



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICAS

Anomalías de Weyl en teorías conformes con derivadas altas

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas.

FABRIZIO ANTONIO BUGINI JARA

Agosto - 2018
Concepción – Chile

Profesor Guía: Dr. Danilo Eduardo Díaz Vázquez.
Dpto. de Ciencias Físicas, Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Andrés Bello



Ninguna parte de esta tesis puede reproducirse o transmitirse bajo ninguna forma o por ningún medio o procedimiento, sin permiso por escrito del autor

AGRADECIMIENTOS

Claramente estos años no han pasado en vano y el poder haber terminado este desafío no hubiera sido posible sin el apoyo incondicional de mi familia.

Gracias a mi esposa por haberme aguantado en este tiempo sobretodo por el trabajo extraordinario. Por esperarme en esas noches y por tener la paciencia que tuviste con todo lo asociado a ésto. Agradezco fuertemente a mis padres y hermanos porque a pesar de la distancia no han dejado de preocuparse por nosotros y de alentarme en los momentos de flaqueza.

No puedo no mencionar a la Tuna de la Universidad de Concepción. Como siempre una hermandad a prueba de fuego que entrega su constante apoyo a todos sus integrantes, varios de nosotros que han pasado por este proceso o están en ello. A mis colegas UNAB por el apoyo diario, el ánimo y su amistad sincera que siempre aligera la carga cotidiana. En este punto agradezco particularmente al profesor Danilo por su paciencia y orientación en estos varios años que llevamos trabajando juntos. Incluyo también a Sebastián y al profesor Rodrigo por sus colaboraciones que han sido fructíferas por cierto.

No menor el haber sido becado y financiado por CONICYT mediante el proyecto CONICYT-PCHA/Doctorado Nacional/2014-21140283.

Por último a mi motivación más grande, mi hijo Alonso. Gracias por la sonrisa que me regalas cada día y por tu cariño incondicional. Por hacer de ésto más llevadero y tener siempre un motivo por el que esforzarme un poco más.

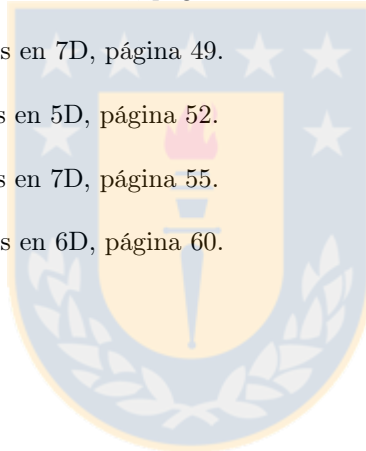
TABLA DE CONTENIDOS

AGRADECIMIENTOS	iii
LISTA DE TABLAS	vi
RESUMEN	vii
ABSTRACT	viii
1. Introducción	1
2. Preliminares	5
2.1. Formulación vía integral de caminos de una teoría cuántica de campos	5
2.1.1. Función generadora y acción efectiva	5
2.1.2. Acción efectiva a 1 - loop	9
2.1.3. Formalismo para teorías de gauge	10
2.2. Teorías de campos conformes	12
2.2.1. Transformaciones conformes	12
2.2.2. Anomalía conforme	14
2.3. Expansión del operador de Heat Kernel	19
2.3.1. Heat kernel de operadores de segundo orden en $d = 4$	21
2.3.2. Resultados en dimensión arbitraria d	22
2.3.3. Funciones espectrales	23
2.3.4. Anomalía conforme	24
2.4. Correspondencia AdS/CFT	25
2.4.1. Las dos caras de las D3-branas	27
2.4.2. Mapeo entre campos y operadores	32
3. Anomalía de traza por método holográfico	37
3.1. Métricas de Poincaré, anomalía de volumen y Q - curvatura	37
3.1.1. AdS ₅ /CFT ₄ : Dos en uno	39
3.1.2. AdS ₇ /CFT ₆ : Cuatro en uno	39
3.2. Invariantes en potencias más altas en curvatura y factorización del volumen	41
3.3. Potencias altas en curvatura y anomalía tipo B.	42
3.3.1. De 5 a 4 dimensiones	43
3.3.2. De 7 a 6 dimensiones	44
3.4. Receta holográfica para la anomalía	46
3.4.1. De 5 a 4 dimensiones	46
3.4.2. De 7 a 6 dimensiones	47
3.5. Comparando resultados	49
3.5.1. Gravedad con términos cuadráticos en curvatura	49

3.5.2.	Corrección más general a RG en 5D con términos cuadráticos y cúbicos en curvatura.	51
3.5.3.	Quartic quasi - topological gravity 5D	52
3.5.4.	Acción gravitacional más general en 7D que incluye correcciones cuadráticas y cúbicas en curvatura.	53
3.5.5.	Una gravedad cuártica en 7D.	55
4.	Anomalía de traza de operadores GJMS	57
4.1.	Anomalía de traza de operadores GJMS desde espacios de Einstein	57
4.1.1.	GJMS en 4D: dos pájaros y un tiro.	58
4.1.2.	GJMS en 6D: cuatro pájaros de un tiro	59
4.2.	Anomalía de traza de operadores GJMS mediante método holográfico	60
4.2.1.	GJMS en 4D: dos pájaros de un tiro (holográfico)	61
4.2.2.	GJMS en 6D: cuatro pájaros de un tiro (holográfico)	62
5.	Anomalía de traza para campos de espín alto en 4D	64
5.1.	Cálculo de anomalías en el borde 4D.	64
5.2.	Cálculo de anomalía mediante holografía en 5D.	65
5.2.1.	Campo de Maxwell	66
5.2.2.	Gravitón de Weyl	68
5.2.3.	Generalización	69
6.	Misceláneos	71
6.1.	Entropías de entrelazamiento y entropías de Rényi.	71
6.1.1.	Entropías de Rényi vía métodos holográficos.	72
7.	Discusión final	75
	Bibliografía	76
A.	Expansión del heat kernel para el campo escalar en dimensión arbitraria.	84
B.	Coefficiente de heat kernel b_4 para campos totalmente simétricos de rango s no restringidos.	88

LISTA DE TABLAS

- 2.1 Tabla de formas de la correspondencia, página 26.
- 2.2 Tabla de dimensión conforme para campos, página 35.
- 3.1 Tabla de términos cuadráticos en 5D, página 47.
- 3.2 Tabla de términos cúbicos en 5D, página 47.
- 3.3 Tabla de invariantes cuadráticos en 7D, página 49.
- 3.4 Tabla de invariantes cúbicos en 7D, página 49.
- 3.5 Tabla de términos cuárticos en 5D, página 52.
- 3.6 Tabla de términos cuárticos en 7D, página 55.
- 4.1 Tabla de invariantes cúbicos en 6D, página 60.



RESUMEN

La conjetura de Maldacena establece relación directa entre una teoría en presencia gravedad $(d + 1)$ - dimensional en espacios asintóticamente AdS con teorías de campos conformes en el borde de este espacio bajo regímenes de acoplamiento inversos, haciendo que sea una herramienta interesante para obtener información de una teoría fuertemente acoplada a través de su teoría dual cuyo acople es débil. Este hecho permite el uso de herramientas perturbativas en la obtención de cantidades de difícil acceso en la teoría de campos ya que toda la información de la teoría conforme está codificada en su dual gravitacional. Dentro de estas cantidades, la anomalía de traza de la teoría de campos conformes juega un papel central.

La anomalía de Weyl (conforme o de traza) es uno de los hechos más característicos de la cuantización de teorías conformes. Clásicamente el tensor de energía - momentum de una teoría conforme satisface la propiedad de tener traza nula, hecho que no se cumple luego de cuantizarse y es descrita en dos partes que son llamadas anomalía de tipo - A, asociadas a la densidad de Euler correspondiente a la dimensión mientras que la anomalía de tipo - B está relacionada a potencias del tensor de Weyl. En cuatro y seis dimensiones la correspondiente anomalía de traza está asociada a las cantidades $W^2 = W_{abcd}W^{abcd}$ que es el invariante de Weyl en 4 - dimensiones, mientras que $I_1 = W_{abcd}W^{eadf}W_{ef}^b{}^c$, $I_2 = W_{abcd}W^{abef}W_{ef}{}^{cd}$ y $I_3 = W_{abcd}[\nabla^2\delta_e^d + 4R_e^d - \frac{6}{5}R\delta_e^d]W^{abcd} + ttd^1$ son los invariantes de Weyl en 6 - dimensiones siendo bien conocido el cómo calcular la anomalía de tipo - A mientras que los otros coeficientes, en general, son de difícil acceso debido a la cantidad de términos asociados que dependen de la dimensión junto al hecho de que no hay un mecanismo estándar para su cómputo en el marco holográfico.

En esta tesis proponemos una receta, posiblemente la más simple, para calcular la anomalía de tipo - B de forma holográfica para una teoría general de gravedad o de campos en espacios que son asintóticamente AdS. En cinco y siete dimensiones identificamos una base apropiada de invariantes de curvatura que permiten leer de forma bien sencilla y sin cálculos extensos, los coeficientes de la anomalía de Weyl de la CFT dual. Se tabulan las contribuciones de los invariantes algebraicos cuadráticos, cúbicos y cuárticos en curvatura y también aquellos que involucran derivadas de ésta. Se presentan varios ejemplos en 4D y 6D cuyos coeficientes de anomalía fueron encontrados por otros mecanismos con el objetivo de mostrar la efectividad de nuestro método. Junto con eso se realizan los cálculos de estos coeficientes en 4D y 6D para los operadores GJMS aprovechando la factorización de éstos en espacios de Einstein y a su vez, usando la fórmula holográfica de determinantes a 1 - loop, mediante nuestra receta holográfica. Siguiendo la misma idea y asumiendo un acople tipo Lichnerowicz, calculamos los coeficientes de anomalía de los campos de espín alto conformes CHS en 4D de manera holográfica. Desde otra perspectiva y asumiendo una extensión del diccionario de AdS/CFT a espacios con singularidad cónica, calculamos las entropías de Rényi las que en un límite específico son las entropías de entanglement de los campos GJMS. A pesar de la expectativa de que el término logarítmico de la entropía de entrelazamiento esté dado por el coeficiente de la anomalía de tipo - A, encontramos discrepancias para los operadores GJMS supercríticos.

¹Por ttd nos referimos a derivadas totales triviales

ABSTRACT

Maldacena's conjecture establishes a direct relation between a theory containing gravity in a $(d+1)$ - dimensional asymptotically AdS spacetime and a conformal field theory at the conformal boundary of this spacetime under complementary coupling regimes, making a useful tool to gain information of a strongly coupled theory by means of its weakly coupled holographic dual theory. This fact allows the use of perturbative techniques in obtaining quantities of difficult access in the field theory since the information of the conformal theory is encoded in its gravitational dual. Among these quantities the trace anomaly of the conformal field theory plays a distinguished role.

The Weyl (or conformal or trace) anomaly is one of the most characteristic features of the quantization of conformal theories. Classically, the energy - momentum tensor of a conformal theory satisfies the property of null trace; but after quantization this no longer holds and it is described by two structures a so called type - A trace anomaly associated to the Euler density and a type - B related powers of the Weyl tensor and its covariant derivatives.

In four and six dimensions the type - B trace anomaly is given by $W^2 = W_{abcd}W^{abcd}$ that is a Weyl - invariant in 4 - dimensions, and $I_1 = W_{abcd}W^{eadf}W_{ef}^b{}^c$, $I_2 = W_{abcd}W^{abef}W_{ef}{}^{cd}$ and $I_3 = W_{abcd}[\nabla^2\delta_e^d + 4R_e^d - \frac{6}{5}R\delta_e^d]W^{abcd} + ttd^2$ are the Weyl invariants in 6 - dimensions. In the holographic context, it is well known how to compute the type - A anomaly whereas the type - B anomaly coefficients are hard to compute since their number grows with the dimension and due to the lack of a standard mechanism to identify them.

In this thesis we propose a recipe, possibly the simplest, to compute the type - B conformal anomaly in a holographic way, for a general gravity theory or a field theory in asymptotically AdS spaces. In five and seven dimensions we identify a suitable basis of curvature invariants which allows to read in an easy way the conformal anomaly coefficients of the dual CFT. We tabulate the contributions of the quadratic, cubic and quartic algebraic invariants of curvature and also the contribution of those that involve curvature derivatives. We illustrate with some instances in 4D and 6D whose anomaly coefficients were found by other techniques in order to show the effectiveness of our method. Also we compute the anomaly coefficients in 4D and 6D of the GJMS operators taking advantage of the factorisation of these operators in Einstein spaces and, using a holographic formula for 1 - loop determinants, with our holographic recipe. Following the same idea and assuming a Lichnerowicz coupling, we compute the anomaly coefficients for the conformal higher spin fields in 4D with our holographic method.

Finally, considering the extension of the holographic formula to spaces with a conical defect, we compute Rényi and entanglement entropies for GJMS operators. Despite the expected relation between their universal logarithmic term and the type - A trace anomaly, we find discrepancies for supercritical GJMS operators.

²By ttd we refer to trivial total derivatives.

Capítulo 1

Introducción

El siglo XX, sin duda, fue un siglo tremendamente exitoso en lo correspondiente al entendimiento de nuestro universo sobretodo en el contexto de las fuerzas fundamentales. Ésto fue logrado mediante dos teorías que han sido puestas a prueba y cuyos resultados han sido de muchísima precisión en los regímenes experimentalmente accesibles para cada una de ellas. Una de ellas es la teoría de gravitación de Einstein que da cuenta de la estructura del universo a escalas grandes: de cómo el modelo Newtoniano debía ser corregido dando paso a la curvatura del espacio - tiempo y explicando a través de ésto el fenómeno de movimiento de planetas, la desviación de la luz, la expansión acelerada del universo junto a objetos interesantes como los agujeros negros o las ondas gravitacionales. Por otro lado, el modelo estándar basado en la teoría cuántica de campos de Yang - Mills, nos cuenta la unificación de los fenómenos electromagnéticos, débiles y fuertes que dominan en escalas pequeñas. La lograda unificación de las fuerzas electromagnética, débil y fuerte motivan al desafío del entendimiento de la gravedad en escalas donde los efectos cuánticos son importantes buscando así una unión consistente entre las cuatro fuerzas fundamentales siendo uno de los mejores candidatos la teoría de cuerdas la cual, entre muchas otras cosas, contiene a la relatividad general de Einstein y al modelo estándar. En este contexto y a pesar de describir la gravedad y los campos de Yang - Mills como excitaciones de cuerdas en forma unificada, en determinados límites éstos se desacoplan haciendo descripciones duales de la misma física. Ésto incentiva a Maldacena a establecer una dualidad entre gravedad en espacios Anti de Sitter (AdS) y una teoría de Yang - Mills en el borde de este espacio introduciendo así la correspondencia AdS/CFT. Esta dualidad tiene la ventaja de mapear acoplamientos fuertes de la teoría de campos a teorías en gravedad con acoplamiento débil haciendo posible seguir métodos perturbativos para el cálculo de fenómenos a los que sería imposible acceder directamente en la teoría del borde y siendo así una herramienta para obtener información de una teoría cuántica a través de su dual holográfico.

Durante 30 años estos métodos holográficos se han aplicado a una enorme cantidad de situaciones de interés físico que van desde la cosmología, materia condensada hasta incluso la “sopa de quarks y gluones” que se produce en la colisión de iones pesados en experimentos de última generación. Para el caso que nos interesará en esta tesis, estas herramientas holográficas son de utilidad para obtener información de interés físico y matemático asociados a la geometría conforme y teoría espectral siendo el tema central de nuestro presente trabajo el cálculo de anomalías de traza, fenómeno característico luego de la cuantización de las teorías conformes.

El cálculo holográfico de la anomalía de Weyl [39] fue uno de los logros más tempranos realizados a través de la correspondencia AdS/CFT [80, 101, 134] en el régimen descrito por la gravedad clásica de Einstein y correspondientemente, el término de N grande para las CFT acopladas fuertemente. Las sutilezas operacionales de la prescripción están en identificar la métrica del borde g que acopla con el operador dual de la CFT, es decir, el tensor de energía - momento del borde, y que fueron examinadas originalmente en [134] donde los trabajos matemáticos previos en geometría conforme fueron de mucha ayuda. Los cálculos holográficos en concreto

de 3 a 2, 5 a 4 y 7 a 6 - dimensiones fueron llevados a cabo en [86] y [85]. Estos resultados provocaron el interés matemático en comportamiento asintótico de las métricas de Poincaré de la construcción de Fefferman y Graham [77] (véase también [4] y [42]). Los resultados encontrados fueron ahora de interés físico [62, 78]: la anomalía de volumen integrada revela a la Q - curvatura de la variedad del borde - una construcción central en el contexto de la geometría conforme [29–31].

Luego de esto, la presencia de la Q - curvatura en 4 - dimensiones en la anomalía de volumen explica fácilmente la igualdad “accidental” $a = c$ (véase [81]) entre los coeficientes de anomalía de tipo - A y tipo - B del dual holográfico de la teoría de Einstein en el bulk. En la clasificación geométrica de la anomalía conforme [48], el contenido acarreado por la densidad de Euler (anomalía de tipo - A) es igualmente capturado por la Q - curvatura y sólo el coeficiente del invariante local de Weyl (anomalía de tipo - B) cambia su estructura sólo por un “corrimiento” (vea por ejemplo [32]). En 4D se puede intercambiar la densidad de Euler E_4 por la Q - curvatura \mathcal{Q}_4 (tipo - A) y mantener el tensor de Weyl al cuadrado $W^2 \equiv W_{abcd}W^{abcd}$ que obviamente es una combinación independiente y que además es invariante de Weyl local (tipo - B). Este cambio de base, salvo una derivada total, conlleva a la reescritura que es aparentemente trivial de la anomalía de traza

$$\begin{aligned} (4\pi)^2 \langle T \rangle &= -aE_4 + cW^2 \\ &= -4a\mathcal{Q}_4 + (c - a)W^2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ahora, la acción de la gravedad de Einstein 5D es sólo un múltiplo del volumen del bulk y en consecuencia, la anomalía de Weyl holográfica está totalmente contenida en el término de Q - curvatura. En este caso, de la segunda línea de la ecuación anterior, se lee el coeficiente de anomalía de tipo - A y el coeficiente de la anomalía de tipo - B (desplazado) se anula, $c - a = 0$.

De la misma forma, para una CFT en 6D se puede intercambiar la densidad de Euler 6 - dimensional, E_6 , por la Q - curvatura¹

$$\begin{aligned} (4\pi)^3 \langle T \rangle &= -aE_6 + c_1I_1 + c_2I_2 + c_3I_3 \\ &= -48a\mathcal{Q}_6 + (c_1 - 96a)I_1 + (c_2 - 24a)I_2 + (c_3 + 8a)I_3 \end{aligned} \tag{1.2}$$

siendo I_1, I_2 e I_3 la base estándar de los coeficientes de la anomalía de tipo - B que consiste en los tres invariantes de Weyl $I_1 = W_{abcd}W^{eadf}W^b{}_{ef}{}^c$, $I_2 = W_{abcd}W^{abef}W_{ef}{}^{cd}$ y $I_3 = W_{abcd}(\nabla^2 d_e^d + 4R_e^d - \frac{6}{5}R\delta_e^d)W^{abce} + ttd^2$. Nuevamente, para la gravedad de Einstein 7D la anomalía de Weyl holográfica está únicamente determinada por la Q - curvatura haciendo que los tres coeficientes de la anomalía de tipo - B estén en las proporciones $c_1 : c_2 : c_3 = 12 : 3 : -1$ por el hecho de que los coeficientes de anomalía de tipo - B desplazados son nulos. Esta combinación además es común en CFTs 6 - dimensionales [15] (véase también a [6]) y puede ser relacionada a la presencia de la Q - curvatura.

