la figura 6.20, está con respecto al brazo a  $90^\circ$  y sostiene en la mano un cuerpo de peso 70 N. Despreciando al peso del antebrazo: ¿Cuál es el torque producido por el peso de 70N alrededor de la articulación del codo (punto O)? ¿Cuál es el torque alrededor de O producido

por la fuerza  $F_m$  ejercida sobre el antebrazo por el bíceps? ¿Cuál es la magnitud de  $F_m$ ?

- 6.18 Repetir el problema anterior suponiendo que el antebrazo y la mano juntos pesan 35N y que su centro de gravedad está a 15 cm de O.
- 6.19 Con el antebrazo en posición horizontal, tal como aparece en la figura 6.21, la mano ejerce una fuerza de 90N sobre la balanza. Hallar las magnitudes de las fuerzas  $F_m$  y  $F_c$  que ejercen sobre el antebrazo el tríceps y el húmero, (desprecie el peso del antebrazo).
- 6.20 Repetir el problema anterior suponiendo que el antebrazo y la mano juntos pesan 25N y que su centro de gravedad está a 18 cm de O.

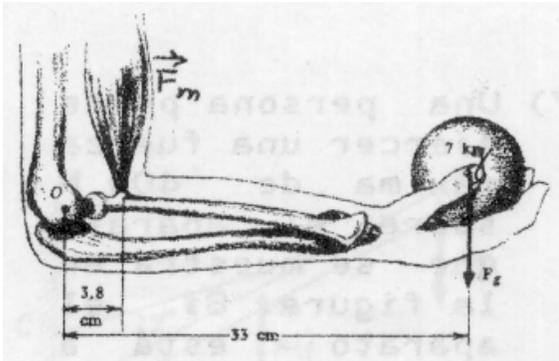


Figura 6.20 Problemas 6.17 y 6.18

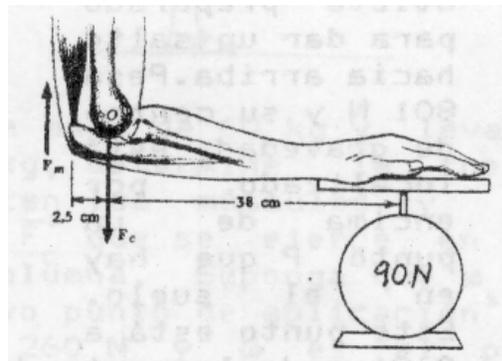


Figura 6.21 Problemas 6.19 y 6.20

- 6.21 Una persona puede ejercer una fuerza máxima de 400 N sobre el aparato que se muestra en la figura 6.22. Si el aparato está a 28 cm del codo, y el bíceps está unido a 5 cm del codo, ¿Cuáles son las magnitudes de las fuerzas ejercidas por: el bíceps, el húmero.
- 6.22 La figura 6.23 nos muestra un atleta preparado para hacer un tiburón. Pesa 750N y su centro de gravedad está localizado por encima de un punto P que hay en el suelo. Este punto está a 0,9 m de la punta de sus pies y a 0,6m de sus hombros, ¿Cuáles son las fuerzas ejercidas por el suelo sobre las manos y pies del atleta?
- 6.23 En el ejercicio que aparece en la figura 6.24 el torque alrededor de la rodilla ejercido por la pesa sujeta al tobillo, varía con la elevación de la

pierna. Calcular el torque para las cuatro posiciones que aparecen en la figura.

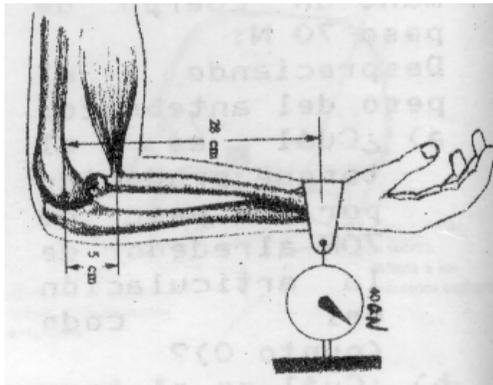


Figura 6.22 Problema 6.21

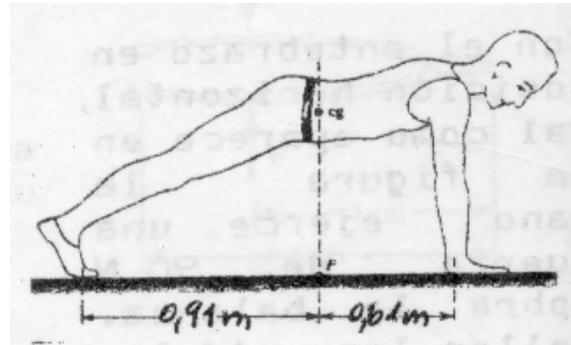


Figura 6.23 Problema 6.22.

6.24 Cuando una persona está agachada, el músculo de la espalda unido a un punto a dos tercios del sacro (eje) en un ángulo de  $12^\circ$ , mantiene la espina dorsal, de largo  $\lambda$ , en posición horizontal (figura 6.8). Si la parte superior del cuerpo pesa  $450\text{ N}$ , calcular la tensión  $T$  del músculo de la espalda y la fuerza  $R$  de la espina en el sacro, cuando la persona levanta con los brazos un peso de  $200\text{ N}$ . R:  $3066\text{ N}$ .

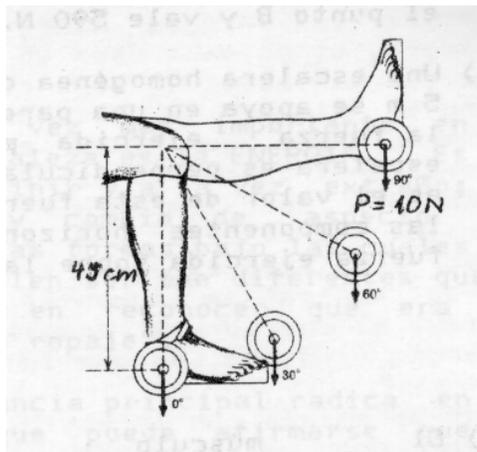


Figura 6.24 Problema 6.23

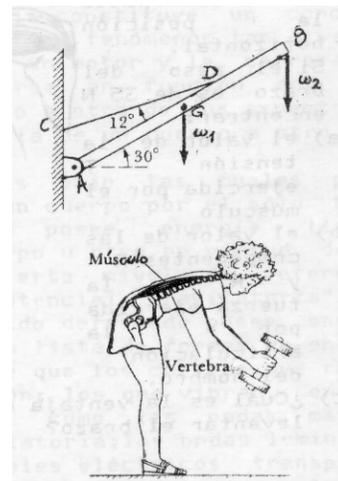


Figura 6.25 Problema 6.25

6.25 Considere el modelo mecánico de la figura 6.25 en el cual la barra AB representa la columna vertebral. El cable CD representa al grupo de músculos de la espalda que mantienen a la persona en la posición incli-

nada. El punto A representa el punto final de apoyo de la columna. Si la persona tiene una masa de 60 Kg, y levanta un cuerpo de masa 25 Kg, determine la fuerza de tensión  $T$  que ejercen los músculos y la fuerza de compresión  $F_c$  que se ejerce en el punto de unión de la columna. Suponga que  $w_1$  es el peso del tronco, cuyo punto de aplicación es el punto G y vale 260 N y  $w_2$  es el peso combinado de cabeza, brazo y objeto, actúa en el punto B y vale 590 N.

- 6.26 El músculo deltoides levanta el brazo hasta la posición horizontal, figura 6.26. Si el peso del brazo es 35N, calcular: el valor de la tensión T ejercida por el músculo, el valor de las componentes de R de la fuerza ejercida por la articulación del hombro.

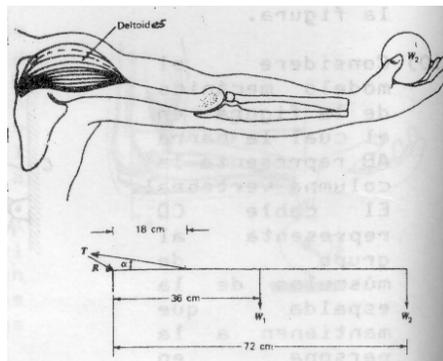


Figura 6.26 Problema 6.26.

## CAPITULO 7. MOMENTO LINEAL Y CHOQUES.

¿Cómo puede un karateca partir un montón de ladrillos?, ¿por qué un porrazo es mas doloroso sobre el cemento que sobre el pasto?, ¿por qué cuando se salta desde un lugar alto es conveniente flexionar las rodillas al llegar al suelo?. Para entender y responder estas preguntas hay que recordar el concepto de inercia. Todos sabemos que es más fácil detener una pelota pequeña que una grande que se mueva con la misma velocidad ¿por qué?. Estas acciones están relacionadas con la inercia (masa) de los objetos en movimiento, y esta idea de inercia en movimiento esta incluida en el concepto de **momento**, término que se refiere a los objetos que se mueven.

### 7.1 MOMENTO LINEAL.

El concepto de **momento lineal** se usa para denotar la inercia en movimiento. El momento lineal  $\mathbf{p}$  de una partícula de masa  $m$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$ , se define como el producto de la masa de un objeto por su velocidad:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (7.1)$$

Para una partícula en movimiento en el espacio, las componentes del momento lineal en cada dirección  $x$ ,  $y$  y  $z$  son:

$$p_x = mv_x, p_y = mv_y, p_z = mv_z$$

El momento lineal (muchas veces mencionado solo como *momento*) es una magnitud física vectorial porque la velocidad es un vector, su dirección es a lo largo de  $\mathbf{v}$ , su unidad de medida en el SI es  $kg \ m/s$ . De esta definición se observa que el momento lineal de un cuerpo en movimiento puede ser grande si su masa es grande, como en el caso de la pelota más grande mencionada en el primer párrafo, si su velocidad es grande, o ambas lo son. Si un cuerpo está en

reposo, su momento lineal es cero. Puesto que el movimiento es producido por fuerzas, si la masa es constante, se puede relacionar el momento lineal con la fuerza  $\mathbf{F}$  que actúa sobre la partícula usando la segunda Ley de Newton:

$$\overset{\circ}{F} = m\overset{\circ}{a} = m \frac{d\overset{\circ}{v}}{dt} = \frac{d(m\overset{\circ}{v})}{dt} \Rightarrow$$

$$\overset{\circ}{F} = \frac{d\overset{\circ}{p}}{dt}$$

Esta última ecuación dice que la fuerza neta sobre una partícula es igual a la rapidez de cambio del momento lineal de la partícula. Para el caso particular en que la fuerza neta es cero, esto es para una partícula en equilibrio de traslación, el momento lineal resultante de la partícula debe ser constante, ya que:

$$\overset{\circ}{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\overset{\circ}{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \overset{\circ}{p} = cte.$$

## 7.2 IMPULSO.

Si cambia el momento lineal de una partícula, su velocidad varía, y si la masa es constante, como casi siempre es el caso, entonces hay aceleración, que necesariamente debe ser producida por una fuerza. Mientras mayor sea la fuerza, mayor el cambio de velocidad, y por lo tanto mayor el cambio de momento lineal. Pero hay otro factor importante a considerar: el tiempo durante el cual se ejerce la fuerza. El cambio de momento lineal es mayor si se aplica la misma fuerza durante un intervalo de tiempo largo que durante un intervalo de tiempo corto. Estas afirmaciones se pueden demostrar escribiendo la ecuación de momento lineal de la siguiente forma:

$$d\overset{\circ}{p} = \overset{\circ}{F}dt$$

Esta ecuación se puede integrar para obtener la variación de momento  $\Delta \mathbf{p}$  de la partícula. Si el momento cambia desde un valor inicial  $\mathbf{p}_i$  en el instante inicial  $t_i$  a un valor final  $\mathbf{p}_f$  en el instante final  $t_f$ , integrando la ecuación anterior, se obtiene:

$$\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \Delta \mathbf{p} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt$$

La cantidad integral de la fuerza por el intervalo de tiempo, se define como el **impulso  $\mathbf{I}$**  de la fuerza  $\mathbf{F}$  en el intervalo de tiempo  $dt$ , es decir el impulso  $\mathbf{I}$  es un vector definido por la expresión:

$$\mathbf{I} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{p} \quad (7.2)$$

Cuanto mayor sea el impulso, mayor será el cambio de momento de la partícula. Esta expresión se llama el teorema del impulso y del momento, que se expresa como: **el impulso de la fuerza neta es igual al cambio de momento lineal de la partícula**. Este teorema es equivalente a la segunda Ley de Newton. El impulso es una magnitud vectorial cuyo valor numérico, por definición de integral, es igual al área bajo la curva  $F$  vs  $t$ , como se ilustra en la figura 1, tiene la misma unidad de medida que el momento lineal. En general la fuerza puede variar en forma complicada con el tiempo (figura 7.1), por lo que es conveniente definir una fuerza promedio en el tiempo,  $\mathbf{F}_m$ , que se puede considerar como una fuerza constante que dará el mismo impulso a la partícula que la fuerza  $\mathbf{F}$  actuando durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$ . De nuestros conocimientos de estadística, sabemos que el valor medio de alguna variable, se define como:

$$\bar{F}_m = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} F dt$$

Despejando la integral y reemplazando en la definición del impulso se puede escribir:

$$\boxed{I = F_m \Delta t = \Delta p} \quad (7.3)$$

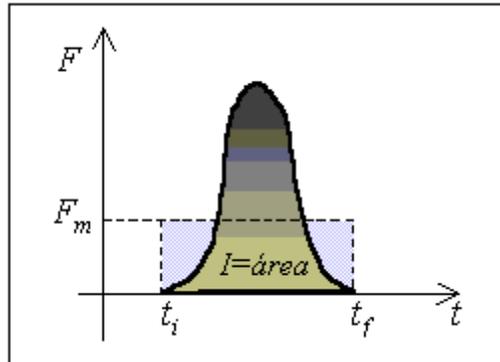


Figura 7.1

Esta expresión se llama la ***aproximación del impulso***, supone que una de las fuerzas que actúan sobre la partícula lo hace en un tiempo muy corto y es de magnitud mucho mayor que cualquier otra fuerza presente. Esta aproximación es muy útil cuando se trabaja con choques (evento en Física que luego definiremos), donde las fuerzas son muy intensas y de muy corta duración, en este caso se les da el nombre de ***fuerzas impulsivas o de impacto***.

Ahora se pueden responder las preguntas formuladas al comienzo de este capítulo. En la del salto, al flexionar las rodillas se aumenta el tiempo durante el cual varía el momento, por lo que se reducen las fuerzas que se ejercen sobre los huesos respecto al valor que tendrían si cayeras con las piernas extendidas, lo que evita posibles lesiones. Las respuestas a las otras preguntas se dejan como reflexión para el alumno.

***Ejemplo 7.1.*** En un saque, el Chino Ríos golpea su pelota (la de tenis) de 50 gr con la raqueta, proporcionándole una fuerza impulsiva. Suponiendo que la pelota sale de la raqueta en un ángulo de  $2,5^\circ$  y recorre 10 m para llegar a la misma altura en el otro sector de la cancha, calcular: a) el impulso, b) la duración del golpe si la deformación de la pelota por el golpe fue de 1 cm, c) la fuerza media sobre la pelota.

Solución.

a) Cálculo del impulso, por su definición:

$$I = \Delta p = p_f - p_i = m(v_f - v_i)$$

donde  $v_i = 0$  es la rapidez de la pelota justo antes del golpe y  $v_f$  es la rapidez con la que sale de la raqueta después del golpe, que no se conoce, pero que se puede calcular con los ecuaciones de cinemática, sabiendo que la pelota recorre  $x = 10 \text{ m}$  y sale con una inclinación  $\alpha = 2.5^\circ$ . Usando la expresión de la distancia horizontal máxima para un proyectil, se tiene:

$$x = \frac{v_o^2}{g} \text{sen}2\alpha \Rightarrow v_o^2 = \frac{xg}{\text{sen}2\alpha} = \frac{10 \times 10}{\text{sen}5^\circ} \Rightarrow v_o = 33.9 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow v_f = 33.9 \text{ m/s}$$

reemplazando en el impulso, se obtiene:

$$I = mv_f - m \cdot 0 = mv_f = (0.05 \text{ gr})(33.9 \text{ m/s})$$

$$I = 1.7 \text{ kg m/s}$$

b) Si la pelota se deformó 1cm durante el golpe, considerando que cuando comienza la deformación la  $v_i = 0$ , suponiendo que durante la deformación la  $a = \text{cte}$ , la duración del golpe sería:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x \Rightarrow a = \frac{v_f^2}{2\Delta x} = \frac{(33.9)^2}{2(0.01)} = 57460.5 \text{ m/s}^2$$

$$v_f = v_i + a\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{v_f}{a} = \frac{33.9 \text{ m/s}}{57460.5 \text{ m/s}^2}$$

$$\Rightarrow \Delta t = 5.9 \times 10^{-4} \text{ s}$$

c) El cálculo de la fuerza media se puede hacer con la ecuación:

$$I = F_m \Delta t \Rightarrow F_m = \frac{I}{\Delta t}$$

$$F_m = \frac{1.7 \text{kgm/s}}{5.9 \times 10^{-4} \text{s}} = 2881.5 \text{N}$$

**Ejemplo 7.2.** Una pelota de 100 g que se deja caer desde una altura  $h = 2\text{m}$ , rebota verticalmente después de golpear el suelo hasta  $\frac{3}{4}h$  (figura 7.2). a) Calcular el momento de la pelota antes y después de golpear el suelo, b) si la duración del golpe fue de 0.01 s, calcular la fuerza media ejercida por el piso sobre la pelota.

Solución: a) en la figura 7.2 se muestra el esquema de la situación. El momento lineal inicial y final es:

momento inicial:  $\vec{p}_i = -mv_i \hat{j}$

momento final:  $\vec{p}_f = mv_f \hat{j}$

Los valores de las velocidades inicial y final se pueden calcular usando el principio de conservación de la energía.

Inicial:  $0 + mgh_i = \frac{1}{2}mv_i^2 + 0 \Rightarrow v_i = \sqrt{2gh_i}$

Final:  $\frac{1}{2}mv_f^2 + 0 = 0 + mgh_f \Rightarrow v_f = \sqrt{2gh_f} = \sqrt{2g(\frac{3}{4})h_i} = \sqrt{(\frac{3}{2})gh_i}$

Por lo tanto, el momento inicial y final es:

$$\vec{p}_i = -m\sqrt{2gh_i} \hat{j}, \quad \vec{p}_f = m\sqrt{(\frac{3}{2})gh_i} \hat{j}$$

Reemplazando los valores numéricos, se tiene:

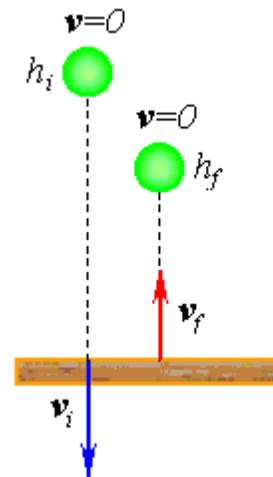


Figura 7.2 Ejemplo 7.2

$$p_i = -0.63 \text{ kgm/s}, \quad p_f = 0.54 \text{ kgm/s}$$

b) Usando la aproximación del impulso:

$$\overset{\rho}{I} = \overset{\rho}{F}_m \Delta t = \Delta \overset{\rho}{p} \Rightarrow \overset{\rho}{F}_m = \frac{\Delta \overset{\rho}{p}}{\Delta t} = \frac{\overset{\rho}{p}_f - \overset{\rho}{p}_i}{\Delta t}$$

$$\overset{\rho}{F}_m = \frac{0.54 \hat{j} - (-0.63 \hat{j})}{0.01} = 118 \hat{j} \text{ N}$$

### 7.3 CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL.

La segunda ley de Newton afirma que para acelerar un objeto hay que aplicarle una fuerza. Ahora vamos a decir lo mismo, pero con otro lenguaje: para cambiar el momento de un objeto hay que aplicarle un impulso, impulso que es producido por una fuerza. En ambos casos hay un agente externo que ejerce la fuerza o el impulso, las fuerzas internas no se consideran. Cuando la fuerza neta es cero, entonces el impulso neto es cero, y por lo tanto no hay cambio del momento lineal total. Entonces se puede afirmar que *si sobre un sistema no se ejerce fuerza neta, el momento total del sistema no puede cambiar.*

Para probar tan osada afirmación, consideremos un sistema mecánico formado solo por dos partículas que interactúan entre sí, pero que están aisladas de los alrededores, y que ejercen fuerzas entre ellas (estas fuerzas pueden ser gravitacionales, elásticas, electromagnéticas, nucleares, etc.), sin considerar otras fuerzas externas al sistema. Si en un cierto instante  $t$  el momento de la partícula 1 es  $\mathbf{p}_1$  y el momento de la partícula 2 es  $\mathbf{p}_2$ , y si  $\mathbf{F}_{12}$  es la fuerza sobre la partícula 1 producida por la partícula 2 y  $\mathbf{F}_{21}$  es la fuerza sobre la partícula 2 producida por la partícula 1, como se muestra en la figura 7.3, entonces se puede aplicar la segunda Ley de Newton a cada partícula:

$$\overset{\rho}{F}_{12} = \frac{d\overset{\rho}{p}_1}{dt} \quad \text{y} \quad \overset{\rho}{F}_{21} = \frac{d\overset{\rho}{p}_2}{dt}$$

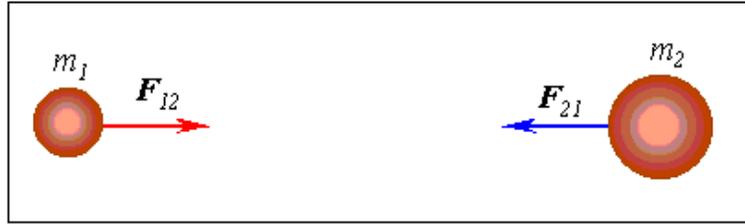


Figura 7.3

Por la tercera Ley de Newton,  $F_{12}$  y  $F_{21}$  son un par de acción y reacción, entonces:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = cte. \quad (7.4)$$

Se concluye que el momento lineal total es constante. Cuando una cantidad física no cambia, decimos que se conserva, por lo tanto el momento total se conserva. No hay caso alguno en que el momento de un sistema pueda cambiar si no se aplica una fuerza externa. Esta es una de las leyes fundamentales de la mecánica, conocida como **ley de conservación del momento lineal**. Como es una ecuación vectorial, equivale a tres ecuaciones escalares, una para cada componente  $x$ ,  $y$  y  $z$ :

$$p_{1x} + p_{2x} = cte$$

$$p_{1y} + p_{2y} = cte$$

$$p_{1z} + p_{2z} = cte$$

Si  $p_{i1}$  y  $p_{i2}$  son el momento en el instante inicial de las partículas 1 y 2 y  $p_{f1}$  y  $p_{f2}$  son el momento en el instante final, entonces la conservación del momento se escribe como:

$$\mathcal{P}_{i1} + \mathcal{P}_{i2} = \mathcal{P}_{f1} + \mathcal{P}_{f2}$$

$$m_1 \mathcal{V}_{i1} + m_2 \mathcal{V}_{i2} = m_1 \mathcal{V}_{f1} + m_2 \mathcal{V}_{f2}$$

La conservación de la energía mecánica total se cumple sólo cuando las fuerzas sobre el sistema aislado son conservativas. El momento lineal para un sistema de partículas se conserva sin importar la naturaleza de las fuerzas internas que actúan sobre el sistema aislado, por lo que el principio de conservación del momento lineal es más general y completo que el de la conservación de la energía, es una de las leyes más importantes de la mecánica, deducido a partir de las Leyes de Newton.

Como el sistema está aislado, las fuerzas internas que actúan son de acción y reacción, en este caso el momento se conserva, por lo que el principio de conservación del momento lineal es un enunciado equivalente a la tercera Ley de Newton. Notar como intervienen las tres Leyes de Newton en este análisis.

Aunque la anterior deducción del principio de conservación del momento lineal fue formulada en este análisis para dos partículas que interactúan entre sí, se puede demostrar que es válida para un sistema de  $n$  partículas y para una distribución continua de masa, aplicada al movimiento del centro de masa del sistema de partículas o de la distribución de masa.

#### 7.4 CHOQUES.

La ley de conservación del momento lineal se puede aplicar muy claramente en lo que en Física se conoce como choque o colisión. Se usa el término **choque** para representar, en escala macroscópica, un evento en el que dos partículas interactúan y permanecen juntas durante un intervalo de tiempo muy pequeño, produciendo fuerzas impulsivas entre sí. Se supone que la fuerza impulsiva es mucho más grande que cualquier otra fuerza externa. En escala atómica tiene poco sentido hablar del contacto físico; cuando las partículas se aproximan entre si, se repelen con fuerzas electrostáticas muy intensas sin que lleguen a tener contacto físico. Cuando dos o mas objetos chocan sin que actúen fuerzas externas, el momento lineal total del sistema se conserva. Pero la

energía cinética en general no se conserva, ya que parte de esta se transforma en energía térmica y en energía potencial elástica interna de los cuerpos cuando se deforman durante el choque.

De acuerdo a lo expuesto, existen diferentes procesos durante los choques, por lo que estos se pueden clasificar en tres tipos:

- a) Cuando dos o mas objetos chocan sin deformarse y sin producir calor, se llama ***choque elástico***. En este caso se conserva tanto el momento lineal como la energía cinética del sistema.
- b) Cuando los objetos que chocan se deforman y producen calor durante el choque, se llama ***choque inelástico***. En este caso se conserva el momento lineal, pero no la energía cinética del sistema.
- c) Un choque se dice ***perfectamente inelástico*** cuando los objetos se deforman, producen calor y permanecen unidos después del choque, por lo que sus velocidades finales son las mismas, y aún es válida la conservación del momento lineal.

#### ***7.4.1 Ejemplos de choque en una dimensión.***

La ley de conservación del momento lineal es útil de aplicar cuando durante un choque se producen fuerzas impulsivas. Se supone que las fuerzas impulsivas son mucho mayor que cualquier otra fuerza presente y como estas son fuerzas internas, no cambian el momento lineal total del sistema. Por lo tanto, el momento lineal total del sistema justo antes del choque es igual al momento lineal total del sistema justo después del choque y el momento total se conserva. Pero en general la energía cinética no se conserva.

***Ejemplo 7.3:*** *dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  que se mueven en la misma línea de acción, con velocidades  $v_{i1}$  y  $v_{i2}$ , chocan en forma completamente inelástica. Después del choque ambas partículas se mueven juntas; determinar la velocidad final  $v_f$  del sistema.*

**Solución:** Supongamos que inicialmente las partículas se mueven en el mismo sentido, y si en este caso lo consideramos hacia la derecha como se muestra en

la figura 7.4, la velocidad inicial de  $m_1$  debe ser mayor que la de  $m_2$ , dando como resultado una velocidad final del conjunto hacia la derecha.

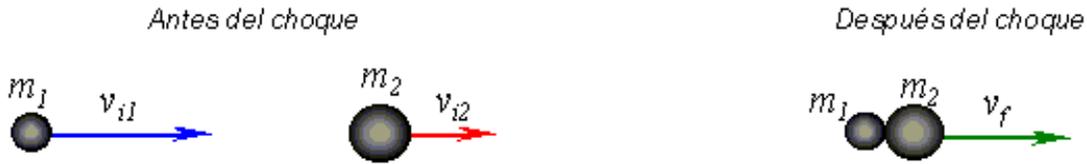


Figura 7.4 Choque completamente inelástico en una dimensión.

En este choque completamente inelástico, el momento lineal del sistema se conserva, y como el movimiento es en una dimensión (por ejemplo, la dirección del eje  $x$ ), entonces de la figura 7.4, se obtiene:

$$p_{\text{antes del choque}} = p_{\text{después del choque}}$$

$$p_i = p_f \Rightarrow p_{i1} + p_{i2} = p_{f1} + p_{f2}$$

$$m_1 v_{i1} + m_2 v_{i2} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$v_f = \frac{m_1 v_{i1} + m_2 v_{i2}}{m_1 + m_2}$$

Existen otras opciones respecto a la dirección que pueden tener las velocidades iniciales de las partículas para que se produzca el choque: que las dos se muevan en sentidos contrarios, en cuyo caso, independientemente del valor de las velocidades, se producirá el choque, ya que se mueven sobre la misma línea de acción; o que ambas partículas se muevan hacia la izquierda, en ese caso, la velocidad inicial de la partícula que ‘persigue’ ( $m_2$  en la figura 7.4) a la otra, debe ser mayor para que la alcance y se produzca el choque, dando como resultado una velocidad final del conjunto hacia la izquierda. Estas situaciones las puede resolver el alumno.

**Ejemplo 7.4:** dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  que inicialmente se mueven en línea recta, en sentidos contrarios, con velocidades  $v_{i1}$  y  $v_{i2}$ , chocan frontalmente en forma elástica. Calcular la velocidad final  $v_f$  de cada una, después del choque.

**Solución:** Como no se conoce ni el valor numérico de las masas ni de las velocidades iniciales, no se puede saber a priori el sentido de las velocidades finales de las partículas, así que supongamos que después del choque se mueven en sentidos opuestos. Como el choque es elástico, se conserva tanto el momento como la energía cinética, aplicando estos principios, y considerando que el choque es en una dirección, se obtiene:



Figura 7.5 Choque elástico en una dimensión.

Conservación del momento lineal:  $p_{\text{antes del choque}} = p_{\text{después del choque}}$

$$p_{i1} + p_{i2} = p_{f1} + p_{f2}$$

$$m_1 v_{i1} - m_2 v_{i2} = -m_1 v_{f1} + m_2 v_{f2}$$

Conservación de la energía cinética:  $E_C \text{ antes del choque} = E_C \text{ después del choque}$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{i1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{i2}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{f1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{f2}^2$$

Para resolver el sistema de dos ecuaciones, para las dos incógnitas  $v_{f1}$  y  $v_{f2}$ , en la ecuación de la energía cinética, se puede dividir por  $\frac{1}{2}$ , reagrupar los términos de  $m_1$  y  $m_2$  en cada miembro de la ecuación y escribirla como:

$$m_1(v_{i1}^2 - v_{f1}^2) = m_2(v_{f2}^2 - v_{i2}^2)$$

$$m_1(v_{i1} + v_{f1})(v_{i1} - v_{f1}) = m_2(v_{f2} + v_{i2})(v_{f2} - v_{i2})$$

Ahora se pueden separar los términos en  $m_1$  y  $m_2$  de la ecuación del momento y escribirla de la siguiente forma:

$$m_1(v_{i1} + v_{f1}) = m_2(v_{f2} + v_{i2})$$

Combinando estas dos últimas ecuaciones (desarrollos algebraicos intermedios se dejan como ejercicio para el alumno), se obtienen las expresiones para la rapidez final  $v_{f1}$  y  $v_{f2}$  de cada partícula:

$$v_{f1} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{i1} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{i2}$$

$$v_{f2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{i1} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{i2}$$

Los resultados anteriores no deben considerarse como generales, ya que fueron deducidas para este caso particular, con los sentidos de las velocidades iniciales dados, por lo tanto no se pueden aplicar como formulas para resolver cualquier problema. Como en el ejemplo 7.3, existen otras opciones respecto a la dirección que pueden tener las velocidades iniciales de las partículas para que se produzca el choque elástico frontal, análisis que se deja de tarea para el alumno.

### 7.5 CHOQUES EN DOS DIMENSIONES.

Si una partícula de masa  $m_1$  que se mueve con una determinada velocidad inicial  $v_{i1}$ , choca de costado con otra de masa  $m_2$  inicialmente en reposo (no tiene porque estar en reposo, pero en este caso, considerémosla en ese estado), el movimiento final será bidimensional, por lo que se considera un choque en

dos dimensiones. Después del choque, como se muestra en la figura 7.6,  $m_1$  se mueve en un ángulo  $\alpha$  sobre el eje  $x$  y  $m_2$  en un ángulo  $\beta$  debajo del eje  $x$ .

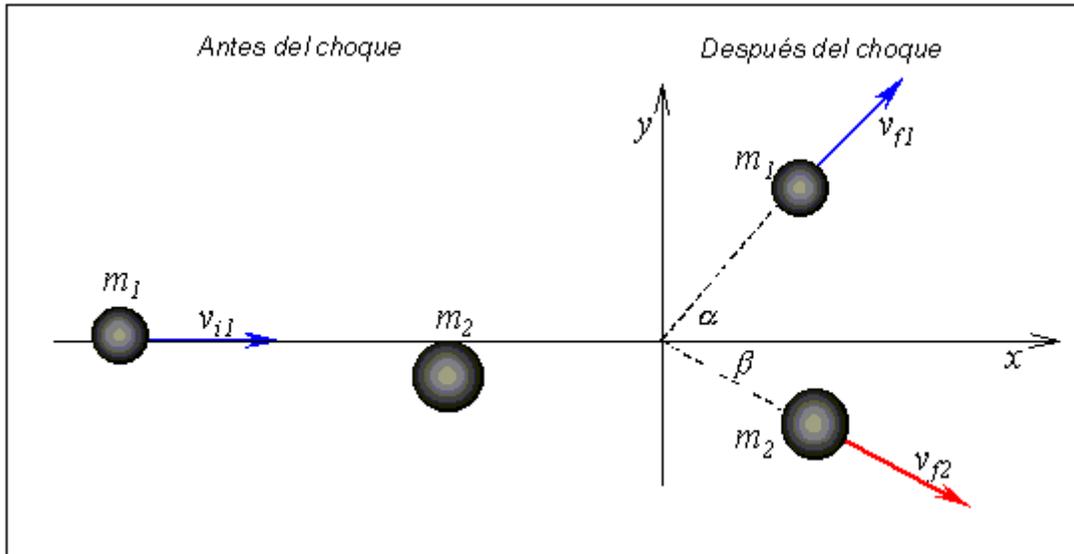


Figura 7.6 Choque en dos dimensiones.

Por la ley de conservación del momento, desarrollada en sus componentes en cada dirección  $x$  e  $y$ :

$$\text{Eje } x: \quad p_{ix} = p_{fx} \Rightarrow m_1 v_{i1} + 0 = m_1 v_{f1} \cos \alpha + m_2 v_{f2} \cos \beta$$

$$\text{Eje } y: \quad p_{iy} = p_{fy} \Rightarrow 0 = m_1 v_{f1} \text{sen} \alpha - m_2 v_{f2} \text{sen} \beta$$

Si además el choque es elástico, por la conservación de la energía se tiene:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{i1}^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_{f1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{f2}^2$$

Este es un sistema de tres ecuaciones, para resolverlo se deben dejar sólo tres incógnitas, por ejemplo  $v_{f1}$ ,  $v_{f2}$ , y  $\alpha$ . Se deja como tarea resolver el sistema, además que en los problemas de final del capítulo se proponen varios donde se debe resolver este sistema.

**Ejemplo 7.5.** Una esfera de billar blanca que se mueve con cierta velocidad inicial choca de costado con otra roja, inicialmente detenida. Si después del choque la bola blanca se mueve en  $40^\circ$  respecto a su dirección inicial, calcular la desviación de la bola roja.

Solución: el esquema se muestra en la figura 7.6; suponiendo que el choque es elástico, se conserva la energía cinética del sistema y como la  $v_{i2} = 0$ , se tiene:

$$\frac{1}{2}m_1v_{i1}^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1v_{f1}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{f2}^2$$

También se conserva el momento lineal, que escrito en forma vectorial es:

$$m_1\mathbf{v}_{i1} + 0 = m_1\mathbf{v}_{f1} + m_2\mathbf{v}_{f2}$$

Como las masas son iguales, se obtienen las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} v_{i1}^2 &= v_{f1}^2 + v_{f2}^2 \\ \mathbf{v}_{i1} &= \mathbf{v}_{f1} + \mathbf{v}_{f2} \end{aligned}$$

Para resolver este sistema se puede intentar elevar al cuadrado la última ecuación, y luego combinarla con la primera, al hacerlo se obtiene:

$$\begin{aligned} v_{i1}^2 &= (\mathbf{v}_{f1} + \mathbf{v}_{f2}) \cdot (\mathbf{v}_{f1} + \mathbf{v}_{f2}) = v_{f1}^2 + 2\mathbf{v}_{f1} \cdot \mathbf{v}_{f2} + v_{f2}^2 \\ v_{i1}^2 &= v_{i1}^2 + 2\mathbf{v}_{f1} \cdot \mathbf{v}_{f2} \Rightarrow \\ \mathbf{v}_{f1} \cdot \mathbf{v}_{f2} &= 0 \end{aligned}$$

Por la definición de producto escalar, al desarrollar la última ecuación, considerando que el ángulo que forman los vectores  $v_{f1}$  y  $v_{f2}$  es  $\beta + 40^\circ$ , se obtiene:

$$v_{f1}v_{f2} \cos(\beta + 40^\circ) = 0$$

$$\cos(\beta + 40^\circ) = 0^\circ$$

Pero el coseno de un ángulo es cero, cuando ese ángulo vale  $90^\circ$ , entonces

$$\beta + 40^\circ = 90^\circ \Rightarrow \beta = 50^\circ$$

Este resultado muestra que siempre en un choque elástico de costado, o no frontal, entre dos masas iguales, con una de ellas inicialmente en reposo, las masas finalmente se moverán en un ángulo recto una respecto a la otra.

**PROBLEMAS.**

- 7.1. ¿Se acuerdan del problema del Chino Ríos del capítulo 5? (usar esos datos) Suponga que por la fuerza elástica del raquetazo, de  $5\text{ ms}$  de duración, la pelota gana un  $5\%$  de la rapidez con la que golpea a la raqueta. Calcular: a) el impulso sobre la pelota, b) la fuerza media. c) Estimar el número de raquetazos que pega el Chino en un partido de tenis y calcular la fuerza media en todo un partido. R: a)  $5.7\text{ kgm/s}$ , b)  $1139\text{ N}$ .
- 7.2. Una bola de palitroque de  $5\text{ kg}$  se mueve en línea recta a  $3\text{ m/s}$ . ¿Qué tan rápido debe moverse una bola de ping-pong de  $2.5\text{ gr}$  en una línea recta, de manera que las dos bolas tengan el mismo momento? R:  $6000\text{ m/s}$ .
- 7.3. Una pelota con una masa de  $60\text{ gr}$  se deja caer desde una altura de  $2\text{ m}$ . Rebota hasta una altura de  $1.8\text{ m}$ . ¿Cuál es el cambio en su momento lineal durante el choque con el piso?
- 7.4. Una ametralladora dispara balas de  $35\text{ g}$  a una velocidad de  $750\text{ m/s}$ . Si el arma puede disparar  $200\text{ balas/min}$ , ¿Cuál es la fuerza promedio que el tirador debe ejercer para evitar que la ametralladora se mueva? R:  $87.5\text{ N}$ .
- 7.5. En la figura 7.7 se muestra la curva fuerza-tiempo estimada para una pelota de tenis golpeada por la raqueta del Chino. A partir de esta curva, calcular, a) el impulso dado a la pelota, b) la fuerza media sobre la pelota. R: a)  $10\text{ kg m/s}$ , b)  $10\text{ kN}$ .

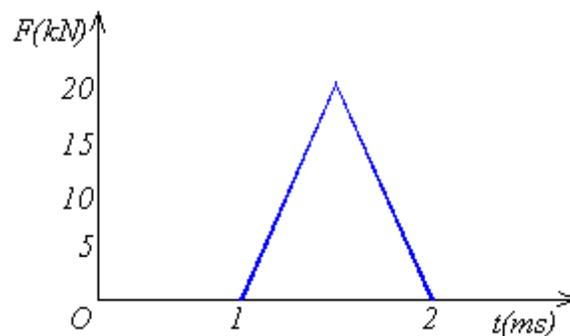


Figura 7.7 Problema 7.5.

- 7.6. Salas que otra vez se viene a jugar por la U, le hace un gol de tiro libre al Colo. La fuerza con la cual golpea la pelota de 400 gr, inicialmente detenida, es tal que aumenta linealmente de 0 a 1000 N durante  $1\text{ ms}$ , luego se mantiene constante durante otro  $ms$  y finalmente disminuye linealmente a 0 durante  $2\text{ ms}$ . Calcular: a) el impulso sobre la pelota, b) la rapidez con que sale disparada, c) la fuerza media. ¿Cuánto le ganará la U, próximo campeón, al Colo? R: a)  $2.5\text{ kgm/s}$ , b)  $6.25\text{ m/s}$ , c)  $625\text{ N}$ .
- 7.7. Zamorano patea un balón de fútbol de  $0.5\text{ kg}$  con una rapidez de  $15\text{ m/s}$ . Chilavert, solidísimo, atrapa la pelota y la detiene en  $0.02\text{ s}$ . a) ¿Cuál es el impulso dado al balón? b) ¿Cuál es la fuerza promedio ejercida sobre Chilavert? R: a)  $7.5\text{ kg m/s}$ , b)  $375\text{ N}$ .
- 7.8. Un auto se detiene frente a un semáforo. Cuando la luz vuelve al verde, el auto acelera, aumentando su rapidez de cero a  $5\text{ m/s}$  en  $1\text{ s}$ . ¿Qué momento lineal y fuerza promedio experimenta un pasajero de  $70\text{ kg}$  en el auto?
- 7.9. Una bola de acero de masa  $M$  que se mueve en el plano  $xy$ , golpea una pared ubicada sobre el eje  $y$ , con una velocidad  $v$  a un ángulo  $\alpha$  con la pared. Rebota con la misma velocidad y ángulo. Si la bola está en contacto con la pared durante un tiempo  $T$ , ¿Cuál es la fuerza promedio ejercida por la pared sobre la bola? R:  $2Mv \text{ sen}\alpha/T$ .
- 7.10. Un meteorito de  $2000\text{ kg}$  tiene una velocidad de  $120\text{ m/s}$  justo antes de chocar de frente con la Tierra. Determine la velocidad de retroceso de la Tierra. R:  $4 \times 10^{-20}\text{ m/s}$ .
- 7.11. Un chilonauta de  $60\text{ kg}$  camina en el espacio alejado de la nave espacial cuando la cuerda que lo mantiene unido a la nave se rompe. El puede lanzar su tanque de oxígeno de  $10\text{ kg}$  de manera que éste se aleje de la nave espacial con una rapidez de  $12\text{ m/s}$ , para impulsarse a sí mismo de regreso a la nave. Suponiendo que inicia su movimiento desde el reposo (respecto de la nave), determine la distancia máxima a la cual puede estar de la nave espacial cuando la cuerda se rompe para regresar en menos de  $60\text{ s}$  (es decir, el tiempo que podría estar sin respirar). R:  $120\text{ m}$ .
- 7.12. Un vagón de ferrocarril de  $2.5 \times 10^4\text{ kg}$  de masa que se mueve con una velocidad de  $4\text{ m/s}$  choca para conectarse con otros tres vagones de fe-

- rrocarril acoplados, cada uno de la misma masa que el primero y moviéndose en la misma dirección con una velocidad de  $2 \text{ m/s}$ . a) ¿Cuál es la velocidad de los cuatro vagones después del choque? b) ¿Cuánta energía se pierde en el choque?
- 7.13. Un patinador de  $80 \text{ kg}$  que esta parado sobre un estanque congelado cercano a un muro sostiene una bola de  $0.5 \text{ kg}$ , que luego lanza contra el muro con una rapidez de  $10 \text{ m/s}$  respecto al suelo y la atrapa después que golpea el muro. a) ¿Con que rapidez se mueve el patinador después de atrapar la bola?, b) ¿cuántas veces puede seguir con este proceso antes de que su rapidez llegue a  $1 \text{ m/s}$  respecto al suelo.
- 7.14. Una bala de masa  $m_1$ , se dispara contra un bloque de madera de masa  $m_2$ , inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal. Después del impacto el bloque se desliza una distancia  $D$  antes de detenerse. Si el coeficiente de roce entre el bloque y la superficie es  $\mu$ . Calcular la velocidad de la bala justo antes del impacto.
- 7.15. Lucho de  $75 \text{ kg}$ , está parado en el extremo de un carro de  $1000 \text{ kg}$  y  $10 \text{ m}$  de largo, inicialmente detenido respecto al suelo. Lucho comienza a caminar hacia el otro extremo del carro a razón de  $1 \text{ m/s}$  relativo al suelo. Suponga que no hay roce entre el carro y el suelo. a) Analice cualitativamente el movimiento de Lucho mientras camina sobre el carro. b) Determine el tiempo que demora en llegar al otro extremo. c) ¿Qué sucede cuando se detiene en el otro extremo del carro? R: b)  $9.3 \text{ s}$
- 7.16. Un cabrochico de  $40 \text{ kg}$  está parado a  $3 \text{ m}$  de un muelle, en un extremo de un bote de  $70 \text{ kg}$ , que mide  $4 \text{ m}$  de largo. El cabro observa un recurso loco sobre una roca justo en el otro extremo del bote y comienza a caminar sobre el bote para llegar donde el loco. a) Calcular la posición del cabro cuando llega al otro extremo del bote. b) Suponiendo que el cabro se puede estirar fuera del bote hasta  $1 \text{ m}$ , ¿alcanzará al loco? R:  $5.5 \text{ m}$ , b) no.
- 7.17. Un neutrón que se mueve con una velocidad de  $3 \times 10^6 \text{ m/s}$  choca elástica y frontalmente con un núcleo de helio en reposo. Determine: a) la velocidad final de cada partícula, b) la fracción de energía cinética transferida al núcleo de helio. R: a)  $1.8 \times 10^6 \text{ m/s}$ ,  $1.2 \times 10^6 \text{ m/s}$ .

- 7.18. Una esfera de masa  $2m$  que se mueve con rapidez  $v_0$  hacia la derecha choca de frente elásticamente con otra esfera de masa  $m$ , inicialmente detenida (figura 7.8). Después del choque, la esfera  $2m$  retrocede con  $v_0/2$  y la de masa  $m$  se mueve hasta subir por un plano inclinado en  $\alpha$  grados, sin roce. Calcular la distancia  $D$  que sube  $m$  por el plano. R:  $4.5v_0^2/g \operatorname{sen}\alpha$ .

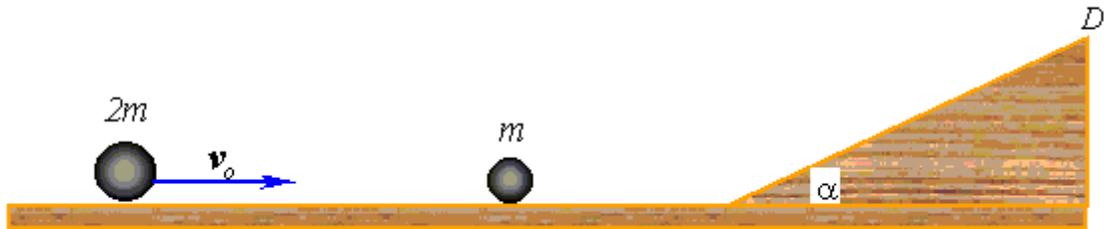


Figura 7.8. Problema 7.18.

- 7.19. Una explosión interna separa en dos pedazos A y B una masa de 1 kg que se movía horizontal y libremente en dirección del eje  $x$ , con una rapidez de 10 m/s. Después de la explosión, el trozo A de 250 gr se movía en dirección  $y$  a 15 m/s. a) Hacer un esquema de la situación. b) Calcular el momento antes de la explosión. c) Calcular la velocidad de B después de la explosión. R: b)  $10\hat{i}$  kgm/s, c)  $13.3\hat{i} - 5\hat{j}$  m/s.
- 7.20. Cuando a Supertribi, de masa 50 kg, se le acaba el efecto de su supermaní, cae libremente llevando consigo un macetero de 5 kg. Cuando faltan 10 s para llegar al suelo, Supertribi tira horizontalmente el macetero con una rapidez de 5 m/s. Calcular donde caen Supertribi (y no le pasa nada porque es super) y el macetero. R: 5 m, 50 m.
- 7.21. Un núcleo inestable de  $17 \times 10^{-27}$  kg inicialmente en reposo, se desintegra en tres partículas. Una de ellas de  $5 \times 10^{-27}$  kg, se mueve a lo largo del eje  $y$  y con una rapidez de  $6 \times 10^6$  m/s. Otra partícula, de masa  $8.4 \times 10^{-27}$  kg se mueve a lo largo del eje  $x$  con una rapidez de  $4 \times 10^6$  m/s. Calcular a) la velocidad de la tercera partícula, b) la energía total emitida en el proceso. R: a)  $(-9.3\hat{i} - 8.3\hat{j}) \times 10^6$  m/s, b)  $4.4 \times 10^{-13}$  J.
- 7.22. Una partícula de masa  $m$ , que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$ , choca de costado con una partícula idéntica que está en reposo. Demuestre que si el

choque es elástico las dos partículas se mueven en  $90^\circ$  una respecto de la otra después del choque.

- 7.23. Considere una pista sin fricción como la mostrada en la figura 7.9. Un bloque de masa  $5 \text{ kg}$  que se suelta desde una altura de  $5 \text{ m}$  choca frontalmente con otro bloque de masa  $10 \text{ kg}$  colocado en la base de la pista curva, inicialmente en reposo. Calcular la altura máxima a la cual se eleva la masa de  $5 \text{ kg}$  después del choque. R:  $0.56 \text{ m}$ .

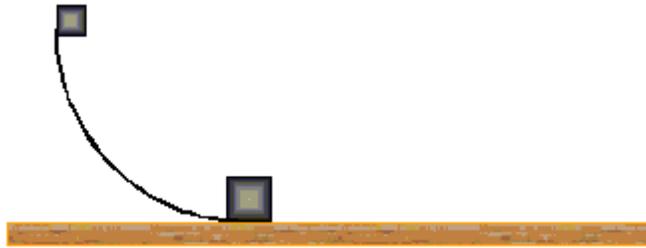


Figura 7.9 Problema 7.23.

- 7.24. Una partícula de masa  $m_1$  que se mueve con velocidad inicial  $v_{i1}$  sobre el eje  $x$  choca de costado con otra de masa  $m_2$  en reposo. Después del choque,  $m_1$  y  $m_2$  se mueven sobre el plano  $xy$  tal que la velocidad final  $v_{f1}$  de  $m_1$  forma un ángulo  $\alpha$  sobre el eje  $x$  y la velocidad final  $v_{f2}$  de  $m_2$  forma un ángulo  $\beta$  bajo el eje  $x$  (figura 7.6). Demuestre que:

$$\tan \beta = \frac{v_{f1} \operatorname{sen} \alpha}{v_{i1} - v_{f1} \cos \alpha}$$

- 7.25. Una bola de billar que se mueve a  $5 \text{ m/s}$  golpea a otra bola estacionaria de la misma masa. Después del choque, la primera bola se mueve a  $4.33 \text{ m/s}$  en un ángulo de  $30^\circ$  respecto de la línea original de movimiento. Suponiendo un choque elástico, calcular la velocidad de la bola golpeada. R:  $2.5 \text{ m/s}$ ,  $-60^\circ$ .
- 7.26. Una bala de masa  $m$  se dispara contra un bloque de masa  $M$  inicialmente en reposo en el borde una mesa sin fricción de altura  $h$ . La bala se incrusta en el bloque y después del impacto éste cae a una distancia horizontal  $D$  del borde de la mesa. Determine la velocidad inicial de la bala. R:  $D(1+M/m)/(0.2h)^{1/2}$ .

- 7.27. Dos carritos de igual masa,  $0.25 \text{ kg}$ , se colocan sobre una pista sin fricción que tiene un resorte ligero de constante fuerza  $k = 50 \text{ N/m}$  unido al extremo derecho de la pista. Al carrito de la izquierda se le da una velocidad inicial de  $3 \text{ m/s}$  hacia la derecha y el otro carrito a la derecha del primero está inicialmente en reposo. Si los carros chocan elásticamente, encuentre a) la velocidad de cada uno justo después del primer choque, y b) la compresión máxima en el resorte.
- 7.28. Dos partículas, de masas  $m$  y  $3m$ , se aproximan una a la otra a lo largo del eje  $x$  con las mismas velocidades iniciales  $v_0$ . La masa  $m$  se mueve hacia la izquierda y la masa  $3m$  hacia la derecha. Chocan de frente y cada una rebota a lo largo de la misma línea en la que se aproximaban. Calcular las velocidades finales de las partículas. R:  $2v_0, 0$ .
- 7.29. Dos partículas, de masas  $m$  y  $3m$  se aproximan una a la otra a lo largo del eje  $x$  con las mismas velocidades iniciales  $v_0$ . La masa  $m$  se desplaza hacia la izquierda y la masa  $3m$  hacia la derecha. Experimentan un choque no frontal de modo que  $m$  se mueve hacia abajo después del choque en un ángulo recto respecto a su dirección inicial. Calcular: a) las velocidades finales de las dos masas, b) el ángulo al cual se desvía  $3m$ . R: a)  $2v_0/3\cos\alpha, 2v_0\tan\alpha$ , b)  $35^\circ$ .
- 7.30. Un cohete con masa inicial  $M_i$  despegar desde la Tierra. Cuando su combustible se ha consumido completamente, el cohete se encuentra a una altura pequeña comparada con el radio terrestre. Demostrar que su rapidez final es  $v = -v_e \ln(M_i/M_f) - gt$ , con  $t = (M_i - M_f)(dm/dt)^{-1}$ , donde  $v_e$  es la rapidez de escape de los gases,  $M_f$  la masa final del cohete y  $dm/dt$  el consumo constante de combustible.

## CAPITULO 8. DINAMICA DE ROTACIÓN.

Cuando un objeto real gira alrededor de algún eje, su movimiento no se puede analizar como si fuera una partícula, porque en cualquier instante, diferentes partes del cuerpo tienen velocidades y aceleraciones distintas. Por esto es conveniente considerar al objeto real como un gran número de partículas, cada una con su propia velocidad, aceleración. El análisis se simplifica si se considera al objeto real como un cuerpo rígido. En este capítulo se tratará la rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo, conocido como movimiento rotacional puro.

### 8.1 ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN.

Para un cuerpo rígido formado por una colección de partículas que gira alrededor del eje  $z$  fijo con velocidad angular  $\omega$ , cada partícula del cuerpo rígido tiene energía cinética de traslación. Si la partícula de masa  $m_i$ , se mueve con velocidad  $v_i$ , su energía cinética es:

$$E_{ci} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Cada partícula del cuerpo rígido tiene la misma velocidad angular  $\omega$ , pero distintas velocidades lineales, porque estas dependen de la distancia  $r$  al eje de rotación, y se relacionan por  $v_i = \omega r_i$ . Entonces la energía cinética de la partícula  $i$  es:

$$E_i = \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

La energía cinética total del cuerpo rígido en rotación es la suma de las energías cinéticas de cada partícula individual, esto es:

$$E_i = \sum E_i = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left( \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

donde se factorizó  $\omega^2$  porque es la misma para todo el cuerpo rígido. A la cantidad entre paréntesis en la ecuación anterior se la define como el momento de inercia,  $I$ , del cuerpo rígido:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

De la definición momento de inercia, sus unidades de medida en el SI son  $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ . Con esta definición, se puede escribir la energía cinética de rotación de un cuerpo rígido como:

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (8.1)$$

La energía cinética de rotación no es una nueva forma de energía, sino que es el equivalente rotacional de la energía cinética de traslación, se dedujo a partir de esa forma de energía. La analogía entre ambas energías  $\frac{1}{2} m v^2$  y  $\frac{1}{2} I \omega^2$  es directa, las cantidades  $I$  y  $\omega$  del movimiento de rotación son análogas a  $m$  y  $v$  del movimiento lineal, por lo tanto  $I$  es el equivalente rotacional de  $m$  (algo así como la masa de rotación), y siempre se considera como una cantidad conocida, igual que  $m$ , por lo que generalmente se da como un dato. Pero existen técnicas del cálculo integral para calcular  $I$ , y teoremas asociados, que no se usarán en este curso.

El momento de inercia  $I$  es una cantidad que depende del eje de rotación, el tamaño y la forma del objeto. En la siguiente tabla 8.1 se dan los momentos de inercia respecto al centro de masa de figuras geométricas conocidas, de distribución de masa homogénea, cuando giran en torno al eje que se indica.

TABLA 8.1

<i>Objeto (de masa M)</i>	<i>I<sub>cm</sub></i>
<i>Aro o cascarón cilíndrico de radio R, eje de rotación por su eje de simetría</i>	$MR^2$
<i>Disco o cilindro sólido de radio R, eje de rotación por su eje de simetría</i>	$\frac{1}{2}MR^2$
<i>Cilindro hueco, de radios interno R<sub>1</sub> y externo R<sub>2</sub>, eje de rotación por su eje de simetría</i>	$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
<i>Esfera sólida de radio R, eje de rotación por su eje de simetría</i>	$\frac{2}{5}MR^2$
<i>Cascarón esférico delgado de radio R, eje de rotación por su eje de simetría</i>	$\frac{2}{3}MR^2$
<i>Barra delgada de largo L, con eje de rotación por el centro</i>	$\frac{1}{12}ML^2$
<i>Barra delgada de largo L, con eje de rotación en el extremo</i>	$\frac{1}{3}ML^2$
<i>Placa rectangular de lados a y b, eje rotación en el centro perpendicular a la placa</i>	$\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$

## 8.2 RELACIÓN ENTRE TORQUE Y ACELERACIÓN ANGULAR.

Para una partícula de masa  $m$ , que gira como se muestra en la figura 8.1, en una circunferencia de radio  $r$  con la acción de una fuerza tangencial  $F_t$ , además de la fuerza centrípeta necesaria para mantener la rotación. La fuerza tangencial se relaciona con la aceleración tangencial  $a_t$  por  $F_t = ma_t$ . El torque alrededor del centro del círculo producido por  $F_t$  es:

$$\tau = F_t r = (ma_t)r$$

Como la  $a_t$  se relaciona con la aceleración angular por  $a_t = r\alpha$ , el torque se puede escribir como:

$$\tau = (m r\alpha) r = (m r^2)\alpha$$

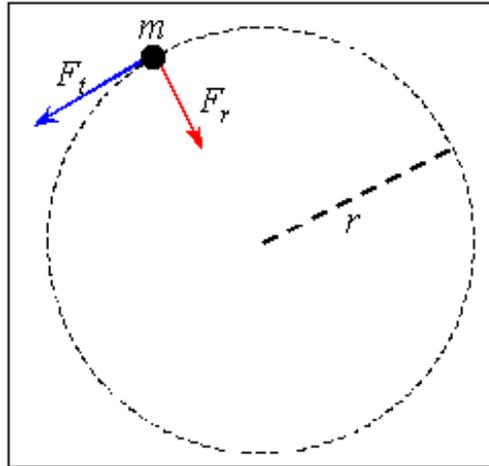


Figura 8.1

y como  $mr^2$  es el momento de inercia de la masa  $m$  que gira en torno al centro de la trayectoria circular, entonces:

$$\tau = I\alpha$$

El torque que actúa sobre una partícula es proporcional a su aceleración angular  $\alpha$ , donde  $I$  es la constante de proporcionalidad. Observar que  $\tau = I\alpha$  es el análogo rotacional de la segunda ley de Newton  $F = ma$ .

Se puede extender este análisis a un cuerpo rígido arbitrario que rota en torno a un eje fijo que pase por  $O$ , como se ve en la figura 8.2. El cuerpo rígido se puede considerar formado por elementos de masa  $dm$ , que giran en torno a  $O$  en una circunferencia de radio  $r$ , por efecto de alguna fuerza tangencial externa  $dF_t$  que actúa sobre  $dm$ .

Por la segunda ley de Newton aplicada a  $dm$ , se tiene:

$$dF_t = (dm) a_t$$

El torque  $d\tau$  producido por la fuerza  $dF_t$  es:

$$d\tau = r dF_t = (r dm) a_t = (r dm) r \alpha = (r^2 dm) \alpha$$

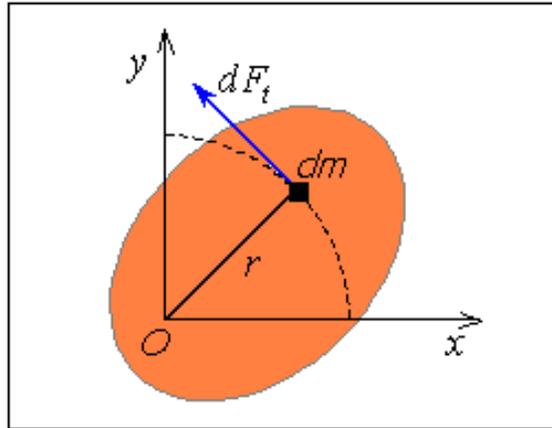


Figura 8.2

El torque neto se obtiene integrando esta expresión, considerando que  $\alpha$  tiene el mismo valor en todo el cuerpo rígido,

$$\tau_t = \int d\tau = \int \alpha r^2 dm = \alpha \int r^2 dm$$

Pero la integral es el momento de inercia  $I$  del cuerpo rígido alrededor del eje de rotación que pasa por  $O$ , entonces,

$$\tau_t = I\alpha \quad (8.2)$$

Observar que aunque la deducción es compleja, el resultado final es extremadamente simple, como todas las ecuaciones de la Física.

**Ejemplo 8.1.** Una barra uniforme de longitud  $L$  y masa  $M$ , que gira libremente alrededor de una bisagra sin fricción, se suelta desde el reposo en su posición horizontal, como se muestra en la figura 8.3. Calcular la aceleración angular de la barra y su aceleración lineal inicial de su extremo.

Solución. Como el torque de la fuerza en la bisagra es cero, se puede calcular el torque en torno a la bisagra producido por la otra fuerza externa que actúa

sobre la barra, que es su peso, suponiendo que la barra es homogénea y que el peso actúa en su centro geométrico. Entonces:

$$\tau = rP = \frac{LMg}{2}$$

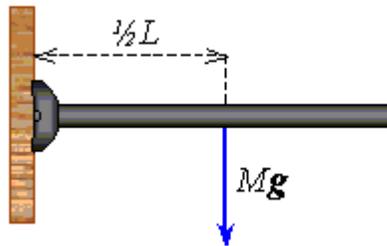


Figura 8.3 Ejemplo 8.1

Como  $\tau = I\alpha$ , y el momento de inercia de la barra (que se obtiene de la tabla anterior) es  $I = (1/3) ML^2$ , se tiene:

$$I\alpha = \frac{LMg}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\frac{LMg}{2}}{\frac{ML^2}{3}}$$

$$\alpha = \frac{3g}{2L}$$

Para calcular la aceleración lineal del extremo de la barra, usamos la ecuación  $a_t = r\alpha$ , con  $r = L$ , reemplazando  $\alpha$ :

$$a_t = L\alpha = \frac{3}{2}g$$

**Ejemplo 8.2.** Una rueda de radio  $R$ , masa  $M$  y momento de inercia  $I$ , puede girar en torno a un eje horizontal sin roce (figura 8.4). Una cuerda ideal se enrolla alrededor de la rueda y sostiene un bloque de masa  $m$ . Cuando se suelta en bloque, la rueda comienza a girar en torno a su eje. Calcular la ace-

eración lineal del bloque, la tensión de la cuerda y la aceleración angular de la rueda.

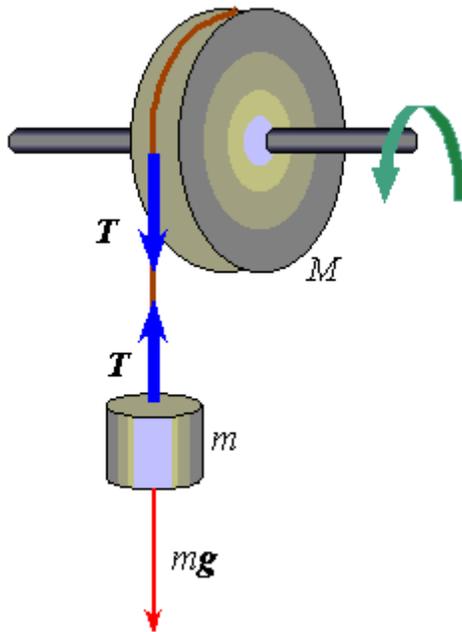


Figura 8.4. Ejemplo 8.2

Solución: el peso de la rueda y la fuerza del eje de rotación no producen torque en torno al eje, por lo que el torque que actúa sobre la rueda en torno a su eje es producido por la tensión de la cuerda, su valor es  $\tau = RT$ . Como  $\tau = I\alpha$ , igualando se obtiene

$$I\alpha = RT \Rightarrow T = \frac{I\alpha}{R}$$

Ahora se aplica la segunda ley de Newton al bloque que cae, del DCL se tiene:

$$T - mg = -ma \Rightarrow T = mg - ma$$

Igualando las tensiones y considerando que  $a = R\alpha \Rightarrow \alpha = a/R$ , se obtiene

$$mg - ma = \frac{I\alpha}{R} = \frac{Ia}{R^2} \Rightarrow \frac{Ia}{R^2} + ma = mg \Rightarrow a \left( \frac{I}{mR^2} + 1 \right) = g$$

$$a = \frac{g}{1 + I/mR^2}$$

Con este valor de  $a$  se calculan  $T$  y  $\alpha$ , estos cálculos dan:

$$T = \frac{mg}{1 + mR^2/I}$$

$$\alpha = \frac{g}{R + I/mR}$$

### 8.3 TRABAJO, ENERGÍA Y POTENCIA EN EL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN.

Para un cuerpo rígido que gira en torno a un eje fijo que pasa por  $O$ , como se ve en la figura 8.5. Si una fuerza externa  $\mathbf{F}$  se aplica en un punto  $Q$  del cuerpo rígido a una distancia  $r$  de  $O$ , el trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  cuando el objeto gira una distancia infinitesimal  $ds = r d\theta$  es:

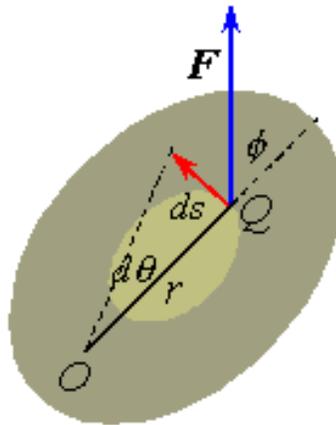


Figura 8.5

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = (F \operatorname{sen} \phi) r d\theta = F_t r d\theta$$

donde  $F \operatorname{sen} \phi = F_t$  es la componente tangencial de  $\mathbf{F}$  o la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento  $d\mathbf{s}$ , que es la componente que realiza trabajo. *La componente radial de  $F$  no realiza trabajo porque es perpendicular al desplazamiento.* Como el torque es:  $\tau = r F \operatorname{sen} \phi$ , el trabajo se escribe:

$$dW = \tau d\theta,$$

integrando, se obtiene:

$$W = \int_i^f \tau d\theta$$

El trabajo de rotación es análogo el de traslación  $W = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{p}$

La potencia con la cual se realiza el trabajo es

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

Como  $dW/dt = P$  y  $d\theta/dt = \omega$ , la potencia instantánea es:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \omega,$$

expresión análoga al cono del movimiento lineal  $P = Fv$ .

Tomando ahora la expresión del torque rotacional  $\tau = I\alpha$ , aplicando la regla de la cadena:

$$\tau = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = I\omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

Al reagrupar esta expresión y considerando que  $\tau d\theta = dW \Rightarrow dW = I\omega d\omega$ . Integrando se encuentra el trabajo total realizado durante la rotación:

$$W = \int_i^f \tau d\theta = \int_i^f I\omega d\omega = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2$$

Por lo tanto, el trabajo neto realizado por las fuerzas externas al hacer girar un cuerpo rígido es igual a la variación de energía cinética rotacional del objeto.

**Ejemplo 8.3.** Para la barra giratoria del ejemplo 8.1, calcular su rapidez angular, la rapidez lineal de su centro de masa y del punto mas bajo de la barra cuando está vertical.

Solución: Usando el principio de conservación de la energía, considerando que la energía potencial se calcula respecto al centro de masa y la energía cinética es de rotación:

$$E_i = E_f \Rightarrow E_{ci} + E_{gi} = E_{cf} + E_{gf}$$

Cuando la barra esta inicialmente horizontal no tiene  $E_{ci}$  y cuando esta vertical tiene solo  $E_{cf}$ , entonces:

$$\frac{1}{2}MgL = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Para calcular la rapidez del centro de masa, se usa:

$$v_{cm} = r\omega = \frac{L}{2}\omega$$

$$v_{cm} = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

En el punto mas bajo la rapidez es  $v = 2v_{cm} = \sqrt{3Lg}$ .

**Ejemplo 8.4.** Para el sistema de la figura 8.6, las masas tienen momento de inercia  $I$  en torno a su eje de rotación, la cuerda no resbala en la polea y el sistema se suelta desde el reposo. Calcular la rapidez lineal de las masas después que una ha descendido  $H$  y la rapidez angular de la polea.

