



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

DIRECCIÓN DE POSTGRADO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS- PROGRAMA DE DOCTORADO EN
CIENCIAS FÍSICAS

CORRELACIONES CUÁNTICAS EN TELEPORTACIÓN Y TEORÍA CUÁNTICA DE JUEGOS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICAS

MATÍAS ELÍAS SOTO MOSCOSO

PROFESORES GUÍAS:

LUIS ROA OPPLIGER

MARCELO ALID VACCAREZZA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

CONCEPCIÓN-CHILE

2017

Agradecimientos

Agradezco a todo y todos los que han hecho posible que yo esté aquí, buscando entender el universo desde lo increíblemente pequeño y sensible. A mi familia...



Tabla de Contenido

Agradecimientos	ii
Tabla de Contenido	iii
Índice de Figuras	vi
Índice de Figuras	vi
Índice de Tablas	vii
Índice de Tablas	vii
Resumen	viii
Abstract	ix
1 Introducción	1
2 Fundamentos	4
2.1 Postulados de la Mecánica Cuántica	4
2.1.1 Postulado 1: Espacio de estados	4
2.1.2 Postulado 2: Evolución de estados	4
2.1.3 Postulado 3: Medida	5
2.1.4 Postulado 4: Sistema Compuesto	8
2.2 Información Cuántica y computación	8
2.2.1 Entrelazamiento cuántico bipartito	8
2.2.2 Criterios de separabilidad	13
2.2.3 El Bit cuántico o qubit	17
2.2.4 Compuertas Lógicas Cuánticas	18



2.3	Teleportación	24
2.3.1	Teleportación del estado de un qubit	24
2.3.2	Teleportación de estados puros cuánticos generales finito dimensionales	25
2.3.3	Teleportación estándar de estados mezclados	30
2.4	Fidelidad	32
2.4.1	Fidelidad Promedio	33
3	Medidas de Entrelazamiento y Discordia Cuántica	35
3.1	Entrelazamiento de formación de un estado arbitrario de dos qubits	35
3.2	Medidas de Decoherencia y estados bipartitos mezcla (Estados X)	39
3.3	Discordia Cuántica	40
3.4	Expresión analítica para la discordia cuántica	42
4	Información Cuántica y Teoría de Juegos	44
4.1	Conceptos Básicos	44
4.2	Teoría de Juegos	46
4.3	Estrategias y equilibrios en Juegos Cuánticos	49
4.4	Juegos cuánticos de dos bits cuánticos	51
4.4.1	Planteamiento General	52
5	Teleportación Cuántica Probabilista	54
5.1	Resumen	54
5.2	Introducción	55
5.3	Fidelidad promedio para el canal en un estado puro	56
5.4	Ajuste de entrelazamiento y fidelidad promedio para el canal en un estado puro	59
5.5	Fidelidad Promedio para el canal en un estado tipo X con subespacio principal \mathcal{H}_{0011}	67
5.6	Fidelidad Promedio para el canal en un estado tipo X con subespacio principal \mathcal{H}_{0110}	72
5.6.1	Valores umbrales de concurrencia para mostrar comportamientos cuánticos	73
5.6.2	Valores umbrales para mejorar la fidelidad promedio	75
5.7	Ajuste de Entrelazamiento, Fidelidad Promedio para el Canal en un Estado tipo X con subespacio principal \mathcal{H}_{0011}	78
5.8	Discusión y análisis	88
6	Equilibrio de Nash Bayesiano usando estados tipo-Werner extendidos	90
6.1	Resumen	90
6.2	Introducción	90

6.3	Formalismo	92
6.4	Equilibrio de Nash Bayesiano para un grado de entrelazamiento y pureza	95
6.5	Discusión y análisis	99
7	Conclusión General	101
	Referencias	102



Índice de Figuras

2.1	Representación de la esfera de Bloch para un sistema de dos niveles.	19
2.2	Representación de compuertas de un qubit.	22
2.3	Esquema de una compuerta controlada U.	23
2.4	Compuerta controlada NOT (CNOT).	23
6.1	Gráficos de la función de ganancia óptima promedio Π^* y valor umbral w_{th}	98



Índice de Tablas

4.1	Tabla de ganancias en el llamado <i>Juego de coincidencia de monedas</i>	46
4.2	Tabla de ganancias del <i>Juego de coincidencia de monedas</i> , que incluye estrategias mixtas donde un jugador escoge cara y sello con probabilidad $1/2$	47
4.3	Tabla o matriz de ganancias en el llamado <i>Juego del Dilema del Prisionero</i>	48



Resumen

En esta tesis de doctorado, investigamos un *Protocolo de Teleportación Probabilista* y *El Equilibrio de Nash Bayesiano utilizando un estado tipo Werner extendido*.

En la primera investigación, estudiamos el entrelazamiento y su redistribución, a través de la medida de su fidelidad, que sabemos que para el caso de ser un estado entrelazado, ésta siempre será mayor a $2/3$. Utilizamos como canal, un estado puro y un estado con ruido tipo \mathbf{X} , donde aplicamos medidas de Bell parcialmente entrelazadas para ambos. Además, implementamos el proceso de extracción inequívoca de estados, que consiste básicamente en el mecanismo necesario para asegurar la máxima fidelidad de extracción del estado desconocido que se quiere teleportar. En ambos casos encontramos valores umbrales donde el entrelazamiento del canal es necesario pero no suficiente para tener una teleportación exitosa. Este trabajo fue enviado a la revista *Physical Review Letters*, y se encuentra a la espera de su aceptación.

En la segunda investigación, estudiamos las estrategias cuánticas en juegos de información incompleta, haciendo uso del formalismo de la teoría de juegos basada en el multi-sector de una matriz de probabilidades. Analizamos una extensión del conocido y documentado juego *Batalla de los sexos*, usando un estado tipo-Werner extendido enfocado en cómo su mezcla y entrelazamiento afecta las ganancias Bayesianas de Nash del jugador. En relación a sus correlaciones, se demuestra que el entrelazamiento es necesario para superar las ganancias clásicas pero, se debe considerar que no todos los estados entrelazados son útiles debido a la presencia de mezcla. Se encontraron valores de umbral para el parámetro de mezcla y el mínimo de entrelazamiento. Este trabajo fue publicado en la revista *Springer* en el año 2016 con código: DOI 10.1007/s11128 – 016 – 1387 – 8.

Abstract

In this PhD thesis, we have investigated a *Probabilistic Teleportation Protocol* and *The Bayesian Nash equilibria using extended Werner-like states*.

In the first research, we study the entanglement and their redistribution, through the measure of fidelity, that as we know, for the case of an entanglement state, it always must be bigger than $2/3$. We used like a channel a pure state and a noisy \mathbf{X} -state, where we applied partially entangled Bell's measures for both states. In addition, we set the Unambiguous State Extraction **USE** process, that consist basically in the necessary mechanism to ensures the maximum fidelity to extract the unknown state that we want to be teleported. In both cases we found threshold values where the entanglement of the channel is necessary but not sufficient to have a successful teleportation. This work was sent to the *Physical Review Letters*, and it is waiting for the approval.

In the second research, We study quantum strategies in games of incomplete information using a formalism of game theory based on multi-sector probability matrix. We analyze an extension of the well-known game of *Battle of Sexes* using an extended Werner-like state focusing in how its mixedness and entanglement affect the Bayesian Nash payoffs of the player. It is shown that entanglement is needed to outperform classical payoffs but not all entangled states are useful due to the presence of mixedness. A threshold for the mixedness parameter and the minimum entanglement value were found. This work was published into the *Springer* journal, 2016. Code: DOI 10.1007/s11128 – 016 – 1387 – 8.

Capítulo 1

Introducción

La Física Cuántica constituye en la actualidad uno de los pilares que sostienen la base del conocimiento del mundo que nos rodea. A escala atómica, y sub-atómica, cualquier fenómeno precisa para su explicación el uso de esta teoría; incluso fenómenos catalogables como macroscópicos requieren de argumentos cuánticos para una descripción correcta [1, 2].

Para poder interpretar y describir la naturaleza de la mecánica cuántica, necesitamos comprender tanto sus características propias como la de sus correlaciones, de las cuales emerge una naturaleza increíblemente extraña, sensible, contraintuitiva y sin paralelo clásico en relación a nuestra escala. En esta tesis de doctorado se abordarán dos temas de investigación, que centran sus esfuerzos en la caracterización, análisis y comprensión de los fenómenos cuánticos, en las áreas específicas de protocolos de teleportación y Teoría de Juegos cuánticos.

Para entregar un espectro que permita una mayor comprensión de este trabajo, consideramos partir desde los cimientos de la mecánica cuántica, es decir, el formalismo matemático que describe los postulados de esta teoría, para luego estudiar su interpretación dentro del área de la información cuántica, dónde se describe la forma de cómo medir correlaciones cuánticas [3].

La primera parte de las investigaciones se vierte en el estudio del procesamiento de la información, la que se presenta en los protocolos de teleportación, dónde se espera sean estos protocolos de una fidelidad suficiente para asegurar el uso de recursos cuánticos favorables para completar la teleportación de estados con éxito. En estos sistemas hemos aplicado ciertas compuertas lógicas sobre los estados que los conforman, para que finalmente, mediante la extracción (medida) y utilización de canales de comunicación clásicos, podamos enviar la información contenida en los sistemas reducidos para completar satisfactoriamente el envío del estado que se deseaba teleportar.

Además, para una teleportación probabilista de recursos cuánticos, donde específicamente nos enfocamos en la redistribución de la fidelidad en un protocolo que utiliza medidas de Bell par-

cialmente entrelazadas y un esquema de extracción inequívoco ó **USE**, por sus siglas en inglés, dónde utilizamos como canal un estado puro, y luego otro con ruido de tipo **X**, esto nos permite transferir un estado desconocido de un sólo qubit y poder asegurarnos que la información tiene comportamiento cuántico, si la fidelidad promedio de los valores de salida son mayores a $2/3$ [13]. Luego, en la segunda investigación, tenemos la teoría de juegos cuánticos, que consiste básicamente en el estudio del conflicto entre oponentes que actúan racionalmente, y donde además podemos analizar matemáticamente las diversas situaciones cuando muchas partes están solamente interesadas en ganar y realizar decisiones que favorezcan a sus propios intereses que se ven envueltos en la competencia.

En nuestra investigación evaluamos el equilibrio de Nash Bayesiano usando un estado tipo-Werner extendido, para el juego *La Batalla de los sexos*, donde los recursos cuánticos utilizados constituyen un canal con ruido, es decir, el estado tipo Werner representa el medio por el cual se realizan las operaciones cuánticas para el par de jugadores que las utiliza [5]. En este juego, las partes pueden escoger su plan de acción en completo conocimiento de la situación, y con fundamentos racionales, pero sin saber qué decisión tomará la otra parte. Se llama al juego con estas características, un juego de información incompleta, donde se desarrollan las herramientas y procedimientos que se orientan desde otro punto de vista, al estudio profundo y acabado de la funcionalidad del uso de un sistema cuántico como: recurso de un canal, entrelazamiento, entre otros, que se caracterizan a través de la comparación de las posibles funciones de ganancias obtenidas en relación a la versión clásica del mismo juego.

Sabemos que existen aplicaciones propuestas de la teoría de la información cuántica que pueden ahora ser entendidas como situaciones competitivas en la que muchos jugadores interactúan con más o menos motivos opuestos. Como por ejemplo, el clonado cuántico, que ha sido formulado como un juego entre dos jugadores [6], y además, en el caso del robo de la información para el caso en criptografía cuántica [7], que puede igualmente ser visto como un juego entre el que roba información y el emisor.

Los pilares de la teoría de juegos son parcialmente una teoría de probabilidades clásica. En este contexto nos podemos preguntar lo siguiente: ¿qué soluciones se obtendrían si son permitidas superposiciones de estrategias?

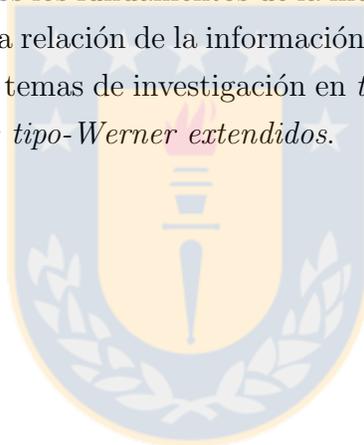
En la teoría de juegos raramente se trata de manera explícita con la transmisión de información, aunque sin embargo, debería ser visto que la implementación práctica de cualquier juego clásico inevitablemente relaciona el intercambio de información a través de medios clásicos. Teniendo esto en mente, se vuelve legítimo preguntarnos qué ocurre si los portadores de la información son ahora sistemas cuánticos.

El propósito de esta tesis es, por tanto, presentar de manera detallada, y desde una complejidad

nueva, el análisis de las correlaciones entre dos sistemas, sus recursos cuánticos y sus posibles aplicaciones, las que van desde los protocolos de teleportación hasta la introducción de otra arista, que es la teoría de juegos aplicados a la teoría de la información cuántica, ya que no basta solamente el comprender las características esenciales dentro de un protocolo de teleportación, sino también sus usos y aplicaciones en el futuro.

Todo esto con la motivación de construir nuevos espacios de desarrollo para la teoría cuántica de la información, donde se combinen variedades de conceptos que perfilen en un futuro próximo, la forma de darle un uso efectivo a los recursos cuánticos que se operan a través de compuertas lógicas [8], las que actúan sobre estos diversos estados, y donde veremos cómo aquellas operaciones locales conjuntas modifican al sistema. Finalmente, combinaremos la utilización de estas características cuánticas para descubrir la naturaleza que subyace en el mundo de lo tremendamente sensible y pequeño, donde el desarrollo de sus usos nos llevarán quién sabe donde.

En los capítulos 1, 2 y 3 conoceremos los fundamentos de la mecánica cuántica, la cuantificación de los recursos cuánticos, fidelidad, y la relación de la información cuántica con la teoría de juegos. En los capítulos 4 y 5 se abordarán los temas de investigación en *teleportación probabilista* y *equilibrio de Nash Bayesiano usando estados tipo-Werner extendidos*.



Capítulo 2

Fundamentos

2.1 Postulados de la Mecánica Cuántica

La formulación de la mecánica cuántica está basada en los siguientes postulados.

2.1.1 Postulado 1: Espacio de estados

El estado de un sistema es completamente descrito por un vector de estado, el cual es un rayo o vector en el espacio de Hilbert. En la notación bra-ket de Dirac los estados del sistema son denotados por los vectores ket $|\psi\rangle$. En este espacio los estados $|\psi\rangle$ y $e^{i\alpha}|\psi\rangle$ describen el mismo estado físico. Para dos estados dados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ podemos formar otro estado por superposición, de la forma $a|\psi\rangle + b|\phi\rangle$. Las fases relativas en esta superposición de estados es físicamente significativa, ya que esto significa que el estado $a|\psi\rangle + b|\phi\rangle$ es idéntico a $e^{i\alpha}(a|\psi\rangle + b|\phi\rangle)$, pero diferente de $a|\psi\rangle + e^{i\alpha}b|\phi\rangle$.

2.1.2 Postulado 2: Evolución de estados

La evolución temporal de un sistema cuántico cerrado es unitaria, y es generada por un operador hermítico llamado *Hamiltoniano* del sistema.

En el cuadro de Schrödinger, el vector $|\psi\rangle$ que describe al sistema, evoluciona de acuerdo con la ecuación de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle, \quad (2.1)$$

donde \hbar es la constante de plank, \hat{H} el Hamiltoniano del sistema, y el que entrega los valores de energía del sistema, como en el caso del átomo de hidrógeno, que aparece como una solución de la ecuación de Schrödinger estacionaria, y que relacionan las soluciones ligadas a un pozo de potencial generado por este átomo. Lo que da como resultando una cuantización de la energía. También pueden corresponder a un espectro continuo, como las soluciones libres de un pozo de potencial (por ejemplo un electrón que tenga la suficiente energía para alejarse al infinito del núcleo del átomo de hidrógeno).

2.1.3 Postulado 3: Medida

El resultado de la medida sobre un observable físico \hat{A} , es alguno de los autovalores de este operador:

$$\hat{A} |\psi_n\rangle = a_n |\psi_n\rangle, \quad (2.2)$$

donde a_n pertenece a los números reales (\mathcal{R}).

En mecánica cuántica, las mediciones están descritas por un conjunto $\{\hat{M}_m\}$ de operadores de medición. El índice m da cuenta de los resultados posibles de la medición. Si el sistema cuántico está en un estado $|\psi\rangle$, inmediatamente antes de la medición la probabilidad de obtener un resultado m está dada por,

$$p(m) = \langle \psi | \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m | \psi \rangle, \quad (2.3)$$

e inmediatamente después de la medición, el estado del sistema colapsará al estado,

$$|\bar{\psi}\rangle = \frac{\hat{M}_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m | \psi \rangle}}. \quad (2.4)$$

Los operadores de medida satisfacen la relación de completitud

$$\sum_m \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m = 1, \quad (2.5)$$

que asegura el hecho de que la suma de las probabilidades da 1.

Hay dos casos especiales importantes para el proceso de medida. Uno de ellos es el de medidas proyectivas y el otro es el operador de valor positivo de medida o POVM, por sus siglas en inglés.

Medidas Proyectivas

En este caso al considerar el operador de medida \hat{M} y su relación de completitud (2.5), aseguramos que se satisface la condición que \hat{M}_m son proyectores ortogonales. Matemáticamente puede ser escrito como

$$\hat{M}_{m'} \hat{M}_m = \delta_{m,m'} \hat{M}_m. \quad (2.6)$$

Una medida proyectiva es descrita por un operador hermítico \hat{M} en el espacio de estados del sistema. El operador hermítico es catalogado como observable. La descomposición espectral de este observable es

$$\hat{M} = \sum_m m P_m, \quad (2.7)$$

donde P_m es el proyector dentro del *eigenespacio* de \hat{M} con *eigenvalores* m . Midiendo el estado $|\psi\rangle$, la probabilidad de obtener el resultado m es

$$p(m) = \langle \psi | P_m | \psi \rangle, \quad (2.8)$$

y el estado del sistema justo después de la medida es

$$|\bar{\psi}\rangle = \frac{P_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi| P_m |\psi\rangle}}. \quad (2.9)$$

Si el sistema es sometido a la misma medida inmediatamente después de la medida proyectiva, la misma salida ocurre con certeza.

POVM

En ciertos experimentos la medida posterior del estado del sistema es de menor interés o irrelevante, mientras que la parte de principal interés es la probabilidad de la respectiva medida. Uno de los ejemplos de tales experimentos es el de Stern-Gerlach, que consistía en enviar un haz de átomos de plata a través de un campo magnético inhomogéneo que crecía en intensidad en la dirección perpendicular a la que se enviaba el haz. El espín de los diferentes átomos fuerza a las partículas disparadas de espín positivo $+1/2$ a ser desviadas hacia arriba y a las partículas de espín opuesto $-1/2$ a ser desviadas hacia abajo, y por lo tanto, se puede medir el momento magnético de las partículas.

En el caso clásico, una partícula cualquiera que posea un momento magnético, entrará en el campo magnético con su momento magnético orientado al azar. El efecto del campo magnético sobre tales partículas clásicas ocasionará que sean desviadas también en sentidos opuestos pero dependiendo del grado de deflexión del ángulo inicial entre el momento magnético y el campo magnético al que se somete el haz de partículas. Por lo tanto algunas de ellas serían desviadas fuertemente, otras de manera más débil y progresivamente se irían encontrando partículas desviadas en ambas direcciones cubriendo todo el espectro de intensidades posibles.

Sin embargo, el experimento de Stern-Gerlach pone de manifiesto que esto no ocurre, y se observa que todas las partículas se desvían o bien hacia arriba o hacia abajo, pero ambos grupos con la misma intensidad. Las partículas tienen o bien espín $+\hbar/2$ o $-\hbar/2$, sin valores intermedios. La herramienta matemática que podemos ocupar para describir ese caso es POVM. Una POVM en un sistema cuántico es una colección, \hat{E}_m de operadores positivos que satisfacen

$$\sum_m \hat{E}_m = I, \quad (2.10)$$

donde I es el operador identidad. Cuando un estado $|\psi\rangle$ es sometido a POVM, la probabilidad de la salida m es

$$p(m) = \langle \psi | \hat{E}_m | \psi \rangle. \quad (2.11)$$

En ciertos casos el estado después de la medida no está especificado y no puede ser repetido, como por ejemplo, después de la medida de un fotón que golpea el detector.

2.1.4 Postulado 4: Sistema Compuesto

El espacio de estado del sistema físico compuesto es el producto tensorial de los componentes del sistema. Sea un sistema mecánico cuántico compuesto de n sistemas cuánticos, tal que por cada sistema i , el estado es $|\psi_i\rangle$, es decir, el estado conjunto para el sistema completo es dado por

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \dots \otimes |\psi_n\rangle. \quad (2.12)$$

Una de las propiedades interesantes de los sistemas compuestos, que es única para los sistemas cuánticos, es el entrelazamiento.

2.2 Información Cuántica y computación

Introduciremos el concepto de Entrelazamiento, criterios de separabilidad, el *bit cuántico* o *qubit*, luego compuertas lógicas cuánticas de un qubit y dos qubits.

2.2.1 Entrelazamiento cuántico bipartito

Estados puros

Supongamos dos sistemas cuánticos A y B , los cuales se entregan a dos científicos experimentales que llamaremos Alice y Bob, en acuerdo con la notación estándar en la teoría de la información cuántica. El estado físico en el sistema de Alice puede ser descrito por estados cuánticos pertenecientes a un espacio de Hilbert \mathbf{H}_A cuya dimensión es d_A . Análogamente, en el sistema de Bob, el estado físico

es descrito por estados cuánticos en un espacio de Hilbert \mathbf{H}_B de dimensión d_B . De esta manera, el estado cuántico del sistema completo estará descrito por vectores pertenecientes al espacio producto tensorial de ambos subespacios $\mathbf{H} = \mathbf{H}_A \otimes \mathbf{H}_B$. Así, en este espacio de Hilbert, el estado cuántico más general puede ser escrito como:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j=1}^{d_A, d_B} c_{ij} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle, \quad (2.13)$$

con una matriz $d_A \times d_B$ compleja $C = \{c_{ij}\}$.

Un estado puro $|\psi\rangle$, perteneciente a \mathbf{H} , se llama *estado producto* o *separable* si existen estados $|\phi_A\rangle$, perteneciente a \mathbf{H}_A , y $|\phi_B\rangle$, perteneciente a \mathbf{H}_B , tal que se satisfacen

$$|\psi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle. \quad (2.14)$$

De otra forma, el estado $|\psi\rangle$ se llama *entrelazado*.

Físicamente, la definición de estados producto significa que el estado no está correlacionado. En este sentido, un estado producto puede ser preparado de una manera local: Alice produce el estado $|\phi_A\rangle$ y Bob el estado $|\phi_B\rangle$ independientemente. Si Alice mide cualquier observable \hat{A} y Bob el observable \hat{B} , entonces las probabilidades en los distintos resultados se factorizan. En otras palabras, los resultados en la medición para Alice no dependen de los resultados que haya obtenido Bob en sus mediciones. Por otro lado, un estado entrelazado $|\psi\rangle$ contiene no solamente la información de los resultados de las mediciones sobre el sistema A y B separadamente, sino también correlaciones entre estas mediciones.

Estados mixtos

Es aquel en el que se sabe que hay probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ de que el sistema se halle en los estados puros no necesariamente ortogonales pero sí independientes $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_n\rangle, \dots$ respectivamente. Se debe mencionar que esto no corresponde a una combinación lineal, ya que no se tiene información sobre las fases relativas con las que sumaremos los correspondientes vectores con los que definimos el estado mezcla. Sabemos que $0 \leq p_i \leq 1, \forall i$ y además que $\sum_{i=1} p_i = 1$. Luego veremos que todo estado mezcla es de este tipo.

Consideremos, a modo de ejemplo, que en un acelerador se preparan electrones en estados de mo-

mento p , que en un cierto sentido límite está bien definido, pero la información no es total respecto de la proyección de spin, por ende, el haz que prepara el acelerador tiene probabilidad $p_1 = \frac{1}{2}$ de que el electrón se halle en un estado $|\phi_1\rangle = |p, +\rangle$ y probabilidad también $p_2 = \frac{1}{2}$ de que se halle en el estado $|\phi_2\rangle = |p, -\rangle$. Evidentemente los estados $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ forman un conjunto ortonormal completo en el subespacio de los estados con momento p fijo.

Para el caso general antes citado, resulta conveniente describir el estado mezcla mediante una *matriz densidad* u *operador* ρ definido por,

$$\rho = \sum_{i=1} p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (2.15)$$

donde p_i es la probabilidad de que el sistema se halle en el estado $|\psi_i\rangle$. Este operador densidad tiene algunas propiedades interesantes desde el punto de vista práctico:

1. ρ es autoadjunto y acotado.
2. ρ es un operador semidefinido positivo, o sea $\rho \geq 0$.
3. ρ es un operador cuya traza es igual a la unidad, o sea $Tr(\rho) = 1$.
4. ρ es un operador compacto y por ende sus autovalores forman una base ortonormal, y si $\rho|\psi\rangle = q_j|\psi\rangle$ entonces $q_j \geq 0$, para todo valor de j , así podemos escribir

$$\rho = \sum_{j=1} q_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|, \quad (2.16)$$

la cual se conoce como descomposición espectral del operador densidad y es única.

El valor medio de un observable \mathbf{A} del sistema, en el estado mezcla, será el promedio estadístico, con sus respectivos pesos p_i , de sus valores medios en los estados puros $|\psi_i\rangle$ con los que hemos construido el estado mezcla, es decir:

$$\langle \mathbf{A} \rangle_\rho = \sum_{i=1} q_i \langle \psi_i | \mathbf{A} | \psi_i \rangle = Tr(\rho \mathbf{A}). \quad (2.17)$$

La demostración de que podemos escribir el producto de la matriz densidad por el operador en términos de la traza, se obtiene recordando que la traza de un operador no depende de la base, es decir,

$$\begin{aligned} Tr(\rho \mathbf{A}) &= \sum_{i=1} \langle \psi_i | \rho \mathbf{A} | \psi_i \rangle = \sum_{i=1, j=1} \langle \psi_i | \rho | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \mathbf{A} | \psi_i \rangle \\ &= \sum_{i=1} q_i \langle \psi_i | \mathbf{A} | \psi_i \rangle = \langle \mathbf{A} \rangle_\rho. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Por otro lado, cualquier operador ρ que cumpla con las propiedades enumeradas anteriormente, es un excelente candidato a operador densidad. Debido a que ρ es autoadjunto y positivo, la condición $Tr(\rho) = 1$ nos asegura que ρ es un operador compacto, y por tal efecto su espectro es puramente puntual y discreto. Si denotamos sus valores propios por $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$ y a los vectores propios por $|1\rangle, |2\rangle, \dots, |n\rangle, \dots$, entonces podemos escribir dicho operador como

$$\rho = \sum_{n=1} w_n |n\rangle \langle n|. \quad (2.19)$$

Además sabemos que $Tr(\rho) = 1$, tendremos $\sum_{n=1} w_n = 1$ y como $\rho \geq 0$, también $w_n \geq 0$.

Ahora, consideremos a un operador densidad en una base ortonormal $\{|\phi_i\rangle\}$ que viene dado por

$$\rho = \sum_{i=1} q_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|, \quad (2.20)$$

la cual es una nueva base ortonormal de $\{|\psi_i\rangle\}$. Si los nuevos vectores base están relacionados con los primeros, a través de las ecuaciones,

$$|\psi_i\rangle = \sum_j c_{ij} |\phi_j\rangle, \forall i, \quad (2.21)$$

siendo la matriz constituida por los números c_{ij} unitaria dado que relaciona dos bases ortonormales, esto supone que

$$\sum_k c_{ik} c_{jk}^* = \sum_i c_{ki} c_{kj}^* = \delta_{ij} \quad (2.22)$$

y en consecuencia con esto, tenemos

$$\langle \phi_i | = \sum_j c_{ij} \langle \psi_j |. \quad (2.23)$$

Por lo tanto, la matriz densidad en esta base será

$$\rho = \sum_{i,j} |\psi_i\rangle p_{ij} \langle \psi_j| \quad (2.24)$$

donde,

$$p_{ij} = \sum_k c_{ki}^* q_k c_{kj} = \langle \psi_i | \rho | \psi_j \rangle. \quad (2.25)$$

Todo esto sirve para el supuesto en que las dos bases sean **físicamente realizables**, entonces la cantidad p_{ii} representa la probabilidad de hallar el sistema en el estado $|\psi_i\rangle$ y recibe el nombre de *población* del estado $|\psi_i\rangle$. Por otra parte, p_{ij} con $i \neq j$, es una suma de números complejos del tipo $q_k c_{ki}^* c_{kj}$, y cuantifica los efectos de interferencia de los estados $|\psi_i\rangle$ y $|\psi_j\rangle$ que puede aparecer cuando $|\phi_k\rangle$ se expresa como combinación lineal de los elementos de la base $|\psi_i\rangle$. La cantidad p_{ij} es la mezcla estadística de estos términos cruzados sobre todos los estados puros $|\phi_k\rangle$, y puede resultar nula aunque los términos de la suma no lo sean. Si $p_{ij} = 0$, entonces el promedio estadístico hace desaparecer todos los efectos de interferencia, mientras que si $p_{ij} \neq 0$, subsiste una cierta coherencia entre los estados de las mezclas; las cantidades p_{ij} con $i \neq j$ se suelen llamar *coherencias*.

Evidentemente, los estados puros no son más que casos particulares de estados mezcla. En un estado puro se sabe con certeza que el sistema se encuentra en un estado representado por el vector normalizado $|\Psi\rangle$, por lo que su correspondiente matriz densidad será

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|, \Rightarrow \rho^2 = \rho. \quad (2.26)$$

Recíprocamente, si el estado mezcla cumple con la ecuación anterior entonces describe un estado puro.

Ahora es posible distinguir tres situaciones:

- Un estado producto no tiene correlaciones.
- Los estados separables están correlacionados clásicamente.
Esto significa que para generar un estado separable, solamente es necesario contar con operaciones locales y comunicación clásica (LOCC). Supongamos que Alice y Bob pueden, por comunicación clásica (teléfono o radio), compartir un generador de números aleatorios que produce los resultados i con probabilidades p_i . Para cada uno de los resultados, ellos pueden acordar el estado $\rho_i^A \otimes \rho_i^B$ localmente. Mediante este procedimiento ellos forman el estado $\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B$.
- Estados entrelazados.
En un estado entrelazado, las correlaciones no pueden generarse simplemente por el procedimiento anterior. De hecho es necesario la presencia de operaciones que actúen simultáneamente sobre ambos subsistemas A y B. Estas operaciones han sido definidas anteriormente como operaciones de dos qubits, también denominadas operaciones no locales.

