



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
MAGÍSTER EN CIENCIAS MENCIÓN FÍSICA

Lagrangiano de Horndeski con torsión y aplicaciones en cosmología

Tesis para optar al grado de
Magíster en Ciencias con mención en Física

por

Daniela Alejandra Narbona Olivares

Director de Tesis : Dr. Fernando Izaurieta Aranda

Comisión : Dr. María Antonella Cid Muñoz
Dr. Jorge Zanelli Iglesias
Dr. Patricio Salgao Arias

CONCEPCIÓN • CHILE
ABRIL 2017

Tabla de Contenido

Índice de Cuadros	v
Índice de Figuras	vii
Agradecimientos	ix
Resumen	xi
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Plan de trabajo	3
2. Preliminares matemáticos	5
2.1. Preliminares Geométricos	5
2.1.1. Variedades	5
2.1.2. Espacio tangente y cotangente	6
2.1.3. n -forma	8
2.2. Geometría de Riemann para la Relatividad General	10
2.2.1. Estructura métrica	10
2.2.2. Estructura afín	11
2.3. Geometría de Cartan para la Relatividad General	14
2.4. Delta de Kronecker generalizada	18
3. Gravedad en el lenguaje de primer orden	21
3.1. Construcción de una Acción	21
3.2. Ecuaciones de movimiento	23
3.3. Tensor torsional de energía-momentum	26
4. Gravedad modificada y Teoría de Horndeski	29
4.1. Gravedad modificada	29
4.2. Teorías Tenso-escalares	31
4.2.1. Teoría de Horndeski	31

4.3. Teoría de Horndeski con torsión	34
4.3.1. Ecuaciones de movimiento	36
4.3.2. Un caso particular: Teoría de Horndeski	42
5. Cosmología, campo escalar y torsión	47
5.1. El modelo cosmológico estándar	47
5.1.1. Un universo en expansión	48
5.2. Cosmología tenso-escalar	51
5.2.1. Un lagrangeano con campo escalar no-minimalmente acoplado .	51
5.2.2. Solución cosmológica para $\mathcal{L}_G(\phi, e, \omega)$	55
5.2.3. Solución para el universo tardío	59
6. Conclusiones	69
Referencias	73



Índice de Cuadros

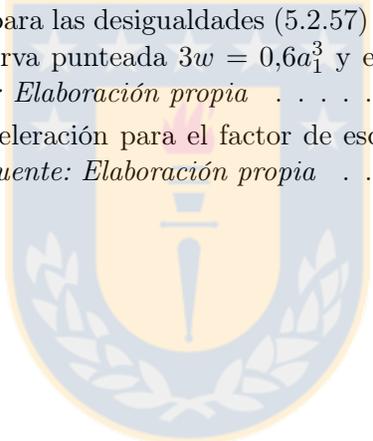
5.1. Comportamiento del factor de escala, dado por (5.2.49), dependiendo de los parámetros 63





Índice de Figuras

5.2.1. Comportamiento del factor de escala con $\bar{a}(\tau = 0) = 0$. En (a) y (b) $a_1^3 = 2$ y en (c) $a_1^3 = 1$. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	63
5.2.2. Comportamiento del factor de escala, con $\bar{a}(\tau = 0) \rightarrow \infty$. En (d) $a_1^3 = 2$, en (e) $a_3^3 = 2 \wedge Z_0^2 = 1$ y en (f) $a_1^3 = 1$. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	64
5.2.3. Comportamiento del factor de escala con $\bar{a}(\tau = 0) = \text{cte}$. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	64
5.2.4. Límites inferiores para las desigualdades (5.2.57) y (5.2.58). En curva sólida $w = 0$, en curva punteada $3w = 0,6a_1^3$ y en curva discontinua $3w = 0,95a_1^3$. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	66
5.2.5. Parámetro de desaceleración para el factor de escala con $\beta = 4,5Z_0^2$, $w = 0,2$ y $a_1 = 2$. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	66





Agradecimientos

Agradezco a todos los que han colaborado en la realización de esta tesis. A mi tutor Dr. Fernando Izaurieta, por haberme presentado el apasionante tema que he desarrollado, por entregarme el apoyo que necesité en el inicio de esta tesis, y por las jornadas de trabajo que tuvimos para desarrollar diferentes etapas de la tesis; además, por haberme dado la oportunidad de trabajar en el enriquecedor proyecto de divulgación realizado en el Liceo San Francisco de Asís de Arauco. Agradezco al Centro de Estudios Científicos por acogerme con hospitalidad y al Dr. Jorge Zanelli por guiarme en momentos cruciales, ayudarme a comprender con mayor profundidad conceptos fundamentales y haber aceptado ser parte de la comisión evaluadora de esta tesis. A la Dra. Antonella Cid de la UBB, por el gran apoyo que ha significado, principalmente en la etapa de finalización de la investigación y por las largas jornadas de trabajo que hemos tenido. Por último, agradezco enormemente a mi compañera y amiga Perla Medina, con la que hemos trabajado codo a codo en esta investigación, y sin duda sin su compañía este camino habría sido mucho más arduo y pedregoso.

También agradezco a las personas que han influido, de distintas formas, en mi desarrollo como investigadora. Al Dr. Alberto Foppiano, por haberme abierto las puertas de la UdeC, al acogerme en el momento que quise conocer esta universidad. Al Dr. Patricio Salgado, por su guía, principalmente en los primeros meses del Magíster, y por su disponibilidad permanente, la que ha sido fundamental para fortalecer mis conocimientos físicos y profundizar mis valores científicos y humanos, y también por haber aceptado ser parte de la comisión evaluadora de esta tesis.

Hago un agradecimiento especial a las secretarias del Departamento de Física, Patricia Luarte y Julia Herrera, y principalmente a Soledad Daroch, por su disponibilidad siempre amable para orientarme en el trato con la burocracia con la que interactué durante mis estudios de Magíster y a los auxiliares Heraldó Manríquez y Juan Carlos Burgos por su amable trato con el que me han recibido siempre.

Por último, hago un especial reconocimiento del aporte tanto personal como profesional, que ha significado mi participación en el Centro de Estudiantes de Postgrado en Física de la UdeC CEPFis; principalmente, por las vivencias y largas conversaciones que hemos tenido con todos los participantes de éste, que en estos dos años han sido Nataly Ibarra, Ignacio Ormazabal, Alexander Smith, Pablo Rodríguez, Fabián Orellana, Luis Avilés, Felipe Toledo, Gustavo Rubio, Alexandra Suárez y Marco Rivera. Con el objetivo de mejorar el ambiente de investigación para los estudiantes, hemos ido construyendo un ideal, en el cual necesitamos trabajar como estudiantes, como investigadores y académicos. Espero que todos nuestros ideales sean fecundos y logremos, desde cada una de nuestras realidades, transmitirlos en nuestros entornos.

Resumen

En esta tesis estudiamos la teoría de Horndeski con torsión, el estudio de sus ecuaciones de campo y una solución cosmológica para un caso particular de esta teoría. Para esto, partimos con una revisión de tópicos preliminares sobre geometría, que nos da las bases para la formación de una teoría para la gravedad. Posteriormente damos un profundo análisis sobre la teoría de Einstein-Cartan, que corresponde a la Relatividad General de Einstein con torsión no nula. Luego, estudiamos las posibles formas de modificar la Relatividad General, con un enfoque en las teorías tenso-escalares y haciendo una revisión bibliográfica sobre la teoría más general con un campo escalar y un campo métrico que entrega ecuaciones de movimiento de segundo orden en las derivadas de los campos, realizada por Gregory Horndeski.

Se crea un conjunto de herramientas, con el objetivo de escribir el lagrangeano de Horndeski en el lenguaje de formas diferenciales con torsión no nula y encontrar las ecuaciones de campo correspondientes a esta nueva teoría. Para concluir el estudio teórico de la teoría de Horndeski con torsión, analizamos el límite en el cual, esta nueva teoría de Horndeski en el marco de una teoría con torsión, deriva a la original.

Por último, se estudia una solución analítica para un caso particular del lagrangeano de Horndeski con torsión. Para esto, incorporamos la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker a las ecuaciones de movimiento de este lagrangeano, y nos enfocamos en el universo tardío, con el objetivo de describir la expansión acelerada del universo en términos de un fluido efectivo dependiente de los términos asociados a la torsión y al campo escalar.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

El estudio del comportamiento macroscópico del universo nos ha entregado una de las teorías físicas más bellas, la Relatividad General de Albert Einstein, la cual modela a través de la geometría la interacción gravitacional, y junto con la Teoría Cuántica de Campo entregan las directrices para la comprensión de gran parte de el universo a nivel tanto macroscópico como microscópico, respectivamente. A través de la Relatividad General, podemos explicar desde el movimiento de los planetas, hasta estructuras tan enigmáticas como los agujeros negros; o comprender la formación de prácticamente todas las estructuras en el universo. Esta teoría nos ha mostrado la relevancia del estudio de la geometría para comprender la naturaleza, y nos abre un camino a nuevas formas de imaginarnos el universo.

En la naturaleza podemos observar una diversidad de interacciones a diferentes escalas. Éstas corresponden a la interacción electromagnética, que afecta a las partículas con carga eléctrica, la interacción nuclear débil y fuerte, que afecta a las partículas subatómicas y la interacción gravitacional, que afecta a todas las partículas que poseen masa y/o energía. Cabe destacar que la interacción gravitacional es la más débil de las cuatro interacciones. Uno de los temas que ha apasionado a la mayoría de los físicos, en la historia de la ciencia, es la unificación de diversas teorías, y la unificación de las interacciones fundamentales no escapa de este interés. Hasta ahora sólo se han logrado unificar las primeras dos, la electromagnética y la interacción nuclear débil, en la llamada interacción electrodébil. Además, de las cuatro interacciones fundamentales, la gravitacional se resiste fuertemente a la unificación con las otras tres, entonces ¿por qué insistir en la gran unificación de las interacciones fundamentales? Una razón física, es que si intentamos comprender el inicio de universo, donde las partículas poseían altas energías, se vuelve necesario entender la interacción gravitacional a niveles microscópicos, ya que a esta escala de energía la interacción gravitacional se vuelve significativa al igual que las restantes interacciones fundamentales. Así, un camino plausible en la búsqueda de la gran unificación, es proponer teorías distintas a la Relatividad General, o modificaciones de ésta.

Por otra parte, las soluciones cosmológicas de una teoría, son una manera de acercarnos a su contenido físico y a sus predicciones observacionales. La cosmología

estándar se encarga de esto en el caso de la Relatividad General, y entrega un modelo que describe el universo desde la primera fracción de segundo hasta la etapa actual de una manera bastante satisfactoria. Sin embargo, siguiendo las soluciones provenientes de la Relatividad General, debería existir una cantidad importante de “materia oscura” en las galaxias y en los cúmulos de galaxias. Añadido a esto, por las observaciones astronómicas, sabemos que el universo se está expandiendo de forma acelerada, debido a la llamada “energía oscura”, sin embargo, para que la teoría de Einstein sea consistente con este comportamiento, es necesario incorporar un ingrediente a la teoría, una densidad de energía con presión negativa. Éste problema nos lleva a buscar, nuevamente, teorías que vayan más allá de la Relatividad General.

En este sentido, es interesante y necesario indagar en nuevos modelos teóricos y cosmológicos que involucren modificaciones a la Relatividad General. Trabajos destacados en la línea de investigación teórica son, la teoría de Einstein-Cartan, propuesta por Elie Cartan en 1922 [5–7], y las teorías tenso-escalares como Brans-Dicke de 1961 [3] y Horndeski de 1974 [28], todas teorías desarrolladas en cuatro dimensiones. La teoría de Einstein-Cartan modifica la geometría agregando un campo independiente, asumiendo que la metricidad y la afinidad son conceptos independientes, dando como resultado una teoría con torsión no nula. La geometría de la teoría de la gravedad de Einstein, corresponde a la Geometría Riemanniana. Uno de los fundamentos de ésta es que la conexión afín es simétrica, lo que trae como consecuencia, una geometría libre de torsión, y que el único campo independiente sea la métrica. Dado que la geometría es la que entrega las bases para un modelo gravitatorio, el cambio de ésta entrega un nuevo camino para explorar otras maneras de formular una teoría. Es así como Elie Cartan, al considerar que definir una conexión afín simétrica es una restricción innecesaria, desarrolla un nuevo modelo para la Relatividad General con torsión no nula. Desde el punto de vista fenomenológico, en esta teoría, la torsión es generada y percibida por fermiones [25], y sus efectos son muy débiles (ver sección 8,4 de [21]). La teoría de Brans-Dicke y la teoría de Horndeski corresponden a teorías con un campo escalar acoplado no minimalmente a la geometría. Por una parte, la teoría de Brans-Dicke fue la primera modificación a la gravedad de Einstein, a través de la incorporación de un campo escalar, que considera el principio de Mach¹, asumiendo que las masas inerciales de varias partículas elementales no deberían ser constantes fundamentales, sino que la interacción entre partículas debería ser representada por un campo dinámico. La teoría de Horndeski es la teoría más general en cuatro dimensiones con un campo escalar acoplado no minimalmente, que entrega ecuaciones de campo de segundo orden en las derivadas de los campos fundamentales. Por otra parte, en 2009 se desarrolla la teoría de Galileones [41], que corresponde a la teoría más general en cuatro dimensiones, para un campo escalar en el espacio plano, que tiene ecuaciones de campo que son polinomiales en las derivadas de segundo orden del campo y no contiene derivadas de menor o mayor orden a 2 de éste. El mismo año se generaliza esta teoría [14, 15], desarrollándola en un espacio curvo. En 2011 [33], se demuestra que la teoría generalizada de Galileones es equivalente a la teoría de Horndeski, este trabajo impulsó el estudio de esta última. También en 2011, los autores buscan un mecanismo de autoajuste para solucionar el problema de la constante

¹Ernst Mach (1838-1916) postula que las masas de todas las partículas del universo influyen en el movimiento, o inercia, de un objeto.

cosmológica², a partir de la teoría de Horndeski [8]. Por último, en [52], los autores estudian las consecuencias de incluir en la acción de Einstein Hilbert con constante cosmológica, el término de Gauss-Bonnet acoplado a un campo escalar, consiguiendo ecuaciones de campo con torsión explícita.

En el terreno de la cosmología, se ha indagado en las consecuencias que trae, por ejemplo, la incorporación de la torsión o de un campo escalar a la gravedad. En el caso de la torsión, en [44, 45] se incorpora un fluido fermiónico al contenido de materia, obteniendo un modelo cosmológico donde la torsión genera expansión acelerada en el universo temprano. En el caso del campo escalar, la cosmología para las teorías tenso-escalares, ha sido ampliamente estudiada. La primera solución cosmológica, fue entregada por Dicke en 1968 [17], donde estudia el universo temprano, específicamente la formación de elementos primordiales. Un trabajo inspirado en la teoría de Brans-Dicke, es el realizado por La y Steinhardt en 1989 [35], el cual está basado en la teoría de Brans-Dicke, e intenta solucionar el problema de salida exitosa de la inflación antigua, sin embargo, para que esto suceda es necesario que el parámetro de Brans-Dicke sea pequeño, lo que se contradice con los rangos de consistencia observacional. También se ha estudiado la aceleración tardía del universo con geometría plana, a través de un campo escalar acoplado no minimalmente tipo Brans-Dicke con un potencial tipo $V(\phi) = \phi^4 + \mu^2(t)\phi^2$ [48]. Por último, tenemos los trabajos en cosmología que se han realizado, inspirados en la teoría de Horndeski. Al demostrar que la teoría de Horndeski es equivalente a la teoría de Galileones generalizada, se encuentra que la teoría de Horndeski provee un buen modelo de inflación. A partir de esto, la teoría de Horndeski concitó gran interés, lo que ha generado numerosos trabajos abarcando distintos temas en Cosmología. Por ejemplo, en [12] se buscan las condiciones en la teoría de Horndeski para evitar problemas que surgen de las perturbaciones escalares en presencia de dos fluidos perfectos en el marco de la geometría plana de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

1.2. Plan de trabajo

Los capítulos 2, 3 y la primera parte del 4, están dedicados a entregar un marco teórico a la investigación realizada en esta tesis. En el segundo capítulo se estudian las bases matemáticas de la Relatividad General de Einstein y de la teoría de Einstein-Cartan, es decir, tópicos de geometría diferencial, tanto para tensores como en el lenguaje de formas diferenciales, definiendo conceptos fundamentales como metricidad y afinidad, desde el punto de vista de la geometría Riemanniana y la geometría de Cartan. En el tercer capítulo, estudiamos la acción de la teoría de Einstein-Cartan y sus ecuaciones de movimiento. Además, se realiza un análisis sobre las características del lagrangeano de esta teoría, y las principales diferencias que tiene con la Relatividad General, entregando un primer acercamiento a las teorías de gravedad modificada. Luego, presentamos en el cuarto capítulo un estudio sobre las formas posibles de modificar la Relatividad General, enfocadas en las teorías tenso-escalares.

²La constante cosmológica modela la energía del vacío. Una manera de encontrar esta energía es midiendo la energía del punto cero (energía más baja que un sistema mecánico cuántico puede poseer) de todos los campos de la naturaleza. Sin embargo, este método da un valor alrededor de 120 órdenes de magnitud más que el límite superior de Λ , según las observaciones cosmológicas.

A partir de la segunda parte del cuarto capítulo, se realiza el trabajo investigativo de esta tesis. El objetivo principal de ésta es estudiar la teoría de Horndeski en el marco de una geometría con torsión no nula. Para esto, se estudian los aspectos necesarios para encontrar el lagrangeano de Horndeski con torsión no nula y sus ecuaciones de movimiento. En el final del capítulo, estudiamos el límite en el cual, esta nueva teoría de Horndeski en el marco de una teoría con torsión, deriva a la original.

Por último, en el capítulo quinto, se estudia una solución analítica para un caso particular del lagrangeano de Horndeski con torsión. Para esto, incorporamos la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker a las ecuaciones de movimiento de este lagrangeano, y nos enfocamos en el universo tardío, con el objetivo de describir la expansión acelerada del universo en términos de un fluido efectivo dependiente de los términos asociados a la torsión y al campo escalar.



Capítulo 2

Preliminares matemáticos

2.1. Preliminares Geométricos

En esta sección estudiaremos algunas definiciones sobre geometría diferencial, necesarios para el desarrollo de los siguientes capítulos como por ejemplo, *variedad*, *carta local*, *atlas*, *espacio tangente y cotangente* y *formas diferenciales*. Para más detalles el lector puede dirigirse a [1, 30, 38, 49].

2.1.1. Variedades

Definición 2.1.1. Una *variedad topológica* \mathcal{M} de dimensión d , es un espacio topológico Hausdorff segundo contable (que su topología tiene una base numerable) tal que cada punto de \mathcal{M} tiene una vecindad homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^d .

Definición 2.1.2. Una *carta local* en \mathcal{M} es un par (U, φ) donde U es un conjunto abierto de \mathcal{M} y φ es un homeomorfismo de U sobre un abierto de \mathbb{R}^d . Una colección $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ de cartas locales tal que $\bigcup_{i \in I} U_i = \mathcal{M}$ es llamada *atlas*. Las coordenadas de $p \in U$, aplicada a φ , son las coordenadas del punto $\varphi(p)$ de \mathbb{R}^n .

Definición 2.1.3.

1. Un *atlas de clase C^∞* en \mathcal{M} es un atlas para el que todas sus funciones de transición son C^∞ . Es decir, si $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) son dos cartas locales tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces la aplicación $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ de $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ sobre $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un difeomorfismo de clase C^∞ .
2. Dos atlas de clase C^∞ en \mathcal{M} $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ y $(W_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ se dicen equivalentes si su unión es un atlas de clase C^∞ . Una *variedad diferenciable* de clase C^∞ es una variedad junto con una clase de equivalencia de atlas C^∞ .

Definición 2.1.4. Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable d -dimensional, y sea \mathcal{N} una variedad diferenciable n -dimensional, además, sea $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ una aplicación dada. F se dice diferenciable, si para todas las cartas $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $F(U) \subset V$ la composición $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ es también diferenciable (C^∞).

Un difeomorfismo $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es una biyección que es diferenciable en las dos direcciones. En este caso diremos que \mathcal{M} y \mathcal{N} son difeomórficas (difeomorfos).

2.1.2. Espacio tangente y cotangente

Definición 2.1.5.

1. Una *curva* sobre una variedad \mathcal{M} es una aplicación suave (i.e., C^∞) σ desde algún intervalo $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$ a \mathcal{M} .
2. Dos curvas σ_1 y σ_2 son tangentes en un punto p en \mathcal{M} si
 - a) $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = p$;
 - b) en algún sistema coordenado (x^1, x^2, \dots, x^m) alrededor del punto p , ambas curvas son “tangentes” en el sentido usual de curvas en \mathbb{R}^m :

$$\left. \frac{dx^i}{dt}(\sigma_1(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{dx^i}{dt}(\sigma_2(t)) \right|_{t=0}$$

para $i = 1, 2, \dots, m$.

Definición 2.1.6.

1. Un *vector tangente* en $p \in \mathcal{M}$ es una clase de equivalencia de curvas en \mathcal{M} donde la relación de equivalencia entre dos curvas es que son tangentes en el punto p . La clase de equivalencia de una curva particular σ es denotado por $[\sigma]$.
2. El *espacio tangente* $T_p\mathcal{M}$ de \mathcal{M} en un punto $p \in \mathcal{M}$ es el conjunto de todos los vectores tangentes en el punto p .
3. El *fibrado tangente* $T\mathcal{M}$ es definido como $T\mathcal{M} := \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$.

Una definición equivalente de espacio tangente, es una definición algebraica, la cual nos permitirá obtener de forma clara las bases del espacio tangente. Antes de dar dicha definición necesitamos algunas definiciones previas.

Definición 2.1.7. Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable n dimensional, para cualquier $p \in \mathcal{M}$, una *función definida localmente en p* es un par, (U, f) , donde U es un subconjunto abierto de \mathcal{M} que contiene a p y f una función definida en U . Dos funciones diferenciables definidas localmente, (U, f) y (V, g) , en p son equivalentes si y sólo si existe algún subconjunto, $W \subseteq U \cap V$ donde f y g coinciden.

Las clases de equivalencias de una función definida localmente en p es llamada *germen en p* y la denotaremos por $\mathcal{F}_p(\mathcal{M})$. $\mathcal{F}_p(\mathcal{M})$ es un espacio vectorial real.

Definición 2.1.8. Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable n dimensional, para cualquier $p \in \mathcal{M}$, una *derivación en p* es un funcional lineal X sobre $\mathcal{F}_p(\mathcal{M})$, tal que

$$X(fg) = f(p)X(g) + g(p)X(f),$$

para todo $f, g \in \mathcal{F}_p(\mathcal{M})$. Esta última propiedad se denomina *propiedad de Leibnitz*.

Definición 2.1.9. (Definición algebraica) Un *vector tangente* X en p es una derivación en p . El espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ de \mathcal{M} en p es definido como el conjunto de todos los vectores tangentes en el punto p .

Definición 2.1.10. Un campo vectorial diferenciable X en un variedad diferenciable es una asociación $\mathcal{M} \ni p \mapsto X_p \in T_p\mathcal{M}$ tal que toda carta $\varphi : U \rightarrow V$ con coordenadas x^1, \dots, x^n , los coeficientes $\xi^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ en la representación (válida en un punto)

$$X_p = \xi^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

son funciones diferenciables.

Lema 2.1.1. Si X es un vector tangente y f es una función constante entonces $X(f) = 0$.

Teorema 2.1.1. El espacio tangente (algebraico) en p en una variedad suave d -dimensional \mathcal{M} es un \mathbb{R} -espacio vectorial n dimensional y en cualquier sistema coordenada x^1, \dots, x^d en una carta local es generado por

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^d} \Big|_p$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(p)}.$$

Para todo vector tangente X en un punto p se tiene

$$X = X(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Definición 2.1.11. Si un espacio vectorial real V tienen dimensión finita n , y si $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es una base para V , la base dual para el espacio vectorial V^* es el conjunto de vectores $\{f^1, f^2, \dots, f^n\}$ en V^* que son determinados únicamente por el requerimiento

$$f^i(e_j) = \delta_j^i,$$

para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Definición 2.1.12.

1. Un *vector cotangente* en un punto p en una variedad \mathcal{M} es una aplicación lineal real k de $T_p\mathcal{M}$ a \mathbb{R} .
2. El *espacio cotangente* en $p \in \mathcal{M}$ es el conjunto $T_p^*\mathcal{M}$ de todas las aplicaciones lineales anteriormente definidas, *i.e.*, es el dual del espacio vectorial $T_p\mathcal{M}$. De la definición anterior se desprende que (i) este espacio dual es en sí mismo un espacio vectorial; y (ii) $\dim T_p^*\mathcal{M} = \dim T_p\mathcal{M} [= \dim \mathcal{M}]$
3. El *fibrado cotangente* $T^*\mathcal{M}$ es el conjunto de todos los vectores cotangentes en todos los puntos en \mathcal{M} , es decir, $T^*\mathcal{M} := \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p^*\mathcal{M}$.

Observación 2.1.1. Por el Teorema 2.1.1 y la Definición 2.1.11 se puede definir la base inducida en el espacio cotangente $T_p^*\mathcal{M}$ como

$$dx^1 \Big|_p, dx^2 \Big|_p, \dots, dx^d \Big|_p. \quad (2.1.1)$$

2.1.3. n -forma

Definición 2.1.13. Un *tensor de tipo* (r, s) en un punto $p \in \mathcal{M}$ es un elemento del espacio producto tensorial

$$T_p^{r,s} \mathcal{M} := \left[\otimes^r T_p \mathcal{M} \right] \otimes \left[\otimes^s T_p^* \mathcal{M} \right].$$

Observación 2.1.2.