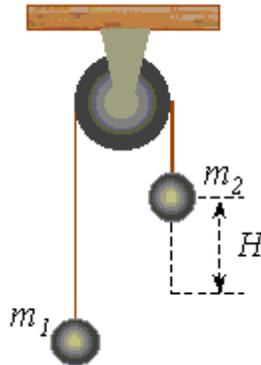


Figura 8.6 Ejemplo 8.4

Solución: como no hay roce en la polea, se conserva la energía, que aplicada a cada masa  $m_1$  y  $m_2$ , suponiendo que  $m_2$  se encuentra inicialmente en la parte superior del sistema, es:

$$E_i = E_f \Rightarrow E_{ci1} + E_{ci2} + E_{gi1} + E_{gi2} = E_{cf1} + E_{cf2} + E_{gf1} + E_{gf2}$$

$$0 + m_2 gH = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + m_1 gH$$

$$\frac{1}{2} \left( m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2} \right) v^2 = (m_2 - m_1) gH$$

donde se ha usado la relación  $v = R\omega$ , despejando  $v$  se obtiene:

$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gH}{m_1 + m_2 + I/R^2}}$$

### 8.4 MOVIMIENTO DE RODADURA DE UN CUERPO RÍGIDO.

Se considerará ahora el caso más general de movimiento de rotación, donde el eje de rotación no está fijo en el espacio, sino que en movimiento, este se llama movimiento de rodadura. El movimiento general de un cuerpo rígido es muy complejo, pero se puede usar un modelo simplificado limitando el análisis a un cuerpo rígido homogéneo con gran simetría, como un cilindro, una esfera o un aro, y suponiendo que el cuerpo tiene movimiento de rodadura en un plano. Considerar un cilindro uniforme de radio  $R$  que rueda sin deslizar en una trayectoria recta, como en la figura 8.7. El centro de masa se mueve en línea recta, pero un punto en el borde se mueve en una trayectoria más compleja, llamada cicloide. A medida que el cilindro gira un ángulo  $\theta$ , su centro de masa se mueve una distancia  $s = R\theta$ , por lo tanto, las magnitudes de la velocidad y la aceleración del centro de masa para el movimiento de rodadura puro son:

$$v_{cm} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

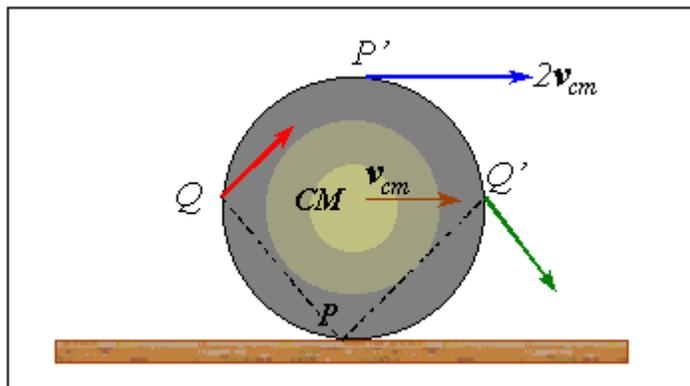


Figura 8.7

Las velocidades lineales en los diferentes puntos  $P$ ,  $Q$ ,  $P'$  y  $Q'$  sobre el cilindro en rotación se ven en los vectores de la figura 8.7. La velocidad lineal de

cualquier punto está en dirección perpendicular a la línea de ese punto al punto de contacto P, que en cualquier instante está en reposo, porque no hay deslizamiento.

Un punto general del cilindro, como Q tiene una velocidad con componente horizontal y vertical. Pero los puntos P, CM y P' tienen velocidades respectivamente cero en P porque  $R=0$ ,  $v_{cm}=R\omega$  en el CM y  $(2R)\omega=2(R\omega)=2v_{cm}$  en P', ya que todos los puntos del cilindro tienen la misma  $\omega$ .

La energía cinética total del cilindro rodante es

$$E_c = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

donde  $I_P$  es el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por P. Se puede demostrar que  $I_P = I_{cm} + MR^2$  y al reemplazar en  $E_c$  se tiene:

$$E_c = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2,$$

pero  $v_{cm} = R\omega$ , entonces:

$$E_c = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \quad (8.3)$$

Esto significa que la energía cinética total de un objeto en movimiento de rodadura está dada por la energía cinética de rotación en torno al centro de masa y la energía cinética de traslación del centro de masa del objeto. El movimiento de rodadura sólo es posible si existe roce entre el cuerpo rígido que se mueve y la superficie, ya que la fuerza de roce produce el torque necesario para hacer rodar el cuerpo rígido en torno al centro de masa. A pesar del roce no hay pérdida de energía mecánica, porque el punto de contacto está en reposo respecto a la superficie en cualquier instante.

**Ejemplo 8.5:** Usar la conservación de la energía para describir el movimiento de rodadura de un cuerpo rígido de masa  $M$  que rueda por un plano inclinado  $\alpha$  y rugoso, que se muestra en la figura 8.8.

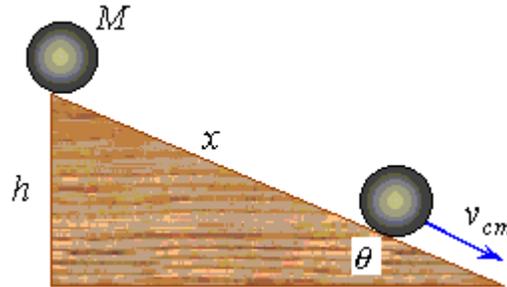


Figura 8.8. Ejemplo 8.5

**Solución:** Se supone que el cuerpo rígido parte del reposo desde una altura  $h$  y que rueda por el plano sin resbalar. La conservación de energía da:

$$E = cte \Rightarrow E_c + E_g = cte \Rightarrow E_{ci} + E_{gi} = E_{cf} + E_{gf}$$

Pero  $E_{ci} = 0$  y  $E_{gf} = 0$ , entonces

$$Mgh = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} Mv_{cm}^2$$

Como  $v_{cm} = R\omega \Rightarrow \omega = v_{cm}/R$ , se reemplaza en la ecuación anterior

$$\frac{1}{2} I_{cm} \frac{v_{cm}^2}{R^2} + \frac{1}{2} Mv_{cm}^2 = Mgh$$

Despejando  $v_{cm}$  se obtiene:

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I_{cm} / MR^2}}$$

Por ejemplo, para una esfera sólida uniforme, de momento de inercia  $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$ , se puede calcular su  $v_{cm}$  en el punto más bajo del plano y su aceleración lineal.

$$v_{cm}^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{(2/5)MR^2}{MR^2}} = \frac{2gh}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{10}{7}gh \Rightarrow$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

La aceleración lineal se puede calcular con la ecuación

$$v_{cm}^2 = v_{icm}^2 + 2a_{cm}x = 2a_{cm}x \Rightarrow a_{cm} = \frac{v_{cm}^2}{2x}$$

De la geometría de la figura, se tiene:  $h = x \operatorname{sen} \alpha$ , donde  $x$  es la longitud del plano, reemplazando en  $a_{cm}$ :

$$a_{cm} = \frac{\frac{10}{7}gx \operatorname{sen} \alpha}{2x} = \frac{5}{7}g \operatorname{sen} \alpha$$

### 8.5 MOMENTO ANGULAR DE UNA PARTÍCULA.

Una partícula de masa  $m$ , ubicada en una posición  $\mathcal{F}$  desde el origen  $O$ , que se mueve con velocidad  $\mathcal{V}$ , tiene momento lineal  $\mathcal{p}$ . Se define el momento angular  $\mathcal{L}$  de una partícula respecto al origen, como el producto vectorial entre la posición  $\mathcal{F}$  y el momento lineal  $\mathcal{p}$ , esto es:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (8.4)$$

La unidad de medida de  $\mathbf{L}$  en el SI es  $\text{kg m}^2/\text{s}$ . La dirección de  $\mathbf{L}$  es perpendicular al plano formado por  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$  y su sentido dado por la regla de la mano derecha. En la figura 8.9 se muestra los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$  que están en el plano  $xy$ , por lo tanto  $\mathbf{L}$  apunta en dirección del eje  $z$ .  $\mathbf{L}$  es cero cuando  $\mathbf{r}$  es paralela a  $\mathbf{p}$  ( $\alpha = 0$  ó  $180^\circ$ ), este es el caso cuando la partícula pasa por el origen. Si  $\mathbf{r}$  es perpendicular a  $\mathbf{p}$ ,  $\alpha = 90^\circ$ , entonces  $L = mvr$ .

Como  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$ , la magnitud de  $\mathbf{L}$  si  $\alpha$  es el ángulo entre  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$ , es:

$$L = mvr \sin \alpha$$

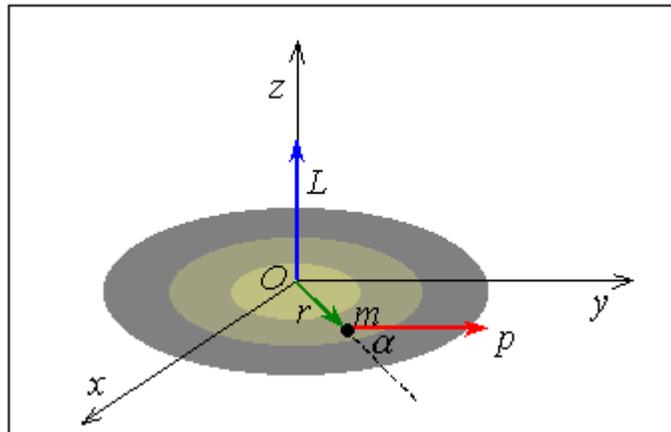


Figura 8.9

Si se calcula la derivada temporal del momento angular, se obtiene un resultado interesante, en efecto:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Como  $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ , el primer término es cero ya que es el producto vectorial de vectores paralelos; en el segundo término se usa la segunda ley de Newton en la forma  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ , entonces queda:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

que es el análogo rotacional de la segunda Ley de Newton. Esta ecuación indica que el torque sobre una partícula es igual a variación temporal del momento angular de la partícula.

Para un sistema de partículas, el momento angular total es la suma vectorial de los momentos angulares de las partículas individuales, esto es:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \dots + \mathbf{L}_n = \sum \mathbf{L}_i$$

Si el torque neto,  $\sum \boldsymbol{\tau}$ , es distinto de cero, entonces puede cambiar el momento angular total del sistema de partículas ya que se tiene:

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \sum \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \mathbf{L}_i = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

que significa que la variación temporal del momento angular total del sistema de partículas en torno a algún origen es igual al torque neto que actúa sobre el sistema.

### **8.6 ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO EN TORNO A UN EJE FIJO.**

Considerar un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje que tiene una dirección fija y supongamos que esta dirección coincide con el eje  $z$ , como se ve en la figura 8.10. Cada partícula del cuerpo rígido gira en el plano  $xy$  en torno al

eje  $z$  con rapidez angular  $\omega$ . Entonces la magnitud del momento angular de la partícula en torno al origen  $O$  es  $L_i = m_i v_i r_i$ , ya que  $\mathbf{v}$  es perpendicular a  $\mathbf{r}$ . Pero como  $v_i = r_i \omega$ , la magnitud del momento angular para una partícula  $i$  se puede escribir como:

$$L_i = m_i r_i^2 \omega$$

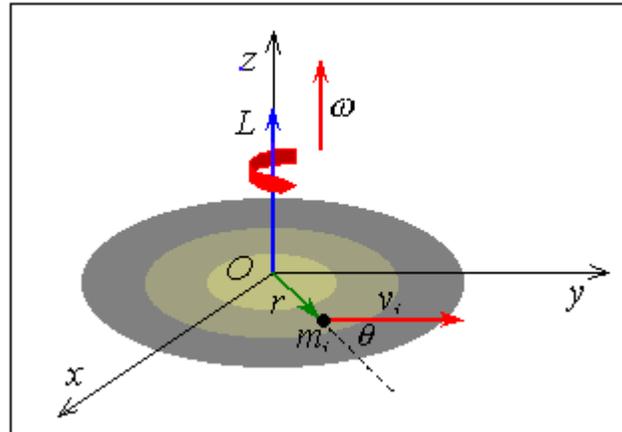


Figura 8.10

El vector  $\mathbf{L}$  está en dirección del eje  $z$  igual que el vector  $\boldsymbol{\omega}$ , por lo que se considera como la componente  $z$  del momento angular de la partícula  $i$ .

Para todo el cuerpo rígido, la componente  $z$  del momento angular total es la suma de  $\mathbf{L}_i$  de cada partícula del cuerpo rígido:

$$L_z = \sum m_i r_i^2 \omega \Rightarrow L_z = I \omega$$

donde  $I$  es el momento de inercia del cuerpo rígido alrededor del eje  $z$ . Notar que  $L = I \omega$  es el análogo rotacional del momento lineal  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . Se puede derivar  $L_z$  respecto al tiempo considerando que  $I$  es constante:

$$\frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I \alpha$$

donde  $\alpha$  es la aceleración angular del cuerpo rígido. Pero  $dL_z/dt$  es el torque neto, entonces se puede escribir

$$\Sigma \tau = I\alpha$$

que dice que el torque neto sobre un cuerpo que gira en torno a un eje fijo es igual al momento de inercia por la aceleración angular, ecuación que ya había sido deducida anteriormente.

**Ejemplo 8.6:** Una barra rígida de masa  $M$  y largo  $L$  gira en un plano vertical alrededor de un eje sin fricción que pasa por su centro. En los extremos de la barra se unen dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$ , como se ve en la figura 8.11. Calcular la magnitud del momento angular del sistema cuando su rapidez angular es  $\omega$  y la aceleración angular cuando la barra forma un ángulo  $\phi$  con la horizontal.

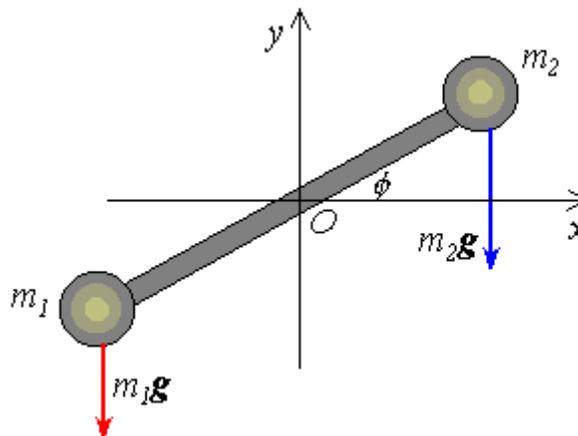


Figura 8.11 Ejemplo 8.6

**Solución:** El momento de inercia por el eje de rotación del sistema es igual a la suma de los momentos de inercia de los tres componentes del sistema:  $m_1$ , barra y  $m_2$ , con los valores de la tabla 8.1, se obtiene:

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{4}\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{3}\right)$$

Como el sistema gira con rapidez angular  $\omega$ , la magnitud del momento angular es:

$$L = I\omega = \frac{L^2}{4} \left( m_1 + m_2 + \frac{M}{3} \right) \omega$$

Para calcular la aceleración angular usamos la relación  $\tau_t = I\alpha \Rightarrow \alpha = \tau_t/I$ , al calcular el torque total en torno el eje de rotación, se obtiene:

$$\tau_t = m_1 g \frac{L}{2} \cos \phi - m_2 g \frac{L}{2} \cos \phi = \frac{1}{2} (m_1 - m_2) g L \cos \phi$$

Reemplazando en  $\alpha$  los valores de  $I$  y de  $\tau_t$ , se obtiene la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\tau_t}{I} = \frac{2(m_1 - m_2)g \cos \phi}{L(m_1 + m_2 + M/3)}$$

**Ejemplo 8.7.** En la figura 8.12 las masas  $m_1$  y  $m_2$  se conectan por una cuerda ideal que pasa por una polea de radio  $R$  y momento de inercia  $I$  alrededor de su eje. La mesa no tiene roce, calcular la aceleración del sistema.

Solución: primero se calcula en momento angular del sistema de las dos masas mas la polea:

$$L = m_1 v R + m_2 v R + I \frac{v}{R}$$

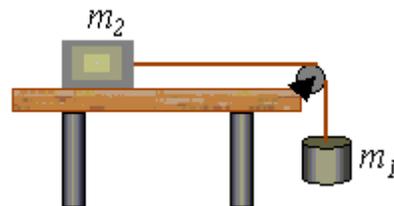


Figura 8.12 Ejemplo 8.7

Luego se calcula el torque externo sobre el sistema, la única fuerza externa que contribuye al torque total es  $m_1g$ , el valor de este torque es:  $\tau = m_1gR$ . Entonces se tiene:

$$\tau = \frac{dL}{dt} \Rightarrow m_1gR = \frac{d}{dt} \left[ (m_1 + m_2)vR + I \frac{v}{R} \right]$$

$$m_1gR = (m_1 + m_2)R \frac{dv}{dt} + \frac{I}{R} \frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{m_1g}{m_1 + m_2 + I/R^2}$$

### 8.7 CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR.

De la ecuación:

$$\sum \tau = \frac{dL}{dt}$$

si el torque neto que actúa sobre el sistema es cero, entonces:

$$\frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow L = cte \quad (8.5)$$

Esta ecuación dice que el momento angular total de un sistema es constante si el torque neto que actúa sobre el sistema es cero: es el **principio de conservación del momento angular**.

Si un cuerpo rígido experimenta una redistribución de su masa, entonces su momento de inercia cambia, en este caso la conservación del momento angular se escribe en la forma:

$$L_i = L_f$$

Si el cuerpo gira entorno a un eje fijo, entonces  $L = I\omega$ , y se puede escribir

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

Esta es la tercera Ley de conservación que hemos deducido. Entonces ahora podemos afirmar que para un sistema aislado, la energía, el momento lineal y el momento angular permanecen constantes. Son los principios de conservación en Física.

**Ejemplo 8.8.** Un proyectil de masa  $m$  y velocidad  $v_o$  se dispara contra un cilindro sólido de masa  $M$  y radio  $R$  (figura 8.13). El cilindro está inicialmente en reposo montado sobre un eje horizontal fijo que pasa por su centro de masa. El proyectil se mueve perpendicular al eje y se encuentra a una distancia  $D < R$  sobre el eje. Calcular la rapidez angular del sistema después que el proyectil golpea al cilindro y queda adherido a su superficie.

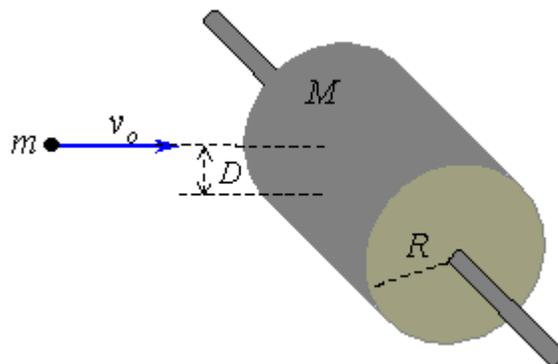


Figura 8.13 Ejemplo 8.8

**Solución:** el momento angular del sistema se conserva, entonces  $L_i = L_f$ :

$$mv_o D = I\omega = \left( \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 \right)\omega \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{mv_o D}{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}$$

**Ejemplo 8.9.** Un disco de masa  $M$  y radio  $R$  gira en un plano horizontal en torno a un eje vertical sin roce. Un gato de masa  $m$  camina desde el borde del disco hacia el centro. Si la rapidez angular del sistema es  $\omega_o$  cuando el gato está en el borde del disco, calcular: a) la rapidez angular cuando el gato ha llegado a un punto a  $R/4$  del centro, b) la energía rotacional inicial y final del sistema.

**Solución.** Llamando  $I_d$  al momento de inercia del disco e  $I_g$  al momento de inercia del gato, el momento de inercia total inicial y final del sistema es:

$$I_i = I_d + I_g = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2$$

$$I_f = \frac{1}{2}MR^2 + m r^2 = \frac{1}{2}MR^2 + m (R/4)^2$$

a) Como no hay torques externos sobre el sistema en torno al eje de rotación, se puede aplicar la conservación del momento angular

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_o = \left(\frac{1}{2}MR^2 + m(R/4)^2\right)\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{MR^2/2 + mR^2}{MR^2/2 + mR^2/16}\omega_o = \frac{M/2 + m}{M/2 + m/16}\omega_o$$

$$\text{b) } E_{Ci} = \frac{1}{2} I_i \omega_o^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} MR^2 + mR^2 \right) \omega_o^2$$

$$E_{Cf} = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} MR^2 + m \left( \frac{R}{4} \right)^2 \right) \omega_f^2 \Rightarrow$$

$$E_{Cf} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} MR^2 + m \left( \frac{R}{4} \right)^2 \right) \left( \frac{M/2 + m}{M/2 + m/16} \right) \omega_o^2$$

La energía rotacional aumenta.

**PROBLEMAS.**

- 8.1. El centro de masa de una pelota de radio  $R$ , se mueve a una rapidez  $v$ . La pelota gira en torno a un eje que pasa por su centro de masa con una rapidez angular  $\omega$ . Calcule la razón entre la energía rotacional y la energía cinética de traslación. Considere la pelota una esfera uniforme.
- 8.2. Un volante en la forma de un cilindro sólido de radio  $R = 0.6$  m y masa  $M = 15$  kg puede llevarse hasta una velocidad angular de 12 rad/s en 0.6 s por medio de un motor que ejerce un torque constante. Después de que el motor se apaga, el volante efectúa 20 rev antes de detenerse por causa de la fricción (supuesta constante). ¿Qué porcentaje de la potencia generada por el motor se emplea para vencer la fricción? R: 2.8%.
- 8.3. Un bloque de masa  $m_1$  y uno de masa  $m_2$  se conectan por medio de una cuerda sin masa que pasa por una polea en forma de disco de radio  $R$ , momento de inercia  $I$  y masa  $M$ . Asimismo, se deja que los bloques se muevan sobre una superficie en forma de cuña con un ángulo  $\theta$  como muestra la figura 8.14. El coeficiente de fricción cinético es  $\mu$  para ambos bloques. Determine a) la aceleración de los dos bloques y b) la tensión en cada cuerda. R: a)  $(m_2 \sin \theta - \mu)(m_1 + m_2 \cos \theta)g / (m_1 + m_2 + M)$ , b)  $T_1 = \mu m_2 g + m_1 a$ ,  $T_2 = T_1 + \frac{1}{2} M a$ .
- 8.4. Una masa  $m_1$  y una masa  $m_2$  están suspendidas por una polea que tiene un radio  $R$  y una masa  $m_3$  (figura 8.15). La cuerda tiene un masa despreciable y hace que la polea gire sin deslizar y sin fricción. Las masas empiezan a moverse desde el reposo cuando están separadas por una distancia  $D$ . Trate a la polea como un disco uniforme, y determine las velocidades de las dos masas cuando pasan una frente a la otra.
- 8.5. Un disco sólido uniforme de radio  $R$  y masa  $M$  puede girar libremente sobre un pivote sin fricción que pasa por un punto sobre su borde (figura 8.16). Si el disco se libera desde el reposo en la posición mostrada por el círculo. a) ¿Cuál es la rapidez de su centro de masa cuando el disco alcanza la posición indicada en el círculo punteado? b) ¿Cuál es la rapidez del punto más bajo sobre el disco en la posición de la circunferencia punteada? c) Repetir para un aro uniforme. R: a)  $2(Rg/3)^{1/2}$ , b)  $4(Rg/3)^{1/2}$ , c)  $(Rg)^{1/2}$ .

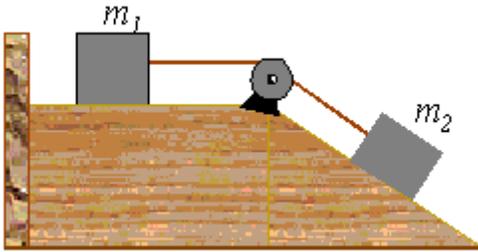


Figura 8.14

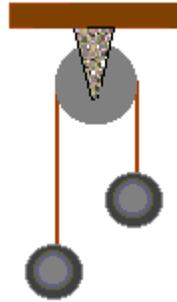


Figura 8.15

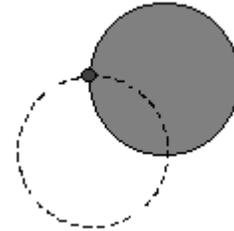


Figura 8.16

- 8.6. Un peso de 50 N se une al extremo libre de una cuerda ligera enrollada alrededor de una pelota de 0.25 m de radio y 3 kg de masa. La polea puede girar libremente en un plano vertical en torno al eje horizontal que pasa por su centro. El peso se libera 6 m sobre el piso. a) calcular la tensión de la cuerda, la aceleración de la masa y la velocidad con la cual el peso golpea el piso. b) Calcular la rapidez con el principio de la conservación de la energía. R: a) 11.4N, 7.6 m/s<sup>2</sup>, 9.5 m/s, b) 9.5 m/s.
- 8.7. Una ligera cuerda de nylon de 4 m está enrollada en un carrete cilíndrico uniforme de 0.5 m de radio y 1 kg de masa. El carrete está montado sobre un eje sin fricción y se encuentra inicialmente en reposo. La cuerda se tira del carrete con una aceleración constante de 2.5 m/s<sup>2</sup>. a) ¿Cuánto trabajo se ha efectuado sobre el carrete cuando éste alcanza una velocidad angular de 8 rad/s? b) Suponiendo que no hay la suficiente cuerda sobre el carrete, ¿Cuánto tarda éste en alcanzar esta velocidad angular? c) ¿Hay suficiente cuerda sobre el carrete? R: a) 4 J, 1.6 s, c) sí.
- 8.8. Una barra uniforme de longitud  $L$  y masa  $M$  gira alrededor de un eje horizontal sin fricción que pasa por uno de sus extremos. La barra se suelta desde el reposo en una posición vertical (figura 8.17). En el instante en que está horizontal, encuentre a) su rapidez angular, b) la magnitud de su aceleración angular, c) las componentes  $x$  e  $y$  de la aceleración de su centro de masa, y d) las componentes de la fuerza de reacción en el eje. R: a)  $(3g/L)^{1/2}$ , b)  $3g/2L$ , c)  $-(3/2\hat{i} + 3/4\hat{j})g$ , d)  $(-3/2\hat{i} + 1/4\hat{j})Mg$ .
- 8.9. Los bloques mostrados en la figura 8.18 están unidos entre si por una polea de radio  $R$  y momento de inercia  $I$ . El bloque sobre la pendiente sin fricción se mueve hacia arriba con una aceleración constante de

magnitud  $a$ . a) Determine las tensiones en las dos partes de la cuerda, b) encuentre el momento de inercia de pulea. R: a)  $T_1 = m_1(a + g\text{sen}\theta)$ ,  $T_2 = m_2(g-a)$ , b)  $m_2R^2g/a - m_1R^2 - m_2R^2 - m_1R^2(g/a)\text{sen}\theta$ .

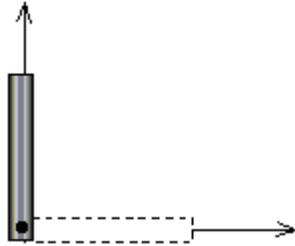


Figura 8.17

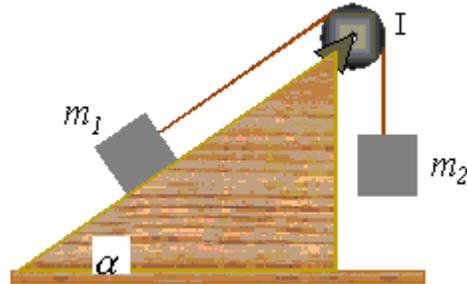


Figura 8.18

8.10. Un carrete cilíndrico hueco y uniforme tiene radio interior  $R/2$ , radio exterior  $R$  y masa  $M$  (figura 8.19). Está montado de manera que gira sobre un eje horizontal fijo. Una masa  $m$  se conecta al extremo de una cuerda enrollada alrededor del carrete. La masa  $m$  desciende a partir del reposo una distancia  $y$  y durante un tiempo  $t$ . Demuestre que el torque debido a las fuerza de roce entre el carrete y el eje es:

$$\tau = R \left[ m \left( g - \frac{2y}{t^2} \right) - \frac{5}{4} M \frac{y}{t^2} \right]$$

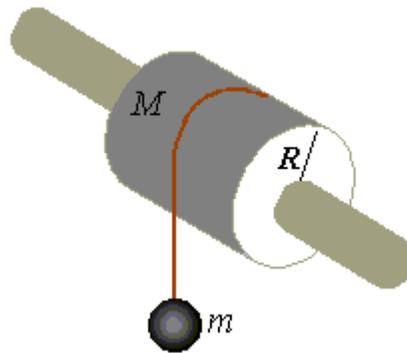


Figura 8.19

8.11. Un cilindro de 10 kg de masa rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal. En el instante en que se su centro de masa tiene una rapidez de 10 m/s, determine: a) la energía cinética traslacional de su centro de masa, b) la energía rotacional de su centro de masa, y c) su energía total. R: a) 500 J, b) 250 J, c) 750 J.

- 8.12. Una esfera sólida tiene un radio de 0.2 m y una masa de 150 kg. ¿Cuánto trabajo se necesita para lograr que la esfera ruede con una rapidez angular de 50 rad/s sobre una superficie horizontal? (Suponga que la esfera parte del reposo y rueda sin deslizar).
- 8.13. Un disco sólido uniforme y un aro uniforme se colocan uno frente al otro en la parte superior de una pendiente de altura  $h$ . Si se sueltan ambos desde el reposo y ruedan sin deslizar, determine sus rapidezces cuando alcanzan el pie de la pendiente ¿Qué objeto llega primero a la parte inferior?
- 8.14. Una bola de boliche tiene una masa  $M$ , radio  $R$  y un momento de inercia de  $(2/5)MR^2$ . Si rueda por la pista sin deslizar a una rapidez lineal  $v$ , ¿Cuál es su energía total en función de  $M$  y  $v$ ? R:  $0.7Mv^2$ .
- 8.15. Un anillo de 2.4 kg de masa de radio interior de 6 cm y radio exterior de 8 cm sube rodando (sin deslizar) por un plano inclinado que forma un ángulo de  $\theta = 37^\circ$  con la horizontal. En el momento en que el anillo ha recorrido una distancia de 2 m al ascender por el plano su rapidez es de 2.8 m/s. El anillo continua ascendiendo por el plano cierta distancia adicional y después rueda hacia abajo. Suponiendo que el plano es lo suficientemente largo de manera que el anillo no ruede fuera en la parte superior, ¿qué tan arriba puede llegar?
- 8.16. Una barra rígida ligera de longitud  $D$  gira en el plano  $xy$  alrededor de un pivote que pasa por el centro de la barra. Dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  se conectan a sus extremos. Determine el momento angular del sistema alrededor del centro de la barra en el instante en que la rapidez de cada partícula es  $v$ . R:  $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)vD$ .
- 8.17. Un péndulo cónico consta de masa  $M$  que se mueve en una trayectoria circular en un plano horizontal. Durante el movimiento la cuerda de longitud  $L$  mantiene un ángulo constante con la  $\theta$  vertical. Muestre que la magnitud del momento angular de la masa respecto del punto de soporte es:

$$L = \sqrt{\frac{gM^2 L^3 \sin^4 \theta}{\cos \theta}}$$

- 8.18. Una partícula de masa  $m$  se dispara con una rapidez  $v_o$  formando un ángulo  $\theta$  con la horizontal. Determine el momento angular de la partícula respecto del origen cuando ésta se encuentra en: a) el origen, b) el punto más alto de su trayectoria, c) justo antes de chocar con el suelo. R: a) 0, b)  $-mv_o^3 \sin^2 \theta \cos \theta / 2g$ , c)  $-2mv_o^3 \sin^2 \theta \cos \theta / g$ .
- 8.19. Un disco sólido uniforme de masa  $M$  y radio  $R$  gira alrededor de un eje fijo perpendicular su cara. Si la rapidez angular es  $\omega$ , calcular el momento angular del disco cuando el eje de rotación a) pasa por su centro de masa, y b) pasa por un punto a la mitad entre el centro y el borde.
- 8.20. Una partícula de 0.4 kg de masa se une a la marca de 100 cm de una regla de 0.1 kg de masa. La regla gira sobre una mesa horizontal sin fricción con una velocidad angular de 4 rad/s. Calcular el momento angular del sistema cuando la regla se articula torno de un eje, a) perpendicular a la mesa y que pasa por la marca de 50 cm, b) perpendicular a la mesa y que pasa por la marca de 0 cm. R: a)  $0.43 \text{ kgm}^2/\text{s}$ , b)  $1.7 \text{ kgm}^2/\text{s}$ .
- 8.21. Una mujer de 60 kg que está parada en el borde de una mesa giratoria horizontal que tiene un momento de inercia de  $500 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  y un radio de 2 m. La mesa giratoria al principio está en reposo y tiene libertad de girar alrededor de un eje vertical sin fricción que pasa por su centro. La mujer empieza a caminar alrededor de la orilla en sentido horario (cuando se observa desde arriba del sistema) a una rapidez constante de 1.5 m/s en relación con la Tierra. a) ¿En qué dirección y con qué rapidez angular gira la mesa giratoria b) ¿Cuánto trabajo realiza la mujer para poner en movimiento la mesa giratoria? R: a)  $0.36 \text{ rad/s}$ , antihorario.
- 8.22. Una barra uniforme de masa  $M$  y longitud  $d$  gira en un plano horizontal en torno de un eje vertical fijo sin fricción que pasa por su centro. Dos pequeñas cuentas, cada una de masa  $m$ , se montan sobre la barra de manera tal que pueden deslizar sin fricción a lo largo de su longitud. Al principio las cuentas se fijan por medio de retenes ubicados en las posiciones  $x$  (donde  $x < d/2$ ) a cada lado del centro, tiempo durante el cual el sistema gira una rapidez angular  $\omega$ . Repentinamente, los retenes se qui-

tan y las pequeñas cuentas se deslizan saliendo de la barra. Encuentre, a) la rapidez angular del sistema en el instante en que las cuentas alcanzan los extremos de la barra, y b) la rapidez angular de la barra después de que las cuentas han salido de ella.

- 8.23. Un bloque de madera de masa  $M$  que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción está unido a una barra rígida de longitud  $L$  y masa despreciable. La barra gira alrededor de un pivote en el otro extremo. Una bala de masa  $m$  que se desplaza paralela a la superficie horizontal y normal a la barra con rapidez  $v$  golpea el bloque y queda incrustada en él. a) ¿Cuál es el momento angular del sistema bala-bloque? b) ¿Qué fracción de la energía cinética original se pierde en la colisión? R: a)  $mvL$ , b)  $M/(M+m)$ .
- 8.24. Una cuerda se enrolla alrededor de un disco uniforme de radio  $R$  y masa  $M$ . El disco se suelta desde el reposo con la cuerda vertical y su extremo superior amarrado a un soporte fijo. A medida que el disco desciende, demuestre que a) la tensión en la cuerda es un tercio del peso del disco. b) La magnitud de la aceleración del centro de masa es  $2g/3$ , y c) la rapidez del centro de masa es  $(4gh/3)^{1/2}$ . Verifique su respuesta a la pregunta c) utilizando métodos de energía.
- 8.25. Una pequeña esfera sólida de masa  $m$  y de radio  $r$  rueda sin deslizar a lo largo de la pista mostrada en la figura 8.20. Si parte del reposo en la parte superior de la pista a una altura  $h$ , donde  $h$  es grande comparada con  $r$  a) Cuál es el valor mínimo de  $h$  (en función de  $R$ ) de modo que la esfera complete la trayectoria? b) ¿Cuáles son las componentes de fuerza de la esfera en el punto  $P$  si  $h = 3R$ ?
- 8.26. Un proyectil de masa  $m$  se mueve a la derecha con rapidez  $v_0$ . El proyectil golpea y queda fijo en el extremo de una barra estacionaria de masa  $M$  y longitud  $D$  que está articulada alrededor de un eje sin fricción que pasa por su centro (figura 8.21). a) Encuentre la rapidez angular del sistema justo después de la colisión. b) Determine la pérdida fraccionaria de energía mecánica debida a la colisión.

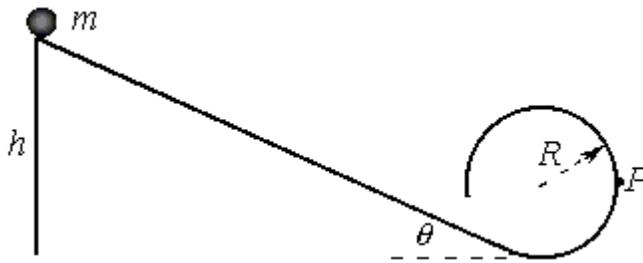


Figura 8.20



Figura 8.21

- 8.27. A una bola de boliche se le da una rapidez inicial  $v_0$  en una canal de manera tal que inicialmente se desliza sin rodar. El coeficiente de fricción entre la bola y la canal es  $\mu$ . Demuestre que durante el tiempo en que ocurre el movimiento de rodamiento puro, a) la rapidez del centro de masa de la bola es  $5v_0/7$ , y b) la distancia que recorre es  $12v_0^2/49\mu g$ . (Sugerencia: Cuando ocurre el movimiento de rodamiento puro,  $v_{cm} = R\omega$ . Puesto que la fuerza de fricción proporciona la desaceleración, a partir de la segunda ley de Newton se concluye que  $a_{cm} = \mu g$ .)
- 8.28. El alambre de un carrete de masa  $M$  y radio  $R$  se desenrolla con una fuerza constante  $F$  (figura 8.22). Suponiendo que el carrete es un cilindro sólido uniforme que no desliza, muestre que, a) la aceleración del centro de masa es  $4F/3M$ , y b) la fuerza de fricción es hacia la *derecha* y su magnitud es igual a  $F/3$ . c) Si el cilindro parte del reposo y rueda sin deslizar, ¿Cuál es la rapidez de su centro de masa después que ha rodado una distancia  $D$ ? R: c)  $(8FD/3M)^{1/2}$ .
- 8.29. Suponga un disco sólido de radio  $R$  al cual se le da una rapidez angular  $\omega_0$  alrededor de un eje que pasa por su centro y después se baja hasta una superficie horizontal y se suelta, como en la (figura 8.23). Suponga también que el coeficiente de fricción entre el disco y la superficie es  $\mu$ . a) Calcular la rapidez angular del disco una vez que ocurre el rodamiento puro. b) Calcular la pérdida fraccionaria de energía cinética desde el momento en que el disco se suelta hasta que ocurre el rodamiento puro c) Muestre que el tiempo que tarda en ocurrir el movimiento de rodamiento puro es  $R\omega_0/3\mu g$ . d) Muestre que el tiempo que recorre el disco antes de que ocurra el rodamiento puro es  $R^2\omega_0^2/18\mu g$ .

- 8.30. La figura 8.24 muestra un carrete de alambre que descansa sobre una superficie horizontal. Cuando se tira, no se desliza en el punto de contacto  $P$ . El carrete se tira en las direcciones indicadas por medio de los vectores  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  y  $F_4$ . Para cada fuerza determine la dirección en que rueda el carrete. Advierta que la línea de acción de  $F_2$  pasa por  $P$ .
- 8.31. El carrete mostrado en la figura 8.24 tiene un radio interior  $r$  y un radio externo  $R$ . El ángulo  $\theta$  entre la fuerza aplicada y la horizontal puede variar. Demuestre que el ángulo crítico para el cual el carrete no rueda y permanece estacionario está dado por  $\cos\theta = r/R$ . (Sugerencia: En el ángulo crítico la línea de acción de la fuerza aplicada pasa por el punto de contacto.)

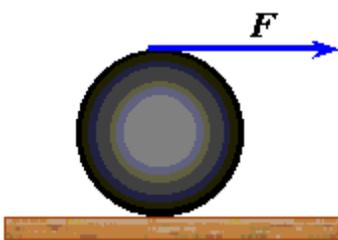


Figura 8.22

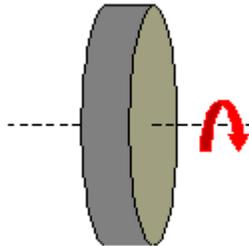


Figura 8.23

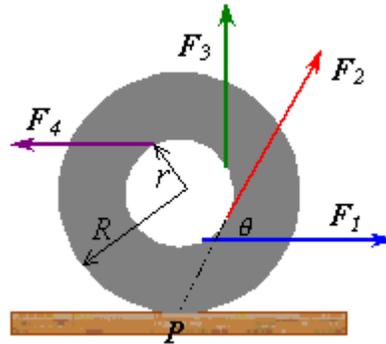


Figura 8.24

## CAPITULO 9. LEY DE GRAVITACION UNIVERSAL.

### 9.1 LA LEY Y LA FUERZA GRAVITACIONAL.

La *Ley de Gravitación Universal* fue descubierta por Newton, cuando le cayó una manzana en la cabeza mientras hacia una siesta debajo de un manzano. Por este hecho Newton le pregunto al manzano “¿manzano, si la manzana cae, quizá todos los cuerpos en el Universo se atraen entre sí de la misma forma como la manzana fue atraída por la Tierra?”. Como el manzano nada le respondió, Newton comenzó a trabajar sobre eso hasta que descubrió la *Ley de Gravitación Universal*, que publicó en 1686 en sus *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Se puede enunciar de la siguiente forma:

***“Toda partícula material del universo atrae a cualquier otra partícula con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa”***

Si las partículas que tienen masas  $m_1$  y  $m_2$  están separadas una distancia  $r$  medida desde sus centros, como se ve en la figura 9.1, entonces, de acuerdo a la ley de gravitación universal, la fuerza de atracción gravitacional  $F_G$  ejercida por la masa  $m_1$  sobre la masa  $m_2$  es:

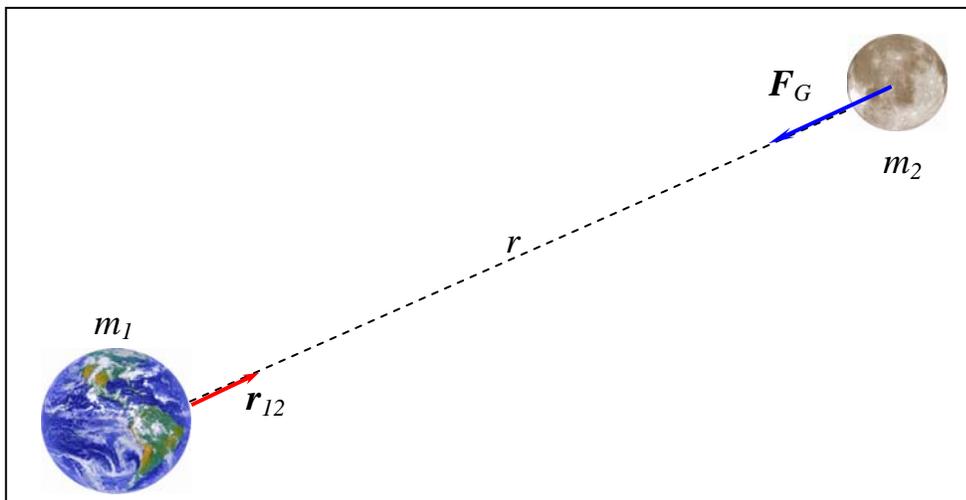


Figura 9.1

$$\vec{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad (9.1)$$

Su magnitud es:

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

La constante de proporcionalidad  $G$  se llama **Constante de Gravitación Universal**, y  $\hat{r}_{12}$  es un vector unitario radial dirigido desde la masa  $m_1$  a la masa  $m_2$ . El valor de  $G$ , que se determina experimentalmente, y su unidad de medida en el SI es  $6.672 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ . El signo menos en la  $\vec{F}_G$  indica que la fuerza es de atracción, dirigida desde  $m_2$  hacia  $m_1$ , es decir es opuesta a la dirección radial hacia fuera, desde la masa  $m_1$  que ejerce la fuerza sobre  $m_2$ ; en los cálculos su valor numérico es siempre positivo.

En este punto se debe tener presente que:

- La constante universal  $G$  no se debe confundir con el vector  $\mathbf{g}$ , que ni es universal ni es constante.
- La ley de gravitación universal no es ecuación de definición de ninguna de las variables físicas contenidas en ella.
- La ley de gravitación universal expresa la fuerza entre partículas. Si se quiere determinar la fuerza gravitacional entre cuerpos reales, se los debe considerar formado por un conjunto de partículas y usar cálculo integral.
- Las fuerzas de gravitación entre partículas son parejas de acción y reacción.

## 9.2 FUERZA GRAVITACIONAL Y PESO.

La fuerza con que la Tierra atrae a los cuerpos cerca de la superficie terrestre se definió como el peso del cuerpo,  $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ . Esta es la fuerza gravitacional  $\vec{F}_G$  entre el cuerpo de masa  $m$  y la Tierra de masa  $M_T$ , separados una distancia entre sus centros  $r = R_T + z$ , donde  $R_T$  es el radio de la Tierra y  $z$  es la altura de  $m$  sobre el suelo. Igualando las expresiones de las fuerzas  $\mathbf{P}$  y  $\vec{F}_G$  se obtiene:

$$mg = G \frac{mM_T}{(R_T + z)^2}$$

$$g = G \frac{M_T}{(R_T + z)^2}$$

Esta ecuación permite calcular el valor de la aceleración de gravedad  $g$  a cualquier altura  $z$  sobre la superficie, ya que se conoce  $G$ , la  $M_T$  y el  $R_T$ . De esta ecuación se observa que  $g$  disminuye con la altura. En la tabla 9.1 se muestra la variación de  $g$  con la latitud  $\phi$  y con la altura  $z$ .

TABLA 9.1.

Variación de $g$ con la latitud $\phi$ en $z = 0$		Variación de $g$ con la altura $z$ en $\phi = 45^\circ$	
$\phi$ ( $^\circ$ )	$g$ ( $m/s^2$ )	$z$ ( $km$ )	$g$ ( $m/s^2$ )
0	9.78036	0	9.80616
10	9.78195	1	9.803
20	9.78641	5	9.791
30	9.79329	10	9.775
40	9.80171	20	9.745
45	9.80616	30	9.708
50	9.81071	100	9.598
60	9.81719	1000	7.33
70	9.82368	5000	3.08
80	9.83016	10000	1.49
90	9.83208	$\infty$	0

La aceleración de gravedad  $g$  también varía con la latitud debido a que la Tierra no es una esfera, es un elipsoide achatado levemente en los polos, de manera que el radio ecuatorial es 21 km mayor que el radio polar, valor pequeño comparado con el radio medio de la Tierra de 6367.47 km. La Tierra no es un cuerpo rígido, tiene un comportamiento plástico. Por efecto de la rotación terrestre, la aceleración centrípeta disminuye desde el ecuador, donde es máxima, hacia los polos, donde se anula, produciendo una mayor fuerza centrípeta

en zonas ecuatoriales, que “estira” a la Tierra hacia afuera más que en zonas polares, por eso la Tierra es achatada en los polos. Esto tiene como consecuencia que la aceleración de gravedad no apunte directamente hacia el centro de la Tierra, sino que está levemente desviada de la dirección vertical. La desviación máxima que tiene  $g$  de la vertical es de  $11'40''$  a  $45^\circ$  de latitud, y la variación del valor de  $g$  en superficie es menos que  $0.5\%$ , por lo que se puede considerar constante.

**Ejemplo 9.1:** Un satélite de  $300\text{ kg}$  describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura igual al radio terrestre (figura 9.2). Calcular a) la rapidez orbital del satélite, b) su período de revolución, c) la fuerza gravitacional sobre el satélite, d) comparar su peso en la órbita con su peso en la superficie de la Tierra.

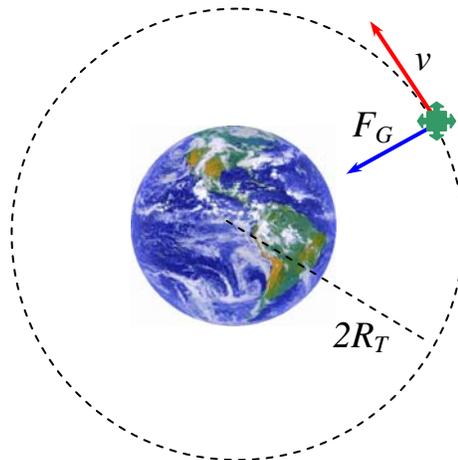


Figura 9.2 Ejemplo 9.1

- a) El satélite de masa  $m_s$ , se mantiene en órbita por la acción de la fuerza gravitacional, que actúa como fuerza centrípeta, es decir  $F_G = F_C$ , entonces se igualan las expresiones de ambas fuerzas:

$$F_C = m_s \frac{v^2}{r}$$

$$F_G = G \frac{M_T m_s}{r^2}$$

Como  $r = 2R_T$ , reemplazando

$$F_G = F_C \Rightarrow \frac{GMm}{4R_T^2} = m \frac{v^2}{2R_T} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_T}{2R_T}$$

Datos:  $G = 6.7 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$ ,  $M_T = 6 \times 10^{24} Kg$ ,  $R_T = 6.37 \times 10^6 m$

$$v = \sqrt{\frac{(6.7 \times 10^{-11}) Nm^2 / kg^2 (6 \times 10^{24}) kg}{2 \times 6.37 \times 10^6 m}} = 5600 \frac{m}{s}$$

b) El satélite completa una vuelta en torno a la Tierra a la altura de  $2R_T$  moviéndose con la rapidez anterior, entonces:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(2R_T)}{v}$$

$$\Delta t = \frac{4\pi \times 6,37 \times 10^6 m}{5600 m/s} = 14294 s \Rightarrow \Delta t = 3.97 \text{ horas}$$

c) La fuerza gravitacional en la órbita corresponde al peso del satélite en ese lugar, se calcula como sigue:

$$F = \frac{6.7 \times 10^{-11} Nm^2 / kg^2 \times 6 \times 10^{24} kg \times 300 kg}{(2 \times 6.37 \times 10^6 m)^2}$$

$$F = 740 N$$

d) Para hacer esta comparación, calculamos su peso en tierra.

$$P = mg = 300 \times 9.8 = 2940N \Rightarrow$$

$$\frac{P_{z=0}}{P_{z=2R}} = \frac{2940}{740} \Rightarrow P_{z=2R} = 0,25P_{z=0}$$

### 9.3 ENERGIA POTENCIAL DE LA FUERZA GRAVITACIONAL.

Una partícula de masa  $m$  que se encuentre sobre la superficie terrestre, moviéndose entre dos puntos cualesquiera, esta bajo la influencia de la fuerza gravitacional, cuya magnitud es:

$$F_G = \frac{GM_T m}{r^2}$$

El cambio de energía potencial de la partícula de masa  $m$  se define como el trabajo negativo realizado por la fuerza gravitacional, en este caso:

$$\Delta E_P = E_{Pf} - E_{Pi} = -W = -\int_{P_i}^{P_f} \vec{F}_G \cdot d\vec{P}$$

Reemplazando en esta expresión la fuerza gravitacional, para calcular la energía potencial gravitacional de la partícula de masa  $m$ , se obtiene:

$$E_{gf} - E_{gi} = \int_{r_i}^{r_f} GM_T m \frac{dr}{r^2} = GM_T m \left( -\frac{1}{r} \Big|_{r_i}^{r_f} \right)$$

$$E_{gf} - E_{gi} = -GM_T m \left( \frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$

Como el punto de referencia inicial para la energía potencial es arbitrario, se puede elegir en  $r = \infty$ , donde la fuerza gravitacional (y la aceleración de gravedad) es cero. Con esta elección se obtiene la energía potencial gravitacional general para una partícula de masa  $m$  ubicada a una altura  $r$  medida desde el centro de la Tierra:

$$E_g(r) = -\frac{GM_T m}{r} \quad (9.2)$$

La energía potencial gravitacional entre partículas varía en  $1/r$ , y es negativa porque la fuerza gravitacional es de atracción y se ha tomado la energía potencial como cero cuando la separación entre las partículas es infinita. Como la fuerza gravitacional es de atracción, un agente externo debe realizar trabajo positivo para aumentar la separación entre las partículas. El trabajo produce un aumento de la energía potencial cuando las dos partículas están separadas, esto significa que  $E_g$  se vuelve menos negativa cuando  $r$  aumenta.

Esta ecuación es general y vale para cualquier par de partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  separadas una distancia  $r$ , y extenderse a un sistema que contenga varias partículas, en ese caso la energía total del sistema es la suma sobre todos los pares de partículas, entonces para dos partículas se tiene:

$$E_g(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r}$$

**Ejemplo 9.2:** calcular la energía total para un satélite de masa  $m$ , que se mueve en una órbita circular con rapidez tangencial constante  $v$ , a una altura  $r$  desde el centro de la Tierra (figura 9.3).

**Solución:** la energía total del satélite es la suma de la energía cinética más la potencial, que es constante, reemplazando los valores correspondientes de cada energía, se tiene:

$$E = E_c + E_p = cte.$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

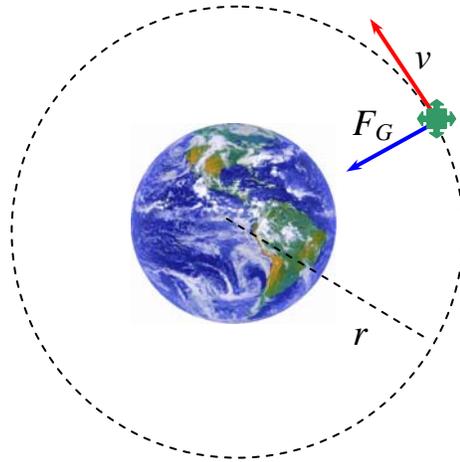


Figura 9.3. Ejemplo 9.2.

Pero se debe calcular la  $v$  del satélite, como la órbita es circular aplicando la segunda ley de Newton al satélite de masa  $m$ , considerando que la fuerza gravitacional es la fuerza centrípeta necesaria para mantener al satélite en órbita,

$$F_G = F_C \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = ma_c = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{GMm}{2r} = \frac{1}{2}mv^2$$

reemplazando en la energía total  $E$ , queda:

$$E = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r}$$

$$E = -\frac{GMm}{2r}$$

se observa que la energía total es negativa en el caso de órbitas circulares. Generalizando este resultado al sistema solar, **la energía total del sistema Sol-planeta es una constante del movimiento.**

### 9.3.1 Velocidad de escape

Suponga que un objeto de masa  $m$  se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre con una velocidad  $v_i$ , como se muestra en la figura 9.4. Podemos utilizar consideraciones de energía para encontrar el valor mínimo de la velocidad inicial con la cual el objeto escapará del campo gravitacional de la Tierra. La ecuación anterior nos brinda la energía total del objeto en cualquier punto cuando se conocen su velocidad y distancia desde el centro de la Tierra. En la superficie de ésta  $v_i = v$  y  $r_i = R_T$ . Cuando el objeto alcanza su altura máxima,  $v_f = 0$  y  $r_f = r_{m\acute{a}x}$ . Debido a que la energía total del sistema es constante, al reemplazar estas condiciones se obtiene:

$$E_{ci} + E_{Pi} = E_{cf} + E_{Pf}$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = 0 + -\frac{GM_T m}{r_{m\acute{a}x}}$$

Al despejar  $v_i^2$  se obtiene

$$v_i^2 = 2GM_T \left( \frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_{m\acute{a}x}} \right)$$

En consecuencia, si se conoce la velocidad inicial, esta expresión puede usarse para calcular la altura máxima  $h$ , puesto que sabemos que  $h = r_{m\acute{a}x} - R_T$ .

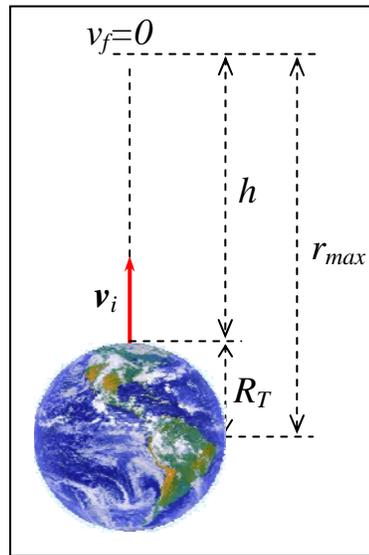


Figura 9.4

Ahora tenemos la posibilidad de calcular la velocidad mínima que el objeto debe tener en la superficie terrestre para escapar de la influencia del campo gravitacional del planeta. Al viajar a esta velocidad mínima, el objeto puede alcanzar *justamente* el infinito con una velocidad final igual a cero. Al establecer  $r_{m\acute{a}x} = \infty$  en la ecuación anterior y tomando  $v_i = v_{esc}$ , que se llama la velocidad de escape, obtenemos

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}}$$

Advierta que esta expresión para  $v_{esc}$  es independiente de la masa del objeto. En otras palabras, una nave espacial tiene la misma velocidad de escape que una molécula. Además, el resultado es independiente de la dirección de la velocidad, siempre que la trayectoria no intercepte la Tierra.

Si al objeto se le da una velocidad inicial igual a  $v_{esc}$ , su energía total es igual a cero. Esto puede verse cuando  $r = \infty$ , la energía cinética del objeto y su energía potencial son ambas cero. Si  $v_i$  es más grande que  $v_{esc}$ , la energía total es mayor que cero y el objeto tiene un poco de energía cinética residual en  $r = \infty$ .

Por último, usted debe observar que las ecuaciones anteriores pueden aplicarse a objetos lanzados desde cualquier planeta. Es decir, en general, la velocidad de escape desde cualquier planeta de masa  $M$  y radio  $R$  es

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

**Ejemplo 9.3.** Calcular la velocidad de escape de la Tierra para una nave espacial de 5000 kg y determine la energía cinética que debe tener en la superficie terrestre para escapar del campo gravitacional de la Tierra.

**Solución:** Utilizando la ecuación anterior con  $M_T = 5.98 \times 10^{24}$  kg y  $R_T = 6.37 \times 10^6$  m, obtenemos

$$\begin{aligned} v_{esc} &= \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \\ &= \sqrt{\frac{2(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}{6.37 \times 10^6 \text{ m}}} \\ v_{esc} &= 11.2 \times 10^3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

La energía cinética de la nave espacial es

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{1}{2} m v_{esc}^2 = \frac{1}{2} (5 \times 10^3 \text{ kg})(1.12 \times 10^4 \text{ m/s})^2 \\ E_C &= 3.14 \times 10^{11} \text{ J} \end{aligned}$$

Las velocidades de escape para los planetas, la Luna y el Sol las puede calcular como ejercicio. Los valores varían de 1.1 km/s para Plutón a casi 618 km/s para el Sol. Estos resultados, junto con algunas ideas de la teoría cinética de

los gases, explican por qué algunos planetas tienen atmósferas y otros no. Una molécula de gas tiene una energía cinética promedio que depende de su temperatura. Por consiguiente, las moléculas más ligeras, como el hidrógeno y el helio, tienen una velocidad promedio más alta que las partículas más pesadas a la misma temperatura. Cuando la velocidad de las moléculas más ligeras no es mucho menor que la velocidad de escape, una fracción significativa de ellas tiene oportunidad de escapar del planeta, dejándolo a este sin atmósfera. Este mecanismo explica también porque la Tierra retiene muy poco las moléculas de hidrógeno y helio en su atmósfera, en tanto que las moléculas más pesadas como el oxígeno y nitrógeno no escapan tan fácilmente.

#### **9.4 LAS LEYES DE KEPLER.**

Los movimientos de los planetas, estrellas y otros cuerpos celestes han sido observados por la gente durante miles de años. En la antigüedad, los científicos consideraban a la Tierra como el centro del universo. Así el modelo llamado geocéntrico fue elaborado por el astrónomo griego Claudio Ptolomeo (100-170) en el segundo siglo DC y fue aceptado durante los siguientes 1400 años. En 1543, el astrónomo polaco Nicolás Copérnico (1473-1543) sugirió que la Tierra y los otros planetas giraban en órbitas circulares alrededor del Sol (el modelo heliocéntrico).

El astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601) hizo mediciones astronómicas más precisas por un periodo de 20 años y proporcionó una prueba rigurosa de los modelos alternativos del sistema solar. Es interesante observar que estas precisas observaciones sobre los planetas y de 777 estrellas visibles a simple vista se llevaron a cabo con un gran sextante y un compás, sin un telescopio, el cual aún no se había inventado.

El astrónomo alemán Johannes Kepler, quien era ayudante de Brahe, obtuvo los datos astronómicos de este último y empleó casi 16 años en tratar de desarrollar un modelo matemático para el movimiento de los planetas. El análisis completo se resume en tres enunciados, conocidos como las *leyes de Kepler*:

1. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de los puntos focales.

2. El radio vector trazado desde el Sol hasta un planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales
3. El cuadrado del periodo orbital de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica.

Medio siglo después, Newton demostró que estas leyes son la consecuencia de una fuerza única que existe entre cualesquiera dos masas. La ley de la gravedad de Newton, junto con su desarrollo de las leyes del movimiento, entrega las bases para la solución matemática completa del movimiento de planetas y satélites.

#### 9.4.1 La tercera ley de Kepler.

La tercera ley de Kepler puede predecirse a partir de la ley de gravitación universal. Considere un planeta de masa  $M_P$  que se mueve alrededor del Sol de masa  $M_S$  en una órbita circular, como en la figura 9.5. Puesto que la fuerza gravitacional ejercida sobre el planeta por el Sol es igual a la fuerza central necesaria para mantener al planeta moviéndose en un círculo,

$$\frac{GM_S M_P}{r^2} = \frac{M_P v^2}{r}$$

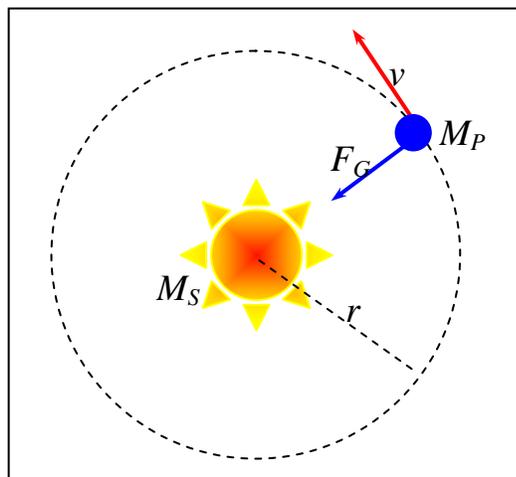


Figura 9.5.

Sin embargo, la velocidad orbital del planeta es simplemente  $2\pi r/T$  donde  $T$  es su periodo; por lo tanto, la expresión anterior se convierte en

$$\frac{GM_S M_P}{r^2} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r}$$

$$T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM_S} \right) r^3 = K_S r^3 \quad (9.3)$$

donde  $K_S$  es una constante dada por

$$K_S = \frac{4\pi^2}{GM_S} = 2.97 \times 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$$

La ecuación 9.3 es la tercera ley de Kepler. La ley es válida también para órbitas elípticas si sustituimos  $r$  por la longitud del semieje mayor,  $a$  (figura 9.6). Advierta que la constante de proporcionalidad,  $K_S$  es independiente de la masa del planeta. En consecuencia, la ecuación 9.3 es válida para cualquier planeta. Si hubiéramos considerado la órbita de un satélite alrededor de la Tierra, como la Luna, entonces la constante tendría un valor diferente, con la masa del Sol sustituida por la masa de la Tierra. En este caso, la constante de proporcionalidad es igual a  $4\pi^2/GM_T$ .

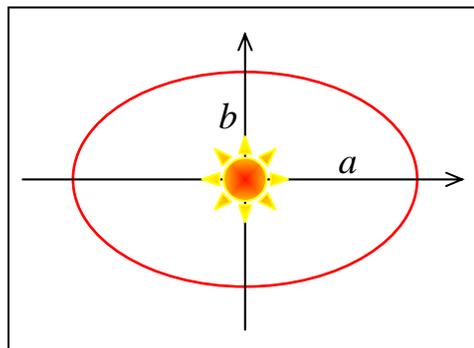


Figura 9.6

**Ejemplo 9.4.** Calcular la masa del Sol a partir del hecho de que el periodo de traslación de la Tierra en torno al Sol es un año y la distancia de la Tierra al Sol es  $1.496 \times 10^{11}$  m.

Solución: Usando la tercera ley de Kepler, despejando  $M_S$ , se obtiene:

$$M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Reemplazando los valores numéricos, con  $T = 1 \text{ año} = 3.156 \times 10^7$  s:

$$M_S = \frac{4\pi^2 (1.496 \times 10^{11} \text{ m})^3}{\left(6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}\right) (3.156 \times 10^7 \text{ s})^2}$$

$$M_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg.}$$

Advierta que el Sol tiene 333000 veces más masa que la Tierra.

#### 9.4.2 La segunda ley de Kepler y la conservación del momento angular.

Considere un planeta de masa  $M_P$  que se mueve en torno al Sol en una órbita elíptica, como se ilustra en la figura 9.7. La fuerza gravitacional que actúa sobre el planeta siempre es a lo largo del radio vector, dirigido hacia el Sol. El torque que actúa sobre el planeta debido a esta fuerza es cero puesto que  $\mathbf{F}$  es paralelo a  $\mathbf{r}$ . Esto es,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times F(r)\hat{r} = 0$$

Pero recordemos que el torque es igual a la tasa de cambio en el tiempo del momento angular o  $\tau = d\mathbf{L}/dt$ . Por lo tanto, debido a que  $\tau = 0$ , el momento angular  $\mathbf{L}$  del planeta es una constante del movimiento:

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{p}} = M_P \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{v}} = \text{constante}$$

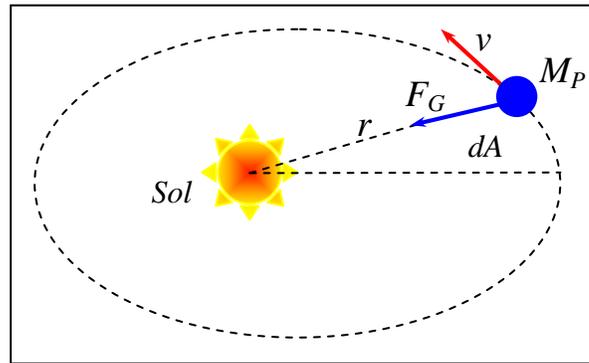


Figura 9.7

En virtud de que  $L$  es una constante del movimiento, vemos que el movimiento del planeta en cualquier instante está restringido al plano formado por  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{v}$ . Este importante resultado significa que:

***Tanto el momento angular total como la energía total del sistema Sol - planeta son constantes del movimiento.***

Podemos relacionar este resultado con la siguiente consideración geométrica. El radio vector  $\mathbf{r}$  en la figura 9.7 barre un área  $dA$  en un tiempo  $dt$ . Esta área es igual a la mitad del área  $|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}|$  del paralelogramo formado por los vectores  $\mathbf{r}$  y  $d\mathbf{r}$ . Puesto que el desplazamiento del planeta en un tiempo  $dt$  es  $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ , obtenemos

$$dA = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v} dt| = \frac{L}{2M_p} dt$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2M_p} = \text{constante} \quad (9.4)$$

donde  $L$  y  $M_p$  son constantes del movimiento. Así pues, concluimos que el radio vector desde el Sol hasta un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. Este resultado es la segunda ley de Kepler.

La segunda ley de Kepler no revela la naturaleza inversa al cuadrado de la fuerza de gravedad. Aunque no lo demostramos aquí, la primera ley de Kepler es una consecuencia directa del hecho de que la fuerza gravitacional varía como  $1/r^2$ . Esto es, bajo una ley de fuerza del inverso al cuadrado, es posible demostrar que las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en un foco.

**Ejemplo 9.5.** Un satélite de masa  $M_S$  se mueve en una órbita elíptica alrededor de la Tierra. Las distancias mínima y máxima al satélite desde la Tierra reciben el nombre de perihelio ( $r_p$  en la figura 9.8) y afelio (indicado por  $r_a$ ). Si la velocidad del satélite en  $r_p$  es  $v_p$ , ¿cuál es su velocidad en  $r_a$ .

**Solución.** El momento angular del satélite en relación con la Tierra es  $M_S \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ . En los puntos  $r_a$  y  $r_p$ ,  $\mathbf{v}$  es perpendicular a  $\mathbf{r}$ . En consecuencia la magnitud del momento angular en estos puntos es  $L_a = M_S v_a r_a$  y  $L_p = M_S v_p r_p$ . Debido a que el momento angular es constante, vemos que:

$$M_S v_a r_a = M_S v_p r_p$$

$$v_a = \frac{r_p}{r_a} v_p$$

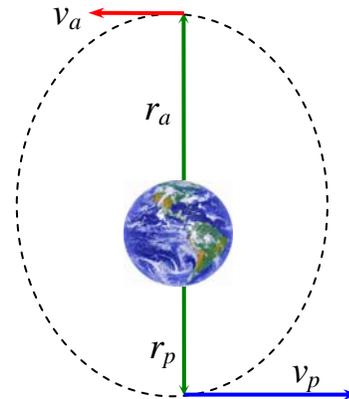


Figura 9.8 Ejemplo 9.5.

### 9.5 EL CAMPO GRAVITACIONAL.

Cuando Newton publicó por primera vez su teoría de la gravitación, para sus contemporáneos fue difícil aceptar la idea de un campo de fuerza que pudiera actuar a través de una distancia. Se preguntaban cómo era posible que dos masas interactuaran aun cuando no estuvieran en contacto entre sí. Aunque el propio Newton no pudo responder a esta pregunta, su teoría fue ampliamente

aceptada debido a que explicó de manera satisfactoria el movimiento de los planetas.

