



Universidad de Concepción
Dirección de Postgrado
Facultad de Ingeniería - Programa de Magister en Ciencias de la Ingeniería con mención en
Ingeniería Mecánica

Estrategia Multiescala para Simulación de Compuestos Laminados, Utilizando Elementos Finitos Cuadráticos

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería con
mención en Ingeniería Mecánica

JORGE ANDRÉS FERNÁNDEZ GONZÁLEZ
CONCEPCIÓN-CHILE
2017

Profesor Guía: Dr. Ing. Paulo Flores Vega
Dpto. de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería
Universidad de Concepción
Profesor Guía: Dra. Ing. Karin Saavedra Redlich
Departamento de Tecnologías Industriales, Facultad de Ingeniería
Universidad de Talca

Agradecimientos

Primero agradecer a mi profesora guía, Karin Saavedra, por la oportunidad, orientación y apoyo en todo momento.

A mis profesores del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Concepción, en especial al profesor Paulo Flores por el apoyo y gestión durante el desarrollo del programa.

Al Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad del Bío-Bío por el apoyo y confianza para desarrollar los estudios de postgrado. A mis profesores Juan Carlos Figueroa y Reinaldo Sánchez por su confianza y la oportunidad para desarrollarme profesionalmente.

A mis Padres, pues sin su apoyo incondicional nada de esto sería posible.

Finalmente, a mis pilares, Daniela y Amanda que día a día me llenan de amor y energía.



Resumen

Este trabajo se desarrolló en el marco del proyecto FONDECYT de iniciación N° 11130623, dirigido por la Dra Karin Saavedra, que tiene por objetivo estudiar el comportamiento de materiales compuestos mediante la utilización de una estrategia de descomposición de dominios multiescala. Dicha estrategia ha permitido simular la interacción entre delaminación y pandeo de materiales compuestos laminados [5, 42, 41], además considera las no linealidades geométricas a través de una formulación Lagrangiana, mientras que la delaminación y el contacto son introducidos por leyes de interfaz. Luego, el problema es resuelto mediante tres escalas: i) la micro-escala asociada a la discretización de cada sub-estructura, ii) la macro-escala asegurando la propagación de la parte de la solución con gran longitud de onda y iii) la supermacro-escala que resuelve el problema macroscópico.

Hasta ahora, para mejorar la eficiencia de la estrategia se ha trabajado sobre la modificación en el esquema iterativo y en la optimización de las direcciones de búsqueda utilizadas por el algoritmo de resolución LaTIn [42]. No obstante, para simular problemas con estructuras esbeltas, sensibles a pandeo y a delaminación, se requiere refinar el tamaño de la malla (versión- h) para aumentar la exactitud de la solución, logrando simular el comportamiento de las estructuras con un gran número de grados de libertad y a un alto costo computacional.

Sin embargo, estudios de los años 90' [7, 6] señalan que no solo disminuyendo el tamaño del elemento se puede reducir el error de la solución numérica. También, es posible obtener buenos resultados aumentando el grado del polinomio de las funciones bases de cada elemento, manteniendo fijo el tamaño de la malla (versión- p). Otro método corresponde a una combinación entre el refinamiento de la malla y el orden del polinomio base de cada elemento (versión- hp).

Si bien el código C++ en el que se ha implementado la estrategia [42], está habilitado para trabajar con diferentes tipos de elementos finitos 3D, son todos lineales. Por lo tanto, no es posible estudiar el efecto de las versiones p y hp , señaladas anteriormente, siendo muy difícil obtener resultados a un bajo costo computacional.

El presente trabajo tiene por objetivo implementar elementos finitos 3D de segundo orden en el código MULTI. Además, estudiar el efecto de estos elementos en la convergencia, error y tiempo de procesamiento en la simulación de placas 3D en flexión o pandeo.

La utilización de elementos cuadráticos en la discretización conduce a tiempos de cálculo menores, independiente del tipo de formulación o material utilizado. Además, disminuye el error respecto al resultado teórico. Por otro lado, particularmente con materiales ortotrópicos mejora la tasa de convergencia. Por lo tanto, esta implementación permite realizar simulaciones más complejas con menos grados de libertad y con menor costo computacional.

Tabla de Contenido

Agradecimientos	II
Resumen	III
Tabla de Contenido	V
Índice de figuras	VII
Índice de tablas	VIII
1. Introducción	1
1.1. Problemática	2
1.2. Hipótesis	2
1.3. Objetivos	3
1.3.1. Objetivo General	3
1.3.2. Objetivos Específicos	3
1.3.3. Metodología	3
2. Antecedentes Generales	4
2.1. Configuración y deformación de un sistema	4
2.2. Equilibrio del sistema	6
2.3. Ley de comportamiento	7
2.4. Principio de potencias virtuales	7
2.5. Formulación del problema discreto en grandes transformaciones	8
2.5.1. Formulación Lagrangiana Total	8
3. Estrategias de cálculo no-lineal y de descomposición de dominio	11
3.1. Método incremental Iterativo	11
3.1.1. Método de Newton	12
3.1.2. Algoritmo LaTIn	12
3.2. Métodos de descomposición de Dominio	13
4. Estrategia multiescala	17
4.1. Problemas de referencia	17
4.1.1. Formulación del problema subestructurado	18
4.1.2. Tipos de Interface	19
4.2. Descripción de la Estrategia	21
4.2.1. Elección de los espacios de aproximación	22
4.2.2. La separación de escalas	22
4.2.3. Algoritmo iterativo	23

5. Implementación	25
5.1. Elementos finitos 3D	27
5.1.1. Prisma (Wedge)	28
5.1.2. Tetraedro	30
5.1.3. Hexaedro	32
5.2. Implementación en la estrategia multiescala	33
6. Resultados	36
6.1. Flexión	36
6.1.1. Isotrópico	37
6.1.2. Ortotrópico	41
6.2. Pandeo	46
6.3. Delaminación	50
Conclusiones	54
Bibliografía	56
A. Puntos y pesos de integración	60
A.0.1. Prisma	60
A.0.2. Tetraedro	62
A.0.3. Hexaedro	63



Índice de figuras

1.1. Pandeo viga esbelta	2
2.1. Problema de referencia	4
2.2. Configuración y movimiento de un cuerpo continuo	5
3.1. Algoritmo iterativo LaTIn Fuente: [42]	13
3.2. Principio de Descomposición de Dominios	13
4.1. Problema de referencia: configuración inicial y actual. Fuente: [42]	18
4.2. Descomposición en subestructuras e interfaces	18
4.3. Láminas e interfaz del mesomodelo. Fuente: [5]	21
4.4. Descomposición del problema y las tres escalas de resolución utilizadas. Fuente: [5]	21
4.5. Modificación en la discretización de las interfaces y estructuras. Fuente: [37]	23
5.1. Elemento Wedge 15	28
5.2. Elemento Tetraedro 10	31
5.3. Elemento Hexaedro 20	33
5.4. Diagrama de implementación en el código MULTI	35
5.5. Generación de interfaces 2D	35
6.1. Problema de flexión	36
6.2. DCL placa isotrópica	37
6.3. Subestructuración problema flexión, dónde N_i es el número de sst en la dirección i	38
6.4. Tipos de discretización problema isotrópico. a) Prisma 6 con $n_z = 2$ b) Prisma 6 con $n_z = 3$ c) Prisma 6 con $n_z = 4$ y d) Prisma 15 con $n_z = 2$	38
6.5. Resultados curva elástica: desplazamiento vertical de la fibra neutra	39
6.6. Deformada en flexión	40
6.7. Error LaTIn versus iteración en problema de flexión isotrópico	41
6.8. Subestructuración problema flexión ortotrópico	42
6.9. Tipos de discretización problema ortotrópico. a.1) Prisma con $n_z = 2$ sin sub-integración a.2) Prisma con $n_z = 2$ con sub-integración b.1) Prisma con $n_z = 3$ sin sub-integración b.2) Prisma con $n_z = 3$ con sub-integración c) Prisma con $n_z = 4$ d) Prisma 15 con $n_z = 2$	42
6.10. Curva elástica problema flexión ortotrópico	43
6.11. Error LaTIn versus iteración en problema de flexión ortotrópico	44
6.12. Deformada en flexión ortotrópico. a.1) Prisma con $n_z = 2$ elementos en el espesor sin sub-integración a.2) Prisma con $n_z = 2$ elementos en el espesor con sub-integración b.1) Prisma con $n_z = 3$ elementos en el espesor sin sub-integración b.2) Prisma con $n_z = 3$ elementos en el espesor con sub-integración c) Prisma con $n_z = 4$ elementos en el espesor sin sub-integración d) Prisma 15 con $n_z = 2$ elementos en el espesor.	45
6.13. Esfuerzo vs Posición problema flexión otótropo	46

6.14. Problema de Pandeo	47
6.15. Subestructuración problema de pandeo dónde N_i es el número de sst en la dirección i	48
6.16. Tipos de discretización para el problema pandeo. a) Prisma $n_z = 4$ b) Prisma $n_z = 10$ c) Prisma 15 $n_z = 2$	48
6.17. Influencia de un elemento de segundo orden en la curva Fuerza vs Desplazamiento y tiempo de cálculo	49
6.18. Deformada problema de pandeo con Prisma 15	49
6.19. Problema de Delaminación	50
6.20. Subestructuración de problema DCB, dónde N_i es el número de sst en la dirección i	51
6.21. Tipos de discretización para el problema DCB. a) Prisma $n_z = 6$ b) Prisma 15 $n_z = 3$ c) Prisma 15 $n_z = 5$	51
6.22. Influencia de los elementos cuadráticos en la simulación de DCB	52
6.23. Influencia de los elementos cuadráticos en la convergencia de un problema de DCB	53
6.24. Deformada del problema DCB con el frente de grieta en el incremento 11	53



Índice de tablas

5.1. Puntos y Pesos para la cuadratura Gaussina	27
5.2. Resumen de elementos	27
5.3. Coordenadas de cada nodo para un elemento Wedge 15	28
5.4. Derivadas de primer orden para el elemento Prisma 15	29
5.5. Puntos (ξ_i, η_i, ζ_i) y pesos (w_i) para la cuadratura Gaussina de un elemento Prisma (Wedge)	30
5.6. Coordenadas de cada nodo para un elemento Tetraédrico 10	30
5.7. Derivadas de primer orden para el elemento Tetraédrico 10	31
5.8. Puntos (ξ_i, η_i, ζ_i) y pesos (w_i) para la cuadratura Gaussina de un elemento Tetraédrico 10	32
5.9. Coordenadas de cada nodo para un elemento Hexaedrico 20	32
5.10. Derivadas de primer orden para el elemento Hexaédrico 20	34
5.11. Puntos (ξ_i, η_i, ζ_i) y pesos (w_i) para la cuadratura Gaussina de un elemento Hexaedrico	34
6.1. Material problema de flexión isotrópico	37
6.2. Resumen discretización problema isotrópico	38
6.3. Resultados problema flexión	40
6.4. Material problema de flexión ortotrópico	41
6.5. Resumen discretización problema ortotrópico	43
6.6. Resultados problema flexión ortotrópico	46
6.7. Material problema de pandeo	47
6.8. Detalles discretización problema de pandeo	48
6.9. Materiales usados en el problema DCB	50
6.10. Detalles discretización problema DCB	51
A.1. Puntos Integración $r = 8$	60
A.2. Puntos Integración $r = 21$	61
A.3. Puntos Integración $r = 5$	62
A.4. Puntos Integración $r = 15$	62
A.5. Puntos Integración $r = 8$	63

Capítulo 1

Introducción

Desde mediados del siglo pasado, los materiales compuestos han sido ampliamente utilizados en la industria en varias aplicaciones, demostrando ventajas respecto a materiales como el acero y aluminio debido a lo atractivo que resultan sus propiedades específicas. Asimismo, científicos e ingenieros han hecho esfuerzos para comprender su comportamiento y para modelarlos [27], sin embargo, el precio de estos materiales los lleva a ser utilizados en industrias específicas. En el intento de bajar los costos, la simulación numérica es esencial para diseñar piezas o reemplazar ensayos experimentales. Actualmente, las modelaciones computacionales se han concentrado en estructuras con comportamiento lineal, por lo tanto, aspectos como el daño y el pandeo de estructuras compuestas representan un gran desafío para la industria e investigadores.

En este ámbito, un problema crítico para predecir fallas catastróficas consiste en simular la interacción delaminación-pandeo-contacto, enfrentando dificultades como estados de esfuerzos complejos e inestabilidades, lo que deriva en problemas con fuertes no-linealidades. Luego, para su simulación mediante el método de los elementos finitos se requieren discretizaciones muy refinadas y, por tanto, un alto costo computacional para resolverlos. Dichos problemas pueden ser modelados mediante la aplicación de métodos de resolución paralela y multiescala [35, 19]. Estas estrategias han sido fuertemente aplicadas en problemas lineales, pero muy poco en problemas no lineales [13, 36, 25, 30].

Adicionalmente, investigadores han presentado una estrategia de descomposición de dominios multiescala para la simulación de la interacción entre delaminación y pandeo de materiales compuestos laminados [42, 5] y fue implementada en un código C++ (código MULTI)¹. Dicha estrategia utiliza la escala mesoscópica para describir el laminado [1], usando dos elementos constituyentes: las láminas (elementos 3D) y las interfaces (elementos 2D). La delaminación está modelada en las interfaces utilizando un comportamiento cohesivo [4], mientras que las condiciones de contacto unilateral son introducidas por una ley de interfaz que evita la interpenetración entre superficies delaminadas.

Hasta ahora, las simulaciones realizadas han logrado modelar correctamente la interacción delaminación-pandeo-contacto utilizando mallas muy refinadas y a un alto costo computacional, puesto que, el código MULTI solo tiene habilitado elementos lineales, lo cual permite converger a resultados disminuyendo el tamaño de la malla (versión- h). Sin embargo, existen otras técnicas, adicionales al refinado de mallas, con las que es posible mejorar la convergencia de los resultados, entre las que destaca el aumento en el grado del polinomio base del elemento utilizado en la discretización (versión- p) [7, 6]. Otro método corresponde a una combinación entre el refinamiento de la malla y el orden del polinomio base de cada elemento (versión- hp).

El presente trabajo busca implementar elementos finitos de segundo orden en el código MULTI, y luego, estudiar el efecto que estos tienen en la convergencia y tiempo de cálculo.

¹Desarrollado en el LMT de la Universidad de Cachan, utiliza Phyton para la definición de formulaciones, METIS para la lectura de mallas y distribución en los procesadores y MPI para la resolución en paralelo

Para lograr este objetivo primero se estudian aspectos generales relacionados con la descripción de cuerpos en grandes transformaciones de forma continua y discreta. Luego, se presenta la estrategia de cálculo utilizada para resolver problemas de gran tamaño. A continuación, se describe la implementación realizada en el código MULTI, detallando las funciones de forma y puntos de integración implementados en el código MULTI para cada elemento. Finalmente, se definen los problemas a resolver y presentan los resultados obtenidos de cada simulación.

1.1. Problemática

Actualmente, el código MULTI está habilitado para la utilización de elementos finitos 3D lineales. Siendo estos no aptos para el tratamiento de estructuras esbeltas, debido a que se necesitan mallas muy finas para obtener resultados aceptables, elevando la cantidad de grados de libertad del problema y encareciendo el cálculo.

Por ejemplo, para reproducir correctamente un problema de una viga esbelta en pandeo, utilizando elementos de tipo Prisma (Wedge) lineal, se necesitan entre 10-12 elementos lineales en el espesor para aproximar la carga crítica correctamente (ver Fig. 1.1), elevando a más de un millón de grados de libertad (GDL) el cálculo [43].

Por lo tanto, se hace necesaria la implementación de librerías para habilitar el uso de elementos 3D cuadráticos y así disminuir el número de GDL y tiempo requerido para reproducir dichos problemas.

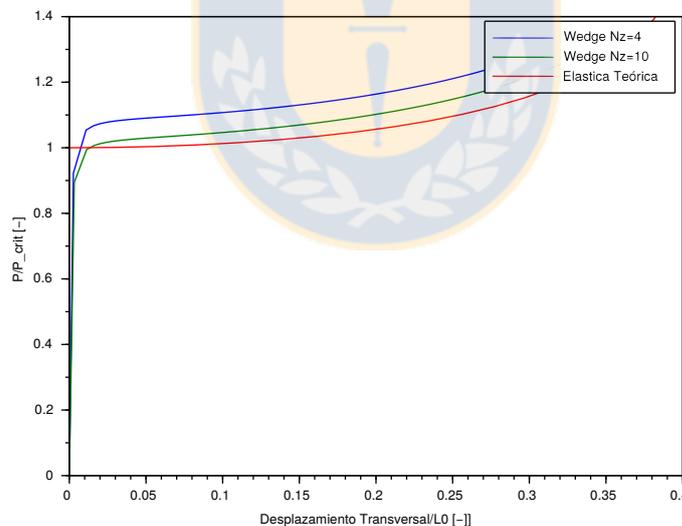


Figura 1.1: Pandeo viga esbelta

1.2. Hipótesis

La utilización de un elemento finito cuadrático permitiría simular los mismos problemas que se han resuelto hasta ahora con un menor número de grados de libertad y a un menor costo. También, permitiría simular problemas más complejos utilizando menos recursos (tiempo y memoria).

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Implementar un elemento finito (EF) cuadrático 3D en el código MULTI para la modelación de estructuras esbeltas.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Realizar simulaciones con elementos finitos 3D de segundo orden de problemas mecánicos básicos
- Comparar la influencia de los elementos 3D de segundo orden en cuanto a: tiempo de cálculo, número de iteraciones y resultado teórico

1.3.3. Metodología

Para realizar simulaciones con elementos de segundo orden de problemas mecánicos básicos se consideran las siguientes actividades:

- Estudiar la estrategia multiescala
- Estudiar el método de descomposición de dominio implementado en el código MULTI
- Estudiar los elementos disponibles en el código MULTI y comprender la implementación en el código C++
- Modificar las bibliotecas del código MULTI para realizar simulaciones con elementos 3D de segundo orden
- Definir los problemas mecánicos básicos a simular

Luego, para comparar la influencia de los elementos 3D de segundo orden en cuanto a: tiempo de cálculo, número de iteraciones y resultado teórico se proponen realizar las siguientes actividades:

- Definir las variables que se van a comparar
- Realizar la discretización de cada problema con elementos finitos 3D lineales y cuadráticos
- Estudiar y comparar los resultados obtenidos

Capítulo 2

Antecedentes Generales

A continuación, se presentan las ecuaciones que describen el comportamiento de sólidos continuos en grandes transformaciones. Principalmente se desarrolla la formulación del problema de referencia de un sólido continuo con no-linealidades del tipo geométrico. Los conceptos detallados se han desarrollado en varios trabajos de mecánica del medio continuo, por ejemplo: [28]. Por otra parte, la presentación de la modelización de la delaminación y contacto se hará en la Sec. 4.1.2.

En el contexto de los problemas no lineales con grandes transformaciones bajo cargas cuasiestáticas las leyes de comportamiento son independiente del tiempo. Por lo tanto, este no es una variable y t solo indica un parámetro de carga del problema.

Se comienza definiendo el problema de referencia distinguiendo las diferentes configuraciones del sistema. Luego, se presentan las ecuaciones de equilibrio usando el principio de potencias virtuales. Finalmente, se presenta la formulación del problema de forma discreta.

2.1. Configuración y deformación de un sistema

Sea una estructura que ocupa un volumen Ω y cuya frontera se denota como $\partial\Omega$ (ver Fig. 2.1), se considera que este cuerpo está sometido a fuerzas de cuerpo \underline{f} . Además, sobre una parte $\partial\Omega_{u_d}$ de borde $\partial\Omega$ se impone el desplazamiento \underline{u}_d y en la parte $\partial\Omega_{F_d}$ de $\partial\Omega_{u_d}$ se aplica una fuerza superficial de magnitud \underline{F}_d .

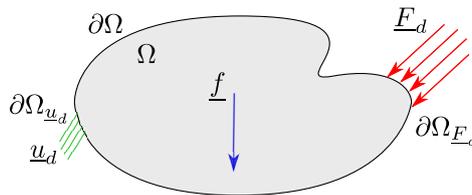


Figura 2.1: Problema de referencia

El estado de una estructura en el momento t se llama *configuración* del sistema \mathcal{S} . De la misma forma, se designa \mathcal{C} a la *configuración actual* deformada. La configuración geométrica de \mathcal{S} se describe por el conjunto de vectores \underline{x} que definen la posición de cada partícula en el instante t , a partir de un origen o de un sistema cartesiano ortogonal R_t con vectores base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$. El volumen ocupado por la estructura es Ω , de frontera $\partial\Omega$.

Se define la *configuración de referencia* como la configuración particular de \mathcal{C}_R del sistema en un instante inicial t_R , luego, se considera $t_R = 0$, así se tiene que la configuración de referencia puede ser definida como la condición inicial o no deformada. Entonces, se tiene que \mathcal{S} en t_0 ocupa en \mathcal{C}_0 un volumen Ω_0 con frontera $\partial\Omega_0$. Se puede definir el vector posición de cada

partícula de \mathcal{S} en \mathcal{C}_0 como \underline{X} (ver Fig. 2.2). Entonces, se denota por R_0 el sistema cartesiano ortogonal de la configuración inicial, de origen O y de vectores base $\{\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3\}$.

Luego, las variables del problema pueden ser expresadas en términos de la configuración de referencia, *cantidades Lagrangianas* o sobre la configuración deformada, *cantidades Eulerianas*. El vector de posición \underline{x} de una partícula ubicada inicialmente en \mathcal{C}_0 está definida por la siguiente función vectorial,

$$\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{X}, t),$$

definida sobre $\Omega_0 \forall t$, de forma evidente se comprueba que $\underline{\varphi}(\underline{X}, 0) = \underline{X}$.

Se define también, el vector de posición inicial \underline{X} en el instante t descrito:

$$\underline{X} = \underline{\varphi}^{-1}(\underline{x}, t).$$

Se puede introducir en el espacio referencial \mathcal{R} , el desplazamiento \underline{u} entre la configuración \mathcal{C}_0 y \mathcal{C} de cada partícula del sistema \mathcal{S} en el instante t (ver Fig. 2.2). Este vector se obtiene por:

$$\underline{u} = \underline{x} - \underline{X} = \underbrace{\underline{\varphi}(\underline{X}, t) - \underline{X}}_{\text{Cantidad Lagrangiana}} = \underbrace{\underline{x} - \underline{\varphi}^{-1}(\underline{x}, t)}_{\text{Cantidad Euleriana}} \quad (2.1)$$

Se define el gradiente de deformación como el gradiente del vector $\underline{\varphi}(\underline{X}, t)$ en el instante t en \mathcal{C}_0 :

$$\underline{F}(\underline{X}, t) = \underline{\text{grad}}_0 \underline{\varphi}(\underline{X}, t) = \underline{I}_d + \underline{\text{grad}}_0 \underline{u}(\underline{X}, t) \quad (2.2)$$

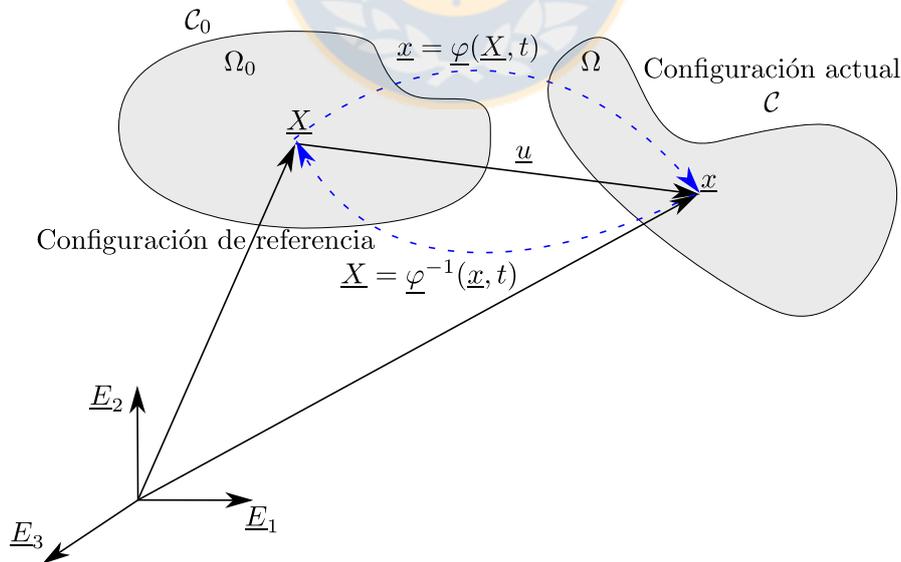


Figura 2.2: Configuración y movimiento de un cuerpo continuo

La velocidad \underline{v} de cada partícula de \mathcal{S} en el instante t está definida por la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (2.2).

$$\underline{v}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{\varphi}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \underline{v}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{\varphi}(\underline{\varphi}^{-1}(\underline{x}, t), t)}{\partial t} \quad (2.3)$$

Se define la derivada con respecto al tiempo del gradiente de transformaciones como:

$$\underline{\dot{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{F}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} \right) = \frac{\partial}{\partial \underline{X}} \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \underline{v}(\underline{X}, t)}{\partial \underline{X}} \quad (2.4)$$

La variación entre el volumen Ω_0 de \mathcal{C}_0 y Ω de \mathcal{C} se define por:

$$\partial\Omega = J\partial\Omega_0 \quad (2.5)$$

dónde J se conoce como Jacobiano y se define como $J(\underline{X}, t) = \det(\underline{F}(\underline{X}, t))$.