1. $\otimes^r V$ denota el espacio vectorial formado tomando el producto tensorial de V consigo mismo r -veces.
2. Casos espaciales de tensores de tipo (r, s) incluye:
 - a) $T_p^{0,1} \mathcal{M} = T_p^* \mathcal{M}$.
 - b) $T_p^{1,0} \mathcal{M} = (T_p^* \mathcal{M})^* \cong T_p \mathcal{M}$.
 - c) $T_p^{r,0} \mathcal{M}$ es llamado el espacio de tensores r -contravariantes.
 - d) $T_p^{0,s} \mathcal{M}$ es llamado el espacio de tensores s -covariantes.
3. Del Teorema 2.1.1 y de la Observación 2.1.1 podemos definir una base para $T_p^{r,s} \mathcal{M}$ con respecto a un sistema local de coordenadas como el conjunto de todos los vectores de la forma

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \Big|_p \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_r}} \Big|_p \otimes dx^{\nu_1} \Big|_p \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_s} \Big|_p.$$

Definición 2.1.14. Sea $\alpha \in T_p^{r,s} \mathcal{M}$ y $\alpha' \in T_p^{r',s'} \mathcal{M}$, entonces $\alpha \otimes \alpha' \in T_p^{r+r',s+s'} \mathcal{M}$ se define la aplicación multilinear

$$\begin{aligned} \alpha \otimes \alpha' (k_1, \dots, k_{r+r'}; v_1, \dots, v_{s+s'}) := \\ \alpha (k_1, \dots, k_r; v_1, \dots, v_s) \alpha' (k_{r+1}, \dots, k_{r+r'}; v_{s+1}, \dots, v_{s+s'}) \end{aligned}$$

como el *producto tensorial*. Donde $v \in V$ y $k \in V^*$.

Observación 2.1.3. La *expansión de los coeficientes* $\alpha^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}$ de $\alpha \in T_p^{r,s} \mathcal{M}$ con respecto a estas bases es

$$\alpha^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} = \alpha \left(dx^{\mu_1} \Big|_p, \dots, dx^{\mu_r} \Big|_p; \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\nu_r}} \Big|_p \right)$$

en que $\alpha \in T_p^{r,s} \mathcal{M}$ es visto como una aplicación multilinear desde el producto de $T_p^* \mathcal{M}$ r -veces y $T_p \mathcal{M}$ s -veces.

Definición 2.1.15. La *derivada de Lie* de un tensor tipo (r, s) , $T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}$, a lo largo de un campo vectorial ξ es el tensor dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} &= \xi^\lambda \partial_\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} - \sum_{i=1}^m \partial_\lambda \xi^{\mu_1} T^{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \lambda \mu_{i+1} \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \partial_{\nu_j} \xi^\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_{j-1} \lambda \nu_{j+1} \dots \nu_s}. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Proposición 2.1.1. Para $a, b \in \mathbb{R}$ y $X, Y \in T_p^{r,s} \mathcal{M}$, la derivada de Lie cumple las siguientes propiedades:

1. Es covariante, es decir, $\mathcal{L}_\xi T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}$ transforma como tensor.

2. Es lineal, es decir,

$$\mathcal{L}_\xi (aX + bY) = a\mathcal{L}_\xi X + b\mathcal{L}_\xi Y.$$

3. Satisface la regla de Leibniz

$$\mathcal{L}_\xi (X \otimes Y) = \mathcal{L}_\xi X \otimes Y + X \otimes \mathcal{L}_\xi Y.$$

4. Para un campo escalar $\Phi(x)$, la derivada de Lie se reduce a la derivada direccional estándar,

$$\mathcal{L}_\xi \Phi = \xi^\lambda \partial_\lambda \Phi,$$

y para vectores se tiene que

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} \vec{Y} = [\vec{X}, \vec{Y}],$$

$$\text{con } [\vec{X}, \vec{Y}] = \vec{X} \cdot \vec{Y} - \vec{Y} \cdot \vec{X}.$$

Definición 2.1.16.

1. Una n -forma es un campo tensorial ω de tipo $(0, n)$ que es totalmente antisimétrico en el sentido que, para cualquier permutación P de los índices $1, 2, \dots, n$,

$$\omega(X_1, X_2, \dots, X_n) = (-1)^{\deg(P)} \omega(X_{P(1)}, X_{P(2)}, \dots, X_{P(n)})$$

donde X_1, X_2, \dots, X_n con campos vectoriales arbitrarios sobre \mathcal{M} y $\deg(P)$ es el grado de permutación P , i.e., $+1$ si P es par y -1 si P es impar. Escribiremos el conjunto de todas las n -formas sobre \mathcal{M} como $A^n(\mathcal{M})$.

2. Si $\omega_1 \in A^{n_1}(\mathcal{M})$ y $\omega_2 \in A^{n_2}(\mathcal{M})$, el *producto cuña*, o *producto exterior*, de ω_1 y ω_2 es la $(n_1 + n_2)$ -forma $\omega_1 \wedge \omega_2$ definida por

$$\omega_1 \wedge \omega_2 := \frac{1}{n_1! n_2!} \sum_{\text{Perms } P} (-1)^{\deg(P)} (\omega_1 \otimes \omega_2)^P.$$

Teorema 2.1.2. Un conjunto base para las n -formas evaluadas en un punto $p \in \mathcal{M}$ es el conjunto de todos los vectores de la forma

$$dx^{\mu_1}|_p \wedge dx^{\mu_2}|_p \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}|_p.$$

En términos de la base anterior, una n -forma diferencial se escribe como

$$\omega = \frac{1}{n!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}.$$

Proposición 2.1.2. Sean las formas $\omega \in A^n(\mathcal{M})$, $\eta \in A^m(\mathcal{M})$ y $\theta \in A^l(\mathcal{M})$, algunas propiedades del producto exterior son:

1. $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$,
2. $\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2$,
3. $a\omega \wedge \eta = \omega \wedge a\eta = a(\omega \wedge \eta)$,
4. $\omega \wedge \eta = (-1)^{nm} \eta \wedge \omega$,
5. $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$.

Definición 2.1.17. La derivada exterior es el operador $d : A^n(\mathcal{M}) \rightarrow A^{n+1}(\mathcal{M})$ tal que para las formas $\omega \in A^n(\mathcal{M})$ y $\eta \in A^m(\mathcal{M})$ se cumple:

1. $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$,
2. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^n \omega \wedge d\eta$,
3. $d^2 = 0$,
4. Si $\omega = \frac{1}{n!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}$, entonces

$$d\omega = \frac{1}{(n+1)!} \partial_\nu \omega_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}. \quad (2.1.3)$$

Observación 2.1.4. Se puede demostrar la existencia y unicidad del operador anteriormente definido, para ver esto consulte [51].

2.2. Geometría de Riemann para la Relatividad General

Para estudiar la Relatividad General es necesario analizar el espaciotiempo como una variedad diferenciable. Si en esta queremos medir longitudes y tener una noción de paralelismo, necesitamos introducir dos conceptos: *metricidad* y *afinidad*.

2.2.1. Estructura métrica

La Relatividad General de Einstein requiere de la definición de la geometría pseudo-Riemanniana y en particular aquella que se aproxima localmente al espacio de Minkowski.

Definición 2.2.1. (*Métrica Riemanniana*) Una métrica Riemanniana g en \mathcal{M} es una asociación $p \mapsto g_p \in L^2(T_p\mathcal{M}, \mathbb{R})$, con $L^2(T_p\mathcal{M}, \mathbb{R}) = \{\alpha : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}/\alpha \text{ es una forma bilinear}\}$, tal que las siguientes condiciones son satisfechas:

1. $g_p(X, Y) = g_p(Y, X)$ para todo X, Y (simetría).
2. $g_p(X, X) > 0$ para todo $X \neq 0$ (definida positiva).

3. Los coeficientes $g_{\mu\nu}$ en toda representación local (es decir, en toda carta)

$$g_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu|_p \otimes dx^\nu|_p$$

son funciones diferenciables.

El par (\mathcal{M}, g) es llamada una variedad de Riemann. También nos referiremos a la métrica Riemanniana como el tensor métrico. En coordenadas locales el tensor métrico es dado por la matriz de funciones $(g_{\mu\nu})$.

Observación 2.2.1. Según la Definición 2.1.13 la métrica Riemanniana corresponde a un tensor de tipo $(0, 2)$.

Definición 2.2.2. g es una métrica pseudo-Riemanniana si cumple 1 y 3 pero no 2 en la Definición 2.2.1, y en su lugar satisface que, para cada $p \in \mathcal{M}$ y $g_p(X, Y) = 0$ para todo $Y \in T_p\mathcal{M}$, entonces $X = 0$ (métrica no degenerada).

Para ver la demostración del siguiente teorema, el lector puede consultar [34].

Teorema 2.2.1. Si M es una variedad suave, entonces existe una métrica riemanniana sobre M .

Para toda variedad pseudo-Riemanniana d -dimensional \mathcal{M} todos los objetos relevantes de la variedad, como distancia, área o ángulos, están definidos a través del tensor métrico, $g_{\mu\nu}(x)$,

$$g_{\mu\nu} = \langle \partial_\mu | \partial_\nu \rangle. \tag{2.2.1}$$

Este tensor, por ejemplo, provee la noción de distancia entre puntos cercanos, con coordenadas x^μ y $x^\mu + dx^\mu$, por medio de

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu,$$

también denotada en la literatura como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu. \tag{2.2.2}$$

La metricidad se refiere a mediciones de longitudes, ángulos o volúmenes que son definidos localmente en el espaciotiempo. La afinidad, en cambio se refiere a las propiedades que permanecen invariantes bajo traslaciones, como el paralelismo.

Geoméricamente, estas dos nociones son lógicamente independientes. Sin embargo, Einstein, al construir su teoría considera a la métrica como su único campo independiente. Para esto, como veremos a continuación, restringe la geometría, es decir, impone una hipótesis sobre la geometría.

2.2.2. Estructura afín

En geometría, la noción de una conexión, introduce la idea de transporte consistente y paralelo de información a lo largo de una curva o familia de curvas. En este

contexto, la conexión que necesitaremos definir es la conexión afín, que entrega un método para transportar de forma paralela vectores tangentes sobre una variedad diferenciable desde un punto a otro a lo largo de una curva. Típicamente, una conexión afín se obtiene al definir una derivada covariante, que da un sentido a la derivada direccional de campos vectoriales.

A modo de motivación, consideraremos un campo vectorial con componentes $V^\mu(x^\lambda)$ en el punto con coordenadas x^λ . A partir de esto definimos el vector $V_{\parallel}^\mu(x^\lambda + \epsilon\xi^\lambda)$ como el “transporte paralelo” del vector $V^\mu(x^\lambda + \epsilon\xi^\lambda)$ desde el punto $x^\lambda + \epsilon\xi^\lambda$ a x^λ si sus componentes están relacionadas por

$$V_{\parallel}^\mu(x^\lambda + \epsilon\xi^\lambda) = V^\mu(x^\lambda + \epsilon\xi^\lambda) + \epsilon\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \xi^\nu V^\nu(x^\lambda), \quad (2.2.3)$$

donde los coeficientes $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x)$ entregan el concepto de paralelismo. Esto nos permite definir la derivada covariante de V^λ , $\nabla_\mu V^\lambda$ como

$$\begin{aligned} \xi^\mu \nabla_\mu V^\lambda &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{V^\lambda(x^\rho + \epsilon\xi^\rho) - V^\lambda(x^\rho) + \epsilon\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \xi^\mu V^\nu(x^\rho)}{\epsilon}, \\ &= \xi^\mu \left(\partial_\mu V^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V^\nu \right). \end{aligned}$$

Donde definiremos,

$$\vec{\nabla} V = \left(\partial_\mu V^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V^\nu \right) dx^\mu \otimes \partial_\lambda, \quad (2.2.4)$$

como la **derivada covariante de un vector**.

Algo importante que se debe tener en cuenta es cómo transforman los coeficientes $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x)$ para que la derivada covariante sea un tensor bien definido.

Teorema 2.2.2. *Sea $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ una familia de funciones. Para que la operación de diferenciación covariante definida en términos de esta familia sea una operación tensorial, es necesario que bajo cambio arbitrario de coordenadas $x^\mu = x^\mu(x^{1'}, \dots, x^{d'})$, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ transforme bajo la regla*

$$\Gamma_{\mu'\nu'}^{\lambda'} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} + \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}}. \quad (2.2.5)$$

Esta familia de funciones se define como **conexión afín**.

Usando la definición de derivada covariante obtenemos

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = \left(\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \right) V^\sigma - \left(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \right) \nabla_\lambda V^\rho.$$

De donde, se puede identificar el *tensor de curvatura de Riemann* $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ y el *tensor torsión* $T_{\mu\nu}^\lambda$ como,

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda, \quad (2.2.6)$$

$$T_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda. \quad (2.2.7)$$

Notemos que estos tensores son antisimétricos en los índices μ y ν , es decir,

$$\begin{aligned} R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} &= R^\rho{}_{\sigma[\mu\nu]}, \\ T^\lambda{}_{\mu\nu} &= T^\lambda{}_{[\mu\nu]}. \end{aligned}$$

Ahora definiremos la conexión afín utilizada en la Relatividad General estándar. Para tal fin debemos imponer algunas condiciones sobre $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$.

Definición 2.2.3. Una conexión $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ se dice compatible con la métrica $g_{\mu\nu}$ si la derivada covariante del tensor métrico ($g_{\mu\nu}$) es idénticamente cero, es decir,

$$\nabla_\mu g_{\rho\sigma} = \partial_\mu g_{\rho\sigma} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} g_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma} g_{\rho\lambda} := 0.$$

Definición 2.2.4. Una conexión $\overset{\circ}{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}$ se dice *simétrica* o *libre de torsión* si el tensor torsión $T^\lambda{}_{\mu\nu} = T^\lambda{}_{[\mu\nu]}$ es idénticamente cero, es decir si $\overset{\circ}{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda{}_{\nu\mu}$.

A partir de las Definiciones 2.2.3 y 2.2.4 se demuestra el siguiente teorema. Para ver una demostración completa, el lector puede consultar [34].

Teorema 2.2.3. *Si la métrica es no degenerada ($g = \det(g_{\mu\nu}) \neq 0$) en la región que estamos considerando, entonces existe una única conexión simétrica que es compatible con la métrica. Esta única conexión es dada en cualquier sistema de coordenadas $x^\mu = x^\mu(x^1, \dots, x^d)$ por la fórmula de Christoffel:*

$$\overset{\circ}{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right). \quad (2.2.8)$$

Se puede observar en (2.2.8) que sólo basta el conocimiento de la métrica para obtener la conexión. Es importante notar que la conexión será unívocamente conocida sólo si se imponen las condiciones de compatibilidad métrica y conexión libre de torsión, de lo contrario la métrica y conexión seguirán siendo campos independientes. Einstein, buscando la economía de campos, considera la conexión dada por 2.2.8, dejando como único campo independiente a la métrica g . Sin embargo, para establecer una teoría dinámica para la gravedad se puede considerar una geometría más general donde la conexión y la métrica tengan grados de libertad independientes. En esta línea Elie Cartan, buscando la economía de hipótesis, consideraba que suponer que $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}$ (conexión libre de torsión), era imponer una restricción innecesaria sobre la geometría de una teoría gravitacional [13].

En esta tesis, consideraremos la métrica y la conexión afín, $g_{\mu\nu}$ y $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$, como campos independientes, mantendremos la hipótesis de compatibilidad métrica y relajaremos la hipótesis de torsión nula, es decir, $T^\lambda{}_{\mu\nu} = T^\lambda{}_{[\mu\nu]}$. Con esto no es posible conseguir una fórmula para la conexión que entregue información geométrica, a diferencia de 2.2.8. Se puede mostrar que en la teoría de Einstein-Cartan la conexión tiene la forma

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} + K^\lambda{}_{\nu\mu},$$

y con esto vemos que la conexión no está definida unívocamente, sino que depende de la contorsión, la cual podrá ser determinada a partir de las ecuaciones de movimiento definidas a partir de un principio de acción. Para ver un desarrollo con más detalle, el lector puede dirigirse a [24].

2.3. Geometría de Cartan para la Relatividad General

Como vimos en la sección 2.1 y 2.2 en cada punto de una variedad d -dimensional suave \mathcal{M} , independiente de las coordenadas que utilicemos, siempre se podrá definir localmente un espacio tangente $T_p\mathcal{M}$, en el punto p , con métrica pseudo-Riemannana.

En física es muy importante poder definir observables invariantes como la masa, el tiempo propio, etc. Matemáticamente, esto se traduce en que la métrica debe ser localmente invariante de Lorentz, es decir, que cumpla con $V^{a'} = \Lambda^{a'}_b V^b$, donde $\Lambda^{a'}_b$ corresponde a la matriz de transformación de Lorentz. Esta invariancia requiere que en cada vecindad de cualquier punto de la variedad \mathcal{M} , siempre exista una carta coordenada tal que la métrica tome la forma $g_{\mu\nu}(x) = \text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)$.

Como consecuencia, el espaciotiempo tendrá asociado una base ortonormal y las leyes físicas se podrán escribir en términos de estas bases, de manera que sean invariantes bajo transformaciones locales de Lorentz. Para esto es necesario definir bases ortonormales tanto en el espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ como en el espacio cotangente $T_p^*\mathcal{M}$. En general, las bases ya definidas $\{\partial_\mu\}$ y $\{dx^\mu\}$ no forman una base ortonormal, sin embargo, es posible que a partir de éstas se construyan bases ortonormales.

Por una parte tenemos que para $g_{\mu\nu}$ se cumple

$$g_{\mu\nu} = \langle \partial_\mu | \partial_\nu \rangle$$

y su inversa

$$g^{\mu\nu} = \langle dx^\mu | dx^\nu \rangle.$$

La nueva base ortonormal se define por

$$\hat{e}_a(x) = e_a^\mu(x) \partial_\mu \tag{2.3.1}$$

donde e_a^μ corresponde una matriz cambio de base, tal que se cumpla

$$\langle \hat{e}_a | \hat{e}_b \rangle = \eta_{ab}. \tag{2.3.2}$$

De esta manera hemos logrado definir una métrica η_{ab} tal que

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & +1 & \\ & & & & +1 \end{pmatrix},$$

tiene en su diagonal -1 o $+1$. Con la métrica anterior hemos construido una base ortonormal para el espacio tangente.

Finalmente, siguiendo un proceso estándar de álgebra lineal podemos construir una base para el espacio cotangente. Es decir, en $T_p^*\mathcal{M}$ la base estará dada por la 1-forma

$$e^a(x) := e^a{}_\mu(x) dx^\mu, \quad (2.3.3)$$

la que cumple la propiedad análoga de (2.3.2)

$$\langle e^a | e^b \rangle = \eta^{ab}.$$

En el contexto de la Relatividad General, utilizaremos la métrica Lorentziana $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$, que corresponde, para la base ortonormal anterior a $g = \eta_{ab} e^a \otimes e^b$, donde la matriz η_{ab} toma la forma

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}.$$

La matriz cambio de base $e^a{}_\mu(x)$ es llamada **vielbein** y la base ortonormal $e^a(x)$ **1-forma vielbein**.

Proposición 2.3.1. *Algunas de las propiedades más importantes del vielbein son:*

1. $\langle e^a | e^b \rangle = \eta^{ab}$,
2. $e^a{}_\nu e_a{}^\mu = \delta^\mu_\nu$,
3. $\eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu = g_{\mu\nu}$ (condición de ortonormalidad).

Las matrices de cambio de base permiten relacionar entre sí las componentes de vectores y las componentes de formas diferenciales como sigue

$$\begin{aligned} \zeta^a &= e^a{}_\mu \zeta^\mu, \\ \zeta^\mu &= e_a{}^\mu \zeta^a, \\ \alpha_a &= e_a{}^\mu \alpha_\mu, \\ \alpha_\mu &= e^a{}_\mu \alpha_a, \end{aligned}$$

donde ζ^a y α_a son 1-formas, ζ^μ y α_μ son un vector y covector respectivamente.

A través del vielbein se define un isomorfismo entre la variedad \mathcal{M} y el espacio tangente $T_p\mathcal{M}$. Sin embargo, no existe una elección natural para un único isomorfismo. Esto corresponde a la infinidad de elecciones del marco de referencia ortogonal local posible. En efecto, bajo una transformación de Lorentz, el vielbein transforma como

$$e^a{}_\mu(x) \longrightarrow e^{a'}{}_\mu = \Lambda^{a'}{}_b(x) e^b{}_\mu(x),$$

donde la matriz $\mathbf{\Lambda}(x) \in SO(d-1, 1)$. Dado que la nueva base debe cumplir la condición de ortonormalidad, $\mathbf{\Lambda}(x)$ deja invariante la métrica en el espacio tangente

$$\Lambda^{a'}_c(x) \Lambda^{b'}_d(x) \eta_{a'b'} = \eta_{cd}.$$

De esta forma se cumple la simetría $SO_\eta(d)$.

Una herramienta muy útil para la construcción de un principio de mínima acción y que desarrollaremos a continuación es el **operador de Hodge** o **dual de Hodge**. Usando la base ortonormal e^a_μ definiremos el mapeo invertible dual de Hodge, como

$$* : A^p(\mathcal{M}) \rightarrow A^{d-p}(\mathcal{M}).$$

Así, dada una p -forma $\alpha(x) \in A^p(\mathcal{M})$,

$$\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{a_1 \dots a_p} e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_p},$$

se define la $(d-p)$ -forma dual de Hodge $*\alpha$ como

$$*\alpha = \frac{1}{(d-p)! p!} \alpha^{a_1 \dots a_p} \epsilon_{a_1 \dots a_p b_1 \dots b_{d-p}} e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{b_{d-p}}. \quad (2.3.4)$$

Proposición 2.3.2. *Algunas de las propiedades importantes de este operador son:*

1. $*^2\alpha = (-1)^{p(d-p)+\eta_-} \alpha$, donde η_- es el número de signos negativos en la signatura Lorentziana.
2. Dada dos p -formas α y β siempre se cumple que

$$\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha.$$

El formalismo de Cartan, también llamado formalismo de primer orden, se considera la métrica y la conexión afín como campos independientes. El campo que codifica toda la información de la métrica es el vielbein $e^a_\mu(x)$. Mientras tanto, la conexión afín viene dada por la **conexión de espín** o **conexión de Lorentz** $\omega^a_{b\mu}(x)$. Para entregarle un cuerpo matemático a estos nuevos campos, necesitamos generalizar la derivada exterior definida para las formas diferenciales $d = dx^\mu \partial_\mu \wedge$ por una derivada covariante $D = dx^\mu D_\mu \wedge$. Sea una p -forma $\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p}(x) dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$ y un vector $\vec{\xi} = \xi^a \hat{e}_a$, se define el **operador de contracción** asociado $I_\xi : A^p \rightarrow A^{p-1}$, como

$$I_\xi \alpha = \frac{1}{(p-1)!} \xi^\lambda \alpha_{\lambda \mu_2 \dots \mu_p}(x) dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (2.3.5)$$

Análogamente a lo hecho para el caso coordinado, consideremos un campo vectorial $V^a(x^\rho)$ y a partir de éste, el transporte paralelo de las componentes del vector $V^a_\parallel(x^\rho + \epsilon \xi^\rho)$ tal que,

$$\begin{aligned} V^a_\parallel(x^\rho + \epsilon \xi^\rho) &= V^a(x^\rho + \epsilon \xi^\rho) + \epsilon I_\xi \omega^a_b V^b(x^\rho), \\ &= V^a(x^\rho + \epsilon \xi^\rho) + \epsilon \xi^\mu \omega^a_{b\mu} V^b(x^\rho). \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

A partir de (2.3.6), definimos la derivada covariante de las componentes $V^a(x^\rho)$ como

$$\begin{aligned}\xi^\mu D_\mu V^a &= I_\xi DV^a = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{V^a(x^\rho + \epsilon \xi^\rho) - V^a(x^\rho) + \epsilon \xi^\mu \omega^a_{b\mu} V^b(x^\rho)}{\epsilon} \\ &= I_\xi \left(\partial_\mu V^a + \omega^a_{b\mu} V^b \right) dx^\mu \otimes \hat{e}_a,\end{aligned}$$

con

$$DV^a = \left(\partial_\mu V^a + \omega^a_{b\mu} V^b \right) dx^\mu \otimes \hat{e}_a. \quad (2.3.7)$$

La conexión de Lorentz $\omega^a_{b\mu}(x)$ no cambia como tensor, sino que bajo una rotación $\Lambda^a_c(x) \in SO(d-1, 1)$. Específicamente, la conexión cambia como

$$\omega^a_{b\mu}(x) \longrightarrow \omega^{a'}_{b'\mu}(x) = \Lambda^{a'}_c(x) \Lambda_{b'}^d(x) \omega^c_{d\mu}(x) + \Lambda^{a'}_c(x) \partial_\mu \Lambda_{b'}^c(x),$$

o bien,

$$\omega^{a'}_{b'}(x) = \Lambda^{a'}_c(x) \Lambda_{b'}^d(x) \omega^c_d(x) + \Lambda^{a'}_c(x) d\Lambda_{b'}^c(x).$$

Aquí,

$$\omega^a_b(x) := \omega^a_{b\mu}(x) dx^\mu \quad (2.3.8)$$

se define como la **1-forma conexión**.

La conexión $\omega^a_{b\mu}(x)$ define el transporte paralelo de tensores de Lorentz en el espacio tangente entre T_x y T_{x+dx} . Por otra parte, todas las propiedades afines del espacio están codificadas en las componentes $\omega^a_{b\mu}(x)$ que son totalmente arbitrarias e independiente de la métrica. Se puede demostrar que esta conexión también cumple con la compatibilidad métrica,

$$D\eta_{ab} = 0.$$

Por lo anterior, se tiene que

$$\omega_{ab} = -\omega_{ba}.$$

Descomponiendo la 1-forma conexión de la siguiente manera

$$\omega^{ab} := \hat{\omega}^{ab} + \kappa^{ab}, \quad (2.3.9)$$

Se define $\kappa^{ab}(x)$ como la **1-forma contorsión** y exigimos que la conexión $\hat{\omega}^{ab}(x)$ sea libre de torsión.