Un planteamiento alternativo en la descripción de la interacción gravitacional, por lo tanto, es introducir el concepto de un **campo gravitacional** que cubre cada punto en el espacio. Cuando una partícula de masa  $m$  se sitúa en un punto donde el campo es el vector  $\mathbf{g}$ , la partícula experimenta una fuerza  $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$ . En otras palabras, el campo ejerce una fuerza sobre la partícula. Por lo tanto, el campo gravitacional se define por medio de

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_g}{m}$$

Es decir, el campo gravitacional en un punto en el espacio es igual a la fuerza gravitacional experimentada por una masa de prueba situada en el punto, dividido por la masa de prueba. Por ejemplo, considere un objeto de masa  $m$  cerca de la superficie terrestre. La fuerza gravitacional sobre el objeto está dirigida hacia el centro de la Tierra y tiene una magnitud  $mg$ . Puesto que la fuerza gravitacional sobre el objeto tiene una magnitud  $GM_T m/r^2$  (donde  $M_T$  es la masa de la Tierra), el campo  $\mathbf{g}$  a una distancia  $r$  del centro de la Tierra es

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_g}{m} = -\frac{GM_T}{r^2} \hat{r}$$

donde  $\hat{r}$  es un vector unitario que apunta radialmente hacia fuera de la Tierra, y el signo menos indica que el campo apunta hacia el centro terrestre, como en la figura 9.9. Advierta que los vectores de campos en diferentes puntos que circundan la Tierra varían tanto en dirección como en magnitud. En una región pequeña cercana a la superficie de la Tierra, el campo hacia abajo  $g$  es aproximadamente constante y uniforme, como se indica en la figura 9.9. La ecuación anterior es válida en todos los puntos *fuera* de la superficie terrestre, suponiendo que la Tierra es esférica. En la superficie terrestre, donde  $r = R_T$ ,  $\mathbf{g}$  tiene una magnitud de  $9.8 \text{ N/kg}$ .

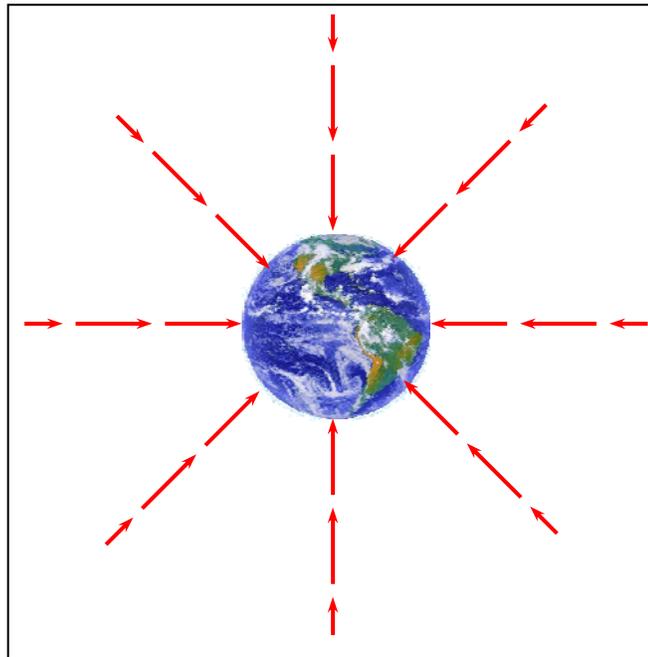


Figura 9.9 Representación del campo gravitacional terrestre.

**PROBLEMAS.**

- 9.1. Dos objetos se atraen entre sí con una fuerza gravitacional de magnitud  $1 \times 10^{-8} \text{ N}$  cuando están separados 20 cm. Si la masa total de los dos objetos es 5 kg, ¿cuál es la masa de cada uno?
- 9.2. La distancia entre los centros de dos esferas es 3 m. La fuerza entre ellas es  $2.75 \times 10^{-12} \text{ N}$ . ¿Cuál es la masa de cada esfera, si la masa de una de ellas es el doble de la otra?
- 9.3. Tomás que tiene una masa de 70 kg y Sara de 55 kg, se encuentran en una pista de bailes separados 10 m. Sara levanta la mirada y ve a Tomás, ella siente una atracción. a) Si la atracción es gravitacional, calcule su magnitud. b) Pero la Tierra ejerce una atracción gravitacional sobre Sara ¿Cuál es su magnitud?
- 9.4. La masa de la Luna es  $7.34 \times 10^{22} \text{ kg}$  y se encuentra a  $3.8 \times 10^8 \text{ m}$  de la Tierra. a) Calcule la fuerza de atracción gravitacional entre las dos. b) Encuentre el valor del campo gravitacional terrestre en la Luna.
- 9.5. ¿Qué pasaría con el valor de G y de g, si la tierra tuviera el doble de su masa pero el mismo tamaño?
- 9.6. Comparar la masa y el peso de un astronauta de 75 kg en la Tierra, con su peso cuando esta en una nave espacial en órbita circular alrededor de la Tierra, a una altura de  $10^5 \text{ km}$ .
- 9.7. a) Un satélite está a una distancia de la Tierra igual al radio terrestre. ¿Cómo es la aceleración de la gravedad en ese punto comparada con la de la superficie de la Tierra? b) ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra tiene que elevarse el satélite para que su peso sea la mitad del que tiene sobre la Tierra? R: a) 0.25g, b) 9000 km.
- 9.8. La masa de Júpiter es aproximadamente 300 veces la masa de la Tierra, y su radio es aproximadamente 10 veces el terrestre. Calcule el valor de g en la superficie de Júpiter.

- 9.9. Urano emplea 84 años en darle la vuelta al Sol. Encuentre el radio de la órbita de Urano como múltiplo del radio de la órbita de la Tierra
- 9.10. Si la distancia del sol a un planeta fuera 5 veces la distancia de la Tierra al Sol, ¿En cuántos años el planeta completa una vuelta alrededor del Sol?
- 9.11. El 19 de Julio de 1969 la órbita de la nave espacial Apolo 11 alrededor de la Luna fue ajustada a una órbita media de  $111 \text{ km}$ . El radio de la Luna es  $1785 \text{ km}$ . a) ¿Cuántos minutos le tomó completar una órbita? b) ¿Qué velocidad tenía alrededor de la Luna?
- 9.12. Conocidas las distancias entre la Luna, la Tierra y el Sol respectivamente y sus masas, encuentre la razón de las fuerzas gravitacionales ejercidas por la Tierra y el Sol sobre la Luna.
- 9.13. Calcular la energía potencial gravitacional de un satélite de  $1000 \text{ kg}$  que se encuentra a una altura de  $2000 \text{ km}$  sobre la Tierra. R:  $-4.8 \times 10^{10} \text{ J}$ .
- 9.14. Un satélite de  $500 \text{ kg}$  está en una órbita circular de radio  $2R_T$ , calcular la energía requerida para cambiar al satélite a otra órbita de radio  $4R_T$ .
- 9.15. Calcular la energía requerida para enviar una nave de  $1000 \text{ kg}$  desde la Tierra hasta una distancia donde la fuerza de gravedad sea despreciable.
- 9.16. Un satélite meteorológico de  $100 \text{ kg}$  describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de  $9630 \text{ km}$ . Calcular: a) su rapidez tangencial en la órbita, b) el trabajo necesario para ponerlo en esa órbita. R: a)  $5000 \text{ m/s}$ , b)  $3.75 \times 10^9 \text{ J}$ .
- 9.17. Un satélite de  $300 \text{ kg}$  describe una órbita circular en torno a la Tierra a una altura de 3 radios terrestres. Calcular: a) su rapidez tangencial, b) el trabajo para ponerlo en órbita, c) la aceleración de gravedad a la altura del satélite. R: a)  $3963 \text{ m/s}$ , b)  $1.4 \times 10^{10} \text{ J}$ , c)  $0.61 \text{ m/s}^2$ .
- 9.18. Un satélite geostacionario es aquel que se mueve en sincronismo con la Tierra, permaneciendo en una posición fija sobre algún punto del ecuador, completando por lo tanto una vuelta en torno a la Tierra en un día.

Calcular: a) su altura, b) su rapidez tangencial. R: a) 35930 km, b) 3075 m/s.

- 9.19. Los satélites de órbita polar orbitan a una altura de 850 km de la superficie terrestre. Calcular a) la rapidez tangencial para un satélite de 300 kg, b) el tiempo en completar una vuelta. R: a) 7450 m/s, b) 1.7 horas.
- 9.20. Demuestre que la energía potencial de un sistema que conste de cuatro partículas iguales de masa  $M$ , colocadas en las esquinas de un cuadrado de lado  $D$ , es  $E = -(4 + \sqrt{2})(GM^2/D)$ .
- 9.21. Se dispara un cohete verticalmente desde la superficie terrestre y alcanza una altura máxima de tres veces el radio de la Tierra. ¿Cuál fue la rapidez inicial del cohete?
- 9.22. Buscar los datos necesarios para calcular la energía potencial total del sistema Tierra-Sol-Luna. Suponga que la Tierra y la Luna están a la misma distancia del Sol.
- 9.23. El sistema binario de Plaskett se compone de dos estrellas que giran en una órbita circular en torno de un centro de gravedad situado a la mitad entre ellas. Esto significa que las masas de las dos estrellas son iguales. Si la velocidad orbital de cada estrella es de  $v$  y el periodo de cada una es de  $T$ , calcule la masa  $M$  de cada estrella. R:  $2v^3T/\pi G$ .
- 9.24. Dos planetas  $X$  e  $Y$  se mueven en órbitas circulares en sentido antihorario en torno de una estrella. Los radios de sus órbitas están en la proporción 3:1. En cierto momento están alineados, formando una línea recta con la estrella. Cinco años después el planeta  $X$  ha girado  $90^\circ$  ¿Dónde está el planeta  $Y$  en ese momento? R: a) 1.3 rev de su posición original.
- 9.25. Después de que se agote su combustible nuclear, el destino final de nuestro Sol es colapsarse en una *enana blanca*, es decir, una estrella que tiene aproximadamente la masa del Sol, pero el radio de la Tierra. Calcule a) la densidad promedio de la enana blanca, b) la aceleración de caída libre en su superficie, c) la energía potencial gravitacional de un objeto de 1kg en su superficie. R: a)  $1.85 \times 10^9 \text{ kg/m}^3$ , b)  $3.3 \times 10^6 \text{ m/s}^2$ , c)  $-2.1 \times 10^{13} \text{ J}$ .

- 9.26. El cometa Halley se acerca al Sol a una distancia aproximada de 0.57UA, y su periodo orbital es de 75.6 años. (UA es la abreviatura de unidad astronómica, donde  $1\text{UA} = 1.50 \times 10^8 \text{ km}$  es la distancia media Tierra-Sol.) ¿Qué tan lejos del Sol viajará el cometa Halley antes de que inicie su viaje de regreso?
- 9.27. a) ¿Cuál es velocidad mínima necesaria para que una nave espacial escape del sistema solar, empezando en la órbita de la Tierra? b) El *Voyager I* alcanzó una velocidad máxima de 125000 km/h en su camino para fotografiar Júpiter. ¿Más allá de que distancia desde el Sol esta velocidad es suficiente para escapar del Sistema Solar? R: a) 42 m/s, b)  $2.2 \times 10^{11} \text{ m}$ .
- 9.28. Para cualquier que órbita alrededor del Sol, la tercera ley de Kepler puede escribirse como  $T^2 = kr^3$ , donde  $T$  es el periodo orbital y  $r$  es el semi-eje mayor de la órbita. a) ¿Cuál es valor de la  $k$  si  $T$  se mide en años y  $r$  se mide en UA? b) Con el valor de  $k$  encuentre el periodo orbital de Júpiter si su radio medio desde el Sol es 5.2UA.
- 9.29. Tres masas iguales son colocadas en tres esquinas de un cuadrado de lado  $D$ . Encuentre este campo gravitacional  $\mathbf{g}$  en la cuarta esquina debida a estas masas. R:  $((2\sqrt{2} + 1)/2)(GM/D^2)$ .
- 9.30. Tres objetos puntuales que tienen masas  $m$ ,  $2m$  y  $3m$  están fijos en las esquinas de un cuadrado de longitud de lado  $a$  de modo tal que el objeto más ligero se ubica en la esquina superior izquierda, el objeto más pesado está en la esquina inferior izquierda y el tercero, en la esquina superior derecha. Determine la magnitud y dirección del campo gravitacional  $\mathbf{g}$  resultante en el centro del cuadrado. R:  $-2\sqrt{2} Gm/a^2 \hat{i}$ .
- 9.31. Dos planetas hipotéticos de masa  $m_1$  y  $m_2$  y radios  $r_1$  y  $r_2$ , respectivamente, están en reposo cuando están separados una distancia infinita. Debido a su atracción gravitacional, se mueven uno hacia otro en el curso de una colisión. a) Cuando la separación entre sus centro es  $d$ , calcular la rapidez de cada planeta y su rapidez relativa. b) Calcular la energía cinética de cada planeta justo antes de que choquen, si  $m_1 = 2 \times 10^{24} \text{ kg}$ ,  $m_2 = 8 \times 10^{24} \text{ kg}$ ,  $r_1 = 3 \times 10^6 \text{ m}$  y  $r_2 = 5 \times 10^6 \text{ m}$ . ( Sugerencia: tanto la ener-

gía como el momento se conservan). R:  $v_1 = m_2 \sqrt{\frac{2G}{d(m_1 + m_2)}}$ ,  
 $v_2 = m_1 \sqrt{\frac{2G}{d(m_1 + m_2)}}$ ,  $v_{rel} = \sqrt{\frac{2G(m_1 + m_2)}{d}}$ , b)  $E_1 = 1.1 \times 10^{32} \text{ J}$ ,  $E_2 = 2.7 \times 10^{31} \text{ J}$ .

- 9.32. El *Vanguard I*, lanzado el 3 de marzo de 1958, es el satélite artificial más viejo aún en órbita. Su órbita inicial tenía un apogeo de 3970 km y un perigeo de 650 km. Su velocidad máxima era de 8.23 km/s y tenía una masa de 1.60 kg. a) Determine el periodo de órbita (utilice el semi-eje mayor). b) Determine las velocidades en el apogeo y en el perigeo. c) Encuentre la energía total del satélite.
- 9.33. Después de una explosión supernova, una estrella puede experimentar un colapso gravitacional hasta alcanzar un estado extremadamente denso conocido como una estrella de neutrones, en el cual todos los electrones y protones se comprimen para formar neutrones. Una estrella de neutrones que tiene una masa aproximada o igual a la del Sol tendría un radio de casi 10 km. Encuentre a) la aceleración de caída libre en su superficie, y c) la energía requerida para llevar un neutrón de  $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$  de masa desde su superficie hasta el infinito.

## CAPITULO 10. NOCIONES DE MECANICA DE FLUIDOS.

### 10.1 ESTRUCTURA DE LA MATERIA.

En Griego, *átomo* significa indivisible, por eso esta palabra fue adoptado por los físicos para aplicarla a la partícula más pequeña y fundamental. Pero ahora se sabe que los elementos químicos están formados por partículas elementales más pequeñas que son los electrones, protones y neutrones, que en conjunto constituyen el átomo. Los átomos de la materia común, que tienen un diámetro del orden de  $10^{-10}$  m, se componen de un núcleo pesado, de diámetro del orden de  $10^{-15}$  m, que contiene protones cargados positivamente y neutrones sin carga, que esta normalmente rodeado por uno o varios electrones livianos cargados negativamente. La función de los neutrones es actuar como ‘pegamento’ para mantener unidos los protones en el núcleo, si los neutrones no estuvieran presente, la fuerza repulsiva entre las partículas cargadas positivamente desintegraría al núcleo.

La masa del protón,  $1.67 \times 10^{-27}$  kg, que se define como la **unidad de masa atómica  $u$** , y su carga,  $1.6 \times 10^{-19}$  Coulomb, se usan como unidad. El átomo mas simple es el hidrógeno neutro, su modelo clásico se muestra en la figura 10.1a, su núcleo tiene un protón y se dice que tiene número de masa 1 y carga eléctrica +1. Alrededor del núcleo del átomo de hidrógeno neutro, orbita un electrón, que tiene carga igual a  $-1$ , una masa de  $9.1 \times 10^{-31}$  kg, igual a  $u/1840$ , con un radio de la órbita de  $0.5 \times 10^{-10}$  m.

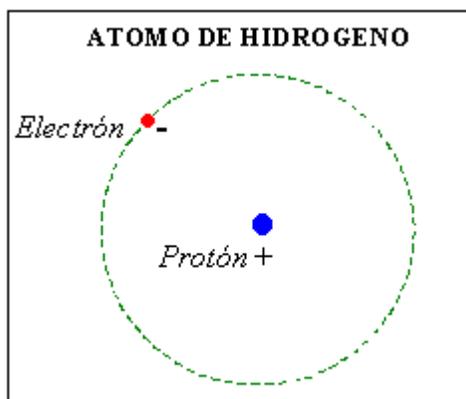


Figura 10.1a

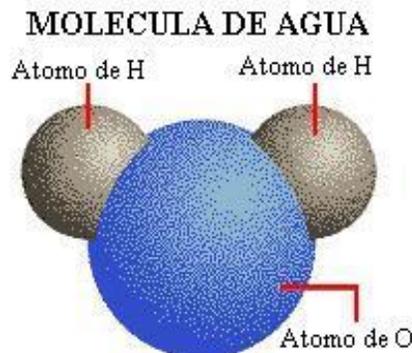


Figura 10.1b

La materia común, como el aire o agua, se compone de moléculas que son eléctricamente neutras. Una molécula puede tener un solo átomo o bien puede ser la unión de dos o más átomos. Existen moléculas compuestas de cientos, miles, incluso millones de átomos. En la figura 10.1b se muestra un esquema de una molécula de agua.

¿Pero termina aquí la división? Se ha descubierto que existen partículas más pequeñas aún, llamadas *quarks*, formadas por seis variedades diferentes de otras partículas bautizadas con nombres exóticos: *arriba*, *abajo*, *extraño*, *encanto*, *belleza* y *superior*. Pero la materia no es continua, ya que entre cada par de partículas hay un enorme espacio vacío. Aún así ¡las distancias en la frontera de la Física nuclear son sorprendentemente cortas! En el otro extremo, las distancias en el Universo son súperrequetehiper grandes. Los extremos de la Física los podemos resumir en los tres infinitos, que se ilustran en la figura 10.2.

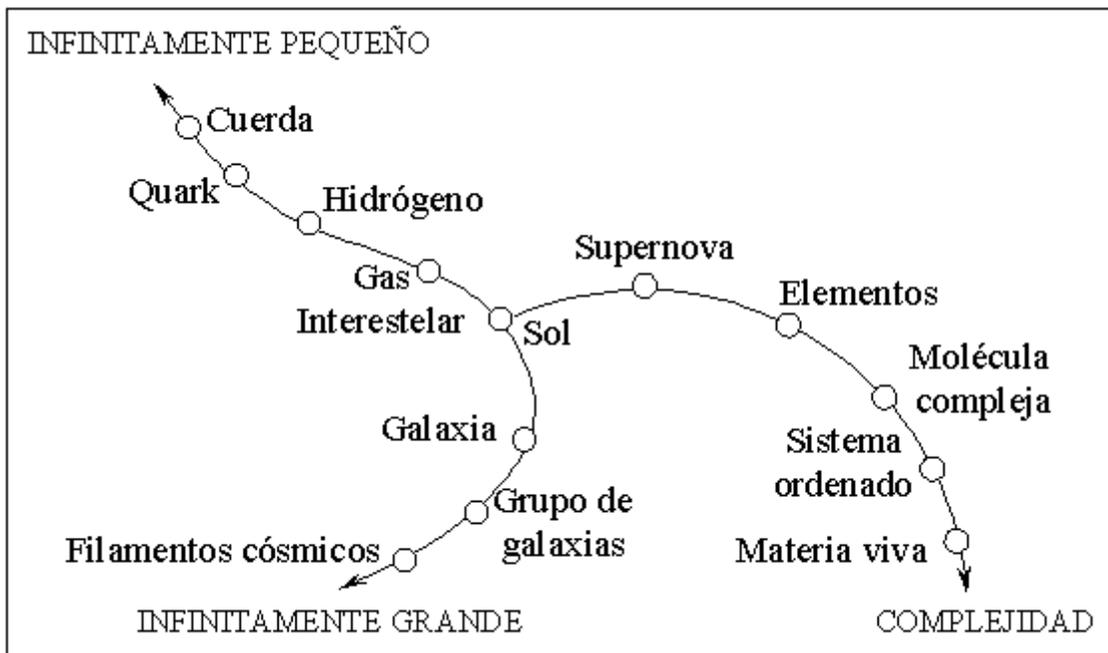


Figura 10.2 Los tres infinitos

Además ¿por qué habrían de existir únicamente partículas livianas con carga negativa y partículas pesadas con carga positiva? Cuando se resuelven las ecuaciones de la mecánica cuántica, generalmente se encuentran dos solucio-

nes simétricas, una da los resultados del comportamiento de la materia, pero no hay ninguna razón para descartar la otra solución, por lo tanto se propuso que describía el comportamiento de la *antimateria*, que no se conocía. De acuerdo a las leyes de la física, en el principio todo era simétrico: materia y antimateria estaban presente en el Universo en partes iguales. Se busco la existencia de esta antimateria hasta que se descubrieron las antipartículas elementales: antielectrón o positrón, antiprotón, antineutrón, antiquarks, etc, que tienen la misma masa que las partículas elementales, pero cargas opuestas.

### ***10.1.1 Estados de la materia.***

La materia generalmente se clasifica de acuerdo con algunos de los cuatro estados en que se encuentra, sólido, líquido, gaseoso y plasma. Un sólido tiene forma y volumen definidos. Un líquido tiene un volumen definido pero no una forma definida. Un gas no tiene ni volumen ni forma definidos.

Para cualquier sustancia, el estado líquido existe a una temperatura mayor que la del estado sólido, tiene mayor agitación térmica y las fuerzas moleculares no son suficientes para mantener a las moléculas en posiciones fijas y se pueden mover en el líquido. Lo común que tienen los líquidos con los sólidos es que si actúan fuerzas externas de compresión, surgen grandes fuerzas atómicas que se resisten a la compresión del líquido. En el estado gaseoso, las moléculas tienen un continuo movimiento al azar y ejercen fuerzas muy débiles unas con otras; las separaciones promedios entre las moléculas de un gas son mucho más grandes que las dimensiones de las mismas.

Un sólido se comprime bajo la acción de fuerzas externas, pero si estas fuerzas dejan de actuar, tiende a retomar su forma y tamaño original, por esto se dice que tiene elasticidad. Según el tiempo de respuesta del cambio de la forma a una fuerza externa o presión, la materia puede comportarse como un sólido o como un fluido. En algunos casos, el material se comporta en un estado intermedio, como por ejemplo plástico, goma, asfalto, grasa, miel, masilla, etc.

### ***10.1.2 Plasma.***

Cuando se calienta un sólido, se transforma en líquido, si se continúa calentando se convierte en gas. Pero si aumenta aún más la temperatura del gas, los

choques entre las partículas se vuelven tan violentos que son capaces de variar la estructura de las partículas. Los electrones pueden ser liberados de los átomos produciendo iones cargados positivamente. Las moléculas de un gas pueden romperse al someterlas a la acción de la luz ultravioleta, rayos X, corriente eléctrica o a intenso calor y los electrones pueden ser violentamente separados de la molécula. Al resto de la molécula que le falta uno o más electrones, queda cargada positivamente, se le llama un *ión* y el gas queda ionizado. El gas ionizado formado de electrones con carga negativa y de iones con carga positiva se llama *plasma*, que es otro estado fluido de la materia, sólo existe a altas temperaturas (mayor que 2000 K). A pesar de ser poco común en la vida cotidiana, es el estado predominante de la materia en el Universo. El Sol, las estrellas o el gas de la luz en un tubo fluorescente están en estado de plasma.

### 10.1.3 Fluido.

Un fluido es un conjunto de moléculas distribuidas al azar que se mantienen unidas por fuerzas cohesivas débiles y por fuerzas ejercidas por las paredes de un envase. De otra forma, si definimos un fluido como aquellos materiales que no lo son, los fluidos son todos aquellos que no son sólidos. Por lo tanto, son fluidos los líquidos y los gases. Una diferencia esencial entre un fluido y un sólido es que un fluido no soporta esfuerzos tangenciales y los sólidos sí. De acuerdo con esto, los fluidos son sistemas que están en continuo movimiento. En este contexto, la mecánica clásica debe modificarse un poco, por la poca utilidad que tiene aquí el concepto de masa, por lo que esta se reemplaza por otro concepto, llamado densidad, que corresponde a la masa por unidad de volumen.

En los problemas que nos interesan, los fluidos con los que trataremos principalmente son el aire y el agua. Cuando estudiamos la atmósfera y el océano en sus movimientos de escala planetaria, nos referimos a estos como fluidos geofísicos. Por ejemplo el estudio de los ciclones y anticiclones, de la corriente de Humboldt, o en otros planetas de la gran Mancha Roja de Júpiter.

## 10.2 DENSIDAD.

Una propiedad de cualquier sustancia es su densidad. La *densidad*  $\rho$  de cualquier material se define como la cantidad de masa  $m$  contenida en cada unidad

de volumen  $V$ . Como la distribución de masa puede variar si se considera el volumen completo de sustancia, se debe definir en forma microscópica la densidad en cada punto del cuerpo en forma diferencial, esto es:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (10.1)$$

La densidad es una magnitud física escalar, su unidad de medida en el SI es  $\text{kg/m}^3$ . La densidad cambia con la temperatura ya que el volumen depende de la temperatura, por lo que se dan valores bajo condiciones de presión y temperaturas dadas. Si un cuerpo tiene la misma densidad en todo el volumen, es decir es constante, se dice que es homogéneo, en caso contrario es heterogéneo, en este caso el cuerpo tiene una distribución de masa variable dentro del volumen. La densidad de los líquidos (y sólidos) es del orden de 1000 veces la de los gases. En la tabla siguiente se dan los valores de la densidad de algunas sustancias comunes.

MATERIAL	DENSIDAD ( $\text{kg/m}^3$ )
Hidrógeno	0.09
Aire	1.28
Madera de pino	500
Petróleo	800
Hielo	917
Agua	1000
Aluminio	2700
Hierro	7860
Cobre	8900
Plomo	11340
Mercurio	13500
Oro	19300
Platino	21400

La densidad de los fluidos depende de la temperatura y de la presión. La ecuación que expresa esta dependencia se llama ecuación de estado, pero este tema

es un aspecto de los fluidos que se tratará en forma cuantitativa en el curso de Física de Termodinámica. Baste decir ahora que la densidad depende del inverso de la temperatura. La variación de densidad con la temperatura en los gases da lugar al fenómeno de convección, muy importante para el transporte de calor en un fluido. Por ejemplo, la convección en la atmósfera produce el movimiento vertical ascendente del aire, lo que origina disminución de presión en superficie, expansión de la masa de aire, enfriamiento por la expansión y el ascenso, condensación por efecto del enfriamiento, formación de nubes debido a la condensación y de precipitación.

### 10.3 PRESION.

Las fuerzas que existen sobre un objeto sumergido en un fluido son sólo aquellas que tienden a comprimir al objeto. La fuerza ejercida por un fluido sobre el objeto inmerso en él, representado por el cubo de la figura 10.3, es siempre perpendicular a la superficie del objeto. La presión  $p$  del fluido en el nivel donde se encuentra sumergido el cuerpo se define como la razón de la magnitud de la fuerza  $F$  normal a la superficie y el área  $A$ . La presión dentro del fluido no es la misma en todos los puntos, por lo que se debe definir la presión en un punto determinado considerando una fuerza  $dF$  normal a un elemento de superficie  $dA$ , entonces la presión en el punto es:

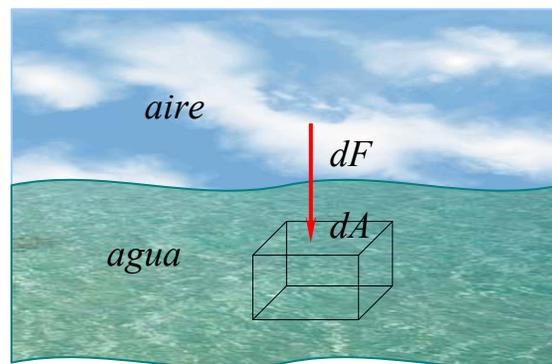


Figura 10.3

$$p = \frac{dF}{dA} \quad (10.2)$$

La unidad de medida de la presión en el sistema SI es  $\text{N/m}^2$ , que se llama Pascal, con símbolo Pa. Otras unidades de uso común para la presión son atmósfera (atm), centímetros de mercurio (cm de Hg) o bar. Algunos factores de conversión comunes entre diferentes unidades son:

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} \text{ y } 1 \text{ milibar (mbar)} = 10^{-3} \text{ bar} = 100 \text{ Pa} = 1 \text{ hPa}$$

$$1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 1.013 \text{ bar} = 1013 \text{ mbar} = 1013 \text{ hPa} = 76 \text{ cm de Hg}$$

#### 10.4 LA ECUACIÓN HIDROSTÁTICA.

Para un fluido en reposo dentro de un envase, todos los puntos a la misma profundidad tienen la misma presión, si no fuera así no estaría en reposo. Imaginar un volumen de fluido (aire) elemental en la atmósfera, de superficie  $dA$  y alto  $dz$ , como se ve en la figura 10.4.

La fuerza en la parte inferior del volumen es vertical hacia arriba de magnitud  $F_1 = p_1 dA = p(z) dA$  y en la parte superior es hacia abajo de valor  $F_2 = p_2 dA = p(z+dz) dA$ . El peso del volumen es  $dP = (dm)g$ . Como el volumen está en equilibrio, por la primera Ley de Newton, se tiene:

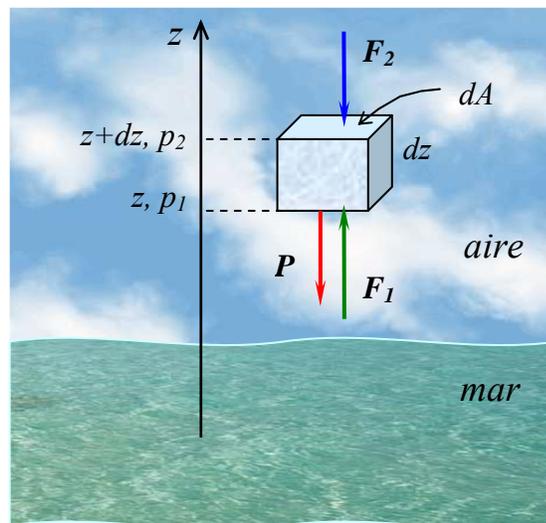


Figura 10.4

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_1 - F_2 - P = 0$$

$$p(z)dA - p(z+dz)dA - (dm)g = 0$$

$$[p(z) - p(z+dz)]dA - (dm)g = 0$$

Pero  $p(z+dz) - p(z) = dp$ ,  $\rho = dm/dV \Rightarrow dm = \rho dV$  y  $dV = dAdz$ , reemplazando se obtiene:

$$-dpdA - \rho dAdz g = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g} \quad (10.3)$$

Esta se llama **ecuación hidrostática**, se le da ese nombre porque fue deducida para una porción de fluido en equilibrio estático. Se observa que la presión disminuye con la altura y aumenta con la profundidad en el fluido.

Si  $p_o$  es el valor de la presión en el nivel  $z_o$  (que puede ser el nivel del mar) y  $p$  el valor de la presión a una altura  $z$  en la atmósfera o una profundidad  $z$  en el océano, y **si la densidad es constante**, se puede integrar la ecuación hidrostática y se obtiene:

$$p - p_o = -\rho g(z - z_o)$$

Si se considera como volumen de fluido una porción de océano, en cuya superficie actúa la presión atmosférica  $p_o$ , la presión a la profundidad  $h = z_o - z$  en el mar, lago o cualquier envase que contenga algún líquido de densidad constante, será:

$$p = p_o + \rho g(z_o - z)$$

$$p = p_o + \rho gh$$

Esta ecuación, que es válida sólo cuando la densidad es constante, dice que la presión a la profundidad  $h$  de la superficie libre de un fluido es mayor que la presión atmosférica  $p_o$  en  $\rho gh$ . De esto también se deduce que la presión es la misma en cualquier punto ubicado a la misma profundidad y no se ve afectada por la forma del envase. El término  $\rho gh$  se llama **presión manométrica**, ya que corresponde a la presión obtenida de la lectura de un **manómetro**, es decir, la diferencia entre la presión total y una presión de referencia, que con frecuencia es la presión atmosférica.

La presión del agua aumenta a medida que se baja hacia el fondo del océano y disminuye en la atmósfera si nos elevamos sobre el nivel del mar. Como la densidad del aire es unas 1000 veces menor que la del agua, el aumento de presión al descender un metro en agua es cerca de mil veces mayor a la disminución de la presión al ascender un metro de altura. En la atmósfera cerca de superficie, la presión disminuye aproximadamente un hPa cada 10 metros de elevación en la vertical y en el océano la presión aumenta aproximadamente 100 hPa cada un metro de profundidad.

**Ejemplo 10.1.** Calcular la fuerza resultante ejercida por el agua sobre una represa de profundidad  $H$  y de ancho  $D$ , que se muestra en la figura 10.5.

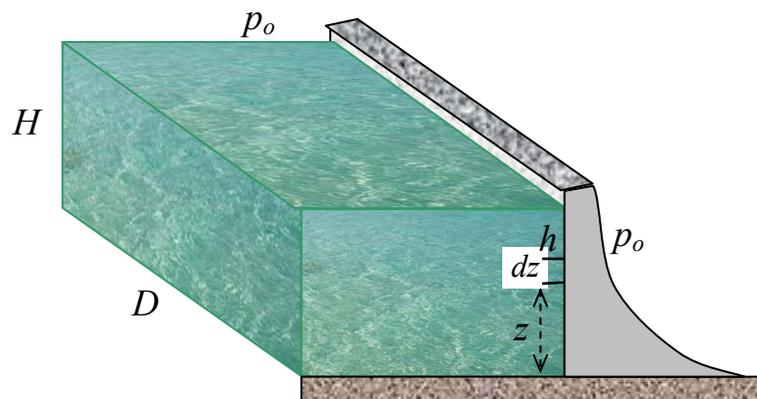


Figura 10.5. Esquema de una represa.

**Solución.** La coordenada vertical  $z$  se mide desde el fondo de la represa hacia arriba, entonces la profundidad  $H$  de la represa es igual a  $z_o$ . La presión a una profundidad  $h$  medida desde la superficie del agua hacia abajo, como se ve en la figura 10.5, se calcula usando la ecuación hidrostática, teniendo en cuenta

que la presión atmosférica  $p_o$  actúa en todos lados sobre la represa, por lo que no altera el valor de  $p$ , el cálculo da:

$$p - p_o = \rho g(z_o - z) \Rightarrow$$

$$p - p_o = \rho g(H - z)$$

Pero  $dF = (p-p_o)dA = \rho g(H-z)Ddz$ , integrando se tiene,

$$F = \int dF = \int p dA = \int_0^H \rho g(H - z)Ddz = \frac{1}{2} \rho gDH^2$$

Como la presión aumenta con la profundidad, las represas se deben construir aumentando su espesor con la profundidad.

### 10.4.1 El barómetro.

Los instrumentos usados para medir la presión son el barómetro y el manómetro. El barómetro de mercurio, inventado en 1643 por Torricelli (que fue alumno de Galileo) es un tubo cerrado en uno de sus extremos que se llena con mercurio (Hg) y después se da vuelta y se introduce en otro envase lleno también con mercurio (figura 10.6a). En este proceso, el mercurio del tubo desciende por lo que en su extremo cerrado se produce un vacío, donde la presión es cero. Por la presión de la atmósfera sobre la superficie libre del envase, la columna de mercurio dentro del tubo se eleva; al nivel del mar en condiciones normales, se encuentra que siempre la columna de mercurio en el tubo es de 76 cm. De la ecuación hidrostática integrada se obtiene  $-p_o = -\rho gh$ , donde  $\rho$  es la densidad del mercurio y  $h$  su altura. Con  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  y la densidad del mercurio que es  $13595 \text{ kg/m}^3$ , se obtiene que la presión atmosférica en condiciones normales es  $p_o = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ .

El manómetro es un tubo en U abierto a la atmósfera en uno de sus extremos, que contiene un líquido y en el otro extremo se conecta a un sistema de presión desconocida (figura 10.6b). La presión  $p$  se llama presión absoluta y la diferencia de presión  $p - p_o = \rho gh$  se llama presión manométrica.

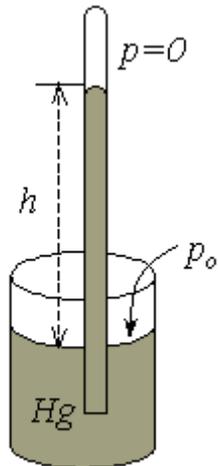


Figura 10.6a Barómetro de mercurio.

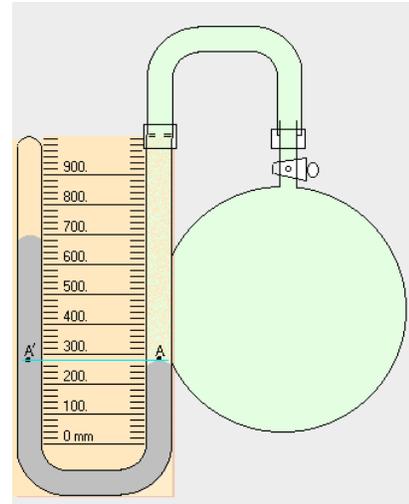


Figura 10.6b Manómetro

### 10.5 LEY DE PASCAL.

Según la ecuación hidrostática, la presión en un fluido sólo depende de la profundidad, por lo tanto cualquier variación de presión en superficie se transmite a cualquier parte del fluido. Entonces si se aplica una fuerza  $F_1$  sobre un área  $A_1$  como se ve en la figura 10.7, la misma presión se transmite con una fuerza  $F_2$  sobre un área  $A_2$ , y por la definición de presión:

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad (10.4)$$

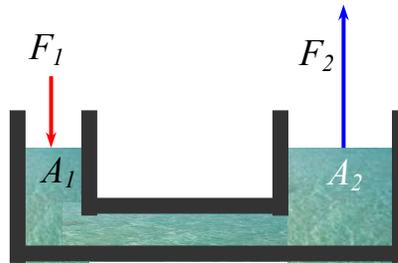


Figura 10.7

Las herramientas hidráulicas tales como frenos, gatas y elevadores de carga aprovechan este principio descubierto por Blas Pascal y se conoce como **Ley de Pascal**.

**Ejemplo 10.2.** En un elevador de carga el aire comprimido ejerce una fuerza sobre un pequeño émbolo de área circular de 5 cm de radio, que se transmite por agua a otro émbolo de 20 cm de radio. Calcular la fuerza que se debe ejercer al aire comprimido para levantar un auto de 10000 N y la presión que ejercería esa fuerza.

Solución: por la ley de Pascal, tenemos

$$F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2 = \frac{\pi 5^2}{\pi 20^2} 10000$$

$$F_1 = 625 \text{ N}$$

Notar que el valor de la fuerza necesaria, equivalente a la ejercida por una masa de 62.5 kg, es pequeña comparada con la carga a levantar.

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{625 \text{ N}}{\pi (0.05 \text{ m})^2} = 7.9 \times 10^4 \text{ Pa} = 790 \text{ hPa}$$

### 10.6 PRINCIPIO DE ARQUIMEDES.

Una consecuencia de la ecuación hidrostática es el principio de Arquímedes. Supongamos que un objeto se sumerge en un fluido como se ve en la figura 10.4. Antes de sumergir el objeto, el fluido está en equilibrio, por lo tanto el resto del fluido ejerce una fuerza sobre la porción de fluido que después ocupará el objeto, que iguala el peso de la porción de fluido. Esta fuerza también actuará sobre el objeto sumergido y se conoce como fuerza de empuje. El principio de Arquímedes se enuncia como sigue: ***“cualquier cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido es empujado hacia arriba por una fuerza que es igual al peso del volumen de fluido desplazado por el cuerpo”***.

Cualquier cuerpo inmerso en un fluido es empujado siempre verticalmente hacia arriba por el fluido, a esa fuerza se le llama ***fuerza de empuje (o de flotación), E***. Según el principio de Arquímedes, la magnitud de la fuerza de empuje es igual al peso del volumen de fluido desalojado por el objeto. La fuerza

de empuje actúa verticalmente hacia arriba y su línea de acción pasa por el punto donde se encontraba el centro de gravedad del fluido desplazado.

Se puede demostrar que la fuerza de empuje es igual al peso. En efecto, la presión en el fondo de un cubo de fluido imaginario inmerso en el fluido, como se ve en la figura 10.4, es mayor que en la parte superior por la cantidad  $\rho g \Delta z$ , donde  $\Delta z$  es la altura del cubo de fluido imaginario. Esta diferencia de presión por unidad de área  $A$ , es decir la diferencia entre las fuerzas aplicadas en la cara inferior y superior del volumen hipotético, es igual a la fuerza de empuje  $E$ , entonces:

$$F_1 - F_2 = E$$

Pero  $F_1 = p_1 A$  y  $F_2 = p_2 A \quad \Rightarrow \quad (p_1 - p_2) A = E$

Por la ecuación hidrostática:  $p_1 - p_2 = \rho g \Delta z \quad \Rightarrow$

$$\rho g \Delta z A = E \Rightarrow E = \rho g \Delta V = mg \Rightarrow$$

$$E = P \quad (10.5)$$

Para un objeto que flota sobre un fluido, la fuerza de empuje equilibra al peso del objeto. Si  $V$  es el volumen de fluido desplazado al sumergir el cuerpo en el fluido de densidad  $\rho$ , y  $V_o$  es el volumen del cuerpo de densidad  $\rho_o$ , la fuerza de empuje del fluido, según la ecuación anterior, es  $E = \rho V g$ , que es de igual magnitud al peso del cuerpo  $P = mg = \rho_o V_o g$ , entonces:

$$E = P \Rightarrow \rho V g = \rho_o V_o g \Rightarrow$$

$$\frac{V}{V_o} = \frac{\rho_o}{\rho} \quad (10.6)$$

Esta ecuación permite determinar la fracción de volumen de un objeto sumergido en un fluido de mayor densidad que la del objeto.

**Ejemplo 10.3.** Calcular la fracción del volumen de un cubo de hielo que sobresale del nivel de agua, cuando flota en un vaso con agua.

Solución: el hielo flota sobre el agua porque tiene una densidad menor que el agua,  $\rho_{hielo} = 917 \text{ kg/m}^3$ . El peso del cubo de hielo es  $P_h = m_h g = \rho_h V_h g$ . La fuerza de empuje igual al peso del agua desplazada es  $E = \rho_a V g$ , donde  $V$  es el volumen de la parte del cubo de hielo bajo el agua.

Como  $P_h = E$ , entonces la fracción de hielo sumergido es:

$$\rho V g = \rho_h V_h g = \rho_a V g \Rightarrow \frac{V}{V_h} = \frac{\rho_h}{\rho_a}$$

$$\frac{V}{V_h} = \frac{917}{1000} = 0.917$$

Por lo tanto, lo que sobresale del agua es:  $1 - V/V_h = 1 - 0.917 = 0.083$  u  $8.3\%$ .

### **Una corona de oro.**

Herón II, rey de Siracusa, pidió un día a su pariente Arquímedes, que comprobara si una corona que había encargado a un orfebre local era realmente de oro puro. El rey le pidió también de forma expresa que no dañase la corona. Arquímedes dio vueltas y vueltas al problema sin saber cómo atacarlo, hasta que un día, al meterse en la bañera para darse un baño, se le ocurrió la solución. Pensó que el agua que se desbordaba tenía que ser igual al volumen de su cuerpo que estaba sumergido. Si medía el agua que rebosaba al meter la corona, conocería el volumen de la misma y a continuación podría compararlo con el volumen de un objeto de oro del mismo peso que la corona. Si los volúmenes no fuesen iguales, sería una prueba de que la corona no era de oro puro. A consecuencia de la excitación que le produjo su descubrimiento, Arquímedes salió del baño y fue corriendo desnudo como estaba hacia el palacio gritando: “¡Lo encontré! ¡Lo encontré!”, (“Eureka, Eureka”).

La palabra griega "**¡Eureka!**" utilizada por Arquímedes, ha quedado desde entonces como una expresión que indica la realización de un descubrimiento. Al llevar a la práctica lo descubierto, se comprobó que la corona tenía un volumen mayor que un objeto de oro de su mismo peso. Contenía plata que es un metal menos denso que el oro.

### **10.7 NOCIONES ELEMENTALES DE DINAMICA DE FLUIDOS.**

Ahora analizaremos en forma muy elemental el comportamiento de los fluidos en movimiento. Cuando un fluido está en movimiento, el flujo se puede clasificar en dos tipos:

- a) Flujo estacionario o laminar si cada partícula de fluido sigue una trayectoria uniforme y estas no se cruzan, es un flujo ideal. Por ejemplo el humo de cigarrillo justo después de salir del cigarro es laminar. En el flujo estacionario la velocidad del fluido permanece constante en el tiempo. Sobre una velocidad crítica, el flujo se hace turbulento.
- b) Flujo turbulento es un flujo irregular con regiones donde se producen torbellinos. Por ejemplo el humo de cigarrillo en la parte superior alejada del cigarro es turbulento.

El flujo laminar se vuelve turbulento por efecto de la fricción que también está presente en los fluidos y surge cuando un objeto o capa del fluido que se mueve a través de él desplaza a otra porción de fluido; lo notas por ejemplo cuando corres en el agua. La fricción interna en un fluido es la resistencia que presenta cada capa de fluido a moverse respecto a otra capa. La fricción interna o roce de un fluido en movimiento se mide por un *coeficiente de viscosidad*. Por efecto de la viscosidad parte de la energía cinética del fluido se transforma en energía térmica, similar al caso de los sólidos.

Debido a que el movimiento de un fluido real es muy complejo, consideraremos un modelo de fluido ideal con las siguientes restricciones: fluido incompresible, es decir de densidad constante, no viscoso, flujo estacionario e irrotacional, en este último caso se refiere a la rotación de cada partícula de fluido y no del fluido como un todo, que puede tener una trayectoria curva o girar.

### **10.8 ECUACION DE CONTINUIDAD.**

La trayectoria seguida por una partícula de fluido estacionario se llama *línea de corriente*, así que por definición la velocidad es siempre tangente a la línea de corriente en cualquier punto. Por lo tanto las líneas de corriente no se pueden cruzar, sino en el punto de cruce, la partícula de fluido podría irse por

cualquiera de las líneas y el flujo no sería estacionario. Un conjunto de líneas de corriente forma un tubo de corriente o de flujo (figura 10.8), las partículas de fluido se pueden mover sólo a lo largo del tubo, ya que las líneas de corriente no se cruzan.

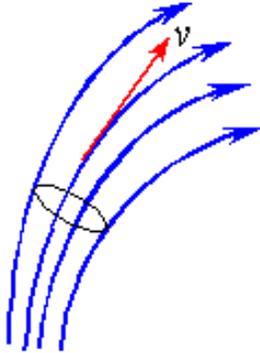


Figura 10.8

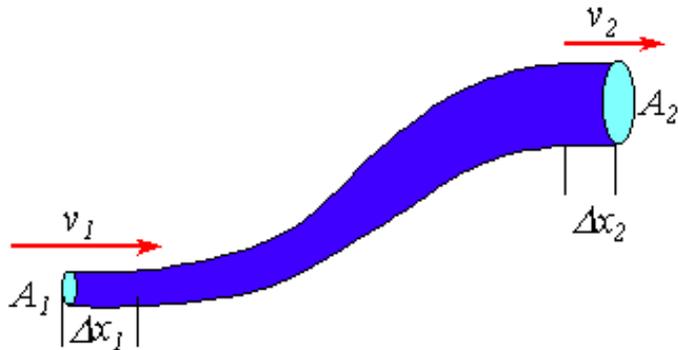


Figura 10.9

Considerar un fluido que se mueve a lo largo de un tubo de corriente, cuya sección transversal aumenta en dirección del flujo, como en la figura 10.9. En un intervalo  $\Delta t$  en la sección más angosta del tubo de área  $A_1$ , el fluido se mueve una distancia  $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$ . La masa contenida en el volumen  $A_1 \Delta x_1$  es  $\Delta m_1 = \rho_1 A_1 \Delta x_1$ . De manera similar, en la sección ancha del tubo de área  $A_2$ , se obtienen expresiones equivalentes en el mismo  $\Delta t$ , cambiando el subíndice 1 por 2. Pero la masa se conserva en el flujo estacionario, esto es la masa que cruza por  $A_1$  es igual a la masa que pasa por  $A_2$  en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , entonces:

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \Rightarrow \rho_1 A_1 \Delta x_1 = \rho_2 A_2 \Delta x_2$$

$$\rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \quad (10.7)$$

Esta se llama ecuación de continuidad, representa la conservación de la masa: significa que la masa no puede ser creada ni destruida, sólo se puede transformar, similar a la conservación de la energía.

Para un fluido incompresible, es decir de densidad constante, la ecuación de continuidad se reduce a:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = cte,$$

esto es, el producto del área por la rapidez normal a la superficie en todos los puntos a lo largo del tubo de corriente es constante. La rapidez es mayor (menor) donde el tubo es más angosto (ancho) y como la masa se conserva, la misma cantidad de fluido que entra por un lado del tubo es la que sale por el otro lado, en el mismo intervalo de tiempo. La cantidad  $Av$ , que en el SI tiene unidades de  $m^3/s$ , se llama **flujo** de volumen o caudal  $Q = Av$ .

**Ejemplo 10.4.** *Un jardinero está regando el pastito con una manguera de 2 cm de diámetro, por la que puede fluir 30 lt de agua en un minuto. Calcular la rapidez con la cual el agua sale de la manguera.*

Solución: De los datos, el caudal de agua es  $Q = 30 \text{ lt/min}$ , transformando las unidades, se obtiene:

$$Q = 30 \frac{\text{lt}}{\text{min}} = \frac{30 \times 10^3 \text{ cm}^3}{60 \text{ s}} = 500 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

el área de la sección transversal de la manguera es:

$$A = \pi r^2 = \pi (1 \text{ cm})^2 = \pi \text{ cm}^2$$

Por lo tanto, la rapidez de salida del agua por la manguera será:

$$Q = Av \Rightarrow v = \frac{Q}{A} = \frac{500 \text{ cm}^3/\text{s}}{\pi \text{ cm}^2} = 160 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 1.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**10.9 ECUACION DE BERNOULLI.**

Cuando fluye el fluido por un tubo de sección transversal no uniforme y de un nivel a otro, por la ecuación hidrostática, la presión cambia a lo largo del tubo (figura 10.10). La fuerza de la presión  $p_1$  en el extremo inferior del tubo de área  $A_1$  es  $F_1 = p_1 A_1$ . El trabajo realizado por esta fuerza sobre el fluido es  $W_1 = F_1 \Delta x_1 = p_1 A_1 \Delta x_1 = p_1 \Delta V$ , donde  $\Delta V$  es el volumen de fluido considerado. De manera equivalente en el nivel superior, si se considera un mismo intervalo de tiempo, el volumen  $\Delta V$  de fluido que cruza la sección superior de área  $A_2$  es el mismo, entonces el trabajo es  $W_2 = - p_2 A_2 \Delta x_2 = - p_2 \Delta V$ . El trabajo neto realizado por las fuerzas en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es:

$$W = W_1 + W_2 = (p_1 - p_2) \Delta V$$

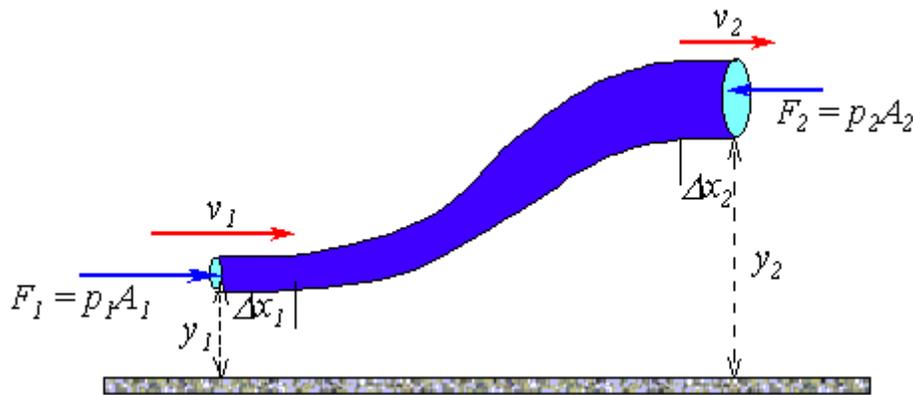


Figura 10.10

Parte de este trabajo se usa en cambiar tanto la energía cinética como la energía potencial gravitacional del fluido. Si  $\Delta m$  es la masa que pasa por el tubo de corriente en el tiempo  $\Delta t$ , entonces la variación de energía cinética es:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2$$

y la variación de energía potencial gravitacional es:

$$\Delta E_g = \Delta mgy_2 - \Delta mgy_1$$

Por el teorema del trabajo y energía se tiene:

$$W = \Delta E_c + \Delta E_g \Rightarrow$$

$$(p_1 - p_2)\Delta V = \frac{1}{2}\Delta mv_2^2 - \frac{1}{2}\Delta mv_1^2 + \Delta mgy_2 - \Delta mgy_1$$

Dividiendo por  $\Delta V$  y como  $\rho = \Delta m/\Delta V$ , se obtiene la ecuación de Bernoulli para un fluido no viscoso, incompresible, estacionario e irrotacional.

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gy_2 - \rho gy_1$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gy_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gy_2$$

La ecuación de Bernoulli, que es un resultado de la conservación de la energía aplicada a un fluido ideal, generalmente se expresa como:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gy = cte. \quad (10.8)$$

**Ejemplo 10.5:** Demostrar que para un fluido en reposo se obtiene la ecuación hidrostática integrada.

**Solución:** si el fluido está en reposo,  $v_1 = v_2 = 0$  y de la ecuación de Bernoulli se obtiene:

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2 \Rightarrow$$

$$p_1 - p_2 = \rho g z_2 - \rho g z_1 = \rho g h \Rightarrow$$

$$p_2 = p_1 - \rho g h$$

**Ejemplo 10.6: Tubo de Venturi.** Una tubería horizontal con una estrechez, como se muestra en la figura 10.11, que se usa para medir la velocidad del flujo en fluidos incompresibles, se llama tubo de Venturi. Si con un manómetro se mide la presión en los puntos 1 y 2, se puede calcular la rapidez del flujo que sale (o entra) por el tubo.

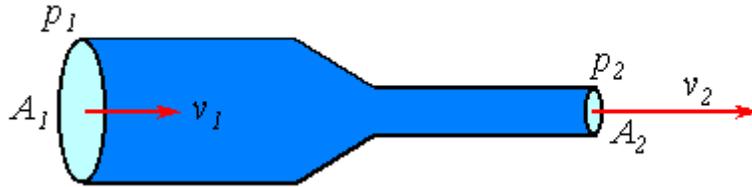


Figura 10.11 Tubo de Venturi.

**Solución.** Aplicando la ecuación de Bernoulli, como la tubería es horizontal,  $y_1 = y_2$ , se tiene:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_1 \Rightarrow$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Con la ecuación de continuidad:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$$

Combinando las ecuaciones, queda:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho \left( \frac{A_2}{A_1} v_2 \right)^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow$$

$$v_2 = A_1 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

Observar que debido a que  $A_1 > A_2$ ,  $p_1 > p_2$ , la presión en 1 es mayor que en 2, es decir la presión disminuye en la parte estrecha de la tubería. La disminución de la presión en la parte angosta del tubo tiene varias aplicaciones, por ejemplo, conectando un tubo de Venturi al carburador de un automóvil, se hace entrar el vapor de gasolina a la cámara de combustión.

**Ejemplo 10.7: Ley de Torricelli.** Un estanque que contiene un líquido de densidad  $\rho$  tiene un orificio pequeño en un lado a una altura  $y_1$  del fondo (figura 10.12). El aire por encima del líquido se mantiene a una presión  $p$ . Determinar la rapidez con la cual sale el líquido por el orificio cuando el nivel del líquido está a una altura  $h$  sobre el agujero.

**Solución:** si se supone que el estanque tiene una superficie mucho mayor que la del agujero ( $A_2 \gg A_1$ ), entonces la rapidez de descenso del fluido es mucho menor que la rapidez de salida del agua por el hoyo ( $v_2 \ll v_1$ ). Aplicando la ecuación de Bernoulli en los puntos 1 y 2, con  $p_1 = \text{presión atmosférica} = p_o$  y  $p_2 = p$ , se tiene:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2 \Rightarrow$$

$$p_o + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p + \rho g (y_2 - y_1)$$

Como  $h = y_2 - y_1$ , se tiene:

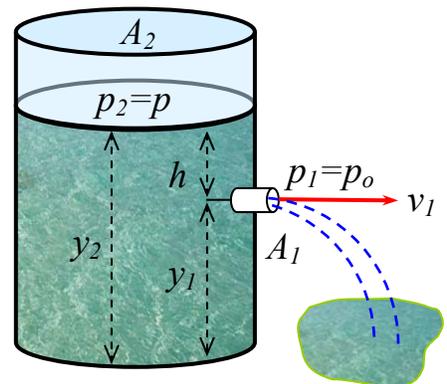


Figura 10.12 Ejemplo 10.7

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p - p_o)}{\rho} + 2gh}$$

Esta ecuación se llama Ley de Torricelli.

Casos particulares:

a) Si  $p \gg p_o$ , entonces  $2gh \sim 0$  y  $v_1 = \sqrt{2p/\rho}$ , esto significa que la rapidez es solo función de la presión.

b) Si  $p = p_o$ , entonces  $v_1 = \sqrt{2gh}$ , en este caso la rapidez es idéntica a la adquirida por un cuerpo en caída libre.

**Ejemplo 10.8: Tubo de Pitot.** Es uno de los medidores más exactos para medir la rapidez de un gas dentro de una tubería. El equipo, que se muestra en la figura 10.13, consta de un tubo en U con un líquido manométrico, donde la rama "a" en la figura 10.13, se conecta a la tubería y la otra rama "b", cuya abertura está dirigida corriente arriba, se deja en el interior por donde circula el gas con rapidez  $v$ , de modo que el fluido ingrese dentro de ésta y suba hasta que la presión aumente lo suficiente dentro del mismo y equilibre el impacto producido por la velocidad.

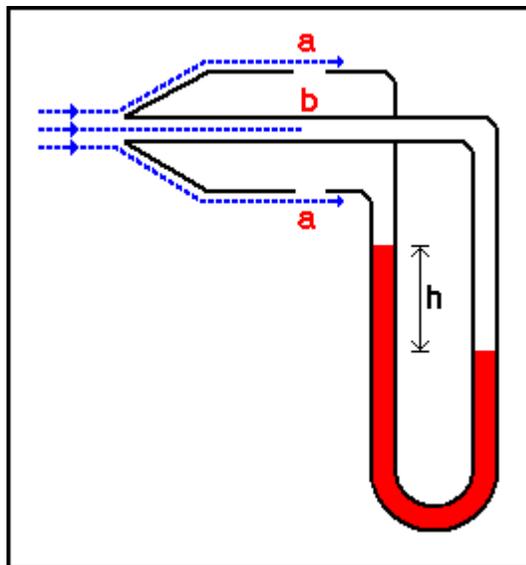


Figura 10.13. Tubo de Pitot.

La presión  $p_a$  en la rama a izquierda del tubo, cuya abertura es paralela al movimiento del gas, es igual a la presión del gas. La presión  $p_b$  de la otra rama b puede calcularse aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos en a y b, que se consideran ubicados a una misma altura dentro de la tubería. Como la rapidez en el punto b es nula:

$$p_b = p_a + \frac{1}{2} \rho v^2$$

donde  $\rho$  es la densidad del gas. Por otra parte, la  $p_b > p_a$  por lo que el líquido manométrico dentro del tubo en U se desplaza originando una diferencia de altura  $h$ . Sea  $\rho_o$  la densidad del líquido manométrico, por lo que:

$$p_b = p_a + \rho_o g h$$

combinando ambas ecuaciones, se obtiene:

$$\rho_o g h = \frac{1}{2} \rho v^2 \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \rho_o g h}{\rho}}$$

Los aviones usan sistemas basados en este equipo para determinar su velocidad respecto al aire.

**PROBLEMAS.**

- 10.1 Maria se encapricho por tener un par de aros de oro esféricos, grandes y sólidos de 1.25 cm de radio y le pidió a su novio que se los comprara. ¿Cuántos gramos de oro tendrán que soportar sus orejas por caprichosa? R: 158 gr c/u.
- 10.2 En el centro de un ciclón (esto es un área de bajas presiones donde se cierra una isobara, que es una línea que une puntos de igual presión), se midió un descenso de presión de 10 mm de Hg respecto a la normal, ¿cuánto fue la presión atmosférica? Por el contrario, en un anticiclón (centro de altas presiones) el aumento de presión fue de 12 hPa, ¿a cuánto ascendió la columna de mercurio? R: 1006 hPa, 76.9 cm de Hg.
- 10.3 Hacer las suposiciones necesarias para calcular la densidad media y la masa de la atmósfera considerando que el 90% de la masa de aire está debajo de la tropopausa. R: aprox.  $5.3 \times 10^{18}$  kg.
- 10.4 Calcular la densidad del *núcleo* de un átomo. La masa de un protón es de  $1.6 \times 10^{-27}$  kg y su radio es del orden de  $10^{-15}$  m. ¿Qué sugiere este resultado en relación con la estructura de la materia? R:  $4 \times 10^{17}$  kg/m<sup>3</sup>.
- 10.5 Paula de 50 kg se balancea sobre uno de los altos tacones de sus zapatos. Si el tacón es circular de radio de 0.5 cm, ¿qué presión ejerce Paula sobre el piso? R:  $6.36 \times 10^6$  Pa.
- 10.6 Una piscina tiene una superficie de 30 m x 10 m y un fondo plano. Cuando la piscina está llena a una profundidad de 2 m con agua, ¿cuál es la fuerza total ejercida por el agua sobre el fondo? ¿Sobre cada lado?
- 10.7 Analizar la utilidad práctica de usar un barómetro de agua.
- 10.8 El tubo vertical abierto de la figura 10.14 contiene dos fluidos de densidades  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , que no se mezclan. Demuestre que la presión en el fondo del tubo está dada por la expresión  $p = p_o + g(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)$ .

- 10.9 Un tubo en U abierto en ambos extremos se llena parcialmente con agua. Después se hecha aceite de densidad  $\rho_{ac}$  en el brazo derecho del tubo, formando una columna de altura  $h_1$ , (figura 10.15). Calcular la diferencia  $h$  en las alturas de las dos superficies de líquido.

R:  $h_1(1 - \rho_{ac}/\rho_{ag})$ .

- 10.10 Un tubo en U de área de sección transversal constante, abierto a la atmósfera, se llena parcialmente con mercurio. Después se hecha agua en ambos brazos. Si la configuración de equilibrio del tubo es como la mostrada en la figura 10.16, con  $h_2$  conocido, determine el valor de  $h_1$ .

R:  $h_2(\rho_M/\rho_a - 1)$ .

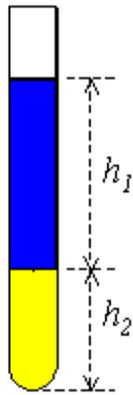


Figura 10.14.

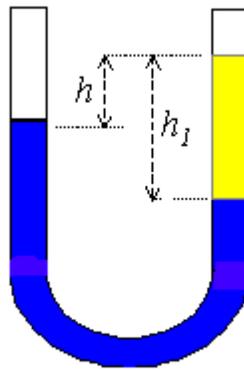


Figura 10.15

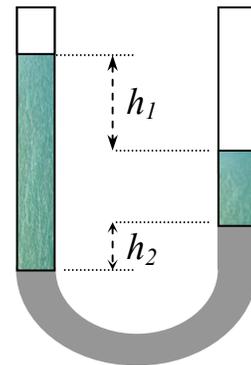


Figura 10.16

- 10.11 Demostrar que el 11% del volumen de un témpano de hielo sobresale de la superficie del mar.
- 10.12 Calcular la densidad de una boya de plástico de radio  $R$ , si flota en agua de mar, con  $2/3$  de su volumen sobre el agua.
- 10.13 a) Calcular la altura sobre el nivel del agua de un cubo de madera de 10 cm de lado y densidad  $650 \text{ kg/m}^3$  que flota en el agua. b) Calcular la cantidad de masa se debe poner sobre el cubo para que se hunda justo hasta el nivel de agua. R: a) 4 cm, b) 400 gr.
- 10.14 Una pelota esférica de plástico flota en el agua con 50% de su volumen sumergido. Esta misma pelota flota en aceite con 40% de su volumen

sumergido. Determine las densidades del aceite y de la pelota. R:  $\rho_{ac}=1250 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_{esf}=500 \text{ kg/m}^3$ .

- 10.15 Heidi buscando bichos para Sanidad, encontró una rana y la puso en un tazón plástico semiesférico de radio  $5 \text{ cm}$ , que luego hizo flotar en la laguna Los Patos, quedando el tazón flotando justo a ras del agua (figura 10.17). Suponga que el agua tiene una densidad de  $1050 \text{ kg/m}^3$  y que la masa de la rana es  $100 \text{ gr}$ , calcular la densidad del tazón. R:  $667 \text{ kg/m}^3$ .

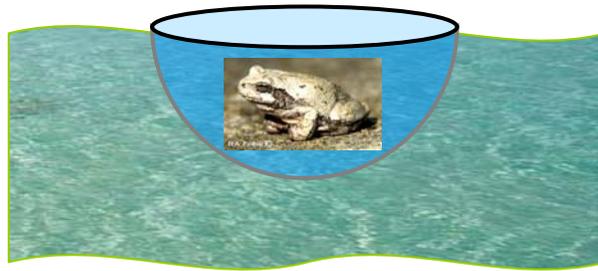


Figura 10.17.

- 10.16 Un bloque de metal de  $10 \text{ kg}$  de dimensiones  $12\text{cm} \times 10\text{cm} \times 10\text{cm}$ , se suspende de una balanza y se sumerge en agua. El lado de  $12\text{cm}$  está vertical y la parte superior del bloque sobresale  $5 \text{ cm}$  de la superficie del agua. Calcular: a) la fuerza de tensión de la balanza, b) la fuerza de empuje sobre el bloque. R: a)  $93 \text{ N}$ , b)  $7 \text{ N}$ .
- 10.17 Calcular el área de una tabla de fibra de vidrio de espesor  $H$  y densidad  $\rho$ , cuando flota en el mar con un nadador de masa  $M$  sobre la tabla. R:  $M/H(\rho_{ag} - \rho)$ .
- 10.18 Calcular la fuerza para mantener completamente sumergida en agua de densidad  $\rho_a$  a una pelota de ping pong de radio  $R$  y densidad  $\rho_a/12.5$ . R:  $3.85g\rho_a R^3$ .
- 10.19 El estanque paralelepipedal de la figura 10.18 se llena con agua hasta  $2 \text{ m}$  de profundidad. En la parte inferior de una pared del estanque hay una escotilla rectangular de  $1 \text{ m}$  de alto y  $2 \text{ m}$  de ancho, articulada en su parte superior. Calcular: a) la fuerza neta sobre la escotilla, b) el torque ejercido alrededor de las bisagras.

- 10.20 a) Demostrar que la fuerza resultante sobre una pared vertical de un estanque cúbico de ancho  $D$  lleno con agua de  $H$  m de profundidad es  $\frac{1}{2}\rho gDH^2$ . b) Demostrar que el torque total ejercido por el agua sobre la pared del estanque, en un eje que pasa por la base de la pared, es  $(1/6)\rho gDH^3$  y que la línea de acción efectiva de la fuerza total ejercida por el agua está a una distancia de  $1/3 H$  sobre el eje.
- 10.21 Un mosquito que chocó con el estanque del problema 10.20, le hizo un agujero en un punto a 1.25 m debajo del nivel superior de agua, por el cual se ha medido un flujo de agua de 60 lt/min. Calcular: a) la rapidez de salida del agua, b) el radio del agujero. R: a) 5 m/s, b) 0.8 cm
- 10.22 El suministro de agua llega al nivel del suelo por una cañería de 5 cm de diámetro. Una llave de 2 cm de diámetro ubicada a 15m de altura llena un envase de 20lt en un minuto. Calcular: a) la rapidez con la que sale el agua de la llave, b) la presión en la cañería principal. R: a) 1m/s, b)  $2.5p_0$ .
- 10.23 Un estanque de agua tiene un pequeño agujero en su costado a una altura  $h$  debajo del nivel de agua, por donde sale agua con un flujo de  $Q$  lt/min (figura 10.19). Calcular: a) la rapidez con la que sale el agua por el agujero, b) el diámetro del agujero. R: a)  $\sqrt{2gh}$ , b)  $2.2 \times 10^{-3} \sqrt{Q/\sqrt{gh}}$ .

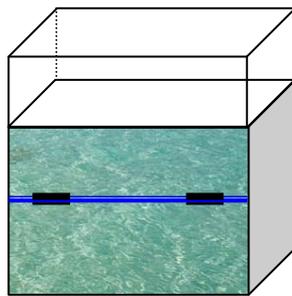


Figura 10.18.

