Universidad de Concepción

Campus Los Ángeles

Escuela de Educación

Modelamiento matemático y usos de representaciones semióticas en la enseñanza de funciones en 8° año básico.

Seminario de Título para optar al Grado de Licenciado en Educación y al Título de Profesor de Educación General Básica con Especialidad en Matemática y Ciencias Naturales.

Seminaristas

Luis Eusebio Gajardo Flores

Pedro Ángel Venegas San Martín

Profesor Guía

Mg. Lilian del Carmen Vargas Villar

Comisión

Dr. Andrés Troncoso Ávila

Mg. Harry Cifuentes Saldaña

Los Ángeles, marzo 2018

ÍNDICE

Contenido **Página**

Agradecimientos…………………………………………………………………………… 4

Resumen……………………………………………………………………….………… 5

Introducción……………………………………………………………………………… 6

CAPÍTULO I…………………………………………………………...……………… 8

Planteamiento del problema…………......…………………………………………….. 8

Objeto de estudio…..………………………………………………………………… 16

Tema Investigación…….…………………………………………………………….. 16

Objetivo General……………..………………………………………………………….. 16

Objetivos específicos…………………………………………………………………… 16

CAPÍTULO II………………………………………………………………………… 17

Marco Referencial…………………………………………………………………….. 17

1. Enseñanza y aprendizaje de la matemática……………………………………….. .17

1.1 Estilos de aprendizaje..……………..……….…...………………..………………… 19

1.1.1 Teoría Conductista……………..……………………………………….. 19

1.1.2 Teoría Cognitiva……………...…………………………………………... 20

1.1.3 Teoría Ecléctica………………………………………………….……….... 21

1.1.4 Teoría Constructivista……………………………………………………….. 22

1.2 Tipos de Pensamiento…………………………………………..……………… 25

1.2.1 Pensamiento Reflexivo……………………………………………………… 25

1.2.2 Pensamiento Analítico………………………………………………………. 26

1.2.3 Pensamiento Lógico………………………………………………………… 27

1.2.4 Pensamiento Crítico………………………………………………………… 28

1.2.5 Pensamiento Analógico…………………………………......……………… 29

1.2.6 Pensamiento Creativo……………………………………………………….. 30

1.2.7 Pensamiento Variacional………………..…………………..………………..31

1.3 Habilidades………………………………………………………….…….……….. 35

1.3.1 Resolver Problemas…………………………………….……………… 35

1.3.2 Representar………………………………………………………………………... 36
1.3.3 Argumentar y Comunicar…………………………………………….……………… 37
1.3.4 Modelar…………………………………………………………………………… 38
1.4 Modelamiento Matemático……………………………………..………….……….... 38
1.5 Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval……………..…..………… 42
1.6 Obstáculos en la enseñanza de la Matemática……………………………………... 46
1.7 Enseñanza de las Funciones…..……………………………………...……………... 48
1.7.1 Historia de las Funciones………………………………………......…………….. 48
1.7.2 Epistemología de las Funciones……………………………………………………... 49
1.7.3 Concepto de Función……………………………………………..………………… 51
1.7.4 Proporcionalidad……………………………………………...…………………... 53
1.7.5 Conceptos Elementales……………………………...……………….……………... 54
1.7.6 Propiedades de las Funciones…………………………………...………………... 58
1.8 Programa de Estudio y Bases curriculares…………………………………………… 62
CAPÍTULO III…………………………………………………………….……………………….. 66
Marco Metodológico………………………….....…………………………………………... 66
Tipo de Investigación………………………………………………………………………… 66
Diseño de Investigación………………………………………………...…………………… 66
Universo…………………………………………………………………………………… 67
Población………………………………………………………………………………….. 67
Muestra…………………………………………………………………………………… 67
Instrumentos de recolección de datos…………………………………….…………….. 67
Pretest………………………………………………………………………………………… 68
CAPÍTULO IV.……………………………………………………..………............. 72
Análisis Estadístico del diseño…………………………..…………………………... 72
Análisis de Indicadores de logros establecidos en el pretest…………………...…………… 81
Consideraciones Generales…………………………………………..……………………. 86
Referencias Bibliográficas……………………………………………………………….. 87
Anexos………………………………………………………………….……………… 95

Agradecimientos

Al culminar este proceso quiero agradecer a Dios, por día a día otorgar me vida, salud e inteligencia para poder alcanzar el sueño de ser un profesional después de muchos altos y bajos que se presentaron en este camino difícil, a su vez, quiero agradecerá a mi hermosa familia, gracias mamá por siempre apoyar cada decisión y dar lo mejor de ti para que pudiese alcanzar esta profesión, gracias papá por siempre brindar el apoyo económico y tus mejores consejos para cada paso que he dado en la vida, gracias hermanos por siempre escuchar me, aconsejar me, ayudar me cuando no comprendía alguna asignatura o contenido y por querer siempre lo más puro y bueno para mí, quiero también dar gracias a mis sobrinos que siempre me entregaron su amor, comprensión y apoyo diciendo que yo podía lograrlo; no puedo dejar de lado a mi polola que siempre en todo este proceso me brindó su apoyo incondicional, solo quiero recalcar las gracias a ellos, ya que sin ellos quien soy hoy un profesional no lo hubiese podido lograr.

Por último quisiera terminar estos agradecimiento entregando a otros un texto de la biblia que me otorgaron mis padres, que se encuentra en Filipenses 4:13 "Todo lo puedo en Cristo que me fortalece" este versículo tan anhelado siempre me entrego las energías para seguir y conseguir este título profesional.

Luis Eusebio Gajardo Flores

Quiero agradecer primero que todo a mi familia y a Isabel por todo el amor que me entregan y por estar siempre apoyándome en este ciclo de la vida que hoy culmina para el comienzo de otro. Especialmente por la paciencia que han tenido conmigo. También a mis amigos y a mis compañeros de carrera con los cuales viví este proceso y a quienes el destino quiso poner junto a mí para vivir día a día esta última etapa de ser estudiantes, compañeros y amigos.

Finalmente quiero agradecer a cada uno de los profesores que también fueron participes de este proceso tan importante y que entregaron su granito de arena para el futuro y responsabilidad que conlleva esta labor tan humana y fundamental que es la docencia.

Pedro Ángel Venegas San Martín

Resumen

Este estudio se centra en la elaboración de una propuesta pedagógica basada en el modelamiento matemático de funciones y el uso de representaciones semióticas la cual se funda en la teoría de los Registros Semióticos de Raymon Duval, donde se realiza la aplicación de un diseño metodológico mediante un pretest analizando los resultados obtenidos por estudiantes de 8° año básico realizado con alumnos de la comuna de Los Ángeles y Tucapel.

La presente investigación de tipo mixto posee un enfoque tanto cuantitativo como cualitativo, donde se analizan de manera estadística los resultados obtenidos por un grupo de estudiantes en la aplicación de pretest y por otra parte, se realiza una recopilación bibliográfica para la propuesta pedagógica que se desea implementar.

Esta estrategia basada en la modelización matemática y el uso de registros semióticos pretende hacer efectivo el aprendizaje mediante la contextualización de las funciones en la vida cotidiana así como también en otras áreas del conocimiento.

Implementado el instrumento de recolección de datos, se obtienen resultados desfavorables en los análisis estadísticos de éstos, pues se descubre que los alumnos no tienen adquiridos los conceptos matemáticos correspondientes al área de funciones. Por ende, se concluye que la propuesta didáctica a ser aplicada, ayudará a desarrollar los conceptos matemáticos en los estudiantes, debido al poder de contextualización que esta estrategia posee.

Palabras clave: Modelamiento – registros semióticos – constructivismo – proporcionalidad – función lineal – función afín

Abstract

This study is centered on the development of a pedagogical approach based on the mathematical functions modeling with 8th graders through the use of semiotic representations which is based on Raymond Duval´s Semiotic Records theory, where an methodological design will be perform through a pre-test analyzing the results obtained of the 8th grade students from Los Angeles and Tucapel communes.

The current research is a mixed type, it possesses a quantitative approach, where the students' results will be analyzed on a statistics way, and in the other hand, it will follow a qualitative approach which is based on several bibliographical registers in order to fulfill the pedagogical approach intended to

This methodology is based on the mathematical modeling and the use of semiotic registers, which pretends to make an effective learning through contextualizing functions with daily life action as well as other areas of knowledge.

After implementing our data collection instrument, we obtained unfavorable results of the statistical analysis, then, it is detected that the students haven't acquire the mathematical concepts related to the field of functions. Moreover, it is concluded that the didactical approach to be applied, will develop the mathematical concepts easily on the students, due to the capacity of contextualization this strategy possess.

Keywords: Modeling – semiotic records – constructivism – proportionality – lineal funtion –related funtion

Introducción

Esta investigación que lleva por título "Modelamiento matemático y usos de representaciones semióticas en la enseñanza de funciones en 8° año básico", debido a la importancia que tienen en el aprendizaje de las matemáticas en general. Establece la búsqueda de una estrategia para la enseñanza de función lineal y afín en 8°año básico.

El objetivo busca analizar la incidencia que tiene el uso de las representaciones semióticas y sus transformaciones para desarrollar y comprender los conceptos matemáticos de función lineal y función afín a través del modelamiento matemático en los estudiantes de 8° año básico.

El trabajo se orienta hacia la conceptualización de la matemática, específicamente de la materia de funciones, donde se pretende, mediante el uso de las representaciones semióticas que los estudiantes logren adquirir los conceptos matemáticos. También esta investigación se enfoca en el desarrollo del pensamiento variacional, el cual ayuda a contextualizar, entender y aplicar la matemática en otras áreas del conocimiento.

Los objetivos específicos que presenta la investigación son elaborar un instrumento a modo de diagnóstico para su validación, describir los aprendizajes que poseen estudiantes mediante la aplicación de un pretest y finalmente diseñar secuencias de aprendizaje utilizando modelamiento matemático para la unidad de funciones.

Nuestra investigación consta de cuatro capítulos en su estructura. El Capitulo I se compone por el planteamiento del problema, el cual sustenta nuestra investigación bajo las distintas evidencias que existen sobre estrategias utilizadas en las aulas, las que generan los malos resultados en nuestro país y la mala disposición por parte de los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas. También lo componen la pregunta de investigación y los objetivos, tanto general como específicos.

El Capítulo II está conformado por el marco referencial o teórico, en el que se fundamenta toda nuestra investigación. En esta sección donde se establecen las bases donde se sustenta que son el estilo de aprendizaje constructivista, el pensamiento variacional, el modelamiento matemático y los registros de representación semiótica.

El Capítulo III se estructura por el marco metodológico, el cual nos muestra el mecanismo utilizado en nuestra investigación y la descripción de los análisis de ésta.

Finalmente el Capítulo IV está constituido por los análisis estadísticos del instrumento aplicado. Luego se concluye la investigación estableciendo una serie de consideraciones, las cuales plantean si nuestra investigación es aceptada como valida o no.

Posteriormente se presenta la bibliografía con el conjunto de referencias utilizadas para la investigación. Se observa en este bloque, la lista con todos los documentos, investigaciones, libros, etc. que fundamentarán la investigación respecto del tema investigado.

Finalmente, se registran los anexos utilizados en este trabajo, donde se pueden encontrar el instrumento, tablas de análisis, planificaciones de la propuesta de intervención pedagógica y registro fotográfico del pretest aplicado.

Capítulo I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Consideramos según las diversas evidencias en las cuales basamos nuestra investigación que la matemática es una de las ciencias más antiguas del mundo y de vital importancia en cualquier ámbito de la sociedad, la cual ha buscado mediante esta rama, durante el transcurso de la historia, dar solución a los diversos tipos de problemas cotidianos del Hombre.

A lo largo del tiempo, la matemática ha sido una de las materias más complejas que los estudiantes deban aprender, debido a las barreras que estos mismos presentan frente a ella. Donde tradicionalmente, el aprendizaje de esta disciplina se ha asociado solo con asimilar fórmulas, procedimientos y símbolos (Mineduc, 2016. p.34). Precisamente, Sepúlveda, Vargas y Escalante (2013) en su artículo *Problemas geométricos de variación y el uso de software dinámico* plantean lo mismo, "aprender matemáticas no se reduce a aprender conceptos, algoritmos y fórmulas matemáticas, implica desarrollar conocimiento, habilidades y hábitos de la disciplina" (p. 66).

Aravena y Caamaño (2007) plantean que uno de los principales problemas existentes en la enseñanza de la matemática es la articulación de ésta con otras áreas del conocimiento lo que provoca que los estudiantes no conciban la utilidad de ésta en su formación, lo que ha reducido la enseñanza de la matemática a un trabajo basado en algoritmos que no permite a los estudiantes comprender el rol de la matemática en la sociedad.

Esta disciplina es imprescindible para el desarrollo del pensamiento lógico y crítico de los niños, pues asimismo ayuda a dar solución a los problemas a los que se enfrentan día a día, por esta razón debe ser de gran importancia también para la educación chilena y su proceso de enseñanza, pues el Programa de Estudio de Matemática de Octavo año, plantea que comprender las matemáticas y ser capaz de aplicar sus conceptos y procedimientos a la resolución de problemas reales es fundamental para los ciudadanos en el mundo moderno.(Mineduc, 2016. p.34)

Sin embargo, los alumnos generalmente no suelen ver la matemática con una actitud positiva hacia el aprendizaje, lo que provoca que genere un alejamiento entre ésta y los estudiantes. Esta triste condición es aceptada socialmente por una inmensa mayoría que intuye, con pesimismo, que el aprendizaje de las matemáticas es y será imposible (Hojman, 1997, p. 450).

Considerando también que los niveles de conocimiento muy rara vez exceden el uso elemental de las cuatro operaciones básicas en adultos no expertos, Hojman (1997) plantea que las personas sabrían más matemáticas si sus labores diarias incluyeran actividades que las requieran y que, en su mayoría, las personas son incapaces de reconocer problemas cotidianos que tengan que ver con la disciplina, y mucho menos resolverlos. Estas limitaciones, provocan que la enseñanza de la matemática se haga más difícil aun, pues hacen imposible, en la mayoría de los casos, un apoyo técnico familiar en el área de las matemáticas, para niños que cursan los últimos años de la educación básica o que estudian la educación media (Hojman, 1997, p. 450).

En Chile, se aplican una serie de mediciones de carácter internacional que miden el aprendizaje de los estudiantes, como las pruebas TIMSS, PISA, ICILS, ICCS y TERCE.

Desarrollado por la Asociación Internacional para la Evaluación del Logro Educativo (En adelante, IEA), el Estudio Internacional de Alfabetización Computacional y Manejo de Información (ICILS) se ocupa de evaluar a alfabetización computacional y el manejo de información en estudiantes que cursan 8° año, donde Chile se encuentra entre uno de los 20 países participantes de este estudio (Agencia de la Calidad de la Educación, 2017).

Por otra parte, el Estudio Internacional de Educación Cívica y Formación Ciudadana (ICCS), desarrollado de igual manera por la IEA, tiene como objetivo investigar la manera en que los jóvenes están preparados para asumir sus roles como ciudadanos en el siglo XXI, midiendo el grado de preparación y motivación que poseen éstos. ICCS no tiene una periodicidad definida y se aplica en módulos regionales de países que comparten temas específicos de común interés (Agencia de la Calidad de la Educación, 2017).

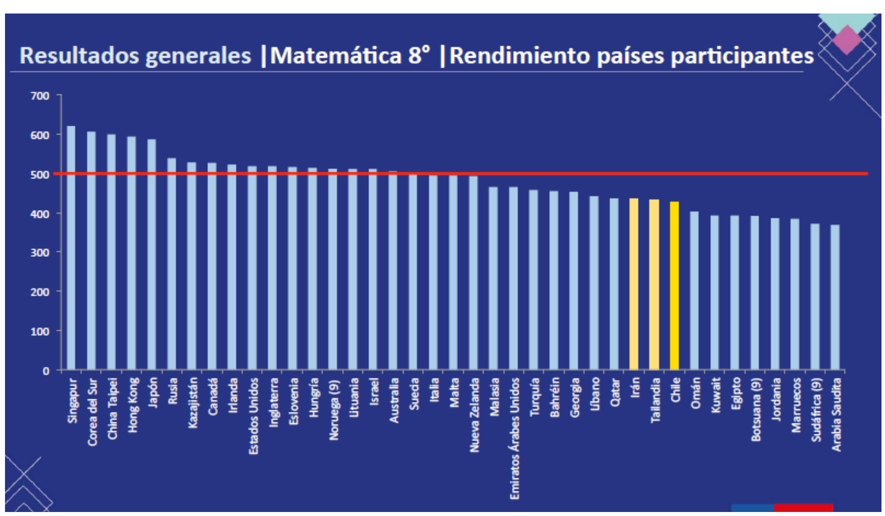
Desarrollado por el Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE), TERCE (Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo) tiene como objetivo obtener información sobre los logros de aprendizaje alcanzados en estudiantes de 3° y

6° básico. Se aplica en las áreas de Lenguaje, Escritura, Matemáticas y Ciencia, siendo esta última aplicada solamente en 6° básico. Este estudio se aplica en todos los países de Latinoamérica y el Caribe. (Agencia de la Calidad de la Educación, 2017)

En el Estudio de Tendencias en Matemática y Ciencias (En adelante, TIMSS), liderado por la IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement), participan 57 países a nivel mundial y sólo tres a nivel americano, siendo Chile uno de estos. En este ámbito, TIMSS es aplicada cada cuatro años para medir los aprendizajes de alumnos de 4° y 8° año básico, mientras que la Prueba PISA se aplica cada tres años a estudiantes de 15 años.

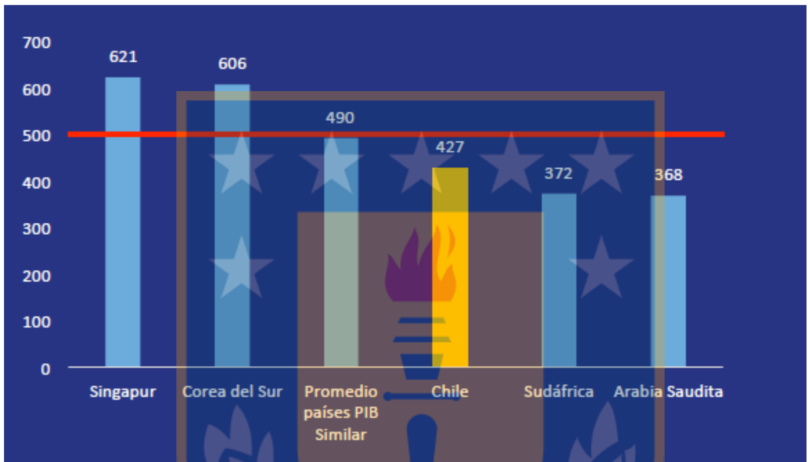
Los resultados en el TIMSS se reportan en una escala de puntajes con rangos que van desde 0 a 1000 puntos con una media de 500. Frente a esto la prueba, la cual se implementó durante los últimos años en 2011 y< 2015, muestra una mejora significativa en Matemática. Presenta a su vez un alza en la trayectoria sobre los 30 puntos tanto en matemática como en Ciencias. No obstante, dependiendo del grado y la asignatura, entre el 15% y el 37% de los estudiantes en Chile no alcanza el umbral mínimo asociado al nivel de desempeño bajo (400 puntos), en comparación con un 5% y 16 % a nivel internacional, respectivamente. Así como también, en promedio, solo el 1% de los estudiantes en Chile alcanzan el nivel Avanzado (sobre los 625 puntos), en comparación con un 7% a nivel internacional.

Gráfico 1. Resultados generales principales países participantes en prueba TIMSS.



El puntaje promedio de este estudio en la asignatura de Matemática es 427 puntos, el cual posiciona a Chile bajo la media de la escala internacional, como se muestra en el Gráfico 1. Si se comparan los resultados con el promedio de los países con PIB (Producto Interno Bruto) per cápita similar a Chile, éste se encuentra significativamente debajo de estos países, pues este promedio alcanza los 490 puntos (ver Gráfico 2)

Gráfico 2. Países con más altos y bajos puntajes. Países con PIB similar a Chile.



Otra medición es el Programa Internacional Para la Evaluación del Estudiante (En adelante, PISA) aplicado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (En adelante, OCDE), donde Chile se encuentra entre los 72 países participantes.

La Prueba PISA aplicada en el año 2015, arroja un puntaje de 423 puntos, el cual se encuentra por debajo de la Media OCDE que es de 490 puntos y por debajo de Singapur quien ocupa el primer lugar con 564 puntos. Respecto al último informe PISA realizado, Chile alcanza un alza de 4 puntos en matemática. Si bien es considerable que Chile presente alzas en los puntajes, no nos podemos conformar con estos resultados, pues, ambas evaluaciones de carácter mundial nos posicionan en niveles bajo la media internacional, con puntajes no muy alentadores.

Grafico 3. Ubicación de Chile. Prueba PISA.

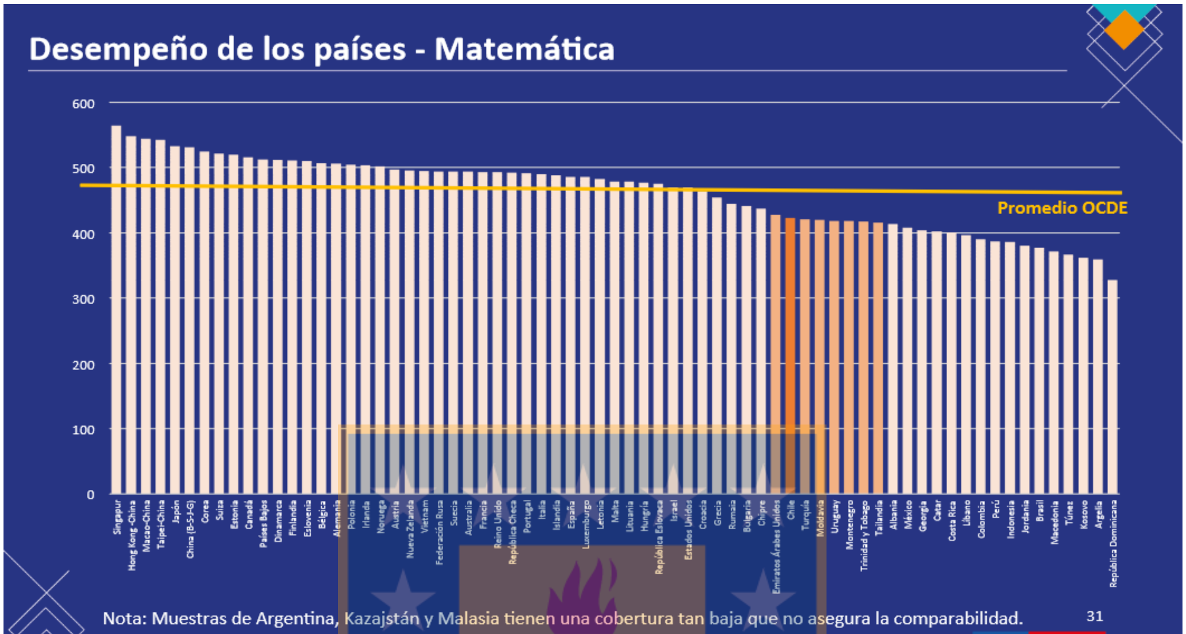
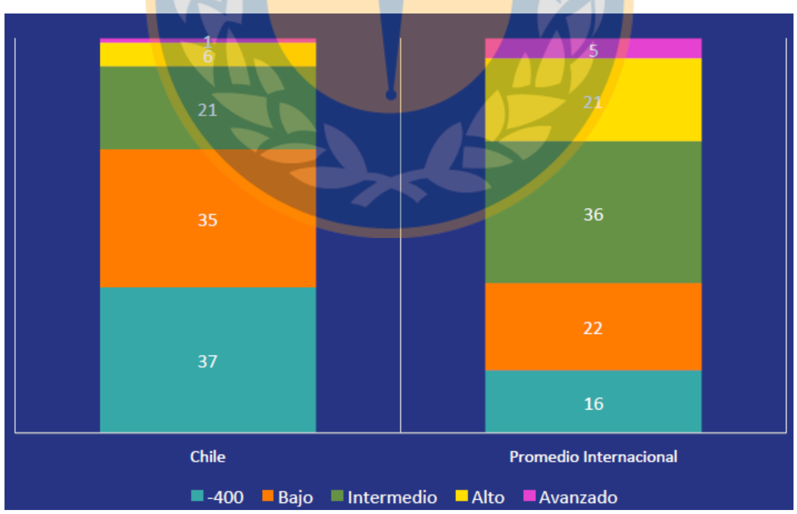
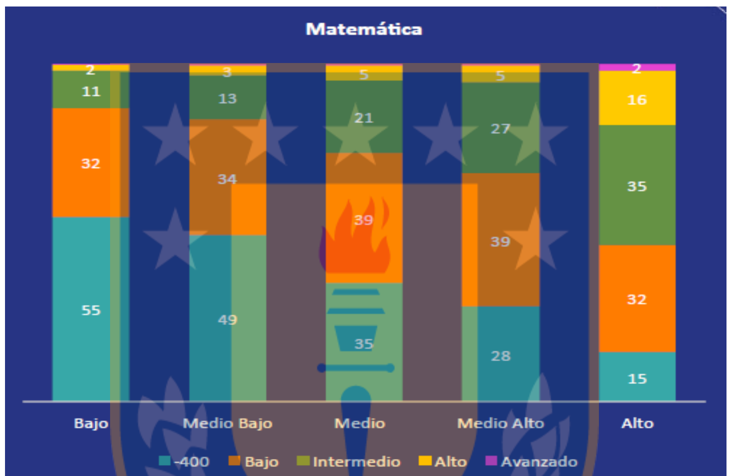


Grafico 4. Porcentaje de puntajes obtenidos en rangos (TIMSS).



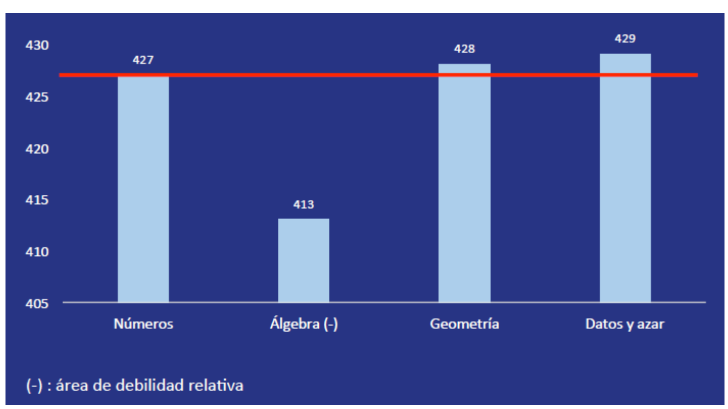
Fundamentalmente, en los sectores más vulnerables es donde se presentan las brechas más importantes de resultados obtenidos. Los resultados del estudio TIMSS en el último año aplicado, nos muestra clara evidencia de esto (Gráfico 3). Comparando los extremos de los niveles de recursos de los estudiantes a los que se les aplicó la prueba de matemática, en el nivel de recursos bajo nos encontramos con un 30% de los estudiantes que no lograron alcanzar el puntaje para catalogarse en el rango bajo. Esto quiere decir que su puntaje fue bajo los 400 puntos, versus un 7% de estudiantes de nivel de recursos alto. Por otra parte, el nivel de recursos bajo presenta un 0% de estudiantes que alcanzaron el nivel avanzado (sobre 625 puntos) en comparación con el porcentaje de estudiantes de nivel de recursos alto que fue un 4%. Por lo que mediante esta estadística se concluye que el rendimiento académico se encuentra claramente determinado por el nivel de recursos del hogar al que pertenece estudiante (ver Gráfico 5). Por lo tanto, a mayor nivel socioeconómico, mejor nivel de logros alcanza el alumno.

Grafico 5. Porcentaje de puntajes obtenidos según bloques socio-económicos



Es importante señalar que dadas las estadísticas entregadas por la TIMSS (2015) el área que presenta una mayor debilidad relativa en matemática es el Álgebra, que alcanza a obtener una puntuación de 413 puntos en comparación al área de Números que obtuvo 427 puntos, Geometría 428 puntos y Datos y azar 429 puntos (ver Gráfico 6).

Gráfico 6. Resultados obtenidos según dominios de contenidos.



Según los programas de estudio para la asignatura de matemática que entraron en vigencia el 2016 con la propuesta pedagógica para alumnos de octavo básico, espera que el estudiante para el eje temático de algebra y funciones deba saber escribir, representar y usar expresiones algebraicas, que se relacionen entre ecuaciones, inecuaciones o funciones. Este eje pone especial atención en que los estudiantes reconozcan los modelos y los amplíen, y que a su vez puedan comunicarse por medio de expresiones algebraicas. El álgebra es una herramienta imprescindible para que los estudiantes avancen en los conocimientos matemáticos (Chavarría G. 2012. p. 16), pero nos encontramos con una realidad que no es la esperada por los programas de estudio.

El concepto de función, como otros, es abordado en la enseñanza secundaria o polimodal, pero los alumnos ingresantes a la Universidad no demuestran haber adquirido la capacidad de interpretar, definir y graficar funciones (…) (Rey, Boubée, Sastre Vazquez y Cañibano. 2009. p. 154). Se cree que, muchos de los errores se deben a carencias en Aritmética, que, consecuentemente, se trasladan al Álgebra (Abrate, Pocholu, Vargas. 2006. p. 121) y a su vez, algunos de estos errores devienen de los métodos de enseñanza empleados en la formación previa de los alumnos (Abrate, Pocholu, Vargas. 2006. p. 121).

Por muchos años en Chile la enseñanza de las matemáticas se ha basado en la teoría conductista para desarrollar los contenidos y evaluaciones. Según Floréz. T. (2005) en su artículo *Modelos pedagógicos y planificación: un poco de historia* menciona lo siguiente:

> *A raíz del aumento en el número de alumnos y alumnas (en los años 50 y 60) posibilitaron la instalación del conductismo en Chile. Se comenzaron a elaborar materiales didácticos estandarizados, y así facilitar la corrección, haciéndola más 'objetiva'. Desde este punto de vista, el conductismo se manifiesta a favor de una mirada que desvincula el saber de la subjetividad, pues cree en la posibilidad de conocimiento 'puro'. Así, los alumnos y alumnas siguen aprendiendo de forma memorística y reiterativa, a lo que se agrega la noción de aprendizaje a través del refuerzo y de la lógica estímulo-respuesta.*

En base a esta situación y a los resultados obtenidos en las diferentes pruebas, creemos que es necesario generar un cambio, y aplicar una nueva estrategia metodológica en donde el alumno sea el principal actor y genere su propio conocimiento guiado por el docente.

> *Por esto, la importancia del Modelamiento Matemático como estrategia de enseñanza más que transmitir información o contenidos para ser posteriormente reproducidos busca desarrollar en los alumnos habilidades y estrategias que les permitan, de forma autónoma, generar nuevos conocimientos a partir de otros ya previamente adquiridos*. (Reid, Gareis, Hernández y Roldán. 2012. p. 92).

Por lo anterior, se pondrá énfasis en esta investigación en la estrategia didáctica de modelización matemática. La cual es un intento de describir alguna parte del mundo real en términos matemáticos. (Brito, Romero, Fraga, Para, Arias, 2011, p.130).

OBJETO DE ESTUDIO

Propuesta basada en el modelamiento matemático y usos de representación semiótica en la enseñanza de funciones en alumnos de 8° año básico.

TEMA DE INVESTIGACIÓN

La elaboración de una propuesta pedagógica basada en el modelamiento de funciones a través del uso de representaciones semióticas para favorecer el desarrollo y comprensión de los conceptos de función lineal y función afín.

OBJETIVO GENERAL

Elaborar una propuesta pedagógica basada en el modelamiento de funciones a través del uso de representaciones semióticas analizando los resultados obtenidos mediante un pilotaje con estudiantes de 8° año básico.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Elaborar un instrumento el cual permita medir el uso de representaciones semióticas a través del modelamiento matemático a modo de diagnóstico para su validación.

- Describir los aprendizajes que poseen estudiantes de octavo año básico en la unidad de Funciones mediante la aplicación de un pretest en términos de diagnóstico.

- Diseñar secuencias de aprendizaje que permitan el uso de representaciones semióticas utilizando modelamiento matemático para la unidad de Funciones.

Capítulo II

MARCO REFERENCIAL

1. Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática

Como se menciona anteriormente, la matemática y su aplicación ha sido muy importante para el Hombre a lo largo de toda la historia. Según Collette (1985), la necesidad de un sistema de numeración proviene de la naturaleza de las actividades propias de un pueblo primitivo (p.10). La perspectiva histórica muestra claramente que las matemáticas son un conjunto de conocimientos en evolución continua y que en dicha evolución desempeña a menudo un papel de primer orden la necesidad de resolver determinados problemas prácticos (Godino, 2004. p. 21). Pero la matemática no solo es importante por dar solución a los distintos problemas cotidianos del Hombre, sino por las variadas relaciones que la matemática tiene, descubiertas por los trabajos histórico-matemáticos referidos a ésta. Entre ellas: las relaciones de las matemáticas con las necesidades prácticas y la actividad de los hombres, con el desarrollo de otras ciencias; la influencia de la estructura económica y social de la sociedad y la lucha de clases (especialmente en la esfera ideológica) sobre el contenido y carácter del desarrollo de las matemáticas; el papel de los pueblos, de las personalidades y colectivos científicos (Ribnikov, 1987. p.10).

Para comenzar a hablar de la enseñanza y aprendizaje de la matemática hay que considerar la concepción de ésta para los propios profesores y cómo se encuentra dada. Godino en su libro Didáctica de las matemáticas para maestros plantea que la actuación de los profesores en la clase está condicionada por las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas. Propuesto de manera ejemplar: por una parte, un profesor cree que los objetos matemáticos tienen una existencia propia (incluso aunque esta “existencia” sea no material). Para él, objetos tales como “triángulo”, “suma”, “fracciones”, “probabilidad”, existen, tal como lo hacen los elefantes o los planetas (Godino, 2004, p.19). En este caso solo hay que ayudar a los alumnos a descubrir tales “objetos”.

Por otra parte plantea otro ejemplo donde otro tipo de profesores consideran que las matemáticas se han inventado, como consecuencia de la curiosidad del hombre y su necesidad de resolver una amplia variedad de problemas, como, por ejemplo, intercambio de objetos en el comercio, construcción, ingeniería, astronomía, etc. (Godino, 2004, p.19).

Godino (2004), destaca la importancia del papel cultural de la matemática y la educación matemática en la sociedad para la formación de ciudadanos cultos, cuyo concepto de cultura es cambiante y que se amplía cada vez más en la sociedad moderna. Frente a esto, no se pretende que la educación matemática forme a ciudadanos en “matemáticos aficionados”, ni que sean capacitados en cálculos complejos puesto que esta tarea ya se encuentra realizada por los ordenadores. Por lo tanto, plantea que lo que se pretende es proporcionar una cultura con varios componentes interrelacionados, que sea capaz de interpretar y evaluar críticamente la información matemática y los argumentos que las personas puedan encontrar en diversas fuentes. También, que tenga la capacidad para discutir o comunicar información matemática y competencia para resolver problemas matemáticos que encuentre en la vida diaria y/o profesional. Este intenso proceso social de culturización científica, nos ha ayudado a implementar modificaciones en el campo particular de las matemáticas con bases en diseños mejor adaptados a las prácticas escolares (Cantoral, R., Farfán, R., 2003. p. 28)

Respecto a Enseñanza de la matemática, Cantoral y Farfán (2003) en su artículo Matemática educativa: una visión de su evolución, precisan lo siguiente: la matemática educativa es entonces una disciplina del conocimiento cuyo origen se remonta a la segunda mitad del siglo veinte y que en términos generales, podríamos decir que se ocupa del estudio de los fenómenos didácticos ligados al saber matemático (p. 29)

La enseñanza de esta ciencia en la actualidad ha sido un tema aún más importante, pues, se encuentra en la búsqueda del aprendizaje efectivo y significativo para los estudiantes. Soto (1997) en el libro El futuro en riesgo: Nuestros textos escolares afirma que:

La exposición y la enseñanza de la matemática presentan problemas especiales debido a que esta disciplina usualmente se expone “al revés” de cómo se descubre o se practica. En efecto, la praxis matemática es fuertemente inductiva, experimental, va de lo particular a lo general, de lo concreto a lo abstracto.

1.1 Estilos de aprendizaje

1.1.1 Teoría conductista

Esta teoría proveniente de variadas corrientes que fueron desarrolladas por la psicología conductista que derivaron variadas técnicas de autores como Pavlov, Watson, Thorndike y Skinner donde adquiere mayor realce el aporte realizado por Skinner que predomina en la educación hacia fines de la década de los 60 donde el docente es la figura central del proceso de enseñanza, que centraliza su autoridad e imparte el aprendizaje de forma generalizada independiente sean las diferencias individuales; por medio de la adquisición de conocimiento memorísticos de manera que el estudiante se transforma en un receptor pasivo, que reproduce y recibe la información proveniente del docente.

Desde las diversas perspectivas de estos autores se desprenden diversas percepciones que enmarcan el conductismo de acuerdo a sus ideas y visiones:

Pavlov sugirió que un estímulo que había precedido la comida, había adquirido la capacidad de producir la respuesta de salivación. Además de ello, tuvo la capacidad de reconocer la importancia de este hallazgo y abandonó su trabajo en la fisiología de la digestión para dedicarse a la investigación de los reflejos condicionados y en general del condicionamiento clásico (Gutiérrez. 1999. p. 559).

Aunque Watson se refirió en muchas ocasiones a factores biológicos, ante todo neurofisiológicos en sus trabajos con animales, con niños, y con adultos, su énfasis se centró en el papel del ambiente. (Ardila. 2013. p. 316). Los seres humanos se pueden modificar – en sentido adaptativo o no adaptativo – y no están a merced de contingencias biológicas, genéticas en términos contemporáneos. (Ardila. 2013. p. 316).

Para Skinner (1953), la ciencia "es el único proceso intelectual que proporciona resultados notables". (Agudelo, Guerrero. 1973. p. 192). Las leyes generales del aprendizaje son las mismas para los organismos de todas las especies. Skínner afirma que "en condiciones de refuerzo similar, todos los organismos reaccionan de la misma manera". (Agudelo, Guerrero. 1973. p. 197).

Dentro de la teoría conductual, existen cuatro procesos que pueden explicar este aprendizaje: condicionamiento clásico, asociación por contigüidad, condicionamiento operante y observación e imitación (Arancibia V, Herrera P. y Strasser K. no aparece el año).

Es en este punto donde se evidencia la carencia de un aprendizaje que sea de carácter significativo para el alumno, claro está que esta teoría presenta un cambio en educación, pero que hoy en día carece de una metodología más didáctica para el aprendizaje del estudiante. La psicología actual enfrenta los retos de hacer aportes a una educación más integrada y personalizada. (González. 2005. p. 20)

1.1.2 Teoría Cognitiva

Desde la década de los 70's, el punto de vista de la psicología comenzó a generar un cambio desde el enfoque conductista a una orientación más bien cognitiva. Según la Real Academia de la Lengua Española define cognitivo como: Perteneciente o relativo al conocimiento.

La teoría piagetiana postula y describe un proceso de desarrollo intelectual fundamentalmente "endógeno" que supone la "construcción individual" de ciertas estructuras psicológicas —un modelo interno del medio externo— que permiten enfrentar de manera progresivamente más adaptativa la realidad. (Gutiérrez. 2005. p. 90).

Según Rodríguez, Revista Latinoamericana de Psicología. 1999. p. 484. Menciona lo siguiente:

> *Un postulado central en la teoría de Vygotski es que el manejo de los artefactos culturales, herramientas y símbolos, se aprende en sociedad. Este aprendizaje ocurre en el transcurso de interacciones humanas y acciones colaborativas que se sitúan en contextos particulares y se materializan en formas de comunicación. Por medio de las interacciones verbales espontáneas en la crianza nos apropiamos de los conceptos cotidianos.*

(Piaget, 1980; Vygotski, 1978) coincidieron en la idea de que el desarrollo cognoscitivo no es el resultado de la adquisición de respuestas sino de un proceso de construcción activa por parte del sujeto. (Citado en Rodríguez. 1999. p. 481)

Se necesita de un proceso de construcción para poder genera un aprendizaje significativo, lo que si se plantea es que se necesita una cierta edad para poder ir aprendiendo diferentes conocimientos más en el área de las matemáticas como lo menciona Gutiérrez. Teorías del Desarrollo Cognitivo. 2005. p. presenta lo siguiente:

> *Al mismo tiempo, sin embargo, no se puede negar que el aprendizaje está necesariamente condicionado por los niveles de desarrollo previos; es evidente que sólo a determinadas edades —esto es, sólo una vez alcanzados determinados niveles— se puede empezar a aprender determinadas cosas, como el álgebra, por ejemplo.*

1.1.3 Teoría Ecléctica

Dentro de las diferentes teorías de aprendizaje nos encontramos con la teoría Ecléctica, que según la Real Academia de la lengua la define como: Escuela filosófica que procura conciliar las doctrinas que parecen mejores o más verosímiles, aunque procedan de diversos sistemas. Por lo tanto dicha teoría realiza una mezcla entre diferentes teorías de aprendizaje para presentar la teoría que se está tratando.

Su principal gestor es Robert Gagné, quien formulo esta teoría en base a la Teoría Conductista y la Teoría Cognoscitivista (Gottberg, Noguera, Noguera. 2012).

Al presentar esta teoría, se observa que la fusión entrega una visión más amplia en el proceso de enseñanza aprendizaje. "Es así que con la combinación de los enfoques conductista y cognitivista en la dinámica del aprendizaje, da como resultado una visión más integradora en la que el aprendizaje es concebido como proceso de asociación y como proceso de reestructuración". (Gottberg, et al. 2012). Según Duffe (2003) menciona que Gagné presente 8 procesos o secuencias didácticas que se deben utilizar para poder estructurar un a aprendizaje significativo, y estos son: motivación, comprensión, adquisición, retención, rememoración, generalización, acción y refuerzo. Aquí observamos que existen procesos estudiados tanto en la teoría cognitiva como en la teoría conductista.

"Gagné plantea una relación entre los eventos que deben ser planeados dentro de una situación instruccional por quien enseña, y aquellos procesos que operan dentro del aprendiz para producir los resultados que son aprendidos, retenidos y transferidos". (Aguilar. 1996). Por esta razón es que, el docente mediante el trabajo en el aula podrá hacer uso de todas las etapas anteriormente mencionadas o solo de algunas, dependiendo claro esta de diferentes factores que se presenten en su realidad educativa. "Durante el trabajo en el aula, las ocho etapas pueden ser trabajadas de forma conjunta e incluso ser resumidas en tres, dos o cuatro etapas". (Duffe. 2003). "Corresponderá a cada profesor examinar si esos procesos resultan funcionales en su enseñanza". (Duffe. 2003) aquí se observa que existen diferentes entes que están enlazados para que todas estas etapas funcionan como lo son: Docente, estudiante, instrucción de quien enseña y los resultados que presenta el estudiante; de esto se desprende que para que exista el éxito aplicando esta teoría se debe observar lo que aprende el estudiante y la relación que se establece entre la enseñanza y el aprendizaje.