2.2. Equilibrio del sistema

Las ecuaciones que definen el equilibrio del problema pueden ser expresadas en términos de la configuración inicial, según:

- Conservación de masa

$$\rho J = \rho_0, \text{ en } \Omega_0 \quad (2.6)$$

- Ecuación de compatibilidad cinemática:

$$\underline{\tilde{\epsilon}} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}}, \text{ en } \Omega_0 \quad (2.7)$$

$$\underline{u} = \underline{u}_d, \text{ en } \partial\Omega_{u_d} \quad (2.8)$$

- Ecuación de equilibrio

$$\text{div}_0 \underline{P} + \rho_0 \underline{f} = 0, \text{ en } \Omega_0 \quad (2.9)$$

$$\underline{P}^t \cdot \underline{n}_0 = \underline{F}_{d_0} = \frac{\partial S}{\partial S_0} \underline{F}_d, \text{ en } \Omega_{F_{d_0}} \quad (2.10)$$

$$\underline{FP} = \underline{P}^t \underline{F}^t, \text{ en } \Omega_0 \quad (2.11)$$

Los tensores $\underline{\tilde{\epsilon}}$ y \underline{P} no son variables objetivas ni simétricas, es decir, no permanecen invariantes bajo un movimiento de cuerpo rígido. Es posible entonces, expresar las ecuaciones de compatibilidad cinemática en términos del tensor de deformaciones Green-Lagrange \underline{E} y el segundo tensor de esfuerzo de Piola-Kirchhoff $\underline{\pi}$, definidos como:

$$\underline{E} = \frac{1}{2} \left(\underline{F}^t \underline{F} - \underline{I}_d \right) \quad (2.12)$$

$$\underline{\pi} = J \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}^{-t} \quad (2.13)$$

Los tensores antes definidos son Lagrangianos, simétricos y objetivos. Desarrollando la Ec. (2.12), se obtiene:

$$\underline{E} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}_0 \underline{u} + \underline{\underline{\text{grad}}}_0^t \underline{u} + \underline{\underline{\text{grad}}}_0^t \underline{u} \underline{\underline{\text{grad}}}_0 \underline{u} \right) \quad (2.14)$$

Por lo tanto, la formulación fuerte queda definida por las Ecs. de (2.6) a la (2.11), excepto por la ecuación de compatibilidad cinemática (2.7), que queda definida como:

- Ecuación de compatibilidad cinemática:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{F}}^t \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}_d \right), \text{ en } \Omega_0 \quad (2.15)$$

2.3. Ley de comportamiento

Se considera un material hiperelástico o elástico de Green, en dichos materiales la ecuación constitutiva se puede obtener a partir de un potencial elástico o energía elástica de deformación.

La potencia de las fuerzas internas (P_i), se expresa respecto de la configuración de referencia en función del segundo tensor de esfuerzo Piola-Kirchoff ($\underline{\underline{\pi}}$) y del tensor de deformaciones Green-Lagrange ($\underline{\underline{E}}$), quedando escrita como:

$$P_i = - \int \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{E}}} d\Omega_0 = - \int \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{E}}} : \underline{\underline{\dot{E}}} d\Omega_0$$

dónde, $\psi(\underline{\underline{E}})$ es la potencial llamado energía libre específica. Cuando existen pequeñas perturbaciones se puede considerar una relación lineal entre los tensores $\underline{\underline{\pi}}$ y $\underline{\underline{E}}$, a partir del potencial cuadrático $\underline{\underline{E}} : \psi = \frac{1}{2\rho_0} \underline{\underline{C}}_0 \underline{\underline{E}}^2$. Así:

$$\underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{C}}_0 \underline{\underline{E}} \quad (2.16)$$

donde, $\underline{\underline{C}}_0$ corresponde al tensor de Hooke. Entonces, la Ec. (2.16) es similar a la utilizada cuando existen pequeñas transformaciones si se reemplaza el tensor de deformación Green Lagrange por el tensor de deformación lineal. Este material se conoce como **Saint-Venant Kirchhoff**. Durante el desarrollo del trabajo se puede considerar $\underline{\underline{C}}_0$ como isotrópico u ortotrópico.

2.4. Principio de potencias virtuales

En esta sección se busca encontrar la formulación débil del problema de equilibrio utilizando el principio de potencias virtuales (PPV). Para ello es necesario definir los campos cinemáticamente admisibles.

- El conjunto \mathcal{U}_{ad} de desplazamientos cinemáticamente admisibles está definido por:

$$\mathcal{U}_{ad} = \{ \underline{u} | \underline{u} \text{ sea continua y regular en } \Omega \text{ y } \underline{u} = \underline{u}_d \text{ en } \partial\Omega_{u_d} \}$$

- El conjunto $\mathcal{U}_{ad,0}$ de velocidades cinemáticamente admisibles son nulas:

$$\mathcal{U}_{ad,0} = \{ \underline{v}^* | \underline{v}^* \text{ sea continua y regular en } \Omega \text{ y } \underline{v}^* = 0 \text{ en } \partial\Omega_{u_d} \}$$

La formulación débil de la ecuación de equilibrio local se obtiene en su forma integral mediante la multiplicación de la ecuación de equilibrio por un campo de velocidades virtuales $\underline{v}^* \in \mathcal{U}_{ad,0}$ arbitrario e integrando sobre Ω .

$$- \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}[\underline{v}^*] d\Omega + \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{v}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_{F_d}} \underline{F}_d \cdot \underline{v}^* dS = 0, \forall \underline{v}^* \in \mathcal{U}_{ad,0} \quad (2.17)$$

Dónde, $\underline{\underline{d}}[\underline{v}^*]$ define el operador que evalúa la tasa de deformación Euleriana asociada al campo de velocidades \underline{v}^* . El primer término de la Ec. (2.17) corresponde a la potencia de los

esfuerzos internos y los otros dos términos corresponden a la potencia de las fuerzas externas del sistema. Luego, la Ec. (2.17) puede ser expresada en la configuración \mathcal{C}_0 , entonces:

$$- \int_{\Omega_0} \underline{\underline{P}} : \underline{\underline{\dot{F}}}^{-t}(\underline{v}^*) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{f} \cdot \underline{v}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_{F_d}} \frac{\partial S}{\partial S_0} \underline{F}_d \cdot \underline{v}^* dS_0 = 0, \quad (2.18)$$

Luego, si se desarrolla la Ec. (2.17) en términos de los tensores Lagrangianos $\underline{\underline{E}}$ y $\underline{\underline{\pi}}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_0} Tr \left(J \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{F}}^{-t} \underline{\underline{F}}^t d[\underline{v}^*] \underline{\underline{F}} \right) d\Omega_0 + \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{v}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_{F_d}} \underline{F}_d \cdot \underline{v}^* dS = 0, \\ & - \int_{\Omega_0} J \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{F}}^{-t} : \underline{\underline{F}}^t d[\underline{v}^*] \underline{\underline{F}} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{f} \cdot \underline{v}^* d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_{F_d}} \frac{\partial S}{\partial S_0} \underline{F}_d \cdot \underline{v}^* dS_0 = 0, \\ & - \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{E}}}[\underline{v}^*] d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{f} \cdot \underline{v}^* d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_{F_d}} \frac{\partial S}{\partial S_0} \underline{F}_d \cdot \underline{v}^* dS_0 = 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dónde, $\underline{\underline{\dot{E}}}$ es la tasa de deformación Lagrangiana, definida por:

$$\underline{\underline{\dot{E}}}[\underline{v}^*] = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{F}}^t \underline{\underline{\dot{F}}}[\underline{v}^*] + \underline{\underline{\dot{F}}}^t[\underline{v}^*] \underline{\underline{F}} \right) \quad (2.20)$$

Por último, para expresar la Ec. (2.19) en términos de los desplazamientos, se utiliza la ley de comportamiento (2.16). Por lo tanto, el PPV de la configuración inicial queda definido como :

$$- \int_{\Omega_0} \underline{\underline{C}}_0 \underline{\underline{E}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\dot{E}}}[\underline{v}^*] d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{f} \cdot \underline{v}^* d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_{F_d}} \frac{\partial S}{\partial S_0} \underline{F}_d \cdot \underline{v}^* dS_0 = 0, \quad (2.21)$$

2.5. Formulación del problema discreto en grandes transformaciones

2.5.1. Formulación Lagrangiana Total

Las ecuaciones de equilibrio discretas serán tratadas a partir de la Ec. (2.21), que se encuentra desarrollada a partir de la configuración inicial, utilizando el segundo tensor de esfuerzo Piola-Kirchoff y el tensor de deformaciones Green-Lagrange derecho.

Se considera que el dominio Ω_0 está discretizado en N_E elementos, cada uno con un volumen de Ω_0^E , tal que $\Omega_0 = \cup \Omega_0^E$. Luego, para aproximar el campo de desplazamiento de cada elemento E se define una función de interpolación:

$$\underline{u} = \underline{\underline{N}}(\underline{X}) \underline{q}, \forall \underline{X} \in \Omega_0^E$$

dónde, $\underline{\underline{N}}(\underline{X})$ es la matriz que contiene las funciones de forma y $\underline{q}(t)$ es el vector de desplazamientos nodales del elemento. Para obtener el campo de velocidad virtuales se derivan los desplazamientos:

$$\underline{v}^* = \underline{\underline{N}}(\underline{X}) \underline{w}^*, \forall \underline{X} \in \Omega_0^E$$

Como las funciones de forma no dependen del tiempo la matriz $\underline{\underline{N}}$ no sufre modificaciones.

Luego, se puede escribir el tensor de deformaciones de Green-Lagrange derecho como:

$$\begin{aligned} [\underline{\underline{E}}] &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}} + \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}} \right)^t + \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}} \right)^t \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}} \right] \\ [\underline{\underline{E}}] &= \underline{\underline{B}}_L \underline{q} + \frac{1}{2} \underline{\underline{B}}_{NL} (\underline{q}, \underline{q}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Donde, $\underline{\underline{B}}_L$ es la parte lineal y $\underline{\underline{B}}_{NL}$ representa la parte no-lineal. Luego, la tasa de deformación Lagrangiana se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\dot{\underline{\underline{E}}}}{\underline{\underline{E}}} \right] &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \underline{v}^*}{\partial \underline{X}} + \left(\frac{\partial \underline{v}^*}{\partial \underline{X}} \right)^t + \left(\frac{\partial \underline{v}^*}{\partial \underline{X}} \right)^t \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}} + \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}} \right)^t \frac{\partial \underline{v}^*}{\partial \underline{X}} \right] \\ \left[\frac{\dot{\underline{\underline{E}}}}{\underline{\underline{E}}} \right] &= \underline{\underline{B}}_L \underline{w}^* + \underline{\underline{B}}_{NL} (\underline{q}, \underline{w}^*) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Luego, reemplazando (2.22) y (2.23) en la Ec. (2.21), se obtiene:

$$\begin{aligned} \underline{w}^* \int_{\Omega_0^E} \left(\underline{\underline{B}}_L^t + \underline{\underline{B}}_{NL}^t (\underline{q}, \cdot) \right) \mathbf{C}_0 \left(\underline{\underline{B}}_L \underline{q} + \frac{1}{2} \underline{\underline{B}}_{NL} (\underline{q}, \underline{q}) \right) d\Omega_0^E \\ - \underline{w}^{*t} \left(\int_{\Omega_0} \underline{\underline{N}}^t \rho_0 \underline{f} d\Omega_0^E + \int_{\partial\Omega_{0F_d}^E} \frac{\partial S}{\partial S_0} \underline{F}_d dS_0^E \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

Aquí, el objetivo es:

$$\text{Encontrar } \underline{q} \in \mathcal{U}_{ad}^E \text{ tal que : } \mathcal{R} (\underline{q}, \underline{w}^{*t}) = 0, \forall \underline{w}^* \in \mathcal{U}_{ad,0}^E$$

Dónde el residuo $\mathcal{R} (\underline{q}, \underline{w}^{*t})$ queda definido por la ecuación no lineal (2.24). Por ello, no es posible encontrar la solución mediante un método directo de resolución y se hace necesario la utilización del método iterativo de Newton (ver Sec. 3.1.1) para encontrar \underline{q} . Una vez linealizado el problema, se busca encontrar la solución \underline{q} a partir de:

$$\mathcal{R} (\underline{q}^i, \underline{w}^*) + \langle \mathcal{R}' (\underline{q}^i, \underline{w}^*), \delta \underline{q}^i \rangle = 0$$

Considerando que $\delta \underline{q}^i = \underline{q}^{i+1} - \underline{q}^i$, se puede encontrar la matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_T = \mathcal{R}' (\underline{q}^i, \cdot)$, definida como:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T &= \underbrace{\sum_{E \in \Omega_0} \int_{\Omega_0^E} \underline{\underline{B}}_{NL}^t (\cdot, \cdot) \mathbf{C}_0 \left(\underline{\underline{B}}_L + \frac{1}{2} \underline{\underline{B}}_{NL} (\underline{q}^i, \underline{q}^i) \right) d\Omega_0^E}_{\mathbf{K}_T^E} + \underbrace{\sum_{E \in \Omega_0} \int_{\Omega_0^E} \underline{\underline{B}}_L^t \mathbf{C}_0 \underline{\underline{B}}_L d\Omega_0^E}_{\mathbf{K}_T^E} \\ &+ \underbrace{\sum_{E \in \Omega_0} \int_{\Omega_0^E} \left(\underline{\underline{B}}_L^t \mathbf{C}_0 \underline{\underline{B}}_{NL} (\underline{q}^i, \cdot) + \underline{\underline{B}}_{NL}^t (\cdot, \underline{q}^i) \mathbf{C}_0 \underline{\underline{B}}_L + \underline{\underline{B}}_{NL}^t (\cdot, \underline{q}^i) \mathbf{C}_0 \underline{\underline{B}}_{NL} (\underline{q}^i, \cdot) \right) d\Omega_0^E}_{\mathbf{K}_T^D} \end{aligned} \quad (2.25)$$

La rigidez puede ser expresada como:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_T^G + \mathbf{K}_T^E + \mathbf{K}_T^D \quad (2.26)$$

Dónde, \mathbf{K}_T^G representa la matriz de rigidez geométrica asociada al estado de esfuerzo $\underline{\pi}^i$, \mathbf{K}_T^E representa la matriz de rigidez elástica, y \mathbf{K}_T^D es la matriz que depende del desplazamiento \underline{q}^i , conocida como la matriz de desplazamiento inicial [16].

El código MULTI está diseñado para realizar simulaciones de estructuras laminadas esbeltas con grandes transformaciones, dichos problemas poseen fuertes no linealidades entre las que se incluyen la delaminación y contacto (ver Sec. 4.1.2), y requieren de técnicas de resolución iterativa como el método de Newton o el método LaTin, los cuales se desarrollan en el siguiente capítulo. Además, la naturaleza de estos problemas requieren del cálculo de un gran número de grados de libertad, por lo que se hace necesario la utilización de estrategias multiescala, desarrolladas en el Cap. 3.



Capítulo 3

Estrategias de cálculo no-lineal y de descomposición de dominio

El código MULTI fue desarrollado con el objetivo de resolver problemas no lineales y con un gran número de grados de libertad. Por ello, es necesario estudiar los métodos de resolución de problemas no lineales y las estrategias de descomposición de dominio para resolver estos problemas.

Los métodos más utilizados para el cálculo de las respuestas no lineales son las estrategias incrementales-iterativas. Un algoritmo incremental consiste en aproximar el problema no lineal con una linealización de la curva de equilibrio en cada incremento de tiempo. La mayor parte de los métodos iterativos se basan en el algoritmo de Newton. Estos métodos construyen una secuencia de soluciones lineales que convergen a la solución exacta. Sin embargo, la convergencia del método de Newton no siempre está asegurada. Por lo tanto, los algoritmos incrementales-iterativos se utilizan para mejorar la convergencia del método de Newton, estos son el resultado de la combinación de un proceso incremental y un proceso iterativo. En el caso de fuertes no linealidades, los métodos incrementales-iterativos convencionales fallan cuando existen puntos críticos, es por ello que fueron creados los métodos de continuación para liberar el parámetro de carga y agregan una condición suplementaria cuyo objetivo es limitar el crecimiento de la respuesta bajo un incremento de fuerza dado. Más información sobre estos métodos es posible encontrar en [14, 26, 39]. En la Sec. 3.1.2 se presenta otro método de solución iterativa conocido como algoritmo LaTIn (Large Time Increment method).

Por otra parte, para resolver problemas complejo es necesario conjugar los fenómenos que ocurren a gran escala y a nivel local. Por ello, es necesario el estudio de estrategias de resolución multiescala, la cual establece un problema macroscópico y uno microscópico. El primero, está asociado a una representación gruesa (homogéneo) de todo el problema. Luego, el segundo está asociado a los detalles o el área de interés (heterogéneo). El desafío de estos métodos es proporcionar una definición adecuada de las dos escalas, y así lograr un correcto acoplamiento entre ellas.

Son de interés para el desarrollo de este trabajo los métodos de cálculo multiescala, específicamente los métodos de descomposición de dominio, los cuales resuelven problemas con gran cantidad de grados de libertad (ver Sec. 3.2). Además, se caracterizan por una discretización fina, independiente de la modelización elegida, la cual no puede ser resuelta por métodos directos.

3.1. Método incremental Iterativo

Estos métodos consisten en dos etapas: La primera linealiza el problema no-lineal y se predice una solución tangente inicial (valor inicial de iteración) para un incremento de carga

dado, mientras que la segunda etapa consiste en corregir el residuo las veces que sea necesario, hasta llegar a una solución aceptable.

3.1.1. Método de Newton

El método de Newton es un método numérico iterativo de resolución de ecuaciones no lineales que busca encontrar $\underline{r}(\underline{q}) = 0$. Existen varias modificaciones de este método, dónde se busca encontrar $\underline{u}_i \rightarrow \underline{u}_t$ tal que $\underline{r}(\underline{u}_t) = 0$ con una pequeña tolerancia.

El método de Newton clásico: Se basa en la linealización de $\underline{r}(\underline{u}_t^{i+1})$ al rededor de la iteración anterior \underline{u}_t^i . El objetivo es determinar la iteración \underline{u}^{i+1} por anulación de la aproximación.

$$\underline{r}(\underline{u}_t^{i+1}) \approx \underline{r}(\underline{u}_t^i) + \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{u}}(\underline{u}_t^i) \right) (\underline{u}^{i+1} - \underline{u}^i)$$

Entonces, la iteración \underline{u}_t^{i+1} se obtiene a partir de la iteración anterior \underline{u}_t^i .

$$\underline{u}^{i+1} = \underline{u}_t^i - \left[\frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{u}}(\underline{u}_t^i) \right]^{-1} \underline{r}(\underline{u}_t^i) \quad (3.1)$$

Se considera el término $\left[\frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{u}}(\underline{u}_t^i) \right]$ como la matriz de rigidez tangente \underline{K}_t^i .

El método de Newton no converge de manera incondicional respecto a la elección de la iteración inicial \underline{u}_0 , una mala elección del valor inicial puede conducir a construir una secuencia de \underline{u}_i divergente. Una vez que el método llega a una solución aceptable la convergencia tiene la propiedad de ser cuadrática.

Método de Newton modificado: de dirección constante. Esta variante consiste en reemplazar la matriz de rigidez \underline{K}_t^i por una dirección constante \underline{K}_t^0 (actualizada al comienzo de cada incremento) en la Ec. (3.1), obteniendo:

$$\underline{u}^{i+1} = \underline{u}_t^i - (\underline{K}_t^0)^{-1} \underline{r}(\underline{u}_t^i) \quad (3.2)$$

La convergencia de la versión modificada de Newton es lineal solamente. Si bien este método ahora recursos, no es el utilizado de forma general.

3.1.2. Algoritmo LaTIn

El algoritmo o método LaTIn "Large Time INcrement method", desarrollado por Ladevèze [31, 32], resuelve el problema sobre todo el intervalo de tiempo y todo el espacio. Este método está basado sobre tres puntos. El primero es la separación de las ecuaciones en dos grupos: las ecuaciones locales, eventualmente no lineales Γ y las ecuaciones lineales, eventualmente globales A_d . El segundo punto es la utilización de un esquema iterativo de dos etapas que resuelve sucesivamente los dos grupos de ecuaciones. Dos direcciones de búsqueda, E^+ y E^- , permiten pasar de Γ a A_d , e inversamente (ver Fig. 3.1). Por último, el tercer punto corresponde a la descomposición de la solución en una suma de productos de funciones de espacio por funciones de tiempo.

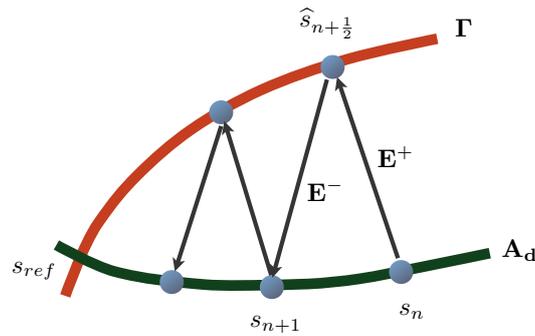


Figura 3.1: Algoritmo iterativo LaTIn Fuente: [42]

Esta técnica se puede utilizar para el tratamiento de no-linealidades superficiales del tipo de delaminación [3] y de contacto [11]. También, el método se emplea en problemas de elastoplasticidad [8], de viscoplasticidad [12], y de contacto en grandes transformaciones [10, 9]. Adicionalmente, este método está especialmente adaptado para la resolución de problemas con fuertes no linealidades y con un gran número de grados de libertad tratados mediante métodos de descomposición de dominio micro-macro. Finalmente, este método se encuentra implementado en código MULTI y se utiliza para la resolución de problemas con la interacción de pandeo-delaminación-contacto.

A continuación, se presentan de forma detallada los métodos de descomposición de dominio.

3.2. Métodos de descomposición de Dominio

Los métodos de descomposición de dominio (o DDM) no son una idea nueva, su data es del siglo XIX y su autoría se le atribuye a Hermann Schwarz [44], quién proponía un algoritmo para resolver una ecuación diferencial parcial, mediante la partición del campo de estudio en dos dominios con recubrimiento. Luego, con la aparición de los ordenadores, su rápida masificación y especialmente con la utilización de procesadores en paralelo se ha reestablecido el estudio de estos métodos, permitiendo nuevos desarrollos en esta área.

En el análisis estructural, a menudo se privilegian los métodos sin recubrimiento, ya que son más fácil de implementar (ver Fig. 3.2). La mayoría de los métodos de descomposición de dominio se basan en la condensación de las incógnitas de la interface y la resolución de problemas independientes de tamaño más pequeño, siendo esta característica la que los hace altamente paralelizables.

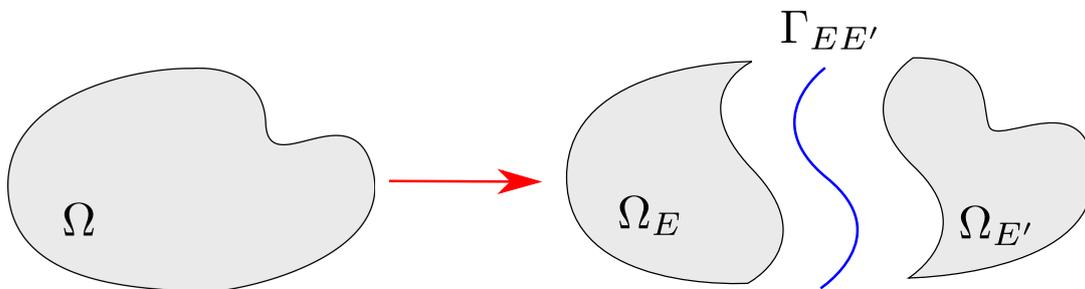


Figura 3.2: Principio de Descomposición de Dominios

Los métodos de descomposición de dominio *sin recubrimiento* pueden ser clasificados en tres grupos:

- **Las aproximaciones primales** que verifican la continuidad de los desplazamientos en las interfaces. Destacan el método de Schur primal [38] y el método BDD (Balancing Domain Decomposition Method) [35].
- **Las aproximaciones duales** que aseguran el equilibrio de fuerzas en las interfaces. Destacan el método Schur dual y el método FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting) [19].
- **Las aproximaciones mixtas** que conectan las cantidades primales y duales en la interface, tales como los métodos basados en el algoritmo de tipo Lagrangiano aumentado [23], el método de LaTin [32] o el método FETI Primal-Dual [18].

Los métodos de descomposición de dominio mejoran su eficiencia cuando el tamaño del problema aumenta. Sin embargo, cuando el número de subdominios aumenta, la eficiencia es mucho menor a la esperada. Para solucionar dicho problema se puede agregar un esfuerzo suplementario para mejorar el rendimientos de estos algoritmos, a través de la utilización de precodicionadores.

Para solucionar esta falta de escalabilidad, Mandel [35] propone, como parte del método primal BDD, construir un problema grueso asociado a la verificación de la ortogonalidad de las cargas locales con el movimiento de cuerpo rígido de las sub-estructuras.

Además, la resolución del problema condensado puede ser de forma directa o iterativa. En el primer caso, el problema condensado se ensambla y resuelve de forma clásica. En el segundo caso, se utiliza una solución iterativa adaptada a la arquitectura de ordenadores en paralelos (gradiente conjugado, GMRES, Krylov [40]), donde sólo los problemas locales de cada sub-estructura son ensamblados.

Si se considera un problema de elasticidad lineal con pequeñas perturbaciones, puesto sobre una partición de la estructura \mathbf{E} en E subdominios, entonces, un subdominio está conectado con su vecino (E') por la interface $\Gamma_{EE'}$. Se denota $\Gamma_E = \cup_{E' \in \mathbf{E}} \Gamma_{EE'}$ y $\Gamma = \cup_{E \in \mathbf{E}} \Gamma_E$. Suponiendo que las mallas son consistentes y compatibles en Γ , el problema de elementos finitos $\mathbf{K}q = f$ puede ser reescrito como el equilibrio de cada sub-dominio bajo esfuerzos en las interfaces:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^{(E)} & \mathbf{K}_{i\Gamma}^{(E)} \\ \mathbf{K}_{\Gamma i}^{(E)} & \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^{(E)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i^{(E)} \\ q_{\Gamma}^{(E)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i^{(E)} \\ f_{\Gamma}^{(E)} + \lambda_{\Gamma}^{(E)} \end{bmatrix}, \quad \forall (E)_{E \in \mathbf{E}}, \quad (3.3)$$

$$q_{\Gamma}^{(E)} = q_{\Gamma}^{(E')}, \quad \text{en } (\Gamma_{EE'})_{E, E' \in \mathbf{E} | \Gamma_E \cap \Gamma_{E'} \neq \emptyset} \quad (3.4)$$

$$\lambda_{\Gamma}^{(E)} = -\lambda_{\Gamma}^{(E')}, \quad \text{en } (\Gamma_{EE'})_{E, E' \in \mathbf{E} | \Gamma_E \cap \Gamma_{E'} \neq \emptyset} \quad (3.5)$$

donde el índice i indica las incógnitas internas y el índice Γ las incógnitas en la frontera de los subdominios. El término $\lambda_{\Gamma}^{(E)}$ representa las fuerzas nodales ejercidas por las subestructuras adyacentes (E') sobre (E) a través de la interface Γ_E . A continuación, se describen tres estrategias diferentes para resolver este sistema. Para simplificar, se considera un problema de dos subdominios.