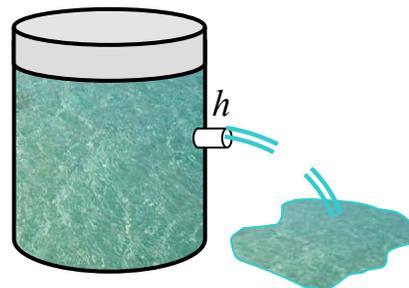


Figura 10.19.

- 10.24 En un estanque con agua de 2 m de profundidad, se hace un agujero de  $5 \text{ cm}^2$  a una altura  $h$  desde la superficie de agua (figura 10.19). Por la parte superior del estanque se le hecha agua con un flujo continuo de

$1000 \text{ cm}^3/\text{s}$  de manera que el nivel de agua permanece constante en 2 m. Calcular a) la altura  $h$ , b) la rapidez de salida del agua. R: a) 0.2 m, b) 2 m/s.

- 10.25 Por una manguera de incendios de 6 cm de diámetro, fluye agua a razón de 600 lt/min. Calcular la rapidez de salida del agua de la manguera si el diámetro por donde sale es 2 cm.
- 10.26 Por una tubería horizontal fluye agua con una rapidez de 5 m/s. Si la presión es de  $1.5 \times 10^5 \text{ Pa}$  en un punto donde la sección transversal del tubo es  $A$ , determine en un punto donde el área es  $A/3$ : a) la rapidez y b) la presión de salida del agua. R: a) 15 m/s, b)  $0.5 \times 10^5 \text{ Pa}$ .
- 10.27 Un globo esférico de radio 0.4 m, inflado con helio se amarra a una cuerda uniforme de 2 m de largo y de  $\frac{1}{2} \text{ kg}$  de masa. Calcular la altura de equilibrio que se eleva el globo después que se suelta. R: 1.9 m.
- 10.28 Un globo inflado con helio, de densidad  $0.18 \text{ kg/m}^3$ , se eleva hasta una altura de 8 km en la atmósfera cuya densidad disminuye con la altura en la forma  $\rho_a = \rho_o e^{-z/8}$ , donde  $z$  está en km y  $\rho_o = 1.29 \text{ kg/m}^3$  en superficie. Calcular el volumen de helio con el que se debe inflar el globo para que pueda llevar una carga de 400 kg hasta los 8 km de altura, suponiendo que su volumen se mantiene constante. R:  $1430 \text{ m}^3$ .
- 10.29 Suponiendo la atmósfera y el océano homogéneos, esto es de densidad constante, calcular la presión en diferentes niveles de altura en la atmósfera hasta un km de altura y en el océano hasta 100 m de profundidad. Hacer el gráfico  $p$  versus  $z$ .
- 10.30 Determinar la variación de presión con la altura en la atmósfera sobre Concepción, considerando que la temperatura disminuye linealmente con la altura hasta el nivel de la tropopausa, en la forma  $T = T_o - \Gamma z$ , donde  $T_o$  es la temperatura en  $z_o = 0$  y  $\Gamma = 9.8 \text{ }^\circ\text{C/km}$ , se llama gradiente adiabático seco de temperatura. Sugerencia: considerar la atmósfera formada por aire seco como un gas ideal.

$$\text{R: } p(z) = p_o \left( 1 - \frac{\Gamma z}{T_o} \right)^{g/\Gamma R_d}, \text{ con } R_d \text{ la constante específica del aire seco.}$$

## CAPITULO 11. MOVIMIENTO OSCILATORIO.

Los principales objetivos de los capítulos anteriores estaban orientados a describir el movimiento de un cuerpo que se puede predecir si se conocen las condiciones iniciales del movimiento y las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo. Si una fuerza cambia en el tiempo, la velocidad y la aceleración del cuerpo también cambiarán en el tiempo. Un tipo de movimiento particular ocurre cuando sobre el cuerpo actúa una fuerza que es directamente proporcional al desplazamiento del cuerpo desde su posición de equilibrio. Si dicha fuerza siempre actúa en la dirección de la posición de equilibrio del cuerpo, se producirá un movimiento de ida y de vuelta respecto de esa posición, por eso a estas fuerzas se les da el nombre de fuerzas de restitución, porque tratan siempre de restituir o llevar al cuerpo a su posición original de equilibrio. El movimiento que se produce es un ejemplo de lo que se llama movimiento *periódico* u *oscilatorio*.

Ejemplos de movimientos periódicos son la oscilación de una masa acoplada a un resorte, el movimiento de un péndulo, las vibraciones de las cuerdas de un instrumento musical, la rotación de la Tierra, las ondas electromagnéticas tales como ondas de luz y de radio, la corriente eléctrica en los circuitos de corriente alterna y muchísimos otros más.

Un tipo particular es el *movimiento armónico simple*. En este tipo de movimiento, un cuerpo oscila indefinidamente entre dos posiciones espaciales sin perder energía mecánica. Pero en los sistemas mecánicos reales, siempre se encuentran presente fuerzas de rozamiento, que disminuyen la energía mecánica a medida que transcurre el tiempo, en este caso las oscilaciones se llaman *amortiguadas*. Si se agrega una fuerza externa impulsora de tal manera que la pérdida de energía se equilibre con la energía de entrada, el movimiento se llama *oscilación forzada*.

### 11.1 MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE.

Una partícula que se mueve a lo largo del eje  $x$ , tiene un movimiento armónico simple cuando su desplazamiento  $x$  desde la posición de equilibrio, varía en el tiempo de acuerdo con la relación

$$x = A \cos(\omega t + \delta) \quad (11.1)$$

donde  $A$ ,  $\omega$ , y  $\delta$  son constantes del movimiento. Esta es una ecuación periódica y se repite cuando  $\omega t$  se incrementa en  $2\pi$  radianes. Para dar un significado físico a estas constantes, es conveniente graficar  $x$  en función de  $t$ , como se muestra en la figura 11.1. La constante  $A$  se llama **amplitud** del movimiento, es simplemente el máximo desplazamiento de la partícula, ya sea en la dirección positiva o negativa de  $x$ . La constante  $\omega$  se llama **frecuencia angular**, el ángulo  $\delta$  se llama **ángulo** o **constante de fase**, y junto con la amplitud quedan determinados por el desplazamiento y velocidad inicial de la partícula. Las constantes  $A$  y  $\delta$  nos dicen cual era el desplazamiento en el instante  $t = 0$ . La cantidad  $(\omega t + \delta)$  se llama la **fase** del movimiento y es de utilidad en la comparación del movimiento de dos sistemas de partículas.

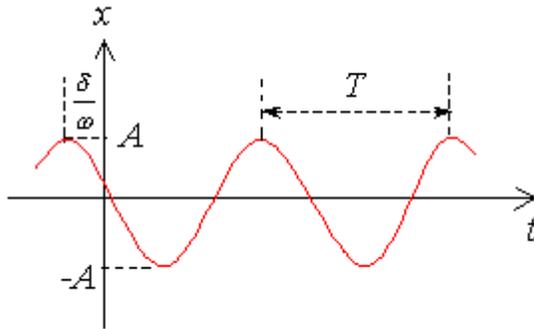


Figura 11.1 Esquema del grafico posición tiempo de la ecuación 11.1.

El periodo  $T$  es el tiempo que demora la partícula en completar un ciclo de su movimiento, esto es, es el valor de  $x$  en el instante  $t + T$ . Se puede demostrar que el periodo del movimiento esta dado por  $T = 2\pi/\omega$ , sabiendo que la fase aumenta  $2\pi$  radianes en un tiempo  $T$ :

$$\omega t + \delta + 2\pi = \omega(t+T) + \delta$$

Comparando, se concluye que  $\omega T = 2\pi$ , o

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Al inverso del periodo se le llama **frecuencia**  $f$  del movimiento. La frecuencia representa el número de oscilaciones que hace la partícula en un periodo de tiempo, se escribe como:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Las unidades de medida de  $f$  en el SI son  $1/s$  o *ciclos/s*, llamados Hertz, Hz. Reacomodando la ecuación de la frecuencia, se obtiene la frecuencia angular  $\omega$ , que se mide en *rad/s*, de valor:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

La velocidad de una partícula que tiene un movimiento armónico simple se obtiene derivando respecto al tiempo la ecuación 11.1:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \delta) \quad (11.2)$$

La aceleración de la partícula está dada por  $dv/dt$ :

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) \quad (11.3)$$

Como  $x = A \cos(\omega t + \delta)$ , se puede expresar la aceleración en la forma:

$$a = -\omega^2 x$$

De las ecuaciones de velocidad y de aceleración, teniendo en cuenta que los valores extremos de las funciones seno o coseno son  $\pm 1$ , sus valores extremos máximos o mínimos son:

$$v = \pm \omega A$$

$$a = \pm\omega^2 A$$

Las curvas de posición, velocidad y aceleración con el tiempo se muestran en la figura 11.2. En estas curvas se ve, (figura 11.2 b), como la fase de la velocidad difiere en  $\pi/2$  rad o  $90^\circ$  con la fase del desplazamiento. Esto es, cuando  $x$  es un máximo o un mínimo, la velocidad es cero. De igual forma, cuando  $x$  es cero, la rapidez es un máximo o un mínimo. Del mismo modo, como la fase de la aceleración difiere en  $\pi$  rad o  $180^\circ$  con la fase del desplazamiento, (figura 11.2 c), cuando  $x$  es un máximo o un mínimo, la aceleración es un mínimo o un máximo.

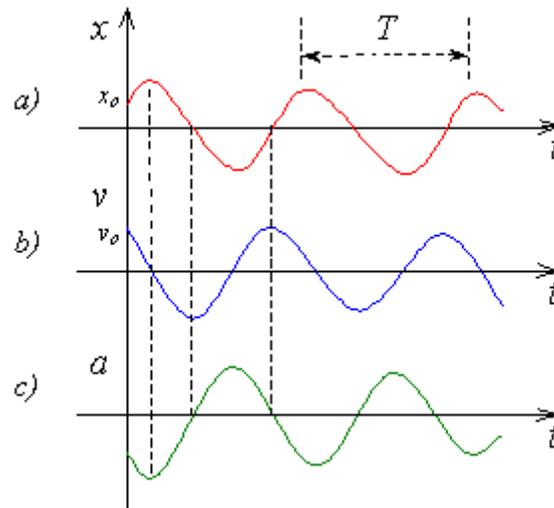


Figura 11.2. Gráficos de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

La ecuación  $x = A \cos(\omega t + \delta)$  es una solución general de la ecuación diferencial que describe el movimiento armónico simple, donde la constante de fase  $\delta$  y la amplitud  $A$  se deben elegir para satisfacer las condiciones iniciales del movimiento. La constante de fase es importante cuando se quiere comparar el movimiento de dos o más partículas oscilantes. Suponiendo que se conocen la posición inicial y la velocidad inicial de un oscilador, esto es, en  $t = 0$ ,  $x = x_0$  y  $v = v_0$ . Con esas condiciones, las ecuaciones 11.1 y 11.2 se reducen a:

$$x_0 = A \cos \delta \quad \text{y} \quad v_0 = -\omega A \sin \delta$$

que son dos ecuaciones de donde se pueden calcular los valores de la constante de fase  $\delta$  y la amplitud  $A$ . Dividiéndolas, se obtiene:

$$\frac{v_o}{x_o} = -\omega \tan \delta \Rightarrow$$

$$\tan \delta = -\frac{v_o}{\omega x_o}$$

Si ahora las ecuaciones para  $x_o$  y  $v_o$  se elevan al cuadrado y se suman, se obtiene:

$$x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2 = A^2(\cos^2 \delta + \text{sen}^2 \delta) \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2}$$

Entonces se observa que  $\delta$  y  $A$  se pueden conocer si se especifican las condiciones iniciales  $x_o$ ,  $\omega$  y  $v_o$ .

Para concluir esta descripción, podemos resumir algunas propiedades de una partícula que se mueve con un movimiento armónico simple:

1. El desplazamiento, la velocidad y la aceleración varían senoidalmente con el tiempo, pero no se encuentran en fase.
2. La aceleración de la partícula es proporcional al desplazamiento, pero en dirección opuesta.
3. El periodo y la frecuencia son independientes de la amplitud.

Ejemplo 11.1. Una partícula oscila con un movimiento armónico simple a lo largo del eje  $x$ . Su desplazamiento varía con el tiempo de acuerdo con la ecuación:

$$x = 4 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

donde  $x$  se mide en  $m$ ,  $t$  en  $s$  y los ángulos en radianes. Calcular: a) la amplitud, frecuencia y periodo del movimiento, b) la velocidad y la aceleración de la partícula en cualquier instante  $t$ , c) la posición, la velocidad y la aceleración en el instante  $t = 1s$ , d) la velocidad y la aceleración máximas de la partícula, e) el desplazamiento entre  $t = 0$  y  $t = 1s$ , f) la fase del movimiento en  $t = 2s$ .

Solución:

a) comparando la ecuación dada con la ecuación general del movimiento, se encuentra que  $A = 4m$ ,  $\omega = \pi \text{ rad}$ , la frecuencia y el periodo son:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = 0.5 \text{ Hz}, \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.5} = 2s$$

b)

$$v = \frac{dx}{dt} = -4\pi \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -4\pi^2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

c) para  $t = 1s$ ,

$$x = 4 \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 4 \cos \frac{5\pi}{4} = 4(-0.707) = -2.83m$$

$$v = -4\pi \text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -4\pi(-0.707) = 8.9 \text{ m/s}$$

$$a = -4\pi^2 \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -4\pi^2(-0.707) = 27.9 \text{ m/s}^2$$

d) los valores máximos se obtienen cuando seno y coseno valen uno:

$$v_{max} = 4\pi = 12.6 \text{ m/s}$$

$$a_{max} = 4\pi^2 = 39.5 \text{ m/s}^2$$

e) para  $t = 0$  y  $t = 1s$ ,

$$x_o = 4 \cos\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = 4 \cos \frac{\pi}{4} = 4(0.707) = 2.83m$$

$$x_1 = -2.83 \text{ m}$$

$$\Delta x = x_1 - x_o = -2.83 - 2.83 = -5.66 \text{ m}$$

f) la fase se define como:

$$fase = \omega t + \delta, \text{ para } t = 2s \text{ y } \delta = \pi/4:$$

$$fase = 2\pi + \pi/4 = 9\pi/4 \text{ rad.}$$

## 11.2 MASA SUJETA A UN RESORTE.

Una masa sujeta al extremo de un resorte, con la masa moviéndose libremente sobre una superficie horizontal sin fricción o verticalmente en el aire, oscilará si se la aparta de su posición de equilibrio  $x = 0$  donde el resorte se encuentra sin deformar, con un movimiento armónico simple. En la figura 11.3 se observa un esquema para una masa que oscila sobre una superficie horizontal sin fricción. Cuando la masa se desplaza una pequeña distancia  $x$  desde su posición de equilibrio, el resorte ejerce una fuerza dada por la Ley de Hooke,

$$F = -kx$$

Sabemos que esta fuerza siempre es opuesta al movimiento. Aplicando la segunda ley de Newton, suponiendo que esta es la única fuerza que actúa sobre la masa  $m$ , se obtiene:

$$F = -kx = ma \Rightarrow$$

$$a = -\frac{k}{m} x$$

esto es, la aceleración de  $m$  es proporcional al desplazamiento desde su posición de equilibrio y en dirección opuesta. Como la aceleración es la segunda derivada de la posición, y definiendo el cociente  $k/m = \omega^2$ , se puede escribir:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (11.4)$$

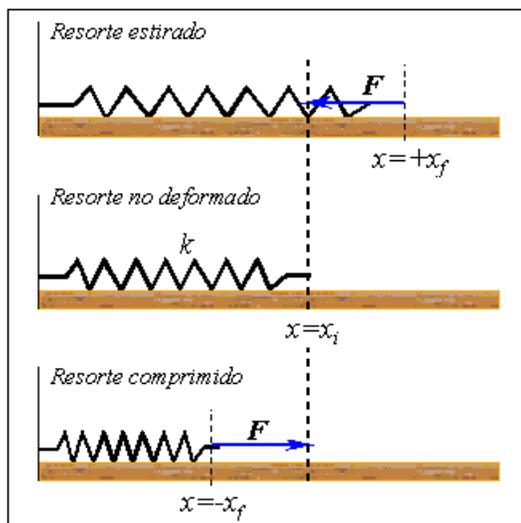


Figura 11.3 Masa unida a un resorte oscilando sobre una superficie horizontal sin roce.

La solución de la ecuación diferencial 11.4 es la que describe el movimiento armónico simple, tiene la misma forma que la ecuación 11.1:

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

Esto se puede generalizar para afirmar que cualquier fuerza que actúe sobre una partícula, que sea linealmente proporcional al desplazamiento y de dirección opuesta, le producirá a la partícula un movimiento armónico simple.

Para la masa sujeta al resorte, el período y la frecuencia del sistema es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ejemplo 11.2. Una masa de 200 g se conecta a un resorte de constante 5 N/m, que es libre de oscilar sobre una superficie horizontal sin roce. Si la masa se desplaza 5 cm del equilibrio y se suelta desde el reposo, como en la figura 11.3, calcular: a) la frecuencia y el periodo del movimiento, b) la rapidez y la aceleración máxima de la masa, c) el desplazamiento, la rapidez y la aceleración para  $t = 2\pi$  s.

Solución: los datos son:  $m = 0.2$  kg,  $k = 5$  N/m,  $A = 0.05$  m,  $v_o = 0$ ,

a)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5 \text{ N/m}}{0.2 \text{ kg}}} = 5 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} = 1.26 \text{ s}$$

b)

$$v_{max} = \omega A = (5 \text{ rad/s})(0.05 \text{ m}) = 0.25 \text{ m/s}$$

$$a_{max} = \omega^2 A = (5 \text{ rad/s})^2 (0.05 \text{ m}) = 1.25 \text{ m/s}^2$$

c) para  $t = 2\pi$  s:

$$x = A \cos \omega t = 0.05 \cos(10\pi) = 0.05 \text{ m}$$

$$v = -\omega A \sin \omega t = -(5)(0.05) \sin(10\pi) = 0$$

$$a = -\omega^2 A \cos \omega t = -(5)^2 (0.05) \cos(10\pi) = 1.25 \text{ m/s}^2$$

### 11.3 ENERGIA EN EL MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE.

De la definición de energía cinética, reemplazando la ecuación de la rapidez de una partícula con movimiento armónico simple, se obtiene:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \text{sen}^2(\omega t + \delta) \quad (11.5)$$

La energía potencial elástica almacenada en un resorte, para cualquier deformación  $x$  es:

$$E_E = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \delta) \quad (11.6)$$

La energía mecánica total en el movimiento armónico simple, considerando que  $\omega^2 = k/m$  o bien  $m\omega^2 = k$ , se puede escribir como:

$$E = E_c + E_E = \frac{1}{2}kA^2 [\text{sen}^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta)]$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad (11.7)$$

De donde se deduce que la energía mecánica total en el movimiento armónico simple es una constante del movimiento, proporcional al cuadrado de la amplitud. Este valor es igual a la máxima energía potencial elástica almacenada en un resorte cuando  $x = \pm A$ , ya que en esos puntos  $v = 0$  y no hay energía cinética.

Por otro lado, en la posición de equilibrio,  $x = 0$  y por lo tanto  $E_E = 0$ , además en este punto la rapidez es la máxima, de tal manera que toda la energía es energía cinética, es decir en  $x = 0$ :

$$E \equiv E_c = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}\omega^2 A^2$$

Como la superficie sobre la cual oscila el resorte es sin fricción, la energía se conserva, usando la ecuación de conservación de la energía, se puede escribir:

$$E = E_c + E_E = cte$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad (11.8)$$

De esta expresión se puede calcular la rapidez para un desplazamiento arbitrario  $x$ :

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} \quad (11.9)$$

encontrándose nuevamente que la rapidez es máxima en  $x = 0$  y es cero en los puntos de regreso del oscilador  $x = \pm A$ .

Ejemplo 11.3. Una masa de 0.5 kg conectada a un resorte de constante 20 N/m, oscila sobre una superficie horizontal sin roce, con una amplitud de 3 cm. Calcular a) la energía total del sistema y la rapidez máxima de la masa, b) la rapidez de la masa cuando el desplazamiento es 2 cm, c) la energía cinética y potencial del sistema cuando el desplazamiento es 2 cm, d) el valor de  $x$  cuando la rapidez es 0.1 m/s.

Solución: los datos son  $m = 0.5 \text{ kg}$ ,  $k = 20 \text{ N/m}$ ,  $A = 3 \text{ cm} = 0.03 \text{ m}$ ,

a) la energía total es:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(20)(0.03)^2 = 9 \times 10^{-3} \text{ J}$$

y la rapidez máxima se puede calcular con la ecuación:

$$E = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = 9 \times 10^{-3} \text{ J}$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2 \times 9 \times 10^{-3}}{0.5}} = 0.19 \text{ m/s}$$

b) Ahora se puede usar la ecuación:

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x^2)} = \pm \sqrt{\frac{20}{0.5} (0.03^2 - 0.02^2)} = \pm 0.14 \text{ m/s}$$

los signos positivo y negativo indican que la masa podría estarse moviendo hacia la derecha o hacia la izquierda en ese instante.

c) la energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (0.5) (0.14)^2 = 5 \times 10^{-3} \text{ J}$$

y la energía potencial:

$$E_E = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} (20) (0.02)^2 = 4 \times 10^{-3} \text{ J}$$

d) de la ecuación:

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x^2)} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\left( A^2 - \frac{m}{k} v^2 \right)}$$

$$x = \pm \sqrt{\left( 0.03^2 - \frac{0.5}{20} (0.1)^2 \right)} = 0.025 \text{ m} = 2.5 \text{ cm}$$

## 11.4 EL PENDULO.

### 11.4.1. Péndulo simple.

El péndulo simple es otro sistema mecánico que tiene un movimiento periódico oscilatorio, si se mueve en un medio sin fricción. Un péndulo es un sistema

formado por una masa puntual  $m$  suspendida en el aire por una cuerda de longitud  $L$ , de masa muy pequeña comparada con la masa  $m$ , por lo que se desprecia; la parte superior de la cuerda se encuentra fija, como se muestra en la figura 11.4. El movimiento del péndulo producido por la fuerza de gravedad se realiza en un plano vertical, y es un movimiento armónico simple si el ángulo  $\theta$  que forma la cuerda del péndulo con la vertical es pequeño, como se puede demostrar a continuación.

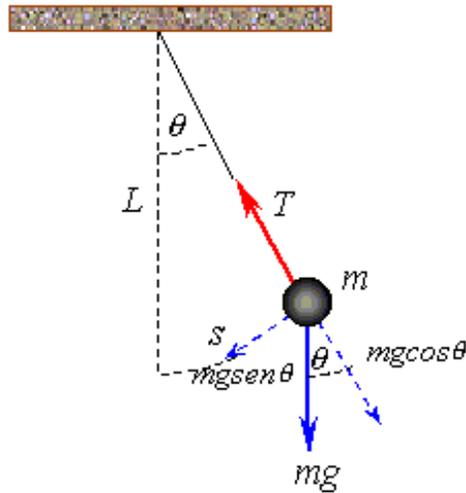


Figura 11.4 Péndulo simple.

Las fuerzas que actúan sobre la masa  $m$  son la tensión  $T$  de la cuerda y el peso  $mg$  de la masa, se muestran en la figura 11.4. La componente tangencial del peso,  $mg \operatorname{sen}\theta$ , siempre apunta hacia  $\theta = 0$ , en dirección opuesta al desplazamiento. Esta es la fuerza de restitución, entonces puede escribirse la ecuación de movimiento en la dirección tangencial de la forma:

$$F_t = -mg \operatorname{sen}\theta \Rightarrow m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \operatorname{sen}\theta$$

donde  $s$  es el desplazamiento medido a lo largo del arco de trayectoria y el signo menos indica que  $F_t$  actúa opuesta al movimiento. Como  $s = L\theta$  y  $L$  es constante, la ecuación se transforma en:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \text{sen}\theta$$

Como el lado derecho es proporcional a  $\text{sen}\theta$ , y no solo a  $\theta$ , se concluye que el movimiento no es armónico simple. Esa es una ecuación diferencial difícil de resolver, por lo que se supone que el péndulo se mueve en pequeños desplazamientos, tal que  $\theta$  es pequeño, en este caso se puede usar la aproximación  $\text{sen}\theta \approx \theta$  y la ecuación diferencial del movimiento se reduce a:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta \quad (11.10)$$

que tiene la misma forma que la ecuación que describe al movimiento armónico simple, por lo que solo en esas condiciones el movimiento del péndulo es un movimiento armónico simple. Su solución es entonces:

$$\theta = \Theta \cos(\omega t + \delta) \quad (11.11)$$

donde  $\Theta$  es la amplitud que corresponde al máximo desplazamiento angular y  $\omega$  es la frecuencia angular, de valor:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

El periodo del movimiento es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

El periodo y la frecuencia de un péndulo simple dependen solo de la longitud de la cuerda y la aceleración de gravedad, y son independiente de la masa  $m$  del péndulo. Esto significa que todos los péndulos simples de igual longitud en el mismo lugar, oscilarán con el mismo periodo.

Comúnmente se usa el péndulo simple como un medidor de tiempo. También es un dispositivo adecuado para hacer mediciones precisas de la aceleración de gravedad, que son importantes por ejemplo cuando las variaciones locales de  $g$  pueden dar información sobre las fuentes subterráneas de petróleo u otros recursos minerales.

Ejemplo 11.4. Una persona que anda trayendo un cronómetro, pero no una huincha para medir la altura de un edificio, quiere saber su altura. Entonces instala un péndulo que se extiende desde el techo hasta el piso y mide que tiene un periodo de 15 s. a) Calcular la altura de ese edificio. b) Si el mismo péndulo estuviera en la Luna, donde  $g = 1.7 \text{ m/s}^2$ , calcular el periodo.

Solución: se conoce  $T = 15 \text{ s}$ , entonces:

a)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{(10)(15)^2}{4\pi^2} = 57\text{m}$$

b) en la Luna  $g = 1.7 \text{ m/s}^2$ ,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{57}{1.7}} = 36.4\text{s}$$

### 11.4.2. Péndulo físico.

Un péndulo físico consta de cualquier cuerpo rígido suspendido de un eje fijo que no pasa por su centro de masa. El cuerpo rígido oscilará cuando se desplace de su posición de equilibrio. Si el cuerpo rígido se sujeta en un eje que pasa por un punto  $O$  a una distancia  $d$  del centro de masa, como se muestra en la figura 11.5, la fuerza debido a la gravedad produce un torque respecto de  $O$ , de magnitud  $mgd \text{ sen}\theta$ . Como el torque se escribe  $\tau = I\alpha$ , donde  $I$  es el momento de inercia respecto al eje que pasa por  $O$  y  $\alpha$  es la segunda derivada de la rapidez angular, se obtiene:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd \operatorname{sen}\theta$$

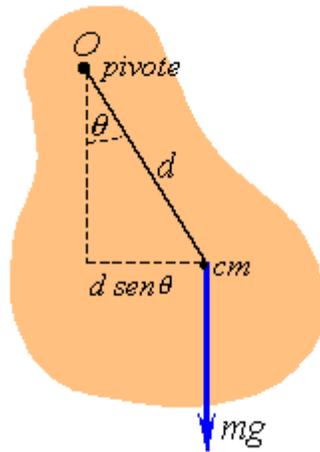


Figura 11.5 Péndulo físico.

El signo menos indica que la fuerza de gravedad es una fuerza de restitución que produce un torque que hace disminuir el ángulo  $\theta$ . Para resolver esta ecuación, nuevamente se supone que el péndulo físico se mueve en pequeños desplazamientos, tal que  $\theta$  es pequeño, en este caso se puede usar la aproximación  $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$  y la ecuación diferencial del movimiento se reduce a:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\theta = -\omega^2\theta \quad (11.12)$$

que tiene la misma forma que la ecuación que describe al movimiento armónico simple, por lo que en esas condiciones así es el movimiento del péndulo. Su solución es entonces:

$$\theta = \Theta \cos(\omega t + \delta)$$

donde  $\Theta$  es la amplitud que corresponde al máximo desplazamiento angular y  $\omega$  es la frecuencia angular, de valor:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

El periodo del movimiento es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Se pueden usar estos resultados para medir el momento de inercia de cuerpos rígidos planos. Si se ubica el centro de masa y se mide  $d$ , se puede obtener el momento de inercia midiendo el periodo del péndulo físico. El periodo del péndulo físico se reduce al del péndulo simple, cuando toda la masa del cuerpo rígido se concentra en su centro de masa, ya que en este caso  $I = md^2$ .

Ejemplo 11.5. Una barra uniforme de masa  $M$  y largo  $L$  tiene un pivote en uno de sus extremos, como se muestra en la figura 11.6, y oscila en un plano vertical con una pequeña amplitud. Calcular el periodo de la oscilación.

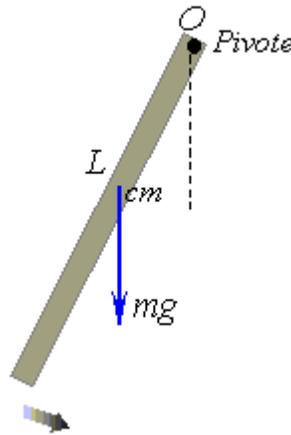


Figura 11.6 Ejemplo 11.5

Solución: la barra oscila como un péndulo físico, su periodo es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg \frac{L}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

### 11.4.3. Péndulo de torsión.

Un péndulo de torsión, es un sistema construido de la siguiente forma. Consta de una varilla vertical que por el extremo superior se fija a un soporte y en el extremo opuesto se encuentra unida a un cuerpo rígido, como se muestra en la figura 11.7. Cuando a la varilla se la retuerce y luego se la deja girar, ejerce un torque de restitución sobre el cuerpo rígido, proporcional al desplazamiento angular  $\theta$ , que se puede escribir como:

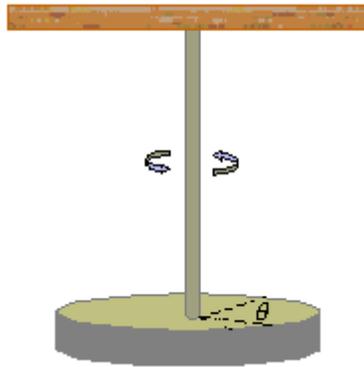


Figura 11.7 Péndulo de torsión.

$$\tau = -\kappa\theta$$

donde  $\kappa$  es la *constante de torsión* de la varilla de soporte. Por la segunda ley de Newton, se obtiene:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta \quad (11.13)$$

que es la ecuación de un movimiento armónico simple, de frecuencia y periodo, respectivamente:

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

Para este péndulo no se tiene la restricción de un ángulo pequeño, sólo se debe tener cuidado que no se exceda el límite elástico de la varilla. Este péndulo es común en los relojes mecánicos, que produce el tictac, tictac, tictac, tictac...

### 11.5. OSCILACIONES AMORTIGUADAS.

Los movimientos oscilatorios hasta aquí considerados se refieren a sistemas ideales, que oscilan indefinidamente por la acción de una fuerza lineal de restitución, de la forma  $F = -kx$ . Pero en los sistemas reales están presentes fuerzas disipativas, como la fricción, las cuales retardan el movimiento del sistema. Por lo tanto la energía mecánica del sistema se va perdiendo conforme transcurre el tiempo, lo que hace que la amplitud del sistema disminuya con el tiempo, y se dice que el movimiento es amortiguado.

Un tipo común de fuerza de fricción es proporcional a la rapidez y actúa en dirección opuesta al movimiento. Estas fuerzas se producen frecuentemente en los fluidos, principalmente en líquidos y gases, aquí se llaman fuerzas de viscosidad, donde actúan cuando un cuerpo se mueve, por ejemplo en el agua o en el aire. Se expresan en la forma  $F = -bv$ , donde  $b$  es una constante que mide el grado de viscosidad del fluido. Aplicando la segunda ley de Newton a un sistema amortiguado, donde sobre el cuerpo en movimiento oscilatorio actúan las fuerzas de restitución y de amortiguamiento o de viscosidad, se obtiene:

$$-kx - bv = ma \Rightarrow$$

$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \tag{11.14}$$

La solución de esta ecuación esta fuera del alcance de este libro, por lo que se da sin demostración. Cuando la fuerza de viscosidad es pequeña comparada con  $kx$ , es decir, cuando  $b$  es pequeña, la solución es:

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \delta) \quad (11.15)$$

donde la frecuencia del movimiento es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad (11.16)$$

En la figura 11.8 se grafica la posición  $x$  en función del tiempo  $t$  para este movimiento amortiguado. Se observa que cuando la fuerza disipativa es pequeña comparada con la fuerza de restitución, el carácter oscilatorio del movimiento se mantiene, pero la amplitud de la oscilación disminuye con el tiempo, hasta que finalmente el movimiento se amortigua y detiene. La línea de trazos en la figura 11.8 que es la envolvente de la curva de oscilación, representa el factor exponencial en la ecuación 11.15, corresponde a la amplitud decreciente en el tiempo.

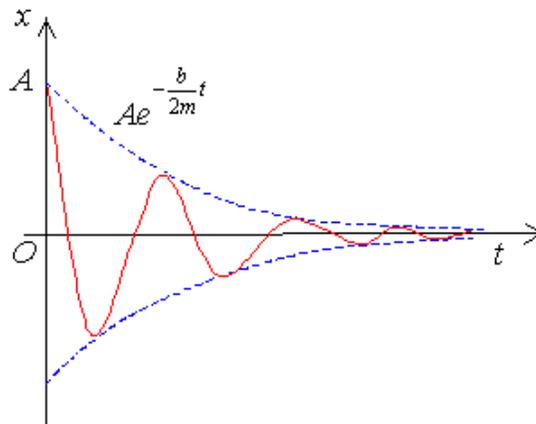


Figura 11.8 Gráfico posición tiempo en las oscilaciones amortiguadas.

De la ecuación de la frecuencia se observa que si  $b = 0$ , se tiene la frecuencia natural de vibración del oscilador no amortiguado,  $\omega_0^2 = k/m$ . Cuando la mag-

nitud de la fuerza de fricción se aproxima más a la magnitud de la fuerza de restitución, las oscilaciones se amortiguan más rápidamente. Cuando  $b$  alcanza un valor crítico tal que  $b/2m = \omega_o$ , el sistema no oscila y se dice que está críticamente amortiguado, por lo que el sistema regresa al equilibrio en forma exponencial con el tiempo. Si el medio es tan viscoso que la fuerza de fricción es mayor que la de restitución, con lo cual  $b/2m > \omega_o$ , el sistema está sobreamortiguado. En este caso tampoco oscila, sino que simplemente regresa a su posición de equilibrio. En todos los casos, cuando hay fricción presente, la energía del oscilador disminuye hasta cero; la energía mecánica que se pierde se transforma en el medio en energía térmica.

### 11.6. OSCILACIONES FORZADAS.

Para el caso de un oscilador amortiguado, la energía disminuye en el tiempo por efecto de la fuerza disipativa. Se puede compensar esta pérdida y entregar energía al sistema aplicando una fuerza externa que en cualquier instante actúe en la dirección del movimiento del oscilador, que debe hacer un trabajo positivo sobre el sistema. La amplitud del movimiento permanecerá constante si la energía de entrada al sistema en cada ciclo del movimiento es igual a la energía que se pierde por la fricción.

Un oscilador forzado se puede obtener cuando un oscilador amortiguado es impulsado por una fuerza externa que varía armónicamente en el tiempo, de la forma  $F = F_o \cos \omega t$ , donde  $\omega$  es la frecuencia angular de la fuerza y  $F_o$  es una constante. Agregando esta fuerza a la ecuación diferencial del oscilador amortiguado, se obtiene:

$$F_o \cos \omega t - kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (11.17)$$

Ya sabemos que la solución de esta ecuación es complicada, por lo que damos su resultado sin demostración; en un curso más avanzado de Mecánica Clásica ustedes van a tener amplias posibilidades de entretenerse resolviendo ecuaciones como esta. Después de un tiempo suficientemente largo, cuando la energía de entrada en cada ciclo es igual a la energía perdida en cada ciclo, se alcanza la condición de estado estacionario, donde las oscilaciones se producen con

amplitud constante. En esas condiciones, la solución de la ecuación diferencial 11.17 es:

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

donde la amplitud es:

$$A = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \quad (11.18)$$

con  $\omega_o^2 = k/m$ , la frecuencia del oscilador no amortiguado ( $b = 0$ ). Estas soluciones se justifican, pues físicamente en estado estacionario el oscilador debe tener la misma frecuencia de la fuerza externa aplicada. Se puede comprobar que  $x$  es solución si se reemplaza en la ecuación diferencial 11.17, esta se satisface cuando la amplitud es la ecuación 11.18.

En la ecuación 11.18 se observa que el movimiento del oscilador forzado no es amortiguado, ya que se está impulsando por una fuerza externa, pues la condición es que el agente externo entregue la energía necesaria para compensar la energía que se pierde por fricción. Observar que la masa oscila con la frecuencia  $\omega$  de la fuerza impulsora. Para un amortiguamiento pequeño, la amplitud aumenta cuando la frecuencia de la fuerza impulsora se aproxima a la frecuencia natural de la oscilación, o cuando  $\omega \approx \omega_o$ . El aumento tan significativo de la amplitud cerca de la frecuencia natural se conoce como **resonancia**, y la frecuencia  $\omega_o$  se llama **frecuencia de resonancia** del sistema.

En la figura 11.9 se muestra una gráfica de la amplitud como función de la frecuencia para un oscilador forzado con y sin fuerza de fricción. Notar que la amplitud aumenta cuando disminuye el amortiguamiento ( $b \rightarrow 0$ ). Además la curva de resonancia se ensancha al aumentar el amortiguamiento. En condiciones de estado estacionario, y a cualquier frecuencia de impulso, la energía transferida es igual a la energía que se pierde por la fuerza de amortiguamiento, por eso la energía total promedio del oscilador permanece constante. En ausencia de fuerzas de amortiguamiento ( $b = 0$ ), de la ecuación 11.18 se observa que, en estado estacionario,  $A$  aumenta hasta el infinito cuando  $\omega \rightarrow \omega_o$ . Es decir, si no hay pérdidas en el sistema, y se continua impulsando un oscila-

dor que se encontraba inicialmente en reposo, con una fuerza senoidal que se encuentra en fase con la velocidad, la amplitud crecerá sin límite. Esto no se produce en la realidad ya que siempre están presentes las fuerzas de fricción, aunque sean pequeñas, por lo tanto, en la resonancia la amplitud será grande, pero finita para pequeños amortiguamientos.

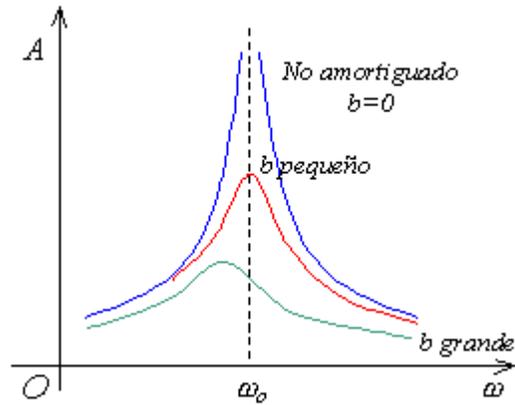


Figura 11.9 Gráfico de la amplitud en función de la frecuencia para un oscilador forzado con y sin fuerza de fricción.

**PROBLEMAS.**

- 11.1 El desplazamiento de una partícula está dado por la ecuación  $x = 4 \cos(3\pi t + \pi)$ , donde  $x$  está en m y  $t$  en s. Calcular: a) la frecuencia y el periodo del movimiento, b) la amplitud del movimiento, c) la constante de fase, d) la posición de la partícula en  $t = 0$  y 5s, e) la rapidez y aceleración en cualquier instante, f) la rapidez y aceleración máximas, g) la rapidez y aceleración en  $t = 0$  y 5 s. R: a) 1.5 Hz, 0.667 s, b) 4 m, c)  $\pi$  rad, d) -4 m.
- 11.2 Una partícula oscila con un movimiento armónico simple de tal forma que su desplazamiento varía de acuerdo con la expresión  $x = 5 \cos(2t + \pi/6)$ , donde  $x$  está en cm y  $t$  en s. Calcular: a) la frecuencia y el periodo del movimiento, b) la amplitud del movimiento, c) la posición de la partícula en  $t = 0$ , d) la rapidez y aceleración en  $t = 0$ . R: a)  $\pi$  s, b) 5 cm, c) 4.33 cm, d) -5 cm/s, -17.3 cm/s<sup>2</sup>.
- 11.3 Una partícula que se mueve con movimiento armónico simple recorre una distancia total de 20 cm en cada ciclo, y su máxima aceleración es de 50 m/s<sup>2</sup>. Calcular: a) la frecuencia angular, b) su máxima rapidez.
- 11.4 El desplazamiento de una partícula está dado por la ecuación  $x = 8 \cos(2t + \pi/3)$ , donde  $x$  está en cm y  $t$  en s. Calcular: a) la frecuencia y el periodo del movimiento, b) la amplitud del movimiento, c) la constante de fase, d) la posición, la rapidez y aceleración de la partícula en  $t = \pi/2$  s, e) la máxima rapidez y el tiempo más corto en alcanzarla, f) la máxima aceleración y el tiempo más corto en alcanzarla. R: d) 13.9 cm/s, 16 cm/s<sup>2</sup>, e) 16 cm/s, 0.263 s, f) 32 cm/s<sup>2</sup>, 1.05 s.
- 11.5 Una partícula que se mueve con movimiento armónico simple, en  $t = 0$  se encuentra en  $x_0 = 2$  cm, con rapidez  $v_0 = -24$  cm/s. Si el periodo del movimiento es 0.5 s, calcular: a) la constante de fase, b) la amplitud, c) la posición, la rapidez y aceleración en función del tiempo, d) la rapidez y aceleración máximas.
- 11.6 Una partícula que se mueve con movimiento armónico simple a lo largo del eje  $x$ , empieza desde el origen en  $t = 0$  y se mueve hacia la de-

recha. Si la amplitud de su movimiento es de 2 cm y la frecuencia 1.5 Hz, calcular: a) la posición en función del tiempo, b) la máxima rapidez y el tiempo mas corto en alcanzarla, c) la máxima aceleración y el tiempo mas corto en alcanzarla, d) la distancia total recorrida entre  $t=0$  y  $t=1s$ . R: a)  $2 \text{ sen}(3\pi t)$ , b)  $6\pi \text{ cm/s}$ , 0.33s, c)  $18\pi^2 \text{ cm/s}^2$ , 0.5s, d) 12cm.

- 11.7 Un pistón, de masa 2kg, en un motor de automóvil tiene un movimiento armónico simple, con una amplitud de 5 cm. Calcular la rapidez y la aceleración máximas del pistón cuando se mueve a 3600 rev/min.
- 11.8 Un peso de 0.2 N se suspende de un resorte de constante 6 N/m. Calcular el desplazamiento del resorte. R: 3.33 cm.
- 11.9 Un resorte se alarga 4 cm cuando se le cuelga una masa de 10 gramos. Si se le cuelga una masa de 25 gramos, oscila con un movimiento armónico simple. Calcular el periodo del movimiento.
- 11.10 La frecuencia de vibración de un sistema masa-resorte es de 5 Hz cuando se le cuelga una masa de 4 gramos. Calcular la constante del resorte. R: 3.95 N/m.
- 11.11 Una masa de 1 kg sujeta a un resorte de constante 25 N/m, oscila en una superficie horizontal sin fricción. La masa se suelta desde el reposo en el instante  $t = 0$ , donde el resorte se encuentra comprimido en la posición en  $x = -3\text{cm}$ . Calcular: a) el periodo, b) la rapidez y aceleración máxima, c) la posición, la rapidez y aceleración en función del tiempo.
- 11.12 A un oscilador armónico simple le toma 12 s completar 5 vibraciones. Calcular a): el periodo, b) la frecuencia, c) la frecuencia angular. R: a) 2.4 s, b) 0.417 Hz, c) 2.62 rad/s.
- 11.13 Un sistema masa-resorte oscila de tal forma que su posición está dada por  $x = 0.25\text{cos}(2\pi t)$ , donde  $x$  esta en m y  $t$  en s. Calcular: a) la rapidez y aceleración de la masa cuando  $x = -0.1 \text{ m}$ , b) la rapidez y aceleración máximas.
- 11.14 Una masa de 0.5 kg sujeta a un resorte de constante 8 N/m, oscila con movimiento armónico simple, con una amplitud de 10 cm. Calcular a)

- la rapidez y aceleración máximas, b) la rapidez y aceleración cuando la masa se encuentra en  $x = 6 \text{ cm}$  de la posición de equilibrio, c) el tiempo que demora la masa en moverse entre  $x = 0$  y  $x = 8 \text{ cm}$ . R: a)  $0.4 \text{ m/s}$ ,  $1.6 \text{ m/s}^2$ , b)  $\pm 0.32 \text{ m/s}$ ,  $-9.6 \text{ m/s}^2$ , c)  $0.232 \text{ s}$ .
- 11.15 Una partícula sujeta a un resorte vertical, se estira hacia abajo una distancia de  $4 \text{ cm}$  desde su posición de equilibrio y se suelta desde el reposo. La aceleración inicial hacia arriba de la partícula es  $0.3 \text{ m/s}^2$ . Calcular a) el periodo de las oscilaciones siguientes, b) la rapidez cuando pasa por la posición de equilibrio. c) Escribir la ecuación de movimiento de la partícula.
- 11.16 Una masa de  $0.2 \text{ kg}$  sujeta a un resorte oscila con movimiento armónico simple, con un periodo de  $0.25 \text{ s}$ . Si la energía total del sistema es  $2 \text{ J}$ , calcular a) la constante del resorte, b) la amplitud del movimiento.
- 11.17 Un sistema masa-resorte oscila con una amplitud de  $3.5 \text{ cm}$ . Si la constante del resorte es  $250 \text{ N/m}$ , y la masa de  $0.5 \text{ kg}$ , calcular a) la energía mecánica del sistema, b) la rapidez máxima de la masa, c) la aceleración máxima. R: a)  $0.153 \text{ J}$ , b)  $0.783 \text{ m/s}$ , c)  $17.5 \text{ m/s}^2$ .
- 11.18 La amplitud de un sistema moviéndose con un movimiento armónico simple se duplica. Calcular la variación en: a) la energía total, b) la rapidez máxima, c) la aceleración máxima, d) el periodo. R: a) cuadruplica, b) duplica, c) duplica, d) no cambia.
- 11.19 Un sistema masa-resorte tiene un movimiento armónico simple en una superficie horizontal sin fricción, con una amplitud de  $12 \text{ cm}$ . Si la constante del resorte es  $50 \text{ N/m}$ , calcular: a) la energía total del sistema, b) la energía cinética del sistema cuando la masa está a  $9 \text{ cm}$  de la posición de equilibrio, c) la energía potencial cuando la posición es  $x=9 \text{ cm}$ .
- 11.20 Una partícula tiene un movimiento armónico simple con una amplitud de  $3 \text{ cm}$ . Calcular la posición respecto al punto medio de su movimiento donde la rapidez será igual a la mitad de la rapidez máxima. R:  $\pm 2.6 \text{ cm}$ .

- 11.21 Un bloque de 50 g se sujeta al extremo libre de un resorte ideal que tiene una fuerza de restitución de 40 N por cada metro de extensión. El bloque se puede deslizar libre sobre una superficie horizontal sin fricción, se pone en movimiento dándole una energía potencial inicial de 2 J y una energía cinética inicial de 1.5 J. a) Dibujar la gráfica de la energía potencial del sistema para valores en el rango  $-0.5\text{ m} \leq x \leq +5\text{ m}$ . b) Calcular la amplitud de la oscilación del gráfico y en forma analítica. c) Calcular la rapidez del bloque cuando pasa por la posición de equilibrio. d) Calcular la posición donde la energía cinética es igual a la energía potencial. e) Calcular la frecuencia angular y el periodo. f) Si el desplazamiento inicial fue  $x > 0$  y la rapidez inicial fue  $v < 0$ , calcular el ángulo de fase. g) Escribir la ecuación de movimiento  $x(t)$ .
- 11.22 Un péndulo simple tiene un periodo de 2.5 s. Calcular: a) su longitud, su periodo si estuviera en la Luna, donde  $g = 1.67 \text{ m/s}^2$ . R: a) 1.55 m, b) 6.1 s.
- 11.23 Calcular la frecuencia y el periodo de un péndulo simple de 10 m de longitud.
- 11.24 Si la longitud de un péndulo simple se cuadruplica, ¿que sucede con la frecuencia y el periodo? R: se divide en partes iguales, se duplica.
- 11.25 Un péndulo simple de longitud 2 m oscila de acá para allá y de allá para acá. Calcular el número de oscilaciones que hará en 5 minutos.
- 11.26 Un péndulo simple que tiene una masa de 0.25 kg y una longitud 1 m, se desvía un ángulo de  $15^\circ$  y se suelta. Calcular: a) la rapidez máxima, b) la aceleración angular máxima, c) la máxima fuerza de restitución. R: a) 0.82 m/s, b)  $2.57 \text{ rad/s}^2$ , c) 0.64 N.
- 11.27 Una barra uniforme se encuentra pivoteada en un extremo como se muestra en la figura 11.6. Si la barra oscila con un movimiento armónico simple, calcular su longitud para que su periodo sea igual al de un péndulo simple de 1 m de longitud.
- 11.28 Un aro circular de radio  $R$  oscila sobre el filo de un cuchillo. Demuestre que su periodo de oscilación es el mismo que el de un péndulo simple de longitud  $2R$ .

- 11.29 Un péndulo físico en forma de cuerpo plano tiene un movimiento armónico simple con una frecuencia de 1.5 Hz. Si tiene una masa de 2.2 kg y el pivote se encuentra a 0.35 m del centro de masa, calcular el momento de inercia del péndulo. R:  $0.085 \text{ kgm}^2$ .
- 11.30 Una varilla delgada tiene una masa  $M$  y una longitud de 1.6 m. Uno de los extremos de la varilla se sujeta en un pivote fijo, en torno al cual oscila la varilla. a) Calcular la frecuencia de estas oscilaciones. Si se agrega una partícula de masa  $M$  al extremo final de la varilla, b) calcular el factor en el que cambiará el periodo.
- 11.31 Un volante de un reloj tiene un periodo de oscilación de 0.25 s. El volante se construyó de tal manera que 20 g de masa están concentrados alrededor de un aro de 0.5 cm de radio. Calcular: a) el momento de inercia del volante, b) la constante de torsión del resorte sujeto al volante. R: a)  $5 \times 10^{-7} \text{ kgm}^2$ , b)  $3.16 \times 10^{-4} \text{ Nm/rad}$ .
- 11.32 Un péndulo de 1 m de longitud se suelta desde un ángulo inicial de  $15^\circ$ . Después de 1000 s su amplitud se reduce por la fricción a  $5^\circ$ . Calcular el valor de  $b/2m$ . R:  $1 \times 10^{-3} \text{ s}$
- 11.33 Demuestre que la constante de amortiguamiento  $b$  tiene unidades  $\text{kg/s}$ .
- 11.34 Demuestre que la ecuación 11.15 es una solución de la ecuación 11.14, siempre y cuando  $b^2 < 4mk$ .
- 11.35 Demuestre que la rapidez de cambio de la energía mecánica para un oscilador amortiguado, no impulsado, esta dada por  $dE/dt = -bv^2$  y por lo tanto siempre es negativa.
- 11.36 Una masa de 2 kg sujeta a un resorte de constante 20 N/m, se impulsa por una fuerza externa de la forma  $F = 3\cos(2\pi t)$ , donde  $F$  esta en N y  $t$  en s. Calcular: a) el periodo del movimiento, b) la amplitud. Suponga que no hay amortiguamiento, es decir que  $b = 0$ .
- 11.37 Calcular la frecuencia de resonancia de los siguientes sistemas: a) una masa de 3 kg sujeta a un resorte de constante 240 N/m, b) un péndulo simple de 1.5 m de longitud. R: a) 1.42 Hz, b) 0.41 Hz.

- 11.38 Considere un oscilador forzado no amortiguado ( $b = 0$ ), y demuestre que la ecuación 11.1 es solución de la ecuación 11.17 con una amplitud dada por la ecuación 11.18.
- 11.39 Un peso de 40 N se suspende de un resorte de constante 200 N/m. El sistema no está amortiguado y se impulsa por una fuerza armónica de frecuencia 10 Hz, dando por resultado un movimiento armónico de amplitud 2 cm. Calcular el valor máximo de la fuerza aplicada. R: 318 N.
- 11.40 Un péndulo de longitud  $L$  y masa  $M$ , tiene conectado un resorte de constante  $k$  a una distancia  $h$  por debajo del punto de suspensión, como se muestra en la figura 11.10. Calcular la frecuencia de vibración del sistema para valores pequeños de la amplitud. Suponga que tanto el soporte vertical como el resorte son rígidos de masa despreciable. R:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{MgL + kh^2}{ML^2}} .$$

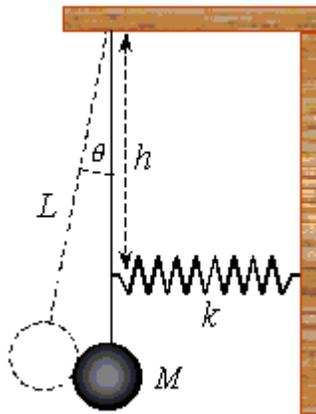


Figura 11.10. Problema 11.40.

## **CAP 12. TEMPERATURA, DILATACION TERMICA Y GASES.**

La mecánica newtoniana explica una diversidad muy amplia de fenómenos en la escala macroscópica, tales como el movimiento de los cuerpos, de proyectiles y de planetas. Ahora iniciaremos el estudio en la termodinámica, área de la física relacionada con los conceptos de calor y temperatura. Con la termodinámica se hace la descripción de las propiedades volumétricas de la materia y la correlación entre esas propiedades y la mecánica de los átomos y moléculas. Se ha preguntado alguna vez ¿qué le pasa a la energía cinética de un objeto cuando cae al suelo y queda en reposo?, o ¿como puede enfriar un refrigerador? Las leyes de la termodinámica y los conceptos de calor y de temperatura nos permitirán contestar estas preguntas. En general, la termodinámica trata con las transformaciones físicas y químicas de la materia en todos sus estados: sólido, líquido, gas o plasma.

El objeto de estudio de la física térmica trata con los fenómenos que comprenden transferencias de energía entre cuerpos que están a diferentes temperaturas. En el estudio de la mecánica, se definieron claramente conceptos como masa, fuerza y energía, para hacer la descripción en forma cuantitativa. De la misma forma, una descripción cuantitativa de los fenómenos térmicos requiere una definición clara de los conceptos de temperatura, calor y energía interna. La ciencia de la termodinámica está relacionada con el estudio del flujo de calor desde un punto de vista macroscópico.

### ***12.1 TEMPERATURA Y LEY CERO DE LA TERMODINAMICA.***

La temperatura es una magnitud física que se refiere a la sensación de frío o caliente al tocar alguna sustancia. Así, nuestros sentidos nos entregan una indicación cualitativa de la temperatura, pero no podemos confiar siempre en nuestros sentidos, ya que pueden engañarnos. Por ejemplo, si se saca del refrigerador un recipiente metálico con cubos de hielo y un envase de cartón con verduras congeladas, se siente más frío el metal que el cartón, aunque ambos están a la misma temperatura; la misma sensación se nota cuando se pisa la baldosa del piso solo y la alfombra. Esto se debe a que el metal o la cerámica es mejor conductor del calor que el cartón o la tela. Por lo tanto se necesita un método confiable para medir la sensación de frío o caliente de los cuerpos.

Experimentalmente se encuentra que si dos objetos que inicialmente están a diferente temperatura, se ponen en contacto térmico entre sí, llegará el momento en que alcancen una cierta temperatura intermedia. Para comprender el concepto de temperatura definamos **contacto térmico**: es cuando entre dos cuerpos puede ocurrir un intercambio de energía entre ellos sin que se realice trabajo macroscópico; y **equilibrio térmico**: es una situación en la que dos cuerpos en contacto térmico entre sí, dejan de tener todo intercambio neto de energía. El tiempo que tardan los cuerpos en alcanzar el equilibrio térmico depende de las propiedades de los mismos. Se puede pensar en la **temperatura** como una propiedad que determina cuando se encuentra o no un cuerpo en equilibrio térmico con otros cuerpos.

Consideremos dos cuerpos A y B que no están en contacto térmico y un tercer cuerpo C que usaremos como medidor de temperatura. Se quiere determinar cuando están A y B en equilibrio térmico entre sí. Primero se coloca el cuerpo C en contacto térmico con A hasta que se alcanza el equilibrio térmico. Luego se coloca el cuerpo C en contacto térmico con B hasta que alcanzan el nuevo equilibrio térmico. Si la temperatura de C después de ponerse en contacto térmico con A y con B es la misma en ambos casos, entonces A y B están en equilibrio térmico entre sí. Este resultado se resume en un enunciado llamado **principio cero de la termodinámica**: *Si dos cuerpos A y B están por separado en equilibrio térmico con un tercer cuerpo C, entonces A y B están en equilibrio térmico entre sí.* Este enunciado, aunque parezca obvio, es lo más fundamental en el campo de la termodinámica, ya que se puede usar para definir la temperatura.

## 12.2 TERMOMETROS Y ESCALAS DE TEMPERATURA.

Los termómetros son dispositivos para definir y medir la temperatura de un sistema. Todos los termómetros se basan en el cambio de alguna propiedad física con la temperatura, como el cambio de volumen de un líquido, el cambio en la longitud de un sólido, el cambio en la presión de un gas a volumen constante, el cambio en el volumen de un gas a presión constante, el cambio en la resistencia de un conductor o el cambio en el color de objetos a muy alta temperatura.

Los cambios de temperatura se miden a partir de los cambios en las otras propiedades de una sustancia, con un instrumento llamado termómetro, de los

cuales existen varios tipos. El termómetro mecánico se basa en la propiedad de dilatación con el calor o contracción con el frío de alguna sustancia. Por ejemplo, el termómetro de mercurio convencional mide la dilatación de una columna de mercurio en un capilar de vidrio, ya que el cambio de longitud de la columna está relacionado con el cambio de temperatura. El termómetro se puede calibrar colocándolo en contacto térmico con algún sistema natural cuya temperatura permanezca constante, conocida como *temperatura de punto fijo*. Una de las temperaturas de punto fijo que se elige normalmente es la de una mezcla de agua y hielo a la presión atmosférica, que se define como *cero grado Celsius* denotado por  $0^{\circ}\text{C}$ . Otro punto fijo conveniente es la temperatura de una mezcla de agua y vapor de agua en equilibrio a la presión atmosférica, al que se le asigna el valor de  $100^{\circ}\text{C}$ . Una vez que se han fijado los niveles de la columna de mercurio en estos puntos, se divide en 100 partes iguales, donde cada una de estas representa un cambio de temperatura equivalente a un grado Celsius (Anders Celsius, sueco, 1701-1744). Así se define una escala de temperatura llamada *escala centígrada o escala Celsius*.

Un problema práctico de cualquier termómetro es su rango limitado de temperaturas. Por ejemplo, como el mercurio se congela a  $-39^{\circ}\text{C}$ , para asegurarse de medir temperaturas menores que estas, se usan los termómetros de alcohol, que se congela a  $-130^{\circ}\text{C}$ . Los termómetros para medir la mínima diaria en meteorología son de alcohol, se muestra en la figura 12.1 inferior, el termómetro superior en esta figura, de mercurio, se usa para medir la máxima diaria.



Figura 12.1 Termómetros de máxima y de mínima usados en meteorología.

### 12.3 TERMOMETRO DE GAS Y ESCALA KELVIN.

Se requiere un termómetro universal cuyas lecturas sean independientes de la sustancia que se use. En un termómetro de gas, las lecturas de las temperaturas son casi independientes de la sustancia que se utilice en el termómetro. En este caso, la propiedad física es la variación de la presión del gas con la temperatura. Al calentarse (enfriarse) el gas, la presión aumenta (disminuye) y la altura de la columna de mercurio aumenta (disminuye). El cambio de temperatura puede determinarse a partir del cambio en la presión. Si se supone que la variación de temperatura  $T$  con la presión  $P$  es lineal, se puede escribir:

$$T = aP + b \quad (12.1)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes, que se pueden determinar a partir de dos puntos fijos, tales como los puntos de hielo y vapor.

Los experimentos demuestran que cuando se miden las temperaturas con diferentes termómetros y con diferentes gases, las lecturas son independientes del tipo de gas que se use, siempre que la presión no sea muy alta. La concordancia mejora al reducirse la presión. Esta concordancia significa que la intersección  $b$  de la ecuación 12.1 es la misma para todos los gases. Esto se muestra en la figura 12.2, en un gráfico de presión – temperatura, para un gas 1, gas 2 y gas 3, cualesquiera. Cuando se extrapola la recta de presión a temperaturas muy bajas (líneas de puntos), se encuentra que la presión es cero cuando la temperatura alcanza el valor  $-273.15^\circ \text{C}$ . Esta temperatura corresponde a la constante  $b$  en la ecuación 12.1. La extrapolación es necesaria, ya que todos los gases se licuan antes de llegar a esa temperatura.

**Punto triple del agua.** Corresponde a la temperatura y presión únicas en las que el hielo, el agua y el vapor de agua pueden coexistir en equilibrio. Estos valores son aproximadamente  $T = 0.01^\circ \text{C}$  y  $P = 610 \text{ Pa}$ .

La temperatura en el punto triple del agua en la nueva escala, dada por la ecuación 12.1, se tomó como 273.16 kelvin, abreviado 273.16 K. Esta elección se hizo para que la vieja escala centígrada de temperatura basada en los puntos del hielo y del vapor coincidiera cercanamente con esta nueva escala basada en el punto triple del agua. Esta nueva escala se llama *escala de tem-*

temperatura termodinámica y la unidad SI de la temperatura termodinámica, el Kelvin K, se define como **la fracción 1/273.16 de la temperatura** del punto triple del agua (Williams Thompson, inglés, 1824-1907, Primer Barón de Kelvin, Lord Kelvin).

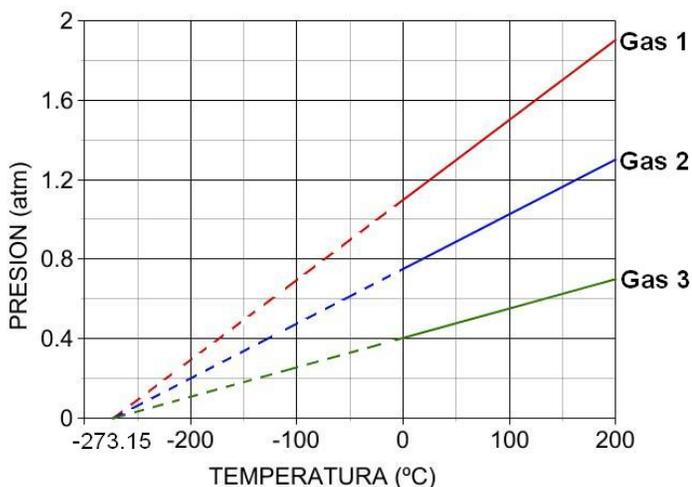


Figura 12.2 Gráfico de presión versus temperatura para diferentes gases.

Si se toma  $b = 0$  en la ecuación 12.1 y llamando  $P_3$  a la presión en la temperatura del punto triple del agua,  $T_3 = 273.16K$ , se encuentra que  $a = 273.16K/P_3$ . Por lo tanto, la temperatura como una medida de la presión  $P$  de un gas para un termómetro de gas a volumen constante se define como:

$$T = 273.16 \frac{P}{P_3} \quad (12.2)$$

Como se mencionó antes, experimentalmente se encuentra que si la presión  $P_3$  disminuye, el valor medido de la temperatura se aproxima al mismo valor para todos los gases. En la figura 12.3 se da un ejemplo de tales medidas, la cual muestra el punto del vapor medido con un termómetro de gas a volumen constante usando diferentes gases. A medida que la presión  $P_3$  se aproxima a cero, todas las medidas se acercan a un valor común de 373.15 K. en forma análoga, se encuentra que la temperatura del punto de hielo es 273.15 K.

En el límite de las presiones bajas (valores cercanos a la presión atmosférica) y las temperaturas altas del gas (del orden de la temperatura ambiente o mayor), los gases reales se comportan como lo que se conoce como un *gas ideal*, que se analizará con detalle mas adelante. La escala de temperaturas definida en este límite de presiones bajas del gas, recibe el nombre de *temperatura del gas ideal*,  $T$ , dada por:

$$T = 273.16 \lim_{P_3 \rightarrow 0} \frac{P}{P_3} \quad (12.3)$$

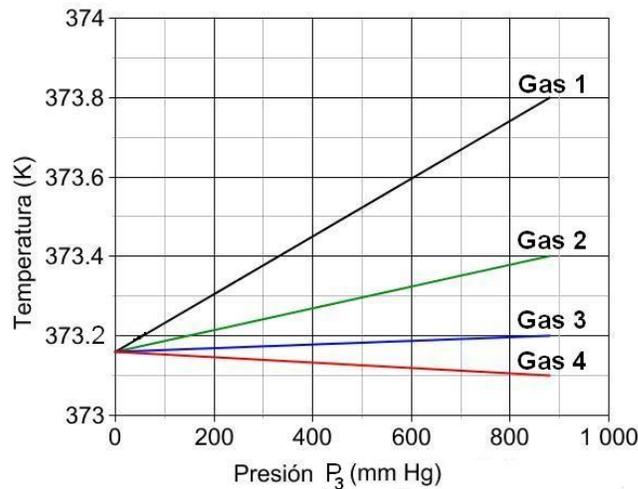


Figura 12.3 Gráfico de temperatura medida con un termómetro de gas a volumen constante versus presión  $P_3$  del punto de vapor de agua, para diferentes gases.

Por lo tanto, el termómetro de gas a volumen constante define una escala de temperaturas que puede reproducirse en todos los laboratorios del mundo. Aún cuando la escala depende de las propiedades de un gas, es independiente del gas que se use.

Es conveniente tener una escala de temperaturas independiente de las propiedades de cualquier sustancia. Una escala de este tipo se llama *escala de temperaturas absoluta* o *escala Kelvin*. Se usa el símbolo  $T$  para indicar las temperaturas absolutas.

En la tabla 12.1 se muestran las temperaturas para puntos fijos particulares de diferentes materiales.

Tabla 12.1 Temperatura de algunos fenómenos físicos y biológicos.

Proceso	T (°C)	T (K)	Proceso	T (°C)	T (K)
Cero absoluto	-273.15	0	Normal de persona	37	310.15
Punto triple del hidrógeno	-259.34	13.81	Solidificación agua	0	273.15
Punto ebullición del hidrógeno	-252.87	20.28	Ebullición del agua	100	373.15
Punto fusión del nitrógeno	-206	67.15	Fusión del oro	1063	1336
Solidificación de la gasolina	-150	123.15	Llama de gas	1627	1900
Solidificación del alcohol	-130	143.15	Superficie del Sol	5700	6000
Solidificación CO <sub>2</sub> (hielo seco)	-78	195.15	Centro de la Tierra	16000	16273
Solidificación del mercurio	-39	234.15	Centro del Sol	1.4x10 <sup>7</sup>	1.4x10 <sup>7</sup>

Ejemplo 12.1 Un termómetro de gas a volumen constante se calibra en los puntos de temperatura de  $-58^{\circ}\text{C}$  a 1 atm de presión y en el punto de temperatura  $157^{\circ}\text{C}$  a 2 atm. a) Deducir la escala de temperatura. Calcular: b) el valor de cero absoluto que produce esta calibración, c) la presión en punto de congelamiento del agua, d) la presión en el punto de ebullición del agua.