Estas observaciones están íntimamente relacionadas a otra característica típica de las anomalías de Weyl holográficas de espacios asintóticos de Einstein con constante cosmológica negativas, a saber, que se anulan en métricas Ricci - flat del borde. Ésto nuevamente puede heredarse de la Q - curvatura de la que puede mostrarse que es debido al hecho de ser “puramente Ricci”, es decir, sólo contiene al tensor de Ricci y sus derivadas covariantes. En los resultados explícitos [86] y [85] se ve que es un hecho obvio en 2D y 4D mientras que no es un hecho inmediatamente aparente en 6D y 8D (ver [110], [74]). Seguidamente se encontró que para tener una contribución genuina en Riemann o equivalentemente en Weyl en la anomalía de traza se necesita ir más lejos

¹Adoptamos la convención de [20]

²Aquí “ ttd ” se refiere a derivadas totales triviales en el sentido de [15] y cuya forma explícita puede encontrarse, por ejemplo, en [16]

que la factorización del volumen pues los términos puramente Ricci en el lagrangeano del bulk en soluciones asintóticamente Einstein simplemente renormalizan el radio del vacío AdS. En efecto, una corrección a primer orden (de orden N) a la anomalía de traza de una CFT 4 - dimensional se obtuvo de un término cuadrático en Riemann en el bulk proveniente de la cuerda heterótica de tipo I en 5D [24]. Al mismo tiempo, la anomalía de traza del lagrangeano cuadrático más general en 5D fue encontrada en [111] (ver también [124] y [67]) en la aproximación de nivel linealizado. En ambos casos el coeficiente de la anomalía de tipo - A y de tipo - B fueron distintos ($a \neq c$) debido al término cuadrático en Riemann en el lagrangeano del bulk.

En los años posteriores hubo progresos importantes en el cálculo holográfico de la anomalía de Weyl. Principalmente se lograron avances a partir de consideraciones de causalidad y positividad del flujo de energía, la perspectiva de nuevos límites en la razón de viscosidad/entropía, el rol de la supersimetría y sorprendentemente, los cálculos holográficos de la entropía de entrelazamiento. El análisis perturbativo de [24] fue extendido en [12] para incluir interacciones de sexto orden en derivadas y en donde las cargas centrales a y c emergen de la teoría gravitacional 5D con términos cúbicos en curvatura a nivel linealizado. En particular, [106] encuentran éstas para la gravedad quasi - topológica [26, 113]. Ahora, el procedimiento holográfico estándar para reconstruir los primeros términos de la expansión de Fefferman - Graham en términos de la métrica del borde al resolver analíticamente la ecuación de movimiento gravitacional orden a orden puede tener elevada dificultad en dimensiones mayores o en presencia de correcciones altas en curvatura. Sin embargo, renunciando a la generalidad de la métrica del borde y restringiendo a un cierto Ansatz, ayudados del software *Mathematica* para resolver las ecuaciones de movimiento, fue posible identificar holográficamente los coeficientes de anomalía de tipo - B para la gravedad 7D de Gauss - Bonnet [26] y también para la gravedad cúbica de Lovelock 7D [27]³. Luego de eso y usando el mismo mecanismo, los coeficientes de anomalía de tipo - B a nivel linealizado fueron encontrados para la corrección algebraica general cuadrática y cúbica en 7D además de las correcciones cuárticas [97] (véase también a [20]). Más información puede obtenerse al restringir a la métrica del borde a un Ansatz tipo $\text{AdS}_2 \times \text{S}^2$ y asumir una expansión truncada de Fefferman - Graham, un método simple encontrado en 5D [125] (ver también [46] y [50]) y que correctamente reproduce los valores de las cargas centrales a y c de la CFT₄. La extensión de este método a 7D [126] requiere de otras dos métricas del borde, las que son $\text{AdS}_2 \times \text{S}^4$ y $\text{AdS}_2 \times \text{S}^2 \times \text{S}^2$ para desacoplar los cuatro coeficientes de la anomalía de traza de la CFT₆. Nuevamente ésto fue realizado con la ayuda de *Mathematica* y entregó resultados satisfactorios para encontrar la contribución holográfica de términos algebraicos además de los que involucran derivadas en la curvatura. Finalmente, mencionamos el trabajo [105] que es un método distinto ya que basado en la expansión alrededor de una métrica de referencia se simplifica la derivación de la anomalía de Weyl holográfica. En él se encuentra una extensa lista de contribuciones holográficas de teorías con términos de mayor orden en curvatura en 5D y 7D.

En todas las derivaciones mencionadas y las distintas rutas para encontrar holográficamente la anomalía de Weyl la parte desafiante está únicamente la ligada a la anomalía de tipo - B. Es bien sabido que la anomalía de Weyl de tipo - A calculada vía métodos holográficos es capturada por la densidad lagrangeana evaluada en la solución AdS [91] de modo que para las teorías gravitacionales de mayor orden basta con calcular el radio renormalizado de AdS para luego obtener el coeficiente de anomalía de tipo - A. A diferencia, la anomalía holográfica de Weyl de tipo - B carece de universalidad y a pesar de los distintos métodos (eficientes, por cierto) ésta aún tiene derivaciones más bien complejas (además de no poder leerlas directamente desde el lagrangeano).

En esta tesis mostraremos que contrariamente a lo esperado, la anomalía holográfica de Weyl de tipo - B puede leerse directamente desde la densidad lagrangeana del bulk. Para ésto comentaremos las herramientas básicas a usar y el contexto en el que éstas se desarrollan. Como nuestro objetivo es introducir nuestro mecanismo para encontrar las anomalías de Weyl de forma holográfica, se comentarán aspectos claves de las teorías de campos conformes y de

³Los coeficientes de anomalía de tipo - B fueron reportados en una forma más sencilla en [90] en términos del radio renormalizado de AdS. El coeficiente de anomalía de tipo - A reportado ahí sigue de la fórmula general [91]

la correspondencia AdS/CFT que es la que nos entrega herramientas holográficas para realizar esta meta. Para el caso de campos nuestro método se traduce al cálculo usando los coeficientes de la expansión de operador de heat kernel haciendo que sea importante hablar de ellos. En el capítulo siguiente haremos descripción de nuestro método y cómo a partir de una pequeña desviación de la solución de AdS (euclídea) como es la métrica de Poincaré - Einstein en el bulk cuyo borde es otro espacio de Einstein, se logra una separación de términos de volumen (puro Ricci) que contribuyen a la anomalía tipo - A y términos (puro Weyl) que descienden a términos similares que contribuyen a la anomalía tipo - B del borde. Los capítulos siguientes nos permiten extender estos resultados a ciertos campos conformes y haciendo uso de los coeficientes del heat kernel, se logran encontrar los coeficientes de la anomalía de traza de los operadores GJMS en 4D y 6D y siguiendo el mismo método, estos coeficientes para los campos conformes de espín alto (CHS) en 4D⁴.



⁴Los resultados que conforman esta tesis están reportados en las publicaciones “On Rényi entropy for free conformal fields: holographic and q-analog recipes” [8], “Simple recipe for holographic Weyl anomaly” [34], “On the Weyl anomaly of 4D Conformal Higher Spins: a holographic approach” [1], “Holographic Weyl anomaly for GJMS operators: one Laplacian to rule them all” (en preparación) y “Holographic conformal anomaly of 6D Weyl graviton” (en preparación).

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se mostrarán las distintas herramientas relevantes para el desarrollo de esta tesis cuyo enfoque se relaciona al cálculo de anomalía de traza para teorías de campos conformes usando el diccionario de la correspondencia AdS/CFT. Para ello se comentarán los tópicos relevantes en teoría cuántica de campos y su formulación vía integral de camino, propiedades particulares de las teorías de campos conformes, introducción a la conjetura de Maldacena y finalmente la herramienta que usaremos para el cálculo de las anomalías mencionadas: el método de heat kernel.

2.1. Formulación vía integral de caminos de una teoría cuántica de campos

Esta sección está basada principalmente en [79, 95] y [119].

Una forma elegante en la que se puede describir la mecánica cuántica es haciendo uso de la integral de camino cuya mayor fortaleza está en la manipulación de lagrangeanos (o densidad lagrangeana) clásicos. Para introducir esta idea consideraremos una teoría relativista que describe a rasgos generales a distintos campos tanto bosónicos $\phi_i(x)$, en donde i será la etiqueta de cada uno de ellos, junto a campos fermiónicos representados por variables de Grassman $\psi_j(x)$ con su respectivo conjugado $\bar{\psi}_j(x)$ en donde nuevamente el subíndice j es la etiqueta de cada uno de los distintos campos fermiónicos. Estos campos además pueden poseer algún tipo de simetría interna o invariancia de gauge como mostraremos posteriormente. De esta forma, la dinámica del sistema será determinada por la densidad lagrangeana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[\phi_i, \psi_j, \bar{\psi}_j]. \quad (2.1)$$

la que dependerá explícitamente de las derivadas de los propios campos. En el caso de los campos bosónicos las derivadas serán de segundo orden (o potencias pares como veremos posteriormente) o de primer orden (u orden impar) para campos fermiónicos. Consideraremos sólo teorías locales en las que los campos y las derivadas dependen únicamente de un punto del espacio - tiempo.

2.1.1. Función generadora y acción efectiva

Como se mencionó previamente, el uso de la integral de camino para describir la mecánica cuántica tiene su mayor fortaleza al describirla mediante la densidad lagrangeana. Ésta nos permite construir la conocida funcional generadora que para la densidad lagrangeana (2.1) es (en la teoría euclídea)

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\phi_i \mathcal{D}\psi_j \mathcal{D}\bar{\psi}_j \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \{S[\phi_i, \psi_j, \bar{\psi}_j]\} - S_F[J, \eta, \bar{\eta}] \right] \quad (2.2)$$

donde $S[\phi_i, \psi_j, \bar{\psi}_j]$ es la acción clásica que determina la dinámica de los campos $\phi_i, \psi_j, \bar{\psi}_j$

$$S[\phi_i, \psi_j, \bar{\psi}_j] := \int d^d x \mathcal{L}[\phi_i, \psi_j, \bar{\psi}_j](x) \quad (2.3)$$

y $S_F[J, \eta, \bar{\eta}]$ integra los términos de fuente a los campos mencionados

$$S_F[J, \eta, \bar{\eta}] := \int d^d x J^i(x) \phi_i(x) + \int d^d x \eta^j(x) \psi_j(x) + \int d^d x \bar{\eta}^j(x) \bar{\psi}_j(x). \quad (2.4)$$

Se asume por lo demás que la funcional generadora ya está normalizada tal que en el caso en que no haya fuentes, $J, \eta, \bar{\eta} = 0$, se satisfaga la condición $Z[0] = 1$.

Dado que en adelante nos focalizaremos en campos bosónicos haremos uso sólo de éstos para hacer la descripción siguiente aunque aclaramos que esto no significa que haya pérdida de generalidad salvo en el detalle de que las derivadas han de ser “orientadas” debido a la anticonmutatividad a la que responden los campos fermiónicos.

El formalismo de integral de camino entrega una forma directa de poder calcular las funciones de Green de n - puntos, las que se obtienen aplicando una derivada funcional con respecto a la fuente J sobre la funcional generadora Z y éstas funciones de Green, $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$, se encuentran mediante la expresión

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T[\phi_{i_1}(x_1) \dots \phi_{i_n}(x_n)] | 0 \rangle = \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J^{i_1}(x_1) \dots \delta J^{i_n}(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (2.5)$$

en la que vemos además que corresponde al valor de expectación del producto de n - campos en el vacío. También es un hecho bien sabido de ellas que son objetos desconectados ya que a pesar de que sí describen efectos físicos, éstas no son fundamentales al menos desde una perspectiva formal. Las funciones de n - puntos con n impar son nulas mientras que para n par éstas corresponden a productos de propagadores de una partícula $G_{(2)}(x, x')$ los que de forma general son diagramas de Feynman que no están conectados. De esta forma existe una forma conveniente de poder eliminar estos términos desconectados que corresponde a la introducción de una funcional generadora modificada relacionada a funciones de Green irreducibles $W[J]$ definida como el logaritmo de la funcional generadora

$$Z[J] = \exp\left(-\frac{1}{\hbar} W[J]\right) \quad (2.6)$$

quien debido a la normalización $Z[0] = 1$ cumple con la normalización $W[0] = 0$ y las respectivas funciones de Green conectadas de n - puntos $G_c^{(n)}$ ahora serán

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = - \frac{\delta^n W[J]}{\delta J^{i_1}(x_1) \dots \delta J^{i_n}(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (2.7)$$

Otra utilidad importante derivada de la definición de esta nueva funcional generadora es que permite puntualizar el concepto de acción efectiva.

Comenzaremos ésto introduciendo una nueva variable

$$\phi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \quad (2.8)$$

cuyo significado se hace evidente si hacemos explícita cada una de las definiciones mencionadas:

$$\begin{aligned} \phi_c(x) &= \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp\left[-\frac{1}{\hbar} \int d^d x' (\mathcal{L} + J\phi)\right] \phi(x)}{\int \mathcal{D}\phi \exp\left[-\frac{1}{\hbar} \int d^d x' (\mathcal{L} + J\phi)\right]} \\ &= \left(\frac{\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle}{\langle 0 | 0 \rangle} \right)_J. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Se observa de esta última ecuación que el $\phi_c(x)$ corresponde al valor de expectación normalizado del campo ϕ en presencia de la fuente J lo que motiva a llamarla por valor medio o campo clásico. Notar además que depende comúnmente de x y a través de una funcional de J , por lo que puede denotarse por $\phi_c(x, J]$. Éste en el límite sin perturbación $J \rightarrow 0$ y bajo circunstancias normales, el límite de campo clásico es nulo $\phi_c \rightarrow 0$. Excepciones importantes a esta regla son las teorías con quiebre espontáneo de simetría cuyo valor de expectación en este límite es no nulo.

Asumamos ahora que la conexión entre ϕ_c y J puede invertirse de modo que la fuente J será ahora una funcional del campo clásico ϕ_c (y bajo el mismo argumento puede denotarse por $J(x, \Phi_c]$) y de esta manera J podrá sustituirse por ϕ_c como una variable independiente. Este hecho puede lograrse haciendo una transformada (funcional) de Legendre

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^d x J(x) \phi_c(x) \quad (2.10)$$

y esta nueva funcional $\Gamma[\phi_c]$ no tiene dependencia explícita en la fuente J , $\delta\Gamma/\delta J = 0$. La acción efectiva la expandiremos en una serie de Volterra

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_n \int d^d x_1 \dots \int d^d x_n \frac{1}{n!} \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \phi_c(x_1) \dots \phi_c(x_n) \quad (2.11)$$

donde

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x_1) \dots \delta \phi_c(x_n)} \right|_{\phi_c=0}. \quad (2.12)$$

Estudiaremos el detalle de algunos de estos términos de la expansión. De la definición se obtiene el primer término de ésta

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} = \frac{\delta W}{\delta \phi_c(x)} - \int d^d y \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} \phi_c(y) - J(x). \quad (2.13)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación lo podemos reescribir usando la regla de la cadena, el que corresponderá al siguiente término de la misma ecuación

$$\frac{\delta W}{\delta \phi_c(x)} = \int d^d y \frac{\delta W}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} = \int d^d y \phi_c(y) \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} \quad (2.14)$$

y de esta manera se anulará con el término siguiente haciendo que el primer término de la expansión esté sólo relacionado a la fuente J

$$\Gamma^{(1)}(x) = \frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} = -J(x). \quad (2.15)$$

Veamos qué ocurre ahora con el segundo término, el que se relaciona a la segunda derivada funcional de la acción efectiva

$$\Gamma^{(2)}(x_1, x_2) = \left. \frac{\delta^2 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x_1) \delta \phi_c(x_2)} \right|_{\phi_c=0} \quad (2.16)$$

y como mostraremos en breve, corresponde a la función de Green inversa de 2 - puntos. Para mostrar este hecho haremos uso nuevamente de la regla de la cadena en donde se ve lo siguiente

$$\delta^d(x_1 - x_2) = \frac{\delta \phi_c(x_1)}{\delta \phi_c(x_2)} = \int d^d x \frac{\delta \phi_c(x_1)}{\delta J(x)} \frac{\delta J(x)}{\delta \phi_c(x_2)} \quad (2.17)$$

$$= - \int d^d x \frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1) \delta J(x)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(x_2)}, \quad (2.18)$$

Este término que luego de ser evaluado en $J = \phi_c = 0$ exhibe la relación inversa con la función de Green de 2 - puntos

$$- \int d^d x \frac{i}{\hbar} G_c^{(2)}(x_1, x) \Gamma^{(2)}(x, x_2) = \delta^d(x_1 - x_2) \quad (2.19)$$

mostrando así que las funciones $\Gamma^{(2)}$ y $G_c^{(2)}$ son funciones inversas (en el sentido “matricial”).

La solución de la ecuación para $\Gamma^{(2)}$ es el propagador inverso $G^{(2)-1}$

$$\Gamma^{(2)}(x_1, x_2) = i\hbar G^{(2)-1}(x_1, x_2) \quad (2.20)$$

resultado que es particularmente simple para el caso de la teoría no interactuante en el que $G^{(2)-1}$ es el inverso del propagador de Feynman $\Delta_F^{-1}(x_1 - x_2)$

$$\Gamma_0^{(2)}(x_1, x_2) = \Delta_F^{-1}(x_1 - x_2). \quad (2.21)$$

Por simplicidad se mostrarán los resultados para las funciones de tres y cuatro puntos. En el caso de la función de 3 - puntos, $\Gamma^{(3)}$, ésta cumple con que está directamente ligada a la función $\Gamma_c^{(3)}$

$$\begin{aligned} G_c^{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{i}{\hbar} \int d^d x'_1 d^d x'_2 d^d x'_3 G^{(2)}(x_1, x'_1) G^{(2)}(x_2, x'_2) \\ &\times G^{(2)}(x_1, x'_3) \Gamma^{(3)}(x'_1, x'_2, x'_3), \end{aligned} \quad (2.22)$$

la que se obtiene añadiendo propagadores a la función de tres puntos $\Gamma^{(3)}$; una por cada “rama” externa. Ésto hace que $\Gamma^{(n)}$ sea llamada función de Green amputada y son éstas las que de alguna manera muestran la física esencial en los procesos de scattering.

En el caso de la función amputada de 4 - puntos ésta satisface

$$\begin{aligned} G_c^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{i}{\hbar} \int d^d x'_1 d^d x'_2 d^d x'_3 d^d x'_4 G^{(2)}(x_1, x'_1) G^{(2)}(x_2, x'_2) \\ &\times G^{(2)}(x_3, x'_3) G^{(2)}(x_4, x'_4) \Gamma^{(4)}(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) \\ &+ \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int d^d x'_1 d^d x'_2 d^d x'_3 d^d x'_4 d^d y d^d y' G^{(2)}(x_1, x'_1) G^{(2)}(x_2, x'_2) \\ &\times G^{(2)}(x_3, x'_3) G^{(2)}(x_4, x'_4) G^{(2)}(y, y') \\ &\left(\Gamma^{(3)}(x'_1, x'_2, y') \Gamma^{(3)}(y, x'_3, x'_4) + \Gamma^{(3)}(x'_1, x'_3, y') \Gamma^{(3)}(y, x'_2, x'_4) \right. \\ &\left. \Gamma^{(3)}(x'_3, x'_2, y') \Gamma^{(3)}(y, x'_1, x'_4) \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

El primer término de esta ecuación es similar al de la función amputada de 3 - puntos pero hay además términos adicionales relacionados a las funciones de 3 - puntos.

Esta relación se obtuvo tomando repetidamente derivadas funcionales de la ecuación (2.18) y siguiendo el mismo proceso se pueden encontrar las relaciones entre $G_c^{(n)}$ y $\Gamma^{(m)}$ en la que, en general, habrá contribución de todo orden $3 \leq m \leq n$.