Una revisión detallada de estos métodos y su generalización a un gran número de subdominios se pueden encontrar en [24]

Métodos Primales

Consisten en obtener el desplazamiento de las interfaces a priori continuas. Para ello, se procede a reordenar la Ec. (3.3) para eliminar las incógnitas interna y reducir solamente a las

incógnitas $q_\Gamma^{(E)}$:

$$\mathbf{S}_p^{(E)} q_\Gamma^{(E)} = b_\Gamma^{(E)} + \lambda_\Gamma^{(E)} \quad (E = 1, 2), \quad (3.6)$$

con:

$$\mathbf{S}_p^{(E)} = \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}^{(E)} - \mathbf{K}_{\Gamma i}^{(E)} (\mathbf{K}_{ii}^{(E)})^{-1} \mathbf{K}_{i\Gamma}^{(E)} \quad ; \quad b_p^{(E)} = f_\Gamma^{(E)} - \mathbf{K}_{\Gamma i}^{(E)} (\mathbf{K}_{ii}^{(E)})^{-1} f_i^{(E)}$$

dónde, $\mathbf{S}_p^{(E)}$ y $b_p^{(E)}$ indican respectivamente el complemento de Schur y el segundo miembro condensa los subdominio E en la interface Γ_E . El problema de equilibrio global (Ecs. 3.3, 3.4 y 3.5), en función de las incógnitas $q_\Gamma = q_\Gamma^{(1)} = q_\Gamma^{(2)}$, se escribe como:

$$\left[\mathbf{S}_p^{(1)} + \mathbf{S}_p^{(2)} \right] q_\Gamma = b_\Gamma^{(1)} + b_p^{(2)} \quad (3.7)$$

Después de la resolución del sistema (3.7), se obtienen las soluciones internas $q_i^{(E)}$ con la siguiente expresión:

$$q_i^{(E)} = (\mathbf{K}_{ii}^{(E)})^{-1} (f_i^{(E)} - \mathbf{K}_{i\Gamma}^{(E)} q_\Gamma) \quad (E = 1, 2)$$

La eficiencia del método de Schur primal depende en gran medida del acondicionamiento del sistema a resolver.

Métodos Duales

Consiste en no trabajar más sobre el campo de desplazamiento, sino que sobre los esfuerzos de las interfaces a priori en equilibrio. Por lo tanto, se expresa el desplazamiento de la interface, representado en la Ec. (3.6), en función de $\lambda_\Gamma^{(E)}$. La dificultad radica en el hecho de que los complementos de Schur de cada subdominio flotante no son invertibles. Entonces, es posible escribir para cada subdominio [19, 22]:

$$q_\Gamma^{(E)} = \mathbf{S}_p^{(E)+} \left(b_p^{(E)} + \lambda_\Gamma^{(E)} \right) + \mathbf{R}^{(E)} \alpha^{(E)} \quad (E = 1, 2), \quad (3.8)$$

donde, $\mathbf{S}_p^{(E)+}$ es la pseudo inversa de $\mathbf{S}_p^{(E)}$, $\mathbf{R}^{(E)}$ es la matriz de movimiento de cuerpo rígido de la interface del sub-dominio (E) y $\alpha^{(E)}$ es el vector de coeficientes de una combinación lineal de modos de cuerpo rígido que se determina durante la resolución. El equilibrio corresponde entonces a la ortogonalidad con todos los campos de los movimientos de cuerpo rígido, que se traduce en la siguiente ecuación de admisibilidad:

$$\mathbf{R}^{ET} \left(b_p^{(E)} + \lambda_\Gamma^{(E)} \right) = 0 \quad (E = 1, 2) \quad (3.9)$$

El problema condensado global, en términos de las incógnitas $\lambda_\Gamma = \lambda_\Gamma^{(1)} = -\lambda_\Gamma^{(2)}$, $\alpha^{(1)}$ y $\lambda^{(2)}$, después de la inyección de los equilibrios locales condensados (3.8) en la ecuación de admisibilidad cinemática (3.4) acoplado a las condiciones (3.4) y (3.9), se escribe:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_p^{(1)} + \mathbf{S}_p^{(2)+} & \mathbf{R}^{(1)} & -\mathbf{R}^{(2)} \\ \mathbf{R}^{(1)T} & 0 & 0 \\ \mathbf{R}^{(2)T} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_\Gamma \\ \alpha^{(1)} \\ \alpha^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}_p^{(1)+} b_p^{(1)} + \mathbf{S}_p^{(2)+} b_p^{(2)} \\ \mathbf{R}^{(1)} \\ -\mathbf{R}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

El método FETI propone la resolución del sistema (3.10) utilizando una técnica de gradiente conjugado proyectado, en donde la etapa de proyección está asociado con la restricción de equilibrio de los subdominios, definiendo un problema grueso asegurando la escalabilidad del método [20].

Métodos Mixtos

Este método hace que el problema en la interface sea tanto en términos de esfuerzo y desplazamiento. En particular, este método es conocido como FETI-DP propuesto por [21].

La idea esencial del método FETI-DP es volver a escribir las condiciones de interface en función de una nueva variable: $\mu_\Gamma^{(E)} = \lambda_b^{(E)} + k_\Gamma^{(E)} q_\Gamma^{(E)}$, donde las matrices $k_\Gamma^{(E)}$ se puede interpretar como la rigidez de la interface. Las ecuaciones de admisibilidad cinemáticas (3.4) y la de admisibilidad estática (3.5) de la interface son equivalentes al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \mu_\Gamma^{(1)} + \mu_\Gamma^{(2)} - \left(k_\Gamma^{(1)} + k_\Gamma^{(2)}\right) q_\Gamma^{(1)} = 0 \\ \mu_\Gamma^{(1)} + \mu_\Gamma^{(2)} - \left(k_\Gamma^{(1)} + k_\Gamma^{(2)}\right) q_\Gamma^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Los problemas locales condensados de cada subestructura se convierten en:

$$\left(S_d^{(E)} + k_\Gamma^{(E)}\right) q_\Gamma^{(E)} = \mu_\Gamma^{(E)} + b_p^{(E)} \quad (E = 1, 2).$$

Las soluciones obtenidas se agregan en la admisibilidad de la interface (3.11), lo que conduce al siguiente sistema, en términos de variables mixtas:

$S_m \mu_\Gamma = b_m$ (3.12)

con:

$$S_m = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_d & \mathbf{I}_d - \left(\mathbf{k}_\Gamma^{(1)} + \mathbf{k}_\Gamma^{(2)}\right) \left(\mathbf{S}_d^{(2)} + \mathbf{k}_\Gamma^{(2)}\right)^{-1} \\ \mathbf{I}_d - \left(\mathbf{k}_\Gamma^{(1)} + \mathbf{k}_\Gamma^{(2)}\right) \left(\mathbf{S}_d^{(1)} + \mathbf{k}_\Gamma^{(1)}\right)^{-1} & \mathbf{I}_d \end{pmatrix}$$

$$\mu_\Gamma = \begin{pmatrix} \mu_\Gamma^{(1)} \\ \mu_\Gamma^{(2)} \end{pmatrix} ; \quad b_m = \begin{pmatrix} \left(\mathbf{k}_\Gamma^{(1)} + \mathbf{k}_\Gamma^{(2)}\right) \left(\mathbf{S}_d^{(2)} + \mathbf{k}_\Gamma^{(2)}\right)^{-1} b_p^{(1)} \\ \left(\mathbf{k}_\Gamma^{(1)} + \mathbf{k}_\Gamma^{(2)}\right) \left(\mathbf{S}_d^{(1)} + \mathbf{k}_\Gamma^{(1)}\right)^{-1} b_p^{(2)} \end{pmatrix}$$

Se observa que al elegir $\mathbf{k}_\Gamma^{(1)} = \mathbf{S}_p^{(2)}$ y $\mathbf{k}_\Gamma^{(2)} = \mathbf{S}_p^{(1)}$, el operador \mathbf{S}_m se convierte en una matriz identidad y la solución se encuentra en forma inmediata. Las matrices $\mathbf{k}_\Gamma^{(E)}$ debe acercarse el complemento de Schur de la vecindad con el fin de obtener el mejor condicionamiento posible, esto también puede ser muy costoso.

Por último, la resolución de (3.12) también presenta problemas de escalabilidad y luego se hace necesaria la definición de un problema grueso. En la práctica, se utiliza el mismo tipo de problema grueso para los métodos FETI o BDD.

La estrategia DDM utilizada en este trabajo es mixta, similar a FETI-DP y se basa en el algoritmo LaTIn micro-macro [33], cuyos detalles se presentan en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Estrategia multiescala

En esta sección se describe el problema de referencia y su formulación en términos de conjunto de subestructuras e interfaces. A continuación, se introducen las condiciones que definen el comportamiento específico de las interfaces.

4.1. Problemas de referencia

Para la formulación del problema de referencia se hacen las siguientes consideraciones:

- Las interfaces entre capas pueden sufrir delaminación
- La carga no depende de la configuración
- Problema de evolución cuasiestático
- Condición isotérmica
- El salto de desplazamiento entre las interfaces es pequeño

La estructura Ω está bajo cargas y desplazamientos prescritos definidos como:

- Un desplazamiento prescrito \underline{u}_d en la frontera $\partial\Omega_{u_d}$
- Una carga prescrita \underline{F}_d en la frontera $\partial\Omega_{F_d}$
- Una fuerza de cuerpo \underline{f}_d

La estructura \mathbf{E} se puede considerar como un sólido continuo isotrópico o un laminado (ver Fig. 4.1). Para ambos casos se considera un dominio Ω de frontera $\partial\Omega$ en la *configuración actual* \mathcal{C} . El problema de referencia se presenta para el caso de elasticidad lineal.

El campo de esfuerzo se designa por $\underline{\pi}$ y el campo de desplazamiento por \underline{u} , ambos pertenecen respectivamente a espacios de energía finita \mathcal{S} y \mathcal{U} definidos en Ω .

El *laminado* está compuesto por un apilamiento N_P de capas P , de densidad ρ_P ocupando un dominio Ω_P , borde $\partial\Omega_P$ tal que $\Omega = \bigcup_{P \in \mathbf{E}} \Omega_P$. Una capa P esta conectada con una placa adyacente P' por la interface $\Gamma_{PP'} = \partial\Omega_P \cap \partial\Omega_{P'}$. El conjunto de capas adyacentes a la capa P se denota \mathbf{V}_P y el conjunto de interfaces se denota $\Gamma = \bigcup_{P \in \mathbf{E}} \Gamma_P$, $\Gamma_P = \bigcup_{P' \in \mathbf{V}_P} \Gamma_{PP'}$.

Para ambos casos se puede considerar una distribución de fuerzas \underline{F}_d superficiales (respectivamente una distribución de desplazamiento \underline{u}_d) impuesta sobre una parte $\partial\Omega_{\underline{F}_d}$ (respectivamente $\partial\Omega_{\underline{u}_d}$ para el desplazamiento) de $\partial\Omega$. Las fuerzas de volumen se denotan por \underline{f}_d .

Para el caso de un laminado compuesto se escribe \underline{u}_P con el que se define el campo de desplazamiento de cada capa P .

El índice $(\cdot)_0$ representa una cantidad referida a la *configuración inicial* o no deformada, para diferenciar su representación de la *configuración actual* o deformada.

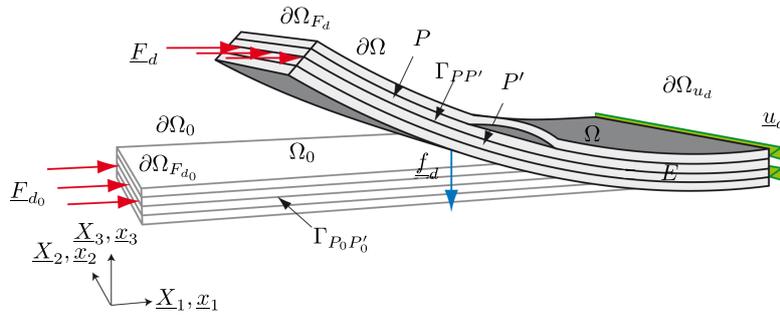


Figura 4.1: Problema de referencia: configuración inicial y actual. Fuente: [42]

4.1.1. Formulación del problema subestructurado

La estrategia propuesta busca resolver un problema de elementos finitos sub-estructurado con no linealidades geométricas en las sub-estructuras (pandeo) y con no linealidades materiales en las interfaces (contacto y delaminación). Por lo tanto, se requiere encontrar los desplazamientos \underline{u}_{E_0} y esfuerzos $\underline{\pi}_{E_0}$ (segundo tensor de Piola-Kirchhoff) en las sub-estructuras E_0 y los desplazamientos \underline{W}_{E_0} y tracciones \underline{F}_{E_0} en las interfaces $\Gamma_{E_0E'_0}$. El subíndice 0 significa que las cantidades están dadas en la configuración de referencia (formulación Lagrangiana).

El método utilizado divide el cuerpo en dos diferentes tipos de entidades: subestructuras e interfaces, ambas definidas a través de sus propias variables y ecuaciones. La estructura se descompone en un conjunto E de subestructuras sin recubrimiento Ω_E , las cuales están sometidas en su frontera a un campo de fuerza de tracción \underline{F}_E y a un campo de desplazamiento \underline{W}_E . Una interface $\Gamma_{EE'}$ entre dos subestructuras Ω_E y $\Omega_{E'}$ genera relaciones constitutivas entre $(\underline{W}_E, \underline{W}_{E'}) \in \mathcal{W}_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$ y $(\underline{F}_E, \underline{F}_{E'}) \in \mathcal{F}_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$ (ver Fig. 4.2) y nos permite considerar fácilmente un comportamiento tal complejo como el contacto (con o sin fricción) o para el caso de un laminado un comportamiento cohesivo entre dos capas (ver Sec. 4.1.2). Puesto que tanto el desplazamiento como la fuerza en las interfaces son desconocidos, el enfoque resultante es un método de descomposición de dominio mixto.

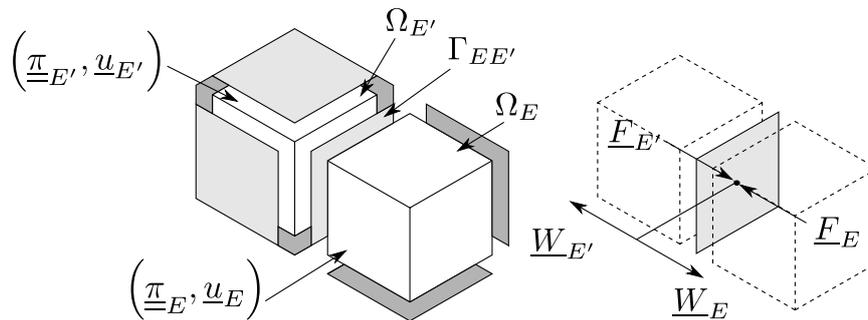


Figura 4.2: Descomposición en subestructuras e interfaces

Entonces, el problema puede ser escrito como:

Encontrar $s = \{s_{ref} | E \in \mathbf{E}\}$ con $s_{ref} = (\underline{u}_{E_0}, \underline{\pi}_{E_0}, \underline{W}_{E_0}, \underline{F}_{E_0})$ que verifica:

-Admisibilidad cinemática no-lineal:

$$\underline{\underline{E}}_{E_0} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla}}_0 \underline{u}_{E_0} + {}^t \underline{\underline{\nabla}}_0 \underline{u}_{E_0} + \underline{\underline{\nabla}}_0 \underline{u}_{E_0} {}^t \underline{\underline{\nabla}}_0 \underline{u}_{E_0} \right), \text{ en } \Omega_{E_0} \quad (4.1)$$

- Equilibrio no lineal de la subestructura E:

$$\forall (\underline{u}_{E_0}^*, \underline{W}_{E_0}^*) \in \mathcal{U}_{E_0}^0 \times \mathcal{W}_{E_0}^0 \quad \text{tal que} \quad \underline{u}_{E_0}^*|_{\partial\Omega_{E_0}} = \underline{W}_{E_0}^*|_{\Gamma_{E_0}},$$

$$\int_{\Omega_{E_0}} \underline{\pi}_{E_0} : \dot{\underline{E}}(\underline{u}_{E_0}^*) \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_{E_0}} \rho_{E_0} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_{E_0}^* \, d\Omega_0 + \int_{\Gamma_{E_0}} \underline{F}_{E_0} \cdot \underline{W}_{E_0}^* \, d\Gamma_0 \quad (4.2)$$

- Comportamiento ortotrópico lineal de las subestructuras:

$$\underline{\pi}_{E_0} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{E}}_{E_0}}, \quad (4.3)$$

donde ψ es un potencial elástico por unidad de volumen.

- Relación constitutiva de las interfaces entre los sub-estructuras adyacentes:

$$\mathcal{R}_{EE'} \left(\underline{W}_E, \underline{W}_{E'}, \underline{F}_{E_0}, \underline{F}_{E'_0} \right) = 0, \text{ sobre } \Gamma_{E_0 E'_0} \in \Gamma_{E_0} \quad (4.4)$$

- Relación constitutiva de las interfaces que transmiten las condiciones de contorno:

$$\mathcal{R}_{E_d} \left(\underline{W}_E, \underline{W}_{E'}, \underline{F}_{E_0}, \underline{F}_{E'_0} \right) = 0, \text{ sobre } \Gamma_{E_d_0} \quad (4.5)$$

4.1.2. Tipos de Interface

Todas las ecuaciones siguientes son locales para cada punto de una interface $\Gamma_{EE'}$, para $E \in \mathbf{E}$ y $E' \in \mathbf{E}$.

Interfaces Perfectas

Las interfaces perfectas se definen tanto por el desplazamiento como por la fuerza, la que es continua a través de la interfaz:

$$\begin{aligned} \underline{F}_E + \underline{F}_{E'} &= \underline{0} \\ \underline{W}_E &= \underline{W}_{E'} \end{aligned}$$

Interfaces con Contacto

La formulación que se presenta a continuación se encuentra detallada en [17]. Se designa por \underline{n} al vector unitario normal a $\Gamma_{EE'}$ apuntando de E y E' y por \mathbf{P} a su correspondiente proyección ortogonal. El comportamiento se caracteriza por el coeficiente de fricción de Coulomb μ . La interface $\Gamma_{EE'}$ está definida por:

$$\begin{aligned} \underline{F}_E + \underline{F}_{E'} &= \underline{0} \\ \underline{n} \cdot (\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) &\geq 0 \text{ y } \underline{n} \cdot \underline{F}_E \leq 0 \\ (\underline{n} \cdot (\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E)) (\underline{n} \cdot \underline{F}_E) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{Adhesiva} & \text{Deslizante} \\
\text{si } \|\mathbf{P}\underline{F}_E\| < \mu\|\underline{n} \cdot \underline{F}_E\| & \text{si } \|\mathbf{P}\underline{F}_E\| = \mu\|\underline{n} \cdot \underline{F}_E\| \\
\mathbf{P}(\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) = 0 & \mathbf{P}(\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) \wedge \mathbf{P}\underline{F}_E = 0 \\
& \mathbf{P}(\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) \cdot \mathbf{P}\underline{F}_E \geq 0
\end{array}$$

Interfaces cohesivas

Se define $\mathcal{A}_{PP'}$ como la relación que representa la ley de interfaz cohesiva definida entre la variable primal de la interface \underline{W}_E y la variable dual \underline{F}_E . \mathbf{P} es el operador de la proyección tangencial y \underline{n}_3 es el vector unitario normal a $\Gamma_{EE'}$ saliente de E a E' en el punto de interés.

$$\begin{aligned}
\underline{F}_E + \underline{F}_{E'} &= \underline{0} \\
\mathcal{A}_{PP'}(\underline{W}_E, \underline{W}_{E'}, \underline{F}_E, \underline{F}_{E'}) &= \underline{0}
\end{aligned}$$

Modelo de interfaz cohesiva

El comportamiento de una intreface se define en la base de ortotropía local $(\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3)$, caracterizado por la dirección \underline{n}_1 , que bisecta los ángulos formados por la capa adyacente a la interface (ver Fig. 4.3) y la dirección \underline{n}_3 , normal al plano de interface $(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$. Por lo tanto, el modelo de interfaz cohesiva relaciona el salto de desplazamiento $[u] = \underline{u}_{P'} - \underline{u}_P$ entre dos láminas adyacentes P y P' con el tensor de esfuerzos de Cauchy $\underline{t} = \underline{\sigma}_P \cdot \underline{n}_3 = \underline{\sigma}_{P'} \cdot \underline{n}_3$. Aunque se consideren grandes desplazamientos (pandeo), el salto de desplazamiento en la interfaz $\Gamma_{pp'}$ es supuesto pequeño antes de la delaminación completa. Así, el comportamiento susceptible al daño se define, según:

$$\underline{t} = \underline{K} \cdot [u] \quad , \quad \text{donde} \quad \underline{K} = \begin{pmatrix} (1-d_1)k_1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-d_2)k_2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 - \langle [u], \underline{n} \rangle_+ \right) k_3 \end{pmatrix} , \quad (4.6)$$

$\langle \cdot \rangle_+$ es un operador que extrae únicamente la parte positiva de su argumento.

Las variables locales de daño d_i son introducidas en el modelo para simular la pérdida de rigidez de la interfaz cuando la estructura es solicitada. El rango de valores va desde 0 (sin daño) a 1 (daño completo). Los parámetros d_i son relacionados con la tasa de liberación de energía local Y_i , según:

$$Y_i = -\frac{\partial e_d}{\partial d_i} \quad , \quad \text{donde} \quad \begin{cases} Y_1 = \frac{1}{2}k_1[u]_1^2 \\ Y_2 = \frac{1}{2}k_2[u]_2^2 \\ Y_3 = \frac{1}{2}k_3 \langle [u]_3 \rangle_+^2 \end{cases} , \quad (4.7)$$

e_d es la energía de deformación de la interfaz por unidad de área y $[u]_i$ son las componentes de $[u]$. Se asume que las variables de daño dependen del valor máximo $Y_{|t}$ sobre la historia de carga de una combinación de $Y_{i|\tau}$, $\tau \leq t$, así:

$$d_1 = d_2 = d_3 = \frac{n}{n+1} \left(\frac{Y_{|t}}{Y_c} \right)^n , \quad \text{donde} \quad Y_{|t} = \sup_{\tau \leq t} (Y_{3|\tau}^\alpha + \gamma_1 Y_{1|\tau}^\alpha + \gamma_2 Y_{2|\tau}^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} , \quad (4.8)$$

n es un parámetro positivo adimensional e Y_c es un valor crítico con unidades de energía por unidad de superficie.

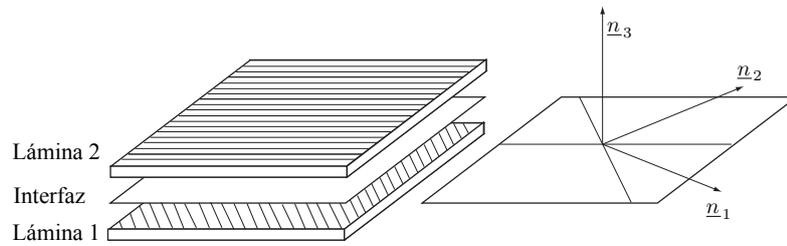


Figura 4.3: Láminas e interfaz del mesomodelo. Fuente: [5]

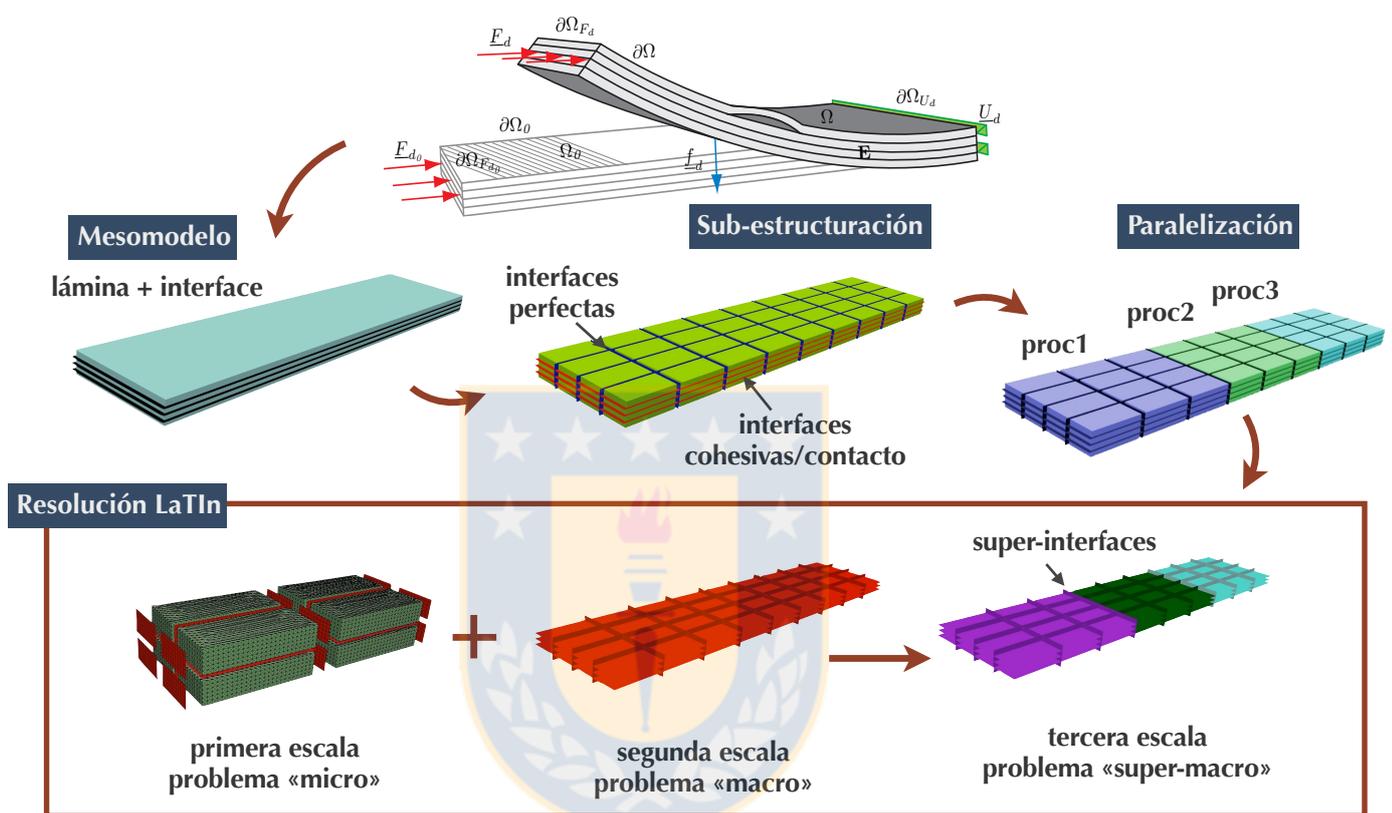


Figura 4.4: Descomposición del problema y las tres escalas de resolución utilizadas. Fuente: [5]

4.2. Descripción de la Estrategia

La estrategia propuesta utiliza la escala mesoscópica para describir el laminado [1], usando dos elementos constituyentes: las láminas (elementos 3D) y las interfaces (elementos 2D), ver Fig. 4.4. La delaminación está modelada en las interfaces utilizando un comportamiento cohesivo [4], mientras que las condiciones de contacto unilateral son introducidas por una ley de interfaz que evita la interpenetración entre superficies delaminadas.