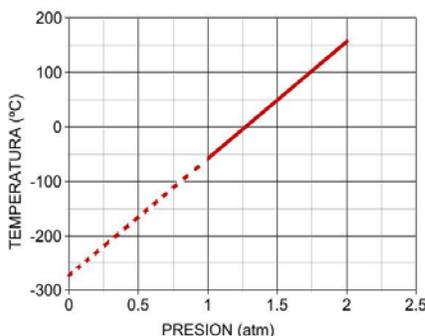


Figura 12.4. Relación lineal entre  $T$  y  $P$  del ejemplo 12.1

Solución:

a) los puntos de calibración son  $T_1 = -58^{\circ}\text{C}$ ,  $P_1 = 1\text{ atm}$  y  $T_2 = 157^{\circ}\text{C}$ ,  $P_2 = 2\text{ atm}$ . Suponiendo que existe una relación lineal entre la presión y la temperatura, como se muestra en la figura 12.4, se tendría:

$$T = a + bP$$

con  $T$  en  $^{\circ}\text{C}$ ,  $P$  en atm,  $a$  es el punto de intersección para  $P = 0$  y  $b$  es la pendiente de la recta, que se calcula:

$$b = \frac{\Delta T}{\Delta P} = \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} = \frac{157 - (-58)}{2 - 1} = 215 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{atm}}$$

Reemplazando en la ecuación lineal de  $T$ , se obtiene:

$$T = a + 215P$$

Para calcular  $a$ , se reemplaza los valores  $T_1$ ,  $P_1$  (o  $T_2$ ,  $P_2$ ) en la ecuación anterior:

$$-58^{\circ}\text{C} = a + 215 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{atm}} \times 1\text{atm} \Rightarrow a = -273^{\circ}\text{C}$$

Por lo tanto, la relación lineal entre  $T$  y  $P$ , queda:

$$T = -273 + 215P$$

b) En el cero absoluto,  $P = 0$ , por lo tanto  $T = -273 + 215 \times 0 = -273^{\circ}\text{C}$ .

c) En el punto de congelación del agua,  $T = 0^{\circ}\text{C}$ ,

$$0 = -273 + 215P \Rightarrow P = \frac{273^{\circ}\text{C}}{215^{\circ}\text{C}/\text{atm}} = 1.27\text{atm}$$

d) En el punto de ebullición del agua,  $T = 100^{\circ}\text{C}$ ,

$$100 = -273 + 215P \Rightarrow P = \frac{373^{\circ}\text{C}}{215^{\circ}\text{C}/\text{atm}} = 1.73\text{atm}$$

### 12.4 ESCALAS DE TEMPERATURA CELSIUS Y FAHRENHEIT.

La temperatura Celsius,  $T_C$ , está desplazada respecto a la escala absoluta (o Kelvin)  $T$  en  $273.15^\circ$ , ya que por definición el punto triple del agua ( $273.16\text{ K}$ ) vale  $0.01^\circ\text{ C}$ . La relación entre estas escalas es:

$$T_C = T - 273.15 \quad (12.4)$$

Se observa que el valor de un grado en la escala Kelvin es igual al de la escala Celsius. Por ejemplo, una diferencia o variación de temperatura de  $5^\circ\text{ C}$  es igual a una diferencia de temperatura de  $5\text{ K}$ . Las dos escalas solo se diferencian en la elección del punto cero.

Otra escala usada en países anglosajones es la *escala Fahrenheit* (Daniel Fahrenheit, alemán, 1686-1736). La temperatura Fahrenheit,  $T_F$ , se relaciona con la temperatura Celsius por la expresión:

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32^\circ F \quad (12.5)$$

Ejemplo 12.2 La temperatura promedio mensual mínima en Concepción es aproximadamente  $6^\circ\text{ C}$  y se produce en agosto y la máxima es  $24^\circ\text{ C}$  y se produce en enero. Un gringo quiere conocer estos valores en grados Fahrenheit. Hacer la conversión.

Solución: Se usa la ecuación 12.5, para  $T_{Cmin} = 6^\circ\text{ C}$ :

$$T_{Fmin} = \frac{9}{5}T_{Cmin} + 32^\circ F = (1.8)(6) + 32 = 42.8^\circ F$$

para  $T_{Cmax} = 24^\circ\text{ C}$ :

$$T_{Fmax} = \frac{9}{5}T_{Cmax} + 32^\circ F = (1.8)(24) + 32 = 75.2^\circ F$$

### 12.5 DILATACION TERMICA DE SOLIDOS Y LIQUIDOS.

La mayoría de los objetos se dilatan (contraen) cuando se aumenta (disminuye) su temperatura. En escala microscópica, la dilatación térmica de un cuerpo es consecuencia del cambio en la separación media entre sus átomos o moléculas. Para comprender esto, se considerará un sólido que consta de un arreglo regular de átomos mantenidos unidos por fuerzas eléctricas. Un modelo mecánico de estas fuerzas es imaginar que los átomos están unidos por resorte rígidos, como se muestra en la figura 12.4. Por su naturaleza, las fuerzas interatómicas se consideran elásticas. Para temperaturas en los rangos comunes de la naturaleza, los átomos vibran respecto a sus posiciones de equilibrio con una amplitud aproximada de  $10^{-11}$  m y una frecuencia de  $10^{13}$  Hz. La separación promedio entre los átomos es del orden de  $10^{-10}$  m. Al aumentar la temperatura del sólido, los átomos vibran con amplitudes más grandes y la separación promedio entre ellos aumenta, dando por resultado que el sólido como un todo se dilate cuando aumente su temperatura. Si la dilatación de cualquier objeto es lo suficientemente pequeña en comparación con sus dimensiones, el cambio de cualquier parte, largo, ancho o alto, dentro de una buena aproximación, es una función lineal de la temperatura.

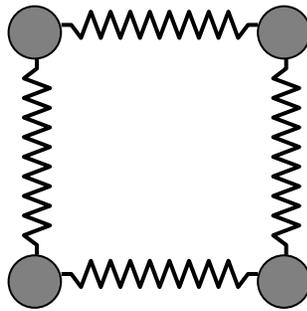


Figura 12.5 Modelo mecánico de un sólido, donde los átomos se imaginan unidos unos con otros por resortes.

Supongamos que la dimensión lineal de un cuerpo a una cierta temperatura, a lo largo de alguna dirección es  $l$ . La longitud aumentara en una cantidad  $\Delta l$  para un cambio de temperatura  $\Delta T$ . Experimentalmente se demuestra que el cambio en la longitud es proporcional al cambio de temperatura y a la longitud inicial siempre que  $\Delta T$  sea pequeña. Por lo tanto, la ecuación básica para la dilatación de un sólido es:

$$\Delta l = \alpha l \Delta T \quad (12.6)$$

donde la constante de proporcionalidad  $\alpha$  se llama **coeficiente promedio de dilatación lineal** para un material dado, se mide en  $^{\circ}\text{C}^{-1}$ . Para ilustrar, por ejemplo un valor de  $\alpha$  de  $5 \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$  significa que la longitud del objeto cambia 5 millonésimas su valor original por cada grado Celsius de variación de temperatura. El orden de magnitud de  $\alpha$  para los sólidos es de 1mm por m, cada  $100^{\circ} \text{C}$ . El coeficiente  $\alpha$  se considera promedio, porque en general varía con la temperatura, pero comúnmente esta variación es despreciable a la escala en que se realizan la mayoría de las mediciones.

Como las dimensiones lineales de los cuerpos cambian con la temperatura, se deduce que el área y el volumen del cuerpo también cambian con la temperatura. El cambio en el volumen a presión constante es proporcional al volumen original  $V$  y al cambio de temperatura, lo que se puede escribir como:

$$\Delta V = \beta V \Delta T \quad (12.7)$$

donde  $\beta$  es el **coeficiente promedio de dilatación volumétrica**. Para un sólido isotrópico (aquel en el cual el coeficiente de dilatación lineal es el mismo en todas las direcciones), el coeficiente de dilatación volumétrica es el triple del coeficiente de dilatación lineal, o sea,  $\beta = 3\alpha$ . Por lo tanto la ecuación 12.7 se puede escribir como

$$\Delta V = 3\alpha V \Delta T \quad (12.8)$$

De la misma forma, para una hoja o placa delgada, el cambio en el área de una placa isotrópica es:

$$\Delta A = 2\alpha A \Delta T \quad (12.9)$$

En la tabla 12.2 se presenta una lista de coeficientes de dilatación lineal para diferentes materiales, estos datos son valores medios en el intervalo de 0 a 100° C (excepto \*). Para los gases, la presión es constante y baja (presión atmosférica o inferior). Observar que  $\alpha$  es positivo para esos materiales, pero pueden existir valores negativos de  $\alpha$  o de  $\beta$ , lo que significa que los materiales se contraen en alguna dirección cuando aumenta la temperatura, por ejemplo la goma.

Tabla 12.2 Coeficientes de dilatación, cerca de la temperatura ambiente.

Material	$\alpha$ (°C) <sup>-1</sup> x 10 <sup>-6</sup>	Material	$\beta$ (°C) <sup>-1</sup> x 10 <sup>-4</sup>
Invar (aleación Ni-Fe)	0,9	Agua (0° C)	-0,68
Vidrio (pyrex)	3,2	Agua (100° C)	7,5
Vidrio (común)	9	Alcohol etílico	1,1
Acero	12	Benceno	1,2
Concreto	12	Acetona	1,5
Cobre	17	Mercurio	1,8
Latón y bronce	19	Glicerina	4,8
Aluminio	25	Petróleo	9,0
Zinc	26	Gasolina	9,6
Plomo	29	Helio	36,66
Hielo (-10°C a 0°C) *	51	Aire	36,67

Por lo general, los líquidos aumentan su volumen al aumentar la temperatura y tienen coeficientes de dilatación volumétrica aproximadamente 10 veces más grandes que el de los sólidos (tabla 12.2). El agua es la excepción a esta regla.

### **Expansión del agua.**

El **agua** es una sustancia compuesta por un átomo de oxígeno y dos de hidrógeno. A temperatura ambiente es líquida, inodora, insípida e incolora (aunque adquiere una leve tonalidad azul en grandes volúmenes). Se considera fundamental para la existencia de la vida. No se conoce ninguna forma de vida que tenga lugar en ausencia completa de esta molécula, cuyo esquema se muestra en la figura 12.6.

Casi todos los líquidos se expanden al calentarse, ¡pero el agua fría hace todo lo contrario!, este comportamiento del agua es muy extraño, pero que se le va a hacer, suponemos que la creación es perfecta y se debe aceptar tal como es.

El agua a  $0^{\circ}\text{C}$  se contrae al aumentar su temperatura hasta alcanzar los  $4^{\circ}\text{C}$ , valor a partir del cual comienza a expandirse, expansión que continua hasta el punto de ebullición. Una cantidad dada de agua alcanza su volumen mínimo, y por lo tanto su densidad máxima a  $4^{\circ}\text{C}$ . La misma cantidad de agua tiene su volumen máximo, y por lo tanto su densidad mínima en forma de hielo, por eso el hielo flota sobre el agua. Una vez convertida en hielo, el agua se contrae si seguimos reduciendo su temperatura.

La explicación de este comportamiento tiene que ver con la extraña estructura cristalina del hielo. Los cristales de la mayor parte de los sólidos están estructurados de tal manera que el estado sólido ocupa un volumen menor que el estado líquido. Pero el hielo tiene cristales de estructura abierta, consecuencia de la forma angular de las moléculas de agua (figura 12.6) y del hecho de que las fuerzas que unen las moléculas de agua son más intensas a ciertos ángulos. Las moléculas de agua en esta estructura abierta ocupan un volumen mayor que en el estado líquido. Por eso el hielo es menos denso que el agua.

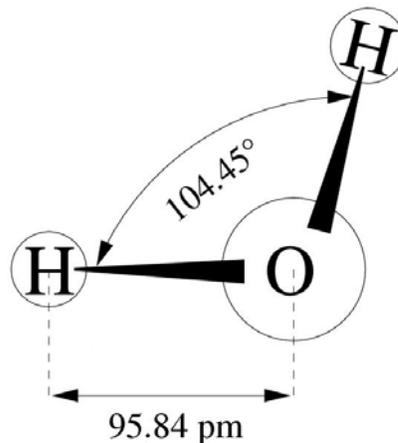


Figura 12.6 Estructura de la molécula de agua.

Ejemplo 12.3. La vía de acero de un ferrocarril tiene una longitud de 30 m cuando la temperatura es  $0^{\circ}\text{C}$ . Calcular la variación de su longitud en un día caluroso de verano en Concepción.

Solución: suponiendo que en día de verano la temperatura ascienda a  $30^{\circ}\text{C}$  y usando los valores de  $\alpha$  de la tabla 12.2, se obtiene:

$$\Delta l = \alpha l \Delta T = (12 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1})(30\text{m})(30^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C})$$

$$\Delta l = 0.0108 \text{ m} = 10.8 \text{ mm} \approx 11 \text{ cm}$$

## 12.6 DESCRIPCIÓN MACROSCÓPICA DE UN GAS IDEAL.

Se describirán las propiedades de un gas de masa  $m$ , contenido en un envase de volumen  $V$  a una presión  $P$  y a una temperatura  $T$  y se buscará una relación entre estas variables, llamadas *variables termodinámicas*. En general, la ecuación que relaciona las variables termodinámicas, que se llama *ecuación de estado*, es ecuación muy complicada, pero si el gas se mantiene a baja presión (baja densidad), se puede establecer en forma experimental una ecuación muy simple. Comúnmente, a un gas a baja densidad se le llama un *gas ideal*. La mayoría de los gases a la temperatura ambiente y a la presión atmosférica, se comportan aproximadamente como gases ideales.

La cantidad de gas en un volumen dado se expresa en términos del número de moles,  $n$ . Se define un *mol* de cualquier sustancia a la masa que contiene un número  $N_A$  de moléculas, llamado número de *Avogadro* (Amadeo Avogadro, italiano, 1776-1856). Este número  $N_A$  (también simbolizado con  $N$  o  $N_o$ ) tiene un valor aproximado de  $6,0220943 \times 10^{23} \pm 6.3 \times 10^{17}$  moléculas/mol.

El número de moles  $n$  de una sustancia se relaciona con su masa  $m$  por la expresión:

$$n = \frac{m}{(PM)} \quad (12.10)$$

donde la cantidad  $(PM)$  se llama *peso (o masa) molecular* de la sustancia, comúnmente medido en g/mol. Por ejemplo, el peso molecular del oxígeno,  $\text{O}_2$  es 32 g/mol, entonces la masa de un mol de oxígeno es:

$$m = n(PM)$$

$$m = (1 \text{ mol})(32 \text{ g/mol}) = 32 \text{ g}$$

Para establecer la ecuación de estado de un gas ideal, considerar un gas encerrado en un envase cilíndrico, cuyo volumen puede variar por medio de un émbolo móvil, como se muestra en la figura 12.7. Se supone que el cilindro no tiene fugas, por lo tanto la masa del gas permanece constante. Para este sistema, experimentalmente se encuentra que:

- a) Si la temperatura  $T$  se mantiene constante, su presión  $P$  es inversamente proporcional a su volumen  $V$ , es decir  $PV = cte$ ; esta es la ley de Boyle de los gases (Robert Boyle, inglés, 1627-1691).
- b) Si la presión  $P$  del gas se mantiene constante, su volumen  $V$  es directamente proporcional a la temperatura  $T$ , es decir  $V/T = cte$ ; esta es la ley de Charles de los gases (Jacques Charles, francés, 1746-1823).
- c) Si el volumen  $V$  se mantiene constante, la presión  $P$  del gas es directamente proporcional a su temperatura  $T$ , es decir  $P/T = cte$ ; esta es la ley de Gay-Lussac de los gases (Louis Gay-Lussac, francés, 1778-1850).

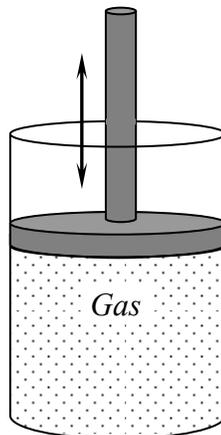


Figura 12.7 Gas ideal contenido en un cilindro con un émbolo móvil que permite la variación del volumen.

Estos resultados pueden resumirse en la siguiente **ecuación de estado de un gas ideal**, de la forma:

$$PV = nRT \quad (12.11)$$

donde  $R$  es una constante para un gas específico, que se puede obtener en forma experimental, y  $T$  es la temperatura absoluta. Los experimentos con diferentes gases demuestran que cuando la presión se aproxima a cero, la cantidad  $PV/nT$  tiende al mismo valor de  $R$  para todos los gases. Por esta razón es que  $R$  se llama **constante universal de los gases**. En el SI donde la presión se mide en Pa y el volumen en  $m^3$ , el valor y la unidad de medida de  $R$  es:

$$R = 8.31 \text{ J}/(\text{mol K})$$

Si la presión se mide en atmósfera y el volumen en litros, lt, entonces el valor de la constante universal de los gases es:

$$R = 0.0821 \text{ (atm lt)}/(\text{mol K}).$$

Como el número total de moléculas  $N$  es igual al producto del número de moles  $n$  y el número de Avogadro  $N_A$ , es decir,  $N = n N_A$ , se puede escribir la ecuación de estado, ya que  $n = N/N_A$ , como:

$$PV = nRT = \frac{R}{N_A} NT$$

Se define la **constante de Boltzmann  $k$**  (Ludwing Boltzmann, austriaco, 1844-1906) como:

$$k = \frac{R}{N_A} \Rightarrow k = \frac{8.31 \text{ J/molK}}{6.022 \times 10^{23} \text{ molec/mol}} \Rightarrow k = 1.38 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Con estos resultados, la ecuación de estado de un gas ideal se puede escribir entonces como:

$$PV = N k T \quad (12.12)$$

Se observa de la ecuación 12.12 que la presión producida por un volumen fijo de gas solo depende de la temperatura y del número de moléculas dentro de ese volumen.

Se ha definido un gas ideal como aquel que obedece la ecuación de estado. En la naturaleza no existe un gas ideal; pero este concepto de gas ideal es muy útil, ya que los gases reales a bajas presiones se comportan aproximadamente como gases ideales.

Ejemplo 12.4. Calcular el número de átomos de una moneda de cobre (Cu) de 3 gramos.

**Solución:** hay que calcular N; para el cobre el  $PM = 64 \text{ gr/mol}$ , el número de moles de la moneda es:

$$n = \frac{m}{(PM)_{Cu}} \Rightarrow n = \frac{3 \text{ g}}{64 \text{ g/mol}} \Rightarrow n = 0.047 \text{ moles}$$

El número de átomos, N, en la moneda de cobre, se calcula de:

$$N = n N_A = 0.047 \text{ moles} \times 6.022 \times 10^{23} \text{ átomos/mol}$$

$$N = 2.8 \times 10^{23} \text{ átomos}$$

Ejemplo 12.5. Calcular el número de moles de un gas ideal que se encuentra en  $100 \text{ cm}^3$ , a  $20^\circ \text{ C}$  y  $10^5 \text{ Pa}$  de presión.

Solución: Los datos son:  $V = 100 \text{ cm}^3 = 10^{-4} \text{ m}^3$ ,  $T = 20^\circ \text{ C} = 293 \text{ K}$ ,  $P = 10^5 \text{ Pa}$ .

De la ecuación de estado

$$PV = nRT \Rightarrow n = \frac{PV}{RT}$$

$$n = \frac{(10^5 Pa)(10^{-4} m^3)}{8.31(J/molK)293K} = 4.1 \times 10^{-3} moles$$

Ejemplo 12.6. Un envase de desodorante cerrado herméticamente, contiene un volumen de  $200 \text{ cm}^3$  de un gas ideal comprimido a una presión de 2 atmósferas, en un ambiente a  $23^\circ \text{ C}$ . En esas condiciones se tira al fuego, donde alcanza una temperatura de  $127^\circ \text{ C}$ . Calcular la presión dentro del envase. Despreciar cualquier cambio de volumen del envase.

Solución: Los datos son:  $V_i = 200 \text{ cm}^3 = V_f$ ,  $T_i = 23^\circ \text{ C} = 300\text{K}$ ,  $P_i = 2 \text{ atm} = 202\text{kPa}$ ,  $T_f = 127^\circ \text{ C} = 400\text{K}$ ,  $P_f = ?$

Suponiendo que no hay pérdidas de gas, el número de moles permanece constante, entonces de la ecuación de estado se tiene:

$$PV = nRT \Rightarrow nR = \frac{PV}{T} = cte. \Rightarrow \frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f}$$

Como  $V_i = V_f$ , se reduce a:

$$\frac{P_i}{T_i} = \frac{P_f}{T_f} \Rightarrow P_f = \frac{T_f}{T_i} P_i = \frac{500\text{K}}{300\text{K}} 2\text{atm} = 3.33\text{atm} \times \frac{101\text{kPa}}{1\text{atm}}$$

$$P_f = 336.7\text{kPa}$$

Este alto valor de presión puede hacer explotar el envase.

## 12.7 TEORIA CINETICA DE LOS GASES.

Diferente al caso de la descripción macroscópica en términos de las variables presión, volumen y temperatura, ahora se demostrará que esas propiedades se

pueden describir en escala microscópica, donde la materia se trata como una colección de moléculas. Las leyes de Newton aplicadas en forma estadística a una colección de partículas proporcionan una descripción razonable de los procesos termodinámicos. En este enfoque, llamado *teoría cinética*, las moléculas del gas se mueven en todas las direcciones de manera aleatoria, chocando contra las paredes del envase y entre sí. La importancia de esta teoría es que proporciona las bases físicas con las cuales se puede entender el concepto de temperatura. Nuestra descripción teórica la restringiremos a gases monoatómicos (un solo átomo) donde toda la energía es cinética de traslación, no se consideran rotaciones ni vibraciones.

En un modelo microscópico de un gas ideal, se considera que la presión que ejerce un gas en las paredes de un envase que lo contiene es por efecto de los choques de las moléculas con las paredes. En este modelo se hacen las siguientes suposiciones:

1. El número de moléculas es grande y la separación media entre ellas es grande comparada con sus dimensiones. Por lo tanto ocupan un volumen despreciable en comparación con el volumen del envase y se consideran masas puntuales.
2. Las moléculas obedecen las leyes de Newton, pero individualmente se mueven en forma aleatoria, con diferentes velocidades cada una, pero con una velocidad promedio que no cambia con el tiempo.
3. Las moléculas realizan choques elásticos entre sí, por lo tanto se conserva tanto el momento lineal como la energía cinética de las moléculas.
4. Las fuerzas entre moléculas son despreciables, excepto durante el choque. Se considera que las fuerzas eléctricas o nucleares entre las moléculas son de corto alcance, por lo tanto solo se consideran las fuerzas impulsivas que surgen durante el choque.
5. El gas es considerado puro, es decir todas las moléculas son idénticas.
6. El gas se encuentra en equilibrio térmico con las paredes del envase.

Se deducirá una expresión para la presión de un gas ideal que consta de  $N$  moléculas en un envase de volumen  $V$ . Se supone que el envase tiene forma de un cubo de lado  $d$ , como se ve en la figura 12.8. Considerar el choque de una molécula con velocidad  $\mathbf{v}$  moviéndose contra la cara derecha de la caja. Las componentes de la velocidad de la molécula son  $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$ . Al chocar elásticamente con la pared, la componente  $x$  de la velocidad se invierte, pero las componentes  $y$  y  $z$  no se modifican, estas componentes (excepto la  $z$ ) se ilustran en la

figura 12.9. Como la componente  $x$  del momento de la molécula antes del choque es  $mv_x$  y después del choque se invierte siendo ahora  $-mv_x$ , y la componente  $y$  del momento lineal no cambia, la variación del momento lineal de la molécula está dado por:

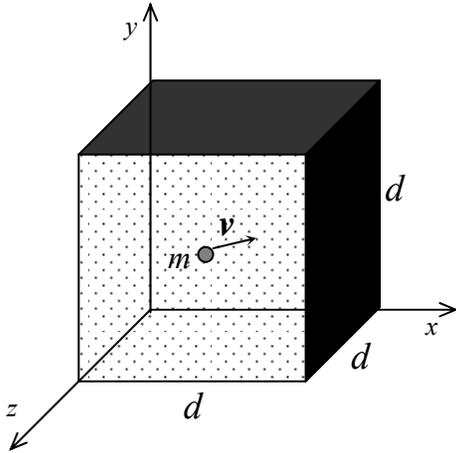


Figura 12.8 Caja cúbica de lado  $d$  que contiene un gas ideal, mostrando una molécula que se mueve con rapidez  $v$ .

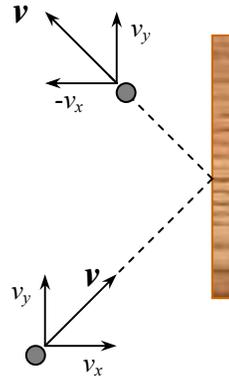


Figura 12.9 Esquema de una molécula que realiza un choque elástico con una pared del envase que la contiene.

$$\Delta p = -mv_x - mv_x = -2mv_x$$

La cantidad de movimiento entregada a la pared en cada choque es  $2mv_x$ , ya que se conserva el momento del sistema molécula + envase. Para que una molécula realice dos choques sucesivos con la misma pared debe recorrer una distancia  $2d$  a lo largo del eje  $x$  en un tiempo  $\Delta t$ . Pero en el tiempo  $\Delta t$ , la molécula se mueve una distancia  $d = v_x \Delta t$  en la dirección  $x$ , por lo tanto, el tiempo entre dos choques sucesivos es  $\Delta t = 2d/v_x$ . Si  $F$  es la magnitud de la fuerza promedio ejercida por una molécula sobre la pared en el tiempo  $\Delta t$ , de la definición del impulso, se obtiene:

$$F\Delta t = \Delta p = 2mv_x$$

$$F = \frac{2mv_x}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{2d/v_x} = \frac{mv_x^2}{d} \quad (12.13)$$

La fuerza total sobre la pared es la suma de todos los términos de este tipo correspondientes a todas las partículas. Para obtener la presión total sobre la pared, se divide la fuerza total con el área, de valor  $d^2$ :

$$P = \frac{\Sigma F}{A} = \frac{m}{d^3} (v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots)$$

donde  $v_{x1}$ ,  $v_{x2}$ , ... se refiere a las componentes  $x$  de la velocidad para las partículas 1, 2, etc. Como el valor medio de  $v_x^2$  es:

$$\overline{v_x^2} = \frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots}{N}$$

y el volumen está dado por  $V = d^3$ , se puede expresar la presión en la forma:

$$P = \frac{Nm}{V} \overline{v_x^2} \quad (12.14)$$

El cuadrado de la rapidez de cualquier partícula es:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Ya que no existe dirección preferida por las moléculas, los valores medios  $\overline{v_x^2}$ ,  $\overline{v_y^2}$  y  $\overline{v_z^2}$  son iguales entre sí. Entonces se deduce que:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

con lo cual la presión dada en la ecuación 12.14 se puede escribir como:

$$P = \frac{1}{3} \frac{Nm}{V} \overline{v^2} \quad (12.15)$$

La cantidad  $Nm$  es la masa total de las moléculas, la cual es igual a  $n(PM)$ , donde  $n$  es el número de moles del gas y  $(PM)$  es el peso molecular. Por lo tanto, la presión también se puede expresar en la forma:

$$P = \frac{1}{3} \frac{n(PM)}{V} \overline{v^2} \quad (12.16)$$

Modificando la expresión 12.16, también se puede expresar la presión como:

$$P = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \left( \frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) \quad (12.17)$$

Esta ecuación nos dice que la presión es proporcional al número de moléculas por unidad de volumen y a la energía cinética media de traslación por molécula.

Con este modelo simple de un gas ideal se ha llegado a un resultado que relaciona las variables macroscópicas de presión y volumen con una variable microscópica, la velocidad molecular media. Así se ha encontrado una relación entre el mundo microscópico de las moléculas de un gas y el mundo macroscópico. Aún cuando este resultado se dedujo para un envase cúbico, se puede generalizar y validar para un envase de cualquier forma que contenga un gas ideal.

### ***12.8 INTERPRETACION MOLECULAR DE LA TEMPERATURA.***

Es posible comprender mejor el significado de la temperatura escribiendo la ecuación 12.17 en una forma más conocida:

$$PV = \frac{2}{3} N \left( \frac{1}{2} m \overline{v^2} \right)$$

Comparándola con la ecuación de estado de un gas ideal:

$$PV = NkT$$

Igualando los segundos términos de estas ecuaciones, se obtiene:

$$T = \frac{2}{3k} \left( \frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) \quad (12.18)$$

Como  $\frac{1}{2} m \overline{v^2}$  es la energía cinética media de traslación por molécula, se encuentra que la **temperatura es una medida directa de la energía cinética molecular media** y se puede escribir de la forma:

$$T = \frac{2}{3k} E_c$$

Reacomodando la ecuación 12.18, se puede relacionar la energía cinética media de traslación por molécula con la temperatura:

$$E_c = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT \quad (12.19)$$

Es decir, la energía cinética media de traslación por molécula es  $\frac{3}{2} kT$ . La energía cinética total de traslación  $E_C$  de  $N$  moléculas de un gas es simplemente  $N$  veces la energía media por cada molécula, dada por la ecuación 12.19, y usando las definiciones de  $k = R/N_A$  y  $n = N/N_A$ , se puede reescribir esta ecuación para las  $N$  moléculas, de la forma:

$$E_C = N \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} nRT \quad (12.20)$$

Este resultado, junto con la ecuación 12.17 indica que la presión ejercida por un gas ideal sólo depende del número de moléculas por unidad de volumen y de la temperatura.

La raíz cuadrada de  $\overline{v^2}$  se llama **raíz cuadrática media de la velocidad** (rms) de las moléculas. De la ecuación 12.19 se puede despejar la rms:

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{(PM)}} \quad (12.21)$$

Esta expresión de la rms muestra que para una temperatura dada, las moléculas más livianas, en promedio se mueven más rápido que las más pesadas, que tienen un *PM* mayor. Por ejemplo el hidrógeno, con un peso molecular de 2 g/mol, se mueve cuatro veces más rápido que el oxígeno, que tiene un peso molecular de 32 g/mol. La rapidez rms no es la rapidez con la que se mueve una molécula de gas, ya que tal molécula experimenta varios miles de millones de choques por segundo con otras moléculas. En la tabla 12.3 se da valores de rms para algunas moléculas conocidas, a 20° C.

Tabla 12.3 Velocidad rms a 20° C para gases conocidos.

Gas	PM (g/mol)	$v_{rms}$ a 20° C (m/s)
H <sub>2</sub>	2.02	1902
He	4	1352
H <sub>2</sub> O	18	637
Ne	20.1	603
N <sub>2</sub>	28	511
CO	28	511
NO	30	494
CO <sub>2</sub>	44	408
SO <sub>2</sub>	48	390

**EJEMPLO 12.7** Un envase con un volumen de 0.3 m<sup>3</sup> contiene 2 moles de helio a 20° C. Suponiendo que el helio se comporta como un gas ideal, calcular a) la energía cinética total del sistema, b) la energía cinética promedio por molécula, c) la rms del helio.

Solución: a) usando la ecuación 12.20 con  $n = 2$  y  $T = 20^\circ C = 293 K$ , se obtiene:

$$E_c = \frac{3}{2}nRT = 1.5(2\text{mol})(8.31\text{J/molK})(293\text{K}) = 7300\text{J}$$

b) de la ecuación 12.19 se tiene:

$$E_c = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT = 1.5(1.38 \times 10^{-23} \text{J/K})(293\text{K}) = 6.1 \times 10^{-21} \text{J}$$

c) usando la ecuación 12.21

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{(PM)}} = \sqrt{\frac{3(8.31\text{J/molK})(293\text{K})}{4\text{g/mol}}} = 1350 \text{ m/s}$$

## PROBLEMAS

- 12.1 Un termómetro de gas a volumen constante se calibra en hielo seco, que es bióxido de carbono,  $\text{CO}_2$ , en estado sólido, que tiene una temperatura de  $-80^\circ\text{C}$  a 0.9 atm de presión, y en el punto de ebullición del alcohol etílico, que se produce a  $78^\circ\text{C}$  y a 1.64 atm. a) ¿Qué valor de cero absoluto produce esta calibración? b) ¿Cuál es la presión en punto de congelamiento del agua? c) ¿Cuál es la presión en el punto de ebullición del agua? R: a)  $-272.15^\circ\text{C}$ , b) 1.27 atm, c) 1.74 atm.
- 12.2 Un termómetro de gas da una lectura de 40 mm Hg para la presión en el punto triple del agua. Calcular la presión en el punto a) de ebullición del agua, b) de fundición del oro ( $1064.4^\circ\text{C}$ ). R: a) 54.6 mm Hg, b) 195.86 mm Hg.
- 12.3 Un termómetro de gas a volumen constante registra una presión de 50 mm Hg cuando está a una temperatura de 450 K. Calcular: a) la presión en el punto triple del agua, b) la temperatura cuando la presión es 2 mm Hg. R: a) 82.3 mm Hg, b) 10.93 K.
- 12.4 La presión en un termómetro de gas a volumen constante es de 0.7 atm a  $100^\circ\text{C}$  y de 0.512 atm a  $0^\circ\text{C}$ . Calcular: a) la temperatura cuando la presión es 0.04 atm, b) la presión a  $450^\circ\text{C}$ . R: a)  $-251^\circ\text{C}$ , b) 1.36 atm.
- 12.5 Un termómetro de gas a volumen constante se llena con helio. Cuando se sumerge en nitrógeno líquido hirviendo a una temperatura de 77.34 K, la presión absoluta es 25 kPa. Calcular a) la temperatura en grados Celsius y Kelvin cuando la presión es 45 kPa, b) la presión cuando el termómetro se sumerge en hidrógeno líquido hirviendo ( $-252.9^\circ\text{C}$ ). R: a)  $-134^\circ\text{C}$ , 139 K, b) 6.56 kPa.
- 12.6 Una de las temperaturas más altas registradas sobre la tierra fue de  $136^\circ\text{F}$  (Libia 1922) y una de las más baja fue de  $-127^\circ\text{F}$  (Antártica 1960). Expresa estas temperaturas en grados Celsius. R: a)  $57.8^\circ\text{C}$ , b)  $-88.3^\circ\text{C}$ .
- 12.7 La temperatura normal del cuerpo humano es  $98.6^\circ\text{F}$ . Un niño con fiebre puede registrar  $102^\circ\text{F}$ . Expresar esos valores en grados Celsius.

- 12.8 El punto de fusión del oro es de  $1064^{\circ}\text{C}$ , el de ebullición de  $2660^{\circ}\text{C}$ , el de fusión del plomo es de  $327.3^{\circ}\text{C}$  y el de ebullición del nitrógeno líquido es  $-195.8^{\circ}\text{C}$ . Transformar estos valores a grados Kelvin y Fahrenheit.
- 12.9 ¿A que temperatura son iguales las lecturas de un termómetro Fahrenheit y un termómetro Celsius? R:  $-40^{\circ}\text{C}$ .
- 12.10 En una escala de temperatura desconocida (D), el punto de congelación del agua es  $-15^{\circ}\text{D}$  y el punto de ebullición es  $60^{\circ}\text{D}$ . Obtener la ecuación lineal entre la escala D y la Celsius. R:  $T_{\text{D}} = 0.75T_{\text{C}} - 15$ .
- 12.11 En una escala de temperatura incógnita (X), el punto de congelación del agua es  $-30^{\circ}\text{X}$  y el punto de ebullición es  $80^{\circ}\text{X}$ . Obtenga la ecuación lineal entre la escala X y la Fahrenheit.
- 12.12 La temperatura inicial de un objeto tiene el mismo valor numérico en grados C y grados F. Más tarde, la temperatura cambia, para esta nueva temperatura hay una relación de 1:3 (ó de 3:1) entre sus valores en  $^{\circ}\text{C}$  y  $^{\circ}\text{F}$ . Calcular el cambio de temperatura, en grados K.
- 12.13 Medidas precisas de temperatura se pueden hacer usando el cambio de resistencia eléctrica de un metal con la temperatura. Si la resistencia varia aproximadamente según la relación  $R = R_0(I + AT_C)$ , donde  $R_0$  y  $A$  son constantes y  $T_C$  la temperatura en grados Celsius. Cierta material tiene una resistencia de  $50\ \Omega$  (Ohms) a  $0^{\circ}\text{C}$  y de  $71.5\ \Omega$  en el punto de congelamiento del estaño ( $232^{\circ}\text{C}$ ). Calcular: a) las constantes  $R_0$  y  $A$ , b) la temperatura cuando la resistencia es  $89\ \Omega$ . R: a)  $R_0 = 50\ \Omega$ ,  $A = 1.85 \times 10^{-3}\ ^{\circ}\text{C}^{-1}$ , b)  $421^{\circ}\text{C}$ .
- 12.14 Para interpolar temperaturas en la escala práctica internacional, se usa un termómetro de resistencia de platino con especificaciones definidas en el intervalo entre  $0^{\circ}\text{C}$  y  $960^{\circ}\text{C}$ . La temperatura  $T_C$ , en grados Celsius, está determinada por la fórmula  $R = R_0(I + AT_C + BT_C^2)$ , que se aplica a la variación de la resistencia  $R$  con la temperatura. Las constantes  $R_0$ ,  $A$  y  $B$  se determinan por medidas en puntos fijos. Si  $R = 1000\ \Omega$  en el punto de fusión del hielo,  $R = 1050\ \Omega$  en el punto de ebullición del agua y  $R = 1500\ \Omega$  en el punto de fusión de la plata

*Cap. 12. Temperatura, dilatación térmica y gases.*

- (950° C), a) calcular las constantes. b) Trazar la curva de calibración del termómetro. Sugerencia: puede usar algún software (por ejemplo planilla Excel) para ajustar la ley cuadrática a los puntos y trazar la curva en el rango de operación. R: a)  $R_o = 1000 \Omega$ ,  $A = 5 \times 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $B = 3.1 \times 10^{-8} \text{ } ^\circ\text{C}^{-2}$ .
- 12.15 Una barra de vidrio común tiene 30 cm de largo y 1.5 cm de diámetro. Calcular la expansión de su a) longitud, b) diámetro y c) volumen, cuando la temperatura aumenta en 65° C. R: a) 0.176 mm, b) 8.8  $\mu\text{m}$ , c) 93 mm<sup>3</sup>.
- 12.16 Un cable de cobre se cuelga entre dos puntos separados 35 m (la curva que forma el cable suspendido se llama catenaria). Calcular su variación de longitud en un día de verano con 35° C respecto a un día de invierno con -20° C. R: 3.27 cm.
- 12.17 Una viga estructural de acero tiene 15 m de largo cuando se instala a 20° C. Calcular el cambio de su longitud para variaciones extremas de temperatura de -30° C a 50° C. R: 1.32 cm.
- 12.18 Un riel de acero tiene 20 m de largo cuando se instala en una vía a la temperatura ambiente de 20° C. Calcular el cambio en su longitud si las variaciones esperadas de temperatura entre invierno y verano fueran de -20° C a 40° C. R: 0.0144 m.
- 12.19 Un anillo de latón que tiene 10 cm de diámetro cuando está a 20° C se calienta para hacerlo deslizar sobre una barra de aluminio de 10.01 cm de diámetro a 20° C. Suponiendo constantes los coeficientes medios de expansión lineal. a) ¿qué temperatura debe alcanzar al menos el anillo? b) ¿a qué temperatura debe enfriarse esta combinación para separarla? Esto, ¿puede lograrse? c) ¿Qué ocurre si la barra de aluminio tuviera 10.02 cm de diámetro? R: a) 72.6° C, b) -146° C, no con facilidad.
- 12.20 Demostrar que el coeficiente promedio de dilatación superficial para un sólido isotrópico es  $\gamma = 2\alpha$  y el de dilatación volumétrica es  $\beta = 3\alpha$ .
- 12.21 Un anillo de aluminio tiene un diámetro interior de 5 cm y una varilla de bronce tiene un diámetro de 5.05 cm cuando están a 20° C. a) Calcular la temperatura a la que se debe calentar el anillo de aluminio para

que se ajuste sobre la varilla de bronce. b) Calcular la temperatura a la que se deben calentar ambos para que el anillo de aluminio se ajuste sobre la varilla de bronce; comentar. R: a)  $420^{\circ}\text{C}$ , b)  $1741^{\circ}\text{C}$ .

- 12.22 Las secciones de concreto de cierta autopista se diseñan para tener una longitud de 25 m. Las secciones se vacían y fraguan a  $10^{\circ}\text{C}$ . ¿Qué espaciado mínimo entre las secciones debería diseñar el ingeniero para eliminar el pandeo, si el concreto alcanzara una temperatura de  $50^{\circ}\text{C}$ ? R: 1.2 cm.
- 12.23 Un riel de acero tiene 20 m de largo. Se juntan los rieles por los extremos con un espacio de goma entre ellos. El coeficiente de dilatación lineal de la goma  $-22 \times 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ . Calcular el espesor que debe tener la goma para que se contraiga lo mismo que se expanden los rieles cuando la temperatura aumente en  $30^{\circ}\text{C}$ . R: 1.1 mm
- 12.24 Un cilindro hueco de aluminio tiene a  $20^{\circ}\text{C}$  una capacidad interna de 2 litros y 15 cm de fondo. El conjunto se llena completamente con petróleo y luego se calienta hasta  $80^{\circ}\text{C}$ . Posteriormente se enfría de nuevo hasta  $20^{\circ}\text{C}$ . a) ¿Qué cantidad de petróleo se derrama al calentar el conjunto? b) ¿A qué distancia bajo el borde del cilindro estará la superficie de petróleo? c) Comente la posibilidad de despreciar la dilatación del depósito. R: a) 0.099 lt, b) 0.75 cm.
- 12.25 El estanque de bencina de un automóvil se llena hasta el borde con 45 litros de la misma a  $10^{\circ}\text{C}$ , justo antes de estacionarlo al sol a  $35^{\circ}\text{C}$ . Calcular la cantidad de bencina que se derramará por efecto de la expansión. R: 1.08 lt.
- 12.26 Una barra de cobre y otra de acero sufren los mismos cambios de temperatura. A  $0^{\circ}\text{C}$  la barra de cobre tiene una longitud  $L_C$  y la de acero una longitud  $L_A$ . Cuando las barras se calientan o se enfrían, se mantiene una diferencia de 5 cm entre sus longitudes. Determine los valores de  $L_C$  y  $L_A$ . R:  $L_C = 17 \text{ cm}$ ,  $L_A = 12 \text{ cm}$ .
- 12.27 Un fluido tiene una densidad  $\rho$ . a) Demuestre que el cambio fraccional en la densidad para un cambio  $\Delta T$  en la temperatura está dado por la expresión  $\Delta\rho/\rho = -\beta\Delta T$ . ¿Qué significa el signo negativo? El agua

*Cap. 12. Temperatura, dilatación térmica y gases.*

- tiene una densidad máxima de  $1 \text{ gr/cm}^3$  a  $4^\circ \text{ C}$ . A  $10^\circ \text{ C}$  su densidad es  $0.9997 \text{ gr/cm}^3$ , calcular  $\beta$  para el agua en ese intervalo de temperatura.
- 12.28 Demuestre que un mol de cualquier gas a presión atmosférica estándar y temperatura estándar ocupa un volumen de 22.4 litros.
- 12.29 Un auditorio tiene dimensiones de  $10\text{m} \times 20\text{m} \times 30\text{m}$ . ¿Cuántas moléculas de aire se necesitan para llenar el auditorio a  $20^\circ \text{ C}$  y  $1 \text{ atm}$ ? R:  $1.5 \times 10^{29}$  moléculas.
- 12.30 Un cilindro con un émbolo móvil contiene un gas a una temperatura de  $125^\circ \text{ C}$ , una presión de  $30 \text{ kPa}$  y un volumen de  $4 \text{ m}^3$ . Calcular su temperatura final si el gas se comprime a  $2.5 \text{ m}^3$  y la presión aumenta a  $90 \text{ kPa}$ . R:  $739.1 \text{ K}$ .
- 12.31 Un gas encerrado en un estanque, está a una presión de  $30 \text{ atm}$  y a una temperatura de  $15^\circ \text{ C}$ . Si se saca la mitad del gas y se aumenta la temperatura a  $65^\circ \text{ C}$ , calcular la nueva presión en el estanque. R:  $1.76 \text{ atm}$ .
- 12.32 Un mol de oxígeno está a una presión de  $6 \text{ atm}$  y a  $25^\circ \text{ C}$  de temperatura. a) Si el gas se calienta a volumen constante hasta que la presión se triplica, calcular la temperatura final. b) Si el gas se calienta de manera que tanto la presión como el volumen se duplican, calcular la temperatura final. R: a)  $894 \text{ K}$ , b)  $1192 \text{ K}$ .
- 12.33 Un balón que tiene un volumen de  $0.1 \text{ m}^3$  contiene gas helio a  $50 \text{ atm}$ . ¿Cuántos globos se pueden inflar si cada uno es una esfera de  $0.3 \text{ m}$  de diámetro a una presión absoluta de  $1.2 \text{ atm}$ ? Suponga que la temperatura del gas permanece constante durante el llenado de los globos. R: aprox. 300 globos.
- 12.34 Una burbuja de gas en un lago sube desde una profundidad de  $4.2 \text{ m}$ , donde hay una temperatura de  $5^\circ \text{ C}$  hasta la superficie donde la temperatura es de  $12^\circ \text{ C}$ . Calcular la relación entre los radios de la burbuja en los dos puntos. R: radio final = 1.12 radio inicial.
- 12.35 A  $25 \text{ m}$  debajo de la superficie del mar (densidad  $1025 \text{ kg/m}^3$ ), donde la temperatura es de  $5^\circ \text{ C}$ , un buzo exhala una burbuja de aire que tiene un volumen de  $1 \text{ cm}^3$ . Si la temperatura de la superficie del mar es

igual a  $20^{\circ}\text{C}$ , calcular el volumen de la burbuja antes que se rompa al llegar a la superficie. R:  $3.7\text{ cm}^3$ .

- 12.36 Un balón lleno contiene 12 kg de oxígeno,  $\text{O}_2$ , bajo una presión manométrica de 40 atm. Determine la masa de oxígeno que se ha extraído del balón cuando la presión absoluta alcanza el valor de 25 atm. Suponga que la temperatura del balón permanece constante. R: 7.3 kg.
- 12.37 Un globo poroso tiene un volumen de  $2\text{ m}^3$  a una temperatura de  $10^{\circ}\text{C}$  y a una presión de 1.1 atm. Cuando se calienta hasta  $150^{\circ}\text{C}$  el volumen aumenta a  $2.3\text{ m}^3$  y se ha escapado por los poros el 5% del gas. Calcular a) la cantidad de gas, en moles, que había en el globo a  $10^{\circ}\text{C}$ , b) la presión en el globo a  $150^{\circ}\text{C}$ . R: a) 94.8 moles, b) 0.8 atm.
- 12.38 a) La llanta de un automóvil se infla usando aire originalmente a  $10^{\circ}\text{C}$  y presión atmosférica normal. Durante el proceso, el aire se comprime hasta 28% de su volumen original y la temperatura aumenta a  $40^{\circ}\text{C}$ . Calcular la presión de la llanta. b) Después que la llanta se utiliza a alta velocidad, la temperatura del aire dentro de la misma se eleva a  $85^{\circ}\text{C}$  y su volumen interior aumenta 2%. Calcular la nueva presión (absoluta) de la llanta. R: a)  $3.98 \times 10^5\text{ Pa}$ , b)  $15 \times 10^5\text{ Pa}$ .
- 12.39 La tapa de un envase cilíndrico está conectada por un resorte de constante elástica  $2 \times 10^3\text{ N/m}$  a una parte superior fija, como muestra la figura 12.10. El cilindro está lleno con 5 litros de gas a 1 atm y  $20^{\circ}\text{C}$ , con el resorte sin estirar. La tapa tiene un área de sección transversal de  $100\text{ cm}^2$  y masa despreciable. Calcular: a) la altura a la que sube la tapa cuando la temperatura aumenta hasta  $250^{\circ}\text{C}$ , b) la presión del gas a  $250^{\circ}\text{C}$ . R: a) 16.9 cm.

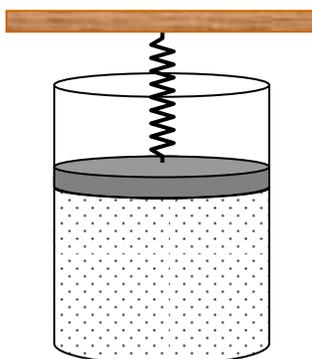


Figura 12.10 Problema 12.39

- 12.40 a) Demuestre que la densidad de un gas que ocupa un volumen  $V$  esta dada por  $\rho = P(PM)/RT$ , donde  $PM$  es el peso (o masa) molecular del gas. b) Calcular la densidad del oxígeno y la del nitrógeno a la presión atmosférica y a 20° C.
- 12.41 La tabla 12.4 da la composición del aire debajo de los 80 km de altura. Calcular: a) las presiones parciales de los gases más abundantes a la presión atmosférica normal, b) el volumen ocupado por 100 g de aire a 15° C y 1 atm, c) la densidad del aire en esas condiciones, d) el peso molecular,  $PM$ , del aire seco. R: c) 1.28 kg/m<sup>3</sup>, d) 28.964 gr/mol.

Tabla 12.4 Composición de la atmósfera.

Gas	Fórmula	PM	Volumen en %
Nitrógeno	N <sub>2</sub>	28.0	78.09
Oxígeno	O <sub>2</sub>	32.0	20.95
Argón	Ar	39.94	0.93
Neón	Ne	20.2	1.8 x 10 <sup>-3</sup>
Helio	He	4.0	5.3 x 10 <sup>-4</sup>
Metano	CH <sub>4</sub>	16.0	1.5 x 10 <sup>-4</sup>
Kriptón	Kr	83.8	1.1 x 10 <sup>-4</sup>
hidrógeno	H <sub>2</sub>	2.0	5.0 x 10 <sup>-5</sup>
xenón	X	131.3	8.0 x 10 <sup>-6</sup>
ozono	O <sub>3</sub>	48.0	1.0 x 10 <sup>-8</sup>
yodo	I	126.9	3.5 x 10 <sup>-9</sup>
radón	Rn	222.0	6.0 x 10 <sup>-18</sup>
otros...			menos de 10 <sup>-10</sup>
bióxido de carbono	CO <sub>2</sub>	44	0.02-0.04
vapor de agua	H <sub>2</sub> O	18	0.0 - 4.0

- 12.42 Dos moles de oxígeno dentro de un envase de 5 litros están a una presión de 8 atm. Calcular la energía cinética media de una molécula de oxígeno, de masa 5.31x10<sup>-26</sup> kg.
- 12.43 Durante un periodo de 1 s, 5x10<sup>23</sup> moléculas golpean una pared sobre un área de 8 cm<sup>2</sup>. Si las moléculas se mueven con una rapidez de 300 m/s y chocan en un ángulo de 45° respecto a la normal de la pared, calcular la presión ejercida sobre la pared. (La masa de una molécula de nitrógeno es 4.65x10<sup>-26</sup> kg).

*Cap. 12. Temperatura, dilatación térmica y gases.*

- 12.44 Un globo esférico de volumen  $4000 \text{ cm}^3$  contiene helio a una presión de 1.2 atm. Si cada átomo de helio tiene una energía cinética media de  $3.6 \times 10^{-22} \text{ J}$ , calcular el número de moles de helio dentro del globo. R: 3.3 mol.
- 12.45 En un intervalo de 30 s, 500 granizos que caen en un ángulo de  $45^\circ$  respecto a una ventana, chocan contra el vidrio de la ventana que tiene un área de  $0.6 \text{ m}^2$ . Cada granizo tiene una masa de 5 g y una rapidez de 8 m/s. Si se supone que los choques son elásticos, calcular la fuerza y la presión media sobre el vidrio.
- 12.46 Un cilindro contiene una mezcla de helio y argón en equilibrio a una temperatura de  $150^\circ \text{ C}$ . Calcular la energía cinética media de cada molécula de gas en el envase. R:  $8.8 \times 10^{-21} \text{ J}$ .
- 12.47 Calcular: a) la temperatura para la cual la rms de un átomo de helio es 500 m/s, b) la rms del helio sobre la superficie del Sol, con una temperatura de 6100K. R: a) 40.1 K, b) 6.2 km/s.
- 12.48 Un envase de 5 litros contiene nitrógeno a una temperatura de  $27^\circ \text{ C}$  y a una presión de 3 atm. Calcular: a) la energía cinética total de las moléculas, b) la energía cinética media por molécula.
- 12.49 Calcular la rapidez cuadrática media de las moléculas de nitrógeno,  $\text{N}_2$ , y de bióxido de carbono,  $\text{CO}_2$ , en condiciones normales. La masa (o peso) molecular del  $\text{N}_2$  es 28 g/mol y la del  $\text{CO}_2$  es 44 g/mol. R: 506.4 m/s, 403.9 m/s.
- 12.50 Calcular la temperatura para la cual la rapidez cuadrática media de las moléculas de oxígeno,  $\text{O}_2$ , es igual a la de las moléculas de hidrógeno,  $\text{H}_2$ , a  $27^\circ \text{ C}$ . La masa molecular del  $\text{H}_2$  es 2,02 g/mol y la del  $\text{O}_2$  es 32 g/mol. Considere que los resultados de la Teoría cinética de los gases se pueden aplicar a estos gases. R: 4752.5 K.
- 12.51 Calcular: a) el número de átomos de helio necesarios para llenar un globo hasta un diámetro de 30 cm, a  $20^\circ \text{ C}$  y 1 atm, b) la energía cinética media de cada átomo, c) la rapidez media de cada átomo de helio. R: a)  $3.5 \times 10^{23}$  átomos, b)  $6.07 \times 10^{-2} \text{ J}$ , c) 1341.6 m/s.

- 12.52 El Helio tiene una masa atómica de 4 g/mol. Calcular: a) la energía cinética de traslación media de una molécula de He a 300K, b) la rapidez cuadrática media, c) el momento lineal de una molécula de He si viaja con esa rapidez. Suponga que un cierto número de átomos de He ocupan un recipiente cúbico de 0.1 m de lado y se encuentran a 1 atm y 300 K. Calcular: d) la fuerza media que ejerce un átomo de He sobre una de las paredes del recipiente cuando su velocidad es perpendicular a los lados opuestos que golpea al rebotar, e) el número de átomos viajando a esa rapidez, en una misma dirección, que se necesitan para producir una presión media de 1 atm, f) El número de átomos contenidas realmente un recipiente de ese tamaño y en esas condiciones, g) su respuesta de f) deberá ser 3 veces mayor que la obtenida en e), ¿qué origen tiene esa discrepancia? R: a)  $6.2 \times 10^{-21}$  J, b) 1367.5 m/s, 5.5 kgm/s, d)  $1.5 \times 10^5$  N, e)  $2.5 \times 10^{17}$  átomos.

## CAPITULO 13. CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA.

La termodinámica es la rama de la física que estudia los procesos donde hay transferencia de energía en forma de calor y de trabajo. Cuando dos cuerpos a diferentes temperaturas se ponen en contacto térmico entre sí, la temperatura del cuerpo más cálido disminuye y la del más frío aumenta. Si permanecen en contacto térmico durante cierto tiempo, finalmente alcanzan una temperatura común de equilibrio, de valor comprendido entre las temperaturas iniciales. En este proceso se produjo una transferencia de calor del cuerpo más cálido al más frío. La pregunta que surge es ¿cuáles son las características de esa transferencia de calor? En el próximo capítulo intentaremos dar una respuesta a esa pregunta, ya que en este debemos aprender a conocer la capacidad de absorber o liberar calor de los cuerpos, las diferentes formas de calor, el trabajo termodinámico, la energía interna de los cuerpos y como se relacionan entre sí esas variables a través de la primera ley de la termodinámica.

### 13.1 DEFINICIONES.

**Sistema:** cualquier grupo de átomos, moléculas, partículas u objetos en estudio termodinámico. Por ejemplo el agua dentro de un envase, el cuerpo de un ser vivo o la atmósfera. Un esquema se muestra en la figura 13.1.

**Ambiente:** todo lo que no pertenece al sistema, es lo que rodea al sistema, sus alrededores. Por ejemplo el exterior al envase donde está el agua, o el espacio que rodea a la atmósfera (puede ser todo el Universo). Entre el sistema y el ambiente puede haber intercambio de calor y de energía y se puede realizar trabajo (figura 13.1).

**Sistema cerrado:** sistema en el cual no entra ni sale masa, pero que puede intercambiar calor y energía con el ambiente.

**Sistema abierto:** sistema que puede tener variación de masa, como por ejemplo intercambio de gases o líquidos, o de alimentos en los seres vivos.

**Sistema cerrado aislado:** sistema en el cual no se produce ningún intercambio de calor o energía con el ambiente a través de sus fronteras.

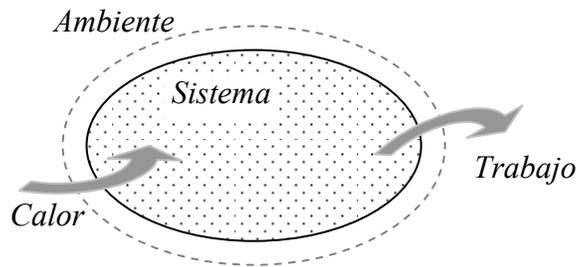


Figura 13.1. Esquema donde se representa un sistema termodinámico rodeado por su ambiente.

### 13.2 CALOR.

Se debe distinguir desde un principio claramente entre los conceptos de calor y energía interna de un objeto. El **calor**, (símbolo  $Q$ ), **se define como la energía cinética total de todos los átomos o moléculas de una sustancia**. El concepto de calor, se usa para describir la energía que se transfiere de un lugar a otro, es decir **flujo de calor es una transferencia de energía que se produce únicamente como consecuencia de las diferencias de temperatura**. La **energía interna**, estudiaremos más en detalle en la sección 13.6, es la energía que tiene una sustancia debido a su temperatura. La energía interna de un gas es esencialmente su energía cinética en escala microscópica: mientras mayor sea la temperatura del gas, mayor será su energía interna. Pero también puede haber transferencia de energía entre dos sistemas, aún cuando no haya flujo de calor. Por ejemplo, cuando un objeto resbala sobre una superficie hasta detenerse por efecto de la fricción, su energía cinética se transforma en energía interna que se reparte entre la superficie y el objeto (y aumentan su temperatura) debido al trabajo mecánico realizado, que le agrega energía al sistema. Estos cambios de energía interna se miden por los cambios de temperatura.

Cuando la ciencia termodinámica era bebe, digamos a principios del 1800, y no se comprendía bien el concepto de calor, los científicos definieron el calor en términos de los cambios en la temperatura que el calor produce en los cuerpos. Por lo que se definió una unidad de medida del calor, llamada **caloría**, símbolo *cal*, como **la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un gramo de agua en un grado Celsius desde 14.5° C a 15.5° C**. La unidad de calor en el sistema inglés se llama **Unidad térmica británica**, (Btu), definida como **la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de una**

libra de agua en un grado Celsius de  $63^{\circ} F$  a  $64^{\circ} F$ . Se elige ese rango de temperatura, porque la cantidad de calor requerida depende levemente de la temperatura; se requiere más calor para elevar la temperatura del agua fría que la del agua a punto de hervir.

Cuando se describió el concepto de energía en el capítulo 5, se afirmó que en cualquier sistema mecánico siempre está presente la fricción, por lo que siempre se pierde energía mecánica y aparentemente no se conserva. Los experimentos demuestran claramente que por efecto de la fricción, la energía no desaparece, sino que se transforma en energía térmica. James Joule (inglés, 1818-1889) fue el primero en establecer la equivalencia entre estas dos formas de energía. Joule encontró que la energía mecánica que se transforma en calor, es proporcional al aumento de temperatura. La constante de proporcionalidad, llamada **calor específico**, es igual a  $4.186 \text{ J}/(\text{g } ^{\circ}\text{C})$ . Se demuestra que una caloría, que se conoce como el **equivalente mecánico del calor**, es exactamente igual a  $4.186 \text{ J}$ , sin importar quien produce el aumento de temperatura:

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$$

Como en la actualidad se reconoce al calor como una forma de energía, la unidad de medida de calor en el SI es el *Joule*, *J*. Algunas de las conversiones más comunes entre las unidades de calor y energía son las siguientes:

$$\begin{aligned} 1 \text{ cal} &= 4.186 \text{ J} = 3.97 \times 10^{-3} \text{ Btu} \\ 1 \text{ J} &= 0.239 \text{ cal} = 9.48 \times 10^{-4} \text{ Btu} \\ 1 \text{ Btu} &= 1055 \text{ J} = 252 \text{ cal} \end{aligned}$$

En nutrición se llama Caloría, Cal con mayúscula, a las *calorías alimenticias o dietéticas*, usada en la descripción del contenido de energía de los alimentos y equivale a 1000 calorías o 1kilocaloría, es decir  $1 \text{ Cal} = 1\text{kcal} = 1000 \text{ cal}$ .

Ejemplo 13.1 Una lola se sirve 1000 Cal en alimentos, los que luego quiere perder levantando pesas de 25 kg hasta una altura de 1.8 m. Calcular el número de veces que debe levantar las pesas para perder la misma cantidad de energía que adquirió en alimentos y el tiempo que debe estar haciendo el ejercicio. Suponga que durante el ejercicio no se pierde energía por fricción.

Solución: para perder las 1000 Cal, la lola debe realizar la misma cantidad de trabajo mecánico, es decir  $W = 1000 \text{ Cal}$ . Transformando este valor al SI:

$$W = 1000 \text{ Cal} \times \frac{1000 \text{ cal}}{1 \text{ Cal}} \times \frac{4.186 \text{ J}}{1 \text{ cal}} = 4.186 \times 10^6 \text{ J}$$

Esta es la cantidad de trabajo que debe ser realizado levantando pesas de 25 kg. El trabajo en un solo levantamiento hasta 1.8 m es:

$$W_1 = mgy = (25 \text{ kg}) \times (10 \text{ m/s}^2) \times (1.8 \text{ m}) = 450 \text{ J}$$

Como el trabajo  $W_1$  debe ser realizado  $n$  veces hasta completar la cantidad  $W$ , entonces  $W = n W_1$ , despejando  $n$ ,

$$n = \frac{W}{W_1} = \frac{4.186 \times 10^6 \text{ J}}{450 \text{ J}} = 9300 \text{ veces}$$

Supongamos que la lola es muy rápida para levantar pesas, tal que produce un levantamiento cada 5 segundos, entonces el tiempo total del ejercicio es:

$$\Delta t = 9300 \times 5 \text{ s} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 12.9 \text{ horas}$$

Por lo que es obvio que es más fácil bajar de “peso” haciendo dieta.

### **13.3 CAPACIDAD CALORICA Y CALOR ESPECIFICO.**

La cantidad de energía en forma de calor que se requiere para cambiar la temperatura de una masa dada de materia, no es la misma para todos los materiales. Por ejemplo, el calor necesario para elevar la temperatura en un grado Celsius de un kilogramo de agua es 4186 J, pero el calor necesario para elevar la temperatura en 1° C de 1 kg de cobre es solo 387 J.

***La capacidad calórica,  $C$ , de cualquier sustancia se define como la cantidad de calor,  $Q$ , que se requiere para elevar la temperatura de una sustancia en un grado Celsius.***

A partir de esta definición, se observa que si al agregar  $Q$  unidades de calor a una sustancia le producen un cambio de temperatura  $\Delta T$ , se puede escribir:

$$Q = C \Delta T \quad (13.1)$$

La capacidad calórica de cualquier sustancia es proporcional a su masa. Por esta razón es conveniente definir la capacidad calórica por unidad de masa, es decir que no dependa de la masa, a la que se llama *calor específico*,  $c$ :

$$c = \frac{C}{m} \quad (13.2)$$

La unidad de medida de  $C$  en el SI es J/K (que es lo mismo que J/°C) y la de  $c$  es J/kgK (o J/(kg °C)). En la tabla 13.1 se da el calor específico de varias sustancias medidas a presión atmosférica y a temperatura ambiente. Los calores específicos en general varían con la temperatura. Si la variación de temperatura no es muy grande, se puede despreciar esa variación de  $c$  y considerarla como una constante.

También se puede definir el *calor específico molar* de una sustancia como la capacidad calórica por unidad de moles, entonces una sustancia que contiene  $n$  moles, tiene un calor específico molar igual a  $c = C/n$ , que se mide en el SI en J/(mol K) o J/(mol °C). Valores se listan en la última columna de la tabla 13.1.

Tabla 13.1 Calores específicos de algunos materiales.

Sustancia	$c$ (J/kg K)	PM (kg/mol)	$c$ molar (J/mol K)
Agua (15° C)	4186	0,0180	75,4
Alcohol	2400		
Hielo (-5° C)	2090	0,0180	36,5
Berilio	1830	0,00901	16,5
Madera (aprox)	1700		
Aluminio	900	0,0270	24,3
Mármol (CaCO <sub>3</sub> )	860		
Vidrio	837		
Hierro	448	0,0559	25,0
Cobre	387		24,5
Latón	380		
Plata	234	0,108	25,4
Cadmio	230		25,9
Mercurio	140	0,210	27,7
Oro	129		25,4
Plomo	128	0,207	26,4

Se puede observar de la tabla 13.1 que de los materiales comunes, el agua es la que tiene el mayor calor específico. Este gran valor de  $c$  del agua, que es casi tres veces mayor que para las tierras ( $c_{\text{agua}} = 3c_{\text{tierra}}$ ), es un importante factor climático sobre la superficie de la Tierra, ya que es en parte responsable de la moderación de temperatura en las zonas costeras. Se requiere mucho más calor para elevar la temperatura del agua, que de una misma cantidad de tierra, es decir una misma cantidad de radiación solar eleva más la temperatura de los suelos que de las aguas. En latitudes medias, las grandes masas oceánicas tienen una menor variación diurna o anual de temperatura que los continentes y en general, las temperaturas de los océanos son menores (mayores) en verano (invierno) que en los continentes. Como en latitudes medias, el viento de gran escala predominante es desde el oeste, las masas de aire que se acercan a los continentes transportan aire más fresco en verano o más cálido en invierno, por lo que las zonas costeras occidentales de los continentes son más frescas en verano y más cálidas en invierno que las zonas interiores de los continentes. Esto no siempre es así en los bordes orientales de los continentes, ya que en latitudes medias los vientos del oeste transportan el aire desde el continente hacia el océano, por lo que no puede haber efecto regulador de los océanos.

De la definición del calor específico de la ecuación 13.2, se puede determinar la energía calórica  $Q$  transferida entre una sustancia de masa  $m$  y los alrededores para un cambio de temperatura, como:

$$Q = mc \Delta T \quad (13.3)$$

Observar que cuando se le agrega calor a una sustancia,  $Q$  y  $\Delta T$  son ambos positivos y la temperatura aumenta. Cuando se le quita calor a una sustancia,  $Q$  y  $\Delta T$  son ambos negativos y la temperatura disminuye.

Una forma de medir el calor específico de sólidos o líquidos consiste en calentar el material hasta una cierta temperatura, ponerla en un envase con una masa de agua y temperatura conocidas y medir la temperatura del agua una vez que se ha alcanzado el equilibrio térmico. La ley de conservación de la energía requiere que el calor que entrega el material más caliente, de calor específico

desconocido, sea igual al calor que absorbe el agua. Los aparatos en los cuales se produce esa transferencia de calor, se llaman *calorímetros*.

Ejemplo 13.2 Un trozo de material de masa  $m$  que tiene una temperatura inicial  $T_{im}$ , se sumerge en un envase que contiene una masa  $M$  de agua a la temperatura inicial  $T_{iA} < T_{im}$ . Si la temperatura de equilibrio de la mezcla es  $T$ , calcular el calor específico del material. Despreciar la transferencia de calor al envase y al ambiente.

Solución: como la temperatura inicial del agua es menor que la del material, este le entrega calor al agua. Cuando se alcanza el estado de equilibrio, por la conservación de la energía, el calor  $Q_m$  entregado por el material debe ser igual al calor  $Q_A$  absorbido por el agua, entonces:

$$\text{Calor perdido por el material: } Q_m = -mc\Delta T = -mc(T - T_{im})$$

$$\text{Calor ganado por el agua: } Q_A = Mc_A\Delta T = Mc_A(T - T_{iA})$$

$$Q_A = Q_m \Rightarrow Mc_A(T - T_{iA}) = mc(T_{im} - T)$$

Despejando el calor específico  $c$  del material, se obtiene:

$$c = \frac{Mc_A(T - T_{iA})}{m(T_{im} - T)}$$

Ejemplo 13.3 Un trozo de metal de 50 g que se encuentra a 200° C se sumerge en un envase que contiene 0.4 kg de agua inicialmente a 20° C. Si la temperatura final de equilibrio del sistema mezclado es 22.4° C, calcular: a) el calor específico del material, b) el calor ganado por el agua. Despreciar la transferencia de calor al envase y al medio ambiente.

Solución: los datos son  $c_A = 4186 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$ ,  $m_m = 50\text{g}$ ,  $T_{im} = 200^\circ\text{C}$ ,  $m_A = 400\text{g}$ ,  $T_{iA} = 20^\circ\text{C}$ ,  $T_{fm} = 22.4^\circ\text{C} = T_{fA}$ .

a) Al introducir el metal caliente en el agua mas fría, el metal se enfría y el agua se calienta, alcanzando ambos 22.4° C, es decir, el metal pierde calor y el agua gana calor.

Calor cedido por el metal:  $Q_m = -m_m c_m \Delta T = -m_m c_m (T_{fm} - T_{im})$

Calor ganado por el agua:  $Q_A = m_A c_A \Delta T = m_A c_A (T_{fA} - T_{iA})$

$$Q_A = Q_m \Rightarrow m_A c_A (T_{fA} - T_{iA}) = -m_m c_m (T_{fm} - T_{im})$$

$$c_m = \frac{m_A c_A (T_{fA} - T_{iA})}{-m_m (T_{fm} - T_{im})}$$

Reemplazando los valores numéricos, se obtiene:

$$c_m = \frac{0.4 \times 4186 \times (22.4 - 20)}{-0.05(22.4 - 200)} = 452.5 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$$

b) El calor ganado por el agua es  $Q_A = m_A c_A (T_{fA} - T_{iA})$ , con los valores:

$$Q_A = 0.4 \text{ kg} \times 4186 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}} (22.4^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) = 4018.6 \text{ J}$$

Ejemplo 13.4. Una bala de plomo de 2 g de masa disparada con una rapidez de 300 m/s, se incrusta en un poste de madera. Suponiendo que toda la energía térmica generada durante el impacto permanece en la bala, calcular su cambio de temperatura.