1.1.4 Teoría constructivista

El constructivismo ha tomado un rol importante dentro de la educación, y esto debido a lo que nos ofrece dicha teoría en orden antropológico y epistemológico. Para obtener una visión un poco más clara de lo que es constructivismo, definiremos constructivismo según la RAE como: Orientación metodológica que estudia el comportamiento en términos de estímulo y respuesta sin tener en cuenta la consciencia, que es considerada un epifenómeno. Podemos decir que es una metodología que considera la consciencia como un hecho que sucede aparte del estímulo respuesta.

Desde una visión antropológica el hombre es capaz de elaborar su realidad y auto organizarse, sin recurrir a lo intuitivo. "Podemos apuntar algunas características del hombre considerado como un ser vivo auto-organizado que, a diferencia de los animales, interacciona con el medio en una escala que va más allá de los acondicionamientos de carácter instintivo". (Araya, Alfaro y Andonegui. 2007. p. 82)

Ahora bien si nos enfocamos desde un punto de vista epistemológico. “Desde este punto de vista, el constructivismo es concebido como una propuesta sobre el análisis del conocimiento, sus alcances y limitaciones”. (Araya, et al. 2007. p. 83) Por lo que el ser humano se encuentra limitado en su aprendizaje dependiendo de sus conocimientos previos que posea.

Algunos autores se centran en el estudio del funcionamiento y el contenido de la mente de los individuos (por ejemplo, el constructivismo psicogenético de Piaget), pero para todos, el foco de interés se ubica en el desarrollo de dominios de origen social (como el constructivismo social de Vigotsky y la escuela sociocultural o socio histórico). (Barriga y Hernández. 2002)

De lo anterior se desprende que los individuos aprenden de forma individual, pero su mayor aprendizaje lo logran alcanzar mediante contextos sociales como la escuela.

Según los estudios realizados por Piaget presentado por Saldarriaga, Bravo y Loor (2016) menciona que:

Para Piaget el desarrollo intelectual, es un proceso de reestructuración del conocimiento, que inicia con un cambio externo, creando un conflicto o desequilibrio en la persona, el cual modifica la estructura que existe, elaborando nuevas ideas o esquemas, a medida que el humano se desarrolla.

Por lo que el individuo a medida que se comienza a desarrollar va elaborando un conocimiento nuevo con ayuda de lo que ya ha aprendido a través de sus años. Además Piaget menciona que no solo de forma individual se genera un aprendizaje significativo si no que en todo contexto se puede generar un aprendizaje.

En sentido general el constructivismo concibe el conocimiento como una construcción propia del sujeto que se va produciendo día con día resultado de la interacción de los factores cognitivos y sociales, este proceso se realiza de manera permanente y en cualquier entorno en los que el sujeto interactúa. (Saldarriaga, et al. 2016)

Por esta razón queda claro que el individuo genera su propio aprendizaje a través de conocimiento ya establecido y esto lo va desarrollando en cualquier parte del día ya sea que se encuentre solo o en contextos sociales.

A raíz de esta teoría surgen varias subcategorías que tratan de especificar un poco más como se puede desarrollar el constructivismo en diferentes aspectos a los cuales se enfrenta un individuo. Según Araya, et al. (2007) existen las siguientes posturas dentro del constructivismo y estas son: psicológico, material, eficiente, formal, final y educativo; siendo este último en el cual nos enfocaremos.

Cuando hablamos de aprendizaje en base a la teoría constructivista debemos hacer énfasis en una situación escolar donde el estudiante es un ser activo, que busca generar su propio aprendizaje guiado por el docente. Se concibe al sujeto como un ser motivado intrínsecamente al aprendizaje, un ser activo que interactúa con el ambiente y de esta manera desarrolla sus capacidades para comprender el mundo en que vive. (Araya, et al. 2007. p. 90)

Es evidente que en las instituciones escolares casi siempre la enseñanza en el salón de clases está organizada principalmente con base en el aprendizaje por recepción, por medio del cual se adquieren los grandes volúmenes de material de estudio que comúnmente se le presentan al alumno. (Barriga y et al. 2002)

Es en base a lo mencionado que el docente para generar una clase aplicando la teoría constructivista está llamado a estar motivado, y presentar un domino del conocimiento a impartir, para con ello generar en sus estudiantes un aprendizaje significativo.

Es imposible concebir que el alumno satisfaga tales condiciones si el docente, a su vez, no satisface condiciones similares: estar dispuesto, capacitado y motivado para enseñar significativamente, así como tener los conocimientos y experiencias previas pertinentes tanto como especialista en su materia como en su calidad de enseñante. (Barriga y et al. 2002)

Es aquí donde el docente debe estar interiorizado y saber del uso de diferentes estrategias o metodologías para que sus alumnos puedan adquirir este tipo de aprendizaje, y una de ellas es el modelamiento matemático, en este caso.

El modelamiento matemático se propone como una excelente estrategia utilizada en matemática para la enseñanza las funciones de forma constructiva, debido a la presencia de registros semióticos que permiten la construcción de diversos modelos para la adquisición del concepto.

La acción de representar el modelo mental en un modelo conceptual como expresión física de aquel, observable por otros, es un proceso que conduce convertir lo subjetivo en objeto observable y manipulable tanto por su autor como por otras personas. (Maldonado. 2013)

1.2 Tipos de pensamiento

El pensar es una cualidad netamente humana que nos permite crear diferentes modelos, estructuras, objetos, etc. y ha permitido el avance para una mejor civilización en todas las áreas de la vida en general. Según la RAE pensar es “Conjunto de ideas propias de una persona, de una colectividad o de una época”. Por lo anterior se puede determinar que pensar es generar ideas u modelos para crear un objeto o un método para desarrollar alguna actividad. “El pensamiento ha sido descrito en la psicología como la capacidad de planear y dirigir en forma oculta una conducta posterior, lo que prevenía de errores o permitía postergar las acciones para posibilitar adaptaciones mejores en duración y efectividad”. (Melgar. 2000)

En matemáticas se desarrollan diferentes tipos de pensamiento para poder lograr la comprensión de los diferentes conceptos o metodologías que facilitan el aprendizaje de esta asignatura.

A continuación se presentan algunos de los tantos pensamientos que se desarrollan al aprender matemáticas.

1.2.1 Pensamiento Reflexivo

Para generar una idea de sobre el pensamiento reflexivo, debemos aclarar hacia donde se dirige el concepto de reflexionar. La RAE (2014) lo define como pensar atenta y detenidamente sobre algo. Otro diccionario lo define como considerar detenidamente algo (Diccionario El Mundo, 2001). Por lo que se deduce en cuanto a estas definiciones que reflexionar corresponde a una capacidad o habilidad para pensar con cuidado o cautela sobre algo.

Para concebir la construcción del concepto de pensamiento reflexivo, Romero (2007) pretende acercarse a través de términos relacionados, como lo es el de práctica reflexiva. Ésta, supone actuar con un grado importante de originalidad, con cuidadosa examinación de los principios que sustentan dicha práctica. Supone también, una actitud casi permanente, estableciendo una relación analítica con la acción que realizamos (Romero 2007. p. 9)

Por lo que consigue generar como primer intento de definir pensamiento reflexivo como una consideración activa, persistente y cuidadosa de una creencia, a partir de los fundamentos que la sustentan y de las posteriores conclusiones hacia la cual tienden (Romero 2007. p. 9).

Las aportaciones a este concepto apuntan que el pensamiento reflexivo implica más de un solo pensamiento sobre algo, puesto que se produce un encadenamiento de pensamientos que se unen para darle la mejor solución a un problema o tener un panorama completo respecto de las características de algo, tomar una decisión, etc. El pensamiento reflexivo según John Dewey (1989) en su libro *Como pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento y proceso educativo* se define como el tipo de pensamiento que consiste en darle vueltas a un tema en la cabeza y tomárselo en serio con todas sus consecuencias (p. 21). El pensamiento reflexivo consiste precisamente en reconocer nuestro modo de pensar en una tarea o ante un problema, y dar pasos para crecer en nuestro modo de pensamiento. (Villa A. y Poblete M., 2007 p.91). Lo que constituye el pensamiento reflexivo es el examen activo, persistente y cuidadoso de toda creencia o supuesta forma de conocimiento a la luz de los fundamentos que la sostienen y las conclusiones a las que tiende (Dewey, 1989. p. 24)

Por el contrario, una práctica irreflexiva implica un seguimiento o réplica de prácticas y principios no examinados (Romero, 2007. p. 9). Por lo que un profesional o un estudiante que no haya desarrollado la competencia del pensamiento reflexivo tenderá a repetir siempre los mismos patrones de pensamiento, y tendrá pocas oportunidades para crecer en ellos. (Villa A. y Poblete M., 2007 p.92).

1.2.2 Pensamiento Analítico

Para construir una concepción sobre el pensamiento analítico, se acude a la RAE (2004) para obtener una definición del concepto principal en este apartado. Analizar, por lo tanto es "Someter algo a un análisis. Analizar un problema, un producto". Otra definición que nos entregan Pérez y Gardey (2008) es que, "A nivel general, puede decirse que un análisis consiste en identificar los componentes de un todo, separarlos y examinarlos para lograr acceder a sus principios más elementales.” (p. 1). Por último para complementar,

El pensamiento analítico consiste entonces en la capacidad o habilidad de descomponer algo, ya sea un problema, un objeto, etc. para estudiar sus partes de manera detenida. “Se basa en un enfoque metódico para descomponer situaciones complejas en sus partes constituyentes y valorarlas identificando los elementos significativos”. (Villa y Poblete, 2007. p. 61). Cañete (2009) “La competencia “Pensamiento Analítico” se define como el comportamiento mental que permite distinguir y separar las partes de un todo hasta llegar a conocer sus principios o elementos” (p. 327). Agrega que “el pensamiento analítico es el pensamiento del detalle, de la precisión, de la enumeración y de la diferencia” (Cañete, 2009. p. 327).

1.2.3 Pensamiento lógico

Para entender de mejor manera lo que es el pensamiento lógico, plantearemos un acercamiento al concepto de lógica. Según el Diccionario de la Lengua Española de la RAE (2017), define la palabra lógica como “modo de pensar y de actuar sensato, de sentido común”. Según López (1999) en *Gran Diccionario Enciclopédico Universal* plantea: “dícese de toda consecuencia natural y legitima; del suceso cuyos antecedentes justifican lo sucedido, etc.” (p. 3071). A la vez la define como “Ciencia que expone las leyes, modos y formas del conocimiento científico” (López, 1999. p. 3071). Por otra parte Pérez y Merino (2008) definen Lógica como:

> *La ciencia que se basa en las leyes, modalidades y formas del conocimiento científico se conoce bajo el nombre de lógica. Se trata de una ciencia de carácter formal que carece de contenido ya que hace foco en el estudio de las alternativas válidas de inferencia. Es decir, propone estudiar los métodos y los principios adecuados para identificar al razonamiento correcto frente al que no lo es (p.1).*

1.2.4 Pensamiento crítico

Uno de los pensamientos que se deben desarrollar en los estudiantes es el pensamiento crítico. Y este es definido por Paul y Elder (2005) como:

El pensamiento crítico es el proceso de analizar y evaluar el pensamiento con el propósito de mejorarlo. El pensamiento crítico presupone el conocimiento de las estructuras más básicas del pensamiento (los elementos del pensamiento) y los estándares intelectuales más básicos del pensamiento (estándares intelectuales universales). La clave para desencadenar el lado creativo del pensamiento crítico (la verdadera mejora del pensamiento) está en reestructurar el pensamiento como resultado de analizarlo y evaluarlo de manera efectiva. (p. 7)

Entonces el pensamiento crítico es pensar, analizar y evaluar la mejor respuesta que se pueda generar frente a diferentes situaciones.

La categoría pensamiento crítico ha sido investigado por autores como: Ennis (2011) y Vargas (2013), citados por Moreno-Pinado y Velasquez. (2017) quienes expresan que

El pensamiento crítico es una capacidad adquirida que permite el razonamiento reflexivo centrándose en el decidir y el qué hacer. Enfatizan en que el pensamiento crítico es propositivo, es un juicio autorregulado resultado de la interpretación, el análisis y del uso de las estrategias que faciliten la estimulación del pensar en la construcción del conocimiento. (p. 54)

Por esta razón este pensamiento analiza cada situación para poder generar así un aprendizaje significativo, pero este pensamiento requiere de ciertas habilidades para poder lograr este tipo de conocimiento.

La formación del pensamiento crítico refiere Tovar (2008), citado por Moreno et al. (2017) Precisa de las habilidades de análisis, interpretación, evaluación, inferencia y la autorregulación en el sujeto al ejecutar la actividad con una mentalidad abierta, flexible, asuma posiciones y está orientado en el qué hacer, por qué, cuándo, en qué creer o no, qué valor tiene para sí, para la sociedad y autoevalúa el proceso y los resultados de su aprendizaje, evidencia una actitud autorregulada. (p. 54)

Así observamos que pensar críticamente conlleva un proceso de alta dificultad para quien desee desarrollar este tipo de pensamiento.

Ennis (2011), citado por Moreno et al (2017) considera que el pensamiento crítico es un proceso cognitivo complejo, donde predomina la razón sobre las otras dimensiones del pensamiento, está orientado hacia la acción y hace su aparición cuando se enfrenta a la resolución de un problema.

Por lo tanto querer generar un tipo de pensamiento crítico en los estudiantes engloba la labor docente donde la planificación debe estar centrada en un estudiante activo, crítico donde lo que realice el alumno sea reforzado de forma positiva o en caso que este se equivoque sea guiado por el docente para que los resultados obtenidos sean obra de la indagación y búsqueda de su conocimiento.

1.2.5 Pensamiento Analógico

Es evidente que dentro de la enseñanza de las matemáticas existen diferentes tipos de pensamientos a los que se puede llevar a los estudiantes para poder generar una mayor comprensión de esta asignatura, y uno de los tantos que existen, de los cuales hablaremos será el pensamiento analógico. Según la RAE define analogía como; Semejanza formal entre los elementos que desempeñan igual función o tienen entre sí alguna coincidencia significativa.

Establecer analogías es captar semejanzas (Esquisabel. 2008. p. 21).Para empezar, elaborar una analogía conlleva establecer relaciones entre objetos y atributos, como bien mostraba Sternberg (1977). (Oliva. 2004. p. 367).

> *Al evocar la analogía se parte, pues, de un modelo mental previo que tendrá el alumno sobre la situación objeto, de un modelo mental actual sobre la situación análoga y un conjunto de herramientas y representaciones didácticas externas, producto de la transposición didáctica del conocimiento científico en conocimiento escolar. (Oliva, Aragón. 2007. p. 4).*
>
> *Por esta razón, la analogía no acaba con la impronta que el sujeto adquiere a partir de una primera comparación, sino que el primer modelo desarrollado se convierte en una especie de hipótesis de trabajo que puede cambiar y/o evolucionar en función de nuevos datos externos que actúen como soporte regulador. (Oliva, Aragón. 2007. p. 5).*

En efecto, la idea de que la analogía, como tal puede ayudar a comprender y desarrollar nuevas nociones abstractas o a cambiar las ideas ya existentes, aun siendo útil y sugerente para ciertos fines, se puede conllevar un riesgo importante. El peligro al que nos referimos consiste en ignorar otras facetas del aprendizaje del alumno como son las relacionadas con los procedimientos y actitudes, cuya importancia en el aprendizaje de las ciencias en general se ha sugerido y justificado repetidamente desde diferentes puntos de vista (Reid y Hodson, 1989; Gil et al., 1991; Campanario y Moya, 1999; Cudmani et al., 2000; Oliva, et al., 2001). (Oliva. 2004. p. 364)

A su vez es importante interiorizarse acerca de este tipo de pensamiento, siendo docentes, ya que existen riesgos en la forma como se ve este pensamiento y por ende la inadecuada utilidad de la analogía y sus funciones.

1.2.6 Pensamiento Creativo

Dentro de la enseñanza surgen diferentes tipos de estrategias metodológicas y a su vez se presentan diferentes tipos de pensamientos, y uno de ellos es el pensamiento creativo, del cual hablaremos a continuación, pero debemos separar dos cosas, que menciona Waisburd Crear es pensar y creatividad es pensar diferente (Waisburd. 2009. p. 3)

La preocupación por el desarrollo de la creatividad en el ámbito educativo está vinculada a los primeros niveles escolares, ya que en estos primeros años de la escuela primaria los alumnos todavía reciben algún tipo de estimulación para desarrollar su creatividad (Duarte. 2004. p. 1) La educación puede constituirse en el ámbito ideal para fomentar la creatividad, no sólo en vías a desarrollar la capacidad creadora del ser humano en relación con su formación profesional, sino trascender a su vida cotidiana y proporcionarle medios para mejorar su existencia. (Duarte. 2004. p. 2)

Ahora bien todo esto queda sin efecto, ya que desde el hogar hasta la educación escolar a los niños se les traspasa información, donde solo deben replicar lo enseñado, sin poder ellos crear o descubrir. Pero en matemática es una de las asignaturas que se encarga de hacer pensar al estudiante y que él pueda ser capaz de crear un tipo de solución para diferentes problemas. El pensamiento creativo, se pone en acción cada vez que el individuo se encuentra ante un determinado problema, que requiere de él una resolución, que emane de un conocimiento sensible y una flexibilidad mental. (Pacheco. 2003. p. 23).Por lo tanto, en la medida que una persona pueda alcanzar niveles más elevados de creatividad, tendrá también la posibilidad de solucionar situaciones problemáticas. (Duarte. 2004. p. 13)

> *El objetivo de conocer el pensamiento creativo es tener la oportunidad de que conscientemente despiertes y actives las habilidades del pensamiento creativo e innovador, aplicando la capacidad para generar e implementar nuevas ideas, métodos y soluciones, que incrementen tu calidad de vida tanto a nivel personal como social.(*Waisburd. 2004. p. 4)

Por ende lo que se espera es que tanto docentes y apoderados puedan generar en los estudiantes un pensamiento creativo con el fin de que ellos sean capaces de crear sus aprendizajes y puedan a su vez ir descubriendo sus capacidades.

1.2.7 Pensamiento variacional

Como se puede observar se han tratado en esta investigación diferentes tipos de pensamientos, quedando el Pensamiento variacional, en el cual basaremos nuestra investigación ya que se encuentra asociado al tema de funciones en matemática, que será uno de los temas principales en esta investigación.

Para poder generar una definición tenemos que introducirnos en lo que dice Vasco (2002)

> *El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionan sus variables internas, de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad.* (Vasco, 2002, p 70)

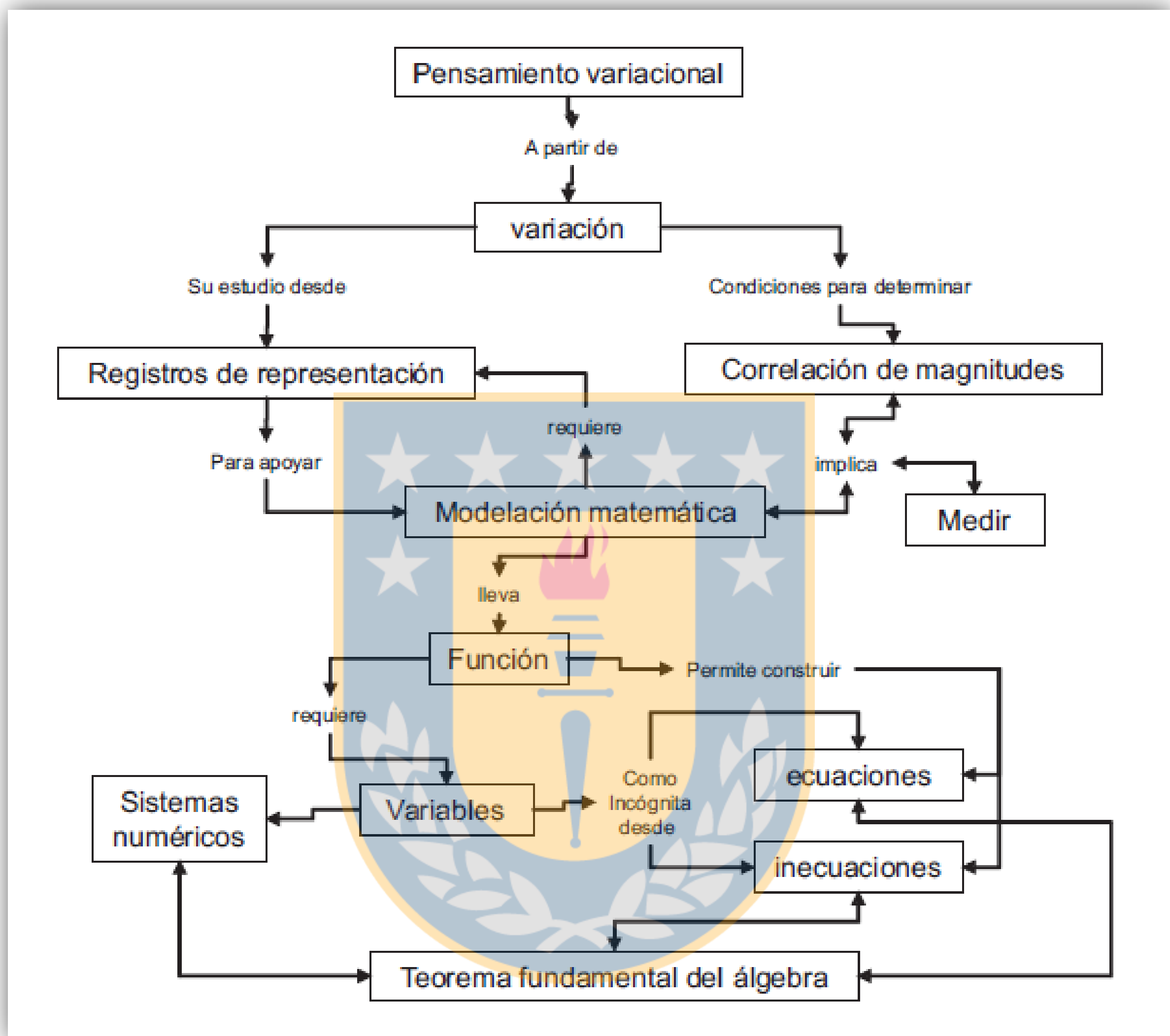
Para poder comprender con una amplitud mayor la definición de Vasco (2002), necesitamos definir qué es covariación, por lo que el *Diccionario digital Anacona* la define como: Relación existente entre dos magnitudes o series estadísticas, de manera que todo aumento o disminución de una de ellas se traduce en un aumento o disminución de la otra. Por lo que este pensamiento hace total acento, en la relación que se establece entre diferentes cantidades, siendo en el eje temático álgebra y funciones donde se debe desarrollar este pensamiento, para poder comprender los diferentes conceptos a desarrollar.

> *Uno de los propósitos del Pensamiento Variacional, en la Educación Básica Primaria, es la construcción de diversos caminos para la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos como funciones y sus sistemas analíticos para obtener un aprendizaje significativo del cálculo numérico y algebraico*. (Vasco, 2006)

Por lo anterior, pensamiento variacional no es memorizar y repetir fórmulas como en una receta, es pues un pensamiento activo que permite la comprensión de conceptos de forma lenta pero significativa de lo que cambia y lo que se mantiene constante.

Para poder lograr este tipo de pensamiento necesitamos una organización para poder alcanzar el éxito. A continuación se presenta un esquema extraído del texto Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico (Posada, 2006) que ordena los diferentes lineamientos para poder desarrollar este pensamiento.

Figura 1. Pensamiento variacional



El desarrollo de pensamiento variacional se fundamenta, o mejor se desarrolla, sobre lo que en general podemos llamar razonamiento algebraico (Posada. 2006). Observamos que donde es necesario desarrollar con mayor énfasis este pensamiento es en el álgebra. El Razonamiento Algebraico hace referencia a la actividad matemática orientada a la generalización y a la abstracción, a través del uso del lenguaje, la argumentación y la comunicación; como procesos cada vez más formales (Kaput. 1999). A su vez es necesario que el alumno pueda ser capaz de representar lo abstracto a un lenguaje común y viceversa.

Por esta razón es que la generalización se vuelve importante, ya que mediante este proceso se podrán establecer definiciones cada vez más formales, como lo expresa (Mora, 2012)

La generalización se establece expresando la conjetura y la argumentación cada vez más formales. Siendo este el mayor rango alcanzado en la modelización. La generalización se aplica a todas las situaciones que se puedan modelizar en términos matemáticos, por lo que el lenguaje algebraico está presente en mayor o menor grado, como herramienta de trabajo en todas las ramas de las matemáticas. (Godino y Font, 2003, p.777). Aquí se observa que el poder generar un modelo es sumamente necesario para cualquier situación matemática para poder dar solución en los distintos temas de las matemáticas.

Pero como podemos desarrollar este pensamiento que es tan vital en las matemáticas en las diferentes áreas. Vasco (2006) menciona diez temas con los cuales podremos desarrollar en los estudiantes el pensamiento variacional:

Pensamiento numérico, pensamiento espacial, pensamiento métrico, pensamiento proporcional, representaciones gestuales, representaciones de máquinas y circuitos, reinterpretaciones dinámicas de las representaciones gráficas y tabulares, con el papel cuadriculado, con el estudio de las esplinas cúbicas, con el estudio de funciones

Es en este último tema es donde pondremos todo el énfasis para que los estudiantes puedan desarrollar este pensamiento. Es aquí donde es necesario que el estudiante posea el conocimiento de lo que se mantiene constante y lo que varía. Entonces es relevante que un individuo reconozca en diferentes situaciones: lo que cambia, lo que permanece constante y los patrones que se presentan en esos procesos. (Gómez. 2015. p. 6)

Por lo tanto, el pensamiento variacional es un tipo de pensamiento dinámico que necesita de una organización para poder generar conjeturas a través de situaciones de la vida cotidiana donde se puede aplicar la modelización.

1.3 Habilidades

1.3.1 Resolver problemas

El Ministerio de Educación en sus Programas de Estudio, busca desarrollar habilidades matemáticas para potenciar principalmente el desarrollo del razonamiento lógico. “Al poner el énfasis en la resolución de problemas, se busca, por un lado, que los estudiantes descubran la utilidad de las matemáticas en la vida real y, por otro, abrir espacios para conectar esta disciplina con otras asignaturas” (Mineduc, 2016. p. 36). Según Mineduc (2016), lo importante no es la solución del problema en sí, si no el proceso de búsqueda de la solución de problemas que no solamente deben ser matemáticos, sino que en cualquier área del conocimiento.

Resolver problemas es una de las habilidades más fuertes e importantes propuestas en los Programas de estudio, puesto que se le considera tanto un medio, como un fin en la adquisición de una buena educación matemática (Mineduc, 2016). Esto se debe a que los alumnos al momento de resolver problemas realizan una serie de acciones y necesitan aplicar diferentes estrategias para resolverlos, de modo que se fomenta el pensamiento reflexivo, crítico y creativo (Mineduc, 2017). Sepúlveda, Vargas y Escalante (2013) confirman lo anterior planteando que “el proceso de resolver problemas implica el planteamiento de preguntas y la búsqueda de estrategias para responderlas. Plantearse y responder preguntas va apoyando el desarrollo de la comprensión tanto del problema como del contenido matemático inmerso” (p. 66). Debido a esto es que “a la resolución de problemas se reconoce como el centro de la actividad matemática” (Camacho y Santos, 2004. p. 46) o como lo plantea Godino (2004), “no es sólo uno de los fines de la enseñanza de las matemáticas, sino el medio esencial para lograr el aprendizaje” (p. 39).

Uno de los grandes teóricos de la resolución de problemas es el matemático George Polya (1887 - 1985), el cual afirma que limitar la enseñanza de la Matemática a la ejecución mecánica de operaciones rutinarias es rebajarla al nivel de una simple receta de cocina, donde el cocinero no usa su imaginación ni su juicio. (Citado en Leal y Bong, 2015. p. 76). No obstante, la práctica cotidiana del aula, en un intento por fomentar esta resolución, se ha limitado a la ejercitación repetitiva de procedimientos o a la aplicación de fórmulas al finalizar los contenidos desarrollados por el docente (Leal y Bong, 2015. p. 76). Guzmán (1993) citado en Salinas y Sgreccia, (2016) corrobora esta información reconociendo que los libros de texto suelen estar repletos de meros ejercicios y carentes de verdaderos problemas (p. 24) Pues plantea “que uno está ante la presencia de un verdadero problema cuando se encuentra en una situación desde la que quiere llegar a otra y no conoce el camino que lo puede llevar" (Salinas y Sgreccia, 2016. p.24).

En el intento de describir la manera de actuar de un resolutor ideal, Polya citado en Godino (2004), plantea una especie de guía para el accionar de éste frente a un problema, la cual "consiste, a grandes rasgos, en cuatro fases: 1) Comprender el problema, 2) Concebir un plan, 3) Ejecutar el plan y 4) Examinar la solución obtenida." (p. 38)

Por lo tanto, la resolución de problemas se convierte en un foco importante en la enseñanza y aprendizaje de la matemáticas por ser "un proceso cognitivo, retador, asociado al desarrollo del pensamiento lógico" (Leal y Bong, 2015. p. 77).

1.3.2 Representar

Para los Programas de Estudios implementados por el Ministerio de Educación en Chile, la habilidad de representar cumple una importante función en el currículum escolar puesto que posee grandes ventajas en la adquisición del aprendizaje, ya que permite una explicación formal de las situaciones sobre el conocimiento intuitivo, ligando distintos niveles de representación, ya sea concreto, pictórico y simbólico, También potencia la comprensión, memorización y explicación de las operaciones, relaciones y conceptos matemáticos y brinda un significado cercano a las expresiones matemáticas.

Oviedo y Kanashiro (2012), en su artículo *Los registros semióticos de representación en matemática* brindan un acercamiento al concepto de registro semiótico:

> *En la matemática encontramos distintos sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, escrituras algebraicas, lógicas, funcionales que se tornan en lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar relaciones y operaciones, figuras geométricas, gráficos cartesianos, redes, diagramas de barra, diagramas de torta, etc. Cada una de las actividades anteriores constituye una forma semiótica diferente, entendiéndose por tal a la actividad de formación de representaciones realizadas por medio de signos (p. 30).*

Oviedo y Kanashiro (2012) distinguen que en matemática se habla de “objetos matemáticos” y no de “conceptos” (p. 31). Por lo que el objeto matemático por conceptualizar no es un objeto real, por lo que no se puede percibir de manera objetiva, por esta razón se acude a signos concretos para representarlos.

El trabajo con distintos registros semióticos y diferentes representaciones es indispensable para el aprendizaje de la matemática pero no es una tarea natural para los alumnos. (Oviedo y Kanashiro, 2012. p. 36) Sin embargo, el trabajo de esta habilidad en los alumnos hace que estos adquieran los conocimientos por medio del “aprender haciendo”, usando situaciones concretas, traduciéndolas a un nivel gráfico y utilizando símbolos matemáticos. De esta manera los estudiantes adquieren un aprendizaje significativo y desarrolla la capacidad de pensar matemáticamente.

Esta habilidad también favorece que los alumnos recorran por los distintos registros de representación semiótica, ya sean tablas, gráficos, diagramas, etc. Otorgando la importancia que merece la matemática en distintos contextos y áreas del conocimiento.

1.3.3 Argumentar y comunicar

Según las bases curriculares (2012) menciona que la habilidad se aplica al tratar de convencer a otros de la validez de los resultados obtenidos. La argumentación y la discusión colectiva sobre la solución de problemas, escuchar y corregirse mutuamente, la estimulación a utilizar un amplio abanico de formas de comunicación de ideas, metáforas y representaciones, favorece el aprendizaje matemático. En la enseñanza básica, se apunta principalmente a que los alumnos establezcan progresivamente deducciones que les permitirán hacer predicciones eficaces en variadas situaciones concretas. Se espera, además, que desarrollen la capacidad de verbalizar sus intuiciones y concluir correctamente, y también de detectar afirmaciones erróneas.

1.3.4 Modelar

Modelar es el proceso de utilizar y aplicar modelos, seleccionarlos, modificarlos y construir modelos matemáticos, identificando patrones característicos de situaciones, objetos o fenómenos que se desea estudiar o resolver, para finalmente evaluarlos.

El objetivo de esta habilidad es lograr que el estudiante construya una versión simplificada y abstracta de un sistema, usualmente más complejo, pero que capture los patrones claves y lo exprese mediante lenguaje matemático. A partir del modelamiento matemático, los estudiantes aprenden a usar una variedad de representaciones de datos y a seleccionar y aplicar métodos matemáticos apropiados y herramientas para resolver problemas del mundo real.

1.4 Modelamiento matemático

La modelación matemática es un intento de describir alguna parte del mundo real en términos matemáticos (Brito, Alemán, Praga, Para y Arias, 2011. p. 130), constituyendo así una representación o abstracción de la realidad.

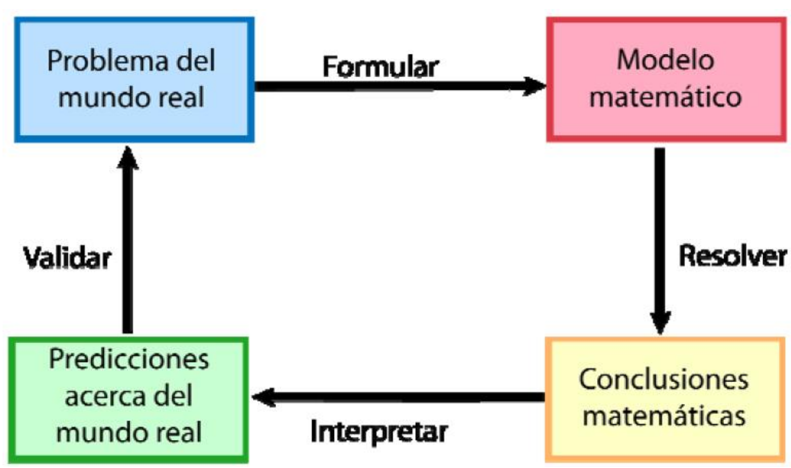
El diseño de actividades basadas en la modelización matemática ha concitado la atención en las investigaciones relacionadas con la didáctica de la matemática. En diversos países, la incorporación del modelamiento matemático al currículum escolar ha permitido el desarrollo de capacidades de tipo cognitivas, metacognitivas y de formación transversal que ayudan a comprender el rol de la matemática en una sociedad moderna ((Niss 1993; Keitel 1993; Abrantes 1994; William & Ahmed 1997; Alsina 1998; Blomhoj 2000; Aravena 2001; Gómez 2002.citado en Aravena y Caamaño, 2007. p. 8).

Brito, *et al.* (2011), Aseguran que los modelos matemáticos han sido construidos y utilizados en todas las ciencias, tanto físicas, biológicas y sociales y además, es natural que los modelos matemáticos sean de anatomía incompleta, quiere decir que reflejan solo algunas propiedades del objeto modelado y que “un modelo matemático nunca es una representación completamente exacta de una situación física; es una idealización” (Brito, *et al.*, 2011.p. 130).

Reid ***et al.*** (2012) afirman que la modelización matemática vista como un proceso, requiere de una serie de acciones, comenzando el ciclo con la determinación de un fenómeno o problema del mundo real, el cual es observado y sometido a un proceso de experimentación para profundizar en su comprensión y búsqueda de datos. Luego se realizan simplificaciones y se eliminan algunos de estos datos en vista de que no es posible considerar y/o identificar todos los factores involucrados en el fenómeno para la construcción de un modelo matemático que lo represente. Luego de construido el modelo, se generan todos los análisis y se utilizan herramientas para determinar una solución teórica que desprenderá conclusiones del modelo, para finalmente ser interpretadas a la luz del fenómeno. Debido a esto, el ciclo o proceso de modelización matemática posee un gran número de conexiones y relaciones que establecer, por lo que se considera una actividad compleja que busca que los estudiantes "estructuren y analicen la situación o problema inicial, expresen esa situación en términos matemáticos, construyan o usen herramientas matemáticas para resolver ese problema, interpreten los resultados obtenidos en términos de la situación o problema inicial, y analicen y critiquen ese modelo y sus resultados" (**Reid** ***et al.*****,** 2012. p. 92).

En el atículo *Papel de la modelación matemática en la formación de ingenieros*, Brito, *et al*. (2012), proponen una ilustración esquemática (Figura 2) donde se muestra el proceso que debiera cumplir el proceso o ciclo del modelamiento matemático y explica:

Figura 2. Proceso de modelado

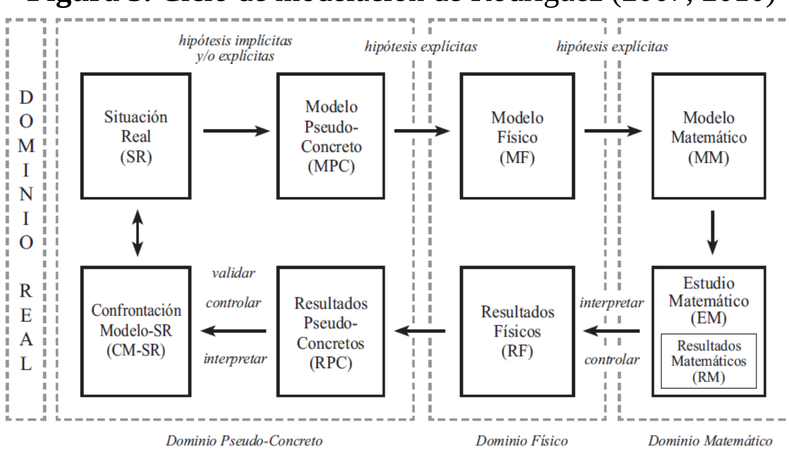


Dado un problema del mundo real, la primera tarea es formular un modelo matemático. La segunda etapa es aplicar las técnicas de las matemáticas conocidas al modelo matemático para llegar a conclusiones matemáticas. En la tercera etapa las conclusiones matemáticas se interpretan como información acerca del fenómeno original del mundo real, de manera que ofrezcan explicaciones o se hagan predicciones. El paso final es validar las predicciones al ser comparadas con nuevos datos reales. Si las predicciones no se ajustan bien con la realidad, se redefine el modelo o se formula uno nuevo y se reinicia el ciclo (p. 130).

Por otra parte Rodríguez y Quiroz (2016) en su artículo *El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales*, plantean el recorrido de un ciclo de modelamiento matemático **(**Figura 3**)** más amplio que el anterior donde se incorporan dos dominios reconocidos por Rodríguez (2007): El físico y el pseudo-concreto:

Las situaciones propuestas en modelación matemática parten del establecimiento de actividades que planteen un problema en el contexto real, para el posterior armado de un modelo pseudo concreto, que se traduce en uno físico y, posteriormente, en un modelo matemático. A dichas actividades les continúan la resolución del modelo matemático, tanto en términos matemáticos como en físicos y pseudo concretos, donde se promueve la crítica del modelo y, si es necesaria, su modificación (Rodríguez y Quiroz, 2016. p. 104).

Figura 3. Ciclo de modelación de Rodríguez (2007, 2010)



Por lo tanto, se infiere finalmente que, según Deiros (citado en Brito et al., 2012. p. 130-131) “es necesario seguir una trayectoria bien definida y desglosada en diferentes pasos adecuadamente ordenados, los cuales constituyen un enfoque lógico y consistente que se denominará estrategia general de la modelación matemática, la cual se basa en el proceso de modelado presentado”.

El cumplimiento de este proceso de modelización matemática favorece a que los alumnos comprendan los conceptos y métodos matemáticos permitiendo una visión global de la matemática (Aravena y Caamaño, 2007), a la articulación de la matemática con otras áreas del conocimiento, evitando que los estudiantes caigan en un trabajo basado en algoritmos. Por lo tanto, “es a través de la construcción de modelos cuando el alumno relaciona los conceptos matemáticos con la realidad y entiende la necesidad del estudio de la Matemática y su importancia en la aplicación a otras disciplinas” (**Reid *et al.*,** 2012. p. 93).

La enseñanza de las matemáticas bajo el proceso de modelización no es fácil y con mayor razón cuando no se es profesor de la misma, ya que según Cordero, Suarez, Mena, Arrieta, Rodríguez, Romo, Cârsteano y Solís (2009) en su artículo *La modelación y la tecnología en las prácticas de enseñanza de las matemáticas* plantean que:

> *El problema fundamental que conlleva la enseñanza de la modelación matemática es el hecho de que ésta se traslapa en gran medida con todo el contenido de las matemáticas, en particular, y de las demás ciencias exactas, en general, ya que todas las leyes de la naturaleza que conocemos se expresan por medio de modelos matemáticos (p.1718)*

Por otra parte, Rey, Boubée, Sastre, Vazquez y Cañibano (2009) mencionan que “de las múltiples dificultades que presentan los alumnos ingresantes a la Universidad, dentro del área Matemática, creemos que por su generalización y por su importancia en el desarrollo de las carreras, se destaca el tema "funciones"”. (p. 153). Y precisamente, las limitaciones de los alumnos están relacionadas, muchas veces, con la ausencia del potencial modelizador de la noción de función. Esta situación lleva a los estudiantes a uso de rutinas y procedimientos algorítmicos como la construcción de tablas, cálculos de dominios, representar funciones, entre otros. Usando fórmulas como “recetas” sin usar su poder modelizador (Rey *et al.*,2009)

No obstante, “el concepto de función permite modelizar múltiples situaciones del mundo real, relacionando variables diversas. De esta manera, se posibilita el análisis de las situaciones desde un punto de vista dinámico, lo que permite sacar conclusiones y formular generalizaciones” (Rey, *et al*, 2009. p. 157) “Para que las funciones puedan ser una verdadera herramienta de modelización, es necesario que no se oscurezca su esencial significado de dependencia entre variables, perdiendo su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático”. (Rey, *et al*, 2009. p. 156 - 157). Por lo que en este camino hacia el modelamiento de una función tenemos en cuenta que podemos tomar algún ejemplo de función escrito de manera tabular por ejemplo, lo que resalta las variables tanto dependientes como independiente, recorriendo un camino posterior por gráficos o diagramas sagitales y generalizando finalmente la función $f(x)$ que será el modelo matemático definitivo.

1.5 Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval

Otro de los fundamentos principales de esta investigación se basa en los registros de representación semiótica desarrollada por Raymond Duval, los cuales tienen gran incidencia en el desarrollo de los conceptos matemáticos en los estudiantes, favoreciendo el aprendizaje de éstos, especialmente en el área de funciones.