Los cálculos paralelos y multiescala son realizados utilizando un método de descomposición de dominios mixto basado en el método LATIN micro-macro [34]. Esta estrategia divide la estructura en sub-estructuras volumétricas separadas por interfaces superficiales, ambas son entidades mecánicas. Así, el problema de referencia modelado a la escala mesoscópica resulta naturalmente sub-estructurado y las condiciones de contacto y de decohesión son tratadas en las interfaces. Para asegurar una resolución eficiente del problema, tres escalas son consideradas (ver Fig. 4.4):

- La **micro-escala** está dedicada a los fenómenos con influencia local o de pequeña variación de onda, los que ocurren entre sub-estructuras vecinas.

- La **macro-escala** verifica el equilibrio de la estructura completa, pero únicamente sobre un número reducido de grados de libertad de las interfaces, obtenidos a partir de la definición de una base macroscópica. Esta etapa del algoritmo asegura la extensibilidad del método, ya que contiene la solución a grande variación de onda.
- En algunos casos, el número de sub-estructuras e interfaces puede hacer que la macro-escala no pueda ser resuelta directamente. Por lo tanto, las sub-estructuras son reunidas en super-sub-estructuras y el problema macroscópico es resuelto utilizando un método de descomposición primal [35]. La **tercera escala** es introducida balanceando las super-sub-estructuras respecto a sus movimientos de cuerpo rígido. La implementación de esta escala no será discutida en este trabajo, mayores detalles se pueden encontrar en [30].

Para conectar las partes micro y macroscópicas de la solución, se utiliza el algoritmo LaTIn visto en la Sec. 3.1.2.

4.2.1. Elección de los espacios de aproximación

Los problemas en las subestructuras y las interfaces se resuelven numéricamente utilizando una técnica de elementos finitos estándar. Por lo tanto, el desplazamiento \underline{u}_E perteneciente a \mathcal{U}_E^h , espacio de desplazamientos por tramos de la estructura. En el marco de los métodos de descomposición de dominios mixtos, se debe prestar especial atención en la discretización de la interface.

Si se opta por elementos finitos \mathcal{P}_1 para el desplazamiento, una elección natural es tomar funciones constantes por tramos como espacio de aproximación para las inter-fuerzas. Sin embargo, en la práctica tal discretización genera modos de oscilación falsos que conducen a inestabilidades numéricas. Un enfoque usualmente adoptado para evitar este inconveniente es la elección de los campos \underline{F}_E y \underline{W}_E en el mismo espacio de funciones constantes por tramos de Γ_E ($\mathcal{W}_E^h = \mathcal{F}_E^h$) y realizar una sobrediscretización de los campos de desplazamiento de las subestructuras [33, 37]. Dos alternativas están disponibles para realizar esto último. La primera es refinar localmente los elementos del borde de cada subestructura (solución de tipo- h), o aumentar el grado de las funciones de forma de interpolación en los elementos del borde de cada subestructura (solución de tipo- p) (ver Fig. 4.5).

Hasta ahora en los estudios realizados con el método se han utilizado para la discretización de las subestructuras elementos 3D lineales tales como tetraedros de 4 nodos y prismas de 6 nodos, con un refinamiento tipo- h para mejorar los resultados. Por lo tanto, en este trabajo, al subir el grado del elemento se está utilizando una solución del tipo- p , utilizando tetraedros de 10 nodos y prismas de 15 nodos.

4.2.2. La separación de escalas

Para asegurar la extensibilidad de la estrategia, se resuelve un problema global, lineal y reducido (el problema macroscópico). La definición de los cantidades macroscópicas se realiza únicamente en las incógnitas de las interfaces y verifican parcialmente la ecuación de equilibrio entre interfaces:

$$\forall \underline{W}_{E_0}^{M*} \in \mathcal{W}_{E_0}^M, \quad \int_{\Gamma_{E_0 E'_0}} (\underline{F}_{E_0} + \underline{F}_{E'_0}) \cdot \underline{W}_{E_0}^{M*} d\Gamma_0 = 0, \quad (4.9)$$

donde el espacio macroscópico de desplazamientos $\mathcal{W}_{E_0}^M$ es un parámetro del método, como también el espacio dual $\mathcal{F}_{E_0}^M$. La definición de los espacios macroscópicos se realiza a través de un proyector Π que es escogido L^2 -ortogonal, así, el mismo proyector es utilizado para los desplazamientos y tracciones. Entonces, se obtiene la siguiente separación:

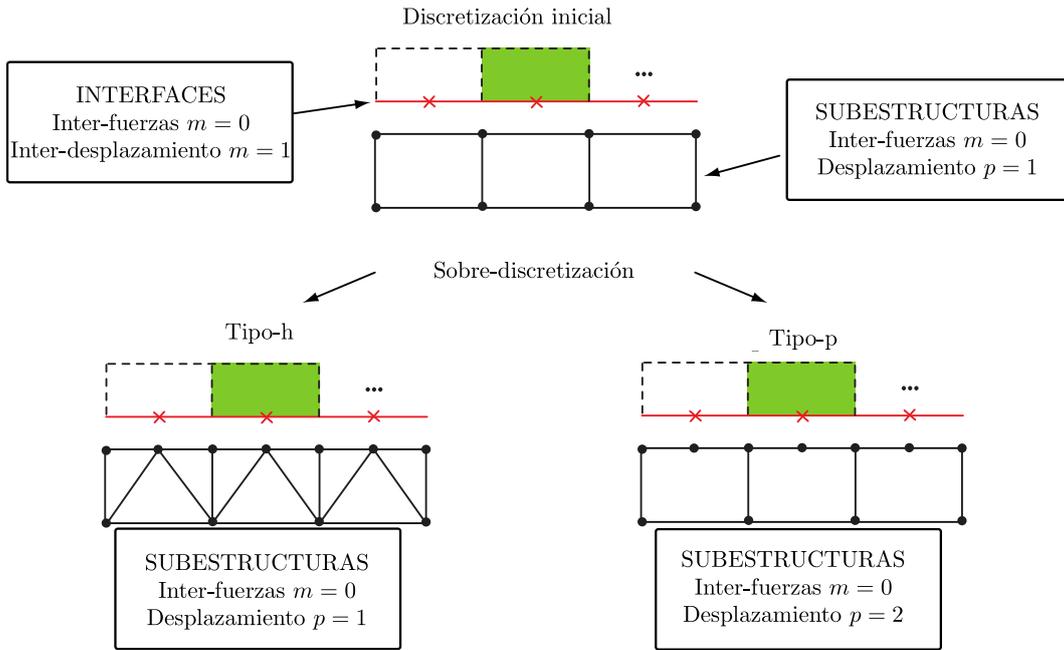


Figura 4.5: Modificación en la discretización de las interfaces y estructuras. Fuente: [37]

$$\begin{aligned} \forall (\underline{F}_{E_0}, \underline{W}_{E_0}) \in \mathcal{F}_{E_0} \times \mathcal{W}_{E_0}, \underline{F}_{E_0} &= \underline{F}_{E_0}^M + \underline{F}_{E_0}^m \text{ y } \underline{W}_{E_0} = \underline{W}_{E_0}^M + \underline{W}_{E_0}^m \\ \Rightarrow \int_{\Gamma_{E_0E'_0}} \underline{F}_{E_0} \cdot \underline{W}_{E_0} d\Gamma_0 &= \int_{\Gamma_{E_0E'_0}} \underline{F}_{E_0}^M \cdot \underline{W}_{E_0}^M d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_{E_0E'_0}} \underline{F}_{E_0}^m \cdot \underline{W}_{E_0}^m d\Gamma_0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde $\underline{F}_{E_0}^M = \Pi \underline{F}_{E_0}$ y $\underline{W}_{E_0}^M = \Pi \underline{W}_{E_0}$.

Ensayos numéricos anteriores a este trabajo han mostrado que para asegurar la extensibilidad del método, la base macroscópica debe considerar al menos la parte lineal de las fuerzas de interfaz. Aquí, se propone como base macroscópica (para una interfaz plana) las tres traslaciones, las tres rotaciones, las dos extensiones y el cizalle en el plano. De acuerdo con el principio de Saint-Venant, las resultantes y momentos nulos, es decir, la parte microscópica de la solución, tienen una influencia local, mientras que la parte macroscópica contiene la solución a gran longitud de onda.

4.2.3. Algoritmo iterativo

El algoritmo propuesto separa las ecuaciones en dos grupos:

- \mathbf{A}_d : ecuaciones de admisibilidad (no lineales) en las sub-estructuras y en las cantidades microscópicas de interfaz:
 - admisibilidad cinemática no lineal de las sub-estructuras: Ec. (4.1)
 - admisibilidad estática no lineal de las sub-estructuras: Ec. (4.2)
 - comportamiento de las sub-estructuras: Ec. (4.3)
 - admisibilidad estática macroscópica de las interface, Ec. (4.9).
- Γ : ecuaciones locales (no lineales) en las interfaces:

- comportamiento de interfaz (cohesivo, de contacto o perfectas) y condiciones de borde Ecs. (4.4) (4.5) (ver Sec. 4.1.2).

La solución $s_{ref} = (u_{E_0}, \pi_{E_0}, W_{E_0}, F_{E_0})$ es tal que $s_{ref} \in \mathbf{A}_d \cap \Gamma$. El esquema de resolución consiste en buscar la solución s_{ref} alternativamente: primero, se busca la solución s_n en \mathbf{A}_d , luego la solución $\widehat{s}_{n+\frac{1}{2}}$ en Γ . Para cerrar los dos grupos de ecuaciones, es necesario agregar dos direcciones de búsqueda ($k_{E_0}^+$ y $k_{E_0}^-$) y son parámetros de la estrategia que se presentan a continuación:

Etapa de Admisibilidad

En la etapa \mathbf{A}_d , se parte de los campos $(\widehat{W}_{E_0}, \widehat{F}_{E_0})$ que satisfacen las ecuaciones de interfaz Γ para buscar la solución (W_{E_0}, F_{E_0}) en \mathbf{A}_d , usando la siguiente relación:

$$k_{E_0}^- (W_{E_0} - \widehat{W}_{E_0}) + (F_{E_0} - \widehat{F}_{E_0}) = 0, \quad (4.11)$$

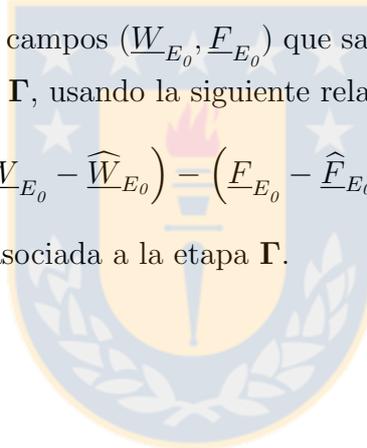
$k_{E_0}^-$ es la dirección de búsqueda asociada a la etapa \mathbf{A}_d .

Etapa Local

En la etapa Γ , se parte de los campos (W_{E_0}, F_{E_0}) que satisfacen las ecuaciones de \mathbf{A}_d para buscar la solución $(\widehat{W}_{E_0}, \widehat{F}_{E_0})$ en Γ , usando la siguiente relación:

$$k_{E_0}^+ (W_{E_0} - \widehat{W}_{E_0}) - (F_{E_0} - \widehat{F}_{E_0}) = 0, \quad (4.12)$$

$k_{E_0}^+$ es la dirección de búsqueda asociada a la etapa Γ .



Capítulo 5

Implementación

En el capítulo anterior se trató de forma general la estrategia multiescala y el algoritmo utilizado para la resolución del problema. En este capítulo se presentan las funciones de interpolación implementadas en el código MULTI para la utilización de los elementos finitos 3D de segundo orden. Además, se presentan los puntos de la cuadratura Gaussiana utilizados para la integración. En general, cada elemento puede ser definido por:

- Tipo de elemento (por ejemplo: Prisma)
- Las coordenadas $\{\underline{\xi}\}$ de sus n nodos geométricos.
- Número de grados de libertad n_d
- El polinomio base de aproximación $\langle \underline{P} \rangle$
- Funciones de forma \underline{N}
- Puntos de integración x_i

Es importante considerar que un modelo matemático de un sistema físico implica normalmente una serie de variables o funciones, $\underline{u}_{ex}(\underline{x})$ que representan las temperaturas, velocidades, desplazamientos, etc. Estos son representados por funciones de aproximación, $\underline{u}(\underline{x})$, tal que:

$$\underline{u}(\underline{x}) = P_1(\underline{x})a_1 + P_2(\underline{x})a_2 + \cdots + P_n(\underline{x})a_n \quad (5.1)$$

Entonces,

$$\underline{u}(\underline{x}) = \langle P_1(\underline{x}) \ P_2(\underline{x}) \ \cdots \ P_n(\underline{x}) \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \langle \underline{P} \rangle \{a\} \quad (5.2)$$

dónde:

P_i : Son funciones conocidas, linealmente independientes, tales como polinomios o funciones trigonométricas. Ninguna función puede ser construida por la combinación lineal de las otras funciones.

a : Parámetros de aproximación

La función de aproximación (5.1) se puede escribir como:

$$\underline{u}(\underline{x}) = N_1(\underline{x})\underline{q}_1 + N_2(\underline{x})\underline{q}_2 + \cdots + N_n(\underline{x})\underline{q}_n$$
$$\underline{u}(\underline{x}) = \langle N_1(\underline{x}) \ N_2(\underline{x}) \ \cdots \ N_n(\underline{x}) \rangle \begin{Bmatrix} \underline{q}_1 \\ \underline{q}_2 \\ \vdots \\ \underline{q}_n \end{Bmatrix} = \underline{N} \underline{q} \quad (5.3)$$

Se pueden construir las funciones de interpolación $\underline{N}(\underline{\xi})$ de cada elemento y sus derivadas con respecto a las coordenadas naturales ξ, η, ζ a partir de:

$$\underline{N} = \langle \underline{P} \rangle \cdot \underline{P}_n^{-1} \quad (5.4)$$

dónde

$$\underline{P}_n = \begin{bmatrix} \langle P_1(\underline{\xi}_1) & P_2(\underline{\xi}_1) & \dots & P_{n_d}(\underline{\xi}_1) \rangle \\ \langle P_1(\underline{\xi}_2) & P_2(\underline{\xi}_2) & \dots & P_{n_d}(\underline{\xi}_2) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle P_1(\underline{\xi}_{n_d}) & P_2(\underline{\xi}_{n_d}) & \dots & P_{n_d}(\underline{\xi}_{n_d}) \rangle \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Los polinomios bases utilizados se encuentran definidos en G. Dhatt, E. Lefrançois y G. Touzot [15].

Las transformaciones realizadas llevan de las coordenadas x, y, z a las coordenadas naturales ξ, η y ζ . Esto obliga a realizar un cambio de variables en las ecuaciones integrales que describen el comportamiento, tal como se muestra en la Sec. 2.4. Las derivadas de las funciones de forma \underline{B} que intervienen en la Ec. (2.25) son respecto a x, y, z , y se relacionan por:

$$\frac{\partial \underline{N}}{\partial \underline{x}} = \underline{J}^{-1} \frac{\partial \underline{N}}{\partial \underline{\xi}} \quad (5.6)$$

dónde \underline{J} es la matriz Jacobiana de la transformación, y se define como:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Luego, la diferencia de volumen en cada sistema de coordenadas viene relacionados por:

$$dx dy dz = \det(J) d\xi d\eta d\zeta \quad (5.8)$$

Una vez realizada la transformación, la integración es más sencilla en el sistema de coordenadas local (ξ, η, ζ) , que en el cartesiano (x, y, z) en el que los dominios están distorsionados.

Luego, para resolver Ec. (2.25) se realiza una integración numérica, la cual sustituye la función que se pretende integrar por las funciones de forma evaluadas en un determinado número de puntos conocidos como puntos de Gauss (cuadratura Gaussiana). Este método ha demostrado ser muy útil en el trabajo con elementos finitos, y es posible extender su aplicación fácilmente a integrales de dos y tres dimensiones. El dominio de integración se considera entre $[-1, 1]$, por lo que la regla queda expresada como:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i \cdot f(x_i) dx \quad (5.9)$$

Una cuadratura Gaussina de n puntos proporciona una respuesta exacta si f es un polinomio de orden $(2n - 1)$ o menor. La Tab. 5.1 muestra los valores de los pesos (w_i) y los puntos (ξ_i) para la cuadratura Gaussiana desde el orden $n = 1$ hasta $n = 4$ [2].

Tabla 5.1: Puntos y Pesos para la cuadratura Gaussina

Número de puntos	Puntos, x_i	Pesos, w_i
1	0	2
2	$\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm\sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$

5.1. Elementos finitos 3D

A continuación se muestra el procedimiento utilizado para obtener las ecuaciones de forma definidas para los elementos no lineales y la obtención de los puntos de integración respectivos para utilizarlos en la cuadratura Gaussina.

Primero se estudia el código MULTI y se determinan cuáles son los elementos que se encuentran disponibles. La Tab. 5.2 muestra un resumen con las características principales de los elementos disponibles e implementados en este trabajo.

Tabla 5.2: Resumen de elementos

	Grado del Polinomio	Número de nodos n	Número de grados de libertad n_d	Estado
Wedge	1	6	3	Disponible
Wedge 15	2	15	3	Implementado
Hexaédro	1	8	3	Disponible
Hexaédro 20	2	20	3	Implementado
Tetraedro	1	4	3	Disponible
Tetraedro 10	2	10	3	Implementado

Para la implementación de los elementos no lineales se utiliza el mismo esquema ya definido de cada elemento lineal disponible en el código MULTI. Posteriormente, se deben agregar los nodos adicionales de cada elemento. Luego, utilizando la Ec. (5.4) se obtienen las funciones de forma de los elementos implementados.

Finalmente, para la obtención de los puntos de integración numérica se debe considerar que el dominio de las coordenadas naturales de todos los elementos está definido entre $[0, 1]$ y los límites definidos en la cuadratura Gaussiana, según la Ec. (5.9) están entre $[-1, 1]$. Por esto, se debe utilizar el siguiente teorema de cambio de variable:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2} \cdot x + \frac{a+b}{2}\right) dx \quad (5.10)$$

Después de aplicar la Ec. (5.10) para el cambio de dominio de la integral en la ecuación de la cuadratura Gaussiana (5.9), la regla queda definida como:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i \cdot f\left(\frac{b-a}{2} \cdot x_i + \frac{a+b}{2}\right) dx \quad (5.11)$$

5.1.1. Prisma (Wedge)

Para obtener las funciones de forma del elemento tipo Prisma (Wedge), se define como referencia el esquema de la Fig. 5.1 y con ello se obtienen las coordenadas naturales de cada nodo, tal como se muestra en la Tab. 5.3. Luego, se utiliza el polinomio base de aproximación definido por:

$$\langle \underline{P} \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \xi^2 \quad \eta^2 \quad \zeta^2 \quad \xi\eta \quad \xi\zeta \quad \eta\zeta \quad \xi^2\eta \quad \xi^2\zeta \quad \eta^2\xi \quad \zeta^2\xi \quad \xi\eta\zeta \rangle \quad (5.12)$$

Tabla 5.3: Coordenadas de cada nodo para un elemento Wedge 15

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ξ	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
η	0	1	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0
ζ	0	0	1	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1

Reemplazando las coordenadas de cada nodo en la Ec. (5.12) se puede construir el vector P_n a partir de la Ec. (5.5). Luego, utilizando la Ec. (5.4) se obtienen las funciones de forma del elemento, según:

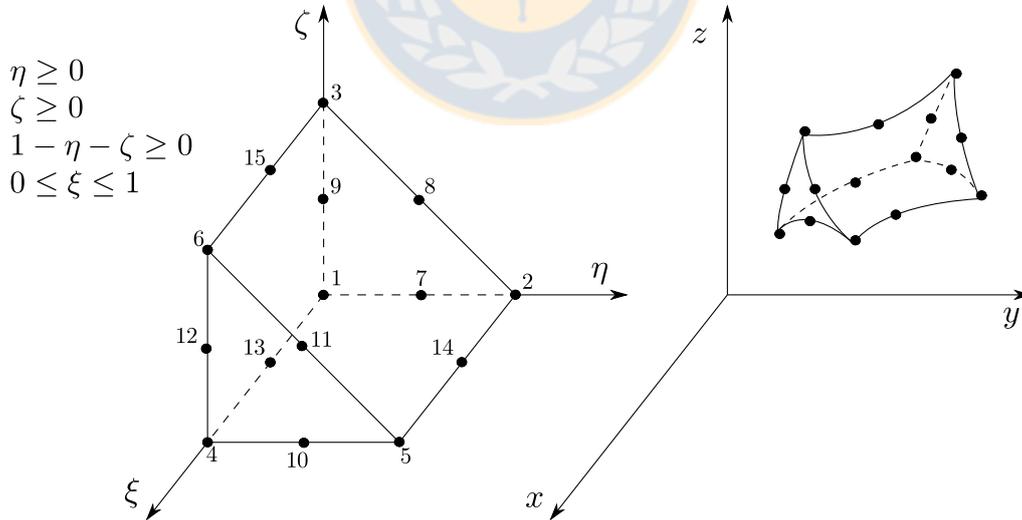


Figura 5.1: Elemento Wedge 15

$$N_1 = (1 - \eta - \zeta) \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - 2\eta - 2\zeta - 2\xi)$$

$$N_2 = \eta \cdot (1 - \xi) \cdot (2\eta - 2\xi - 1)$$

$$N_3 = \zeta \cdot (1 - \xi) \cdot (2\zeta - 1 - 2\xi)$$

$$N_4 = (1 - \eta - \zeta) \cdot \xi \cdot (-1 - 2\eta - 2\zeta + 2\xi)$$

$$N_5 = \eta \cdot \xi \cdot (2\eta + 2\xi - 3)$$

$$N_6 = \zeta \cdot \xi \cdot (2\zeta - 1 - 2\xi)$$

$$N_7 = 4 \cdot (1 - \eta - \zeta) \cdot \eta \cdot (1 - \xi)$$

$$N_8 = 4 \cdot \eta \cdot \zeta \cdot (1 - \xi)$$

$$N_9 = 4 \cdot \zeta \cdot (1 - \eta - \zeta) \cdot (1 - \xi)$$

$$N_{10} = 4 \cdot (1 - \eta - \zeta) \cdot \xi \cdot \eta$$

$$N_{11} = 4 \cdot \xi \cdot \eta \cdot \eta$$

$$N_{12} = 4 \cdot \zeta \cdot \xi \cdot (1 - \eta - \zeta)$$

$$N_{13} = (1 - \eta - \zeta) \cdot (1 - \xi) \cdot \xi$$

$$N_{14} = 4 \cdot \xi \cdot \eta \cdot (1 - \xi)$$

$$N_{15} = 4 \cdot \xi \cdot \zeta \cdot (1 - \xi)$$

Con las funciones de forma ya definidas es posible obtener las derivadas de primer orden de cada función con respecto de las coordenadas naturales, tal como se muestra en la Tab. 5.4.