La noción de transporte paralelo debe ser independiente del lenguaje en el que trabajemos, ya sea el lenguaje coordenado, dado por $V_{||}^\mu(x^\lambda + \epsilon \xi^\lambda)$ (ver (2.2.3)) o el ortonormal, dado por $V_{||}^a(x^\rho + \epsilon \xi^\rho)$ (ver (2.3.6)). La independencia anteriormente mencionada es equivalente a

$$\nabla \vec{V} = D\vec{V},$$

es decir,

$$\left(\partial_\mu V^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V^\nu\right) dx^\mu \otimes \partial_\lambda = \left(\partial_\mu V^a + \omega^a_{b\mu} V^b\right) dx^\mu \otimes \hat{e}_a.$$

Desarrollando algebraicamente esta ecuación, obtenemos la condición para que $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ y $\omega^a_{b\mu}$ representen la misma noción de transporte paralelo de vectores. Esta relación está dada por

$$\mathcal{D}_\mu e^a_\nu := \partial_\mu e^a_\nu + \omega^a_{b\mu} e^b_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e^a_\lambda = 0. \quad (2.3.10)$$

Esta condición es conocida como **postulado del vielbein** o **postulado tetradico**.

Una hipótesis importante que imponemos sobre las derivadas covariantes (2.2.4) y (2.3.7) y la derivada exterior, es que éstas van a coincidir cuando estén actuando sobre un escalar $\Phi(x)$, luego

$$\nabla\Phi = D\Phi = d\Phi. \quad (2.3.11)$$

De esta forma si

$$\Phi := A_a B^a = A_\nu B^\nu,$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned} d(A_\nu B^\nu) &= \nabla A_\nu B^\nu + A_\nu \nabla B^\nu, \\ dx^\mu \partial_\mu (A_\nu B^\nu) &= \nabla_\mu A_\nu B^\nu dx^\mu + A_\nu \nabla_\mu B^\nu dx^\mu. \end{aligned}$$

Análogamente, se obtiene que

$$d(A_a B^a) = DA_a B^a + A_a DB^a.$$

Por último, para una n -forma diferencial

$$\omega = \frac{1}{n!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n},$$

es posible demostrar que la derivada de Lie, definida para tensores en 2.1.15, para una n -forma está dada por

$$\mathcal{L}_\xi \omega = [dI_\xi + I_\xi d] \omega, \quad (2.3.12)$$

con I_ξ definido por (2.3.5).

2.4. Delta de Kronecker generalizada

Con el fin de poder realizar los cálculos de esta tesis, introducimos las técnicas de la delta Kronecker generalizada.

Definición 2.4.1. Definimos la *delta generalizada* de orden n como el determinante formado por deltas de Kronecker $T_p^{n,n} \mathcal{M} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ de la forma

$$\delta_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \begin{vmatrix} \delta_{\nu_1}^{\mu_1} & \delta_{\nu_2}^{\mu_1} & \dots & \delta_{\nu_n}^{\mu_1} \\ \delta_{\nu_1}^{\mu_2} & \delta_{\nu_2}^{\mu_2} & \dots & \delta_{\nu_n}^{\mu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{\nu_1}^{\mu_n} & \delta_{\nu_2}^{\mu_n} & \dots & \delta_{\nu_n}^{\mu_n} \end{vmatrix}.$$

Proposición 2.4.1. *el operador anterior cumple las siguientes propiedades:*

1. *La definición 2.4.1 puede escribirse como*

$$\delta_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \sum_{p=1}^n (-1)^{p+1} \delta_{\nu_p}^{\mu_1} \delta_{\nu_1 \dots \hat{\nu}_p \dots \nu_n}^{\mu_2 \dots \mu_n},$$

donde “ $\hat{\nu}_p$ ” significa omitir el índice ν_p .

2. *Es completamente antisimétrico bajo intercambio de índices*

$$\begin{aligned} \delta_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_j \dots \mu_n} &= -\delta_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_j \dots \mu_i \dots \mu_n}, \\ \delta_{\nu_1 \dots \nu_i \dots \nu_j \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} &= -\delta_{\nu_1 \dots \nu_j \dots \nu_i \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n}. \end{aligned}$$

3. *Es un operador de antisimetrización, que permite construir el producto exterior a partir del producto tensorial como*

$$\frac{1}{p!} \delta_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \otimes dx^{\mu_2} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_n} = dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}.$$

Por lo anterior, si tenemos $\alpha \in T_p^{n,0} \mathcal{M}$ y $\beta \in T_p^{0,n} \mathcal{M}$, con $\alpha = \alpha^{\mu_1 \dots \mu_n}$ y $\beta = \beta_{\nu_1 \dots \nu_n}$, se consigue que

$$\begin{aligned} \alpha^{[\mu_1 \dots \mu_n]} &= \delta_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} \alpha^{\nu_1 \dots \nu_n}, \\ \beta_{[\nu_1 \dots \nu_n]} &= \delta_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} \beta_{\mu_1 \dots \mu_n}. \end{aligned}$$

Para tensores completamente antisimétricos se cumple que

$$\delta_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} \alpha^{\nu_1 \dots \nu_n} = n! \alpha^{\mu_1 \dots \mu_n}, \quad (2.4.1)$$

$$\delta_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} \beta_{\mu_1 \dots \mu_n} = n! \beta_{\nu_1 \dots \nu_n}, \quad (2.4.2)$$

lo mismo se cumple para las formas diferenciales.

4. *Satisface la siguiente identidad*

$$\delta_{\nu_1 \dots \nu_r \mu_{r+1} \dots \mu_n}^{\mu_1 \dots \mu_r \mu_{r+1} \dots \mu_n} = \frac{(d-r)!}{(d-n)!} \delta_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r}. \quad (2.4.3)$$

Definición 2.4.2. Se define el *símbolo de Levi-Civita* como

$$\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} = \delta_{1 \dots n}^{\mu_1 \dots \mu_n}, \quad \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_n} = \delta_{\nu_1 \dots \nu_n}^{1 \dots n}.$$

Proposición 2.4.2. *El símbolo de Levi-Civita:*

1. *Permite recuperar la delta de kronecker generalizada*

$$\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_n} = \delta_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n}.$$

2. *Permite relacionar una matriz de componentes M^μ_ν en d -dimensiones con su determinante como*

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} M^{\mu_1}_{\nu_1} \dots M^{\mu_d}_{\nu_d} = \det(M) \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_d}. \quad (2.4.4)$$

Con las herramientas estudiadas en este capítulo, estamos en condiciones de introducir la Relatividad General con torsión no nula, y entender su interpretación matemática. Este tópico será estudiado en profundidad en el siguiente capítulo, logrando definir tanto una acción como las ecuaciones de movimiento de la gravedad con torsión no nula en cuatro dimensiones.



Capítulo 3

Gravedad en el lenguaje de primer orden

La teoría de Relatividad General de Einstein es estudiada como una interpretación geométrica del espaciotiempo. En este sentido, la geometría que permite describir adecuadamente las interacciones gravitacionales es la geometría Riemanniana, o pseudo-Riemanniana para ser más preciso, mediante un principio de acción pertinentemente definido para la geometría. Además, para considerar la materia del universo es necesario el estudio e incorporación de un principio de acción para la materia.

En este capítulo estudiamos la construcción de una acción para la gravedad con torsión en el formalismo de primer orden, y posteriormente las ecuaciones de movimiento relacionadas a ésta. Para esto se recurre a algunas herramientas definidas en el capítulo anterior, tales como el vielbein y la conexión de espín. Para estudiar con detalle la Relatividad General estándar, el texto de Carroll [4] es muy ilustrativo, el libro de Hassaine y Zanelli de Relatividad General [23], será útil para el lector si tiene la necesidad de entrar en los detalles la Relatividad General en formas diferenciales con torsión no nula, al igual que el libro de Lovelock y Rund [38].

3.1. Construcción de una Acción

Es necesario definir nuevas formas diferenciales que serán necesarias para la construcción del principio de acción. A partir de los campos independientes $e^a(x)$ y $\omega^a_b(x)$ definidos por (2.3.3) y (2.3.8) se definen las **ecuaciones de estructura** como

$$R^{ab}(\omega) = d\omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{cb}, \quad (3.1.1)$$

$$T^a(e, \omega) = de^a + \omega^a_b \wedge e^b, \quad (3.1.2)$$

llamadas **2-forma curvatura** o **curvatura de Lorentz** y **2-forma torsión**, respectivamente.

Considerando la expresión (2.3.9), la curvatura y la torsión toman la siguiente forma,

$$R^{ab} = \mathring{R}^{ab} + \mathring{D}\kappa^{ab} + \kappa^a_c \wedge \kappa^{cb}, \quad (3.1.3)$$

$$T^a = \kappa^a_b \wedge e^b. \quad (3.1.4)$$

Donde \mathring{R}^{ab} corresponde a la curvatura “libre torsión” dada por,

$$\mathring{R}^{ab} = d\mathring{\omega}^{ab} + \mathring{\omega}^a_c \wedge \mathring{\omega}^{cb}.$$

R^{ab} y T^a cumplen las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} DR^{ab} &= 0, \\ DT^a &= R^a_b \wedge e^b, \end{aligned}$$

llamadas las *identidades de Bianchi*. Como consecuencia de esta identidad y de (3.1.2), no es posible definir nuevas formas diferenciales independientes. Así, los ingredientes necesarios para construir un principio de acción para la gravedad en 4 dimensiones son el vielbein e^a , la conexión de Lorentz ω^{ab} , la 2-forma curvatura R^{ab} , la torsión T^a y las matrices η_{ab} y $\epsilon_{a_1 \dots a_d}$.

A partir de las ecuaciones de estructura es posible encontrar una expresión que relacione la curvatura y la torsión escritas en el lenguaje de formas diferenciales, con estas escritas en el lenguaje tensorial. Para conseguir dichas expresiones, es necesario recurrir al postulado del vielbein, dado por (2.3.10), entregándonos como resultado:

$$\begin{aligned} R^a_b &= \frac{1}{2} e^a_\rho e_b^\sigma R^\rho_{\sigma\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \\ T^a &= \frac{1}{2} e^a_\lambda T^\lambda_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \end{aligned}$$

donde $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ y $T^\lambda_{\mu\nu}$ están dados por (2.2.6) y (2.2.7) respectivamente.

La variación de cualquier forma diferencial, denotada por $E(e, \omega)$, la calcularemos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \bar{E}(e, \omega) &:= E(e + \delta e, \omega + \delta \omega), \\ &= E(e, \omega) + \delta E(e, \omega), \end{aligned}$$

despejando se tiene que

$$\delta E(e, \omega) = E(e + \delta e, \omega + \delta \omega) - E(e, \omega). \quad (3.1.5)$$

Notemos que la variación será sobre el vielbein y la conexión de espín, esto se debe a que estamos trabajando en el marco de torsión no nula, por lo tanto estos campos son independientes entre sí.

Luego, desde (3.1.1), (3.1.2) y (3.1.5), la variación de las 2-formas curvatura y torsión estarán dadas por

$$\delta R^{ab} = D\delta\omega^{ab}, \quad (3.1.6)$$

$$\delta T^a = D\delta e^a + \delta\omega^a{}_b \wedge e^b, \quad (3.1.7)$$

donde fue considerado una expansión a primer orden en δe y $\delta\omega$.

Con los ingredientes que hemos definido se puede demostrar que en 4 dimensiones se cumple el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1. *En el contexto de la geometría de Cartan, la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica Λ , puede ser escrita en la forma*

$$S(e, \omega) = \frac{1}{c\kappa_4} \int \left(\frac{1}{4} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d - \frac{1}{4!} \Lambda \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \right). \quad (3.1.8)$$

Con $\kappa_4 = 8\pi G$.

De esta forma tenemos un lagrangeano para la Relatividad General en el vacío o para la geometría del espaciotiempo dado por,

$$\mathcal{L}_G(e, \omega) = \frac{1}{c\kappa_4} \left(\frac{1}{4} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d - \frac{1}{4!} \Lambda \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \right). \quad (3.1.9)$$

Esta teoría recibe el nombre de **teoría de Einstein-Cartan**.

3.2. Ecuaciones de movimiento

Siendo $\mathcal{L}_G(e, \omega)$ una 4-forma, su variación está dada por (3.1.5) y sus ecuaciones de movimiento resultan ser

$$\mathcal{L}_G(e + \delta e, \omega + \delta\omega) - \mathcal{L}_G(e, \omega) = 0.$$

Las variaciones del lagrangeano (3.1.9) con respecto a sus campos independientes son

$$\delta_e \mathcal{L}_G = \frac{1}{c\kappa_4} \left(\frac{1}{2} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c - \frac{1}{3!} \Lambda \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \right) \wedge \delta e^d, \quad (3.2.1)$$

$$\delta_\omega \mathcal{L}_G = \frac{1}{c\kappa_4} \left[\frac{1}{2} \epsilon_{abcd} \delta\omega^{ab} \wedge T^c \wedge e^d + d \left(\frac{1}{4} \epsilon_{abcd} \delta\omega^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \right) \right]. \quad (3.2.2)$$

Para demostrar este resultado mostramos un esquema de los pasos a seguir para conseguirlo. Lo primero a realizar, es calcular la variación con respecto a e^a del lagrangeano. Para esto veamos que R^{ab} no aporta en la variación. Esto se debe a que, como se puede ver en (3.1.1), la curvatura sólo depende de la conexión de espín. Por lo tanto, será necesario variar directamente los vielbein explícitamente expuestos

en el lagrangeano (3.1.9). Finalmente, para obtener el resultado (3.2.1) es necesario utilizar la propiedad 4 de la Proposición 2.1.2 del producto exterior.

Para obtener la variación con respecto a ω^{ab} dada por (3.2.2), la ecuación (3.1.1) nos indica que sólo es necesario variar R^{ab} con respecto a este campo, la cual está descrita por (3.1.6), obteniendo

$$\delta_\omega \mathcal{L}_G = \frac{1}{c\kappa_4} \epsilon_{abcd} D\delta\omega^{ab} \wedge e^c \wedge e^d. \quad (3.2.3)$$

Posteriormente, por la necesidad de separar el factor $\delta\omega^{ab}$ del término variado en la expresión anterior, realizamos una integración por partes. Para esto, utilizando la propiedad de las derivadas definidas sobre tensores y n -formas (2.3.11), escribimos el lado derecho de (4.3.27) como

$$d\left(\epsilon_{abcd}\delta\omega^{ab} \wedge e^c \wedge e^d\right) = D\left(\epsilon_{abcd}\delta\omega^{ab} \wedge e^c \wedge e^d\right).$$

Aplicando la linealidad de la derivada exterior (2.1.3) a la identidad anterior se consigue (3.2.2).

Ahora, la variación de la acción (3.1.8), $\delta S = \int \delta \mathcal{L}$, entregará las ecuaciones de movimiento, a partir de las variaciones (3.2.1) y (3.2.2). Para el caso de $\delta_\omega S$ encontraremos una integral con respecto al elemento de volumen de una derivada exterior de un escalar. Por el teorema fundamental del cálculo exterior (ver teorema 4 – 13 de [49]), esto corresponde a un término de borde, que podemos despreciar haciendo tender a cero la variación en el infinito. Finalmente, las ecuaciones de movimiento en el vacío corresponden a

$$\begin{aligned} \delta e &: \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c - \frac{1}{3!} \Lambda \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c = 0, \\ \delta \omega &: \epsilon_{abcd} T^c \wedge e^d = 0. \end{aligned}$$

Observación 3.2.1. *Analícemos el término de Gauss-Bonnett $\epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd}$. Al variarlo según (3.1.5) resulta que*

$$\begin{aligned} \delta\left(\epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd}\right) &= 2\epsilon_{abcd} \delta R^{ab} \wedge R^{cd}, \\ &= 2\epsilon_{abcd} D\delta\omega^{ab} \wedge R^{cd}. \end{aligned}$$

Utilizando la propiedad de las derivadas (2.3.11), la linealidad de la derivada exterior (2.1.3), $DR^{ab} = 0$ y $D\epsilon_{abcd} = 0$, se consigue que

$$\delta\left(\epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd}\right) = 2\epsilon_{abcd} d\left(\delta\omega^{ab} \wedge R^{cd}\right).$$

De la misma forma que en la variación del lagrangeano de Relatividad General estándar, expuesto anteriormente, por el teorema fundamental del cálculo exterior se justifica que el término de Gauss-Bonnett entregue sólo términos de borde y no ecuaciones de movimiento. Este es un ejemplo de invariantes topológicos.

Por otra parte, en un universo con materia el lagrangeano completo \mathcal{L} deberá considerar un lagrangeano para la geometría $\mathcal{L}_G(e, \omega)$ y otro para la materia, que denotaremos como $\mathcal{L}_M(\varphi, e, \omega)$ donde φ representa algún tipo de campo de materia, así

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G(e, \omega) + \mathcal{L}_M(\varphi, e, \omega).$$

Debido a que estamos considerando torsión no nula, físicamente, esto significa que habrán contribuciones gravitacionales de la materia fermiónica, es decir, materia con espín distinto de cero. Por este motivo el lagrangeano de materia dependerá del vielbein, de la conexión de espín y del campo de materia antes mencionado. Notemos que estamos considerando un lagrangeano de materia que no depende de las derivadas de los campos e , ω y φ . Esta hipótesis es llamada de **acoplamiento minimal**.

Definiremos la variación de este lagrangeano como

$$\begin{aligned}\delta_e \mathcal{L}_M &= -\frac{1}{c} * \mathcal{T}_a \wedge \delta e^d, \\ \delta_\omega \mathcal{L}_M &= \frac{1}{2c} * \sigma_{ab} \wedge \delta \omega^{ab},\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^a &= \mathcal{T}_\mu^a dx^\mu, \\ \sigma^{ab} &= \sigma_\mu^{ab} dx^\mu,\end{aligned}$$

corresponden al **Tensor de Energía-Momentum** y al **Tensor de espín**, respectivamente. El Tensor de Energía-Momentum está relacionado a la materia clásica, o materia bariónica, mientras que el Tensor de espín está relacionado al espín de las partículas, o a las partículas fermiónicas. Con esto, las ecuaciones de campo provenientes de la variación del lagrangeano completo $\delta \mathcal{L} = \delta \mathcal{L}_G(e, \omega) + \delta \mathcal{L}_M(\varphi, e, \omega)$ son

$$\delta e : \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c - \frac{1}{3!} \Lambda \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c = \kappa_4 * \mathcal{T}_d, \quad (3.2.4)$$

$$\delta \omega : \epsilon_{abcd} T^c \wedge e^d = \kappa_4 * \sigma_{ab}. \quad (3.2.5)$$

La ecuación (3.2.4) corresponde a la ecuación de movimiento equivalente a la encontrada para la acción de Einstein-Hilbert sin torsión. La ecuación (3.2.5) entrega una ecuación algebraica para la torsión, $T^a = T^a(\sigma_{ab})$, además en ésta se ve que si hacemos cero el tensor de espín σ_{ab} , la torsión se anula. Esto puede interpretarse físicamente, como que, en ausencia de partículas fermiónicas, la torsión será nula, es decir, no estamos considerando las contribuciones gravitacionales de la materia fermiónica. Como se ve en la expresión para la torsión (3.1.4), la torsión nula equivale a una contorsión nula, $\kappa^a_b = 0$. Posteriormente, si reemplazamos la expresión anterior en (3.1.3), resultará que la curvatura de Lorentz será equivalente a la curvatura sin torsión dada por \hat{R}^{ab} , y por esto la ecuación (3.2.4) toma la siguiente forma

$$\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}\mathring{R}^{ab}\wedge e^c - \frac{1}{3!}\Lambda\epsilon_{abcd}e^a\wedge e^b\wedge e^c = \kappa_4 * \mathcal{T}_d. \quad (3.2.6)$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación de movimiento de la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica en un universo con materia en el lenguaje tensorial.

A modo de comparación, consideremos la acción de Einstein-Hilbert en el vacío en el lenguaje tensorial

$$S = \int d^4x \mathcal{L},$$

con $\mathcal{L} = \sqrt{-g}\mathring{R}$ y donde \mathring{R} corresponde al escalar de Ricci sin torsión. El cálculo necesario para variar dicha acción y así llegar a su ecuación de campo, dada por

$$\mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathring{R}g_{\mu\nu} = \kappa_4 \mathcal{T}_{\mu\nu}, \quad (3.2.7)$$

es más largo y con una dificultad mayor, en comparación al cálculo en el lenguaje de formas diferenciales, recién expuesto. (Para mayor detalle del cálculo de la ecuación de campo (3.2.7), el lector puede dirigirse al capítulo 4 de [4]).

3.3. Tensor torsional de energía-momentum

La ecuación de movimiento (3.1.5) podemos escribirla de tal forma que aparezca explícita la contorsión y dejando la curvatura libre de torsión. Para lograr esto, aplicaremos la expresión (3.1.3) en (3.1.5) resultando la siguiente expresión

$$\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}\mathring{R}^{ab}\wedge e^c - \frac{1}{3!}\Lambda\epsilon_{abcd}e^a\wedge e^b\wedge e^c = \kappa_4 * \mathcal{T}_d - \frac{1}{2}\left(\epsilon_{abcd}\mathring{D}\kappa^{ab} + \epsilon_{abcd}\kappa^a{}_f\wedge\kappa^{fb}\right)\wedge e^c.$$

Utilizando la propiedad (1) del dual de Hodge sobre la expresión anterior, podemos definir el *tensor torsional de energía-momentum efectivo* como

$$\tilde{\mathcal{T}}_d = -\frac{1}{2\kappa_4} * \left[\left(\epsilon_{abcd}\mathring{D}\kappa^{ab} + \epsilon_{abcd}\kappa^a{}_f\wedge\kappa^{fb} \right) \wedge e^c \right].$$

lo que nos permite escribir la ecuación (3.2.4) como

$$\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}\mathring{R}^{ab}\wedge e^c - \frac{1}{3!}\Lambda\epsilon_{abcd}e^a\wedge e^b\wedge e^c = \kappa_4 * \left(\mathcal{T}_d + \tilde{\mathcal{T}}_d \right), \quad (3.3.1)$$

Con esto se puede interpretar la contorsión como un campo de materia efectivo, que tiene un tensor de energía-momentum asociado $\tilde{\mathcal{T}}_d$.

De esta forma, vemos que si aplicamos la derivada covariante sin torsión, $\mathring{D} = d + \hat{\omega}\wedge$, a la ecuación de campo (3.3.1) y utilizando la identidad de Bianchi $\mathring{D}R^{ab} = 0$ y la condición de torsión nula $\mathring{D}e^a = 0$ resulta que

$$\mathring{D} * \left(\mathcal{T}_d + \tilde{\mathcal{T}}_d \right) = 0.$$

Lo que corresponde a una forma de conservación del tensor de energía-momentum tanto del campo de materia bosónica como del campo de materia torsional.

Para finalizar el capítulo, notemos que las principales características de la teoría de Einstein-Cartan son:

- Depende de dos campos independientes, el vielbein e^a y la conexión ω^{ab} .
- Posee ecuaciones de campo de segundo orden para los campos fundamentales.
- Es invariante bajo difeomorfismos.
- El espaciotiempo es cuatridimensional.

Como vimos en la sección 2.2.2, si el lagrangeano depende de dos campos independientes, la métrica y la conexión afín, la geometría posee tanto curvatura como torsión no nula. Esta propiedad corresponde a la principal diferencia con la Relatividad General de Einstein. Por esta razón podemos identificar la teoría de Einstein-Cartan, como una modificación, o extensión, de la Relatividad General estándar. En el próximo capítulo se estudiarán esta modificación y otras más.





Capítulo 4

Gravedad modificada y Teoría de Horndeski

En la primera mitad de este capítulo estudiamos la forma de modificar la Relatividad General de Einstein. Un caso particular es la teoría de Horndeski, y estudiamos las principales características de ésta. En la segunda mitad introducimos la geometría de Cartan a la teoría de Horndeski, es decir, estudiamos esta teoría con torsión no nula. Ya introducida, estudiamos las herramientas necesarias para encontrar las ecuaciones de movimiento. Para terminar, se estudia el comportamiento de una teoría con torsión no nula y un campo escalar no minimalmente acoplado a la geometría, en el límite $T^a \rightarrow 0$.

Para la primera parte del capítulo el lector puede dirigirse a [42], donde encuentra más detalles sobre gravedad modificada, y [20, 22] donde se desarrollan con profundidad las teorías tenso escalares. La teoría de Horndeski puede encontrarse en [27, 28].

4.1. Gravedad modificada

La Relatividad General de Einstein posee cuatro propiedades que la caracterizan:

- El único campo que describe los efectos gravitacionales es el campo métrico, que es libre de masa.
- Es invariante bajo difeomorfismos.
- El espaciotiempo es cuatridimensional.
- Las ecuaciones de movimiento son de segundo orden para la métrica.

Al trabajar en una teoría de gravedad modificada, es deseable mantener la invariancia bajo difeomorfismo, ya que, necesitamos una teoría donde el etiquetado de los puntos de la variedad sea sólo una herramienta auxiliar en la descripción de los fenómenos físicos. Sin embargo, tanto el carácter único y libre de masa del campo métrico, como la dimensionalidad del espacio-tiempo son características flexibles al momento de definir una teoría. Además, como vimos en el capítulo anterior, la geometría de la

Relatividad General es libre de torsión, propiedad que también puede ser suprimida al momento de proponer una nueva teoría.

Así, vemos que existen cuatro formas de modificar la gravedad:

1. Fijando el carácter único de la métrica involucrada en la acción gravitacional, necesitamos considerar teorías con dimensiones más altas para proponer una nueva teoría de gravedad. La teoría que generaliza naturalmente la Relatividad General a dimensiones arbitrarias es la teoría de Lovelock a través de su teorema de unicidad.

Teorema 4.1.1. *La acción de Lorentz invariante más general para la gravedad que da ecuaciones de campo a lo más de segundo orden para la métrica, bajo el supuesto de torsión nula, tiene la forma*

$$S_D = \int_M \sum_{p=0}^{[D/2]} a_p \mathcal{L}^{(D,p)},$$

donde D corresponde a la dimensión del espaciotiempo, a_p son constantes arbitrarias, $[D/2]$ representa la parte entera de $(D/2)$ y $\mathcal{L}^{(D,p)}$ está dado por

$$\mathcal{L}^{(D,p)} = \epsilon_{a_1 \dots a_d} \mathring{R}^{a_1 a_2} \wedge \dots \wedge \mathring{R}^{a_{2p-1} a_{2p}} \wedge e^{a_{2p+1}} \wedge \dots \wedge e^{a_D}.$$

Para $D = 3, 4$ en el teorema anterior, se consigue que

$$S_3 = \int_M \epsilon_{abc} \left(a_1 \mathring{R}^{ab} \wedge e^c + a_0 e^a \wedge e^b \wedge e^c \right),$$

$$S_4 = \int_M \epsilon_{abcd} \left(a_2 \mathring{R}^{ab} \wedge \mathring{R}^{cd} + a_1 \mathring{R}^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + a_0 e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \right).$$

Lo anterior muestra que la teoría de Lovelock coincide con la teoría de Relatividad General de Einstein para $D = 3$ y $D = 4$, ya que ambas entregan las mismas ecuaciones de movimientos.