Ahora ahondaremos en la idea de “acción efectiva” $\Gamma[\phi_c]$. Para mostrar el por qué de éste nombre se evaluará directamente el término $\Gamma^{(0)}[\phi_c]$ tomando como ejemplo al campo escalar libre. Para este caso se tiene que su funcional generadora responde a la relación

$$W_0[J] = \frac{\hbar}{i} \log Z_0[J] = -\frac{1}{2} \int d^d x d^d x' J(x) \Delta_F(x - x') J(x'). \quad (2.24)$$

De acuerdo a la idea de “campo clásico” definido en (2.8)

$$\phi_c(x) = \frac{\delta W_0[J]}{\delta J(x)} = - \int d^d x' \Delta_F(x - x') J(x') \quad (2.25)$$

en donde Δ_F es el propagador para el campo de Klein - Gordon que debe cumplir con la siguiente ecuación diferencial.

$$(-\nabla^2 + m^2) \Delta_F(x - x') = -\delta^d(x - x'). \quad (2.26)$$

Esta relación además confirma el hecho de que $\phi_c(x)$ es el campo clásico ya que es solución de la ecuación de movimiento donde correspondientemente $J(x)$ es el término de fuente de ésta:

$$(-\nabla^2 + m^2)\phi_c(x) = J(x). \quad (2.27)$$

Teniendo presente este hecho calculamos la funcional generadora del campo libre haciendo uso de la transformada de Legendre

$$\begin{aligned} \Gamma_0[\phi_c] &= W_0[J] - \int d^d x J(x)\phi_c(x) \\ &= \frac{1}{2} \int d^d x d^d x' J(x)\Delta_F(x-x')J(x'). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ahora, con la ayuda de la ecuación de movimiento (2.27) expresaremos la fuente $J(x)$ en términos del campo clásico. Después de integrar por partes repetidas veces encontraremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Gamma_0[\phi_c] &= \int d^d x d^d x' \phi_c(x)(-\nabla^2 + m^2)\Delta_F(x-x')(-\nabla'^2 + m^2)\phi_c(x') \\ &= -\frac{1}{2} \int d^d x \phi_c(x)(-\nabla^2 + m^2)\phi_c(x) \\ &= \frac{1}{2} \int d^d x (-\partial_\mu \phi_c \partial^\mu \phi_c - m^2 \phi_c^2) \end{aligned}$$

lo que corresponde exactamente a la acción clásica que describe al campo escalar ϕ_c . En el caso general de teorías interactuantes $\Gamma[\phi_c]$ ya no es exactamente la acción clásica y las fluctuaciones cuánticas transformarán a $\Gamma[\phi_c]$ en una funcional altamente no - local caracterizada por un integrando que dependerá simultáneamente del valor del campo $\phi_c(x)$ en distintos puntos.

Lo recién comentado motiva a hacer una expansión perturbativa de la acción efectiva en términos de la constante \hbar la que será la acción clásica más las correcciones cuánticas

$$\Gamma = \sum_n \hbar^n \Gamma_{(n)} = S + \hbar \Gamma_{(1)} + \mathcal{O}(\hbar^2) \quad (2.29)$$

en donde $\Gamma_{(n)}$ es la contribución a n - loop a la acción efectiva. La referencia a “loop” se origina de la descripción a la teoría cuántica de campos haciendo uso de los diagramas de Feynman.

Nos detendremos ahora en la expansión a 1 - loop ya que estará relacionada a los cálculos a realizar en los capítulos siguientes.

2.1.2. Acción efectiva a 1 - loop

Ahora nos adentraremos al cálculo de correcciones al primer loop que corresponde al primer término no trivial en la expansión de la acción efectiva en \hbar . Discutiremos el cálculo explícito para el campo escalar el que nos permitirá esquematizar la forma de abordar el caso general, útil para fermiones y campos de gauge.

Nuestro propósito es hacer la expansión de la acción efectiva de acuerdo a (2.29) y logremos esto con el siguiente cambio de variables para el campo escalar ϕ

$$\phi = \Phi + \sqrt{\hbar}\Psi. \quad (2.30)$$

Al introducirse en la acción se puede observar que a primer orden en \hbar , la expansión puede entenderse como una perturbación semiclásica del campo clásico Φ y cuyas correcciones podrán ser calculadas término a término mediante métodos perturbativos

$$S[\Phi + \sqrt{\hbar}\Psi] = S[\Phi] + \sqrt{\hbar} \int d^d x \left. \frac{\delta S}{\delta \phi_i(x)} \right|_{\Phi} \Psi_i(x) \quad (2.31)$$

$$+ \hbar \int d^d x d^d y \left. \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_i(x) \delta \phi_j(y)} \right|_{\Phi} \Psi_i(x) \Psi_j(y) + \mathcal{O}(\hbar^{3/2}). \quad (2.32)$$

El segundo término de la expansión no contribuye dado que la expansión es alrededor del campo clásico Φ . Comparando esta expansión con la realizada en (2.29) se muestra que el término correspondiente es

$$\int \mathcal{D}\Psi \exp \left[- \int d^d x d^d y \frac{\delta^2 S}{\delta\phi_i(x)\delta\phi_j(y)} \Big|_{\Phi} \Psi_i(x)\Psi_j(y) \right] \quad (2.33)$$

el que fácilmente podrá identificarse con la ayuda de la integral gaussiana

$$\int \mathcal{D}\phi \exp \left(- \int d^d x \phi \Delta \phi \right) = \frac{1}{\sqrt{\det \Delta}}. \quad (2.34)$$

Así identificamos a la corrección a 1-loop por

$$\Gamma_{(1)} = \frac{1}{2} \log \det \hat{\Delta} \phi \quad (2.35)$$

en donde el operador correspondiente es

$$\hat{\Delta} \phi = \frac{\delta^2 S}{\delta\phi_i(x)\delta\phi_j(y)} \Big|_{\Phi}. \quad (2.36)$$

El operador recién encontrado se obtiene de forma más sencilla expandiendo explícitamente la acción, o bien la densidad lagrangeana alrededor de la solución clásica Φ . Notar que Φ en ausencia de fuente, es un punto estacionario de la acción efectiva Γ . Es por eso que podemos usar cualquier solución clásica (o punto estacionario en la acción S) ya que la diferencia es de orden \hbar o superior. Es por este motivo que al elegir una configuración de campo se pueden hacer consideraciones basadas puramente en la ecuación de movimiento.

2.1.3. Formalismo para teorías de gauge

La formulación vía integral de camino posee una pequeña sutileza al momento de considerar campos de gauge ya que la medida del campo $\mathcal{D}A_\mu$ es redundante al considerar todas las posibles configuraciones. La razón de esto es que muchos de ellos estarán conectados mediante una transformación de gauge, es decir, son equivalentes por lo que al ser sumados (infinitas veces) en la integral hacen que ésta sea divergente. En esta sección se mostrará cómo fue realizada la solución a este problema.

Una teoría de gauge es aquella que es invariante bajo la acción de un determinado grupo de simetría G en la que cualquier campo ϕ_i o ψ_j transforme de acuerdo a la representación del grupo en la forma

$$\begin{aligned} \delta\phi_i(x) &= \omega\phi_i(x) = \omega^a T_{(i)}^a \phi_i(x) \\ \delta\psi_j(x) &= \omega\psi_j(x) = \omega^a T_{(j)}^a \psi_j(x) \end{aligned} \quad (2.37)$$

en donde $T_{(i)}$ (o $T_{(j)}$) son los generadores de la representación bajo la cual ϕ_i (o ψ_j) transforman, y $\omega = \omega^a T_{(i,j)}^a$ es un elemento del algebra de Lie asociada al grupo G . Ésto significa que cada campo puede ser en realidad un multiplete de campos enumerados por índices extra (que serán internos). Dado que la simetría se espera local (dependiente de la posición) es necesario introducir una conexión de gauge para asegurar la covariancia de la derivada en las respectivas transformaciones de gauge. Explícitamente esta prescripción para un acoplamiento mínimo se reduce al reemplazo de la derivada usual por una derivada covariante definida por la conexión de gauge A_μ

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu + A_\mu. \quad (2.38)$$

Éste campo también deberá ser modificado para que esté acorde a una transformación de gauge, y en efecto, transformará como una conexión

$$\delta A_\mu = -\partial_\mu \omega + [\omega, A_\mu] = -\nabla_\mu \omega \quad (2.39)$$

en donde la derivada covariante está en la representación adjunta. De esta forma la conexión de gauge también será un campo dinámico cuyo efecto es que debe ser introducido dentro de la densidad lagrangeana y el término cinético convencional será

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2g} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.40)$$

en donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura asociado a la derivada covariante ∇_μ

$$F_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (2.41)$$

La derivada covariante y el tensor de curvatura también responden a una regla de transformación

$$\delta\nabla_\mu = [\omega, \nabla_\mu] \quad , \quad \delta F_{\mu\nu} = [\omega, F_{\mu\nu}]. \quad (2.42)$$

El problema con la definición hecha en (2.2), como se mencionó previamente, radica en la redundancia de los observables físicos. El hecho de que alguna cantidad física sea invariante bajo un grupo de gauge es equivalente a decir que las soluciones a las ecuaciones de movimiento que están conectadas por una transformación de gauge nos deberán entregar el mismo observable físico. La medida en la integral de camino en la ecuación (2.2) ignora este hecho y además también considera la contribución de las distintas órbitas. Sin embargo este problema es corregible y la forma de arreglar este inconveniente es elegir un único representante por cada órbita con el objetivo de medir una única vez cada observable.

La solución a este detalle fue realizada por Faddeev y Popov el año 1967 [60] introduciendo una condición de gauge $G[A](x) = 0$, en donde G es una funcional invertible no - invariante de gauge de un campo de gauge que restringe la integración en (2.2) a los campos que satisfacen la condición dada. Salvo una redefinición de la normalización de la medida, la integral de camino que ahora sí es bien definida en este tipo de teorías será

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}A \det M[A] \delta(G) \exp \left[-\frac{1}{\hbar} (S - S_F) \right] \quad (2.43)$$

en donde

$$\tilde{M}[A](x, y) = M[A](x) \delta^{(d)}(x - y) = \left. \frac{\delta G[A^\omega]}{\delta \omega} \right|_{\omega=0}. \quad (2.44)$$

Aquí M es un operador diferencial y $\delta(\)$ es una delta de Dirac funcional. El jacobiano funcional \tilde{M} es calculado de la variación de la condición de gauge $G[A](x)$ con respecto a la transformación de gauge parametrizada por el elemento $\omega(y)$. Los índices internos de ese determinante se relacionan a la representación en la que están los campos de gauge.

A modo de ejemplo mostraremos el proceso explícitamente para el campo de Yang - Mills en 4 - dimensiones el que es invariante bajo transformaciones de gauge. Dado ésto, la acción correspondiente deberá ser invariante bajo estas transformaciones y debe responder a la siguiente relación que manifiesta la invariancia de la acción

$$S^{YM}[A_\mu] = S^{YM}[A_\mu^U] \quad (2.45)$$

en donde

$$A_\mu^U = U A_\mu U^\dagger - iU \partial_\mu U^\dagger \quad , \quad U(x) = e^{i\omega^a T_a}. \quad (2.46)$$

Esto significa que a grandes rasgos la función de partición debe ser de la forma

$$\int \mathcal{D}A_\mu \exp \left(-\frac{1}{\hbar} S \right) \quad (2.47)$$

pero como ya mencionamos no está definida. Se hace necesario en este punto redefinir la medida tal que no se exista un sobreconteo de los respectivos campos de gauge. Con ese objetivo consideraremos la cantidad

$$\Delta_G^{-1}[A_\mu] = \int \mathcal{D}U \delta[G^B(A_\mu^U)], \quad (2.48)$$

en donde A_μ^U es la cantidad definida en (2.46). La medida $\mathcal{D}U$ cuenta todos los elementos del grupo y G^B son funciones que se anulan para algunas de éstas. Este término nos asegura que la cantidad $\Delta_G^{-1}[A_\mu]$ es invariante de gauge. Este factor $\Delta_G^{-1}[A_\mu]$ lo usaremos para introducir un “1” en la correspondiente función de partición

$$\int \mathcal{D}A_\mu \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S[A]\right) = \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_G[A] \int \mathcal{D}U \delta[G^B[A^U]] e^{-\frac{1}{\hbar} S[A]} \quad (2.49)$$

que luego de hacer una transformación de gauge y debido a la invariancia de la acción y la medida $\mathcal{D}A_\mu$ podemos separar la parte relacionada a las transformaciones de gauge del factor restante

$$\int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_G[A_\mu] \delta[G(A_\mu)] e^{-\frac{1}{\hbar} S[A_\mu]}. \quad (2.50)$$

El primer factor corresponde a un infinito multiplicativo pero es en realidad el término redundante que buscamos eliminar. De esta forma aislamos el factor y se extrae de la función de partición haciendo que ésta sea finita.

2.2. Teorías de campos conformes

En esta parte haremos introducción de las teorías conformes siguiendo lo comentado en [23, 25, 51, 73] y [49].

Es bien sabido que las propiedades de simetría de un sistema físico son una herramienta importante ya que reducen la complejidad de un sistema y a su vez se traducen en leyes de conservación. Éstas están codificadas en el formalismo lagrangeano al requerir invariancia en la respectiva acción.

En el caso de teorías cuantizadas, las cantidades conservadas son generadores de las transformaciones de simetría en el espacio de Hilbert y de esta forma ellas deben satisfacer relaciones de conmutación válidas para los generadores, obteniéndose así nueva información relacionada a las corrientes conservadas.

Nuestro interés es describir ciertas propiedades de las teorías cuya invariancia es la conocida invariancia conforme la que desde los años 80 ha sido un ingrediente clave en diversas áreas de la matemática y la física además de ser relevante en la descripción de transiciones de fase en mecánica estadística 2 - dimensional como también en la descripción de la hoja de mundo de la teoría de cuerdas cuantizada, sólo por nombrar algunos ejemplos.

Mostraremos algunos aspectos básicos del grupo conforme y además, el motivo central de esta tesis: la *anomalía de traza*.

2.2.1. Transformaciones conformes

Consideremos el espacio plano d - dimensional y las transformaciones que localmente preserven el ángulo entre dos de sus líneas. Para visualizar ésto consideremos, en primera instancia, a aquellas transformaciones para el espacio de Minkowski

$$\eta_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} = \Lambda(x) \eta_{\mu\nu} \quad (2.51)$$

en donde $\Lambda(x)$ es llamada factor de escala. Cuando este factor es igual a la unidad, $\Lambda(x) = 1$, el grupo asociado a estas transformaciones es el grupo de Poincaré que consiste en traslaciones, rotaciones y transformaciones de Lorentz.

Con el objeto de entender más a fondo estas transformaciones, se estudiarán las transformaciones de coordenadas infinitesimales y veremos su comportamiento a primer orden en un parámetro de transformación local $\epsilon(x)$

$$x'^{\rho} = x^{\rho} + \epsilon^{\rho}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.52)$$

Ahora observaremos el cómo se comporta la ecuación (2.51) luego de insertar esta transformación

$$\begin{aligned} \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} &= \eta_{\rho\sigma} (\delta_{\mu}^{\rho} + \partial_{\mu}\eta^{\rho} + \mathcal{O}(\epsilon^2)) (\delta_{\nu}^{\sigma} + \partial_{\nu}\eta^{\sigma} + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \\ &= \eta_{\mu\nu} + \eta_{\mu\sigma}\partial_{\nu}\epsilon^{\sigma} + \eta_{\rho\nu}\partial_{\mu}\epsilon^{\rho} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \eta_{\mu\nu} + (\partial_{\nu}\epsilon^{\mu} + \partial_{\mu}\epsilon^{\nu}) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (2.53)$$

De este último resultado surge la pregunta natural: ¿cuál será la condición a imponer para que esta transformación sea una transformación conforme? es decir ¿qué debemos asumir para que la nueva métrica sea proporcional a la anterior? Vemos que la métrica no cambiará salvo por el factor $\partial_{\nu}\epsilon^{\mu} + \partial_{\mu}\epsilon^{\nu}$ y que para mantener entonces la proporcionalidad a la métrica debemos obligar a que este término cumpla con la misma condición de proporcionalidad

$$\partial_{\nu}\epsilon^{\mu} + \partial_{\mu}\epsilon^{\nu} = K(x)\eta_{\mu\nu} \quad (2.54)$$

donde $K(x)$ es alguna función que puede ser determinada luego de tomar la traza a esta última ecuación

$$2\partial^{\mu}\epsilon_{\mu} = K(x)d \quad (2.55)$$

entregándonos una expresión a satisfacerse para que alguna transformación de coordenadas sea conforme

$$\partial_{\nu}\epsilon^{\mu} + \partial_{\mu}\epsilon^{\nu} = \frac{2}{d}(\partial^{\rho}\epsilon_{\rho})\eta_{\mu\nu} \quad (2.56)$$

y que además es fácilmente generalizable para espacios distintos al de Minkowski ($\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$). También, luego de aplicar otra derivada ∂_{ν} y realizar el intercambio en $\mu \leftrightarrow \nu$ nos permite encontrar una relación de utilidad

$$(\eta_{\mu\nu}\partial^{\rho}\partial_{\rho} + (d-2)\partial_{\mu}\partial_{\nu})(\partial^{\lambda}\epsilon_{\lambda}) = 0 \quad (2.57)$$

en donde es posible ver que el comportamiento del grupo conforme es similar en todas dimensiones salvo en $d = 2$. En este caso, el grupo conforme se transforma en el grupo de Virasoro. Otro detalle a observar es el hecho que la solución a la ecuación (2.57) puede ser como máximo a orden cuadrático en x^{μ} . De esta forma se postula una solución

$$\epsilon_{\mu} = a_{\mu} + b_{\mu\nu}x^{\nu} + c_{\mu\nu\rho}x^{\nu}x^{\rho} \quad (2.58)$$

en donde $a_{\mu}, b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu\rho} \ll 1$ son constantes y además $c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu}$ es simétrico en sus últimos dos índices.

Para comprender qué es cada uno de éstos estudiaremos cada término por separado y veremos a qué tipo de transformación se asocia:

1. El término constante a_{μ} no tiene ninguna restricción y representa a las traslaciones infinitesimales $x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$ para las cuales el generador es $P_{\mu} = -i\partial_{\mu}$.

2. Al introducir el término lineal $b_{\mu\nu}x^\nu$ se encuentra la siguiente condición:

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{d}(\eta^{\rho\sigma}b_{\sigma\rho})\eta_{\mu\nu}. \quad (2.59)$$

Esta ecuación nos permite separar a $b_{\mu\nu}$ en una parte simétrica y otra antisimétrica

$$b_{\mu\nu} = \alpha\eta_{\mu\nu} + m_{\mu\nu} \quad (2.60)$$

con $m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu}$. La parte simétrica $\eta_{\mu\nu}$ describe transformaciones de escala infinitesimales $x'^\mu = (1 + \alpha)x^\mu$ cuyo generador es $D = -ix^\mu\partial_\mu$ mientras que la parte antisimétrica corresponde a rotaciones infinitesimales $x'^\mu = (\delta_\nu^\mu + m_\nu^\mu)x^\nu$ cuyo generador es el operador de momentum angular $L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$.

3. El último término a considerar es el de orden cuadrático en x^μ que luego de introducirse en la ecuación (2.57) se nota lo siguiente:

$$\partial^\mu\epsilon_\mu = b^\mu{}_\mu + 2c^\mu{}_{\mu\rho}x^\rho \rightarrow \partial_\nu(\partial^\mu\epsilon_\mu) = 2c^\mu{}_{\mu\nu}. \quad (2.61)$$

De esta última se desprende que

$$c_{\mu\nu\rho} = \eta_{\mu\rho}b_\nu + \eta_{\mu\nu}b_\rho - \eta_{\nu\rho}b_\mu \text{ con } b_\mu = \frac{1}{d}c^\rho{}_{\rho\mu}. \quad (2.62)$$

La transformación resultante es llamada *Transformaciones conformes especiales* (SCT) o *conformal boosts* y tienen la siguiente forma infinitesimal

$$x'^\mu = x^\mu + 2x^\lambda b_\lambda x^\mu - x^\lambda x_\lambda b^\mu. \quad (2.63)$$

y su correspondiente generador se denota por $K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^\nu x_\nu\partial_\mu)$.