Tabla 5.4: Derivadas de primer orden para el elemento Prisma 15

	$\frac{\partial N}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N}{\partial \eta}$	$\frac{\partial N}{\partial \zeta}$
1	$-(\eta + \zeta - 1)(4\xi + 2\eta + 2\zeta - 3)$	$-(\xi - 1)(2\xi + 4\eta + 4\zeta - 3)$	$-(\xi - 1)(2\xi + 4\eta + 4\zeta - 3)$
2	$-\eta(2\eta - 4\xi + 1)$	$(\xi - 1)(2\xi - 4\eta + 1)$	0
3	$-\zeta(2\zeta - 4\xi + 1)$	0	$(\xi - 1)(2\xi - 4\zeta + 1)$
4	$(\eta + \zeta - 1)(2\eta - 4\xi + 2\zeta + 1)$	$-\xi(2\xi - 4\eta - 4\zeta + 1)$	$-\xi(2\xi - 4\eta - 4\zeta + 1)$
5	$\eta(4\xi + 2\eta - 3)$	$\xi(2\xi + 4\eta - 3)$	0
6	$\zeta(4\xi + 2\zeta - 3)$	0	$\xi(2\xi + 4\zeta - 3)$
7	$4\eta(\eta + \zeta - 1)$	$4(\xi - 1)(2\eta + \zeta - 1)$	$4\eta(\xi - 1)$
8	$-4\eta\zeta$	$-4\zeta(\xi - 1)$	$-4\eta(\xi - 1)$
9	$4\zeta(\eta + \zeta - 1)$	$4\zeta(\xi - 1)$	$4(\xi - 1)(\eta + 2\zeta - 1)$
10	$-4\eta(\eta + \zeta - 1)$	$-4\xi(2\eta + \zeta - 1)$	$-4\xi\eta$
11	$4\eta\zeta$	$4\xi\zeta$	$4\xi\eta$
12	$-4\zeta(\eta + \zeta - 1)$	$-4\xi\zeta$	$-4\xi(\eta + 2\zeta - 1)$
13	$4(2\xi - 1)(\eta + \zeta - 1)$	$4\xi(\xi - 1)$	$4\xi(\xi - 1)$
14	$-4\eta(2\xi - 1)$	$-4\xi(\xi - 1)$	0
15	$-4\zeta(2\xi - 1)$	0	$-4\xi(\xi - 1)$

Por último, se resuelve la Ec. (5.11) adaptada para un elemento Prisma, obteniendo la ecuación siguiente:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} \gamma(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^r w_i \gamma(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \quad (5.13)$$

La siguiente tabla muestra los puntos de integración para una aproximación de orden 3 en ξ , orden 2 en η y ζ de un elemento prisma de 15 nodos:

Tabla 5.5: Puntos (ξ_i, η_i, ζ_i) y pesos (w_i) para la cuadratura Gaussina de un elemento Prisma (Wedge)

r_i	w_i	ξ_i	η_i	ζ_i
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
6	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	$(1 - \sqrt{1/3})/2$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$(1 - \sqrt{1/3})/2$
	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	$(1 - \sqrt{1/3})/2$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	$(0 + \sqrt{1/3})/2$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$(1 + \sqrt{1/3})/2$
	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	$(1 + \sqrt{1/3})/2$

La definición de los puntos de la cuadratura de Gauss para la integración de orden superior se define en el Anexo A.

5.1.2. Tetraedro

Para elementos de tipo tetraédrico, se utiliza como referencia el elemento de la Fig. 5.2. Luego, se define el polinomio base de aproximación definido en la ecuación según:

$$\langle \underline{P} \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \eta\zeta \quad \zeta^2 \quad \xi\zeta \rangle \quad (5.14)$$

Las coordenadas de cada nodo del elemento están en la siguiente tabla:

Tabla 5.6: Coordenadas de cada nodo para un elemento Tetraédrico 10

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ξ	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1
η	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
ζ	0	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Reemplazando cada punto de la Tab. 5.6 en la Ec. (5.14) se puede armar el vector P_n . Luego, utilizando la Ec. (5.4) se obtienen las funciones de forma del elemento, según:

$$N_1 = (\xi + \eta + \zeta - 1) \cdot (2\xi + 2\eta + 2\zeta - 1)$$

$$N_6 = 4\xi\eta$$

$$N_2 = \xi \cdot (2\xi - 1)$$

$$N_7 = -4\eta \cdot (\xi + \eta + \zeta - 1)$$

$$N_3 = \eta \cdot (2\eta - 1)$$

$$N_8 = -4\zeta \cdot (\xi + \eta + \zeta - 1)$$

$$N_4 = \zeta \cdot (2\zeta - 1)$$

$$N_9 = 4\xi\zeta$$

$$N_5 = -4\xi \cdot (\xi + \eta + \zeta - 1)$$

$$N_{10} = 4\eta\zeta$$

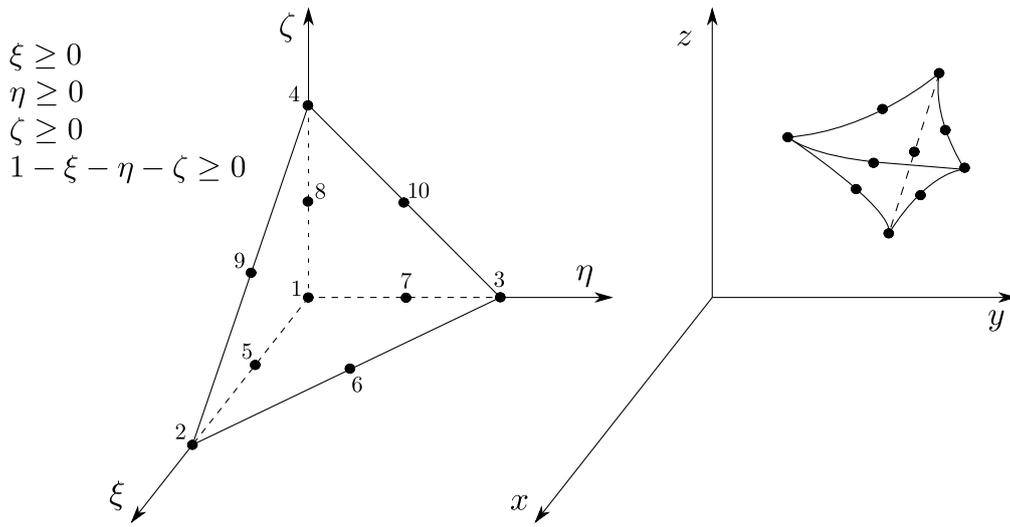


Figura 5.2: Elemento Tetraedro 10

Con las funciones de forma ya definidas es posible obtener las derivadas de cada función con respecto de las coordenadas naturales, tal como se muestra en la Tab. 5.7.

Tabla 5.7: Derivadas de primer orden para el elemento Tetraédrico 10

	$\frac{\partial N}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N}{\partial \eta}$	$\frac{\partial N}{\partial \zeta}$
1	$4\xi + 4\eta + 4\zeta - 3$	$4\xi + 4\eta + 4\zeta - 3$	$4\xi + 4\eta + 4\zeta - 3$
2	$4\xi - 1$	0	0
3	0	$4\eta - 1$	0
4	0	0	$4\zeta - 1$
5	$4 - 4\eta - 4\zeta - 8\xi$	-4ξ	-4ξ
6	4η	4ξ	0
7	-4η	$4 - 8\eta - 4\zeta - 4\xi$	-4η
8	-4ζ	-4ζ	$4 - 4\eta - 8\zeta - 4\xi$
9	4ζ	0	4ξ
10	0	4ζ	4η

Luego, se resuelve:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} \gamma(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^r w_i \gamma(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \quad (5.15)$$

En la Tab 5.8 se muestran los puntos y pesos para la integración numérica de un elemento prisma de 15 nodos:

Tabla 5.8: Puntos (ξ_i, η_i, ζ_i) y pesos (w_i) para la cuadratura Gaussina de un elemento Tetraédrico 10

r_i	w_i	ξ_i	η_i	ζ_i
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{24}$	$(5 - \sqrt{5})/20$	$(5 - \sqrt{5})/20$	$(5 - \sqrt{5})/20$
	$\frac{1}{24}$	$(5 + \sqrt{5})/20$	$(5 - \sqrt{5})/20$	$(5 - \sqrt{5})/20$
	$\frac{1}{24}$	$(5 - \sqrt{5})/20$	$(5 + \sqrt{5})/20$	$(5 - \sqrt{5})/20$
	$\frac{1}{24}$	$(5 - \sqrt{5})/20$	$(5 - \sqrt{5})/20$	$(5 + \sqrt{5})/20$

La definición de los puntos de la cuadratura de Gauss para la integración de orden superior se define en el Anexo A.

5.1.3. Hexaedro

Para elementos de tipo Hexaédricos se utiliza como referencia el elemento de la Fig. 5.3. Luego, se define el polinomio base de aproximación, según:

$$\langle \underline{P} \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \eta\zeta \quad \zeta^2 \quad \xi\zeta \rangle \quad (5.16)$$

Además, se definen las coordenadas de cada nodo del elemento en la Tab. 5.9.

Tabla 5.9: Coordenadas de cada nodo para un elemento Hexaedrico 20

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ξ	0	1	1	0	0	1	1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	1	1	0
η	0	0	1	1	0	0	1	1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	1	1
ζ	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Reemplazando cada punto de la Tab. 5.9 en la Ec. (5.16) se puede armar el vector P_n . Luego, utilizando la Ec. (5.4) se obtienen las siguientes funciones de forma del elemento:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (\xi - 1) \cdot (\eta - 1) \cdot (\zeta - 1) \cdot (2\xi + 2\eta + 2\zeta - 1) & N_8 &= \eta\zeta(\xi - 1) \cdot (2\xi - 2\eta - 2\zeta + 3) \\
 N_2 &= -\xi(\eta - 1) \cdot (\zeta - 1) \cdot (2\eta - 2\xi + 2\zeta + 1) & N_9 &= -4\xi(\xi - 1) \cdot (\eta - 1) \cdot (\zeta - 1) \\
 N_3 &= -\xi\eta(\zeta - 1) \cdot (2\xi + 2\eta - 2\zeta - 3) & N_{10} &= 4\xi\eta(\eta - 1) \cdot (\zeta - 1) \\
 N_4 &= -\eta(\xi - 1) \cdot (\zeta - 1) \cdot (2\xi - 2\eta + 2\zeta + 1) & N_{11} &= 4\xi\eta(\xi - 1) \cdot (\zeta - 1) \\
 N_5 &= -\zeta(\xi - 1) \cdot (\eta - 1) \cdot (2\xi + 2\eta - 2\zeta + 1) & N_{12} &= -4\eta(\xi - 1) \cdot (\eta - 1) \cdot (\zeta - 1) \\
 N_6 &= -\xi\zeta(\eta - 1) \cdot (2\xi - 2\eta + 2\zeta - 3) & N_{13} &= 4\xi\zeta(\xi - 1) \cdot (\eta - 1) \\
 N_7 &= \xi\eta\zeta(2\xi + 2\eta + 2\zeta - 5) & N_{14} &= -4\xi\eta\zeta(\eta - 1)
 \end{aligned}$$

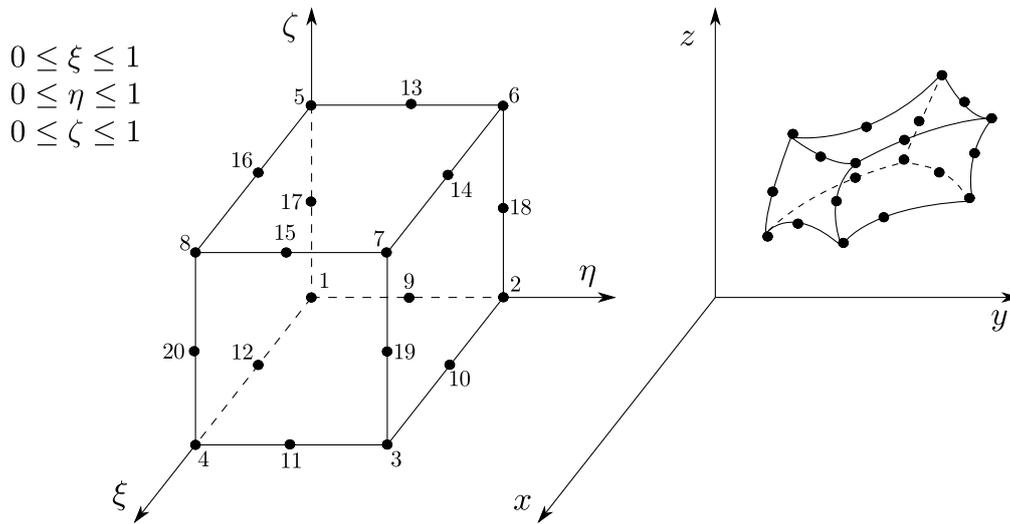


Figura 5.3: Elemento Hexaedro 20

$$\begin{aligned}
 N_{15} &= -4\xi\eta\zeta(\xi - 1) & N_{18} &= 4\xi\zeta(\eta - 1) \cdot (\zeta - 1) \\
 N_{16} &= 4\eta\zeta(\xi - 1) \cdot (\eta - 1) & N_{19} &= -4\xi\eta\zeta(\zeta - 1) \\
 N_{17} &= -4\zeta(\xi - 1) \cdot (\eta - 1) \cdot (\zeta - 1) & N_{20} &= 4\eta\zeta(\xi - 1) \cdot (\zeta - 1)
 \end{aligned}$$

Con las funciones de forma ya definidas es posible obtener las derivadas de cada función con respecto de las coordenadas naturales, tal como se muestra en la Tab. 5.10.

Finalmente, se resuelve la Ec. 5.17. La Tab. 5.11 muestra los puntos y pesos para la integración numérica de un elemento prisma de 15 nodos.

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \gamma(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^r w_i \gamma(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \quad (5.17)$$

La definición de los puntos de la cuadratura de Gauss para la integración de orden superior se define en el Anexo A.

5.2. Implementación en la estrategia multiescala

Con las bibliotecas de los elementos no lineales 3D disponibles se debe modificar el código MULTI, con el objetivo de leer dichos elementos y procesarlos. Entonces, la implementación se puede dividir en dos etapas: La primera está relacionada con la lectura de las mallas con elementos no lineales y la segunda con el procesamiento de estas para generar las interfaces (Ver Fig. 5.4).

Lectura de las mallas: Se modifica la librería encargada de leer las mallas en formato UCD (Unstructured Cell Data), soportado por archivos con extensión AVS. El objetivo es leer elementos de segundo orden con 10, 15 y 20 nodos y, luego, identificarlos como tetraedros, prismas y hexaedros respectivamente.

Procesamiento de las mallas: Se modifica la librería encargada de crear las subestructuras e interfaces como datos con su respectiva información característica contenida, por ejemplo, el tipo de elemento y las condiciones de borde. El objetivo de modificar esta biblioteca es leer las mallas 3D e interpretar cada cara como un elemento del tipo 2D de segundo orden, específicamente cuadrilateral de 8 nodos, y triangular de 6 nodos. Así, el programa puede generar las interfaces de la descomposición de dominios (ver Fig. 5.5).

Tabla 5.10: Derivadas de primer orden para el elemento Hexaédrico 20

	$\frac{\partial N}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N}{\partial \eta}$	$\frac{\partial N}{\partial \zeta}$
1	$(\eta - 1) \cdot (\zeta - 1) \cdot (4\xi + 2\eta + 2\zeta - 3)$	$(\xi - 1) \cdot (\zeta - 1) \cdot (2\xi + 4\eta + 2\zeta - 3)$	$(\xi - 1) \cdot (\eta - 1) \cdot (2\xi + 2\eta + 4\zeta - 3)$
2	$-(\eta - 1) \cdot (\zeta - 1) \cdot (2\eta - 4\xi + 2\zeta + 1)$	$\xi(\zeta - 1) \cdot (2\xi - 4\eta - 2\zeta + 1)$	$\xi(\eta - 1) \cdot (2\xi - 2\eta - 4\zeta + 1)$
3	$-\eta(\zeta - 1) \cdot (4\xi + 2\eta - 2\zeta - 3)$	$-\xi(\zeta - 1) \cdot (2\xi + 4\eta - 2\zeta - 3)$	$-\xi\eta(2\xi + 2\eta - 4\zeta - 1)$
4	$-\eta(\zeta - 1) \cdot (4\xi - 2\eta + 2\zeta - 1)$	$-(\xi - 1) \cdot (\zeta - 1) \cdot (2\xi - 4\eta + 2\zeta + 1)$	$-\eta(\xi - 1) \cdot (2\xi - 2\eta + 4\zeta - 1)$
5	$-\zeta(\eta - 1) \cdot (4\xi + 2\eta - 2\zeta - 1)$	$-\zeta(\xi - 1) \cdot (2\xi + 4\eta - 2\zeta - 1)$	$-(\xi - 1) \cdot (\eta - 1) \cdot (2\xi + 2\eta - 4\zeta + 1)$
6	$-\zeta(\eta - 1) \cdot (4\xi - 2\eta + 2\zeta - 3)$	$-\xi\zeta(2\xi - 4\eta + 2\zeta - 1)$	$-\xi(\eta - 1) \cdot (2\xi - 2\eta + 4\zeta - 3)$
7	$\eta\zeta(4\xi + 2\eta + 2\zeta - 5)$	$\xi\zeta(2\xi + 4\eta + 2\zeta - 5)$	$\xi\eta(2\xi + 2\eta + 4\zeta - 5)$
8	$\eta\zeta(4\xi - 2\eta - 2\zeta + 1)$	$\zeta(\xi - 1) \cdot (2\xi - 4\eta - 2\zeta + 3)$	$\eta(\xi - 1) \cdot (2\xi - 2\eta - 4\zeta + 3)$
9	$-4(2\xi - 1) \cdot (\eta - 1) \cdot (\zeta - 1)$	$-4\xi(\xi - 1) \cdot (\zeta - 1)$	$-4\xi(\xi - 1) \cdot (\eta - 1)$
10	$4\eta(\eta - 1) \cdot (\zeta - 1)$	$4\xi(2\eta - 1) \cdot (\zeta - 1)$	$4\xi\eta(\eta - 1)$
11	$4\eta(2\xi - 1) \cdot (\zeta - 1)$	$4\xi(\xi - 1) \cdot (\zeta - 1)$	$4\xi\eta(\xi - 1)$
12	$-4\eta(\eta - 1) \cdot (\zeta - 1)$	$-4(2\eta - 1) \cdot (\xi - 1) \cdot (\zeta - 1)$	$-4\eta(\xi - 1) \cdot (\eta - 1)$
13	$4\zeta(2\xi - 1) \cdot (\eta - 1)$	$4\xi\zeta(\xi - 1)$	$4\xi(\xi - 1) \cdot (\eta - 1)$
14	$-4\eta\zeta(\eta - 1)$	$-4\xi\zeta(2\eta - 1)$	$-4\xi\eta(\eta - 1)$
15	$-4\eta\zeta(2\xi - 1)$	$-4\xi\zeta(\xi - 1)$	$-4\xi\eta(\xi - 1)$
16	$4\eta\zeta(\eta - 1)$	$4\zeta(2\eta - 1) \cdot (\xi - 1)$	$4\eta(\xi - 1) \cdot (\eta - 1)$
17	$-4\zeta(\eta - 1) \cdot (\zeta - 1)$	$-4\zeta(\xi - 1) \cdot (\zeta - 1)$	$-4(2\zeta - 1) \cdot (\xi - 1) \cdot (\eta - 1)$
18	$4\zeta(\eta - 1) \cdot (\zeta - 1)$	$4\xi\zeta(\zeta - 1)$	$4\xi(2\zeta - 1) \cdot (\eta - 1)$
19	$-4\eta\zeta(\zeta - 1)$	$-4\xi\zeta(\zeta - 1)$	$-4\xi\eta(2\zeta - 1)$
20	$4\eta\zeta(\zeta - 1)$	$4\zeta(\xi - 1) \cdot (\zeta - 1)$	$4\eta(2\zeta - 1) \cdot (\xi - 1)$

Tabla 5.11: Puntos (ξ_i, η_i, ζ_i) y pesos (w_i) para la cuadratura Gaussiana de un elemento Hexaédrico

	w_i	ξ	η	ζ
1	1	1/2	1/2	1/2
8	$\frac{1}{8}$	$(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$	$(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$	$(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$
	$\frac{1}{8}$	$(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$	$(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$	$(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$
	$\frac{1}{8}$	$(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$	$(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$	$(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$
	$\frac{1}{8}$	$(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$	$(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$	$(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$
	$\frac{1}{8}$	$(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$	$(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$	$(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$
	$\frac{1}{8}$	$(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$	$(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$	$(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$
	$\frac{1}{8}$	$(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$	$(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$	$(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$
	$\frac{1}{8}$	$(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$	$(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$	$(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}) / 2$

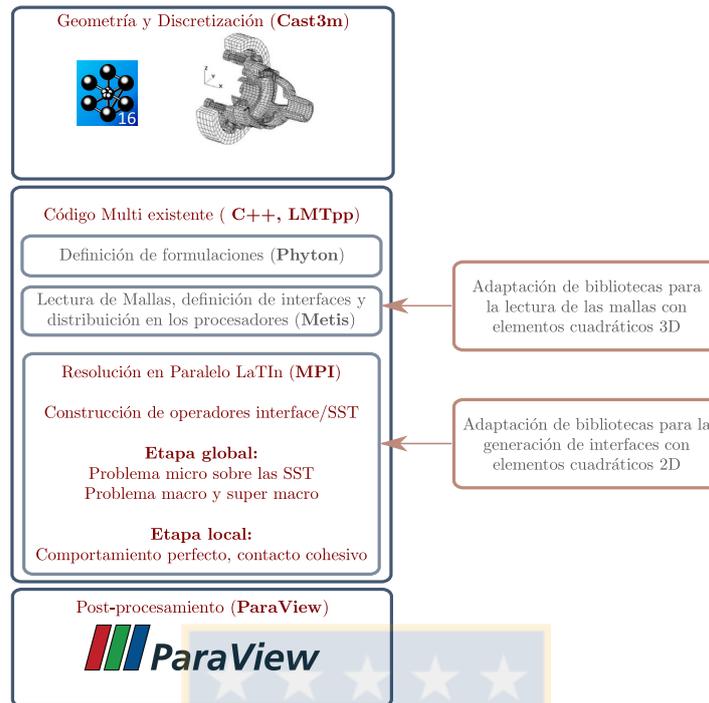


Figura 5.4: Diagrama de implementación en el código MULTI

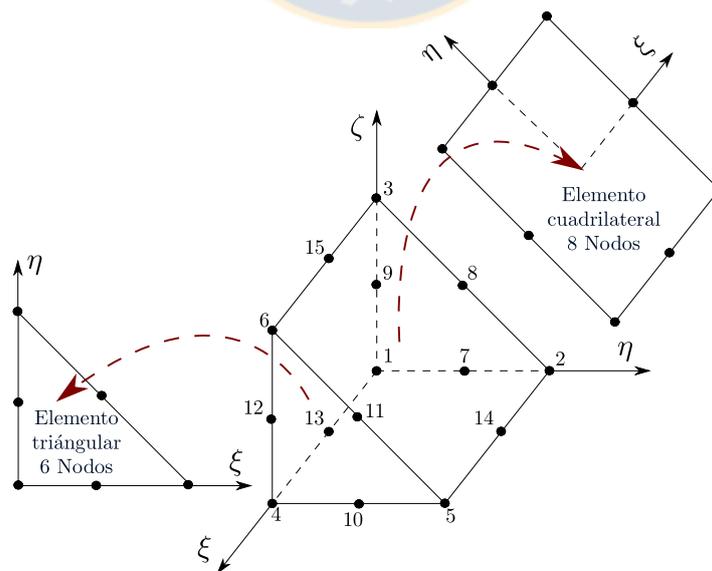


Figura 5.5: Generación de interfaces 2D

Capítulo 6

Resultados

En este capítulo se propone la utilización de elementos cuadráticos 3D en la discretización de las subestructuras de la estrategia multiescala, con el objetivo de comparar los resultados con la discretización típicamente utilizada con este método (elementos de primer orden).

Para ello, se evalúan problemas mecánicos clásicos y así comparar: desplazamientos, fuerzas, tasa de convergencia y tiempo de cálculo. Los problemas a modelar son los siguientes:

- Flexión
 - Material isotrópico: Verificar el efecto sobre los desplazamientos y comparar respecto a la solución analítica
 - Material compuesto ortotrópico: Verificar el efecto sobre la convergencia y comparar solución dual de esfuerzos
- Pandeo: Verificar el efecto sobre problemas con grandes transformaciones
- Delaminación (Ensayo DCB): Verificar el efecto sobre el cálculo en interfaces cohesivas

6.1. Flexión

El problema de flexión estudiado consiste en una placa delgada en flexión. Para la geometría se considera un largo $L = 160$ [mm], ancho $a = 120$ [mm] y espesor $h = 4$ [mm]. Respecto a las condiciones de borde, la placa se encuentra empotrada en un extremo y con una carga superficial F_{d_0} en su cara superior (ver Fig. 6.1), esto bajo el supuesto de pequeños desplazamientos.

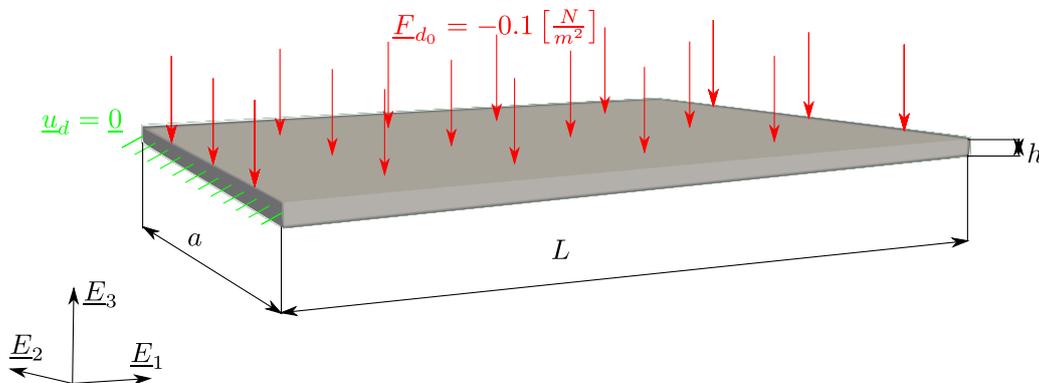


Figura 6.1: Problema de flexión

Con el objetivo de estudiar los desplazamientos y la convergencia se consideran dos casos, un material isotrópico y otro ortotrópico. En el primer caso, se evalúan los desplazamientos,

esfuerzos y tiempo de cálculo. Luego, en el segundo caso se evalúan desplazamientos, esfuerzos, tiempo de cálculo y convergencia.

6.1.1. Isotrópico

Para el problema isotrópico y homogéneo, se considera un material con propiedades similares al acero (ver Tab. 6.1). Además, los desplazamientos son comparados con la curva elástica teórica (ver Fig. 6.2).