2.2.2 Criterios de separabilidad

Estados puros: Descomposición de Schmidt

Como hemos visto anteriormente, un estado puro entrelazado $|\psi\rangle \in \mathbf{H} = \mathbf{H}_{AB}$ puede expresarse como,

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j=1}^{d_A, d_B} c_{ij} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle \neq |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle, \quad (2.27)$$

con una matriz $d_A \times d_B$ compleja $C = \{c_{ij}\}$. Por simplicidad en la notación, se adoptará la

siguiente identidad $|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle \equiv |a_i\rangle|b_j\rangle$. En general, la superposición en Ec. (2.27) no nos dice a primera vista si el estado puede ser factorizado. Sin embargo, existe una base $|\alpha_i\rangle \in \mathbf{H}_A$ y una base $|\beta_j\rangle \in \mathbf{H}_B$ tal que podemos escribir,

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^R \lambda_k |\alpha_k\rangle |\beta_k\rangle, \quad (2.28)$$

con coeficientes reales y positivos λ_k . El número $R \leq \min\{d_A, d_B\}$ se denomina el rango de Schmidt del estado $|\psi\rangle$.

La demostración de esta propiedad es directa. Notemos que el estado en la Ec. (2.27) puede ser escrito como:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j=1}^{d_A, d_B} c_{ij} |a_i\rangle |b_j\rangle = \sum_i |a_i\rangle |\tilde{b}_i\rangle, \quad (2.29)$$

donde se define $|\tilde{b}_i\rangle \equiv \sum_j c_{ij} |b_j\rangle$.

Supongamos ahora que la base $\{|a_i\rangle\}$ se escoge de tal manera que la matriz densidad parcial asociada al subsistema A , ρ_A , sea diagonal,

$$\rho_A = \sum_i p_i |a_i\rangle \langle a_i|. \quad (2.30)$$

La matriz densidad parcial asociada al subsistema A , se obtiene al trazar los grados de libertad asociados al subsistema B , esto es, $\rho_A = \text{tr}_B(\rho)$. Análogamente para la matriz densidad parcial del subsistema B .

Al calcular ρ_A obtenemos,

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{Tr}_B(|\psi\rangle \langle \psi|) \\ &= \text{Tr}_B\left(\sum_{ij} |a_i\rangle \langle a_j| \otimes |\tilde{b}_i\rangle \langle \tilde{b}_j|\right) = \sum_{ij} \langle \tilde{b}_j | \tilde{b}_i \rangle |a_i\rangle \langle a_j|. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Este resultado se obtiene al notar que,

$$\begin{aligned} Tr_B(|\tilde{b}_i\rangle\langle\tilde{b}_j|) &= \sum_k \langle k|\tilde{b}_i\rangle\langle\tilde{b}_j|k\rangle \\ &= \sum_k \langle\tilde{b}_j|k\rangle\langle k|\tilde{b}_i\rangle = \langle\tilde{b}_j|\tilde{b}_i\rangle, \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde $\{|k\rangle\}$ es una base ortonormal $\in \mathbf{H}_B$. Comparando la Ec. (2.30) y Ec. (2.31), vemos que,

$$\langle\tilde{b}_j|\tilde{b}_i\rangle = p_i\delta_{ij}, \quad (2.33)$$

notando que los estados $\{|\tilde{b}_i\rangle\}$ son ortogonales. Los correspondientes vectores ortonormales se obtienen reescalando,

$$|\bar{b}_i\rangle = \frac{\tilde{b}_i}{\sqrt{p_i}}, \quad (2.34)$$

donde se obtiene la expansión requerida

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |a_i\rangle |\bar{b}_i\rangle, \quad (2.35)$$

en términos de bases ortonormales particulares en \mathbf{H}_A y \mathbf{H}_B llamadas bases de Schmidt. Debido a la simetría de esta última expresión, se puede ver que el espectro de las matrices densidad parciales, o reducidas, están dados por los *coeficientes de Schmidt* $\lambda_i = \sqrt{p_i}$.

La descomposición de Schmidt es una herramienta útil para distinguir estados separables de estados entrelazados, dado que las bases de Schmidt, por construcción solamente incluyen estados separables, toda la información acerca del entrelazamiento está en los coeficientes de Schmidt. Un estado separable está caracterizado por un vector de coeficientes de Schmidt con un sólo valor no nulo: $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}_s = [1, 0, \dots, 0]$, mientras que el vector de coeficientes de Schmidt para un estado entre-

lazado tiene al menos dos componentes no nulas. Un estado se llama *maximalmente entrelazado*, si su vector de Schmidt se escribe como $\vec{\lambda}_m = [1/d, \dots, 1/d]$. Desde aquí, es posible observar que el concepto de los coeficientes de Schmidt permite relacionar el grado de entrelazamiento de un estado puro bipartito con el grado de mezcla estadística de las correspondientes matrices reducidas: una matriz densidad reducida pura corresponde a un estado separable, mientras que un estado maximalmente entrelazado conduce a una matriz densidad reducida completamente mezclada.

Estados mixtos: Criterio de transposición parcial

Es bien sabido en la teoría de la información cuántica que cuando se trata con estados mixtos bipartitos de dimensión arbitraria, el problema de la separabilidad se vuelve una tarea complicada de llevar a cabo. Sin embargo, existen criterios basados en mapeos positivos que permiten abordar este desafío.

Los mapeos positivos se definen como sigue: Sean \mathbf{H}_B y \mathbf{H}_C dos espacios de Hilbert y sea $B(H_i)$ un operador lineal en el espacio de Hilbert correspondiente. Un mapeo lineal,

$$\Lambda : B(H_B) \rightarrow B(H_C) \tag{2.36}$$

se llama positivo, si este mapea operadores hermíticos en operadores hermíticos satisfaciendo la relación $\Lambda(X^\dagger) = \Lambda(X)^\dagger$, y preservando la positividad, es decir, si $X \geq 0$ entonces $\Lambda(X) \geq 0$. Recordemos que un operador \mathbf{X} es positivo si este tiene un espectro positivo.

Un mapeo Λ se dice *completamente* positivo cuando para un espacio de Hilbert arbitrario \mathbf{H}_A , el mapeo $I_A \otimes \Lambda$ es positivo. De otra forma, Λ es positivo, pero no completamente. Un ejemplo importante de un mapeo positivo, pero no completamente positivo, es la traspuesta parcial [9, 10]. Dada la matriz densidad de un sistema compuesto:

$$\rho = \sum_{i,j}^N \sum_{k,l}^M \rho_{ij,kl} |i\rangle\langle j| \otimes |k\rangle\langle l|, \tag{2.37}$$

la trasposición parcial respecto al primer subsistema está dada por

$$\rho^{T_A} = \sum_{i,j}^N \sum_{k,l}^M \rho_{ji,kl} |i\rangle\langle j| \otimes |k\rangle\langle l|. \quad (2.38)$$

Análogamente definimos ρ^{T_B} intercambiando k y l en vez de i y j . Entonces dada una matriz densidad ρ , se dice que esta tiene una traspuesta parcial positiva si su transposición parcial no tiene autovalores negativos, es decir, es positiva semidefinida,

$$\rho^{T_A} \geq 0 \leftrightarrow \rho^{T_B} \geq 0. \quad (2.39)$$

El criterio de la traspuesta parcial nos dice que una condición necesaria para la separabilidad de un estado mixto bipartito es que $\rho^{T_A} \geq 0$. Si ρ^{T_A} tiene al menos un autovalor negativo, se dice que el estado está entrelazado. Es importante notar que la positividad de la traspuesta parcial es una condición necesaria y suficiente sólo para sistemas bipartitos de dimensión $2 \otimes 2$ y $2 \otimes 3$ [10].

2.2.3 El Bit cuántico o qubit

Sabemos que los computadores utilizan bits con dos valores posibles 1 y 0 con la finalidad de representar números binarios, pero a diferencia de un computador actual, un computador cuántico almacena la información como bits cuánticos o qubits. Entendemos por qubit a cualquier sistema físico cuyo espacio de Hilbert accesible tiene dimensión $d = 2$. En otras palabras, un qubit tiene dos estados posibles $|1\rangle$ y $|0\rangle$ en la notación de Dirac para estados cuánticos. Esta base $\{|1\rangle, |0\rangle\}$ se denomina *base computacional*, y el estado cuántico de un sistema de dos niveles puede ser escrito en esta base como:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (2.40)$$

donde α y β son números complejos que satisfacen la condición de normalización $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Para tener una mejor visualización del estado cuántico de un sistema de dos niveles, este puede ser representado como un punto con coordenadas esféricas, θ y ϕ , sobre una esfera unitaria y en cuya representación del estado cuántico de dos niveles puede ser expresado como:

$$|\psi\rangle = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \right] e^{i\phi'}. \quad (2.41)$$

En la expresión anterior, el factor de fase global $e^{i\phi'}$ no tiene efectos observables y por lo tanto usualmente se omite.

2.2.4 Compuertas Lógicas Cuánticas

Compuertas de un qubit

Las compuertas de un qubit corresponden a transformaciones unitarias que actúan sobre el estado cuántico del sistema.

Formalmente, cualquier sistema de dos niveles tiene una representación de *pseudo-spin* (una base que genere el algebra de Lie $SU(2)$) cuyas componentes a lo largo de una dirección arbitraria en el espacio tridimensional puede tomar solamente uno de dos valores $\pm \frac{\hbar}{2}$. Esta descripción nos entrega una manera útil de visualizar el estado cuántico de un sistema de dos niveles, representándolo como un punto con coordenadas polares θ y ϕ sobre una esfera unitaria, ver Fig. 2.1. Este cuadro se conoce comúnmente como representación de la esfera de Bloch, y al vector $\vec{v} = (\cos \phi \sin \theta; \sin \phi \sin \theta; \cos \theta)$ como al vector de Bloch.

El observable más general en la representación de pseudo-spin, puede ser expresado como una combinación lineal con coeficientes reales del operador identidad $I(2 \times 2)$ y los tres operadores de Pauli $\sigma_i = \frac{2S_i}{\hbar}$, con $(i = X, Y, Z)$, los cuales en la base de autoestados de σ_z , tienen una representación dada por:

$$\hat{\sigma}_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Estos operadores satisfacen las reglas de conmutación:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (2.43)$$

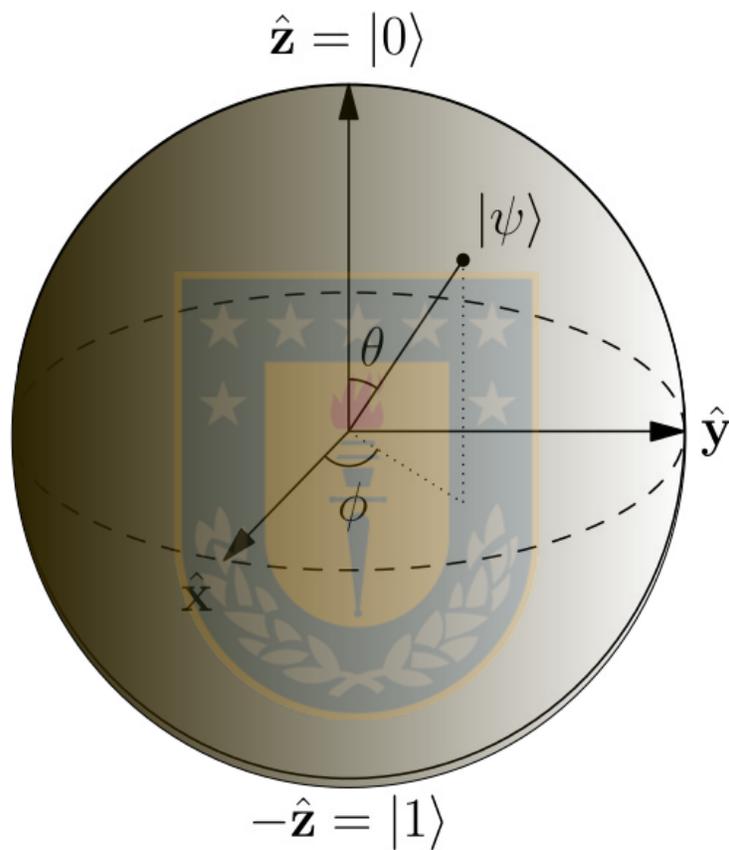


Figura 2.1: Representación de la esfera de Bloch para un sistema de dos niveles. Fuente: Elaboración propia.

donde ϵ_{ijk} es cero si dos índices son iguales y -1 o 1 cuando son diferentes, dependiendo siempre de la paridad de permutación de $\{ijk\}$.

Los autovalores de los operadores σ_i son ± 1 . Los autovectores de σ_Z con autovalores $+1$ y -1 se denotan por $|0\rangle$ y $|1\rangle$, respectivamente. Estos representan los polos norte y sur de la esfera de Bloch, Fig.2.1. Los correspondientes autovectores de σ_X son combinaciones lineales simétricas y anti-simétricas $|\Psi_X\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$ mientras que los autovectores de σ_Y son $|\Psi_Y\rangle = (|0\rangle \pm i|1\rangle)/\sqrt{2}$. Estos autoestados tienen su correspondiente representación en la esfera de Bloch, ver Fig.2.1.

El observable de traza nula más general para un sistema de dos niveles corresponde a una componente de spin a lo largo de la dirección definida por el vector unitario \vec{v} con coordenadas polares θ y ϕ , el cual se expresa en términos de matrices de Pauli de la forma:

$$\hat{\sigma}_{\vec{v}} = \cos \theta \hat{\sigma}_Z + \sin \theta \cos \phi \hat{\sigma}_X + \sin \theta \sin \phi \hat{\sigma}_Y = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

El observable $\hat{\sigma}_{\vec{v}}$ también tiene un espectro ± 1 , con autoestados de la forma:

$$|0_{\vec{v}}\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} |1\rangle, \quad (2.45a)$$

$$|1_{\vec{v}}\rangle = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} |1\rangle. \quad (2.45b)$$

Cuando el vector unitario \vec{v} rota en el espacio de Hilbert, $|0_{\vec{v}}\rangle$ explora completamente este espacio de pseudo-spin. El estado de spin más general, ecuación (2.40), es el autoestado con autovalor $+1$ de la componente de spin a lo largo de la dirección \vec{v} de coordenadas polares θ y ϕ , definido por la relación $e^{i\phi} \tan(\frac{\theta}{2}) = \frac{\beta}{\alpha}$.

Las compuertas de un qubit implementan rotaciones en el espacio de Hilbert del *pseudo-spin*. Estas compuertas las representamos esquemáticamente como se muestra en la figura 2.2. Dado el estado cuántico más general para un sistema de dos niveles, $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, las compuertas actúan de la forma:

$$\sigma_X(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \rightarrow \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle, \quad (2.46)$$

de esto vemos que σ_X intercambia los estados cuánticos de la base computacional $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$. Esta compuerta representa la contraparte cuántica de la compuerta clásica NOT, la cuál actúa sobre un bit 0 ó 1 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow 1, \\ 1 &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Las otras compuertas actúan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma_Y(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) &\rightarrow i(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle), \\ \sigma_Z(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) &\rightarrow \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle, \\ H(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(|0\rangle + |1\rangle) + \beta(|0\rangle - |1\rangle)]. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Donde,

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

es otra matriz que actúa sobre un qubit, y representa una rotación de π sobre los ejes x y z .

De lo anterior debemos señalar que mientras en la versión clásica exista sólo una compuerta de un bit (compuerta NOT), para un qubit existen claramente más de una. De esta manera podemos considerar que cualquiera de las anteriores operaciones unitarias de un qubit puede ser considerada como una compuerta lógica.

Compuertas lógicas cuánticas controladas o compuertas de dos qubits

Estas compuertas acoplan los bits denominados de *control* y *objetivo* de acuerdo a una dinámica condicional, implementando una proposición lógica de la forma: *si A es verdad, realice B*. La

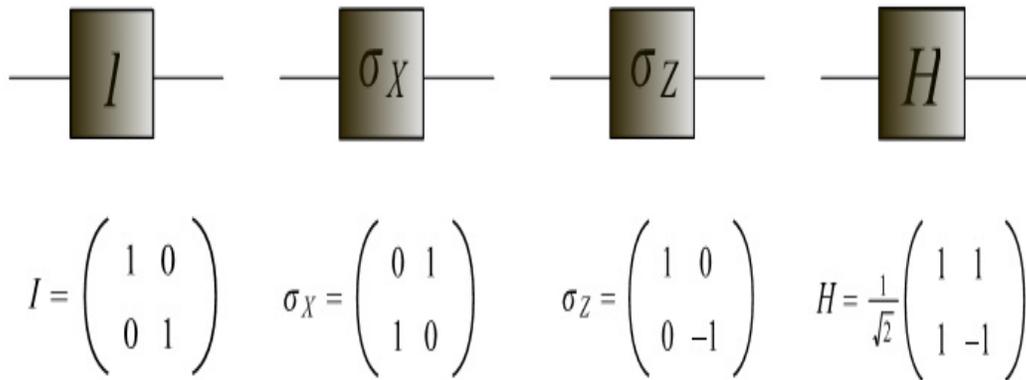


Figura 2.2: Representación de compuertas de un qubit, con su correspondiente operador: I para la compuerta identidad, σ_X para la compuerta NOT, σ_Z para la compuerta de fase y H para la compuerta Hadamard. Fuente: Elaboración propia.

acción B , presentada sobre el bit objetivo, puede ser cualquier operación unitaria U . La verdad de la afirmación A generalmente corresponde al valor 1 del control, su negación al valor 0. Si el control está inicialmente en el estado $|1\rangle$ (A es verdad) o en el estado $|0\rangle$ (A no es verdad), este estado permanece inalterado en la operación de la compuerta.

Se dice *compuerta controlada* U a la compuerta que implementa la siguiente *tabla de verdad*:

$$|0\rangle|\psi\rangle \rightarrow |0\rangle|\psi\rangle; \quad |1\rangle|\psi\rangle \rightarrow |1\rangle U|\psi\rangle, \quad (2.49)$$

donde el primer ket representa el qubit de control y el segundo ket al de objetivo. Sabemos que esta operación, la que transforma la base ortogonal de dos qubits $|a, b\rangle$ en otra base ortogonal, esta debe ser unitaria. Al igual que en el caso de compuertas cuánticas de un qubit, las compuertas controladas también se representan por esquemas tal como muestra la Fig.2.3, en la cual las dos líneas horizontales representan al bit de control (línea superior) y al bit objetivo (línea inferior). El control condicional está simbolizado por una línea vertical y el cuadrado (conteniendo el símbolo de la operación condicional) sobre la línea del qubit objetivo.

Una de las principales compuertas lógicas de esta clase es la compuerta NOT controlada o CNOT.

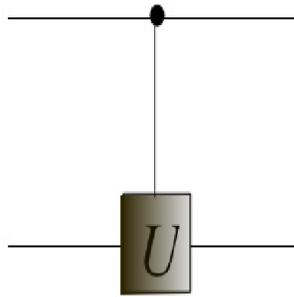


Figura 2.3: Esquema de una compuerta controlada U . Fuente: Elaboración propia.

Esta compuerta también tiene una representación tal como se muestra en la Fig.2.4,

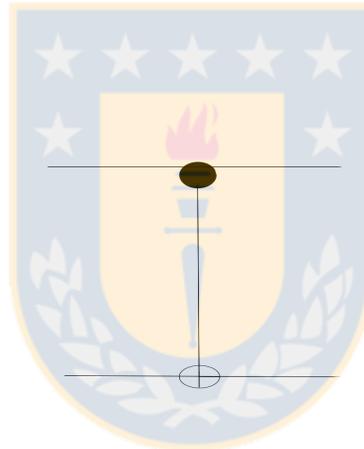


Figura 2.4: Compuerta controlada NOT (CNOT). Fuente: Elaboración propia.

La acción de la compuerta lógica controlada NOT (CNOT) es representada como,

$$|c\rangle|t\rangle \rightarrow |c\rangle|t \oplus c\rangle, \quad (2.50)$$

donde \oplus representa la suma en módulo 2 y los estados $|c\rangle$ y $|t\rangle$ describen el qubit de control y el qubit objetivo, respectivamente. En otras palabras, esta compuerta realiza una operación NOT sólo cuando el qubit de control está en el estado $|1\rangle$, de otra forma el qubit objetivo queda intacto.

2.3 Teleportación

2.3.1 Teleportación del estado de un qubit

Supongamos que Alice quiere teleportar un estado general desconocido $|\alpha\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ a Bob, utilizando como canal cuántico un par EPR de la forma $|\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle)$.

Así el estado inicial es dado por,

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle &= (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a|0\rangle(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) + b|1\rangle(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a|000\rangle + a|011\rangle + b|100\rangle + b|111\rangle). \end{aligned}$$

Ahora Alice aplica primero la compuerta C_{not} , dada por la ecuación (2.50), para sus dos qubits y luego la compuerta Hadamard, ecuación (2.48), al qubit que desea teleportar. Entonces:

$$\begin{aligned} C_{not}(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}C_{not}(a|000\rangle + a|011\rangle + b|100\rangle + b|111\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a|000\rangle + a|011\rangle + b|110\rangle + b|101\rangle), \end{aligned}$$

ahora, al aplicar H se puede mostrar que:

$$(H)(C_{not})(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = \frac{1}{2} [|00\rangle(a|0\rangle + b|1\rangle) + |10\rangle(a|0\rangle - b|1\rangle) + |01\rangle(a|1\rangle + b|0\rangle) + |11\rangle(a|1\rangle - b|0\rangle)].$$

De la expresión anterior vemos que si Alice mide sobre sus qubits, obtendrá con igual probabilidad uno de los estados: $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$.

En acuerdo previo con esto, el qubit de Bob es proyectado a uno de los estados: $a|0\rangle + b|1\rangle, a|1\rangle + b|0\rangle, a|0\rangle - b|1\rangle$ ó $a|1\rangle - b|0\rangle$ respectivamente. Alice le dice a Bob el resultado de su medición a través de dos bits clásicos de información por el canal clásico. Bob aplica una de las compuertas: I, X, Z e Y en función de los bits clásicos recibidos. Los estados de los qubits de Bob son luego transformados

en $|\alpha\rangle$ exactamente.

2.3.2 Teleportación de estados puros cuánticos generales finito dimensionales

Consideremos ahora la teleportación de un estado cuántico general puro N -dimensional. Denotamos por $\{|i\rangle, i = 0, \dots, N_\theta - 1\}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert N -dimensional H_θ , $\theta = 1, 2, 3$. Los espacios H_1 y H_2 son asociados a Alice, mientras H_3 lo asociaremos a Bob. Alice en general tendrá estados cuánticos en el espacio de Hilbert H_1 de la forma:

$$|\Psi_0\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{N_1} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{N_1-1} \alpha_i |i\rangle, \quad |\Psi_0\rangle \in H_1, \quad (2.51)$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $\sum_{i=0}^{N_1-1} |\alpha_i|^2 = 1$. Un estado general entrelazado de dos partículas en los espacios de Hilbert H_2 y H_3 es de la forma,

$$|\Psi_1\rangle = \sum_{i=0}^{N_2-1} \sum_{j=0}^{N_3-1} a_{ij} |ij\rangle, \quad \sum_{i=0}^{N_2-1} \sum_{j=0}^{N_3-1} |a_{ij}|^2 = 1 \quad (2.52)$$

para coeficientes complejos $a_{ij} \in \mathbb{C}$. El grado de entrelazamiento depende de los coeficientes a_{ij} , $i = 0, \dots, N_2 - 1$, $j = 0, \dots, N_3 - 1$. Para teleportar el estado $|\Psi_0\rangle$ a Bob, es necesario que $N_3 \geq N_1$, pero para este caso tomamos $N_3 = N_1$.

El estado inicial de Alice y Bob están dados por,

$$|\Psi_0\rangle \otimes |\Psi_1\rangle = \sum_{i,k=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} \alpha_i a_{jk} |ijk\rangle \in H_1 \otimes H_2 \otimes H_3. \quad (2.53)$$

Alice posee la primera y segunda partícula y Bob posee la tercera. Para transformar el estado de la partícula de 2 en $|\Psi_0\rangle$, el procedimiento es similar al del caso del qubit, es decir, debemos hacer

una transformación unitaria U y luego mediciones. Consideremos U , la transformación unitaria actuando sobre el producto tensorial de dos estados cuánticos en los espacios de Hilbert H_1 y H_2 tal que

$$U(|ij\rangle) = \sum_{s=0}^{N_1-1} \sum_{t=0}^{N_2-1} b_{ijst} |st\rangle, \quad (2.54)$$

con $\sum_{s=0}^{N_1-1} \sum_{t=0}^{N_2-1} b_{ijst} b_{i'j's't'}^* = \delta_{ss'} \delta_{tt'}$, $\forall i = 0, 1, \dots, N_1 - 1$, $j = 0, 1, \dots, N_2 - 1$.

Teorema 1 Si b_{ijst} satisface la siguiente relación

$$\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \alpha_i a_{ijk} b_{ijst} = \frac{1}{\sqrt{N_1 N_2}} \alpha_{k-t+1} C_{sk-t+1t}, \quad (2.55)$$

para $c_{ijk} \in \mathbb{C}$, tal que $C_{ijk} C_{ijk}^* = 1$, U es la transformación unitaria que completa la teleportación.

Prueba. De la transformación unitaria y el teorema 1 tenemos, con $|\Psi_0\rangle$, lo siguiente:

$$\begin{aligned} (U \otimes 1)(|\Psi_0 \otimes |\Psi_1\rangle) &\equiv |\psi\rangle = \sum_{i,s,k=0}^{N_1-1} \sum_{j,t=0}^{N_2-1} \alpha_i a_{ijk} b_{ijst} |stk\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{N_1 N_2}} \sum_{s,k=0}^{N_1-1} \sum_{t=0}^{N_2-1} \alpha_{k-t+1} C_{sk-t+1t} |stk\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{N_1 N_2}} \sum_{i,j=0}^{N_1-1} \sum_{k=0}^{N_2-1} \alpha_j C_{ijk} |ikk + j - 1\rangle, \end{aligned}$$

donde los índices i, j, k en el vector base $|ijk\rangle$ son entendidos para ser tomados como módulos de $N_1 - 1$, $N_2 - 1$ y $N_1 - 1$ respectivamente.

Ahora Alice mide sus bits cuánticos en el estado $|\psi\rangle \in H_1 \otimes H_2$. Si $|ik\rangle$ es el estado obtenido después de la medida, *id est*,

$$|\psi\rangle \rightarrow |ik\rangle \otimes \left(\sum_{j=0}^{N_1-1} c_{ijk} \alpha_j |k + j - 1\rangle \right), \quad (2.56)$$

$$a_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{N}}, \quad (2.60)$$

el estado entrelazado (2.52) es dado por

$$|\Psi_1\rangle_{max} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} |ii\rangle. \quad (2.61)$$

Desde la ecuación (2.59), obtenemos la transformación unitaria (2.54) usada en el protocolo de teleportación con

$$b_{it+i-1st} = \frac{c_{sit}}{\sqrt{N}}, \quad (2.62)$$

con c_{sit} como en (2.55), los otros coeficientes b en (2.54) serán cero. Es fácilmente visto que la transformación (2.54) dada por (2.62) es unitaria también. La teleportación es realizada por la aplicación de la operación unitaria (2.57) de acuerdo con el resultado de las medidas de Bob.

De acuerdo con la descomposición de Schmidt, en ese caso el estado entrelazado (2.52) en los espacios de Hilbert \mathbf{H}_2 y \mathbf{H}_3 pueden ser escritos como

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{\lambda_i} |ii\rangle, \quad (2.63)$$

en una base adecuada, donde $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i = 1$. Así, podemos tomar $a_{ij} = \sqrt{\lambda_i} \delta_{ij}$. Sustituyendo esto dentro de la ecuación (2.59), tenemos que

$$\sqrt{\lambda_{t+j-1}} b_{jt+j-1st} = c_{sit}. \quad (2.64)$$

De acuerdo con la transformación unitaria U , y la condición $c_{ijk} c_{ijk}^* = 1$, obtenemos $\lambda_i = \frac{1}{N}$,

$i = 0, 1, \dots, N - 1$, y el estado (2.52) es maximalmente entrelazado, lo cual muestra que con algo menor que un estado maximalmente entrelazado es imposible dar una transformación unitaria que complete una perfecta teleportación.

Para $N = 2$, tomando $c_{111} = c_{211} = c_{121} = c_{112} = c_{212} = c_{122} = -c_{221} = -c_{222} = 1$ (esta elección satisface la condición $c_{ijk}c_{ijk}^* = 1$), tenemos que $O_{11} = I$, $O_{12} = \sigma_x$, $O_{21} = \sigma_z$, $O_{22} = i\sigma_y$, donde $\sigma_{x,y,z}$ son matrices de Pauli e I que es la matriz identidad 2×2 . La transformación unitaria U es luego igual a las acciones conjuntas de la compuerta controlada not, C_{NOT} , y la transformación de Walsh-Hadamard H . Esto recupera el protocolo usual para teleportar estados cuánticos de dos niveles, que constituye el ejemplo más sencillo de teleportación.

Cuando $N = 2^l$ para algún $l \in \mathbb{N}$, $|\psi_1\rangle$ puede ser reescrito como

$$|\Psi_1\rangle = \prod_i^l |\beta\rangle_i = \prod_{i=1}^l \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)_i, \quad (2.65)$$

$|\beta\rangle_i$ permanece para el i -ésimo par EPR con el primer qubit junto al espacio de Hilbert \mathbf{H}_2 . Además en vez de un estado completamente entrelazado de dos qubits de N niveles, sólo necesitamos l pares de qubits entrelazados de dos niveles. Generalmente, la dimensión N_2 de \mathbf{H}_2 puede ser más grande que N_1 . Como preparamos el estado entrelazado de dos qubits en el espacio de Hilbert \mathbf{H}_3 y el sub espacio de Hilbert $\mathcal{H}_2 \subset \mathbf{H}_2$, con $\dim(\mathcal{H}_2) = N_1$, los resultados de arriba son aún válidos.

Consideremos ahora algunos casos especiales de teleportación cuando algunos componentes del estado inicial son cero. Sin pérdida de generalidad, hacemos $\alpha_i = 0$ para $i = 1, \dots, n_1, n_1 < N - 1$, y $\alpha_i = 0$ para $i = n_1 + 1, \dots, N_1$ (se debe señalar que dado un vector N_1 -dimensional es siempre posible hacer que los componentes se hagan cero cambiando la base), pero tal como transformación de base depende por supuesto de los componentes del vector dado, ya que para un estado cuántico desconocido este tipo de transformaciones no tiene un uso práctico).

