



Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Doctorado en Ciencias Físicas
Concepción, Chile.



Politecnico di Torino
Dipartimento di Fisica
Dottorato di ricerca in Fisica
Torino, Italia.

Non-trivial Relations Between Lie Algebras and Its Physical Applications

Thesis to be presented in partial completion
of the academic degree:

Doctor en Ciencias Físicas & Dottore di ricerca in Fisica
(Universidad de Concepción) (Politecnico di Torino)

By

Nelson Rubén Merino Moncada

Directors of Thesis: *Dr. Patricio Salgado*

Dr. Riccardo D'Auria

Concepción, Chile - Torino, Italia

2012

Resumen

En esta tesis estudiamos algunos métodos matemáticos que han tenido interesantes aplicaciones físicas durante la segunda mitad del siglo pasado. El primer método, conocido como el “método de contracción”, permite encontrar *relaciones no triviales* entre ciertas simetrías continuas en el contexto de las teorías de Lie (para una buena introducción a grupos y álgebras de Lie ver, por ejemplo, [1], [2], [3], [4], [5]). Entre 1953 y 2000 diversos métodos de contracción aparecieron en la literatura. Muchas generalizaciones fueron hechas y la última generalización, que contiene a todas las otras, fue introducida la última década con el nombre de “métodos de expansión”.

La posibilidad de encontrar relaciones no triviales entre álgebras de Lie tiene su contraparte como relaciones no triviales entre las correspondientes teorías físicas que presentan invariancia bajo tales simetrías. Muchas aplicaciones físicas han sido encontradas para casos particulares, pero en general no se sabe por qué en ciertos casos una relación entre algunas simetrías puede ser encontrada pero en otros casos no.

En esta tesis presentamos un procedimiento formal y general para responder a esta pregunta llevando a cabo un estudio de cómo esos métodos (contracciones y expansiones) pueden ser aplicadas en el contexto de la Clasificación de Álgebras de Lie. Comenzamos estudiando una particular aplicación en el contexto de la clasificación de espacios de Bianchi. Luego, un análisis exhaustivo de este ejemplo muestra que es posible conjeturar que algunas propiedades son generales para los métodos de expansión, las cuales son encontradas en esta tesis. Se proponen algunos

criterios y un algoritmo general para reponder a la pregunta: dadas dos simetrías arbitrarias, ¿puede ser encontrada una relación entre ellas mediante los mecanismos mencionados? Algunos ejemplos y aplicaciones físicas de estos resultados son entregados también en esta tesis.

En esta tesis tambien se muestra que esos métodos pueden ser extendidos a estructuras matemáticas más generales como lo es el caso de álgebras de Lie infinito-dimensionales y Álgebras de Lie de Alto Orden. Esas extensiones podrían ser útiles herramientas matemáticas en el estudio de teorías físicas tales como gravedad, cosmología y teorías de alto espín.

Explicación conceptual y metafórica²

Es posible pensar que la teoría de la clasificación de álgebras de Lie es un cierto *edificio* que tiene muchas *habitaciones* las cuales pueden ser conectadas por ciertas *puertas* conocidas. Los diferentes tipos de álgebras que existen son representados por objetos que pertenecen a habitaciones específicas. Entonces, las relaciones no triviales que hemos mencionado (aquellas que comenzaron a aparecer desde los años 50') son, en algún sentido, nuevas *puertas secretas* que no habían sido conocidas anteriormente. Esas *puertas* extrañas pueden conectar ciertas *habitaciones* que, en principio, no estaban conectadas o simplemente no se sabía que pudieran estarlo. En general, si queremos ir de una cierta *habitación* a otra, algunas veces esas *puertas* mágicas existen y otras no. Parece ser que la existencia de esas *puertas* depende de las propiedades de las *habitaciones* que queremos conectar.

En esta tesis tratamos de encontrar todas las *reglas* escondidas del *edificio*. Con este fin, consideramos un conjunto de criterios que nos permiten saber si la conexión entre dos *habitaciones* es prohibida o no por las *reglas* del *edificio*. Si no está prohibida entonces podría existir una *puerta* que las conecta. Sin embargo, una cosa es decir que la *puerta* podría existir y ¡otra cosa es encontrarla! Para hacer

²Un especial agradecimiento a Solveig Iochum-Demans por su curiosidad y por motivarme a explicar en simples palabras los temas centrales de mi tesis. La explicación dada aquí es el resultado de muchas de esas discusiones.