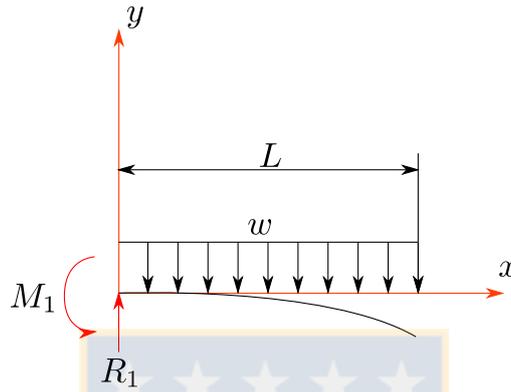


Figura 6.2: DCL placa isotrópica

$$y = -\frac{w(x)x^2}{24EI} (4xL - x^2 - 6L^2) \quad (6.1)$$

Dónde y es la deflexión de la viga, E el módulo elástico del material, I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga, L es el largo de la viga y $w(x) = a \underline{F}_{d_0}$.

Tabla 6.1: Material problema de flexión isotrópico

Material		
Módulo elástico (E)	210	[GPa]
Módulo poisson (ν)	0,3	[-]

Discretización y subestructuración

La geometría se divide en 64 subestructuras idénticas (ver Fig. 6.3), con ello se generan 184 interfaces, algunas de ellas son utilizadas para definir las condiciones de borde del problema (interfaces superiores y laterales), y las otras corresponden a interfaces perfectas. Cada subestructura queda con un largo $L_{sst} = 20$ [mm], un ancho $a_{sst} = 15$ [mm] y un espesor $h_{sst} = 4$ [mm].

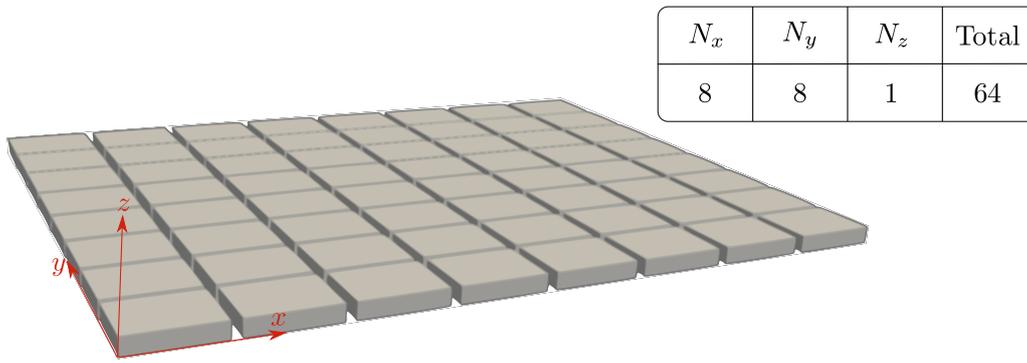


Figura 6.3: Subestructuración problema flexión, dónde N_i es el número de sst en la dirección i

Para verificar el efecto del grado del elemento sobre los resultados se consideran cuatro tipos de discretizaciones, para todas ellas se utiliza un elemento de tipo Prisma. Las tres primeras consideran elementos Prisma de 6 nodos. La primera con $n_x = 10$, $n_y = 8$ y $n_z = 2$. La segunda discretización con $n_x = 15$, $n_y = 12$ y $n_z = 3$. La tercera con $n_x = 20$, $n_y = 16$ y $n_z = 4$. Por lo tanto, estas tres discretizaciones antes mencionadas, generan interfaces 2D con elementos de tipo cuadrilateral de 4 nodos y triangular de tres nodos. Por último, la cuarta discretización considera elementos de Prisma con 15 nodos, con $n_x = 10$, $n_y = 8$ y $n_z = 2$, y genera interfaces 2D con elementos cuadrilaterales de 8 nodos y triangulares de 6 nodos. Para más detalles de la discretización de cada subestructura ver Fig. 6.4 y la Tab. 6.2 con el número de grados de libertad.

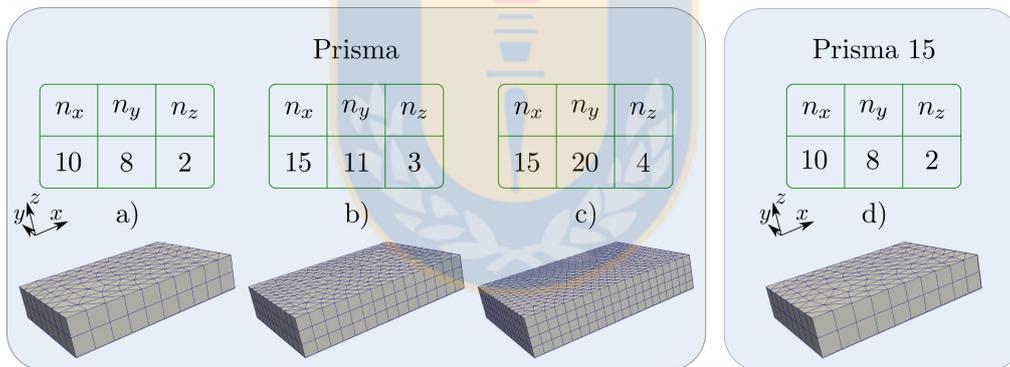


Figura 6.4: Tipos de discretización problema isotrópico. a) Prisma 6 con $n_z = 2$ b) Prisma 6 con $n_z = 3$ c) Prisma 6 con $n_z = 4$ y d) Prisma 15 con $n_z = 2$

La siguiente tabla muestra un resumen de las discretizaciones obtenidas:

Tabla 6.2: Resumen discretización problema isotrópico

Discretización	Elementos	GDL
a) Prisma $n_z = 2$	22 272	61 056
b) Prisma $n_z = 3$	71 040	162 816
c) Prisma $n_z = 4$	173 568	360 000
d) Prisma 15 $n_z = 2$	22 272	262 464

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para cada una de las discretizaciones antes señaladas. Los cálculos se realizaron con 64 procesadores.

Resultados

Se comienza por estudiar la forma de la curva elástica (ver Fig. 6.5), comparándola con la curva teórica. Es posible verificar que al aumentar el número de elementos lineales, la curva elástica se acerca a la teórica, flexibilizando el sistema, pero un aumento excesivo en el número de elementos aumenta el número de grados de libertad, volviendo más costoso el cálculo. Luego, si se analiza la curva (d), correspondiente a los elementos cuadráticos, es posible verificar que está aún más cercana que la curva (c).

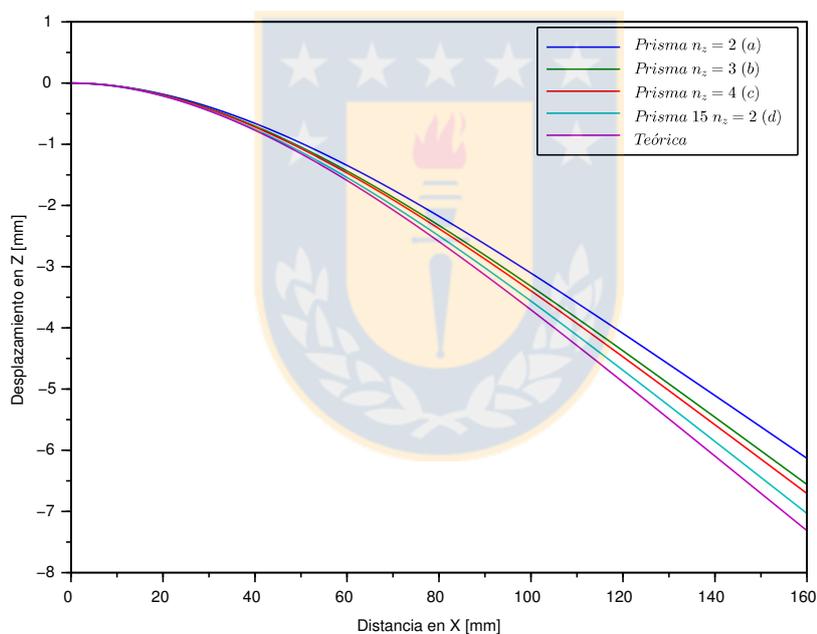


Figura 6.5: Resultados curva elástica: desplazamiento vertical de la fibra neutra

Tomando como referencia el cálculo (c), ya que presenta el mejor resultado en desplazamiento, utilizando elementos lineales, se puede construir la Tab. 6.3, la cual compara tiempo de cálculo, grados de libertad (GDL), desplazamiento máximo y el error en el desplazamiento de ese punto. Luego, se verifica que con la utilización de elementos cuadráticos es posible obtener resultados con un 3,84 % de error, utilizando solo el 19,3 % del tiempo empleado con la discretización (c). Si se considera que se utilizan el 72,9 % de los GDL empleados en (c), la disminución en el tiempo empleado en el cálculo no depende directamente del número de grados de libertad, esto se debe a que la factorización de matrices de rigidez ha resultado más eficiente.

Tabla 6.3: Resultados problema flexión

	$\frac{\text{Tiempo cálculo}}{\text{Tiempo cálculo (c)}} [\%]$	$\frac{\text{Elementos}}{\text{Elementos (c)}} [\%]$	$\frac{\text{GDL}}{\text{GDL (c)}} [\%]$	z_{max} [mm]	Error %
Prisma $n_z = 2$ (a)	4,64	12,8	17	-6,13	16,16
Prisma $n_z = 3$ (b)	22,76	40,9	45,2	-6,56	10,32
Prisma $n_z = 4$ (c)	100	100	100	-6,71	8,31
Prisma 15 $n_z = 2$ (d)	19,32	73	72,9	-7,03	3,84

Por último, la Fig. 6.6 muestra la deformada de las cuatro discretizaciones empleadas para resolver el problema.

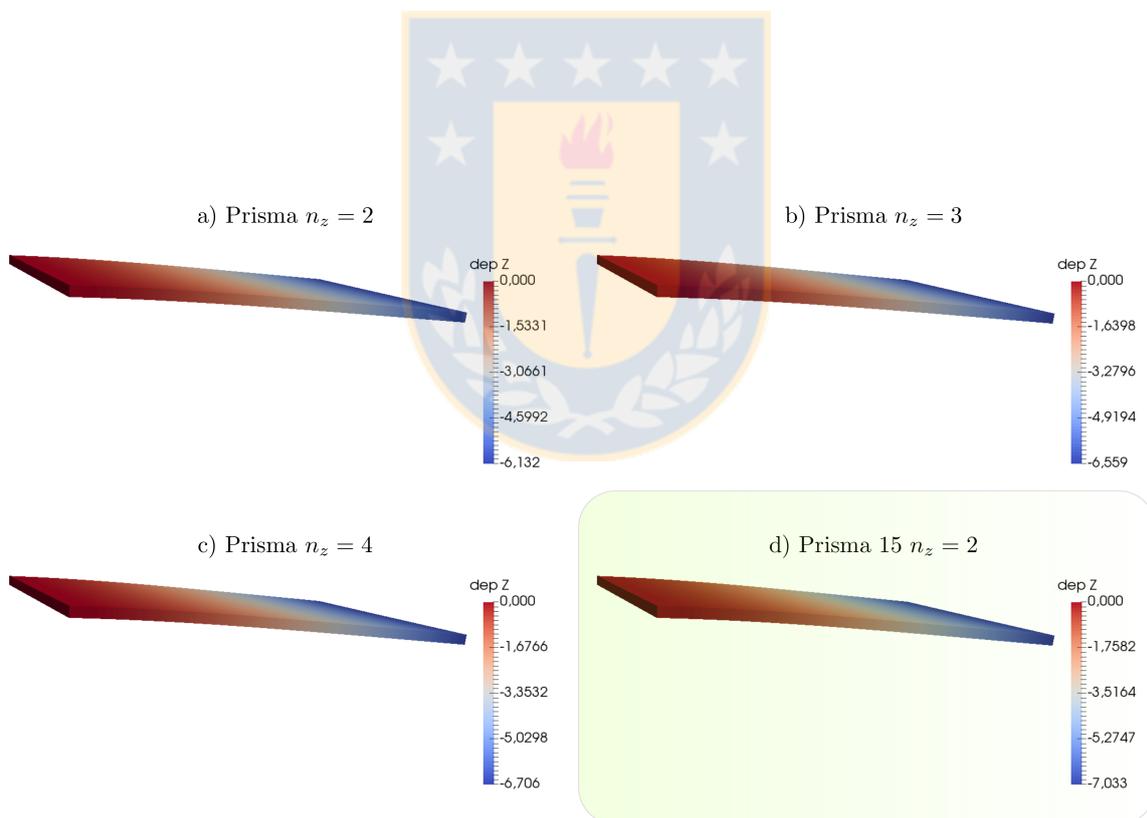


Figura 6.6: Deformada en flexión

Si se analiza la convergencia (ver Fig. 6.7) no hay gran diferencia entre una malla fina con elementos de primer orden y una de elementos de segundo orden, independiente del resultado.

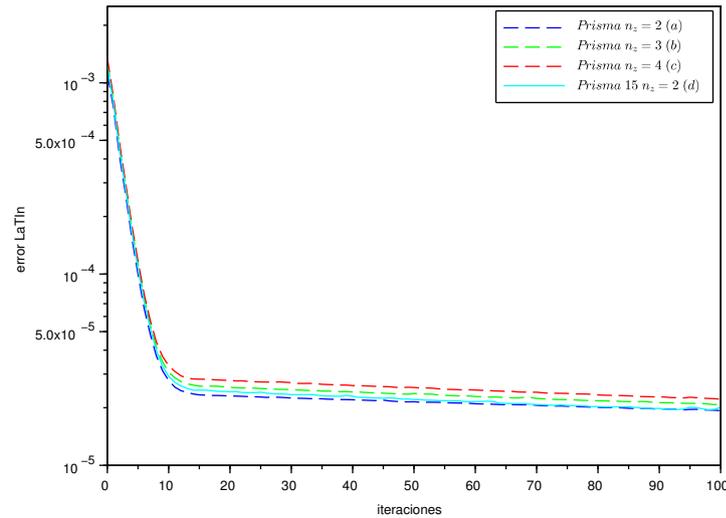


Figura 6.7: Error LaTin versus iteración en problema de flexión isotrópico

6.1.2. Ortotrópico

Para el problema de un laminado compuesto ortotrópico se considera un apilamiento de cuatro láminas $[0^\circ, 90^\circ]_s$. La siguiente tabla muestra las propiedades del material:

Tabla 6.4: Material problema de flexión ortotrópico

Material		
Módulo elástico (E_1)	165	[GPa]
Módulo elástico ($E_2 = E_3$)	9	[GPa]
Coefficiente de poisson ($\nu_{12} = \nu_{13}$)	0,3	[-]
Coefficiente de poisson (ν_{23})	0,5	[-]
Módulo de Rigidez ($G_{12} = G_{13}$)	5,6	[GPa]
Módulo de Rigidez (G_{23})	2,8	[GPa]

Discretización y subestructuración

La geometría se divide en 256 subestructuras idénticas (ver Fig. 6.8), generando 736 interfaces, en dónde algunas se utilizan para definir las condiciones de borde del problema y las otras corresponden a interfaces perfectas. Cada subestructura queda con un largo $L_{sst} = 20$ [mm], un ancho $a_{sst} = 15$ [mm] y un espesor $h_{sst} = 1$ [mm]. Por lo tanto, al definir cuatro subestructuras en el espesor, se está considerando que cada capa tiene un espesor de 1 [mm].

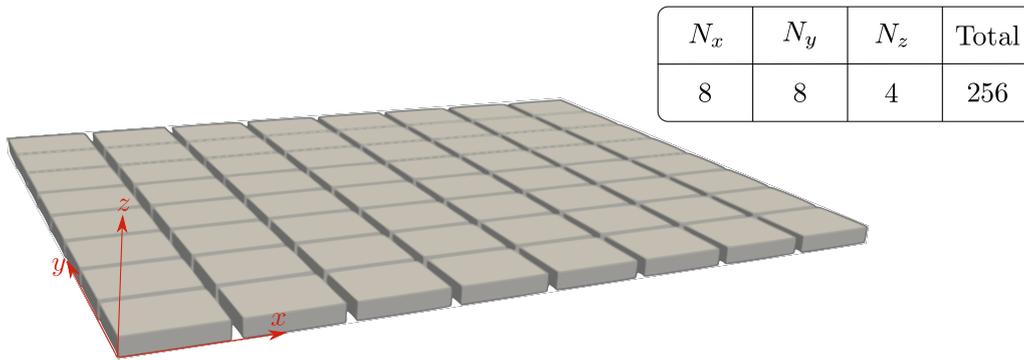


Figura 6.8: Subestructuración problema flexión ortotrópico

Como se desea evaluar la convergencia, nuevamente se consideran cuatro discretizaciones (ver Fig. 6.9), pero se agregan las variantes con sub-integración, lo que se traduce en una sobre-discretización de los elementos de borde de las subestructuras, tal como se definió en la Sec. 4.2.1. Las primeras tres discretizaciones se realizan con elementos de tipo Prisma de 6 nodos, generando interfaces 2D compuestas por elementos cuadrilaterales de cuatro nodos y triangulares de tres nodos. Para la primera se definen $n_x = 10$, $n_y = 10$ y $n_z = 2$, lo que se traduce en 8 elementos en el espesor. Luego, esta misma discretización se realiza con sub-integración (a.2), donde cada elemento tipo Prisma 6 de la superficie se divide en 3 tetraédros. La segunda discretización utiliza $n_x = 15$, $n_y = 15$ y $n_z = 3$, con ello se tienen 12 elementos en el espesor y su variación con sub-integración (b.2). La tercera discretización utiliza $n_x = 20$, $n_y = 20$ y $n_z = 4$, con ello se tienen 16 elementos en el espesor. Por último, se utiliza una discretización con elementos de tipo Prisma 15, con $n_x = 10$, $n_y = 10$ y $n_z = 2$, obteniendo 8 elementos en el espesor.

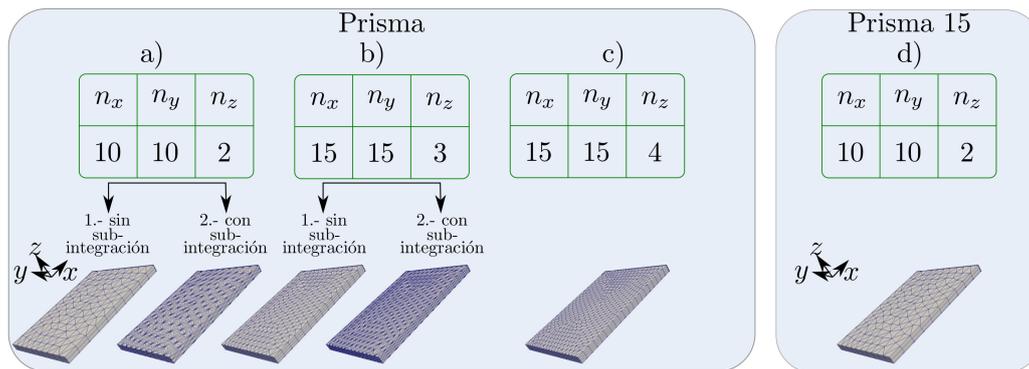


Figura 6.9: Tipos de discretización problema ortotrópico. a.1) Prisma con $n_z = 2$ sin sub-integración a.2) Prisma con $n_z = 2$ con sub-integración b.1) Prisma con $n_z = 3$ sin sub-integración b.2) Prisma con $n_z = 3$ con sub-integración c) Prisma con $n_z = 4$ d) Prisma 15 con $n_z = 2$

La siguiente tabla muestra un resumen de las discretizaciones obtenidas:

Tabla 6.5: Resumen discretización problema ortotrópico

Discretización	Elementos	GDL
a.1) Prisma $n_z = 2$	113 664	574 128
a.2) Prisma $n_z = 2$	611 328	706 560
b.1) Prisma $n_z = 3$	393 216	881 664
b.2) Prisma $n_z = 3$	1 565 696	1 806 336
c) Prisma $n_z = 4$	953 936	1 912 320
d) Prisma 15 $n_z = 2$	113 664	1 320 192

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para cada una de las discretizaciones antes señaladas. Los cálculos se realizaron con 64 procesadores.

Resultados

Nuevamente, se comienza estudiando la curva elástica de la Fig. 6.10. Luego, se puede ver que las curvas correspondientes a la discretización (a.1) y (a.2) no convergen. Luego, si se analizan las otras cuatro curvas, se tiene que los resultados, en cuanto a desplazamientos, son similares.

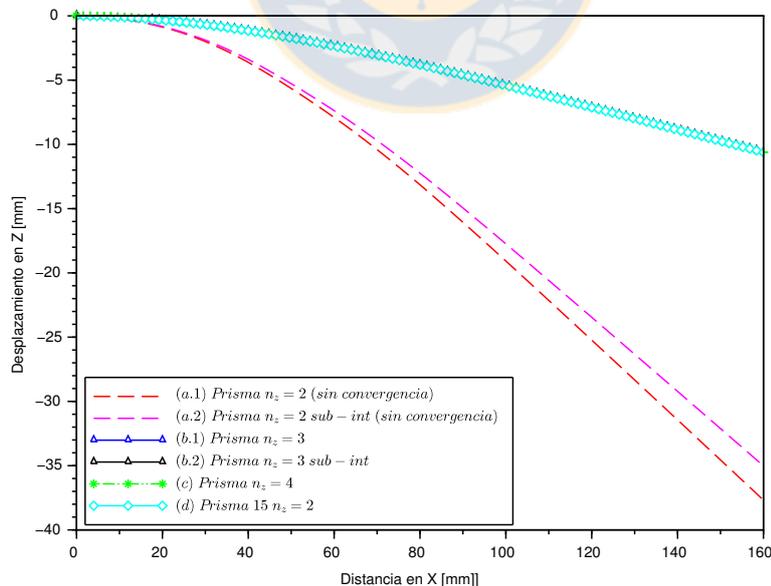


Figura 6.10: Curva elástica problema flexión ortotrópico

Si se analiza la convergencia (ver Fig. 6.11) se puede comprobar que utilizando elementos cuadráticos se llega a un resultado con un error menor a 10^{-5} , en 68 iteraciones, menos de la mitad de las realizadas en la curva (b.1) para converger (148 iteraciones).

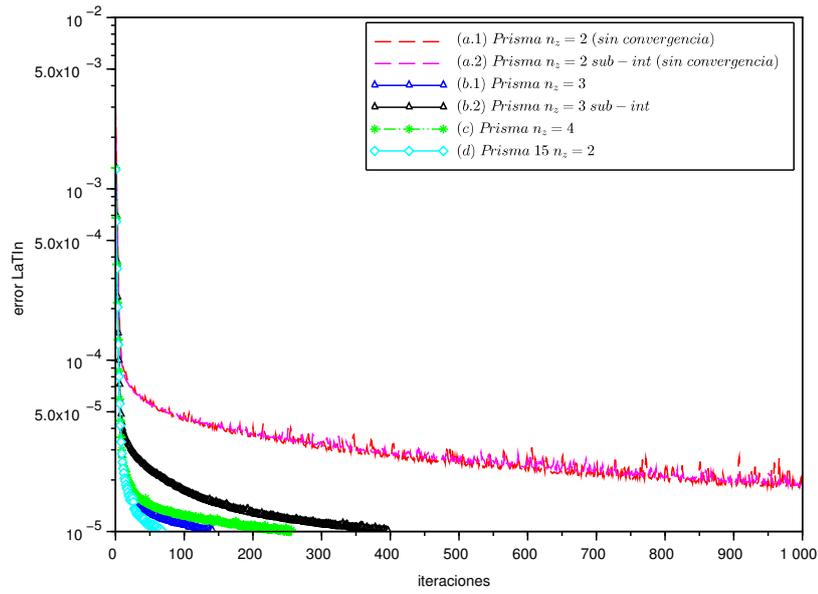


Figura 6.11: Error LaTin versus iteración en problema de flexión ortotrópico



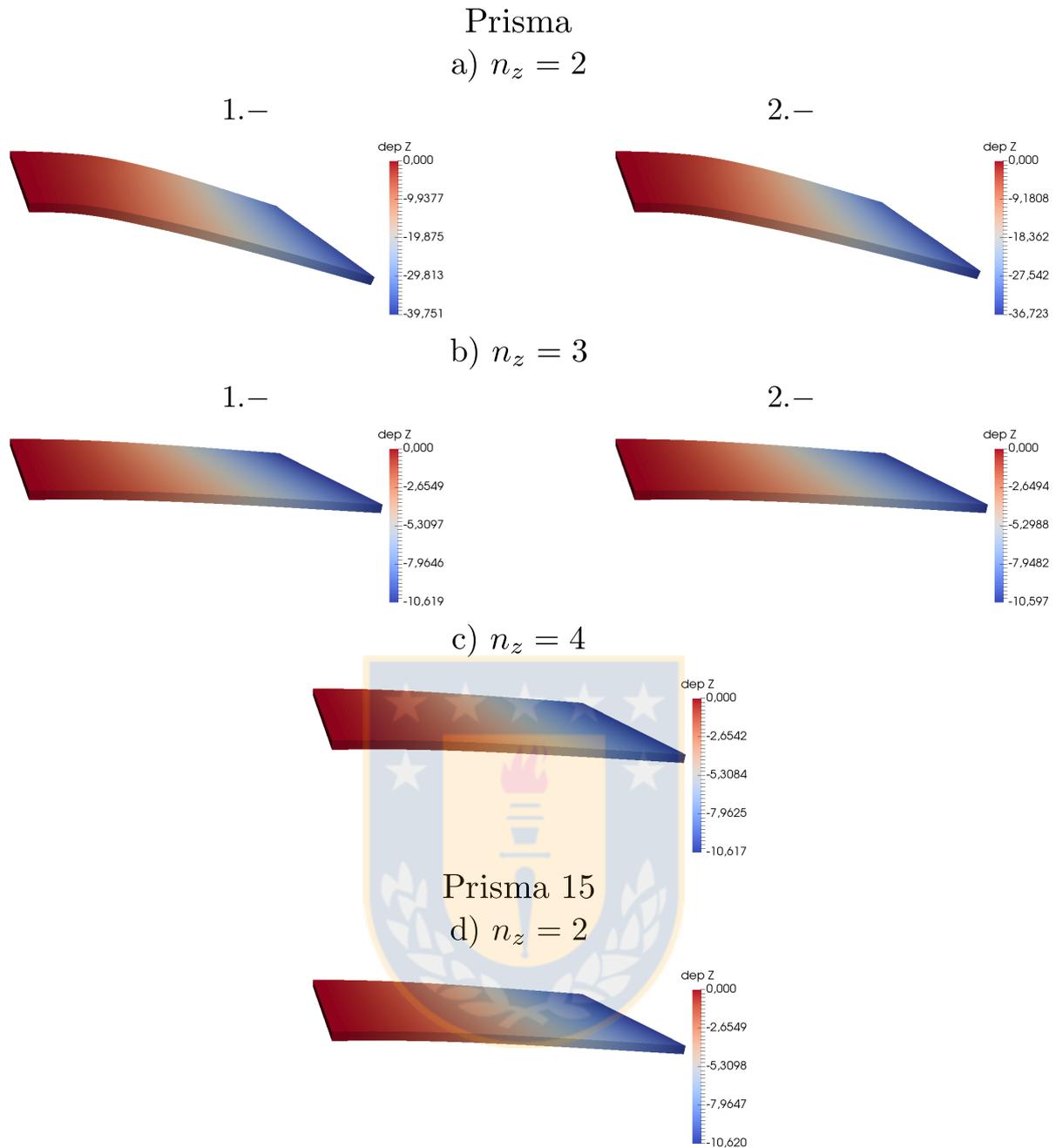


Figura 6.12: Deformada en flexión ortotrópico. a.1) Prisma con $n_z = 2$ elementos en el espesor sin sub-integración a.2) Prisma con $n_z = 2$ elementos en el espesor con sub-integración b.1) Prisma con $n_z = 3$ elementos en el espesor sin sub-integración b.2) Prisma con $n_z = 3$ elementos en el espesor con sub-integración c) Prisma con $n_z = 4$ elementos en el espesor sin sub-integración d) Prisma 15 con $n_z = 2$ elementos en el espesor.