Dada la importancia de los registros semióticos o de representación en la creación de modelos matemáticos, Oviedo y Kanashiro (2012), señalan que “enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión (p. 30).

Es aquí donde comienzan a darse los fundamentos claves y el mayor interés de nuestra investigación.

La matemática es un campo de estudio que da cabida a diversos tipos de actividades cognitivas, las cuales requieren además de la utilización del lenguaje natural, otro tipo de registros de representación para la adquisición de un concepto. Shlomo Vinner (1983), (citado por Rey *et. al., 2009*), presenta un modelo donde se establece la construcción de un concepto y donde se involucran las representaciones. Expone:

“Sea C un concepto y P una persona. La representación mental que P hace de C es el conjunto de todas las representaciones que se han asociado con C en la mente de P. La palabra representación está usada en sentido amplio e incluye cualquier representación visual del concepto, incluyendo símbolos. El gráfico de una función específica, algún diagrama, fórmula y/o tabla, la expresión simbólica y = f (x), etc. pueden estar incluidas en la representación mental del concepto de función de alguna persona”(p. 155).

Raymond Duval, en 1995 incorpora el concepto de Representaciones semióticas y le otorga importancia a estos para el aprendizaje significativo de la matemática. En lo que concierte el interés para los investigadores en didáctica de las matemáticas es lo que se denomina noética a la adquisición, por parte del alumno, del concepto matemático. Por lo que según Oviedo y Kanashiro (2012)

Es la semiótica la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noética. Es decir no habrá aprendizaje sin el recurso de varios sistemas semióticos de representación lo que implica la coordinación entre los mismos por parte de los alumnos (p. 31).

Duval (2004) afirma que para lograr la conceptualización, o lo que podríamos considerar “aprendizaje” el estudiante debe recurrir a varios registros de representación semiótica, sean gráficos, símbolos, íconos, tablas, expresiones en lenguaje natural, etc. (Citado en Camargo, 2013. p. 1841)

En matemática no se usa el término de “concepto matemático” sino que de “objeto matemático”, por lo que el objeto matemático por contextualizar no es un objeto real, sino más bien es abstracto, por eso existe la necesidad de que sea representado recurriendo a algunos signos.

Según Duval (1998), (citado en Oviedo y Kanashiro, 2012) un sistema semiótico puede ser registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis: la de *formación,* donde debe existir la presencia de una representación identificable; el *Tratamiento,* que es la transformación de la representación dentro del mismo registro semiótico;

y la *conversión*, que es la transformación de una representación desde un registro semiótico a otro, en donde se conserva la totalidad o arte del significado de la representación inicial.

Diversos son los registros semióticos que se pueden establecer propuestos por Duval (1995). Para éstos, llevados al plano de funciones, Rey *et al.* (2009) plantean que la noción de función puede representarse en diferentes registros: registro verbal, registro tabla, registro gráfico, registro algebraico y registro algorítmico. Es necesario señalar un registro muy utilizado en funciones que no se encuentra mencionado por Rey *et. al.*, el Registro Figural-Icónico.

A continuación se presentan con mayor detalle los registros semióticos utilizados para la representación de funciones abarcados por Rey *et. al.*(2009):

Registro verbal: también llamado Registro de la Lengua natural. En este regitro, la función se representa por medio de una descripción en lenguaje natural o coloquial. Por ejemplo: *"a la variable y se le asigna el valor de la variable x multiplicada por -6 y sumado 1" o "Una recta de pendiente -6 y ordenada al origen 1".*

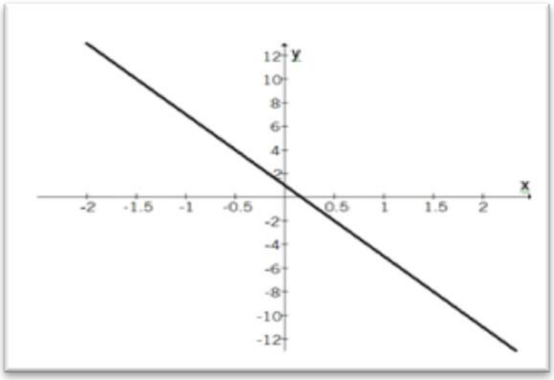
Registro tabla o registro tabular: En este registro una función se representa mediante una tabla de valores donde se muestra la relación de correspondencia de las variables. Por ejemplo:

Tabla 1. Registro tabular

x	f(x)
0	**1**
2	**-11**
4	**-23**

Registro gráfico: una función puede representarse en este registro mediante una línea o una curva (continua o no) en el plano cartesiano. Presenta limitaciones puesto que es necesario imaginar que la gráfica continua más allá de lo que es posible imaginar. Ejemplo:

Figura 4. Registro Gráfico



Registro algebraico: este registro permite realizar generalizaciones, modelizaciones y señalar características particulares del objeto que representa. En el caso de las funciones se pueden representar por medio de una expresión algebraica o fórmula, que permite calcular la imagen f(x) para toda x perteneciente al dominio de la función. Ejemplo:

Figura 5. Registro algebraico

$$f(x): x \longrightarrow -6x + 1$$

Registro algorítmico: en este caso, la representación de una función es un programa o procedimiento, como los utilizados en calculadoras o computadoras. Representa el proceso para calcular la imagen a partir de los valores del dominio.

Registro figural-icónico: engloba dibujos, esquemas, bosquejos, líneas, marcas, etc. Sin dar cuenta de la cualidad de los elementos involucrados. En el caso de las funciones, este registro se representa mediante un diagrama donde se muestran los conjuntos domino y codominio, manifestándose la relación de correspondencia de las variables mediante el uso de flechas (ejemplo A). También es posible la representación de una función mediante el uso de metáforas de máquinas (ejemplo B).

Ejemplos:

Figura 6. Ejemplo A

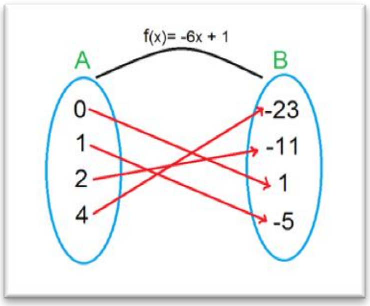
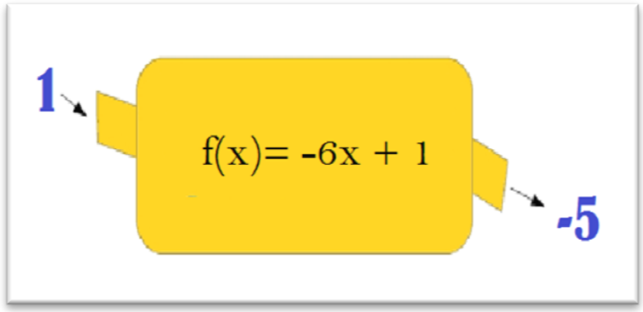


Figura 7. Ejemplo B



Por lo tanto, para que el aprendizaje de las funciones sea óptimo y significativo, donde el estudiante logre articular las funciones con otras áreas del conocimiento, es necesario promover y dar un recorrido por los distintos tipos de representaciones semióticas que la noción de función ofrece.

1.6 Obstáculos en la enseñanza y aprendizaje de la matemática

Es necesario compartir en este apartado el planteamiento de Godino, *et al* (2009) en su libro *Didáctica de las matemáticas para maestros*, puesto que nos comparte una visión positivista de lo que comúnmente los profesores llaman "obstáculos" en la enseñanza y aprendizaje, tanto en la enseñanza de la matemática como en la de cualquier área del conocimiento:

> *"El aprendizaje y la enseñanza deben tener en cuenta que es natural que los alumnos tengan dificultades y cometan errores en su proceso de aprendizaje y que se puede aprender de los propios errores. Esta es la posición de las teorías psicológicas constructivistas sobre el aprendizaje de las matemáticas, las cuales se basan a su vez en la visión filosófica sobre las matemáticas conocida como constructivismo social."* (p.20).

Respecto a este tema, lo que se considera difícil es abarcar el conocimiento de otras áreas para lograr el aprendizaje significativo utilizando las aplicaciones de la matemática. Hay una abundancia de material disperso sobre aplicaciones de las matemáticas en otras áreas, pero la tarea de selección, secuenciación e integración no es sencilla. (Godino, 2004)

Desde mucho tiempo la asignatura de matemáticas ha generado un rechazo en gran parte de las personas por diferentes situaciones. Desde que nacemos los seres humanos poseemos una capacidad innata para poder procesar los números, pero ¿Por qué no se aprovecha esta situación que viene internalizada en cada una de las personas?, ya que las matemáticas ocupan un lugar muy importante en los programas de estudio de nuestro país, y no solo en Chile, si no que a nivel mundial, las matemáticas son fundamentales para el desarrollo de cada individuo y las sociedades.

Ahora bien, cada persona se relaciona de una u otra forma con las matemáticas, no existe un aspecto de nuestra vida que esté exento de ellas, pero ¿a qué se deben los resultados tan lapidarios en dicha asignatura? ¿Cuál será la causa de esta situación?

Según el informe entregado a Chile por la prueba PISA (2016) nos presenta los siguientes datos: En 2012, 52% de los estudiantes de Chile tuvo un bajo rendimiento en matemáticas (media OCDE: 23%), estamos hablando que del total de alumnos que rindieron la prueba más de la mitad obtuvieron un resultado deficiente, y esta misma prueba nos presenta lo siguiente: En Chile, la probabilidad de tener un bajo rendimiento en matemáticas es mayor para los estudiantes socio-económicamente desfavorecidos, los estudiantes que asisten a escuelas en zonas rurales, los que no han recibido educación preescolar, y los que han repetido curso. Se observa que la familia y su estrato social cumplen un rol fundamental en el desarrollo de un buen aprendizaje para el estudiante, esto se debe a que los padres ven el establecimiento educacional como una guardería y no se preocupan de lo que su hijo hace en colegio o las asignaturas que al estudiante le transmiten los docentes. “Que los padres conozcan, se interesen por lo que sus hijos viven, hacen y aprenden en el colegio es un elemento clave en su educación” (Romagnoli, Cortese. 2015. p.1-2). Y no solo eso sino que las expectativas que tengan las familias en los estudiantes marcan mucho la diferencia a la hora de querer aprender.

> *Diversos estudios muestran que uno de los mejores predictores del éxito escolar y ajuste social de los niños, son las expectativas que tienen los padres sobre los logros académicos y la satisfacción con la educación de sus hijos en la escuela* (Michigan Department of Education, 2001; Epstein, 2013. Citado por Romagnoli et al, 2015. p. 2)

Se observa que la familia juega un rol fundamental a la hora de presentar una buena disposición de querer aprender el estudiante, pero ese obstáculo no es el único ya que el ámbito escolar no puede quedar fuera de esto, pues la labor del docente es vital para la formulación de nuevos conocimientos, es por esa razón que su metodología debe ser la adecuada para poder lograr adquirir un buen conocimiento de las matemáticas.

Observamos que todo estudiante que cursa la escuela debe aprender ciertos contenidos que son imprescindibles para poder lograr pasar al siguiente nivel o curso y esto también engloba las áreas de las matemáticas. Aquí es donde se produce un obstáculo, por lo que Qualding (1982) presenta que la dificultad con la mayor parte de las matemáticas de esta categoría es que son específicas a una profesión; sólo una minoría de personas utilizará alguna vez una rama específica de las matemáticas (p.445). Por esta razón, se vuelve complejo adquirir esta asignatura, esto en base de un estudiante de educación básica que aún no tiene claro lo que desea estudiar, por lo que se le hará complejo comprender matemáticas.

1.7 Enseñanza de las funciones

1.7.1 Historia de las funciones

El concepto de función es uno de los más importantes dentro de las matemáticas. Fue muy complejo poder generar una definición clara y muchos matemáticos brillantes contribuyeron para poder establecer un enunciado claro de funciones.

Según Sastre, Rey y Boubée (2008), mencionan que las grandes civilizaciones desde Babilonia, Egipto, Mesopotamia, China, India, Grecia y Roma, todas aportaron de diferentes formas a la creación del concepto de funciones, si bien no tenían conocimiento de funciones, esto venia implícito en las operaciones básicas; siendo los Babilonios quienes desarrollaron un razonamiento algebraico bastante completo, ya que en sus tablas se encontraron desarrolladas de ecuaciones de segundo grado e incluso simplificación de fórmulas de un grado mayor.

Mediante la edad media se estudiaron diferentes variables, asociando así este término con el de funciones, siendo quien estudiara estos cambios Nicolás Oresme (1323 - 1382), quien desarrollo una teoría uniendo la geometría y los planos

Gran gestor de este concepto fue también Galileo Galilei (1564 - 1642), quien con su estudio de movimiento introdujo los números a las gráficas. Más tarde Descartes (1596 - 1650) revolucionó las matemáticas queriendo poder liberar la geometría de las figuras, dándole un sentido más algebraico, con el fin de encontrar un solución estándar para cada problema algebraico, a su vez propuso por primera vez que *x* e *y* eran valores independientes, donde el valor de una variable se podía determinar mediante la otra.

Como se pueda observar desde tiempos remotos ya existía un concepto de funciones en matemática, pero no se había utilizado con tal nombre. “La palabra función apareció publicada por vez primera en los artículos de Leibniz” (Martínez. 2008. p.74). Aquí vemos que el primero en utilizar la palabra función en sus artículos fue Leibniz, pero luego se debía nombrar las nociones que componen las funciones. “Euler (1707 - 1783) continúa el camino para precisar la noción de función comenzando a definir nociones iníciales como son: constante y cantidad variable”. (Según Sastre, Rey y Boubée. 2008. p. 147) con esto ya se comenzó a definir el concepto de función de una forma más formal.

Con esto se observamos que pasaron muchos años para poder generar una definición del concepto función concreto, que se para poder ir concretándose tuvo que ir construyéndose en base a afirmaciones que publicaban matemáticos anteriores o refutando lo que ellos decían, todo para que tengamos un concepto claro y variado ya que con el paso del tiempo se han presentado definiciones de funciones más complejos.

1.7.2 Epistemología de las funciones

En este apartado intentaremos definir el desarrollo histórico - epistemológico de función. El cual tiene sus orígenes hace aproximadamente 2000 años. Diversos autores mencionan a dos grandes culturas antiguas que sobresalen por sus saberes filosóficos y matemáticos. Estas son a cultura Griega y la Babilónica. Ambas culturas intuyen de manera primitiva el concepto de función, siendo los babilonios quienes buscan una regularidad en tabulaciones de carácter natural o de fenómenos naturales como el movimiento de los astros, para luego intentar aritmetizar y generalizar tales observaciones (Farfán y García, 2005). De este modo, el concepto de función al ser utilizado de manera implícita, se encuentra en estado protomatemático, al no ser reconocido ni como herramienta, ni como objeto de estudio (Ruiz, 1994. p. 189)

Por otra parte, los filósofos griegos consideran el cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas, lo cual lleva a hablar en términos de incógnitas e indeterminadas más que en términos de variables (Farfán y García, 2005. p. 490). En este período según Ruiz (1998), plantea que lo anterior conduce a proporciones y ecuaciones, y no a las funciones, lo cual para Cotret (1985), "esta costumbre de expresar todas las relaciones entre las cosas bajo la forma de proporciones es un obstáculo al desarrollo de la noción de función" (Citado en Ruiz, 1994. p. 152-153)

Durante la Edad Media, se realiza una búsqueda de dar explicación cuantitativa racional a los fenómenos naturales mediante procesos de abstracción, los cuales fueron negados por la disociación existente entre *número y magnitud*. Cotret, (1985) añade que aunque estos dos conceptos eran bien distintos, por un lado los números pertenecían a la aritmética y teoría de números, y por otra parte las magnitudes a la geometría, "una voluntad de unificar el número y la magnitud reinaba en la escuela pitagórica" (Citado en Ruiz, 1994. p. 152). Esta confrontación da paso poco después a la modelización matemática de estos fenómenos a partir de resultados experimentales (Farfán y García, 2005).

En este afán de explicar lo fenómenos físicos, surge la noción "paramatemática" de función, quiere decir que "se considera como un instrumento conscientemente utilizado, determinado de un modo específico como *cantidad de intensidad de una cualidad,* pero no es tratado como objeto de estudio en sí mismo" (Ruiz, 1994. p. 190).

Correspondiente a los siglos XV y XVI, surge un período interesante denominado por los historiadores como "períodos auxiliares", debido a las bajas aportaciones significativas para el desarrollo del concepto de función. Sin embargo, se comienza a marcar el sendero simbólico que llevará a la estructuración plena de la noción de función, debido a que se sientan las bases de la simbología algebraica que permite finalmente diferenciar una "variable" de una función y una "incognita" de una ecuación. (Farfán y García, 2005)

Es entonces en el siglo XVIII cuando el concepto de función comienza a ser considerado como un concepto matemático y un objeto de estudio con los matemáticos Bernoulli y Euler. Es aquí donde nacen los primeros tratados sobre funciones dando lugar a la creación de una nueva rama de la matemática denominada Teoría de Funciones (Ruiz, 1994).

1.7.3 Concepto de función

En matemática el concepto de función es muy distinto al que comúnmente es usado para indicar la "función" de algo, como por ejemplo, "la función del corazón" o "la función de un empleado en su trabajo", etc. En las matemáticas y las ciencias, la frase "es función de" se emplea para expresar la idea de que una "condición" o "estado" depende de otro (National Council of Teacher of Mathematics, 1970)

Como se menciona en los apartados anteriores, el concepto de función tiene nociones hace más de 2000 años con la cultura griega y babilónica. Pero no se define formalmente sino hasta muchos siglos después.

A través de los años fueron surgiendo algunas definiciones de función que dieron sentido a esta área de la matemática. Shílov (2003), plantea algunas definiciones que se fueron dando a lo largo de la historia:

Una función de una magnitud variable es una expresión analítica, compuesta por esta magnitud y por constantes. (J. Bernoulli, 1718)

Cuando unas cantidades dependen de otras de tal forma que al variar las últimas también varían las primeras, entonces las primeras se llaman funciones de las segundas. (L. Euler, 1755)

Cualquier cantidad, cuyo valor depende de una o de otras varias cantidades, se llama función de estas últimas, independientemente de si se conocen o no las operaciones que hay que realizar para pasar de éstas a la primera. (S. La Croix, 1797)

Una función de x es un número que se da a cada x y que varía constantemente con la x. El valor de la función puede estar dado o por una expresión analítica o por una condición que da el procedimiento para probar todos los números. La dependencia puede existir y quedarse desconocida. (L.I. Lobachevski, 1934)

y es función de x, si a cada valor de x le corresponde un valor completamente determinado de la y; además no es importante el método con el que ha sido establecida la correspondencia señalada. (P. Dirichlet, 1837)

El Ministerio de Educación de Argentina (2007) define como función a una relación o correspondencia entre dos conjuntos de elementos que varían, cambian, se modifican, en forma conjunta.

Una función de A en B es una relación que asocia a cada elemento x del conjunto A uno y sólo uno elemento y del conjunto B, llamado su imagen (Bocco, 2013, p. 21)

En símbolos: la relación $f : A \rightarrow B$ es una función si y sólo para todo $x \in A$ existe un único $y \in B$ que es su imagen, esto es $y = f(x)$.

Por lo tanto, definiremos como función a toda correspondencia o relación de dependencia que asocia a cada valor de la variable x un único valor de la variable y. Es decir, cada valor de la variable x a través de la función tiene una única imagen o valor de la variable y.

1.7.4 Proporcionalidad

Este concepto lo encontramos en muchas situaciones de la vida cotidiana, ya sea en el costo de las fotocopias y el número de fotocopias que se quiere copiar; a su vez con algo más cercano a la realidad del hogar, como lo es el valor del kilo de pan y la cantidad de kilos que se desean comprar. Con los ejemplos anteriormente mencionados se puede observar que existe una dependencia entre diferentes variables.

El Mineduc (2014) en su Texto del docente editado por SM conforme al Marco curricular vigente, menciona que:

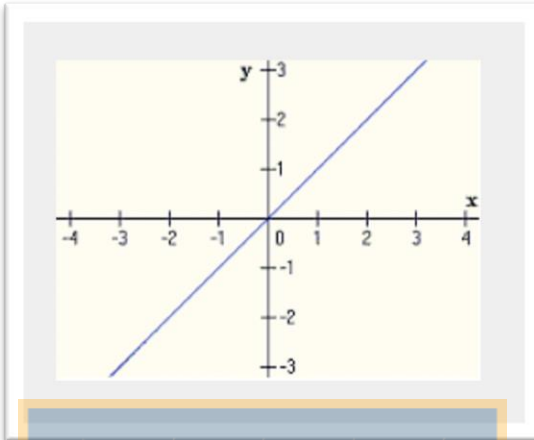
> *Dos variables (x e y) son directamente proporcionales o están en proporción directa si al aumentar (o disminuir) una en cierto factor, la otra aumenta (o disminuye) en el mismo factor. Es decir, el cociente entre sus valores relacionados es constante, y este valor es denominado constante de proporcionalidad. Lo anterior es posible representarlo por* $\frac{x}{y} = k$ *(k es constante de proporcionalidad).*

Aquí queda claro que al establecer la operación matemática división de las variables relacionadas se obtiene la constante. Ahora bien al profundizar en esta área Godino y Batanero (2002) en su texto Matemáticas y su Didáctica para Maestros, mencionan lo siguiente acerca de la relación que se establece en proporciones:

> *La relación entre ambas series de números también se puede describir diciendo que se establece una aplicación lineal de coeficiente k entre los conjuntos numéricos correspondientes:*
> $f: A \longrightarrow B$, *cumpliéndose que,* $f(a+b) = f(a) + f(b)$, *y* $f(ka) = kf(a)$.
> *En consecuencia, la gráfica cartesiana de estas funciones es una recta que pasa por el origen de coordenadas.*

Como establecen estos autores la proporcionalidad directa esta netamente ligado a lo que es el tema de funciones, mencionando a su vez que la gráfica de esta función es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas del plano cartesiano, como lo muestra la siguiente imagen.

Figura 8. Gráfica de una proporcionalidad directa.



1.7.5 Conceptos elementales

Dominio y recorrido

Bien sabemos que una función se encuentra dada por la relación de dependencia entre dos variables: la variable dependiente **x** y la variable dependiente **y**. donde a cada elemento x le corresponde una única imagen y.

Las variables se pueden organizar en un conjunto de valores, tanto para variable x y la variable y.

El conjunto de valores que puede tomar x se denomina dominio de la función y se denota Dom (*f*). Mientras que el conjunto de valores que puede tomar y se denomina recorrido de la función (también llamado conjunto imagen) y se denota como Rec (*f*).

Bocco (2013) plantea la siguiente definición para relación:

Una relación es una correspondencia que asocia elementos del conjunto A, llamado conjunto de partida de la relación, con elementos del conjunto B, llamado conjunto de llegada.

En símbolos matemáticos: $x\ R\ y \leftrightarrow x \in A, y \in B$

y x está relacionado con y según R.

Por otra parte, Carreño y Cruz (2002) antes de hacer mención de lo que es una relación, plantean que sean A y B conjuntos no vacíos. Se define la operación producto cartesiano de los conjuntos A y B que se denota A x B al conjunto de pares ordenados (p. 136). Dicho esto en lenguaje matemático:

$$A \times B = \{(a,b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

Posteriormente definen lo siguiente: una **relación R** de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto del conjunto A x B.

(R relación de A en B) $\leftrightarrow R \subseteq A \times B$ y plantea las siguientes observaciones:

Observación 1: Una relación es un conjunto de pares ordenados.

Observación 2: Una relación R de A en B se denota R: A $\rightarrow$ B.

Observación 3: $(a,b) \in R \leftrightarrow a\,R\,b$

$(a,b) \notin R \leftrightarrow a \not{R}\, b$

Luego de definido el concepto de relación, Bocco (2013) plantea una definición para el dominio *y* y el recorrido (llamado en esta ocasión imagen):

El dominio de una relación es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto de partida que están relacionados con, al menos, un elemento del conjunto de llegada.

La imagen de una relación es el conjunto formado por los elementos del conjunto de llegada que están relacionados con algún elemento del dominio de la relación.

En símbolos matemáticos:

$$Dom\ R = \{x \in A \ /\ existe\ y \in B\ con\ x\ R\ y\}$$

$$Img\ R = \{y \in B \ /\ existe\ x \in A\ con\ x\ R\ y\}$$

Gráfica

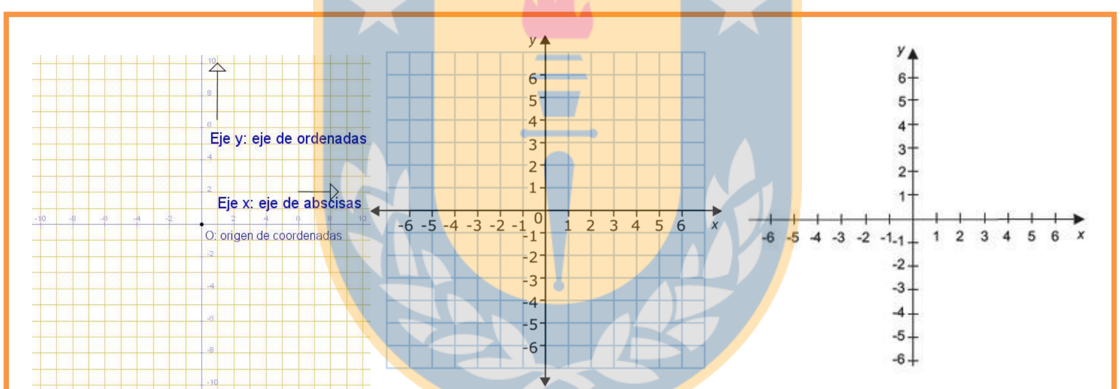
Como se menciona en un apartado anterior, existen diversas formas de representar una función debido a los registros de representación semiótica que permiten expresar un a función.

Como por ejemplo, el registro tabular, o el registro algebraico, así como también el registro figural-icónico. Pero sin duda uno de los más importantes es el registro de representación gráfica.

Un gráfico es la representación de datos numéricos mediante una o más líneas que permiten hacer visible la relación entre los datos (Pérez y Merino, 2009). Éste se da mediante un sistema de referencia denominado plano cartesiano, el cual contiene coordenadas tanto horizontales llamado eje x o eje de las abscisas, como también verticales, denominado eje y o eje de las ordenadas que se cortan de manera perpendicular.

Figura 9. Ejemplos de planos cartesianos

Ambos ejes se cortan en un punto de origen de las coordenadas (O).



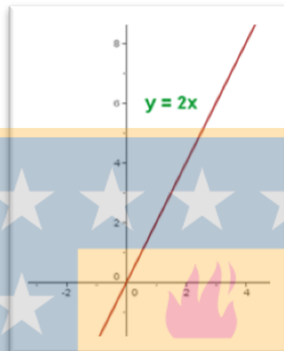
De esta manera se ubican los pares ordenados (x,y), ubicando la variable independiente x en el eje X o eje de las abscisas y la variable y en el eje Y o eje de las ordenadas. En el punto (x, y) que se marca en el plano para obtener el gráfico de una función importa el orden, de allí el nombre de par ordenado, es decir la primer coordenada x es el valor de la variable independiente y la segunda coordenada y verifica y = f (x) (Bocco, 2013. p.26).

Una función lineal es del tipo: y = mx o f(x) = mx, la cual se proyecta en una gráfica con una línea recta que pasa por el origen como se muestra en la Figura 10 con los siguientes datos que se muestran en la Tabla 2:

Tabla 2. Datos de variables en una función lineal

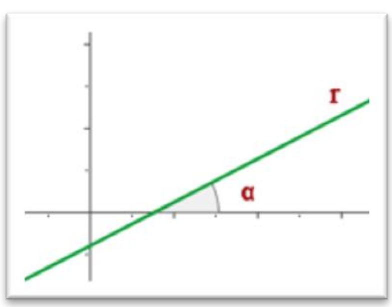
X	0	1	2	3	4
Y	0	2	4	6	8

Figura 10. Gráfica de una función lineal



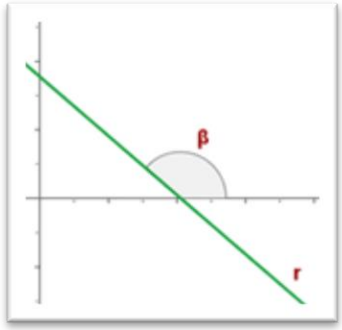
En este ejemplo se muestra que para cada valor de x, se obtiene un único valor de y, produciéndose de esta manera la línea recta (en rojo), determinada por la ecuación y = mx, siendo m la pendiente de la recta trazada. Ésta pendiente es la inclinación de la recta respecto al eje de las abscisas o eje x (eje horizontal). Si m > 0, la función es creciente y el ángulo que formará la recta respecto al eje de las abscisas será agudo (ver Figura 9).

Figura 11. Pendiente de una función creciente.



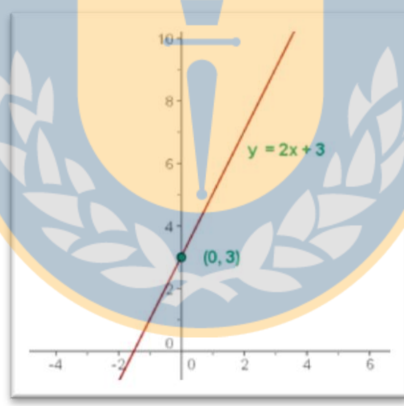
En cambio, si m < 0 la función será decreciente y el ángulo que formará respecto al eje x será obtuso (mayor a 90°), como se muestra en la Figura 10.

Figura 12. Pendiente de una función decreciente.



Por otra parte la función afín se presenta como una función de tipo **y = mx + n**, donde **n** es la ordenada en el origen y nos indica el punto de corte de la recta con el eje de ordenadas. Como se muestra en la Figura 11. Quiere decir que cuando el valor de x = 0, la pendiente cortará al eje delas ordenadas en el valor que tenga **n**

Figura 13. Corte de una pendiente en el eje de las ordenadas.



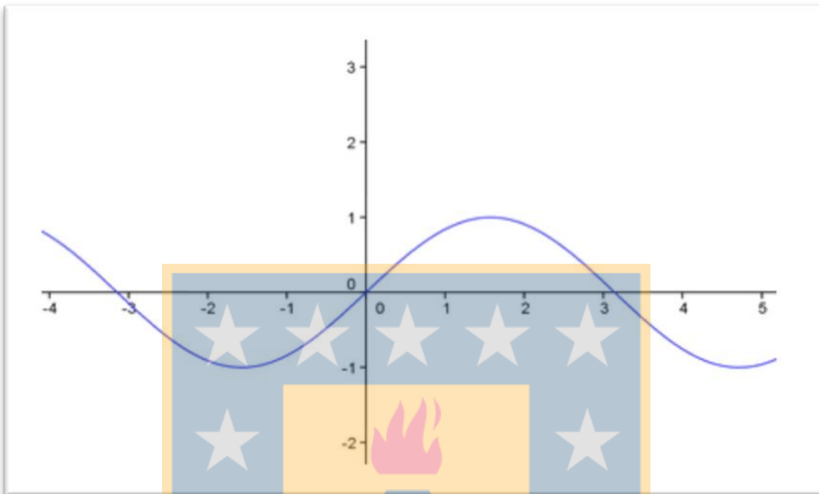
1.7.6 Propiedades de las funciones

Continuidad

Según Martínez y Alcalde (2007) una función es continua si a pequeñas variaciones de x les corresponden pequeñas variaciones de f(x). Para saber si es continua o no, nos podemos preguntar si en un instante (un pequeño cambio en el eje X) los resultados en el eje Y pueden cambiar mucho.

En sencillas palabras, si se puede dibujar la grafica sin levantar el lápiz esta función es continua, como se presenta en la imagen.

Figura 14. Gráfica de una función contínua



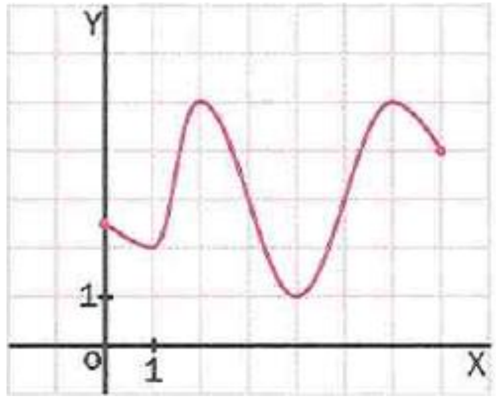
Monotonía

Esta terminología está asociada en funciones al crecimiento y decrecimiento de una función, que según Martínez y Alcalde (2007) mencionan que: Para ver si una función f(x) es creciente o decreciente en un intervalo [a,b], se calcula su variación:

- Si V[a,b]>0 será creciente
- Si V[a,b]> 0 será decreciente.

En términos simples si en un tramo de función en el que según avanzamos a lo largo del eje X la gráfica sube es un tramo donde la función es creciente y un tramo de función en el que según avanzamos a lo largo del eje X la gráfica baja es un tramo donde la función es decreciente.

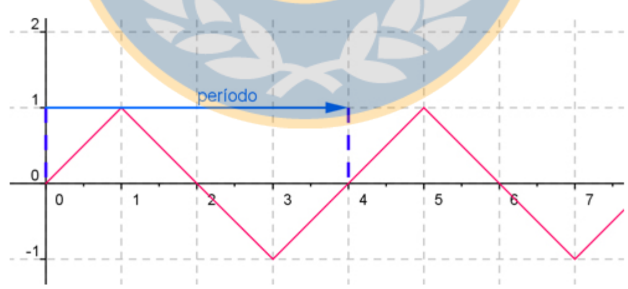
Figura 15. Figura de monotonía en funciones



Periodicidad

Según Martínez y Alcalde (2007), mencionan que una función f(x) es periódica si existe un valor T que cumpla que f(x+T) = f(x). En términos sencillos se da el caso de que las funciones periódicas, es decir, que sus valores se repiten siempre cada cierto intervalo del eje de las abscisas.

Figura 16. Gráfica de periodicidad en funciones.



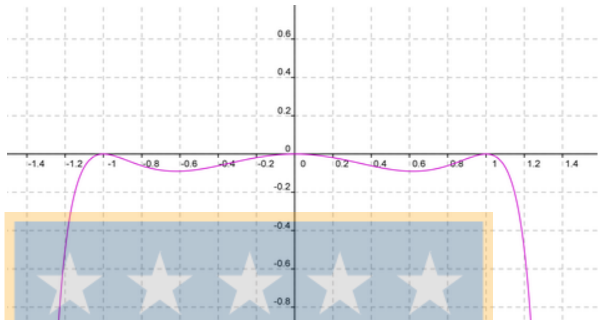
Simetría

Según Martínez y Alcalde (2007) una función presenta simetría si: Para estudiar la simetría de una función f(x) se calcula –f(x), y puede haber tres casos:

- f(-x) = f(x), la función es simétrica respecto del eje OY.
- f(-x) = f(x), la función es simétrica respecto del origen.
- f(-x) ǂ ± f(x), la función no es simétrica.

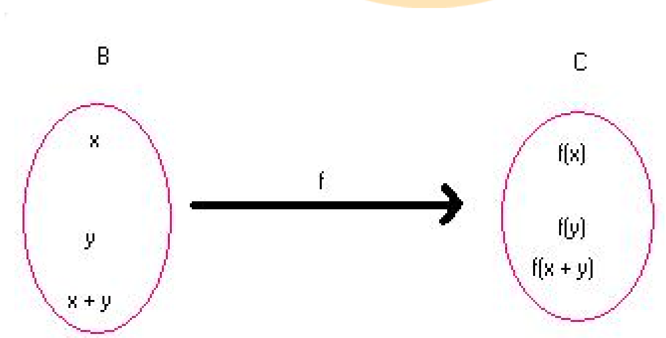
Como se observa en formulas es un poco complejo identificar cuando una función es simétrica pero en la gráfica es más fácil poder observar esta simetría.

Figura 17. Simetría en funciones



Isomorfismo

Según Pérez (2010), el término 'isomorfismo' quiere decir 'igual forma' (…) Dos estructuras matemáticas entre las que existe una relación de isomorfismo se llaman isomorfas. En álgebra abstracta, isomorfismo es una biyectiva f tal que f y su inverso (que sería f elevado a -1). A su vez presenta un isomorfismo de anillos, pero para esto se deben cumplir ciertas condiciones, ejemplo:



Sean B y C dos conjuntos con estructura de anillo y sea f una aplicación de B en C, f es un isomorfismo si cumplen lo siguiente:

1.- f es inyectiva. $\forall x,y \in \mathbf{R}$ / $f(x) = f(y) \rightarrow x = y$

2.- f es sobreyectiva. $\forall$ $\mathbf{y} \in \mathbf{C}$, $\exists$ $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$ / $f(x) = y$

3.- f es biyectiva, $f(x) = B \rightarrow C$; $f^{-1}(x) = C \rightarrow B$

1.8 Programa de Estudio y Bases Curriculares

Las Bases Curriculares para la asignatura de Matemáticas elaboradas por el MINEDUC (2013) para los cursos desde 7° Básico a 2° Medio no se alejan de lo que hemos planteado en un principio respecto de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Éstas, definen por medio de los Objetivos de Aprendizaje (en adelante, OA), los desempeños mínimos que se espera que logren en cada asignatura y nivel. Así mismo también sirven como referente para establecimientos que deseen elaborar su propios programas de estudio (MINEDUC, 2016)

Las Bases Curriculares presentan una organización curricular que comienza por mencionar las habilidades a trabajar en la asignatura, las cuales ya han sido destacadas con anterioridad. Estas son: Resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar.

Las Bases Curriculares presentan la siguiente organización curricular:

A- Habilidades: que “se interrelacionan y juegan un papel fundamental en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos y en la aplicación de conocimientos en contextos diversos” (MINEDUC, 2013. p. 107). Las habilidades son cuatro y ya han sido destacadas anteriormente. Estas son:
  - Resolver problemas
  - Representar
  - Modelar
  - Argumentar y comunicar

B- Ejes temáticos: Mineduc (2013) organiza los conocimientos en cuatro ejes temáticos:
  - Números
  - Algebra y Funciones
  - Geometría
  - Probabilidad y estadística

C- Actitudes: relacionadas con la asignatura y orientadas al desarrollo social y moral de los estudiantes, derivan de los objetivos de la Ley General de Educación y de los Objetivos de Aprendizaje Transversales (OAT). Las actitudes se deben desarrollar de forma integrada con los conocimientos y las habilidades propias de la asignatura. Estas actitudes son seis y se resumen de la siguiente manera:

- a) Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria.
- b) Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos.
- c) Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas.
- d) Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva.
- e) Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas.
- f) Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información.

Por otra parte, los Programas de Estudios son diseñados para ofrecer una propuesta pedagógica para abordar el trabajo del año escolar de manera específica para cada nivel de enseñanza. Sus principales componentes que lo conforman son:

- Objetivos de aprendizaje e indicadores de evaluación respectivos ara cada objetivo.
- Organización curricular en base a cuatro unidades.
- Propuesta de actividades y ejemplos de evaluación.
- Bibliografía de apoyo.

Los principales componentes que conforman los programas en el Marco Curricular son:

- Aprendizajes esperados.
- Organización en semestres y unidades.
- Propuesta de actividades de aprendizaje y de evaluación.

El eje que despierta el interés de estudio en esta ocasión es el eje de Algebra y Funciones, en donde se espera, según el Programa de Estudio para 8° básico propuesto por el Mineduc

(2016), que los estudiantes comprendan la importancia del lenguaje algebraico, que escriban, representen y usen expresiones de este tipo para designar números y que establezcan relaciones entre ellos mediante ecuaciones, inecuaciones y/o funciones. También, se espera que identifiquen regularidades que les permitan construir modelos y las expresen mediante el lenguaje algebraico.

Por esta razón, toma fuerza la idea de la utilización de una estrategia metodológica para la enseñanza de las funciones basada en el modelamiento matemático.

En este ámbito, se presentan a continuación los OA correspondientes al eje de Álgebra y Funciones:

OA 6: Mostrar que comprenden las operaciones de expresiones algebraicas:

- Representándolas de manera pictórica y simbólica.

- Relacionándolas con el área de cuadrados, rectángulos y volúmenes de paralelepípedos.

- Determinando formas factorizadas.

OA 7: Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal:

- Utilizando tablas.

- Usando metáforas de máquinas.

- Estableciendo reglas entre x e y.

- Representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de venn), de manera manual y/o con *software* educativo.

OA 8: Modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas, usando ecuaciones lineales de la forma: $ax = b$; $x/a = b$, $a \neq 0$; $a/x + b = c$; $x/a + b = c$; $ax = b + cx$; $a(x + b) = c$; $ax + b = cx + d$ (a, b, c, d, e Ɛ Q).

OA 9: Resolver inecuaciones lineales con coeficientes racionales en el contexto de la resolución de problemas, por medio de representaciones gráficas, simbólicas, de manera manual y/o con *software* educativo.

OA 10: Mostrar que comprenden la función afín:

- Generalizándola como la suma de una constante con una función lineal.

- Trasladando funciones lineales en el plano cartesiano.

- Determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo.

- Relacionándola con el interés simple.

- Utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

En esta ocasión, se tomarán en cuenta para realizar esta investigación el OA 7 y el OA 10 correspondientes a este eje, los cuales poseen los contenidos correspondientes e ideales que se manifiestan de manera positiva para ser utilizada bajo la estrategia de la modelización matemática en el área de las funciones.

Capítulo III

MARCO METODOLÓGICO

Enfoque de investigación

Este estudio presenta un enfoque de carácter mixto, ya que por una parte presenta un enfoque cuantitativo, debido a una primera instancia donde plantea la búsqueda de información objetiva para poder determinar y obtener principalmente datos empíricos mediante el instrumento de investigación que se aplica, el cual nos permitirá realizar la recolección de datos para generar un análisis estadístico de éstos. Donde posteriormente las funciones explicativas permiten hacer simulaciones y generar predicciones valiosas para intervenir y moldear el entorno social (Salas, 2011). Por otra parte se utilizará también el enfoque cualitativo, el cual permitirá la recopilación de datos sin medición numérica, los cuales se obtienen en gran mayoría de textos escolares que permitirán la elaboración de la propuesta didáctica para su posterior aplicación.

Diseño de Investigación

El diseño que presenta esta investigación es pre-experimental. Salas (2013, p. 137-138) dice:

> *Efectivamente, podemos sostener que una de las modalidades de la investigación pre-experimental es el estudio piloto, que constituye una valiosa herramienta en el desarrollo de investigaciones experimentales verdaderas o puras y sirven como estudio previo que se desarrolla con idea de explorar una idea nueva u original que ha de constituirse en una hipótesis posteriormente.*

Por lo que correspondiente a nuestra investigación, en primera instancia el grado de control de los participantes es mínimo en la recolección de los datos que se obtienen en el instrumento, para posteriormente presentar nuestra propuesta pedagógica para su consecutiva aplicación.