A modo de resumen se tiene lo siguiente:

Traslaciones	$P_\mu = -i\partial_\mu$
Dilataciones	$D = -ix^\mu\partial_\mu$
Rotaciones	$L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$
SCT	$K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu)$.

y estos generadores permiten definir el álgebra del grupo conforme los que satisfacen las siguientes reglas de conmutación

$$\begin{aligned} [D, P_\mu] &= iP_\mu \\ [D, K_\mu] &= -iK_\mu \\ [K_\mu, P_\nu] &= 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu}) \\ [K_\rho, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu) \\ [P_\rho, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu) \\ [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}). \end{aligned} \quad (2.64)$$

2.2.2. Anomalía conforme

Esta sección estará basada fundamentalmente en [23, 25, 39, 48, 49, 51].

El estudio de la anomalía conforme, desde sus descubrimiento, ha sido conectada e influenciada por varios problemas importantes en física desde la radiación de Hawking, teorías conformes, teoría de cuerdas y problemas matemáticos. Por anomalía, en general, entendemos que es un quiebre entre las simetrías clásicas y el requerimiento de regularización luego de la cuantización.

En diversos casos de materia (clásica) la acción respectiva posee formalmente algún tipo de invariancia. El ejemplo típico de esto es la anomalía quiral: un campo espinorial “cargado”

es invariante bajo rotaciones “internas” (de gauge), rotaciones espaciales y transformaciones de quiralidad que involucran conjugación con γ_5 . La correspondiente corriente de Noether son las conocidas $j_\mu \sim \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ y la corriente quiral $j_{\mu 5} \sim \bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$. Sin embargo a nivel cuántico, el requisito de regularización para definir y calcular funciones de correlación, las que involucran loops cerrados (incluso para los campos libres) no puede preservar ambas invariancias. Por ejemplo, un regulador asociado a la masa altera la corriente quiral mientras que las otras prescripciones pueden incluso alterar la conservación de la “carga”. Todo esto puede no tener importancia para los campos libres (ya que sus corrientes no son fuente de nada, por cierto) pero en la medida que son fuente, incluidos los casos no dinámicos, tienen consecuencias importantes. Un caso particular de esto se ve al considerar el loop triangular representado por $\langle T[j_{\mu 5}(x)j_\alpha(y)j_\beta(z)] \rangle$. Cada una de las corrientes j_α está acoplada a una fuente externa A_α mientras que la divergencia de $j_{\mu 5}$ representa un campo pseudoescalar neutro (el π^0). De esta forma en la observación del decaimiento $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ se puede rastrear directamente el quiebre cuántico de la invariancia quiral a través de un diagrama de Feynman que involucra un único loop que acompaña a la divergencia no nula de la función de 3 - puntos. Si vamos un poco más lejos, aún bajo el hecho que considerar un loop cerrado y el hecho de tener que regularizar para obtener una respuesta bien definida, en ella no hay infinitos. La anomalía en sí misma es proporcional a la densidad topológica $F_{\mu\nu}^*F^{\mu\nu}$, es decir, la corriente quiral falla al momento de ver su conservación en un término $\partial_\mu j^{\mu 5} \sim \alpha F^*F$ y entonces debe de corresponderse una acción efectiva que involucre el “backreaction” de la materia cuantizada (fermiones), de los piones “externos” y fotones.

Hay otro escenario en el que la regularización a través de la introducción de un término de masa, un cut - off o la extensión de la dimensión física destruye una invariancia: la invariancia conforme que involucra sólo parámetros dimensionales. Los ejemplos característicos incluyen a la acción de Maxwell 4 - dimensional, el campo espinorial o escalar sin masa en cualquier dimensión y cuyas corrientes de dilatación $D^\mu = x^\nu T_\nu^\mu$ son conservadas ya que se satisfacen las condiciones $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ y $T^\mu_\mu = 0$. En este punto simplemente podemos seguir los mismos pasos que en la anomalía quiral: cualquier regularización introduce una masa o altera la dimensión haciendo que las contribuciones a los loops cerrados que involucran al tensor de energía - momentum se vean afectados. Se perderá la conservación de ésta o la nulidad de su traza.

2.2.2.1. Anomalía conforme en $d = 2$.

Las teorías en 2 - dimensiones son siempre un caso particular de las que hemos aprendido mucho desde un contexto simple. Veremos que en esta dimensión, todo lo relacionado a la anomalía conforme puede realizarse de forma explícita y desde esta idea entender lo que sucede en dimensiones más altas.

Para tratar este tema, haremos uso del método de regularización dimensional en el cual se hace una pequeña alteración ϵ a la dimensión física, es decir para este caso, $d = 2 + \epsilon$, con el objetivo de no obtener funciones de correlación ambiguas para luego tomar el límite de $\epsilon \rightarrow 0$. Cerca de $d = 2$, comenzaremos por estudiar la función de correlación de 2 - puntos en el espacio plano

$$K(q)_{\mu\nu\alpha\beta} = \langle T_{\mu\nu}(q)T_{\alpha\beta}(-q) \rangle \quad (2.65)$$

en donde q es el momentum externo de este loop cerrado de 2 - puntos. $T_{\mu\nu}$ representa al tensor de energía - momentum de un campo escalar sin masa para el cual su traza $T^\mu_\mu = 0$ en cualquier dimensión. Específicamente será

$$T_{\mu\nu} = \left(\partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha \right) + \frac{(d-2)}{4(1-d)} (\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\nabla^2) \phi^2 \equiv T_{\mu\nu}^0 + \Delta_{\mu\nu}. \quad (2.66)$$

Este es el tensor de energía - momentum “estándar” $T_{\mu\nu}^0$ complementado por un potencial identicamente conservado $\Delta_{\mu\nu}$ que no afecta a los generadores del grupo de Poincaré, de modo que sí es permitido. Con el uso de las ecuaciones de movimiento ($\nabla^2\phi = 0$) es sencillo mostrar que

$T_{\mu\nu}$ no tiene traza y además es conservado $q^\nu T_{\nu}^{\mu}(q) = 0$. Luego la función $K(q)_{\mu\nu\alpha\beta}$ debe ser proporcional al proyector $P_{\mu\nu}(q) = (-q_\mu q_\nu + q^2 \eta_{\mu\nu})$ en cada par de índices simétricos $(\mu\nu)$ y $(\alpha\beta)$ y por supuesto, sin traza en ellos. Así, la función $K(q)_{\mu\nu\alpha\beta}$ es

$$K(q)_{\mu\nu\alpha\beta}(q) = \frac{f(d)}{\epsilon} \left\{ (P_{\mu\alpha} P_{\nu\beta} + P_{\mu\beta} P_{\nu\alpha}) - \frac{2}{d-1} P_{\mu\nu} P_{\alpha\beta} \right\} q^{-2(1+\epsilon)} \quad (2.67)$$

donde $f(d)$ es una constante finita que depende del tipo de campo. Ya que $P_{\mu\alpha} P_{\alpha\nu} = q^2 P_{\mu\nu}$ y $P_{\mu}^{\mu} = (d-1)q^2$, se sigue que K obedece a todos los requisitos mencionados. Por conteo de potencias se puede esperar que K sea finito en $d = 2$.

Se ha mencionado que una característica de la anomalía es ser finita sin embargo esto puede ser muy sutil: debe haber un factor ϵ oculto en el numerador para cancelar este mismo factor que está en el denominador en $d = 2$. Ésto ocurre sólo para el término $q_\mu q_\nu q_\alpha q_\beta$ que es proporcional a ϵ . El resto de términos tienen contribución nula y de esta forma, cada término que es cuártico en q y sus sumas se anula en $d = 2$. Ésto también puede entenderse si se introduce una métrica externa y acoplar cada $T_{\mu\nu}$ a ésta de la forma usual. De hecho, es suficiente hacer un acople linealizado como una desviación del espacio plano $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ y luego invocar la covariancia para obtener una respuesta completa.

La funcional correspondiente

$$W[h_{\mu\nu}] = \int \int h_{\mu\nu}(x) \langle T_{\mu\nu}(x) T_{\alpha\beta}(y) \rangle h_{\alpha\beta}(y) d^2 x d^2 y \quad (2.68)$$

es por supuesto, la acción gravitacional efectiva (que es finita por cierto) debido al backreaction de la materia (a 1 - loop) y que incorpora la anomalía en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Usando la identidad linealizada (con la convención $R_{\mu\nu} \sim +\partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha$)

$$G_{\mu\nu}^L = \frac{(\nabla^2)^{-1}}{2} (P_{\mu\nu} P_{\alpha\beta} - P_{\mu\alpha} P_{\nu\beta}) h_{\alpha\beta}, \quad R^L = P^{\mu\nu} h_{\mu\nu}, \quad P_{\mu\nu} \equiv (-\eta_{\mu\nu} \nabla^2 + \partial_{\mu\nu}^2) \quad (2.69)$$

se ve que

$$W^L[h] \sim \frac{1}{\epsilon} \int d^d x d^d y \left[4G_{\mu\nu}^L (\nabla^2)^{-1} G_{\mu\nu}^L + \frac{2\epsilon}{(d-1)} R^L (\nabla^2)^{-1} R^L \right] \quad (2.70)$$

donde se ha eliminado la parte $(\nabla^2)^\epsilon$ que es irrelevante. Ahora, en $d = 2$, la identidad $P_{\mu\nu} = q_\mu q_\nu$ que hemos mostrado antes implica precisamente $G_{\mu\nu}^L \equiv 0$, una identidad de la que es bien sabido que se cumple para cualquier orden en $h_{\mu\nu}$, es decir, para todo el tensor de Einstein. De esta forma al considerar $d = 2$ y $G_{\mu\nu}^L = 0$ se entrega por acción efectiva a

$$W^L[h] \sim \frac{1}{2} \int d^2 x d^2 y R^L(x) (\nabla^2)^{-1}(x, y) R^L(y), \quad \nabla^2 [(\nabla^2)^{-1}(x, y)] \equiv \delta(x - y). \quad (2.71)$$

Notar además que posee $(\nabla^2)^{-1}$ posee un único polo, definido claramente por el propagador escalar del espacio plano (con la condición de borde apropiada). Ésto es rastreable al diagrama de Feynman a 1 - loop originado por esta acción efectiva, hecho que es necesario recordar también en dimensiones más altas. Ahora fácilmente se puede mejorar esta ecuación (2.71) a una forma totalmente covariante

$$W[g] \sim \int \int d^2 x d^2 y (\sqrt{-g} R)(x) \langle x | (\sqrt{g} (\nabla^2)^{-1}) | y \rangle (\sqrt{-g} R)(y) \quad (2.72)$$

y que ahora está escrito en términos de un propagador en espacios curvos la que además es la bien conocida acción de Polyakov. Mencionaremos dos cosas importantes respecto a ésta acción W . La primera de ellas es recordarnos dónde se encuentran las anomalías: incluso si la acción de un campo es invariante de Weyl, su respectiva acción W no lo es. Ésto es, si variamos $g_{\mu\nu}$ en W y usando el hecho que en 2D

$$\delta(\sqrt{-g} \nabla^2) \equiv \delta(\partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) = 0, \quad \delta(\sqrt{-g} R) = -2\sqrt{-g} \nabla^2 \sigma \quad (2.73)$$

se encuentra que

$$\frac{\delta W}{\delta \sigma(x)}[g] \sim \sqrt{-g}R(x) \equiv \mathcal{A}(x) \quad (2.74)$$

no se anula. Un colorario de ésto es que la anomalía $\mathcal{A}(x)$, siendo una derivada variacional de una acción, debe responder a la relación de reciprocidad

$$\frac{\delta \mathcal{A}(x)}{\delta \sigma(x')} = \frac{\delta \mathcal{A}(x')}{\delta \sigma(x)} \quad (2.75)$$

2.2.2.2. Anomalía conforme en dimensiones más altas.

La generalización de la anomalía de traza para dimensiones más altas requiere el conocimiento de polinomios invariantes de Weyl en la curvatura. Esos polinomios emergen del hecho que la antisimetrización de cualquier expresión que involucre $2n$ índices para cualquier entero $d = 2m < 2n$; en particular, si consideramos una cantidad $A_{\rho\sigma}^{\mu\nu}$ con las simetrías algebraicas del tensor de Riemann para las cuales se cumple la condición

$$\sqrt{-g}A_{[\mu_1\nu_1}^{\mu_1\nu_1} \dots A_{\mu_n\nu_n}^{\mu_n\nu_n}] \equiv 0, m < n. \quad (2.76)$$

De esta ecuación se desprenden dos identidades que serán relevantes para nosotros: la primera de ellas es considerar directamente a A como el tensor de Weyl W_{abcd} en sí mismo $A = W$. La segunda es en la cual A es reemplazado por $W_{\rho\sigma}^{\mu\nu} + (\delta_{\nu}^{\mu}K_{\sigma}^{\nu} + sim)$, donde K es un tensor sin traza que para (2.76) es

$$(d - 2n + 1)\sqrt{-g} \left(W_{[\mu_1\nu_1}^{\mu_1\nu_1} \dots W_{\mu_{n-1}\nu_{n-1}}^{\mu_{n-1}\nu_{n-1}} - d^{-1}\delta_{\beta}^{\alpha}\text{Tr}(W\dots W) \right) \equiv 0, m < n. \quad (2.77)$$

Si A es reemplazado por el tensor de Riemann, luego el lado izquierdo de (2.76) es la densidad de Euler, E_{2n} en $d = 2n$ dimensiones, manifestando que E_{2n} se anula en todas las dimensiones pares menores; además es una derivada total en esta dimensión y a primer orden la expansión alrededor de la métrica plana. Ya que E_{2n} es una combinación lineal de (2.76) con $A = W$ y (2.77) por R_{β}^{α} , hay una única contribución relevante de la forma (2.76) que se anula para dimensiones enteras menores a d y que es conformalmente invariante a primer orden en la expansión de métrica plana. Los calculos formalmente se simplifican haciendo la elección

$$I_n = \sqrt{-g}W_{[\mu_1\nu_1}^{\mu_1\nu_1} \dots W_{\mu_n\nu_n}^{\mu_n\nu_n}] - E_{2n} \quad (2.78)$$

la que remueve explícitamente las potencias más altas del tensor de Riemann; I_n transforma homogeneamente bajo transformaciones de Weyl, es decir, $\delta I_n = (d - 2n)I_n\phi$. Por conteo de potencias, la contribución a la acción efectiva invariante conforme tendrá la siguiente forma

$$W_n = (d - 2n + 2)^{-1} \int d^d x I_n (\nabla^2)^{\frac{d-2n}{2}} + \dots \quad (2.79)$$

Como fue explicado antes, el término W_n produce la anomalía de tipo - A en $d = 2n - 2$ encontrando el término "0/0" ya que I_n se anula en $d = 2n - 2$.

En $d = 4$ encontramos

$$I_3 = \sqrt{-g}(W_{\mu\nu}^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}^{\lambda\sigma}W_{\lambda\sigma}^{\mu\nu} - 4W_{\alpha\beta}^{\mu\nu}W_{\mu\rho}^{\alpha\sigma}W_{\nu\sigma}^{\beta\rho}) - E_6 \quad (2.80)$$

y luego de realizar un cálculo extenso se llega al siguiente resultado

$$W_{3,d=4} = \int d^4 x \sqrt{-g}(\nabla^2)^{-1} \left[\frac{1}{2}R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 R + 10R_{\mu\nu}R^{\nu\alpha}R_{\alpha}^{\mu} - 13R_{\mu\nu}^2 R + \frac{41}{18}R^3 + 6R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\alpha}R^{\nu\beta} \right]. \quad (2.81)$$

Después de efectuar la variación con respecto a ϕ se encuentra el resultado esperado

$$\delta W_{3,d=4} = 9 \int d^4x \sqrt{-g} [R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 4R_{\mu\nu}^2 + R^2] \phi \quad (2.82)$$

de modo que la anomalía de tipo - A está asociada a la densidad de Euler en $d = 4$

$$\mathcal{A} = E_4. \quad (2.83)$$

Ahora nos enfocamos en la anomalía de tipo - B que fue originalmente encontrada en [47]. Ésta ocurre desde 4 - dimensiones a dimensiones superiores ya que no hay invariantes relevantes en $d = 2$. Consideremos el invariante de Weyl W^0

$$W^0 = \epsilon^{-1} \int d^d x \sqrt{-g} W (\nabla^2)^\epsilon W \quad (2.84)$$

$$\sim \int d^d x \sqrt{-g} W \log(\nabla^2) W + \mathcal{O}(\epsilon), 2\epsilon = d - 4. \quad (2.85)$$

El término que complementa a W_0 que denotamos por W^1 es finito en el límite ultravioleta $\epsilon \rightarrow 0$ por lo que no contribuye a la anomalía. El contratérmino que permite cancelar la divergencia en (2.85) es

$$W^c = e^{-1} \int d^d x \sqrt{-g} W^2 \mu^{2\epsilon}. \quad (2.86)$$

Al reunir todos estos términos vemos que la acción total es

$$W = W^0 + W^1 - W^c \quad (2.87)$$

y que es finita en $\epsilon \rightarrow 0$ pero W^c rompe explícitamente la invariancia conforme de $W^0 + W^1$. Como W es finito, podemos intercambiar el orden de las operaciones para calcular la anomalía

$$\mathcal{A} \equiv \delta_\phi(\lim W) = \lim \delta_\phi W = - \lim \delta_\phi W^c = -\sqrt{-g} W^2. \quad (2.88)$$

Estos resultados pueden resumirse en los siguientes puntos:

1. Existe una anomalía de tipo - A que es proporcional a la densidad de Euler E_{2n} y su origen es que es el único término en la acción efectiva que contiene $(n + 1)$ tensores de Weyl que se anulan en $d \leq 2n + 1$.
2. Hay un número creciente de anomalías de tipo - B que corresponden a todos los polinomios invariantes de Weyl (no nulos) que simbólicamente son de la forma $\sim R_{\mu\nu\alpha\beta}^{n-m} (\nabla^2)^m (m < n - 1)$ de n tensores de curvatura y laplacianos covariantes. No hay anomalía de tipo - B en $d = 2$ y hay sólo una en $d = 4$ dimensiones. El origen de estas anomalías es el contratérmino en la acción efectiva que cancela la divergencia logarítmica en la integral del correspondiente invariante por $(\nabla^2)^{(d-2n)/2}$.
3. No hay anomalía de traza en dimensiones impares para variedades cerradas.

El proceso en el caso 6 - dimensional es análogo de modo que sólo mostraremos los respectivos invariantes. Como fue mencionado, la anomalía de tipo - A en este caso será la respectiva densidad de Euler, E_6 , mientras que ahora ya no hay una única anomalía de tipo - B sino que serán tres. Éstas son construídas a partir de dos polinomios cúbicos de Weyl y uno que también es invariante conforme pero que involucra también al operador laplaciano:

$$\mathcal{A}_1 = \sqrt{-g} W_{\rho\sigma}^{\mu\nu} W_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} W_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \quad (2.89)$$

$$\mathcal{A}_2 = W_{\rho\sigma}^{\mu\nu} W_{\mu\beta}^{\rho\alpha} W_{\nu\alpha}^{\sigma\beta} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3 = \sqrt{-g} & \left(W_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \nabla^2 W_{\mu\nu}^{\rho\sigma} + 2W^{\mu\nu\rho\alpha} W_{\mu\nu\rho\beta} R_{\alpha}^{\beta} - 3W_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\rho} R^{\nu\sigma} - \frac{3}{2} R^{\nu\sigma} R_{\sigma\alpha} R_{\nu}^{\alpha} \right. \\ & \left. + \frac{27}{20} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} R - \frac{21}{100} R^3 \right). \end{aligned} \quad (2.91)$$

2.3. Expansión del operador de Heat Kernel

Esta sección la basaremos en [9, 10, 69, 133] y [70].