2. Cuando mantenemos un espaciotiempo cuadrimensional, inevitablemente consideraremos la existencia de campos adicionales, o nuevos grados de libertad para una teoría modificada. El prototipo de este tipo de teorías, son las teorías tenso-escalares, y la más general es la teoría de Horndeski, que desarrollaremos con cierto detalle más adelante.
3. Considerar un campo métrico masivo, por ejemplo, una partícula elemental mediadora de la gravedad de espín 2, llamada gravitón, que tiene un rango finito de interacción.
4. Considerar teorías construidas sobre otras geometrías, distinta a la geometría libre de torsión. Por ejemplo, liberar esta restricción, es decir considerar una teoría con torsión definiendo una nueva conexión, permite el desarrollo del formalismo de primer orden, o formalismo de Palatini.

4.2. Teorías Tenso-escalares

Sabemos que la teoría de la Relatividad General con constante cosmológica es la teoría métrica mas general en cuatro dimensiones [26]. Por esta razón, la gravedad cuadrimensional modificada involucra necesariamente algún campo adicional, lo que significa un aumento de los grados de libertad de la teoría. El caso más simple que ilustra esta modificación, es la introducción de un campo escalar dependiente del tiempo.

Una de las primeras apariciones de un campo escalar en una teoría gravitacional es en el trabajo de Theodor Kaluza [31] y Oskar Klein [32] en la década de 1920, en su intento por la unificación de la gravitación y el electromagnetismo, ellos construyeron una teoría con dimensiones extra y un campo escalar. Motivado por la aparición del campo escalar y su posible rol como una constante de gravitación generalizada, Pascual Jordan en 1949 fue el primero en introducir formalmente las teorías tenso-escalares, reemplazando la constante de Newton por un campo escalar dependiente del tiempo. Posteriormente, en 1961, el esfuerzo de Jordan fue asumido por Robert Dicke y Carl Brans [3]. El objetivo de su trabajo fue encontrar una teoría gravitacional donde las propiedades métricas del espaciotiempo estén determinadas completamente por las masas de los cuerpos. Esto corresponde a una teoría que respeta el principio de Mach.

La teoría de Brans-Dicke se convirtió en la teoría alternativa a la Relatividad General de Einstein más contundente durante alrededor de cuarenta años [22]. En 1974, Gregory Horndeski [28] desarrolla la teoría más general en cuatro dimensiones con un campo escalar acoplado no minimalmente, que entrega ecuaciones de campo de segundo orden en las derivadas de los campos fundamentales. Por otra parte, en 2009 se desarrolla la teoría de Galileones [41], que corresponde a la teoría más general en cuatro dimensiones, para un campo escalar en el espacio plano, que tiene ecuaciones de campo que son polinomiales en las derivadas de segundo orden del campo y no contiene derivadas de menor o mayor orden a 2 de éste. El mismo año se generaliza esta teoría [14, 15], desarrollándola en un espacio curvo. En 2011 [33], se demuestra que la teoría generalizada de Galileones es equivalente a la teoría de Horndeski, este trabajo impulsó el estudio de esta última.

4.2.1. Teoría de Horndeski

Para responder a la pregunta:

¿Cuál es la teoría tenso-escalar en cuatro dimensiones espaciotemporales que entrega ecuaciones de campo de segundo orden para la métrica y para el campo escalar?

Gregory Horndeski [28] desarrolla un teorema de unicidad similar al Teorema de Lovelock 4.1.1. Considera una densidad lagrangeana \mathcal{L} , tal que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} (g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,i_1}, \dots, g_{\mu\nu,i_1\dots i_p}, \phi, \phi_{,i_1}, \dots, \phi_{,i_1\dots i_q}), \quad (4.2.1)$$

donde $p, q \geq 2$. Vemos que \mathcal{L} depende del tensor métrico, sus derivadas, un campo escalar y sus derivadas y está construido sobre una variedad Lorentziana dotada de la conexión de Levi Civita, dada por los símbolos de Christoffel.

Teorema 4.2.1. *La densidad lagrangeana $\mathcal{L}_H(g_{\mu\nu}, \phi)$*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_H(\phi, g_{\mu\nu}) &= \delta_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta\gamma} [\kappa_1(\phi, X) \nabla^\mu \nabla_\alpha \phi R_{\beta\gamma}{}^{\nu\sigma} + \\
&\quad + \frac{2}{3} \frac{\partial \kappa_1}{\partial X} \nabla^\mu \nabla_\alpha \phi \nabla^\nu \nabla_\beta \phi \nabla^\sigma \nabla_\gamma \phi + \kappa_3(\phi, X) \nabla_\alpha \phi \nabla^\mu \phi R_{\beta\gamma}{}^{\nu\sigma} + \\
&\quad + 2 \frac{\partial \kappa_3}{\partial X} \nabla_\alpha \phi \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \nabla_\beta \phi \nabla^\sigma \nabla_\gamma \phi] + \\
&\quad + \delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \left[(F(\phi, X) + 2W(\phi)) R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} + 2 \frac{\partial F}{\partial X} \nabla^\mu \nabla_\alpha \phi \nabla^\nu \nabla_\beta \phi + \right. \\
&\quad \left. 2\kappa_8(\phi, X) \nabla_\alpha \phi \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \nabla_\beta \phi \right] - \\
&\quad - 6 \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (F + 2W) - X \kappa_8(\phi, X) \right] \nabla_\mu \nabla^\mu \phi + \kappa_9(\phi, X), \quad (4.2.2) \\
X &= -\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi,
\end{aligned}$$

donde κ_i , F y W son funciones arbitrarias que dependen de ϕ y X . $\mathcal{L}_H(\phi, g_{\mu\nu})$ es la única acción cuya variación con respecto al campo escalar y a la métrica, entrega ecuaciones de campo de segundo orden e identidades de Bianchi.

Si definimos las ecuaciones de movimiento obtenidas por la métrica y el campo escalar como

$$\mathcal{E}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \text{ y } \mathcal{E} = 0,$$

con $T^{\mu\nu}$ el tensor de energía-momentum, el lagrangeano cumple una importante propiedad, que relaciona $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ y \mathcal{E} . Como se indica en [28], ésta corresponde a

$$\mathring{\nabla}_\mu \mathcal{E}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{E} \mathring{\nabla}^\nu \phi. \quad (4.2.3)$$

Bajo esta restricción, ambas ecuaciones de campo, $\mathcal{E}^{\mu\nu}$ y \mathcal{E} , deben ser de segundo orden en la derivada los campos.

A continuación, se entrega una forma alternativa de demostrar la identidad (4.2.3), a la utilizada originalmente en la tesis de Horndeski, en primer lugar escribimos la variación con respecto a los campos independientes del lagrangeano de Horndeski (4.2.2) como

$$\int \delta \left(d^4x \sqrt{|g|} \mathcal{L}_H(\phi, g_{\mu\nu}) \right) = \int d^4x \sqrt{|g|} \left[\mathcal{E}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \mathcal{E} \delta \phi + \mathring{\nabla}_\mu (\mathcal{B}^{\mu\rho\sigma} \delta g_{\rho\sigma} + \mathcal{B}^\mu \delta \phi) \right], \quad (4.2.4)$$

donde $\mathcal{E}^{\mu\nu} + \mathring{\nabla}_\mu (\mathcal{B}^{\mu\rho\sigma} \delta g_{\rho\sigma})$ corresponde a la variación con respecto a $g_{\mu\nu}$, $\mathcal{E} \delta \phi + \mathring{\nabla}_\mu (\mathcal{B}^\mu \delta \phi)$ es la variación con respecto a ϕ y $\mathcal{E}^{\mu\nu} = \mathcal{E}^{\nu\mu}$ y $\mathcal{B}^{\mu\rho\sigma} = \mathcal{B}^{\mu\sigma\rho}$. Recurriendo a la definición 2.1.15, podemos considerar la variación (4.2.4) como una derivada de Lie infinitesimal $\delta \rightarrow \mathcal{L}_\xi$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int \mathcal{L}_\xi \left(d^4x \sqrt{|g|} \mathcal{L}_H(\phi, g_{\mu\nu}) \right) &= \int d^4x \sqrt{|g|} \left[\mathcal{E}^{\mu\nu} \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} + \mathcal{E} \mathcal{L}_\xi \phi \right. \\
&\quad \left. + \mathring{\nabla}_\mu (\mathcal{B}^{\mu\rho\sigma} \mathcal{L}_\xi g_{\rho\sigma} + \mathcal{B}^\mu \mathcal{L}_\xi \phi) \right]. \quad (4.2.5)
\end{aligned}$$

Primero, analizamos el lado izquierdo de la expresión anterior. En el lenguaje de formas diferenciales, éste puede ser escrito como

$$d^4x\sqrt{|g|}\mathcal{L}_H = \frac{1}{4!}\mathcal{L}_H\epsilon_{abcd}e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d,$$

luego, por la definición de la derivada de Lie en formas diferenciales (2.3.12), tenemos que

$$\mathcal{L}_\xi \left(d^4x\sqrt{|g|}\mathcal{L}_H(\phi, g_{\mu\nu}) \right) = dI_\xi \left(\frac{1}{4!}\mathcal{L}_H\epsilon_{abcd}e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \right),$$

donde I_ξ es el operador de contracción (2.3.5). Notemos que hemos utilizado el hecho que, al estar trabajando en 4 dimensiones, por (2.1.3), $d\left(\frac{1}{4!}\mathcal{L}_H\epsilon_{abcd}e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d\right) = 0$. Ahora, aplicando I_ξ , recordando la equivalencia entre derivadas (2.3.11) y asumiendo torsión nula, es decir, $T^a = De^a = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi \left(d^4x\sqrt{|g|}\mathcal{L}_H(\phi, g_{\mu\nu}) \right) &= \frac{1}{3!}\epsilon_{abcd}\mathring{D}_m(\mathcal{L}_H\xi^a)e^m \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d, \\ &= d^4x\sqrt{|g|}\mathring{\nabla}_\mu(\mathcal{L}_H\xi^\mu), \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

aquí hemos utilizado la propiedad del símbolo de Levi Civita (2.4.4), la propiedad de la delta de Kronecker (2.4.3) y $\det(e^a{}_\mu) = \sqrt{|g|}$. Esta última identidad se obtiene a partir de la propiedad 3 de la proposición 2.3.1.

Por otra parte, del lado derecho de (4.2.5), vemos que es necesario encontrar el valor de $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}$ y $\mathcal{L}_\xi\phi$, los que, por (2.1.2), están dados por

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \mathring{\nabla}_\mu\xi_\nu + \mathring{\nabla}_\nu\xi_\mu, \quad \mathcal{L}_\xi\phi = \xi^\lambda\mathring{\nabla}_\lambda\phi. \quad (4.2.7)$$

Finalmente, reemplazando (4.2.6) y (4.2.7) en (4.2.5) y realizando álgebra sobre esto, tenemos que

$$\begin{aligned} \int d^4x\sqrt{|g|}\mathring{\nabla}_\mu(\mathcal{L}_H\xi^\mu) &= \int d^4x\sqrt{|g|} \left\{ \left[-2\mathring{\nabla}_\mu\mathcal{E}^{\mu\nu} + \mathcal{E}\mathring{\nabla}^\nu\phi \right] \xi_\nu \right. \\ &\quad \left. + \mathring{\nabla}_\mu \left[2\mathcal{E}^{\mu\nu}\xi_\nu + 2\mathcal{B}^{\mu\rho\sigma}\mathring{\nabla}_\rho\xi_\sigma + \mathcal{B}^\mu\xi^\rho\mathring{\nabla}_\rho\phi \right] \right\}. \end{aligned}$$

Por el teorema fundamental del cálculo exterior, esta identidad puede separarse en dos, de modo que

$$\int d^4x\sqrt{|g|}\mathring{\nabla}_\mu(\mathcal{L}_H\xi^\mu) = \int d^4x\sqrt{|g|}\mathring{\nabla}_\mu \left[2\mathcal{E}^{\mu\nu}\xi_\nu + 2\mathcal{B}^{\mu\rho\sigma}\mathring{\nabla}_\rho\xi_\sigma + \mathcal{B}^\mu\xi^\rho\mathring{\nabla}_\rho\phi \right], \quad (4.2.8)$$

$$0 = \int d^4x\sqrt{|g|} \left[-2\mathring{\nabla}_\mu\mathcal{E}^{\mu\nu} + \mathcal{E}\mathring{\nabla}^\nu\phi \right] \xi_\nu. \quad (4.2.9)$$

Por lo tanto, tenemos que de (4.2.9), obtenemos la identidad (4.2.3).

Por últimos, el lagrangeano de Horndeski ha sido muy estudiado, y sus ecuaciones de movimiento, como es de esperar, están calculadas y corresponden a

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = \sum_{i=2}^5 \mathcal{G}_{\mu\nu}^i = 0, \quad \mathcal{E} = \nabla^\mu \left(\sum_{i=2}^5 J_\mu^i \right) - \sum_{i=2}^5 P_\phi^i = 0, \quad (4.2.10)$$

donde $\mathcal{G}_{\mu\nu}^i$, J_μ^i y P^i corresponden a los términos que constituyen las ecuaciones de campo, que están expresados completamente y con detalle en un trabajo de Kobayashi, Yamaguchi y Yokoyama [33].

4.3. Teoría de Horndeski con torsión

En esta sección se presenta el modo de incorporar dos ingredientes a la gravedad estándar, la torsión y el campo escalar. Para esto, tomamos el lagrangeano de Horndeski (4.2.2), que como sabemos, es el más general en cuatro dimensiones espaciotemporales con un campo escalar no minimalmente acoplado a la geometría. Asumimos un cambio en la geometría, tal que la definición de una nueva conexión nos permite construir una teoría sobre una geometría con torsión.

A través del lenguaje de formas diferenciales es posible escribir el lagrangeano de Horndeski. Al realizar el cambio de lenguaje, nos encontramos reiteradas veces con el dual de Hodge, que definimos en el capítulo 2, tomando una única forma, dada por

$$Z^a = e^a{}_\mu \partial^\mu \phi, \quad (4.3.1)$$

$$= - * (e^a \wedge * d\phi), \quad (4.3.2)$$

y,

$$X = \frac{1}{2} * (d\phi \wedge * d\phi).$$

El primer paso para lograr nuestro objetivo, consiste en definir un nuevo operador que mapea p -formas en $(p-q)$ -formas,

$$\Sigma_{a_1 \dots a_q} : A^p(M) \rightarrow A^{p-q}(M).$$

Lo definimos como

$$\Sigma_{a_1 \dots a_q} = (-1)^{(d-p)(p-q)+\eta_-} * (e_{a_1} \wedge \dots \wedge e_{a_q} \wedge *),$$

y al aplicarlo a una p -forma $\Phi = \frac{1}{p!} \Phi_{n_1 \dots n_p} e^{n_1} \wedge \dots \wedge e^{n_p}$, sus componentes son

$$\Sigma_{a_1 \dots a_q} \Phi = \frac{1}{(p-q)!} \Phi_{a_1 \dots a_q n_1 \dots n_{p-q}} e^{n_1} \wedge \dots \wedge e^{n_{p-q}}.$$

Si consideramos $q = 1$, el operador Σ^a , estará dado por

$$\begin{aligned} \Sigma^a &= (-1)^{d(p-1)+\eta_-} * (e^a *), \\ \Sigma^a \Phi &= \frac{1}{(p-1)!} \Phi^a{}_{n_1 \dots n_{p-1}} e^{n_1} \wedge \dots \wedge e^{n_{p-1}}, \end{aligned}$$

Propiedades de $\Sigma_{a_1 \dots a_q}$:

1. Es invertible, es decir, $\frac{(p-q)!}{p!} e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_q} \wedge \Sigma_{a_1 \dots a_q} \Phi = \Phi$.
2. Es antisimétrico, es decir, $\Sigma_{a_1 \dots a_q} = \frac{1}{q!} \delta_{a_1 \dots a_q}^{b_1 \dots b_q} \Sigma_{b_1 \dots b_q}$.

3. $\Sigma_a \Sigma^a = 0$.
4. Satisface la regla de Leibniz: $\Sigma_a (\alpha^{(p)} \wedge \beta^{(q)}) = \Sigma_a \alpha^{(p)} \wedge \beta^{(q)} + (-1)^p \alpha^{(p)} \wedge \Sigma_a \beta^{(q)}$.
5. Toda la familia de operadores se puede generar en forma recursiva a partir del operador Σ_a , es decir, $\Sigma_a \Sigma_{b_1 \dots b_q} = \Sigma_{b_1 \dots b_q a}$.
6. $D\Sigma_a + \Sigma_a D = e_a^\mu D_\mu$.
7. $\alpha^{(d-r+q)} \wedge \Sigma_{a_1 \dots a_q} \beta^{(r)} = (-1)^{(d-r)(r-q)} \beta^{(r)} \wedge \Sigma_{a_1 \dots a_q} \alpha^{(d-r+q)}$.
8. Dada la 0-forma $\lambda^{b_1 \dots b_r}$ y una p -forma Φ , entonces $*(\lambda^{b_1 \dots b_r} \Phi) = \lambda^{b_1 \dots b_r} * \Phi$.
Por lo anterior se consigue que, $\Sigma_{a_1 \dots a_q} (\lambda^{b_1 \dots b_r} \Phi) = \lambda^{b_1 \dots b_r} \Sigma_{a_1 \dots a_q} \Phi$.
9. $\Sigma_b e^a = \delta_b^a$.

Ahora el término (4.3.2) se puede escribir como

$$Z^a = \Sigma^a d\phi, \quad (4.3.3)$$

y además,

$$X = -\frac{1}{2} Z^a Z_a. \quad (4.3.4)$$

Por último, con lo anterior definiremos las siguientes 1-formas

$$\pi^a = -DZ^a, \quad (4.3.5)$$

$$\theta^a = d\phi Z^a. \quad (4.3.6)$$

A través de estas nuevas definiciones se puede demostrar que se cumplen las siguientes propiedades:

1. $e^a Z_a = d\phi$.
2. $\theta^a \wedge \theta^b = e^a \wedge \theta_a = 0$.
3. $D\theta^a = \pi^a \wedge d\phi$.
4. $\Sigma^a \theta^b = Z^a Z^b$.
5. $X = -\frac{1}{2} \Sigma_a \theta^a$.
6. $\Sigma_a dX = -\frac{1}{2} \Sigma_a d\Sigma_b \theta^b$.

Para visualizar esta transformación de lenguaje consideremos los siguientes lagrangianos [8],

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \sqrt{-g} V_1(\phi) G^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi, \\ \mathcal{L}_2 &= -\sqrt{-g} V_2(\phi) \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} R_{\lambda\sigma\gamma\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\mu \phi \nabla_\alpha \phi \nabla_\nu \phi \nabla_\beta \phi, \\ \mathcal{L}_3 &= \sqrt{-g} V_3(\phi) R, \\ \mathcal{L}_4 &= \sqrt{-g} V_4(\phi) R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2. \end{aligned}$$

donde $V_i(\phi)$ son funciones arbitrarias de ϕ . Ocupando las herramientas ya definidas podemos escribirlos en el lenguaje de formas diferenciales, y asumiendo torsión no nula, obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_1 &= \frac{1}{2} V_1(\phi) \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge \theta^d, \\
 \mathcal{L}_2 &= V_2(\phi) \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge \theta^c \wedge \pi^d, \\
 \mathcal{L}_3 &= V_3(\phi) \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \\
 \mathcal{L}_4 &= V_4(\phi) \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd}.
 \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Ahora estamos en condiciones de escribir de forma elegante el lagrangeano de Horndeski en el lenguaje de formas diferenciales, el cual toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_H^{(4)}(\phi, e, \omega) &= 2\kappa_1 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge \pi^d + \frac{2}{3} \frac{\partial \kappa_1}{\partial X} \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge \pi^b \wedge \pi^c \wedge e^d \\
 &+ 2\kappa_3 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge \theta^d + 2 \frac{\partial \kappa_3}{\partial X} \epsilon_{abcd} \theta^a \wedge \pi^b \wedge \pi^c \wedge e^d \\
 &+ (F + 2W) \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \\
 &+ \frac{\partial F}{\partial X} \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge \pi^b \wedge e^c \wedge e^d + \kappa_8 \epsilon_{abcd} \theta^a \wedge \pi^b \wedge e^c \wedge e^d \\
 &- \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (F + 2W) - X \kappa_8 \right] \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\
 &+ \kappa_9 \frac{1}{4!} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d.
 \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

4.3.1. Ecuaciones de movimiento

En la sección anterior conocimos el lagrangeano de Horndeski en formas diferenciales. Ahora estudiamos el comportamiento de este lagrangeano cuando es variado con respecto a cada uno de los campos independientes, a saber, la métrica (dada por el vielbein e^a), la conexión de espín ω^{ab} y el campo escalar ϕ . El cálculo de la variación con respecto a la conexión no entrega mayor problema, es una variación directa. En cambio, el caso del cálculo de la variación en e^a y en ϕ es más compleja, debido a que, además de variar directamente los vielbein y los campos escalares que aparecen explícitos en cada término, nos encontramos con la necesidad de variar Z^a , dada por la ecuación (4.3.2), con respecto a e^a y ϕ . En efecto, al efectuar la variación de $\mathcal{L}_H^{(4)}(\phi, e, \omega)$ con respecto a e^a , obtenemos:

1. Los términos que contienen la variación de e^a , donde se ha variado directamente.
2. Los términos que contienen la variación de Z^a con respecto a e^a .

Análogamente, para la variación de $\mathcal{L}_H^{(4)}(\phi, e, \omega)$ con respecto a ϕ encontramos:

1. Los términos que contienen la variación de ϕ , donde se ha variado directamente.
2. Los términos que contienen la variación de Z^a con respecto a ϕ .

Analicemos primero las variaciones directas con respecto a e^a y a ϕ en el lagrangeano de Horndeski. A esta variación la simbolizamos por $\bar{\delta}$. Siguiendo el cálculo explicado anteriormente, se consigue que

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}_e \mathcal{L}_H^{(4)}(\phi, e, \omega) = & \left\{ 2\kappa_1 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge \pi^c + \frac{2}{3} \frac{\partial \kappa_1}{\partial X} \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge \pi^b \wedge \pi^c \right. \\
& + 2\kappa_3 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge \theta^c + 2 \frac{\partial \kappa_3}{\partial X} \epsilon_{abcd} \theta^a \wedge \pi^b \wedge \pi^c \\
& + 2(F + 2W) \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c + 2 \frac{\partial F}{\partial X} \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge \pi^b \wedge e^c \\
& - 3 \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (F + 2W) - X \kappa_8 \right] \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge e^b \wedge e^c \\
& \left. + 2\kappa_8 \epsilon_{abcd} \theta^a \wedge \pi^b \wedge \pi^c + \frac{1}{3!} \kappa_9 \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \right\} \wedge \bar{\delta} e^d.
\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

En la ecuación (4.3.9), la 3-forma que está al interior del paréntesis de llaves, la denotamos por $\frac{\bar{\delta} \mathcal{L}_H^{(4)}}{\delta e^d}$.

Similarmente,

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}_\phi \mathcal{L}_H^{(4)}(\phi, e, \omega) \doteq & \left\{ 2 \left(\frac{\partial \kappa_1}{\partial \phi} - \kappa_3 \right) \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge \pi^d \right. \\
& + 2 \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 \kappa_1}{\partial \phi \partial X} - \frac{\partial \kappa_3}{\partial \phi} \right) \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge \pi^b \wedge \pi^c \wedge e^d \\
& + 2 \frac{\partial \kappa_3}{\partial \phi} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge \theta^d + 2 \frac{\partial^2 \kappa_3}{\partial \phi \partial X} \epsilon_{abcd} \theta^a \wedge \pi^b \wedge \pi^c \wedge e^d \\
& + \left(\frac{\partial F}{\partial \phi} + 2 \frac{\partial W}{\partial \phi} \right) \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \\
& + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \phi \partial X} - \kappa_8 \right) \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge \pi^b \wedge e^c \wedge e^d \\
& + \frac{1}{4!} \frac{\partial \kappa_1}{\partial \phi} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + \left[2 \left(\kappa_3 \epsilon_{abcd} R^{ab} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial \kappa_3}{\partial X} \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge \pi^b + \kappa_8 \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge e^b \right) \wedge T^c \right. \\
& \left. + \left\{ 2d\kappa_3 \epsilon_{abcd} R^{ab} + 2d \frac{\partial \kappa_3}{\partial X} \wedge \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge \pi^b + d\kappa_8 \wedge \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge e^b \right. \right. \\
& \left. \left. + D\pi^a \wedge \left(4 \frac{\partial \kappa_3}{\partial X} \epsilon_{abcd} \pi^b + \kappa_8 \epsilon_{abcd} e^b \right) \right\} \wedge e^c \right] Z^d \left. \right\} \bar{\delta} \phi,
\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

donde \doteq lo entendemos como igualdad módulo términos de borde.

En la ecuación (4.3.10), la 4-forma que está al interior del paréntesis de llaves, la denotamos por $\frac{\bar{\delta} \mathcal{L}_H^{(4)}}{\delta \phi}$.