Universo

El universo está conformado por todos los estudiantes de 8° básico de la Comuna de Los Ángeles y de la comuna de Tucapel.

Población

La población se encuentra conformada por los estudiantes de 8° básico de las escuelas Luis Maximiliano Martínez González D-1228 de la comuna de Huepil, conformado por 28 alumnos y el 8° año del Colegio Woodland de la comuna de Los Ángeles, el que está conformado por 42 alumnos.

Muestra

La muestra se encuentra conformada por 5 estudiantes de 8° año se la escuela Luis Maximiliano Martínez González D- 1228 de la comuna de Huepil y 3 estudiantes de 8° año del Colegio Woodland de la comuna de Los Ángeles

Instrumentos de recolección de datos

Instrumento

Se construye un instrumento para realizar un diagnóstico respecto de los conocimientos previos que tienen los estudiantes de la muestra (Ver anexo 1).

El instrumento de recolección de datos es un pretest el cual fue validado por control de expertos. Éste instrumento consta de siete ítems, los que cuentan con preguntas de diferente tipo como resolución de problemas, completación, selección múltiple, entre otros. Cada ejercicio de los ítems del instrumento de evaluación confeccionado se encuentra bajo los estándares de los indicadores de evaluación propuestos por el MINEDUC, pero especialmente se encuentran diseñados para la fundamentación de nuestra investigación que es la búsqueda de un modelo matemático que generalice una función $f(x)$, realizando un recorrido por las diferentes representaciones semióticas y sus transformaciones.

Este instrumento de recolección de datos presenta un índice de confiabilidad de 0.56, lo que para algunos autores como por ejemplo Rosenthal (citado en Barraza, 2007) es considerada sobre la mínima (0.5) para propósitos de investigación, mientras que para otros autores como Vellis o Murphy y Davishofer (citado en Barraza, 2007) un índice por debajo de 0.6 se cataloga como inaceptable.

Pretest

Este instrumento, ha sido creado con la finalidad de recopilar información de acuerdo a los conocimientos previos que los alumnos poseen. Cada una de las preguntas se rige bajo el marco de los Objetivos de Aprendizajes y sus respectivos Indicadores de Evaluación.

Los contenidos que se incluyen en el pretest son los siguientes:

- Proporcionalidad
- Pendiente de la recta
- Concepto de función
- Concepto de Variable Dependiente y Variable Independiente
- Concepto de Función Lineal
- Gráfica de Función Lineal
- Concepto de Función Afín
- Gráfica de Función Afín.

Para los contenidos mencionados, el MINEDUC propone en los Programas de Estudio diversos indicadores de evaluación para cada objetivo de aprendizaje, para los cuales se han seleccionado los siguientes:

OA 7: Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal:

- Utilizando tablas.
- Usando metáforas de máquinas.
- Estableciendo reglas entre x e y.
- Representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn),de manera manual y/o con software educativo.

Indicadores de Evaluación:

- Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente (“constante de proporcionalidad”).
- Descubren el concepto de función mediante la relación de proporcionalidad directa.
- Descubren que la inclinación (pendiente) de la gráfica depende de la constante de la proporcionalidad.
- Representan la noción de función de manera concreta (utilizando metáforas de máquinas), pictórica o simbólica.
- Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes, basados e ecuaciones de funciones lineales $f(x) = a \cdot x$ ($y = a \cdot x$).
- Verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación $f(x) = a \cdot x$.
- Modelan situaciones de la vida cotidiana o de ciencias con funciones lineales.

OA 10: Mostrar que comprenden la función afín:

- Generalizándola como la suma de una constante con una función lineal.
- Trasladando funciones lineales en el plano cartesiano.
- Determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo.
- Relacionándola con el interés simple.
- Utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

<u>Indicadores de evaluación:</u>

- Representan, completan y corrigen tablas y gráficos pertenecientes a cambios con una base fija y tasa de cambio constante.
- Elaboran, basados en los gráficos, la ecuación de la función afín: $f(x) = a \cdot x + b$.
- Diferencian modelos afines, lineales y de proporcionalidad inversa.
- Modelan situaciones de la vida diaria o de ciencias con funciones afines.
- Elaboran gráficos de funciones afines a y b dadas o con dos puntos dados y verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación $f(x) = a \cdot x + b$

A continuación se adjunta la tabla de especificaciones en la cual se detallan los objetivos de aprendizaje y sus respectivos indicadores de evaluación tratados en el pretest, en conjunto con los Dominios Cognitivos o Niveles de desempeño Cognitivo a los cuales pertenecen. Estos Niveles de Desempeño Cognitivos se encasillan en tres bloques: Conocimiento, Aplicación y Razonamiento, los cuales se encuentran respaldados por el estudio TIMSS.

Bajo este ámbito, a continuación se mencionan las habilidades correspondientes a cada Nivel de Desempeño Cognitivo:

Nivel I – Conocimiento: Recordar, reconocer/identificar, calcular, recuperar, medir, clasificar/ordenar.

Nivel II – Aplicación: Seleccionar, representar,, modelar, poner en práctica, resolver problemas de rutina.

Nivel III – Razonamiento: Analizar, generalizar/especializar, integar/sintetizar, justificar, resolver problemas no rutinarios.

Cada ítem del instrumento elaborado, fue detenidamente elaborado y encasillado bajo estos estándares establecidos por TIMSS.

Tabla 3. Tabla de especificaciones de ítems y su ubicación en los distintos Niveles de Desempeño Cognitivo.

Nivel / Contenido	Conocimiento	Aplicación	Razonamiento
OA7: Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal.			
Reconocer funciones en diversos contextos, identificando variables dependientes e independientes.	II.a – II.b II.c – II.d		
Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente (“constante de proporcionalidad”).		V.a.1	
Descubren el concepto de función mediante la relación de proporcionalidad directa.		I.a – I.b – I.c	
Descubren que la inclinación (pendiente) de la gráfica depende de la constante de la proporcionalidad	IV.a – IV.b – V.a.3 – V.b.3 VI.a – VI.b		

Representan la noción de función de manera concreta (utilizando metáforas de máquinas), pictórica o simbólica.		III.a – III.b – III.c III.d – III.e – III.f	
Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales $f(x) = a \bullet x$ ($y = a \cdot x$).		III.a – III.c V.a.1 – V.a.2 V.c	
Identifican la pendiente del gráfico $\frac{\Delta y}{\Delta y}$ (m) de la función $f(x) = a \bullet x$ con el factor a.	IV.a – IV.b		
Verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación $f(x) = a \bullet x$.		VI.c	
Modelan situaciones de la vida cotidiana o de ciencias con funciones lineales.			I.d – III.b V.a.4 - V.c
OA10: Mostrar que comprenden la función afín.			
Representan, completan y corrigen tablas y gráficos pertenecientes a cambios con una base fija y tasa de cambio constante.		III.d – III.f V.b.1 – V.b.2 V.d.1 – V.d.3	
Elaboran, basados en los gráficos, la ecuación de la función afín: $f(x) = a \bullet x + b$.			IV.a – V.b.4
Diferencian modelos afines, lineales y de proporcionalidad inversa.		VII	
Modelan situaciones de la vida diaria o de ciencias con funciones afines.			III.e – V.b.4 V.d.2
Identifican, en la ecuación funcional, el factor a con la pendiente $\frac{\Delta y}{\Delta y}$ (m) de la recta y el sumando b con el segmento entre el punto de intersección del gráfico con el eje vertical y el origen $o(0,0)$	V.b.3 – V.d.4		
Elaboran gráficos de funciones afines a y b dadas o con dos puntos dados y verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación $f(x) = a \bullet x + b$.		III.f – V.b.3 VI.d	

Capítulo IV

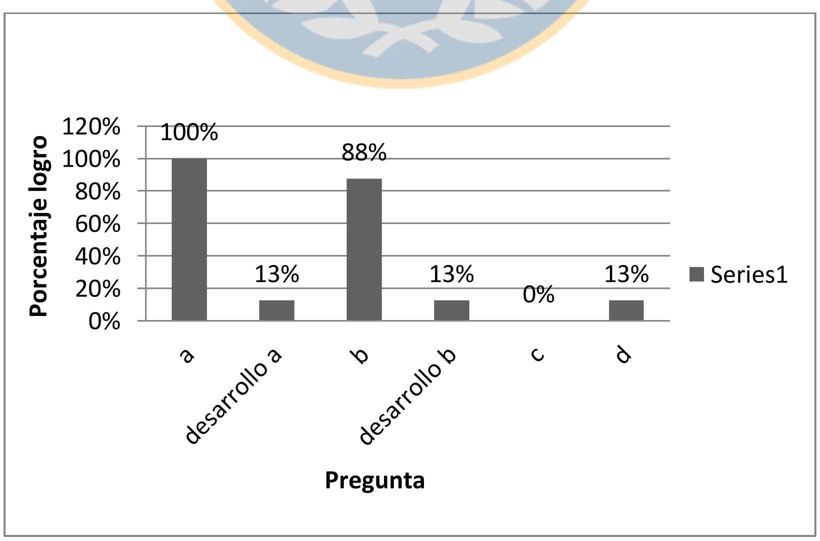
Análisis estadístico del diseño

En esta sección se analizan los ítems desarrollados en el pretest mediante dos tipos de gráficos de barra, indicando los porcentajes de logros alcanzados tanto por pregunta y por alumno de manera independiente. Los porcentajes de logros por pregunta muestran los porcentajes de alumnos los cuales responden de manera correcta a cada pregunta del ítem señalado. Por otra parte, los gráficos de porcentaje por alumno, muestran el logro que alcanza cada estudiante de la muestra para cada pregunta del ítem.

Cada gráfico se interpreta con el objetivo de esclarecer y especificar los logros alcanzados en cada tipo de gráfico y finalmente se concluye con el porcentaje general de logro que alcanza el ítem señalado, dándole la aprobación o no a cada ítem, para lo cual debe igualar o superar el 50% de logro.

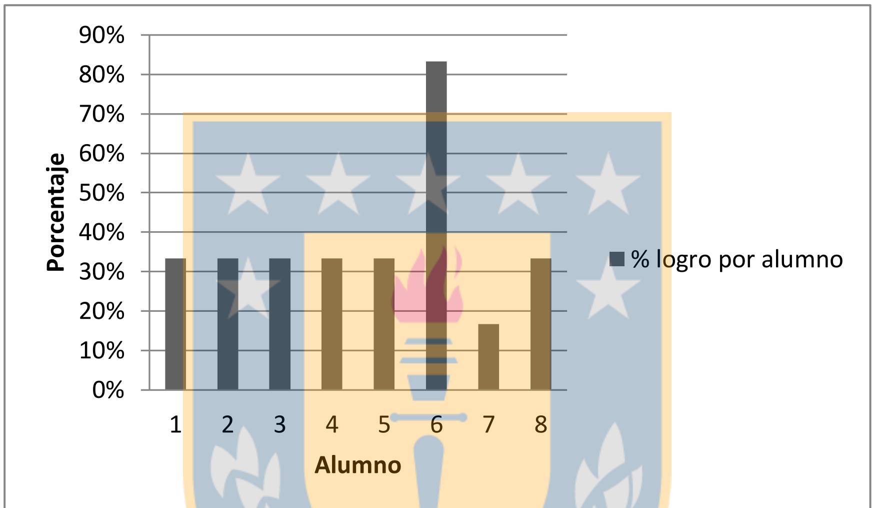
Ítem I

Gráfico 7. Porcentaje de alcance logrado por pregunta.



Como se aprecia en esta gráfica, un 100% de los alumnos respondió de forma correcta la pregunta a, sin embargo, sólo un alumno de los ocho realizó un desarrollo para obtener su resultado. Un 88%, correspondiente a siete de los ocho alumnos responde correctamente la pregunta b y sólo uno realiza el desarrollo correspondiente para llegar a su resultado. La pregunta c no tuvo resultados favorables, puesto que no re registra ninguna respuesta correcta. La pregunta d, por su parte también arroja resultados desfavorables ya que tan solo un alumno, correspondiente al 13% de la muestra responde correctamente a la pregunta.

Gráfico 8. Porcentaje de logro alcanzado por alumno.

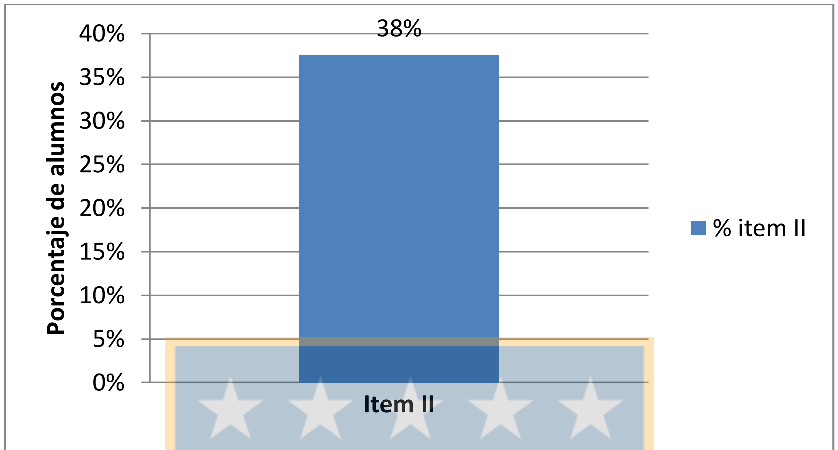


En esta gráfica, se puede observar de forma clara que tan solo un alumno alcanza un porcentaje de aprobación de 83% en este ítem, mientras que la gran mayoría de alumnos (seis alumnos de los ocho) responden correctamente un 33% del ítem. Puede observarse también que tan solo un alumno pudo responder un 17% del ítem de manera correcta. Por lo tanto, nuevamente se comprueba que este ítem no tuvo la aprobación en los porcentajes de logros alcanzados de manera individual por los alumnos.

El ítem I en general obtuvo un 38% de aprobación. Por lo que que no se logra la aprobación de éste, dado que no se alcanza el logro mínimo correspondiente a un 50% de aprobación del ítem.

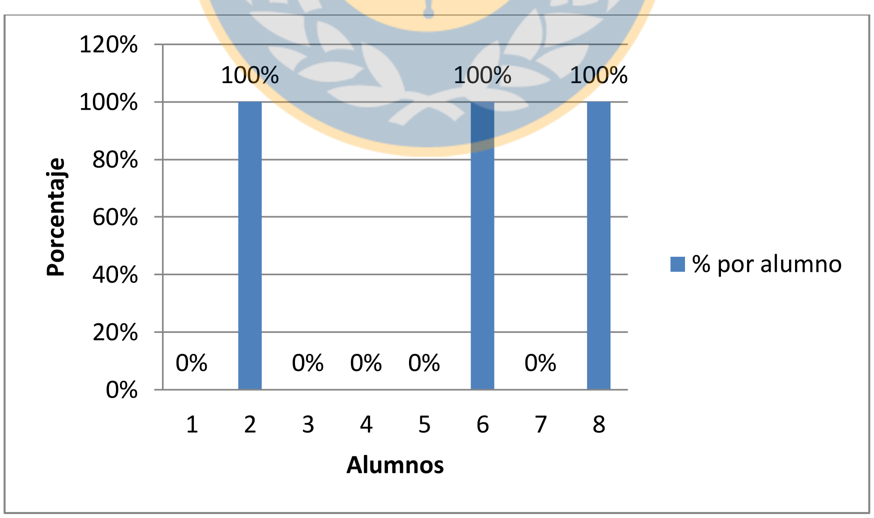
Ítem II

Gráfico 9. Porcentaje de alcance logrado por pregunta.



Se puede observar en esta gráfica que el logro de este ítem fue alcanzado por tan sólo tres alumnos, lo que representa un 38% del total de la muestra. Por lo que se concluye de manera inmediata, que el logro alcanzado en el ítem es deficiente.

Gráfico 10. Porcentaje de logro alcanzado por alumno.

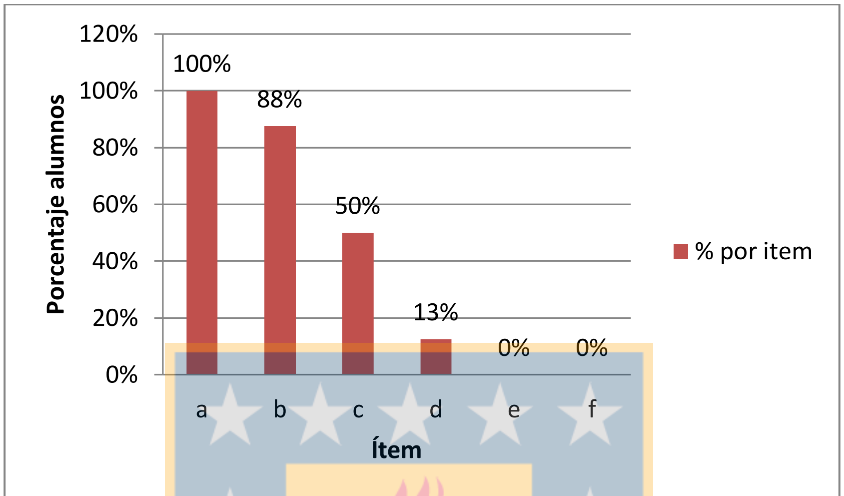


Se observa que de la muestra, los alumnos 2, 6 y 8 lograron alcanzar un porcentaje mayor al 50% de aprobación en este ítem. Por lo que reafirmamos lo dicho anteriormente, que el 38% de estudiantes logra la aprobación del ítem.

El ítem II en general también obtuvo un 38% de aprobación.

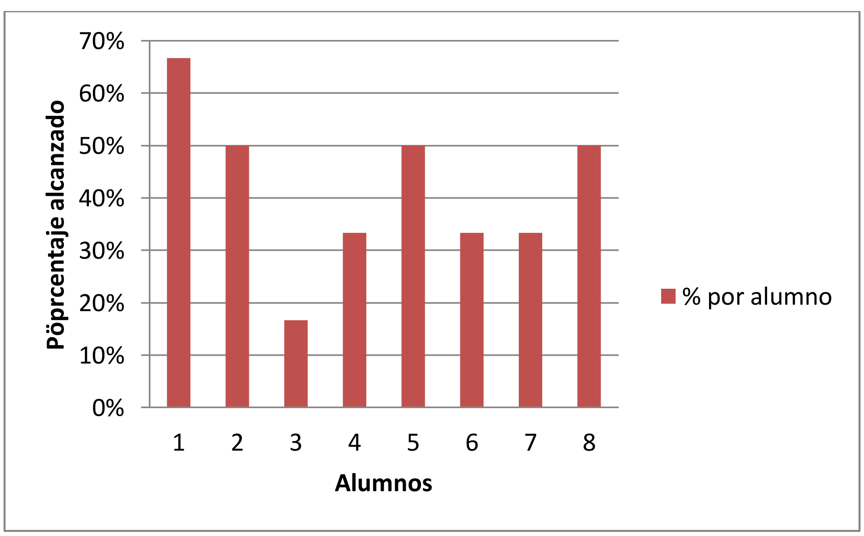
Ítem III

Gráfico11. Porcentaje de alcance logrado por pregunta.



En el gráfico se observa que las tres primeras preguntas obtienen un porcentaje de aprobación: la presunta a, un 100%; la pregunta b, un 88% y la pregunta c un 50% la cual la deja en el límite de aprobación. En lo que respecta a las tres preguntas siguientes los resultados son notoriamente deficientes, observándose de esta manera sólo un 13% de aprobación en la pregunta d y 0% de aprobación en la pregunta e y f.

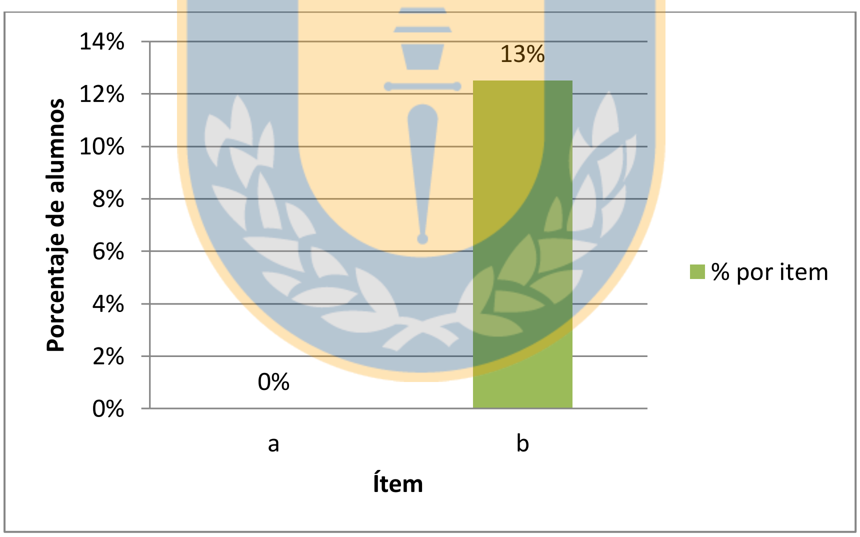
Gráfico 12. Porcentaje de logro alcanzado por alumno.



En lo que respecta a los porcentajes logrados por lo alumnos, se puede observar que cuatro de los ocho alumnos tienen un porcentaje que los sitúa en el rango de aprobación: el alumno 1, con un 67% de logro alcanzado en el ítem y los alumnos 2, 5 y 8 los cuales tienen un 50% de logro alcanzado. Por otra parte cuatro alumnos se ubican por debajo de la media de aprobación del ítem: el alumno 3, con un 17% de logro alcanzado y los alumnos 4, 6 y 7 con un 33% de logro alcanzado del ítem. Esto deja en evidencia que el ítem en general obtuvo un 42% de logros alcanzados, lo cual no permite que el Ítem se sitúe en un rango por sobre el 50% para ser aprobado.

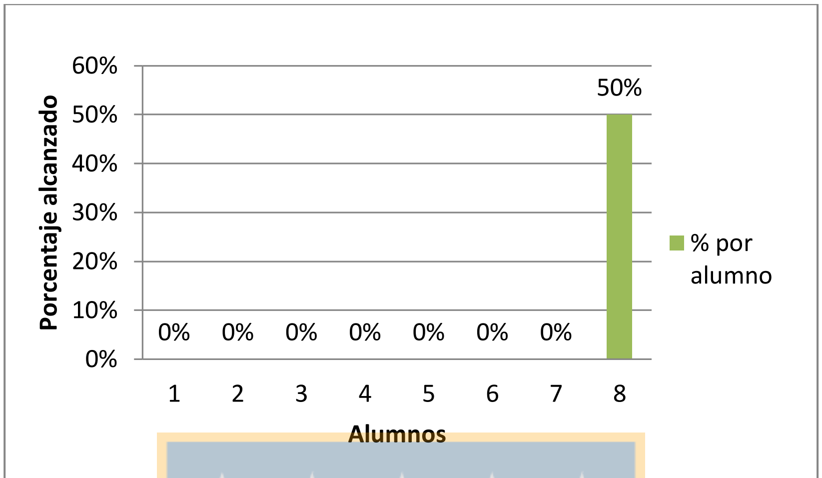
Ítem IV

Gráfico 13. Porcentaje de alcance logrado por pregunta.



En esta gráfica correspondiente al Item IV, podemos observar que en la pregunta a se tiene un 0% de alumnos que respondieron de manera correcta a ésta, y la pregunta b tiene solamente un 13% de respuesta correcta. Porcentaje que corresponde a un solo alumno.

Gráfico 14. Porcentaje de logro alcanzado por alumno.

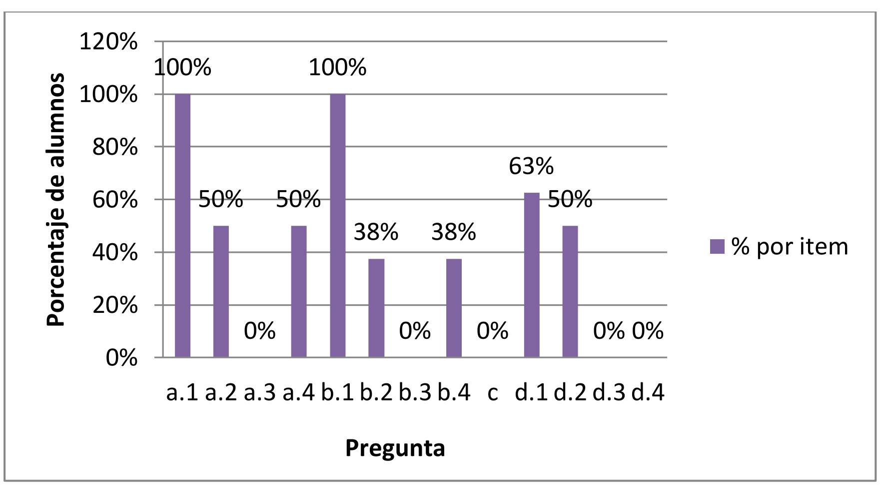


En esta gráfica podemos corroborar lo que se menciona en el párrafo anterior. Se observa que de las dos preguntas realizadas en el ítem, solo un alumno (alumno 8) responde a una de las preguntas, obteniendo un 50% de logro del ítem. El resto de los alumnos obtiene 0% de logro alcanzado.

Finalmente, podemos concluir que en este ítem el porcentaje de logro alcanzado en general es de un 6%. Lo que sitúa a este ítem con el resultado más bajo del pretest.

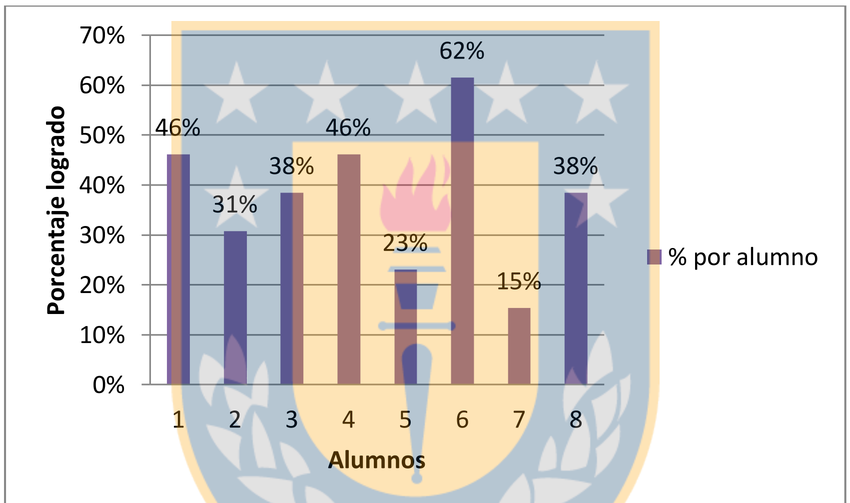
Ítem V

Gráfico 15. Porcentaje de alcance logrado por pregunta.



Se observa en esta gráfica que tanto las preguntas a.1 y b.1 fueron respondidas por la totalidad de los alumnos, alcanzando el 100% de logro. Le sigue la pregunta d.1 que tuvo un alcance de 63% de logro. En el límite de la aprobación se encuentran las preguntas a.2 a.4 y d.2 con un 50% de respuestas correctas por parte de los alumnos. En el rango de preguntas desaprobadas se encuentran con un 38% las preguntas b.2 y b.4. Finalmente, las preguntas que carecen de un resultado favorable son las preguntas a.3, b.3, c, d.3 y d.4 con un 0% de logro alcanzado.

Gráfico 16. Porcentaje de logro alcanzado por alumno.

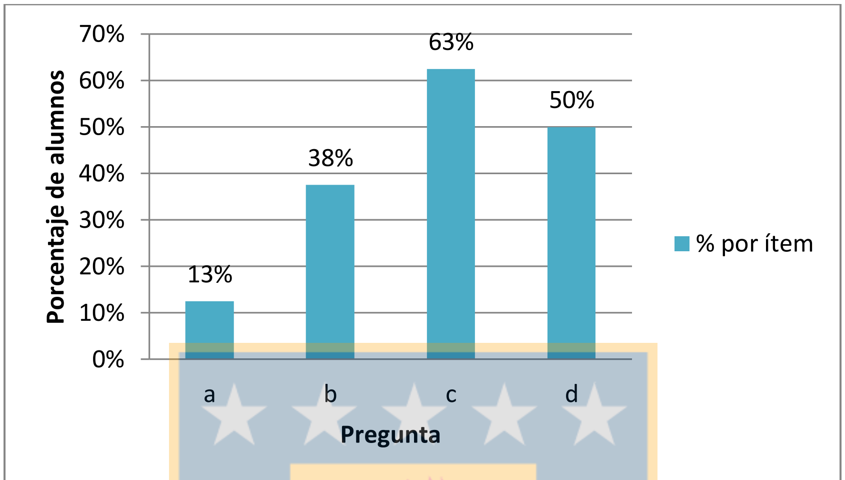


La presente gráfica nos da a conocer los resultados individuales de los alumnos, de los cuales sólo uno de los ocho estudiantes (alumno 6) puede considerarse como aprobando en este ítem, puesto que alcanza un 62% de logro alcanzado. Por otra parte, siete de los ocho alumnos no alcanza la media de porcentaje para considerarse dentro del rango de aprobación del ítem. Los alumnos 1 y 4 alcanzan un 46% de logro alcanzado, los alumnos 3 y 8 alcanzan un 38%, el alumno 2 un 31%, el alumno 5 un 23% 7 y finalmente el alumno 7 con tan solo un 15% de logro alcanzado en el ítem.

El ítem V en general tiene un promedio de porcentaje de logro de 38%.

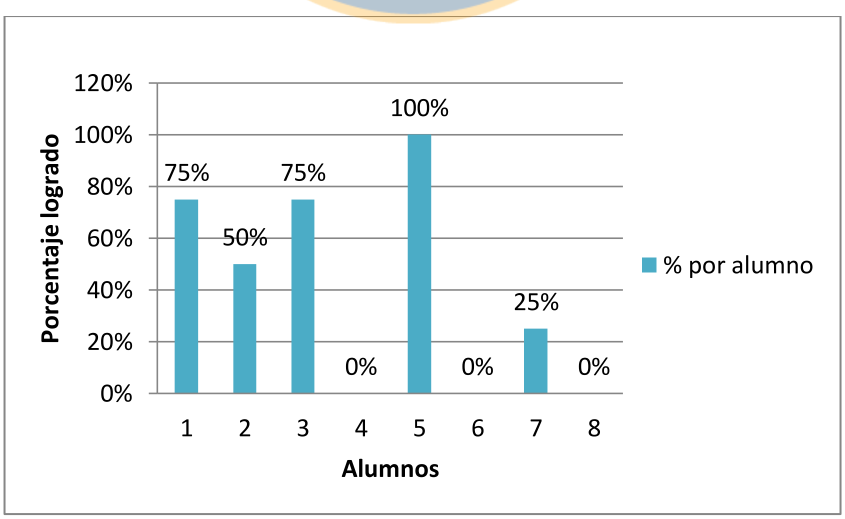
Ítem VI

Gráfico 17. Porcentaje de alcance logrado por pregunta.



En este gráfico, se puede observar que los las preguntas con mayor porcentaje de alumnos que respondieron correctamente son las preguntas c y d con un 63% y 50% respectivamente. Sin embargo las preguntas más mal evaluadas son la pregunta b con un 38% de alumnos que respondieron de forma correcta y la pregunta a con tan solo un 13% que responde correctamente a la pregunta.

Gráfico 18. Porcentaje de logro alcanzado por alumno.

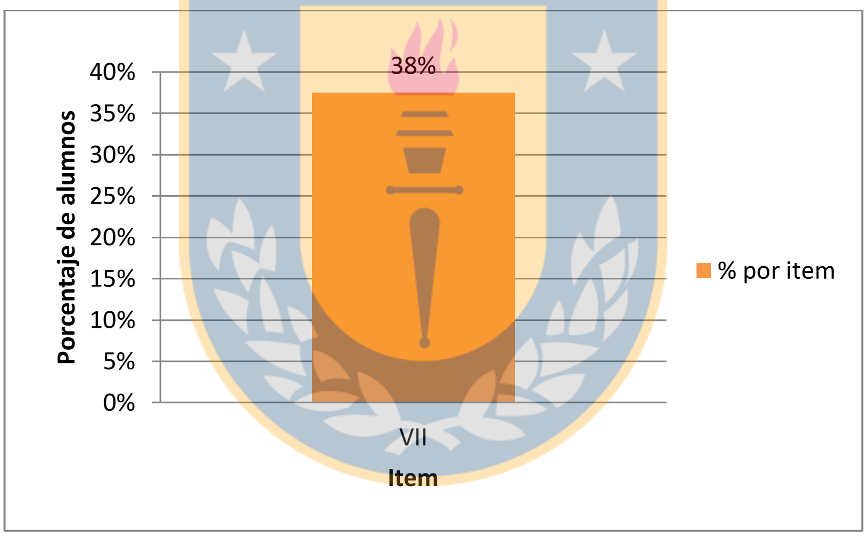


Se observa que sólo el alumno 5 responde correctamente las cuatro preguntas del ítem obteniendo un 100% de logro de éste, los alumnos 1 y 3 alcanzan un 75% de logro respondiendo tres preguntas y un alumno alcanza un 50% de logro en el ítem. De los cuatro alumnos restantes, el alumno 7 responde sólo un 25% del ítem, correspondiente a una pregunta del ítem y los alumnos 4,6 y 8 no responden ninguna pregunta, traduciéndose esto en un 0% de logro.

El ítem VI en general, obtuvo un 41% de logro alcanzado.

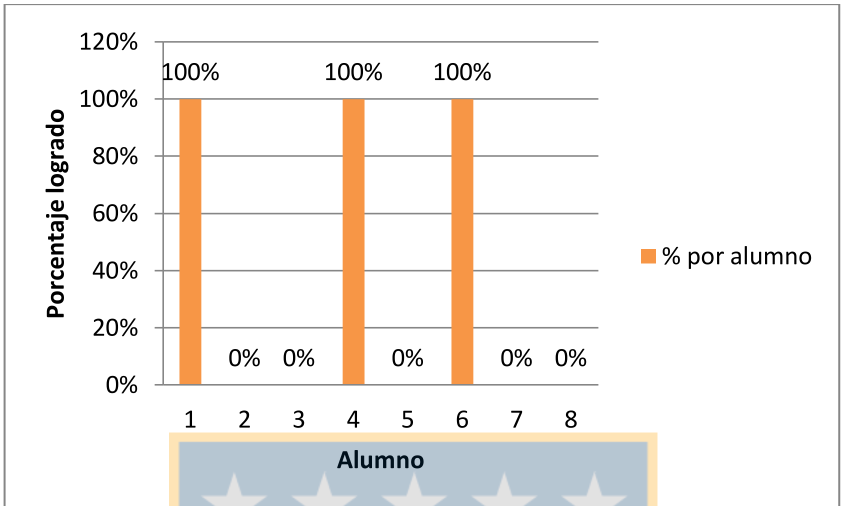
Ítem VII

Gráfico 19. Porcentaje de alcance logrado por pregunta.



El ítem VII como se puede observar consta tan sólo de una pregunta. En la gráfica se puede apreciar que la aprobación de éste está dada sólo por un 38% de los estudiantes.

Gráfico 20. Porcentaje de logro alcanzado por alumno.



Como se menciona anteriormente, este ítem consta de tan solo una pregunta, por lo que los resultados que se obtienen en esta gráfica se encuentran en los dos extremos porcentuales: 0% y 100%. La gráfica que se observa muestra que los alumnos 1, 4 y 6 respondieron correctamente el ítem, lo que corresponde a un 100% de logro. Por otra parte los alumnos 2, 3, 5, 7 y 8 no respondieron de manera correcta al ítem por lo que obtuvieron un 0% de logro.

De esta manera, analizados los ítems aplicados en el pretest, se concluye que ningún ítem alcanza un porcentaje de logro suficiente para ser categorizado como aprobado, ya que ninguno iguala o supera el 50% de logro alcanzado en los estudiantes.

Análisis de indicadores de logro establecidos en pretest

Para la realización de este análisis usaremos la misma tabla de especificaciones que se utiliza para dar a conocer los indicadores de evaluación del pretest y las preguntas de cada ítem que cumplen con la evaluación de cada indicador. Esta tabla se mostrará de la misma manera y bajo cada recuadro del indicador se especificará cada pregunta que cumple con el indicador de logro mencionado, su porcentaje de logro alcanzado en los estudiantes, y su categorización de aprobación. Es importante señalar que para que el indicador de logro cumpla con el requerimiento de aprobación, la pregunta debe tener un 50% o más de logro alcanzado.

Tabla 18. Logro alcanzado por Indicadores de evaluación.

Nivel / Indicador de logro.	Conocimiento	Aplicación	Razonamiento	Nivel de logro por indicador
OA7: Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal				
Reconocer funciones en diversos contextos, identificando variables dependientes e independientes.	II.a – II.b II.c – II.d			
II: **38% NO LOGRADO**				**38%**
Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente ("constante de proporcionalidad").		V.a.1		
V.a.1: **100% LOGRADO**				**100%**
Descubren el concepto de función mediante la relación de proporcionalidad directa.		I.a – I.b – I.c		
I.a: **100% LOGRADO** **I.b:** **88% LOGRADO** **I.c:** **0% NO LOGRADO**				**63%**
Descubren que la inclinación (pendiente) de la gráfica depende de la constante de la proporcionalidad	IV.a – IV.b – V.a.3 – V.b.3 VI.a – V.b			
IV.a: **0% NO LOGRADO** **IV.b:** **13% NO LOGRADO** **V.a.3:** **0% NO LOGRADO** **V.b.3:** **0% NO LOGRADO** **VI.a:** **13% NO LOGRADO** **VI.b:** **38% NO LOGRADO**				**11%**
Representan la noción de función de manera concreta		III.a – III.b – III.c		

(utilizando metáforas de máquinas), pictórica o simbólica.		III.d – III.e – III.f		
III.a: **100% LOGRADO** **III.b:** **88% LOGRADO** **III.c:** **50% LOGRADO** **III.d:** **13% NO LOGRADO** **III.e:** **0% NO LOGRADO** **III.f:** **0% NO LOGRADIO**				**41%**
Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales $f(x) = a \bullet x$ ($y = a \cdot x$).		III.a – III.c V.a.1 – V.a.2 V.c		
III.a: **100% LOGRADO** **III.c:** **50% LOGRADO** **V.a.1:** **100% LOGRADO** **V.a.2:** **50% LOGRADO** **V.c:** **0% NO LOGRADO**				**60%**
Identifican la pendiente del gráfico $\frac{\Delta y}{\Delta y}$ (m) de la función $f(x) = a \bullet x$ con el factor a.	IV.a – IV.b			
IV.a: **0% NO LOGRADO** **IV.b:** **13% NO LOGRADO**				**7%**
Verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación $f(x) = a \bullet x$.		VI.c		
VI.c: **63% LOGRADO**				**63%**
Modelan situaciones de la vida cotidiana o de ciencias con funciones lineales.			I.d – III.b V.a.4 – V.c	
I.d: **13% NO LOGRADO** **III.b:** **88% LOGRADO** **V.a.4:** **50% LOGRADO** **V.c:** **0% NO LOGRADO**				**38%**

OA10: Mostrar que comprenden la función afín.				
Representan, completan y corrigen tablas y gráficos pertenecientes a cambios con una base fija y tasa de cambio constante.		III.d – III.f V.b.1 – V.b.2 V.d.1 – V.d.3		
III.d: 13% NO LOGRADO **III.f: 0% NO LOGRADO** **V.b.1: 100% LOGRADO** **V.b.2: 38% NO LOGRADO** **V.d.1: 63% LOGRADO** **V.d.3: 0% NO LOGRADO**				**36%**
Elaboran, basados en los gráficos, la ecuación de la función afín: $f(x) = a \bullet x + b$.			IV.a – V.b.4	
IV.a: 0% NO LOGRADO **V.b.4: 38% NO LOGRADO**				**19%**
Diferencian modelos afines, lineales y de proporcionalidad inversa.		VII		
VII: 38% NO LOGRADO				**38%**
Modelan situaciones de la vida diaria o de ciencias con funciones afines.			III.e – V.b.4 V.d.2	
III.e: 0% NO LOGRADO **V.b.4: 38% NO LOGRADO** **V.d.2: 50% NO LOGRADO**				**29%**
Identifican, en la ecuación funcional, el factor *a* con la pendiente $\frac{\Delta y}{\Delta y}$ (*m*) de la recta y el sumando *b* con el segmento entre el punto de intersección del gráfico con el eje vertical y el origen *o*(0,0)	V.b.3 – V.d.4			
V.b.3: 0% NO LOGRADO **V.d.4: 38% NO LOGRADO**				**19%**

Elaboran gráficos de funciones afines a y b dadas o con dos puntos dados y verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación *f*(*x*) = *a* • *x* + *b*.		III.f – V.b.3 VI.d		
III.f: 0% NO LOGRADO **V.b.3: 0% NO LOGRADO** **VI.d: 50% LOGRADO**				**17%**

Obtenidos los resultados porcentuales de los indicadores de logro, podemos decir que son cuatro indicadores de evaluación los cuales fueron aprobados por la mayoría de los alumnos. Estos indicadores son:

- Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente (“constante de proporcionalidad”).
- Descubren el concepto de función mediante la relación de proporcionalidad directa.
- Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales f(x) = a • x (y = a · x).
- Verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación f(x) = a • x.

Para este caso, se debe mencionar que estos cuatro indicadores de logro pertenecen al contenido de función lineal, por lo que concluye en primera instancia que los estudiantes poseen mejor dominio en el contenido de función lineal más que en el de función afín.

Otra observación importante que se logra hacer es que todos los indicadores logrados en el instrumento aplicado, corresponden a ejercicios encasillados en el segundo nivel de desempeño cognitivo, el de aplicación. Por lo que a los alumnos les resulta más fácil en el ámbito de las funciones completar una tabla o representar valores en gráficos, etc. Esto es porque dados diferentes dígitos, los alumnos son capaces de reemplazar y realizar las operaciones correspondientes para obtener el resultado, sin embargo no son capaces de generalizar una operación matemática para obtener el modelo requerido.

Consideraciones Generales

Como bien se menciona en los análisis anteriores, los alumnos participantes en el instrumento de recolección de datos de nuestra investigación, son capaces de reconocer algunas representaciones semióticas más insignes como lo son las tablas o gráficos con ayuda de cifras entregadas, lo que facilita las respuesta y operación matemática "mecánica" o algorítmica. Sin embargo, en su mayoría, no son capaces de realizar un recorrido entre una representación semiótica y otra, por lo tanto no poseen el dominio ni conocimiento del concepto matemático ni de conversión como transformación, debido a que no reconocen la relación entre éstas.