El heat kernel es un objeto matemático clásicamente bien estudiado [82] pero que comenzó a tener importancia en física cuando Fock notó que las funciones de Green podían representarse en una integral usando una coordinada auxiliar (llamada “tiempo propio”) y un operador que satisface la ecuación del calor. Este operador está directamente relacionado a sus autovalores y como fue estudiado en el problema formulado por Kac, “Can one hear the shape of a drum”, este mecanismo permite reconstruir la geometría de una variedad a partir del espectro de un operador diferencial de éste haciendo que obtenga interés ya no sólo a nivel espectral sino que también geométrico. En los años 90’s, el heat kernel en variedades con y sin borde fue bien entendido bajo condiciones de borde simples. También se convirtió en la herramienta estándar en los cálculos relacionados a la polarización del vacío, efecto Cassimir, y el estudio de anomalías cuánticas, todo esto sin olvidar los progresos en física teórica especialmente en teoría de cuerdas y áreas relacionadas.

Dentro de las fortalezas que tiene este método es que es más bien universal ya que un único cálculo puede involucrar muchas aplicaciones independiente de la naturaleza del campo de estudio, ya sean campos escalares o de espín más alto o campos de gauge lo que es naturalmente conveniente para nuestro interés.

Para mostrar alguna de las aplicaciones que tiene el estudio del operador de heat kernel en teoría cuántica de campos consideremos la funcional generadora de las funciones de Green de un campo ϕ en la formulación de integral de camino

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp(-\mathcal{L}(\phi, J)). \quad (2.92)$$

Los métodos asociados al heat kernel son usados mayoritariamente en cálculos a 1 - loop, haciendo que en esta aproximación sea suficiente expandir la densidad lagrangeana a lo más a orden cuadrático en las fluctuaciones de ϕ

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{cl}} + \langle \phi, J \rangle + \langle \phi, D\phi \rangle \quad (2.93)$$

y en donde \mathcal{L}_{C} se refiere a la densidad lagrangeana en un background clásico. El término $\langle (), () \rangle$ se refiere al producto interno entre dos elementos del espacio de los campos. Por ejemplo, para campos reales de una sola componente este producto es

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int d^d x \sqrt{g} \phi_1(x) \phi_2(x). \quad (2.94)$$

Si bien podemos esperar que el término lineal en ϕ se anule (debido a que responde a las ecuaciones de movimiento) debemos preservarlo ya que contribuye en general a las funciones de n - puntos. También debemos ser explícitos que el background y los campos cuánticos pueden ser de naturaleza totalmente distinta y además D debe ser un operador diferencial. La idea está en que si la acción tiene una parte cuadrática, siempre se podrá llevar a la forma $\langle \phi, D\phi \rangle$.

El caso más sencillo de trabajar de un campo escalar en una geometría clásica D es el operador laplaciano con masa

$$D = D_0 = -\nabla_\mu \nabla^\mu + m^2 \quad (2.95)$$

que será nuestro ejemplo a ilustrar.

Consideremos así el problema de valores iniciales para la evolución bajo la acción de un operador diferencial autoadjunto D , positivo y de orden r definido en \mathbb{R}^n , el que además puede ser dotado de índices internos

$$(\partial_t + D)u(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x) \quad (2.96)$$

en donde $f(x)$ es una función conocida. La solución a esta ecuación diferencial puede escribirse formalmente por

$$u(x, t) = \exp(-tD) f(x) \quad (2.97)$$

sin embargo existe una solución alternativa a esta ecuación la que puede escribirse como la convolución de la función f con un operador $\mathcal{K}(t; x, y, D)$, tal que la solución a (2.96) es

$$u(x, t) = \int dy \mathcal{K}(t; x, y, D) f(y). \quad (2.98)$$

Al introducirse en la ecuación diferencial se muestra que esta nueva función $\mathcal{K}(t; x, y, D)$, que desde ahora llamaremos *heat kernel*, debe satisfacer una nueva ecuación diferencial con su respectiva condición inicial

$$(\mathbb{U}\partial_t + D)_j^i \mathcal{K}(t; x, y, D)_k^j = 0, \quad \mathcal{K}(0; x, y, D)_j^i = \delta_j^i \delta(x - y). \quad (2.99)$$

Este operador se podrá escribir de manera formal si hacemos uso de los autoestados del operador de posición $|x\rangle$, tal que $f(y) = \langle y|f\rangle$. Al sustituir ésto en la ecuación (2.98) y al comparar con (2.97) se induce rápidamente que el heat kernel se podrá escribir por

$$\mathcal{K}(t; x, y, D) = \langle x|e^{-tD}|y\rangle. \quad (2.100)$$

Dentro de las propiedades más importantes, al menos para el desarrollo de esta tesis, es el hecho de que el heat kernel está íntimamente conectado a la parte espectral del operador D pudiendo calcularse, por ejemplo, el determinante de D con la traza del operador de heat kernel

$$\log \det D = \text{Tr} \log D = \text{Tr} \left[-\int_0^\infty \frac{dt}{t} \mathcal{K}(t, D) \right] \quad (2.101)$$

en donde Tr es la traza de los índices del espacio tiempo y de los índices internos. Para mostrar ésto usaremos las autofunciones del operador autoadjunto D las que generan una base completa $\{|f_n\rangle\}$. Con ésto aseguramos que $D|f_n\rangle = \lambda_n|f_n\rangle$. Sea entonces λ_n un autovalor del operador D . Podemos asegurar, salvo un término infinito que no depende de λ_n , que la relación

$$\log \lambda_n = -\int \frac{dt}{t} e^{-t\lambda_n} \quad (2.102)$$

es válida. Al multiplicar cada uno de éstos con su respectivo autoestado y luego sumando cada uno de los términos resultantes se puede observar lo siguiente

$$\begin{aligned} \sum_n \log \lambda_n |f_n\rangle &= \sum_n \left[-\int \frac{dt}{t} e^{-t\lambda_n} |f_n\rangle \right] \\ &= \sum_n \left[-\int \frac{dt}{t} e^{-tD} |f_n\rangle \right] \\ &= \sum_n \left[-\int \frac{dt}{t} \mathcal{K}(t, D) |f_n\rangle \right]. \end{aligned}$$

El lado izquierdo de nuestra última ecuación es $\text{Tr} \log D$ mientras que el lado derecho corresponde a $\text{Tr}[-\int_0^\infty dt t^{-1} \mathcal{K}(t, D)]$, lo que corresponde a (2.102). Usando ahora la identidad $\log \det D = \text{Tr} \log D$ se encuentra

$$\log \det D = \text{Tr} \left[-\int \frac{dt}{t} \mathcal{K}(t, D) \right] \quad (2.103)$$

y explícitamente la traza del operador de heat kernel es

$$\text{Tr} \left[-\int \frac{dt}{t} \mathcal{K}(t, D) \right] = \text{Tr}(e^{-tD}) = -\int_0^\infty \int d^n x \sqrt{g} \mathcal{K}(t, x, x, D). \quad (2.104)$$

Esta integral por lo general es divergente en ambos límites pero dado nuestro interés nos concentraremos en el límite inferior.

La expansión asintótica de la traza del heat kernel en $t \rightarrow 0^+$ es conocida para un operador diferencial autoadjunto de orden r :

$$\text{Tr} \mathcal{K}(t; x, x; \Delta) \sim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{k \geq 0} \frac{2}{(4\pi)^{2r}} b_k(x) t^{k-4/r} \quad (2.105)$$

donde los coeficientes b_k , llamados coeficientes de Seeley - de Witt, pueden expresarse en términos de invariantes locales calculados desde el operador Δ . Introduciremos ahora la definición

$$B_k(\Delta) := \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^4 x b_k(x). \quad (2.106)$$

Luego de comparar el comportamiento asintótico y la traza es claro que es divergente en el límite inferior de modo que hay que regularizar. Por simplicidad y luego por introducir un cut - off UV Λ , se tiene que las contribuciones divergentes son

$$(\log \det \tilde{\Delta})_\Lambda = -\frac{2}{r} \int_{(\Lambda/\mu)^{-r}} \frac{dt}{t} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{t}{\mu^r} \right)^{(k-4)/r} B_k(\Delta) \quad (2.107)$$

$$= -2B_4 \log \frac{\Lambda}{\mu} + \dots \quad (2.108)$$

en donde hemos omitido las divergencias con potencias. Notar que el término $\log \Lambda$ está dado por el coeficiente b_4 del heat kernel y no está asociado al orden del operador diferencial, es decir, para el caso 4 - dimensional basta con encontrar el coeficiente b_4 y tendremos la anomalía conforme.

2.3.1. Heat kernel de operadores de segundo orden en $d = 4$.

Estudiemos en primer lugar el operador diferencial de segundo más básico en 4 - dimensiones, que corresponderá al operador laplaciano $\Delta = -\partial_\mu \partial^\mu$ en \mathbb{R}^4 . La solución para el heat kernel está dada por la función gaussiana

$$\mathcal{K}(x, y; t; \Delta) = \frac{1}{(4\pi t)^2} \exp \left(-\frac{(x-y)^2}{4t} \right) \quad (2.109)$$

y su expansión asintótica en $t = 0$ es dada por $b_0(x) = 1$ y $b_n(x) = 0$ para todos los otros coeficientes con $n \geq 1$.

Veamos ahora el caso más general en 4 - dimensiones en el que el operador diferencial autoadjunto y de segundo orden es

$$\Delta_2 = -\nabla^2 - X \quad (2.110)$$

en donde Δ_μ es la derivada covariante y X^i_j es una función que posiblemente puede depender del background.

Al considerar la solución explícita en el caso plano, podemos pensar en una corrección en forma de serie de potencias a ésta

$$\mathcal{K}(x, y; t, \Delta) = \frac{1}{(4\pi t)^2} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) \sum_{n \geq 0} a_n(x, y) t^n \quad (2.111)$$

la que luego puede introducirse en la ecuación del heat kernel para el operador Δ y obtener mediante recursividad las ecuaciones diferenciales para cada uno de los coeficientes $a_n(x, y)$. La solución a éstos es

$$\begin{aligned} b_0(x) &= \text{Tr } a_0(x, x) = \text{Tr } \mathbb{I} \\ b_1(x) &= 0 \\ b_2(x) &= \text{Tr } a_1(x, x) = -\text{Tr } X \\ b_3(x) &= 0 \\ b_4(x) &= \text{Tr } a_2(x, x) = \text{Tr} \left[\frac{1}{12} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} X^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.112)$$

en donde $F_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ es el tensor de curvatura asociado a derivada covariante en la representación en la cual el campo transforma.

Para nuestro interés, como será mostrado posteriormente, será útil el estudio de operadores que pueden expresarse como el producto de otros. Si Δ_1 y Δ_2 son éstos, entonces el determinante del operador $\Delta_1 \Delta_2$ es

$$\det(\Delta_1 \Delta_2) = \det \Delta_1 \cdot \det \Delta_2 \quad (2.113)$$

expresión válida, modulo una anomalía multiplicativa que no afecta a la de traza, para cualquier par de operadores autoadjuntos. En el caso de los coeficientes de heat kernel b_4 se encuentra que puede descomponerse como la suma de los coeficientes de cada uno de los operadores.

$$b_4(\Delta_1 \Delta_2) = b_4(\Delta_1) + b_4(\Delta_2). \quad (2.114)$$

2.3.2. Resultados en dimensión arbitraria d.

Los resultados explícitos para los primeros coeficientes de heat kernel del operador $\Delta_2 = -\nabla^2 - X$, encontrados en [70], los escribiremos en términos de invariantes (seguimos en este punto la nomenclatura de [16])

Para mostrar el caso general d - dimensional de los primeros coeficientes usaremos la nomenclatura de [16] que describe los coeficientes encontrados en [70]. Los coeficientes b_{2n} estándar estarán dados por

$$b_{2n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} a_{2n} \quad a_{2n} = \alpha_{2n} + \beta_{2n} \quad (2.115)$$

en donde α_{2n} y β_{2n} indican las partes conectadas y desconectadas de los diagramas, respectivamente. Además, los coeficientes $a_n = 0$ para n impar. Para nuestro interés a futuro mostraremos únicamente los coeficientes hasta orden 6 los que estarán relacionados a las anomalías de Weyl en 6 - dimensiones para los distintos campos que estudiaremos:

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_4 = \frac{1}{2} \alpha^2, \quad \beta_6 = \frac{1}{6} \alpha_2^3 + \alpha_2 \alpha_4. \quad (2.116)$$

Los términos α_{2n} pueden ser escritos en términos del endomorfismo X , la curvatura F e invariantes construidos con el tensor de Riemann, Ricci, escalar de Ricci y derivadas covariantes:

$$\alpha_0 = 1 \quad (2.117)$$

$$\alpha_2 = X + \frac{1}{6}R \quad (2.118)$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{6}\nabla^2 \left(X + \frac{1}{5}R \right) + \frac{1}{180}(R_{iem}^2 - R_{ic}^2) + \frac{1}{12}F_{ab}^2 \quad (2.119)$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{7!} \left[18\nabla^4 R + 17(\nabla_a R)^2 - 2(\nabla_a R_{mn})^2 - 4\nabla_a R_{bm} \nabla^b R^{am} + 9(\nabla_a R_{mij})^2 \quad (2.120)$$

$$\begin{aligned} & - 8R_{ab}\nabla^2 R^{ab} + 12R_{ab}\nabla^a \nabla^b R + 12R_{abmn}\nabla^2 R^{abmn} + \frac{8}{9}R_a^m R_m^i R_i^a + \frac{8}{3}R_{ab}R_{mn}R^{amnb} \\ & - \frac{16}{3}R_{ab}R^a_{mnl}R^{bmnl} + \frac{44}{9}R_{ab}{}^{mn}R_{mn}{}^{ij}R_{ij}{}^{ab} - \frac{80}{9}R_{iabj}R^{amnb}R_m{}^{ij}{}_n \end{aligned} \quad (2.121)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{2}{6!} \left[8(\nabla_a F_{mn}^2 + 2(\nabla^a F_{am})^2) + 12F_{ab}\nabla^2 F^{ab} - 12F_a^m F_m^i F_i^a + 6R_{abmn}F^{ab}F^{mn} \right. \\ & \left. - 4R_{ab}F^{am}F_m^b + 6\nabla^4 X + 30(\nabla_a X)^2 + 4R_{ab}\nabla^a \nabla^b X + 12\nabla_a R \nabla^a X \right] \end{aligned}$$

2.3.3. Funciones espectrales

En esta parte consideraremos funciones que, si son consideradas en regiones con borde, deben satisfacer las condiciones de frontera de Dirichlet o Neumann. También se incluyen los casos en que no hay borde. En estos casos el operador $\exp(-tD)$ con t positivo pertenecen al espacio de funciones cuadrado - integrables. Esto significa que para una función suave f en la variedad M , la función

$$\mathcal{K}(t, f, D) = \text{Tr} (f \exp(-tD)) \quad (2.122)$$

está bien definida. También escribimos

$$\mathcal{K}(t, f, D) = \int_M d^n x \sqrt{g} \text{Tr}_V \mathcal{K}(t; x, x; D) f(x) \quad (2.123)$$

siendo $\mathcal{K}(t; x, x; D)$ el límite $y \rightarrow x$ de la solución fundamental $\mathcal{K}(t; x, y; D)$ de la ecuación del heat kernel. En caso de haber borde, el kernel $\mathcal{K}(t; x, y; D)$ debe satisfacer también una condición de borde en alguno de sus argumentos. También ponemos énfasis en que $\mathcal{K}(t; x, y; D)$ es una matriz con índices internos y Tr_V denota también la traza sobre éstos.

Sea D un operador autoadjunto. Ésto implica que existe una base de funciones ortonormales $\{\phi_\lambda\}$ del operador D con sus correspondientes autovalores $\{\lambda\}$. Luego

$$\mathcal{K}(t; x, t; D) = \sum_\lambda \phi_\lambda^\dagger(x) \phi_\lambda(t) e^{-t\lambda}. \quad (2.124)$$

Como fue mencionado, existe una expansión asintótica en $t \rightarrow 0$

$$\text{Tr}(f \exp(-tD)) \sim \sum_{k \geq 0} t^{(k-n)/2} a_k(f, D). \quad (2.125)$$

y además es válida para todas las condiciones de borde usadas en física. Otra de las propiedades claves de la expansión es que los coeficientes a_k son calculables en la mayoría de los casos y pueden expresarse en términos del volumen y de invariantes locales en el borde.

Para un operador positivo D se puede definir la función ζ por la ecuación

$$\zeta(s, f, D) = \text{Tr}(f, D^{-s}) \quad (2.126)$$

y está además relacionada con el operador de heat kernel a través de la transformación integral

$$\zeta(s, f, D) = \Gamma(s)^{-1} \int_0^\infty dt t^{s-1} \mathcal{K}(t, f, D). \quad (2.127)$$

Esta transformación también es invertible

$$\mathcal{K}(t, f, D) = \frac{1}{2\pi i} \oint ds t^{-s} \Gamma(s) \zeta(s, f, D) \quad (2.128)$$

en donde el contorno de integración encierra todos los polos del integrando. De hecho los residuos en los polos están relacionados a los coeficientes del heat kernel

$$a_k(f, D) = \text{Res}_{s=(n-k)/2}(\Gamma(s)\zeta(s, f, D)). \quad (2.129)$$

Un caso particular y de mucho interés para nosotros, es

$$a_n(f, D) = \zeta(0, f, D). \quad (2.130)$$

2.3.4. Anomalía conforme

Como mencionamos previamente, los términos de la expansión asintótica recién descritos están relacionados directamente a la anomalía conforme la que es definida como las variaciones (no nulas) de la acción efectiva como respecto a la transformación de simetría de la teoría clásica. En nuestro caso nos enfocaremos a las transformaciones de la métrica que dejan la acción invariante.

Consideremos al tensor de energía - momentum definido por

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta W}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.131)$$

donde W es la acción efectiva calculada en el background con el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y consideremos ahora la transformación conforme

$$g_{\mu\nu} \rightarrow e^{2\Omega(x)} g_{\mu\nu} \quad (2.132)$$

el que para valores del parámetro infinitesimales hace que las transformaciones de la métrica y su inversa sean

$$g_{\mu\nu} \rightarrow (1 + 2\delta\Omega)g_{\mu\nu} \quad (2.133)$$

$$g^{\mu\nu} \rightarrow (1 - 2\delta\Omega)g^{\mu\nu}. \quad (2.134)$$

De acuerdo a la definición (2.131), la variación de la acción efectiva es

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_M d^n x \sqrt{g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = - \int_M d^n x \sqrt{g} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \delta\Omega. \quad (2.135)$$

Es claro de esta última ecuación que la traza del tensor de energía - momentum mide la no invariancia de la teoría ya que en el caso de que la acción clásica sea invariante, su tensor de energía - momentum tiene traza nula sin embargo aún en estos casos esta es rota por efectos cuánticos. Es por ese motivo que esta anomalía es llamada *anomalía de traza* o *anomalía conforme*.

Si la acción clásica S es conformalmente invariante entonces las fluctuaciones del operador D es conformalmente *covariante*. Esto significa que D transforma homogéneamente $D \rightarrow e^{-2\Omega} D$.

Nos restringiremos a la acción efectiva a 1 - loop y emplearemos la regularización a través de

la función zeta la que nos permite expresar la acción efectiva a través de la función zeta del operador D y luego estudiaremos las propiedades bajo transformaciones conformes de $\zeta(s, D)$.

Se puede mostrar que la variación de la función zeta con respecto a la variación del operador D es

$$\delta\zeta(s, D) = -s\text{Tr}((\delta D)D^{-s-1}) \quad (2.136)$$

y ya que la transformación infinitesimal del operador D es

$$\delta D = -2(\delta\Omega)D, \quad (2.137)$$

haciendo que la correspondiente variación de la función zeta correspondiente sea

$$\delta\zeta(s, D) = 2s\zeta(s, \delta\Omega, D). \quad (2.138)$$

Para los operadores que consideramos, la función zeta es regular en $s = 0$ y en consecuencia la variación de la acción efectiva es

$$\delta W = -\zeta(0, \delta\Omega, D) = -a_n(\delta\Omega, D). \quad (2.139)$$

Este resultado nos permite a relacionar directamente el coeficiente de heat kernel a_n con la traza del tensor de energía - momentum poniendo en evidencia que, dependiendo de la dimensión n , la anomalía conforme podrá ser encontrada desde el coeficiente de heat kernel ya mencionado

$$T^\mu_\mu = \langle T \rangle = a_n(x, D). \quad (2.140)$$

2.4. Correspondencia AdS/CFT

La base de esta sección está en [5], [101], [109], [121].