El estado inicial para ser teleportado bajo la hipótesis de arriba puede ser escrita como:

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i |i\rangle. \quad (2.66)$$

Tomamos la dimensión de H_2 como $N_2 = n_1 < N_1$. El estado entrelazado usado para teleportar $|\Psi_0\rangle$ puede ser preparado de la siguiente manera:

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n_1}}\delta_{ij}, & \text{si } j = 1, \dots, n_1 \\ 0, & \text{si } j = n_1 + 1, \dots, N_1 \end{cases} \quad (2.67)$$

para $i = 1, 2, \dots, n_1$. Desde (2.59) obtenemos la transformación unitaria (2.54) con

$$b_{it+i-1st} = \frac{c_{sit}}{\sqrt{N_1}} \quad (2.68)$$

para $t, t + i - 1 \pmod{n_1} = 1, \dots, n_1, i, s = 0, 1, \dots, N_1 - 1$, los otros coeficientes b_{jist} en (2.59) serán cero.

Un ejemplo es la teleportación de un par EPR [11]: $|\Psi_0\rangle = a|01\rangle + b|10\rangle$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$. En este caso tenemos $N_1 = 4$. Aquí $|\Psi_0\rangle$ puede ser escrito como $\alpha|3\rangle + \beta|2\rangle \equiv \alpha|1'\rangle + \beta|2'\rangle$. La dimensión del espacio de Hilbert auxiliar H_2 sólo es necesario que sea $n_1 = 2$. El estado entrelazado es dado por $|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11'\rangle + |22'\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|13\rangle + |22\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|101\rangle + |010\rangle)$.

Aquí como $n_1 = \frac{N_1}{2} = 2$, en lugar de (2.67), podemos alternativamente tomar $a_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n_1}}\delta_{ij}$ para $j = n_1 + 1, \dots, N_1$ y $a_{ij} = 0$ para $j = 1, \dots, n_1$. Luego el estado entrelazado será $|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |24\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$, el cual es llamado triplete GHZ, consistente de tres qubits de dos niveles y que puede ser realizado experimentalmente [12].

2.3.3 Teleportación estándar de estados mezclados

En una situación realista, debido a la interacción con el entorno, en lugar de un estado puro, Alice debe tener un estado mezclado ρ . Y en lugar de estados puros maximalmente entrelazados, Alice y Bob usualmente comparten un estado mezclado entrelazado χ . Antes de considerar la teleportación de un estado mezclado producto de un estado entrelazado mezclado como recurso entrelazado, debemos primero reformular el protocolo de teleportación predicho para estados puros. Todo operador lineal de la forma $A : H_\alpha \rightarrow H_\beta$ puede ser representado por una matriz $N_\beta \times N_\alpha$ como la que presentamos a continuación:

$$A(|\alpha\rangle) = \sum_{i=0}^{N_\beta-1} A_{\alpha i} |i\rangle, |\alpha\rangle \in H_\alpha. \quad (2.69)$$

tomando $N_1 = N_3 = n$, $N_2 = m$. Para transformar el estado $|\Psi_0\rangle$ en (2.51) usando el estado entrelazado (2.52) y la transformación unitaria U en (2.54), introducimos un número $m \cdot n$ de $m \times n$ -matrices con elementos matriciales de la forma $(B_{st})_{ij} = b_{ij,st}$.

Sea A una matriz de $n \times m$ con elementos de la forma $(A)_{ij} = a_{ij}$. Tenemos

Teorema 2 Si B_{st} y A satisfacen la siguiente relación

$$\begin{cases} \text{tr}(B_{st}B_{s't'}^\dagger) = \delta_{tt'}\delta_{ss'}, \\ B_{st}^\dagger A^\dagger A B_{st} = |\lambda_{st}|^2 I_{n \times n}, \\ AA^\dagger = \frac{1}{n} I_{n \times n}, \end{cases} \quad (2.70)$$

para algunos números complejos distintos de cero λ_{st} se cumple que $\sum_{s,t} |\lambda_{st}|^2 = 1$, luego U es una transformación unitaria que completa perfectamente la teleportación cuántica.

Prueba. La primera condición en (2.70) es igual a la condición unitaria para la transformación (2.54). De las ecuaciones (2.53) y (2.54), luego de que Alice mida sus dos partículas con estados de salidas $|st\rangle$, la partícula de Bob será

$$|\Psi_0\rangle \rightarrow T_{st}|\Psi_0\rangle = AB_{st}|\Psi_0\rangle. \quad (2.71)$$

Si la condición (2.70) se satisface, tendremos $T_{st}^\dagger T_{st} = T_{st} T_{st}^\dagger = |\lambda_{st}|^2 I_{n \times n}$, y completaremos una perfecta teleportación cuántica.

Para el caso en que $m = n$, introducimos $U_{st} = \sqrt{n}B_{st}$, y la condición (2.70) es equivalente a

$$\begin{cases} \text{tr}(U_{st}U_{s't'}^\dagger) = n\delta_{tt'}\delta_{ss'}, \\ U_{st}U_{st}^\dagger = I_{n \times n}, \end{cases} \quad (2.72)$$

con

$$AA^\dagger = A^\dagger A = \frac{1}{n} I_{n \times n}, \quad \text{donde } |\lambda_{st}|^2 = \frac{1}{n^2}. \quad (2.73)$$

Ya que, sólo el estado maximalmente entrelazado (2.52) (satisfaciendo $AA^\dagger = A^\dagger A = \frac{1}{n}I_{n \times n}$) puede completar la teleportación cuántica perfecta. Para el estado maximalmente entrelazado compartido por los sistemas 1 y 2, para teleportar un estado desconocido de manera perfecta, se debería encontrar un número n^2 de matrices de $n \times n$ las cuales satisfacen (2.72) (eso constituye, de acuerdo con la definición de Werner, una base para los operadores unitarios). La clasificación de la solución general de (2.72) es un problema abierto. Afortunadamente, podemos escribir una solución especial hasta una transformación global unitaria, como describimos a continuación. Sea h y g matrices de $n \times n$ tal que $h|j\rangle = |(j+1) \bmod n\rangle$, $g|j\rangle = w^j|j\rangle$, con $w = e^{\{-\frac{2i\pi}{n}\}}$.

Definimos n^2 matrices de $n \times n$ linealmente independientes de la forma,

$$U_{st} = h^t g^s, \tag{2.74}$$

el cual satisface,

$$U_{st}U_{s't'} = w^{st'-ts'} U_{s't'}U_{st}, \quad \text{tr}(U_{st}) = n\delta_{s0}\delta_{t0}. \tag{2.75}$$

Podemos revisar que U_{st} en (2.75) satisface la ecuación (2.72) y forma una base completa de matrices $n \times n$. Estas pueden ser usadas para completar la teleportación perfecta a través de un estado maximalmente entrelazado.

2.4 Fidelidad

En relación a este concepto, se definió originalmente esta medida para dos estados con matrices densidad ρ_1 y ρ_2 como una probabilidad de transición, de la forma,

$$F(\rho, \sigma) \equiv \left(\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}} \right)^2, \tag{2.76}$$

cuya expresión cumple con las siguientes propiedades:

- $0 \leq F(\rho_1, \rho_2) \leq 1$ y $F(\rho_1, \rho_2) = 1$ si y sólo si, $\rho_1 = \rho_2$
- Es simétrica $F(\rho_1, \rho_2) = F(\rho_2, \rho_1)$
- Si $\rho_1 = |\psi\rangle\langle\psi|$ es puro, ocurre $F(\rho_1, \rho_2) = \langle\psi|\rho_2|\psi\rangle$
- Convexidad si $\rho_1, \rho_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 = 1$, entonces

$$F(\rho, p_1\rho_1 + p_2\rho_2) \geq p_1F(\rho, \rho_1) + p_2F(\rho, \rho_2), \quad (2.77)$$

$$F(\rho_1, \rho_2) \geq \text{Tr}(\rho_1\rho_2), \quad (2.78)$$

- Multiplicatividad, $F(\rho_1 \otimes \rho_2, \rho_3 \otimes \rho_4) = F(\rho_1, \rho_3)F(\rho_2, \rho_4)$
- Sabemos que la fidelidad se preserva cuando actúan sobre los estados evoluciones unitarias, que se cumple para cualquier operador unitario,

$$F(\rho_1, \rho_2) = F(U\rho_1U^\dagger, U\rho_2U^\dagger), \quad (2.79)$$

que para el caso de dos dimensiones se obtienen fórmulas más sencillas para F ,

$$F(\rho_1, \rho_2) = \text{Tr}(\rho_1\rho_2) + 2(\det\rho_1\det\rho_2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.80)$$

2.4.1 Fidelidad Promedio

En información cuántica el desafío es poder transmitir el estado puro desconocido $|\psi\rangle$ con una mínima pérdida de información, es decir, con la mayor fidelidad posible. Puesto que generalmente el canal usado para el proceso de teleportación no es maximalmente entrelazado, el estado recibido es diferente al enviado. Por lo tanto, si consideramos total ignorancia acerca del estado que se emitió $|\psi\rangle$, supondremos que se tratará de cualquier estado que vive en el espacio de Hilbert, cada uno con una misma densidad de probabilidad $\wp = \frac{1}{2\pi}$.

Así, la fidelidad media f dada por el promedio de F en todos los posibles estados $|\psi\rangle$, se convierte en

$$\begin{aligned}
f &= \int \wp F d\psi \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \langle \psi | \rho | \psi \rangle |\langle 0 | \psi \rangle| d|\langle 0 | \psi \rangle| d\theta_1 d\theta_2,
\end{aligned} \tag{2.81}$$

en la expresión los θ_i son las fases del estado $|\psi\rangle$ y $|\langle 0 | \psi \rangle| d|\langle 0 | \psi \rangle| d\theta_1 d\theta_2$ es el elemento de volumen del estado en el espacio de Hilbert definido por los tres parámetros $|\langle 0 | \psi \rangle|, \theta_1, \theta_2$. Si suponemos que un emisor tiene un solo sistema y desea transmitir un estado desconocido $|\psi\rangle$ a un receptor, pudiendo comunicarse clásicamente entre ellos, el proceso más básico que el receptor puede hacer es medir un observable y enviar por medio de un bit clásico un 0, si el resultado es $|0\rangle$ o un 1, si el resultado es $|1\rangle$, donde $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son los estados propios de los observables que fueron previamente acordados entre ellos. De esta forma el receptor recibe el estado $|0\rangle$ con probabilidad $|\langle 0 | \psi \rangle|^2$ y $|1\rangle$ con probabilidad $|\langle 1 | \psi \rangle|^2$, en lugar de $|\psi\rangle$. Para este caso, la fidelidad media está dada por

$$\begin{aligned}
f &= \int \wp \langle \psi | (|\langle 0 | \psi \rangle|^2 |0\rangle \langle 0| + |\langle 1 | \psi \rangle|^2 |1\rangle \langle 1|) | \psi \rangle d\psi \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[|\langle 0 | \psi \rangle|^4 + (1 - |\langle 0 | \psi \rangle|^2)^2 \right] |\langle 0 | \psi \rangle| d|\langle 1 | \psi \rangle| d\theta_1 d\theta_2 \\
&= \frac{2}{3},
\end{aligned} \tag{2.82}$$

esto significa que el valor $\frac{2}{3}$ garantiza un proceso básico o elemental en la transferencia de la información. Como consecuencia podemos decir que en un proceso para el cual la transferencia de la información hace variar éste valor, diremos que su fidelidad media no es elemental cuando supere a $\frac{2}{3}$ [13, 15, 16].

Capítulo 3

Medidas de Entrelazamiento y Discordia Cuántica

3.1 Entrelazamiento de formación de un estado arbitrario de dos qubits

El entrelazamiento es el comportamiento de la mecánica cuántica que permite, en principio, las hazañas tales como la teleportación [17] y codificación densa [18] y es lo que Schrödinger llama " la característica a tratar en mecánica cuántica [19]". Un estado puro de un par de sistemas cuánticos es llamado entrelazado si este **no es factorizable**, esto es, si cada sistema por separado no tiene un estado puro de estos propios. Un ejemplo clásico es el estado singlete de dos partículas de espín $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$, en el cual ninguna partícula tiene una dirección de espín definitiva.

Un estado mezcla es entrelazado si este no puede ser representado como una mezcla de estados puros factorizados. En estos últimos años se ha trabajado arduamente para encontrar medidas de entrelazamiento, particularmente para estados mezclas de un sistema bipartito [20–22]. La más básica de estas medidas es el entrelazamiento de formación, el cual intenta cuantificar los recursos necesarios para crear un estado entrelazado dado [22].

Es primordial para nuestro estudio tener bien justificada la matemática, que trata la medida del entrelazamiento que tiene valor en un número de áreas de investigación, incluyendo el estudio de la decoherencia en computadores cuánticos [23] y la evaluación de esquemas de criptografía cuántica [24]. Desafortunadamente, la mayoría de las propuestas de medidas de entrelazamiento conllevan a extremizaciones, las cuales son difíciles de manejar analíticamente; y el entrelazamiento de formación no es la excepción a esta regla. Sin embargo, en el caso especial de entrelazamiento entre dos sistemas cuánticos binarios tales como el espín de una partícula de espín $\frac{1}{2}$ o la polarización

de un fotón, sistemas que son llamados generalmente **qubits**, existe una fórmula explícita para el entrelazamiento de formación que ha sido recientemente conjeturado y ha sido probado para una clase especial de matrices densidad [25].

Ahora probaremos la fórmula para estados arbitrarios de dos qubits, donde el entrelazamiento de formación es definido como sigue [22].

Dada una matriz densidad ρ de un par de sistemas cuánticos A y B, consideramos todas las posibles descomposiciones de estados puros de ρ , esto es, todo el conjunto de estados $|\Psi_i\rangle$ con probabilidades p_i tal que:

$$\rho = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| \quad (3.1)$$

para cada estado puro, el entrelazamiento E es definido como la entropía de cualquiera de los dos subsistemas A y B [20]:

$$E(\Psi) = -Tr(\rho_A \log_2 \rho_A) = -Tr(\rho_B \log_2 \rho_B) \quad (3.2)$$

donde ρ_A es la traza parcial de $|\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|$ sobre el sistema B, y ρ_B es definido de forma similar. El entrelazamiento de formación del estado mezcla ρ es luego definido como el entrelazamiento promedio de la descomposición de los estados puros, minimizados sobre todas las descomposiciones de ρ :

$$E(\rho) = \min_i \sum_i p_i E(\Psi_i). \quad (3.3)$$

La ecuación básica (3.2) es justificada por la interconvertibilidad física de una colección de pares en un estado puro arbitrario Ψ y una colección de pares en el estado singlete estándar, la razón de conversión asintótica viene dada por $E(\Psi)$ [20]. La idea de lo expuesto anteriormente es que para un par de qubits, el mínimo valor especificado en la ecuación (3.3) pueda ser expresado como una función explícita de ρ . Desde ahora nos referiremos al entrelazamiento de formación sólo como el entrelazamiento. La fórmula para el entrelazamiento hace uso de lo que se llama habitualmente la transformación **spín flip** por su nombre en inglés, la cual es una función aplicable tanto a vectores de estado y a matrices densidad de un arbitrario número de qubits.

Así, para un estado puro de un sólo bit cuántico (qubit), el **spín flip**, lo denotamos con un tilde, es definido por,

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \sigma_y |\Psi\rangle, \quad (3.4)$$

donde $|\Psi^*\rangle$ es el complejo conjugado de $|\Psi\rangle$ cuando este es expresado en una base fija tal como $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$, y σ_y es expresada en esta misma base como una de las matrices de Pauli, de la forma :

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Para el spín $\frac{1}{2}$ esta es la operación temporal reversa estándar y además vuelve reversible la dirección del spín [26]. Para realizar el **spín flip** en n qubits, aplicamos la transformación de arriba a cada qubit individual. Si el sistema es descrito por una matriz densidad también por un vector de estado, cada σ_y debe ser aplicado a ambos lados. Por ejemplo, para un estado general ρ de dos qubits vemos que el estado del spín volteado se representa como:

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (3.6)$$

donde nuevamente el complejo conjugado es tomado en la base estándar, para un par de partículas de spín $\frac{1}{2}$ es $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$. En este caso el spín volteado es equivalente [27] a la **conjugación compleja en las bases mágicas**, el cual aparece en la referencia [25]. Aunque hemos introducido la transformación **vuelta de spín** inicialmente para tratar con estados mezcla, este concepto también es conveniente para expresar el entrelazamiento de un estado puro de dos qubits. Podemos mostrar que este entrelazamiento, definido en la ecuación (3.2) puede ser escrito como [25]:

$$E(\Psi) = \xi(C(\Psi)), \quad (3.7)$$

donde la concurrencia \mathbf{C} es definida como,

$$C(\Psi) = |\langle \Psi | \tilde{\Psi} \rangle|, \quad (3.8)$$

y la función ξ es dada por,

$$\xi(C) = -\frac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{2} \log_2\left(\frac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{2}\right) - \frac{1 - \sqrt{1 - c^2}}{2} \log_2\left(\frac{1 - \sqrt{1 - c^2}}{2}\right). \quad (3.9)$$

La función $\xi(C)$ es monótonamente creciente, y con rangos desde 0 y 1, ya que C va desde 0 a 1, entonces podemos tomar a la concurrencia como una medida del entrelazamiento por derecho propio. Consideremos a modo de ejemplo, el estado singlete $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$ es dejado inalterado por un **spín flip** (excepto por el signo negativo en la expresión total), entonces la concurrencia $|\langle \Psi | \tilde{\Psi} \rangle|$ es igual a 1. En el otro extremo encontramos, un estado no-entrelazado, o factorizable, estado puro tal como $|\uparrow\downarrow\rangle$ el cual es siempre mapeado por la transformación spín flip dentro de un estado ortogonal, entonces esta concurrencia es cero o nula. De esto vemos que siempre debemos considerar otro hecho que rige sobre $\xi(C)$, lo que se denomina función convexa (esto es curvada hacia arriba). Una vez definido el spín flip y la función $\xi(C)$, la fórmula que describe el entrelazamiento de formación de un estado mezcla ρ de dos qubits:

$$E(\Lambda) = \xi(c(\Lambda)) \quad (3.10)$$

donde,

$$C(\Lambda) = \max \left\{ 0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4} \right\}, \quad (3.11)$$

$$\Lambda = \rho \tilde{\rho} \quad (3.12)$$

y los λ_i son los eigenvalores en raíces cuadradas, en orden decreciente, de la matriz no hermitiana Λ . Vemos que cada λ_i es un número real no negativo.

3.2 Medidas de Decoherencia y estados bipartitos mezcla (Estados X)

En orden para describir la evolución dinámica del entrelazamiento cuántico usaremos la Concurrencia de Wootters [3]. Para cualquier entropía basada en la medida del entrelazamiento obtendremos la misma conclusión sobre la separabilidad bipartita. La concurrencia varía desde $C = 0$ para estados separables y hasta $C = 1$ para los estados maximalmente entrelazados. Para dos qubits cualesquiera, la concurrencia debe ser calculada explícitamente desde su matriz densidad ρ para los qubits A y B :

$$C(\rho) = \max \left\{ 0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4} \right\}, \quad (3.13)$$

donde las cantidades λ_i son los eigenvalores en orden decreciente de la matriz ζ :

$$\zeta = \rho(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (3.14)$$

donde ρ^* representa la conjugación compleja de ρ en las bases estandar $|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle$ y σ_y es la matriz de Pauli expresada en la misma base como:

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Ahora examinaremos la evolución del entrelazamiento bajo relajación de ruido-inducido de una clase importante de matrices densidad bipartitas, las cuales definiremos más abajo. Ya que una matriz densidad de esta clase sólo contiene elementos no-negativos en una formación en X , a lo largo de su diagonal y antidiagonal principal, la llamaremos **Estados X**:

$$\rho^{AB} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & w \\ 0 & b & z & 0 \\ 0 & z^* & c & 0 \\ w^* & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

donde $a + b + c + d = 1$.

Este tipo de matriz es actualmente usual. La experiencia muestra que este estado mezclado \mathbf{X} emerge naturalmente en una amplia variedad de situaciones físicas [28–30]. Vemos que se incluyen particularmente estados puros de Bell como también los bien conocidos estados mezclados de Werner [31] como casos especiales. Las transformaciones unitarias extienden los dominios más ampliamente, como explicaremos más abajo.

Los estados mezclados definidos aquí no tan sólo son comunes sino también tienen la propiedad que ellos a menudo retienen la forma en \mathbf{X} bajo evolución de ruido. Esto debe ser esperado para fases de ruido, los cuales sólo pueden tener dependencia temporal en los elementos fuera de la diagonal de la matriz. La interacción Hamiltoniana y la de los operadores de Kraus para la evolución de amplitud de ruido son diferentes, y la evolución bajo amplitud de ruido es más elaborada, afectando a todos los elementos distintos de cero [32], sin embargo la robusta forma invariante durante la evolución es fácil de checkear. Es muy sencillo encontrar aplicaciones para un amplio margen de fuentes reales de ruido.

Para el estado \mathbf{X} , la concurrencia [3] puede ser fácilmente calculada como

$$C(\rho^{AB}) = 2max \left\{ 0, |z| - \sqrt{ad}, |w| - \sqrt{bc} \right\}. \quad (3.17)$$

3.3 Discordia Cuántica

El entrelazamiento no es la única medida de correlaciones cuánticas y por consiguiente una interesante aproximación ha sido introducida en [33–35] para intentar cuantificar todas las correlaciones no-clásicas presentes en un sistema además del entrelazamiento. La cantidad definida como la discordia cuántica es dada por la diferencia entre dos expresiones de información mutua (**IM**) extendida desde el sistema clásico al cuántico.

La correlación total entre dos sistemas clásicos A y B , cuales estados son descritos por una unión

de distribución de probabilidad $p(A, B)$, pueden ser obtenidos por una medida de la **IM**, como:

$$I(A, B) = H(A) + H(B) - H(A, B) \quad (3.18)$$

donde $H(\cdot)$ denota la entropía de Shannon $H(p) = -\sum_{jk} p_{jk} \log_2 p_{jk}$ [36]. Esta **IM** clásica puede ser reescrita en una expresión equivalente $J(A : B) = H(A) - H(A|B)$ a través de las reglas de Bayes [37], donde la entropía condicional $H(A|B)$ cuantifica la ignorancia sobre el estado de A cuando sabemos el estado de B . Para un sistema cuántico representado por un operador densidad bipartito ρ , el funcional de la entropía de Shannon es reemplazado por la entropía de von Neuman, $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho)$, siendo la primera extensión cuántica de **IM** clásica. La denotaremos por $I(\rho)$.

Otra ruta para generalizar la **IM** clásica para la versión cuántica es usar una medición basada en un operador densidad condicional [33]. Si restringimos las medidas proyectivas realizadas localmente sólo sobre el sistema B descrito por un set completo de proyectores ortogonales, Π_k , correspondiendo a las salidas k , el estado cuántico después de una medida cambia a $[(I \otimes \Pi_k)\rho(I \otimes \Pi_k)] / \text{Tr}(I \otimes \Pi_k)\rho(I \otimes \Pi_k)$, donde I es el operador identidad para el sistema A . Con este operador densidad condicional, podemos definir un análogo cuántico de la entropía condicional como $S(\rho|\Pi_k) = \sum_k p_k S(\rho_k)$, y la segunda extensión cuántica de la **IM** clásica podemos encontrarla haciendo $J(\rho|\Pi_k) = S(\rho^A) - S(\rho|\Pi_k)$. Medidas proyectivas en el sistema B remueven todas las correlaciones no-clásicas entre A y B , pero el valor de $J(\rho|\Pi_k)$ depende de la elección de Π_k . Por lo tanto, para asegurar que esto captura todas las correlaciones clásicas, necesitamos maximizar J sobre todos los Π_k . Esta cantidad, $Q(\rho) = \sup_{\Pi_k} J(\rho|\Pi_k)$, es interpretada explícitamente por Henderson y Vedral [34, 35], como una medida de correlaciones clásicas. La discordia cuántica la definimos como,

$$D(\rho) = I(\rho) - Q(\rho), \quad (3.19)$$

que nos provee de información sobre la naturaleza cuántica de las correlaciones entre dos sistemas, siendo esto es cero sólo para estados con correlaciones clásicas [33–35] y es distinto de cero para estados donde exista correlación cuántica, i.e., es una medida de la no-clasicalidad de un sistema. Aunque la discordia cuántica es igual para el entrelazamiento de formación para estados puros, esto no es cierto para estados mezcla, ya que algunos estados presentan discordia cuántica finita aún sin entrelazamiento [33].

Es importante notar que para calcular correlaciones clásicas podemos considerar medidas **POVM**

arbitrarias como Henderson y Vedral hicieron en [34, 35]. Sin embargo, para dos qubits, es decir nuestro caso, Hamieh et al. [38] mostraron que la medida proyectiva es el **POVM** que maximiza las correlaciones clásicas.

3.4 Expresión analítica para la discordia cuántica

Para evaluar la dinámica de la discordia cuántica necesitamos determinar una expresión analítica para una subclase de operadores densidad de estructura **X** [39]. Consideramos una matriz densidad dada por,

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & w \\ 0 & b & z & 0 \\ 0 & z & b & 0 \\ w & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

donde las coherencias son números reales. Vemos que para esta expresión de $\rho(t)$ la condición $S(\rho^A) = S(\rho^B)$ se satisface y por lo tanto, la medida de las correlaciones clásicas asumen valores iguales, no importando las medidas que sean realizadas en los sistemas A o B [34, 35]. Para reducir la dificultad al calcular la discordia cuántica necesitamos ser capaces de maximizar la correlación clásica $Q(\rho)$. Esto lo podemos hacer analíticamente si vemos que el proyector general de un qubit puede ser escrito como una función de dos ángulos, ya que

$$Q(\rho) = S(\rho^A) - F(\theta, \phi), \quad (3.21)$$

donde

$$F(\theta, \phi) = \inf_{\theta, \phi} \left[\sum_{k=1,2} p_k(\theta, \phi) S \left(\frac{\Pi_k^B(\theta, \phi) \rho^{AB} \Pi_k^B(\theta, \phi)}{p_k(\theta, \Phi)} \right) \right], \quad (3.22)$$

con $p_k(\theta, \phi) = \text{Tr} \Pi_k^B(\theta, \phi) \rho^{AB} \Pi_k^B(\theta, \phi)$ y los proyectores $\Pi_k^B(\theta, \phi) = I \otimes |k\rangle \langle k|$, con $k = 1, 2$, definido por los estados ortogonales:

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \cos\theta |\uparrow\rangle + e^{i\phi} \sin\theta |\downarrow\rangle, \\ |1\rangle &= \sin\theta |\uparrow\rangle - e^{i\phi} \cos\theta |\downarrow\rangle \end{aligned} \quad (3.23)$$

Comenzaremos notando algunas propiedades peculiares de $F(\theta, \phi)$, cuando ρ^{AB} es dado por la ecuación (3.21). Dada la estructura de la matriz densidad de los puntos críticos de $F(\theta, \phi)$, i.e el set de valores de θ y ϕ tal que $\frac{\partial F(\theta, \phi)}{\partial \theta} = 0$ y $\frac{\partial F(\theta, \phi)}{\partial \phi} = 0$, no dependen de los elementos de la matriz densidad. Para $\theta = n\frac{\pi}{2}$, con $n \in \mathbb{Z}$, tenemos un conjunto de puntos críticos y para este caso la función $F(\theta, \phi)$ no depende del ángulo ϕ . Otro set es dado por $\theta = m\frac{\pi}{4}$ y $\phi = n\frac{\pi}{2}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$. Así, con esta observación, usando la versión cuántica de información I y la ecuación de discordia, se vuelve sencillo calcular una expresión analítica para la discordia cuántica:

$$D(\rho) = \min \{D_1, D_2\} \quad (3.24)$$

donde,

$$D_1 = S(\rho^A) - S(\rho^{AB}) - a \log_2 \left(\frac{a}{a+b} \right) - b \log_2 \left(\frac{b}{a+b} \right) - d \log_2 \left(\frac{d}{b+d} \right) - b \log_2 \left(\frac{b}{d+b} \right) \quad (3.25)$$

y

$$D_2 = S(\rho^A) - S(\rho^{AB}) - \Delta_+ \log_2 \Delta_+ - \Delta_- \log_2 \Delta_-, \quad (3.26)$$

con $\Delta_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \Gamma)$ y $\Gamma^2 = (a-d)^2 + 4(|z| + |w|)^2$, los cuales pueden ser verificados numéricamente para cualquier operador densidad con la misma estructura de un estado \mathbf{X} .

Capítulo 4

Información Cuántica y Teoría de Juegos

4.1 Conceptos Básicos

Juego: Un juego consiste en un conjunto de jugadores, un conjunto de reglas que dictan las acciones que los jugadores pueden realizar y una función de ganancia que nos dice sobre la recompensa de un jugador enfrentado a un set dado de estrategias. Matemáticamente es un triplete $(N, \Omega, \$)$ donde N es el número de jugadores, $\Omega = \times_k \Omega_k$ con $1 \leq k \leq N$ tal que cada Ω_k es el set de estrategias para el k -ésimo jugador y $\$: \Omega \rightarrow R^N$ donde $\$$ es la ganancia del k -ésimo jugador.

Jugador: En todos los modelos teóricos de juegos, la entidad básica de un juego es el jugador. Este es un agente que toma parte del juego. El jugador puede ser un individuo o un conjunto de individuos.

Ganancia: Estos son los números reales asociados con cada posible salida de un juego.

Movimiento: Estas son las acciones o elecciones habilitadas para un jugador en un juego.

Estrategia: Este es el plan completo de acciones de jugadores para todas las posibles circunstancias durante el curso del juego.

Estrategia Pura: Es un curso de estrategias específicas en acciones para el jugador. Estos son los movimientos que son ejecutados sin alguna incerteza.

Mezcla de Estrategia: Es una regla que dice al jugador si usar cada una o algunas de sus estrategias puras con probabilidades específicas.

Estrategia Dominante: Una estrategia pura es referida como estrategia dominante si sus resultados de ganancias son mayores que cualquier otra estrategia alternativa para todas las posibles elecciones de los jugadores oponentes. Matemáticamente una estrategia i es estrategia dominante del jugador i si

$$\$i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, \dots, s_n) \geq \$i(s_1, \dots, s_{i-1}, \acute{s}_i, \dots, s_n).$$

Racionalidad: Razonamiento estratégico, mientras mantiene la atención en los objetivos y expectativas de los otros jugadores.

Juego de Suma Cero: Un juego es de suma cero si la suma de las ganancias de los jugadores es siempre cero. Un juego de suma cero de dos jugadores es llamado un duelo.

Juego de Suma No Cero: Un juego donde la suma de las ganancias de los jugadores es distinta de cero.

Información: Lo que cada jugador sabe en cada punto de un juego. La información puede ser perfecta o imperfecta, simétrica ó asimétrica, completa ó incompleta y cierta ó incierta.

Juego Simétrico: Un juego $G = (I, S, \$)$ es un juego simétrico de dos jugadores si $I = 1, 2$, $S_1 = S_2$ y $\$1(s_2, s_1) = \$2(s_2, s_1)$ para todos $(s_1, s_2) \in S$. En los juegos simétricos todos los jugadores se enfrentan con las mismas opciones y exactamente las mismas salidas asociadas a sus elecciones. De otro modo el juego es asimétrico.