Lo anterior expuesto se debe a que los estudiantes se encuentran encasillados en el algoritmo y la mecanización de la matemática, lo que no permite la articulación de la propia matemática con otras áreas del conocimiento, lo que implica que la mayoría de los temas estén desconectados del mundo real y las ciencias, lo que trae como consecuencia que los alumnos no conciban la utilidad que tienen las matemáticas en su formación (Aravena y Caamaño, 2007).

Replanteando entonces, nuestro tema de investigación el cual es "La elaboración de una propuesta pedagógica basada en el modelamiento de funciones a través del uso de representaciones semióticas para favorecer el desarrollo y comprensión de los conceptos de función lineal y función afín", creemos que sí es posible generar un plan de trabajo en base de intervenciones pedagógicas que generen un desarrollo, comprensión y adquisición de los conceptos matemáticos relacionados con funciones lineales y afín a través del uso de representaciones semióticas y la conceptualización de sus transformaciones, tanto de tratamiento como de conversión.

Se cree que esta investigación y la aplicación de la estrategia de modelización matemática y el uso de representaciones semióticas si tendrá una repercusión positiva en el aprendizaje de las funciones, debido a que las múltiples investigaciones apuntan al mejoramiento de la conceptualización matemática gracias a este proceso. Y que se logra la comprensión de la utilización de la matemática y las funciones en la vida cotidiana, permitiendo al alumno poder contextualizar de manera más fácil diversas situaciones.

Basados finalmente por lo que plantean Reid *et.al.* (2012) que es a través de la construcción de modelos cuando el alumno relaciona los conceptos matemáticos con la realidad y entiende la necesidad del estudio de la matemática y su importancia en la aplicación de otras disciplinas (p.93).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrate, R. S., Pochulu, M. D., Vargas, J. M. (2006). Errores y dificultades en matemática. Villa María, Argentina: Universidad Nacional de Villa María.

Aguilar, J. (1996). Del aprendizaje a la instrucción. Universidad Simón Bolívar.

Andreas Schleicher. (2016). Estudiantes de bajo rendimiento: Por qué se quedan atrás y cómo ayudarles a tener éxito. OECD Programe for International Student Assessment (PISA).

Arley F. (2006). Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico. Editorial Artes y Letras Ltda.

Bono, E. (2016). El pensamiento práctico. Barcelona: España

Collette, J. P. (1985). *Historia de las Matemáticas I*. Madrid, España: Siglo XXI Editores.

Dewey, J. (1989). Como Pensamos: Nueva exposición de la relación entre pensamiento y proceso educativo. Barcelona, España: Ediciones Paidós Ibérica S.A. y Editorial Paidós, SAICF, Buenos Aires, Argentina.

Díaz, F., Hernández G., Mc. Graw. (2002). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Segunda edición.

Duarte, E. (2004). Modelo para la estimulación del pensamiento creativo. Educación, aprendizaje y cognición. Teoría en la práctica Sandra Castañeda Figueiras (Comp.) 2004, Manual Moderno, 501-514 ISBN 970-729-088-9, México.

Epstein, J.L (2013). Programas efectivos de involucramiento familiar en las escuelas: estudios y prácticas. Fundación CAP. Editorial Hueders Ltda. Santiago, Chile.

Godino, J. D. y Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Granada, España.

Gutiérrez, M. F., (2005). Teorías del desarrollo cognitivo. Editorial McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A.U. Madrid, España.

Hojman, S. A., (1997). Reflexiones y experiencias sobre la enseñanza de las matemáticas. En Eyzaguirre, B., Fontaine, L., El futuro en riesgo: Nuestros textos escolares. (pp. 440-475). Estudios Públicos. Santiago, Chile.

Maldonado L. (2013). El modelamiento matemático en la formación del Ingeniero. Colombia

Mora, L. (2012). Álgebra en primaria. Los Manuales escolares como fuente para la Historia de la Educación en América Latina. Un análisis comparativo. Madrid, España.

Navarro, Y. & Álvarez A. (2010). Enfoques de evaluación y Enfoque Conductista. Secretaría de Educación Pública. Dirección General de Institutos Tecnológicos. Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica. Especialización en Tecnologías de la Información para la Educación. CIIDET.

Ribnikob, K., (1987). *Historia de las matemáticas.* Editorial Mir Moscú. Moscú, Rusia.

Richard, P., Elder L. (2005). Una Guía Para los Educadores en los Estándares de Competencia para el Pensamiento Crítico.

Ruiz, L., (1994). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Vasco, C. (2002). Ministerio de Educación Nacional, El Pensamiento Variacional, la Modelación y las Nuevas Tecnologías. En Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas. Bogotá, Colombia.

Villa, A., Poblete, M. (2007). Aprendizaje basado en competencias. Una propuesta para la evaluación de las competencias genéricas. Bilbao, España: Ediciones Mensajero.

Wilfredo E., Moreno P., Velázquez M. (2017). Estrategia Didáctica para desarrollar el pensamiento crítico. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación.

REVISTAS

Agudelo, R; Guerrero, J. (1973). El sistema psicológico de B. F. Skinner. Revista Latinoamericana de Psicología, vol. 5, núm. 2, pp. 191-216

Aravena, M., Caamaño, C. (2007). Modelización Matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile. Estudios Pedagógicos XXXIII, núm. 2, pp. 7-25.

Araya, V., Alfaro, M., Andonegui, M. (2007). Constructivismo: orígenes y perspectivas. Laurus, vol. 13, núm. 24, mayo-agosto, pp. 76-92.

Ardila, R. (2013). El mundo de la psicología. Revista Latinoamericana de psicología, Vol 45. (No. 2), pp. 315-319

Brito, M., Alemán, I., Fraga, e., Para, J., Arias, R. (2011). Papel de la modelación matemática en la formación de los Ingenieros. Revista Ingeniería Mecánica, vol. 14, núm. 2, pp. 129- 139.

Camacho, M., Santos, L. M., (2004). La relevancia de los problemas en el aprendizaje d las matemáticas a través de la resolución de problemas. Revista Números, Vol. 58. pp. 45-60.

Camargo, A. (2013). El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo. Actas del VII CIBEM (1841 - 1849)

Cantoral, R., Farfán, R. M., (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa Vol. 6*, (núm. 1), pp. 27-40.

Cañete, J. (2009). Desarrollo de la competencia "Pensamiento Analítico" mediante tácticas de arquitecturas software. XVI Jornadas de Enseñanza Universitaria de la Informática.

Chavarría, A. G., (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. Uniciencia. Vol. 28, 15-44

Cordero, F., Suárez, L., Mena, J.,Arrieta, J., Rodríguez, R., Romo, A., Cârsteanu, A.,Solís, M. (2009). La modelación y la tecnología en las prácticas de enseñanza de las Matemáticas. Acta Latinoamericana de Matemática educativa, núm. 22. Pp. 1717- 1726.

Douglas, A. (1982). La importancia de las matemáticas en la enseñanza. Revista trimestral de educación Unesco. Vol. 12, n°4.

Duffé A. (2003). ¿La teoría de Robert Gagné podría servirnos hoy en día para organizar y planificar nuestras acciones didácticas? Didáctica (Lengua y Literatura) vol. 15 23-35. ISSN: 1130-0531.

Esquisabel, O. (2008). Leibniz y el concepto de analogía. Revista de Filosofía y Teoría Política, no. 39, p. 11-29.

Farfán, R. M., García M. A., (2005). El Concepto de Función: Un Breve Recorrido Epistemológico. Revista Alme, Vol. 18. pp. 489-494

Gonzáles, Z. A. (2004). Aportaciones de la psicología conductual a la educación. Revista electrónica Sinéctica. (No 25), pp. 15-22

Gottberg, E., Noguera G., Noguer, M. (2012). El aprendizaje visto desde la perspectiva ecléctica de Robert Gagné y el uso de las nuevas tecnologías en educación superior. núm. 53, pp. 50-56.

Leal, S., Bong, S. (2015) La resolución de problemas matemáticos en el contexto de los proyectos de aprendizaje Revista de Investigación, Vol. 39. (Nº 84) pp. 71-93.

Martínez, F. L., Londoño J. E. (2012). El pensamiento sistémico como herramienta metodológica para la resolución de problemas. Revista Soluciones de Postgrado EIA, Número 8. p. 43-65.

Melgar, A (2000). El pensamiento: una definición interconductual. Revista de Investigación en Psicología, Vol.3 No. 1.

Méndez J. (2008).Realidad, tecnociencia y participación. Notas sobre el alcance ontológico de la participación pública en política tecnocientífica. Revista CTS, nº10, vol.4, (pág. 125-137).

Oliva J. M. (2004). El pensamiento analógico desde la investigación educativa y desde la perspectiva del profesor de ciencias. Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, Vol. 3, Nº 3, 363-384.

Oliva, J. M., Aragón, M. (2007). Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias. vol. 4, núm. 1, enero, pp. 21-41.

Otzen, T. & Manterola C. 2017. Técnicas de muestreo sobre una población a estudio. Int. J. Morphol. 35(1). pp. 227-232.

Oviedo, L., Kanashiro, A. (2012). Los registros semióticos de representación matemática. Revista Aula Universitaria, núm. 13. pp. 29- 36.

Pacheco U., Vivian M. (2003). La inteligencia y el pensamiento creativo: aportes históricos en la educación Educación, vol. 27, núm. 1, pp. 17-26.

Reid, M., Gareis, M., Hernández, A., Roldán, M. (2012). Funciones con modelización matemática. Revista Didáctica de las Matemáticas, vol. 81, pp. 91- 101.

Rey, G., Boubée, C., Sastre, P., Cañibano, A. (2009). Ideas para Enseñar. Aportes didácticos para abordar el concepto de función. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, núm. 20, pp. 153- 162.

Rodríguez W. (1999). El legado de Vygotski y de Piaget a la educación. Revista Latinoamericana de Psicología. vol. 31, núm. 3. pp. 477-489

Rodríguez, R., Quiroz, S., (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 19 (núm. 1), 99-124

Romero, L. (2007). Pensamiento Reflexivo: una aproximación inicial en el ámbito de la formación de Fonoaudiólogos. Revista Chilena de Fonoaudiología, vol. 8, núm. 1, pp 7- 14.

Salas, E. 2013. Diseños Preexperimentales en Psicología y Educación: una revisión conceptual. Instituto de Investigación de la Escuela de Psicología de la Facultad de Ciencias de la Comunicación, Turismo y Psicología. Universidad de San Martín de Porres. Perú. pp. 132-141.

Salas, H. (2011). Investigación Cuantitativa (Monismo Metodológico) y Cualitativa (Dualismo Metodológico): el status Epistémico de los resultados de la investigación en las disciplinas Sociales. Cinta moebio. Vol. 40. pp. 1-21.

Saldarriaga, P., Bravo, G., Loor, M. (2016). La teoría constructivista de Jean Piaget y su significación para la pedagogía contemporánea. Vol. 2, núm. pp. 127-137.

Salinas N., Sgreccia, N. (2016). Concepciones docentes acerca de la Resolución de Problemas en la escuela secundaria. Revista Números, vol 94. pp. 23-45.

Sánchez, M. V., García, M., Escudero, I., Gavilán, J. M. & Sánchez-Matamoros, G. (2008). Una aproximación a las matemáticas en el bachillerato. ¿Qué se pretende que aprendan los alumnos?, Enseñanza de las Ciencias, Vol.26 (2), 271-280.

Segarra, M. Bou, J. (2004). Concepto, tipos y dimensiones del conocimiento: Configuración del conocimiento estratégico. Economía y Empresa, 175-195.

Sepúlveda, A., Vargas, V., Escalante, C (2013). Problemas geométricos de variación y el uso de software dinámico. Revista Números, Vol. 82. pp. 65-87.

Soto, J. (1997). Reflexiones y experiencias sobre la enseñanza de las matemáticas. En Eyzaguirre, B., Fontaine, L., El futuro en riesgo: Nuestros textos escolares. (pp. 440-475).Santiago, Chile: Estudios Públicos.

Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. Didáctica de las matemáticas: artículos selectos, 134-148. Bogotá.

Waisburd, G. (2009). Pensamiento creativo e innovación. Revista Digital Universitaria. Volumen 10 Número 12 • ISSN: 1067-6079.

LINKOGRAFÍA

Agencia Calidad de la Educación (2017). *ICCS: Estudio Internacional de Educación Cívica y Formación Ciudadana*. Santiago. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/PRESENTACION_EDUCACION_CIVICA.pdf

Agencia Calidad de la Educación (2017). *ICILS: Estudio Internacional de Alfabetización Computacional y Manejo de Información*. Santiago de Chile. Recuperado de https://s3.amazonaws.com/archivos.agenciaeducacion.cl/Resultados_ICILS2013.pdf

Agencia Calidad de la Educación (2017). *PISA: Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes OCDE.* Santiago de Chile. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/Resultados_PISA2015.pdf

Agencia Calidad de la Educación (2017). *Resultados TIMSS Chile: Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias 2015.* Santiago de Chile. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/TIMMS_presentacion_BAJA.pdf

Agencia Calidad de la Educación (2017). *TERCE: ¿Qué explica los logros de desempeño en Chile y cónmo podemos mejorar.* Santiago de Chile. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/Presentacion_TERCE_Chile.pdf

Diccionarios El Mundo. (2001). Reflexionar. Recuperado de http://diccionarios.elmundo.es/diccionarios/cgi/diccionario/lee_diccionario.html?busca=reflexionar&diccionario=1&submit=Buscar.

Flores, P. T., (2005). Modelos pedagógicos y planificación: un poco de historia. Nombre de la revista, volumen (número), pp-pp. Recuperado de: http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?id=78295

López, A. (1999). Gran Diccionario Enciclopédico Universal. Madrid, España: Cultural. Consultado de https://definicion.de/logica/

Martínez, C. (2008). El concepto de función en la obra de Euler: Un recorrido a través de la constitución del Análisis Matemático Moderno. A. pp 73–91 SMM. Recuperado de http://www.miscelaneamatematica.org/Misc46/Martinez.pdf

Mineduc, (2013). *Bases curriculares 7° Básico a 2° Medio.* Santiago de Chile. Recuperado de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-34961_Bases.pdf

Mineduc, (2016). *Programa de Estudio Octavo Básico*. Santiago de Chile. Recuperado de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18983_programa.pdf

Pérez A. (2010). Isomorfismo. Recuperado de: https://matematica.laguia2000.com/general/isomorfismo

Pérez, J., Gardey, A. (2008). Definición de Análisis. Recuperado de https://definicion.de/analisis/

Pérez, J., Merino, M. (2008). Lógica. Definición de lógica. Recuperado de https://definicion.de/logica/)

Real Academia Española (2004). Analizar. En Diccionario de la Lengua Española (23ª Ed.). Recuprado de http://dle.rae.es/srv/search?m=30&w=analizar

Real Academia Española (2014). Lógica. En Diccionario de la Lengua Española (23ª Ed.). Recuperado de http://dle.rae.es/?id=NZEWqRA

Real Academia Española (2014). Sistema. En Diccionario de la Lengua Española (23ª Ed.). Recuperado de http://dle.rae.es/?id=Y2AFX5s

Real Academia Española, (2014). Reflexionar. En Diccionario de la lengua española (23ra Ed). Recuperado de http://dle.rae.es/srv/fetch?id=VdQ3wR1

Romagnoli, C. & Cortese, I. (2015). ¿Cómo la familia influye en el aprendizaje y rendimiento escolar? Ficha VALORAS actualizada de la 1ª edición "Factores de la familia que afectan los rendimientos académicos" (2007). Disponible en Centro de Recursos VALORAS: www.valoras.uc.cl

Tenenbaum, L., (2010). *X.Edu.*Montevideo. Recuperado de http://www.x.edu.uy/graficalineal.html

Vázquez, P.; Rey, G.; Boubée, C. (2008). Revista iberoamericana de educación matemática. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2008/16/Union_016_014.pdf

ANEXOS

Anexo 1. Instrumento de evaluación

Pretest 8° Año
"Funciones Lineal y Afín"[1]

Nombre:____Ptje:_______/ 93pts.Ideal

Objetivo General: Demostrar que comprenden la noción de función Lineal y Afín, mediante el uso de distintas representaciones semióticas y aplicación transformaciones para éstas.

Instrucciones generales:

- Lea atentamente las instrucciones dadas en cada item.
- Tendrá 90 min para responder el pretest.

[1] Autores: Luis Eusebio Gajardo Flores; Pedro Ángel Venegas San Martín, alumnos seminaristas.

ÍTEM I: PROPORCIONALIDAD

Instrucciones: lea con atención el siguiente problema y siga las instrucciones dadas a continuación.

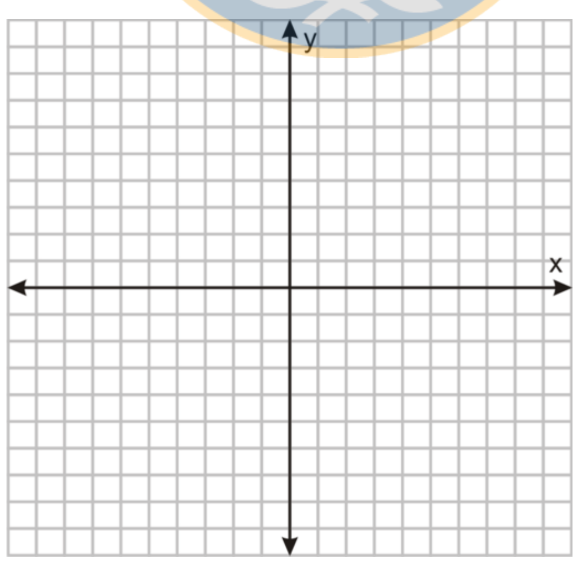
Al llegar al hotel nos han dado un mapa con los lugares de interés de la ciudad, y nos dijeron que 1 centímetro del mapa representaban 1kilómetro de la realidad. Hoy queremos ir a un parque que se encuentra a 1,5 centímetros del hotel en el mapa.

Responda:

a) *¿A qué distancia real del hotel se encuentra este parque? Desarrolle.* **(3 pts.)**

b) *Si a 2,5 centímetros del mapa más allá del primer parque se encuentra el segundo parque, ¿a cuanta distancia real se encuentra el segundo parque del hotel? Desarrolle.* **(3 pts.)**

c) *Ubique en el plano cartesiano las coordenadas correspondientes a los dos parques, considerando que el hotel donde usted se hospeda se encuentra en el origen de éste.* **(2 pts.)**



d) *Define la función f(x) que modela la situación planteada:* $f(x) =$ **(2 pts)**

ÍTEM II: VARIABLES DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

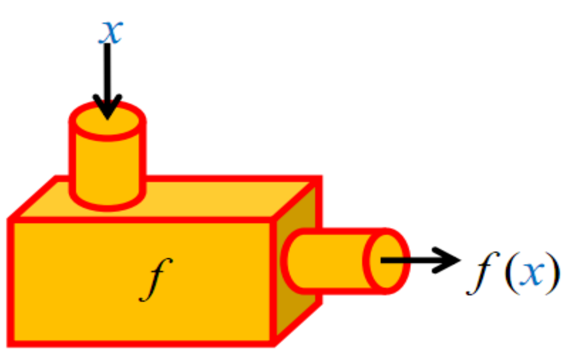
Instrucciones: Lea atentamente cada enunciado, reconozca los tipos de variables presentes en cada uno de ellos y escríbalo el recuadro según corresponda. **(1pto c/u)**

Enunciado	**Variable Independiente**	**Variable Dependiente**
a. El área total de un cubo y su arista.		
b. El doble de un número		
c. Horas de trabajo y sueldo mensual		
d. El número de lados de un polígono regular y la cantidad de diagonales.		

ÍTEM III: CONCEPTO DE FUNCIÓN

Instrucciones: Lea con atención las preguntas y siga a continuación las instrucciones dadas.

Pregunta 1: *¿Qué operación debe aplicarse dentro de la máquina (f) para transformar el número entrante x = 1,5 en un número saliente igual a f(x) = 6?*



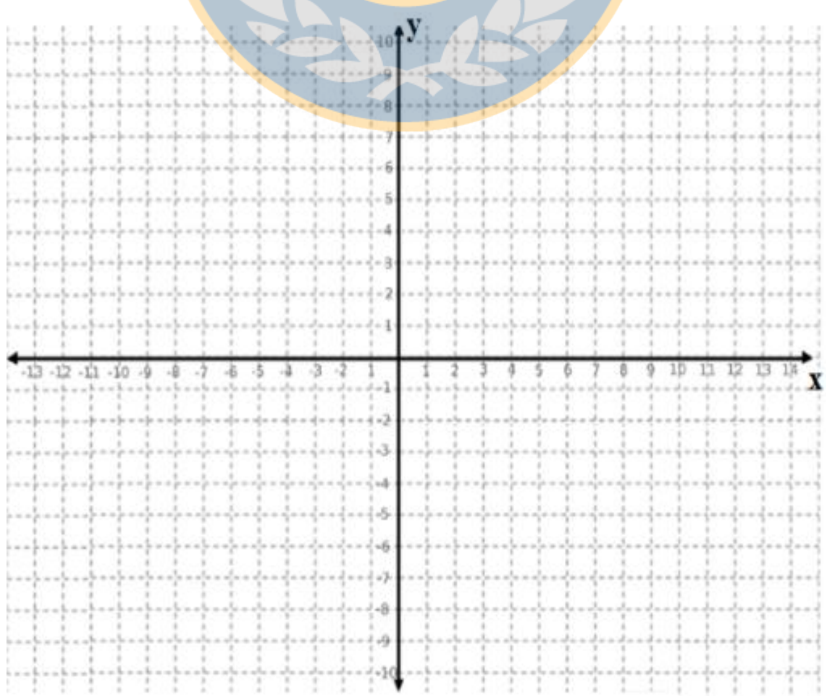
a) Complete la tabla de valores basados en el ejemplo y mencione otros. **(3 pts.)**

x	*f* (x)
-2	
	0
1,5	
2	
	12
x	

b) Determine la función *f* (x) que modela la situación escribiéndola en el recuadro entregado. **(2 pts.)**

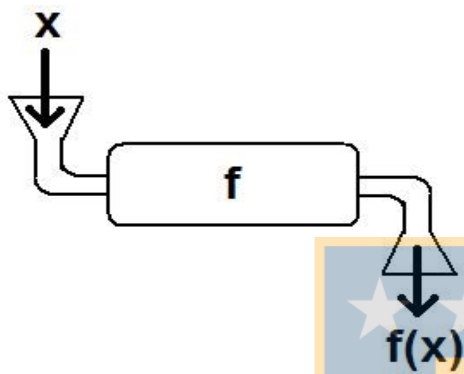
$f\,(x) =$

c) Grafique la función en el plano cartesiano. **(3 pts.)**



Pregunta 2: *¿Qué operación debe aplicarse dentro de la máquina (f) para transformar el número entrante* ***x = 2,5*** *en un número saliente igual a* ***f(x) = 7*** *o el numero entrante* ***x = 3*** *en un numero saliente igual a* ***f(x) = 8****?*

d) Complete la tabla de valores basados en el ejemplo y mencione otros. **(3 pts.)**

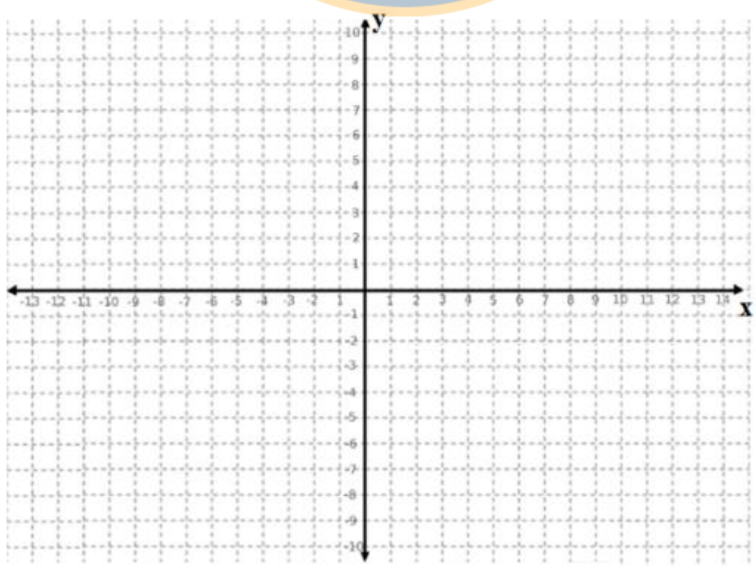


x	*f* (x)
- 3	
-1	
0	
1	
4	
x	

e) Determine la función *f* (x) escribiéndola en el recuadro entregado. **(2 pts.)**

$f(x)=$

f) Grafique la función en el plano cartesiano. **(3 pts.)**

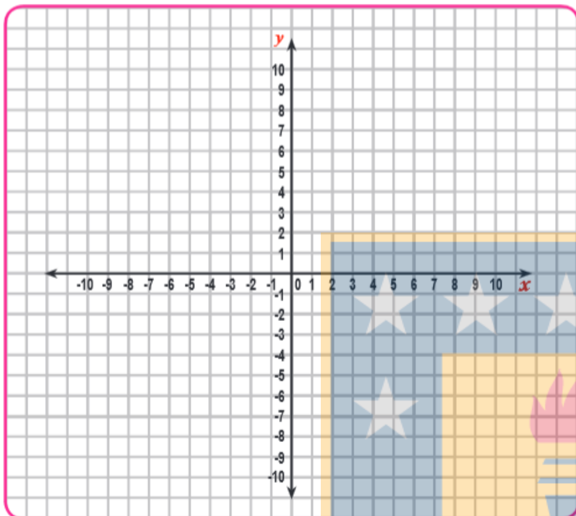


<u>ÍTEM IV: GRÁFICA Y PENDIENTE DE FUNCIONES</u>

<u>Instrucciones</u>: Lea atentamente las siguientes situaciones matemáticas y siga cada instrucción dada:

a) Dibuje en el siguiente plano cartesiano una recta cuya pendiente sea igual a 2 y señale su función *f*(x) como representación algebraica en el recuadro señalado

(5 pts.)

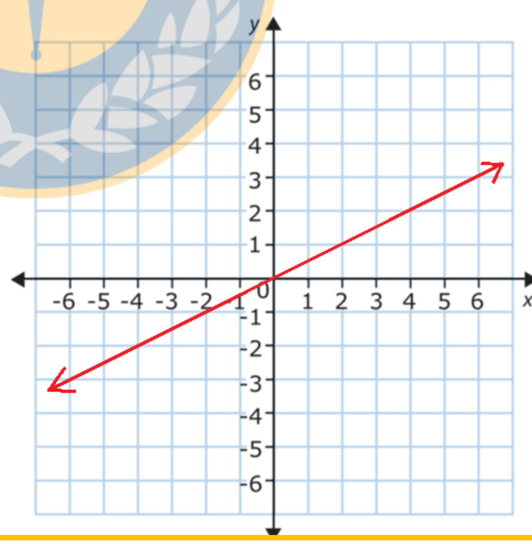


***f*(x) =**

b) Observe el siguiente gráfico y determine su pendiente utilizando la fórmula para obtener la pendiente *m* dados dos puntos en el plano cartesiano. Desarrolle en el recuadro dado.

(4 pts.)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



<u>Desarrollo:</u>

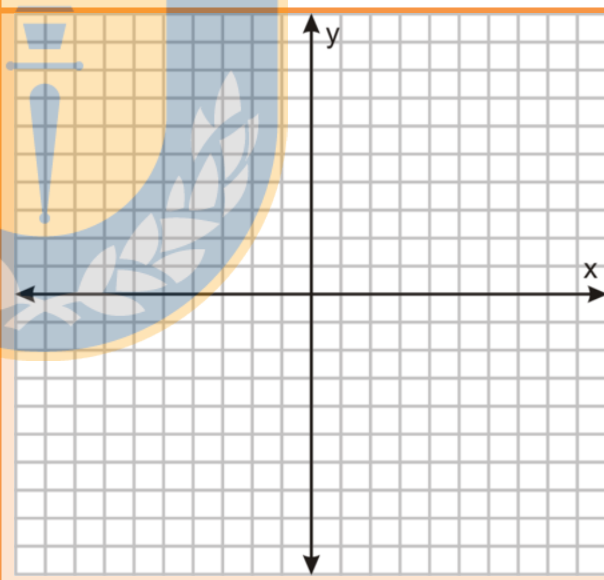
ÍTEM V: SITUACIONES PROBLEMÁTICAS QUE INVOLUCRAN FUNCIONES

Instrucciones: Lea con atención los siguientes planteamientos de situaciones cotidianas. Luego desarrolle y responda siguiendo las instrucciones dadas en cada ejercicio.

a) *Existe una relación entre el número de minutos que hablamos cuando realizamos una llamada desde un celular de prepago y el monto de dinero que debemos pagar. En cierta compañía si habla un minuto debe pagar $ 80, si habla 2 minutos $ 160, y así sucesivamente.*

1.- Complete la tabla basándose en los datos entregados en ella. **(0,5 pts. c/u)**

2.- Grafique en el plano cartesiano la recta que corresponde a la función. **(3 pts.)**

X (minutos)	**Y=f (x) (Dinero a pagar)**	**Desarrollo**	**Grafica**
1	**80**	**80 × 1= 80**	
2	**160**	**80 × 2= 160**	
3			
	320		
5			
	480		
n			

3.- Indique cuales son las características de la recta que obtuvo en la gráfica (tipo de pendiente, corte de la recta en los ejes x e y, etc.). **(2ptos.)**

____

____

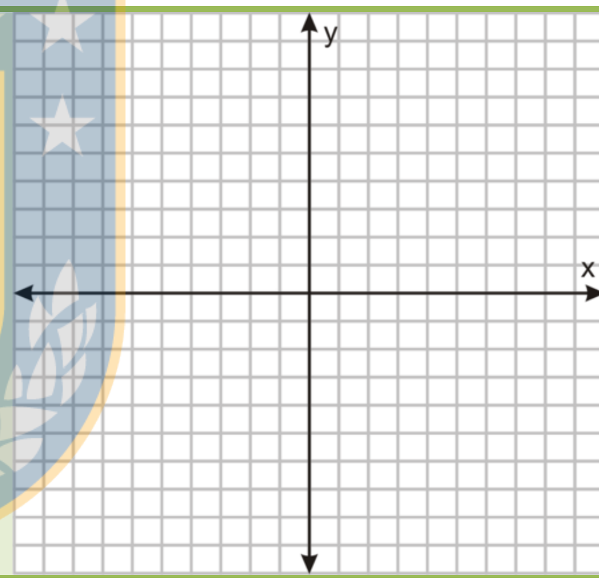
____

4.- Señale la función *f*(x) que modela la situación planteada: $\boxed{f\,(x) = \quad}$ **(2 pts.)**

b) *Juan es un taxista que cobra $280 como tarifa base y $ 60 por cada tramo de 200 metros recorridos. Si llamamos x al número de tramos recorridos, la función que permite determinar el costo de un viaje en el taxi de Juan es:* **f(x) = 60x + 280**

1.- Complete la tabla basándose en los datos entregados en ella. **(0,5 ptos. c/u)**

2.- Grafique en el plano cartesiano la recta que corresponde a la función. **(3 ptos.)**

X (tramos)	Y=f(x) (Dinero a pagar)	Desarrollo	Grafica
0	**280**	**60 × 0 + 280 = 280**	
1	**340**	**60 × 1 + 280 = 340**	
	400		
3			
	520		
5			
n			

3.- Indique cuales son las características de la recta que obtuvo en la gráfica (tipo de pendiente, corte de la recta en los ejes x e y, etc.). **(2 pts.)**

____

____

____

____

4.- Señale la función *f*(x) que modela la situación planteada: **f (x) =** **(2 pts.)**

c) En la feria, don Juan vende a $ 200 el kilógramo de manzanas. ¿Cuál es la función que permite calcular el precio de cierta cantidad de kilógramos? Puede ayudarse confeccionando una tabla de valores. **(3 pts.)**

d) telepizza *es una reconocida cadena de restaurantes especialistas en pizzas a nivel nacional. Una de sus pizzas más vendidas es la pizza italiana familiar, la cual tiene un costo de $ 7.000 c/u. Sin embargo, por la entrega a domicilio se agrega un valor extra de $1.000, costo que se mantiene independientemente de la cantidad de pizzas que se encarguen.*

1.- Organice una tabla de valores. **(5 pts.)**

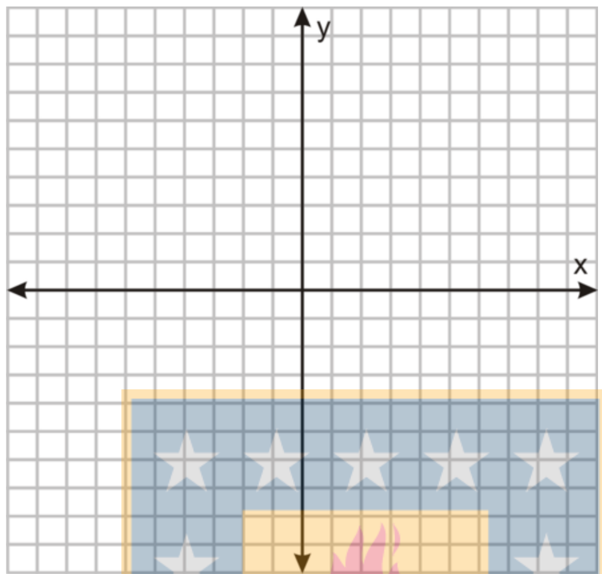
x	***f*(x)**
x	

2.- Determine en el siguiente recuadro la función que modela esta situación si se quiere pedir pizza a domicilio. **(2 pts.)**

$f\,(\mathrm{x}) =$

3.- Grafique en un plano cartesiano la función correspondiente al planteamiento realizado.

(3 pts.)



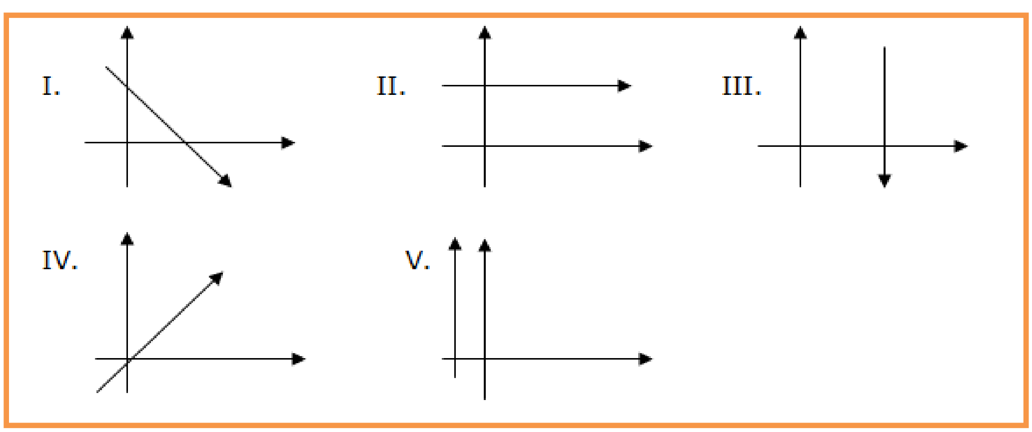
4.- Observe la ecuación funcional *f*(x) y señale a continuación:

- Pendiente: ____ **(1 pto.)**
- Coeficiente de posición: _________________________________ **(1 pto.)**

ÍTEM VI: SELECCIÓN MULTIPLE

Instrucciones: lea con atención cada pregunta y encierre la letra de la alternativa que considere correcta.

a) ¿Cuál de las siguientes rectas tiene una pendiente positiva? **(2 pts.)**

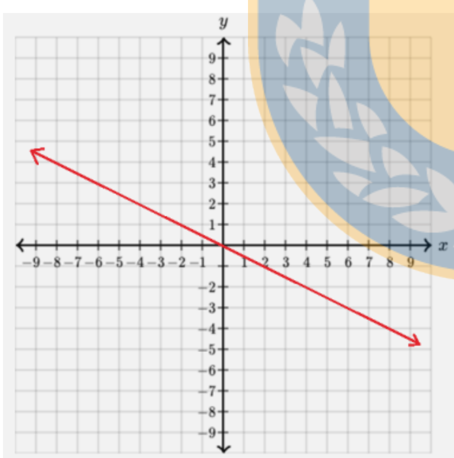


a. Solo I.
b. Solo II
c. II y III
d. Solo IV
e. IV y V

b) Respecto a la pregunta anterior, ¿Cuál de las rectas tiene una pendiente negativa? **(2 pts.)**

a. Solo I.
b. Solo II
c. II y III
d. Solo IV
e. IV y V

c) Verifique qué pares ordenados son solución para la función $f(x) = -\frac{x}{2}$ representada en la gráfica: **(2 pts)**



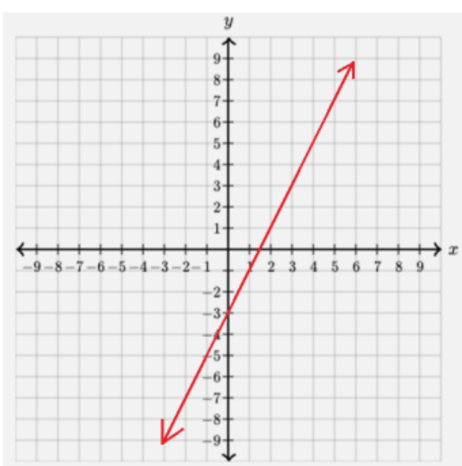
A) (-6, 3), (4, -2) y (2, -4)

B) (0,5, 1), (-2, 4) y (-4, 8)

C) (-6, 3), (1, -0,5) y (7, -3,5)

D) (8, -6), (-4, -5) y (3, 3)

d) Verifique qué pares ordenados son solución para la función $f(x) = 2x - 3$ representada en la gráfica: **(2 pts)**



A) (1, 1), (2, -1) y (6,5, 5)

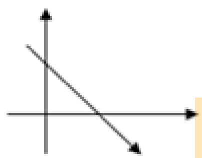
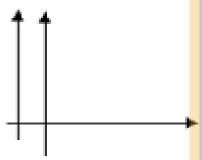
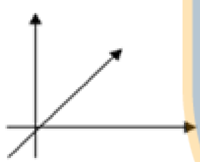
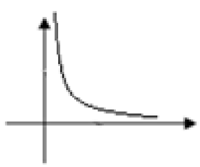
B) (-2, -7), (0, -3) y (3, 3)

C) (2, 2,5), (3, 0) y (5, 4)

D) (1,1), (-3, -3) y (7, -7)

<u>ÍTEM VII: TÉRMINOS PAREADOS</u>

<u>Instrucciones</u>: Observe con atención las gráficas que se presentan en la columna A y relacione la letra perteneciente a cada gráfico con el tipo de función al que corresponde de la columna B, escribiendo la letra en la línea. **(3 pts.)**

COLUMNA A	**COLUMNA B**
A 	_______ **Función Lineal**
B 	
C 	_______ **Función Afín**
D 	_______ **Proporcionalidad inversa**

Anexo 2. Pretest corregido.

Pretest 8° Año
"Funciones Lineal y Afín"[2]

Nombre:_____________________________________Ptje:__________/ 93pts.Ideal

Objetivo General: Demostrar que comprenden la noción de función Lineal y Afín, mediante el uso de distintas representaciones semióticas y aplicación transformaciones para éstas.

Instrucciones generales:

- Lea atentamente las instrucciones dadas en cada item.
- Tendrá 90 min para responder el pretest.

[2] Autores: Luis Eusebio Gajardo Flores; Pedro Ángel Venegas San Martín, alumnos seminaristas.

ÍTEM I: PROPORCIONALIDAD

Instrucciones: lea con atención el siguiente problema y siga las instrucciones dadas a continuación.

Al llegar al hotel nos han dado un mapa con los lugares de interés de la ciudad, y nos dijeron que 1 centímetro del mapa representaban 1kilómetro de la realidad. Hoy queremos ir a un parque que se encuentra a 1,5 centímetros del hotel en el mapa.