La correspondencia AdS/CFT [101] relaciona teorías de gravedad en espacio-tiempos asintóticamente Anti- de Sitter y teorías conformes. Hay muchos ejemplos específicos pero por simplicidad restringiremos la discusión al caso más destacado que relaciona la teoría de Super Yang - Mills $\mathcal{N} = 4$ en 3+1 dimensiones y la teoría de supercuerdas IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$.

La forma más fuerte de la correspondencia $\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$ establece que la teoría de Super Yang - Mills (SYM) $\mathcal{N} = 4$ con grupo de gauge $SU(N)$ y constante de acoplamiento de Yang - Mills g_{YM} es dinámicamente equivalente a la teoría de supercuerdas tipo IIB donde su parámetro de longitud de cuerda es $l_s = \sqrt{\alpha'}$ y cuya constante de acoplamiento g_s en $\text{AdS}_5 \times S^5$ con radio de curvatura L y N unidades de flujo $F_{(5)}$ en S^5 .

Los dos parámetros libres de la teoría de campos, g_{YM} y N , son mapeados a los parámetros libres de la teoría de cuerdas g_s y $L/\sqrt{\alpha'}$ por

$$g_{YM}^2 = 2\pi g_s \quad y \quad 2g_{YM}^2 N = L^4/\alpha'^2. \quad (2.141)$$

Dentro de esta dualidad, la teoría de cuerdas es definida como el espacio - tiempo producto $\text{AdS}_5 \times S^5$ en donde ambos espacios tienen el mismo radio L y ésta es considerado el “lado AdS” de la dualidad. Los dos parámetros libres en este lado son el acoplamiento de la cuerda y el parámetro adimensional L^2/α' en donde $\alpha' = l_s^2$. Notar que sólo la razón $L/\sqrt{\alpha'}$ es importante más que la longitud de escala característica del espacio AdS, L , y que la longitud de la cuerda l_s por separado.

La teoría de campos a considerar es la teoría de Super Yang - Mills $\mathcal{N} = 4$ la que en este contexto es llamada el “lado CFT” ya que es conformalmente invariante y sus parámetros libres son el rango del grupo de gauge N y la constante de acoplamiento g_{YM}^2 .

¿Cuál es el significado del decir que ambas teorías son dinámicamente equivalentes? La correspondencia establece que las teorías ya mencionadas son idénticas y en consecuencia describen la misma física desde dos perspectivas muy distintas. En particular, si la correspondencia AdS/CFT es válida, toda la física de una descripción podría ser mapeada a toda la física de la otra. Este hecho es muy peculiar ya que en este contexto se podría mapear un posible candidato para una teoría de gravedad cuántica, por ejemplo la teoría de cuerdas tipo IIB, en una teoría de campos sin ningún grado de libertad asociado a gravedad.

Aunque la forma más fuerte de la correspondencia AdS₅/CFT₄ mencionada es muy interesante y estimulante, hace muy complicado el realizar cálculos con valores de los parámetros genéricos disminuyendo la fuerza (aunque no la importancia) de la propuesta haciendo necesario el tomar ciertos límites en ambos lados con el fin de poder efectuar los cálculos correspondientes. En este caso la dualidad entre ambas teorías, como fue propuesto, nos permite obtener información del régimen no perturbativo de una, es decir acoplamiento fuerte, desde el régimen de acoplamiento débil o régimen perturbativo de la otra.

Como la teoría de cuerdas es mejor comprendida en el régimen perturbativo, será útil considerar el lado de la teoría de cuerdas en el lado de la correspondencia cuyo acoplamiento es débil, es decir, $g_s \ll 1$ manteniendo $L/\sqrt{\alpha'}$ constante. A primer orden en g_s , el lado de AdS se reduce a la cuerda clásica en el sentido que sólo son considerados los diagramas de árbol dentro de la perturbación a la teoría. La longitud de la cuerda l_s medida en unidades de L se mantiene constante. Ésto es referido como la forma fuerte de la correspondencia AdS/CFT. ¿Cuál es correspondiente límite en el lado CFT? Usando el mapeo entre parámetros mencionado se ve que $g_{YM} \ll 1$ mientras que $g_{YM}^2 N$ es finito. En otras palabras, debemos considerar el límite $N \rightarrow \infty$ para un λ fijo, el que es conocido como límite de 't Hooft y corresponde al límite plano de la teoría de gauge.

En el límite de 't Hooft hay un único parámetro en ambos lados: en el lado de la teoría de campos se puede fijar el acoplamiento de 't Hooft λ mientras que en el lado de la teoría de cuerdas el radio de curvatura $L/\sqrt{\alpha'}$ es un parámetro libre. Estos dos parámetros están relacionados por $L^4/\alpha'^2 = 2\lambda$. Como estamos interesados en teorías bajo acoplamiento fuerte, se considera el límite $\lambda = \infty$ en la teoría de campos, el que corresponde a $\sqrt{\alpha'}/L \rightarrow 0$. El largo de la cuerda luego es muy pequeño comparado con el radio de curvatura obteniendo así el límite de partícula puntual de la cuerda IIB que es dado entonces por la supergravedad tipo IIB en AdS₅ × S⁵. Esto nos lleva a la dualidad de acoplamiento fuerte/débil en el sentido que la teoría de SYM $\mathcal{N} = 4$ es mapeada a la supergravedad de tipo IIB en acoplamiento débil en el espacio AdS₅ × S⁵. Debido al particular en consideración, ésto es referido por la *forma débil de la conjetura AdS/CFT*. Las tres formas de la correspondencia se resumen en la siguiente tabla

Tabla 2.1: Tabla de formas de la correspondencia

	$\mathcal{N} = 4$ SYM	Cuerda IIB en AdS ₅ × S ⁵
Forma más fuerte	Cualquier N y cualquier λ	Teoría de cuerdas cuántica $g_s \neq 0, \alpha'/L^2 \neq 0$
Forma fuerte	$N \rightarrow \infty, \lambda$ fijo y arbitrario	Teoría de cuerdas clásica $g_s \rightarrow 0, \alpha'/L^2 \neq 0$
Forma débil	$N \rightarrow \infty, \lambda$ grande	Supergravedad clásica $g_s \rightarrow 0, \alpha'/L^2 = 0$

Tabla mostrada en [5]

Antes de hablar directamente de la conjetura de Maldacena haremos introducción de lo que es un espacio Anti de Sitter (AdS) y sus propiedades más generales para luego continuar con algunos detalles más de la dualidad comentada previamente.

Un espacio AdS es una geometría con máximo número de simetrías y cuya curvatura es negativa y constante en todos los puntos del espacio y para describirlos introducimos un conjunto $n + 1$ coordenadas de un espacio plano con signatura $(n - 1, 2)$, es decir $(X^1, X^2, \dots, X^{n+1})$ que satisfacen

$$(X^1)^2 + (X^2)^2 + \dots + (X^{n-1})^2 - (X^n)^2 - (X^{n+1})^2 = -1 \quad (2.142)$$

donde en general, estos espacios Anti de Sitter son soluciones de acciones de gravedad de la forma

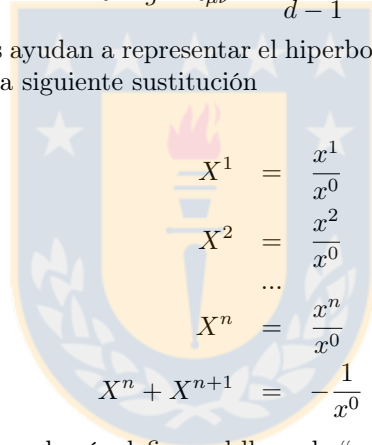
$$S = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} [-2\Lambda + R + c_2 R^2 + c_3 R^3 + \dots] \quad (2.143)$$

con $g = \det g_{\mu\nu}$ y $c_i, (i = 1, 2, \dots)$ constantes. En particular cuando éstas son nulas tenemos la acción de Einstein - Hilbert, la cual entrega las ecuaciones de movimiento de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica Λ .

Como fue mencionado anteriormente, los espacios Anti de Sitter son variedades lorentzianas maximalmente simétricas con radio de curvatura negativa y constante la que es

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 2 \frac{d+1}{d-1} \Lambda. \quad (2.144)$$

Las coordenadas que nos ayudan a representar el hiperboloide descrito en la ecuación (2.142) son las representadas bajo la siguiente sustitución



$$\begin{aligned} X^1 &= \frac{x^1}{x^0} \\ X^2 &= \frac{x^2}{x^0} \\ &\dots \\ X^n &= \frac{x^n}{x^0} \\ X^n + X^{n+1} &= -\frac{1}{x^0} \end{aligned}$$

Éstas satisfacen (2.142) y además definen al llamado “parche de Poincaré” con el detalle de no describen AdS_n en su totalidad. La métrica lorentziana inducida por estas coordenadas desde el espacio plano $n + 1$ dimensional es

$$ds^2 = \frac{1}{(x^0)^2} ((dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \dots + (dx^{n-2})^2 - (dx^{n-1})^2) \quad (2.145)$$

en donde es evidente que la métrica es singular para $x^0 = 0$ y entonces sólo cubre valores positivos y negativos de x^0 mostrando además que el espacio AdS es conformalmente plano.

2.4.1. Las dos caras de las D3-branas

Ahora veremos un ejemplo particular que ayudó a motivar la correspondencia AdS/CFT en el contexto de la teoría de supercuerdas. Restringiremos nuestros argumentos a la forma débil de la correspondencia y mostraremos el límite de desacople que es esencial para la correspondencia AdS/CFT.

La teoría de supercuerdas es más que sólo cuerdas cerradas ya que además de las cuerdas fundamentales, ésta contiene objetos de mayor dimensión conocidas como D - branas las que a su vez pueden verse desde dos perspectivas distintas: desde las cuerdas cerradas y cuerdas abiertas. La perspectiva correcta dependerá del valor de la constante de acoplamiento de la cuerda g_s que es la que controla la intensidad de la interacción entre las cuerdas abiertas y cerradas.

- Perspectiva de la cuerda abierta:** Las D - branas pueden verse como objetos de mayor dimensión en donde las cuerdas abiertas pueden terminar. Ya que debemos tratar a las cuerdas como pequeñas perturbaciones, esta perspectiva se puede llevar a cabo sólo si la constante de acoplamiento para las cuerdas abiertas y cerradas es pequeñas, $g_s \ll 1$. Más aún, si despreciamos las excitaciones de la cuerda con masa, es a decir bajas energías $E \ll \alpha'^{-1/2}$, la dinámica de las cuerdas abiertas es descrita por una teoría de gauge supersimétrica que vive en el volumen de mundo de las D - branas. El campo de gauge A_μ corresponde a las excitaciones de la cuerda abierta paralelas a la D - brana mientras que las excitaciones transversales a la D_p - branas son campos escalares desde el punto de vista del volumen de mundo. En el caso de N - branas coincidentes, el grupo de gauge es ahora $U(N)$ y luego la constante de acoplamiento efectiva está dada por $g_s N$ y la perspectiva de la cuerda abierta es realizable para $g_s N \ll 1$.
- Perspectiva de la cuerda cerrada:** Las D - branas son vistas como soluciones solitónicas del límite de baja energía de la teoría de supercuerdas, es decir, supergravedad. Consideraremos entonces las D - branas como fuentes del campo gravitacional que curva el espacio - tiempo que la rodea. La longitud de escala característica L será grande con el objetivo de asegurar una curvatura pequeña y la validez de la aproximación de supergravedad. En el caso de N D - branas coincidentes, L^4/α'^2 es proporcional a $g_s N$. De esta forma la perspectiva de cuerda cerrada es realizable sólo cuando $g_s N \gg 1$.

Al aplicar ésto a la pila de N D3 - branas en el espacio - tiempo plano, estas dos perspectivas permiten motivar la correspondencia AdS₅/CFT₄.

La pila de N D3 - branas coincidentes se extienden a lo largo del espacio - tiempo en las direcciones x^0, x^1, x^2 y x^3 , y transversal a éstas las otras seis direcciones espaciales x^4, \dots, x^9 . Sin pérdida de generalidad, consideraremos la pila de D3 - branas inmersas en el espacio - tiempo 10 - dimensional con $x^4 = \dots = x^9 = 0$. De ésta forma las coordenadas x^0, \dots, x^3 satisfacen las condiciones de borde de Neumann mientras que x^4, \dots, x^9 satisfacen las condiciones de borde de Dirichlet.

2.4.1.1. Caso de cuerda abierta

Consideremos en primer lugar la perspectiva de la cuerda abierta la que es válida para $g_s N \ll 1$. Estudiaremos la teoría de supercuerdas tipo IIB en el espacio de Minkowski (9+1) - dimensional donde también hay N D3 - branas coincidentes con las condiciones de borde recién mencionadas. Esta configuración rompe la mitad de los treinta y dos supercargas de la teoría en el espacio plano.

La teoría perturbativa en este background consiste en dos tipos de cuerdas: cuerdas abiertas que comienzan y terminan en las D3 - branas y cuerdas cerradas. Las cuerdas abiertas pueden verse como excitaciones del hiperplano (3+1) - dimensional mientras que las cuerdas cerradas son excitaciones del espacio tiempo plano (9+1) - dimensional.

Ahora consideremos N D3 - branas en el espacio - tiempo plano en energías $E \ll \alpha'^{-1/2}$. En otras palabras, consideraremos sólo las excitaciones sin masa e ignoraremos todas las otras excitaciones ya que ellas tienen energías del orden de $\alpha'^{-1/2}$. Dado que esta configuración preserva la supersimetría, los modos de las cuerdas pueden ser arreglados en supermultipletes. Los estados sin masa de las cuerdas cerradas entregan un multiplete de supergravedad 10 - dimensional con $\mathcal{N} = 1$. Las excitaciones sin masa de la cuerda abierta pueden ser agrupadas en un supermultiplete 4 - dimensional con $\mathcal{N} = 4$ el que consiste en un campo de gauge A_μ y seis campos escalares ϕ^i con sus respectivos supercompañeros fermiónicos.

La acción efectiva para todos los modos de la cuerda sin masa puede ser escrita por

$$S = S_c + S_a + S_{int} \tag{2.146}$$

donde S_c contiene a los modos de cuerda cerrada quien además es una acción de supergravidad 10 - dimensional con términos en derivadas altas. S_a contiene a los modos de cuerda abierta y S_{int} las interacciones entre éstos. Esquemáticamente S_c es

$$S_c = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} e^{-2\phi} (R + 4\partial_M \phi \partial^M \phi) + \dots \quad (2.147)$$

$$\sim -\frac{1}{2} \int d^{10}x \partial_M h \partial^M h$$

en donde κ es dado por $2\kappa^2 = (2\pi)^7 \alpha'^4 g_s^2$, g_{MN} y ϕ son la métrica y el dilatón, respectivamente. La segunda línea en la ecuación (2.147) muestra esquemáticamente la forma de la contribución a las fluctuaciones de la métrica h en su orden más bajo el que se obtiene bajo la expansión $g = \eta + \kappa h$. Notar que h está multiplicado por κ en la expansión para asegurar la normalización canónica del término cinético de h en la acción.

Las acciones S_a y S_{int} se pueden obtener desde la acción de Dirac - Born - Infeld y el término de Wess - Zumino. La acción de Dirac - Born - Infeld para una única D3 - brana es

$$S_{DBI} = -\frac{1}{(2\pi)^3 \alpha'^2 g_s} \int d^4x e^{-\phi} \sqrt{-\det(\mathcal{P}[g] + 2\pi\alpha' F)} \quad (2.148)$$

en donde se ha fijado el campo de Kalb - Ramond por simplicidad. El volumen de mundo tendrá coordenadas x^μ con $\mu = 1, 2, 3$. Las seis coordenadas transversas a la D3 - brana serán etiquetadas por x^i . Más aún, se introducen seis campos escalares ϕ^i que pueden ser identificados con las coordenadas transversas x^{i+3} por $x^{i+3} = 2\pi\alpha'\phi^i$. De esta forma, el pullback \mathcal{P} de la métrica del volumen de mundo es dado por

$$\mathcal{P}[g]_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + (2\pi\alpha')(g_{i+3\nu} \partial_\mu \phi^i + g_{\mu j+3} \partial_\nu \phi^j) + (2\pi\alpha')^2 g_{i+3 j+3} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j. \quad (2.149)$$

Expandiendo $e^{-\phi}$ y $g = \eta + \kappa h$ se encuentra lo siguiente a primer orden en α'

$$S_a = -\frac{1}{2\pi g_s} \int d^4x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^i + \mathcal{O}(\alpha') \right) \quad (2.150)$$

$$S_{int} = -\frac{1}{8\pi g_s} \int d^4x \phi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots \quad (2.151)$$

Para S_{int} se muestra que uno de los términos es explícitamente de la forma ϕF^2 , término que sugiere que el dilatón puede decaer en dos bosones de gauge en la D3 - brana.

Lo recién descrito corresponde a los límites de baja energía de la acción S_a y S_{int} de una única D3 - brana y para generalizarlo a N D3 - branas coincidentes basta con que los campos escalares y de gauge sean escritos en términos de los generadores de $U(N)$, es decir, $\phi^i = \phi^{ia} T_a$, $A_\mu = A_\mu^a T_a$ y construir sus respectivos invariantes de gauge. Ésto significa que el término cinético para el campo de gauge será $F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ y para el campo escalar bastará con reemplazar las derivadas parciales por las respectivas derivadas covariantes, además de agregar a la acción S_a un potencial de la forma

$$V = \frac{1}{2\pi g_s} \sum_{i,j} Tr[\phi^i, \phi^j]^2. \quad (2.152)$$

Al considerar ahora el límite $\alpha' \rightarrow 0$ se encuentra que S_a es la acción de la teoría de Super Yang - Mills $\mathcal{N} = 4$ cuando se identifica

$$2\pi g_s = g_{YM}^2. \quad (2.153)$$

Todos los otros términos en S_a son de orden α' o superior, los que luego no influyen en el límite considerado. En este límite además, dado que $\kappa \propto \alpha'^2 \rightarrow 0$, se observa que S_c es la acción de

la supergravedad libre en el espacio - tiempo de Minkowski (9+1) - dimensional. Finalmente, S_{int} también se anula en el límite $\alpha' \rightarrow 0$, es decir, las cuerdas abiertas y cerradas se desacoplan.

Supongamos ahora que hay $(N + 1)$ branas en el espacio - tiempo (9+1) - dimensional plano y separamos una brana de las otras N , por decir en la dirección x^9 . Mientras las N D3 - branas coincidentes están en $x^9 = 0$ la otra brana está en $x^9 = r$. Al considerar sólo los modos sin masa, el sistema ya no será descrito por la teoría de gauge $U(N + 1)$ sino por la teoría $U(N) \times U(1)$ y puede ser visto en una fase de Higgs caracterizada por $\langle \phi^9 \rangle = r/(2\pi\alpha')$. En el límite de desacople $\alpha' \rightarrow 0$ debemos mantener todas las cantidades de la teoría de campos fijas y en particular $\langle \phi^9 \rangle$. Así la forma correcta de hacer el límite de desacople, conocido como *límite de Maldacena*, es dado por

$$\alpha' \rightarrow 0 \quad \text{con} \quad u = \frac{r}{\alpha'} \text{ fijo} \quad (2.154)$$

en donde r es una distancia arbitraria.

2.4.1.2. Caso de cuerda cerrada

Con el objetivo de motivar la correspondencia AdS₅/CFT₄ haremos el intercambio entre los dos límites, es decir, el límite de acoplamiento fuerte o de baja energía y para ésto consideremos N D3 - branas en el límite de acoplamiento fuerte $g_s N \rightarrow \infty$ de modo que en este límite debemos considerar la perspectiva de la cuerda cerrada. Las N D3 - branas pueden verse como objetos cargados con masa haciendo de fuente de varios campos de supergravedad tipo IIB y en consecuencia, también supercuerdas de tipo IIB. En este background las cuerdas cerradas de la teoría de supercuerdas tipo IIB se propagarán.