Equilibrio de Nash: Es un conjunto de estrategias de las cuales una desviación unilateral de un jugador reduce ganancias de el o la jugador(a).

Máximin: La mayor de las mínimas ganancias en un juego de suma cero.

Minimax: La menor de las máximas ganancias en un juego de suma cero.

Pareto Óptimo: Un conjunto de solución es pareto óptimo si no hay otras soluciones en la que todos los jugadores simultáneamente juegen mejor.

Estrategias estables evolutivas: Hace referencia al refinamiento del equilibrio de Nash. Es una estrategia que si es adoptada por una población ningún mutante puede invadirla jugando cualquier otra estrategia.

Juegos secuenciales: Son los juegos donde los jugadores actúan en turnos estrictos.

Juegos simultáneos: Son los juegos donde los jugadores actúan al mismo tiempo.

4.2 Teoría de Juegos

Comencemos imaginando dos jugadores, que llamaremos como es habitual, Alice y Bob. De manera simultánea, imaginamos unas monedas sobre la mesa. Las monedas sólo pueden mostrar caras o sellos. Si las monedas coinciden, esto es, si ambas monedas caen cara o caen sello, Alice se queda con ambas monedas, y si éstas no coinciden, Bob se queda con ambas. Podemos representar las ganancias de cada jugador por medio de la tabla (4.1). Cada jugador intenta maximizar sus ganancias finales. ¿Cuál sería la mejor forma de jugar?

		Bob	
		Cara	Sello
Alice	Cara	(1, -1)	(-1, 1)
	Sello	(-1, 1)	(1, -1)

Tabla 4.1: Tabla de ganancias en el llamado *Juego de coincidencia de monedas*. La primera entrada hace referencia a las ganancias de Alice y la segunda de Bob. Fuente: Elaboración en base a la tesis: Entanglement in Quantum Information Theory de J. Eisert.

Este sencillo ejemplo demuestra la estructura típica de un juego. Un *juego* involucra varios jugadores (a lo menos dos) quienes implementan muchas estrategias posibles, esto es, hacer decisiones. En este punto, diversos aspectos de la teoría de juegos pueden ser entendidos cuando tenemos el caso de sólo dos jugadores participantes. Es importante notar que por tal razón de simplicidad, los siguientes temas e investigaciones los presentaremos en el caso de un *juego de dos jugadores*. Donde una *estrategia* es un completo plan de acción, y dependiendo de la elección de cada jugador, ellos reciben una cierta ganancia. Si quisiéramos formalizar mucho más la expresión diríamos que, para una *forma estratégica de juego de dos jugadores* $\Gamma = (\{A, B\}, S_A, S_B, u_A, u_B)$ es completamente definida por el *set de jugadores*, el *set de las estrategias* S_A y S_B , las *funciones de utilidad* u_A y u_B definidas en $S_A \times S_B$ especificando la ganancia por cada jugador, y las reglas adicionales del juego consistentes con el conjunto de las estrategias.

Las *ganancias* proveen una caracterización cuantitativa de sus preferencias individuales. Ambos jugadores asumen que quieren maximizar sus respectivas ganancias, ahora ellos deben escoger sin saber la decisión del otro jugador. El concepto de solución más importante para un juego de este tipo es el *equilibrio de Nash*. Un par de estrategias s_A, s_B , formarán un equilibrio de Nash de

estrategias puras si

$$u_A(s_A, s_B) \geq u_A(s'_A, s_B), \tag{4.1}$$

$$u_B(s_A, s_B) \geq u_B(s_A, s'_B) \tag{4.2}$$

para todas las estrategias $s'_A \in S_A$ y $s'_B \in S_B$. Además, en un equilibrio ningún jugador puede ganar por unilateralidad desviándose de su equilibrio. Dado que el otro jugador se apegará a la estrategia correspondiente con el equilibrio, el mejor resultado es alcanzado jugando la solución de equilibrio.

Una importante clase de juegos es la clase de suma cero. Un *juego de suma cero* es definido tal que las ganancias sumen cero para todos los posibles pares de estrategias de los jugadores, es decir, que $u_A(s_A, s_B) = -u_B(s_A, s_B)$ para todos los posibles pares (s_A, s_B) , $s_A \in S_A$, $s_B \in S_B$ de las estrategias. En un juego de suma cero el interés de los jugadores es diametralmente opuesto, y la ganancia de un jugador es la pérdida del otro. Aunque no represente una situación competitiva típica, esta clase de juegos provee un adecuado objeto de análisis debido a las fuertes herramientas de solución que habilita. La propiedad más relevante de los juegos de suma cero es resumida en el *teorema de min-max* de Von Neumann. En el teorema de min-max un valor v es asignado para cualquier juego de suma cero de dos personas con finito conjunto de estrategias, la que es la ganancia promedio que un jugador puede esperar ganar en relación al otro jugador, siempre que ambos jugadores actúen racionalmente. Ahora existe por lo menos un equilibrio de Nash, mientras en el caso de muchos equilibrios la ganancia siempre será representada por el mismo valor v . Una estrategia particular que asegura este retorno v para cada jugador es llamada *estrategia min-max*: es cuando un jugador adopta un punto de vista pesimista y maximiza la ganancia mínima, ocurre que él o ella puede obtenerlo cuando implementa esta estrategia. El equilibrio en una estrategia min-max es un equilibrio de Nash.

		Bob		
		Cara ($p = 1$)	($p = 1/2$)	($p = 0$)
Alice	Cara ($p = 1$)	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
	($p = 1/2$)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
	($p = 0$)	(-1, 1)	(0, 0)	(1, -1)

Tabla 4.2: Tabla de ganancias del *Juego de coincidencia de monedas*, que incluye estrategias mixtas donde un jugador escoge cara y sello con probabilidad 1/2. Fuente: Elaboración en base a la tesis: Entanglement in Quantum Information Theory de J. Eisert.

Entonces, ¿cuál debería ser la estrategia min-max para el juego de coincidencia de la moneda que describimos más arriba? Por supuesto, no tenemos un par de estrategias puras que sea un equilibrio de Nash. Si Alice juega caras, Bob es mejor si juega sellos, si ella escoge sellos, para él es mejor si juega caras. Sin embargo, los jugadores pueden hacer más que sólo escoger caras o sellos: ellos pueden arbitrariamente tomar caras o sellos con ciertas probabilidades (tal como debería ser jugado un juego en realidad).

La estrategia, en la que un jugador especifica una cierta distribución de probabilidad clásica en un conjunto S_A o S_B de estrategias puras, respectivamente, es llamada una *estrategia mixta*. En tales estrategias mixtas, la estrategia min-max puede fácilmente ser identificada: ambos jugadores son aconsejados mejor para jugar caras y sellos con probabilidad $1/2$, como mostramos en la tabla (4.2). En promedio, ambos jugadores obtienen ganancia 0 que representa el valor v de este juego que es de suma cero.

Como dijimos anteriormente, *juegos sin suma cero* están lejos de ser típicos. Probablemente uno de los más conocidos es el *juego del Dilema del Prisionero*. En ese juego Alice y Bob tienen que elegir entre cooperación y abandono. Siendo muy conscientes de las consecuencias de sus decisiones, los jugadores obtienen una cierta ganancia de acuerdo a sus respectivas estrategias.

		Bob	
		C	A
Alice	C	(3, 3)	(0, 5)
	A	(5, 0)	(1, 1)

Tabla 4.3: Tabla o matriz de ganancias en el llamado *Juego del Dilema del Prisionero*. La primera entrada hace referencia a las ganancias de Alice y la segunda a la de Bob. Si ambos jugadores cooperan, ambos obtienen tres unidades de ganancias. Si Bob abandona y ocurre que Alice coopera, él obtiene cinco unidades, mientras que ella no obtiene beneficios, ocurre viceversa para Bob. Si ambos abandonan, obtienen por igual una unidad de ganancia. Fuente: Elaboración en base a la tesis: Entanglement in Quantum Information Theory de J. Eisert.

En la tabla (4.3) se indican las ganancias de los jugadores. Vemos que Alice obtiene el mayor beneficio realizando abandono, sin importar la elección de Bob, por lo que ella entonces abandonará. El juego es simétrico, y el mismo argumento servirá para Bob. Los jugadores enfrentan un *Dilema* porque sus razonamientos (los que maximizan sus ganancias) los hace a ellos abandonar, a pesar de que ellos deberían ambos beneficiarse de una cooperación mutua.

La estrategia del abandono es llamada *estrategia dominante*: esta es favorable sin importar qué estrategia la otra parte escoja. (Abandono, Abandono) es un equilibrio en las estrategias domi-

nantes. Este equilibrio en las estrategias dominantes es el único equilibrio de Nash, y esa unicidad también se mantiene en estrategias mixtas. Es importante señalar que si los jugadores están de acuerdo en jugar N veces, ellos optarán por abandonar N veces.

Un par de estrategias es llamada *pareto-óptima* si no hay una salida en la que ambos jugadores hagan una estrategia simultáneamente mejor. Desde esta perspectiva el Dilema reside en el hecho de que el único equilibrio de Nash está lejos de ser Pareto-óptimo. La importancia del Dilema del Prisionero deriva del hecho que éste modela un dilema que puede aparecer en muchas situaciones donde se vean envueltos conflictos de interés.

4.3 Estrategias y equilibrios en Juegos Cuánticos

En esta sección hablaremos de la versión cuántica de un juego. Cualquier sistema cuántico que pueda ser manipulado por dos partes o más, y para que la utilidad de los movimientos puede ser cuantificada de una manera apropiada, podrá ser considerado un juego cuántico. En la siguiente definición, el sistema físico es el que sirve como el montaje o la configuración subyacente del juego, donde lo cuántico se señala para indicar a los portadores físicos de la información.

Un *juego cuántico de dos jugadores* $\Gamma = (\mathcal{H}, \rho, S_A, S_B, P_A, P_B)$ está completamente especificado por

1. El espacio de Hilbert subyacente \mathcal{H} del sistema físico,
2. El *estado inicial* $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$,
3. Los conjuntos S_A y S_B de *estrategias cuánticas* permitidas de los dos jugadores, y
4. Las utilidades funcionales P_A y P_B , las cuáles especifican la utilidad para cada jugador.

Una *estrategia cuántica* $\epsilon_A \in S_A$, $\epsilon_B \in S_B$ es una operación cuántica, esto es, un mapeo completamente positivo de traza preservada $\epsilon_A, \epsilon_B : \mathcal{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H})$. La definición de un juego cuántico también incluye ciertas reglas implícitas tal como el orden de la implementación de las respectivas estrategias cuánticas.

Como en el caso de juegos comunes, un juego cuántico es llamado *juego de suma cero* si las ganancias esperadas suman hasta cero para todos los pares de estrategias, esto es, si

$$P_A(\epsilon_A, \epsilon_B) = -P_B(\epsilon_A, \epsilon_B) \quad (4.3)$$

para todo $\epsilon_A \in S_A, \epsilon_B \in S_B$. De otro modo, éste es llamado como *juego de suma no cero*. Notemos que no es requerido que un conjunto de estrategias permitidas forme para un jugador un conjunto cerrado, esto quiere decir que pueden existir infinitas estrategias. Dos estrategias cuánticas de Alice ϵ_A y ϵ'_A se llamará *equivalente*, si

$$P_A(\epsilon_A, \epsilon_B) = P_A(\epsilon'_A, \epsilon_B) \quad \text{y} \quad P_B(\epsilon_A, \epsilon_B) = P_B(\epsilon'_A, \epsilon_B) \quad (4.4)$$

para todos los posibles ϵ_B . Así, cuando ϵ_A y ϵ'_A entregan la misma ganancia esperada para ambos jugadores para todas las estrategias permitidas por Bob. Las estrategias ϵ_B y ϵ'_B de Bob serán identificadas por consecuencia.

Un concepto de solución provee una guía para los jugadores con respecto a la acción que ellos han decidido tomar. Como antes, una estrategia cuántica de Alice ϵ_A es llamada una *estrategia dominante* si

$$P_A(\epsilon_A, \epsilon'_B) \geq P_A(\epsilon'_A, \epsilon'_B) \quad (4.5)$$

para todo $\epsilon'_A \in S_A, \epsilon'_B \in S_B$. Análogamente, podemos definir una estrategia dominante para Bob. Un par (ϵ_A, ϵ_B) se dice que está en una *estrategia dominante en equilibrio* si ϵ_A y ϵ_B representan a los jugadores de las estrategias dominantes respectivas. Una combinación de estrategias (ϵ_A, ϵ_B) es llamada *equilibrio de Nash* si

$$P_A(\epsilon_A, \epsilon_B) \geq P_A(\epsilon'_A, \epsilon_B), \quad (4.6)$$

$$P_B(\epsilon_A, \epsilon_B) \geq P_B(\epsilon_A, \epsilon'_B) \quad (4.7)$$

para todo $\epsilon'_A \in S_A, \epsilon'_B \in S_B$. Nuevamente, un par de estrategias es *pareto óptimo*, si no es posible incrementar las ganancias de un jugador sin disminuir las ganancias del otro.

4.4 Juegos cuánticos de dos bits cuánticos

En esta sección veremos cómo la *versión clásica de un juego* está fielmente relacionada a un juego cuántico. En una versión cuántica de un juego de elección binaria, dos bits cuánticos son preparados por un *árbitro* en un estado inicial arbitrario, y son luego enviados a los dos jugadores que disponen de los instrumentos físicos para manipular los bits cuánticos apropiadamente. En la última etapa del proceso los bits cuánticos (qubits) son enviados de vuelta al árbitro, quien realiza una medida para evaluar la ganancia. Para tal juego cuántico bi-partito el sistema de interés es un sistema cuántico en el que subyace un espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathbb{C}^2$, y asociado al estado del espacio $\mathcal{S}(\mathcal{H})$. Las estrategias cuánticas de Alice y Bob ϵ_A y ϵ_B son operadores cuánticos locales de traza preservada actuando en \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B respectivamente. Dicho de otro modo, Alice y Bob están restringidos a implementar sus respectivas estrategias cuánticas ϵ_A y ϵ_B sobre sus qubits solamente. En ese proceso ellos pueden escoger cualesquiera estrategias cuánticas que son incluidas en el conjunto de estrategias S_A y S_B . Ambos son conscientes de los conjuntos S_A y S_B , pero ellos no saben cuál estrategia cuántica en particular implementará la otra parte. Como la aplicación de ambas estrategias cuánticas equivale al mapeo $\epsilon_A \otimes \epsilon_B : \mathcal{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H})$, el sistema después de ejecutados los movimientos estará en el estado

$$\sigma = (\epsilon_A \otimes \epsilon_B)(\rho). \quad (4.8)$$

Las estrategias cuánticas $\epsilon_A \otimes \mathbb{1}_B$ y $\epsilon_B \otimes \mathbb{1}_A$ son identificadas con ϵ_A y ϵ_B , respectivamente. Ponemos un particular énfasis en las operaciones unitarias, las cuales están asociadas con operadores unitarios U_A y U_B , escritos como $\epsilon_A \simeq U_A$ y $\epsilon_B \simeq U_B$. En ese caso el estado final σ está dado por

$$\sigma = (U_A \otimes U_B)\rho(U_A \otimes U_B)^\dagger. \quad (4.9)$$

Si no se especifican de otra manera ambos conjuntos de estrategias de Alice y Bob, y las funcionales de ganancia son consideradas como idénticas, esto es,

$$S_A = S_B = S \quad \text{y} \quad P_A = P_B = P, \quad (4.10)$$

ambas partes enfrentan la misma situación.

4.4.1 Planteamiento General

Sea ρ un estado maximalmente entrelazado en $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Donde podemos escribir $\rho = |\psi_{CC}\rangle\langle\psi_{CC}|$ con

$$|\psi_{CC}\rangle = (|00\rangle + i|11\rangle) / \sqrt{2}. \quad (4.11)$$

Otro estado maximalmente entrelazado cualquiera en $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ debería también ser apropiado. El juego cuántico $\Gamma = (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2, \rho, S, S, P, P)$ puede ser jugado de la siguiente manera: los dos qubits son enviados al árbitro quien realiza una medida proyectiva selectiva en el estado final σ con los operadores de Kraus π_{CC} , π_{CA} , π_{AC} y π_{AA} , donde

$$\pi_{CC} = |\psi_{CC}\rangle\langle\psi_{CC}|, \quad |\psi_{CC}\rangle = (|00\rangle + i|11\rangle) / \sqrt{2}, \quad (4.12)$$

$$\pi_{CA} = |\psi_{CA}\rangle\langle\psi_{CA}|, \quad |\psi_{CA}\rangle = (|01\rangle - i|10\rangle) / \sqrt{2}, \quad (4.13)$$

$$\pi_{AC} = |\psi_{AC}\rangle\langle\psi_{AC}|, \quad |\psi_{AC}\rangle = (|10\rangle - i|01\rangle) / \sqrt{2}, \quad (4.14)$$

$$\pi_{AA} = |\psi_{AA}\rangle\langle\psi_{AA}|, \quad |\psi_{AA}\rangle = (|11\rangle + i|00\rangle) / \sqrt{2}. \quad (4.15)$$

Los operadores de Kraus corresponden a medidas proyectivas asociadas con las bases de \mathcal{H} consistente de $|\psi_{CC}\rangle$ y tres vectores de estado ortonormales. En principio, debido a esta elección el sistema será un estado maximalmente entrelazado cuando se implementen las operaciones cuánticas. Por otro lado, es garantizado que si ambos jugadores prefieren implementar la operación identidad, esto es, hacer nada, entonces el detector hará click en el canal con etiqueta CC con certeza.

De acuerdo con la salida de la medida, una ganancia de A_{CC} , A_{CA} , A_{AC} , o A_{AA} es dada para Alice, mientras Bob recibe B_{CC} , B_{CA} , B_{AC} , o B_{AA} . Las utilidades funcionales, también referidas como ganancias esperadas de Alice y Bob, se leen como

$$P_A(\epsilon_A, \epsilon_B) = A_{CC}tr[\pi_{CC}\sigma] + A_{CA}tr[\pi_{CA}\sigma] + A_{AC}tr[\pi_{AC}\sigma] + A_{AA}tr[\pi_{AA}\sigma], \quad (4.16)$$

$$P_B(\epsilon_A, \epsilon_B) = B_{CC}tr[\pi_{CC}\sigma] + B_{CA}tr[\pi_{CA}\sigma] + B_{AC}tr[\pi_{AC}\sigma] + B_{AA}tr[\pi_{AA}\sigma]. \quad (4.17)$$

Los operadores de Kraus son escogidos de tal manera que el juego clásico es completamente involucrado en el juego cuántico: Las *estrategias clásicas* de cooperación y abandono son asociadas con operaciones unitarias particulares, de la forma

$$C \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

C no cambia el estado, pero D implementa un giro de espín (spin-flip). Si ambas partes se mantienen en sus estrategias clásicas, las ecuaciones (4.16) y (4.17) garantizan que la ganancia esperada es exactamente la ganancia del correspondiente juego clásico definido por los números A_{CC} , A_{CA} , A_{AC} , A_{AA} , B_{CC} , B_{CA} , B_{AC} , y B_{AA} .

Si consideramos como ejemplo, el que Alice juegue C y Bob escoja A , el estado σ después de ser implementado por la estrategia es dado por

$$\sigma = (C \otimes A)(\rho) = |\psi_{CA}\rangle \langle \psi_{CA}|, \quad (4.19)$$

tal que Alice y Bob obtienen una ganancia de A_{CA} y B_{CA} unidades, respectivamente. En este sentido los movimientos estratégicos específicos dentro de los dominios cuánticos pueden ser adecuadamente estudiados. Los jugadores pueden hacer uso de grados de libertad adicionales, los cuales no están habilitados por aleatoriedad de las estrategias cuánticas, pero ellos también pueden atenerse a simples estrategias clásicas. Este esquema puede ser aplicado a cualquier juego de dos jugadores con elecciones binarias y es canónico en gran extensión.

Capítulo 5

Teleportación Cuántica Probabilista

5.1 Resumen

En este capítulo investigamos la relación entre la fidelidad promedio, el efecto producido por el entrelazamiento y los mecanismos disipativos, para un esquema de teleportación dado. Sabemos que siempre en un protocolo de teleportación la fidelidad será mayor a $2/3$, si el estado original es entrelazado [13]. Con esto en mente, analizamos la manera en que se ve afectada la fidelidad cuando variamos el entrelazamiento de la medida y del canal de transmisión, es decir, analizamos desde los recursos de estados puros, con medidas de estados parcialmente entrelazados, hasta un canal con ruido o decoherente que se conoce como estado de tipo X , puesto que en un sistema cuántico real existe un indeseado acoplamiento de éste con el entorno. Además, hemos usado el proceso de extracción inequívoca de estados, que consiste en la implementación de una ancilla como proceso que permite extraer el estado desconocido $|\psi\rangle$ que se desea teleportar. El emisor y el receptor intercambian dos conjuntos de canales cuánticos, el primero de ellos es una colección de estados puros parcialmente entrelazados y el otro es una colección de estados tipo X idénticos. Para realizar la teleportación de un estado desconocido $|\psi\rangle$, el emisor realiza medidas sobre una base parcial de Bell, generando cuatro posibles salidas, todas ellas diferentes a $|\psi\rangle$. Nosotros con esto caracterizamos la eficiencia de cada conjunto de canales a través de la fidelidad promedio del correspondiente set de estados de salida. Encontramos los valores umbrales de las fidelidades para observar comportamientos cuánticos, con y sin USE, en cada uno de los estados puro y ruidoso, y determinamos la existencia de una competencia del entrelazamiento tanto del canal como de la medida, que para el caso de un estado ruidoso son necesarias pero no suficientes para observar un comportamiento cuántico. Además, encontramos que haciendo uso de un canal ruidoso, es posible mejorar la fidelidad promedio en comparación con la teleportación realizada por el canal puro.

Analizamos y discutimos las condiciones que se satisfacen para las concurrencias involucradas bajo las cuales este efecto ocurre, y en particular, encontramos valores umbrales para las concurrencias involucradas y un límite superior para el entrelazamiento del canal puro sobre el cual existen estados de tipo X , como canales, que mejoran la fidelidad promedio.

5.2 Introducción

Un estado entrelazado o par EPR, la transferencia de información clásica, y un acuerdo previo en las bases en que se realizarán las medidas de los estados, nos permiten realizar el protocolo de teleportación cuántica, el cual consiste en transmitir un estado cuántico desconocido, desde una posición lejana de un laboratorio a otro. Sabemos que para el protocolo, los recursos cuánticos son claves para describir el comportamiento del canal, pero éstos ven afectadas su pureza y entrelazamiento debido a la interacción con el entorno lo cual se manifiesta como decoherencia, desfase, y mecanismos de disipación. Esta decoherencia convierte un estado maximal en uno tipo X , bajo un mecanismo de interacción no-Markoviana [14]. Es por tal motivo que un estado tipo X es un buen candidato para ser considerado como una representación de un canal ruidoso que se ajusta a la implementación de un protocolo cuántico real.

Con el paso del tiempo las investigaciones en el área de la información cuántica han crecido considerablemente, y muchas nuevas formas de analizar la eficacia para describir los protocolos de teleportación han aparecido, donde se caracterizan ciertos límites físicos del canal cuántico, que aunque al tener cierto grado de mezcla (ruido), se pueden observar comportamientos cuánticos. Sabemos que para obtener esas condiciones se debe cumplir que el canal deba tener una medida de fidelidad en promedio mayor a $2/3$, para observar comportamientos cuánticos, es decir, que nuestro canal sea no-clásico [15].

Además, se ha documentado que protocolos de teleportación que utilizan un estado puro parcialmente entrelazado pueden ser realizados probabilísticamente, es decir, que para tal caso el esquema original de teleportación es complementado con un esquema de discriminación inequívoca de estados [40, 41] ó a través de un esquema de extracción inequívoca de estados [42]. Ambos pueden obtener la misma probabilidad de alcanzar una teleportación exitosa, *id est*, salidas con fidelidad 1.

Con esto en mente y considerando el estudio hecho en publicaciones anteriores [43, 44], utilizaremos el esquema de extracción inequívoca de estados, y la implementación de un canal tipo X , o canal con ruido, además de medidas no maximales. Con todo esto, investigaremos de la manera más general posible las características de un protocolo de teleportación desde la utilización de un

canal puro hasta la versión del canal con ruido o de tipo-X.

Las secciones de la investigación se distribuyen de la siguiente manera. Primero comenzaremos estudiando el caso de la fidelidad promedio y el estado de un canal puro, para luego ver su ajuste de entrelazamiento y el valor de la fidelidad promedio, sabiendo que hemos aplicado el esquema de extracción inequívoca de estados o USE, por sus siglas en inglés. Una vez hecho esto comenzaremos con el estado tipo X o canal ruidoso, midiendo su fidelidad haciendo las mismas consideraciones anteriores, es decir, aplicando nuevamente el esquema USE y comparando finalmente sus fidelidades y probabilidades de extracción del estado que queremos teleportar con éxito.

5.3 Fidelidad promedio para el canal en un estado puro

Comenzaremos este capítulo revisando el protocolo de teleportación para un canal general en un estado puro y, a continuación, obtendremos la fidelidad promedio en base a los cuatro resultados posibles.

En este caso, se supone que el canal se encuentra en los qubits A y B , que comparten el estado puro normalizado,

$$\begin{aligned}
 |\phi_{AB}\rangle &= \alpha|0_A\rangle \otimes |0_B\rangle + \beta|1_A\rangle \otimes |1_B\rangle, \\
 &= \alpha|0_A0_B\rangle + \beta|1_A1_B\rangle, \\
 &= \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle,
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ son los eigenestados del operador de Pauli σ_z . Este canal tiene una cantidad de entrelazamiento que se caracteriza por la concurrencia $C_{AB} = 2\alpha\beta$, donde, sin pérdida de generalidad, suponemos que los parámetros α y β son números reales no negativos y $\alpha \leq \beta$.

Para teleportar el estado desconocido $|\psi\rangle$ desde el qubit a hasta el qubit B debemos medir, en el sistema bipartito aA , un observable con el siguiente conjunto de estados ortonormales

$$|\phi_+\rangle = x|0\rangle|0\rangle + y|1\rangle|1\rangle, \tag{5.2a}$$

$$|\phi_-\rangle = y|0\rangle|0\rangle - x|1\rangle|1\rangle, \tag{5.2b}$$

$$|\psi_+\rangle = x|0\rangle|1\rangle + y|1\rangle|0\rangle, \tag{5.2c}$$

$$|\psi_-\rangle = y|0\rangle|1\rangle - x|1\rangle|0\rangle. \tag{5.2d}$$

Cada uno de estos estados tiene la misma cantidad de entrelazamiento, es decir, su valor es $C_{aA} = 2xy$, y es independiente de C_{AB} . Aquí también hemos supuesto, sin perder generalidad, que los parámetros x e y son números reales no-negativos y que $x \leq y$. En este caso, la teleportación del estado desconocido $|\psi\rangle$, desde a hasta B , se puede obtener desde la siguiente identidad,

$$|\psi\rangle|\phi_{AB}\rangle = \sqrt{p_{\phi_+}}|\phi_+\rangle|p_{\phi_+}\rangle + \sqrt{p_{\phi_-}}|\phi_-\rangle\sigma_z|p_{\phi_-}\rangle + \sqrt{p_{\psi_+}}|\psi_+\rangle\sigma_x|p_{\psi_+}\rangle + \sqrt{p_{\psi_-}}|\psi_-\rangle\sigma_z\sigma_x|p_{\psi_-}\rangle, \quad (5.3)$$

donde definimos los cuatro estados del qubit B ,

$$|p_{\phi_+}\rangle = \frac{x\alpha\langle 0|\psi\rangle|0\rangle + y\beta\langle 1|\psi\rangle|1\rangle}{\sqrt{p_{\phi_+}}}, \quad (5.4)$$

$$|p_{\phi_-}\rangle = \frac{y\alpha\langle 0|\psi\rangle|0\rangle + x\beta\langle 1|\psi\rangle|1\rangle}{\sqrt{p_{\phi_-}}}, \quad (5.5)$$

$$|p_{\psi_+}\rangle = \frac{x\beta\langle 0|\psi\rangle|0\rangle + y\alpha\langle 1|\psi\rangle|1\rangle}{\sqrt{p_{\psi_+}}}, \quad (5.6)$$

$$|p_{\psi_-}\rangle = \frac{y\beta\langle 0|\psi\rangle|0\rangle + x\alpha\langle 1|\psi\rangle|1\rangle}{\sqrt{p_{\psi_-}}}, \quad (5.7)$$

y sus respectivas probabilidades

$$p_{\phi_+} = x^2\alpha^2 |\langle 0|\psi\rangle|^2 + y^2\beta^2 |\langle 1|\psi\rangle|^2, \quad (5.8)$$

$$p_{\phi_-} = y^2\alpha^2 |\langle 0|\psi\rangle|^2 + x^2\beta^2 |\langle 1|\psi\rangle|^2, \quad (5.9)$$

$$p_{\psi_+} = x^2\beta^2 |\langle 0|\psi\rangle|^2 + y^2\alpha^2 |\langle 1|\psi\rangle|^2, \quad (5.10)$$

$$p_{\psi_-} = y^2\beta^2 |\langle 0|\psi\rangle|^2 + x^2\alpha^2 |\langle 1|\psi\rangle|^2. \quad (5.11)$$

En concreto, desde el lado derecho de la identidad (5.3) podemos darnos cuenta que existe una correlación uno a uno entre los estados ortonormales $\{|\phi_+\rangle, |\phi_-\rangle, |\psi_+\rangle, |\psi_-\rangle\}$ de los qubits aA y los estados del conjunto $\{|p_{\phi_+}\rangle, \sigma_z|p_{\phi_-}\rangle, \sigma_x|p_{\psi_+}\rangle, \sigma_z\sigma_x|p_{\psi_-}\rangle\}$ del qubit B .

Por lo tanto, mediante la implementación de un proceso de medición, que en forma probabilista proyecta en los estados, el qubit B también se proyecta sobre uno de los estados del conjunto. El resultado de la medición se puede enviar, a través de una comunicación clásica, desde el laboratorio A hacia B , y con esta información el receptor puede saber qué operador unitario, σ_z , σ_x , o $\sigma_z\sigma_x$

debe ser removido. Después de retirar el respectivo operador unitario, B se encontrará en uno de esos estados. Vale la pena señalar que las amplitudes desconocidas $\langle 0|\psi\rangle$ y $\langle 1|\psi\rangle$ multiplican los elementos de la base correcta $|0\rangle$ y $|1\rangle$ en cada estado del resultado.

Al reemplazar los resultados de las ecuaciones (5.4-5.7) y sus probabilidades (5.8-5.11), en la definición de la fidelidad promedio de la teleportación ec. (2.81), obtenemos

$$f_p = \frac{2}{3} + \frac{C_{aA}C_{AB}}{3}, \quad (5.12)$$

con $x^2 + y^2 = 1$ y $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, donde hemos considerado que $C_{AB} = 2\alpha\beta$ y $C_{aA} = 2xy$.