Responda:

a) *¿A qué distancia real del hotel se encuentra este parque? Desarrolle.* ***(3 pts)***

$$\frac{1\text{cm}}{1000\text{ m}} = \frac{1.5\text{cm}}{x}$$

$$1\text{cm} \cdot x = 1000\text{ m} \cdot 1.5\text{cm}$$

$$x = \frac{1000\text{ m} \cdot 1.5\text{cm}}{1\text{cm}}$$

$$x = 1500\text{ m}$$

Respuesta: El parque se encuentra a una distancia de 1500 m.

b) *Si a 2,5 centímetros del mapa más allá del primer parque se encuentra el segundo parque, ¿a cuanta distancia real se encuentra el segundo parque del hotel? Desarrolle.*

(3 pts.)

$$\frac{1\text{cm}}{1000\text{ m}} = \frac{2.5\text{ cm}}{x}$$

$$1\text{cm} \cdot x = 1000\text{ m} \cdot 2.5\text{ cm}$$

$$x = \frac{1000\text{ m} \cdot 2.5\text{ cm}}{1\text{cm}}$$

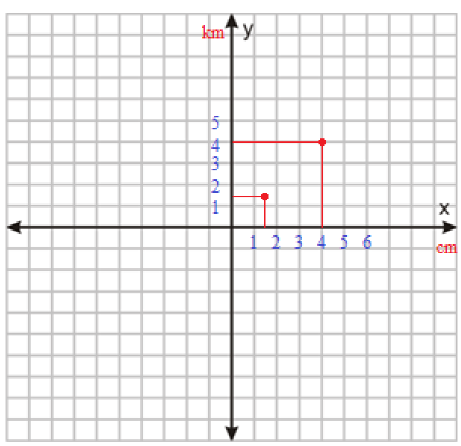
$$x = 2500\text{ m}$$

$$\begin{array}{r} 1500\text{ m} \\ +\,2500\text{ m} \\ \hline 4000\text{ m} \end{array}$$

Respuesta: el segundo parque se encuentra a una distancia real de 4000 m del hotel.

c) *Ubique en el plano cartesiano las coordenadas correspondientes a los dos parques, considerando que el hotel donde usted se hospeda se encuentra en el origen de éste.*

(2 pts.)



d) *Define la función f(x) que modela la situación planteada:* $f(x) = 1000\,x$ ***(2 pts)***

ÍTEM II: VARIABLES DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

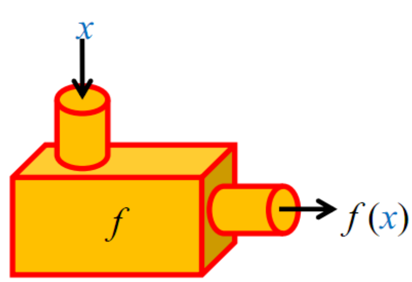
Instrucciones: Lea atentamente cada enunciado, reconozca los tipos de variables presentes en cada uno de ellos y escríbalo el recuadro según corresponda. **(1pto c/u)**

Enunciado	**Variable Independiente**	**Variable Dependiente**
a. El área total de un cubo y su arista.	**Arista**	**Área del cubo**
b. El doble de un número	**Número**	**Su doble**
c. Horas de trabajo y sueldo mensual	**Horas de trabajo**	**Sueldo mensual**
d. El número de lados de un polígono regular y la cantidad de diagonales.	**Número de lados de un polígono**	**Cantidad de diagonales**

ÍTEM III: CONCEPTO DE FUNCIÓN

Instrucciones: Lea con atención las preguntas y siga a continuación las instrucciones dadas**.**

Pregunta 1: *¿Qué operación debe aplicarse dentro de la máquina (f) para transformar el número entrante x = 1,5 en un número saliente igual a f(x) = 6?*



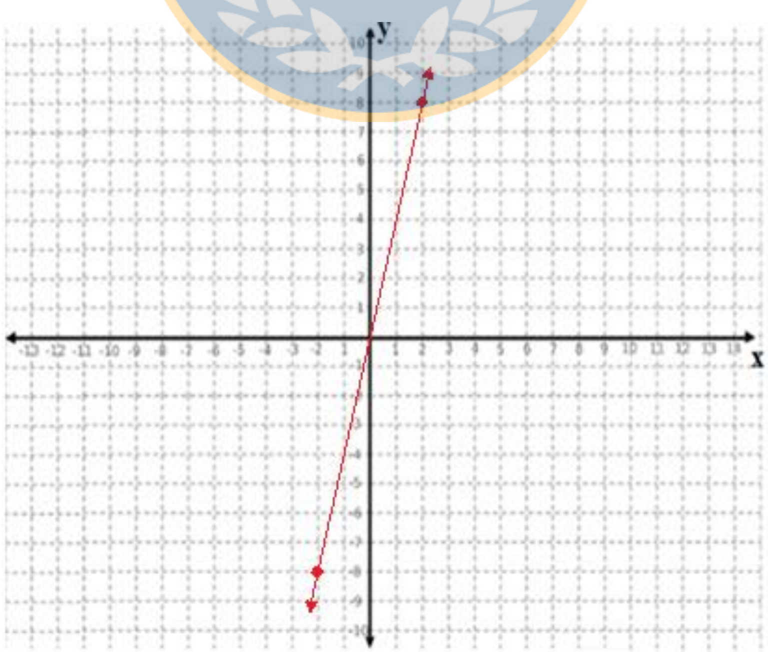
a) Complete la tabla de valores basados en el ejemplo y mencione otros. **(3 pts.)**

x	f (x)
-2	-8
0	0
1,5	6
2	8
4	12
x	4x

b) Determine la función f (x) que modela la situación escribiéndola en el recuadro entregado. **(2 pts.)**

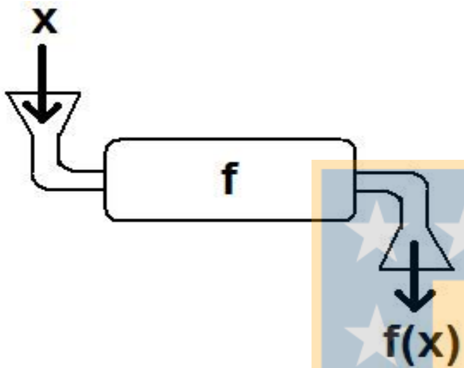
f (x)= 4 x

c) Grafique la función en el plano cartesiano. **(3 pts.)**



Pregunta 2: *¿Qué operación debe aplicarse dentro de la máquina (f) para transformar el número entrante* ***x = 2,5*** *en un número saliente igual a* ***f(x) = 7*** *o el numero entrante* ***x = 3*** *en un numero saliente igual a* ***f(x) = 8****?*

d) Complete la tabla de valores basados en el ejemplo y mencione otros. **(3 pts.)**

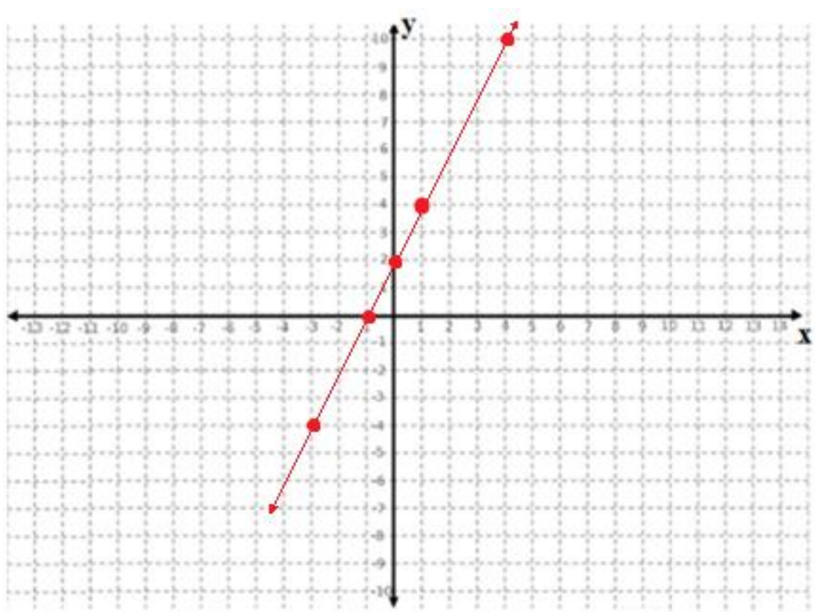


x	*f* (x)
- 3	-4
-1	0
0	2
1	4
4	10
x	2x + 2

e) Determine la función *f* (x) escribiéndola en el recuadro entregado. **(2 pts.)**

$\boxed{f(x) = \quad 2x + 2}$

f) Grafique la función en el plano cartesiano. **(3 pts.)**

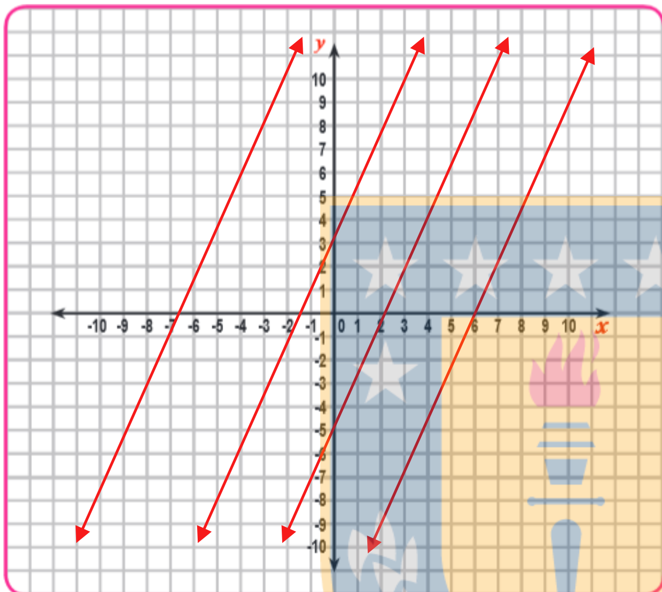


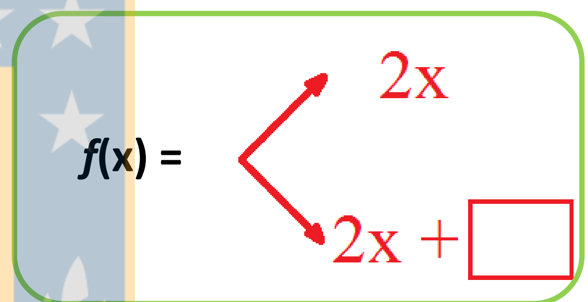
<u>ÍTEM IV: GRÁFICA Y PENDIENTE DE FUNCIONES</u>

<u>Instrucciones</u>: Lea atentamente las siguientes situaciones matemáticas y siga cada instrucción dada:

c) Dibuje en el siguiente plano cartesiano una recta cuya pendiente sea igual a 2 y señale su función *f*(x) como representación algebraica en el recuadro señalada

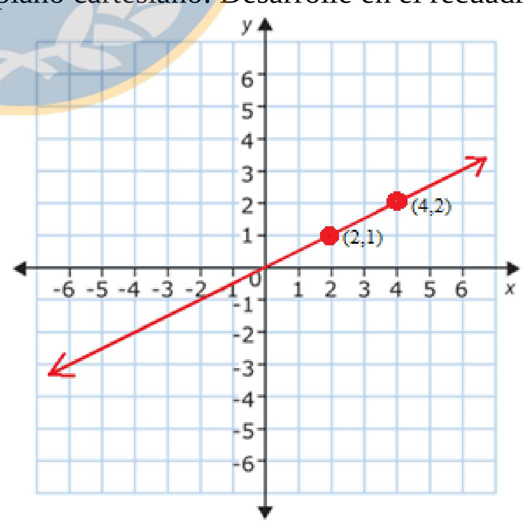
(5pts.)





d) Observe el siguiente gráfico y determine su pendiente utilizando la fórmula para obtener la pendiente *m* dados dos puntos en el plano cartesiano. Desarrolle en el recuadro dado.

(4 pts.)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Desarrollo

$$\frac{- y_2)}{(x_1 - x_2)}$$

$$m = \frac{2 - 1}{4 - 2}$$

$$m = \frac{1}{2}$$

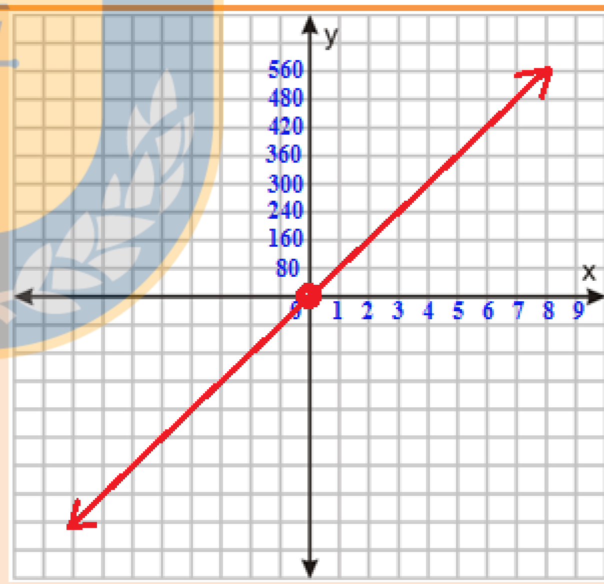
ÍTEM V: SITUACIONES PROBLEMÁTICAS QUE INVOLUCRAN FUNCIONES

Instrucciones: Lea con atención los siguientes planteamientos de situaciones cotidianas. Luego desarrolle y responda siguiendo las instrucciones dadas en cada ejercicio.

a) *Existe una relación entre el número de minutos que hablamos cuando realizamos una llamada desde un celular de prepago y el monto de dinero que debemos pagar. En cierta compañía si habla un minuto debe pagar $ 80, si habla 2 minutos $ 160, y así sucesivamente.*

1.- Complete la tabla basándose en los datos entregados en ella. **(0,5 ptos c/u)**

2.- Grafique en el plano cartesiano la recta que corresponde a la función. **(3 ptos)**

X (minutos)	Y=f (x) (Dinero a pagar)	Desarrollo	Grafica
1	80	80 × 1= 80	
2	160	80 × 2= 160	
3	240	80 x 3 = 240	
4	320	80 x 4 = 320	
5	400	80 x 5 = 400	
6	480	80 x 6 = 480	
n	80n	80 x n = 80n	

3.- Indique cuales son las características de la recta que obtuvo en la gráfica (tipo de pendiente, corte de la recta en los ejes x e y, etc.). **(2ptos.)**

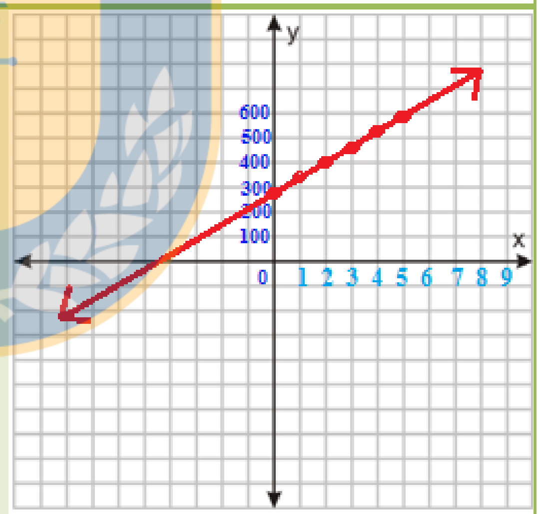
Tipo de pendiente: positiva
Corte de m en x: (0, 0)
Corte de m en x: (0, 0)

4.- Señale la función *f*(x) que modela la situación planteada: **(2 pts.)** | ***f* (x) = 80 x** |

b) *Juan es un taxista que cobra $280 como tarifa base y $ 60 por cada tramo de 200 metros recorridos. Si llamamos x al número de tramos recorridos, la función que permite determinar el costo de un viaje en el taxi de Juan es:* **f(x) = 60x + 280**

1.- Complete la tabla basándose en los datos entregados en ella. **(0,5 ptos. c/u)**

2.- Grafique en el plano cartesiano la recta que corresponde a la función. **(3 ptos.)**

X (tramos)	**Y=f(x) (Dinero a pagar)**	**Desarrollo**	**Gráfica**
0	**280**	**60 × 0 + 280 = 280**	
1	**340**	**60 × 1 + 280 = 340**	
2	**400**	**60 × 2 + 280 = 400**	
3	**460**	**60 × 3 + 280 = 460**	
4	**520**	**60 × 4 + 280 = 520**	
5	**580**	**60 × 5 + 280 = 580**	
n	**60n + 280**	**60 × n + 280 = 60n + 280**	

3.- Indique cuales son las características de la recta que obtuvo en la gráfica (tipo de pendiente, corte de la recta en los ejes x e y, etc.). **(2 pts.)**

Pendiente: positiva

Corte de m en y: (0, 280)

4.- Señale la función *f*(x) que modela la situación planteada: | ***f* (x) = 60x + 280** | **(2 pts.)**

c) En la feria, don Juan vende a $ 200 el kilógramo de manzanas. ¿Cuál es la función que permite calcular el precio de cierta cantidad de kilógramos? Puede ayudarse confeccionando una tabla de valores. **(3 pts.)**

Nº kilos	$
0	0
1	200
2	400
3	600
X	X × 200

$F(x) = 200x$

d) telepizza *es una reconocida cadena de restaurantes especialistas en pizzas a nivel nacional. Una de sus pizzas más vendidas es la pizza italiana familiar, la cual tiene un costo de $ 7.000 c/u. Sin embargo, por la entrega a domicilio se agrega un valor extra de $1.000, costo que se mantiene independientemente de la cantidad de pizzas que se encarguen.*

1.- Organice una tabla de valores. **(5 pts.)**

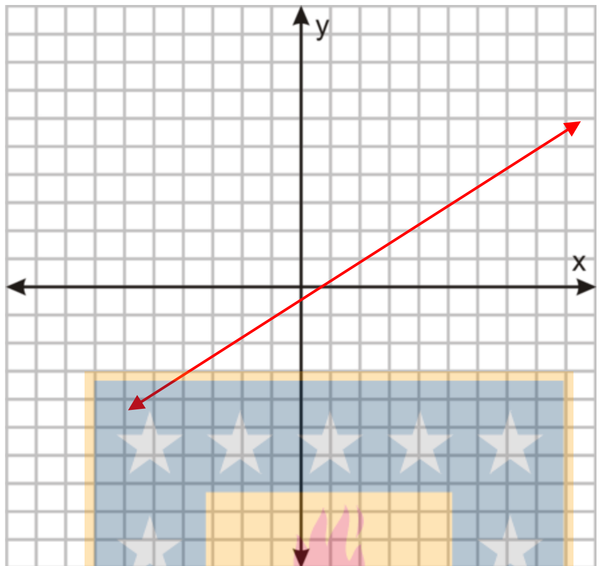
x	f(x)
1	7000+1000=8000
2	14000+1000=15000
3	21000+1000=22000
4	28000+1000=29000
7	49000+1000=50000
9	63000+1000=64000
x	7000x + 1000

2.- Determine en el siguiente recuadro la función que modela esta situación si se quiere pedir pizza a domicilio. **(2 pts.)**

$f(x) = 7000x + 1000$

3.- Grafique en un plano cartesiano la función correspondiente al planteamiento realizado.

(3 pts.)



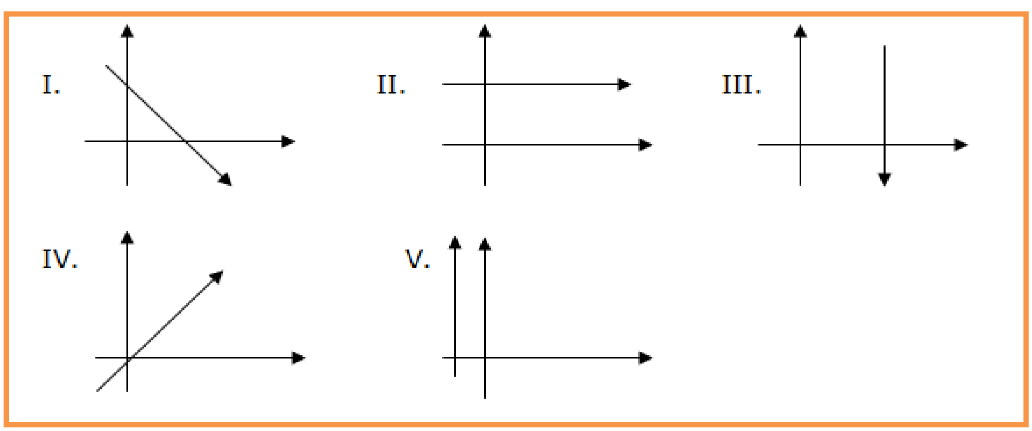
4.- Observe la ecuación funcional *f*(x) y señale a continuación:

- Pendiente: <u>7000</u> **(1 pto.)**
- Coeficiente de posición: <u>1000</u> **(1 pto.)**

<u>ÍTEM VI: SELECCIÓN MULTIPLE</u>

<u>Instrucciones</u>: lea con atención cada pregunta y encierre la letra de la alternativa que considere correcta.

a) ¿Cuál de las siguientes rectas tiene una pendiente positiva? **(2 pts.)**

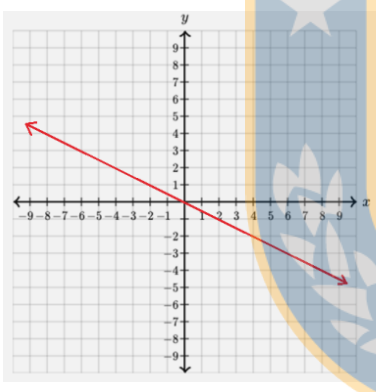


f. Solo I.
g. Solo II
h. II y III
i. Solo IV
j. IV y V

b) Respecto a la pregunta anterior, ¿Cuál de las rectas tiene una pendiente negativa? **(2 pts.)**

f. Solo I.
g. Solo II
h. II y III
i. Solo IV
j. IV y V

c) Verifique qué pares ordenados son solución para la función $f(x) = -\frac{x}{2}$ representada en la gráfica: **(2 pts)**



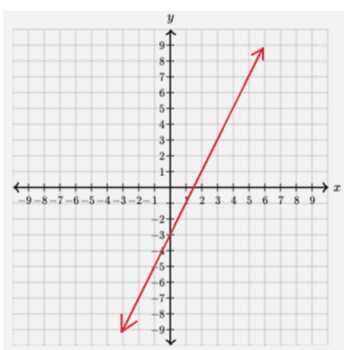
A) (-6, 3), (4, -2) y (2, -4)

B) (0,5, 1), (-2, 4) y (-4, 8)

C) (-6, 3), (1, -0,5) y (7, -3,5)

D) (8, -6), (-4, -5) y (3, 3)

d) Verifique qué pares ordenados son solución para la función $f(x) = 2x - 3$ representada en la gráfica: **(2 pts)**



A) (1, 1), (2, -1) y (6,5, 5)

B) (-2, -7), (0, -3) y (3, 3)

C) (2, 2,5), (3, 0) y (5, 4)

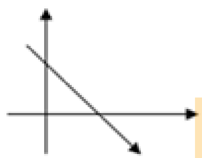
D) (1,1), (-3, -3) y (7, -7)

<u>ÍTEM VII: TÉRMINOS PAREADOS</u>

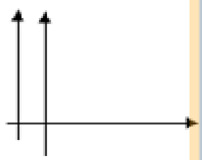
<u>Instrucciones</u>: Observe con atención las gráficas que se presentan en la columna A y relacione la letra perteneciente a cada gráfico con el tipo de función al que corresponde de la columna B, escribiendo la letra en la línea. **(3 pts.)**

COLUMNA A **COLUMNA B**

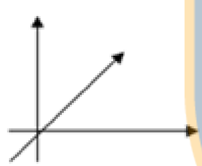
A



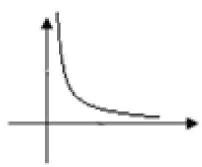
B



C



D



C **Función Lineal**

A **Función Afín**

D **Proporcionalidad inversa**

Anexo 3. Tablas de resultados pretest

Ítem I

Tabla 19. Resultados de logros alcanzados en ítem I

Alumno	a	desarrollo a	b	desarrollo b	c	d	total	% logro por alumno
1	1	0	1	0	0	0	2	33%
2	1	0	1	0	0	0	2	33%
3	1	0	1	0	0	0	2	33%
4	1	0	1	0	0	0	2	33%
5	1	0	1	0	0	0	2	33%
6	1	1	1	1	0	1	5	83%
7	1	0	0	0	0	0	1	17%
8	1	0	1	0	0	0	2	33%
total	8	1	7	1	0	1		300%
% por item	100%	13%	88%	13%	0%	13%		38%

Ítem II

Tabla 20. Resultados de logros alcanzados en ítem II

Alumnos	Ítem II	% por alumno
1	0	0%
2	1	100%
3	0	0%
4	0	0%
5	0	0%
6	1	100%
7	0	0%
8	1	100%
Total	3	300%
% item II	38%	38%

Ítem III

Tabla 21. Resultados de logros alcanzados en ítem III

Alumno	a	b	c	d	e	f	total de preguntas	% por alumno
1	1	1	1	1	0	0	4	67%
2	1	1	1	0	0	0	3	50%
3	1	0	0	0	0	0	1	17%
4	1	1	0	0	0	0	2	33%
5	1	1	1	0	0	0	3	50%
6	1	1	0	0	0	0	2	33%
7	1	1	0	0	0	0	2	33%
8	1	1	1	0	0	0	3	50%
total	8	7	4	1	0	0		333%
% por item	100%	88%	50%	13%	0%	0%	250%	42%

Ítem IV

Tabla 22. Resultados de logros alcanzados en ítem VI

Alumno	a	b	Total	% por alumno
1	0	0	0	0%
2	0	0	0	0%
3	0	0	0	0%
4	0	0	0	0%
5	0	0	0	0%
6	0	0	0	0%
7	0	0	0	0%
8	0	1	1	50%
	0	1		50%
% por item	0%	13%	13%	6%

Ítem V

Tabla 23. Resultados de logros alcanzados en ítem

Alumno	a.1	a.2	a.3	a.4	b.1	b.2	b.3	b.4	c	d.1	d.2	d.3	d.4	TOTAL	% por alumno
1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	6	46%
2	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	4	31%
3	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	5	38%
4	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	6	46%
5	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	23%
6	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	8	62%
7	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	15%
8	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	5	38%
Total	8	4	0	4	8	3	0	3	0	5	4	0	0		300%
% por item	100%	50%	0%	50%	100%	38%	0%	38%	0%	63%	50%	0%	0%	488%	38%

Ítem VI

Tabla 24. Resultados de logros alcanzados en ítem VI

Alumno	a	b	c	d	total	% por alumno
1	0	1	1	1	3	75%
2	0	0	1	1	2	50%
3	0	1	1	1	3	75%
4	0	0	0	0	0	0%
5	1	1	1	1	4	100%
6	0	0	0	0	0	0%
7	0	0	1	0	1	25%
8	0	0	0	0	0	0%
total	1	3	5	4		325%
% por ítem	13%	38%	63%	50%	163%	41%

Ítem VII

Tabla 25. Resultados de logros alcanzados en ítem VII

Alumnos	VII	% por alumno
1	1	100%
2	0	0%
3	0	0%
4	1	100%
5	0	0%
6	1	100%
7	0	0%
8	0	0%
total	3	300%
% por item	38%	38%

Anexo 4. Índice de Confiabilidad

	I				II	III						IV	
Alumno/Item	**I.a**	**I.b**	**I.c**	**I.d**	**Ítem II**	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**a**	**B**
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
5	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
6	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
8	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
Varianza	0	0,125	0	0,125	0,2678571	0	0,125	0,285714	0,125	0	0	0	0,125

V													VI				VII	
a.1	a.2	a.3	a.4	b.1	b.2	b.3	b.4	c	d.1	d.2	d.3	d.4	a	b	c	d	VII	total ítem
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	16
1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	12
1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	11
1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	11
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	12
1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	15
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	6
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	12
0	0,2857	0	0,2857	0	0,268	0	0,2679	0	0,2679	0,286	0	0	0,125	0,26786	0,268	0,2857	0,2679	8,98214

Fórmula Alpha de Cronbach (Índice de confiabilidad)

$$\boxed{\alpha = \frac{K}{K-1}\left[1 - \frac{\sum S_i^{\,2}}{S_T^{\,2}}\right]}$$

K	31
Sum. Var	4,053571429
VT	8,982142857
Si²	1,033333333
ST²	0,548707753
Alfa de Cronbach	0,566998012

K : El número de ítems
Si^2: Sumatoria de Varianzas de los Items
ST^2 : Varianza de la suma de los Items
α : Coeficiente de Alfa de Cronbach

Anexo 4. Diseños de clase

<table>
<tr><td colspan="4">DISEÑO CLASE Nº 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nombre Docentes:
Luis Gajardo F. – Pedro Venegas S.</td><td colspan="2">Fecha:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Establecimiento:</td><td colspan="2">Curso:
Octavo Año Básico</td></tr>
<tr><td colspan="4">Unidad:
Algebra y Funciones</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo de Aprendizaje:
Demostrar que comprenden las proporciones directas e inversas: realizando tablas de valores para relaciones proporcionales, graficando los valores de la tabla, explicando las características de la gráfica, resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo Clase:
Reconocer Proporciones directas e inversas y sus constantes.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Contenidos previos:</td></tr>
<tr><td>Contenidos</td><td>Momentos de la clase</td><td>Indicadores</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td>Proporcionalidad directa e inversa</td><td>Inicio:
Se activan conocimientos previos, por medio de un problema: “si un curso tiene 25 estudiantes. Si el 60% de ellos hizo su tarea, ¿Cuántos estudiantes hicieron su tarea?”, luego se plantean preguntas como, ¿Qué sucedería si se aumenta el porcentaje de alumnos que no hicieron la tarea? ¿Aumenta otro valor? (Mediante una tabla), se concluye con los alumnos que el cálculo de porcentaje es un tipo de proporción la cual es directa.
Desarrollo:
Se presenta a los alumnos lo que es una razón relacionada con una división y fracción. Donde el dividendo y numerador se denominan antecedente y el divisor presentando a los alumnos un ejemplo: en un curso hay 36 mujeres</td><td>-Relacionan concepto de proporciones con porcentaje.
- Reconocen cambios en la vida cotidiana que se desarrollan de forma directamente proporcional.
- Reconocen cambios en la vida cotidiana que se desarrollan en forma inversamente proporcional.
- Sintetizan proporcionalidad directa e inversa en tablas de valores, gráficos y situaciones reales.</td><td>• Evaluación de proceso.

• a) Revisión de todos los ejercicios propuestos.

• b) Interrogación a los estudiantes durante el desarrollo de la clase, considerando el grado de atención de éstos.

• c) Revisión ejercicios de guía.</td></tr>
</table>

	y 12 hombres buscar la razón entre hombres, mujeres y el total o viceversa, esto se relaciona con el contenido de la asignatura física en las siguientes magnitudes: Rapidez = $\frac{d}{t}$ Densidad = $\frac{m}{v}$ Frecuencia = $\frac{x}{t}$ Se presentan ejemplos a los estudiantes respecto a las magnitudes anteriores tales como: La razón entre la distancia recorrida y el tiempo, si se recorren 300km en 3hrs. La razón entre la masa de un cuerpo y su volumen, si m=6600kg y v=6m3 La razón entre la cantidad de vueltas y el tiempo empleado, si en 10min se dan 7 vueltas. Por medio de un ejemplo: un vehículo en carretera tiene un rendimiento de 16 km por litro de bencina ¿Cuántos litros de bencina consumirá en un viaje de 192 km? Se pregunta a los alumnos lo que sucede cuando de aumenta o disminuye una magnitud por lo cual se define claramente lo que es una proporción, que es una igualdad entre dos razones a÷b=c÷d o $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ generando de esta la propiedad fundamental que nos dice que esta igualdad se debe obtener al multiplicar a · d = c· d, donde a y d se denominan extremos y c y d se denominan medios. Luego por el ejemplo anterior se define lo que es una proporción directa y los alumnos definen que al aumentar o disminuir una en cierto factor, la otra aumenta o disminuye en el mismo factor. Siguiendo con el ejemplo anterior se encuentra		

	un número que ser repite al calcular el cociente entre sus valores y se denomina constante de proporcionalidad. Se representa: $\frac{x}{y}$ = k (k constante de proporcionalidad) Definiendo así que la K de proporcionalidad en una P.D se obtiene por cociente. Todo esto relacionado con tablas y gráficos. Se presenta ejemplo: en la construcción de un edificio se trabaja con 200 obreros, la obra tiene fecha para 12 meses, si se trabaja con 150 obreros ¿Cuántos meses demorará? Luego por medio de este ejercicio de genera la definición formal de lo que es una proporción inversa, la cual consta de dos variables que son inversamente proporcionales si al aumentar una en cierto factor, la otra disminuye en el mismo factor. Después mediante el ejemplo se define como se puede obtener la constante. Guiando al alumno concluyen que la constante se obtiene mediante el producto de las variables relacionadas, donde se denomina constante formalmente lo que es constante de proporcionalidad inversa. $x \cdot y =$ k (k constante de proporcionalidad) **Cierre:** Todo esto relacionado con tablas y gráficos, dan solución a un listado de problemas relacionados con razones, proporción directa y proporción inversa		

DISEÑO CLASE Nº 2			
Nombre Docentes: Luis Gajardo F. – Pedro Venegas S.		**Fecha:**	
Establecimiento:		**Curso:** Octavo Año Básico	
Unidad: Algebra y Funciones			
Objetivo de Aprendizaje: Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas, usando metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre x e y, representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.			
Objetivo Clase: Identificar las variables que están involucradas en funciones que modelan situaciones de la vida cotidiana.			
Contenidos previos:			
Contenidos	**Momentos de la clase**	**Indicadores**	**Evaluación**
Concepto de función Representación de función mediante lo concreto, pictórico y simbólica.	**Inicio:** El docente recuerda las diferentes situaciones de la vida diaria en las cuales estaban involucradas dos variables. A partir de la proposición de ejemplos, los estudiantes infieren en cuales pueden ser las variables tanto dependientes como independientes: - *Al jugar playstation en un local de juegos donde cobran $100 x 10 minutos de juego*. - *Al comprar huevos en un negocio.* Plantea una pequeña tabla donde "juega" con las variables en conjunto con el curso. **Desarrollo:** El profesor plantea por lo tanto una idea Una **variable independiente** es una variable que representa una cantidad que se modifica en un experimento.	Identifican variables dependientes e independientes en situaciones de la vida cotidiana.	• Evaluación de proceso. • a) Revisión de todos los ejercicios propuestos. • b) Interrogación a los estudiantes durante el desarrollo de la clase, considerando el grado de atención de éstos.

	A menudo x es la variable que se utiliza para representar la variable independiente en una ecuación central para posteriormente establecer una definición. **Ejemplo:** Estás haciendo tareas domésticos para ganar tu mesada. Por cada tarea que haces obtienes $500La variable **independiente** es la cantidad de tareas que haces, pues esta es la variable sobre la que tienes control. Una **variable dependiente** representa una cantidad cuyo valor *depende* de cómo se modifica la variable independiente. A menudo y es la variable que se utiliza para representar la variable dependiente en una ecuación. **Ejemplo:** Utilicemos el mismo contexto: Estás haciendo tareas domésticos para ganar tu mesada. Por cada tarea que haces La variable dependiente es la cantidad de dinero que obtienes, pues la cantidad de dinero que ganas *depende* del número de tareas que hagas. obtienes $500 Los alumnos escriben estas definiciones con ejemplos en sus cuadernos. El docente proyecta para el curso actividades, que los estudiantes deberán resolver en la clase:		

	Actividad 3 Actividad 4 Actividad 5 El profesor concluye la actividad destacando que esta relación de dependencia entre las variables se denomina **función.** *Una **función** es una relación entre dos magnitudes, **x** y **f(x)**, de manera que a cada valor de la primera magnitud le corresponde un **único valor de la segunda**, que se llama **imagen**.* **Cierre:** Los estudiantes dan ejemplos de variables y explican con sus propias palabras lo que entendieron por función. ¿Qué situaciones corresponden a una función y cuáles no?		

DISEÑO CLASE Nº 3

Nombre Docentes: Luis Gajardo F. – Pedro Venegas S.	**Fecha:**
Establecimiento:	**Curso:** Octavo Año Básico

Unidad:
Algebra y Funciones

Objetivo de Aprendizaje:
Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas, usando metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre x e y, representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.

Objetivo Clase:
Identificar y evaluar funciones y variables.

Contenidos previos:

Contenidos	**Momentos de la clase**	**Indicadores**	**Evaluación**
Constante de proporcionalidad Concepto de función Representación de función mediante lo concreto, pictórico y simbólica.	**Inicio:** Se refuerza conceptos vistos en clase anterior, dando énfasis a funciones y variables, se dan ejemplos propuestos por el docente (actividad 1) e invita a estudiantes a identificar las variables y si corresponde a la función. **Desarrollo:** Los estudiantes analizan situaciones que presentan relación entre dos variables, de manera que se realice la conexión entre proporcionalidad directa y función lineal. Por ejemplo la proporcionalidad directa relaciona variables que aparecen al describir muchos fenómenos cotidianos, como: el número de productos que vas a comprar y el dinero que gastarás en la compra. Los estudiantes registran en su cuaderno los	-Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente (“constante de proporcionalidad”). -Descubren el concepto de función mediante la relación de proporcionalidad directa. -Representan la noción de función de manera concreta (utilizando metáforas de máquinas), pictórica o simbólica.	• Evaluación de proceso. • a) Revisión de todos los ejercicios propuestos. • b) Interrogación a los estudiantes durante el desarrollo de la clase, considerando el grado de atención de éstos.

	conceptos, propiedades y ejemplos más importantes. Analizan y distinguen las variables, utilizando las variables de la actividad anterior: **J:** número de litros de jugo embotellado **A:** cantidad de kilogramos de azúcares que se deben incorporar. Definen la constante de proporcionalidad de la relación que existe entre **J** y **A** como el siguiente cociente constante: $\boldsymbol{\frac{A}{J} = 80}$ Luego explica que para conocer la cantidad de azúcares que hay que agregar el proceso basta multiplicar el número de litros de jugo que se desea embotellar por 80. (Actividad 2), el docente interrumpe el trabajo para que un estudiante pase a la pizarra y desarrolle un ejercicio. El docente en plenario aclara dudas y consultas del ejercicio. Como última actividad el docente pide que generen un modelo matemático utilizando la relación en la actividad anterior, (actividad 3) **Cierre:** El docente destaca la importancia que el estudiante comprenda que una función no es sino un tipo especial de relación. Además, destaca que para expresar funciones podemos usar otros nombres, distintos de f, como g, h. Por ejemplo, la función g(x)= 2x + 5.		

<table>
<tr><th colspan="4">DISEÑO CLASE Nº 4</th></tr>
<tr><td colspan="2">Nombre Docentes:
Luis Gajardo F. – Pedro Venegas S.</td><td colspan="2">Fecha:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Establecimiento:</td><td colspan="2">Curso:
Octavo Año Básico</td></tr>
<tr><td colspan="4">Unidad:
Algebra y Funciones</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo de Aprendizaje:
Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas, usando metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre x e y, representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo Clase:
Representar situaciones problemáticas modeladas por una función, en tablas y gráficos, identificando variables.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Contenidos previos:</td></tr>
<tr><td>Contenidos</td><td>Momentos de la clase</td><td>Indicadores</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td>Constante de proporcionalidad
Metáfora de maquinas
Graficas
Funciones lineales</td><td>Inicio:
El docente realiza una retroalimentación de lo expuesto la clase anterior en donde le pide a los estudiantes que recuerden que variables eran las que se encontraban presentes en la tabla donde modelaron una formula.(J y A)
Desarrollo:
El docente plantea la definición de lo que es una variable, “que está sujeto a cambios frecuentes o probables”, luego pide a los estudiantes que mencionen ejemplos de variables como por ejemplo: tiempo, comida, edad, etc. Con esto el docente define que es una variable independiente, “es cuando su valor no depende de otra variable”, para luego definir una variable independiente, “es cuando su valor depende de otra variable”. Por ejemplo:
-La cantidad de bencina que se debe agregar al vehículo para poder transitar una cierta</td><td>-Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente (“constante de proporcionalidad”).
-Representan la noción de función de manera concreta (utilizando metáforas de máquinas), pictórica o simbólica.
-Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales f(x) = a ? x (y = a ? x).</td><td>• Evaluación de proceso.

• a) Revisión de todos los ejercicios propuestos.

• b) Interrogación a los estudiantes durante el desarrollo de la clase, considerando el grado de atención de éstos.</td></tr>
</table>

	cantidad de kilómetros. -La cantidad de azúcares que se debe agregar a ciertos litros de jugo. -El kilo de naranjas y su valor. El docente analiza con sus estudiantes diferentes situaciones cotidianas a través de tablas y gráficos.(actividad 1) **Cierre:** El docente solicita a los estudiantes que mencionen situaciones de la vida real que se pueden modelar por una función, identificando variables dependientes e independientes, justificando la clasificación de las variables.		

<table>
<tr><th colspan="4">DISEÑO CLASE Nº 5</th></tr>
<tr><td colspan="2">Nombre Docentes:
Luis Gajardo F. – Pedro Venegas S.</td><td colspan="2">Fecha:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Establecimiento:</td><td colspan="2">Curso:
Octavo Año Básico</td></tr>
<tr><td colspan="4">Unidad:
Algebra y Funciones</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo de Aprendizaje:
Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas, usando metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre x e y, representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo Clase:
Analizar situaciones a través de tablas y gráficos.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Contenidos previos:</td></tr>
<tr><th>Contenidos</th><th>Momentos de la clase</th><th>Indicadores</th><th>Evaluación</th></tr>
<tr><td>Constante de proporcionalidad
Metáfora de maquinas
Graficas
Funciones lineales</td><td>Inicio:
El docente retroalimenta lo visto la clase anterior donde se utilizo la tabla de doble entrada y el diagrama sagital (pregunta 2), luego el docente pregunta ¿comprenden lo que es un gráfico sagital? Y ¿para que se utiliza en funciones? Explica lo anterior.
Desarrollo:
El docente mediante el gráfico sagital y la tabla de doble entrada explica a los estudiantes que uno de los diagramas recibe el nombre de dominio y se designa con Dom f ( ), donde el dominio es: el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente. Y a su vez el segundo diagrama recibe el nombre de recorrido y se designa Rec f ( ), donde el recorrido o codominio es: conjunto formado por todos los</td><td>-Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente (“constante de proporcionalidad”).
-Representan la noción de función de manera concreta (utilizando metáforas de máquinas), pictórica o simbólica.
-Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales f(x) = a ? x (y = a ? x).</td><td>• Evaluación de proceso.
• a) Revisión de todos los ejercicios propuestos.
• b) Interrogación a los estudiantes durante el desarrollo de la clase, considerando el grado de atención de éstos.</td></tr>
</table>

	valores que puede tomar la variable dependiente (actividad 1) Utilizando metáforas de maquinas el docente explica de una forma dinámica dominio y recorrido. Ejemplo 1.- el **dominio** son todos los valores que podemos introducir en ella. 2.- el **recorrido** son todos los valores que se obtienen de ella. (actividad 2) Ahora ¿Qué pasa si x toma el valor 0?, Luego pregunta al curso: ¿Cuál es el dominio de la función? Después de analizar llegan a establecer que si el valor 0 es quien define la función, tienen que sacarlo del conjunto de valores. **Cierre:** El docente solicita a sus estudiantes que describan con sus palabras lo que entendieron por dominio y recorrido de una función. Comparten diferentes ejemplos.		

DISEÑO CLASE Nº 6	
Nombre Docentes: Luis Gajardo F. – Pedro Venegas S.	**Fecha:**
Establecimiento:	**Curso:** Octavo Año Básico
Unidad: Algebra y Funciones	
Objetivo de Aprendizaje: Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas, usando metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre x e y, representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.	
Objetivo Clase: Identificar funciones lineales en contextos de proporcionalidad.	
Contenidos previos:	

Contenidos	**Momentos de la clase**	**Indicadores**	**Evaluación**
Escalares Gráficos Tablas Pendiente de la función	**Inicio:** El docente realiza una retroalimentación de lo que son las proporciones en particular las proporciones directas y su constante para con ello dar forma al modelo de una función. (actividad 1) **Desarrollo:** El docente indica a los alumnos que existen distintos tipos de funciones y una de las que verán en esta clase será función lineal, que es aquella cuya expresión algebraica es $y=m\times x$ o $f(x)=m\times x$ y presenta las siguientes características: - su gráfica es una línea recta que pasa por el origen, (0,0) - el número m es su pendiente. - la función es creciente si $m > 0$, y es decreciente si es $m < 0$	-Representan la linealidad f(kx) = kf(x) y f(x1 x2) = f(x1) f(x2) en tablas y gráficos. -Identifican la pendiente del gráfico de la función f(x) = a ? x con el factor a.	• Evaluación de proceso. • a) Interrogación a los estudiantes durante el desarrollo de la clase, considerando el grado de atención de éstos. • b) revisión de los ejercicios propuestos en la guía.

	Como ejemplo graficaremos la función lineal *y=x2* (actividad 2) Guía de trabajo. **Cierre:** El docente realiza interrogación de los ejercicios propuestos en la guía de trabajo en el pizarrón para con ello ir aclarando dudas.		