Las soluciones de supergravedad de las N D3 - branas que mantienen las isometrías de $\mathbb{R}^{9,1}$, $SO(3, 1) \times SO(6)$ y la mitad de las supercargas (16 en total) de la supergravedad de tipo IIB son dadas por

$$\begin{aligned} ds^2 &= H(r)^{-1/2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + H(r)^{1/2} \delta_{ij} dx^i dx^j, \\ e^{2\phi(r)} &= g_s^2, \\ C_{(4)} &= (1 - H(r)^{-1}) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.155)$$

en donde $\mu, \nu = 0, \dots, 3$ y $i, j = 4, \dots, 9$. La coordenada radial r es definida por $r^2 = \sum_{i=4}^9 x_i^2$. Los \dots en la expresión de $C_{(4)}$ son los términos que aseguran la autodualidad del tensor de curvatura $F_{(5)} = dC_{(4)}$ aunque ahora, dado que no juegan un rol importante, serán omitidos.

Al insertar el ansatz (2.155) en las ecuaciones de movimiento de la supergravedad de tipo IIB se encuentra que $H(r)$ debe cumplir con $\nabla_g^2 H(r) = 0$ para $r \neq 0$ y cuya solución es

$$H(r) = 1 + \left(\frac{L}{r} \right)^4. \quad (2.156)$$

Aquí, L es una constante y no puede determinarse usando supergravedad. En cualquier caso, desde la teoría de cuerdas se sabe que el flujo de $F_{(5)}$ a través de la esfera S^5 debe cuantizarse ya que da cuenta del número de D3 - branas coincidentes. Usando este argumento se deduce que

$$L^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2, \quad (2.157)$$

El background consiste de dos regiones distintas que son para valores pequeños y grandes de r , respectivamente. Si $r \gg L$ entonces $H(r) \approx 1$ y la métrica correspondiente se reduce al espacio plano 10 - dimensional. Por otro lado cuando $r \ll L$, que corresponde a la garganta o región cercana al horizonte en la cual $H(r) \approx L^4/r^4$, la métrica es

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{L^2}{r^2} \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (2.158)$$

$$= \frac{L^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2) + L^2 ds_{S^5}^2 \quad (2.159)$$

En la segunda línea hemos introducido una nueva coordenada $z = L^2/r$ como a su vez las coordenadas esféricas $(r, \Omega_5) \in \mathbb{R}^+ \times S^5$ en vez de $(x^4, \dots, x^9) \in \mathbb{R}^6$ por

$$\delta_{ij} dx^i dx^j = dr^2 + r^2 ds_{S^5}^2 \quad (2.160)$$

en donde $ds_{S^5}^2$ es la métrica de la esfera unitaria S^5 . El primér término en (2.159) corresponde a AdS_5 .

De esta forma tenemos dos tipos de cuerdas cerradas: aquellas que se propagan en el espacio-tiempo 10 - dimensional plano y aquellas que se propagan cerca del horizonte. Al considerar el límite de baja energía ambos tipos de cuerdas se desacoplan de la otra, hecho que puede verse de la siguiente forma. Consideremos una excitación de la cuerda con energía $\sqrt{\alpha'} E_r$ medida en unidades de la cuerda a una posición radial r . Aunque los estados de la cuerda en la garganta pueden tener energías grandes $\sqrt{\alpha'} E_r \gg 1$, ellos no pueden ser considerados a baja energía ya que la energía E_∞ medida desde un observador en el infinito está dada por

$$E_\infty = \sqrt{-g_{00}} E_r = H(r)^{-1/4} E_r. \quad (2.161)$$

Ya que en el límite de baja energía se consideran estados en la garganta donde $r \ll L$, $H(r)$ toma la forma $H(r) \sim L^4/r^4$. De esta forma, aunque la energía de las excitaciones de la cuerda cercanas a la garganta $r = 0$ son grandes, la energía medida por el observador es pequeña

$$\sqrt{\alpha'} E_\infty \sim \frac{r}{L} \sqrt{\alpha'} E_r \rightarrow 0 \quad (2.162)$$

para un $\sqrt{\alpha'} E_r$ fijos con $r \ll L$. Se ve así que un observador en el infinito observa dos modos distintos de baja energía: los modos de supergravedad que se propagan en el espacio plano 10 - dimensional y las excitaciones de la cuerda en la región cercana al horizonte que corresponden a un espacio - tiempo $\text{AdS}_5 \times S^5$.

En resumen, el background consiste de dos regiones distintas: una cercana al horizonte y una asintóticamente plana. La dinámica de las cuerdas cerradas en el espacio asintóticamente plano es descrita por la supergravedad en un espacio 10 - dimensional plano mientras que las cuerdas en regiones cercanas al horizonte son descritas por fluctuaciones alrededor de la solución de supergravedad tipo IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$. Al considerar el límite de baja energía, ambos tipos de cuerda cerrada se desacoplan una de la otra.

En este límite se tiene

$$\frac{L^4}{r^4} = 4\pi g_s N \frac{\alpha'^2}{r^4} = 4\pi g_s N \frac{\alpha'^4}{r^4} \cdot \alpha'^{-2} \rightarrow \infty, \quad (2.163)$$

es decir, efectivamente hacemos un acercamiento a la región próxima al horizonte.

Debido a este límite se puede aproximar $H(r)$ por $H(r) \approx L^4/r^4$ en la región cercana al horizonte. Con ésto obtenemos la expresión de la métrica y el cuatri-potencial $C_{(4)}$

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{L^2}{r^2} dr^2 + L^2 d\Omega_5^2, \quad (2.164)$$

$$C_{(4)} = \frac{r^4}{L^4} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \dots \quad (2.165)$$

de donde podemos ver que la métrica de la D3 - brana se reduce a $\text{AdS}_5 \times S^5$ en el límite de Maldacena y ambos espacios tienen el mismo radio dado por $L^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2$.

Estrictamente hablando, el límite de Maldacena requiere el uso de coordenadas que se mantienen fijas y una forma de lograr esto es introduciendo la coordenada $u = r/\alpha'$ lo que permite reescribir la métrica y el cuatri - potencial

$$\frac{1}{\alpha'} ds^2 = \frac{u^2}{\tilde{L}^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{\tilde{L}^2}{u^2} du^2 + \tilde{L}^2 d\Omega_5^2 \quad (2.166)$$

$$\frac{1}{\alpha'^2} C_{(4)} = \frac{u^4}{\tilde{L}^4} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \dots \quad (2.167)$$

con $\tilde{L}^2 = L^2/\alpha'^2$.

2.4.1.3. Combinando ambas perspectivas

En los dos marcos de referencia recién mostrados se encuentran dos teorías efectivas desacopladas en los límites de baja energía

- Desde cuerda cerrada: Supergravedad tipo IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$ y supergravedad tipo IIB en $\mathbb{R}^{9,1}$.
- Desde cuerda abierta: Teoría de Super Yang - Mills $\mathcal{N} = 4$ en el espacio - tiempo plano 4 - dimensional y la supergravedad de tipo IIB en $\mathbb{R}^{9,1}$.

Las dos perspectivas deben ser descripciones equivalentes de la misma física y la supergravedad tipo IIB en $\mathbb{R}^{9,1}$ está en ambas. Éste hecho sugiere que las otras dos teorías también podrían ser identificadas. Este es el motivo por el que Maldacena conjetura que la teoría de Super Yang - Mills $\mathcal{N} = 4$ en cuatro dimensiones es equivalente a la supercuerda tipo IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$.

2.4.2. Mapeo entre campos y operadores

La correspondencia AdS/CFT propone un mapeo entre dos teorías distintas de las que entrega una relación uno a uno entre la teoría de Super Yang - Mills $\mathcal{N} = 4$ y el espectro de la teoría de cuerdas tipo IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$. Este diccionario emerge desde el hecho que las simetrías de ambos lados de la correspondencia coinciden, lo que permite que la teoría de campos en cierta representación de la simetría $PSU(2, 2|4)$ mapeada a estados de la cuerda en la misma representación. Estableceremos este mapeo para la forma débil de la correspondencia en donde los operadores de la teoría de Super Yang - Mills son mapeados a campos en supergravedad. Éste hecho en particular permite que la correspondencia AdS/CFT sea formulada como una relación en las funcionales generadoras de la teoría de campos y de la teoría de supergravedad.

2.4.2.1. Representación para operadores de la teoría de campos.

Nuestro objetivo es encontrar el diccionario entre los objetos de las dos teorías equivalentes, en particular entre las representaciones con los mismos grupos de simetría. Relacionaremos los operadores de la teoría de campos a los campos en supergravedad los que transforman en la misma representación del álgebra superconforme $su(2, 2|4)$ o de su subálgebra bosónica $so(6) \oplus so(4, 2)$. Ésto provee un mapeo uno a uno entre los operadores invariantes de gauge en la teoría de Super Yang - Mills $\mathcal{N} = 4$ campos clásicos en supergravedad tipo IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$. Los operadores de la teoría de campos para los cuales se establece el mapeo deben ser invariantes de gauge lo que implica que deben estar compuestos de varios operadores. Una clase importante de operadores son los 1/2 BPS u operadores quirales primarios. Es sabido que en la teoría de Super Yang - Mills $SU(N)$ $\mathcal{N} = 4$ en 4 - dimensiones, el operador escalar 1/2 BPS \mathcal{O}_Δ de

dimensión conforme Δ pertenece a una representación de $su(4)$ con etiquetas de Dynkin $[0, \Delta, 0]$ o equivalentemente a una representación de $so(6)$ con etiquetas de Dynkin $[\Delta, 0, 0]$. Cuando son escritos explícitamente en términos de los campos elementales toman la forma

$$\mathcal{O}_\Delta(x) = \text{Str}(\phi^{i_1}(x)\phi^{i_2}(x)\dots\phi^{i_\Delta}(x)) = C_{i_1\dots i_\Delta}^\Delta \text{Tr}(\phi^{i_1}(x)\phi^{i_2}(x)\dots\phi^{i_\Delta}(x)) \quad (2.168)$$

Aquí, ϕ^i son los campos escalares elementales de la teoría SYM $\mathcal{N} = 4$ que transforman en la representación de $so(6) \sim su(4)$ y $C_{i_1\dots i_\Delta}^\Delta$ pertenece a la representación tensorial de $so(6)$ totalmente simétrica de rango Δ . La traza en esta última ecuación ha de ser tomada incluyendo los índices de color.

2.4.2.2. Campo dual de supergravedad

Por el lado de supergravedad hay campos en la misma representación de $PSI(2, 2|4)$ como fue dado para los operadores de la teoría de campos de la sección anterior. Esos campos de supergravedad se obtienen bajo la descomposición de todos los campos de supergravedad IIB en las torres de Kaluza - Klein en S^5 , es decir, expandiendo los campos en la base de los armónicos esféricos $Y^l(\Omega_5)$ de S^5 .

Los armónicos esféricos constituyen una base del espacio de todas las funciones de S^5 . Ellas corresponden a la representación irreducible de $so(6)$ o equivalentemente de $so(4)$. Una función en S^5 puede obtenerse luego de una restricción en las coordenadas x^i de un espacio \mathbb{R}^6 dentro del cual S^5 está inmersa. Luego cada tensor sin traza y totalmente simétrico $C_{i_1\dots i_j}^l$ de rango 1 define un armónico esférico por

$$Y^l = C_{i_1\dots i_j}^l x^{i_1}\dots x^{i_j} \quad (2.169)$$

en donde el conjunto de tensores debe ser ortonormal

$$C_{i_1\dots i_j}^l C^{j i_1\dots i_j} = \delta^{lj}. \quad (2.170)$$

Los armónicos esféricos Y^i transforman en la representación $[0, l, 0]$ de $SU(4)$ o equivalentemente en la representación $[l, 0, 0]$ de $SO(6)$. Restringiendo \mathbb{R}^6 a la esfera S^5 con radio L puede mostrarse que

$$-\nabla_{S^5}^2 Y^i = -\frac{1}{L^2} i(i+4) Y^i. \quad (2.171)$$

Para un campo ψ , eliminando cualquier índice de Lorentz, se tiene la expansión de Kaluza - Klein

$$\psi(x, z, \Omega_5) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi^i(x, z) Y^i(\Omega_5). \quad (2.172)$$

en donde (x^μ, z) con $\mu = 0, 1, 2, 3$ denota las coordenadas en AdS_5 y Ω_5 denota las coordenadas de S^5 . Luego de introducir el ansatz (2.172) en las ecuaciones de movimiento en supergravedad 10 - dimensional se logran encontrar las masas y acoplamientos de los campos de AdS_5 $\psi^i(x)$. La descomposición de los campos en supergravedad en armónicos esféricos fue realizada en [94] de modo que sólo mostraremos algunos ejemplos.

Como ejemplo consideremos aquellas fluctuaciones que son duales a operadores 1/2 BPS. En particular, la supergravedad de tipo IIB contiene una 5 - forma autodual F la que entra en la ecuación de movimiento 10 - dimensional del gravitón de la siguiente forma

$$R_{MN} = \frac{1}{3!} F_{MABCD} F_N{}^{ABCD} \quad (2.173)$$

donde los índices A, B, C, \dots corresponden a los índices del espacio - tiempo 10 - dimensional. En la solución $AdS_5 \times S^5$ esta 5 - forma valores particularmente simples: a lo largo de la solución

AdS, $F_{(5)}$ es proporcional al volumen de AdS₅ mientras que en los índices que corresponden a la 5 - esfera, $F_{(5)}$ es proporcional al volumen de ésta. Para ser precisos, se tiene

$$F_{m_1\dots m_5} = \frac{4}{L}\sqrt{-g_{AdS_5}}\epsilon_{m_1\dots m_5} \quad , \quad F_{\alpha_1\dots\alpha_5} = \frac{4}{L}\sqrt{g_{S^5}}\epsilon_{\alpha_1\dots\alpha_5} \quad (2.174)$$

en donde los índices de AdS son m_i , $i = 1, \dots, 5$ y los índices de la esfera son α_i con $i = 1, \dots, 5$. Consideremos ahora las fluctuaciones de la métrica y de la forma alrededor del background mencionado

$$g_{MN} = \bar{g}_{MN} + h_{MN} \quad (2.175)$$

$$F = \bar{F} + \delta F \quad (2.176)$$

en donde $(\bar{\quad})$ se refiere a (\quad) en la solución AdS₅ \times S^5 . Nos restringiremos a aquellos modos duales al operador escalar 1/2 BPS por lo que tomaremos en cuenta las fluctuaciones de S^5 considerando la traza h_2 de la métrica correspondiente y de la 4 - forma $a_{\alpha\beta\gamma\delta}$ definidas por

$$h_{\alpha\beta} = h_{(\alpha\beta)} + \frac{h_2}{5}\bar{g}_{\alpha\beta} \quad , \quad \delta F_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} = \nabla_{[\alpha}a_{\beta\gamma\delta\epsilon]}. \quad (2.177)$$

Para estos campos, la expansión de Kaluza - Klein es la siguiente

$$h_2(z, x, \Omega_5) = \sum h_2^i(z, x)Y^i(\Omega_5) \quad (2.178)$$

$$a_{\alpha\beta\gamma\delta}(z, x, \Omega_5) = \sum b^i(z, x)\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}\nabla^\epsilon Y^i(\Omega_5) \quad (2.179)$$

donde (z, x) denotan las coordenadas de AdS₅ y Ω_5 las coordenadas de S^5 . A orden lineal en las fluctuaciones y luego de insertar este ansatz en las ecuaciones de movimiento de la supergravedad IIB se encuentran dos ecuaciones acopladas para los coeficientes b^i y h_2^i , el que luego puede diagonalizarse y ser desacoplado. Este procedimiento lleva a la siguiente ecuación de movimiento

$$-\nabla_{AdS_5}^2 s^l(z, x) = \frac{1}{L^2}l(l+4)s^l(z, x) \quad (2.180)$$

para la variable

$$s^l = \frac{1}{20(l+2)}(h_2^l - 10(l+4)b^l), \quad (2.181)$$

ecuación que corresponde a la ecuación de Klein - Gordon para un campo escalar de masa dada por $m^2L^2 = l(l-4)$. Correspondientemente, a orden cuadrático en la expansión de Kaluza - Klein de los campos en supergravedad se tiene la siguiente acción de supergravedad dimensionalmente reducida para los modos s^i

$$S = -\frac{4N^2}{(2\pi)^5L^8} \int d^4x ddz \sqrt{-\bar{g}} \frac{A_i}{2} (\bar{g}^{mn}\partial_m s^i \partial_n s^i + l(l-4)(s^i)^2). \quad (2.182)$$

El prefactor es obtenido de escribir la acción gravitacional 10 - dimensional en términos de las cantidades de la teoría de campos usando el diccionario de AdS/CFT

$$\frac{1}{16\pi G_{10}} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} = \frac{4N^2}{(2\pi)^5L^8} \quad (2.183)$$

y la constante A_i es determinada de la acción de supergravedad IIB 10 - dimensional

$$A_i = 32 \frac{i(i-1)(i+2)}{i+1} Z(i) \quad , \quad Z(i)\delta^{ij} = \int_{S^5} d\Omega Y^i(\Omega)Y^j(\Omega) \quad (2.184)$$

con $Z(l) = \pi^3/(2^{l-1}(l+1)(l+2))$.

2.4.2.3. Mapeo campo - operador

Luego de comparar los resultados de las secciones previas se logra ver que luego de identificar $l = \Delta$, los campos escalares en supergravedad s^i están en la misma representación $[0, \Delta, 0]$ de $SU(4)$ que los operadores de campo 1/2 BPS \mathcal{O}^Δ . De esta forma es natural esperar que s^Δ y \mathcal{O}^Δ sean mapeados el uno al otro como es propuesto por el diccionario holográfico. Este mapeo puede extenderse a los descendientes superconformes de \mathcal{O}^Δ con los respectivos descendientes de s^Δ . De la misma manera, el diccionario holográfico relaciona el tensor de energía - momentum a las fluctuaciones de la métrica AdS y a la corriente asociada a la simetría - R a las fluctuaciones del campo de gauge en la supergravedad 5 - dimensional AdS obtenida de la reducción de Kaluza - Klein:

$$h^{\mu\nu} \leftrightarrow T_{\mu\nu} \quad , \quad A^\mu \leftrightarrow J_\mu. \quad (2.185)$$

Caso general d - dimensional

Ahora que ya hemos introducido la relación explícita de la dualidad entre la teoría 4 - dimensional $\mathcal{N} = 4$ y la supergravedad $AdS_5 \times S^5$, podemos motivar la correspondencia AdS_{d+1}/CFT_d en dimensiones arbitrarias. Para el caso escalar d - dimensional se encuentra

$$-\nabla_{AdS}^2 \phi = \frac{1}{L^2} \Delta(\Delta - d)\phi \quad (2.186)$$

donde ϕ es un campo escalar genérico ϕ con masa

$$m^2 L^2 = \Delta(\Delta - d). \quad (2.187)$$

Se puede hacer un análisis similar para los campos de distintos campos usando la reducción de Kaluza - Klein obteniendo las distintas relaciones entre Δ y m :

Tabla 2.2: Tabla de dimensión conforme para campos.