A partir de la expresión de la fidelidad media f , vemos claramente que ésta es mayor que $2/3$, si y sólo si, ambas concurrencias, C_{aA} y C_{AB} , son diferentes de cero. En otras palabras, ambos, el entrelazamiento C_{AB} del canal y el entrelazamiento C_{aA} de la medida de los estados, son necesarios y suficientes para la observación de la naturaleza cuántica en el proceso de teleportación.



5.4 Ajuste de entrelazamiento y fidelidad promedio para el canal en un estado puro

Nuestro objetivo ahora es remover los coeficientes $x\alpha$, $x\beta$, $y\alpha$ e $y\beta$, con el fin de que el estado del qubit B tenga la forma $U_{Bb}|p_{\phi_{\pm},\psi_{\pm}}\rangle|0\rangle$. Para esto usamos el protocolo de extracción inequívoca de estados (USE, por sus siglas en inglés), propuesto por W.-L. Li et al. [45]. Este protocolo, que requiere un qubit auxiliar b en el laboratorio B , consiste en un proceso de reducción unitaria que realiza el receptor sobre los qubits Bb .

El protocolo USE se traduce en:

- Realización por parte del receptor B de una transformación unitaria U_{Bb} sobre el estado $|p_{\phi_{\pm},\psi_{\pm}}\rangle|0_b\rangle$, donde $|0_b\rangle$ es el estado del sistema b .
- Medición de σ_z sobre el qubit b . Esta medida tiene dos salidas posibles, una favorable, que proyectará el qubit B en el estado $|\psi\rangle$ y otra desfavorable, donde se perderá la información.

Además, mencionar que la transformación U_{Bb} es una operación condicional que depende del estado $|p_{\phi_{\pm},\psi_{\pm}}\rangle$ y de los tamaños relativos de los coeficientes x y α .

Ahora, cuando el resultado es $|p_{\phi_{+}}\rangle$, el protocolo de extracción del estado inequívoco (USE) utiliza las transformaciones unitarias siguientes

$$U_{Bb} = |0\rangle\langle 0| \otimes I_b + |1\rangle\langle 1| \otimes U_b, \quad (5.13)$$

donde,

$$U_b|0_b\rangle = \frac{x\alpha}{y\beta}|0_b\rangle + \sqrt{1 - \frac{x^2\alpha^2}{y^2\beta^2}}|1_b\rangle,$$

y su ecuación correspondiente es,

$$\begin{aligned} U_{Bb}|p_{\phi_+}\rangle|0_b\rangle &= U_{Bb}|p_{\phi_+}\rangle|0\rangle, \\ &= \frac{x\alpha|\psi\rangle|0_b\rangle + \sqrt{y^2\beta^2 - x^2\alpha^2}\langle 1|\psi\rangle|1\rangle|1_b\rangle}{\sqrt{p_{\phi_+}}}, \end{aligned}$$

donde vemos que al proyectar el qubit de b en $|0_b\rangle$, en el estado $|\psi\rangle$, se extrae el qubit B , que tiene una probabilidad condicional de la forma

$$p_{\phi_+,ext} = \frac{x^2\alpha^2}{p_{\phi_+}}.$$

Por otro lado, el qubit B es proyectado a $|1_b\rangle$ perdiendo la información de $|\psi\rangle$.

Cuando el resultado es $|p_{\phi_-}\rangle$, encontramos los siguientes dos casos:

- Si $x \leq \alpha$, la transformación unitaria para llevar acabo el proceso de USE se transforma en:

$$U_{Bb} = |1\rangle\langle 1| \otimes I_b + |0\rangle\langle 0| \otimes U_b, \quad (5.14)$$

donde,

$$U_b|0\rangle = \frac{x\beta}{y\alpha}|0\rangle + \sqrt{1 - \frac{x^2\beta^2}{y^2\alpha^2}}|1\rangle,$$

Así, se tiene:

$$\begin{aligned} U_{Bb}|p_{\phi_-}\rangle|0\rangle &= U_{Bb} \left(\frac{y\alpha\langle 0|\psi\rangle|0\rangle + x\beta\langle 1|\psi\rangle|1\rangle}{\sqrt{p_{\phi_-}}} \right) |0\rangle, \\ &= \frac{x\beta|\psi\rangle|0_b\rangle + \sqrt{y^2\alpha^2 - x^2\beta^2}\langle 0|\psi\rangle|0\rangle|1_b\rangle}{\sqrt{p_{\phi_-}}}, \end{aligned}$$

donde vemos que la condición probabilística de extraer $|\psi\rangle$ es

$$p_{\phi_-,ext} = \frac{x^2\beta^2}{p_{\phi_-}}.$$

- Si $x \geq \alpha$, la transformación unitaria queda como:

$$U_{Bb} = |0\rangle\langle 0| \otimes I_b + |1\rangle\langle 1| \otimes U_b, \quad (5.15)$$

donde:

$$U_b|0\rangle = \frac{y\alpha}{x\beta}|0\rangle + \sqrt{1 - \frac{y^2\alpha^2}{x^2\beta^2}}|1\rangle,$$

Así, se obtiene:

$$\begin{aligned} U_{Bb}|p_{\phi_-}\rangle|0\rangle &= U_{Bb} \left(\frac{y\alpha\langle 0|\psi\rangle|0\rangle + x\beta\langle 1|\psi\rangle|1\rangle}{\sqrt{p_{\phi_-}}} \right) |0\rangle, \\ &= \frac{y\alpha|\psi\rangle|0\rangle + \sqrt{x^2\beta^2 - y^2\alpha^2}\langle 1|\psi\rangle|1\rangle|1\rangle}{\sqrt{p_{\phi_-}}}, \end{aligned}$$

donde podemos ver que la condición de extraer la probabilidad $|\psi\rangle$ es

$$p_{\phi_-,ext} = \frac{y^2\alpha^2}{p_{\phi_-}},$$

condición que se cumple cuando $x \geq \alpha$.

Así mismo, para el caso cuando la salida es $|p_{\psi_+}\rangle$, existen también dos situaciones:

- Si $x \leq \alpha$ ($x\beta \leq y\alpha$), la transformación unitaria del estado en extracción se transforma en:

$$U_{Bb} = |0\rangle\langle 0| \otimes I_b + |1\rangle\langle 1| \otimes U_b, \quad (5.16)$$

donde:

$$U_b|0\rangle = \frac{x\beta}{y\alpha}|0\rangle + \sqrt{1 - \frac{x^2\beta^2}{y^2\alpha^2}}|1\rangle,$$

Así se obtiene:

$$\begin{aligned} U_{Bb}|p_{\psi_+}\rangle|0\rangle &= U_{Bb} \left(\frac{x\beta\langle 0|\psi\rangle|0\rangle + y\alpha\langle 1|\psi\rangle|1\rangle}{\sqrt{p_{\psi_+}}} \right) |0\rangle, \\ &= \frac{x\beta|\psi\rangle|0\rangle + \sqrt{y^2\alpha^2 - x^2\beta^2}\langle 1|\psi\rangle|1\rangle|1\rangle}{\sqrt{p_{\psi_+}}}, \end{aligned}$$

desde donde podemos notar que para $|\psi\rangle$, la probabilidad condicional es

$$p_{\psi_+,ext} = \frac{x^2\beta^2}{p_{\psi_+}},$$

cuando $x \leq \alpha$.

- Si $x \geq \alpha$, la transformación unitaria del estado de extracción, se convierte en:

$$U_{Bb} = |1\rangle\langle 1| \otimes I_b + |0\rangle\langle 0| \otimes U_b, \tag{5.17}$$

donde:

$$U_b|0\rangle = \frac{y\alpha}{x\beta}|0\rangle + \sqrt{1 - \frac{y^2\alpha^2}{x^2\beta^2}}|1\rangle,$$

Así:

$$\begin{aligned}
 U_{Bb}|p_{\psi_+}\rangle|0\rangle &= U_{Bb} \left(\frac{x\beta\langle 0|\psi\rangle|0\rangle + y\alpha\langle 1|\psi\rangle|1\rangle}{\sqrt{p_{\psi_+}}} \right) |0\rangle \\
 &= \frac{y\alpha|\psi\rangle|0\rangle + \sqrt{x^2\beta^2 - y^2\alpha^2}\langle 0|\psi\rangle|1\rangle|0\rangle}{\sqrt{p_{\psi_+}}},
 \end{aligned}$$

desde donde vemos que la probabilidad de extracción de $|\psi\rangle$ se transforma en:

$$p_{\psi_+,ext} = \frac{y^2\alpha^2}{p_{\psi_+}},$$

cuando $x \geq \alpha$.

El siguiente caso es cuando la salida es $|p_{\psi_-}\rangle$, donde la transformación unitaria para el estado de extracción de $|\psi\rangle$ es dado por

$$U_{Bb} = |1\rangle\langle 1| \otimes I_b + |0\rangle\langle 0| \otimes U_b, \quad (5.18)$$

donde:

$$U_b|0\rangle = \frac{x\alpha}{y\beta}|0\rangle + \sqrt{1 - \frac{x^2\alpha^2}{y^2\beta^2}}|1\rangle,$$

Así,

$$\begin{aligned}
 U_{Bb}|p_{\psi_-}\rangle|0\rangle &= U_{Bb} \left(\frac{y\beta\langle 0|\psi\rangle|0\rangle + x\alpha\langle 1|\psi\rangle|1\rangle}{\sqrt{p_{\psi_-}}} \right) |0\rangle, \\
 &= \frac{x\alpha|\psi\rangle|0\rangle + \sqrt{y^2\beta^2 - x^2\alpha^2}\langle 0|\psi\rangle|0\rangle|1\rangle}{\sqrt{p_{\psi_-}}},
 \end{aligned}$$

donde la probabilidad de extraer $|\psi\rangle$ es dada por,

$$p_{\psi_+,ext} = \frac{x^2\alpha^2}{p_{\psi_+}}.$$

Por lo tanto, la probabilidad total de extraer $|\psi\rangle$ es:

$$\begin{aligned} p_{ext} &= p_{\phi_+}p_{\phi_+,ext} + p_{\phi_-}p_{\phi_-,ext} + p_{\psi_+}p_{\psi_+,ext} + p_{\psi_-}p_{\psi_-,ext} \\ &= \begin{cases} 2x^2, & \text{si } x \leq \alpha, \\ 2\alpha^2, & \text{si } x \geq \alpha, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - C_{aA}^2}, & \text{si } C_{aA} \leq C_{AB}, \\ 1 - \sqrt{1 - C_{AB}^2}, & \text{si } C_{aA} \geq C_{AB}. \end{cases} \end{aligned}$$

Esta expresión muestra el efecto del entrelazamiento maximal, es decir, p_{ext} aumenta a medida que la función C_{aA} llega hasta el tope impuesto por el canal C_{AB} en el supuesto de que sea maximalmente entrelazado, luego p_{ext} permanece en su valor máximo posible, a pesar del hecho de que cuando C_{aA} pueda aumentar sobre C_{AB} . En otras palabras, el entrelazamiento del canal C_{AB} establece irremediamente un límite superior $1 - \sqrt{1 - C_{AB}^2}$ para la probabilidad de teleportación exitosa del estado desconocido $|\psi\rangle$ con una fidelidad 1.

Al igual que en la sección (5.3), es muy importante averiguar el comportamiento cuántico a través de los valores de las fidelidades medias involucradas en este nuevo caso. Como vemos aquí, hay un resultado filtrable, asociado con la familia de estados $|0_b\rangle$, que tiene la fidelidad promedio normalizada igual a 1,

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{p_{ext}} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 [p_{\phi_+}p_{\phi_+,ext} |\langle\psi|\psi\rangle|^2 + p_{\phi_-}p_{\phi_-,ext} |\langle\psi|\psi\rangle|^2 \\ &\quad + p_{\psi_+}p_{\psi_+,ext} |\langle\psi|\psi\rangle|^2 + p_{\psi_-}p_{\psi_-,ext} |\langle\psi|\psi\rangle|^2] |\langle 0|\psi\rangle| d|\langle 0|\psi\rangle| d\theta_0 d\theta_1, \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por otro lado, no es un resultado filtrable, asociado con el estado $|1_b\rangle$, el cual tiene una fidelidad

promedio normalizada dada por

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{1}{1-p_{ext}} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 [p_{\phi_+} (1-p_{\phi_+ext}) |\langle 1|\psi\rangle|^2 + p_{\phi_-} (1-p_{\phi_-ext}) |\langle 0|\psi\rangle|^2 \\
 &\quad + p_{\psi_+} (1-p_{\psi_+ext}) |\langle 1|\psi\rangle|^2 + p_{\psi_-} (1-p_{\psi_-ext}) |\langle 0|\psi\rangle|^2] |\langle 0|\psi\rangle| d|\langle 0|\psi\rangle| d\theta_0 d\theta_1, \\
 &= \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

Y la fidelidad promedio total para este caso se convierte en,

$$\begin{aligned}
 F_{use} &= 1 \cdot p_{ext} + \frac{2}{3} (1 - p_{ext}), \\
 &= \frac{2}{3} + \frac{p_{ext}}{3}, \\
 &= \begin{cases} \frac{2}{3} + \frac{2x^2}{3}, & \text{si } x \leq \alpha, \\ \frac{2}{3} + \frac{2\alpha^2}{3}, & \text{si } x \geq \alpha, \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{2}{3} + \frac{1-\sqrt{1-C_{aA}^2}}{3}, & \text{si } C_{aA} \leq C_{AB}, \\ \frac{2}{3} + \frac{1-\sqrt{1-C_{AB}^2}}{3}, & \text{si } C_{aA} \geq C_{AB}, \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{1-C_{aA}^2}}{3}, & \text{si } C_{aA} \leq C_{AB}, \\ 1 - \frac{\sqrt{1-C_{AB}^2}}{3}, & \text{si } C_{aA} \geq C_{AB}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Referido a los resultados obtenidos, haremos cuatro observaciones:

- La fidelidad total media es afectada por la medición, aumentando la función de C_{aA} hasta el límite cuando $C_{aA} = C_{AB}$, por lo tanto, cuando C_{aA} aumenta por encima de C_{AB} , el valor de la fidelidad promedio total F_{use} , permanece en su valor máximo $1 - \sqrt{1 - C_{AB}^2}/3$ que es impuesto por el valor de la concurrencia del canal C_{AB} .
- La fidelidad total media del sistema cuántico será $F_{use} \geq 2/3$, lo que significa que tanto el entrelazamiento, C_{aA} y C_{AB} , son, también en este caso, necesarios y suficientes para la visualización de las características cuánticas de teleportación.
- La fidelidad total media F_{use} , es menor o igual a la fidelidad media, esto significa que el proceso USE disminuye la fidelidad promedio total para permitir un resultado con el valor medio máximo de fidelidad 1. El proceso en el envío de la información deberá ser repetido muchas veces para asegurar máxima fidelidad.
- Ambos resultados filtrables tienen constantes de fidelidad media normalizables $f_0 = 1$ y

$f_1 = 2/3$, valores que son independientes de C_{AB} y C_{aA} , esto significa que, estos valores promedios de fidelidad normalizados no se ven afectados por p_{ext} y $1 - p_{ext}$, que sí son afectados por la medida.



5.5 Fidelidad Promedio para el canal en un estado tipo X con subespacio principal \mathcal{H}_{0011}

Ahora, la idea es averiguar cómo se ve afectado el ajuste del entrelazamiento y la fidelidad promedio, para el caso de extracciones exitosas, cuando el canal cuántico posee ruido ó es decoherente. Específicamente, supongamos que el canal cuántico, que almacena la información en los qubits A y B son, en lugar de un estado puro, es un estado mezcla del tipo:

$$\begin{aligned} \rho_{AB} = & \rho_{11}|00\rangle\langle 00| + \rho_{14}|00\rangle\langle 11| + \rho_{22}|01\rangle\langle 01| + \rho_{23}|01\rangle\langle 10| \\ & + \rho_{32}|10\rangle\langle 01| + \rho_{33}|10\rangle\langle 10| + \rho_{41}|11\rangle\langle 00| + \rho_{44}|11\rangle\langle 11|, \end{aligned}$$

que a través de la representación matricial,

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{32} & 0 \\ 0 & \rho_{23} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

podemos ver en el estado X, que la población de sus valores se encuentran en dos subespacios ortogonales, $H_{00,11}$ expandida por la base $\{|0\rangle|0\rangle, |1\rangle|1\rangle\}$ y $H_{01,10}$ expandido por $\{|0\rangle|1\rangle, |1\rangle|0\rangle\}$, donde su forma en X es porque tiene una coherencia de valor cero entre los elementos de sus dos subespacios.

Ahora por comodidad, el estado compartido lo podemos escribir de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \rho_{AB} = & (\sqrt{\rho_{11}}|00\rangle + \sqrt{\rho_{44}}|11\rangle)(\sqrt{\rho_{11}}\langle 00| + \sqrt{\rho_{44}}\langle 11|) - (\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} - \rho_{14})(|00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00|) \\ & + (\sqrt{\rho_{22}}|01\rangle + \sqrt{\rho_{33}}|10\rangle)(\sqrt{\rho_{22}}\langle 01| + \sqrt{\rho_{33}}\langle 10|) - (\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} - \rho_{23})(|01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01|). \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad consideramos que los elementos fuera de la diagonal ρ_{14} y ρ_{23} son números reales y no negativos [46]. Ya que el canal cuántico estudiado en la sección (5.2) está en el subespacio $H_{00,11}$, consideramos a éste como el subespacio principal, es decir, el entrelazamiento

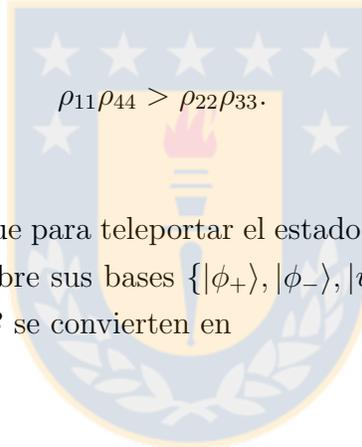
de ρ_{AB} es dado por la concurrencia

$$C = \max \{0, C_{14}\},$$

donde

$$C_{14} = 2(\rho_{14} - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}).$$

En otras palabras, asumimos que C_{14} es mayor o igual que $C_{23} = 2(\rho_{23} - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}) \leq 0$. Así, cuando C_{14} es menor que cero, al canal no tiene entrelazamiento y se vuelve un estado separable. Además, el considerar esta condición implica que las poblaciones de los dos subespacios atisfacen la siguiente desigualdad [46]



Es muy importante darse cuenta que para teleportar el estado puro desconocido $|\psi\rangle$ desde el qubit a al B , medimos los qubits aA , sobre sus bases $\{|\phi_+\rangle, |\phi_-\rangle, |\psi_+\rangle, |\psi_-\rangle\}$. En tal caso, los posibles estados resultantes para el qubit B se convierten en

- Estado ρ_{ϕ_+} :

$$\begin{aligned} \rho_{\phi_+} &= \frac{\langle \phi_+ | (|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \rho_{AB}) | \phi_+ \rangle}{\text{Tr} \langle \phi_+ | (|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \rho_{AB}) | \phi_+ \rangle}, \\ &= \frac{1}{p_{\phi_+}} [(x\sqrt{\rho_{11}}\langle 0|\psi\rangle|0\rangle + y\sqrt{\rho_{44}}\langle 1|\psi\rangle|1\rangle) (x\sqrt{\rho_{11}}\langle\psi|0\rangle\langle 0| + y\sqrt{\rho_{44}}\langle\psi|1\rangle\langle 1|) \\ &\quad - xy(\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} - \rho_{14}) (\langle\psi|1\rangle\langle 0|\psi\rangle|0\rangle\langle 1| + \langle\psi|0\rangle\langle 1|\psi\rangle|1\rangle\langle 0|) \\ &\quad + (y\sqrt{\rho_{33}}\langle 1|\psi\rangle|0\rangle + x\sqrt{\rho_{22}}\langle 0|\psi\rangle|1\rangle) (y\sqrt{\rho_{33}}\langle\psi|1\rangle\langle 0| + x\sqrt{\rho_{22}}\langle\psi|0\rangle\langle 1|) \\ &\quad - xy(\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} - \rho_{23}) (\langle\psi|0\rangle\langle 1|\psi\rangle|0\rangle\langle 1| + \langle\psi|1\rangle\langle 0|\psi\rangle|1\rangle\langle 0|)], \end{aligned}$$

con probabilidad

$$\begin{aligned} p_{\phi_+} &= \text{Tr} \langle \phi_+ | (|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \rho_{AB}) | \phi_+ \rangle, \\ &= x^2(\rho_{11} + \rho_{22})|\langle 0|\psi\rangle|^2 + y^2(\rho_{33} + \rho_{44})|\langle 1|\psi\rangle|^2. \end{aligned}$$

- Estado ρ_{ϕ_-} :

$$\begin{aligned}
 \rho_{\phi_-} &= \frac{\langle \phi_- | (|\psi\rangle\langle\psi| \rho_{AB}) | \phi_- \rangle}{\text{Tr} \langle \phi_- | (|\psi\rangle\langle\psi| \rho_{AB}) | \phi_- \rangle}, \\
 &= \sigma_z \frac{1}{p_{\phi_-}} [(y\sqrt{\rho_{11}}\langle 0|\psi\rangle|0\rangle + x\sqrt{\rho_{44}}\langle 1|\psi\rangle|1\rangle) (y\sqrt{\rho_{11}}\langle\psi|0\rangle\langle 0| + x\sqrt{\rho_{44}}\langle\psi|1\rangle\langle 1|) \\
 &\quad - xy(\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} - \rho_{14}) (\langle\psi|1\rangle\langle 0|\psi\rangle|0\rangle\langle 1| + \langle\psi|0\rangle\langle 1|\psi\rangle|1\rangle\langle 0|) \\
 &\quad + (x\sqrt{\rho_{33}}\langle 1|\psi\rangle|0\rangle + y\sqrt{\rho_{22}}\langle 0|\psi\rangle|1\rangle) (x\sqrt{\rho_{33}}\langle\psi|1\rangle\langle 0| + y\sqrt{\rho_{22}}\langle\psi|0\rangle\langle 1|) \\
 &\quad - xy(\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} - \rho_{23}) (\langle\psi|1\rangle\langle 0|\psi\rangle|1\rangle\langle 0| + \langle\psi|0\rangle\langle 1|\psi\rangle|0\rangle\langle 1|)] \sigma_z,
 \end{aligned}$$

con su correspondiente probabilidad

$$\begin{aligned}
 p_{\phi_-} &= \text{Tr} \langle \phi_- | (|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \rho_{AB}) | \phi_- \rangle, \\
 &= y^2(\rho_{11} + \rho_{22}) |\langle 0|\psi\rangle|^2 + x^2(\rho_{33} + \rho_{44}) |\langle 1|\psi\rangle|^2.
 \end{aligned}$$

- Estado ρ_{ψ_+} :

$$\begin{aligned}
 \rho_{\psi_+} &= \frac{\langle \psi_+ | (|\psi\rangle\langle\psi| \rho_{AB}) | \psi_+ \rangle}{\text{Tr} \langle \psi_+ | (|\psi\rangle\langle\psi| \rho_{AB}) | \psi_+ \rangle}, \\
 &= \sigma_x \frac{1}{p_{\psi_+}} [(x\sqrt{\rho_{44}}\langle 0|\psi\rangle|0\rangle + y\sqrt{\rho_{11}}\langle 1|\psi\rangle|1\rangle) (x\sqrt{\rho_{44}}\langle\psi|0\rangle\langle 0| + y\sqrt{\rho_{11}}\langle\psi|1\rangle\langle 1|) \\
 &\quad - xy(\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} - \rho_{14}) (\langle\psi|0\rangle\langle 1|\psi\rangle|1\rangle\langle 0| + \langle\psi|1\rangle\langle 0|\psi\rangle|0\rangle\langle 1|) \\
 &\quad + (y\sqrt{\rho_{22}}\langle 1|\psi\rangle|0\rangle + x\sqrt{\rho_{33}}\langle 0|\psi\rangle|1\rangle) (y\sqrt{\rho_{22}}\langle\psi|1\rangle\langle 0| + x\sqrt{\rho_{33}}\langle\psi|0\rangle\langle 1|) \\
 &\quad - xy(\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} - \rho_{23}) (\langle\psi|0\rangle\langle 1|\psi\rangle|0\rangle\langle 1| + \langle\psi|1\rangle\langle 0|\psi\rangle|1\rangle\langle 0|)] \sigma_x,
 \end{aligned}$$

con probabilidad

$$p_{\psi_+} = x^2(\rho_{33} + \rho_{44}) |\langle 0|\psi\rangle|^2 + y^2(\rho_{11} + \rho_{22}) |\langle 1|\psi\rangle|^2.$$

- Finalmente, el estado ρ_{ψ_-} :

$$\begin{aligned}
 \rho_{\psi_-} &= \frac{\langle \psi_- | (|\psi\rangle\langle\psi| \rho_{AB}) | \psi_- \rangle}{\text{Tr} \langle \psi_- | (|\psi\rangle\langle\psi| \rho_{AB}) | \psi_- \rangle}, \\
 &= \sigma_x \sigma_z \frac{1}{p_{\psi_-}} [(y\sqrt{\rho_{44}}\langle 0|\psi\rangle|0\rangle + x\sqrt{\rho_{11}}\langle 1|\psi\rangle|1\rangle) (y\sqrt{\rho_{44}}\langle\psi|0\rangle\langle 0| + x\sqrt{\rho_{11}}\langle\psi|1\rangle\langle 1|) \\
 &\quad - xy(\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} - \rho_{14}) (\langle\psi|0\rangle\langle 1|\psi\rangle|1\rangle\langle 0| + \langle\psi|1\rangle\langle 0|\psi\rangle|0\rangle\langle 1|) \\
 &\quad + (x\sqrt{\rho_{22}}\langle 1|\psi\rangle|0\rangle + y\sqrt{\rho_{33}}\langle 0|\psi\rangle|1\rangle) (x\sqrt{\rho_{22}}\langle\psi|1\rangle\langle 0| + y\sqrt{\rho_{33}}\langle\psi|0\rangle\langle 1|) \\
 &\quad - xy(\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} - \rho_{23}) (\langle\psi|0\rangle\langle 1|\psi\rangle|0\rangle\langle 1| + \langle\psi|1\rangle\langle 0|\psi\rangle|1\rangle\langle 0|)] \sigma_z \sigma_x,
 \end{aligned}$$

con su probabilidad respectiva,

$$p_{\psi_-} = y^2 (\rho_{33} + \rho_{44}) |\langle 0|\psi\rangle|^2 + x^2 (\rho_{11} + \rho_{22}) |\langle 1|\psi\rangle|^2.$$

Una vez conocidos los resultados de las medidas, el receptor puede remover los operadores unitarios, σ_z desde ρ_{ϕ_-} , σ_x de ρ_{ψ_+} , y $\sigma_x \sigma_z$ de ρ_{ψ_-} . Así, la fidelidad promedio total de las cuatro salidas es dada por

$$\begin{aligned}
 f_X &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (p_{\phi_+} \langle \psi | \rho_{\phi_+} | \psi \rangle + p_{\phi_-} \langle \psi | \sigma_z \rho_{\phi_-} \sigma_z | \psi \rangle \\
 &\quad + p_{\psi_+} \langle \psi | \sigma_x \rho_{\psi_+} \sigma_x | \psi \rangle + p_{\psi_-} \langle \psi | \sigma_x \sigma_z \rho_{\psi_-} \sigma_z \sigma_x | \psi \rangle) |\langle 0|\psi\rangle| d|\langle 0|\psi\rangle| d\theta_0 d\theta_1, \\
 &= \frac{2}{3} + \frac{C_{aA} C_{14}}{3} - \frac{\rho_{22} + \rho_{33} - 2C_{aA} \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}}{3}, \tag{5.20a}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{(C_{aA} - \mathcal{C}_{aA})(C_{14} + 2\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}})}{3}. \tag{5.20b}$$

De la expresión anterior, vemos que para que la fidelidad f_x tenga comportamientos cuánticos, se debe cumplir que su valor sea mayor a $2/3$, es decir, si

$$C_{aA} > \mathcal{C}_{aA} \quad \text{y} \quad C_{14} > \mathcal{C}_{14},$$

donde los valores umbrales para las concurrencias \mathcal{C}_{aA} y \mathcal{C}_{14} están definidos por,

$$\mathcal{C}_{aA} = \frac{\rho_{22} + \rho_{33}}{C_{14} + 2\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}}, \quad (5.21a)$$

$$\mathcal{C}_{14} = (\sqrt{\rho_{22}} - \sqrt{\rho_{33}})^2. \quad (5.21b)$$

Podemos ver que el umbral \mathcal{C}_{aA} depende de la población del sector $H_{01,10}$ y en la decoherencia del subespacio $H_{00,11}$ y no de la decoherencia del subespacio $H_{01,10}$, mientras que el umbral \mathcal{C}_{14} sólo depende de la población del subespacio $H_{01,10}$ y esto puede ser cero cuando $\rho_{22} = \rho_{33}$.

Adicionalmente, ambos valores umbrales se vuelven cero cuando no hay población en $H_{01,10}$. De la expresión (5.20a) vemos que f_x es siempre menor que f_p , porque solamente hay población en $H_{01,10}$. Un caso especial se obtiene cuando $C_{14} = C_{aA}$, para el que, los valores de umbral son,

$$\mathcal{C}_{14} = \mathcal{C}_{aA} = \sqrt{\rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{22}\rho_{33}} - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}},$$

cuando dependen únicamente de la población al interior de $H_{01,10}$, y se vuelve cero en el caso cuando a $H_{01,10}$ le falta población.

Por lo tanto, aquí hemos mostrado que cuando el canal cuántico es un estado tipo- X , ambos, el entrelazamiento C_{AB} del canal y el entrelazamiento de las medidas de los estados C_{aA} , son necesarios pero no suficientes para observar la naturaleza cuántica del proceso de teleportación a través de la fidelidad total promedio de los estados de salida; así, porque para la decoherencia y los mecanismos de disipación de las dos cantidades de entrelazamiento involucradas podrían ser mayores que los respectivos umbrales encontrados \mathcal{C}_{aA} y \mathcal{C}_{AB} .

5.6 Fidelidad Promedio para el canal en un estado tipo X con subespacio principal \mathcal{H}_{0110}

Consideramos nuevamente la matriz (5.19), donde los elementos que están fuera de la diagonal son números reales no negativos, *i.e.*, $\rho_{23} = \rho_{32} \geq 0$ y $\rho_{14} = \rho_{41} \geq 0$, ya que sus fases pueden ser removidas por transformaciones unitarias locales.

La concurrencia C_{AB} del estado tipo X es dada por

$$C_{AB} = \max\{0, C_{23}, C_{14}\},$$

donde $C_{23} = 2(\rho_{23} - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}})$ y $C_{14} = 2(\rho_{14} - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}})$.