Por lo tanto, de (4.3.9) y (4.3.10), podemos escribir

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_e \mathcal{L}_H^{(4)}(\phi, e, \omega) &= \frac{\bar{\delta} \mathcal{L}_H^{(4)}}{\bar{\delta} e^d} \wedge \delta e^d, \\ \bar{\delta}_\phi \mathcal{L}_H^{(4)}(\phi, e, \omega) &\doteq \frac{\bar{\delta} \mathcal{L}_H^{(4)}}{\bar{\delta} \phi} \delta \phi.\end{aligned}$$

Los términos que contienen la variación con respecto al vielbein y al campo escalar de Z^a lo denotaremos por $\frac{\delta \mathcal{L}_H^{(4)}}{\delta Z^m} \delta_e Z^m$ y $\frac{\delta \mathcal{L}_H^{(4)}}{\delta Z^m} \delta_\phi Z^m$, respectivamente. Con esto, podemos escribir la variación completa del lagrangeano con respecto a los campos como

$$\delta_e \mathcal{L}_H^{(4)}(\phi, e, \omega) = \bar{\delta}_e \mathcal{L}_H^{(4)} + \frac{\delta \mathcal{L}_H^{(4)}}{\delta Z^m} \delta_e Z^m, \quad (4.3.11)$$

$$\delta_\phi \mathcal{L}_H^{(4)}(\phi, e, \omega) = \bar{\delta}_\phi \mathcal{L}_H^{(4)} + \frac{\delta \mathcal{L}_H^{(4)}}{\delta Z^m} \delta_\phi Z^m. \quad (4.3.12)$$

Primero analizamos el comportamiento de Z^a al variarlo con respecto al vielbein. Una variación arbitraria de (2.3.3), tiene la siguiente forma

$$e^a{}_\mu \rightarrow \bar{e}^a{}_\mu = e^a{}_\mu + \delta e^a{}_\mu, \quad (4.3.13)$$

$$e_a{}^\mu \rightarrow \bar{e}_a{}^\mu = e_a{}^\mu + \delta e_a{}^\mu. \quad (4.3.14)$$

Por (4.3.13) y definiendo $\delta e^a{}_\mu := \frac{1}{2} h^a{}_b e^b{}_\mu$, se consigue que

$$e^a{}_\mu \rightarrow \bar{e}^a{}_\mu = e^a{}_\mu + \frac{1}{2} h^a{}_b e^b{}_\mu. \quad (4.3.15)$$

Para encontrar (4.3.14), se debe cumplir para $\bar{e}_a{}^\mu$ y $\bar{e}^a{}_\mu$ la propiedad 2 enunciada en la sección 2.3, tal que

$$\bar{e}^a{}_\mu \bar{e}_b{}^\mu = e^a{}_\mu e_b{}^\mu = \delta_b^a, \quad (4.3.16)$$

$$\bar{e}^a{}_\nu \bar{e}_a{}^\mu = e^a{}_\nu e_a{}^\mu = \delta_\nu^\mu. \quad (4.3.17)$$

Luego, de (4.3.15), (4.3.16) y (4.3.17), la variación (4.3.14) se tiene que

$$e_a{}^\mu \rightarrow \bar{e}_a{}^\mu = e_a{}^\mu - \frac{1}{2} h^b{}_a e_b{}^\mu.$$

Esto implica que la variación de Z_a , dada por (4.3.1), con respecto a e^a , está dada por

$$\begin{aligned}\delta_e Z_a &= \delta e_a{}^\mu \partial_\mu \phi, \\ &= -\frac{1}{2} h^b{}_a Z_b.\end{aligned} \quad (4.3.18)$$

Sabemos que $\delta e^b = \frac{1}{2} h^b{}_a e^a$. Luego, aplicando el operador Σ_a a esta última expresión tenemos que

$$\frac{1}{2} h^b{}_a = \Sigma_a \delta e^b.$$

Con esto, podemos escribir (4.3.18) como

$$\delta_e Z_a = -Z_b \Sigma_a \delta e^b.$$

Notemos que en el lagrangeano Z^a siempre estará acompañado por una d -forma, que denotamos por \mathcal{H}_a . A partir de la última ecuación, y recurriendo a la Propiedad 7 de $\Sigma_{a_1 \dots a_q}$ para el caso $q = 1$, podemos escribir una d -forma como

$$\mathcal{H}_a \delta_e Z^a = \Sigma^a (\mathcal{H}_a) Z_b \wedge \delta e^b. \quad (4.3.19)$$

Por otra parte, de (4.3.3), la variación con respecto a ϕ de Z^a está dada por,

$$\delta_\phi Z^a = \Sigma^a d\delta\phi,$$

y análogamente a la variación anterior, se escribe

$$\mathcal{H}_a \delta_\phi Z^a = d\delta\phi \wedge \Sigma^a \mathcal{H}_a,$$

De la definición de derivada exterior (2.1.3) y la propiedad de las derivadas definidas sobre tensores y n -formas (2.3.11), tenemos que la ecuación anterior toma la forma

$$\mathcal{H}_a \delta_\phi Z^a = -\delta\phi d(\Sigma^a \mathcal{H}_a) + d(\delta\phi \Sigma^a \mathcal{H}_a),$$

ó

$$\mathcal{H}_a \delta_\phi Z^a \doteq -\delta\phi d(\Sigma^a \mathcal{H}_a). \quad (4.3.20)$$

Las expresiones (4.3.19) y (4.3.20) inducen una variación indirecta en (4.3.8), es decir, al variar el lagrangeano con respecto a Z^a , lo variamos indirectamente con respecto a e^a y ϕ . Por ejemplo, para el término X dado por (4.3.4), la variación $\delta_Z X$ será

$$\delta_Z X = -Z_a \delta Z^a.$$

Utilizando este resultado podemos escribir la variación $Z^a \rightarrow Z^a + \delta Z^a$ de una función $f = f(\phi, X)$ como

$$\delta_Z f = -Z_a \frac{\partial f}{\partial X} \delta Z^a. \quad (4.3.21)$$

Además, de la ecuación (4.3.5) se tiene

$$\delta\pi^a = D\delta Z^a + \delta\omega^a_b \wedge Z^b, \quad (4.3.22)$$

y de esto se deduce que,

$$\delta_Z \pi^a = D\delta Z^a. \quad (4.3.23)$$

Por otra parte, de la ecuación (4.3.6), se tiene

$$\delta_Z \theta^a = d\phi \delta Z^a. \quad (4.3.24)$$

De la expresión (4.3.11) y utilizando la ecuación (4.3.19), la variación completa del lagrangeano Horndeski con respecto al vielbein esta dada por

$$\delta_e \mathcal{L}_H^{(4)} = \left[\frac{\bar{\delta} \mathcal{L}_H^{(4)}}{\bar{\delta} e^d} + \Sigma^m \left(\frac{\delta \mathcal{L}_H^{(4)}}{\delta Z^m} \right) Z_d \right] \wedge \delta e^d. \quad (4.3.25)$$

Análogamente, de (4.3.20) la variación completa del lagrangeano de Horndeski (4.3.12) con respecto al campo escalar está dada por

$$\delta_\phi \mathcal{L}_H^{(4)} \doteq \delta \phi \left[\frac{\bar{\delta} \mathcal{L}_H^{(4)}}{\bar{\delta} \phi} - d \left(\Sigma^m \frac{\delta \mathcal{L}_H^{(4)}}{\delta Z^m} \right) \right]. \quad (4.3.26)$$

Notemos que tanto para las variaciones (4.3.25) y (4.3.26) es necesario encontrar el término $\frac{\delta \mathcal{L}_H^{(4)}}{\delta Z^m}$, que corresponde a la variación $Z^a \rightarrow Z^a + \delta Z^a$ de $\mathcal{L}_H^{(4)}$. Como vemos, es necesario encontrar el término $\frac{\delta \mathcal{L}_H^{(4)}}{\delta Z^m}$. Utilizando (4.3.21), (4.3.22), (4.3.23) y (4.3.24) obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}_H^{(4)}}{\delta Z^m} = & 2\epsilon_{abcd} \left\{ \kappa_1 R^{ab} + \frac{\partial \kappa_1}{\partial X} \pi^a \wedge \pi^b + 2 \frac{\partial \kappa_3}{\partial X} \pi^a \wedge \theta^b + 2 \frac{\partial F}{\partial X} \pi^a \wedge e^b \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \kappa_8 e^a \wedge \theta^b - \frac{3}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (F + 2W) - X \kappa_8 \right] e^a \wedge e^b \right\} \wedge T^c \\ & - \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge \left[C^d{}_m + 2 \frac{\partial \kappa_1}{\partial X} \delta_{mn}^r Z_r \pi^n \right] \\ & + 2\epsilon_{abcm} D\pi^a \wedge e^b \wedge \left[2 \frac{\partial \kappa_1}{\partial X} \pi^c + 2 \frac{\partial \kappa_3}{\partial X} \theta^c + \frac{\partial F}{\partial X} e^c \right] \\ & - \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge \pi^b \wedge e^c \wedge \left(\bar{C}^d{}_m + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \kappa_1}{\partial X^2} \pi^d Z_m \right) \\ & + 2\epsilon_{abcm} \pi^a \wedge e^b \wedge dX \wedge \left(\frac{\partial^2 \kappa_1}{\partial X^2} \pi^c + 2 \frac{\partial^2 \kappa_3}{\partial X^2} \theta^c + \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} e^c \right) \\ & + \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge M^d{}_m + \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge K^d{}_m \\ & + \epsilon_{abcm} e^a \wedge e^b \wedge dX \wedge \left(\theta^c \frac{\partial \kappa_8}{\partial X} - e^c \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\partial F}{\partial \phi} - X \kappa_8 \right] \right), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} C^d{}_m &= \left\{ e^d Z_m \frac{\partial F}{\partial X} - 2 \left(\left[\kappa_3 - \frac{\partial \kappa_1}{\partial \phi} \right] \delta_m^d - \frac{\partial \kappa_3}{\partial X} Z^d Z_m \right) d\phi \right\}, \\ \bar{C}^d{}_m &= \left\{ e^d Z_m \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} - 2 \left(\left[3 \frac{\partial \kappa_3}{\partial X} - \frac{\partial^2 \kappa_1}{\partial \phi \partial X} \right] \delta_m^d - Z^d Z_m \frac{\partial^2 \kappa_3}{\partial X^2} \right) d\phi \right\}, \\ K^d{}_m &= \left(\left[\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} (F + 2W) - X \frac{\partial \kappa_8}{\partial \phi} \right] d\phi \delta_m^d - \frac{1}{4!} e^d Z_m \frac{\partial \kappa_9}{\partial X} \right), \\ M^d{}_m &= \left(\left(2 \left[\kappa_8 - \frac{\partial^2 F}{\partial \phi \partial X} \right] \delta_m^d - \frac{\partial \kappa_8}{\partial X} Z^d Z_m \right) d\phi + e^d Z_m \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\partial F}{\partial \phi} - X \kappa_8 \right] \right). \end{aligned}$$

Mientras tanto, la variación de $\mathcal{L}_H^{(4)}$ con respecto a la conexión de espín, se consigue de la misma forma que lo hicimos en el caso de las variaciones directas anteriores y la podemos escribir como

$$\delta_\omega \mathcal{L}_H^{(4)}(\phi, e, \omega) = \frac{\delta \mathcal{L}_H^{(4)}}{\delta \omega^{mn}} \wedge \delta \omega^{mn}. \quad (4.3.27)$$

Por (4.3.22) vemos que

$$\delta_\omega \pi^a = \delta \omega^a_b \wedge Z^b. \quad (4.3.28)$$

Luego, de (3.1.6) y (4.3.28), se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}_H^{(4)}}{\delta \omega^{mn}} &= -\epsilon_{mncd} T^c \wedge \left[\kappa_1 \pi^d + \kappa_3 \theta^d + (F + 2W) e^d \right] \\ &+ \epsilon_{mncd} e^c \wedge \left[d\kappa_1 \wedge \pi^d + \kappa_1 R^d_e Z^e + d\kappa_3 \wedge \theta^d \right. \\ &\left. \kappa_3 d\phi \wedge \pi^d + \frac{1}{2} d(F + 2W) \wedge e^d \right] - \frac{1}{2} (Z_m \epsilon_{nbcd} - Z_n \epsilon_{mbcd}) \{ \kappa_1 R^{bc} \\ &+ \pi^b \wedge \left(\frac{\partial \kappa_1}{\partial X} \pi^c + 2 \frac{\partial \kappa_3}{\partial X} \theta^c + \frac{\partial F}{\partial X} e^c \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\kappa_8 \theta^b - \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (F + 2W) - X \kappa_8 \right] e^b \right) \wedge e^c \} \wedge e^d. \end{aligned}$$

A continuación se realiza un análisis sobre la aparición de la torsión en las variaciones del lagrangeano (4.3.8). Este hecho surge a partir de tres comportamientos:

1. Variación indirecta $Z^a \rightarrow Z^a + \delta Z^a$ de los términos que dependen de π^a . Para ilustrar lo anterior, estudiamos el término Ξ_1 del lagrangeano $\mathcal{L}_H^{(4)}$ dado por

$$\Xi_1 = 2\kappa_1 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge \pi^d,$$

su variación con respecto a Z^a está dada por

$$\delta_Z \Xi_1 = -2Z_m \frac{\partial \kappa_1}{\partial X} \delta Z^m \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge \pi^d + 2\kappa_1 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge D\delta Z^d.$$

Ocupando la expresión de la derivada exterior (2.1.3) y la propiedad de las derivadas covariante y derivada exterior (2.3.11) encontramos que la variación de Ξ_1 es

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Xi_1}{\delta Z^m} &= -2Z_m \frac{\partial \kappa_1}{\partial X} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge \pi^d + 2 \frac{\partial \kappa_1}{\partial X} dX \epsilon_{abcm} \wedge R^{ab} \wedge e^c \\ &+ 2\kappa_1 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge T^c + 2 \frac{\partial \kappa_1}{\partial \phi} d\phi \epsilon_{abcm} \wedge R^{ab} \wedge e^c. \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

2. Variación directa $\frac{\delta \Xi}{\delta \phi}$ de los términos que dependen de θ^a . Para ilustrar lo anterior, estudiamos el término Ξ_3 del lagrangeano $\mathcal{L}_H^{(4)}$ dado por

$$\Xi_3 = 2\kappa_3 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge \theta^d,$$

su variación directa con respecto a ϕ está dada por

$$\bar{\delta}_\phi \Xi_3 = 2 \frac{\partial \kappa_3}{\partial \phi} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge \theta^d \bar{\delta} \phi + 2 \kappa_3 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge d \bar{\delta} \phi Z^d,$$

y, análogamente al cálculo del caso anterior, tenemos que la variación

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_\phi \Xi_3 = & \left[2 \frac{\partial \kappa_3}{\partial \phi} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge \theta^d + 2 \kappa_3 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge T^c Z^d \right. \\ & \left. - 2 \kappa_3 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge \pi^d \right] \bar{\delta} \phi - 2d \left(\kappa_3 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge \bar{\delta} \phi Z^d \right). \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

3. Variación $\frac{\delta \Xi}{\delta \omega^{ab}}$ de los términos que dependen de R^{ab} . Vemos que, siguiendo el procedimiento de los casos anteriores, la variación del término Ξ_1 está dado por

$$\begin{aligned} \delta_\omega \Xi_1 = & \delta \omega^{ab} \wedge \left(2d \kappa_1 \epsilon_{abcd} \wedge e^c \wedge \pi^d + 2 \kappa_1 \epsilon_{abcd} T^c \wedge \pi^d \right. \\ & \left. - 2 \kappa_1 \epsilon_{abcd} e^c \wedge D \pi^d + 2 \kappa_1 \epsilon_{afcd} Z_b R^{fc} \wedge e^d \right) \\ & + 2d \left(\kappa_1 \epsilon_{abcd} \delta \omega^{ab} \wedge e^c \wedge \pi^d \right). \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

Notemos que en los primeros dos casos, la torsión se genera directamente del campo escalar. En estos, vemos que a partir de la variación δZ^a o $\bar{\delta} \phi$ de los términos que cumplen con $\Xi \sim \partial^2 \phi$ o $\Xi \sim (\partial \phi)^2$, la torsión aparece. En el tercer caso, la torsión se genera a partir de los términos que dependen de R^{ab} y ϕ es decir, por el acoplamiento no minimal del campo escalar a la geometría, similar a lo que ocurre en [52] con el término de Gauss-Bonnet acoplado a un campo escalar.

4.3.2. Un caso particular: Teoría de Horndeski

Usando la variación del lagrangeano $\mathcal{L}_H^{(4)}(\phi, e, \omega)$ dada por (4.3.25), (4.3.26) y (4.3.27), se pueden escribir las ecuaciones de campo como sigue

$$\frac{\bar{\delta} \mathcal{L}_H^{(4)}}{\bar{\delta} e^d} + \Sigma^m \left(\frac{\delta \mathcal{L}_H^{(4)}}{\delta Z^m} \right) Z_d = 0, \quad (4.3.32)$$

$$\frac{\bar{\delta} \mathcal{L}_H^{(4)}}{\bar{\delta} \phi} - d \left(\Sigma^m \frac{\delta \mathcal{L}_H^{(4)}}{\delta Z^m} \right) = 0, \quad (4.3.33)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_H^{(4)}}{\delta \omega^{mn}} = 0. \quad (4.3.34)$$

Estamos en condiciones de realizar un análisis comparativo con lo estudiado en la literatura. Como ya se expuso en la sección 4.2.1, las ecuaciones de campo para el lagrangeano de Horndeski sin torsión están dadas por (4.2.10). Debido a que la teoría con torsión es más general que la teoría de Horndeski original, es necesario analizar el modo en que, a partir de las ecuaciones de campos con torsión (4.3.32), (4.3.33) y (4.3.34), se llega a las ecuaciones sin torsión (4.2.10).

Lo que se espera, es que, al igual que en el caso de la teoría de Einstein-Cartan, haciendo $T^a = 0$ en (4.3.32), (4.3.33) y (4.3.34) se consigan las ecuaciones del lagrangeano de Horndeski original (4.2.10). Sin embargo, no es suficiente imponer esta restricción en las ecuaciones. En efecto, al reemplazar $T^a = 0$ en (4.3.32), (4.3.33) y (4.3.34) no se consiguen las ecuaciones de movimiento originales.

Este comportamiento, se debe a que esta teoría presenta una estrecha relación entre la dinámica del campo escalar ϕ y la torsión T^a . Como vimos en la sección anterior, la torsión se genera por el acoplamiento no minimal del campo escalar a la geometría, y además por la dinámica del campo escalar. De tal forma que, en general, si imponemos $T^a = 0$, entonces ϕ es constante, y eliminamos la dinámica de ϕ . La relación $T^a \sim \partial\phi$ la veremos con mayor claridad en el siguiente capítulo, particularmente en la expresión 5.2.11.

Ahora, la pregunta es ¿cómo recuperamos el caso de torsión nula? La clave para resolver esta pregunta, es que $T^a = 0$ no es una ecuación de campo en el vacío para el caso de acoplamiento no minimal entre el campo escalar y la geometría. Así, imponerla a la fuerza nos llevaría a perder información sobre la dinámica del campo escalar.

Como sabemos, nuestro lagrangeano es de la forma $\mathcal{L}_H^{(4)} = \mathcal{L}_H^{(4)}(e^a, \omega^{ab}, \phi)$. De esta forma, definiendo las ecuaciones de campo (4.3.32), (4.3.33) y (4.3.34) como

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_d &:= \frac{\bar{\delta}\mathcal{L}_H^{(4)}}{\delta e^d} + \Sigma^m \left(\frac{\delta\mathcal{L}_H^{(4)}}{\delta Z^m} \right) Z_d \\ \mathcal{E} &:= \frac{\bar{\delta}\mathcal{L}_H^{(4)}}{\delta\phi} - d \left(\Sigma^m \frac{\delta\mathcal{L}_H^{(4)}}{\delta Z^m} \right), \\ \mathcal{E}_{mn} &:= \frac{\delta\mathcal{L}_H^{(4)}}{\delta\omega^{mn}},\end{aligned}$$

la variación general $\delta\mathcal{L}_H^{(4)}$ viene dada por

$$\delta\mathcal{L}_H^{(4)} \doteq \mathcal{E}_d \wedge e^d + \mathcal{E}_{mn} \wedge \delta\omega^{mn} + \mathcal{E}\delta\phi$$

Para recuperar el caso sin torsión, debemos añadir una 2-forma multiplicador de Lagrange $\Lambda_a = \frac{1}{2}\Lambda_{abc}e^b \wedge e^c$ a nuestro principio de acción, tal que

$$\bar{\mathcal{L}}_H^{(4)} = \mathcal{L}_H^{(4)} + \Lambda_a \wedge T^a.$$

Así, la variación general de este lagrangeano restringido está dado por

$$\delta\bar{\mathcal{L}}_H^{(4)} = \delta\mathcal{L}_H^{(4)} + \delta(\Lambda_a \wedge T^a), \quad (4.3.35)$$

donde

$$\delta(\Lambda_a \wedge T^a) = \delta\Lambda_a \wedge T^a + \Lambda_a \wedge \delta T^a.$$

De la expresión (3.1.7) y la propiedad de las derivadas dada por (2.3.11) se consigue que

$$\begin{aligned}\Lambda_a \wedge \delta T^a &= d(\Lambda_a \wedge \delta e^a) - D\Lambda_a \wedge \delta e^a + \Lambda_a \wedge \delta \omega^a_b \wedge e^b, \\ &= -D\Lambda_a \wedge \delta e^a + \frac{1}{2}(\Lambda_a \wedge e_b - \Lambda_b \wedge e_a) \wedge \delta \omega^{ab} + d(\Lambda_a \wedge \delta e^a),\end{aligned}$$

donde hemos considerado sólo la parte antisimétrica de $\Lambda_a \wedge e_b$.

Reemplazando esto último en (4.3.35), encontramos que la variación de $\bar{\mathcal{L}}_H^{(4)}$ está dada por

$$\begin{aligned}\delta \bar{\mathcal{L}}_H^{(4)} &= \delta \mathcal{L}_H^{(4)} + \delta(\Lambda_a \wedge T^a), \\ &\doteq (\mathcal{E}_d - D\Lambda_d) \wedge e^d + \left[\mathcal{E}_{mn} - \frac{1}{2}(\Lambda_a \wedge e_b - \Lambda_b \wedge e_a) \right] \wedge \delta \omega^{mn} \\ &\quad + \mathcal{E} \wedge \delta \phi + \delta \Lambda_a \wedge T^a.\end{aligned}$$

Así, las nuevas ecuaciones de movimiento tienen la forma

$$\bar{\mathcal{E}}_d = \mathcal{E}_d - D\Lambda_d = 0, \quad (4.3.36)$$

$$\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E} = 0, \quad (4.3.37)$$

$$\bar{\mathcal{E}}_{mn} = \mathcal{E}_{mn} - \frac{1}{2}(\Lambda_m \wedge e_n - \Lambda_n \wedge e_m) = 0, \quad (4.3.38)$$

$$T^a = 0. \quad (4.3.39)$$

Notemos ahora que $T^a = 0$ es una ecuación de campo, esto permite anular la torsión en las ecuaciones \mathcal{E}_d , \mathcal{E} y \mathcal{E}_{mn} . Sin embargo, para recuperar las ecuaciones de campo sin torsión $\bar{\mathcal{E}}_d$, $\bar{\mathcal{E}}$ y $\bar{\mathcal{E}}_{mn}$ es necesario incorporar la información de \mathcal{E}_{mn} en la ecuación restringida $\bar{\mathcal{E}}_d$. Para esto, despejamos el multiplicador Λ_d en (4.3.38), y lo reemplazamos en (4.3.36).

En efecto, al escribir Λ_m y \mathcal{E}_{mn} como

$$\Lambda^a = \frac{1}{2!} \Lambda^a_{rs} e^s \wedge e^t, \quad (4.3.40)$$

$$\mathcal{E}^{ab} = \frac{1}{3!} \mathcal{E}^{ab}_{pqr} e^p \wedge e^q \wedge e^r, \quad (4.3.41)$$

podemos escribir (4.3.38) como

$$\epsilon_{abcd} \left[\mathcal{E}^{ab} - \frac{1}{2} (\Lambda^a \wedge e^b - \Lambda^b \wedge e^a) \right] \wedge \delta \omega^{ab} = 0.$$

Reemplazando (4.3.40) y (4.3.41) en la última expresión tenemos que

$$\frac{1}{3!} \mathcal{E}^{ab}_{pqr} \delta^{pqrc}_{abmn} (\delta \omega)^{mn}_c - \frac{1}{2!} \Lambda^a_{pq} \delta^{pqrc}_{armn} (\delta \omega)^{mn}_c = 0.$$

Separando las deltas y aplicando la traza sobre c y m , tenemos que

$$\Lambda^a = 2\Sigma_p \mathcal{E}^{ap} + \frac{1}{2}e^a \wedge \Sigma_{pq} \mathcal{E}^{pq}$$

Aplicando la derivada en la ecuación anterior y considerando $T^a = 0$, obtenemos que

$$D\Lambda^a = 2D\Sigma_p \mathcal{E}^{ap} - \frac{1}{2}e^a \wedge d\Sigma_{pq} \mathcal{E}^{pq}.$$

Para finalizar, reemplazando $D\Lambda^a$ en (4.3.36), obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\mathcal{E}^a - 2D\Sigma_p \mathcal{E}^{ap} + \frac{1}{2}e^a \wedge d\Sigma_{pq} \mathcal{E}^{pq} \Big|_{T^b=0} = 0, \quad (4.3.42)$$

$$\mathcal{E}|_{T^b=0} = 0, \quad (4.3.43)$$

que corresponden a las ecuaciones de movimiento de Horndeski originales sin torsión.





Capítulo 5

Cosmología, campo escalar y torsión

En la literatura existen diversos acercamientos a la cosmología con torsión. Uno de estos es el trabajo de Nikodem Poplawski [44, 45], en el que usa un fluido fermiónico, obteniendo así un modelo cosmológico donde la torsión del espaciotiempo genera expansión acelerada en el universo temprano. Según lo anterior, la teoría de Einstein-Cartan podría ser una alternativa para la inflación cósmica. Otro acercamiento es el realizado por Toloza y Zanelli [52]. Ellos añadieron el término de Gauss-Bonnet acoplado a un campo escalar a la acción de Einstein Hilbert con constante cosmológica, y encontraron las ecuaciones de campo en el marco de torsión no nula, consiguiendo que la torsión apareciera explícitamente en éstas.

En este capítulo mostramos una solución cosmológica particular para el Lagrangeano de Horndeski con torsión. Para esto, consideramos una generalización del lagrangeano de Brans-Dicke sumado al término de Gauss-Bonnet acoplado a un campo escalar [9].