<table>
<tr><td colspan="4" align="center">DISEÑO CLASE Nº 7</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nombre Docentes:
Luis Gajardo F. – Pedro Venegas S.</td><td colspan="2">Fecha:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Establecimiento:</td><td colspan="2">Curso:
Octavo Año Básico</td></tr>
<tr><td colspan="4">Unidad:
Algebra y Funciones</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo de Aprendizaje:
Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas, usando metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre x e y, representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo Clase:
Reconocer la recta asociada a su pendiente.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Contenidos previos:</td></tr>
<tr><td>Contenidos</td><td>Momentos de la clase</td><td>Indicadores</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td>Proporcionalidad directa
Constante de proporcionalidad
Tablas
Gráficos
Función lineal</td><td>Inicio:
Para introducir el tema, el docente dibuja un gráfico en la pizarra, recordando a los estudiantes todos los pasos que deben hacer antes de ubicar los pares ordenados en el plano y realizar la recta que determina la función. (actividad 1)
Desarrollo:
El docente explica el concepto de pendiente de</td><td>-Descubren el concepto de función mediante la relación de proporcionalidad directa.
-Descubren que la inclinación (pendiente) de la gráfica depende de la constante de la proporcionalidad.
-Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales f(x) = a</td><td>• Evaluación de proceso.

• a) Interrogación a los estudiantes durante el desarrollo de la clase, considerando el</td></tr>
</table>

	la recta asociada a una función de proporcionalidad directa, utilizando el gráfico que realizó en la pizarra al comienzo de la clase. El docente define pendiente como: *La inclinación que toma una recta con respecto al horizonte o al eje x o de más bien con respecto al eje de las abscisas. La pendiente de la recta se representa con la letra* ***m****, y se puede calcular mediante la diferencia entre las coordenadas del eje y, esto divido por la diferencia entre las coordenadas del eje x. luego se presenta en forma canoníca de pendiente, que es:* $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$ se utiliza graficador para una mejor comprensión de lo tratado y para presentar a los alumnos cuando una recta presenta pendiente positiva, negativa, cero o indefinida.(actividad 2) Se entrega guía de trabajo. **Cierre:** El docente pide a los estudiantes que construyan una tabla de dos columnas en donde indiquen la pendiente (positiva, negativa, cero o indefinida) y su tipo de recta asociada, (ascendente, descendente, horizontal o vertical).	? x (y = a ? x). -Identifican la pendiente del gráfico de la función f(x) = a ? x con el factor a.	grado de atención de éstos. • b) Revisión de los ejercicios propuestos en la guía.

<table>
<tr><td colspan="4">DISEÑO CLASE Nº 8</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nombre Docentes:
Luis Gajardo F. – Pedro Venegas S.</td><td colspan="2">Fecha:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Establecimiento:</td><td colspan="2">Curso:
Octavo Año Básico</td></tr>
<tr><td colspan="4">Unidad:
Algebra y Funciones</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo de Aprendizaje:
-Mostrar que comprenden la función afín: generalizándola como la suma de una constante con una función lineal, trasladando funciones lineales en el plano cartesiano, determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, relacionándola con el interés simple, utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.
-Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas, usando metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre x e y, representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo Clase:
Modelar situaciones asociadas a la función afín.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Contenidos previos:</td></tr>
<tr><td>Contenidos</td><td>Momentos de la clase</td><td>Indicadores</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>•</td></tr>
<tr><td>Constante de proporcionalidad
Tablas
Graficas
Ecuación
función Afín
Funciones
Lineales</td><td>Inicio:
Pide a los estudiantes que realicen una síntesis de la clase anterior.
Luego escribe en la pizarra las características de la función lineal que han sido estudiadas, y menciona que existen diferentes tipos de funciones pero que en particular existe una que es muy similar a la función lineal que recibe el nombre de función afín.
Desarrollo:
El docente explica el significado de la función afín, y la define como: Una función afín es aquella cuya expresión algebraica es del tipo</td><td>-Representan, completan y corrigen tablas y gráficos pertenecientes a cambios con una base fija y tasa de cambio constante.
-Elaboran, basados en los gráficos, la ecuación de la función afín $f(x) = a ? x+b$.
-Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente (“constante de proporcionalidad”).
-Modelan situaciones de la vida</td><td>• Evaluación de proceso.

• a) Interrogación a los estudiantes durante el desarrollo de la clase, considerando el grado de atención de éstos.

• b) Revisión de los</td></tr>
</table>

	$y = m \times x + n$, siendo m y n números distintos de 0, y presenta las siguientes características: - su gráfica es una línea recta. - el número m es la pendiente. - el número n es **la ordenada en el origen**. La recta corta al eje Y en el eje $(0,n)$. como ejemplo graficaremos la función lineal afín $y = -2x + 3$ (actividad 1) Algunos ejemplos de situaciones de la vida diaria que se pueden modelar por una función afín serían: Viaje en un taxi, cuenta del agua, compra a crédito dando un pie inicial. Se entrega guía de trabajo. **Cierre:** El docente realiza cuadro comparativo con ayuda de los estudiantes cuáles son las diferencias existentes entre la función afín y lineal, y les pide a ellos que den ejemplos de la vida cotidiana	cotidiana o de ciencias con funciones lineales.	ejercicios propuestos en la guía.

DISEÑO CLASE Nº 9

Nombre Docentes: Luis Gajardo F. – Pedro Venegas S.	**Fecha:**
Establecimiento:	**Curso:** Octavo Año Básico

Unidad:
Algebra y Funciones

Objetivo de Aprendizaje:
Mostrar que comprenden la función afín: generalizándola como la suma de una constante con una función lineal, trasladando funciones lineales en el plano cartesiano, determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, relacionándola con el interés simple, utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

Objetivo Clase:
Identificar gráficos que representan la función lineal y la función afín.

Contenidos previos:

Contenidos	Momentos de la clase	Indicadores	Evaluación
Concepto función Afín Inecuaciones Pendiente de la recta Constante de proporcionalidad Tablas Gráficos	**Inicio:** El docente proyecta imagen con diversas gráficas y pregunta: ¿cuál de ellos representa una función lineal y cuál representa una función afín? (actividad 1) **Desarrollo:** El docente entrega la guía de trabajo, para que trabajen en parejas. Explica que los gráficos de una función son muy importantes y que por ello se realizará su análisis. Pide a los estudiantes que recuerden cuáles son los pasos para realizar el gráfico de una función y los escribe en la pizarra. El docente verifica el trabajo de los estudiantes de manera personal. Les pide a los estudiantes que tengan especial cuidado con	-Representan, completan y corrigen tablas y gráficos pertenecientes a cambios con una base fija y tasa de cambio constante. -Elaboran, basados en los gráficos, la ecuación de la función afín f(x) = a ? x+b. -Determinan las regiones en el plano cartesiano cuyos puntos p(x|y) representan soluciones (x|y) de las inecuaciones y < a ? x+b o y > a ? x+b. -Identifican, en la ecuación funcional, el factor a con la pendiente de la recta y el sumando b con el segmento entre el punto de intersección del gráfico con el eje vertical y el origen o (0|0). -Elaboran gráficos de funciones afines a	• Evaluación de proceso. • a) Revisión de los ejercicios propuestos en la guía.

	los cálculos de los pares ordenados y con el uso de la escala en el gráfico. Se revisa el trabajo en la pizarra con las opiniones de todos los estudiantes. El docente escribe de manera formal el significado y uso de los parámetros m o pendiente, y n o coeficiente de posición. Posteriormente, el docente proyecta un programa graficador (geogebra) y junto a los estudiantes se van cambiando los parámetros de la función lineal y afín para observar los cambios en su gráfica. gráfica función lineal y afín **Cierre:** El docente pide a los estudiantes que observen los gráficos del inicio de la clase y señalen cuál es la pendiente aproximada, el coeficiente de posición y si se trata de una función lineal o afín.	y b dadas o con dos puntos dados y verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación f(x) = a ? x+b.	

DISEÑO CLASE Nº 10	
Nombre Docentes: Luis Gajardo F. – Pedro Venegas S.	**Fecha:**
Establecimiento:	**Curso:** Octavo Año Básico
Unidad: Algebra y Funciones	
Objetivo de Aprendizaje: Mostrar que comprenden la función afín: generalizándola como la suma de una constante con una función lineal, trasladando funciones lineales en el plano cartesiano, determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, relacionándola con el interés simple, utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.	
Objetivo Clase: Graficar en software geométrico funciones lineal y afín.	
Contenidos previos:	

Contenidos	**Momentos de la clase**	**Indicadores**	**Evaluación**
Concepto función Afín Pendiente de la recta Gráficos	**Inicio:** El docente pide a los estudiantes que realicen la gráfica de la función y = 2x-3 a mano alzada sin calcular pares ordenados. (Actividad 1) Pide un voluntario para que pase a la pizarra a dibujar su gráfico. Se analiza lo que el compañero haya realizado, sus compañero opinan si es correcto o no, utilizando las conclusiones que ya han obtenido a partir del trabajo realizado. El docente explica que es de suma importancia ser capaz de realizar un gráfico con esa simple información, y que se puede hacer sin problemas si uno comprende bien el funcionamiento de los parámetros pendiente y coeficiente de posición.	-Elaboran, basados en los gráficos, la ecuación de la función afín f(x) = a ? x+b. -Identifican, en la ecuación funcional, el factor a con la pendiente de la recta y el sumando b con el segmento entre el punto de intersección del gráfico con el eje vertical y el origen o (0|0). -Elaboran gráficos de funciones afines a y b dadas o con dos puntos dados y verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación f(x) = a ? x+b.	• Evaluación de proceso. • a) Revisión de los ejercicios propuestos en la guía.

	Desarrollo: El docente muestra a los estudiantes el vídeo, escribe en la pizarra los siguientes títulos: - realizar recta - realizar barra deslizadora Pide a los estudiantes que le describan como llevar a cabo esas dos actividades en Geogebra según lo descrito por el vídeo. El docente pide a los estudiantes que realicen su función lineal con parámetro m que tendrá una barra deslizadora desde el -10 al 10. Luego añadan el coeficiente de posición n desde -10 a 10. Los estudiantes desarrollan la guía de trabajo que el docente les entregará. **Cierre:** Se lleva a cabo un plenario para revisar las respuestas a las preguntas desarrolladas en la guía de trabajo.		

<table>
<tr><td colspan="4">DISEÑO CLASE Nº 11</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nombre Docentes:
Luis Gajardo F. – Pedro Venegas S.</td><td colspan="2">Fecha:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Establecimiento:</td><td colspan="2">Curso:
Octavo Año Básico</td></tr>
<tr><td colspan="4">Unidad:
Algebra y Funciones</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo de Aprendizaje:
-Mostrar que comprenden la función afín: generalizándola como la suma de una constante con una función lineal, trasladando funciones lineales en el plano cartesiano, determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, relacionándola con el interés simple, utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.
-Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas, usando metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre x e y, representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo Clase:
Determinar la función lineal o afín conociendo algunas de sus características.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Contenidos previos:</td></tr>
<tr><td>Contenidos</td><td>Momentos de la clase</td><td>Indicadores</td><td>Evaluación</td></tr>
<tr><td>Concepto función Lineal
Concepto función Afín
Pendiente de la recta
Escalares
Sistema de coordenada</td><td>Inicio:
El docente presenta la siguiente situación:
Completaremos una tabla con los sueldos de un corredor de propiedades de una empresa que recibe $ 300.000 más un 2 % de las ventas de casas que realice en un mes:
Primero, podemos identificar que si
x representa el monto de las ventas realizadas en millones de pesos
¿Cuál es la función que representa el sueldo del corredor de propiedades? (actividad 1)
El docente espera que los estudiantes generen ideas para solucionar el problema, pero ellos se darán cuenta de que si dividen el total de la</td><td>-Identifican, en la ecuación funcional, el factor a con la pendiente de la recta y el sumando b con el segmento entre el punto de intersección del gráfico con el eje vertical y el origen o (0|0).
-Elaboran gráficos de funciones afines a y b dadas o con dos puntos dados y verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación f(x) = a ? x+b.
-Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales f(x) = a ? x (y = a ? x).</td><td>• Evaluación de proceso.
• a) Interrogación a los estudiantes durante el desarrollo de la clase, considerando el grado de atención de éstos.
• b) Revisión de los ejercicios</td></tr>
</table>

	boleta por la cantidad de kw les saldrán valores diferentes. El docente les invita a graficar la situación para buscar respuestas. Se puede utilizar la presentación ppt para presentar el problema. problema calculo ecuación de la recta **Desarrollo:** El docente revisa los gráficos que los estudiantes han realizado y pregunta: ¿de qué sirve hacer un gráfico en la situación que ellos están representando? Una posible respuesta es que si el gráfico queda muy bien hecho va a presentar de manera inmediata el coeficiente de posición correspondiente al cargo fijo. El docente explica como calcular la pendiente de la función. Idealmente el docente va a volver al gráfico y explicar gráficamente el significado de la pendiente. Los estudiantes deben comprender que la razón de cambio que corresponde a la pendiente está representando el valor de kilowatt hora. El docente debe ayudar a los estudiantes para que ellos mismos puedan comprenderlo. El docente explica como calcular el coeficiente de posición mediante el reemplazo directo en la ecuación de la forma y=mx+n y pide a los estudiantes que busquen teorías para que entiendan lo que significa el coeficiente de posición en el problema dado. Cuando se ha terminado el problema, el docente hace una síntesis de los pasos que se siguieron para encontrar el resultado del ejercicio. El docente proyecta el vídeo para reforzar los contenidos vistos.	-Representan la linealidad f(kx) = kf(x) y f(x1 x2) = f(x1) f(x2) en tablas y gráficos.	propuestos.

	Cierre: Se revisan los ejercicios realizados por los estudiantes, se deja la siguiente tarea: El docente plantea la siguiente situación, para que sea analizada y respondida por los estudiantes. Marcela compró 12 cajas de cerámicas y le cobraron $72.800, pero no fue suficiente así que debió pedir dos cajas de cerámicas más y le cobraron $18.800. ¿Cuál es el valor de cada caja de cerámica?, ¿cuál es el costo de envío del producto?		

DISEÑO CLASE Nº 12	
Nombre Docentes: Luis Gajardo F. – Pedro Venegas S.	**Fecha:**
Establecimiento:	**Curso:** Octavo Año Básico
Unidad: Algebra y Funciones	
Objetivo de Aprendizaje: -Mostrar que comprenden la función afín: generalizándola como la suma de una constante con una función lineal, trasladando funciones lineales en el plano cartesiano, determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, relacionándola con el interés simple, utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas. -Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas, usando metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre x e y, representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.	
Objetivo Clase: Resolver problemas que se pueden modelar mediante una función lineal o afín.	
Contenidos previos:	

Contenidos	Momentos de la clase	Indicadores	Evaluación
Concepto función Lineal Concepto función Afín Proporcionalidad Grafica Tablas	**Inicio:** El docente les recuerda a los estudiantes que ya la clase anterior tuvieron que resolver problemas, y consulta: ¿Qué pudieron aprender al resolver ese tipo de problemas? Se anotan en la pizarra las sugerencias que entreguen los estudiantes en cuanto a la resolución de problemas de función afín y lineal. **Desarrollo:** El docente solicita a un estudiante que cree una situación problemática que se pueda modelar con una función lineal, y a otro estudiante le solicita que cree un problema que se pueda modelar con una función afín. Registra estos ejemplos en la pizarra. Le asignan las variables, los expresan como función, construyen tablas de valores, grafican y responden preguntas relacionadas con las situaciones de ejemplo. (actividad 1) Se entrega guía de ejercicios, para que los estudiantes trabajen en la clase. El docente supervisa el trabajo y responde consultas. Al finalizar, se realiza la corrección de la guía por parte de los estudiantes. **Cierre:** El docente invita a los estudiantes a compartir cuáles problemas les resultaron más interesantes y por qué razón. Escriben en la pizarra algunos consejos para poder resolver problemas de la mejor manera posible.	-Diferencian modelos afines, lineales y de proporcionalidad inversa. -Modelan situaciones de la vida diaria o de ciencias con funciones afines. -Resuelven problemas de la vida diaria o de ciencias que involucran el cambio constante expresado mediante ecuaciones recursivas de la forma $f(x+1) – f(x) = c$. -Modelan situaciones de la vida cotidiana o de ciencias con funciones lineales.	• Evaluación de proceso. • a) Interrogación a los estudiantes durante el desarrollo de la clase, considerando el grado de atención de éstos. • b) Revisión de los ejercicios propuestos en la guía.

Clase Nº 1	
Duración	2 horas pedagógicas
Unidad	Algebra y Funciones
Contenido	Retroalimentación de Proporciones
Objetivo de Aprendizaje	Demostrar que comprenden las proporciones directas e inversas: realizando tablas de valores para relaciones proporcionales, graficando los valores de la tabla, explicando las características de la gráfica, resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.
Indicador	-Relacionan concepto de proporciones con porcentaje. - Reconocen cambios en la vida cotidiana que se desarrollan de forma directamente proporcional. - Reconocen cambios en la vida cotidiana que se desarrollan en forma inversamente proporcional. - Sintetizan proporcionalidad directa e inversa en tablas de valores, gráficos y situaciones reales.
Objetivo de la Clase	Reconocer Proporciones directas e inversas y sus constantes.
Herramientas a utilizar	-Equipo audiovisual. -Computador. -Guía de ejercicios. -Pizarra, plumones, cuaderno y lápices.

Clase Nº 2	
Duración	2 horas pedagógicas
Unidad	Algebra y Funciones
Contenido	Concepto de Función
Objetivo de Aprendizaje	**OA7U2** - Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas, usando metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre x e y, representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.
Indicador	**2-** Descubren el concepto de función mediante la relación de proporcionalidad directa. **4-** Representan la noción de función de manera concreta (utilizando metáforas de máquinas), pictórica o simbólica.
Objetivo de la Clase	Identificar las variables que están involucradas en funciones que modelan situaciones de la vida cotidiana.
Herramientas a utilizar	-Equipo audiovisual. -Computador. -Pizarra, plumones, cuaderno y lápices.

Clase Nº 3	
Duración	2 horas pedagógicas
Unidad	Algebra y Funciones
Contenido	Función
Objetivo de Aprendizaje	**OA7U2 -** Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas, usando metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre x e y, representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.
Indicador	**1-**Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente (“constante de proporcionalidad”). **2-**Descubren el concepto de función mediante la relación de proporcionalidad directa. **4-**Representan la noción de función de manera concreta (utilizando metáforas de máquinas), pictórica o simbólica.
Objetivo de la Clase	Identificar y evaluar funciones y variables.
Herramientas a utilizar	-Equipo audiovisual. -Computador. -Pizarra, plumones, cuaderno y lápices.

Clase Nº 4	
Duración	2 horas pedagógicas
Unidad	Algebra y Funciones
Contenido	Variables Independientes y Dependientes
Objetivo de Aprendizaje	**OA7U2 -** Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas, usando metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre x e y, representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.
Indicador	**1-**Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente (“constante de proporcionalidad”). **4-**Representan la noción de función de manera concreta (utilizando metáforas de máquinas), pictórica o simbólica. **5-**Elaboran las valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales f(x) = a?x (y = a ? x).
Objetivo de la Clase	Representar situaciones problemáticas modeladas por una función, en tablas y gráficos, identificando variables.

Herramientas a utilizar	-Equipo audiovisual. -Computador. -Pizarra, plumones, cuaderno y lápices.

Clase Nº 5	
Duración	2 horas pedagógicas
Unidad	Algebra y Funciones
Contenido	Dominio y Recorrido
Objetivo de Aprendizaje	**OA7U2 -** Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas, usando metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre x e y, representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.
Indicador	**1-**Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente (“constante de proporcionalidad”). **4-**Representan la noción de función de manera concreta (utilizando metáforas de máquinas), pictórica o simbólica. **5-**Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales f(x) = a?x (y = a ? x).
Objetivo de la Clase	Analizar situaciones a través de tablas y gráficos.
Herramientas a utilizar	Equipo audiovisual. Computador. Pizarra, plumones, cuaderno y lápices.

Clase Nº 6	
Duración	2 horas pedagógicas
Unidad	Algebra y Funciones
Contenido	Función Lineal
Objetivo de Aprendizaje	**OA7U2 -** Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas, usando metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre x e y, representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.
Indicador	**6-**Representan la linealidad f(kx) = kf(x) y f(x1 x2) = f(x1) f(x2) en tablas y gráficos. **7-**Identifican la pendiente del gráfico de la función f(x) = a ? x con el factor a.
Objetivo de la	Identificar funciones lineales en contextos de proporcionalidad.

Clase	
Herramientas a utilizar	-Equipo audiovisual, -Computador. -Guía de trabajo. -Pizarra, plumones, cuaderno y lápices.

Clase Nº 7	
Duración	2 horas pedagógicas
Unidad	Algebra y Funciones
Contenido	Función Lineal y Pendiente
Objetivo de Aprendizaje	**OA7U2 -** Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas, usando metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre x e y, representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.
Indicador	**2-**Descubren el concepto de función mediante la relación de proporcionalidad directa. **3-**Descubren que la inclinación (pendiente) de la gráfica depende de la constante de la proporcionalidad. **5-**Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales f(x) = a?x (y = a ? x). **7-**Identifican la pendiente del gráfico de la función f(x) = a ? x con el factor a.
Objetivo de la Clase	Reconocer la recta asociada a su pendiente.
Herramientas a utilizar	-Equipo audiovisual. -Computador. -Guía de trabajo. -Software Geogebra. -Pizarra, plumones, cuaderno y lápices.

Clase Nº 8	
Duración	2 horas pedagógicas
Unidad	Algebra y Funciones
Contenido	Función Afín
Objetivo de Aprendizaje	**OA10U2 -**Mostrar que comprenden la función afín: generalizándola como la suma de una constante con una función lineal, trasladando funciones lineales en el plano cartesiano, determinando el cambio constante de un intervalo a

	otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, relacionándola con el interés simple, utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas. **OA7U2 -**Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas, usando metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre x e y, representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.
Indicador	**OA10U2 -** **1-**Representan, completan y corrigen tablas y gráficos pertenecientes a cambios con una base fija y tasa de cambio constante. **2-**Elaboran, basados en los gráficos, la ecuación de la función afín f(x) = a ? x+b. **OA7U2 -** **1-**Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente ("constante de proporcionalidad"). **9-**Modelan situaciones de la vida cotidiana o de ciencias con funciones lineales.
Objetivo de la Clase	Modelar situaciones asociadas a la función afín.
Herramientas a utilizar	-Equipo audiovisual. -Computador. -Guía de ejercicios. -Pizarra, plumones, cuaderno y lápices.

	Clase Nº 9
Duración	2 horas pedagógicas
Unidad	Algebra y Funciones
Contenido	Gráfico de función Lineal y Afín
Objetivo de Aprendizaje	**OA10U2 -**Mostrar que comprenden la función afín: generalizándola como la suma de una constante con una función lineal, trasladando funciones lineales en el plano cartesiano, determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, relacionándola con el interés simple, utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.
Indicador	**1-**Representan, completan y corrigen tablas y gráficos pertenecientes a cambios con una base fija y tasa de cambio constante. **2-**Elaboran, basados en los gráficos, la ecuación de la función afín f(x) = a ? x+b.

	3-Determinan las regiones en el plano cartesiano cuyos puntos p(x|y) representan soluciones (x|y) de las inecuaciones y < a ? x+b o y > a ? x+b. **6**-Identifican, en la ecuación funcional, el factor a con la pendiente de la recta y el sumando b con el segmento entre el punto de intersección del gráfico con el eje vertical y el origen o (0|0). **7**-Elaboran gráficos de funciones afines a y b dadas o con dos puntos dados y verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación f(x) = a ? x+b.
Objetivo de la Clase	Identificar gráficos que representan la función lineal y la función afín.
Herramientas a utilizar	-Equipo audiovisual. -Computador. -Lámina de ejemplo. -Guía de ejercicios. -Software Geogebra -Pizarra, plumones, cuaderno y lápices.

	Clase Nº 10
Duración	2 horas pedagógicas
Unidad	Algebra y Funciones
Contenido	Gráfico función Lineal y Afín en Geogebra
Objetivo de Aprendizaje	**OA10U2** -Mostrar que comprenden la función afín: generalizándola como la suma de una constante con una función lineal, trasladando funciones lineales en el plano cartesiano, determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, relacionándola con el interés simple, utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.
Indicador	**2**-Elaboran, basados en los gráficos, la ecuación de la función afín f(x) = a ? x+b. **6**-Identifican, en la ecuación funcional, el factor a con la pendiente de la recta y el sumando b con el segmento entre el punto de intersección del gráfico con el eje vertical y el origen o (0|0). **7**-Elaboran gráficos de funciones afines a y b dadas o con dos puntos dados y verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación f(x) = a ? x+b.
Objetivo de la Clase	Graficar en software geométrico funciones lineal y afín.
Herramientas a utilizar	-Sala de computación. -Equipo audiovisual. -Computador -Guía de trabajo -Software Geogebra.

Clase Nº 11	
Duración	2 horas pedagógicas
Unidad	Algebra y Funciones
Contenido	Determinar ecuación de la recta
Objetivo de Aprendizaje	**OA10U2 -**Mostrar que comprenden la función afín: generalizándola como la suma de una constante con una función lineal, trasladando funciones lineales en el plano cartesiano, determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, relacionándola con el interés simple, utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas. **OA7U2 -**Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas, usando metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre x e y, representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.
Indicador	**OA10U2 -** **6-**Identifican, en la ecuación funcional, el factor a con la pendiente de la recta y el sumando b con el segmento entre el punto de intersección del gráfico con el eje vertical y el origen o (0|0). **7-**Elaboran gráficos de funciones afines a y b dadas o con dos puntos dados y verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación f(x) = a ? x+b. **OA7U2 –** **5-**Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales f(x) = a ? x (y = a ? x). **6-**Representan la linealidad f(kx) = kf(x) y f(x1 x2) = f(x1) f(x2) en tablas y gráficos.
Objetivo de la Clase	Determinar la función lineal o afín conociendo algunas de sus características.
Herramientas a utilizar	-Equipo audiovisual -Computador, -PPT. -Pizarra, plumones, cuaderno y lápices.

Clase Nº 12	
Duración	2 horas pedagógicas
Unidad	Algebra y Funciones
Contenido	Problemas de función Lineal y Afín
Objetivo de Aprendizaje	**OA10U2 -**Mostrar que comprenden la función afín: generalizándola como la suma de una constante con una función lineal, trasladando funciones lineales en el plano cartesiano, determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, relacionándola con el interés simple, utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas. **OA7U2 -**Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas, usando metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre x e y, representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.
Indicador	**OA10U2 -** **4-**Diferencian modelos afines, lineales y de proporcionalidad inversa. **5-**Modelan situaciones de la vida diaria o de ciencias con funciones afines. **8-**Resuelven problemas de la vida diaria o de ciencias que involucran el cambio constante expresado mediante ecuaciones recursivas de la forma $f(x+1) – f(x) = c$. **OA7U2 -** **9-**Modelan situaciones de la vida cotidiana o de ciencias con funciones lineales.
Objetivo de la Clase	Resolver problemas que se pueden modelar mediante una función lineal o afín.
Herramientas a utilizar	-Pizarra, plumones, cuaderno y lápices. -Guía de ejercicios.

Diseño de aula

Clase 1	Retroalimentación de Proporciones
Indicadores	-Relacionan concepto de proporciones con porcentaje. - Reconocen cambios en la vida cotidiana que se desarrollan de forma directamente proporcional. - Reconocen cambios en la vida cotidiana que se desarrollan en forma inversamente proporcional. - Sintetizan proporcionalidad directa e inversa en tabla de valores, gráficos y situaciones reales.

Actividad 1: "Encontrar relación entre porcentaje y proporcionalidad"
Tipo de transformación: Conversión
Ejercicios:

Si un curso tiene 25 estudiantes. Si el 60% de ellos hizo su tarea, ¿Cuántos estudiantes hicieron su tarea? ¿Qué sucedería si se aumenta el porcentaje de alumnos que no hicieron la tarea? ¿Aumenta otro valor? (Mediante una tabla).

Análisis a priori

Lo correcto para este ejercicio sería

a %

$$\frac{25}{x} = \frac{100}{60} \longrightarrow X = \frac{25\times 60}{100} = \frac{1500}{100} = 15$$

Siendo la respuesta para la primera pregunta 15 alumnos hicieron su tarea.

Los errores que puede presentar este problema, son los siguientes:

Caso 1

a %

$$\frac{25}{60} = \frac{100}{x} \longrightarrow X = \frac{100\times 60}{25} = \frac{6000}{25} = 240$$

Caso 2

a %

$$\frac{x}{25} = \frac{100}{60} \longrightarrow X = \frac{25\times 100}{60} = \frac{2500}{60} = 41.7$$

Como se observa en los casos anteriores los errores que pueden cometer los alumnos se encuentran en la ubicación que puedan dar a cada cifra al resolver el problema.

Para las preguntas que continúan en el problema las respuestas correctas serían:

>Si aumenta el número de estudiantes que no hicieron la tarea aumenta igual su porcentaje.
>Si aumenta el número de estudiantes que no hicieron la tarea disminuye el número de alumnos que si hicieron la tarea.
>Si aumenta el número de estudiantes que no hicieron la tarea disminuye el porcentaje de alumnos que hicieron la tarea.

Lo incorrecto sería:

>Si aumenta el número de estudiantes que no hicieron la tarea disminuye su porcentaje.
>Si aumenta el número de estudiantes que no hicieron la tarea disminuye el número de estudiantes.

Actividad 2: "Encontrar la razón para los diferentes problemas de la vida cotidiana"
Tipo de transformación: Conversión
Ejercicios:

- La razón entre la distancia recorrida d y el tiempo t, si se recorren 400km en 4 horas.
- La razón entre la masa m de un cuerpo y su volumen V si m = 5600 kg y v = $5m^3$.
- La razón entre cantidad x de vueltas y el tiempo t empleado en realizarlas, si en 10 minutos dan 7 vueltas.

Análisis a priori

Lo correcto para cada ejercicio seria:

a) $\frac{400km}{4hrs} = 100{}^{km}/_{hr}$ b) $\frac{5600kg}{5m^3} = 1120\ {}^{kg}/_{m^3}$ c) $\frac{7vueltas}{10\ min} = 0.7\ {}^{vueltas}/_{min}$

Los errores que pueden presentar los estudiantes en este problema se producen solo en donde ubiquen los números ya que con esto genera un resultado erróneo.

Actividad 3: "Análisis de tablas"
Tipo de transformación: Conversión
Ejercicio:

- Analiza las tablas y determina si las variables son directamente proporcionales. Para ello, calcula la constante de proporcionalidad

X	Y
3	1
6	2
9	3

A	B
6	8
12	4
18	2

C	D
6	6
3	12
10	3

Análisis a priori

Lo correcto para estos ejercicios es como se presenta a continuación:

a) $\frac{3}{1} = 3$ b) $\frac{6}{2} = 3$ c) $\frac{9}{3} = 3$; por lo tanto en la primera tabla de variables X e Y vemos que si se cumple la constante (k) de proporcionalidad directa.

a) $\frac{6}{8} = 0{,}75$ b) $\frac{12}{4} = 3$; por lo tanto en la tabla de variables A y B vemos que no se cumple la constante (k) de proporcionalidad directa.

a) $\frac{6}{6} = 1$ b) $\frac{3}{12} = 0{,}25$; por lo tanto en la tabla de variables C y D vemos que no se cumple la constante (k) de proporcionalidad directa.

Los errores que se pueden presentar en este caso en las diferentes tablas es que los estudiantes selección números que pertenecen a la misma variable, para ello seleccionaremos un ejemplo de la tabla de variables X e Y que si obtuvo la constante de proporcionalidad directa.

a) $\frac{3}{6} = 0{,}5$; siendo erróneo ya que no es la constante de proporcionalidad y no considero ambas variables.

Actividad 4: "Mediante un problema de la vida cotidiana realizar una tabla, encontrar la constante k y graficar los datos propuestos"
Tipo de transformación: Conversión
Ejercicio:
Si un kilogramo de paltas tiene un precio de $2000, ¿Cuánto cuestan 2 kilos te paltas? ¿Cuánto cuestan 3 kilos de paltas? Encuentra la constante K para verificar si es directamente proporcional. Crea una tabla donde se observe lo que cuesta un kilo de paltas hasta los 5 kilos y luego grafica.

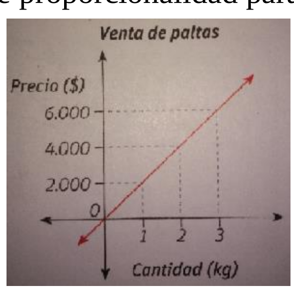
Análisis a priori

Lo correcto para este problema sería que el estudiante genere una tabla de doble entrada, como la siguiente:

Venta de paltas					
Precio ($)	2000	4000	6000	8000	10000
Cantidad (kg)	1	2	3	4	5

Ahora de la tabla calculando la constante de proporcionalidad, para verificar si es una proporción directa o no.

a) $\frac{2000}{1} = 2000$ b) $\frac{4000}{2} = 2000$ c) $\frac{6000}{3} = 2000$ d) $\frac{8000}{4} = 2000$ e) $\frac{10000}{5} = 2000$
Por lo tanto esta relación que se establece entre estas variables es una proporción directa, ya que presenta una constante (k) de proporcionalidad para cada una de sus relaciones.



Errores que pueden presentar los estudiantes al realizar este ejercicio.

i) Que ubiquen mal los datos en la tabla y con ello no obtengan la constante de proporcionalidad
ii) Que al graficar planten mal los intervalos y con ello no obtener una línea recta como lo es la grafica de la proporción directa que interseca el eje de coordenada en el origen.

Actividad 5: "Análisis de tablas"
Tipo de transformación: Conversión
Ejercicio:

- Analiza las tablas y determina si las variables son inversamente proporcionales. Para ello, calcula la constante de proporcionalidad.

X	Y
5	12
10	6
15	4

A	B
3	15
6	30
12	60

C	D
0,5	0,02
0,4	0,025
0,1	0,1

Análisis a priori

Lo correcto para estos ejercicios seria lo siguiente:

Debe el estudiante multiplicar cada valor otorgado a la variable que se encuentren relacionados. Como ejemplo primera tabla.
a) 5×12= 60 b) 10×6= 60 c) 15×4= 60. Por lo tanto la primera tabla es inversamente proporcional.

Segunda tabla.
a) 3×15= 45 b) 6×30= 180. Al no obtener el mismo resultado no se consideran proporciones, y en esta situación no se presenta proporcionalidad inversa.

Tercera tabla.
a) 0,5×0,02= 0,01 b) 0,4×0,025= 0,01 c) 0,1×0,1= 0,01. Por lo tanto en esta relación se establece la proporcionalidad inversa.

Lo incorrecto para este ejercicio sería lo siguiente:

a) Que los estudiantes relacionen las variables como si fuera una proporcionalidad directa donde los resultados obtenidos estarían erróneos. Ejemplo primera tabla.

a) $\frac{5}{12} = 0.41666\ldots$ b) $\frac{10}{6} = 1.6666\ldots$ aquí se observa el error ya que al relacionar las variables como si fuesen directamente proporcionales se obtiene un resultado distinto, con ello se observa que no es inversamente proporcional.

b) Otro error sería que los estudiantes relacionen cualquier digito como variable. Como ejemplo segunda tabla.

a)3×6= 18. Aquí el alumno obtendría siempre resultados distintos y generaría una respuesta errónea para este ejercicio.
Actividad 6: "Mediante un problema **Tipo de transformación:** Conversión de la vida cotidiana realizar una tabla, encontrar la constante k y graficar los datos propuestos" **Ejercicio:** Si se consideran los rectángulos de área 36 cm^2, ¿las variables largo y ancho son inversamente proporcionales? ¿Cuál es el largo de un rectángulo cuyo ancho es 2 cm? Crea una tabla hasta que se observen el ancho de un rectángulo de longitud 5 cm.

Análisis a priori

a) La respuesta correcta para la primera pregunta sería, si son inversamente proporcionales ya que al aumentar la dimensión de uno de los lados del rectángulo el otro debe disminuir en su dimensión ya que con la relación entre ambos debe obtener como resultado 36 cm^2

b) Para poder obtener la respuesta para la pregunta dos el estudiante debe confeccionar una tabla.

Dimensión de lados para rectángulo de 36 cm^2					
Ancho	1	2	3	4	5
Largo	36	18	12	9	7,2

Por lo tanto la respuesta seria que: para un rectángulo de ancho 2cm su largo sería 18cm.

Lo incorrecto para este ejercicio sería:

Para la primera pregunta.
a) No son inversamente proporcionales ya que si aumenta una dimensión la otra igual aumenta.

b) Que multiplique 36 por 2 y con ello obtenga como resultado 72, y responda con ese resultado que el ancho del rectángulo es 72cm

c) Con lo anterior generaría una tabla con dimensiones correspondientes al Largo del rectángulo incorrectas.

Diseños de Aula

Clase 2	Variables dependientes e independientes
Indicadores	Identifican variables dependientes e independientes en situaciones de la vida cotidiana.

Actividad 1: Noción de variables
Tipo de transformación: conversión

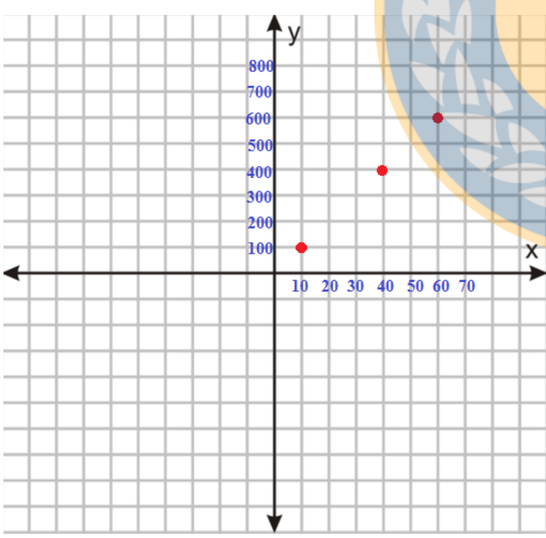
- *Al jugar playstation en un local de juegos donde cobran $100 x 10 minutos de juego.*

Minutos de juego	*$*
10	*100*
40	*400*
60	*600*

- *Al comprar huevos en un negocio.(que cuestan $120)*

Cantidad de huevos	*$*
1	*120*
2	*240*
6	*720*

A continuación deben identificar las mismas variables del primer ejemplo en un gráfico:



Análisis a priori

Siendo esta una actividad de inicio los alumnos deben identificar mediante las tablas cuales son variables.
La respuesta correcta que deben generar los estudiantes será:

a) Las variables para la primera tabla, serían variable independiente, los minutos de juego y la variable dependiente es el dinero que se debe cancelar por el tiempo de juego.

b) Las variables para la segunda tabla, serían variable independiente, cantidad de huevos y la variable dependiente es el dinero que se debe cancelar por cierto número de huevos.

c) en el gráfico deben identificar que la cantidad de minutos que corresponde a la variable independiente se encuentra ubicada en el eje X y la cantidad de dinero a pagar (variable dependiente) se encuentra en el eje Y

Lo incorrecto para esto sería:

a) Que los estudiantes identifiquen como variable los dígitos propuestos en las tablas.

b) Que los estudiantes identifiquen como variable independiente el valor a pagar en cada tabla y como variable dependiente los minutos de juego y la cantidad de huevos.

c) Para la información proporcionada en el gráfico, sería incorrecto que los alumnos ubicaran la cantidad de minutos jugados en el eje Y y la cantidad a pagar en el eje X.

Actividad 2:
Tipo de transformación: tratamiento
Dada la siguiente situación: *"tus padres quieren fomentar tus estudios y mejorar tu rendimiento en la escuela. Para esto idearon darte una mesada con cierta cantidad de dinero por cada tarea que realices"*

Identifica la variable dependiente y la variable independiente para esta situación marcando con una X en el recuadro que corresponda

	Variable dependiente	Variable independiente
El número de tareas que haces		X
La cantidad de dinero que ganas	X	

Análisis a priori

Lo correcto que debiese contestar el estudiante al identificar las diferentes variables sería:

a) El número de tareas es una variable independiente.
b) La cantidad de dinero que ganará será una variable dependiente.

Lo incorrecto sería

a) El número de tareas es una variable dependiente.
b) La cantidad de dinero que ganas será una variable independiente.

Actividad 3:

Tipo de transformación: tratamiento

Compras cajas de galletas en una panadería. Cada caja de galletas cuesta $2000.
¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?
Elige las respuestas que consideres correctas marcando con una X en él ☐ :

☐ La variable dependiente es el número de cajas de galletas que compras.
☐ La variable independiente es el número de cajas de galletas que compras.
☐ La variable dependiente es la cantidad de dinero que gastas en galletas.
☐ La variable independiente es la cantidad de dinero que gastas en galletas.

Análisis a priori

Las respuestas correctas que debiese generar los estudiantes para los proposiciones propuestas serían:

i) variable independientes es el número de cajas de galletas que compras.
ii) variable dependiente es la cantidad de dinero que gastas en galletas.

Lo incorrecto que podrían contestar los estudiantes sería:

i) variable dependiente es el número de cajas de galletas que compras.
ii) variable independiente es la cantidad de dinero que gastas en galletas.
iii) sería seleccionar todas las proposiciones.

Actividad 4:
Tipo de transformación: tratamiento

Vas a correr. Por cada milla que corres, quemas 100100100 calorías.
Elige las respuestas que consideres correctas marcando con una X en él ☐ :

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

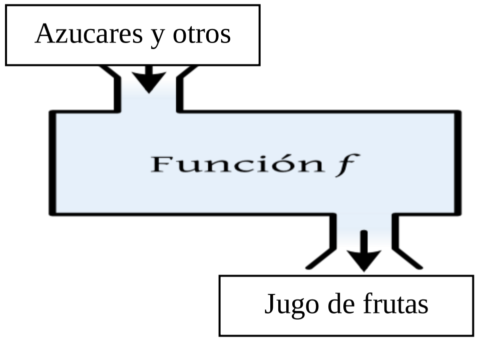
☐ La variable dependiente es el número de millas que corres.
☐ La variable dependiente es la cantidad de calorías que quemas.
☐ La variable independiente es el número de millas que corres.
☐ La variable independiente es la cantidad de calorías que quemas.