De aquí vemos que el estado X posee población en dos subespacios ortogonales \mathcal{H}_{0110} y \mathcal{H}_{0011} , expandido por $\{|0\rangle|1\rangle, |1\rangle|0\rangle\}$ y $\{|0\rangle|0\rangle, |1\rangle|1\rangle\}$ respectivamente, donde podemos asumir sin pérdida de generalidad, que el subespacio \mathcal{H}_{0110} contiene la información principal, en el sentido que éste tiene los términos principales de la concurrencia, *i.e.*,

$$C_{23} \geq C_{14}. \quad (5.22)$$

Esta desigualdad junto con la positividad de ρ_{AB} implica que los elementos de la matriz del estado del canal (5.19) satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\rho_{14} \leq \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} < \rho_{23} \leq \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}, \quad (5.23)$$

Si ρ_{AB} es entrelazado ($C_{23} > 0 \geq C_{14}$), de otro modo,

$$\rho_{14} \leq \rho_{23} \leq \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} \leq \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}, \quad (5.24)$$

si ρ_{AB} , le falta entrelazamiento ($0 \geq C_{23} > C_{14}$).

Para realizar la teleportación del estado desconocido $|\psi\rangle$ desde el qubit a al B , el emisor A realiza una medida de los qubits aA en las bases (5.2), entonces el qubit B es dejado en uno de las cuatro posibles salidas normalizadas. Una vez que el emisor haya comunicado el resultado de la medida, el receptor puede remover la respectiva operación unitaria para obtener uno de los siguientes estados

en su qubit B ,

$$\begin{aligned}\rho_{\phi_+} &= \frac{\sigma_x \langle \phi_+ | (|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \rho_{AB}) | \phi_+ \rangle \sigma_x}{p_{\phi_+}}, \\ \rho_{\phi_-} &= \frac{\sigma_x \sigma_z \langle \phi_- | (|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \rho_{AB}) | \phi_- \rangle \sigma_z \sigma_x}{p_{\phi_-}}, \\ \rho_{\psi_+} &= \frac{\langle \psi_+ | (|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \rho_{AB}) | \psi_+ \rangle}{p_{\psi_+}}, \\ \rho_{\psi_-} &= \frac{\sigma_z \langle \psi_+ | (|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \rho_{AB}) | \psi_+ \rangle \sigma_z}{p_{\psi_+}},\end{aligned}$$

cada uno de ellos con las respectivas probabilidades

$$\begin{aligned}p_{\phi_{\pm}} &= \text{Tr} \langle \phi_{\pm} | (|\psi\rangle\langle\psi| \rho_{AB}) | \phi_{\pm} \rangle, \\ p_{\psi_{\pm}} &= \text{Tr} \langle \psi_{\pm} | (|\psi\rangle\langle\psi| \rho_{AB}) | \psi_{\pm} \rangle.\end{aligned}$$

En este caso, la fidelidad total promedio es dada por

$$F = \frac{2}{3} + \frac{C_{aA}(C_{23} + 2\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}) - (\rho_{11} + \rho_{44})}{3}. \quad (5.25)$$

En este punto, observando la forma de la ecuación (5.25), podemos preguntarnos lo siguiente: ¿Cuáles son las condiciones bajo el cual el promedio de fidelidad expone comportamientos cuánticos?, y ¿cuáles son las condiciones para que la fidelidad promedio (5.25) supere su contraparte (5.12)?

5.6.1 Valores umbrales de concurrencia para mostrar comportamientos cuánticos

Aquí estudiaremos las condiciones que satisface ρ_{AB} en relación a la exposición de comportamientos cuánticos a través de la fidelidad promedio. Esto ocurre cuando la fidelidad de (5.25) es mayor que $2/3$, es decir, en el caso que

$$C_{aA}(C_{23} + 2\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}) - (\rho_{11} + \rho_{44}) > 0. \quad (5.26)$$

Después de una pequeña álgebra, encontramos que, si $C_{aA} \neq C_{14}$, luego la condición (5.26) se

satisface cuando

$$C_{aA} > \frac{\rho_{11} + \rho_{44}}{C_{23} + 2\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}} \quad (5.27a)$$

y

$$C_{23} > (\sqrt{\rho_{11}} - \sqrt{\rho_{44}})^2, \quad (5.27b)$$

o

$$C_{23} > \frac{\rho_{11} + \rho_{44} - 2C_{aA}\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}}{C_{aA}} \quad (5.28a)$$

y

$$C_{aA} > \frac{\rho_{11} + \rho_{44}}{1 + 2\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}}, \quad (5.28b)$$

mientras si $C_{aA} = C_{23}$, luego la condición (5.26) se cumple cuando

$$C_{aA} = C_{23} > \sqrt{\rho_{11} + \rho_{44} + \rho_{11}\rho_{44}} - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}. \quad (5.29)$$

Las segundas desigualdades, (5.27b) y (5.28b), emergen del hecho que en el lado derecho de las primeras ecuaciones, (5.27a) y (5.28a), respectivamente, éstas deben ser menores que 1.

Aquí hemos encontrado los valores umbrales (5.27), (5.28), y (5.29) para las cantidades de entrelazamiento involucradas C_{aA} y C_{23} , para que aparezcan comportamientos cuánticos.

Esto significa que para un canal con ruido, no es suficiente que aquellas cantidades sean diferentes de cero, como para el canal puro, excepto para el caso especial cuando $\rho_{11} = \rho_{44}$, para el cual los valores umbrales del canal desaparecen, como se sigue desde las condiciones (5.27).

En general, de acuerdo con la ecuación (5.27a), el valor umbral para el entrelazamiento de las bases de medición disminuye como el incremento del entrelazamiento del canal, mientras que la ecuación (5.28a) muestra el valor umbral de la disminución del entrelazamiento del canal como el aumento del entrelazamiento de las bases de medición.

Vemos que en las condiciones (5.27) y (5.28) hay un orden invertido de los respectivos valores umbrales, *i.e.*, el valor umbral (5.27b) es menor que (5.28a) y el umbral (5.27a) es mayor que (5.28b).

5.6.2 Valores umbrales para mejorar la fidelidad promedio

Ahora analizamos las condiciones que satisface ρ_{AB} para que la fidelidad promedio (5.25) sea mayor que la obtenida para el canal puro, Ec. (5.12). Comparando ambas fidelidades, encontramos la condición general:

$$C_{aA}C_{AB} < C_{aA}(C_{23} + 2\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}) - (\rho_{11} + \rho_{44}). \quad (5.30)$$

Vemos que esta restricción general puede ser satisfecha si $C_{23} > C_{AB}$, la cual asumimos a partir de ahora.

La restricción (5.30) puede ser analizada considerando tres casos diferentes, los cuales se describen separadamente más abajo.

Caso $C_{aA} \neq C_{AB}$ y $C_{aA} \neq C_{23}$

Primero que todo, hemos considerado que el entrelazamiento de la base de medida es diferente para ambas cantidades de entrelazamientos de los canales. En ese caso, la Ec.(5.30) conduce a las siguientes desigualdades,

$$C_{23} > C_{AB} + \frac{\rho_{11} + \rho_{44} - 2C_{aA}\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}}{C_{aA}}, \quad (5.31a)$$

$$C_{aA} > \frac{\rho_{11} + \rho_{44}}{1 - C_{AB} + 2\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}}, \quad (5.31b)$$

$$C_{AB} < 1 - (\sqrt{\rho_{11}} - \sqrt{\rho_{44}})^2. \quad (5.31c)$$

La primera condición (5.31a) significa que la concurrencia del canal ruidoso debe ser mayor que el entrelazamiento del canal puro y el mayor valor umbral para mostrar comportamientos cuánticos, como esperábamos, específicamente en ese caso, es mayor que la suma de ellos. La desigualdad (5.31b) define un valor umbral para la concurrencia de la base de medición, la cual es siempre mayor que el menor valor umbral para mostrar comportamientos cuánticos. Este valor umbral (5.31b) es menor que el mayor de todos (5.27a) si

$$C_{AB} + C_{23} < 1,$$

de otro modo, este es mayor que el más grande valor (5.28b) cuando

$$C_{AB} + C_{23} > 1.$$

La tercera desigualdad (5.31c) puede ser interpretada como una restricción impuesta por la cantidad de entrelazamiento del estado puro para tener la posibilidad de superar la fidelidad promedio con un estado de tipo X .

Equivalentemente, la desigualdad (5.31c) significa que hay un límite superior para la concurrencia del canal puro bajo la cual nosotros siempre podemos encontrar un estado tipo X que nos permita incrementar la fidelidad promedio.

Vemos que este límite superior desaparece en el caso especial cuando el subespacio, \mathcal{H}_{0011} es poblado uniformemente, *i.e.*, $\rho_{11} = \rho_{44}$.

Caso $C_{aA} = C_{AB}$ y $C_{aA} \neq C_{23}$

Las condiciones de arriba cambian ligeramente cuando consideramos la concurrencia de la base de medición igual a la C_{AB} del canal del estado puro.

En este caso, la desigualdad (5.30) conduce a la siguiente restricción,

$$C_{23} > C_{AB} + \frac{\rho_{11} + \rho_{44} - 2C_{AB}\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}}{C_{AB}}, \quad (5.32a)$$

la cual se cumple si el lado derecho es menor que 1, lo que conduce a

$$C_- < C_{AB} < C_+, \quad (5.32b)$$

donde

$$C_{\pm} = \frac{1 + 2\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} \pm \sqrt{(1 + 2\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}})^2 - 4(\rho_{11} + \rho_{44})}}{2}.$$

Además, la restricción (5.32b) se mantiene si el determinante de las soluciones C_{\pm} es mayor que cero, *i.e.*,

$$(1 + 2\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}})^2 - 4(\rho_{11} + \rho_{44}) > 0, \quad (5.32c)$$

de otro modo, no es posible mejorar la fidelidad promedio.

Vemos que, en este caso, la restricción 5.32a es igual a (5.31a) cuando la reemplazamos por $C_{aA} = C_{AB}$.

Sin embargo, la restricción (5.32b) es diferente a (5.32a) porque la desigualdad requiere que el lado derecho de (5.32a) sea menor que 1 siendo cuadrática en C_{AB} .

Revisamos también, que la condición (5.32c) es satisfecha para algunos valores de $\rho_{11} + \rho_{44}$, pero no para todos.

Claramente, este caso impone fuertes restricciones al estado X que es el caso de las desigualdades (5.31).

Caso $C_{aA} \neq C_{AB}$ y $C_{aA} = C_{23}$

Ahora, analizamos la restricción general (5.30) para el caso donde la concurrencia de la base de medición es igual a la concurrencia del canal del estado X .

Reemplazando $C_{aA} = C_{23}$ en ((5.30)), obtenemos las siguientes restricciones,

$$C_{23} > \frac{1}{2} \left[C_{AB} - 2\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} + \sqrt{(C_{AB} - 2\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}})^2 + 4(\rho_{11} + \rho_{44})} \right], \quad (5.33)$$

pero esto puede cumplirse si el lado derecho es menor que 1, donde obtenemos la restricción (5.31c).

Vemos que el valor umbral (5.33) es menor que el dado por (5.32a) cuando la restricción (5.31c) se cumple.

Claramente, las restricciones en el estado X son más relajadas que las impuestas en el caso para las desigualdades (5.32).

Esto se cumple porque aquí consideramos una concurrencia de base de medición mayor que el caso anterior, *i.e.*, $C_{aA} = C_{23} > C_{AB}$.

En otras palabras, esta es una consecuencia del hecho que todos los valores de umbral anteriores disminuyen como C_{aA} incrementa, y algunos de ellos desaparecen en el límite cuando $C_{aA} = 1$, como podemos ver desde la condición general (5.30).

5.7 Ajuste de Entrelazamiento, Fidelidad Promedio para el Canal en un Estado tipo X con subespacio principal

\mathcal{H}_{0011}

Ahora, aplicaremos el proceso USE, que fue descrito en la sección anterior, para las salidas de los estados $\{\rho_{\phi_+}, \sigma_z \rho_{\phi_-} \sigma_z, \sigma_x \rho_{\psi_+} \sigma_x, \sigma_z \sigma_x \rho_{\psi_-} \sigma_x \sigma_z\}$, considerando la respectiva transformación unitaria conjunta U_{Bb} y el qubit auxiliar b , que está inicialmente en el estado $|0_b\rangle$. Adicionalmente, en los operadores unitarios U_{Bb} debemos reemplazar α/β , por $\sqrt{\rho_{11}/\rho_{44}}$, donde hemos asumido que $\rho_{11} \leq \rho_{44}$. Bueno, sin pérdida de generalidad y siguiendo nuestras recientes asunciones, consideramos $\alpha \leq \beta$.

Específicamente, si el receptor tiene la salida ρ_{ϕ_+} , las transformaciones $\rho_{\phi_+} \otimes |0_b\rangle\langle 0_b|$ son descritas por la ecuación (5.13). Aquí el observable σ_z del sistema auxiliar b es medido. Por otro lado el qubit B , es proyectado a $|1\rangle$ perdiendo la información de $|\psi\rangle$.

- Estado ϱ_{ϕ_+0} :

Si $x \geq \alpha$, la transformación unitaria necesaria para realizar el proceso USE es,

$$U_{Bb} = |0\rangle\langle 0| \otimes I_b + |1\rangle\langle 1| \otimes U_b, \quad (5.34a)$$

donde:

$$U_b|0_b\rangle = \frac{x\sqrt{\rho_{11}}}{y\sqrt{\rho_{44}}}|0_b\rangle + \sqrt{1 - \frac{x^2\rho_{11}}{y^2\rho_{44}}}|1_b\rangle, \quad (5.34b)$$

Así, obtenemos el siguiente resultado,

$$\varrho_{\phi_+0} = \frac{1}{p_{\phi_+}} \frac{1}{p_{\phi_+0}} \left[\begin{array}{l} x^2 \rho_{11} |\psi\rangle\langle\psi| - x^2 (\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} - \rho_{14}) \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{44}}} (\langle\psi|1\rangle\langle 0|\psi\rangle|0\rangle\langle 1| + \langle\psi|0\rangle\langle 1|\psi\rangle|1\rangle\langle 0|) \\ + \left(y\sqrt{\rho_{33}}\langle 1|\psi\rangle|0\rangle + \frac{x^2\sqrt{\rho_{22}\sqrt{\rho_{11}}}}{y\sqrt{\rho_{44}}}\langle 0|\psi\rangle|1\rangle \right) \left(y\sqrt{\rho_{33}}\langle\psi|1\rangle\langle 0| + \frac{x^2\sqrt{\rho_{22}\sqrt{\rho_{11}}}}{y\sqrt{\rho_{44}}}\langle\psi|0\rangle\langle 1| \right) \\ - x^2 (\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} - \rho_{23}) \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{44}}} (\langle\psi|0\rangle\langle 1|\psi\rangle|0\rangle\langle 1| + \langle\psi|1\rangle\langle 0|\psi\rangle|1\rangle\langle 0|) \end{array} \right],$$

con su correspondiente probabilidad,

$$\begin{aligned} p_{\phi_+0} &= \text{Tr}\langle 0_b | U_{Bb} \rho_{\phi_+} \otimes |0_b\rangle\langle 0_b| U_{Bb}^\dagger |0_b\rangle, \\ &= \frac{1}{p_{\phi_+}} \left(x^2 \rho_{11} + y^2 \rho_{33} |\langle 1|\psi\rangle|^2 + \frac{x^4}{y^2} \frac{\rho_{11}\rho_{22}}{\rho_{44}} |\langle 0|\psi\rangle|^2 \right). \end{aligned}$$

- Estado ρ_{ϕ_-0} :

Si el receptor tiene el estado $\sigma_z \rho_{\phi_-} \sigma_z$, luego $\sigma_z \rho_{\phi_-} \sigma_z \otimes |0_b\rangle\langle 0_b|$ es transformado por (5.14) o (5.15). Para los valores de $x \leq \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{11}+\rho_{44}}}$ ($y\sqrt{\rho_{11}} \geq x\sqrt{\rho_{44}} \rightarrow y^2\rho_{11} \geq x^2\rho_{44} \rightarrow (1-x^2)\rho_{11} \geq x^2\rho_{44} \rightarrow \rho_{11} \geq x^2(\rho_{44} + \rho_{11})$), el estado se transforma con (5.14) y la medida del qubit b , proyectado en el qubit B forma el estado

$$U_{Bb} = |1\rangle\langle 1| \otimes I_b + |0\rangle\langle 0| \otimes U_b, \quad (5.35a)$$

donde:

$$U_b|0\rangle = \frac{x\sqrt{\rho_{44}}}{y\sqrt{\rho_{11}}}|0\rangle + \sqrt{1 - \frac{x^2\rho_{44}}{y^2\rho_{11}}}|1\rangle, \quad (5.35b)$$

que para este caso obtenemos,

$$\begin{aligned} \rho_{\phi_-0} &= \frac{1}{p_{\phi_-0}} \frac{1}{p_{\phi_-}} \left[x^2 \rho_{44} |\psi\rangle\langle\psi| \right. \\ &\quad - x^2 (\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} - \rho_{14}) \sqrt{\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}} (\langle\psi|1\rangle\langle 0|\psi\rangle|0\rangle\langle 1| + \langle\psi|0\rangle\langle 1|\psi\rangle|1\rangle\langle 0|) \\ &\quad + \left(\frac{x^2\sqrt{\rho_{33}}}{y} \sqrt{\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}} \langle 1|\psi\rangle|0\rangle + y\sqrt{\rho_{22}}\langle 0|\psi\rangle|1\rangle \right) \left(\frac{x^2\sqrt{\rho_{33}}}{y} \sqrt{\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}} \langle\psi|1\rangle\langle 0| + y\sqrt{\rho_{22}}\langle\psi|0\rangle\langle 1| \right) \\ &\quad \left. - x^2 (\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} - \rho_{23}) \sqrt{\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}} (\langle\psi|1\rangle\langle 0|\psi\rangle|1\rangle\langle 0| + \langle\psi|0\rangle\langle 1|\psi\rangle|0\rangle\langle 1|) \right], \end{aligned}$$

con probabilidad,

$$\begin{aligned} p_{\phi_{-0}} &= \text{Tr}\langle 0_b | U_{Bb} \sigma_z \rho_{\phi_{-}} \sigma_z \otimes | 0_b \rangle \langle 0_b | U_{Bb}^\dagger | 0_b \rangle, \\ &= \frac{1}{p_{\phi_{-}}} \left(x^2 \rho_{44} + y^2 \rho_{22} |\langle 0 | \psi \rangle|^2 + \frac{x^4}{y^2} \frac{\rho_{33} \rho_{44}}{\rho_{11}} |\langle 1 | \psi \rangle|^2 \right). \end{aligned}$$

Para $x \geq \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{11} + \rho_{44}}}$, el estado se transforma con (5.15), y la medida del qubit b proyectado sobre el qubit B ,

$$U_{Bb} = |0\rangle\langle 0| \otimes I_b + |1\rangle\langle 1| \otimes U_b, \quad (5.36a)$$

donde:

$$U_b |0\rangle = \frac{y\alpha}{x\beta} |0\rangle + \sqrt{1 - \frac{y^2\alpha^2}{x^2\beta^2}} |1\rangle, \quad (5.36b)$$

Así se obtiene el estado de la forma,

$$\begin{aligned} \varrho_{\phi_{-0}} &= \frac{1}{p_{\phi_{-}} p_{\phi_{-0}}} \left[y^2 \rho_{11} |\psi\rangle\langle\psi| \right. \\ &\quad - y^2 (\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} - \rho_{14}) \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{44}}} (\langle\psi|1\rangle\langle 0|\psi\rangle|0\rangle\langle 1| + \langle\psi|0\rangle\langle 1|\psi\rangle|1\rangle\langle 0|) \\ &\quad + \left(x\sqrt{\rho_{33}}\langle 1|\psi\rangle|0\rangle + \frac{y^2\sqrt{\rho_{22}}\sqrt{\rho_{11}}}{x\sqrt{\rho_{44}}}\langle 0|\psi\rangle|1\rangle \right) \left(x\sqrt{\rho_{33}}\langle\psi|1\rangle\langle 0| + \frac{y^2\sqrt{\rho_{22}}\sqrt{\rho_{11}}}{x\sqrt{\rho_{44}}}\langle\psi|0\rangle\langle 1| \right) \\ &\quad \left. - y^2 (\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} - \rho_{23}) \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{44}}} (\langle\psi|1\rangle\langle 0|\psi\rangle|1\rangle\langle 0| + \langle\psi|0\rangle\langle 1|\psi\rangle|0\rangle\langle 1|) \right], \end{aligned}$$

con probabilidad,

$$\begin{aligned} p_{\phi_{-0}} &= \text{Tr}\langle 0_b | U_{Bb} \sigma_z \rho_{\phi_{-}} \sigma_z \otimes | 0_b \rangle \langle 0_b | U_{Bb}^\dagger | 0_b \rangle, \\ &= \frac{1}{p_{\phi_{-}}} \left(y^2 \rho_{11} + x^2 \rho_{33} |\langle 1 | \psi \rangle|^2 + \frac{y^4}{x^2} \frac{\rho_{22} \rho_{11}}{\rho_{44}} |\langle 0 | \psi \rangle|^2 \right). \end{aligned}$$

- Estado $\varrho_{\psi_{+0}}$:

Cuando el receptor tiene el estado $\sigma_x \rho_{\psi_+} \sigma_x$, luego $\sigma_x \rho_{\psi_+} \sigma_x \otimes |0_b\rangle\langle 0_b|$ transformada por (5.16) o (5.17). Para $x \leq \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{11} + \rho_{44}}}$, el estado se transforma con (5.16), y la medida del qubit b , puede ser proyectada al qubit B dentro del estado

$$U_{Bb} = |0\rangle\langle 0| \otimes I_b + |1\rangle\langle 1| \otimes U_b, \quad (5.37a)$$

donde:

$$U_b|0\rangle = \frac{x\beta}{y\alpha}|0\rangle + \sqrt{1 - \frac{x^2\beta^2}{y^2\alpha^2}}|1\rangle, \quad (5.37b)$$

así se obtiene el estado de la forma,

$$\rho_{\psi_{+0}} = \frac{1}{p_{\psi_{+0}}} \frac{1}{p_{\psi_{+}}} \left[\begin{array}{l} x^2 \rho_{44} (\langle 0|\psi\rangle|0\rangle\langle\psi|0\rangle\langle 0| + \langle 0|\psi\rangle|0\rangle\langle\psi|1\rangle\langle 1| + \langle 1|\psi\rangle|1\rangle\langle\psi|0\rangle\langle 0| + \langle 1|\psi\rangle|1\rangle\langle\psi|1\rangle\langle 1|) \\ - x^2 (\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} - \rho_{14}) \frac{\sqrt{\rho_{44}}}{\sqrt{\rho_{11}}} (\langle\psi|0\rangle\langle 1|\psi\rangle|1\rangle\langle 0| + \langle\psi|1\rangle\langle 0|\psi\rangle|0\rangle\langle 1|) \\ + \left(y\sqrt{\rho_{22}}\langle 1|\psi\rangle|0\rangle + \frac{x^2\sqrt{\rho_{33}\sqrt{\rho_{44}}}}{y\sqrt{\rho_{11}}}\langle 0|\psi\rangle|1\rangle \right) \left(y\sqrt{\rho_{22}}\langle\psi|1\rangle\langle 0| + \frac{x^2\sqrt{\rho_{33}\sqrt{\rho_{44}}}}{y\sqrt{\rho_{11}}}\langle\psi|0\rangle\langle 1| \right) \\ - x^2 (\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} - \rho_{23}) \frac{\sqrt{\rho_{44}}}{\sqrt{\rho_{11}}} (\langle\psi|0\rangle\langle 1|\psi\rangle|0\rangle\langle 1| + \langle\psi|1\rangle\langle 0|\psi\rangle|1\rangle\langle 0|) \end{array} \right],$$

con probabilidad

$$p_{\psi_{+0}} = \frac{1}{p_{\psi_{+}}} \left(x^2 \rho_{44} + y^2 \rho_{22} |\langle 1|\psi\rangle|^2 + \frac{x^4 \rho_{33} \rho_{44}}{y^2 \rho_{11}} |\langle 0|\psi\rangle|^2 \right).$$

Si $x \geq \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{11} + \rho_{44}}}$, luego $\sigma_x \rho_{\psi_+} \sigma_x \otimes |0_b\rangle\langle 0_b|$ se transforma con (5.17) y la medida del qubit b , puede ser proyectada al qubit B ,

$$U_{Bb} = |1\rangle\langle 1| \otimes I_b + |0\rangle\langle 0| \otimes U_b, \quad (5.38a)$$

donde:

$$U_b|0\rangle = \frac{y\sqrt{\rho_{11}}}{x\sqrt{\rho_{44}}}|0\rangle + \sqrt{1 - \frac{y^2\alpha^2}{x^2\beta^2}}|1\rangle, \quad (5.38b)$$

formando el estado,

$$\varrho_{\psi+0} = \frac{1}{p_{\psi+0}} \frac{1}{p_{\psi+}} \left[\begin{array}{l} y^2 \rho_{11} \langle 0|\psi\rangle\langle 0|\psi\rangle\langle 0| + y^2 \rho_{11} \langle 1|\psi\rangle\langle 1|\psi\rangle\langle 0| + y^2 \rho_{11} \langle 0|\psi\rangle\langle 0|\psi\rangle\langle 1| \\ \quad + y^2 \rho_{11} \langle 1|\psi\rangle\langle 1|\psi\rangle\langle 1| \\ - y^2 (\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} - \rho_{14}) \frac{\sqrt{\rho_{11}}}{\sqrt{\rho_{44}}} (\langle \psi|0\rangle\langle 1|\psi\rangle\langle 1|\langle 0| + \langle \psi|1\rangle\langle 0|\psi\rangle\langle 0|\langle 1|) \\ + \left(\frac{y^2 \sqrt{\rho_{11}\sqrt{\rho_{22}}}}{x\sqrt{\rho_{44}}} \langle 1|\psi\rangle\langle 0| + x\sqrt{\rho_{33}}\langle 0|\psi\rangle\langle 1| \right) \left(\frac{y^2 \sqrt{\rho_{11}\sqrt{\rho_{22}}}}{x\sqrt{\rho_{44}}} \langle \psi|1\rangle\langle 0| + x\sqrt{\rho_{33}}\langle \psi|0\rangle\langle 1| \right) \\ - y^2 (\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} - \rho_{23}) \frac{\sqrt{\rho_{11}}}{\sqrt{\rho_{44}}} (\langle \psi|0\rangle\langle 1|\psi\rangle\langle 0|\langle 1| + \langle \psi|1\rangle\langle 0|\psi\rangle\langle 1|\langle 0|) \end{array} \right],$$

con probabilidad

$$p_{\psi+0} = \frac{1}{p_{\psi+}} \left[y^2 \rho_{11} + \frac{y^4 \rho_{11} \rho_{22}}{x^2 \rho_{44}} |\langle 1|\psi\rangle|^2 + x^2 \rho_{33} |\langle 0|\psi\rangle|^2 \right].$$

- Estado $\varrho_{\psi-0}$:

Mientras, si el receptor tiene el estado $\sigma_z \sigma_x \rho_{\psi-} \sigma_x \sigma_z$, el estado $\sigma_z \sigma_x \rho_{\psi-} \sigma_x \sigma_z \otimes |0_b\rangle\langle 0_b|$ transforma con la operación unitaria (5.18), y la medida del qubit auxiliar b , puede ser proyectado al qubit B , para el estado

$$U_{Bb} = |1\rangle\langle 1| \otimes I_b + |0\rangle\langle 0| \otimes U_b, \quad (5.39a)$$

donde:

$$U_b |0\rangle = \frac{x\sqrt{\rho_{11}}}{y\sqrt{\rho_{44}}} |0\rangle + \sqrt{1 - \frac{x^2 \rho_{11}}{y^2 \rho_{44}}} |1\rangle, \quad (5.39b)$$

Así tenemos:

$$\varrho_{\psi-0} = \frac{1}{p_{\psi-0} p_{\psi-}} \left[\begin{array}{l} x^2 \rho_{11} |\psi\rangle\langle \psi| - x^2 (\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} - \rho_{14}) \frac{\sqrt{\rho_{11}}}{\sqrt{\rho_{44}}} (\langle \psi|0\rangle\langle 1|\psi\rangle\langle 1|\langle 0| + \langle \psi|1\rangle\langle 0|\psi\rangle\langle 0|\langle 1|) \\ + \left(\frac{x\sqrt{\rho_{11}}}{y\sqrt{\rho_{44}}} x\sqrt{\rho_{22}} \langle 1|\psi\rangle\langle 0| + y\sqrt{\rho_{33}} \langle 0|\psi\rangle\langle 1| \right) \left(\frac{x\sqrt{\rho_{11}}}{y\sqrt{\rho_{44}}} x\sqrt{\rho_{22}} \langle \psi|1\rangle\langle 0| + y\sqrt{\rho_{33}} \langle \psi|0\rangle\langle 1| \right) \\ - x^2 (\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} - \rho_{23}) \frac{\sqrt{\rho_{11}}}{\sqrt{\rho_{44}}} (\langle \psi|0\rangle\langle 1|\psi\rangle\langle 0|\langle 1| + \langle \psi|1\rangle\langle 0|\psi\rangle\langle 1|\langle 0|) \end{array} \right]$$

con probabilidad

$$p_{\psi-0} = \frac{1}{p_{\psi-}} \left[x^2 \rho_{11} + \frac{x^4 \rho_{11}}{y^2 \rho_{44}} \rho_{22} |\langle 1|\psi\rangle|^2 + y^2 \rho_{33} |\langle 0|\psi\rangle|^2 \right].$$

Por lo tanto, la probabilidad total de la cuasiextracción será, para $x > a$:

$$\begin{aligned} p_{\approx ext} &= p_{\phi+} p_{\phi+0} + p_{\phi-} p_{\phi-0} + p_{\psi+} p_{\psi+0} + p_{\psi-} p_{\psi-0}, \\ &= \left(2\rho_{11} + \rho_{33} + \frac{x^4}{y^2} \frac{\rho_{11}\rho_{22}}{\rho_{44}} + \frac{y^4}{x^2} \frac{\rho_{22}\rho_{11}}{\rho_{44}} \right), \end{aligned}$$

y si $x < a$:

$$\begin{aligned} p_{\approx ext} &= p_{\phi+} p_{\phi+0} + p_{\phi-} p_{\phi-0} + p_{\psi+} p_{\psi+0} + p_{\psi-} p_{\psi-0}, \\ &= \left(2x^2 \rho_{11} + 2x^2 \rho_{44} + y^2 \rho_{22} + y^2 \rho_{33} + \frac{x^4 \rho_{11}\rho_{22}}{y^2 \rho_{44}} + \frac{x^4 \rho_{33}\rho_{44}}{y^2 \rho_{11}} \right) \end{aligned}$$