Solución: los datos son  $m = 2 \text{ g}$ ,  $v = 300 \text{ m/s}$ . La energía cinética de la bala es:

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (0.002 \text{ kg})(300 \text{ m/s})^2 = 90 \text{ J}$$

Toda esta energía cinética se transforma en calor en la bala, como para el plomo  $c = 128 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$ , entonces:

$$Q = mc\Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{Q}{mc} = \frac{90 \text{ J}}{(0.002 \text{ kg})(128 \text{ J/kg}^\circ\text{C})} = 351.6^\circ\text{C}$$

### 13.4 CALOR LATENTE Y CAMBIOS DE ESTADO.

Normalmente en un material se produce un cambio de su temperatura cuando se transfiere calor entre el material y los alrededores. Cuando se le agrega o quita calor a una sustancia, se producen variaciones de temperatura (aumento o disminución), es el calor  $Q$  llamado *calor sensible*, porque el objeto siente el calor agregado o perdido al cambiar su temperatura. Pero en ciertas condiciones se le agrega calor a una sustancia sin que cambie su temperatura, por ejemplo cuando se evapora el agua, en ese caso se produce un cambio en las características físicas y en la forma del material, llamado *cambio de estado o de fase* y al calor necesario para producir el cambio de fase se le llama *calor latente*, porque este calor está presente y a punto para ser usado cuando termina el proceso de cambio de estado. Por ejemplo, si se hierve agua en un recipiente abierto a la presión atmosférica normal, la temperatura no aumenta por encima de los 100° C por mucho calor que se suministre. El calor que se absorbe sin cambiar la temperatura del agua es el calor latente; no se pierde, sino que se emplea en transformar el agua en vapor y se almacena como energía en el vapor. Cuando el vapor se condensa para formar agua, esta energía vuelve a liberarse, recuperándose el calor latente como calor sensible. Del mismo modo, si se calienta una mezcla de hielo y agua, su temperatura no cambia hasta que se funde todo el hielo. El calor latente absorbido se emplea para vencer las fuerzas que mantienen unidas las partículas de hielo, y se almacena como energía en el agua.

Los diferentes cambios de fase son de sólido a líquido o *fusión* (fundición o derretimiento en el caso del agua), de líquido a gas o *evaporación* (vaporización), de sólido a gas o *sublimación* y los procesos en sentido opuesto llamados *solidificación* (o congelamiento en el caso del agua), *condensación* y *deposición*, respectivamente. Los diferentes procesos de cambio de estado, tomado como sustancia el agua, para los cuales se da una breve explicación cualitativa, se ilustran en la figura 13.2.

#### 13.4.1 Vaporización o evaporación.

Es la transformación de líquido a gas. La evaporación es la conversión gradual de un líquido en gas sin que haya ebullición, que se realiza en la superficie del líquido. Las moléculas de cualquier líquido se encuentran en constante movimiento. La velocidad media de las moléculas sólo depende de la temperatura, pero puede haber moléculas individuales que se muevan a una velocidad mu-

cho mayor o mucho menor que la media. A temperaturas por debajo del punto de ebullición, es posible que moléculas individuales que se aproximen a la superficie con una velocidad superior a la media tengan suficiente energía para escapar de la superficie y pasar al espacio situado por encima como moléculas de gas. Como sólo se escapan las moléculas más rápidas, la velocidad media de las demás moléculas disminuye; dado que la temperatura, a su vez, sólo depende de la velocidad media de las moléculas, la temperatura del líquido que queda también disminuye. Es decir, la evaporación es un proceso de *enfriamiento*; si se pone una gota de agua sobre la piel, se siente frío cuando se evapora. En el caso de una gota de alcohol, que se evapora con más rapidez que el agua, la sensación de frío es todavía mayor. Por ejemplo la transpiración humana es un mecanismo de defensa del cuerpo hacia el exceso de calor; los perros no transpiran pero cuando sienten calor jadean produciendo evaporación, reduciendo de esa manera su temperatura corporal; los cerdos que tampoco transpiran, se refrescan en el barro.

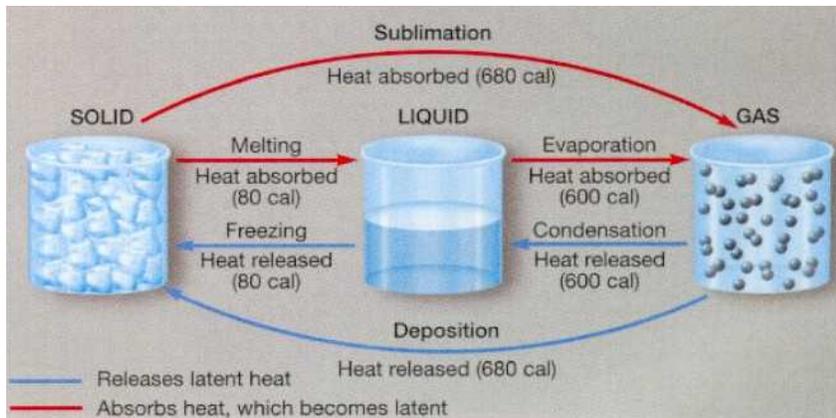


Figura 13.2 esquema de los procesos de cambio de fase en el caso del agua.

Si un líquido se evapora en un recipiente cerrado, el espacio situado sobre el líquido se llena rápidamente de vapor, y la evaporación se ve pronto compensada por el proceso opuesto, la condensación. Para que la evaporación continúe produciéndose con rapidez hay que eliminar el vapor tan rápido como se forma. Por este motivo, un líquido se evapora con la máxima rapidez cuando se crea una corriente de aire sobre su superficie. Cuando después de que ha llovido la energía del Sol comienza a secar el suelo, el calor se consume en evaporar la humedad de la tierra, lo que hace disminuir la temperatura del aire, haciendo que los días sean más frescos que si no hubiese llovido.

**13.4.2 Condensación.**

Es la transformación de un gas a líquido. Las moléculas de gas que se condensan entregan energía cinética a la superficie sobre la que condensan, por lo que este es un proceso de *calentamiento*. Cuando el vapor de agua en la atmósfera se transforma en gotitas para formar las nubes, se libera calor a la atmósfera, produciendo un aumento de temperatura.

**13.4.3 Fusión o derretimiento.**

Es la transformación de sólido a líquido.

**13.4.4 Solidificación o congelación.**

Es el cambio de estado de líquido a sólido.

**13.4.5 Sublimación.**

Es la transformación directa de sólido a gas, sin pasar por la fase líquida.

**13.4.6 Deposición.**

Es la transformación directa de gas a sólido. En la atmósfera este proceso es frecuente en época de bajas temperaturas, cuando el vapor de agua al entrar en contacto con las superficies que se encuentran a temperatura bajo 0° C, se congela formando la escarcha.

**13.4.7 Ebullición.**

Es un proceso en el cual el líquido pasa al estado de gas en el interior del líquido, donde el gas se concentra para formar burbujas que flotan hasta la superficie y desde ahí escapan al aire adyacente. La presión dentro de las burbujas debe ser grande para vencer la presión del agua que las rodea.

Si la presión atmosférica aumenta, la temperatura de ebullición se eleva y viceversa. Cuando ascendemos a mayor altura sobre el nivel del mar, el agua hierve con temperaturas menores porque la presión disminuye. Pero los alimentos se cuecen cuando la temperatura del agua es elevada y no por la temperatura de ebullición, por lo tanto a mayor altura se debe esperar más tiempo para cocer los alimentos, por ejemplo un huevo duro en Concepción se cuece en pocos minutos y en Visviri (4070 m de altura snm, en el extremo norte de Chile) en varias horas. La ebullición es un proceso de enfriamiento, en condiciones normales el agua que hierve a 100° C, se enfría con la misma rapidez

con la cual la calienta la fuente de calor, sino la temperatura del agua aumentaría siempre con la aplicación del calor.

El calor necesario para que una sustancia de masa  $m$  cambie de fase, se puede calcular de la siguiente forma:

$$Q = mL \quad (13.4)$$

donde  $L$  es el calor latente del material, depende de la forma del cambio de fase y de las propiedades del material. El calor latente es la energía térmica necesaria para que un kilogramo de una sustancia cambie de un estado a otro, en el SI se mide en J/kg, también se usa la unidad cal/gr. Existen calores latentes de fusión,  $L_F$ , de vaporización,  $L_V$ , y de sublimación,  $L_S$ , para los respectivos cambios de fase. Por ejemplo, para el agua a la presión atmosférica normal  $L_F = 3.33 \times 10^5 \text{ J/kg}$  y  $L_V = 22.6 \times 10^5 \text{ J/kg}$ . Los calores latentes de diferentes sustancias varían significativamente, como se muestra en la tabla 13.2. Puesto que en la fase gaseosa, la distancia media entre los átomos es mucho mayor que en la fase líquida o sólida, se requiere mayor trabajo (y energía) para evaporar una masa de sustancia que para fundirla, por eso el calor de vaporización es mayor que el calor de fusión, como se observa en la tabla 13.2.

Tabla 13.2 Constantes de cambios de fase (a 1 atm).

Sustancia	Punto de fusión (y solidificación) (°C)	Calor latente de fusión (y solidificación) (J/kg)	Punto de ebullición (y condensación) (°C)	Calor latente de vaporización (y condensación) (J/kg)
Helio	*	*	-268,93	$2,09 \times 10^4$
Hidrógeno	-269.5	$5,86 \times 10^4$	-252,89	$45,2 \times 10^4$
Nitrógeno	-209.97	$2,55 \times 10^4$	-195,81	$20,1 \times 10^4$
Oxígeno	-218.79	$1,38 \times 10^4$	-182,97	$21,3 \times 10^4$
Alcohol etílico	-114.0	$10,4 \times 10^4$	78.0	$85,4 \times 10^4$
Mercurio	-38.8	$1,18 \times 10^4$	356,9	$27,2 \times 10^4$
Agua	0.0	$33,3 \times 10^4$	100,0	$225,6 \times 10^4$
Azufre	119.0	$3,81 \times 10^4$	444,69	$32,6 \times 10^4$
Plomo	327.3	$2,45 \times 10^4$	1750	$87,0 \times 10^4$
Aluminio	660.0	$9,00 \times 10^4$	2450	$11,4 \times 10^6$
Plata	960.8	$8,82 \times 10^4$	2193	$2,33 \times 10^6$
Oro	1063.0	$6,44 \times 10^4$	2660	$1,58 \times 10^6$
Cobre	1083.0	$13,4 \times 10^4$	1187	$5,06 \times 10^6$
Hierro	1808.0	$28,9 \times 10^4$	3023	$6,34 \times 10^6$

\*Para solidificar el Helio se requiere una presión mayor que 25 atm. A 1atm, sigue siendo líquido hasta cero absoluto.

Ejemplo 13.5. Calcular la cantidad de calor necesario para transformar un gramo de hielo a  $-30^{\circ}\text{C}$  en vapor de agua hasta  $120^{\circ}\text{C}$ .

Solución: es conveniente analizar cada proceso físico en forma separada. El subíndice H se refiere la hielo, el A al agua y el V al vapor.

1°) cálculo del calor que se le debe agregar al hielo para elevar su temperatura desde  $-30^{\circ}\text{C}$  hasta  $0^{\circ}\text{C}$ ; en este proceso hay cambio de temperatura, se calcula el calor sensible  $Q_1$ :

$$Q_1 = m_H c_H \Delta T, \text{ con } c_H = 2090 \text{ J/kg } ^{\circ}\text{C}$$

$$Q_1 = (10^{-3} \text{ kg}) \left( 2090 \frac{\text{J}}{\text{kg}^{\circ}\text{C}} \right) [0 - (-30)]^{\circ}\text{C} = 62.7 \text{ J}$$

2°) calor agregado para fundir el hielo (en  $0^{\circ}\text{C}$ ), no hay cambio de temperatura, pero hay cambio de fase, se calcula el calor latente  $Q_2$ :

$$Q_2 = mL_{FH}, \text{ con } L_{FH} = 3.33 \times 10^5 \text{ J/kg}$$

$$Q_2 = (10^{-3} \text{ kg}) \left( 3.33 \times 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right) = 333 \text{ J}$$

3°) cálculo del calor que se le debe agregar al agua para aumentar su temperatura desde  $0^{\circ}\text{C}$  hasta  $100^{\circ}\text{C}$ ; en este proceso hay cambio de temperatura, se calcula el calor sensible  $Q_3$ :

$$Q_3 = m_A c_A \Delta T, \text{ con } c_A = 4186 \text{ J/kg } ^{\circ}\text{C}$$

$$Q_3 = (10^{-3} \text{ kg}) \left( 4186 \frac{\text{J}}{\text{kg}^{\circ}\text{C}} \right) (100 - 0)^{\circ}\text{C} = 418.6 \text{ J}$$

4°) calor agregado para evaporar el agua (en  $100^{\circ}\text{C}$ ), no hay cambio de temperatura, pero hay cambio de fase, se calcula el calor latente  $Q_4$ :

$$Q_4 = mL_{VA}, \text{ con } L_{VA} = 22.6 \times 10^5 \text{ J/kg}$$

$$Q_4 = (10^{-3} \text{ kg}) \left( 22.6 \times 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right) = 2260 \text{ J}$$

5°) cálculo del calor que se le debe agregar al vapor de agua para aumentar su temperatura desde 100° C hasta 120° C; en este proceso hay cambio de temperatura, se calcula el calor sensible  $Q_5$ :

$$Q_5 = m_V c_V \Delta T, \text{ con } c_V = 2000 \text{ J/kg } ^\circ\text{C}$$

$$Q_5 = (10^{-3} \text{ kg}) \left( 2000 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \right) (120 - 100)^\circ\text{C} = 40 \text{ J}$$

Por lo tanto, la cantidad total de calor necesario para transformar un gramo de hielo a -30° C en vapor de agua hasta 120° C es la suma del calor de cada proceso:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5$$

$$Q_T = 62.7 + 333 + 418.6 + 2260 + 40 = 3114.3 \text{ J}$$

En forma gráfica este proceso se puede ilustrar con la figura 13.3.

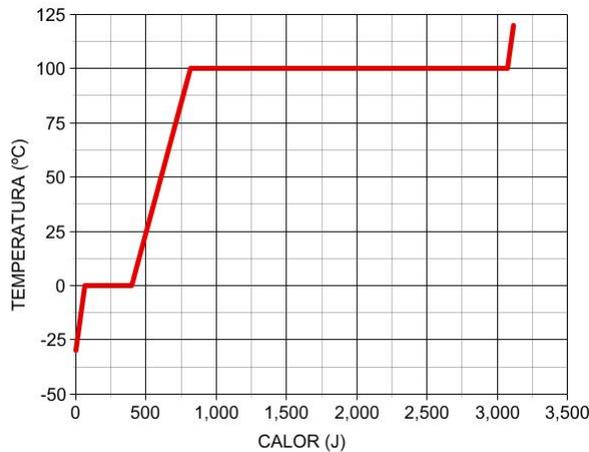


Figura 13.3 Gráfico de temperatura versus calor agregado para transformar 1g de hielo a -30° C en vapor de agua a 120° C.

Ejemplo 13.6. Calcular la cantidad de vapor de agua inicialmente a  $130^{\circ}\text{C}$ , que se requiere para calentar 200g de agua en un envase de vidrio de 100 g, desde  $20^{\circ}\text{C}$  hasta  $50^{\circ}\text{C}$ .

Solución: es un problema de intercambio de calor donde se debe igualar el calor perdido por el vapor de agua al enfriarse hasta  $50^{\circ}\text{C}$ , con el calor ganado por el envase y el agua al calentarse hasta  $50^{\circ}\text{C}$ . Sea  $m_x$  la masa de vapor desconocida.

1º) enfriamiento del vapor de agua desde  $130^{\circ}\text{C}$  hasta  $100^{\circ}\text{C}$ , hay cambio de temperatura y el calor sensible  $Q_1$  liberado en este proceso es:

$$Q_1 = m_x c_V \Delta T, \text{ con } c_V = 2010 \text{ J/kg } ^{\circ}\text{C}$$

$$Q_1 = -m_x \left( 2010 \frac{\text{J}}{\text{kg}^{\circ}\text{C}} \right) (100 - 130)^{\circ}\text{C} = m_x \left( 6 \times 10^4 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right)$$

2º) condensación del vapor de agua en agua líquida a  $100^{\circ}\text{C}$ , no hay cambio de temperatura, pero hay cambio de fase y se libera calor latente  $Q_2$ :

$$Q_2 = m_x L_V, \text{ con } L_V = 22.6 \times 10^5 \text{ J/kg}$$

$$Q_2 = m_x \left( 22.6 \times 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right)$$

3º) enfriamiento del agua desde  $100^{\circ}\text{C}$  hasta  $50^{\circ}\text{C}$ , hay cambio de temperatura y el calor sensible  $Q_3$  liberado en este proceso es:

$$Q_3 = m_x c_A \Delta T, \text{ con } c_A = 4186 \text{ J/kg } ^{\circ}\text{C}$$

$$Q_3 = -m_x \left( 4186 \frac{\text{J}}{\text{kg}^{\circ}\text{C}} \right) (50 - 100)^{\circ}\text{C} = m_x \left( 2.1 \times 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right)$$

4°) calor que gana el agua del envase para aumentar su temperatura desde 20° C hasta 50° C, hay cambio de temperatura y el calor sensible  $Q_4$  ganado en este proceso es:

$$Q_4 = m_A c_A \Delta T, \text{ con } c_A = 4186 \text{ J/kg } ^\circ\text{C}$$

$$Q_4 = (0.2\text{kg}) \left( 4186 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \right) (50 - 20)^\circ\text{C} = 2.5 \times 10^4 \text{ J}$$

5°) calor que gana el envase de vidrio para aumentar su temperatura desde 20° C hasta 50° C, hay cambio de temperatura y el calor sensible  $Q_5$  ganado en este proceso es (el subíndice Vi es para el vidrio):

$$Q_5 = m_{Vi} c_{Vi} \Delta T, \text{ con } c_{Vi} = 837 \text{ J/kg } ^\circ\text{C}$$

$$Q_5 = (0.1\text{kg}) \left( 837 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \right) (50 - 20)^\circ\text{C} = 2.5 \times 10^3 \text{ J}$$

Se realiza el balance entre el calor perdido y el calor ganado:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_4 + Q_5$$

$$m_X 6 \times 10^4 \frac{\text{J}}{\text{kg}} + m_X 22.6 \times 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}} + m_X 2.1 \times 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 2.5 \times 10^4 \text{ J} + 2.5 \times 10^3 \text{ J}$$

Despejando el valor de  $m_X$ :

$$m_X = 0.0109 \text{ kg} = 10.9 \text{ g}$$

### 13.5 TRABAJO EN LOS PROCESOS TERMODINAMICOS.

Para un gas contenido en un envase cilíndrico ajustado con un émbolo móvil, como se muestra en la figura 13.4, si el gas está en equilibrio térmico ocupa un volumen  $V$  y produce una presión constante  $P$  sobre las paredes del cilindro y sobre el émbolo, de área  $A$ . La fuerza ejercida por la presión del gas sobre el émbolo es  $F = PA$ . Si el gas se expande desde el volumen  $V$  hasta el volumen  $V+dV$  lo suficientemente lento, el sistema permanecerá en equilibrio termodi-

námico. Por efecto de la expansión, el émbolo se desplazará verticalmente hacia arriba una distancia  $dy$ , y el trabajo realizado por el gas sobre el émbolo, será:

$$dW = F dy = PA dy$$

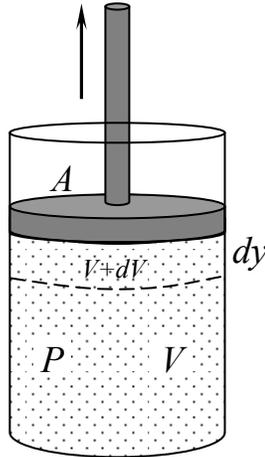


Figura 13.4 El gas contenido en un envase a una presión  $P$ , cuando se expande realiza trabajo sobre el émbolo.

Como  $A dy$  es el aumento de volumen  $dV$  del gas, se puede escribir el trabajo realizado como:

$$dW = PdV$$

Si el gas se expande, entonces  $dV$  es positivo y el trabajo realizado por el gas es positivo, por el contrario, si el gas se comprime,  $dV$  es negativo y el trabajo realizado por el gas es negativo, en este caso se interpreta como el trabajo realizado sobre el sistema. Si no cambia el volumen, no se realiza trabajo. Para obtener el trabajo total realizado por el gas cuando la variación de presión hace cambiar el volumen desde un valor  $V_i$  hasta un valor  $V_f$ , se debe integrar la ecuación anterior, de la forma:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} PdV \quad (13.5)$$

Para evaluar esta integral, se debe saber como varía la presión durante el proceso. En general la presión no es constante, depende del volumen y de la temperatura. Si se conoce la presión y el volumen durante el proceso, los estados del gas se pueden representar por una curva en un diagrama  $PV$ , como la que se muestra en la figura 13.5. De este gráfico, se obtiene que **el trabajo realizado por un gas al expandirse o comprimirse desde un estado inicial  $V_i$  hasta un estado final  $V_f$  es igual al área bajo la curva de un diagrama  $PV$ .**

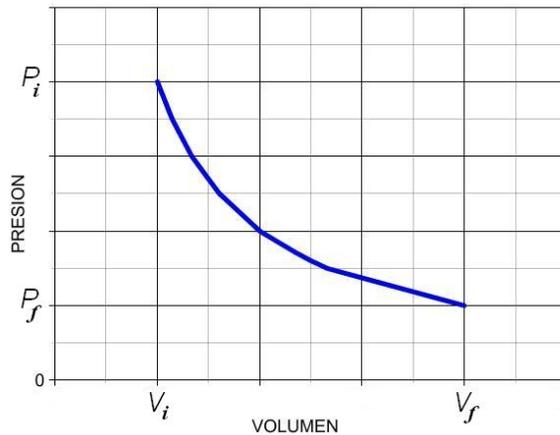


Figura 13.5. Curva presión volumen para un gas que se expande desde  $V_i$  hasta  $V_f$ .

Este trabajo depende de la trayectoria seguida para realizar el proceso entre los estados inicial y final, como se ilustra con la figura 13.6. Si el proceso que se realiza es a volumen constante  $V_i$  disminuyendo la presión desde  $P_i$  hasta  $P_f$ , seguida de un proceso a presión constante  $P_f$  aumentando el volumen desde  $V_i$  hasta  $V_f$  (figura 13.6a), el valor del trabajo es diferente al que se obtiene en un proceso donde primero se produce una expansión desde  $V_i$  hasta  $V_f$  a presión constante  $P_i$  y después se disminuye la presión desde  $P_i$  hasta  $P_f$ , manteniendo constante el volumen final  $V_f$  (figura 13.6b). Las áreas bajo las curvas en cada caso, tienen un valor diferente, es mayor en la figura 13.6b. Por lo tanto, **el trabajo realizado por un sistema depende del proceso por el cual el sistema cambia desde un estado inicial a otro final.**

De manera similar se encuentra que el calor transferido hacia adentro o hacia fuera del sistema, depende del proceso. **Tanto el calor como el trabajo dependen de los estados inicial, final e intermedios del sistema.** Como estas dos

cantidades dependen de la trayectoria, ninguna de las dos se conserva en los procesos termodinámicos.

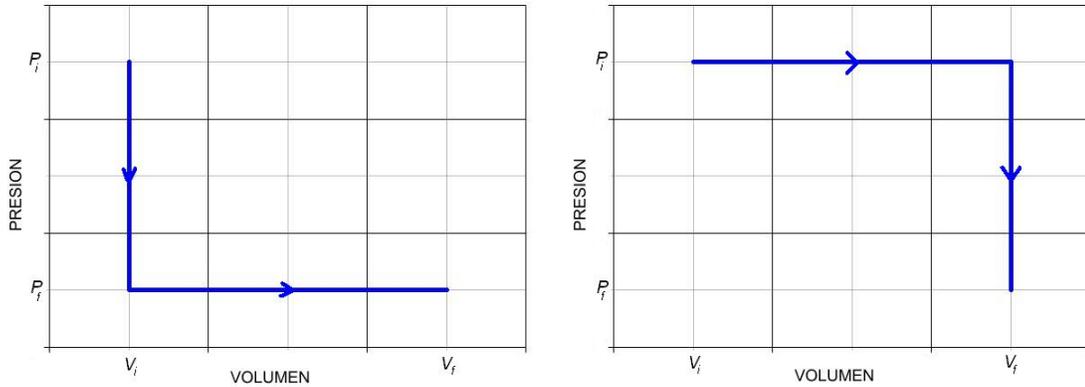


Figura 13.6. a) Izquierda, b) derecha.

Ejemplo 13.7 Un gas se expande desde  $i$  hasta  $f$  por tres trayectorias posibles, como se indica en la figura 13.7. Calcular el trabajo realizado por el gas a lo largo de las trayectorias  $iAf$ ,  $if$  y  $iBf$ . Considerar los valores dados en la figura.

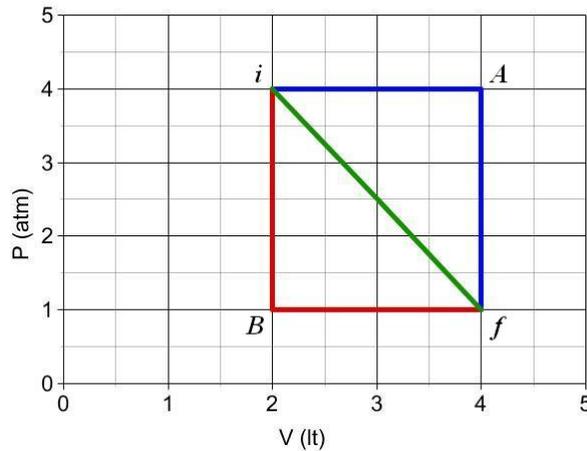


Figura 13.7. Diagrama presión volumen del ejemplo 13.7.

Solución: se calcula el área bajo la curva en cada proceso. De la figura 13.7, se tienen los datos:  $P_i = 4\text{atm} = 4.05 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $P_f = 1\text{atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $V_i = 2\text{lt} = 0.002\text{m}^3 = V_B$ ,  $V_A = 4\text{lt} = 0.004\text{m}^3 = V_f$ .

trayectoria  $iAf$ :

$$W_1 = W_{iA} + W_{Af} = \text{área} + 0 = P_i(V_A - V_i)$$

$$W_1 = (4.05 \times 10^5 \text{ Pa})(4-2)0.001 \text{ m}^3 = 810 \text{ J}$$

trayectoria  $if$ :

$$W_2 = W_{if} = \text{área} = \frac{1}{2}(P_i - P_f)(V_B - V_f) + P_f(V_B - V_f)$$

$$W_2 = \frac{1}{2}(4-1)(1.013 \times 10^5 \text{ Pa})(4-2)0.001 \text{ m}^3 + (1.013 \times 10^5 \text{ Pa})(4-2)0.001 \text{ m}^3 =$$

$$W_2 = 515 \text{ J}$$

trayectoria  $iBf$ :

$$W_3 = W_{iB} + W_{Bf} = 0 + \text{área} = P_f(V_f - V_B)$$

$$W_3 = (1.01 \times 10^5 \text{ Pa})(4-2)0.001 \text{ m}^3 = 202 \text{ J}$$

Ejemplo 13.8 Una muestra de gas ideal se expande al doble de su volumen original de  $1 \text{ m}^3$  en un proceso para el cual  $P = \alpha V^2$ , con  $\alpha = 5 \text{ atm/m}^6$ , como se muestra en la figura 13.8. Calcular el trabajo realizado por el gas durante la expansión.

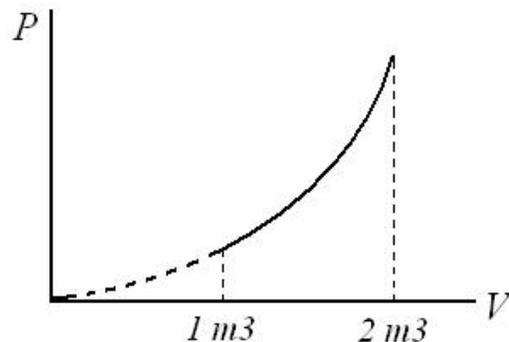


Figura 13.8. Diagrama presión volumen del ejemplo 13.8.

Solución: usando la definición del trabajo termodinámico:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} PdV = \int_{V_i}^{V_f} \alpha V^2 dV = \alpha \int_{V_i}^{V_f} V^2 dV$$

$$W = \frac{\alpha}{3} (V_f^3 - V_i^3) = \frac{5 \text{ atm/m}^6}{3} [(2\text{m}^3)^3 - (1\text{m}^3)^3] = 11.7(\text{atm})(\text{m}^3)$$

$$W = 11.7(\text{atm})(\text{m}^3) \times \frac{1.01 \times 10^5 \text{ Pa}}{1 \text{ atm}} = 1.2 \times 10^6 \text{ J}$$

### 13.6 PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA.

En mecánica la energía se conserva si las fuerzas son conservativas y no actúan fuerzas como la fricción. En ese modelo no se incluyeron los cambios de energía interna del sistema. **La primera ley de la termodinámica es una generalización de la ley de conservación de la energía que incluye los posibles cambios en la energía interna.** Es una ley válida en todo el Universo y se puede aplicar a todos los tipos de procesos, permite la conexión entre el mundo macroscópico con el microscópico.

La energía se puede intercambiar entre un sistema y sus alrededores de dos formas. Una es realizando trabajo por o sobre el sistema, considerando la medición de las variables macroscópicas tales como presión, volumen y temperatura. La otra forma es por transferencia de calor, la que se realiza a escala microscópica.

Considerar un sistema termodinámico donde se produce un cambio desde un estado inicial  $i$  a otro final  $f$ , en el cual se absorbe o libera una cantidad  $Q$  de calor y se realiza trabajo  $W$  por o sobre el sistema. Si se mide experimentalmente la cantidad  $Q - W$  para diferentes procesos que se realicen para ir desde el estado inicial al estado final, se encuentra que su valor no cambia, a esta diferencia de  $Q - W$  se le llama **cambio de energía interna del sistema**. Aunque por separados  $Q$  y  $W$  dependen de la trayectoria, la cantidad  $Q - W$ , esto es, **el cambio de energía interna es independiente de la trayectoria** o del proceso que se realice para ir desde el estado inicial al estado final. Por esta razón se considera a la energía interna como una función de estado, que se mide en  $J$

y se simboliza por  $U$ , el cambio de energía interna es  $\Delta U = U_f - U_i$ , entonces se puede escribir la **primera ley de la termodinámica**:

$$\Delta U = U_f - U_i = Q - W \quad (13.6)$$

En la ecuación 13.6,  $Q$  es positivo (negativo) si se le agrega (quita) calor al sistema y  $W$  es positivo cuando el sistema realiza trabajo y negativo cuando se realiza trabajo sobre el sistema. La forma correcta de escribir la ecuación 13.6 es considerando diferenciales, ya que si se le agrega o quita una pequeña cantidad de calor  $dQ$  al sistema y se realiza una cantidad de trabajo diferencial  $dW$  por o sobre el sistema, la energía interna cambia en una cantidad  $dU$ :

$$dU = dQ - dW \quad (13.7)$$

En escala microscópica, la energía interna de un sistema incluye la energía cinética y potencial de las moléculas que constituyen el sistema. Para un gas, el aumento de energía interna se asocia con el aumento de energía cinética de las moléculas, es decir con su temperatura. Al igual que en el caso de la mecánica, en termodinámica no interesa conocer la forma particular de la energía interna, sino que interesan solo sus variaciones  $\Delta U$ . Por lo tanto, se puede elegir cualquier estado de referencia para la energía interna, ya que se han definido solo sus diferencias, no sus valores absolutos. En la ecuación 13.7, tanto  $dQ$  como  $dW$  son diferenciales inexactas, pero  $dU$  es una diferencial exacta.

### 13.6.1 Casos particulares.

#### **Sistema aislado.**

Para un sistema aislado, que no interactúa con los alrededores, no hay transferencia de calor,  $Q = 0$ , el trabajo realizado también es cero y por lo tanto no hay cambio de energía interna, esto es, **la energía interna de un sistema aislado permanece constante**:

$$Q = W = 0, \Delta U = 0 \quad \text{y} \quad U_f = U_i$$

**Proceso cíclico.**

Es un proceso que empieza y termina en el mismo estado. En este caso el cambio de energía interna es cero y el calor agregado al sistema debe ser igual al trabajo realizado durante el ciclo, entonces:

$$\Delta U = 0 \quad \text{y} \quad Q = W$$

**Proceso con  $W = 0$ .**

Si se produce un proceso donde el trabajo que se realiza es cero, el cambio en la energía interna es igual al calor agregado o liberado por el sistema. En este caso, si se le agrega (quita) calor al sistema,  $Q$  es positivo (negativo) y la energía interna aumenta (disminuye). Esto es:

$$W = 0, \quad \Delta U = Q$$

**Proceso con  $Q = 0$ .**

Si ahora se realiza un proceso donde la transferencia de calor es cero y el sistema realiza trabajo, entonces el cambio de la energía interna es igual al valor negativo del trabajo realizado por el sistema, por lo tanto la energía interna disminuye; lo contrario ocurre si se realiza trabajo sobre el sistema. Al cambiar la energía interna, cambia la energía cinética de las moléculas en el sistema, lo que a su vez produce cambios en la temperatura del sistema.

$$Q = 0, \quad \Delta U = -W$$

El calor y el trabajo son variables macroscópicas que pueden producir un cambio en la energía interna de un sistema, que es una variable microscópica. Aunque  $Q$  y  $W$  no son propiedades del sistema, se pueden relacionar con  $U$  por la primera ley de la termodinámica. Como  $U$  determina el estado de un sistema, se considera una función de estado.

### **13.7 PROCESOS TERMODINAMICOS.**

#### **13.7.1 Proceso isobárico.**

Es un proceso que se realiza a presión constante. En un proceso isobárico, se realiza tanto transferencia de calor como trabajo. El valor del trabajo es simplemente  $P(V_f - V_i)$ , y la primera ley de la termodinámica se escribe:

$$\Delta U = Q - P(V_f - V_i)$$

### 13.7.2 Proceso isovolumétrico.

Un proceso que se realiza a volumen constante se llama *isovolumétrico*. En estos procesos evidentemente el trabajo es cero y la primera ley de la termodinámica se escribe:

$$\Delta U = Q$$

Esto significa que si se agrega (quita) calor a un sistema manteniendo el volumen constante, todo el calor se usa para aumentar (disminuir) la energía interna del sistema.

### 13.7.3 Proceso adiabático.

Un proceso adiabático es aquel que se realiza sin intercambio de calor entre el sistema y el medioambiente, es decir,  $Q = 0$ . Al aplicar la primera ley de la termodinámica, se obtiene:

$$\Delta U = -W$$

En un proceso adiabático, si un gas se expande (comprime), la presión disminuye (aumenta), el volumen aumenta (disminuye), el trabajo es positivo (negativo), la variación de energía interna  $\Delta U$  es negativa (positiva), es decir la  $U_f < U_i$  ( $U_f > U_i$ ) y el gas se enfría (calienta).

Los procesos adiabáticos son comunes en la atmósfera: cada vez que el aire se eleva, llega a capas de menor presión, como resultado se expande y se enfría adiabáticamente. Inversamente, si el aire desciende llega a niveles de mayor presión, se comprime y se calienta. La variación de temperatura en los movimientos verticales de aire no saturado se llama *gradiente adiabático seco*, y las mediciones indican que su valor es aproximadamente  $-9.8^\circ \text{C/km}$ . Si el aire se eleva lo suficiente, se enfría hasta alcanzar el punto de rocío, y se produce la condensación. En este proceso, el calor que fue absorbido como calor sensible durante la evaporación se libera como calor latente, y aunque la masa de aire continua enfriándose, lo hace en una proporción menor, porque la entrega de calor latente al ambiente produce aumento de temperatura. En otras palabras, la masa de aire puede ascender con un gradiente adiabático seco hasta

una altura llamada **nivel de condensación**, que es la altura donde comienza la condensación y eventualmente la formación de nubes y de precipitación. Sobre ese nivel la tasa de enfriamiento con la altura se reduce por la liberación de calor latente y ahora se llama **gradiente adiabático húmedo**, su valor varía desde  $-5^\circ \text{ C/km}$  a  $-9^\circ \text{ C/km}$  de disminución con la altura, dependiendo de si el aire tiene un alto o bajo contenido de humedad.

#### 13.7.4 Proceso isotérmico.

Un proceso isotérmico es aquel que se realiza a temperatura constante. La gráfica de  $P$  versus  $V$  para un gas ideal, manteniendo la temperatura constante es una curva hiperbólica llamada **isoterma** (figura 13.9). Como la energía interna de un gas ideal es solo función de la temperatura, entonces en un proceso isotérmico para un gas ideal  $\Delta U = 0$  y  $Q = W$ .

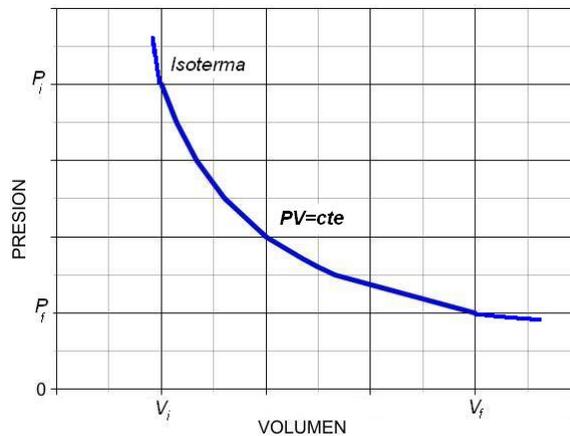


Figura 13.9. Gráfico presión volumen en un proceso isotérmico.

Se calculará el trabajo para un gas ideal que se expande isotérmicamente desde el estado inicial  $i$  al estado final  $f$ , como se muestra en el gráfico  $PV$  de la figura 13.9. La isoterma es una curva hiperbólica de ecuación  $PV = cte$ . El trabajo realizado por el gas se puede calcular con la ecuación 13.5, usando la ecuación de estado de gas ideal,  $PV = nRT$ , para reemplazar  $P$ :

$$W = \int_{V_i}^{V_f} PdV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV$$

Como la temperatura es constante, se puede sacar fuera de la integral:

$$W = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \ln V \Big|_{V_i}^{V_f}$$

El resultado final es:

$$W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \quad (13.8)$$

Este trabajo es numéricamente igual al área bajo la curva  $PV$  de la figura 13.9. Si el gas se expande (comprime) isotérmicamente,  $V_f > V_i$ , ( $V_f < V_i$ ) y el trabajo es positivo (negativo).

Ejemplo 13.9 Calcular el trabajo realizado por un mol de un gas ideal que se mantiene a  $0^\circ \text{C}$ , en una expansión de 3 litros a 10 litros.

Solución: como la expansión es isotérmica, el cálculo es directo reemplazando los datos en la ecuación 13.8:

$$W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} = (1 \text{ mol}) \left( 8.31 \frac{\text{J}}{\text{molK}} \right) (273 \text{ K}) \ln \frac{10}{3} = 2730 \text{ J}$$

Ejemplo 13.10 Una barra de cobre de 1 kg se calienta desde  $10^\circ \text{C}$  hasta  $100^\circ \text{C}$ , a la presión atmosférica. Calcular la variación de energía interna del cobre.

Solución: por la primera ley de la termodinámica  $\Delta U = Q - W$ , donde se deben calcular  $Q$  y  $W$ .

Cálculo de  $Q$ :

$$Q = mc\Delta T, \text{ con } c = 387 \text{ J/(kg K) para el cobre.}$$

$$Q = 1 \text{ kg} \times 387 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} (373 - 283) \text{ K} = 3.5 \times 10^4 \text{ J}$$

Cálculo de  $W$ , como  $P$  es constante:

$$W = P(V_f - V_i)$$

$\Delta V$  se calcula del proceso de dilatación cúbica

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T, \quad \text{con } \beta = 3\alpha = 3(1.7 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}) = 5.1 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\Delta V = 5.1 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} V_0 (100 - 10) ^\circ\text{C} = 4.6 \times 10^{-3} V_0$$

$$V_0 \text{ se calcula de } \rho_{Cu} = \frac{m}{V_0} \Rightarrow V_0 = \frac{m}{\rho} = \frac{1 \text{ kg}}{8900 \text{ kg/m}^3} = 1.1 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$W = (1.01 \times 10^5 \text{ Pa})(4.6 \times 10^{-3})(1.1 \times 10^{-4} \text{ m}^3) = 0.05 \text{ J}$$

Finalmente, el cambio de energía interna es:

$$\Delta U = 3.5 \times 10^4 \text{ J} - 0.05 \text{ J} = 3.49 \times 10^4 \text{ J}$$

Se observa que casi todo el calor se usa para cambiar la energía interna de la barra de cobre. Por esta razón, normalmente en la dilatación térmica de un sólido o un líquido se desprecia la pequeña cantidad de trabajo realizado contra la atmósfera.

### 13.8. CAPACIDAD CALORICA DE UN GAS IDEAL.

Se ha encontrado que la temperatura de un gas es una medida de la energía cinética promedio de traslación del centro de masa de las moléculas del gas, sin considerar la energía asociada al movimiento de rotación o de vibración de la molécula respecto al centro de masa. Esto es así, porque en el modelo simple de la teoría cinética se supone que la molécula es sin estructura.

De acuerdo a esto, se analizará el caso simple de un gas ideal monoatómico, es decir, de un gas que tiene un átomo por molécula, como el helio, neón o argón. Cuando se agrega energía a un gas monoatómico contenido en un envase de volumen fijo (por ejemplo calentando el envase), toda la energía agregada

se ocupa en aumentar la energía cinética de traslación de los átomos. No existe otra forma de almacenar la energía en un gas monoatómico. De la ecuación 12.20, se tiene que la energía interna total  $U$  de  $N$  moléculas (o  $n$  moles) de un gas ideal monoatómico se puede calcular de:

$$U = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} nRT \quad (13.9)$$

De esta ecuación se deduce que para un gas ideal,  $U$  es función sólo de la temperatura  $T$ . Si se transfiere calor al sistema a **volumen constante**, el trabajo realizado por el sistema es cero, esto es,  $W = 0$ . Por la primera ley de la termodinámica, se obtiene:

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2} nR\Delta T \quad (13.10)$$

Esto significa que todo el calor transferido se ocupa en aumentar la energía interna (y la temperatura) del sistema. En la figura 13.10 se describe el proceso a volumen constante desde  $i$  hasta  $f_1$ , donde  $\Delta T$  es la diferencia de temperatura entre las dos isotermas.

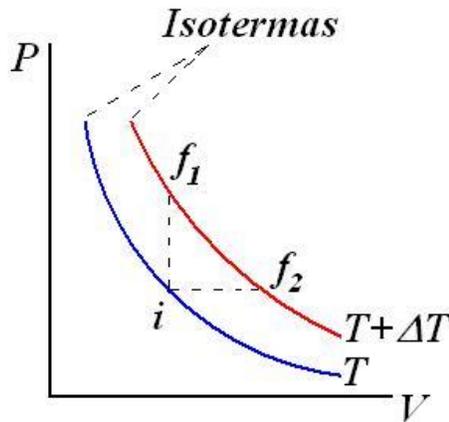


Figura 13.10. Procesos a volumen constante  $if_1$  y a presión constante  $if_2$ .

Reemplazando el valor de  $Q$  dado por la ecuación 13.1, con  $C = nc$ , se obtiene:

$$nc_V\Delta T = \frac{3}{2}nR\Delta T$$
$$c_V = \frac{3}{2}R \quad (13.11)$$

donde  $c_V$  es la capacidad calórica molar del gas a volumen constante, válida para todos los gases monoatómicos.

El cambio de energía interna para un gas ideal, en un proceso a volumen constante, se puede expresar como:

$$\Delta U = nc_V\Delta T \quad (13.12)$$

Suponga ahora que el gas se lleva por un proceso termodinámico isobárico, desde  $i$  hasta  $f_2$ , como se muestra en la figura 13.10. En esta trayectoria, la temperatura aumentó en la cantidad  $\Delta T$ . El calor que se debe transferir al gas en este proceso está dado por  $Q = n c_P \Delta T$ , donde  $c_P$  es la capacidad calórica molar a presión constante. Como el volumen aumenta en este proceso, se tiene que el trabajo realizado por el gas es  $W = P \Delta V$ , y aplicando la primera ley de la termodinámica, se obtiene:

$$\Delta U = nc_P\Delta T - P\Delta V \quad (13.13)$$

En este caso el calor agregado al gas se usa en dos formas: una parte para realizar trabajo externo, por ejemplo para mover el émbolo del envase y otra parte para aumentar la energía interna del gas. Pero el cambio de energía interna para el proceso de  $i$  hasta  $f_2$  es igual en el proceso de  $i$  hasta  $f_1$ , ya que  $U$  para un gas ideal dependen sólo de la temperatura y  $\Delta T$  es la misma en cada proceso. Además como  $PV = nRT$ , para un proceso de presión constante se tiene

que  $P\Delta V = nR\Delta T$ . Reemplazando en la ecuación 14.5, con  $\Delta U = n c_V \Delta T$ , se obtiene:

$$n c_V \Delta T = n c_P \Delta T - n R \Delta T$$

o

$$c_P - c_V = R$$

Esta expresión que se aplica a cualquier gas ideal, indica que la capacidad calórica molar a presión constante es mayor que la capacidad calórica molar a volumen constante por una cantidad  $R$ , la constante universal de los gases.

Como para un gas monoatómico  $c_V = (3/2)R = 12.5 \text{ J/molK}$ , el valor de  $c_P$  es  $c_P = (5/2)R = 20.8 \text{ J/molK}$ . La razón de estas capacidades calóricas es una cantidad adimensional llamada gamma,  $\gamma$ , de valor:

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{5}{3} = 1.67$$

Los valores de  $c_P$  y  $\gamma$  concuerdan bastante bien con los valores experimentales para los gases monoatómicos, pero pueden ser muy diferentes para gases más complejos, como se puede observar en la tabla 13.3, donde se listan valores de la capacidad calórica molar para algunos gases. Esto no debe sorprender ya que el valor de  $c_V$  fue determinado para gases ideales monoatómicos y se espera una contribución adicional al calor específico debido a la estructura interna de las moléculas más complejas.

La diferencia de valor entre  $c_V$  y  $c_P$  es consecuencia del hecho de que en los procesos a volumen constante, no se realiza trabajo y todo el calor se usa para aumentar la energía interna (y la temperatura) del gas, mientras que en un proceso a presión constante, parte de la energía calórica se transforma en trabajo realizado por el gas. En el caso de sólidos y líquidos calentados a presión constante, se realiza muy poco trabajo debido a que la dilatación térmica es pequeña (ver ejemplo 13.10). En consecuencia,  $c_V$  y  $c_P$  son aproximadamente iguales para sólidos y líquidos.

Tabla 13.3. Calores específicos de gases.

Tipo de gas	Gas	(cal/mol K)			$\gamma = C_p/C_v$	(J/mol K)		
		$C_p$	$C_v$	$C_p - C_v$		$C_p$	$C_v$	$C_p - C_v$
Monoatómico	He	4.97	2.98	1.99	1.67	20,78	12,47	8,31
	Ar	4.97	2.98	1.99	1.67	20,78	12,47	8,31
	Ne				1.64	20,78	12,70	8,08
	Kr				1.69	20,78	12,30	8,48
Diatómico	H <sub>2</sub>	6.87	4.88	1.99	1.41	28,74	20,42	8,32
	N <sub>2</sub>	6.95	4.96	1.99	1.40	29,07	20,76	8,31
	O <sub>2</sub>	7.03	5.03	2.00	1.40	29,17	20,85	8,31
	CO				1,40	29,16	20,85	8,31
	Cl <sub>2</sub>	8.29	6.15	2.14	1.35	34,70	25,70	8,96
Poliatómico	CO <sub>2</sub>	8.83	6.80	2.03	1.30	36,94	28,46	8,48
	SO <sub>2</sub>	9.65	7.50	2.15	1.29	40,37	31,39	8,98
	H <sub>2</sub> O				1.30	35,40	27,00	8,37
	CH <sub>4</sub>				1.31	35,50	27,10	8,41
	H <sub>2</sub> S				1,33	34,60	25,95	8,65
	NH <sub>3</sub>	8.80	6.65	2.15	1.31			
	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	12.35	10.30	2.05	1.20			
Aire	0.2404	0.1715		1.40				

Ejemplo 13.11. Un cilindro contiene 3 moles de helio a temperatura ambiente (suponer a 27° C). Calcular: a) el calor que se debe transferir al gas para aumentar su temperatura hasta 500 K si se calienta a volumen constante, b) el calor que se debe transferir al gas a presión constante para aumentar su temperatura hasta 500 K, c) el trabajo realizado por el gas.

Solución: a) en un proceso realizado a volumen constante, el trabajo es cero. De la ecuación 13.10 se obtiene:

$$Q = \frac{3}{2} nR\Delta T = nc_v\Delta T$$

Como  $c_v = 12.5 \text{ J/molK}$  para el helio y  $\Delta T = 200\text{K}$ , reemplazando los valores:

$$Q_1 = 3 \text{ moles} \left( 12.5 \frac{\text{J}}{\text{molK}} \right) (200\text{K}) = 7500\text{J}$$

b) Usando la ecuación  $Q_2 = n c_p \Delta T$  y reemplazando los valores:

$$Q_2 = (3 \text{ moles})(20.8 \text{ J/molK})(200\text{K}) = 12500 \text{ J.}$$

c) De la primera ley de la termodinámica:

volumen constante:  $\Delta U = Q_1 - W = Q_1$

presión constante:  $\Delta U = Q_2 - W$

Esta variación de energía interna es la misma en ambos procesos, igualando se tiene:

$$Q_1 = Q_2 - W \quad \text{y} \quad W = Q_2 - Q_1 = 12500J - 7500 J = 5000 J.$$

Ejemplo 13.12 Para un gas ideal monoatómico, se realiza el ciclo ABCDA que se ilustra en la figura 13.11. Considerando que  $nRT = 1000 J$  en A, calcular  $Q$ ,  $W$  y  $\Delta U$  en cada proceso del ciclo (suponer  $1atm = 10^5 Pa$ ).

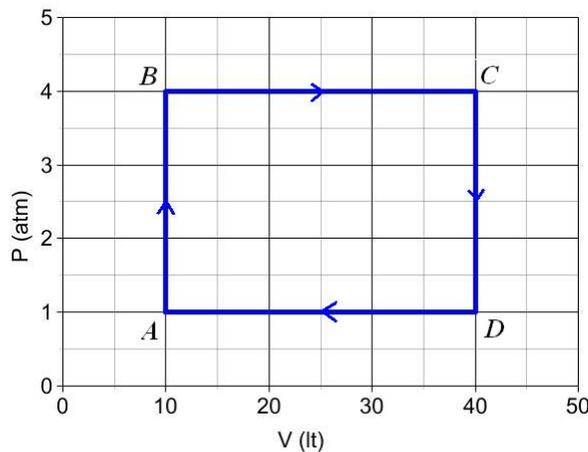


Figura 13.11. Diagrama presión volumen del ejemplo 13.12.

Solución:

En A: se tiene  $P_A V_A = nRT_A = 1000 J$

En B:  $P_B V_B = nRT_B \Rightarrow nRT_B = (4 \times 10^5 Pa)(0.01 m^3) = 4000 J$

En C:  $P_C V_C = nRT_C \Rightarrow nRT_C = (4 \times 10^5 Pa)(0.04 m^3) = 16000 J$

En D:  $P_D V_D = nRT_D \Rightarrow nRT_D = (1 \times 10^5 Pa)(0.04 m^3) = 4000 J$

1º) el proceso AB es a volumen constante:

$$Q_{AB} = nc_V \Delta T = n \frac{3}{2} R(T_B - T_A) = 1.5(nRT_B - nRT_A)$$

$$Q_{AB} = 1.5(4000 - 1000)J = 4500J$$

$$W_{AB} = 0$$

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB} = 4500 J$$

2º) el proceso BC es isobárico, a presión constante:

$$Q_{BC} = nc_P \Delta T = n \frac{5}{2} R(T_C - T_B) = 2.5(nRT_C - nRT_B)$$

$$Q_{BC} = 2.5(16000 - 4000)J = 30000J$$

$$W_{BC} = P(V_C - V_B) = (4 \times 10^5 \text{ Pa})(0.04 - 0.01)m^3 = 12000J$$

$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} - W_{BC} = 30000 - 12000 = 18000 J$$

3º) el proceso CD es a volumen constante:

$$Q_{CD} = nc_V \Delta T = n \frac{3}{2} R(T_D - T_C) = 1.5(nRT_D - nRT_C)$$

$$Q_{CD} = 1.5(4000 - 16000)J = -18000J$$

$$W_{CD} = 0$$

$$\Delta U_{CD} = Q_{CD} - W_{CD} = -18000 J$$

4º) el proceso DA es isobárico, a presión constante:

$$Q_{DA} = nc_P \Delta T = n \frac{5}{2} R(T_A - T_D) = 2.5(nRT_A - nRT_D)$$

$$Q_{DA} = 2.5(1000 - 4000)J = -7500J$$

$$W_{DA} = P(V_A - V_D) = (1 \times 10^5 \text{ Pa})(0.01 - 0.04)m^3 = -3000J$$

$$\Delta U_{DA} = Q_{DA} - W_{DA} = -7500 - (-3000) = -4500 J$$

### 13.9. PROCESO ADIABATICO DE UN GAS IDEAL.

*Un proceso adiabático es aquel que se realiza sin transferencia de calor entre el sistema y los alrededores.*

En la realidad los verdaderos procesos adiabáticos no se producen, ya que no existe un aislante perfecto entre el sistema y el ambiente. Pero existen procesos reales que son casi o cuasiadiabáticos. Por ejemplo, si se comprime (o expande) un gas rápidamente, fluye muy poco calor entre el (o hacia fuera del) sistema y el proceso es cuasiadiabático. Estos procesos son comunes en la atmósfera, donde una masa de aire cerca del suelo, más cálida y menos densa que los alrededores, asciende verticalmente, arriba se encuentra con regiones de menor presión y se expande adiabáticamente (o cuasi), esa expansión produce enfriamiento, si la masa de aire tiene suficiente humedad, se produce la condensación, que origina la formación de nubes y probable precipitación.

Suponga que un gas ideal experimenta una expansión cuasiadiabática. En cualquier instante durante el proceso, se supone que el gas está en equilibrio, de tal manera que la ecuación de estado es válida. La presión y el volumen en cualquier instante durante el proceso adiabático están relacionados por la ecuación

$$PV^\gamma = cte. \tag{13.14}$$

donde  $\gamma = c_P / c_V$  se considera constante durante el proceso. Por lo tanto todas las variables termodinámicas cambian durante un proceso adiabático.

En la figura 13.12 se muestra un diagrama  $PV$  para una expansión adiabática. Como  $\gamma > 1$ , la curva  $PV$  de la expansión adiabática es de mayor pendiente que la de la expansión isotérmica. Al expandirse adiabáticamente el gas, no se

transfiere calor hacia el sistema o fuera de él, por lo tanto, de la primera ley de la termodinámica, se ve que  $\Delta U$  es negativo, por lo tanto  $\Delta T$  también es negativo. Entonces el gas se enfría ( $T_f < T_i$ ) durante una expansión adiabática. De manera equivalente, si el gas se comprime adiabáticamente, su temperatura aumenta.

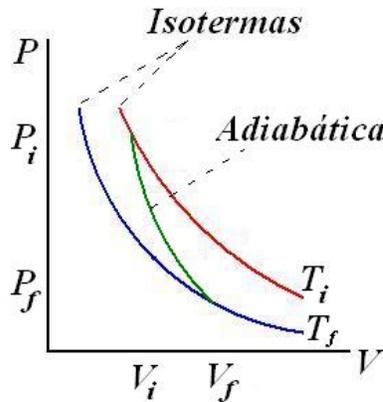


Figura 13.12. Diagrama presión volumen donde se muestra la curva adiabática.

Usando la ecuación  $PV = nRT$ , se demuestra que la ecuación 13.14 se puede escribir también en la forma:

$$TV^{\gamma-1} = cte. \quad (13.15)$$

Ejemplo 13.13. El aire en un cilindro a  $20^\circ \text{C}$  se comprime desde una presión inicial de 1 atm y un volumen de  $800 \text{ cm}^3$  hasta un volumen de  $60 \text{ cm}^3$ . Suponiendo que el aire se comporta como un gas ideal ( $\gamma = 1.4$ ) y que la compresión es adiabática, calcular la presión y temperatura final.

Solución: usando la ecuación 13.14

$$PV^\gamma = cte. \Rightarrow P_i V_i^\gamma = P_f V_f^\gamma \Rightarrow P_f = P_i \left( \frac{V_i}{V_f} \right)^\gamma$$

$$P_f = 1 \text{ atm} \left( \frac{800 \text{ cm}^3}{60 \text{ cm}^3} \right)^{1.4} = 37.6 \text{ atm}$$

y de la ecuación 13.15

$$TV^{\gamma-1} = \text{cte.} \Rightarrow T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1} \Rightarrow T_f = T_i \left( \frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1}$$

$$T_f = 293 \text{ K} \left( \frac{800 \text{ cm}^3}{60 \text{ cm}^3} \right)^{1.4-1} = 825.7 \text{ K} = 552.7^\circ \text{ C}$$

**PROBLEMAS.**

- 13.1 a) Una persona de 80 kg intenta bajar de peso subiendo una montaña para quemar el equivalente a una gran rebanada de un rico pastel de chocolate (700 Cal alimenticias). ¿A qué altura debe subir? b) Otra persona consume energía a razón de 150 W durante su trabajo, ¿qué cantidad de pan debe ingerir para poder trabajar durante una hora? (Calor de combustión del pan es 8000 cal/g). Considere que el 25% de la energía liberada del alimento se aprovecha como trabajo útil. R: a) 934 m, b) 64.5 g.
- 13.2 Se acuerdan del problema del Salto del Laja; suponga ahora que el agua en su parte superior tiene una temperatura de 15° C. Si toda su energía potencial se emplea en calentar el agua que cae, calcule la temperatura del agua en la base del salto. R: si altura del salto se estima en 25m, 15.06° C.
- 13.3 Se utilizan 2 kcal para calentar 600 gr de una sustancia desconocida de 15° C a 40° C. Calcular el calor específico de la sustancia. R: 0.13 cal/gr°C.
- 13.4 Un trozo de cadmio de 50 gr tiene una temperatura de 20° C. Si se agregan 400 cal al cadmio, calcular su temperatura final.
- 13.5 A un vaso aislante del calor (de plumavit) que contiene 200 cm<sup>3</sup> de café a la temperatura de 95° C, se le agregan 40 cm<sup>3</sup> de leche que se encuentra a temperatura ambiente. Calcular la temperatura de equilibrio que alcanza la mezcla. (Suponer calor específico de los líquidos igual al del agua y considere un día de primavera).
- 13.6 Al desayunar, usted vierte 50 cm<sup>3</sup> de leche refrigerada en su taza que contiene 150 cm<sup>3</sup> de café recién preparado con agua hirviendo. Calcular la temperatura de equilibrio alcanza esta apetitosa mezcla. (Desprecie la capacidad calórica de la taza). R: 75° C.
- 13.7 Se enfría un bloque de 40 gr de hielo hasta -50° C. Luego se agrega a 500 gr de agua en un calorímetro de 75 gr de cobre a una temperatura

de 25° C. Calcular la temperatura final de la mezcla. Si no se funde todo el hielo, calcular cuanto hielo queda.

- 13.8 En un recipiente aislado se mezclan 150 g de hielo a 0° C y 600 g de agua a 18° C. Calcular: a) la temperatura final del sistema, b) la cantidad de hielo queda cuando el sistema alcanza el equilibrio. R: a) 0° C, b) 14.4 g.
- 13.9 Un recipiente de aluminio de 300g contiene 200g de agua a 10° C. Si se vierten 100 g más de agua, pero a 100° C, calcular la temperatura final de equilibrio del sistema. R: 34.6° C.
- 13.10 Un calorímetro de 50 g de cobre contiene 250 g de agua a 20° C. Calcular la cantidad de vapor que se debe condensar en el agua para que la temperatura del agua llegue a 50° C. R: 12.9 g
- 13.11 Un calorímetro de aluminio con una masa 100 gr contiene 250 gr de agua. Están en equilibrio térmico a 10° C. Se colocan dos bloques de metal en el agua. Uno es 50 gr de cobre a 80° C. El otro una muestra de masa de 70 gr a una temperatura de 100° C. Todo el sistema se estabiliza a una temperatura final de 20° C. Deducir de que material se trata la muestra.
- 13.12 Un envase plumavit contiene 200 g de mercurio a 0° C. Se le agregan 50 g de alcohol etílico a 50° C y 100 g de agua a 100° C. a) Calcular la temperatura final de la mezcla. b) calcular el calor ganado o perdido por el mercurio, alcohol y agua. Desprecie la capacidad térmica del plumavit. R: a) 84.4° C, b) 557 cal, 998 cal, 1560 cal.
- 13.13 Un cubo de hielo de 20 g a 0° C se calienta hasta que 15 g se han convertido en agua a 100° C y el resto en vapor. Calcular el calor necesario para este proceso. R: 21739 J.
- 13.14 Un trozo de cobre de 1 kg y a 20° C se sumerge en un recipiente con nitrógeno líquido hirviendo a 77K. Calcular la cantidad de nitrógeno que se evapora hasta el momento en que el cobre alcanza los 77K. Suponga que el recipiente está aislado térmicamente. R: 941 kg.

- 13.15 La temperatura en áreas costeras se ve influenciada considerablemente por el gran calor específico del agua. Una razón es que el calor liberado cuando un metro cúbico de agua se enfría en  $1^\circ\text{C}$  aumentará la temperatura de un volumen enormemente más grande de aire en  $1^\circ\text{C}$ . Calcule este volumen de aire. El calor específico del aire es aproximadamente  $1\text{ kJ}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$ . Considere la densidad del aire igual a  $1,25\text{ kg}/\text{m}^3$ . R:  $V_{\text{aire}} = 3433 V_{\text{agua}}$ .
- 13.16 Un estudiante inhala aire a  $22^\circ\text{C}$  y lo exhala a  $37^\circ\text{C}$ . El volumen promedio del aire en una respiración es de  $200\text{ cm}^3$ . Ignore la evaporación del agua en el aire y estime la cantidad de calor absorbido en un día por el aire respirado por el estudiante. R:  $3.75\text{ J}$  por respiración.
- 13.17 Un calentador de agua funciona por medio de potencia solar. Si el colector solar tiene un área de  $6\text{ m}^2$  y la potencia entregada por la luz solar es de  $550\text{ W}/\text{m}^2$ , ¿cuál es el tiempo mínimo en aumentar la temperatura de  $1\text{ m}^3$  de agua de  $20^\circ\text{C}$  a  $60^\circ\text{C}$ ? Indique la(s) suposición(es) hecha(s). R: aprox. 14 horas.
- 13.18 Cuando un conductor frena su auto, la fricción entre los tambores y las balatas de los frenos convierten la energía cinética del auto en calor. Si un auto de  $1500\text{ kg}$  que viaja a  $30\text{ m/s}$  y se detiene, ¿cuánto aumenta la temperatura en cada uno de los cuatro tambores de hierro de  $8\text{ kg}$  de los frenos? (desprecie la pérdida de energía hacia los alrededores). R:  $47.1^\circ\text{C}$ .
- 13.19 Dos balas de plomo- c/u de  $5,0\text{ g}$ , a  $20^\circ\text{C}$  y moviéndose a  $400\text{ m/s}$ - chocan de frente. Suponiendo una colisión perfectamente inelástica y que no hay ninguna pérdida de calor hacia la atmósfera, describa el estado final del sistema (las dos balas). R:  $645^\circ\text{C}$ .
- 13.20 Un lago contiene cerca de  $5 \times 10^{11}\text{ m}^3$  de agua. a) ¿Cuánto calor se necesita para elevar la temperatura de ese volumen de agua de  $14.5$  a  $15.5^\circ\text{C}$ ? b) Calcule el tiempo que se requeriría para calentar el lago, entre esas temperaturas, si el calor lo suministra una central eléctrica de  $1000\text{ MW}$ . R: b) aprox. 66 años.
- 13.21 Un mol de gas ideal se calienta lentamente de modo que pasa del estado  $(P_o, V_o)$  al estado  $(3P_o, 3V_o)$ . Este cambio ocurre de tal manera que

la presión del gas es directamente proporcional al volumen. a) Dibujar el diagrama presión versus volumen. b) Calcular el trabajo que realiza el gas en este proceso. Indicar si es positivo o negativo y comente el significado asociado al signo. c) Analizar cómo se relaciona la temperatura del gas con su volumen durante este proceso. R: b)  $4P_oV_o$ , c)  $P_oV^2/n(PM)V_o$ , donde (PM) es el peso molecular del gas.

13.22 La figura 13.13 representa la variación del volumen y la presión de un gas cuando se expande desde  $1 \text{ m}^3$  a  $6 \text{ m}^3$ . a) Calcular el trabajo realizado por el gas durante el proceso, b) analizar lo que le ocurre a la temperatura durante el proceso. R: 1418.2 J.

13.23 Un gas está a una presión de 1.5 atm y a un volumen de  $4 \text{ m}^3$ . Calcular el trabajo realizado por el gas cuando: a) se expande a una presión constante hasta el doble de su volumen inicial y b) se comprime a presión constante hasta un cuarto de su volumen inicial. R: a)  $6.1 \times 10^5 \text{ J}$ , b)  $-4.6 \times 10^5 \text{ J}$ .

13.24 Un gas ideal está encerrado en un cilindro que tiene un émbolo móvil en su parte superior, de masa 8 kg y área de  $5 \text{ cm}^2$ , libre de moverse, manteniendo la presión del gas constante. Calcular el trabajo si la temperatura de 2 moles de gas aumenta de  $20^\circ$  a  $300^\circ \text{ C}$ . R: 4698 J.

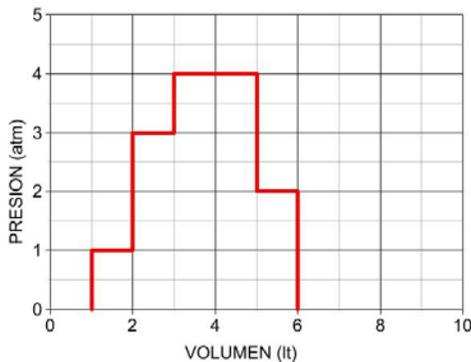


Figura 13.13. Problema 13.22

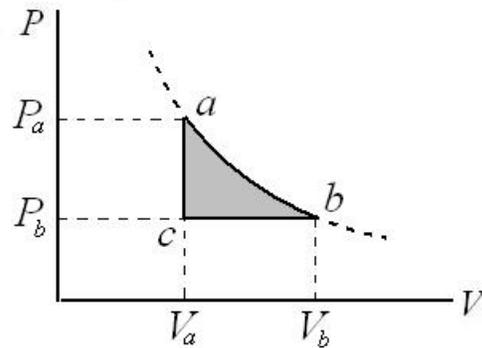


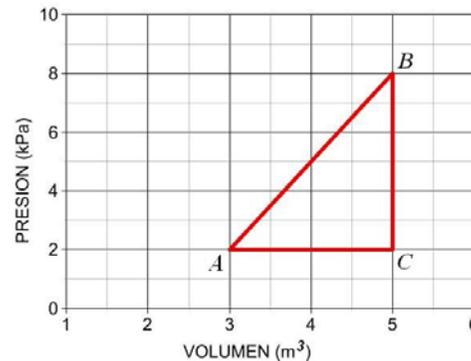
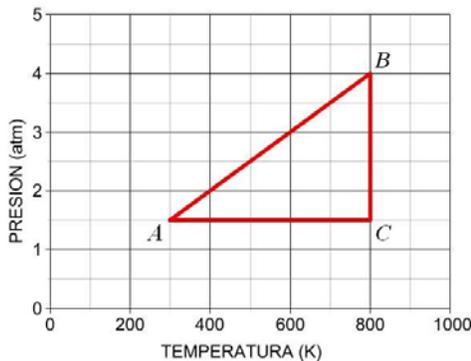
Figura 13.14 Problemas 13.25 y 13.37.

13.25 Una muestra de gas ideal de un mol se lleva a través de un proceso termodinámico cíclico, como se muestra en la figura 13.14 El ciclo consta de tres partes: una expansión isotérmica ab, una compresión isobárica bc y un aumento de presión a volumen constante ca. Si  $T = 300 \text{ K}$ ,  $P_a = 5 \text{ atm}$ ,  $P_b = P_c = 1 \text{ atm}$ , calcular el trabajo realizado por el gas durante el ciclo.