Tomando como referencia el cálculo (b.1), ya que presenta resultados similares a las curvas (c) y (d) con la menor cantidad de elementos lineales, se puede construir la tabla 6.6, la cual compara tiempo de cálculo, número de elementos y GDL. Luego, se verifica que utilizando elementos cuadráticos (d) es posible obtener los mismos resultados que en (b.1), pero utilizando solo el 54,2% del tiempo, incluso considerando que el número de GDL aumenta en un 50%. Nuevamente, los tiempos de factorización de las matrices de rigidez son menores.

Tabla 6.6: Resultados problema flexión ortotrópico

	Tiempo cálculo Tiempo cálculo (b) [%]	Elementos Elementos (b.1) [%]	GDL GDL (b.1) [%]	z_{max} [mm]
Prisma $n_z = 2$ (a.1)	40,2	29	65,1	-39,75
Prisma $n_z = 2$ (a.2)	81,4	155	80,1	-36,72
Prisma $n_z = 3$ (b.1)	100	100	100	-10,62
Prisma $n_z = 3$ (b.2)	370,7	398	200	-10,60
Prisma $n_z = 4$ (c)	441	242	217	-10,62
Prisma 15 $n_z = 2$ (d)	54,2	29	150	-10,62

Por último, es posible obtener los esfuerzos en la parte superior de la placa (σ_{xx}) y compararlo con el valor teórico a partir de la expresión $\sigma_{xx} = M(x) \cdot c/I$, con $c = h/2$, $I = a \cdot h^3/12$ y $M(x) = fbx^2/2 - fbLx + fbL^2/2$. A partir de la Fig. 6.13 se observa que la discretización (d) concuerda con la solución teórica.

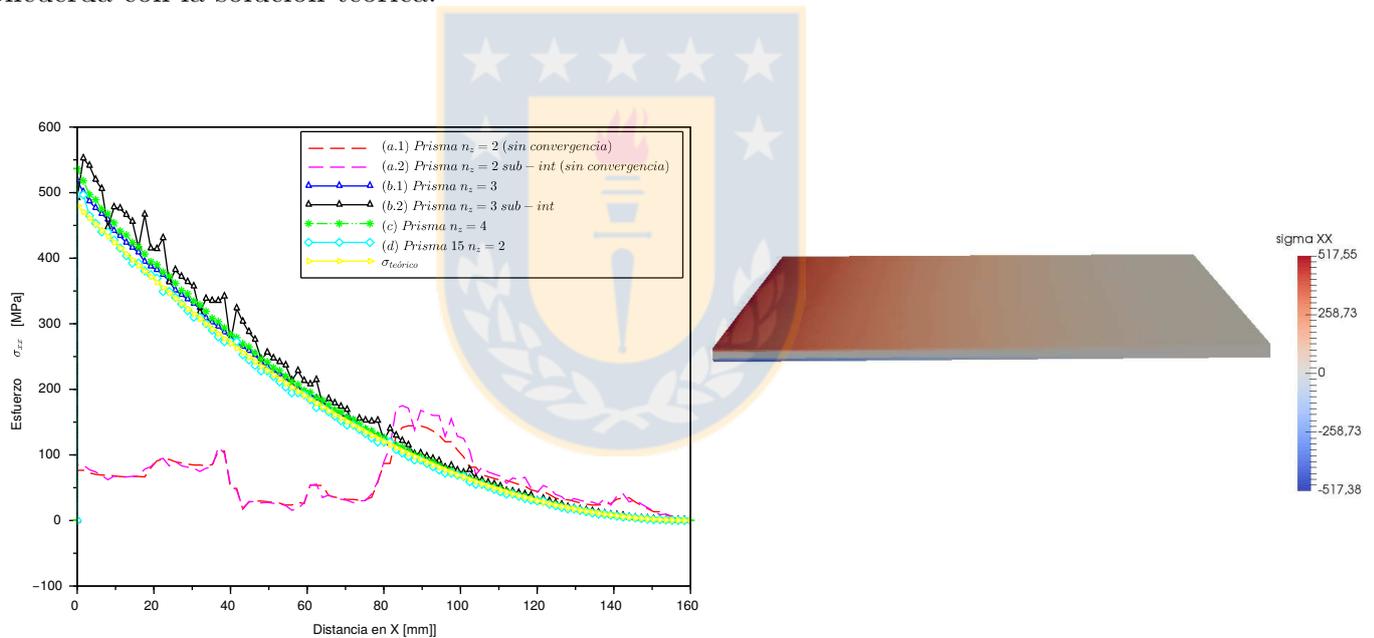


Figura 6.13: Esfuerzo vs Posición problema flexión isotrópico

6.2. Pandeo

En esta sección se estudia la aplicación de la estrategia multiescala con elementos de segundo orden en problemas con no linealidades geométricas. El problema a simular es una placa sujeta en ambos extremos, con uno de ellos sometido a un desplazamiento \underline{u}_d , produciendo un estado de compresión uniaxial. Luego, se aplica una perturbación \underline{F}_d perpendicular al plano de la placa para inducir pandeo fuera del plano.

Para la geometría se considera una placa con un largo $L = 10$ [mm], un ancho $a = 1$ [mm] y un espesor $h = 0,1$ [mm] (ver Fig. 6.14). Las propiedades del material utilizado se muestra en la Tab. 6.7.

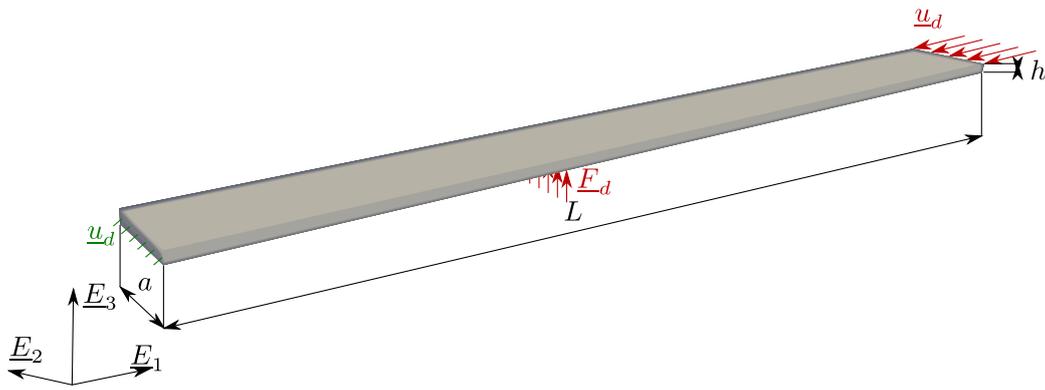


Figura 6.14: Problema de Pandeo

Se busca obtener la curva P/P_{crit} vs desplazamiento transversal, la cual se compara con la curva teórica, según [45]:

$$y_a = \frac{1}{2k} \int_0^\alpha \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} d\theta \quad (6.2)$$

$$P_{crit} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (6.3)$$

Dónde E es el módulo elástico del material, I es el momento de inercia de la sección transversal y L es el largo de la placa.

Tabla 6.7: Material problema de pandeo

Material		
Módulo elástico (E)	135	[GPa]
Módulo poisson (ν)	0,3	[-]

El desplazamiento u_d es de 3,6 [mm] y produce en la placa un estado de compresión uniaxial. Por otro lado, para visualizar el primer modo de pandeo, se utiliza una fuerza perturbadora de $F_d = 0,01$ [N].

Discretización y subestructuración

La geometría se divide en 100 subestructuras idénticas (ver Fig. 6.15), con $N_x = 50$, $N_y = 2$ y $N_z = 1$. Esta subdivisión genera 156 interfaces, en dónde algunas se utilizan para definir las condiciones de borde del problema y las otras corresponden a interfaces perfectas. Cada subestructura queda con un largo $L_{sst} = 20$ [mm], un ancho $a_{sst} = 15$ [mm] y un espesor $h_{sst} = 1$ [mm].

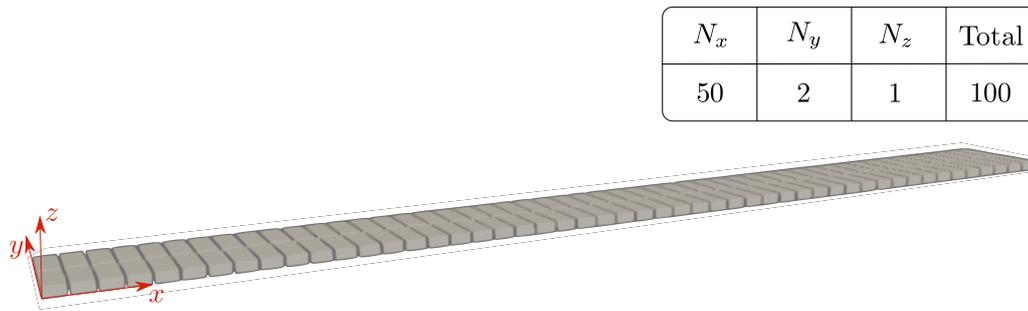


Figura 6.15: Subestructuración problema de pandeo dónde N_i es el número de sst en la dirección i

Para este problema se utilizan tres tipos de discretizaciones (ver Fig. 6.16), variando principalmente el número de elementos en el espesor. Nuevamente se utilizan los elementos tipo Prisma 6 para realizar el mallado de la estructura. Las dos primeras utilizan elementos de tipo Prisma de 6 nodos. Para el caso a) se realiza con $n_x = 5$, $n_y = 10$ y $n_z = 4$. El caso b) se realiza con $n_x = 10$, $n_y = 20$ y $n_z = 10$. Estas dos mallas generan interfaces 2D compuestas por elementos cuadrilaterales de 4 nodos y triangulares de 3 nodos. Por último, el caso c) realiza con elementos de tipo Prisma de 15 nodos y se definen $n_x = 5$, $n_y = 10$ y $n_z = 4$, generando interfaces 2D con elementos cuadrilaterales de 8 nodos y triangulares de 6 nodos.

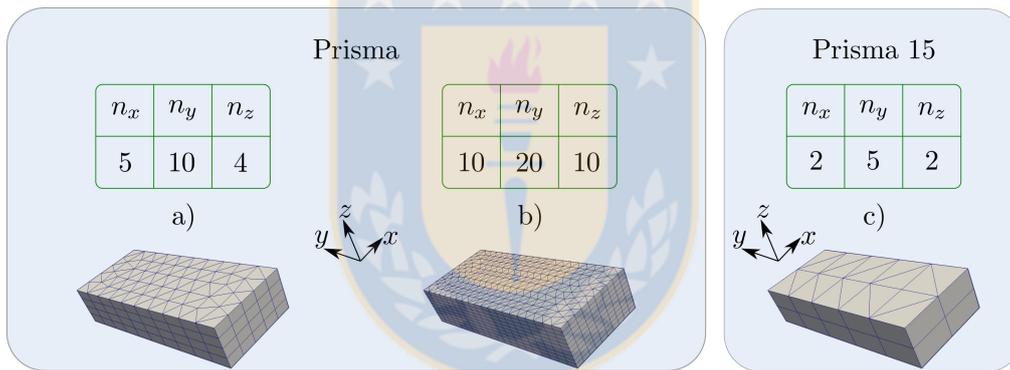


Figura 6.16: Tipos de discretización para el problema pandeo. a) Prisma $n_z = 4$ b) Prisma $n_z = 10$ c) Prisma 15 $n_z = 2$

A continuación, la Tab. 6.8 muestra los detalles de cada discretización, en cuanto al número de elementos y grados de libertad de cada problema a resolver.

Tabla 6.8: Detalles discretización problema de pandeo

	Elementos	GDL
Prisma $n_z = 4$	41 600	102 000
Prisma $n_z = 10$	422 000	798 600
Prisma 15 $n_z = 2$	4 000	60 300

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para cada una de las discretizaciones antes señaladas. Los cálculos se realizaron con 48 procesadores.

Resultados

Los resultados obtenidos se comparan a través de la curva fuerza de compresión versus desplazamiento transversal en $x = L/2$ (ver Fig. 6.17), donde $P_{crit} = 4,4$ [N]. El desplazamiento u_d aplicado se divide en 1000 incrementos.

Se observa que (a) y (b) no aproximan correctamente la carga crítica, ambos con un error de 8,68 % y 2,61 % respectivamente, mientras que (c) es la más cercana con un 1,46 % de diferencia cuando el desplazamiento transversal es 0,05 [-].

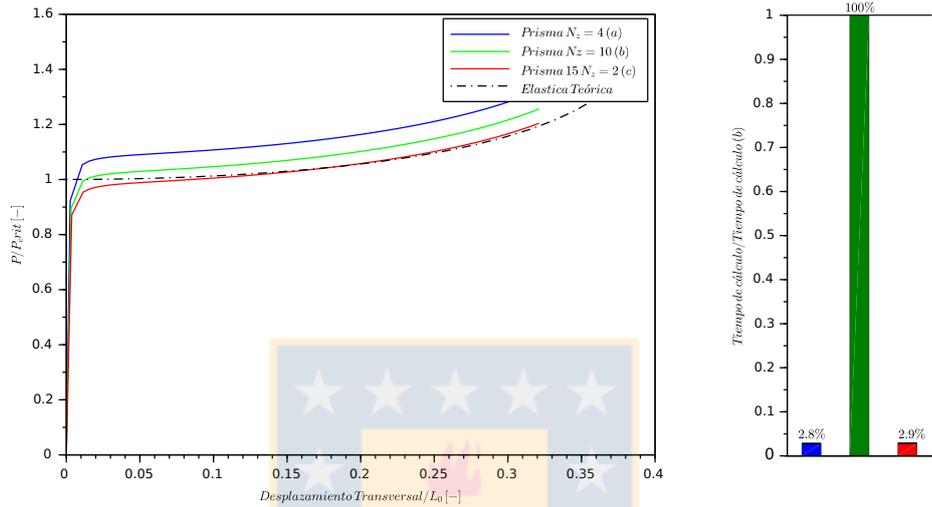


Figura 6.17: Influencia de un elemento de segundo orden en la curva Fuerza vs Desplazamiento y tiempo de cálculo

Por otra parte, el tiempo empleado en resolver el problema con la discretización (c), representa solo el 2,9 % del utilizado en (b), que corresponde a la curva más cercana a la teórica.

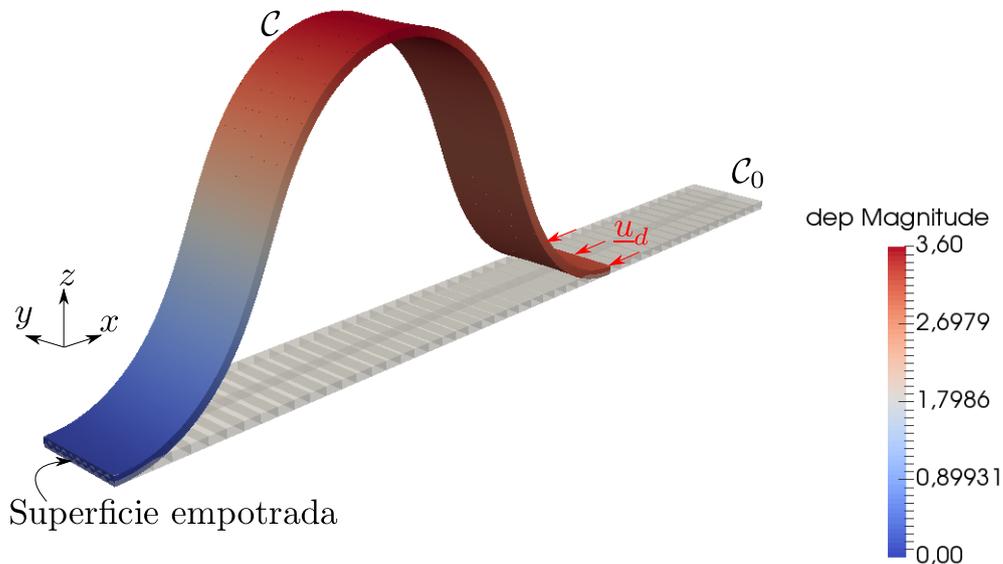


Figura 6.18: Deformada problema de pandeo con Prisma 15

6.3. Delaminación

En esta sección se modela la delaminación a través de un ensayo de viga en doble voladizo o DCB (*Double Cantilever Beam*). Por lo tanto, no solo se tienen interfaces perfectas, también es necesario considerar interfaces cohesivas, modelando su comportamiento según lo expuesto en la Sec. 4.1.2.

Los parámetros recomendados para las interfaces cohesivas se describen en [30], por otro lado, el principal problema radica en la definición de la estrategia para la actualización de $k_{E_0}^-$, asociada a la evolución del parámetro de daño d . Para resolver este problema se utiliza la estrategia propuesta en [42].

El problema de DCB propuesto (ver Fig. 6.19) considera una geometría con un largo $L = 20$ [mm], un ancho $a = 2$ [mm], un espesor $h = 1$ [mm] y una fisura $a_0 = 10$ [mm]. Por otra parte, las propiedades del material y de la interface cohesiva están definidos en la Tab. 6.9.

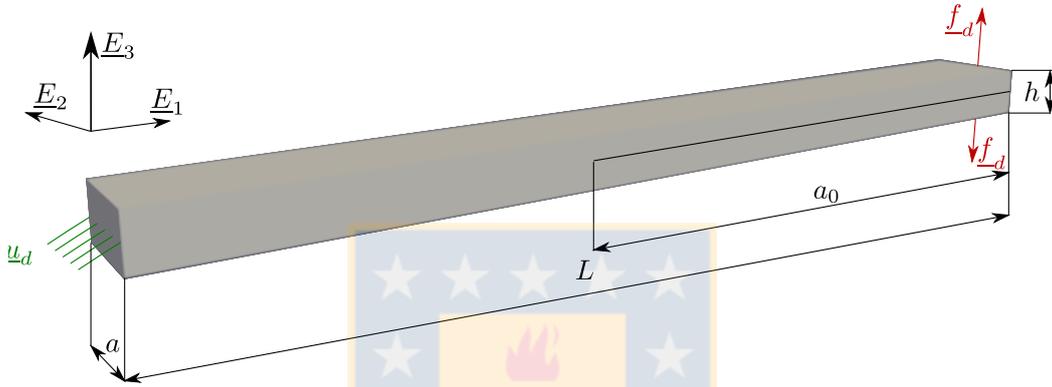


Figura 6.19: Problema de Delaminación

Los resultados obtenidos en esta sección serán comparados con la solución teórica obtenida a partir del modelo de M. F. Kanninen [29].

Tabla 6.9: Materiales usados en el problema DCB

Material		
Módulo elástico (E)	135	[GPa]
Módulo poisson (ν)	0,3	[-]
Interface Cohesiva		
k_n	$100 \cdot 10^3$	[N/mm ³]
α	1	[-]
Y_c	0,4	[N/mm]
n	0,5	[-]

Discretización y subestructuración

La geometría se divide en 160 subestructuras idénticas (ver Fig. 6.20), con $N_x = 40$, $N_y = 2$ y $N_z = 2$, generando 324 interfaces. Además, de interfaces perfectas, se definen interfaces cohesivas a lo largo del eje x con una prefisura de largo $a_0 = 10$ [mm] para describir la delaminación.

Cada subestructura queda con un largo $L_{sst} = 0,5$ [mm], un ancho $a_{sst} = 1$ [mm] y un espesor $h_{sst} = 0,5$ [mm].

N_x	N_y	N_z	Total
40	2	2	160

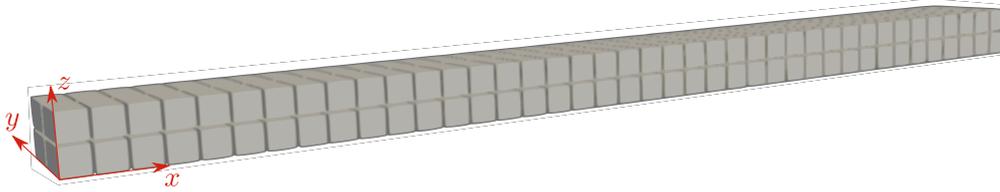


Figura 6.20: Subestructuración de problema DCB, donde N_i es el número de sst en la dirección i

Para este problema se utilizan tres tipos de discretizaciones (ver Fig. 6.21), variando principalmente el número de elementos en la dirección y , para mejorar la discretización del frente de fisura. Nuevamente, se utilizan los elementos tipo Prisma para realizar el mallado de la estructura. La primera discretización utiliza elementos de tipo Prisma de 6 nodos y las otras dos restantes con elementos Prisma de 15 nodos. Para el caso a) se discretiza con $n_x = 5$, $n_y = 10$ y $n_z = 6$, el caso b) utiliza $n_x = 3$, $n_y = 5$ y $n_z = 3$ y c) $n_x = 4$, $n_y = 8$ y $n_z = 5$.

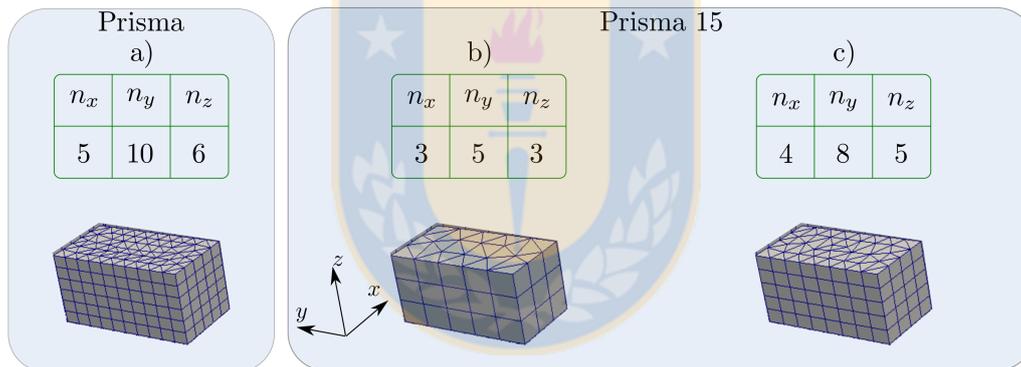


Figura 6.21: Tipos de discretización para el problema DCB. a) Prisma $n_z = 6$ b) Prisma 15 $n_z = 3$ c) Prisma 15 $n_z = 5$

La Tab. 6.10 muestra los detalles de cada discretización, en cuanto al número de elementos y grados de libertad de cada problema a resolver.

Tabla 6.10: Detalles discretización problema DCB

	Elementos	GDL
a) Prisma $n_z = 6$	109 440	245 280
b) Prisma 15 $n_z = 3$	14 400	182 400
c) Prisma 15 $n_z = 5$	54 400	576 480

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para cada una de las discretizaciones antes señaladas. Los cálculos se realizaron con 64 procesadores.

Resultados

Con los resultados obtenidos se muestra la fuerza f_d versus el desplazamiento transversal u_d en el extremo derecho de la viga (ver Fig 6.22)

Es posible dividir la curva en tres zonas, la primera zona ascendente corresponde al modo en flexión, sin delaminación. Posteriormente, la segunda zona corresponde a la delaminación y corresponde a la zona descendente de la curva. Por último, la tercera zona nuevamente corresponde a un modo en flexión, cuando se ha delaminado la totalidad de la viga.

Para las zonas en flexión, la utilización de la discretización (b), con tres elementos no lineales en el espesor representa de forma satisfactoria dicho fenómeno. Pero no representa de forma correcta lo ocurrido en la segunda zona, donde ocurre la delaminación, debido al visible zigzag de la curva conforme aumenta de tamaño la grieta. Esto se debe a la cantidad de elementos utilizados en la dirección y , considerando que para ese caso $n_y = 5$. Luego, si se aumenta el número de elementos en dicha dirección se obtiene la discretización (c), que representa de forma satisfactoria las 3 zonas de la curva, pero el tiempo empleado para el cálculo es el doble al empleado con la discretización (a).