Así la probabilidad total de la cuasiextracción es,

$$\left. \begin{aligned} &2\rho_{11} + \rho_{33} + \left(\frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{x^2} \right) \frac{\rho_{11}\rho_{22}}{\rho_{44}} && , x > a \\ &2x^2 (\rho_{11} + \rho_{44}) + y^2 (\rho_{22} + \rho_{33}) + \frac{x^4}{y^2} \left(\frac{\rho_{11}\rho_{22}}{\rho_{44}} + \frac{\rho_{33}\rho_{44}}{\rho_{11}} \right) && , x < a \end{aligned} \right\} p_{\approx ext}. \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} p_{\approx ext} &= p_{\phi+} p_{\phi+0} + p_{\phi-} p_{\phi-0} + p_{\psi+} p_{\psi+0} + p_{\psi-} p_{\psi-0}, \\ &= \begin{cases} 2x^2 (\rho_{11} + \rho_{44}) + y^2 (\rho_{22} + \rho_{33}) + \frac{x^4}{y^2} \left(\frac{\rho_{11}\rho_{22}}{\rho_{44}} + \frac{\rho_{33}\rho_{44}}{\rho_{11}} \right), & 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{11} + \rho_{44}}}, \\ 2\rho_{11} + \rho_{33} + \left(\frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{x^2} \right) \frac{\rho_{11}\rho_{22}}{\rho_{44}}, & \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{11} + \rho_{44}}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{11} + \rho_{44}}} \rightarrow C_{aA} = 2xy|_{x=\sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{11} + \rho_{44}}}} = \frac{2\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}}{\rho_{11} + \rho_{44}} \\
 &\rightarrow C_{14} = 2(\rho_{14} - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}).
 \end{aligned}$$

Aquí vemos que el primer término de cada expresión, $2x^2(\rho_{11} + \rho_{44})$ y $2\rho_{11}$, dan cuenta del ajuste del entrelazamiento, los otros términos aparecen por los elementos que pueblan el espacio de $H_{01,10}$. Es importante notar que el ajuste no es entre los valores de las concurrencias, sino entre C_{aA} y su valor para $x = \sqrt{\rho_{11}/(\rho_{11} + \rho_{44})}$, el cual es

$$\mathbb{C} = \frac{2\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}}{\rho_{11} + \rho_{44}},$$

que corresponde a la concurrencia aparente del estado puro normalizado en el subespacio $H_{00,11}$, que tiene igual probabilidad para los estados $|0\rangle|0\rangle$ y $|1\rangle|1\rangle$ con esas probabilidades, que también son normalizadas en $H_{00,11}$ para el canal de tipo X , *i.e.*, el estado en la primera línea del lado derecho de la ecuación (5.19). Así, este efecto introduce el concepto de estado puro normalizado aparente de un estado mezcla, y es este estado aparente el que fija los valores de la concurrencia del ajuste. Debemos mencionar además que si el estado es puro, como el estado en (5.1), es por si mismo un estado aparente. Vemos que estos valores de ajuste de concurrencia \mathbb{C} es, en general, mayor que la concurrencia del canal C_{14} , y se vuelven iguales sólo cuando el canal es puro y reducido al espacio $H_{00,11}$, *i.e.*, ambos, la decoherencia en $H_{00,11}$ y la población de $H_{01,10}$ da origen a la relación:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{C} &> C_{14} \\
 \frac{2\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}}{\rho_{11} + \rho_{44}} &\geq 2(\rho_{14} - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}) \\
 \frac{\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}}{\rho_{11} + \rho_{44}} &\geq \rho_{14} - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} \\
 \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} &\geq \rho_{14} \\
 \frac{\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}}{\rho_{11} + \rho_{44}} &\geq \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} \geq \rho_{14} \geq \rho_{14} - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, la fidelidad total promedio normalizada de los estados cuasiextraídos, es obtenida a través de la integral:

$$f^{-ext} = \frac{1}{p_{\approx ext}} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\begin{array}{l} p_{\phi_+0} p_{\phi_+} \langle \psi | \varrho_{\phi_+0} | \psi \rangle + p_{\phi_-0} p_{\phi_-} \langle \psi | \varrho_{\phi_-0} | \psi \rangle \\ + p_{\psi_+0} p_{\psi_+} \langle \psi | \varrho_{\psi_+0} | \psi \rangle + p_{\psi_-0} p_{\psi_-} \langle \psi | \varrho_{\psi_-0} | \psi \rangle \end{array} \right) |\langle 0 | \psi \rangle| d|\langle 0 | \psi \rangle| d\theta_0 d\theta_1. \quad (5.41)$$

Entonces calculamos las correspondientes fidelidades para los casos:

- ϱ_{ϕ_+0}

$$f_{\varrho_{\phi_+0}} = x^2 \rho_{11} - \frac{1}{3} x^2 (\sqrt{\rho_{11} \rho_{44}} - \rho_{14}) \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{44}}} + \frac{1}{6} \left(y^2 \rho_{33} + \frac{x^4 \rho_{22} \rho_{11}}{y^2 \rho_{44}} \right) \quad (5.42)$$

- ϱ_{ϕ_-0}

– Si $x > a$

$$f^{-ext-\varrho_{\phi_-0-x>a}} = y^2 \rho_{11} - \frac{1}{3} y^2 (\sqrt{\rho_{11} \rho_{44}} - \rho_{14}) \frac{\sqrt{\rho_{11}}}{\sqrt{\rho_{44}}} + \frac{1}{6} \left[x^2 \rho_{33} + \frac{y^4 \rho_{22} \rho_{11}}{x^2 \rho_{44}} \right] \quad (5.43)$$

– Si $x < a$

$$f^{-ext-\varrho_{\phi_-0-x<a}} = x^2 \rho_{44} - \frac{1}{3} x^2 (\sqrt{\rho_{11} \rho_{44}} - \rho_{14}) \frac{\sqrt{\rho_{44}}}{\sqrt{\rho_{11}}} + \frac{1}{6} \left(y^2 \rho_{22} + \frac{x^4 \rho_{33} \rho_{44}}{y^2 \rho_{11}} \right) \quad (5.44)$$

- ϱ_{ψ_+0}

– Si $x > a$

$$f^{-ext-\varrho_{\psi_+0-x>a}} = y^2 \rho_{11} - \frac{1}{3} y^2 (\sqrt{\rho_{11} \rho_{44}} - \rho_{14}) \frac{\sqrt{\rho_{11}}}{\sqrt{\rho_{44}}} + \frac{1}{6} \left(x^2 \rho_{33} + \frac{y^4 \rho_{11} \rho_{22}}{\rho_{44}} \right) \quad (5.45)$$

– Si $x < a$

$$f^{-ext-\varrho_{\psi_+0-x<a}} = x^2 \rho_{44} - \frac{1}{3} x^2 (\sqrt{\rho_{11} \rho_{44}} - \rho_{14}) \frac{\sqrt{\rho_{44}}}{\sqrt{\rho_{11}}} + \frac{1}{6} \left(y^2 \rho_{22} + \frac{x^4 \rho_{33} \rho_{44}}{y^2 \rho_{11}} \right) \quad (5.46)$$

- ϱ_{ψ_-0}

$$f^{-ext-\varrho_{\psi_-0}} = x^2 \rho_{11} - \frac{1}{3} x^2 (\sqrt{\rho_{11} \rho_{44}} - \rho_{14}) \frac{\sqrt{\rho_{11}}}{\sqrt{\rho_{44}}} + \frac{1}{6} \left(y^2 \rho_{33} + \frac{x^4 \rho_{11} \rho_{22}}{y^2 \rho_{44}} \right) \quad (5.47)$$

Ahora, la fidelidad total promedio de cuasiextracción cuando $x < a$, es:

$$\begin{aligned}
 f_{\text{ext}, x < a} &= \frac{1}{p_{\text{ext}, x < a}} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\begin{array}{l} p_{\phi_+ 0} p_{\phi_+} \langle \psi | \rho_{\phi_+ 0} | \psi \rangle \\ + p_{\phi_- 0} p_{\phi_-} \langle \psi | \rho_{\phi_- 0} | \psi \rangle \\ + p_{\psi_+ 0} p_{\psi_+} \langle \psi | \rho_{\psi_+ 0} | \psi \rangle \\ + p_{\psi_- 0} p_{\psi_-} \langle \psi | \rho_{\psi_- 0} | \psi \rangle \end{array} \right) |\langle 0 | \psi \rangle| d |\langle 0 | \psi \rangle| d\theta_0 d\theta_1, \\
 &= \frac{2}{3} \\
 &+ \frac{1}{3} \frac{2x^2 (\rho_{14} - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}) \left(\sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{44}}} + \sqrt{\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}} \right) + 2x^2 (\rho_{11} + \rho_{44}) - y^2 (\rho_{22} + \rho_{33}) - \frac{x^4}{y^2} \left(\frac{\rho_{33}\rho_{44}}{\rho_{11}} + \frac{\rho_{22}\rho_{11}}{\rho_{44}} \right)}{2x^2 (\rho_{11} + \rho_{44}) + y^2 (\rho_{22} + \rho_{33}) + \frac{x^4}{y^2} \left(\frac{\rho_{11}\rho_{22}}{\rho_{44}} + \frac{\rho_{33}\rho_{44}}{\rho_{11}} \right)}.
 \end{aligned}$$

Ahora, la fidelidad total promedio de la cuasiextracción cuando $x > a$, será:

$$\begin{aligned}
 f_{\text{ext}, x > a} &= \frac{1}{p_{\text{ext}, x > a}} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\begin{array}{l} p_{\phi_+ 0} p_{\phi_+} \langle \psi | \rho_{\phi_+ 0} | \psi \rangle \\ + p_{\phi_- 0} p_{\phi_-} \langle \psi | \rho_{\phi_- 0} | \psi \rangle \\ + p_{\psi_+ 0} p_{\psi_+} \langle \psi | \rho_{\psi_+ 0} | \psi \rangle \\ + p_{\psi_- 0} p_{\psi_-} \langle \psi | \rho_{\psi_- 0} | \psi \rangle \end{array} \right) |\langle 0 | \psi \rangle| d |\langle 0 | \psi \rangle| d\theta_0 d\theta_1, \\
 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{2\rho_{11} - \rho_{33} - \frac{\rho_{11}\rho_{22}}{\rho_{44}} \left(\frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{x^2} \right) - 2 \left(\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} - \rho_{14} \right) \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{44}}}}{2\rho_{11} + \rho_{33} + \left(\frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{x^2} \right) \frac{\rho_{11}\rho_{22}}{\rho_{44}}}.
 \end{aligned}$$

Así, la parte de la solución de la fidelidad total promedio de la cuasiextracción, para el estado tipo X que nos interesa analizar, es la que corresponde al factor que multiplica al valor 1/3,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2x^2(\rho_{11} + \rho_{44}) + 2x^2(\rho_{14} - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}) \left(\sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{44}}} + \sqrt{\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}} \right) - y^2(\rho_{22} + \rho_{33}) - \frac{x^4}{y^2} \left(\frac{\rho_{22}\rho_{11}}{\rho_{44}} + \frac{\rho_{33}\rho_{44}}{\rho_{11}} \right)}{2x^2(\rho_{11} + \rho_{44}) + y^2(\rho_{22} + \rho_{33}) + \frac{x^4}{y^2} \left(\frac{\rho_{11}\rho_{22}}{\rho_{44}} + \frac{\rho_{33}\rho_{44}}{\rho_{11}} \right)}, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{11} + \rho_{44}}}, \\ \frac{2\rho_{11} - 2 \left(\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} - \rho_{14} \right) \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{44}}} - \rho_{33} - \left(\frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{x^2} \right) \frac{\rho_{22}\rho_{11}}{\rho_{44}}}{2\rho_{11} + \rho_{33} + \left(\frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{x^2} \right) \frac{\rho_{11}\rho_{22}}{\rho_{44}}}, \quad \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{11} + \rho_{44}}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{array} \right.$$

Sabemos que para encontrar los valores umbrales correspondiente a los canales, el factor debe ser mayor que cero para observar comportamientos cuánticos, y debemos considerar dos casos:

Para $0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{11} + \rho_{44}}}$, con $C_{14} + 2\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} = 2\rho_{14}$:

$$\begin{aligned} & \frac{2x^2 (\rho_{14} - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}) \left(\sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{44}}} + \frac{\sqrt{\rho_{44}}}{\sqrt{\rho_{11}}} \right) + 2x^2 (\rho_{11} + \rho_{44}) - y^2 (\rho_{22} + \rho_{33}) - \frac{x^4}{y^2} \left(\frac{\rho_{33}\rho_{44}}{\rho_{11}} + \frac{\rho_{22}\rho_{11}}{\rho_{44}} \right)}{2x^2 (\rho_{11} + \rho_{44}) + y^2 (\rho_{22} + \rho_{33}) + \frac{x^4}{y^2} \left(\frac{\rho_{11}\rho_{22}}{\rho_{44}} + \frac{\rho_{33}\rho_{44}}{\rho_{11}} \right)} > 0 \\ & \frac{C_{aA}^2}{4} (C_{14} + 2\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}) \left(\sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{44}}} + \sqrt{\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}} \right) - \left(y^4 (\rho_{22} + \rho_{33}) + x^4 \left(\frac{\rho_{33}\rho_{44}}{\rho_{11}} + \frac{\rho_{22}\rho_{11}}{\rho_{44}} \right) \right) > 0, \\ & C_{14} - \left[\frac{1}{\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} (\rho_{11} + \rho_{44}) C_{aA}^2} \left[(2 - C_{aA}^2) (\rho_{11} + \rho_{44}) (\rho_{11}\rho_{22} + \rho_{33}\rho_{44}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2\sqrt{1 - C_{aA}^2} (\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{33}\rho_{44}) (\rho_{44} - \rho_{11}) \right] - 2\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} \right] > 0, \end{aligned}$$

donde encontramos el valor umbral de la cuasiextracción, para el caso $0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{11} + \rho_{44}}}$,

$$\begin{aligned} C_{\approx ext; USE, th, 0} = & \left[\frac{1}{\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} (\rho_{11} + \rho_{44}) C_{aA}^2} \left[(2 - C_{aA}^2) (\rho_{11} + \rho_{44}) (\rho_{11}\rho_{22} + \rho_{33}\rho_{44}) \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\sqrt{1 - C_{aA}^2} (\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{33}\rho_{44}) (\rho_{44} - \rho_{11}) \right] - 2\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} \right]. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Ahora para el caso $\sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{11} + \rho_{44}}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{2\rho_{11} - \rho_{33} - \frac{\rho_{11}\rho_{22}}{\rho_{44}} \left(\frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{x^2} \right) - 2 (\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} - \rho_{14}) \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{44}}}}{2\rho_{11} + \rho_{33} + \left(\frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{x^2} \right) \frac{\rho_{11}\rho_{22}}{\rho_{44}}} > 0 \\ & (C_{14} + 2\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}) \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{44}}} - \left(\rho_{33} + \frac{\rho_{11}\rho_{22}}{\rho_{44}} \left(\frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{x^2} \right) \right) > 0 \\ & C_{14} - \left(\frac{(\sqrt{\rho_{11}\rho_{22}} - \sqrt{\rho_{33}\rho_{44}})^2 + 4\rho_{11}\rho_{22} \left(\frac{1 - C_{aA}^2}{C_{aA}^2} \right)}{\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}} \right) > 0, \end{aligned}$$

cuyo valor umbral es,

$$C_{\approx ext; USE, th, 0} = \left(\frac{(\sqrt{\rho_{11}\rho_{22}} - \sqrt{\rho_{33}\rho_{44}})^2 + 4\rho_{11}\rho_{22} \left(\frac{1 - C_{aA}^2}{C_{aA}^2} \right)}{\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}} \right). \quad (5.49)$$

De los resultados, vemos que el entrelazamiento del canal y de la medida, son necesarios pero no suficientes para observar comportamientos cuánticos. Vemos además, en relación a los valores umbrales, la aparición de una competición entre los diversos elementos que componen el sistema: el entrelazamiento que proporciona la naturaleza cuántica, la decoherencia y los mecanismos de disipación, que son éstos últimos los responsables de introducir la clasicidad.

5.8 Discusión y análisis

Hicimos uso del esquema de extracción inequívoca de estados USE, que nos permitió observar la redistribución de la fidelidad al interior de cada estado de salida dentro del proceso de teleportación. La redistribución de la fidelidad nos permite aprovechar significativamente las manifestaciones de naturaleza cuántica en una salida distinguible con probabilidad diferente de cero. Específicamente encontramos para el caso de un canal puro normalizado que las catidades de entrelazamiento tanto del canal como de la medida son necesarias y suficientes para observar comportamientos cuánticos en relación a la fidelidad promedio total de los estados de salida. En el mismo caso, pero usando el protocolo USE, la fidelidad total media es afectada por la medición, aumentando la función de C_{aA} hasta el límite cuando $C_{aA} = C_{AB}$, por lo tanto, cuando C_{aA} aumenta por encima de C_{AB} , el valor de la fidelidad promedio total F_{use} , permanece en su valor máximo $1 - \sqrt{1 - C_{AB}^2}/3$ que es impuesto por el valor de la concurrencia del canal C_{AB} , de tal manera, que hay una posible salida con fidelidad 1, que significa que la teleportación es exitosa, pero que también el proceso en el envío de la información deberá ser repetido muchas veces para asegurar siempre una máxima fidelidad.

Cuando el canal cuántico es un estado tipo X, encontramos un valor umbral de las concurrencias de la forma \mathcal{C}_{aA} , que depende de la población del sector $H_{01,10}$ y en la decoherencia del subespacio $H_{00,11}$, y no de la decoherencia del subespacio $H_{01,10}$, mientras que el valor umbral \mathcal{C}_{14} , sólo depende de la población del subespacio $H_{01,10}$ y esto puede ser cero cuando $\rho_{22} = \rho_{33}$.

Además, ambos valores umbrales se vuelven cero cuando no hay población en $H_{01,10}$. De la expresión (5.20a) vemos que la fidelidad del canal ruidoso es siempre menor que la fidelidad del canal puro normalizado, debido a que solamente para ese caso hay población en $H_{01,10}$. Un caso especial se obtiene cuando $C_{14} = C_{aA}$, para el que, los valores de umbral son, $\mathcal{C}_{14} = \mathcal{C}_{aA} = \sqrt{\rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{22}\rho_{33}} - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}$, cuando dependen únicamente de la población al interior de $H_{01,10}$, y se vuelve cero en el caso cuando a $H_{01,10}$ le falta su población. Así, encontramos que el entrelazamiento del canal C_{AB} y de la medida C_{aA} son necesarios pero no suficientes para tener una fidelidad total promedio mayor a $2/3$, debido a la decoherencia y los mecanismos de disipación

de las dos cantidades de entrelazamiento involucradas, dónde podrían ser mayores los respectivos umbrales encontrados \mathcal{C}_{aA} y \mathcal{C}_{AB} .

Cuando es implementado el esquema USE para el estado puro, observamos una redistribución de la fidelidad de tal forma que existe una salida filtrable, que posee una probabilidad diferente de cero, y que es una fidelidad promedio considerablemente mayor que al no estar usando USE y que depende además del entrelazamiento del canal de medida.

Agregar que con este trabajo, hemos determinado en el esquema de teleportación, las condiciones bajo las cuales un canal en estado X resulta ser más beneficioso que un canal puro parcialmente entrelazado. Adicionalmente, hemos considerado bases de medición que no son de Bell para estudiar su rol en este problema de calcular la fidelidad promedio del proceso de teleportación de un qubit de estado desconocido. Caracterizamos la eficiencia de cada canal por la fidelidad promedio del correspondiente set de estados de salida. Encontramos las condiciones que se satisfacen por el canal con ruido X para mejorar la fidelidad promedio de la teleportación realizada por el canal puro. Específicamente, encontramos que este efecto ocurre si la cantidad de concurrencia del canal en el estado tipo X y las bases de medición son mayores que ciertos valores umbrales y el entrelazamiento del estado en el canal puro, el cual es dado como referencia, puede ser menor que un límite superior determinado por la matriz de elementos del canal en el estado X . Además, encontramos que el estado X con el subespacio \mathcal{H}_{0011} poblado uniformemente, se vuelve un tipo particular, para el cual algunos valores umbrales y el límite superior de C_{AB} desaparece. También podemos decir que en general el precio que se debe pagar para mejorar la fidelidad promedio usando el estado X , es el requerimiento de los valores umbrales. En otras palabras, el hecho de cambiar el canal de un estado puro por otro mezcla, exige que el entrelazamiento como un recurso cuántico se vuelva necesario pero no suficiente para observar comportamientos cuánticos.

Finalmente, cuando el canal cuántico es mezclado como un estado tipo X , donde hacemos consideraciones sobre los principales subespacios, vemos la aparición de la competición entre los diversos elementos que componen el sistema: el entrelazamiento que proporciona la naturaleza cuántica, la decoherencia y los mecanismos de disipación, siendo éstos últimos los responsables de introducir la clasicidad.

Capítulo 6

Equilibrio de Nash Bayesiano usando estados tipo-Werner extendidos

6.1 Resumen

En este capítulo estudiaremos las estrategias cuánticas en juegos de información incompleta, usando el formalismo de la teoría de juegos basada en el multi-sector de una matriz de probabilidades. Analizamos una extensión del bien conocido y documentado juego de la *Batalla de los sexos*, usando un estado tipo-Werner extendido para ver cómo su mezcla y entrelazamiento afecta las ganancias Bayesianas de Nash del jugador. En relación a sus correlaciones, se demuestra que el entrelazamiento es necesario para superar las ganancias clásicas, pero se debe considerar que no todos los estados entrelazados son útiles debido a la presencia de mezcla. Se encontraron valores de umbral para el parámetro de mezcla y el mínimo de entrelazamiento.

6.2 Introducción

El estudio de los juegos ha inspirado el desarrollo de teorías matemáticas y modelos. Uno de éstos es la **Teoría de Juegos**, desarrollada por John Von Neumann y Oskar Morgenstern [47]. Su objetivo no es el análisis del azar o la aleatoriedad, sino el comportamiento estratégico de los jugadores, para decirnos qué estrategias racionales seguirán los jugadores y qué pueden predecir acerca de las estrategias racionales que el otro jugador decida llevar a cabo. La teoría de juegos ha alcanzado un alto nivel de sofisticación matemática y ha mostrado una gran versatilidad en la resolución de problemas de tipo social, económico y evolutivo, convirtiéndose en el lenguaje universal para la unificación de las ciencias del comportamiento.

En la teoría de juego estándar se asume que la estructura del juego es conocida por todos los agentes involucrados en éste. Estos son, las estrategias, el número de jugadores, y las preferencias de cada uno de ellos. Al mismo tiempo, todos saben que los otros jugadores conocen esta información. Sin embargo, en situaciones de toma de decisiones reales, existe una asimetría de información en algunos aspectos relevantes del juego y, como una consecuencia, los jugadores no tienen información completa sobre la estructura del juego al momento de escoger sus estrategias. Estos tipos de situaciones son descritas por lo que se conoce como *juego bayesiano* o *juegos de información incompleta* [48–50].

Desde el trabajo seminal de Meyer [5], muchos esfuerzos fueron hechos para realizar el estudio de juegos desde la perspectiva de la teoría de información cuántica y, en ese sentido, muchos juegos han sido estudiados explorando la superposición cuántica y el entrelazamiento desde un punto de vista teórico, pero también profundizando en su representación, realización experimental y posibles aplicaciones. Ver Gou et al. [51], y referencias al respecto, para un completo estudio de los juegos cuánticos y sus aplicaciones.

Con esta avalancha de papers relacionados a los juegos cuánticos, fueron introducidas nuevas formas de cooperación, de remover dilemas y de alterar equilibrios. Por ejemplo, en el trabajo de Meyer se muestra que los fenómenos cuánticos de superposición permiten a las estrategias cuánticas superar a las clásicas en la versión cuantizada del juego del cara y sello. Luego, Anand y Benjamin [52] analizaron una leve modificación al juego de Meyer en el cual las estrategias mixtas clásicas compiten en contra de las estrategias cuánticas, reduciendo el récord de victorias del jugador cuántico incluso hasta el punto en que los roles se invierten. Eisert et al. [53] estudió cómo el entrelazamiento puede afectar el resultado del juego removiendo el dilema en el bien conocido juego Dilema del prisionero, y Arfi [54] usó los juegos *Dilema del prisionero* y *La caza del ciervo* para ilustrar qué tan verdadero puede llegar a ser construido a través de una aproximación cuántica. Marinatto y Weber [55] exploraron un esquema alternativo que usa estrategias entrelazadas que llevan a una única solución para el juego de *la batalla de los sexos*, y Nawaz y Toor [56], generalizan éstos resultados usando un estado cuántico inicial puro general, mostrando que para una elección particular de este estado inicial, el clásico dilema de la Batalla de los Sexos es resuelto y una única solución del juego es obtenida. Sin embargo, en [57, 58] se muestra que si el mismo juego es cuantizado usando el esquema Eisert-Wilkens-Lewenstein, los jugadores clásicos siempre ganan. Zu et al [59] propuso y demostró experimentalmente que un juego de suma-cero es justo un equilibrio de Nash para jugadores clásicos, pero tiene la propiedad que un jugador cuántico puede siempre ganar usando una estrategia apropiada, y otros autores, en [60, 61], estudiaron realizaciones experimentales de juegos cuánticos en computadores cuánticos.

Así, con el creciente interés en el estudio de los juegos cuánticos, que no es solamente debido al

interés teórico intrínseco del entender el contenido físico de las estrategias cuánticas o para comprender la importancia de este conocimiento en la teoría de información cuántica, sino más bien para enfocarse al vertiginoso desarrollo de las tecnologías en esta área, y la creciente posibilidad para probar las estrategias de estos juegos usando directamente recursos cuánticos en laboratorios avanzados. Es muy seguro que jugar con estrategias cuánticas usando dispositivos cuánticos coordinados será una práctica común en el futuro cercano.

A pesar de toda la investigación hecha en la teoría cuántica de juegos, sólo limitadas investigaciones han sido realizadas en juegos cuánticos con estados mezcla [62, 63]. Como sabemos, cuando un estado puro es usado como un recurso cuántico, éste provee un canal cuántico ideal sin ruido. Sin embargo, en una situación realista, en lugar del estado puro, los jugadores usualmente intercambian un estado mezcla entrelazado debido a la decoherencia cuántica. En este estudio, se sigue el esquema de cuantización Eisert-Wilkens-Lewenstein y se usa un estado tipo Werner extendido para complementar los resultados obtenidos hasta ahora, en el estudio de equilibrios de Nash Bayesianos en juegos cuánticos de información incompleta [64–66]. En lugar de mirar la relación de este tipo de juego con las desigualdades de Bell, se hace un enfoque en investigar los efectos que la mezcla y el entrelazamiento tienen sobre la función de ganancia promedio de los jugadores, cuando ellos usan estrategias cuánticas puras. Se encontró el valor mínimo para la pureza del estado, para un valor fijo del entrelazamiento, requerido para tener ganancias cuánticas mejores que las clásicas. En contraste con los resultados presentados en [58] para el juego Batalla de los Sexos con información completa, los resultados muestran que los jugadores obtienen mayores ganancias tomando ventaja de la mezcla y entrelazamiento cuando el juego es uno de información incompleta.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En la sección 6.3, se presenta el formalismo básico utilizado para estudiar los juegos cuánticos de información incompleta con estados mezcla y estrategias puras cuánticas. Luego, considerando que el juego es una extensión del bien conocido juego de coordinación de dos jugadores llamado Batalla de los Sexos, en la sección 6.4 se explora cómo las propiedades del estado usado perfila las soluciones del juego. Finalmente, en la sección 6.5 se discuten los resultados.

6.3 Formalismo

Un juego Bayesiano es uno en el cual por lo menos un jugador no está completamente informado sobre las preferencias (o alguna otra característica) de los otros jugadores que son relevantes para su toma de decisiones. Existen diferentes definiciones para los juegos Bayesianos [67]. Todas éstas son equivalentes, pero aparecen en diferentes formas para entender la estructura interna de esta

familia de juegos.

Harsanyi [48–50] formuló un modelo adecuado para estudiar los juegos Bayesianos en los cuales los elementos desconocidos del juego son representados por el concepto de *tipo*. En este formalismo la **Naturaleza** es considerada como otro jugador, el cual, de acuerdo a una distribución de probabilidades a través de cada jugador, escoge arbitrariamente para cada jugador un tipo. El tipo de un jugador determina su función de ganancia, y la probabilidad asociada con un tipo, es la probabilidad que el jugador para el que fue especificado, sea ese tipo.

El conjunto de posibles tipos para cada jugador es supuesto para ser un objeto de común conocimiento, como la distribuciones de probabilidades usadas para seleccionar los tipos de cada uno. Sin embargo, el principio de conocimiento local de los tipos de jugadores se supone válido cuando cada jugador sabe su propio tipo, pero no los de los otros jugadores. Además, el conjunto de estrategias de un jugador, es decir, su perfil de acciones posibles, dependen sólo de su tipo y no del tipo de los otros jugadores.

Ahora, consideremos un juego de dos jugadores, Alice y Bob. Las posibles acciones (estrategias puras) para ellos, son denotadas por las variables $A = 0, 1, 2, \dots, m$ y $B = 0, 1, 2, \dots, n$ respectivamente. Además, la falta de información es representada por los tipos $a = 0, 1, 2, \dots, j$ y $b = 0, 1, 2, \dots, k$, caracterizada a través de las distribuciones de probabilidades independientes $S(a) = (s_0, s_1, \dots, s_j)$ y $T(b) = (t_0, t_1, \dots, t_k)$ donde, por ejemplo, s_1 representa la probabilidad de Alice de ser tipo uno, y así sucesivamente. Siguiendo [64], el promedio total de las funciones de ganancia para los jugadores puede ser calculada usando

$$\Pi_{Alice} = \sum_{a,b} S(a)T(b) \sum_{A,B} M(A, B; a, b)P(A, B|a, b), \quad (6.1a)$$

$$\Pi_{Bob} = \sum_{a,b} S(a)T(b) \sum_{A,B} L(A, B; a, b)P(A, B|a, b), \quad (6.1b)$$

Donde $M(A, B; a, b)$ y $L(A, B; a, b)$ son las utilidades para Alice y Bob, respectivamente, determinando sus ganancias para cualquier posible combinación de tipos y acciones. Usualmente, estas funciones son representadas por matrices con $(m + 1) \times (j + 1)$ -filas y $(n + 1) \times (k + 1)$ -columnas. La fracción de juegos en el cual Alice usa estrategias puras A siendo tipo a , y Bob usa estrategias puras B cuando su tipo es b , es dada por una distribución de probabilidad conjunta $P(A, B|a, b)$ que satisface, para cualquier tipo de jugador dado a y b , la relación

$$\sum_{A,B} P(A, B|a, b) = 1. \quad (6.2)$$

En la teoría de juegos clásica los jugadores pueden escoger sus perfiles de estrategias basados solamente en recursos clásicos (locales). Entonces, la probabilidad conjunta es dada por el producto de las probabilidades individuales, es decir,

$$P(A, B|a, b) = P(A|a)P(B|b), \quad (6.3)$$

donde no hay correlaciones para el uso de ellos porque sus estrategias son independientes, o por la expresión

$$P(A, B|a, b) = \sum_{\lambda} \rho(\lambda)P(A|a, \lambda)P(B|b, \lambda), \quad (6.4)$$

cuando algún tipo-independiente de asesoría es dada a ellos, digamos, por una tercera parte. Aquí, la variable clásica λ representa la asesoría (consejo u orientación), con un previo $\rho(\lambda)$, y donde correlaciones clásicas pueden estar presentes.