- 13.26 Una muestra de gas ideal se expande al doble de su volumen inicial de  $0.1 \text{ m}^3$  en un proceso para el cual  $P = aV^2$ , con  $a = 2 \text{ atm/m}^6$ . a) Bosquejar un gráfico en un diagrama PV. b) Calcular el trabajo realizado por el gas durante la expansión.
- 13.27 Un gas ideal que se encuentra a  $1 \text{ atm}$  y  $0^\circ \text{ C}$ , se expande desde un volumen de  $25 \text{ lt}$  hasta  $80 \text{ lt}$ , en un proceso en el cual  $P = 0.5a/V^2$ . a) Bosquejar un gráfico en un diagrama PV. Calcular: b) la constante  $a$  en el SI, c) la temperatura y presión final, d) el trabajo realizado en la expansión. R: b)  $126.6 \text{ Pa/m}^3$ , c) presión:  $63.3 \text{ Pa/V}^2$ , d)  $3437.5 \text{ J}$ .
- 13.28 Un mol de vapor de agua a  $373 \text{ K}$  se enfría a  $283 \text{ K}$ . El calor entregado por el vapor del agua que se enfría lo absorben  $10$  moles de un gas ideal, haciendo que el gas se expanda a una temperatura constante de  $273 \text{ K}$ . Si el volumen final del gas ideal es de  $20 \text{ lt}$ , determine su volumen inicial. R:  $2.9$  litros.
- 13.29 Un mol de gas ideal realiza  $3000 \text{ J}$  de trabajo mientras se expande isotérmicamente hasta una presión final de  $1 \text{ atm}$  y un volumen de  $25$  litros. Calcular: a) su volumen inicial, b) la temperatura del gas, c) el cambio de energía interna que experimenta, indicando si aumenta o disminuye, d) el calor absorbido o cedido. R: a)  $7.6 \text{ lt}$ , b)  $304 \text{ K}$ , c)  $0 \text{ J}$ , d)  $3000 \text{ J}$ .
- 13.30 Un gas ideal inicialmente a  $300 \text{ K}$  se expande en forma isobárica a una presión de  $2.5 \text{ kPa}$ . Si el volumen aumenta de  $1 \text{ m}^3$  a  $3 \text{ m}^3$  y se agregan  $12500 \text{ J}$  de calor al sistema, calcular: a) el cambio de energía interna, b) su temperatura final. R: a)  $7500 \text{ J}$ , b)  $900 \text{ K}$ .
- 13.31 Se comprime un gas a presión constante de  $0.8 \text{ atm}$  de un volumen de  $9 \text{ lt}$  a un volumen de  $2 \text{ lt}$ . En el proceso se escapan del gas  $400 \text{ J}$  de energía calórica. Calcular: a) el trabajo realizado por el gas, b) el cambio de energía interna del gas. R: a)  $-567 \text{ J}$ , b)  $167 \text{ J}$ .
- 13.32 Un mol gas ideal monoatómico se somete al ciclo ABC mostrado en la figura 13.15. Si  $P_A = 1.5 \text{ atm}$  y  $T_B = T_C = 800 \text{ K}$ , a) identificar las características de cada proceso que compone el ciclo y dibujar el diagrama PV que le corresponde, indicando los valores de las variables de

estado al comienzo y final de cada proceso. b) Calcular para cada proceso el trabajo hecho por el gas, el calor absorbido o cedido, el cambio de energía interna del gas. c) Averiguar para el ciclo completo qué ocurre con  $U$ ,  $W$  y  $Q$ . R: a)  $V_A = 16.4 \text{ lt} = V_B$ ,  $V_C = 43.7 \text{ lt}$ , b)  $W_{AB} = 0$ ,  $W_{BC} = 6504 \text{ J}$ ,  $W_{CA} = 4148.5 \text{ J}$ ,  $W_{TOTAL} = 2355.7 \text{ J}$ .

- 13.33 Un gas se lleva a través de un proceso cíclico como el de la figura 13.16. a) Calcular el calor neto transferido al sistema durante el ciclo completo. b) Si el ciclo se invierte, ¿cuál es el calor neto transferido por ciclo? R: a) 6000 J, b) -6000 J.



- 13.34 Un bloque de 1 kg de aluminio se calienta a presión atmosférica de modo que su temperatura aumenta desde  $22^\circ \text{ C}$  hasta  $40^\circ \text{ C}$ . Calcular: a) el trabajo realizado por el aluminio, b) la energía térmica que se le entrega, y c) el cambio de su energía interna. R: a) 0.051 J, b) 16200 J, c) 16199.9 J.

- 13.35 Un mol de gas ideal monoatómico se somete al proceso cíclico ABCA mostrado en la figura 13.17. a) Calcular la energía térmica transferida al sistema, el trabajo hecho por el sistema y el cambio de energía interna durante cada etapa del ciclo y para el ciclo completo. b) Si el ciclo se invierte, calcular cada una de dichas variables.

- 13.36 Un mol de gas inicialmente a una presión de 2 atm y a un volumen de 0.3 lt, tiene una energía interna de 91 J. En su estado final, la presión es de 1.5 atm, el volumen de 0.8 lt y la energía interna de 182 J. Para los tres caminos IAF, IBF e IF de la figura 13.18, calcular a) el trabajo realizado por el gas, b) el calor neto transferido en el proceso. R: a) 76 J, 101 J, 88.6 J, b) 167 J, 192 J, 180 J.

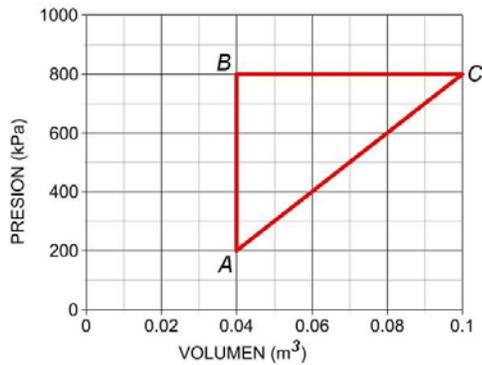


Figura 13.17. Problema 13.35

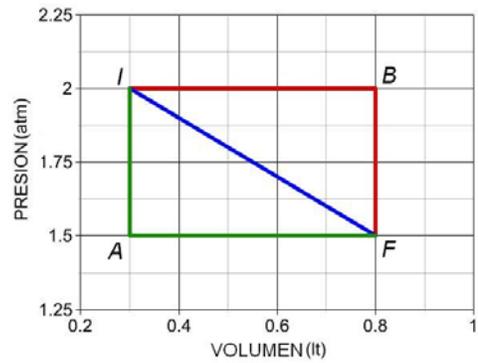


Figura 13.18. Problema 13.36

- 13.37 Un mol de gas ideal monoatómico se lleva por un proceso isotérmico, de 400 K, al doble de su volumen original (figura 13.14). Calcular: a) el trabajo que realizó el gas, b) el calor que se le entregó al gas, c) la variación de energía interna del gas, d) la razón de presiones  $P_b/P_a$ . Suponga que ahora se realiza un proceso (de  $a$  a  $c$ ) a volumen constante para reducir la presión inicial  $P_a$  a  $P_b$ , calcular los nuevos valores de trabajo, calor y variación de energía interna.
- 13.38 Calcular el cambio de energía interna de 3 moles de helio cuando su temperatura aumenta en 2 K. R: 75 J.
- 13.39 La capacidad calórica de un gas monoatómico a presión constante es 62.3 J/molK. Calcular: a) el número de moles del gas, b) la capacidad calórica a volumen constante, c) la energía interna del gas a 350K. R: a) 3 moles, b) 37.4 J/K, c) 13100 J.
- 13.40 Un mol de hidrógeno se calienta a presión constante de 0 a 100° C. Calcular: a) el calor transferido al gas, b) el aumento de energía interna, c) el trabajo realizado por el gas.
- 13.41 En un proceso a volumen constante, se transfieren 210J de calor a un mol de un gas ideal monoatómico inicialmente a 27° C. Calcular: a) el aumento de energía interna, b) el trabajo realizado por el gas, c) la temperatura final del gas.
- 13.42 Dos moles de un gas ideal ( $\gamma=1.4$ ) se expanden adiabáticamente desde una presión de 5 atm y un volumen de 12 lt a un volumen final de 30

- lt. Calcular: a) la presión final del gas, b) las temperaturas inicial y final del gas. R: a) 1.4 atm, b) 365.8 K, 256.1 K.
- 13.43 Un gas ideal ( $\gamma=1.4$ ) se expande adiabáticamente. Si la temperatura final es un tercio de la inicial, determinar a) en que factor cambia el volumen, b) en que factor cambia la presión. R: a) 15.6, b) 0.0214.
- 13.44 Un mol de gas ideal monoatómico ( $\gamma=1.4$ ) inicialmente a  $27^\circ\text{C}$  y a la presión de 1 atm se comprime adiabáticamente a un cuarto de su volumen inicial. Calcular la presión y la temperatura final del gas.
- 13.45 Durante el tiempo de compresión de un motor de bencina, la presión aumenta de 1 a 20 atm. Suponiendo que el proceso es adiabático y el gas ideal, con  $\gamma = 1.4$ . Calcular el volumen y la temperatura final del gas. R:  $8.5V_i$ ,  $2.3T_i$ .
- 13.46 Un globo sonda meteorológico expande su volumen al ascender en la atmósfera. Si la temperatura inicial del gas dentro del globo era de  $27^\circ\text{C}$ , calcular su temperatura cuando el volumen se ha duplicado. R: 229 K.
- 13.47 Calcular el trabajo que se requiere para comprimir a  $1/10$  de su volumen inicial, 5 moles de aire a  $20^\circ\text{C}$  y 1 atm de presión por un proceso: a) isotérmico, b) adiabático. c) Calcular las presiones finales en los dos casos.
- 13.48 3 moles de gas argón inicialmente a la temperatura de  $20^\circ\text{C}$ , ocupan un volumen de 10 lt. El gas experimenta una expansión a presión constante hasta un volumen de 20 lt; luego se expande en forma adiabática hasta que regresa a su temperatura inicial. a) graficar el proceso en un diagrama  $PV$ . Calcular: b) la cantidad de calor que se le entregó al gas durante todo el proceso, c) el cambio total en la energía interna del gas, d) el trabajo total realizado durante el proceso, e) el volumen final del gas.

## CAPITULO 14. MECANISMOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR.

### 14.1 CALOR Y TEMPERATURA.

Calor y temperatura son conceptos que en el lenguaje cotidiano se confunden, pero son diferentes. Por ejemplo la frase “uuuufff, que hace calor” es una expresión común para referirnos al concepto de temperatura, a pesar de que mencionamos la palabra calor.

La temperatura es una magnitud física que se refiere a la sensación de frío o caliente al tocar alguna sustancia. En cambio el calor es una transferencia de energía de una parte a otra de un cuerpo, o entre diferentes cuerpos, producida por una diferencia de temperatura. El calor es energía en tránsito; siempre fluye de una zona de mayor temperatura a otra de menor temperatura, con lo que eleva la temperatura de la zona más fría y reduce la de la zona más cálida, siempre que el volumen de los cuerpos se mantenga constante. La energía no fluye desde un objeto de temperatura baja a otro de temperatura alta si no se realiza trabajo. La materia está formada por átomos o moléculas que están en constante movimiento, por lo tanto tienen energía de posición o potencial y energía de movimiento o cinética. Los continuos choques entre los átomos o moléculas transforman parte de la energía cinética en calor, cambiando la temperatura del cuerpo.

#### *Calor.*

*El calor se define como la energía cinética total de todos los átomos o moléculas de una sustancia.*

#### *Temperatura.*

*La temperatura es una medida de la energía cinética promedio de los átomos y moléculas individuales de una sustancia.* Cuando se agrega calor a una sustancia, sus átomos o moléculas se mueven más rápido y su temperatura se eleva, o viceversa.

Cuando dos cuerpos que tienen distintas temperaturas se ponen en contacto entre sí, se produce una *transferencia de calor* desde el cuerpo de mayor tem-

peratura al de menor temperatura. La transferencia de calor se puede realizar por tres mecanismos físicos: conducción, convección y radiación, que se ilustran en la figura 14.1.

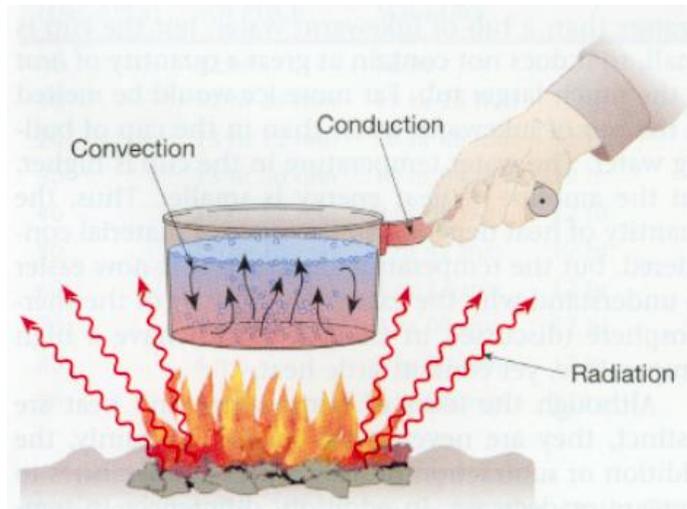


Figura 14.1 Esquema de los mecanismos de transferencia de calor.

## 14.2 CONDUCCION DE CALOR.

La conducción es el mecanismo de transferencia de calor en escala atómica a través de la materia por actividad molecular, por el choque de unas moléculas con otras, donde las partículas más energéticas le entregan energía a las menos energéticas, produciéndose un flujo de calor desde las temperaturas más altas a las más bajas. Los mejores conductores de calor son los metales. El aire es un mal conductor del calor. Los objetos malos conductores como el aire o plásticos se llaman aislantes.

La conducción de calor sólo ocurre si hay diferencias de temperatura entre dos partes del medio conductor. Para un volumen de espesor  $\Delta x$ , con área de sección transversal  $A$  y cuyas caras opuestas se encuentran a diferentes  $T_1$  y  $T_2$ , con  $T_2 > T_1$ , como se muestra en la figura 14.2, se encuentra que el calor  $\Delta Q$  transferido en un tiempo  $\Delta t$  fluye del extremo caliente al frío. Si se llama  $H$  (en Watts) al calor transferido por unidad de tiempo, la rapidez de transferencia de calor  $H = \Delta Q/\Delta t$ , está dada por la **ley de la conducción de calor de Fourier**.

$$H = \frac{dQ}{dt} = -kA \frac{dT}{dx} \quad (14.1)$$

donde  $k$  (en  $W/mK$ ) se llama **conductividad térmica** del material, magnitud que representa la capacidad con la cual la sustancia conduce calor y produce la consiguiente variación de temperatura; y  $dT/dx$  es el gradiente de temperatura. El signo menos indica que la conducción de calor es en la dirección decreciente de la temperatura. En la tabla 14.1 se listan valores de conductividades térmicas para algunos materiales, los altos valores de conductividad de los metales indican que son los mejores conductores del calor.

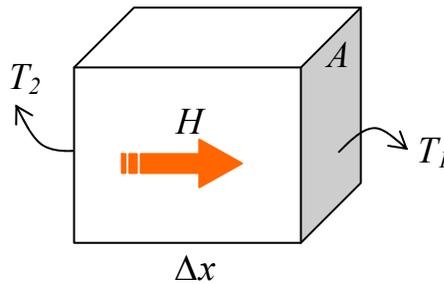


Figura 14.2

Tabla 14.1 Algunos valores de conductividades térmicas.

Metales, a 25°C		Gases, a 20°C		Otros materiales	
Sustancia	k (W/mK)	Sustancia	k (W/mK)	Sustancia	k (W/mK)
Aluminio	238	Aire	0.0234	Asbesto	0.08
Cobre	397	Helio	0.138	Concreto	0.8
Oro	314	Hidrógeno	0.172	Diamante	2300
Hierro	79.5	Nitrógeno	0.0234	Vidrio	0.84
Plomo	34.7	Oxígeno	0.0238	Hule	0.2
Plata	427			Madera	0.08 a 0.16
Latón	110			Corcho,	0.42
				Tejido humano	0.2
				Agua	0.56
				Hielo	2

Si un material en forma de barra uniforme de largo  $L$ , protegida en todo su largo por un material aislante, como se muestra en la figura 14.3, cuyos extremos de área  $A$  están en contacto térmico con fuentes de calor a temperaturas  $T_2$  y  $T_1$ , cuando se alcanza el estado de equilibrio térmico, la temperatura

a lo largo de la barra es constante. En ese caso el gradiente de temperatura es el mismo en cualquier lugar a lo largo de la barra, y la ley de conducción de calor de Fourier se puede escribir en la forma:

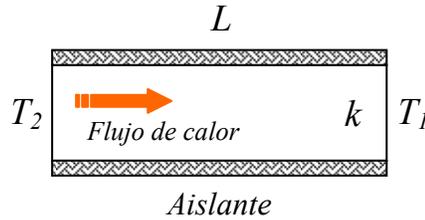


Figura 14.3

$$H = kA \frac{(T_2 - T_1)}{L} \quad (14.2)$$

Ejemplo 14.1. Dos placas de espesores  $L_1$  y  $L_2$  y conductividades térmicas  $k_1$  y  $k_2$  están en contacto térmico, como en la figura 14.4. Las temperaturas de las superficies exteriores son  $T_1$  y  $T_2$ , con  $T_2 > T_1$ . Calcular la temperatura en la interfase y la rapidez de transferencia de calor a través de las placas cuando se ha alcanzado el estado estacionario.

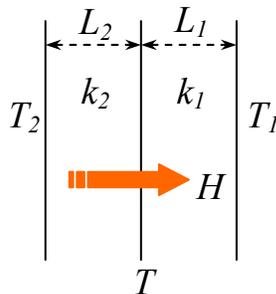


Figura 14.4 Ejemplo 14.1

Solución: si  $T$  es la temperatura en la interfase, entonces la rapidez de transferencia de calor en cada placa es:

$$H_1 = k_1 A \frac{(T - T_1)}{L_1} \quad \text{y} \quad H_2 = k_2 A \frac{(T_2 - T)}{L_2}$$

Cuando se alcanza el estado estacionario, estos dos valores son iguales:

$$H_1 = H_2 \Rightarrow k_1 A \frac{(T - T_1)}{L_1} = k_2 A \frac{(T_2 - T)}{L_2}$$

Despejando la temperatura  $T$ :

$$T = \frac{k_1 T_1 L_2 + k_2 T_2 L_1}{k_1 L_2 + k_2 L_1}$$

Y la transferencia de calor  $H_1$  o  $H_2$  es:

$$H_1 = \frac{A(T_2 - T_1)}{L_1/k_1 + L_2/k_2}$$

Ejemplo 14.2 Una barra de oro está en contacto térmico con una barra de plata, una a continuación de la otra, ambas de la misma longitud y área transversal (figura 14.5). Un extremo de la barra compuesta se mantiene a  $T_1 = 80^\circ \text{C}$  y el extremo opuesto a  $T_2 = 30^\circ \text{C}$ . Calcular la temperatura de la unión cuando el flujo de calor alcanza el estado estacionario.

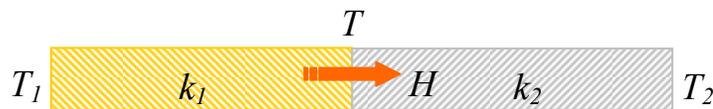


Figura 14.5. Ejemplo 14.2

Solución: similar al ejemplo anterior, con  $L_1 = L_2 = L$ :

$$H_{oro} = k_1 A \frac{(T_1 - T)}{L} \quad \text{y} \quad H_{plata} = k_2 A \frac{(T - T_2)}{L}$$

Cuando se alcanza el estado estacionario, estos dos valores son iguales:

$$H_{oro} = H_{plata} \Rightarrow k_1 A \frac{(T_1 - T)}{L} = k_2 A \frac{(T - T_2)}{L}$$

$$k_1(T_1 - T) = k_2(T - T_2)$$

Despejando la temperatura  $T$ , con  $k_1$  del oro y  $k_2$  de la plata, valores obtenidos de la tabla 14.1:

$$T = \frac{k_1 T_1 + k_2 T_2}{k_1 + k_2} = \frac{314 \times 353 + 427 \times 303}{314 + 427} = 324.2 K = 51.2^\circ C$$

### 14.3 CONVECCION.

La convección es el mecanismo de transferencia de calor por movimiento de masa o circulación dentro de la sustancia. Puede ser natural producida solo por las diferencias de densidades de la materia; o forzada, cuando la materia es obligada a moverse de un lugar a otro, por ejemplo el aire con un ventilador o el agua con una bomba. Sólo se produce en líquidos y gases donde los átomos y moléculas son libres de moverse en el medio.

En la naturaleza, la mayor parte del calor ganado por la atmósfera por conducción y radiación cerca de la superficie, es transportado a otras capas o niveles de la atmósfera por convección.

Un modelo de transferencia de calor  $H$  por convección, llamado *ley de enfriamiento de Newton*, es el siguiente:

$$H = h A (T_A - T) \tag{14.3}$$

donde  $h$  se llama coeficiente de convección, en  $W/(m^2K)$ ,  $A$  es la superficie que entrega calor con una temperatura  $T_A$  al fluido adyacente, que se encuentra a una temperatura  $T$ , como se muestra en el esquema de la figura 14.6. La tabla 14.2 lista algunos valores aproximados de coeficiente de convección  $h$ .

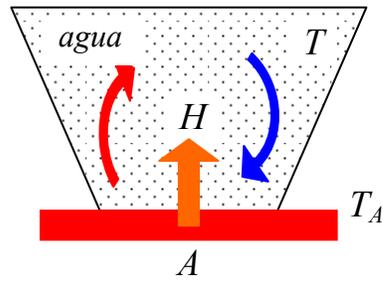


Figura 14.6. Proceso de convección.

El flujo de calor por convección es positivo ( $H > 0$ ) si el calor se transfiere desde la superficie de área  $A$  al fluido ( $T_A > T$ ) y negativo si el calor se transfiere desde el fluido hacia la superficie ( $T_A < T$ ).

Tabla 14.2. Valores típicos de coeficiente de convección.

Proceso	$h$ (W/m <sup>2</sup> K)
<b>Convección libre</b>	
Gases	2 - 25
Líquidos	50 - 1000
<b>Convección forzada</b>	
Gases	25 - 250
Líquidos	50 - 20000

Ejemplo 14.3. El vidrio de una ventana se encuentra a 10° C y su área es 1.2 m<sup>2</sup>. Si la temperatura del aire exterior es 0° C, calcular la energía que se pierde por convección cada segundo. Considerar  $h = 4$  W/(m<sup>2</sup>K).

Solución: Los datos son:  $T_A = 10^\circ C = 283K$ ,  $T = 0^\circ C = 273K$ ,  $A = 1.2$  m<sup>2</sup>. Usando la ley de enfriamiento de Newton:

$$H = h A (T_A - T)$$

$$H = 4 \frac{W}{m^2 K} \times 1.2 m^2 (283 - 273) K = 48 W$$

### 14.4 RADIACION.

La radiación térmica es energía emitida por la materia que se encuentra a una temperatura dada, se produce directamente desde la fuente hacia afuera en todas las direcciones. Esta energía es producida por los cambios en las configuraciones electrónicas de los átomos o moléculas constitutivos y transportada por ondas electromagnéticas o fotones, por lo recibe el nombre de **radiación electromagnética**. La masa en reposo de un fotón (que significa luz) es idénticamente nula. Por lo tanto, atendiendo a relatividad especial, un fotón viaja a la velocidad de la luz y no se puede mantener en reposo. (La trayectoria descrita por un fotón se llama rayo). La radiación electromagnética es una combinación de campos eléctricos y magnéticos oscilantes y perpendiculares entre sí, que se propagan a través del espacio transportando energía de un lugar a otro.

A diferencia de la conducción y la convección, o de otros tipos de onda, como el sonido, que necesitan un medio material para propagarse, la radiación electromagnética es independiente de la materia para su propagación, de hecho, la transferencia de energía por radiación es más efectiva en el vacío. Sin embargo, la velocidad, intensidad y dirección de su flujo de energía se ven influidos por la presencia de materia. Así, estas ondas pueden atravesar el espacio interplanetario e interestelar y llegar a la Tierra desde el Sol y las estrellas. La longitud de onda ( $\lambda$ ) y la frecuencia ( $\nu$ ) de las ondas electromagnéticas, relacionadas mediante la expresión  $\lambda\nu = c$ , son importantes para determinar su energía, su visibilidad, su poder de penetración y otras características. Independientemente de su frecuencia y longitud de onda, todas las ondas electromagnéticas se desplazan en el vacío con una rapidez constante  $c = 299792$  km/s, llamada velocidad de la luz.

Los fotones son emitidos o absorbidos por la materia. La longitud de onda de la radiación está relacionada con la energía de los fotones, por una ecuación desarrollada por Planck:

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad (14.4)$$

donde  $h$  se llama constante de Planck, su valor es  $h = 6,63 \times 10^{-34}$  Js.

**14.4.1 Espectro de radiación.**

Atendiendo a su longitud de onda, la radiación electromagnética recibe diferentes nombres, y varía desde los energéticos rayos gamma, con una longitud de onda muy corta del orden de picómetros (frecuencias muy altas) hasta las ondas de radio con longitudes de onda muy largas del orden de kilómetros (frecuencias muy bajas), pasando por la luz visible, cuya longitud de onda está en el rango de las décimas de micrómetro. El rango completo de longitudes de onda es lo que se denomina el espectro electromagnético, que se muestra en la figura 14.7. Esta variación es porque las fuentes que producen las ondas son completamente diferentes. El espectro electromagnético no tiene definidos límites superior ni inferior.

La *luz*, llamada también *luz visible* o *luz blanca*, es uno de los componentes del espectro electromagnético, y se define como aquella parte del espectro de radiación que puede percibir la sensibilidad del ojo humano. La luz visible es un minúsculo intervalo que va desde la longitud de onda correspondiente al color violeta (aproximadamente 400 nm) hasta la longitud de onda correspondiente al color rojo (aproximadamente 700 nm).

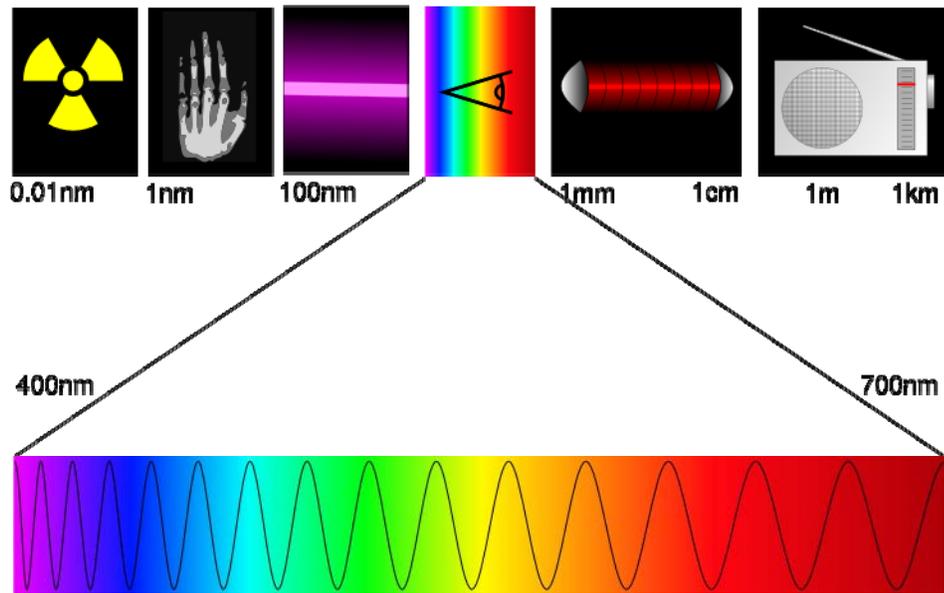


Figura 14.7. Espectro electromagnético y región visible (inferior).

Por orden creciente de longitudes de onda (o decreciente de frecuencias), el espectro electromagnético está compuesto por rayos gamma, rayos X duros y blandos, radiación ultravioleta, luz visible, rayos infrarrojos, microondas y ondas de radio. Los rayos gamma y los rayos X duros tienen una longitud de onda de entre  $5 \times 10^{-6}$  y  $5 \times 10^{-4}$  micrómetros (un micrómetro, símbolo  $\mu\text{m}$ , es una millonésima de metro). Los rayos X blandos se superponen con la radiación ultravioleta en longitudes de onda próximas a los  $5 \times 10^{-2}$   $\mu\text{m}$ . La región ultravioleta, a su vez, da paso a la luz visible, que va aproximadamente desde 0.4 hasta 0.8  $\mu\text{m}$ . Los rayos infrarrojos se mezclan con las frecuencias de microondas, entre los 100 y 400  $\mu\text{m}$ . Desde esta longitud de onda hasta unos 15.000 m, el espectro está ocupado por las diferentes ondas de radio; más allá de la zona de radio, el espectro entra en las bajas frecuencias, cuyas longitudes de onda llegan a medirse en decenas de miles de kilómetros. La tabla 14.3 muestra el espectro electromagnético, con sus longitudes de onda, frecuencias y energías del fotón.

Tabla 14.3. Espectro electromagnético.

	<b>Longitud de onda</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Energía (J)</b>
Rayos gamma	< 10 pm	>30.0 EHz	> $19.9 \times 10^{-15}$
Rayos X	< 10 nm	>30.0 PHz	> $19.9 \times 10^{-18}$
Ultravioleta Extremo	< 200 nm	>1.5 PHz	> $993 \times 10^{-21}$
Ultravioleta Cercano	< 380 nm	>789 THz	> $523 \times 10^{-21}$
Luz Visible	< 780 nm	>384 THz	> $255 \times 10^{-21}$
Infrarrojo Cercano	< 2.5 $\mu\text{m}$	>120 THz	> $79.5 \times 10^{-21}$
Infrarrojo Medio	< 50 $\mu\text{m}$	>6.00 THz	> $3.98 \times 10^{-21}$
Infrarrojo Lejano	< 1 mm	>300 GHz	> $199 \times 10^{-24}$
Microondas	< 30 cm	>1.0 GHz	> $1.99 \times 10^{-24}$
Ultra Alta Frecuencia Radio	< 1 m	>300 MHz	> $1.99 \times 10^{-25}$
Muy Alta Frecuencia Radio	< 10 m	>30 MHz	> $2.05 \times 10^{-26}$
Onda Corta Radio	< 180 m	>1.7 MHz	> $1.13 \times 10^{-27}$
Onda Media (AM) Radio	< 650 m	>650 kHz	> $4.31 \times 10^{-28}$
Onda Larga Radio	< 10 km	>30 kHz	> $1.98 \times 10^{-29}$
Muy Baja Frecuencia Radio	> 10 km	<30 kHz	< $1.99 \times 10^{-29}$

La radiación del Sol es emitida en todas las longitudes de onda, pero tiene un máximo en la región de luz visible. La luz visible está compuesta por varios colores, que cuando se mezclan forman la luz blanca. Cada uno de los colores tiene una longitud de onda específica, con límites entre 0.4 y 0.7  $\mu\text{m}$ . Considerando desde las longitudes de onda más cortas a las más largas, los diferentes colores tienen los valores centrales de longitudes de onda que se indican en la tabla 14.4. Estos colores están dentro de un rango de longitudes de onda, por ejemplo el violeta está en el rango entre 0.4 y 0.45  $\mu\text{m}$ . Son los colores que forman el arcoiris. En sus extremos se tienen el ultravioleta y el infrarrojo. La mayor cantidad de energía radiante del Sol se concentra en el rango de longitudes de onda del visible y visible cercano del espectro, con las siguientes proporciones: luz visible 43%, infrarrojo cercano 49%, ultravioleta 7%, y el 1% restante en otros rangos.

Tabla 14.4 Colores del espectro visible y sus extremos.

Color	$\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )
Ultravioleta	< 0.35
Violeta	0.4
Azul	0.45
Verde	0.5
Amarillo	0.55
Naranja	0.6
Rojo	0.7
Infrarrojo	> 0.75

#### 14.4.2. Penetración de la radiación electromagnética.

Cuando la frecuencia es inferior a la frecuencia de la radiación ultravioleta, los fotones no tienen suficiente energía para romper enlaces atómicos. Se dice entonces que la radiación es radiación no ionizante. A partir de los rayos ultravioleta, vienen los Rayos X y los Rayos gamma, muy energéticos y capaces de romper moléculas, dicha radiación se denomina radiación ionizante.

La radiación electromagnética reacciona de manera desigual en función de su frecuencia y del material con el que entra en contacto. El nivel de penetración de la radiación electromagnética es inversamente proporcional a su frecuencia. Cuando la radiación electromagnética es de baja frecuencia, atraviesa limpia-

mente las barreras a su paso. Cuando la radiación electromagnética es de alta frecuencia reacciona más con los materiales que tiene a su paso. En función de la frecuencia, las ondas electromagnéticas pueden no atravesar medios conductores. Esta es la razón por la cual las transmisiones de radio no funcionan bajo el mar y los teléfonos móviles se queden sin cobertura dentro de una caja de metal. Sin embargo, como la energía ni se crea ni se destruye, sino que se transforma, cuando una onda electromagnética choca con un conductor pueden suceder dos cosas. La primera es que se transformen en calor: este efecto tiene aplicación en los hornos de microondas. La segunda es que se reflejen en la superficie del conductor (como en un espejo).

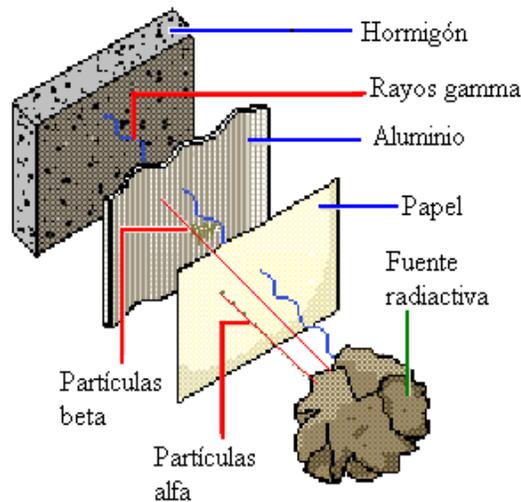


Figura 14.8. Poder de penetración de la radiación.

La radiación de partículas también puede ser ionizante si tiene suficiente energía. Algunos ejemplos de radiación de partículas son los rayos cósmicos, los rayos alfa o los rayos beta. Los **rayos cósmicos** son chorros de núcleos cargados positivamente, en su mayoría núcleos de hidrógeno (protones). Los rayos cósmicos también pueden estar formados por electrones, rayos gamma, piones y muones. Los **rayos alfa** son chorros de núcleos de helio positivamente cargados, generalmente procedentes de materiales radiactivos. Los **rayos beta** son corrientes de electrones, también procedentes de fuentes radiactivas. La radiación ionizante tiene propiedades penetrantes, importantes en el estudio y utilización de materiales radiactivos. Los rayos alfa de origen natural son frenados por un par de hojas de papel o unos guantes de goma. Los rayos beta son detenidos por unos pocos centímetros de madera. Los rayos gamma y los

rayos X, según sus energías, exigen un blindaje grueso de material pesado como hierro, plomo u hormigón, como se muestra en la figura 14.8. También existe la radiación mecánica, que corresponde a ondas que sólo se transmiten a través de la materia, como las ondas de sonido.

### 14.4.3 Leyes de radiación.

#### **Ley de Stefan.**

Todos los objetos emiten energía radiante, cualquiera sea su temperatura, por ejemplo el Sol, la Tierra, la atmósfera, los Polos, las personas, etc. La energía radiada por el Sol a diario afecta nuestra existencia en diferentes formas. Esta influye en la temperatura promedio de la tierra, las corrientes oceánicas, la agricultura, el comportamiento de la lluvia, etc.

Considerar la transferencia de radiación por una superficie de área  $A$ , que se encuentra a una temperatura  $T$ . La radiación que emite la superficie, se produce a partir de la energía térmica de la materia limitada por la superficie. La rapidez a la cual se libera energía se llama potencia de radiación  $H$ , su valor es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta. Esto se conoce como la **ley de Stefan** (Joseph Stefan, austriaco, 1835-1893), que se escribe como:

$$H = \varepsilon \sigma A T^4 \quad (14.5)$$

donde  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$  se llama constante de **Stefan-Boltzmann** (Ludwing Boltzmann, austriaco, 1844-1906) y  $\varepsilon$  es una propiedad radiativa de la superficie llamada emisividad, sus valores varían en el rango  $0 < \varepsilon < 1$ , es una medida de la eficiencia con que la superficie emite energía radiante, depende del material.

Un cuerpo emite energía radiante con una rapidez dada por la ecuación 14.5, pero al mismo tiempo absorbe radiación; si esto no ocurriera, el cuerpo en algún momento irradiaría toda su energía y su temperatura llegaría al cero absoluto. La energía que un cuerpo absorbe proviene de sus alrededores, los cuales también emiten energía radiante. Si un cuerpo se encuentra a temperatura  $T$  y

el ambiente a una temperatura  $T_o$ , la energía neta ganada o perdida por segundo como resultado de la radiación es:

$$H_{neta} = \varepsilon\sigma A(T^4 - T_o^4) \quad (14.6)$$

Cuando el cuerpo está en equilibrio con los alrededores, irradia y absorbe la misma cantidad de energía, por lo tanto su temperatura permanece constante. Cuando el cuerpo está más caliente que el ambiente, irradia más energía de la que absorbe, y por lo tanto se enfría.

Un absorbedor perfecto se llama **cuerpo negro** (no significa que sea de color negro), que se define como un objeto ideal que absorbe toda la radiación que llega a su superficie y su emisividad es igual a uno. No se conoce ningún objeto así, aunque una superficie de negro de carbono puede llegar a absorber aproximadamente un 97% de la radiación incidente. El Sol, la Tierra, la nieve, etc. bajo ciertas condiciones se comportan como un cuerpo negro. En teoría, un cuerpo negro sería también un emisor perfecto de radiación, y emitiría a cualquier temperatura la máxima cantidad de energía disponible. A una temperatura dada, emitiría una cantidad definida de energía en cada longitud de onda. En contraste, un cuerpo cuya emisividad sea igual a cero, no absorbe la energía incidente sobre el, sino que la refleja toda, es un reflector perfecto. Los cuerpos con emisividades entre 0 y 1 se llaman cuerpos grises, son los objetos reales. A raíz del fracaso de los intentos de calcular la radiación de un cuerpo negro ideal según la física clásica, se desarrollaron por primera vez los conceptos básicos de la teoría cuántica. Una buena aproximación de un cuerpo negro es el interior de un objeto hueco, como se muestra en la figura 14.9. La naturaleza de la radiación emitida por un cuerpo hueco a través de un pequeño agujero sólo depende de la temperatura de las paredes de la cavidad.

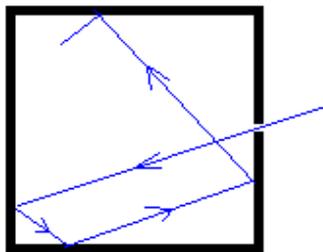


Figura 14.9. Representación de un cuerpo negro.

Ejemplo 14.4. Una carretera de superficie ennegrecida a una temperatura de 320 K recibe energía radiante del Sol por un valor de  $700 \text{ W/m}^2$ . Calcular la radiación neta ganada por cada  $\text{m}^2$  de la superficie de la carretera.

Solución: la energía que emite la superficie de la carretera es:

$$H = \varepsilon\sigma AT^4$$

$$H = 1 \times 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} A(320\text{K})^4 \Rightarrow \frac{H}{A} = 594.5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Como del Sol recibe  $700 \text{ W/m}^2$ , la radiación neta es:

$$\frac{H}{A} \text{ neta} = 700 - 594.5 = 105.5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

### **Ley de Wien.**

La figura 14.10 muestra la curva típica de la intensidad de radiación de un cuerpo negro en función de la longitud de onda de la radiación emitida, para diferentes valores de temperatura indicados como frío, templado y cálido. De acuerdo a la teoría cuántica, se encuentra que los cuerpos a una temperatura determinada, emiten radiación con un valor máximo para una longitud de onda  $\lambda$  dada. Al aumentar la temperatura de un cuerpo negro, la cantidad de energía que emite se incrementa. También, al subir la temperatura, el máximo de la distribución de energía se desplaza hacia las longitudes de onda más cortas. Se encontró que este corrimiento obedece a la siguiente relación, llamada ley del desplazamiento de Wien (Wilhelm Wien, alemán, 1864-1928):

$$\lambda_{max}T = 2897 \tag{14.7}$$

donde  $\lambda_{max}$  es la longitud de onda que corresponde al máximo de la curva de radiación (figura 14.10), en  $\mu\text{m}$ , y T es la temperatura absoluta del objeto que emite la radiación. La ley de Wien afirma que para la radiación de un cuerpo

negro la longitud de onda de máxima emisión es inversamente proporcional a la temperatura absoluta. Con esta ley se demuestra que la emisión de radiación de la superficie terrestre tiene un máximo en cerca de  $9.9 \mu\text{m}$ , que corresponde a la región infrarroja del espectro. También muestra que la temperatura del Sol, si el máximo de emisión de radiación solar ocurre en  $0.474 \mu\text{m}$ , es del orden de  $6110 \text{ K}$ .

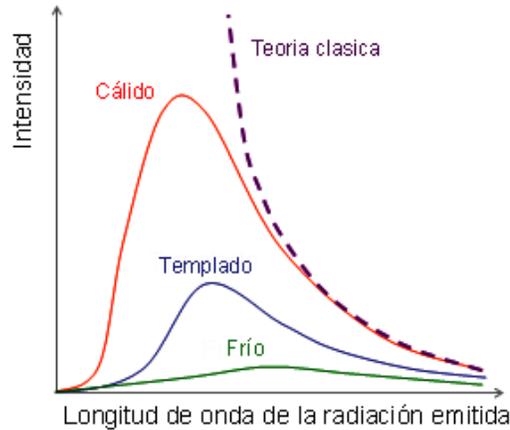


Figura 14.10. Intensidad de radiación de un cuerpo negro.

### ***Ley de Planck.***

Los objetos con mayor temperatura radian más energía total por unidad de área que los objetos más fríos. Por ejemplo el Sol con una temperatura media de  $6000 \text{ K}$  en su superficie, emite  $1.6 \times 10^5 (6000/300)^4$  veces más energía que la Tierra con una temperatura media en superficie de  $289 \text{ K} = 16^\circ \text{ C}$ . Por definición, un cuerpo negro es un absorbedor perfecto. Este también emite la máxima cantidad de energía a una temperatura dada. La cantidad de energía emitida por un cuerpo negro está únicamente determinada por su temperatura y su valor lo da la Ley de Planck. En 1900, Max Planck (alemán, 1858-1947), descubrió una fórmula para la radiación de cuerpo negro en todas las longitudes de onda. La función empírica propuesta por Planck afirma que la intensidad de radiación  $I(\lambda, T)$ , esto es, la energía por unidad de tiempo por unidad de área emitida en un intervalo de longitud de onda, por un cuerpo negro a la temperatura absoluta  $T$ , está dada por:

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2 \lambda^{-5}}{e^{ch/k\lambda T} - 1} \quad (14.8)$$

donde  $I(\lambda, T)$  es la densidad de flujo de energía por unidad de longitud de onda, en  $W/(m^2\mu m)$ ,  $h$  es la constante de Planck, y  $k$  es la constante de Boltzmann, de valor  $k = 1.38 \times 10^{-23} J/K$ . El gráfico de la función  $I(\lambda, T)$  para diferentes valores de temperatura absoluta, se muestra en la figura 14.11.

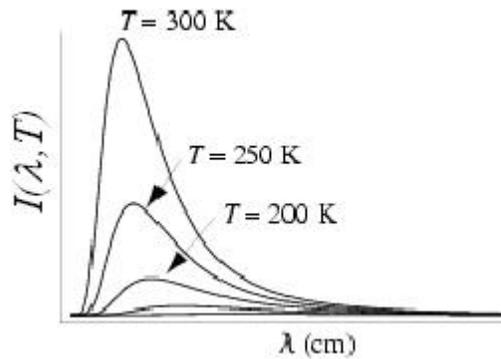


Figura 14.11. Gráfico de la función  $I(\lambda, T)$  de la ley de Planck.

**PROBLEMAS.**

- 14.1 El gradiente térmico de la Tierra, medido en la superficie es  $30^\circ \text{C}/\text{km}$ . Suponga que este valor no cambia en todo el trayecto hasta el centro de la Tierra. Si la temperatura en la superficie terrestre es  $17^\circ \text{C}$ , calcular la temperatura en el centro de la Tierra. ¿Considera que es una respuesta razonable? Considerar el radio terrestre de  $6370 \text{ km}$ . R:  $191117^\circ \text{C}$
- 14.2 Una barra de hierro de  $60 \text{ cm}$  de longitud y área transversal de  $2 \text{ cm}^2$ , tiene un extremo a  $80^\circ \text{C}$  y el otro a  $20^\circ \text{C}$ . Calcular: a) el gradiente de temperatura, b) la rapidez de transferencia de calor, c) su temperatura a  $20 \text{ cm}$  del extremo caliente. R: a)  $-100^\circ \text{C}/\text{m}$ , b)  $1.6 \times 10^{-4} \text{ W}$ , c)  $60^\circ \text{C}$ .
- 14.3 Dos barras de la misma longitud, de diferentes materiales y áreas transversales se colocan paralelas entre sí. Encuentre la expresión de la tasa del flujo de calor en términos de las conductividades térmicas y las áreas de las barras. Generalice el resultado al caso de más de dos barras. R:  $-(\Delta T/\Delta x)(k_1 A_1 + k_2 A_2)$
- 14.4 Un carpintero construye una pared. Hacia el exterior coloca una lámina de madera ( $k = 0.08 \text{ W}/\text{mK}$ ) de  $2 \text{ cm}$  de espesor y hacia el interior una capa de espuma aislante ( $k = 0.01 \text{ W}/\text{mK}$ ) de  $3,5 \text{ cm}$  de espesor. La temperatura de la superficie interior es de  $19^\circ \text{C}$ , y la exterior es  $-10^\circ \text{C}$ . Calcular: a) la temperatura en la unión entre la madera y la espuma, b) la razón de flujo de calor por  $\text{m}^2$  a través de esta pared. R: a)  $-15.3^\circ \text{C}$ , b)  $-53.2 \text{ W}/\text{m}^2$ .
- 14.5 Una tabla de área de  $2 \text{ m}^2$  y  $2 \text{ cm}$  de espesor se usa como una barrera entre un cuarto a  $20^\circ \text{C}$  y una región a  $50^\circ \text{C}$ . Calcular el número de clavos de acero de  $2 \text{ cm}$  de longitud y  $4 \text{ mm}$  de diámetro que se deben clavar sobre la tabla para que el flujo de calor a través de la tabla se duplique. R: aprox. 160 clavos.
- 14.6 Un extremo de una varilla metálica aislada se mantiene a  $100^\circ \text{C}$ , y el otro se mantiene a  $0^\circ \text{C}$  en contacto con una mezcla de hielo-agua. La varilla tiene  $40 \text{ cm}$  de longitud y un área transversal de  $0,75 \text{ cm}^2$ . El calor conducido por la varilla funde  $3 \text{ g}$  de hielo en  $5 \text{ minutos}$ . Calcu-

lar: a) el gradiente térmico a lo largo de la varilla, considerando que este es uniforme, b) la cantidad de calor conducida por la varilla, c) la conductividad térmica del metal. d) Si el extremo que está a  $100^{\circ}\text{C}$  está en contacto con vapor ¿qué cantidad de vapor condensa en los 5 minutos señalados? R: a)  $250^{\circ}\text{C}/\text{m}$ , b)  $3.3\text{ W}$ , c)  $173.7\text{ W}/\text{mK}$ , d)  $0.44\text{ g}$ .

- 14.7 Una barra de hierro de 20 cm de largo con un diámetro de 1 cm tiene un extremo sumergido en una mezcla de hielo a  $0^{\circ}\text{C}$ , mientras que el otro extremo está en un tanque de vapor a  $100^{\circ}\text{C}$ . Suponga que a lo largo de la barra se ha establecido un gradiente de temperatura uniforme. Calcular: a) la rapidez del flujo de calor a lo largo de la barra, b) la rapidez con la que se funde el hielo en el extremo frío, c) la rapidez con la que se condensa el vapor en el extremo caliente para mantener el gradiente de temperatura uniforme, d) el gradiente de temperatura a lo largo de la barra.
- 14.8 Una heladera cúbica de plumavit, de 30 cm de lado y 2 cm de espesor, tiene una temperatura interna de  $5^{\circ}\text{C}$  y externa de  $25^{\circ}\text{C}$ . Si 5kg de hielo se funden en 8 horas, calcular la conductividad térmica del material. R:  $0.143\text{ W}/\text{m}^{\circ}\text{C}$ .
- 14.9 Un tubo de vapor se cubre con material aislante de 0.5 cm de espesor y  $0.2\text{ cal}/(\text{s cm }^{\circ}\text{C})$  de conductividad térmica. Inicialmente ¿Cuánto calor se pierde por segundo si el tubo está a  $120^{\circ}\text{C}$  y el aire circundante a  $20^{\circ}\text{C}$ ? El tubo tiene un perímetro de 20 cm y una longitud de 50 cm. Ignore las pérdidas por los extremos del tubo. Analice la conveniencia o no de usar la relación dada para superficies planas. Estrictamente, debería usar la ecuación diferencial para la tasa conducción de calor e integrar para un conjunto de capas superpuestas, cada una de forma cilíndrica y muy delgadita. R:  $5.3 \times 10^4\text{ W}$
- 14.10 Una ventana térmica de  $6\text{ m}^2$  se construye con dos capas de vidrio, cada una de 4 mm de espesor, separadas por un espacio de aire de 5 mm. Si la parte interna está a  $25^{\circ}\text{C}$  y la externa a  $0^{\circ}\text{C}$ , calcular la pérdida de calor a través de la ventana.
- 14.11 A cierta familia le agrada tener la casa a  $23^{\circ}\text{C}$  durante el invierno, cuando afuera hay  $0^{\circ}\text{C}$ . ¿Qué temperatura interna deberían elegir si

quisieran bajar sus gastos en combustibles en 10%? Explique claramente las hipótesis que hizo. R: 20.7° C.

- 14.12 a) Si la temperatura promedio de la piel de algún alumno es 30° C, suponiendo una emisividad  $\varepsilon = 0.97$ , calcular la radiación que emite. b) Si la temperatura promedio de las paredes de la sala donde se encuentra es 15° C, calcular la radiación que emite, considerada como cuerpo negro. c) Calcular la radiación neta para el alumno.
- 14.13 Una dama se encuentra en bikini en un sauna cuyas paredes están a 85° C y tienen una emisividad igual a 1. Su piel se encuentra a 40° C y su emisividad es 0.8. a) ¿Cuánto calor absorbe la dama por radiación de las paredes? b) ¿Cuál es la tasa a la cual la dama irradia energía al medio exterior? c) ¿Cuánto sudor debería evaporar por hora para que su temperatura se mantenga normal y estable? (Suponga que éste es el único mecanismo de pérdida energía y que no está produciendo energía por metabolismo). Considere que el calor latente del sudor, a 37° C, es 2427 kJ/kg (compare con el del agua, tenga presente que éste último está dado a 100° C).
- 14.14 Averiguar en algún texto de óptica, cual es la longitud de onda y la frecuencia de la radiación donde el ojo humano tiene la máxima sensibilidad, ¿y el ojo de un gato?, ¿un murciélago?, ¿un búho?
- 14.15 Calcular la frecuencia en Hertz y la energía en J (ecuación 14.4), para las longitudes de onda de cada tipo de radiación de la tabla 14.4.
- 14.16 La temperatura de la superficie del Sol es de unos 6000 K. Tomando el radio del Sol igual  $7 \times 10^8$  m, calcular la energía total irradiada por el Sol cada día. R:  $3.7 \times 10^{31}$  J.
- 14.17 La temperatura de la superficie del Sol es de unos 6000 K. a) ¿Cuál es la longitud de onda en que se produce la máxima radiación? b) ¿A qué tipo de radiación del espectro electromagnético corresponde? c) Considerando las longitudes de onda de la luz visible de la tabla 14.4, opine si desde el punto de vista físico es una buena o mala norma pintar los buses escolares de amarillo y los carros de bomberos de rojo. R: a)  $0.474 \mu\text{m}$ , b) visible.

- 14.18 La superficie de la Tierra se encuentra a una temperatura cercana a 300 K. a) ¿Cuál es la longitud de onda en que se produce la máxima radiación terrestre? b) ¿A qué tipo de radiación del espectro electromagnético corresponde? R: a) 9.9  $\mu\text{m}$ , b) infrarroja.
- 14.19 El techo de una casa, construido para absorber la radiación solar incidente sobre él, tiene un área de 7 m x 10 m y una inclinación de 30° respecto al suelo horizontal. En el lugar, a nivel del suelo, la radiación solar es de 340 W/m<sup>2</sup> en promedio anual. a) Si el 20% de la energía incidente se puede convertir a energía eléctrica útil, ¿cuántos kWh de energía útil proporciona diariamente esta fuente? Suponga que el Sol brilla un promedio de 8 h diarias. b) ¿cuál es el ahorro mensual (en \$) en Chile? c) esta energía ¿sería suficiente para abastecer una casa familiar típica? R: a) 4.76 kWh.
- 14.20 Una olla de aluminio tiene una sección transversal circular de 8 cm de radio y 3 mm de espesor. Se coloca sobre una placa caliente y se llena con 1 kg de agua. Si el fondo de la olla se mantiene a 101°C y la parte interna a 100° C, calcular: a) la rapidez de transferencia de calor hacia el agua, b) el tiempo que demora el agua en hervir. Despreciar el calor perdido por los lados de la olla.
- 14.21 Usando la ley de Planck calcular la intensidad de radiación máxima emitida por el Sol y por la Tierra.
- 14.22 Suponiendo que el sol es un radiador de cuerpo negro ( $\varepsilon = 1$ ), con una temperatura de la superficie radiante de 6000 °K, calcular su emisión de radiación, en W/m<sup>2</sup>.
- 14.23 Un cuerpo radiante con  $\varepsilon = 0.98$  y de temperatura = 30° C, aumenta a 60° C su temperatura. ¿En qué porcentaje aumenta su emisión de radiación, en W/m<sup>2</sup>?
- 14.24 Si la temperatura de un cuerpo de  $\varepsilon = 0.8$  aumenta el triple, ¿en qué porcentaje aumentará su emisión de radiación, en W/m<sup>2</sup>?

## CAPITULO 15. SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA Y ENTROPIA.

La primera ley de la termodinámica es la ley de conservación de la energía generalizada para incluir el calor como una forma de transferencia de energía. Esta ley sólo afirma que un aumento en algunas de las formas de energía debe estar acompañado por una disminución en alguna otra forma de la misma. La primera ley no produce ninguna restricción sobre los tipos de conversiones de energía que pueden ocurrir. Además no hace distinción entre el trabajo y el calor. De acuerdo con la primera ley, la energía interna de un sistema se puede incrementar ya sea agregando calor o realizando un trabajo sobre el sistema. Pero existe una diferencia muy importante entre el trabajo y el calor que no se evidencia de la primera ley. Por ejemplo, es posible convertir completamente el trabajo en calor, pero en la práctica, es imposible convertir completamente el calor en trabajo sin modificar los alrededores.

La segunda ley de la termodinámica establece cuales procesos de la naturaleza pueden ocurrir o no. De todos los procesos permitidos por la primera ley, solo ciertos tipos de conversión de energía pueden ocurrir. Los siguientes son algunos procesos compatibles con la primera ley de la termodinámica, pero que se cumplen en un orden gobernado por la segunda ley. 1) Cuando dos objetos que están a diferente temperatura se ponen en contacto térmico entre sí, el calor fluye del objeto más cálido al más frío, pero nunca del más frío al más cálido. 2) La sal se disuelve espontáneamente en el agua, pero la extracción de la sal del agua requiere alguna influencia externa. 3) Cuando se deja caer una pelota de goma al piso, rebota hasta detenerse, pero el proceso inverso nunca ocurre. Todos estos son ejemplos de procesos *irreversibles*, es decir procesos que ocurren naturalmente en una sola dirección. Ninguno de estos procesos ocurre en el orden temporal opuesto. Si lo hicieran, violarían la segunda ley de la termodinámica. La naturaleza unidireccional de los procesos termodinámicos establece una dirección del tiempo.

La segunda ley de la termodinámica, que se puede enunciar de diferentes formas equivalentes, tiene muchas aplicaciones prácticas. Desde el punto de vista de la ingeniería, tal vez la más importante es en relación con la eficiencia limitada de las máquinas térmicas. Expresada en forma simple, la segunda ley afirma que no es posible construir una máquina capaz de convertir por completo, de manera continua, la energía térmica en otras formas de energía.

## 15.1. MAQUINAS TERMICAS.

### 15.1.1 Máquina térmica.

Una *máquina térmica* es un dispositivo que convierte energía térmica en otras formas útiles de energía, como la energía eléctrica y/o mecánica. De manera explícita, una máquina térmica es un dispositivo que hace que una sustancia de trabajo recorra un proceso cíclico durante el cual 1) se absorbe calor de una fuente a alta temperatura, 2) la máquina realiza un trabajo y 3) libera calor a una fuente a temperatura más baja.

Por ejemplo, en un motor de gasolina, 1) el combustible que se quema en la cámara de combustión es el depósito de alta temperatura, 2) se realiza trabajo mecánico sobre el pistón y 3) la energía de desecho sale por el tubo de escape. O en un proceso característico para producir electricidad en una planta de potencia, el carbón o algún otro tipo de combustible se quema y el calor generado se usa para producir vapor de agua. El vapor se dirige hacia las aspas de una turbina, poniéndola a girar. Posteriormente, la energía asociada a dicha rotación se usa para mover un generador eléctrico.

Como se menciono antes, una máquina térmica transporta alguna sustancia de trabajo a través de un proceso cíclico, definido como aquel en el que la sustancia regresa a su estado inicial. Como ejemplo de un proceso cíclico, considérese la operación de una máquina de vapor en la cual la sustancia de trabajo es el agua. El agua se lleva a través de un ciclo en el que primero se convierte a vapor en una caldera y después de expande contra un pistón. Después que el vapor se condensa con agua fría, se regresa a la caldera y el proceso se repite.

En la operación de cualquier máquina térmica, se extrae una cierta cantidad de calor de una fuente a alta temperatura, se hace algún trabajo mecánico y se libera otra cantidad de calor a una fuente a temperatura más baja. Resulta útil representar en forma esquemática una máquina térmica como se muestra en la figura 15.1. La máquina, representada por el círculo en el centro del diagrama, absorbe cierta cantidad de calor  $Q_C$  (el subíndice  $C$  se refiere a caliente) tomado de la fuente a temperatura más alta. Hace un trabajo  $W$  y libera calor  $Q_F$  (el subíndice  $F$  se refiere a frío) a la fuente de temperatura más baja. Debido a que la sustancia de trabajo se lleva a través de un ciclo, su energía interna inicial y final es la misma, por lo que la variación de energía interna es cero, es

decir  $\Delta U = 0$ . Entonces, de la primera ley de la termodinámica se tiene que “*el trabajo neto  $W$  realizado por la máquina es igual al calor neto que fluye hacia la misma*”. De la figura 15.1, el calor neto es  $Q_{neto} = Q_C - Q_F$ , por lo tanto el trabajo es:

$$W = Q_C - Q_F \quad (15.1)$$

donde  $Q_C$  y  $Q_F$  se toman como cantidades positivas. Si la sustancia de trabajo es un gas, el trabajo neto realizado en un proceso cíclico es igual al área encerrada por la curva que representa a tal proceso en el diagrama  $PV$ .

### 15.1.2 Eficiencia térmica.

*La eficiencia térmica,  $e$  (o simplemente eficiencia), de una máquina térmica se define como la razón entre el trabajo neto realizado y el calor absorbido durante un ciclo*, se escribe de la forma:

$$e = \frac{W}{Q_C} = \frac{Q_C - Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{Q_F}{Q_C} \quad (15.2)$$

Se puede pensar en la eficiencia como la razón de lo que se obtiene (trabajo mecánico) a lo que se paga por (energía). Este resultado muestra que una máquina térmica tiene una eficiencia de 100% ( $e = 1$ ) sólo si  $Q_F = 0$ , es decir, si no se libera calor a la fuente fría. En otras palabras, una máquina térmica con una eficiencia perfecta deberá convertir toda la energía calórica absorbida  $Q_C$  en trabajo mecánico. La segunda ley de la termodinámica, que enseguida analizamos, establece que esto es imposible.

## 15.2. SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA.

Existen diferentes formas de enunciar la segunda ley de la termodinámica, pero en su versión más simple, establece que “*el calor jamás fluye espontáneamente de un objeto frío a un objeto caliente*”.

15.2.1 Forma de Kelvin – Planck de la segunda ley de la termodinámica.

En la práctica, se encuentra que todas las máquinas térmicas sólo convierten una pequeña fracción del calor absorbido en trabajo mecánico. Por ejemplo un buen motor de un automóvil tiene una eficiencia aproximada de 20% y los motores diesel tienen una eficiencia en el rango de 35% a 40%. En base a este hecho, el enunciado de Kelvin – Planck de la segunda ley de la termodinámica es el siguiente:

**“es imposible construir una máquina térmica que, operando en un ciclo, no tenga otro efecto que absorber la energía térmica de una fuente y realizar la misma cantidad de trabajo”.**

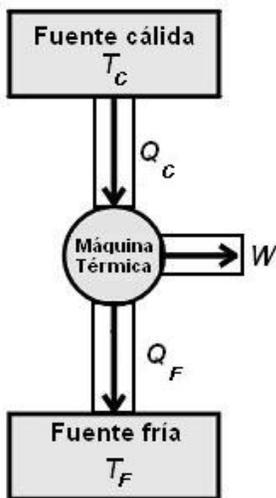


Figura 15.1 Representación esquemática de una máquina térmica.

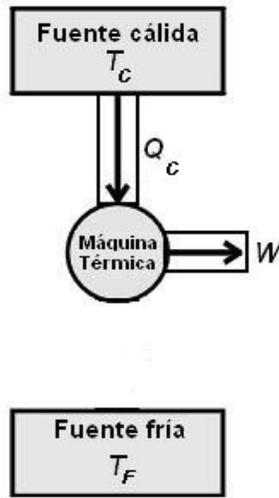


Figura 15.2 Representación esquemática de una máquina térmica imposible de construir.

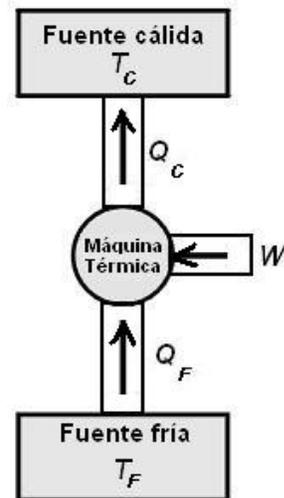


Figura 15.3 Representación esquemática de un refrigerador.

Esto es equivalente a afirmar que “es imposible construir una máquina de movimiento perpetuo (móvil perpetuo) de segunda clase”, es decir, una máquina que pudiera violar la segunda ley de la termodinámica. (Una máquina de movimiento perpetuo de primera clase es aquella que puede violar la primera ley de la termodinámica (conservación de la energía), también es imposible construir una máquina de este tipo). La figura 15.2 es un diagrama esquemático de una máquina térmica perfecta imposible de construir.

Un refrigerador es una máquina térmica que opera en sentido inverso, como se muestra de manera esquemática en la figura 15.3. La máquina absorbe calor  $Q_F$  de la fuente fría y entrega calor  $Q_C$  a la fuente cálida. Esto sólo puede ser posible si se hace trabajo sobre el refrigerador. De la primera ley, se ve que el calor cedido a la fuente caliente debe ser igual a la suma del trabajo realizado y el calor absorbido de la fuente fría. Por lo tanto, se ve que el refrigerador transfiere calor del cuerpo más frío a un cuerpo más cálido (la cocina).

### 15.2.2 Enunciado de Clausius de la segunda ley de la termodinámica.

Resulta deseable construir un refrigerador que pueda realizar su proceso con el mínimo de trabajo. Si se pudiera construir uno donde el proceso de refrigeración se realice sin ningún trabajo, se tendría un refrigerador perfecto. Esto es imposible, porque se violaría la segunda ley de la termodinámica, que es el enunciado de Clausius de la segunda ley (Rudolf Clausius, alemán, 1822-1888):

***“es imposible construir una máquina cíclica, que no tenga otro efecto que transferir calor continuamente de un cuerpo hacia otro, que se encuentre a una temperatura más elevada”.***

En términos sencillos, *el calor no puede fluir espontáneamente de un objeto frío a otro cálido*. Este enunciado de la segunda ley establece la dirección del flujo de calor entre dos objetos a diferentes temperaturas. El calor sólo fluirá del cuerpo más frío al más cálido si se hace trabajo sobre el sistema.

Aparentemente los enunciados de Kelvin – Planck y de Clausius de la segunda ley no están relacionados, pero son equivalentes en todos sus aspectos. Se puede demostrar (pero aquí no lo hacemos) que si un enunciado es falso, el otro también lo es.

Ejemplo 15.1 a) Calcular la eficiencia de una máquina que usa 2000 J de calor durante la fase de combustión y pierde 1500 J por escape y por fricción. b) Si otra máquina tiene una eficiencia de 20% y pierde 3000 J de calor por fricción, calcular el trabajo que realiza.

Solución: a) la eficiencia de una máquina esta dada por la ecuación 15.2.

$$e = 1 - \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{1500}{2000} = 0.25 \text{ ó } 25\%.$$

b) usando la ecuación 15.2 en la forma  $e = \frac{W}{Q_C} = 1 - \frac{Q_F}{Q_C}$  se calcula  $Q_C$  y después se despeja  $W$ .

$$\frac{Q_F}{Q_C} = 1 - e \Rightarrow Q_C = \frac{Q_F}{1 - e} = \frac{3000J}{1 - 0.2} = 3750J$$

$$e = \frac{W}{Q_C} \Rightarrow W = eQ_C = 0.2 \times 3750J = 750J$$

### 15.3 PROCESOS REVERSIBLES E IRREVERSIBLES.

Los procesos reales se producen en una dirección preferente. Es así como el calor fluye en forma espontánea de un cuerpo más cálido a otro más frío, pero el proceso inverso sólo se puede lograr con alguna influencia externa. Cuando un bloque desliza sobre una superficie, finalmente se detendrá. La energía mecánica del bloque se transforma en energía interna del bloque y de la superficie. Estos procesos unidireccionales se llaman *procesos irreversibles*. En general, un proceso es irreversible si el sistema y sus alrededores no pueden regresar a su estado inicial.

Por el contrario, un proceso es *reversible* si su dirección puede invertirse en cualquier punto mediante un cambio infinitesimal en las condiciones externas. Una transformación reversible se realiza mediante una sucesión de estados de equilibrio del sistema con su entorno y es posible devolver al sistema y su entorno al estado inicial por el mismo camino. Reversibilidad y equilibrio son, por tanto, equivalentes. Si un proceso real se produce en forma cuasiestática, es decir lo suficientemente lento como para que cada estado se desvíe en forma infinitesimal del equilibrio, se puede considerar reversible. En los procesos reversibles, el sistema nunca se desplaza más que diferencialmente de su equi-

librio interno o de su equilibrio con su entorno. Si una transformación no cumple estas condiciones es irreversible.

En la realidad, las transformaciones reversibles no existen, ya que no es posible eliminar por completo efectos disipativos, como la fricción, que produzcan calor o efectos que tiendan a perturbar el equilibrio, como la conducción de calor por diferencias de temperatura. Por lo tanto no debe sorprender que los procesos en la naturaleza sean irreversibles. El concepto de proceso reversible es de especial importancia para establecer el límite teórico de la eficiencia de las máquinas térmicas.

#### 15.4 MÁQUINA DE CARNOT.

El ciclo de Carnot (Sadi Carnot, francés, 1796 – 1832), es de gran importancia desde el punto de vista práctico como teórico. Carnot demostró que una máquina térmica que operara en un ciclo ideal reversible entre dos fuentes de calor, sería la máquina más eficiente posible. Una máquina ideal de este tipo, llamada *máquina de Carnot*, establece un límite superior en la eficiencia de todas las máquinas. Esto significa que el trabajo neto realizado por una sustancia de trabajo llevada a través de un ciclo de Carnot, es el máximo posible para una cantidad dada de calor suministrado a la sustancia de trabajo. El teorema de Carnot se enuncia de la siguiente forma:

*“ninguna máquina térmica real que opera entre dos fuentes de calor, puede ser más eficiente que una máquina de Carnot, operando entre las dos mismas fuentes”.*

Para describir el ciclo de Carnot, se debe suponer que la sustancia que trabaja entre las temperaturas  $T_C$  y  $T_F$  es un gas ideal contenido en un cilindro con un émbolo móvil en un extremo. Las paredes del cilindro y del émbolo no son conductores térmicos, por lo que no hay pérdida de calor al ambiente. El ciclo de Carnot es un proceso cíclico reversible que utiliza un gas ideal, que consta de dos procesos isotérmicos y de dos procesos adiabáticos, como se muestra en la figura 15.4, donde se indican los cuatro pasos del ciclo.