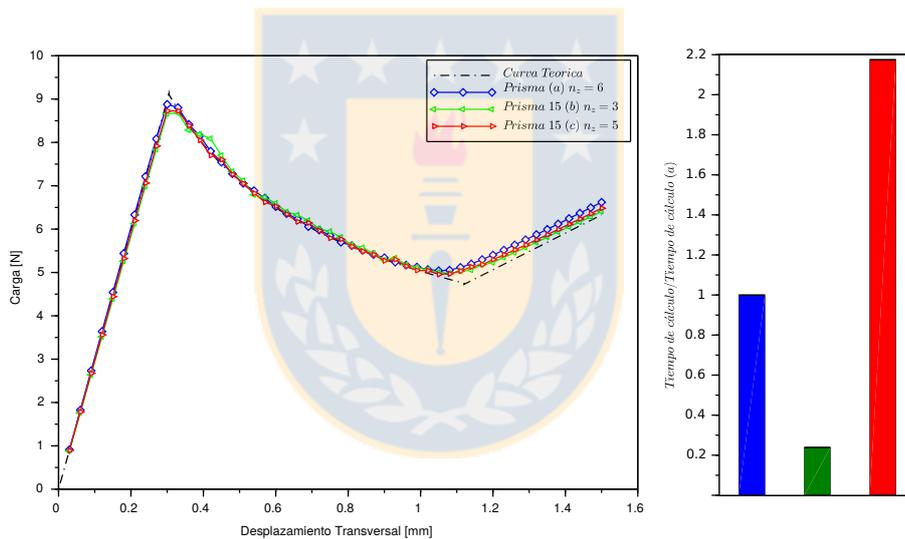


Figura 6.22: Influencia de los elementos cuadráticos en la simulación de DCB

La mala respuesta de los elementos cuadráticos a la delaminación se debe a que las fuerzas calculadas para evaluar el daño se realiza en las interfaces, con un grado de representación de orden 0. Por lo tanto, aunque se tengan interfaces con elementos de orden superior, la integral es calculada en un solo punto y la fuerza dependerá del número de interfaces, independiente del grado. Entonces, una forma de mejorar este problema podría ser utilizar funciones de forma lineales o cuadráticas para representar los esfuerzos y desplazamientos de las interfaces (etapa local).

De la Fig. 6.23 se puede observar que el número de iteraciones aumenta en el incremento 11° , es este punto en donde comienza la delaminación.

La Fig. 6.24 muestra el frente de fisura para las tres discretizaciones en el incremento 11° . En ella se puede comprobar la influencia del número de elementos en la dirección sobre la distribución del daño en la interface.

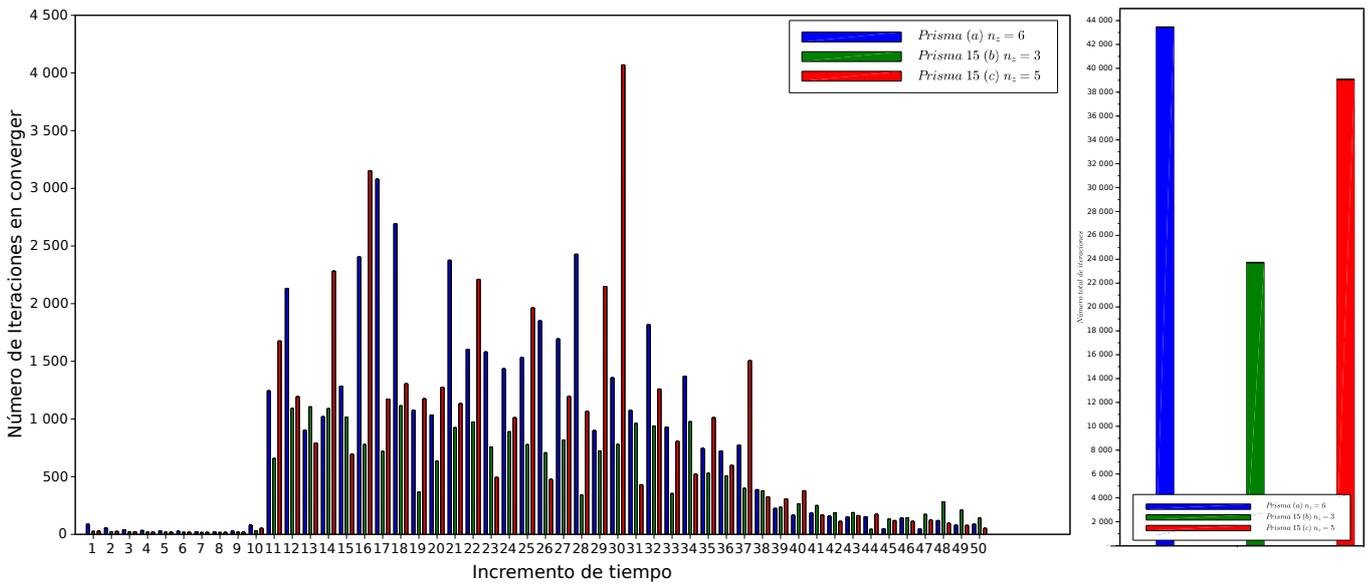


Figura 6.23: Influencia de los elementos cuadráticos en la convergencia de un problema de DCB

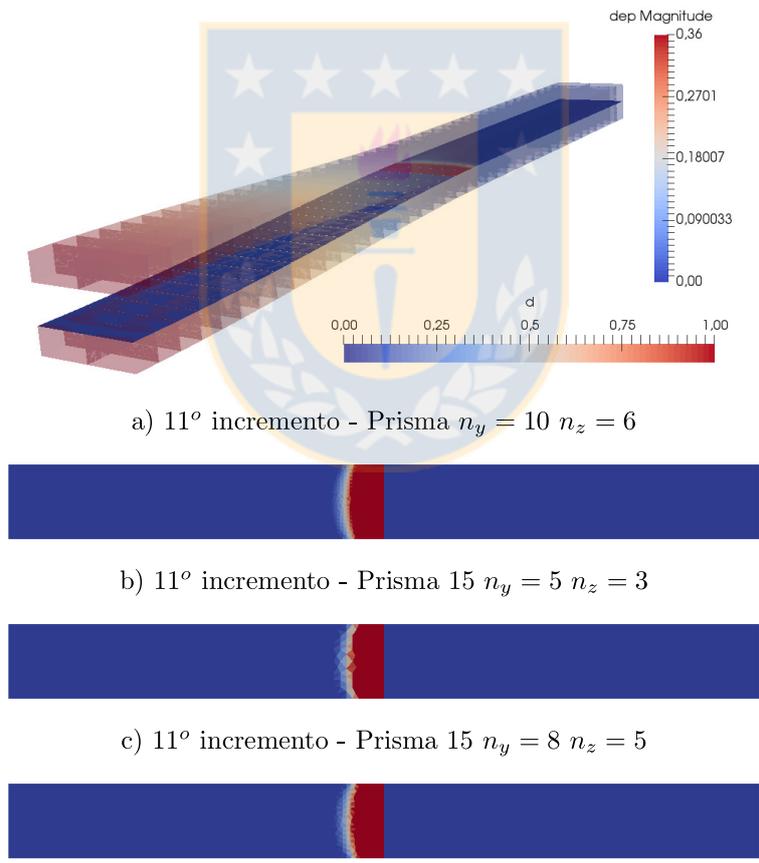


Figura 6.24: Deformada del problema DCB con el frente de grieta en el incremento 11

Conclusiones

Este trabajo se desarrolla en el marco del proyecto FONDECYT de iniciación N° 11130623, el cual utiliza una estrategia multiescala para el cálculo de estructuras laminadas esbeltas. Esta estrategia ha demostrado ser eficiente y robusta para el estudio de la interacción pandeo-delaminación-contacto. Sin embargo, para simular correctamente este comportamiento, se requiere de discretizaciones finas, lo que se traduce en problemas con un gran número de grados de libertad (GDL), siendo necesaria la utilización de técnicas de descomposición de dominio, implementadas en un algoritmo adaptado a procesadores con estructura paralela. Actualmente, la extensibilidad del método ha sido estudiada y probada por varios investigadores, pero aún con tiempos de cómputo elevados.

El algoritmo utilizado es de tipo iterativo-incremental, y se encuentra acoplado con una técnica de subestructuración. Además, se busca resolver un problema de elementos finitos subestructurado, considerando no linealidades geométricas en cada subestructura y no linealidades materiales en las interfaces, en las que se incluyen el contacto (con o sin fricción) y la delaminación (modelo cohesivo).

Para mejorar la convergencia y disminuir el costo de cada simulación de este enfoque, se implementan elementos finitos 3D de segundo orden en el código. Utilizando la misma configuración que tienen los elementos lineales disponibles, se agregan los nodos adicionales (intermedios) y con ello generar las funciones de forma adicionales y definir sus puntos de integración. Además, se modifican las librerías empleadas en la lectura de mallas y generación de interfaces de cada subestructura.

Luego, se definen cuatro problemas mecánicos simples con los que se pueden comparar los resultados desde tres enfoques; error respecto a un resultado teórico, convergencia y tiempo de cálculo. Respecto a los problemas, se considera: flexión con material isotrópico y ortotrópico, pandeo y delaminación.

Para el caso de una placa isotrópica en flexión, se puede verificar que al utilizar elementos de segundo orden se obtiene un error del 3,84% respecto al desplazamiento máximo teórico, reduciendo 46,2% (de 8,31% a 3,84%) el error obtenido con la discretización lineal fina (4 elementos en el espesor). Si se considera el tiempo de cálculo, la reducción es del 80% respecto a la malla más fina. Adicionalmente, resulta interesante comparar el tiempo de cálculo entre la discretización cuadrática y la lineal con 3 elementos en el espesor, la cual tiene un 62% menos de GDL, pero su tiempo de cálculo es un 15,11% mayor a la discretización cuadrática. Por lo tanto, aunque se utilicen más GDL con discretizaciones cuadráticas los tiempos de cálculo son menores debido a que la matriz de rigidez se factoriza en menor tiempo. Finalmente, la convergencia no muestra una gran diferencia en el número de iteraciones.

Para el caso de una placa ortotrópica en flexión, también se puede verificar la mejora en los resultados respecto al valor teórico del esfuerzo y el tiempo de cálculo, similares a la placa isotrópica en flexión. Adicionalmente, se aprecia que la convergencia mejora utilizando una discretización con elementos cuadráticos, reduciendo a 68 el número de iteraciones, utilizando 8 elementos en el espesor, mientras que la discretización lineal necesita de 256 y 141 iteraciones con 16 y 12 elementos lineales en el espesor respectivamente. Por lo tanto, los elementos de cuadráticos tienen una fuerte influencia en el número de iteraciones cuando se utilizan materiales

laminados compuestos.

Respecto al problema con no linealidad geométrica, para representar de forma correcta el pandeo se requieren mínimo 10 elementos lineales en el espesor. Sin embargo, al utilizar elementos cuadráticos se requieren sólo 2 elementos en el espesor, obteniendo una disminución en el tiempo de cálculo de un 97,1 %, con sólo un 7,6 % de GDL respecto a la discretización lineal. Adicionalmente, comparando la relación entre P/P_{crit} con el desplazamiento transversal/ L_0 se tiene que la curva elástica se aproxima de mejor forma a los elementos lineales, teniendo por ejemplo, un error de 1,46 % para con el desplazamiento transversal de 0,05 [-].

Finalmente, para el problema de delaminación se tiene que los elementos de segundo orden presentan una mejor aproximación al modelo teórico cuando la viga se encuentra en flexión, esto es antes y después de la delaminación. Sin embargo, durante la pérdida de rigidez local, los elementos no lineales presentan una variación (zigzag) en su curva elástica (F vs d), atribuible al grado de integración utilizado para calcular las fuerzas en las interfaces, siendo éstas de primer orden. Por lo tanto, aunque se tengan interfaces de orden superior, la fuerza es calculada sobre un solo punto, entonces, la aproximación depende del número de elementos en la dirección transversal al avance del frente de grieta (eje y).

Para finalizar, la utilización de elementos finitos cuadráticos reduce el tiempo de cálculo, el error respecto al valor teórico para problemas isotrópicos en flexión y pandeo y además mejora la convergencia para materiales ortotrópicos disminuyendo el número global de iteraciones. Por otro lado, para evaluar la delaminación es necesario desarrollar algunas mejoras en el Código MULTI, entre las que se pueden considerar; modificar el código y cambiar el grado de integración utilizados en la interface, sobre-discretizar sólo la zona dónde se cuente con una interfaz cohesiva.

Con esta implementación y mejorando el cálculo de las fuerzas en las interfaces, se puede proyectar el uso del método en el análisis de elementos laminados reales o más complejos a un menor costo computacional. Entre las aplicaciones posibles, se encuentra la evaluación de la integridad estructural de los Paneles de Madera Contralaminados (CLT).

Bibliografía

- [1] E. Abisset, F. Daghia, and P. Ladevèze. On the validation of a damage mesomodel for laminated composites by means of open-hole tensile tests on quasi-isotropic laminates. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 42(10):1515 – 1524, 2011.
- [2] Milton Abramowitz and Irene A Stegun. Handbook of mathematical functions dover publications. *New York*, page 361, 1972.
- [3] O. Allix. Délaminage: approche par la mécanique de l'endommagement. In J.M. Fouet, P. Ladevèze, and R. Ohayon, editors, *First Colloquium GRECO-GIS Calcul des Structures Giens, 19–22 May (1987)*, volume 1: Calcul des Structures et Intelligence Artificielle, pages 39–53, Paris, 1987. Pluralis.
- [4] O. Allix and A. Corigliano. Geometrical and interfacial non-linearities in the analysis of delamination in composites. *International Journal of Solids and Structures*, 36(15):2189–2216, 1999.
- [5] Olivier Allix, Pierre Gosselet, Pierre Kerfriden, and Karin Saavedra. Virtual delamination testing through non-linear multi-scale computational methods: some recent progress. *arXiv preprint arXiv:1304.6996*, 2013.
- [6] Ivo Babuška and Manil Suri. The p-and hp versions of the finite element method, an overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 80(1-3):5–26, 1990.
- [7] Ivo Babuska and Barna Szabo. On the rates of convergence of the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18(3):323–341, 1982.
- [8] P Boisse, P Ladevèze, and P Rougée. A large time increment method for elastoplastic problems. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 8(4):257–275, 1989.
- [9] A. Brandt. Guide to multigrid development. In A. Hackbush and U. Trottenberg, editors, *Conference on Multigrid Methods*, pages 220–312, 1982.
- [10] P. Bussy, P. Rougée, and P. Vauchez. The large time increment method for numerical simulation of metal fonning processes. In *Numerical Methods in Engineering*, pages 102–109. Elsevier, 1990.
- [11] L. Champaney, J. Y. Cognard, and P. Ladèzeve. Modular analysis of assemblages of three-dimensional structures with unilateral contact conditions. *Computers & Structures*, 73(1-5):249 – 266, 1999.
- [12] Jean-Yves Cognard. *Une nouvelle approche des problèmes de plasticité et de viscoplasticité : la Méthode à Grand Incrément de Temps*. PhD thesis, Universite Paris VI, 1989.
- [13] P. Cresta, O. Allix, C. Rey, and S. Guinard. Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods: Application to post-buckling analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:1436–1446, 2007.

- [14] MA Crisfield and J Shi. A review of solution procedures and path-following techniques in relation to the non-linear finite element analysis of structures. *Nonlinear Computational Mechanics (State of the Art)*, Wriggers, P., and Wagner, W.(Eds.). Springer-Verlag, NY, pages 283–302, 1991.
- [15] Gouri Dhatt, Emmanuel Lefrançois, and Gilbert Touzot. *Finite element method*. John Wiley & Sons, 2012.
- [16] G.A. Dupuis, D.D. Pfaffinger, P.V. Marcal, and BROWN UNIV PROVIDENCE R I DIV OF ENGINEERING. *Effective Use of the Incremental Stiffness Matrices in Non-linear Geometric Analysis*. Technical report (United States. Office of Naval Research). Defense Technical Information Center, 1970.
- [17] Georges Duvant and Jacques Louis Lions. *Inequalities in mechanics and physics*, volume 219. Springer Science & Business Media, 2012.
- [18] C. Farhat, M. Lesoinne, and K. Pierson. A scalable dual-primal domain decomposition method. *Numer. Lin. Alg. Appl.*, 7:687–714, 2000.
- [19] C. Farhat and F.-X. Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 32:1205–1227, 1991.
- [20] C. Farhat and F. X. Roux. Implicit parallel processing in structural mechanics. *Comput. Mech. Adv.*, 2:1–124, 1994.
- [21] Charbel Farhat, Michel Lesoinne, Patrick LeTallec, Kendall Pierson, and Daniel Rixen. Feti-dp: a dual–primal unified feti method—part i: A faster alternative to the two-level feti method. *International journal for numerical methods in engineering*, 50(7):1523–1544, 2001.
- [22] Charbel Farhat and Francois-Xavier Roux. An unconventional domain decomposition method for an efficient parallel solution of large-scale finite element systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 13(1):379–396, 1992.
- [23] R. Glowinski and Patrick Le Tallec. Augmented lagrangian interpretation of the nonoverlapping schwartz alternating method. In *Proceedings of Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, pages 224–231. SIAM, Philadelphia, 1990.
- [24] Pierre Gosselet and Christian Rey. Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Archives of computational methods in engineering*, 13(4):515, 2006.
- [25] P. A. Guidault, O. Allix, L. Champaney, and C. Cornuault. A multiscale extended finite element method for crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(5):381–399, 2008.
- [26] H-B Hellweg and MA Crisfield. A new arc-length method for handling sharp snap-backs. *Computers & Structures*, 66(5):704–709, 1998.
- [27] Carl T. Herakovich. Mechanics of composites: A historical review. *Mechanics Research Communications*, 41(0):1 – 20, 2012.
- [28] GA Holzapfel. *Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineering* (2000). West Sussex, England: John Wiley & Sons, Ltd.

- [29] MF Kanninen. An augmented double cantilever beam model for studying crack propagation and arrest. *International Journal of fracture*, 9(1):83–92, 1973.
- [30] P. Kerfriden, O. Allix, and P. Gosselet. A three-scale domain decomposition method for the 3D analysis of debonding in laminates. *Computational Mechanics*, 44(3):343–362, 2009.
- [31] P. Ladevèze. Sur une famille d’algorithmes en mécanique des structures. *Comptes-rendus des séances de l’Académie des sciences. Série 2, Mécanique-physique, chimie, sciences de l’univers, sciences de la terre*, 300:41–44, 1985.
- [32] P. Ladevèze. *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-incremental Methods of Calculation*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [33] Pierre Ladevèze and Anthony Nouy. Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en espace et en temps. *Comptes Rendus Mécanique*, 330(10):683–689, 2002.
- [34] Pierre Ladevèze and Anthony Nouy. On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28-30):3061–3087, 2003.
- [35] Jan Mandel. Balancing domain decomposition. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9:233–241, 1993.
- [36] Saeid Nezamabadi, Hamid Zahrouni, Julien Yvonnet, and Michel Potier-Ferry. A multiscale finite element approach for buckling analysis of elastoplastic long fiber composites. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 8(3):287–301, 2010.
- [37] A. Nouy. *Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace pour le calcul de structures fortement hétérogènes*. PhD thesis, ENS de Cachan, 2003.
- [38] J. S. Przemieniecki. Matrix structural analysis of substructures. *Am. Inst. Aero. Astro. J.*, 1:138–147, 1963.
- [39] SA Ragon, Zafer Gürdal, and Layne T Watson. A comparison of three algorithms for tracing nonlinear equilibrium paths of structural systems. *International journal of solids and structures*, 39(3):689–698, 2002.
- [40] Yousef Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. SIAM, 2003.
- [41] K Saavedra, O Allix, P Gosselet, J Hinojosa, and A Viard. An enhanced nonlinear multiscale strategy for the simulation of buckling and delamination on 3d composite plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 317:952–969, 2017.
- [42] Karin Saavedra, Olivier Allix, and Pierre Gosselet. On a multiscale strategy and its optimization for the simulation of combined delamination and buckling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 91(7):772–798, 2012.
- [43] Karin Saavedra Redlich. *Stratégie multiéchelle pour l’analyse du couplage flambage-délaminage de composites stratifiés*. PhD thesis, Cachan, Ecole normale supérieure, 2012.
- [44] Hermann Amandus Schwarz. Über einige abbildungsaufgaben. *J. reine angew. Math.*, 70:105–120, 1869.
- [45] Stephen Timoshenko. *Theory of Elastic Stability 2e*. Tata McGraw-Hill Education, 1970.

Anexos



Anexo A

Puntos y pesos de integración

A.0.1. Prisma

2 puntos de Gauss en ξ (orden 3)

4 puntos de Hammer en η y ζ (orden 3)

Tabla A.1: Puntos Integración $r = 8$

w_i	ξ	η	ζ
$-\frac{27}{96} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$(1 - \sqrt{\frac{1}{3}})/2$
$\frac{25}{96} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$(1 - \sqrt{\frac{1}{3}})/2$
$\frac{25}{96} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$(1 - \sqrt{\frac{1}{3}})/2$
$\frac{25}{96} \frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$(1 - \sqrt{\frac{1}{3}})/2$
$-\frac{27}{96} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$(1 + \sqrt{\frac{1}{3}})/2$
$\frac{25}{96} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$(1 + \sqrt{\frac{1}{3}})/2$
$\frac{25}{96} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$(1 + \sqrt{\frac{1}{3}})/2$
$\frac{25}{96} \frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$(1 + \sqrt{\frac{1}{3}})/2$

3 puntos de Gauss en ξ (orden 5)
 7 puntos de Hammer en η y ζ (orden 5)

Tabla A.2: Puntos Integración $r = 21$

w_i	ξ	η	ζ
$C \frac{8}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$A \frac{8}{18}$	a	a	$\frac{1}{2}$
$A \frac{8}{18}$	$1 - 2a$	a	$\frac{1}{2}$
$A \frac{8}{18}$	a	$1 - 2a$	$\frac{1}{2}$
$B \frac{8}{18}$	b	b	$\frac{1}{2}$
$B \frac{8}{18}$	$1 - 2b$	b	$\frac{1}{2}$
$B \frac{8}{18}$	b	$1 - 2b$	$\frac{1}{2}$
$C \frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$(1 - \sqrt{3/5})/2$
$A \frac{5}{18}$	a	a	$(1 - \sqrt{3/5})/2$
$A \frac{5}{18}$	$1 - 2a$	a	$(1 - \sqrt{3/5})/2$
$A \frac{5}{18}$	a	$1 - 2a$	$(1 - \sqrt{3/5})/2$
$B \frac{5}{18}$	b	b	$(1 - \sqrt{3/5})/2$
$B \frac{5}{18}$	$1 - 2b$	b	$(1 - \sqrt{3/5})/2$
$B \frac{5}{18}$	b	$1 - 2b$	$(1 - \sqrt{3/5})/2$
$C \frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$(1 + \sqrt{3/5})/2$
$A \frac{5}{18}$	a	a	$(1 + \sqrt{3/5})/2$
$A \frac{5}{18}$	$1 - 2a$	a	$(1 + \sqrt{3/5})/2$
$A \frac{5}{18}$	a	$1 - 2a$	$(1 + \sqrt{3/5})/2$
$B \frac{5}{18}$	b	b	$(1 + \sqrt{3/5})/2$
$B \frac{5}{18}$	$1 - 2b$	b	$(1 + \sqrt{3/5})/2$
$B \frac{5}{18}$	b	$1 - 2b$	$(1 + \sqrt{3/5})/2$

dónde: $a = \frac{6,0 + \sqrt{15}}{21}$

$b = \frac{4-7a}{7}$

$A = \frac{155,0 + \sqrt{15}}{2400}$

$B = \frac{31-240A}{24}$

$C = \frac{9}{80}$

A.0.2. Tetraedro

5 puntos de orden 3

Tabla A.3: Puntos Integración $r = 5$

w_i	ξ	η	ζ
$-\frac{2}{15}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

15 puntos de orden 5

Tabla A.4: Puntos Integración $r = 15$

w_i	ξ	η	ζ
p_1	a	a	a
w_1	b_1	b_1	b_1
w_1	c_1	b_1	b_1
w_1	b_1	c_1	b_1
w_1	b_1	b_1	c_1
w_1	b_1	b_1	b_1
w_1	c_1	b_1	b_1
w_1	b_1	c_1	b_1
w_1	b_1	b_1	c_1
p_1	d	d	e
p_1	d	e	d
p_1	e	d	d
p_1	e	e	d
p_1	e	d	e
p_1	d	e	e

dónde:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{4} & b_1 &= \frac{7+\sqrt{15}}{34} & b_2 &= \frac{7-\sqrt{15}}{34} & c_1 &= \frac{13-3\sqrt{15,0}}{34} & c_2 &= \frac{13,0+3\sqrt{15}}{34} \\
 d &= \frac{5,0-\sqrt{15,0}}{20} & e &= \frac{5,0+\sqrt{15,0}}{50} & p_1 &= \frac{8}{405} & p_2 &= \frac{5}{567} \\
 w_1 &= \frac{2665-14\sqrt{15}}{226800} & w_2 &= \frac{2665,0+14\sqrt{15}}{226800}
 \end{aligned}$$

A.0.3. Hexaedro

2 puntos en cada dirección de orden 3

Tabla A.5: Puntos Integración $r = 8$

w_i	ξ	η	ζ
$\frac{1}{8}$	$\frac{1+b}{2}$	$\frac{1+b}{2}$	$\frac{1-b}{2}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1-b}{2}$	$\frac{1+b}{2}$	$\frac{1-b}{2}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1+b}{2}$	$\frac{1-b}{2}$	$\frac{1-b}{2}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1-b}{2}$	$\frac{1-b}{2}$	$\frac{1-b}{2}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1+b}{2}$	$\frac{1+b}{2}$	$\frac{1+b}{2}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1-b}{2}$	$\frac{1+b}{2}$	$\frac{1+b}{2}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1+b}{2}$	$\frac{1-b}{2}$	$\frac{1+b}{2}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1-b}{2}$	$\frac{1-b}{2}$	$\frac{1+b}{2}$

dónde:
 $b = \sqrt{\frac{1}{3}}$