Por otro lado, si los jugadores pudieran tener recursos cuánticos (no locales) en su disposición, las probabilidades conjuntas pueden ser en general correlacionadas de tal forma que distribuciones conjuntas no clásicas pueden ser asociadas con éstos. En tal cuadro cuántico, los recursos son obtenidos de los estados que se comparten por las partes, también las distribuciones de probabilidades clásicas deberían ser reemplazadas por matrices densidad apropiadas. Luego, la distribución de probabilidad conjunta es calculada como

$$P(A, B|a, b) = \langle A, B | \rho_f | A, B \rangle, \quad (6.5)$$

donde el conjunto de estados $\{|A, B\rangle\}$ es una base ortonormal en el espacio de Hilbert $(m \otimes n)$ -dimensional asociado a las acciones individuales de los jugadores, y $\rho_f = (U_a \otimes V_b) \rho_i (U_a \otimes V_b)^\dagger$ es el estado cuántico del juego, luego que Alice y Bob aplicaron para el estado inicial del juego ρ_i , las transformaciones unitarias U_a y V_b respectivamente. Note que la dependencia de U en a (o V en b) es porque dependiendo del tipo de Alice (o Bob), es la estrategia que ella (o él) aplica.

La solución del juego es dada por el equilibrio de Nash Bayesiano. En términos simples, si usamos α_a y β_b para parametrizar cada transformación unitaria del jugador en relación a su tipo y dependencia, es decir, $U_a = U(\alpha_a)$ y $V_b = V(\beta_b)$ respectivamente, luego la solución del juego corresponde al perfil de estrategias $(\alpha^*, \beta^*) = ((\alpha_0^*, \dots, \alpha_j^*), (\beta_0^*, \dots, \beta_k^*))$ que maximizan las funciones promedio

de ganancias (6.1), las que se obtienen resolviendo el siguiente conjunto de $(j + k)$ -ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_a} \Pi_{Alice}(\alpha, \beta) |_{(\alpha^*, \beta^*)} = 0, \quad (6.6a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_b} \Pi_{Bob}(\alpha, \beta) |_{(\alpha^*, \beta^*)} = 0. \quad (6.6b)$$

Vemos que resolver el sistema de ecuaciones de arriba es equivalente a encontrar los máximos locales de las funciones de ganancia [64].

6.4 Equilibrio de Nash Bayesiano para un grado de entrelazamiento y pureza

Aquí analizaremos una versión modificada del juego de la Batalla de los Sexos, donde ambos jugadores tienen dos tipos, es decir, $a = 0, 1$ para Alice y $b = 0, 1$ para Bob, y dos estrategias puras, $A = 0, 1$ y $B = 0, 1$, para un par fijo de tipos (a, b) . Por simplicidad asumimos un igual peso de mezcla de los dos tipos, caracterizados por las distribuciones de probabilidad $S(a) = T(b) = (1/2, 1/2)$ lo que significa que Alice juega con la misma probabilidad en relación a sus posibles tipos. Lo mismo ocurre para Bob.

Consideremos para este juego las siguientes matrices de ganancia

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

donde los bloques 2×2 representan matrices de ganancia para los tipos de jugadores fijos, $(a, b) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ desde la parte de arriba-izquierda hasta la derecha-abajo. Entonces, los elementos matriciales $M(A, B; a, b)$ y $L(A, B; a, b)$ representan la utilidad de Alice y Bob para un perfil de estrategia dada (A, B) cuando sus tipos son (a, b) . Por ejemplo, el elemento matricial $M(1, 1; 0, 0) = 1$ representa cuánto gana Alice cuando juega su estrategia $A = 1$ siendo tipo $a = 0$ dado que Bob juega la estrategia $B = 1$ siendo tipo $b = 0$, y $L(1, 1; 0, 0) = 3$ es la utilidad de Bob cuando juega la estrategia $B = 1$ siendo tipo $b = 0$ dado que Alice juega la estrategia $A = 1$ siendo tipo $a = 0$.

Para cada estrategia pura de Alice y Bob, asociada a un par fijo de tipos (a, b) , es asignado un estado puro $|A\rangle$ y $|B\rangle$ respectivamente. Entonces, el estado del juego es descrito por un vector en un espacio de Hilbert de dos bits cuánticos formado por el producto tensorial que es expandido por la base de juegos clásica $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ y $|11\rangle$. Ahora suponemos que, en vez de un estado puro separable $|AB\rangle$, Alice y Bob comparten como su recurso cuántico habilitado los dos qubits en un estado cuántico mixto extendido tipo-Werner [68]

$$\rho(w, \gamma, \phi) = \left(\frac{1-w}{4} \right) \mathbf{1} + w |\Phi_{\gamma\phi}\rangle\langle\Phi_{\gamma\phi}|, \quad (6.8)$$

el cual depende de tres parámetros reales $w \in [0, 1]$, $\gamma \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, \pi]$ y podría representar una posible incerteza sobre el estado puro inicial que ellos usarán para jugar. En la expresión anterior, w es la pureza del estado, $\mathbf{1}$ es la matriz identidad 4×4 y $|\Phi_{\gamma\phi}\rangle = \cos \frac{\gamma}{2} |00\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\gamma}{2} |11\rangle$ es un estado puro tipo-Bell. Estados mezcla tipo-Werner extendidos aparecen naturalmente en una amplia variedad de situaciones físicas que involucran procesos de decoherencia, lo que se reduce al estado mezcla tipo-Werner estándar [69] cuando $\gamma = \pi/2$, y para un estado puro tipo-Bell cuando $w = 1$. Luego, los estados (6.8) son más generales que los estados tipo-Werner estándar ya que ellos contienen la posibilidad de que su parte pura no sea maximalmente entrelazada. En ese sentido, por tratar con estos tipos de estados mezcla, estamos habilitados para estudiar el efecto de ambos, mezcla y grados de entrelazamiento de la parte pura, en las funciones de ganancias promedio de los jugadores.

Sabemos que Alice puede jugar en uno de los dos tipos, entonces ella tiene dos movimientos cuánticos diferentes. Cada uno representa sus estrategias puras habilitadas, dependiendo de su tipo. Digamos, por ejemplo, que la transformación unitaria es U_0 si ella juega siendo tipo $a = 0$ y U_1 si es tipo $a = 1$. Para Bob ocurre lo mismo, pero con V_0 y V_1 . Estos movimientos estratégicos operan localmente en los qubits de Alice y Bob respectivamente, y son escogidos desde una estrategia espacial que puede ser identificada con un subconjunto del grupo unitario especial de matrices 2×2 . Usamos la siguiente representación uniparamétrica para la tipo-dependencia de las acciones locales de los jugadores

$$U(\alpha_a) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha_a}{2} & -\sin \frac{\alpha_a}{2} \\ \sin \frac{\alpha_a}{2} & \cos \frac{\alpha_a}{2} \end{pmatrix}, \quad V(\beta_b) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta_b}{2} & -\sin \frac{\beta_b}{2} \\ \sin \frac{\beta_b}{2} & \cos \frac{\beta_b}{2} \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

con los parámetros α_a y β_b , con $a = 0, 1$ y $b = 0, 1$, representando los perfiles de las estrategias $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$ y $\beta = (\beta_0, \beta_1)$ para Alice y Bob respectivamente. Luego, el objetivo de Alice es

encontrar los parámetros que fijan sus estrategias puras cuánticas para así maximizar su ganancia promedio (6.1), i.e., α_0 si ella es de tipo $a = 0$ ó α_1 si ella es de tipo $a = 1$. Lo mismo aplica para Bob.

Reemplazando las ecuaciones (6.7), (6.8) y (6.9) en las ecuaciones (6.1), es posible mostrar que ambas funciones de ganancia promedio son idénticas, y pueden ser escritas como sigue

$$\begin{aligned} \Pi(\alpha, \beta) = & \frac{w}{4}[(\sin \beta_0 - \sin \beta_1) \sin \alpha_0 - (\sin \beta_0 + \sin \beta_1) \sin \alpha_1] \sin \gamma \cos \phi \\ & + \frac{w}{4}[(\cos \beta_0 - \cos \beta_1) \cos \alpha_0 - (\cos \beta_0 + \cos \beta_1) \cos \alpha_1] - \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

La expresión de arriba muestra que la función promediada de ganancia de Alice depende tanto de la estrategia de ella como de la de Bob también. Lo mismo ocurre en el caso de Bob.

Dependiendo del grado de mezcla y, en la existencia de entrelazamiento, existirán diferentes equilibrios de Nash Bayesianos. Luego, reemplazando (6.10) en la ecuación (6.6), y resolviendo el conjunto de ecuaciones, encontramos que la solución óptima para Alice y Bob es el perfil de estrategias $(\alpha^*, \beta^*) = ((\alpha_0^*, \alpha_1^*), (\beta_0^*, \beta_1^*))$ con

$$\alpha_0^* = \arctan(\sin \gamma \cos \phi), \quad \alpha_1^* = -\alpha_0^*, \quad \beta_0^* = \frac{\pi}{2}, \quad \beta_1^* = \pi. \quad (6.11)$$

Así, usando esta solución, encontramos desde la ecuación (6.10) que la ganancia óptima promedio depende de los parámetros de estado w , γ y ϕ , y es dada por

$$\Pi^*(w, \gamma, \phi) = \frac{1}{2}(w\sqrt{1 + \sin^2 \gamma \cos^2 \phi} - 1). \quad (6.12)$$

Ahora, analizamos la solución para diferentes valores de mezclas y entrelazamiento. En un extremo, Alice y Bob comparten estados mezcla clásicos $\rho(w, 0, \phi)$ o $\rho(w, \pi, \phi)$. En ese caso, el estado es mezclado pero separable, *id est*, el entrelazamiento es cero y las probabilidades (6.5) recuperan su separabilidad. De las ecuaciones (6.11) y (6.12) vemos que la ganancia óptima promedio para Alice y Bob, en este caso se reduce a

$$\Pi_{cl-mixed}^*(w) = \frac{1}{2}(w - 1), \quad (6.13)$$

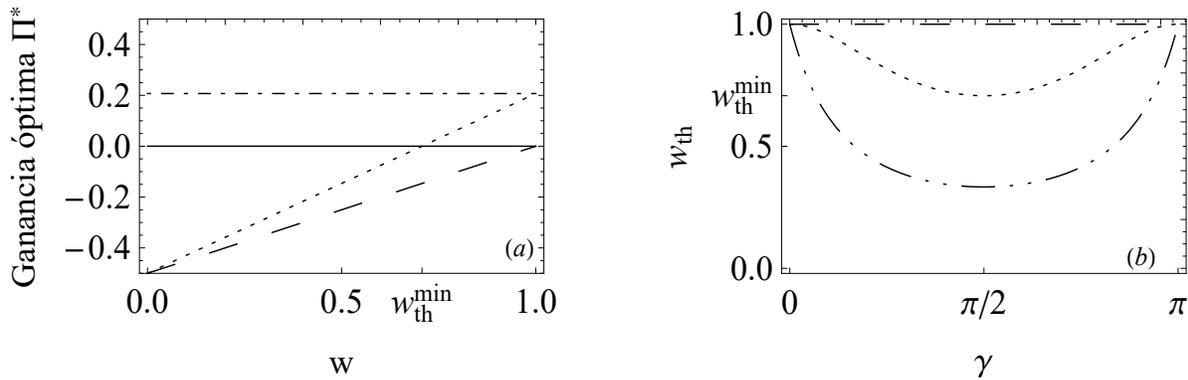


Figura 6.1: (a) Ganancia óptima promedio Π^* como función de w para: estados mezcla clásicos (línea discontinua), estado clásico puro separable (línea sólida), estado de Werner (línea punteada), y estado puro de Bell (línea punteada discontinua). (b) Valor umbral w_{th} como una función de γ para: $\phi = 0$ (línea punteada), $\phi = \pi/2$ (línea discontinua); y valor mínimo de entrelazamiento w_{min} como una función de γ (línea discontinua punteada-punteada). Fuente: Elaboración propia.

con perfil de estrategia $(\alpha^*, \beta^*) = ((0, 0), (\frac{\pi}{2}, \pi))$. En 6.1(a) (línea discontinua) graficamos esta expresión como una función de w . De la expresión (6.13), es posible ver que la máxima ganancia es $\Pi_{cl-sep}^* = 0$, y es conseguido por uno de los estados puros clásicos separables $\rho(1, \pi, \phi)$, $\rho(1, 0, \phi)$, id est, cuando $w = 1$. Esas soluciones corresponden a la solución de la versión clásica del juego (línea sólida en 6.1(a)). Ver que para otros valores de mezcla la ganancia (6.13) es siempre negativa, correspondiendo a la mínima óptima función de ganancia promedio cuando se usan estados mezcla. Así, Alice y Bob deberían jugar clásicamente a pesar de usar un estado clásico mezcla. En el otro extremo, si los jugadores comparten uno de los estados de Werner estándar $\rho(w, \pi/2, 0)$, $\rho(w, \pi/2, \pi)$, el equilibrio de Nash Bayesiano es dado por el perfil $(\alpha^*, \beta^*) = ((\pm\frac{\pi}{4}, \mp\frac{\pi}{4}), (\frac{\pi}{2}, \pi))$ con una ganancia óptima promedio dada por la expresión

$$\Pi_{werner}^*(w) = \frac{1}{2}(w\sqrt{2} - 1), \quad (6.14)$$

para un determinado valor de w , le corresponde el máximo valor de la ganancia óptima promedio usando estados mezcla (línea punteada en 6.1(a)). Es fácil de ver que en ese caso la máxima ganancia es obtenida para estados de Bell maximalmente entrelazados $|\Phi^\pm\rangle$, siendo $\Pi_{bell}^* \approx 0.207$ (línea punto-discontinua en la figura 6.1(a)) y, como ocurre también en (6.13), su mínimo es $\Pi_{fully-mixed}^* = -1/2$ que corresponde al estado completamente mezclado $\rho(0, \pi/2, \pi) = \mathbf{1}$.

Es interesante notar que hay un umbral de valores para la pureza del estado tipo-Werner extendido para el cual la función de ganancias general es mayor que la clásica. De hecho, de la ecuación (6.12) tenemos que ese límite es dado por

$$w_{th}(\gamma, \phi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 \gamma \cos^2 \phi}}. \quad (6.15)$$

Así, para tomar ventaja de la mezcla cuántica, w debería ser más grande que w_{th} para algunos valores de parámetros dados γ and ϕ . El umbral mínimo es $w_{th}^{min} = 1/\sqrt{2}$ y corresponde al estado estándar tipo-Werner $\rho(w, \pi/2, 0)$ y $\rho(w, \pi/2, \pi)$. Cualquier otro estado mezcla tiene un mayor w_{th} , entonces su función de ganancia óptima promedio será más baja que Π_{werner}^* . La figura 6.1(b) muestra w_{th} como una función de γ para $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$. Para cualquier otro valor de ϕ , w_{th} está entre esas dos curvas. Notar que el único estado cuántico mezcla para el cual no hay un w que permita a los jugadores tomar ventaja de sus recursos cuánticos, es el estado $\rho(w, \gamma, \pi/2)$, i.e., $\Pi^*(w, \gamma, \pi/2)$ que es negativo para todo $w \in [0, 1[$ y cero para $w = 1$.

Finalmente, usando la concurrencia [3] como una medida del entrelazamiento, podemos dirigir la pregunta en relación a la cantidad de entrelazamiento necesario para superar al juego clásico. Puede ser mostrado que el entrelazamiento del estado (6.8) es dado por $C(w, \gamma) = \frac{1}{2} \max(0, w(1 + 2\sqrt{\sin^2 \gamma}) - 1)$. Así, Alice y Bob comparten un estado entrelazado si la pureza satisface la condición $w > w_{min}$ donde

$$w_{min} = \frac{1}{1 + 2\sqrt{\sin^2 \gamma}}. \quad (6.16)$$

La figura 6.1(b) muestra ese límite (línea punteada), se debe notar que $w_{th} > w_{min}$ para cualquier valor de γ y ϕ . Eso significa que Alice y Bob deben siempre usar un estado entrelazado (mezclado o puro como requisito) para obtener una ganancia mayor que las obtenidas clásicamente. Vemos, sin embargo, que estados entrelazados mezclas más allá de la región entre w_{th} y w_{min} no son adecuados para tales propósitos.

6.5 Discusión y análisis

Se han estudiado los juegos cuánticos de información incompleta, enfocados en el análisis de los equilibrios de Nash Bayesianos para la versión de información incompleta en el juego de la Batalla de los Sexos, cuando los jugadores intercambian un estado cuántico mezcla extendido tipo Werner. Se encontró que el equilibrio de Nash Bayesiano (α^*, β^*) depende de los parámetros de estado,

siendo pareto-óptimo para el estado estándar tipo Werner. Para estados separables recobramos las soluciones clásicas.

Cuando se analiza cómo las ganancias de los jugadores dependen de la mezcla del estado intercambiado, se encuentra un valor umbral que indica la mínima pureza que el estado debería tener para superar los resultados clásicos. Este límite depende de la separabilidad de los parámetros de la parte pura del estado mezcla extendido tipo Werner, y es mínimo para un estado estándar tipo Werner. Por otro lado, cuando se considera el problema de la dependencia de entrelazamiento de las funciones de ganancia, se muestra que la única forma de mejorar las ganancias clásicas es a través del uso de estados entrelazados. Sin embargo, debido a la presencia de mezcla, se ha visto que no todos los estados entrelazados son útiles para superar las ganancias clásicas. Incluso, cuando es comparado con el bien conocido resultado del juego la Batalla de los Sexos con información incompleta, i.e., las ganancias clásicas son siempre mayores que las cuánticas, por ende, la mezcla de un estado Werner entrelazado revierte los roles.

Luego, considerando mezcla y entrelazamiento conjuntamente, se ha encontrado que el mejor estado mezcla entrelazado que puede ser compartido con Alice y Bob, es uno de los estados tipo Werner estándar $\rho(w, \pi/2, 0)$, $\rho(w, \pi/2, \pi)$, con un grado de mezcla $1/\sqrt{2} < w \leq 1$, donde para otros estados de tipo Werner extendidos las funciones de ganancia son siempre menores, pero mejores que las clásicas cuando su parámetro de mezcla es mayor que su propio valor umbral.

Capítulo 7

Conclusión General

En base al desarrollo de ambas investigaciones podemos evidenciar que desde la teoría cuántica de la información surge un nuevo punto de vista que es la teoría cuántica de juegos, que posee como elemento principal la utilización de recursos cuánticos como medio de comunicación que permite la implementación de estrategias que se desenvuelven en un determinado conflicto.

Se observa en ambas investigaciones el uso beneficioso del entrelazamiento de estados por un lado en su fidelidad de la teleportación y por otro lado el incremento de las ganancias de los jugadores. El esquema posee similitudes en el número de participantes (Alice y Bob), el recurso cuántico tanto del canal como de la medida para establecer la comunicación y evaluación de los estados, donde específicamente el estado tipo Werner extendido coincide con el estado tipo X con ruido, excepto en los valores que definen los elementos del subespacio \mathcal{H}_{0110} , donde $\rho_{23} = \rho_{32} = 0$. Agregar que con este trabajo, hemos determinado en el esquema de teleportación, las condiciones bajo las cuales un canal en estado X resulta ser más beneficioso que un canal puro parcialmente entrelazado. Adicionalmente, hemos considerado bases de medición que no son de Bell para estudiar su rol en este problema de calcular la fidelidad promedio del proceso de teleportación de un qubit de estado desconocido. Caracterizamos la eficiencia de cada canal por la fidelidad promedio del correspondiente set de estados de salida. Encontramos las condiciones que se satisfacen por el canal con ruido X para mejorar la fidelidad promedio de la teleportación realizada por el canal puro.

Finalmente, tanto el estado X como el Werner extendido, que componen los sistemas, introducen el entrelazamiento que proporciona la naturaleza cuántica, la decoherencia y los mecanismos de disipación, siendo éstos últimos los responsables de introducir la clasicidad.

Referencias

- [1] A.TH.A.M. de Waele and R. de Bruyn Ouboter, *Quantum-interference phenomena in point contacts between two superconductors*, Physica **41**, 225-254 (1969).
- [2] Ensher J.R., Matthews M.R., Wieman C.E. and Cornell E.A., *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*, Science **269**, 198-201 (1995).
- [3] W.K. Wootters, *Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits*, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
- [4] N. Gisin, *Nonlocality Criteria for quantum teleportation*, Phys. Lett. A **210**, 157 (1996).
- [5] D. A. Meyer, *Quantum Strategies*, Phys. Rev. Lett. **82**, 1052 (1999).
- [6] R. F. Werner, *Optimal Cloning of Pure States*, Phys. Rev. A **58**, 1827 (1998).
- [7] N. Gisin and B. Huttner, *Quantum Cloning, Eavesdropping and Bells inequality*, Phys. Lett. A **228**, 13 (1997).
- [8] D. Bruss, A. Ekert, S. F. Huelga J.-W. Pan and A. Zeilinger , *Quantum computing with controlled-NOT and few qubits*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **355**, 2259-2266 (1997).
- [9] Asher Peres, *Separability Criterion for Density Matrices*, Physical Rev. Lett. **77**, 14131415 (1996).
- [10] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, *Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions*, Phys. Lett. A **223**, 1-135 (1996).
- [11] D. Bohm and Y. Aharonov, *Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky*, Phys. Rev. **108**, 1070 (1957).

- [12] Dik Bouwmeester, Jian-Wei Pan, Matthew Daniell, Harald Weinfurter and Anton Zeilinger, *Observation of three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement*, Phys.Rev.Lett. **82**, 1345-1349 (1999).
- [13] N. Gisin, *Nonlocality criteria for quantum teleportation*, Phys. Lett. A **210**, 157 (1996).
- [14] B. Bellomo, R. Lo Franco, S. Maniscalco, and G. Compagno *Two-qubit entanglement dynamics for two different non-Markovian environments*, Phys. Scr. **T140**, 014014 (2010).
- [15] S. Popescu, *Bell's inequalities versus teleportation: What is nonlocality?*, Phys. Rev. Lett. **72**, 797 (1994).
- [16] M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki, *General teleportation channel, singlet fraction, and quasidistillation*, Phys. Rev. A **60**, 1888 (2013).
- [17] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres and W. K. Wootters, *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895-1899 (1993).
- [18] C. H. Bennett and S. J. Wiesner, *Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states*, Phys. Rev. Lett. **69**, 2881-2884 (1992).
- [19] E. Schrodinger, *Discussion of probability relations between separated systems*, Cambridge Phil. Soc. **31**, 555 (1935).
- [20] C H Bennett, H Bernstein, S Popescu and B Shumacher, *Concentrating partial entanglement by local operations*, Physical Rev. A **53**, 2046 (1996).
- [21] C. H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J. Smolin and W. K. Wootters, *Purification of Noisy Entanglement and Faithful Teleportation via Noisy Channels*, Physical Rev. Lett. **76**, 722 (1996).
- [22] Charles H. Bennett, David P. DiVincenzo, John A. Smolin and William K. Wootters, *Mixed State Entanglement and Quantum Error Correction*, Physical Rev. A **54**, 3824-3851 (1996).
- [23] David P. DiVincenzo, *Quantum Computation*, Science **270**, 255-261 (1995).
- [24] C. A. Fuchs, N. Gisin, R. B. Griffiths, C-S. Niu, and A. Peres, *Optimal eavesdropping in quantum cryptography. I. Information bound and optimal strategy*, Physical Rev. A **56**, 1163 (1997).

- [25] S. Hill and W. K. Wootters, *Entanglement of a Pair of Quantum Bits*, Physical Rev. Lett. **78**, 50225025 (1997).
- [26] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, (1985).
- [27] Esta equivalencia fue señalada por V. Coffman and J. Kundu.
- [28] J. Wang, H. Batelaan, J. Podany, A. F. Starace , *Optimal information extraction in probabilistic teleportation*, J. Phys. **B 39**, 4343 (2006).
- [29] J. S. Pratt, *Optimal information extraction in probabilistic teleportation*, Phys. Rev. Lett. **93**, 237205 (2004).
- [30] S. Bose, I. Fuentes-Guridi, P. L. Knight and V. Vedral , *Optimal information extraction in probabilistic teleportation*, Phys. Rev. Lett. **87**, 050401 (2001).
- [31] R. Werner, *Classical, quantum and total correlations*, Phys. Rev. Lett. A **40**, 4277 (1989).
- [32] T. Yu and J.H. Eberly, *Optimal information extraction in probabilistic teleportation*, Phys. Rev. Lett. **93**, 140404 (2004).
- [33] Wojciech H. Zurek and Harold Ollivier, *Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations*, Phys. Rev. Lett. **88**, 017901 (2001).
- [34] L. Henderson and V. Vedral, *Classical, quantum and total correlations*, J. Phys. A **34**, 6899 (2001).
- [35] V. Vedral, *Classical Correlations and Entanglement in Quantum Measurements*, Phys. Rev. Lett. **90**, 050401 (2003).
- [36] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, (2000).
- [37] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of information Theory*, Wiley-Interscience, New York, (2006).
- [38] S. Hamieh, R. Kobes and H. Zaraket , *Positive-operator-valued measure optimization of classical correlations*, Phys. Rev. A **70**, 052325 (2004).
- [39] F. Fanchini, T. Werlang, C. A. Brasil, L. G. E. Arruda and A. O. Caldeira, *Non-Markovian Dynamics of Quantum Discord*, Phys. Rev A **81**, 052107 (2010).

- [40] L. Roa, A. Delgado and I. Fuentes-Guridi, *Optimal conclusive teleportation of quantum states*, Phys. Rev A **68**, 022310 (2003).
- [41] K. Banaszek, *Optimal quantum teleportation with an arbitrary pure state*, Phys. Rev A **62**, 024301 (2000).
- [42] P. Agrawal and A. K. Pati, *Probabilistic quantum teleportation*, Phys. Lett. A **305**, 12 (2002).
- [43] L. Roa and C. Groiseau, *Probabilistic teleportation without loss of information*, Phys. Rev. A **91**, 012344 (2015).
- [44] L. Roa , Robinson Gómez, Ariana Muñoz and Gautam Rai *Entanglement thresholds for displaying the quantum nature of teleportation*, Elsevier **371**, 228-238 (2016).
- [45] W.-L. Li, C.-F. Li and G.-C. Guo, *Quantum Computation*, Phys. Rev. A **61**, 034301 (2000).
- [46] L. Roa, A. Muñoz, and G.Gruning , *Entanglement swapping for X states demands threshold values*, Phys. Rev. A **89**, 064301 (2014).
- [47] J. von Neumann and O. Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press, Princeton, NJ (1947).
- [48] J. C. Harsanyi, *Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players, Part I. The Basic Model*, Manage. Sci. **14**, 159 (1967).
- [49] J. C. Harsanyi, *Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players, Part II. Bayesian Equilibrium Points*, Manage. Sci. **14**, 320 (1968).
- [50] J. C. Harsanyi, *Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players, Part III. The Basic Probability Distribution of the Game*, Manage. Sci. **14**, 486 (1968).
- [51] H. Guo, J. Zhang and G.J. Koehler, *A survey of quantum games*, Decision Support Systems **46**, 318 (2008).
- [52] N. Anand and C. Benjamin, *Do quantum strategies always win?*, Quantum Inf. Process. **14**, 4027 (2015).
- [53] J. Eisert, M. Wilkens and M. Lewenstein, *Quantum games and quantum strategies*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3077 (1999).
- [54] B. Arfi, *Resolving the trust predicament: A quantum game-theoretic approach*, Theory and Decision **59**, 127 (2005).

- [55] L. Marinatto and T. Weber, *A quantum approach to static games of complete information*, Phys. Lett. A **272**, 291 (2000).
- [56] A. Nawaz and A.H. Toor, *Dilemma and quantum battle of sexes*, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 4437 (2004).
- [57] J. Du, X. Xu, H. Li, M. Shi, X. Zhou and R. Han, *Nash Equilibrium in the Quantum Battle of Sexes Game*, arXiv:quant-ph/0010050v3 (2000).
- [58] A. Nawaz and A.H. Toor, *Generalized quantization scheme for two-person non-zero sum games*, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 11457 (2004).
- [59] C. Zu, Y-X. Wang, X-Y. Chang, Z-H. Wei, S-Y. Zhang and L-M. Duan, *Experimental demonstration of quantum gain in a zero-sum game*, New J. Phys. **14**, 033002 (2012).
- [60] J. Du, H. Li, X. Xu, M. Shi, J. Wu, X. Zhou, and R. Han, *Experimental Realization of Quantum Games on a Quantum Computer*, Phys. Rev. Lett. **88**, 137902 (2002).
- [61] R. Prevedel, A. Stefanov, P. Walther, and A. Zeilinger, *Experimental realization of a quantum game on a one-way quantum computer*, New J. Phys. **9**, 205 (2007).
- [62] A. Nawaz and A.H. Toor, *Quantum Games and Quantum Discord*, arXiv:1012.1428v1 [quant-ph] (2010).
- [63] A. Nawaz, *Werner-like States and Strategic Form of Quantum Games*, arXiv:1307.5508v1 [quant-ph] (2013).
- [64] T. Cheon and A. Iqbal, *Bayesian Nash Equilibria and Bell Inequalities*, J. Phys. Sc. Jpn. **77**, 024801 (2008).
- [65] A. Iqbal, J.M. Chappell, Q. Li, C.E.M. Pearce and D. Abbott, *A probabilistic approach to quantum Bayesian games of incomplete information*, Quantum Inf. Process. **13**, 2783 (2014).
- [66] N. Brunner and N. Linden, *Connection between Bell nonlocality and Bayesian game theory*, Nat. Commun. **4**, 2057 (2013).
- [67] Y. Shoham and K. Leyton-brown, *Multiagent Systems: Algorithmic, Game Theoretic, and Logical Foundations*, Cambridge University Press (2008).

- [68] C.H. Shan, J.B. Liu, T. Chen, W.W. Cheng, T.K. Liu, Y.X. Huang and H. Li, *Entanglement for Two-Qubit Extended Werner-Like States: Effect of Non-Markovian Environments*, Commun. Theor. Phys. **54**, 427 (2010).
- [69] R.F Werner, *Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model*, Phys. Rev. A **40**, 4277 (1989).