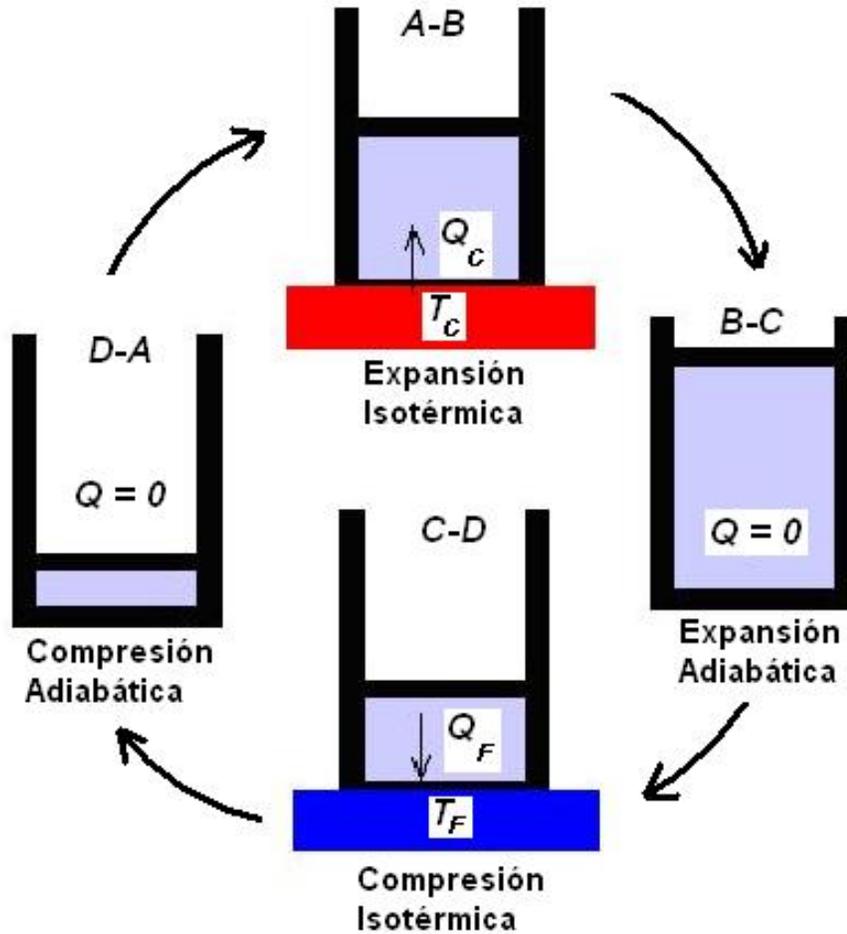


Figura 15.4 Diagrama esquemático del ciclo de Carnot.

La representación gráfica del ciclo de Carnot en un diagrama  $PV$  se muestra en la figura 15.5, donde:

1. El proceso A-B es una expansión isotérmica a la temperatura  $T_C$ , donde el gas se pone en contacto térmico con una fuente de calor a esa  $T_C$ . Durante el proceso, el gas absorbe calor  $Q_C$  de la fuente desde la base del cilindro y realiza trabajo  $W_{AB}$  al subir el émbolo.
2. En el proceso B-C, la base del cilindro se reemplaza por una pared térmicamente no conductora y el gas se expande adiabáticamente. Durante el proceso la temperatura baja de  $T_C$  a  $T_F$  y el gas realiza trabajo  $W_{BC}$  al elevar el émbolo.

3. En el proceso C-D el gas se coloca en contacto térmico con una fuente de calor a temperatura  $T_F$  y se comprime isotérmicamente a una temperatura  $T_F$ . Durante el proceso, el gas libera calor  $Q_F$  a la fuente y el trabajo realizado sobre el gas por un agente externo es  $W_{CD}$ .
4. En el proceso final D-A, la base del cilindro se reemplaza por una pared térmicamente no conductora y el gas se comprime adiabáticamente. La temperatura del gas aumenta de  $T_F$  a  $T_C$  y el trabajo realizado sobre el gas por un agente externo es  $W_{DA}$ .

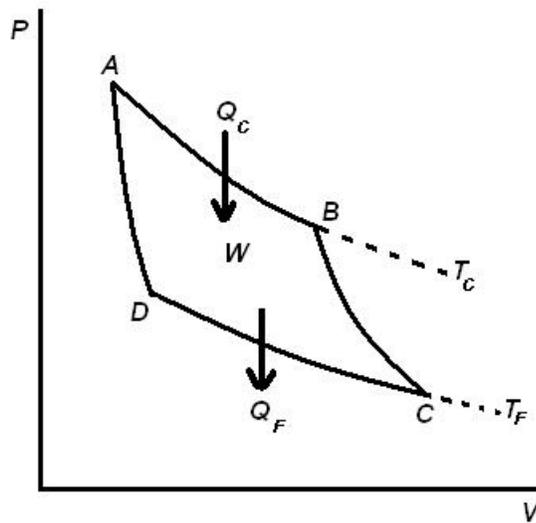


Figura 15.5 Diagrama  $PV$  del ciclo de Carnot.

Ejemplo 15.2. Calcular la eficiencia de una máquina térmica que opera usando un gas ideal en un ciclo de Carnot.

Solución: Durante la expansión isotérmica A-B en la figura 15.5, como la temperatura no cambia, la energía interna permanece constante. Por la primera ley, en este proceso el trabajo  $W_{AB}$  realizado por el gas es igual al calor absorbido  $Q_{Cal}$  (en este ejemplo  $Q_{Cal}$  y  $T_{Cal}$  representan el calor y la temperatura de la fuente cálida). Calculando el trabajo, se obtiene:

$$W_{AB} = nRT_{Cal} \ln \frac{V_B}{V_A} = Q_{Cal}$$

*Cap. 15. Segunda ley de la termodinámica*

De la misma forma, el calor  $Q_F$  liberado a la fuente fría durante el proceso de compresión isotérmica C-D es igual al valor absoluto del trabajo  $W_{CD}$ :

$$W_{CD} = nRT_F \ln \frac{V_C}{V_D} = Q_F$$

Dividiendo estas dos expresiones, se obtiene:

$$\frac{Q_F}{Q_{Cal}} = \frac{T_F}{T_{Cal}} \frac{\ln(V_C/V_D)}{\ln(V_B/V_A)}$$

Para cualquier proceso adiabático cuasiestático reversible, la temperatura y el volumen se relacionan por la ecuación  $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$ .

Aplicando este resultado a los procesos adiabáticos B-C y D-A, se obtiene:

$$T_{Cal} V_B^{\gamma-1} = T_F V_C^{\gamma-1}$$

$$T_{Cal} V_A^{\gamma-1} = T_F V_D^{\gamma-1}$$

Dividiendo estas ecuaciones, se obtiene:

$$\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

Este resultado se reemplaza en la ecuación de  $Q_F/Q_{Cal}$ , al hacerlo se simplifican los términos logarítmicos, resultado:

$$\frac{Q_F}{Q_{Cal}} = \frac{T_F}{T_{Cal}}$$

Ahora se puede calcular la eficiencia de la máquina térmica de Carnot:

$$e = 1 - \frac{Q_F}{Q_{Cal}} = 1 - \frac{T_F}{T_{Cal}}$$

### 15.4.1 Eficiencia de una máquina de Carnot.

El trabajo neto realizado en el proceso cíclico reversible de Carnot es igual al área encerrada por la trayectoria  $ABCD$  en el diagrama  $PV$  de la figura 15.5. Este trabajo neto es igual al calor neto transferido al sistema,  $Q_C - Q_F$ , ya que el cambio de energía interna es cero. Además la eficiencia térmica de una máquina está dada por la ecuación 15.2:

$$e = \frac{W}{Q_C} = 1 - \frac{Q_F}{Q_C}$$

En el ejemplo 15.2 se demostró que para un ciclo de Carnot, la razón de los calores  $Q_F/Q_C$  es:

$$\frac{Q_F}{Q_C} = \frac{T_F}{T_C} \quad (15.3)$$

Por lo tanto, la eficiencia térmica  $e_C$  de una máquina de Carnot, está dada por la expresión:

$$e_C = 1 - \frac{T_F}{T_C} \quad (15.4)$$

De acuerdo con este resultado, ***todas las máquinas de Carnot que operen entre las dos mismas temperaturas de manera reversible tienen la misma eficiencia. A partir del ciclo de Carnot, se tiene que la eficiencia de cualquier máquina reversible que opere en un ciclo entre dos temperaturas, es mayor que la eficiencia de cualquier máquina irreversible (real) que opere entre las dos mismas temperaturas.***

De acuerdo a este resultado, la eficiencia es cero si  $T_C = T_F$ . La eficiencia aumenta a medida que  $T_F$  disminuye y aumenta  $T_C$ . La eficiencia sólo puede ser igual a 100% si  $T_F = 0$ . No es posible tener una fuente fría con esa tempe-

ratura, por lo que la eficiencia es siempre menor que la unidad. En la mayoría de los casos prácticos, la fuente fría se encuentra a temperatura ambiente. Por lo tanto, se intenta aumentar la eficiencia elevando la temperatura de la fuente cálida. Todas las máquinas reales son menos eficientes que una máquina de Carnot, ya que siempre están presentes dificultades prácticas como la fricción y las pérdidas de calor por conducción.

Ejemplo 15.3. Una máquina de vapor tiene una caldera que opera a 500 K. El calor transforma el agua en vapor, el cual mueve un pistón. La temperatura de escape es la del aire exterior, de unos 300 K. Calcular la eficiencia térmica de esta máquina de vapor.

Solución: la eficiencia térmica máxima de una máquina que opere entre esas dos temperaturas, es la de Carnot:

$$e_c = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{300}{500} = 0.4 \text{ ó } 40\%$$

Ejemplo 15.4. La máxima eficiencia teórica de un motor de gasolina basada en un ciclo de Carnot, es de 30%. Si el motor libera sus gases a la atmósfera, a 300 K, calcular la temperatura del cilindro inmediatamente después de la combustión. Si la máquina absorbe 850 J de calor de la fuente de calor en cada ciclo, calcular el trabajo que puede realizar en cada ciclo.

Solución: usando la eficiencia de Carnot para encontrar  $T_C$ :

$$e_c = 1 - \frac{T_F}{T_C} \Rightarrow T_C = \frac{T_F}{1 - e_c}$$
$$T_C = \frac{300}{1 - 0.3} = 429K$$

Para calcular el trabajo se puede usar la ecuación:

$$e_c = \frac{W}{Q_C} \Rightarrow W = e_c Q_C = 0.3 \times 850 = 255J$$

### 15.5 ESCALA DE TEMPERATURA ABSOLUTA.

El ciclo de Carnot proporciona una forma de definir una escala de temperaturas que sea independiente de las propiedades del material. La ecuación 15.3 dice que la razón de los calores depende sólo de la temperatura de las dos fuentes. La razón de las dos temperaturas,  $T_F/T_C$ , se puede obtener operando una máquina térmica reversible en un ciclo de Carnot entre esas dos temperaturas y midiendo los calores  $Q_C$  y  $Q_F$ . Es posible determinar la escala de temperatura con referencia a la temperatura de algún punto fijo. La escala de temperatura absoluta o *Kelvin*, se define escogiendo 273.16 K como la temperatura absoluta del punto triple del agua.

La temperatura de cualquier sustancia, se puede obtener de la siguiente manera: 1) se hace que la sustancia recorra un ciclo de Carnot, 2) se mide el calor  $Q$  absorbido o liberado por el sistema a cierta temperatura  $T$ , 3) se mide el calor  $Q_3$  absorbido o liberado por el sistema cuando se encuentra a la temperatura del punto triple del agua. De la ecuación 15.3 y con este procedimiento, se encuentra que la temperatura desconocida está dada por:

$$T = 273.16K \frac{Q}{Q_3} \quad (15.5)$$

La escala de temperatura absoluta es idéntica a la escala de temperatura de un gas ideal y es independiente de las propiedades del material de trabajo. Por lo tanto puede aplicarse a temperaturas muy bajas. Con esta escala, se define el *cero absoluto como la temperatura de una fuente en la cual una máquina de Carnot no liberará calor alguno*.

### 15.6 BOMBAS DE CALOR Y REFRIGERADORES.

Una bomba de calor es un dispositivo mecánico usado en la calefacción y refrigeración de casas y edificios. En el modo de calentamiento, un fluido en circulación absorbe calor del exterior y lo libera en el interior de la estructura. Por lo general, el fluido en circulación se encuentra en la forma de vapor a baja presión en el embobinado de la unidad exterior de la estructura, donde ab-

sorbe calor, ya sea del aire o del suelo. El gas se comprime y entra hacia la estructura como vapor caliente a alta presión. En la unidad interior, el gas se condensa en líquido y libera su energía interna almacenada. Cuando la bomba de calor se usa como aire acondicionado, el ciclo anterior se opera en forma inversa.

La figura 15.3 representa también un diagrama esquemático de una bomba de calor, funcionando en su modo de calefacción. La temperatura externa es  $T_F$ , temperatura interna es  $T_C$  y el calor absorbido por el aire en circulación es  $Q_F$ . El compresor realiza trabajo  $W$  sobre el fluido y el calor transferido de la bomba de calor (donde dice máquina térmica en la figura 15.3) hacia el interior de la construcción es  $Q_C$ .

La eficiencia de una bomba de calor se describe en términos de un número llamado coeficiente de rendimiento,  $CR$ , que se define como la razón del calor transferido hacia la fuente de calor y el trabajo realizado para transferir ese calor, en la forma:

$$CR = \frac{\text{calor transferido}}{\text{trabajo realizado}} = \frac{Q_C}{W} \quad (15.6)$$

Normalmente el  $CR$  de una bomba de calor es del orden de 4, es decir, el calor transferido hacia la casa es aproximadamente cuatro veces mayor que el trabajo que hace el motor en la bomba de calor. Pero a medida que disminuye la temperatura exterior, se le hace más difícil a la bomba extraer suficiente calor del aire y el  $CR$  disminuye hasta valores menores que uno, y es más pequeño mientras menor es la temperatura exterior.

Un refrigerador trabaja en forma parecida a una bomba de calor, donde éste enfría su interior bombeando el calor de los compartimentos para los productos hacia el aire exterior más caliente (figura 15.3). Es un dispositivo cuya finalidad es extraer calor de una fuente fría y cederlo a una fuente caliente. Esto se consigue si se hace trabajo para hacer circular la sustancia refrigerante. En un sistema de refrigeración típico, el motor del compresor (ubicado en su parte inferior) introduce la sustancia refrigerante, en estado gaseoso a alta presión, a través de tubos externos ubicados en la zona posterior (condensador). El gas cede una cantidad de calor  $Q_C$  al ambiente, que es la fuente de alta temperatura

y se enfría hasta licuarse. Al llegar a la parte superior, el fluido caliente aún y a alta presión pasa a los tubos de baja presión, a través de una válvula. Estos tubos están en el interior. Ahí el líquido se evapora, absorbiendo del interior, la fuente fría, una cantidad de calor  $Q_F$ . Luego el fluido regresa al compresor y el ciclo se reinicia. Se extrae calor para enfriar los alimentos y compensar el calor absorbido por las paredes o la entrada de aire ambiental cada vez que se abre la puerta. Para especificar la calidad del refrigerador se define el coeficiente de rendimiento,  $CR$ , como la razón entre el calor absorbido desde la fuente fría y el trabajo hecho por la máquina térmica, en la forma:

$$CR = \frac{\text{calor absorbido}}{\text{trabajo realizado}} = \frac{Q_F}{W} \quad (15.7)$$

Un refrigerador eficiente es aquel que remueve la mayor cantidad de calor de la fuente fría con la menor cantidad de trabajo. Por lo tanto, un buen refrigerador debe tener un coeficiente de rendimiento alto, normalmente de 5 o 6. Un refrigerador imposible tendría un coeficiente de rendimiento infinito.

### 15.7 ENTROPIA.

El concepto de temperatura está comprendido en la ley cero de la termodinámica y el de energía interna en la primera ley. Tanto la temperatura como la energía interna son funciones de estado. Es decir se pueden utilizar para describir el estado de un sistema. Otra función de estado, relacionada con la segunda ley de la termodinámica, es la función *entropía*.

Para un proceso reversible cuasiestático entre dos estados de equilibrio, si  $dQ$  es el calor absorbido o liberado por el sistema durante algún intervalo pequeño de la trayectoria, *el cambio de entropía,  $dS$ , entre dos estados de equilibrio está dado por el calor transferido,  $dQ$ , dividido entre la temperatura absoluta  $T$  del sistema, en ese intervalo.* Es decir:

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (15.8)$$

La unidad de medida de la entropía en el SI es J/K. Cuando el sistema absorbe calor,  $dQ$  es positivo y la entropía aumenta. Cuando el sistema libera calor,  $dQ$  es negativo y la entropía disminuye. La ecuación 15.8 no define la entropía, sino el cambio de entropía.

Al mirar las bellezas de la naturaleza, es fácil reconocer que los eventos de los procesos naturales tienen entre sí un gran factor común. Por ejemplo, el espacio entre los árboles en un bosque es al azar. Si se encuentra un bosque donde todos los árboles están igualmente espaciados, es muy probable que se concluya que el bosque fue plantado por la mano del hombre. De manera similar, las hojas caen al suelo en forma aleatoria. Es muy poco probable encontrar hojas que hayan caído en líneas perfectamente derechas o en montones perfectos. Se pueden expresar estos resultados diciendo que ***un arreglo desordenado es más probable que uno ordenado, si se dejan actuar las leyes de la naturaleza sin interferencia.***

En mecánica estadística, el comportamiento de una sustancia se describe en términos del comportamiento estadístico de los átomos y moléculas de una sustancia. Uno de los principales resultados de este tratamiento es que:

***“los sistemas aislados tienden al desorden y la entropía es una medida de ese desorden”***

Por ejemplo, si todas las moléculas de gas en el aire de una habitación se movieran juntas en filas, este sería un estado muy ordenado, pero el más improbable. Si se pudieran ver las moléculas, se observaría que se mueven azarosamente en todas las direcciones, encontrándose unas con otras, cambiando sus velocidades después de chocar, moviéndose unas más rápidas que otras. Este es un estado muy desordenado y el más probable.

Todos los estados físicos tienden al estado más probable y ese siempre es el que tiende a aumentar el desorden. Debido a que la entropía es una medida del desorden, una forma alternativa de expresar esto, y otra forma de establecer la segunda ley de la termodinámica es:

***“la entropía del Universo crece en todos los procesos naturales”.***

Para calcular el cambio de entropía en un proceso finito, se debe reconocer que en el caso general  $T$  no es constante. Si  $dQ$  es el calor transferido cuando el sistema se encuentra a una temperatura  $T$ , entonces el cambio de entropía en un proceso reversible cualquiera entre un estado inicial y un estado final es:

$$\Delta S = \int_i^f dS = \int_i^f \frac{dQ}{T} \quad (15.9)$$

El cambio de entropía de un sistema para ir de un estado inicial a otro final tiene el mismo valor para todas las trayectorias que conectan a los estados. Es decir:

***“el cambio en la entropía de un sistema sólo depende de las propiedades de los estados de equilibrio inicial y final”.***

En el caso de un proceso reversible y adiabático, no se transfiere calor entre el sistema y sus alrededores, y por lo tanto, en este caso  $\Delta S = 0$ . Como no hay cambio en la entropía, un proceso adiabático también se conoce como un proceso isentrópico (de igual entropía).

En un ciclo de Carnot, la máquina absorbe calor  $Q_C$  de la fuente a alta temperatura  $T_C$  y libera calor  $Q_F$  la fuente de baja temperatura  $T_F$ . Entonces, el cambio total de la entropía en un ciclo es:

$$\Delta S = \frac{Q_C}{T_C} - \frac{Q_F}{T_F}$$

El signo negativo en el segundo término representa el hecho de que el calor  $Q_F$  es liberado por el sistema. Como en el ejemplo 15.2 se demostró que para un ciclo de Carnot se cumple la relación:

$$\frac{Q_F}{Q_C} = \frac{T_F}{T_C}$$

combinando estas dos últimas ecuaciones, se encuentra que el cambio total de entropía para una máquina que opera en un ciclo de Carnot es cero, es decir:

$$\Delta S = 0$$

En general, como la entropía es una función de estado, y sólo depende de las propiedades de cierto estado de equilibrio, se concluye que para cualquier ciclo reversible,  $\Delta S = 0$ . Otra propiedad importante de la entropía es:

***“la entropía del Universo permanece constante en los procesos reversibles”.***

### ***15.7.1 Entropía en un proceso reversible de un gas ideal.***

Como caso especial, se describirá como calcular el cambio de entropía de un gas ideal en un proceso reversible cuasiestático en el cual se absorbe calor de una fuente. En este proceso, se lleva un gas desde un estado inicial  $T_i, V_i$  hasta un estado final  $T_f, V_f$ . De acuerdo con la primera ley:

$$dQ = dU + dW = dU + pdV$$

Como para un gas ideal,  $dU = nC_V dT$  y  $p = nRT/V$ , se puede expresar el calor transferido como:

$$dQ = nC_V dT + nRT \frac{dV}{V}$$

Ahora, dividiendo cada término entre  $T$ , se puede escribir:

$$\frac{dQ}{T} = nC_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

Suponiendo que  $C_V$  es constante, se puede integrar la ecuación anterior desde estado inicial  $T_i, V_i$  hasta el estado final  $T_f, V_f$ , se obtiene:

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ}{T} = nC_V \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i} \quad (15.10)$$

Esta expresión muestra que  $\Delta S$  depende sólo de los estados inicial y final y que es independiente de la trayectoria reversible. Además  $\Delta S$  puede ser negativo o positivo dependiendo de cuando el gas absorbe o libera calor durante el proceso. Por último, para un proceso cíclico (donde  $T_i = T_f$  y  $V_i = V_f$ ) se tiene que  $\Delta S = 0$ .

**Ejemplo 15.5** Una sustancia sólida con un calor latente de fusión  $L_f$  se funde a una temperatura  $T_m$ . Calcular el cambio de entropía cuando se funden  $m$  gramos de la sustancia. Hacer el cálculo si se funden 0.3 kg de plomo a  $327^\circ \text{C}$ , de calor de fusión 24.5 kJ/kg.

**Solución:** suponer que el proceso de fusión se produce lentamente en forma reversible. En este caso es posible considerar constante la temperatura  $T_m$ . Como el calor latente de fusión es  $Q = mL_f$ , reemplazando en la ecuación 15.7, se obtiene:

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_m} \int dQ = \frac{Q}{T_m} = \frac{mL_f}{T_m}$$

Con los valores numéricos:

$$\Delta S = \frac{0.3\text{kg} \times 24.5 \times 10^3 \text{ J / kg}}{600\text{K}} = 12.25 \text{ J / K}$$

### 15.7.2 Entropía en la conducción de calor.

Considerar la transferencia de calor  $Q$ , desde una fuente caliente a la temperatura  $T_C$  hacia una fuente fría que está a la temperatura  $T_F$ . Como la fuente fría absorbe el calor  $Q$ , su entropía aumenta en  $Q/T_F$ . Al mismo tiempo, la fuente caliente pierde el calor  $Q$ , y su entropía disminuye en  $Q/T_C$ . El aumento en la entropía de la fuente fría es mayor que la disminución de la entropía en la fuente caliente, ya que  $T_F$  es menor que  $T_C$ . Por lo tanto, el cambio total en la entropía del sistema es mayor que cero y su valor es:

$$\Delta S = \frac{Q}{T_F} - \frac{Q}{T_C} > 0 \quad (15.11)$$

Ejemplo 15.6 Una fuente fría está a 2° C y una fuente caliente a 127° C. Demostrar que es imposible que una pequeña cantidad de energía calórica, por ejemplo de 10 J, pueda ser transferida desde la fuente fría a la fuente caliente sin disminuir la entropía y en consecuencia violar la segunda ley de la termodinámica.

Solución: se supone que durante la transferencia de calor, las dos fuentes no cambian su temperatura. El cambio en la entropía de la fuente caliente es:

$$\Delta S_C = \frac{Q}{T_C} = \frac{10J}{400K} = 0.025J/K$$

La fuente fría pierde calor y su cambio de entropía es:

$$\Delta S_F = \frac{Q}{T_F} = \frac{-10J}{275K} = -0.036J/K$$

El cambio total de entropía es:

$$\Delta S = \Delta S_C + \Delta S_F = 0.025 - 0.036 = -0.011 J/K$$

Esto es una contradicción al concepto de que la entropía del universo siempre aumenta en los procesos naturales. Es decir, *la transferencia espontánea de calor de un objeto frío a un objeto caliente no puede ocurrir nunca jamás.*

### 15.7.3 Entropía en una expansión libre.

Considerar un gas ideal en un envase aislado que ocupa inicialmente un volumen  $V_i$  a la temperatura inicial  $T_i$ , en un espacio separado por una división (membrana) de otra parte del mismo envase, donde hay otro espacio vacío, como se muestra en la figura 15.6. En forma repentina se rompe la membrana, de modo que el gas se expande irreversiblemente hacia la región vacía, hasta ocupar un volumen final  $V_f$ . Se calculará el cambio de entropía del gas.

Es evidente que el proceso no es reversible ni cuasiestático. El trabajo realizado por el gas contra el vacío es cero y como el envase está aislado, no hay transferencia de calor durante la expansión, es decir  $W = 0$  y  $Q = 0$ . De la primera ley, se observa que el cambio en la energía interna es cero, por lo tanto  $U_i = U_f$ . Como el gas es ideal,  $U$  depende sólo de la temperatura, por lo que se puede concluir que  $T_i = T_f$ .

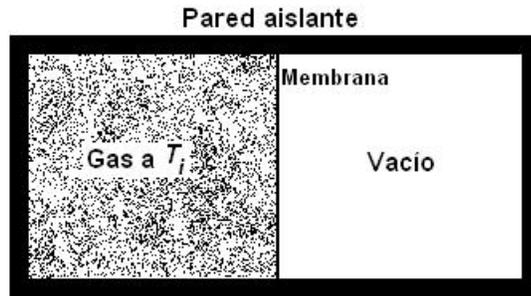


Figura 15.6. Expansión libre de un gas dentro de un envase aislado.

Como el proceso es irreversible, no se puede usar directamente la ecuación 15.8 para calcular el cambio de entropía. Para hacer su cálculo, hay que imaginar un proceso reversible entre los mismos estados inicial y final. Uno simple que se puede elegir, es una expansión isotérmica reversible en la cual el gas empuja lentamente a un émbolo. Ya que  $T$  es constante en ese proceso, de la ecuación 15.9 se obtiene:

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_i^f dQ$$

Pero la integral de  $dQ$  es simplemente el trabajo realizado por el gas durante la expansión isotérmica desde  $V_i$  hasta  $V_f$ , que está dado por la ecuación 13.8. Usando ese resultado, se encuentra que:

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_f}{V_i} \quad (15.12)$$

Como  $V_f > V_i$ , se concluye que  $\Delta S$  es positivo y tanto la entropía como el desorden del gas aumentan por efecto de la expansión adiabática. Estos resultados también se pueden obtener de la ecuación 15.10, observando que  $T_i = T_f$ , por lo tanto  $\ln T_f/T_i = \ln 1 = 0$ .

Ejemplo 15.7. Calcular el cambio de entropía de 2 moles de un gas ideal que realiza una expansión libre al triple de su volumen original.

Solución: aplicando la ecuación 15.12, con  $n = 2$  moles y  $V_f = 3V_i$ ,

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_f}{V_i}$$

$$\Delta S = 2 \text{ mol} \times 8.31 \text{ J/molK} \times \ln 3 = 18.3 \text{ J/K}$$

#### 15.7.4 Entropía en la transferencia de calor irreversible.

Una sustancia de masa  $m_1$ , calor específico  $c_1$  y temperatura inicial  $T_1$  se pone en contacto térmico con una segunda sustancia de masa  $m_2$ , calor específico  $c_2$  y temperatura inicial  $T_2$ , con  $T_2 > T_1$ . Las dos sustancias están contenidas en una caja aislante de tal manera que no se pierde calor hacia el ambiente. Se permite que el sistema alcance el equilibrio térmico y se quiere calcular el cambio de entropía del sistema. Por la conservación de la energía, la cantidad de calor  $Q_1$  que pierde una sustancia debe ser igual al calor  $Q_2$  que gana la otra sustancia, entonces:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_f} \frac{dQ_1}{T} + \int_{T_2}^{T_f} \frac{dQ_2}{T}$$

donde  $T_f$  es la temperatura final de equilibrio del sistema, que se debe calcular. Esta  $T_f$  se calcula sabiendo que  $Q_1 = -Q_2$  y como por definición  $Q = mc\Delta T$  para cada sustancia, se obtiene:

$$m_1 c_1 (T_f - T_1) = -m_2 c_2 (T_f - T_2)$$

Despejando  $T_f$  se tiene:

$$T_f = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

Ahora, integrando la expresión de  $\Delta S$ , se obtiene:

$$\Delta S = m_1 c_1 \ln \frac{T_f}{T_1} + m_2 c_2 \ln \frac{T_f}{T_2} \quad (15.13)$$

En esta ecuación, uno de los términos es positivo y el otro negativo, pero el término positivo siempre es mayor que el término negativo, dando por resultado un valor positivo de  $\Delta S$ . Entonces la entropía siempre aumenta en los procesos irreversibles.

La ecuación 15.13 es válida cuando las dos sustancias que se ponen en contacto térmico entre sí, no se mezclan. Si las sustancias son líquidos y se mezclan, el resultado sólo se aplica si los líquidos son idénticos, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15.8. Un kilo de agua a  $0^\circ \text{C}$  se mezcla con una cantidad igual de agua a  $100^\circ \text{C}$ . Después de que se alcanza el equilibrio, la mezcla tiene una temperatura uniforme de  $50^\circ \text{C}$ . Calcular el cambio de entropía del sistema.

Solución: el cambio de entropía se puede calcular con la ecuación 15.13, usando los valores  $m_1 = m_2 = 1\text{kg}$ ,  $c_1 = c_2 = 4186 \text{ J/(kgK)}$ ,  $T_1 = 273\text{K}$ ,  $T_2 = 373\text{K}$ ,  $T_f = 323\text{K}$ .

$$\Delta S = m_1 c_1 \ln \frac{T_f}{T_1} + m_2 c_2 \ln \frac{T_f}{T_2}$$

$$\Delta S = 1\text{kg} \times 4186 \text{ J/kgK} \ln \frac{323}{273} + 1\text{kg} \times 4186 \text{ J/kgK} \ln \frac{323}{373}$$

$$\Delta S = 704 \text{ J/K} - 602 \text{ J/K} = 102 \text{ J/K}$$

El resultado de este proceso irreversible es que el aumento en la entropía del agua fría es mayor que la disminución de la entropía del agua caliente.

-----

Los casos descritos muestran que el cambio en la entropía de un sistema siempre es positivo para un proceso irreversible. En general, la entropía total y el desorden siempre aumentan en los procesos irreversibles. De estas consideraciones, se puede enunciar la segunda ley de la termodinámica como sigue:

***“la entropía total de un sistema aislado que efectúa un cambio no puede disminuir”***

Además, si el proceso es irreversible, la entropía total de un sistema aislado siempre aumenta. Por otra parte, en un proceso reversible, la entropía total de un sistema aislado permanece constante. Cuando se trabaja con cuerpos interactuando que no están aislados, se debe recordar que el sistema se refiere a los cuerpos y sus alrededores. Cuando dos sustancias interactúan en un proceso irreversible, el aumento de la entropía de una parte del sistema es mayor que la disminución de la entropía de la otra parte. Por lo tanto, se puede concluir que:

***“el cambio en la entropía del Universo debe ser mayor que cero para un proceso irreversible e igual a cero para un proceso reversible”***

En el fin, la entropía del Universo deberá alcanzar un valor máximo. En este punto, el Universo se encontrará en un estado de temperatura y densidad uniforme. Todos los procesos físicos, químicos y biológicos terminarán, ya que un estado de desorden perfecto significa que no hay energía disponible para hacer trabajo. Este tenebroso estado de cosas se conoce como la ***“muerte del calor”*** del Universo.

**PROBLEMAS.**

- 15.1 Una máquina térmica absorbe 360 J de calor y realiza un trabajo de 25 J en cada ciclo. Calcular: a) la eficiencia de la máquina, b) el calor liberado en cada ciclo. R: a) 6.94%, b) 335 J.
- 15.2 Una máquina térmica realiza 200 J de trabajo en cada ciclo y tiene una eficiencia de 30%. Para cada ciclo de la operación calcular: a) el calor que absorbe, b) el calor que se libera.
- 15.3 Una máquina térmica tiene una potencia de salida de 5 kW y una eficiencia de 25%. Si la máquina libera 8000 J de calor en cada ciclo, calcular: a) el calor absorbido en cada ciclo, b) el tiempo que tarda en completar cada ciclo.
- 15.4 Una máquina térmica trabaja con una eficiencia de 32% durante el verano, cuando el agua de mar usada para enfriamiento está a 20° C. La planta utiliza vapor a 350° C para accionar las turbinas. Suponiendo que la eficiencia de la planta cambia en la misma proporción que la eficiencia ideal ¿Cuál es la eficiencia de la planta en invierno cuando el agua de mar se encuentra a 10° C? R: 33%.
- 15.5 Una central eléctrica nuclear genera 1200 MW y tiene una eficiencia de 30 %. Si se utilizara un río cuyo caudal es  $10^6$  kg/s para liberar el exceso de energía térmica, ¿en cuánto variaría la temperatura promedio del río? R: 0.95 K.
- 15.6 El calor absorbido por una máquina es el triple del trabajo que realiza. a) ¿Cuál es su eficiencia térmica?, b) ¿que fracción del calor absorbido se libera a la fuente fría? R: a) 33.3%, b) 66.7%.
- 15.7 Una máquina con una eficiencia de 20% se utiliza para acelerar un tren desde el reposo hasta 5 m/s. Se sabe que una máquina ideal (de Carnot) con los mismos depósitos fríos y caliente aceleraría el mismo tren desde el reposo hasta una velocidad de 6.5 m/s empleando la misma cantidad de combustible. Si la máquina emplea aire a 300 K como un depósito frío, encuentre la temperatura del vapor que sirve como depósito caliente. R: 175° C.

- 15.8 Una máquina absorbe 1600 J de una fuente caliente y libera 1000 J a la fuente fría en cada ciclo. Calcular: a) la eficiencia de la máquina, b) el trabajo que realiza en cada ciclo, c) la potencia de salida de la máquina si cada ciclo dura 0.3s. R: a) 37.5%, b) 600 J, c) 2 kW.
- 15.9 Una máquina térmica opera entre dos fuentes a temperaturas de 20° C y de 300° C. Calcular la máxima eficiencia de esta máquina.
- 15.10 La eficiencia de una máquina de Carnot es 30%. La máquina absorbe 800 J de calor por ciclo de una fuente caliente a 500 K. Calcular: a) el calor liberado por ciclo, b) la temperatura de la fuente fría. R: a) 560 J, b) 350 K.
- 15.11 Una máquina de Carnot tiene una potencia de salida de 150 kW. La máquina opera entre dos fuentes a temperaturas de 20° C y de 500° C. Calcular: a) la energía calórica que absorbe por hora, b) la energía calórica que pierde por hora.
- 15.12 Se ha propuesto construir una central de energía que haga uso del gradiente vertical de temperatura del océano, que opere entre la temperatura de la superficie, de 20° C, y otra a una profundidad de cerca de 1 km, de 5° C. a) Calcular la eficiencia de esa central. b) Si la potencia de salida de la central es 75 MW, calcular la energía térmica que se extrae del océano por hora. c) De acuerdo al resultado de a), ¿piensa que es posible esta central de energía? R: a) 5.1%, b)  $5.3 \times 10^{12}$  J.
- 15.13 Una máquina térmica opera en un ciclo de Carnot entre 80° C y 350° C. Absorbe 20000 J de calor de la fuente caliente por cada ciclo de 1 s de duración. Calcular: a) la máxima potencia de salida de esta máquina, b) el calor liberado en cada ciclo.
- 15.14 Una de las máquinas más eficientes que se han construido opera entre 430° C y 1870° C, con una eficiencia de 42%. Calcular: a) su eficiencia teórica máxima, b) su potencia de salida, si absorbe  $1.4 \times 10^5$  J de calor cada segundo. R: a) 67.2%, b) 58.8 kW.
- 15.15 Un gas ideal se lleva a través de un ciclo de Carnot. La expansión isotérmica se produce a 250° C y la compresión isotérmica se produce a

50° C. Si el gas absorbe 1200 J de calor durante la expansión isotérmica, calcular: a) el calor liberado en cada ciclo a la fuente fría, b) el trabajo neto realizado por el gas en cada ciclo. R: a) 741 J, b) 459 J.

- 15.16 El motor de un automóvil, opera con el ciclo mostrado en la figura 15.7, llamado ciclo de Otto idealizado. En un cilindro del motor, justo después de la combustión (estado B), el gas está confinado a un volumen de 50 cm<sup>3</sup> y su presión es de 3x10<sup>6</sup> Pa. En el proceso adiabático BC, el émbolo se mueve hacia fuera a un volumen final de 300 cm<sup>3</sup> mientras el gas se expande sin perder calor. En el proceso CD el volumen permanece constante y la presión desciende, de modo que en D es la mitad que en C. El proceso DA también es adiabático. Si la mezcla aire - gasolina pulverizada se comporta como gas ideal de  $c_v=5/2R$  y  $\gamma = 1.4$ , calcular a) las siguiente razones de presión:  $P_B/P_A$ ,  $P_C/P_B$ ,  $P_D/P_C$  y  $P_A/P_D$ , b) las siguiente razones de temperatura  $T_B/T_A$ ,  $T_C/T_B$ ,  $T_D/T_C$  y  $T_A/T_D$ , c) la eficiencia del ciclo.

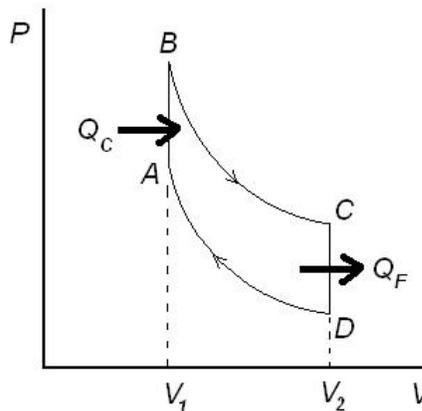


Figura 15.7. Problema 15.16

- 15.17 Dos máquinas térmicas tienen eficiencias  $e_1$  y  $e_2$ . Las dos operan de tal forma que el calor que libera la que tiene eficiencia  $e_1$  es el calor de entrada de la que tiene eficiencia  $e_2$ . Demuestre que la eficiencia total está dada por  $e = e_1 + e_2 - e_1e_2$ .
- 15.18 Cierta refrigerador que tiene un coeficiente de rendimiento igual a 5 y en cada ciclo absorbe 140 J de calor del depósito frío. Calcular: a) el trabajo hecho sobre la sustancia refrigerante en cada ciclo, b) el calor liberado hacia el depósito caliente (ambiente).

Cap. 15. Segunda ley de la termodinámica

- 15.19 Calcular el coeficiente de rendimiento de un refrigerador que opera con una eficiencia de Carnot entre las temperaturas  $-3^{\circ}\text{C}$  y  $27^{\circ}\text{C}$ . R: 9.
- 15.20 Calcular el coeficiente de rendimiento de una bomba de calor que lleva calor del exterior a  $-3^{\circ}\text{C}$  hacia el interior de una casa a  $22^{\circ}\text{C}$ .
- 15.21 Calcular el trabajo que se requiere, usando un refrigerador ideal de Carnot, para remover 1 J de energía calórica de helio a 4 K y liberarla al medio ambiente de una habitación a  $20^{\circ}\text{C}$ . R: 72.2 J.
- 15.22 Un refrigerador ideal es equivalente a una máquina de Carnot que opera a la inversa, donde el calor  $Q_F$  se absorbe de una fuente fría y el calor  $Q_C$  se libera a una fuente caliente. a) Demuestre que el trabajo que se debe realizar para que funcione el refrigerador es  $W = \frac{T_C - T_F}{T_F} Q$ .  
b) Demuestre que el coeficiente de rendimiento del refrigerador ideal es  $CR = \frac{T_F}{T_C - T_F}$ .
- 15.23 Calcular el cambio de entropía cuando un mol de plata (108 g) se funde a  $961^{\circ}\text{C}$ .
- 15.24 Calcular el cambio de entropía cuando: a) se funde 1.5 kg de hielo a 1 atm, b) se condensa 1.5 kg de vapor a 1 atm.
- 15.25 Una congeladora hermética tiene una temperatura inicial de  $25^{\circ}\text{C}$  y una presión de 1 atm. El aire se enfría después hasta  $-18^{\circ}\text{C}$ . Calcular el cambio de entropía si: a) el volumen se mantiene constante, b) la presión se mantuviera en 1 atm durante todo el enfriamiento. Analizar los resultados y comparar.
- 15.26 Una herradura de hierro de 0.5 kg se saca de un horno a  $1000^{\circ}\text{C}$  y se sumerge en 4 kg de agua a  $10^{\circ}\text{C}$ . Calcular el cambio de entropía total si no se pierde calor al ambiente. R: 735.4 J/K.
- 15.27 Un trozo de aluminio de 100 g a una temperatura de  $125^{\circ}\text{C}$  se coloca en  $\frac{1}{2}$  lt de agua a  $25^{\circ}\text{C}$ . Calcular el aumento de entropía del sistema cuando se alcanza el equilibrio. R: 28 J/K.

- 15.28 Una avalancha de nieve con una masa de 100 kg, desliza colina abajo una distancia vertical de 200 m. Calcular el cambio en la entropía si el aire de la montaña está a  $-3^{\circ}\text{C}$ . R: 7260 J/K.
- 15.29 Calcular la disminución en la entropía de 1 mol de helio, que se enfría a 1 atm desde una temperatura ambiente de 293 K hasta una temperatura final de 4 K ( $c_p$  del helio es 21 J/mol K).
- 15.30 Calcular el cambio de entropía cuando 250 g de agua se calientan desde  $20^{\circ}\text{C}$  hasta  $80^{\circ}\text{C}$ . R: 195 J/K.
- 15.31 Un envase contiene 500 g de hielo a  $0^{\circ}\text{C}$ . Calcular el cambio de entropía del hielo al descongelarse completamente.
- 15.32 Calcular el cambio de entropía cuando un mol de gas ideal monoatómico se calienta cuasiestáticamente a volumen constante, de 300 K a 400 K. R: 3.6 J/K.
- 15.33 Calcular el cambio de entropía cuando un kg de mercurio, que está al inicio a  $-100^{\circ}\text{C}$  se calienta lentamente hasta  $100^{\circ}\text{C}$ . El calor de fusión del mercurio es  $1.17 \times 10^4$  J/kg, su temperatura de fusión es  $-39^{\circ}\text{C}$  y el calor específico es 138 J/kg  $^{\circ}\text{C}$ .
- 15.34 Un mol de gas ideal monoatómico se lleva a través del siguiente ciclo: una expansión isotérmica AB desde el punto A(10lt, 5atm) hasta el punto B(50lt, 1atm), una compresión isobárica BC desde el punto B(50lt, 1atm) hasta el punto C(10lt, 1atm) y un aumento de presión isocoro CA desde el punto C(10lt, 1atm) hasta el punto A(10lt, 5atm). a) Dibujar el ciclo ABCA en el diagrama PV. Calcular: b) el trabajo neto realizado por el gas, c) el calor agregado al gas, d) el calor liberado por el gas, e) la eficiencia del ciclo, f) el cambio de entropía del ciclo. R: b) 4100 J, c) 14200 J, d) 10100 J, e) 28.8 %.
- 15.35 Las superficies del Sol y de la Tierra están aproximadamente a  $5700^{\circ}\text{C}$  y  $20^{\circ}\text{C}$ , respectivamente. Calcular el cambio de entropía cuando se transfieren 1000 J de energía térmica desde el Sol a la Tierra.

- 15.36 Calcular los cambios de entropía del gas para cada etapa del ciclo de la figura 15.7 y para el ciclo completo. Analizar los resultados.
- 15.37 Un auto de 1500 kg que se mueve a 20 m/s choca contra una pared de concreto. Si la temperatura del aire es 20° C, calcular el cambio de entropía. R: 1020 J/K.
- 15.38 Un recipiente térmicamente aislado de 2 litros está dividido en dos partes iguales (figura 15.6). El lado izquierdo contiene 0.044 moles de hidrógeno y el derecho 0.044 moles oxígeno, ambos a temperatura ambiente y presión atmosférica. Calcular el cambio de entropía al eliminar la división y dejar que los gases se mezclen. R: 507 J/K.
- 15.39 Un recipiente térmicamente aislado, de 4.2 litros está dividido en dos partes, una el doble que la otra, como muestra la figura 15.8. El lado izquierdo contiene hidrógeno y el derecho oxígeno, ambos a temperatura a 0° C y presión atmosférica. Calcular el cambio de entropía al eliminar la división y dejar que los gases se mezclen. R: 43.7 J/K.

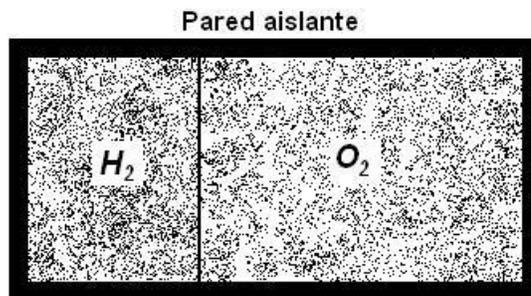


Figura 15.8. Problema 15.39

- 15.40 Si fluyen 3200 J de calor de una fuente de calor a 500 K a otra fuente de 300 K, a través de una varilla de metal conductora, calcular la variación de la entropía de a) la fuente caliente, b) la fuente fría, c) la varilla de metal, d) total.
- 15.41 Un bloque de 2 kg que se mueve con una rapidez inicial de 5 m/s se desliza sobre una mesa rugosa, hasta detenerse por la fricción. Suponiendo que el aire y la mesa están a la temperatura de 20° C, calcular la variación de la entropía. R: 0.085 J/K.

- 15.42 Un bloque de hielo de 6 kg a  $0^{\circ}\text{C}$  se deja caer en un lago a  $27^{\circ}\text{C}$ . Justamente después de que se haya fundido todo el hielo y justamente antes de que el agua del lago se haya calentado, calcular la variación de la entropía de: a) el hielo, b) el lago, c) total. R: a) 7340 J/K, b) -6680 J/K, c) 660 J/K.
- 15.43 Una máquina térmica cíclica opera entre dos fuentes a temperaturas de 300 K y de 500 K. En cada ciclo, la máquina absorbe 700 J de calor de la fuente caliente y realiza un trabajo de 160 J. Calcular la variación de entropía en cada ciclo para: a) cada fuente, b) la máquina, c) total.
- 15.44 Si se mezclan 200 g de agua a  $20^{\circ}\text{C}$  con 300 g de agua a  $75^{\circ}\text{C}$ , calcular: a) la temperatura final de equilibrio de la mezcla, b) la variación de entropía del sistema. R: a)  $53^{\circ}\text{C}$ , b) 7.34 J/K.
- 15.45 Un cubo de hielo de 18 gr a  $0^{\circ}\text{C}$  se calienta hasta que se convierte en vapor. Calcular: a) el aumento de entropía, b) la energía que se requiere para vaporizar el cubo de hielo.
- 15.46 Una máquina opera en un ciclo entre las temperaturas  $100^{\circ}\text{C}$  y  $180^{\circ}\text{C}$  y emite 20000 J de calor por ciclo mientras realiza 1500 J de trabajo por ciclo. Compare la eficiencia de esta máquina con la de una máquina reversible que opera entre las mismas temperaturas. R: 0.4 veces su valor.

## APENDICES.

### A. ALGEBRA.

Reglas para sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones, donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son cuatro números:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$$

Para multiplicar y dividir potencias, se aplican las siguientes reglas, donde  $n$  y  $m$  son números y  $x$  alguna variable:

$$x^n x^m = x^{n+m}$$

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

Una potencia fraccionaria corresponde a una raíz:

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

Cualquier cantidad  $x^n$  que es elevada a una potencia  $m$ , es:

$$(x^n)^m = x^{nm}$$

Algunas fórmulas útiles para factorizar una ecuación son:

$$\text{Cuadrado de un binomio: } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{Diferencia de cuadrados: } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

La forma general de una ecuación cuadrática es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde  $x$  es la cantidad desconocida y  $a$ ,  $b$  y  $c$  son factores numéricos conocidos como coeficientes de la ecuación; tiene dos soluciones dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si  $b^2 \geq 4ac$ , las soluciones serán reales.

Logaritmos. Si la variable  $x$  se expresa como potencia de una cantidad  $a$ , de la forma

$$x = a^y$$

el número  $a$  se llama base. El logaritmo de  $x$  con respecto a la base  $a$  es igual al exponente al cual se debe elevar la base, que se escribe como:

$$y = \log_a x$$

En la práctica, las dos bases más usadas son la base 10, llamada logaritmo común, y la base  $e = 2.718\dots$ , llamada logaritmo natural. Para el logaritmo común y natural se utiliza respectivamente las notaciones:

$$y = \log x \Leftrightarrow x = 10^y$$

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$$

Algunas propiedades de los logaritmos son las siguientes:

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

$$\log(x/y) = \log x - \log y$$

$$\log(x^n) = n \log x$$

$$\log 1 = \ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln e^a = a$$

## B. GEOMETRÍA

La distancia  $d$  entre dos puntos cuyas coordenadas son  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Para calcular el ángulo en radianes, se sabe que la longitud del arco  $s$  (Fig. B.1) es proporcional al radio  $r$ , para el valor de  $\theta$  medido en radianes.

$$s = r\theta \Rightarrow \theta = \frac{s}{r}$$

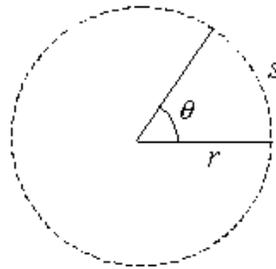


Figura B.1

La ecuación de una línea recta (Fig. B.2) está dada por  $y = mx + b$ , donde  $b$  es la intersección con  $y$  y  $m$  la pendiente de la recta.

La ecuación de un círculo de radio  $R$  centrado en el origen es:  $x^2 + y^2 = R^2$

La ecuación de una elipse con el origen como su centro (Fig. B.3) es:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , donde  $a$  es la longitud del semieje mayor y  $b$  es la longitud del semieje menor.

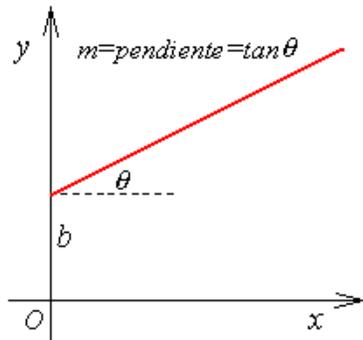


Figura B.2

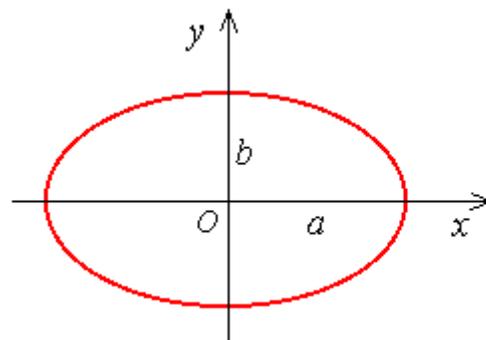


Figura B.3

La ecuación de la parábola cuyo vértice está en  $y = b$  (Fig. B.4) es:  $y = ax^2 + b$ .

La ecuación de una hipérbola rectangular (Fig. B.5) es:  $xy = cte$

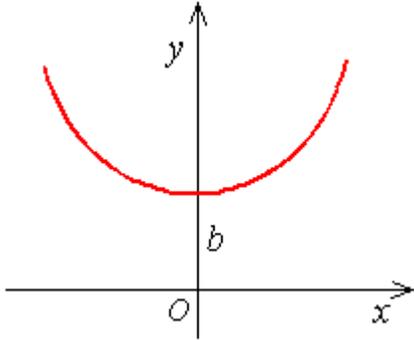


Figura B.4

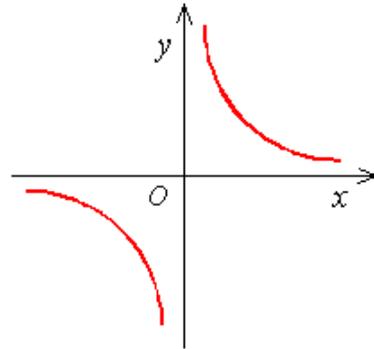


Figura B.5

Áreas y volúmenes.

Forma	Área	Volumen
Rectángulo lados $a$ y $b$	$a \times b$	
Circunferencia de radio $r$	$\pi r^2$	
Triángulo base $b$ , altura $h$	$\frac{1}{2}bh$	
Caja rectangular lados $a, b, c$	$2(ab + bc + ca)$	$a \times b \times c$
Cilindro largo $h$ , radio $r$	$2(\pi r^2 + \pi rh)$	$\pi r^2 h$
Esfera radio $r$	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

### C. TRIGONOMETRÍA.

La parte de las matemáticas que se basa en las propiedades especiales de los triángulos rectángulos se llama trigonometría. Por definición, un triángulo recto es el que contiene un ángulo de  $90^\circ$ . Considérese el triángulo recto de la figura C.1, donde el lado  $a$  es opuesto al ángulo  $\theta$ , el lado  $b$  es adjunto al ángulo  $\theta$  y el lado  $c$  es la hipotenusa del triángulo. Las tres funciones trigonométricas básicas definidas para tales triángulos son las funciones seno (sen), coseno (cos) y tangente (tan). En términos del ángulo  $\theta$ , estas funciones se definen por:

$$\text{sen}\theta \equiv \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{cos}\theta \equiv \frac{\text{lado adyacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tan}\theta \equiv \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{lado adyacente a } \theta} = \frac{a}{b}$$

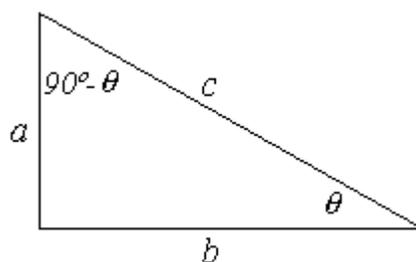


Figura C.1

El teorema de Pitágoras da la siguiente relación entre los lados de un triángulo rectángulo:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

De las definiciones anteriores y el teorema de Pitágoras, se sigue que:

$$\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = 1 \quad \text{tan}\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta}$$

Las funciones cotangente, secante y cosecante están definidas directamente de un triángulo recto mostrado en la figura C.1 como:

$$\text{cot}\theta \equiv \frac{1}{\text{tan}\theta} \quad \text{sec}\theta \equiv \frac{1}{\text{cos}\theta} \quad \text{csc}\theta \equiv \frac{1}{\text{sen}\theta}$$

Algunas de las propiedades de las funciones trigonométricas son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} \theta &= \cos(90^\circ - \theta) & \operatorname{sen}(-\theta) &= -\operatorname{sen} \theta \\
 \cos \theta &= \operatorname{sen}(90^\circ - \theta), & \cos(-\theta) &= \cos \theta \\
 \cot \theta &= \tan(90^\circ - \theta) & \tan(-\theta) &= -\tan \theta
 \end{aligned}$$

Las siguientes relaciones se aplican a cualquier triángulo, como el de la figura C.2:

$$a + \beta + \gamma = 180^\circ$$

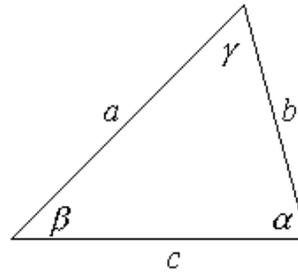


Figura C.2

$$\text{Ley de los cosenos} \quad \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{cases}$$

$$\text{Ley de los senos} \quad \left\{ \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} \right.$$

La tabla C.1 lista algunas identidades trigonométricas útiles.

**Tabla C.1 Algunas identidades trigonométricas.**

$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$	$\operatorname{cos} 2\theta = \operatorname{cos}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$
$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$	$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \theta}{1 + \operatorname{cos} \theta}}$
$\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{cos} \theta)$	$\operatorname{cos}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{cos} \theta)$
$\operatorname{sec}^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$	$\operatorname{csc}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$
$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$	
$\operatorname{cos}(A \pm B) = \operatorname{cos} A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$	
$\operatorname{sen} A \pm \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A \pm B) \operatorname{cos} \frac{1}{2}(A \mp B)$	
$\operatorname{cos} A + \operatorname{cos} B = 2 \operatorname{cos} \frac{1}{2}(A + B) \operatorname{cos} \frac{1}{2}(A - B)$	
$\operatorname{cos} A - \operatorname{cos} B = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + B) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(B - A)$	

## D. DERIVADAS E INTEGRALES.

Tabla D.1 Derivadas de algunas funciones.

Nota: Las letras  $a$  y  $n$  son constantes.

$\frac{d}{dx}(a) = 0$	$\frac{d}{dx}(\tan ax) = a \sec^2 ax$
$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(\cot ax) = -a \csc^2 ax$
$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \sec x$
$\frac{d}{dx}(\sin ax) = a \cos ax$	$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\cot x \csc x$
$\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a \operatorname{sen} ax$	$\frac{d}{dx}(\ln ax) = \frac{a}{x}$
$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{arccos} \frac{x}{a} = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
$\frac{d}{dx} \operatorname{arctan} \frac{x}{a} = \frac{a}{a^2 + x^2}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{arc cot} \frac{x}{a} = \frac{-a}{a^2 + x^2}$
$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$	$\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{1}{v} \frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2} \frac{dv}{dx}$

Tabla D.2 Algunas integrales indefinidas.

Nota: Las letras  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $n$  son constantes.

Una constante arbitraria se debe sumar a cada una de estas integrales.

$\int dx = x$	$\int x \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} (x^2 \pm a^2)^{3/2}$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$
$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} = -\operatorname{arccos} \frac{x}{a}$
$\int -\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctan} \frac{x}{a}$
$\int e^{-x} dx = -e^{-x}$	$\int \operatorname{sen} ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$

$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$	$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen} ax$
$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$	$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln(\cos ax) = \frac{1}{a} \ln(\sec ax)$
$\int a^x dx = \frac{a}{\log a}$	$\int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln(\operatorname{sen} ax)$
$\int \ln ax dx = x \ln ax - x$	$\int \sec ax dx = \frac{1}{a} \ln(\sec ax + \tan ax)$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x$	$\int \csc ax dx = \frac{1}{a} \ln(\csc ax - \cot ax)$
$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln(a+bx)$	$\int \operatorname{sen}^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
$\int \frac{dx}{a+be^{cx}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ac} \ln(a+be^{cx})$	$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}, a^2-x^2 > 0$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax} = -\frac{1}{a} \cot ax$
$\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln(a^2 \pm x^2)$	$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \tan ax$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$	$\int \tan^2 ax dx = \frac{1}{a} \tan ax - x$
$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$	$\int \cot^2 ax dx = -\frac{1}{a} \cot ax - x$
$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$	$\int \arcsin ax dx = x \arcsin ax + \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$
$\int x\sqrt{a^2-x^2} dx = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}$	$\int \arccos ax dx = x \arccos ax - \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$

E. DATOS COMUNES EN EL SISTEMA SOLAR Y TERRESTRE.

Tabla E1. Datos del sistema solar.

<b>Cuerpo</b>	<b>Masa (kg)</b>	<b>Radio prom. (m)</b>	<b>Periodo (s)</b>	<b>Distancia al Sol (m)</b>
<b>Mercurio</b>	$3.18 \times 10^{23}$	$2.43 \times 10^6$	$7.60 \times 10^6$	$5.79 \times 10^{10}$
<b>Venus</b>	$4.88 \times 10^{24}$	$6.06 \times 10^6$	$1.94 \times 10^7$	$1.08 \times 10^{11}$
<b>Tierra</b>	$5.98 \times 10^{24}$	$6.37 \times 10^6$	$3.156 \times 10^7$	$1.496 \times 10^{11}$
<b>Marte</b>	$6.42 \times 10^{23}$	$3.37 \times 10^6$	$5.94 \times 10^7$	$2.28 \times 10^{11}$
<b>Júpiter</b>	$1.90 \times 10^{27}$	$6.99 \times 10^7$	$3.74 \times 10^8$	$7.78 \times 10^{11}$
<b>Saturno</b>	$5.68 \times 10^{26}$	$5.85 \times 10^7$	$9.35 \times 10^8$	$1.43 \times 10^{12}$
<b>Urano</b>	$8.68 \times 10^{25}$	$2.33 \times 10^7$	$2.64 \times 10^9$	$2.87 \times 10^{12}$
<b>Neptuno</b>	$1.03 \times 10^{26}$	$2.21 \times 10^7$	$5.22 \times 10^9$	$4.50 \times 10^{12}$
<b>Plutón</b>	$\approx 1.4 \times 10^{22}$	$\approx 1.5 \times 10^6$	$7.82 \times 10^9$	$5.91 \times 10^{12}$
<b>Luna</b>	$7.36 \times 10^{22}$	$1.74 \times 10^6$		
<b>Sol</b>	$1.99 \times 10^{30}$	$6.96 \times 10^8$		

Tabla E2. Valores de los datos físicos comúnmente utilizados.

<b>Aceleración debida a la gravedad</b>	$\approx 9.80 \text{ m/s}^2$
<b>Rapidez de la luz</b>	$\approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$
<b>Presión atmosférica estándar</b>	$\approx 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$
<b>Densidad del aire (20°C y 1 atm)</b>	$\approx 1.25 \text{ kg/m}^3$
<b>Densidad del agua (20°C y 1atm)</b>	$1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
<b>Rapidez angular de la Tierra</b>	$7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$
<b>Inclinación eje terrestre</b>	$23.5^\circ$
<b>Distancia promedio Tierra-Luna</b>	$3.84 \times 10^8 \text{ m}$
<b>Distancia promedio Tierra-Sol</b>	$1.496 \times 10^{11} \text{ m}$
<b>Radio promedio de la Tierra</b>	$6.37 \times 10^6 \text{ m}$
<b>Masa de la Tierra</b>	$5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$
<b>Masa de la Luna</b>	$7.36 \times 10^{22} \text{ kg}$
<b>Masa del Sol</b>	$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

F. FACTORES DE CONVERSIÓN DE UNIDADES DE MEDIDA.

Tabla F1. Longitud.

	<b>m</b>	<b>Cm</b>	<b>km</b>	<b>pulg</b>	<b>pie</b>	<b>mi</b>
<b>1 metro</b>	1	$10^2$	$10^3$	39.37	3.281	$6.214 \times 10^{-4}$
<b>1 centímetro</b>	$10^{-2}$	1	$10^{-5}$	0.3937	$3.281 \times 10^{-2}$	$6.214 \times 10^{-6}$
<b>1 kilómetro</b>	$10^3$	$10^5$	1	$3.937 \times 10^4$	$3.281 \times 10^3$	0.6214
<b>1 pulgada</b>	$2.54 \times 10^{-2}$	2.54	$2.54 \times 10^{-5}$	1	$8.333 \times 10^{-2}$	$1.578 \times 10^{-5}$
<b>1 pie</b>	0.3048	30.48	$3.048 \times 10^{-4}$	12	1	$1.894 \times 10^{-4}$
<b>1 milla</b>	1609	$1.609 \times 10^5$	1.609	$6.336 \times 10^4$	5280	1

Tabla F2. Masa.

	<b>Kg</b>	<b>g</b>	<b>slug</b>	<b>u</b>
<b>1 kilogramo</b>	1	$10^3$	$6.852 \times 10^{-2}$	$6.024 \times 10^{26}$
<b>1 gramo</b>	$10^{-3}$	1	$6.852 \times 10^{-5}$	$6.024 \times 10^{23}$
<b>1 slug (lb/g)</b>	14.59	$1.459 \times 10^4$	1	$8.789 \times 10^{27}$
<b>1 unidad de masa atómica</b>	$1.66 \times 10^{-27}$	$1.66 \times 10^{-24}$	$1.137 \times 10^{-28}$	1

Tabla F3. Tiempo.

	<b>s</b>	<b>Min</b>	<b>h</b>	<b>Día</b>	<b>año</b>
<b>1 segundo</b>	1	$1.667 \times 10^{-2}$	$2.778 \times 10^{-4}$	$1.157 \times 10^{-5}$	$3.169 \times 10^{-8}$
<b>1 minuto</b>	60	1	$1.667 \times 10^{-2}$	$6.994 \times 10^{-4}$	$1.901 \times 10^{-6}$
<b>1 hora</b>	3600	60	1	$4.167 \times 10^{-2}$	$1.141 \times 10^{-4}$
<b>1 día</b>	$8.64 \times 10^4$	1440	24	1	$2.738 \times 10^{-3}$
<b>1 año</b>	$3.156 \times 10^7$	$5.259 \times 10^5$	$8.766 \times 10^3$	365.2	1

Tabla F4. Fuerza.

	<b>N</b>	<b>dina</b>	<b>lb</b>
<b>1 Newton</b>	1	$10^5$	0.2248
<b>1 dina</b>	$10^{-5}$	1	$2.248 \times 10^{-6}$
<b>1 libra</b>	4.448	$4.448 \times 10^5$	1

Tabla F5. Trabajo, energía y calor

	<b>J</b>	<b>erg</b>	<b>pie · lb</b>	<b>eV</b>	<b>cal</b>	<b>Btu</b>	<b>kWh</b>
<b>1 joule</b>	1	$10^7$	0.7376	$6.242 \times 10^{18}$	0.2389	$9.481 \times 10^{-4}$	$2.778 \times 10^{-7}$
<b>1 erg</b>	$10^{-7}$	1	$7.376 \times 10^{-8}$	$6.242 \times 10^{11}$	$2.389 \times 10^{-8}$	$9.481 \times 10^{-11}$	$2.778 \times 10^{-14}$
<b>1 pie · lb</b>	1.356	$1.356 \times 10^7$	1	$8.464 \times 10^{18}$	0.3239	$1.285 \times 10^{-3}$	$3.766 \times 10^{-7}$
<b>1 eV</b>	$1.6 \times 10^{-19}$	$1.602 \times 10^{-12}$	$1.182 \times 10^{-19}$	1	$3.827 \times 10^{-20}$	$1.519 \times 10^{-22}$	$4.450 \times 10^{-26}$
<b>1 cal</b>	4.186	$4.186 \times 10^7$	3.087	$2.613 \times 10^{19}$	1	$3.968 \times 10^{-3}$	$1.163 \times 10^{-6}$
<b>1 Btu</b>	$1.06 \times 10^3$	$1.055 \times 10^{10}$	$7.779 \times 10^2$	$6.585 \times 10^{21}$	$2.520 \times 10^2$	1	$2.930 \times 10^{-4}$
<b>1 kWh</b>	$3.6 \times 10^6$	$3.6 \times 10^{13}$	$2.655 \times 10^6$	$2.247 \times 10^{25}$	$8.601 \times 10^5$	$3413 \times 10^2$	1

Tabla F6. Presión.

	<b>Pa</b>	<b>dina/cm<sup>2</sup></b>	<b>Atm</b>	<b>cm Hg</b>	<b>Ib/pulg<sup>2</sup></b>	<b>Ib/pie<sup>2</sup></b>
<b>1 pascal</b>	1	10	$9.869 \times 10^{-6}$	$7.501 \times 10^{-4}$	$1.45 \times 10^{-4}$	$2.089 \times 10^{-2}$
<b>1 dina/centímetro<sup>2</sup></b>	$10^{-1}$	1	$9.869 \times 10^{-7}$	$7.501 \times 10^{-5}$	$1.45 \times 10^{-5}$	$2.089 \times 10^{-3}$
<b>1 atmósfera</b>	$1.013 \times 10^5$	$1.013 \times 10^6$	1	76	14.7	$2.116 \times 10^3$
<b>1 cm de mercurio*</b>	$1.333 \times 10^3$	$1.333 \times 10^4$	$1.316 \times 10^{-2}$	1	0.1943	27.85
<b>1 libra/pulgada<sup>2</sup></b>	$6.895 \times 10^3$	$6.895 \times 10^4$	$6.805 \times 10^{-2}$	5.171	1	144
<b>1 libra/pie<sup>2</sup></b>	47.88	$4.788 \times 10^2$	$4.725 \times 10^{-4}$	$3.591 \times 10^{-2}$	$6.944 \times 10^{-3}$	1

\* A 0°C y en un lugar donde la aceleración debida a la gravedad sea su valor estándar,  $9.80665 \text{ m/s}^2$ .

G. LETRAS GRIEGAS.

Tabla G1. Alfabeto Griego - Αλφαβητο Γριεγο.

Alfa	α A	Nu	ν N
Beta	β B	Omicron	ο O
Gamma	γ Γ	Pi	π Π
Delta	δ Δ	Theta	θ ϑ Θ
Epsilon	ε E	Rho	ρ P
Phi (Fi)	φ φ Φ	Sigma	σ Σ
Eta	η H	Tau	τ T
Iota	ι I	Upsilon	υ Y
Chi (Ji)	χ X	Omega	ω Ω
Kappa	κ K	Xi	ξ Ξ
Lambda	λ Λ	Psi	ψ Ψ
Mu	μ M	Zeta	ζ Z