Antes de iniciar el estudio de la cosmología de este lagrangeano, revisamos algunas nociones generales sobre la cosmología estándar y la cosmología tenso-escalar.

5.1. El modelo cosmológico estándar

La evolución de nuestro universo se puede describir a través del llamado *Modelo Cosmológico Estándar*, el cual se construye en el marco de la teoría de la Relatividad General de Einstein. Las ecuaciones de movimiento en el lenguaje tensorial está dada por

$$\mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{R} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa_4 \mathcal{T}_{\mu\nu}, \quad (5.1.1)$$

que corresponde a las ecuaciones de movimiento encontradas en el capítulo 3, particularmente en la ecuación (3.2.6), en el lenguaje de formas diferenciales. Como se dijo, el lagrangeano de materia dependerá del tensor de energía-momentum. Este tensor es el término fuente del campo gravitacional en las ecuaciones de campo de Einstein, y define el contenido de materia del universo. Si definimos un principio de acción para

la materia como

$$S(g_{\mu\nu}, \varphi) = \int d^4x \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \varphi),$$

donde φ es el campo de materia, podemos definir, a partir de la variación de la acción, el *tensor de energía-momentum* por

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} S_M(\varphi, g_{\mu\nu}). \quad (5.1.2)$$

Notemos que por definición, (5.1.2) es un tensor simétrico en sus índices, y además, por la conservación de la materia o la energía, el tensor $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ debe conservarse, es decir,

$$\nabla^\mu \mathcal{T}_{\mu\nu} = 0.$$

Para más detalle de esto, el lector puede dirigirse a [2].

Por otra parte, el modelo cosmológico estándar se basa en dos principios importantes, conocidos como:

- El *Principio Cosmológico*.
- El *Postulado de Weyl*.

En esta sección estudiamos estos fundamentos y otros que nos darán una idea general de la evolución de nuestro universo. Para esto, seguiremos los textos [26, 37, 40, 46].

5.1.1. Un universo en expansión

El principio cosmológico, propuesto por Einstein, corresponde a un universo homogéneo e isótropo a gran escala. En términos matemáticos, un universo que se rige por este principio es invariante bajo traslaciones (homogeneidad) y rotaciones (isotropía). Físicamente, entenderemos por homogeneidad, que un observador debe percibir las mismas propiedades físicas independiente de su posición. Por otra parte, se entenderá por isotropía que un observador percibe las mismas propiedades físicas, independiente de la dirección en que esté observando. Imponiendo el principio de homogeneidad e isotropía al tensor de curvatura de Riemann (2.2.6), obtenemos que, para el universo de Einstein, la curvatura es constante, pudiendo ser positiva, que corresponde a un universo esférico; negativa, siendo un universo hiperbólico; o cero, correspondiente a un universo plano.

Considerando a cada galaxia como un observador fundamental, se define un sistema de referencia, denominado comóvil, respecto al cual cada observador está en reposo. Un postulado que viene a complementar el principio cosmológico es el postulado de Weyl, el cual nos dice que los observadores se mueven sobre un haz de geodésicas divergentes a partir de un punto común en el pasado, o convergentes hacia un punto en el futuro. Así, cada uno de dichos observadores podrán compartir un tiempo cosmológico t , correspondiente a la hipersuperficie de t constante, que será ortogonal a las líneas de mundo de cada observador fundamental.

Así, el elemento de línea que cumple con el postulado de Weyl toma la siguiente forma

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j.$$

Por último, considerando el principio cosmológico y el postulado de Weyl, obtenemos la métrica de *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* (FLRW) en las coordenadas de observadores comóviles (t, r, θ, ϕ) , dada por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (5.1.3)$$

donde $a(t)$ corresponde al factor de escala que mide la distancia entre dos galaxias y k es el parámetro de curvatura, que puede tomar sólo tres valores -1 (curvatura negativa), 0 (curvatura nula) o $+1$ (curvatura positiva).

Por principio cosmológico es razonable considerar que el contenido de materia se comporta como un fluido perfecto a gran escala. El tensor de energía-momentum resulta ser invariante bajo rotaciones y traslaciones, por lo cual, en un sistema de referencia comóvil, las componentes del tensor de energía-momentum toman la siguiente forma

$$\mathcal{T}_{00} = \rho(t), \quad \mathcal{T}_{0i} = 0, \quad \mathcal{T}_{ij} = p(t) g_{ij},$$

donde ρ y p corresponden a la densidad de energía y la presión del fluido respectivamente.

El tensor de energía-momentum para un *fluido perfecto* se puede escribir como

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = (p + \rho) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (5.1.4)$$

donde $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ corresponde a la 4-velocidad comóvil del fluido. Equivalentemente, en el lenguaje de formas diferenciales, la 1-forma energía-momentum está dada por

$$\mathcal{T}^a_b = (p + \rho) u^a u_b + p \delta^a_b. \quad (5.1.5)$$

A través de las observaciones de Hubble, obtenidas en la década del 20, que indican que las galaxias se alejan de nosotros cada vez más rápido a medida que aumenta la distancia entre ellas y nosotros, se pudo comprobar que nuestro universo se expande. A partir del factor de escala se definen dos funciones importantes en el estudio de la cosmología, el *parámetro de Hubble* $H(t)$, que mide la tasa de expansión del universo, y el *parámetro de desaceleración* $q(t)$, cuyo signo indica si la expansión del universo es acelerada o desacelerada:

$$H(t) := \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (5.1.6)$$

$$q(t) := -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}. \quad (5.1.7)$$

Considerando la métrica de FLRW y la definición (5.1.4) en la ecuación de campo (5.1.1) encontramos las siguientes ecuaciones independientes

$$H^2(t) + \frac{k}{a^2(t)} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{\kappa_4}{3} \rho(t), \quad (5.1.8)$$

$$2\dot{H}(t) + 3H^2(t) + \frac{k}{a^2(t)} - \Lambda = -\kappa_4 p(t). \quad (5.1.9)$$

Las ecuaciones (5.1.8) y (5.1.9) corresponden a las denominadas *ecuaciones de Friedmann*. Una tercera ecuación importante es la que relaciona $a(t)$, $\rho(t)$ y $p(t)$, que corresponde a la *ecuación de fluido* o *ecuación de conservación* dada por

$$\dot{\rho}(t) + 3H(t) [\rho(t) + p(t)] = 0. \quad (5.1.10)$$

Si derivamos con respecto al tiempo (5.1.8) y reemplazando $\dot{\rho}$ en (5.1.10) encontramos la llamada ecuación de aceleración, la cual está dada por

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{\kappa_4}{6} [\rho(t) + 3p(t)] + \frac{\Lambda}{3}. \quad (5.1.11)$$

Además, se puede definir una ecuación de estado en la que se relaciona la presión y la densidad de energía del fluido cosmológico. Este fluido es asumido usualmente como un fluido barotrópico, es decir, $p = p(\rho)$. Un modelo simple es considerar una relación lineal entre la presión y la densidad de energía, es decir,

$$p = \omega\rho,$$

donde ω es adimensional y es llamado *parámetro de estado*. Los casos más utilizados para la ecuación de estado son: (i) $\omega = 0$, que corresponde a un fluido de partículas no interactuantes, con $p = 0$ y, de (5.1.10), $\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^3$, este fluido modela en parte la etapa tardía del universo; (ii) $\omega = 1/3$, fluido con interacción electromagnética, con $p = \rho/3$ y $\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^4$, que modela la etapa temprana del universo; (iii) $\omega = -1$, fluido de partículas que se alejan entre sí, con $p = -\rho$, que modela un universo en expansión acelerada, como el momento actual del universo y la etapa inflacionaria en los comienzos de éste. Los parámetros ρ_0 y a_0 corresponden al valor actual de la densidad de energía y del factor de escala, respectivamente.

El caso (iii) permite describir la constante cosmológica en la ecuación (5.1.1) mediante un fluido efectivo. En efecto, definiendo un tensor de energía-momentum para la constante cosmológica como $T_{\mu\nu}^\Lambda = -\frac{\Lambda}{\kappa_4} g_{\mu\nu}$, y considerando la definición del tensor de energía-momentum (5.1.4) obtenemos

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{\kappa_4} = -p_\Lambda,$$

donde ρ_Λ y p_Λ corresponden a la densidad y la presión del fluido efectivo asociado a la constante cosmológica, respectivamente. Notamos que, si deseamos que se respete la condición de energía débil, $\rho \geq 0$ y $\rho + p \geq 0$, necesariamente debemos considerar $\Lambda > 0$.

El efecto de la constante cosmológica en las ecuaciones de Friedmann, la podemos estudiar desde (5.1.11). Vemos que el valor de la aceleración del universo $\ddot{a}(t)$ está determinado por el comportamiento del lado derecho de esta ecuación. Por una parte, tenemos el primer término, que corresponde al contenido de materia, y el segundo término, que corresponde a la constante cosmológica Λ , además notemos que $a(t) > 0$ y $\kappa_4 > 0$. Si asumimos la condición de energía fuerte, que dice que, para un fluido perfecto, $\rho + p \geq 0$ y $\rho + 3p \geq 0$, tendremos un escenario de universo en expansión

desacelerada, es decir $\ddot{a}(t) < 0$, si $\rho + 3p > 2\Lambda$. Por otra parte, tendremos un escenario de universo en expansión acelerada, es decir, $\ddot{a}(t) > 0$, si $\Lambda > 0$ y $\rho + 3p < 2\Lambda$, lo cual incluye $\rho + 3p \leq 0$.

Es útil reescribir la ecuación (5.1.8) definiendo los parámetros de densidad como sigue

$$\Omega_M = \kappa_4 \frac{\rho}{3H^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad \Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2},$$

los cuales representan el contenido de materia, la constante cosmológica y la curvatura, respectivamente. De esta manera la ecuación (5.1.8) toma la siguiente forma

$$1 = \Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_k.$$

5.2. Cosmología tenso-escalar

A partir del trabajo de Brans y Dicke en 1961 [3], las teorías tenso-escalares, entendidas éstas como teorías con un campo escalar acoplado no minimalmente a la geometría, tomaron gran importancia. El estudio de éstas ha mostrado que reproducen diversas soluciones de cosmológicas homogéneas e isotrópicas, prediciendo además el espectro de temperatura de la radiación cósmica de fondo medida actualmente. Fue el mismo Dicke en 1968 [17] el que realiza los primeros trabajos en cosmología tenso-escalar, que fue rescatado por Steven Weinberg en 1972 [54]. Dicke considera el principio cosmológico y aplica la métrica de FLRW plana a su teoría con el objetivo de estudiar el universo temprano, específicamente la formación de elementos primordiales. Actualmente son diversos los modelos que estudian la cosmología tenso-escalar, inspirados en la teoría original de Brans y Dicke. Uno de ellos es la inflación extendida de La y Steinhardt en 1989 [35], la cual intenta solucionar el problema de salida exitosa de la inflación antigua, sin embargo, para que esto suceda resulta necesario que el parámetro de Brans-Dicke sea pequeño, lo que se contradice con la observación. En 2011 [33], se demuestra que la teoría generalizada de Galileones [14, 15] es equivalente a la teoría de Horndeski, y con esto, se encuentra que la teoría de Horndeski provee un buen modelo de inflación. A partir de esto, la teoría de Horndeski concitó interés en los investigadores, lo que ha generado numerosos trabajos abarcando distintos temas en la cosmología. En [12] se buscan las condiciones de la teoría de Horndeski para evitar problemas que surgen de las perturbaciones escalares en presencia de dos fluidos perfectos en el marco de la geometría plana de FLRW. En [11] se estudia la cosmología de [8], encontrando soluciones cosmológicas, soluciones tipo radiación/materia en regímenes con densidad de energía dominada por una constante cosmológica con ninguna forma de materia o radiación explícita y soluciones de materia en presencia de una gran constante cosmológica con la posibilidad de generar estructuras cosmológicas.

5.2.1. Un lagrangeano con campo escalar no-minimalmente acoplado

Con el propósito de generalizar la teoría de Brans-Dicke incluyendo el término de Gauss-Bonnet de [52], el lagrangeano al que le estudiamos consecuencias cosmológicas

es el siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G(\phi, e, \omega) &= \frac{1}{4\kappa_4} N(\phi) \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + \frac{1}{4!} [M(\phi)X - V(\phi)] \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\ &\quad + u(\phi) \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd}, \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

donde $N(\phi)$, $M(\phi)$, $V(\phi)$, $u(\phi)$ son funciones arbitrarias que dependen de ϕ , $\kappa_4 = 8\pi G$ y hemos considerado $c = 1$. Si analizamos el lagrangeano de Horndeski (4.3.8), el término de Gauss-Bonnet $u(\phi) \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd}$ no aparece explícitamente. Sin embargo, como se demuestra en el apéndice A de [33], si se eligen las funciones $\kappa_i(\phi, X)$ en (4.2.2) de forma astuta se reproduce el término de Gauss-Bonnet acoplado a una función arbitraria de ϕ . De esta forma podemos decir que el lagrangeano (5.2.1) es un caso particular del lagrangeano de Horndeski, donde hemos elegido las constante $\kappa_i(\phi)$, $F(\phi, X)$ y $W(\phi)$ como

$$F + 2W = \frac{1}{4\kappa_4} N(\phi), \quad \kappa_9 = M(\phi)X - V(\phi), \quad \kappa_1, \kappa_3, \kappa_8 = 0.$$

Notemos que a partir de (5.2.1) puede escribirse el lagrangeano de Brans-Dicke con torsión y el lagrangeano propuesto por Toloza y Zanelli en [52], definiendo las funciones $N(\phi)$, $M(\phi)$, $V(\phi)$, $u(\phi)$ como

$$N_{BD}(\phi) = \phi, \quad M_{BD}(\phi) = \frac{\sigma}{\phi\kappa_4}, \quad V_{BD}(\phi) = 0, \quad u_{BD}(\phi) = 0; \quad (5.2.2)$$

$$N_{TZ}(\phi) = 1, \quad M_{TZ}(\phi) = 0, \quad V_{TZ}(\phi) = \frac{\Lambda}{24\kappa_4}, \quad u_{TZ}(\phi) = \frac{\phi}{4\kappa_4}, \quad (5.2.3)$$

respectivamente, donde σ es el parámetro de Brans-Dicke.

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso general del lagrangeano de Horndeski, es decir, variando (5.2.1) con respecto a los tres campos independientes, e^a , ω^{ab} y ϕ , encontramos que las variaciones de (5.2.1) están dadas por

$$\begin{aligned} \delta_\phi \mathcal{L}_G &= \left[\frac{1}{4\kappa_4} \frac{\partial N}{\partial \phi} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + \frac{1}{4!} \frac{\partial M}{\partial \phi} X \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \right. \\ &\quad + \frac{1}{3!} \frac{\partial M}{\partial \phi} \epsilon_{abcd} \theta^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + \frac{1}{3!} M \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\ &\quad + \frac{1}{2!} M \epsilon_{abcd} Z^a T^b \wedge e^c \wedge e^d - \frac{1}{4!} \frac{\partial V}{\partial \phi} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\ &\quad \left. + \frac{\partial u}{\partial \phi} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd} \right] \delta\phi - \frac{1}{3!} d \left(\delta\phi M Z^f \epsilon_{fbcd} e^b \wedge e^c \wedge e^d \right), \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

$$\begin{aligned} \delta_e \mathcal{L}_G &= \left[\frac{1}{2\kappa_4} N \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c - \frac{1}{3!} M Z^a Z_d \epsilon_{abcf} e^b \wedge e^c \wedge e^f \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3!} M X \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c - \frac{1}{3!} V \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \right] \wedge \delta e^d, \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

$$\begin{aligned}
\delta_\omega \mathcal{L}_G &= \left[-\frac{1}{4\kappa_4} \frac{\partial N}{\partial \phi} \epsilon_{abcd} e^c \wedge e^d \wedge d\phi + \frac{1}{2\kappa_4} N \epsilon_{abcd} e^c \wedge T^d \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{\partial u}{\partial \phi} \epsilon_{abcd} d\phi \wedge R^{cd} \right] \wedge \delta\omega^{ab} + \frac{1}{4\kappa_4} d \left(N \epsilon_{abcd} \delta\omega^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \right) \\
&\quad + 2d \left(u \epsilon_{abcd} \delta\omega^{ab} \wedge R^{cd} \right). \tag{5.2.6}
\end{aligned}$$

Análogamente al caso de Einstein-Cartan estándar, definimos el *Tensor Energía-Momentum* y el *Tensor de Espín* respectivamente, como

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^a &= \mathcal{T}_\mu{}^a dx^\mu, \\
\sigma^{ab} &= \sigma_\mu{}^{ab} dx^\mu.
\end{aligned}$$

lo que nos permite describir el comportamiento del lagrangeano de materia como

$$\delta_e \mathcal{L}_M = - * \mathcal{T}_d \wedge \delta e^d, \tag{5.2.7}$$

$$\delta_\omega \mathcal{L}_M = \frac{1}{2} * \sigma_{ab} \wedge \delta\omega^{ab}. \tag{5.2.8}$$

Asumimos que el lagrangeano de materia \mathcal{L}_M no depende del campo escalar, es por esto, que no hemos definido un tensor asociado a éste. Luego, la variación del lagrangeano completo con respecto al campo escalar será $\delta_\phi \mathcal{L} = \delta_\phi \mathcal{L}_G$, mientras que las variaciones con respecto a e^a y ω^{ab} estarán dadas por $\delta_e \mathcal{L} = \delta_e \mathcal{L}_G + \delta_e \mathcal{L}_M$ y $\delta_\omega \mathcal{L} = \delta_\omega \mathcal{L}_G + \delta_\omega \mathcal{L}_M$. Por las variaciones anteriores y por (5.2.4), (5.2.5), (5.2.6), (5.2.7) y (5.2.8), las ecuaciones de movimiento de (5.2.1) son

$$\begin{aligned}
\delta\phi: \quad \mathcal{E} &= \frac{1}{4\kappa_4} \frac{\partial N}{\partial \phi} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + \frac{1}{4!} \frac{\partial M}{\partial \phi} X \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\
&\quad + \frac{1}{3!} \frac{\partial M}{\partial \phi} \epsilon_{abcd} \theta^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + \frac{1}{3!} M \epsilon_{abcd} \pi^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\
&\quad + \frac{1}{2!} M \epsilon_{abcd} Z^a T^b \wedge e^c \wedge e^d - \frac{1}{4!} \frac{\partial V}{\partial \phi} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial \phi} \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd} = 0 \tag{5.2.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta e: \quad \mathcal{E}_d &= \frac{1}{2\kappa_4} N \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c - \frac{1}{3!} M(\phi) Z^a Z_d \epsilon_{abc f} e^b \wedge e^c \wedge e^f \\
&\quad + \frac{1}{3!} M X \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c - \frac{1}{3!} V \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c = * \mathcal{T}_d \tag{5.2.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\omega: \quad \mathcal{E}_{ab} &= -\frac{1}{4\kappa_4} \frac{\partial N}{\partial \phi} \epsilon_{abcd} e^c \wedge e^d \wedge d\phi + \frac{1}{2\kappa_4} N \epsilon_{abcd} e^c \wedge T^d \\
&\quad - 2 \frac{\partial u}{\partial \phi} \epsilon_{abcd} d\phi \wedge R^{cd} = -\frac{1}{2} * \sigma_{ab} \tag{5.2.11}
\end{aligned}$$

Notemos que el lagrangeano (5.2.1) tiene acoplamientos no minimales entre el campo escalar y la geometría. Por lo mostrado en el capítulo anterior será necesario restringir el lagrangeano con torsión para obtener, a partir de éste, las ecuaciones de movimiento sin torsión, del lagrangeano de Brans-Dicke original.

Claramente, desde la ecuación (5.2.11) se observa que la torsión no sólo depende del tensor de espín, sino también de derivadas del campo escalar, es decir, $T^a \sim \partial\phi$; diferenciándonos de la relatividad de Einstein-Cartan estándar. Por lo tanto, la torsión no se anula cuando $\sigma_{ab} = 0$, si además, aplicamos la restricción $T^a = 0$ en (5.2.11) el campo escalar se vuelve constante, perdiendo información sobre la dinámica de ϕ . Este comportamiento no lo observamos bajo la restricción (5.2.3), es decir, al imponer $T^a = 0$ en las ecuaciones de campo de la referencia [52] recuperamos el caso de Relatividad General. En [52] el acoplamiento del campo escalar es a través del término de Gauss-Bonnet únicamente, por su parte, el lagrangeano no depende de derivadas de ϕ , esto es, el campo escalar no tiene dinámica, comportándose de esta manera como un multiplicador de Lagrange. En nuestro caso, hemos incluido adicionalmente un acoplamiento del campo escalar al término de Einstein-Hilbert, un término cinético para el campo escalar, así como también un término de potencial.

Como se mostró en el capítulo anterior, en nuestro caso, es necesario añadir la 2-forma multiplicador de Lagrange $\Lambda_a = \frac{1}{2}\Lambda_{abc}e^b \wedge e^c$, a la acción para recuperar el caso con torsión nula. Así, el lagrangeano (5.2.1) restringido está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G(\phi, e, \omega) = & \frac{1}{4\kappa_4}N(\phi)\epsilon_{abcd}R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + \frac{1}{4!}\left[M(\phi)X - V(\phi)\right]\epsilon_{abcd}e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \\ & + u(\phi)\epsilon_{abcd}R^{ab} \wedge R^{cd} + \Lambda_a \wedge T^a, \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Si siguiendo la misma metodología expuesta en la sección 4.3.2 que para el lagrangeano de Horndeski, las ecuaciones de campo restringidas de (5.2.12), tienen la forma para

$$\bar{\mathcal{E}}_d = \mathcal{E}_d - D\Lambda_d = 0, \quad (5.2.13)$$

$$\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E} = 0, \quad (5.2.14)$$

$$\bar{\mathcal{E}}_{ab} = \mathcal{E}_{ab} - \frac{1}{2}(\Lambda_a \wedge e_b - \Lambda_b \wedge e_a) = 0, \quad (5.2.15)$$

$$T^a = 0, \quad (5.2.16)$$

con \mathcal{E} , \mathcal{E}_d , \mathcal{E}_{ab} dadas por (5.2.9), (5.2.10) y (5.2.11), respectivamente.

A partir de (5.2.15) encontramos Λ_a , y posteriormente $D\Lambda^a$, la cual, para $u(\phi) = 0$, corresponde a

$$D\Lambda^a = -\frac{1}{\kappa_4} \left\{ \frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2} Z^b Z_s \epsilon^a{}_{bml} + \frac{\partial N}{\partial \phi} \pi_{cs} \epsilon^a{}_{ml} \right\} e^s \wedge e^m \wedge e^l,$$

recordemos que en este caso $T^a = 0$ es una ecuación de campo, por lo tanto ahora podremos hacer la torsión cero desde el principio de nuestro cálculo.

Reemplazando esto en (5.2.13), considerando las funciones $N(\phi)$ y $M(\phi)$ definidas en (5.2.2) y haciendo $c = \kappa_4 = 1$ obtenemos la primera ecuación de movimiento de Brans-Dicke [16]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \frac{\omega}{\phi^2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{\phi}\partial_\mu\partial_\nu\phi + g_{\mu\nu}\left(\frac{\square\phi}{\phi} + \frac{\sigma}{2\phi^2}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi - \frac{V}{\phi}\right) = \frac{1}{\phi}\mathcal{T}_{\mu\nu}.$$

Despejando R de la expresión anterior y posteriormente reemplazándola en (5.2.9), obtenemos la segunda ecuación de movimiento de Brans-Dicke [16]

$$\square\phi = \frac{1}{3+2\omega}\mathcal{T}^\mu{}_\mu + \frac{2}{3+2\omega}(2V - \phi V').$$

5.2.2. Solución cosmológica para $\mathcal{L}_G(\phi, e, \omega)$

El primer paso para resolver las ecuaciones de movimiento es definir una métrica. Dado que, el tipo de solución que buscamos es cosmológica, la métrica más apropiada es la de FLRW.

El procedimiento para obtener una solución cosmológica para las ecuaciones de movimiento (5.2.9), (5.2.10) y (5.2.11) consiste en encontrar la forma que toman la curvatura y la torsión, en el marco de la métrica (5.1.3), para luego reemplazarlas en las ecuaciones de movimiento. Como se dijo al final de la sección 2.2.2, no es posible encontrar unívocamente la torsión, sino que es necesario encontrar la contorsión a partir de las ecuaciones de movimiento. En el presente trabajo, será posible encontrar tanto una conexión sin torsión, $\hat{\omega}^{ab}$, como una contorsión, κ^{ab} , a partir de una métrica definida apropiadamente.

Según (2.3.9), tenemos que la conexión de espín puede separarse en la conexión sin torsión $\hat{\omega}^{ab}$ y la contorsión κ^{ab} . Estas componentes de la conexión, serán las necesarias para encontrar la curvatura y la torsión.

Veamos que la derivada del vielbein puede ser escrita en la base ortonormal como

$$de^a = \frac{1}{2}\Omega^a{}_{bc}(x)e^b \wedge e^c, \quad (5.2.17)$$

donde, $\Omega^a{}_{bc}(x)$ corresponden a coeficientes arbitrarios, antisimétricos, $\Omega^a{}_{bc} = -\Omega^a{}_{cb}$.