Análisis a priori

Lo correcto que debiese contestar el estudiante para las proposiciones propuestas, extraídas del problema serían: i) variable dependiente es la cantidad de calorías que quemas. ii) variable independiente es el número de millas que corres. Lo incorrecto que podría contestar el estudiante para las proposiciones sería: i) variable dependiente es el número de millas que corres. ii) variable independiente es la cantidad de calorías que quemas. iii) sería seleccionar todas las proposiciones.
Actividad 5: Tipo de transformación: tratamiento **Se llama variable dependiente a:** a) La variable y, ya que su valor depende de la variable x. b) La variable x, ya que asume cualquier valor. c) A la constante. d) A los coeficientes numéricos.
Análisis a priori Lo correcto para esta actividad que debiesen responder los estudiantes sería: a) la variable y, ya que su valor depende de la variable x. Lo incorrecto que podría contestar un estudiante para esta actividad sería: b) La variable x, ya que asume cualquier valor. Esto por la importancia de la variable x y por la mala comprensión de lo estudiado c) A la constante. Ya que asumiría que para obtener ese digito necesita de dos variables, ósea dependería de ellos. d) A los coeficientes numéricos. Ya que de ellos depende la grafica y la recta que se observa.

Diseño de aula	
Clase 3	Función
Indicadores	-Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente (“constante de proporcionalidad”). -Descubren el concepto de función mediante la relación de proporcionalidad directa. -Representan la noción de función de manera concreta (utilizando metáforas de máquinas), pictórica o simbólica.
Actividad 1: Identifican variables	

Tipo de transformación: Conversión
Para elaborar 0.6 L de jugo de frutas no gasificado se deben incorporar 48g de azúcares.



1.- ¿Qué ocurre con la cantidad de azúcares que se deben incorporar si el número de litros de jugo disminuye a la mitad de 0.6 L? luego que cantidad de azúcar se necesita para 0.9 L, 1.2 L, 1.5 L, 1.8 L, 2.1 L. construye una tabla.

J (L)	**0.3**	**0.6**	**0.9**	**1.2**	**1.5**	**1.8**	**2.1**
A (g)		48		96			

2.- ¿Por qué para embotellar 1.2 L de jugo se deben agregar 96g de azúcares?

Análisis a priori

Lo correcto que debiesen contestar los estudiantes sería:

1.- Si la cantidad de litros disminuye a la mitad sería $0.6 \div 2 = 0.3$ L, ahora recordando regla de tres simples $\frac{0.3}{x} = \frac{0.6}{48} \rightarrow X = \frac{0.3 \times 48}{0.6} = \frac{14.4}{0.6} = 24$. Por lo tanto lo que ocurre es que al disminuir a la mitad la cantidad de litros de jugo, a si mismo se reduce a la mitad la cantidad de azúcares que se debe agregar.

2.- Esto se debe a que es una relación de proporción directa por lo tanto si una variable aumenta la otra variable igual aumente, al ser directamente proporcional debe cumplir con que su cociente es constante para todos los pares de la tabla

Para 0.3L	Para 0.6L	Para 1.2L
$\frac{24}{0.3} = 80$	$\frac{48}{0.6} = 80$	$\frac{96}{1.2} = 80$

Lo incorrecto que podrían contestar los estudiantes sería:
1.- Que ubique mal los dígitos al utilizar la regla de tres simples.

Ejemplo $\frac{0.3}{x} = \frac{48}{0.6} \rightarrow \frac{0.3 \times 0.6}{48} = \frac{0.18}{48} = 0.00375$ lo que es erróneo.

2.- Aquí el estudiante puede solo observar la tabla que el confecciono y mencionar que aumenta una variable, la otra variable igual aumenta esto sin hacer la relación a través del cociente para obtener la constante de proporcionalidad directa, y con ello no podría determinar por qué se obtuvo 96g de azúcares.

Actividad 2: Completar los enunciados.
Tipo de transformación: Conversión

Para embotellar 0,3 L de jugo hay que agregar:
80×____ = ____ g de azúcares
Para embotellar 0,9 L de jugo hay que agregar:
80×____ = ____ g de azúcares
Para embotellar 90 L de jugo hay que agregar:
80×____ = ____ g de azúcares

Análisis a priori

Lo correcto que debiese responder para esta actividad sería
Ejemplo 1
80×0,3 L = 24 g de azúcares.

Lo incorrecto que el estudiante podría contestar sería:
Ejemplo 1
Que tomaran como referencia el 80 que presenta el docente y realicen una mala relación no siendo litros de jugo a embotellar
80×80 = 1600 g de azúcares.
Otro error sería que consideran el 0,3 para multiplicarlo por 80 pero realizaran una mala multiplicación y obtuvieran un mal resultado
80×0,3 = 240 g de azúcares.
Otro error que podría producir seria que ubiquen mal los dígitos y realicen otras operaciones
80×____ = 0,3 g de azúcares. → $\frac{0,3}{80}$ = 0,00375 g de azucares.

Actividad 3:
Tipo de transformación:

Escribe para completar el enunciado:
El modelo matemático que acabo de obtener, que es ______________, recibe el nombre de función lineal, en que **J** y **A** son diferentes variables.

Lo correcto que debiese contestar el alumno en este ejercicio sería:

El modelo matemático que acabo de obtener, que es ***A = 80×J***, recibe el nombre de función lineal, en que **J** y **A** son diferentes variables.

Lo incorrecto que pudiese responder el estudiante sería:
El modelo matemático que acabo de obtener, que es $\boldsymbol{\frac{A}{J} = 80}$, recibe el nombre de función lineal, en que **J** y **A** son diferentes variables.

El modelo matemático que acabo de obtener, que es $\frac{J}{A} = \mathbf{80}$, recibe el nombre de función lineal, en que **J** y **A** son diferentes variables.

Diseño de Aula

Clase 4	Variables independientes e Independientes
Indicadores	**1-**Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente (“constante de proporcionalidad”). **4-**Representan la noción de función de manera concreta (utilizando metáforas de máquinas), pictórica o simbólica. **5-**Elaboran las valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales f(x) = a?x (y = a ? x).

Actividad 1:
Tipos de transformación:

Se presenta un problema:
En la localidad de Cáhuil, ubicada en la región de O’Higgins, hay una laguna de agua de mar desde donde los lugareños extraen sal de mar. La concentración de la sal extraída es de aproximadamente 35 gramos de sal por litro de agua.
1.- ¿Cómo puedes modelar la extracción de sal en Cáhuil utilizando metáfora de maquinas?
2.- ¿Cómo puedes representar la extracción de sal utilizando un diagrama sagital?
3.- ¿Cómo puedes modelarla extracción de sal usando una expresión algebraica?
4.- ¿Cuál es el gráfico de la función que modela la extracción de sal?

Análisis a priori

Lo correcto que debiese contestar el estudiante es:

1.- a) Determinar las variables presentes en el problema y represéntalas mediante un símbolo.

a. cantidad de litros de agua de mar.
s. cantidad de gramos de sal.
b) dibuja dos maquinas, una que transforme 1 litro de agua en 35 gramos de sal y la otra que modele la relación de las variables **a** y **s.**

$1 \rightarrow \boxed{f} \rightarrow 35 \qquad a \rightarrow \boxed{f} \rightarrow s$

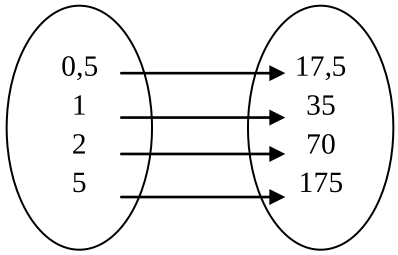
R: se modela la extracción de sal mediante una maquina **f** que relaciona cada posible cantidad de agua de mar con la cantidad correspondiente de sal que se puede extraer de ella.

2.- a) Determina y escribe en una tabla algunos valores de **s** a partir de valores que elijas de **a**.

a	0,5	1	2	5

f(a)=s	17,5	35	70	175

b) Dibuja el diagrama. En un conjunto escribe los valores de a, en el otro, los valores de f(a)=s correspondientes, y asocia con flechas los pares de valores relacionados.



R: Es posible representar la extracción de sal mediante un diagrama sagital, pero solo para algunos valores del dominio de f y sus respectivos valores del recorrido.

3.- a) Representa las variables involucradas mediante dos símbolos fáciles de relacionar a ellas. Usa las letras definidas anteriormente: **a** y **s.**

b) Escribe una expresión que permita definir la función **f.**
Ya que **a** y **s** son variables directamente proporcionales, puede modelarse esta relación usando una función lineal f(a) = s = ma, en donde **m** es la constante de proporcionalidad. En esta expresión puedes determinar el valor de **m** calculando f(1), reemplazando los datos conocidos, es decir, a=1 y s=35.

$$35 = m \times 1 \longrightarrow 35 = m$$

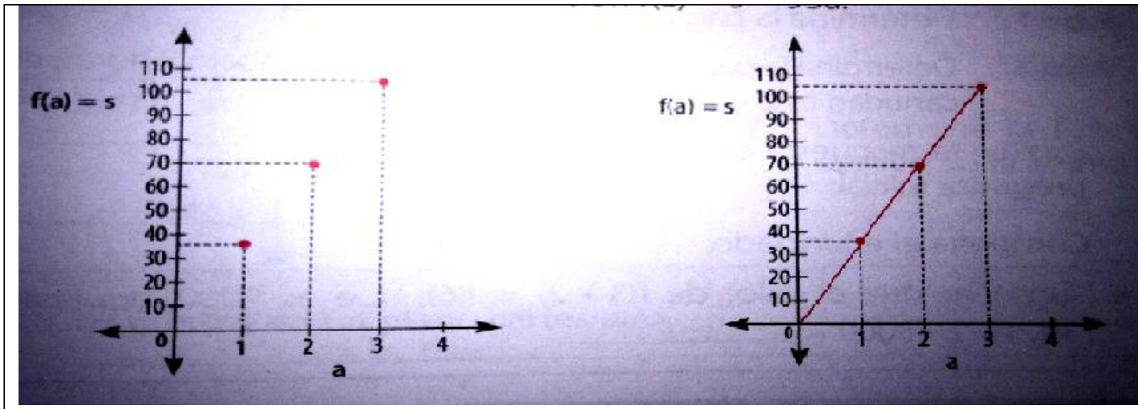
R: La extracción de sal puede modelarse usando la función lineal, que puede definirse por las expresiones s= 35a o, equivalente, f(a) = 35a.

4.- a) Determina algunos pares de valores de la función sencillos de calcular.

a	1	2	3
f(a) = s	35	70	105

b) Dibuja un plano cartesiano y elige una escala adecuada para los ejes. A continuación, dibuja los puntos de la tabla en el plano y únelos mediante una línea.

Gráfico de la función f(a) = s = 35a:



R: El gráfico de la función lineal es una recta que pasa por el origen.

Lo incorrecto que no debiese contestar el estudiante sería:

1.-
a) Que no pueda identificar las variables propuestas en el problema
Ejemplo: L *laguna de agua*

b) - Que no comprenda el concepto de metáforas de maquinas para poder modelar funciones.
- Que identifique de forma errónea el ingreso y salida de variables de las maquinas

35 → f → 1   s → f → a

2.- Que no relacione de forma correcta os valores en la tabla
- Que no conozca que es un gráfico sagital
- Con lo anterior no podrían determinar el dominio y recorrido de la función f(a) = s, ya que, con los errores anteriores no se podría identificar cada parte de la función de forma correcta.

3.- Que represente las variables anteriores con otras letras, ejemplo: **r** y **t.**
Con esto genere confusión y no pueda escribir la función lineal como corresponde, ya que tendría cuatro variables distintas, por lo tanto no podría modelarse esta función.

4.- Lo que podría ocurrir en esta parte de la actividad por los estudiantes es que gradúen mal el plano cartesiano de forma tal que no puedan obtener con las variables representadas una recta, y al no ser recta este gráfico no representaría una función lineal de forma f(x)=mx.

Diseño de Aula	
Clase 5	Dominio y Recorrido
Indicadores	**1-**Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente (“constante de proporcionalidad”). **4-**Representan la noción de función de manera concreta (utilizando metáforas de máquinas), pictórica o simbólica. **5-**Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales f(x) = a?x (y = a ? x).

Actividad 1:
Tipo de transformación: Conversión
1) Representa el gráfico sagital de la siguiente función f(x) = y = 2x, y determina su dominio y recorrido. Para ello confecciona una tabla donde se representen 5 valores siendo el primero de ellos -1 y otro el 0.

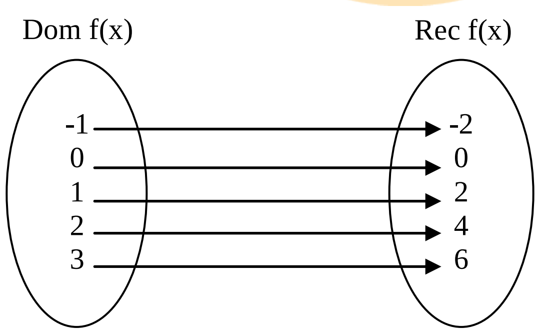
Análisis A priori

Lo correcto que los estudiantes debiesen contestar sería:

Con la función f(x) = y = 2x, reemplazamos los datos de x en la función y nos resulta:
f(-1) = 2×-1 → f(-1) = -2. Repitiendo este procedimiento para cada valor de x.

x	-1	0	1	2	3
f(x)	-2	0	2	4	6

Y su gráfico sagital sería:



Por lo tanto la función presenta:
Dom = {-1, 0, 1, 2, 3}
Rec = {-2, 0, 2, 4, 6}

Lo incorrecto que el estudiante pudiese contestar sería:

i) Que interpreten mal la definición de función y = 2x, donde le asignen el valor a la variable y obteniendo datos errados

Ejemplo: f(-1) = y = 2x → -1 = 2×x → $\frac{-1}{2}$ = x → x = -0,5, siendo este un digito que no pertenece a la función f(x)=2x.

ii) Que multipliquen de forma equivocada los números enteros, interpretando bien la función

Ejemplo: f(-1)= 2x → f(-1)= 2×-1 → f(-1)= 2, siendo este resultado incorrecto.

Actividad 2:
Tipo de Transformación: Tratamiento

1) Completa con los números que ingresan o salen en cada máquina, según corresponda.

Entrada — Salida
a) -4, -1, 0, 3 → [f(x)=-6x] → [ ]

Entrada — salida
b) [ ] → [g(x)=4,5x] → -45, -27, -13.5, 40.5

Análisis a priori

Lo correcto que el estudiante debiese contestar sería:

a) f(-4) = -6x → f(-4)= -6×-4 → f(-4)= 24, este resultado sería correcto ya que interpreto de forma correcta lo que debe hacer y realizo una buena multiplicación. Este paso se repite con cada digito que presenta el ejercicio.
Los números de salida para la función f(x) = {24, 6, 0, -18}

b) g(x) = 4,5x = -45 → x = $\frac{-45}{4,5}$ → x = -10, este resultado sería correcto ya que interpreto de forma correcta lo que debe hacer y realizo una buena división. Este paso se repito con cada digito que presenta el ejercicio.
Los números de entrada para la función g(x) = {-10, -6, -3, 9}

Lo incorrecto que el estudiante pudiese contestar sería:

a) i.- Que interprete mal la función otorgándole a la variable f(x) el digito de entrada obteniendo resultados erróneos.

Ejemplo: f(x) = -6x → -4 = -6x → x = $\frac{-4}{-6}$ → x = 0,666… siendo este un digito que no pertenece a la función f(x) = -6x.

ii.- Que multiplique de forma incorrecta los números enteros presentes en la función obteniendo resultados erróneos.

Ejemplo: f(-4) = -6x $\rightarrow$ f(-4) = -6×-4 $\rightarrow$ f(-4) = -24. Siendo este un digito erróneo.

b) i.- Que interpreten mal el procedimiento a realizar y le otorguen a la variable x los valores de salida

Ejemplo: g(-45) = 4,5x $\rightarrow$ g(-45) = 4,5×-45 $\rightarrow$ g(-45) = -202,5. Siendo este un digito que no pertenece a la función g(x) = 4,5x

ii.- Que realicen una división de números enteros incorrecta.

Ejemplo: g(x) = 4,5x $\rightarrow$ -27 = 4,5x $\rightarrow$ $\frac{-27}{4,5}$ = x $\rightarrow$ x = 6. Siendo este un resultado erróneo.

iii.- Que realicen una división de números decimales incorrecta.

Ejemplo: g(x) = 4,5x $\rightarrow$ -13,5 = 4,5x $\rightarrow$ $\frac{-13,5}{4,5}$ = x $\rightarrow$ x = 0,03 siendo este un digito que no pertenece a esta función g(x) = 4,5x.

Diseño de Aula	
Clase 6	Función Lineal
Indicadores	**6**-Representan la linealidad f(kx) = kf(x) y f(x1 x2) = f(x1) f(x2) en tablas y gráficos. **7**-Identifican la pendiente del gráfico de la función f(x) = a ? x con el factor a.

Actividad 1:
Tipo de transformación: Conversión

En un supermercado, una persona que compra 0,5 kg de queso **(q)** debe pagar $1500 **(p)**.
a.- Determina el costo para 1, 1.5, 2 y 2.5kg. (Mediante el cálculo de proporciones). Luego construye una tabla donde establezca la constante.
b.- Modela la situación mediante una función lineal.

Análisis A priori

Lo correcto que debiesen contestar los alumnos es:

a.- $\frac{\$1500}{0.5kg} = \frac{\$x}{1kg} \rightarrow \frac{1500\times1}{0.5} \rightarrow \frac{1500}{0.5} \rightarrow 3000$

$\frac{\$1500}{0.5kg} = \frac{\$x}{1,5kg} \rightarrow \frac{1500\times1.5}{0.5} \rightarrow \frac{2250}{0.5} \rightarrow 4500$

$\frac{\$1500}{0.5kg} = \frac{\$x}{2kg} \rightarrow \frac{1500\times2}{0.5} \rightarrow \frac{3000}{0.5} \rightarrow 6000$

$\frac{\$1500}{0.5kg} = \frac{\$x}{2.5kg} \rightarrow \frac{1500\times2.5}{0.5} \rightarrow \frac{3750}{0.5} \rightarrow 7500$

$(p)	1500	3000	4500	6000	7500
Kg	0.5	1	1.5	2	2.5
k	*3000*	*3000*	*3000*	*3000*	*3000*

R1: el costo para 1kg, es 3000; el costo para 1.5kg, es 4500; el costo para 2kg, es 6000; el costo para 2.5kg, es 7500.

R2: la constante establecida para esta proporción es 3000

b.- La función que modele esta proporción en forma de función es

f(x) = y = m×x → f(kg) = 3000×kg

Lo incorrecto que puede contestar los estudiantes es:

a.- Que establezca una buena relación de las variables pero que determine mal la constante ya que el precio del kg de pan va aumentando en 1500 y determine ese digito como la constante.

- Que establezca una mala relación entre las variables y obtenga un resultado erróneo. Ejemplo:

$\frac{\$x}{0.5kg} = \frac{\$1500}{1,5kg} \rightarrow \frac{1500 \times 0.5}{1.5} \rightarrow \frac{750}{1.5} \rightarrow 500$

b.- Con lo anterior no se podría establecer una función que modele esta relación ya que no existiría un término que se repita.

Actividad 1:
Tipo de transformación: Conversión

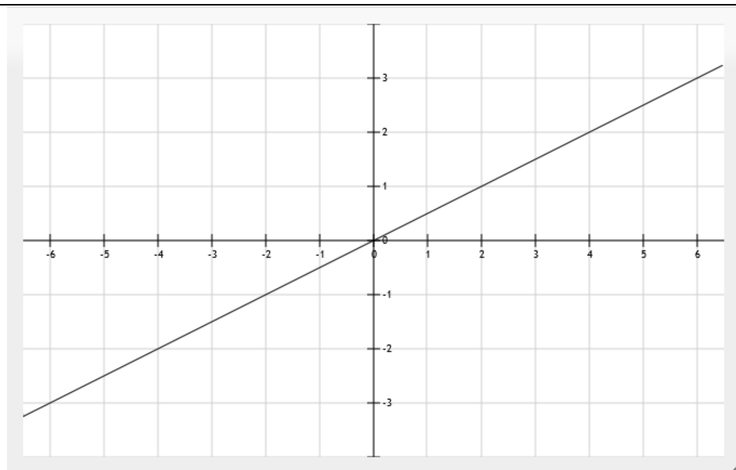
Grafica la siguiente función lineal f(x) = x0.5, con los siguientes valores:
-2, -1, 0, 1, 2. Construye una tabla.

Análisis a priori

Lo correcto que el estudiante debiese contestar sería:

f(-2) = -2×0.5 → f(-2) = -1
f(-1) = -1×0.5 → f(-1) = -0.5
f(0) = 0×0.5 → f(0) = 0
f(1) = 1×0.5 → f(1) = 0.5
f(2) = 2×0.5 → f(2) = 1

f(x)	-1	-0.5	0	0.5	-1
x	-2	-1	0	1	2



Lo incorrecto que pudiese contestar el estudiante sería:

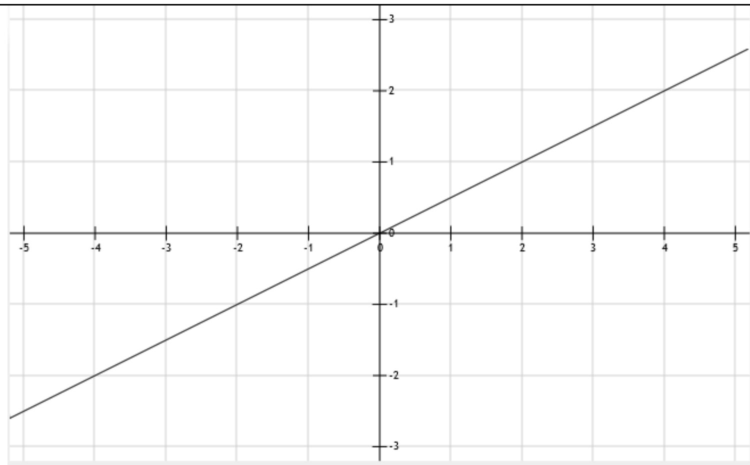
- Que multiplique de forma errónea los números enteros. Ejemplo:

f(-2) = -2×0.5 = 1. Con esto obtendríamos un resultado que pertenece a esta función pero que no es la imagen de -2.

- Con lo anterior solo obtendrían 3 puntos para una función que pide 5

- Que al momento de graficar ubique de forma incorrecta los puntos otorgando los valores de abscisas a las ordenadas y viceversa obteniendo una recta con pendiente negativa.

Diseño de Aula	
Clase 7	Función Lineal y Pendiente
Indicadores	**2**-Descubren el concepto de función mediante la relación de proporcionalidad directa. **3**-Descubren que la inclinación (pendiente) de la gráfica depende de la constante de la proporcionalidad. **5**-Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales f(x) = a?x (y = a ? x). **7**-Identifican la pendiente del gráfico de la función f(x) = a ? x con el factor a.
Actividad 1: **Tipo de transformación: Conversión** Determina 5 puntos que pertenezcan a la recta. Y ubícalos en una tabla.	



Análisis A priori

Lo correcto que debiesen contestar los estudiantes seria:

R: Los puntos son los siguientes:
$P_1(-4, -2)$
$P_2(-2, -1)$
$P_3(0, 0)$
$P_4(2, 1)$
$P_5(4, 2)$

Ubicados en unan tabla según abscisas y ordenadas.

x	-4	-2	0	2	4
y	-2	-1	0	1	2

Lo incorrecto que los estudiantes pudiesen contestar sería:

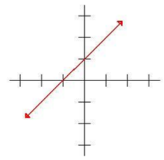
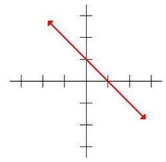
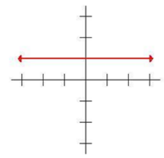
- Que no comprendan el concepto de abscisa y ordenada y ubiquen mal los valores al establecer los puntos. Ejemplo:

$P_1(-2, -4)$

Si continúan ubicando mal los dígitos para cada punto obtendrán una recta diferente que no es la correcta.

Actividad 2:
Tipo de transformación: Conversión

a.- Determina la pendiente *m* con los siguientes puntos:
$P_1(-2, -1)$ y $P_2(2, 4)$
b.- Identifica que grafica representa una función con pendiente positiva, negativa y constante.

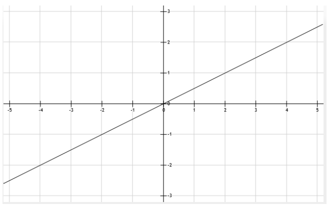
m > 0	m < 0	m = 0
		
Función Creciente	Función Decreciente	Función Constante

Análisis a priori

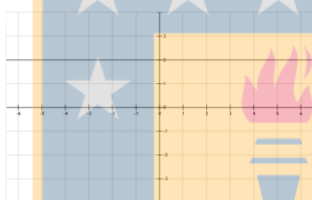
Lo correcto que debiesen contestar los estudiantes sería:

a.- $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y2-y1}{x2-x1} \rightarrow \frac{4-(-2)}{2-(-1)} \rightarrow \frac{6}{3} \rightarrow 2$

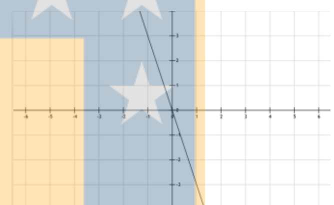
b.-



Pendiente positiva



Cero pendiente

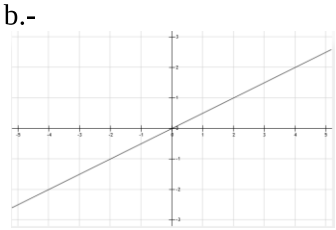


Pendiente negativa

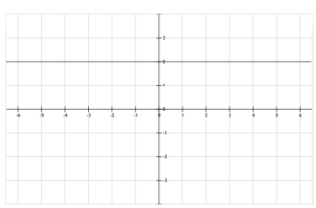
Lo incorrecto que pudiesen responder los estudiantes sería:

a.- Que interpretaran de forma incorrecta la definición de pendiente y ubicaran mal dígitos propuestos como puntos para determinar la pendiente.
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y2-y1}{x2-x1} \rightarrow \frac{-2-4}{-1-2} \rightarrow \frac{-6}{-3} \rightarrow$2. Obtendrán la misma pendiente pero ubicando mal los dígitos en la formula.
- Otra forma sería que invirtieran las variables y obtuvieran así un resultado erróneo.
$m = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{x2-x1}{y2-y1} \rightarrow \frac{2-(-1)}{4-(-2)} \rightarrow \frac{3}{6} \rightarrow$0.5. Aquí se obtiene otro valor para la pendiente, lo cual genera otra recta graficada.

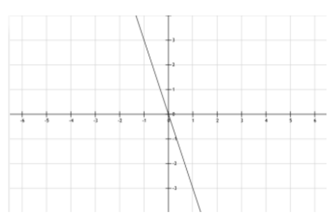
b.-



Pendiente negativa



Cero pendiente



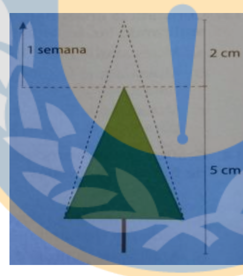
Pendiente positiva

Aquí los alumnos pueden cometer el error al no comprender el concepto de pendiente ya que la función lineal con pendiente constante es la más fácil de aprender de todas, por eso no existe una gran probabilidad de cometer un error.

Diseño de Aula	
Clase 8	Función Afín
Indicadores	**OA10U2 -**Mostrar que comprenden la función afín: generalizándola como la suma de una constante con una función lineal, trasladando funciones lineales en el plano cartesiano, determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, relacionándola con el interés simple, utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas. **OA7U2 -**Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas, usando metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre x e y, representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.

Actividad 1:
Tipo de transformación: conversión

Un pino de 5 cm de altura llegó a un vivero. Una de las jornaleras del recinto constato que un pino fue creciendo en forma constante durante sus primeras diez semanas, como se indica en la figura. ¿Cuál será la altura del pino a las 6 semanas? Para poder responder debe modelar la situación usando una función.



Análisis A priori

Lo correcto que debiese contestar los estudiantes sería:

a.- Define las variables involucradas en el fenómeno descrito.
s: cantidad de semanas transcurridas.
c: cantidad de centímetros que crece el pino.
h: altura del pino expresada en centímetros.

b.- Define la función lineal que modela la cantidad de centímetros que crece el pino:

$$c = 2s$$

c.- Define la función que modela la altura del pino. Como altura del pino **h** corresponde a lo que va creciendo más su altura inicial, es decir, c + 5, podemos sumar 5 a ambos lados de la igualdad anterior

$$c = 2s \qquad /+5$$

$$c + 5 = 2s + 5$$

por lo tanto: $h = 2s + 5$

d.- Reemplaza el valor conocido s = 6 en la función recién definida y determina el valor de h.

$$h = 2 \times 6 + 5$$
$$h = 12 + 5$$
$$h = 17$$

R: La altura que tendrá el pino a la 6 semana será de 17cm.

Lo incorrecto que pudiesen responder los estudiantes seria:

a.- Al momento de determinar las variables. Ejemplos:

j: jornaleras del recinto. Y con ello no podrá establecer una función lineal.

b.- Al momento de establecer una función lineal determine una pendiente distinta y con ello obtendrá una grafica que no representa el crecimiento del árbol. Ejemplo:

$$c = 5s$$

c.- Como el pino en un inicio media 5 cm se debe sumar a la formula anterior 5 a cada lado.

$$c = 5s$$
$$c + 5 = 5s + 5$$

por lo tanto: $h = 5s + 5$

d.- Ahora si reemplazamos el valor s = 6 en la función establecida anteriormente, para poder determinar la altura al cabo de 6 semanas.

$$h = 5 \times 6 + 5$$
$$h = 30 + 5$$
$$h = 35$$

R: con esto obtenemos que la altura del pino 35 cm lo que es un error.
Aquí se observa que al cometer un error al establecer una variable, un mal modelo de función, un valor erróneo para la pendiente todo lo que continua resulta de forma incorrecta.

Actividad 2:
Tipo de transformación: conversión

Graficar la función afín y = -2x + 3. Con los siguientes dígitos: -2, -1, 0, 1, 2

Análisis a priori

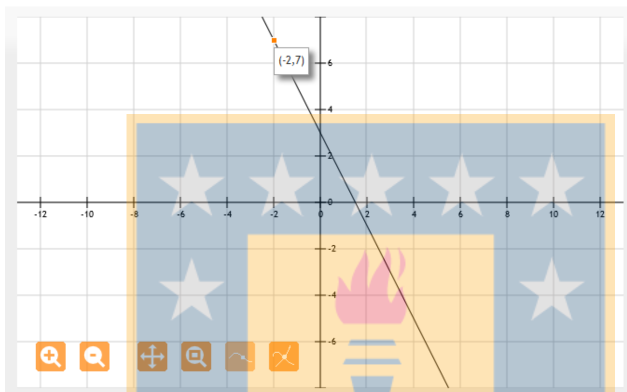
Lo correcto que debiese contestar el estudiante debiese ser:

$y = -2 \times -2 + 3 = 7$

y = -2×-1 + 3 = 5
y = -2×0 + 3 = 3
y = -2×1 + 3 = 1
y = -2×2 + 3 = -1

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	7	5	3	2	-1

La grafica sería:



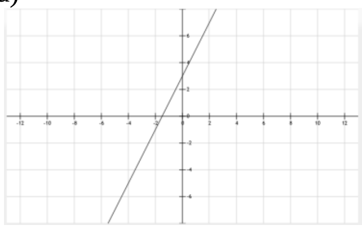
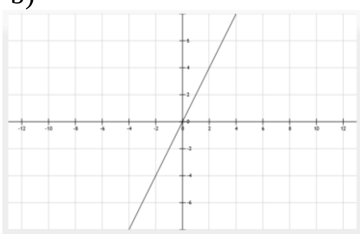
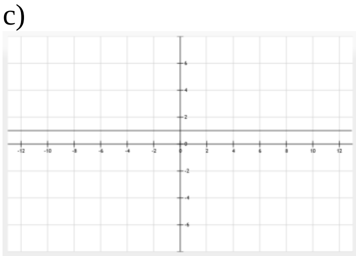
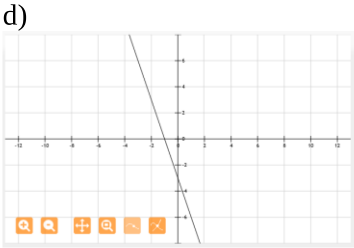
Lo incorrecto que pudiese contestar el estudiante sería:

- Que el estudiante realice mal la multiplicación de números enteros.

Ejemplo: y = -2×-2 + 3 = -4 + 3 = -1. Con esto la grafica que se presenta tendría una línea recta que no pertenece a la función propuesta, y a su vez observaríamos puntos que no pertenecen a la recta.

Diseño de Aula	
Clase 9	Gráfico de función Lineal y Afín
Indicadores	**1**-Representan, completan y corrigen tablas y gráficos pertenecientes a cambios con una base fija y tasa de cambio constante. **2**-Elaboran, basados en los gráficos, la ecuación de la función afín f(x) = a ? x+b. **3**-Determinan las regiones en el plano cartesiano cuyos puntos p(x|y) representan soluciones (x|y) de las inecuaciones y < a ? x+b o y > a ? x+b. **6**-Identifican, en la ecuación funcional, el factor a con la pendiente de la recta y el sumando b con el segmento entre el punto de intersección del gráfico con el eje vertical y el origen o (0|0). **7**-Elaboran gráficos de funciones afines a y b dadas o con dos puntos dados y verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación f(x) = a ? x+b.

Actividad 1:
Tipo de transformación: Tratamiento
Determina a qué tipo de función corresponde las siguientes graficas.

a)

b)

c)

d)


Análisis A priori

Lo correcto que debiesen contestar los estudiantes sería:

a) función afín
b) función lineal
c) función constante
d) función afín
Lo incorrecto que pudiesen contestar los estudiantes sería:

a) función lineal
b) función afín
c) función lineal
d) función lineal
Esto debido a una mala comprensión de los conceptos y contenidos asociados a función lineal y función afín.

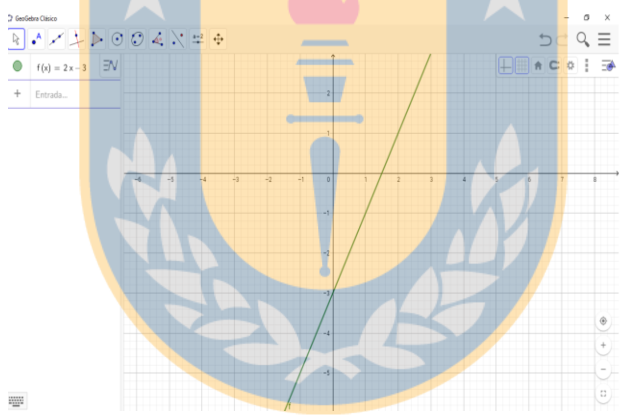
Diseño de Aula	
Clase 10	Gráfico función Lineal y Afín en Geogebra
Indicadores	**2**-Elaboran, basados en los gráficos, la ecuación de la función afín f(x) = a ? x+b. **6**-Identifican, en la ecuación funcional, el factor a con la pendiente de la recta y el sumando b con el segmento entre el punto de intersección del gráfico con el eje vertical y el origen o (0|0). **7**-Elaboran gráficos de funciones afines a y b dadas o con dos puntos dados y verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación f(x) = a ? x+b.

Actividad 1:
Tipo de transformación: Tratamiento

Realizar la gráfica de la función y = 2x-3 a mano alzada sin calcular pares ordenados.

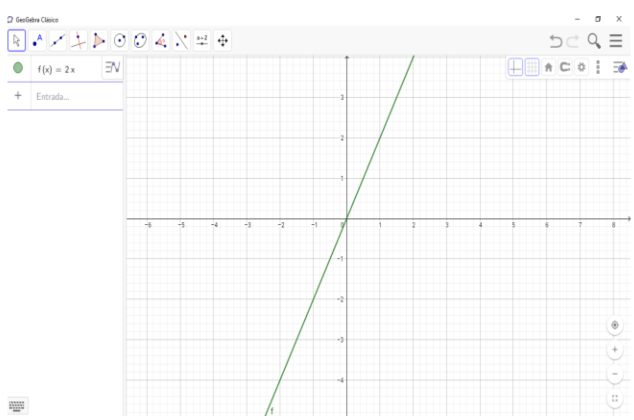
Análisis A priori

Lo correcto que los estudiantes debiesen contestar sería:



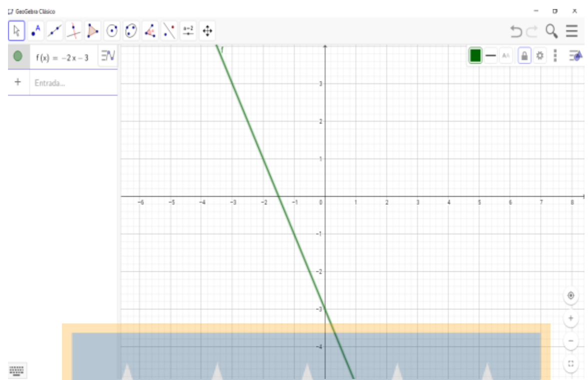
Muy similar debería quedar en el cuaderno de los estudiantes

Lo incorrecto que pudiesen contestar los estudiantes sería:



Este grafico no representa la función propuesta, esto debido a que no comprende el concepto de función lineal.

Otro error que pudiese cometer el estudiante es que al observar un signo negativo en la función crean que esta tiene pendiente negativa y graficar de la siguiente forma:



Diseño de Aula	
Clase 11	Determinar ecuación de la recta
Indicadores	**OA10U2 -** **6**-Identifican, en la ecuación funcional, el factor a con la pendiente de la recta y el sumando b con el segmento entre el punto de intersección del gráfico con el eje vertical y el origen o (0|0). **7**-Elaboran gráficos de funciones afines a y b dadas o con dos puntos dados y verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación f(x) = a ? x+b. **OA7U2 –** **5**-Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales f(x) = a ? x (y = a ? x). **6**-Representan la linealidad f(kx) = kf(x) y f(x1 x2) = f(x1) f(x2) en tablas y gráficos.
Actividad 1: **Tipo de transformación: Conversión** a).- Completaremos una tabla con los sueldos de un corredor de propiedades de una empresa que recibe $ 300.000 más un 2 % de las ventas de casas que realice en un mes: Primero, podemos identificar que si x representa el monto de las ventas realizadas en millones de pesos. ¿Cuál es la función que representa el sueldo del corredor de propiedades?	
Análisis A priori Lo correcto que debiesen contestar los estudiantes sería: a).- - Lo primero que debe hacer el estudiante es identificar las variables * 300000 pesos de sueldo base * 2% de las ventas de casas * x de las ventas en millones de pesos	

$$f(x) = 2\% \times x \times 1000000 + 300000$$ $$f(x) = \frac{2}{100} \times x \times 1000000 + 300000$$ $$f(x) = 2 \times x \times 10000 + 300000$$ $$f(x) = 20000 \times x + 300000$$ $$f(x) = 20000x + 300000$$ - La función que modele esta situación sería f(x) = 20000x + 300000 Lo incorrecto que pudiesen contestar los estudiantes sería: - Que dejase el 2% de esta forma sin hacer la transformación Obteniendo $f(x) = 2 \times x \times 1000000 + 300000$ $f(x) = 2000000x + 300000$ siendo esta una función que no modela la situación planteada - Que interpretara mal las variables y la ubicase en la función de forma incorrecta. Ejemplo: $$f(x) = \frac{2}{100} \times x \times 300000 + 1000000$$ $$f(x) = 2 \times x \times 3000 + 1000000$$ $$f(x) = 6000x + 1000000$$ La cual no es una función que modele esta situación.

iseño de Aula	
Clase 12	Problemas de función Lineal y Afín
Indicadores	**OA10U2 -**Mostrar que comprenden la función afín: generalizándola como la suma de una constante con una función lineal, trasladando funciones lineales en el plano cartesiano, determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, relacionándola con el interés simple, utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas. **OA7U2 -**Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: utilizando tablas, usando metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre x e y, representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.
Actividad 1: **Tipo de transformación: Conversión** a).- Un granjero tiene 15 gallinas, que comen 750 gr de trigo al día. Utiliza la constante de proporcionalidad. b).- un montañista inicia un ascenso a la cumbre comenzando a una altura de 2400 metros sobre el nivel del mar. Cada día asciende 200 metros de altura. ¿Cuál es su altura h luego de x días?	

Análisis A priori

Lo correcto que debiese contestar los estudiantes sería:

a) identificar las variables
g: número de gallinas.
t: cantidad de gramos que comen en total las gallinas.

- Deberá utilizar la constante de proporcionalidad para poder establecer luego un modelo y con ello una función.

$m = \frac{750gr}{15g} = 50$

ahora si g es la variable independiente, y una función lineal la denotamos por f(x) = m×x nuestro modelo de función quedaría establecido como:

$$f(p) = 50p$$

b) En este problema no es necesario determinar las variables solo necesita interpretar bien la información, y lo que se conoce es lo siguiente:

- Comienza su ascenso desde los 2400m sobre el nivel del mar
- Cada día asciende 200m
- ¿Cuál es su altura h luego de x días?

Si comienza su ascenso desde los 2400m sería una función afín ya que 2400 sería su coeficiente de posición, luego cada día asciende 200m lo que representa una constante, y por último los días serían la variable independiente.

Por lo tanto, la función que modele este problema sería:

$$h(x) = 200x + 2400$$

Lo incorrecto que los estudiantes pudiesen contestar sería:

a)
- Que interprete al granjero como una variable
- Que no interprete de forma correcta lo que es la constante de proporcionalidad y con ello relacione mal las variables relacionadas para establecer dicha constante.

Ejemplo:

$$m = \frac{15g}{750gr} = 0.02$$

ahora si el granjero es una variable y m=0.02 podría determinar el modelo de la función como:

$$f(p) = 0.02p, \text{ donde p es el granjero}$$

f(1) = 0.02×1 = 0.02, lo que resulta una función constante y su pendiente 0.02 sería un error ya que la función constante no posee pendiente por lo tanto sería un error

b)
- Como en este problema no es necesario realizar cálculos los alumnos solo cometerían errores

interpretando el problema.
*Con esto podría interpretar 2400m sobre el nivel del mar como sol un dato y determinar la función como una función lineal.
Ejemplo: h(x) = 200x

*Debido a la mala interpretación podría otorgar los 2400m como la constante y con ello determinar la función como la función lineal.
Ejemplo: h(x) = 2400x

*Otro error que podría cometer el estudiante sería que interprete los valores de forma incorrecta al modelar la función.
Ejemplo: h(x) = 2400x + 200, lo cual sería una función afín, pero no la que modele el problema establecido.

Anexo 5. Registro fotográfico

Fotografía 1. Momento posterior al inicio de pretest

Fotografía 2. Desarrollo de instrumento de recolección de datos.

Fotografía 3. Minutos previos a la finalización de Pretest