Por otra parte, de (2.3.9) y (3.1.2) vemos que la torsión puede ser escrita como

$$T^a = de^a + (\hat{\omega}^a{}_b + \kappa^a{}_b) \wedge e^b,$$

y para que la torsión tome la forma (3.1.4) es necesario que se cumpla la siguiente ecuación $de^a + \hat{\omega}^a{}_b \wedge e^b = 0$. Reemplazando (5.2.17) en la última ecuación, tenemos que

$$\frac{1}{2}\Omega^a{}_{bc}e^b \wedge e^c + \hat{\omega}^a{}_b \wedge e^b = 0.$$

Considerando permutaciones cíclicas de la parte antisimétrica de la expresión anterior, se consigue despejar $\hat{\omega}_{ab}$ en términos de Ω_{abc} , resultando

$$\hat{\omega}_{ab} = \frac{1}{2}(\Omega_{abc} - \Omega_{bac} - \Omega_{cab})e^c. \quad (5.2.18)$$

Volviendo a (5.1.3) y recordando que $ds^2 = \eta_{ab}e^a \otimes e^b$, vemos que las componentes del vielbein están dadas por

$$\begin{aligned} e^0 &= cdt, \\ e^1 &= \frac{a(t)}{\sqrt{1-kr^2}}dr, \\ e^2 &= a(t)r d\theta, \\ e^3 &= a(t)r \sin\theta d\varphi. \end{aligned}$$

de donde se obtiene que,

$$\begin{aligned} de^0 &= 0, \\ de^1 &= \frac{H}{c}e^0 \wedge e^1, \\ de^2 &= \frac{H}{c}e^0 \wedge e^2 + \frac{r'}{ar}\sqrt{1-kr^2}e^1 \wedge e^2, \\ de^3 &= \frac{H}{c}e^0 \wedge e^3 + \frac{r'}{ar}\sqrt{1-kr^2}e^1 \wedge e^3 + \frac{1}{ar}\cot\theta e^2 \wedge e^3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, de (5.2.17) y (5.2.18), tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{\hat{a}0} &= \frac{H}{c}\eta_{\hat{a}\hat{c}}\hat{e}^{\hat{c}}, \\ \hat{\omega}_{\hat{a}0} &= -\hat{\omega}_{0\hat{a}}, \\ \hat{\omega}_{12} &= -\frac{r'}{ar}\sqrt{1-kr^2}e^2, \\ \hat{\omega}_{13} &= -\frac{r'}{ar}\sqrt{1-kr^2}e^3, \\ \hat{\omega}_{23} &= -\frac{1}{ar}\cot\theta e^3. \end{aligned} \tag{5.2.19}$$

Aquí se hace necesario descomponer los índices de la siguiente forma,

- Índices de Lorentz:

$$\begin{aligned} a, b, c, \dots &= 0, 1, 2, 3, \\ \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \dots &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

- Índices coordenados:

$$\begin{aligned} \alpha, \beta, \gamma, \dots &= 0, 1, 2, 3, \\ \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \dots &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Por otro lado, análogamente al procedimiento anterior, escribimos la torsión y la contorsión como

$$T^a = \frac{1}{2}T^a{}_{bc}e^b \wedge e^c, \quad \kappa^a{}_b = \kappa^a{}_{bc}e^c, \tag{5.2.20}$$

donde $T^a{}_{bc} = -T^a{}_{cb}$ y $\kappa_{abc} = -\kappa_{bac}$. Por la representación (5.2.20) encontramos una expresión para κ_{ab} en término de T_{bac} , resultando

$$\kappa_{ab} = \frac{1}{2}(T_{bac} - T_{abc} + T_{cab})e^c. \quad (5.2.21)$$

Vemos aquí, que se hace explícita la necesidad de definir una torsión *ad hoc*. Para encontrarla, recordemos que en cosmología, todos los objetos geométricos del espaciotiempo deben ser invariantes bajo las isometrías definidas por el principio cosmológico. Esto quiere decir que utilizaremos la métrica (5.1.3), la cual admite seis vectores de Killing. Luego, siguiendo [52], la torsión que admite los seis vectores de Killing corresponde a

$$T^a = \left[\frac{1}{2}\delta_{cd}^{ab}h_b(t) + \eta^{af}\epsilon_{fbcd}f^b(t) \right] e^c \wedge e^d, \quad (5.2.22)$$

donde $T^a{}_{cd} = \delta_{cd}^{ab}h_b(t) + 2\eta^{af}\epsilon_{fbcd}f^b(t)$, $h_{\hat{i}} = 0$, $h_0 = h$ y $f_{\hat{i}} = 0$, $f^0 = f$. Así,

$$T^0 = 0, \quad (5.2.23)$$

$$T^{\hat{a}} = -he^0 \wedge e^{\hat{a}} + \eta^{\hat{a}f}\epsilon_{\hat{f}\hat{c}\hat{d}}f e^{\hat{c}} \wedge e^{\hat{d}}. \quad (5.2.24)$$

Reemplazando (5.2.22) en (5.2.21), tenemos que la contorsión toma la siguiente forma

$$\kappa_{\hat{i}0} = h\eta_{\hat{i}\hat{c}}e^{\hat{c}}, \quad (5.2.25)$$

$$\kappa_{\hat{i}\hat{j}} = -f\epsilon_{\hat{i}\hat{j}\hat{c}}e^{\hat{c}}. \quad (5.2.26)$$

Reemplazando (5.2.19), (5.2.25) y (5.2.26) en (2.3.9) según corresponda, tenemos que el tensor de espín está dado por

$$\begin{aligned} \omega_{\hat{i}0} &= \left(\frac{H}{c} + h \right) \eta_{\hat{i}\hat{c}}e^{\hat{c}}, \\ \omega_{\hat{i}0} &= -\omega_{0\hat{i}} \\ \omega_{12} &= -\frac{\sqrt{1-kr^2}}{ar}e^2 - fe^3, \\ \omega_{13} &= -\frac{\sqrt{1-kr^2}}{ar}e^3 + fe^2, \\ \omega_{23} &= -\frac{\cot\theta}{ar}e^3 - fe^1. \end{aligned} \quad (5.2.27)$$

Por último, podemos encontrar la 2-forma curvatura $R^{ab}(\omega)$, reemplazando (5.2.27) en (3.1.1). Así, $R^{ab}(\omega)$ toma la siguiente forma

$$R_{\hat{i}0} = \frac{1}{c} \left[(\dot{H} + \dot{h}) + H(H+h) \right] \eta_{\hat{i}\hat{j}} e^0 \wedge e^{\hat{j}} + f(H+h) \epsilon_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}} e^{\hat{j}} \wedge e^{\hat{k}}, \quad (5.2.28)$$

$$R_{\hat{i}\hat{j}} = \eta_{\hat{i}\hat{n}} \eta_{\hat{j}\hat{l}} \left[(H+h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] e^{\hat{n}} \wedge e^{\hat{l}} - \frac{1}{c} \epsilon_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}} (f + fH) e^0 \wedge e^{\hat{k}}, \quad (5.2.29)$$

aquí un punto denota derivada respecto del tiempo cosmológico t .

Ahora, es posible escribir las ecuaciones de movimiento (5.2.9), (5.2.10) y (5.2.11), En la métrica de FLRW, reemplazando en éstas la curvatura dada por (5.2.28) y (5.2.29), y la torsión dada por (5.2.23) y (5.2.24). Desde ahora haremos $\kappa_4 = 1$.

Así, la ecuación para $\delta\phi$ toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\kappa_4} \frac{\partial N}{\partial \phi} \left\{ \left[\dot{H} + \dot{h} + H(H+h) \right] + (H+h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right\} \\ & + \frac{1}{3!} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial \phi} \dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial \phi} - M(\phi) [\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}] \right\} \\ + 4 \frac{\partial u}{\partial \phi} & \left\{ \left[\dot{H} + \dot{h} + H(H+h) \right] \left[(H+h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] - 2f(H+h)(f+fH) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5.2.30)$$

Mientras, las ecuaciones para $\delta\omega$ están dadas por

$$\frac{1}{2\kappa_4} \frac{\partial N}{\partial \phi} \dot{\phi} - \frac{1}{\kappa_4} N(\phi) h + 4 \frac{\partial u}{\partial \phi} \dot{\phi} \left[(H+h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] = 0, \quad (5.2.31)$$

$$\frac{1}{\kappa_4} N(\phi) f - 8 \frac{\partial u}{\partial \phi} f (H+h) \dot{\phi} = 0. \quad (5.2.32)$$

Finalmente, para encontrar las ecuaciones correspondientes a la variación δe , es necesario encontrar además la 1-forma energía-momentum para nuestro caso. Aplicando el dual de Hodge (2.3.4) a (5.1.5) tenemos que

$$\begin{aligned} *T_0 &= -\frac{1}{6} \rho \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} e^{\hat{a}} \wedge e^{\hat{b}} \wedge e^{\hat{c}}, \\ *T_{\hat{i}} &= -\frac{1}{2} p \epsilon_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} e^0 \wedge e^{\hat{b}} \wedge e^{\hat{c}}. \end{aligned}$$

Luego, las ecuaciones para δe son

$$\frac{3}{\kappa_4} N(\phi) \left[(H+h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right] - \frac{1}{2} M(\phi) \dot{\phi}^2 - V(\phi) = \rho, \quad (5.2.33)$$

$$\frac{1}{\kappa_4} N(\phi) \left\{ 2 \left[\dot{H} + \dot{h} + H(H+h) \right] + (H+h)^2 + \frac{k}{a^2} - f^2 \right\} + \frac{1}{2} M(\phi) \dot{\phi}^2 - V(\phi) = -p. \quad (5.2.34)$$

Siguiendo un procedimiento análogo al realizado en [47, 50], es posible escribir las ecuaciones (5.2.33) y (5.2.34) como

$$\begin{aligned} 3 \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) &= \rho + \rho_T, \\ 2\dot{H} + 3H^2 + \frac{k}{a^2} &= -p - p_T, \end{aligned}$$

donde hemos definido un fluido efectivo para la torsión y el campo escalar como

$$\begin{aligned} \rho_T &= M \frac{\dot{\phi}}{\phi} + V + 3 \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) (1-N) - 3N (h^2 + 2Hh - f^2), \\ p_T &= M \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} - V - \left(3H^2 + \frac{k}{a^2} + 2\dot{H} \right) (1-N) + N (h^2 + 4Hh - f^2 + 2\dot{h}). \end{aligned}$$

Estas ecuaciones corresponden a las ecuaciones de Friedmann modificadas. Por otra parte, las ecuaciones de conservación para la materia bariónica y para la materia torsional escalar toman la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + 3H(\rho + p) &= 0, \\ \dot{\rho}_T + 3H(\rho_T + p_T) &= 0. \end{aligned}$$

5.2.3. Solución para el universo tardío

En esta sección el objetivo es encontrar un modelo de universo tardío a partir del caso particular del lagrangeano de Horndeski (5.2.1), que hemos estudiado en este capítulo. Dicho modelo nos permitirá estudiar las repercusiones que puede tener la incorporación de la torsión y del campo escalar acoplado no minimalmente a la geometría, en la aceleración actual del universo. Para esto, estudiamos las ecuaciones de campo (5.2.30), (5.2.33), (5.2.34), (5.2.31) y (5.2.32) las cuales son un sistema de 5 ecuaciones con 6 incógnitas, que corresponden a $a(t)$, $\phi(t)$, $h(t)$, $f(t)$, $p(t)$ y $\rho(t)$. El primer paso para encontrar estas funciones es escribir las ecuaciones de campo de la siguiente forma

$$\begin{aligned} (Z^2 + W) \left[\frac{N'}{2} + 4u' (\dot{Z} + HZ) \right] - 2fZ (\dot{f} + Hf) 4u' + \frac{N'}{2} \\ - \frac{1}{6} \left[\frac{1}{2} M' \dot{\phi}^2 + V' + M (\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}) \right] = 0, \quad (5.2.35) \end{aligned}$$

$$Z^2 + W - \frac{V}{3N} = \frac{1}{3N} \left(\rho + \frac{1}{2} M \dot{\phi}^2 \right), \quad (5.2.36)$$

$$2\dot{Z} + 2HZ + Z^2 + W - \frac{V}{N} = -\frac{1}{N} \left(p + \frac{M \dot{\phi}^2}{2} \right), \quad (5.2.37)$$

$$-Nh + 4u' \dot{\phi} (Z^2 + W) = -\frac{N' \dot{\phi}}{2}, \quad (5.2.38)$$

$$f \left(N - 8u' \dot{\phi} Z \right) = 0, \quad (5.2.39)$$

donde hemos definido

$$Z = H + h, \quad (5.2.40)$$

$$W = \frac{k}{a^2} - f^2, \quad (5.2.41)$$

y hemos denotado la prima como la derivada con respecto al campo escalar ϕ .

Buscamos una solución para $a(t)$, para esto notemos que si $f \neq 0$, entonces de (5.2.39) vemos que

$$u' = \frac{N}{8\dot{\phi}Z} \quad (5.2.42)$$

y reemplazando este resultado en (5.2.38) se puede despejar el parámetro W de la siguiente forma

$$W = Z \left(Z - 2H - \frac{N' \dot{\phi}}{N} \right). \quad (5.2.43)$$

En el universo tardío, el tensor de energía-momentum puede ser considerado como uno que modela materia bariónica y/o materia oscura, las cuales se comportan como un fluido de partículas no interactuantes, o polvo, con $p = 0$ (lo cual cierra el sistema de ecuaciones (5.2.30-5.2.34)). Ahora, considerando este tipo de fluido en (5.2.37) y además reemplazando (5.2.43) y $\dot{\phi}$ de (5.2.42) en ésta, se tiene que

$$2 \left(\dot{Z} + Z^2 \right) = \frac{N'}{8u'} + \frac{V}{N} - \frac{MN}{128u'^2 Z^2}. \quad (5.2.44)$$

De (5.2.44) vemos que, el lagrangeano puede ser resuelto analíticamente bajo las siguientes condiciones sobre las funciones $M(\phi)$, $N(\phi)$, $V(\phi)$ y $u(\phi)$

$$M = 0 \wedge V(\phi) = \beta N(\phi) \wedge u'(\phi) = \alpha N'(\phi), \quad (5.2.45)$$

con α, β constantes reales positivas. De esta forma, la ecuación (5.2.44) puede escribirse como

$$2 \left(\dot{Z} + Z^2 \right) = \frac{1}{N} \left(V + \frac{N'N}{8u'} \right).$$

y encontramos una solución para $Z(t)$ de la forma

$$Z(\tau) = Z_0 \tanh(\tau), \quad (5.2.46)$$

donde $Z_0 = \sqrt{\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{16}}$ y $\tau = Z_0(t - t_0)$ corresponde a un reescalamiento adimensional del tiempo y t_0 a una constante de integración.

Por otra parte, reemplazando (5.2.45) y (5.2.46) en (5.2.42) podemos encontrar una solución para $N(\phi)$, la cual toma la forma

$$N(\tau) = N_0 \sinh(\tau)^{\frac{1}{8\alpha Z_0^2}}, \quad (5.2.47)$$

donde N_0 es una constante de integración.

Notemos que derivando la ecuación (5.2.36) y reemplazando este resultado junto con (5.2.37) en (5.2.35) se encuentra la ecuación de conservación para el tensor de energía-momentum $\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$. Como se vió en la sección 5.1.1, para $p = 0$, se encuentra que $\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3$, y reemplazando esta expresión y (5.2.43) en (5.2.36) se tiene que

$$\left(6Z^2 - 3Z \left(2\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{N}}{N}\right) - \beta\right) = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3. \quad (5.2.48)$$

Por último, reemplazando (5.2.46) y (5.2.47) en (5.2.48), e integrando este resultado, se obtiene como solución para el factor de escala adimensional $\bar{a}(\tau) = \frac{a}{a_0}$ dada por

$$\bar{a}(\tau) = a_1 \cosh(\tau) \sinh(\tau)^{-1 + \frac{\beta}{3Z_0^2}} \left(1 - \frac{3w}{a_1^3} \tanh(\tau)\right)^{1/3}, \quad (5.2.49)$$

donde w es una constante adimensional definida por $w = \frac{\rho_0 a_0^3}{6Z_0^2 N_0} > 0$ y a_1 es una constante de integración positiva.

Desde las ecuaciones (5.2.40) y (5.2.41) se puede obtener directamente la funciones $h(t)$ y $f(t)$. Encontramos $h(t)$ reemplazando los resultados para $\bar{a}(\tau)$ y $Z(\tau)$ dados por (5.2.49), (5.2.46), respectivamente, en (5.2.40). Así

$$h(\tau) = \frac{(3Z_0^2 - \beta) \coth(\tau)}{3Z_0} + \frac{+Z_0^2 w \operatorname{sech}^2(\tau)}{[a_1^3 - w \tanh(\tau)] Z_0}. \quad (5.2.50)$$

Ahora, reemplazando la ecuación para W dada por (5.2.43) y las soluciones de $Z(\tau)$ y $\bar{a}(\tau)$ en (5.2.41), la función $f(\tau)$ es dada por

$$f(\tau) = \pm \sqrt{\frac{k \tanh^2(\tau) (a_1^3 - 3w \tanh(\tau))^{-2/3}}{\sinh(\tau)^{2\beta/3Z_0^2}} - \frac{a_1^3 - 3Y \tanh(\tau)}{a_1^3 - 3w \tanh(\tau)}}, \quad (5.2.51)$$

donde $Y = w(-3Z_0^2 + \beta + Z_0^2 \operatorname{sech}^2(\tau)) + a_1^3 Z_0^2 \tanh(\tau)$.

Notemos que, hasta ahora, para el cálculo de $\bar{a}(\tau)$, $h(\tau)$ y $f(\tau)$ no ha sido necesario fijar las funciones arbitrarios de (5.2.1). Sin embargo, para el cálculo de $\phi(t)$ se requiere fijar la función $N(\phi)$. En efecto, de (5.2.42) vemos que, para encontrar una solución analítica para $\phi(t)$ la función $N(\phi)$ puede asumir por ejemplo las siguientes formas,

$$N = \mu\phi^m \vee N = e^{\mu\phi}. \quad (5.2.52)$$

1. Si $N = \mu\phi^m$, donde $N' = \mu m\phi^{m-1}$, luego $u' = \alpha\mu m\phi^{m-1}$, entonces, reemplazando lo anterior y (5.2.46) en (5.2.1), tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\phi}{8\alpha m Z_0^2 \tanh(\tau)} \\ \phi_1(\tau) &= \phi_1 \sinh^{\frac{1}{8mZ_0^2\alpha}}(\tau). \end{aligned} \quad (5.2.53)$$

2. Si $N = e^{\mu\phi}$, donde $N' = \mu e^{\mu\phi}$, luego $u' = \alpha\mu e^{\mu\phi}$, entonces, reemplazando lo anterior y (5.2.46) en (5.2.1), tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{1}{8\alpha\mu Z_0^2 \tanh(\tau)} \\ \phi_2(\tau) &= \phi_2 + \frac{\log[\sinh(\tau)]}{8\alpha\mu Z_0^2}. \end{aligned} \quad (5.2.54)$$

Con $\mu, m \in \mathbb{R}$ y ϕ_1, ϕ_2 son constantes de integración.

Con el objetivo de realizar un análisis cosmológico preliminar de los resultados recién expuestos, nos enfocamos en el factor de escala (5.2.49). En esta expresión vemos que las distintas relaciones entre β con $3Z_0^2$ y a_1^3 con $3w$, entregan los posibles comportamientos del factor de escala, expuestos en la Cuadro 5.1, y representados gráficamente en las Figuras 5.2.1 para las soluciones del tipo $\bar{a}(\tau = 0) = 0$, 5.2.2 para las soluciones del tipo $\bar{a}(\tau = 0) \rightarrow \infty$ y 5.2.3 para las soluciones del tipo $\bar{a}(\tau = 0) = a_1$.

Obtenemos la mayoría de los escenarios cosmológicos en [52]. Estos son los casos (c), (d), (f), (i) e (j), excepto el universo Big Rip, donde el factor de escala diverge en un tiempo finito con $\Lambda < 0$, escenario no considerado en esta tesis. Los nuevos escenarios cosmológicos son los representados por (a), (b), (e), (g) y (h) en el Cuadro 5.1. Notemos que el escenario en las soluciones presentadas en [52], es distinto al que estudiamos en esta tesis. En nuestro caso, las funciones arbitrarias $N(\phi)$, $M(\phi)$, $V(\phi)$ y $u(\phi)$ están relacionadas a través de (5.2.45), de donde vemos que $u'(\phi) \sim V'(\phi)$, mientras que en [52] $V(\phi) \sim \Lambda$ y $u'(\phi) = \frac{1}{4}$.

Los casos más interesantes, desde el punto de vista cosmológico, son los asociados a los casos (a), (b) y (c) de la Figura 5.2.1. En la gráfica (a) es posible obtener un universo que comienza con una singularidad o Big Bang y tiene expansión desacelerada en un comienzo y acelerada posteriormente y en (b) el universo modelado comienza con una singularidad para posteriormente expandirse de forma acelerada. La gráfica (c) representa un universo que comienza con una singularidad o Big Bang y una posterior expansión desacelerada o acelerada, después de la cual, se genera un colapso en un

	Condiciones	Comportamiento del factor de escala adimensional
(a)	$3Z_0^2 < \beta < 6Z_0^2 \wedge a_1^3 > 3w$	Comienza en $\bar{a} = 0$, luego se expande desaceleradamente y después aceleradamente.
(b)	$\beta > 6Z_0^2 \wedge a_1^3 > 3w$	Comienza en $\bar{a} = 0$, luego se expande aceleradamente.
(c)	$\beta > 3Z_0^2 \wedge a_1^3 < 3w$	Comienza en $\bar{a} = 0$, luego se expande hasta un máximo, se contrae y eventualmente colapsa.
(d)	$0 < \beta < 3Z_0^2 \wedge a_1^3 > 3w$	Comienza en $\bar{a} \rightarrow \infty$, se contrae a un mínimo y luego se expande aceleradamente.
(e)	$\beta < 0 \wedge a_1^3 > 3w$	Comienza en $\bar{a} \rightarrow \infty$, luego se contrae y se vuelve asintóticamente cero.
(f)	$\beta < 3Z_0^2 \wedge a_1^3 < 3w$	Comienza en $\bar{a} \rightarrow \infty$, luego se contrae y eventualmente colapsa.
(g)	$\beta = 3Z_0^2 \wedge a_1^3 > 3w$	Comienza en \bar{a}_1 y luego la expansión es acelerada.
(h)	$\beta = 3Z_0^2 \wedge a_1^3 < 3w$	Comienza en \bar{a}_1 , luego se contrae y eventualmente colapsa.
(i)	$\beta = 0 \wedge a_1^3 > 3w$	Comienza en $\bar{a} \rightarrow \infty$, luego se contrae y se vuelve asintóticamente constante.
(j)	$\beta = 0 \wedge a_1^3 < 3w$	Comienza en $\bar{a} \rightarrow \infty$, luego se contrae y eventualmente colapsa.

Cuadro 5.1: Comportamiento del factor de escala, dado por (5.2.49), dependiendo de los parámetros

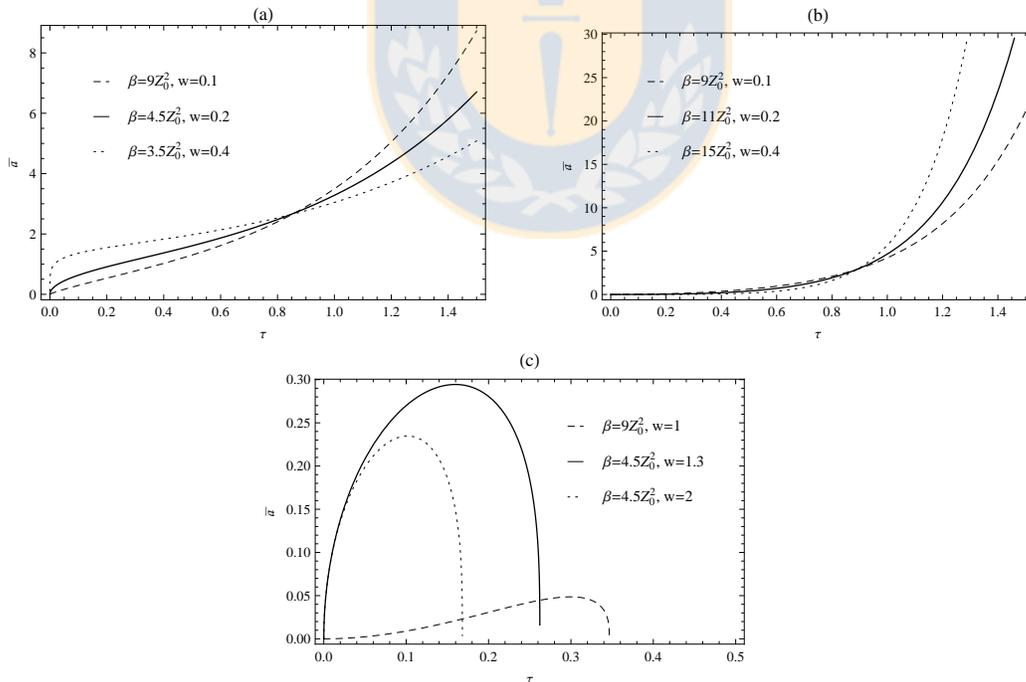


Figura 5.2.1: Comportamiento del factor de escala con $\bar{a}(\tau = 0) = 0$. En (a) y (b) $a_1^3 = 2$ y en (c) $a_1^3 = 1$. Fuente: *Elaboración propia*

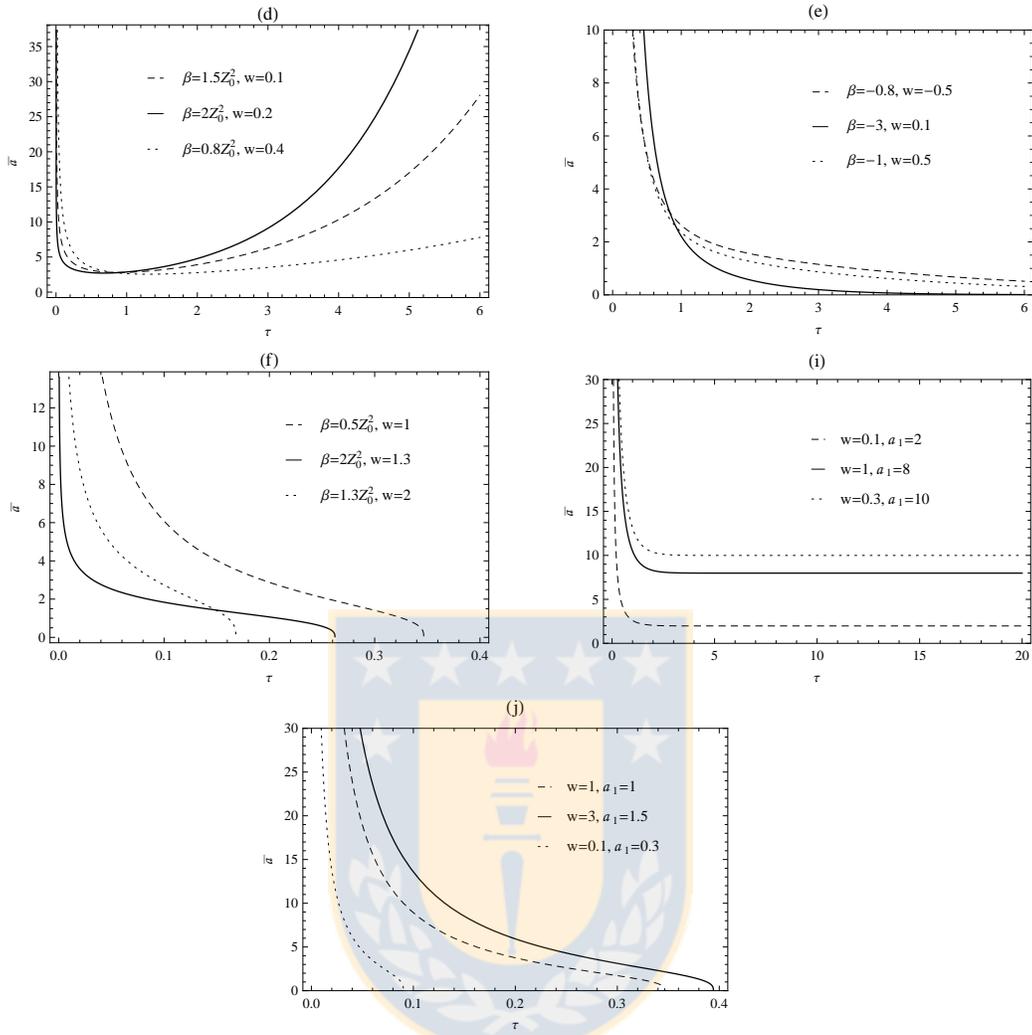


Figura 5.2.2: Comportamiento del factor de escala, con $\bar{a}(\tau=0) \rightarrow \infty$. En (d) $a_1^3 = 2$, en (e) $a_3^3 = 2 \wedge Z_0^2 = 1$ y en (f) $a_1^3 = 1$. Fuente: *Elaboración propia*

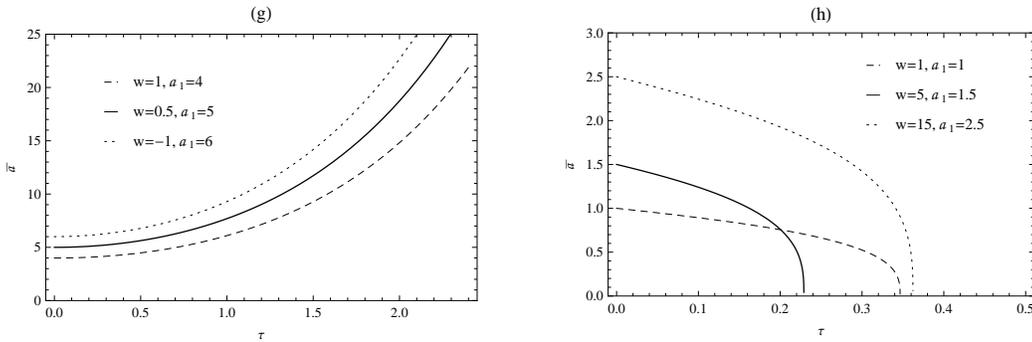


Figura 5.2.3: Comportamiento del factor de escala con $\bar{a}(\tau=0) = \text{cte}$. Fuente: *Elaboración propia*

tiempo finito; modelo conocido como Big Crunch, donde toda la materia y energía colapsa en una singularidad espaciotemporal.

Los casos de la Figura 5.2.2 no son de interés cosmológico, puesto que el factor de escala no representa la expansión del universo que observamos actualmente. En esta figura vemos que el comportamiento del factor de escala corresponde a un universo que se contrae desde infinito para luego tener distintos escenarios: Caso (d) alcanza un mínimo y se expande aceleradamente al infinito; caso (e) contraerse a cero asintóticamente; caso (f) y caso (j) colapza en un tiempo finito; caso (i) va a un valor constante asintóticamente.

Por último tenemos los escenarios expuestos en la Figura 5.2.3. Estos tampoco representan un interés cosmológico, puesto que en estos casos el universo no experimenta un Big-Bang. En el caso (g) el universo se expande aceleradamente desde un valor constante y en el caso (h) el universo se contrae desde un valor constante para colapsar en un tiempo finito.

Un análisis más explícito del caso (a) del Cuadro 5.1, lo podemos hacer a través del estudio del parámetro de desaceleración (5.1.7) y del parámetro de Hubble (5.1.6). De (5.2.49) obtenemos que estos parámetros están dados por

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = Z_0 \left(\tanh(\tau) + \left(\frac{\beta}{3Z_0^2} - 1 \right) \coth(\tau) - \frac{v \operatorname{sech}^2(\tau)}{a_1^3 - 3w \tanh(\tau)} \right), \quad (5.2.55)$$

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -1 - \frac{Z_0^2}{3H^2} \left(2 \operatorname{sech}^2(\tau) - 3 \left(\frac{\beta}{3Z_0^2} - 1 \right) \operatorname{csch}^2(\tau) + \frac{(a_1^6 - (3w)^2) \operatorname{sech}^2(\tau)}{(a_1^3 - 3w \tanh(\tau))^2} \right). \quad (5.2.56)$$

De (5.2.56) podemos calcular el tiempo en el que ocurre la transición para el parámetro de desaceleración, es decir, el tiempo cuando el universo experimenta una transición desde una expansión desacelerada a una acelerada.

Notemos que en el límite $\tau \rightarrow 0$, $q \rightarrow \frac{6Z_0^2 - \beta}{-3Z_0^2 + \beta}$ y este valor es positivo para la condición $3Z_0^2 < \beta < 6Z_0^2$, es decir, necesitamos esta condición para tener una fase desacelerada en el comienzo, con la posibilidad de tener una transición a una posterior aceleración.

Por otra parte, si queremos imponer la condición $H(t) > 0$ y $\dot{H}(t) < 0$, como en el modelo cosmológico estándar [55], encontramos que se deben satisfacer las condiciones

$$\frac{(1-x)(y \coth(\tau) - \coth(\tau)^2) - y \operatorname{csch}(\tau) \operatorname{sech}(\tau)/3}{y - \coth(\tau)} < \tanh(\tau), \quad (5.2.57)$$

$$3x + 2 \operatorname{sech}(\tau)^2 + \frac{1 - 2y \sinh(\tau)(\cosh(\tau) - y \sinh(\tau))}{(\cosh(\tau) - y \sinh(\tau))^2} > 6, \quad (5.2.58)$$

Sin embargo, en la gráfica del lado derecho de la Figura 5.2.4 podemos ver que numéricamente esta condición es incompatible con la condición $3Z_0^2 < \beta < 6Z_0^2$ and $\bar{a}_1^3 > 3w$, necesaria para tener una fase de expansión acelerada hoy y una transición desde la expansión desacelerada a la expansión acelerada en este tipo de escenarios.

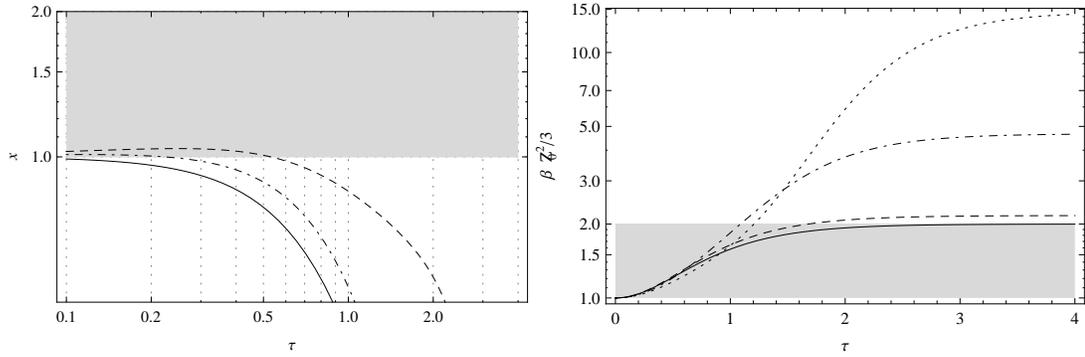


Figura 5.2.4: . Límites inferiores para las desigualdades (5.2.57) y (5.2.58). En curva sólida $w = 0$, en curva punteada $3w = 0,6a_1^3$ y en curva discontinua $3w = 0,95a_1^3$. Fuente: *Elaboración propia*

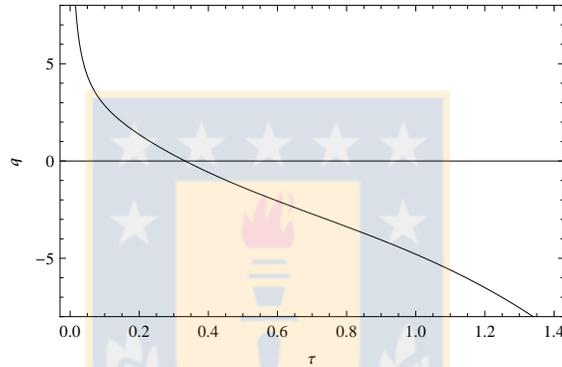


Figura 5.2.5: Parámetro de desaceleración para el factor de escala con $\beta = 4,5Z_0^2$, $w = 0,2$ y $a_1 = 2$. Fuente: *Elaboración propia*

La gráfica del lado izquierdo de la Figura 5.2.4, las curvas representan el límite inferior de $\frac{\beta}{3Z_0^2}$, satisfaciendo la desigualdad (5.2.57) y $0 < \frac{3w}{a_1^3}$. En la gráfica del lado derecho se muestra el límite inferior de $\frac{\beta}{3Z_0^3}$ para (5.2.58) y $0 < 3w < a_1^3$. La región permitida para $\frac{\beta}{3Z_0^2}$, $3Z_0^2 < \beta < 6Z_0^2$, corresponde a la región gris de la Figura 5.2.4. Notemos que durante la evolución $\dot{H} < 0$ se vuelve inconsistente para $\tau > 1$. Concluimos que en los escenarios cosmológicos donde existe la transición desde una expansión desacelerada a una acelerada, necesariamente existe un periodo con $\dot{H}(t) \geq 0$.

En la Figura 5.2.5, tenemos la gráfica del parámetro de desaceleración para el caso de la curva sólida de la gráfica (a) de la Figura 5.2.1, donde $\beta = 4,5Z_0^2$, $w = 0,2$ y $a_1 = 2$. Aquí la transición ocurre en $\tau = 0,39$ aproximadamente, teniendo $q > 0$ en el inicio del modelo y $q < 0$ en el universo tardío, es decir, en el inicio del universo existió expansión desacelerada y luego, cambia a una expansión acelerada del universo. Teniendo esto en cuenta y considerando que, si medimos Z_0 en unidades de H_0 , podemos determinar el tiempo actual a partir de (5.2.55), que tiene que ser mayor que el tiempo de transición, ya que en el universo la transición ocurrió en el

pasdo. Al ajustar el valor de Z_0 podemos encontrar el posible valor del tiempo actual, que corresponde a $\tau_0 = 0,68$ o $\tau_0 = 0,84$ para $Z_0 = 0,8H_0$. La tasa de expansión del parámetro de Hubble alcanza el valor de H_0 dos veces porque \dot{H} se vuelve positivo drante la evolución.

Por consistencia, para que $\bar{a}(\tau_0) = 1$, de (5.2.49) vemos que debemos elegir $\bar{a}_1 = 1,08$ para $\tau_0 = 0,68$. Si elegimos $\tau_0 = 0,68$, se cambia el signo de \dot{H} en el futuro, $\tau = 0,76$ aproximadamente, convirtiéndose en un dato observacional que podría se observado en el futuro cercano.





Capítulo 6

Conclusiones

Los dos temas principales estudiados en esta tesis son el lagrangeano de Horndeski con torsión no nula, y un resultado cosmológico para un caso particular de éste.

El modo en que abordamos el primer tópico, fue mediante el estudio de la teoría de Horndeski en cuatro dimensiones en el lenguaje de primer orden, sin imponer la condición de torsión nula, encontrando el lagrangeano respectivo (4.3.8). Desarrollamos nuevas técnicas matemáticas basadas en las propiedades del operador $\Sigma^a = -* (e^a \wedge *)$, lo cual nos permite trabajar con el lagrangeano de Horndeski de una manera más eficiente. Dichas técnicas y dicho lagrangeano, nos permitieron encontrar las ecuaciones de campo para esta nueva teoría (4.3.32), (4.3.33) y (4.3.34). A partir de este resultado podemos concluir que, en este marco, la torsión se genera por:

1. La presencia de derivadas de segundo orden del campo escalar en los términos del lagrangeano (4.3.8).
2. El acoplamiento no minimal del campo escalar a la geometría, es decir, la presencia de la 2-forma curvatura R^{ab} y del campo escalar ϕ en los términos del lagrangeano (4.3.8).

De esta forma, la torsión T^a tiene una estrecha relación con el campo escalar y su dinámica. En efecto, vemos explícitamente en la ecuación de campo (5.2.11) del lagrangeano (5.2.1) que $T^a \propto \partial\phi$. Es por esto que para encontrar las ecuaciones de campo de la teoría de Horndeski, a partir de la teoría de Horndeski con torsión desarrollada en esta tesis, no es posible aplicar la restricción de torsión nula en las ecuaciones de campo, ya que esta restricción inevitablemente restringe al campo escalar y anula su dinámica. La manera correcta de encontrar las ecuaciones de campo a partir de una teoría con torsión no nula, y un campo escalar no minimalmente acoplado, es que $T^a = 0$ sea una ecuación de campo, y esto se logra agregando un multiplicador de Lagrange a la acción, que resulta ser una 2-forma $\Lambda_a = \frac{1}{2}\Lambda_{abc}e^b \wedge e^c$, de modo que el lagrangeano restringido toma la siguiente forma

$$\bar{\mathcal{L}}_H^{(4)} = \mathcal{L}_H^{(4)} + \Lambda_a \wedge T^a.$$

De este lagrangeano, encontramos las ecuaciones de campo de la teoría de Horndeski, cuando $T^a = 0$ (4.3.42) y (4.3.43). Este resultado lo podemos corroborar,

estudiando una generalización de la teoría de Brans-Dicke [3], donde al aplicar el multiplicador de Lagrange, encontramos las ecuaciones de campo de la teoría de Brans-Dicke [16].

Conseguimos consecuencias cosmológicas mediante una teoría de Horndeski con torsión no nula. Al elegir una generalización de la teoría de Brans-Dicke con un término de Gauss-Bonnet de [52], (5.2.1), y considerar la métrica de FLRW, encontramos una solución analítica para las ecuaciones (5.2.35-5.2.39), dadas por el factor de escala (5.2.49), las componentes de la torsión (5.2.50), (5.2.51) y el campo escalar (5.2.53) o (5.2.54). Las primeras tres soluciones se obtienen sin necesidad de fijar las funciones arbitrarias de las que depende el lagrangeano, teniendo sólo que imponer una relación entre ellas (5.2.45), a diferencia del campo escalar, que requiere fijar la función $N(\phi)$ 5.2.52. De esta forma, se obtienen múltiples escenarios, dos de los cuales resultan interesantes desde el punto de vista cosmológico:

- Escenario donde el universo comienza en una singularidad o Big Bang, se expande, alcanzando un máximo, y terminando en un colapso en un tiempo finito. Caso (b) de la Figura 5.2.1.
- Escenario donde el universo comienza con una singularidad o Big Bang y tiene expansión siempre acelerada o desacelerada en un comienzo y acelerada posteriormente. Caso (a) de la Figura 5.2.1.

Existen problemas abiertos en el estudio de la teoría de Horndeski con torsión. En este sentido, podemos mencionar lo siguiente. Sabemos que la teoría de Horndeski corresponde a la teoría tenso-escalar más general que entrega ecuaciones de campo de segundo orden en las derivadas de los campos, sin embargo, al quitar la restricción de torsión nula, el teorema de Horndeski se rompe. Por lo tanto, para encontrar el teorema de Horndeski con torsión no nula, es decir, la teoría tenso-escalar con torsión no nula más general con ecuaciones de campo de segundo orden en las derivadas de sus campos, es necesario agregar términos con la torsión explícita en el lagrangeano de Horndeski, tales como:

$$\begin{aligned} f(\phi, X)T^a \wedge T_a, & \quad f(\phi, X)T^a \wedge R_{ab} \wedge Z^b, & \quad f(\phi, X)T^a \wedge \pi_a \wedge d\phi, \\ f(\phi, X)T^a \wedge e_a \wedge d\phi, & \quad f(\phi, X)Z_a R^a_b \wedge R^b_c Z^c, & \quad f(\phi, X)\pi_a \wedge R^a_b Z^b \wedge d\phi, \\ f(\phi, X)T_a Z^a \wedge T_b Z^b, & \quad f(\phi, X)Z^a \epsilon_{abcd} T^b \wedge e^c \wedge e^d, & \quad f(\phi, X)T_a Z^a \wedge Z_b \pi^b \wedge d\phi. \end{aligned}$$

Siguiendo esta línea, en [39] se estudia simetría conforme para el lagrangeano de Horndeski. Allí se muestra que es posible encontrar un término con torsión explícita, que se puede considerar en una teoría tenso-escalar con torsión no nula.

Por otra parte, los bosones del modelo estándar son sensibles a la curvatura Riemanniana del espaciotiempo, sin embargo, no a la torsión. Sólo los fermiones interactúan muy débilmente con la torsión, lo que se hace muy difícil elaborar una acelerador de partículas que pueda medir posibles interacciones entre la torsión y los fermiones. Por lo tanto, se requiere encontrar un fenómeno sensible a la torsión fuera del modelo estándar de partículas. En este sentido, en [53], se muestra que la información asociada a la torsión del espaciotiempo podría estar codificada en las ondas gravitacionales que podemos detectar actualmente o en el futuro cercano.

Por último, como mencionamos, la solución cosmológica encontrada es analítica y en este sentido nuestra solución corresponde a un caso particular que se presenta

cuando sintonizamos adecuadamente los parámetros. Para profundizar en este punto, una perspectiva de este trabajo será realizar un análisis de sistemas dinámicos de este tipo de escenarios, donde se puede obtener comportamientos asintóticos sin necesidad de fijar condiciones iniciales específicas y se pueden definir rangos de parámetros más generales (ver [10]). Por otra parte, este tipo de análisis estudio nos permitiría incluir una componente de radiación para describir adecuadamente el universo temprano, donde nosotros hemos obtenido un escenario en el cual domina el fluido torsional efectivo.





Referencias

- [1] T. Aubin. *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer New York, 1982.
- [2] Matthias Blau. *Lecture Notes on General Relativity*, 2016.
- [3] C. Brans and R. H. Dicke. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, **124**, 1961.
- [4] S. M. Carroll. *Lecture Notes on General Relativity*, 1997.
- [5] Elie Cartan. Sur les espaces généralisés et la théorie de la relativité. *C. R. Acad. Sci.*, **174**:734–737, 1922.
- [6] Elie Cartan. Sur les variétés à connexion affine courbure de Riemann et les espaces à torsion. *C. R. Acad. Sci.*, **174**:593–595, 1922.
- [7] Elie Cartan. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **40**:325,412, 1923.
- [8] Christos Charmousis, Edmund J. Copeland, Antonio Padilla, and Paul M. Saffin. General second order scalar-tensor theory, self tuning, and the Fab Four. *Phys. Rev. Lett.*, **108**:051101, 2012.
- [9] Antonella Cid, Fernando Izaurieta, Perla Medina, and Daniela Narbona. Non-minimal scalar field cosmology and torsion. En preparación.
- [10] Antonella Cid, Genly Leon, and Yoelsy Leyva. Intermediate accelerated solutions as generic late-time attractors in a modified Jordan-Brans-Dicke theory. *JCAP*, 1602(02):027, 2016.
- [11] Edmund J. Copeland, Antonio Padilla, and Paul M. Saffin. The cosmology of the Fab-Four. *JCAP*, **1212**:026, 2012.
- [12] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa. Conditions for the cosmological viability of the most general scalar-tensor theories and their applications to extended Galileon dark energy models. *JCAP*, **1202**:007, 2012.
- [13] R. Debever. Elie Cartan-Albert Einstein: Lettres sur le parallélisme absolu 1929-1932. *Academie Royale de Belgique, Brussels*, **6**:6–4, 1979.

- [14] C. Deffayet, S. Deser, and G. Esposito-Farese. Generalized Galileons: All scalar models whose curved background extensions maintain second-order field equations and stress-tensors. *Phys. Rev.*, **D80**:064015, 2009.
- [15] C. Deffayet, Gilles Esposito-Farese, and A. Vikman. Covariant Galileon. *Phys. Rev.*, **D79**:084003, 2009.
- [16] Sergio del Campo, Ramon Herrera, and Pedro Labrana. On the Stability of Jordan-Brans-Dicke Static Universe. *JCAP*, **0907**:006, 2009.
- [17] Robert H Dicke. Scalar-tensor gravitation and the cosmic fireball. *The Astrophysical Journal*, **152**:1, 1968.
- [18] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, and S. P. Novikov. *Modern Geometry - Methods and Applications. Part I. The Geometry of Surface, Transformation Groups, and Fields*. Springer, 1984.
- [19] George F.R. Ellis, Roy Maartens, and Malcom A.H. MacCallum. *Relativistic Cosmology*. Cambridge, 2012.
- [20] Valerio Faraoni. *Cosmology in Scalar-Tensor Gravity*. Kluwer Academic, 2004.
- [21] Daniel Z. Freedman and Antoine Van Proeyen. *Supergravity*. Cambridge University Press, 1 edition, 2012.
- [22] Yasunori Fujii and Kei-Ichi Maeda. *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*. Cambridge, 2003.
- [23] M. Hassaine and J. Zanelli. *100 Years of General Relativity - Vol. 2. CHERN-SIMONS (SUPER)GRAVITY*. World Scientific, 2016.
- [24] Friedrich W. Hehl, J. Dermott McCrea, Eckehard W. Mielke, and Yuval Neéman. Metric affine gauge theory of gravity: Field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance. *Phys. Rept.*, **258**:1–171, 1995.
- [25] Friedrich W Hehl, Paul Von der Heyde, G David Kerlick, and James M Nester. General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. *Reviews of Modern Physics*, **48**(3):393, 1976.
- [26] Hobson, Efstathious, and Lasenby. *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge Univ Press, 2006.
- [27] Gregory Walter Horndeski. *Invariant Variational Principles and Field Theories*. PhD thesis, University of Waterloo, 1973.
- [28] Gregory Walter Horndeski. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int. J. Theor. Phys.*, **10**:363–384, 1974.
- [29] Nail H. Ibragimov. *Tensors and Riemannian Geometry: With Applications to Differential Equations*. De Gruyter, 2015.
- [30] C.J. Isham. *Modern Differential Geometry for Physicists*. World Scientific, 1999.

- [31] Theodor Kaluza. On the Problem of Unity in Physics. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, K1:966–972, 1921.
- [32] Oskar Klein. Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English). *Z. Phys.*, **37**:895–906, 1926.
- [33] Tsutomu Kobayashi, Masahide Yamaguchi, and Juníchi Yokoyama. Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations. *Prog. Theor. Phys.*, **126**:511–529, 2011.
- [34] Wolfgang Kuhnel. *Differential geometry: curves - surfaces - manifolds*. American Mathematical Society, 2005.
- [35] Daile La and Paul J Steinhardt. Extended inflationary cosmology. *Physical Review Letters*, **62**:376, 1989.
- [36] Chi-Sing Lam. *The Zen in Modern Cosmology*. World Scientific, 2008.
- [37] A. Liddle. *An Introduction To Modern Cosmology*. Wiley, 2003.
- [38] David Lovelock and Hanno Rund. *Tensors, Differential Forms, and Variational Principles*. Dover Publications, 1989.
- [39] Perla Medina. Campo escalar acoplado conformalmente con torsión no nula. Master's thesis, Universidad de Concepción, 2017.
- [40] Jayant V. Narlikar and Fred Hoyle. *Introduction to cosmology*. Cambridge University Press, 1993.
- [41] Alberto Nicolis, Riccardo Rattazzi, and Enrico Trincherini. The Galileon as a local modification of gravity. *Phys. Rev.*, **D79**:064036, 2009.
- [42] Eleftherios Papantonopoulos. *Modifications of Einstein's Theory of Gravity at Large Distances*. Springer, 2015.
- [43] Patrick Peter and Jean-Philippe Uzan. *Primordial Cosmology*. Oxford, 2005.
- [44] Nikodem J. Poplawski. Cosmology with torsion: An alternative to cosmic inflation. *Phys. Lett.*, **B694**:181–185, 2010.
- [45] Nikodem J. Poplawski. Nonsingular, big-bounce cosmology from spinor-torsion coupling. *Phys. Rev.*, **D85**:107502, 2012.
- [46] Barbara Ryden. *Introduction to Cosmology*. Addison-Wesley, 2006.
- [47] Varun Sahni and Alexei Starobinsky. Reconstructing dark energy. *International Journal of Modern Physics D*, **15**:2105–2132, 2006.
- [48] S Sen and AA Sen. Late time acceleration in Brans-Dicke cosmology. *Physical Review D*, **63**(12):124006, 2001.
- [49] M. Spivak. *Cálculo en variedades*. Reverté, 1988.

- [50] Alexei A Starobinsky. Disappearing cosmological constant in $f(R)$ gravity. *JETP Letters*, **86**:157–163, 2007.
- [51] Yves Talpaert. *Differential Geometry with Applications to Mechanics and Physics*. Marcel Dekker, 2001.
- [52] Adolfo Toloza and Jorge Zanelli. Cosmology with scalar-Euler form coupling. *Class. Quant. Grav.*, **30**:135003, 2013.
- [53] Omar Valdivia, José Barrientos, Fabrizio Cordonier-Tello, Fernando Izaurieta, Perla Medina, Daniela Narbona, and Eduardo Rodríguez. Nonminimal couplings, gravitational waves, and torsion in Horndeski's theory. *arXiv:1703.09686*, En preparación, 2017.
- [54] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley New York, 1972.
- [55] Steven Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, USA, 2008.