Tipo de campo	Relación entre m y Δ
Campo escalar y de espín 2 con masa	$m^2 L^2 = \Delta(\Delta - d)$
Campo de espín 2 sin masa	$m^2 L^2 = 0, \Delta = d$
p - formas	$m^2 L^2 = (\Delta - p)(\Delta + p - d)$
espín 1/2, espín 3/2	$ m L = \Delta - d/2$
Tensor simétrico sin traza de rango s	$m^2 L^2 = (m + s - 2)(\Delta - s + 2 - d)$

Tabla mostrada en [5]

2.4.2.4. Comportamiento asintótico en el borde

El mapeo entre campo y operador propuesto por la conjetura puede ser más explícito al considerar el comportamiento en el borde de los campos en supergravedad. Consideremos para nuestro propósito un campos escalar ϕ dual a un operador primera y su acción está dada por (2.182). Por simplicidad consideraremos el “toy model” cuya acción es

$$S = -\frac{C}{2} \int dz d^d x \sqrt{-g} (g^{mn} \partial_m \phi \partial_n \phi + m^2 \phi^2) \quad (2.188)$$

en donde $C \propto N^2$ y la masa está dada por $m^2 L^2 = \Delta(\Delta - d)$. En este contexto es conveniente usar las coordenadas de Poincaré para AdS las que dejan que la métrica tenga la siguiente forma

$$ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n = \frac{L^2}{z^2} (dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu). \quad (2.189)$$

La ecuación de Klein - Gordon para el campo escalar será

$$(-\nabla_g^2 + m^2)\phi = 0 \quad (2.190)$$

donde el operador laplaciano es

$$-\nabla_g^2|_{AdS} = \frac{1}{L^2} (z^2 \partial_z^2 - (d-1)z \partial_z + z^2 \eta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu). \quad (2.191)$$

Para AdS_{d+1} escrito en las coordenadas de Poincaré, es conveniente hacer una descomposición de Fourier en la dirección de x^μ y considerar el ansatz de ondas planas de la forma $\phi(z, x) = e^{ip^\mu x_\mu} \phi_p(z)$. Luego la ecuación de Klein - Gordon para los modos $\phi_p(z)$ es

$$z^2 \partial_z^2 \phi_p(z) - (d-1)z \partial_z \phi_p(z) - (m^2 L^2 + p^2 z^2) \phi_p(z) = 0. \quad (2.192)$$

donde $p^2 = p_\mu p^\mu$. Esta ecuación tiene dos soluciones independientes caracterizadas por su comportamiento asintótico al borde en $z \rightarrow 0$

$$\phi_p(z) \sim \begin{cases} z^{\Delta_+} & \text{normalizable} \\ z^{\Delta_-} & \text{no normalizable} \end{cases} \quad (2.193)$$

y en donde Δ_\pm son las raíces de la ecuación $m^2 L^2 = \Delta(\Delta - d)$ dadas por

$$\Delta_\pm = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 L^2}. \quad (2.194)$$

Por definición, $\Delta_+ \geq \Delta_-$ y $\Delta_- = d - \Delta_+$. De esta forma se puede expandir $\phi(z, x)$ por

$$\phi(z, x) \sim \phi_{(0)}(x) z^{\Delta_-} + \phi_{(+)}(x) z^{\Delta_+} + \dots, \quad (2.195)$$

Por análisis dimensional se puede identificar el modo normalizable $\phi_{(+)}$ como valor de expectación del vacío del operador escalar dual \mathcal{O} de dimensión conforme $\Delta = \Delta_+$. Por otro lado el modo no normalizable $\phi_{(0)}$ será la fuente de este operador.

Capítulo 3

Anomalía de traza por método holográfico

3.1. Métricas de Poincaré, anomalía de volumen y Q - curvatura

Comenzaremos el estudio de las anomalías de Weyl para la gravedad de Einstein - Hilbert d - dimensional con constante cosmológica cuya acción es

$$S_{E.H.} = \frac{-1}{2l_p^{d-1}} \int d^{d+1}x \sqrt{\hat{g}} \left\{ \hat{R} - 2\hat{\Lambda} \right\}. \quad (3.1)$$

Esta constante cosmológica será parametrizada en términos de una longitud L que a su vez estará relacionada al radio \tilde{L} de la solución AdS euclídea, es decir, el espacio hiperbólico, $2\hat{\Lambda} = -(d-1)/L^2$. Las soluciones correspondientes a las ecuaciones de movimiento son espacios de Einstein con $\tilde{L} = L$, cuyo tensor de Ricci \hat{R}_{ic} es

$$\hat{R}ic = \hat{R}_{\mu\nu} = -\frac{d}{L^2} \hat{g}_{\mu\nu}. \quad (3.2)$$

Ya que nos interesa usar el diccionario de la correspondencia AdS/CFT estudiaremos métricas que son asintóticamente hiperbólicas y que pueden convenientemente escribirse en una expansión de Fefferman - Graham

$$\hat{g} = \tilde{L} \frac{dx^2 + g_x}{x^2}. \quad (3.3)$$

en donde ésta métrica \hat{g} puede reconstruirse (al menos asintóticamente) desde el valor de su métrica en el borde g_x vía ecuaciones de movimiento. Asumimos que este borde g_x pertenece a una clase de equivalencia y está relacionado a otras métricas a través de una transformación conforme $g_x = e^{2\Omega} \tilde{g}_x$. En este sentido, la métrica de Poincaré obtenida de la construcción de Fefferman - Graham al ser introducida en la acción gravitacional, como una funcional de la métrica del borde, se convierte en la función de partición de la CFT en el borde. Así la anomalía de Weyl (después de integrar) podrá leerse desde el término logarítmico dependiente del cut-off IR, ϵ , que debe ser introducida.

Cuando la acción de gravedad es la de Einstein - Hilbert hay dos excepciones en las que la métrica del bulk puede ser totalmente caracterizada en la expansión de Fefferman - Graham usando la métrica del borde. Un caso es cuando esta última es una métrica conformalmente plana [127]

$$g_x = g_E - Px^2 + \frac{1}{4}P^2x^4 \quad (3.4)$$

donde P es el tensor de Schouten de la métrica del borde g . El otro caso que será de particular interés para nosotros para el estudio de los distintos casos que se abordarán en esta tesis, es el cual en que la métrica del borde es también un espacio de Einstein g_E y la dependencia en la coordenada radial puede factorizarse

$$g_x = (1 - \lambda x^2)g_E \quad (3.5)$$

en donde λ es una constante proporcional al escalar de Ricci

$$\lambda = \frac{R}{4d(d-1)}. \quad (3.6)$$

En realidad esta expansión es la misma que en el caso conformalmente plano salvo que el tensor de Schouten de este espacio de Einstein secundario es $P = \frac{R}{2d(d-1)}g_E$, lo que nos motiva a referirnos a esta solución como espacios Poincaré - Einstein / Einstein (PE/E).

Ahora haremos inserción de esta solución en la acción de Einstein - Hilbert y veremos lo que sucede. Tanto la constante cosmológica como el escalar de Ricci son constantes (este último por ser un espacio de Einstein) de modo que hacen que la acción se transforme en una integral de volumen de un término que desde ahora llamaremos $\hat{1}$ (que representará al volumen del bulk):

$$S_{E.H.} = \frac{2\hat{\Lambda} - \hat{R}}{2l_p^{d-1}} \int d^{d+1}x \sqrt{\hat{g}} \{\hat{1}\} = \frac{d}{l_p^{d-1} \tilde{L}^2} \int d^{d+1}x \sqrt{\hat{g}} \{\hat{1}\}. \quad (3.7)$$

De la métrica del espacio PE/E calculamos el término de densidad de volumen $\sqrt{\hat{g}} = \frac{(1-\lambda x^2)^d}{x^{d+1}} \sqrt{g_E}$ que al sustituirse en la acción nos permite leer el término de volumen

$$vol_{PE/E} x > \epsilon = \tilde{L}^{d+1} \int d^d x \sqrt{g_E} \int_{\epsilon} \frac{dx}{x^{d+1}} (1 - \lambda x^2)^d. \quad (3.8)$$

De aquí como se mencionó previamente, leemos el término logarítmico que se saldrá a la luz luego de hacer la expansión del término $((1 - \lambda x^2)^d)$. Se rastrea así en el integrando aquél término que va con “ $1/x$ ” y que es exactamente $x^{-1}(-\lambda)^{d/2} \binom{d}{d/2}$ cuando d es par (no existe en d impar). Si denotamos ésto por $\mathcal{L}_{d+1} \log(1/\epsilon)$, se encontramos que es

$$\mathcal{L}_{d+1} = \frac{2(-1)^{d/2} \tilde{L}^{d+1}}{2^d (d/2)! (d/2 - 1)!} \int d^d x \sqrt{g_E} (d-1)! \left(\frac{R}{d(d-1)} \right)^{d/2}. \quad (3.9)$$

El factor que está en la integral de volumen del borde es la Q - curvatura en d - dimensiones. Ésto esencialmente nos muestra que si se consideran los espacios PE/E se puede encontrar correctamente la anomalía de volumen evidenciando además que está relacionado a la Q - curvatura. Por otra parte este resultado es acorde con lo mostrado en la literatura [78], [62]

$$\mathcal{L}_{d+1} = 2k_{d/2} \tilde{L}^{d+1} \int d^d x \sqrt{g_E} \mathcal{Q}_d, \text{ en donde } k_{d/2} = \frac{(-1)^{d/2}}{2^d \frac{d!}{2} (\frac{d}{2} - 1)!}. \quad (3.10)$$

Un caso particular de ésto es cuando la métrica del borde corresponde a la de la d -esfera, haciendo que el bulk sea el espacio euclídeo AdS_{d+1} . En este espacio es posible leer la anomalía de tipo - A (parte importante de la prescripción universal que hay para leer esta anomalía conforme de manera holográfica, introducida en [91]) y utilizada en otras publicaciones como son [7, 18, 19, 52, 53, 56, 57, 71, 72, 131, 132].

Un detalle que tiene esta elección de métrica en el borde es el hecho de que la d - esfera es conformalmente plana haciendo que cualquier término relacionado a la anomalía tipo - B desaparezca. Sin embargo, la Q - curvatura contiene información tanto de la anomalía tipo - A como la tipo - B al ser una combinación de la densidad de Euler e invariantes locales de Weyl (asociados a anomalía tipo -B). Se examinarán casos que mostrarán que las anomalías pueden ser identificadas a partir de un único cálculo holográfico.

3.1.1. AdS_5/CFT_4 : Dos en uno

Consideremos la anomalía de traza de una CFT en 4 - dimensiones

$$(4\pi)^2 \langle T \rangle = -aE_4 + cW^2 = -4a\mathcal{Q}_4 + (c - a)W^2. \quad (3.11)$$

Una forma eficiente de encontrar los dos términos de la anomalía en este caso es tomar atención a dos espacios de Einstein en particular: uno de ellos es conformalmente plano (por ejemplo, la esfera) y otro cuyo tensor de Ricci es nulo (Ricci - plano). En el primer caso no hay contribución de W^2 (porque es conformalmente plano) y de esta forma es sencillo leer el término de anomalía tipo - A. En el segundo caso, contrariamente al primero, no hay contribuciones a la anomalía tipo - A (o bien a la Q - curvatura) y entonces se lee el término $(c - a)$, rastreando así los dos tipos de anomalía.

Como observación clave, podemos decir que toda la información (anomalías tipo - A y tipo - B) puede ser rastreada a través de un espacio de Einstein g_E genérico: la Q - curvatura se reduce al escalar de Ricci (al cuadrado) $\mathcal{Q}_4 = R^2/24$ y el tensor de Weyl se mantiene intacto. Al recordar lo que hicimos previamente en la acción de Einstein - Hilbert en 5 dimensiones usando la métrica PE/E se llega a un coeficiente que multiplica a R^2 que identificamos como anomalía tipo - A, mientras que el tensor de Weyl al cuadrado (que no es nulo) está ausente. De esto se deduce que $c - a = 0$. Considerando todo esto es posible leer la anomalía de traza de forma holográfica

$$(4\pi)^2 \langle T \rangle = -\frac{4\pi^2 L^3}{l_p^3} \mathcal{Q}_4 = -N^2 \mathcal{Q}_4. \quad (3.12)$$

En esta última igualdad hemos reescrito la longitud de Planck (en unidades del radio de AdS) al rango N (grande) del grupo de gauge de la CFT_4 , usando el diccionario de la cuerda IIB (SUGRA) $AdS_5 \times S^5$ dual a $\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ SYM $_4$.

Comparando esta última ecuación con la expresión genérica de anomalía de traza en 4 - dimensiones vemos claramente

$$a = c = \frac{\pi^2 L^3}{l_p^3} = \frac{N^2}{4} \quad (3.13)$$

encontrado previamente en [86].

3.1.2. AdS_7/CFT_6 : Cuatro en uno

Consideremos ahora la anomalía de traza en 6 - dimensiones

$$\begin{aligned} (4\pi)^3 \langle T \rangle &= aE_6 + c_1 I_1 + c_2 I_2 + c_3 I_3 \\ &= -48a\mathcal{Q}_6 + (c_1 - 96a)I_1 + (c_2 - 24a)I_2 + (c_3 + 8a)I_3 \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde en la segunda línea hemos intercambiado la densidad de Euler en 6- dimensiones E_6 por la Q - curvatura \mathcal{Q}_6 , salvo una derivada total

$$E_6 = 48\mathcal{Q}_6 + 96I_1 + 24I_2 - 8I_3. \quad (3.15)$$

Nuevamente hacemos la observación de que la anomalía tipo - A puede rastrearse directamente usando la Q - curvatura mientras que los coeficientes de la anomalía tipo - B están combinados con el coeficiente de anomalía de tipo - A.

Ha de mencionarse que ahora ya no es tan simple leer las distintas anomalías al considerar espacios de Einstein particulares como lo son los conformalmente planos y los Ricci - planos ya que en el caso de 4 - dimensiones cada uno de éstos ayudaba a encontrar sólo uno de los coeficiente. Ahora la situación es más compleja por la presencia de cuatro coeficientes lo que hace necesario usar cuatro tipos de espacios distintos.¹

Aún así e incluso luego de tener cuatro espacios distintos se hace complicado el poder extraer directamente las anomalías debido a que la densidad de Euler contiene información de dos de los otros invariantes de Weyl, sin olvidar que el tercer invariante en 6 - dimensiones es combinación de los otros dos cuando los espacios son conformalmente planos y Ricci - planos ($E_6 = 64I_1 + 32I_2$ y $I_3 = 4I_1 - I_2$). Incluso si se consideraran espacios de Einstein simétricos ($\nabla W = 0$) como lo son $S^6, CP^3, S^2 \times S^4, S^2 \times CP^2, S^3 \times S^3, S^2 \times S^2 \times S^2$, tampoco sería posible extraer la información de los cuatro coeficientes de la anomalía debido a una igualdad que se satisface en este tipo de espacios que relaciona los distintos invariantes cúbicos entre sí dejando sólo tres invariantes independientes [115]. Para ser más precisos, en este tipo de espacios se cumple $5I_3 = 32I_1 - 8I_2$.

Teniendo en consideración estas observaciones nos aventuraremos a estudiar un espacio de Einstein genérico g_E en el borde determinando que la Q - curvatura es proporcional al escalar de Ricci (al cubo) $\mathcal{Q}_6 = R^3/225$; las dos contracciones del tensor de Weyl al cubo, $I_1 = W'^3, I_2 = W^3$ se mantienen intactas; mientras que el tercer invariante de Weyl se reduce a $I_3 = W\nabla^2 W - \frac{8}{15}RW^2$ modulo una derivada total $\frac{3}{2}\nabla^2 W^2$ que se omitirá en los cálculos siguientes. La base para los invariantes relacionados a la anomalía se simplifican tremendamente debido a que el tensor de Cotton, Bach y la parte sin traza del tensor de Ricci se anulan dejando sólo cuatro términos independientes (la cantidad exacta de términos de la anomalía). La observación clave que se extrae del cálculo holográfico hecho en la sección anterior es que se puede extraer toda la información de la anomalía de tipo - A y tipo - B a partir de un único cálculo, que en este caso, también se podrá llevar a cabo. A partir del factor que acompaña a la Q - curvatura se extrae la anomalía de tipo - A y vemos que no hay términos asociados a los invariantes de Weyl cúbicos (en la acción de Einstein - Hilbert).

Introduciendo todo ésto en la traza del tensor de energía - momentum rápidamente encontramos las anomalías ahora de tipo - A y tipo - B

$$(4\pi)^3 \langle T \rangle = \frac{\pi^3 \tilde{L}^5}{l_p^5} \mathcal{Q}_6 = \frac{2N^3}{3} \mathcal{Q}_6. \quad (3.16)$$

En la última igualdad nuevamente se usa el diccionario de la correspondencia AdS/CFT para traducir la longitud de Planck (en unidades del radio AdS_7 al rango (grande) de la teoría superconforme $(2,0)$ en dos dimensiones que describe la dinámica en bajas energías de la pila de branas M_5 . Finalmente, comparando con la expresión (3.14) encontramos los cuatro términos de la anomalía

$$a = \frac{c_1}{90} = \frac{c_2}{24} = -\frac{c_3}{8} = -\frac{\pi^3 L^5}{48l_p^5} = -\frac{N^3}{72}. \quad (3.17)$$

¹En [26] se intenta con productos de espacios de Einstein para luego reconstruir el bulk con la expansión de Fefferman - Graham. Son necesarios dos espacios distintos $AdS_2 \times S^4$ y $AdS_2 \times S^2 \times S^2$ haciendo el procedimiento más complicado, sobretodo al reemplazar nuevamente en la acción para leer el término logarítmico.

3.2. Invariantes en potencias más altas en curvatura y factorización del volumen

Ahora estudiemos el efecto de añadir términos de curvatura de orden mayor a la acción gravitacional. Para comenzar consideraremos aquellos que son sólo potencias del tensor de Ricci en el bulk, es decir, no involucran directa o implícitamente al tensor de Weyl. Éstos al ser evaluados en la métrica PE/E se pueden anular al contener derivadas del tensor de Ricci (que es nula en este espacio), pueden involucrar a la parte sin traza de este tensor o bien, convertirse en una potencia del escalar de Ricci el que puede reescribirse en términos del radio renormalizado de AdS. Ésto al ser constante puede factorizarse haciendo que sólo afecte a la anomalía de volumen, es decir, a la Q - curvatura. La tarea se transforma simplemente en determinar el radio renormalizado de AdS y el factor de proporcionalidad, ya que la razón entre las anomalías de tipo - A y tipo - B se mantiene.

Las contribuciones que sólo involucran términos del tensor de Ricci (cuadráticas, cúbicas y cuárticas) en el bulk las acomodaremos con respectivos factores de normalización adimensionales u_2, u_3 y u_4 de la siguiente forma:

$$S[\hat{g}] = \frac{-1}{2l_p^{d-1}} \int d^{d+1}x \sqrt{\hat{g}} \left\{ \frac{d(d-1)}{L^2} + \hat{R} + \frac{u_2 \hat{R}^2 L^2}{d(d+1)} + \frac{u_3 \hat{R}^3 L^4}{d^2(d+1)^2} + \frac{u_4 \hat{R}^4 L^6}{d^3(d+1)^3} \right\} \quad (3.18)$$

en donde el escalar de Ricci contiene al radio renormalizado \tilde{L} de la solución de vacío AdS

$$\hat{R} = -\frac{d(d+1)}{2\tilde{L}^2}. \quad (3.19)$$

El radio renormalizado de AdS puede obtenerse de la traza de la ecuación de movimiento. Un truco útil ([84], [58]) y equivalente a extremizar la acción con respecto al radio de AdS [20] es realizar un reescalamiento en la métrica $\hat{g} \rightarrow \mu^2 \hat{g}$

$$S[\mu^2 \hat{g}] = \frac{-\mu^{d+1}}{2l_p^{d-1}} \int d^{d+1}x \sqrt{\hat{g}} \left\{ \frac{d(d-1)}{L^2} + \frac{\hat{R}}{\mu^2} + \frac{u_2 L^2 \hat{R}^2}{\mu^4 d(d+1)} + \frac{u_3 L^4 \hat{R}^3}{\mu^6 d^2(d+1)^2} + \frac{u_4 L^6 \hat{R}^4}{\mu^8 d^3(d+1)^3} \right\} \quad (3.20)$$

y luego hacer

$$\left. \frac{\partial S[\mu^2 \hat{g}]}{\partial \mu} \right|_{\mu=1} = 0. \quad (3.21)$$

Aquí es conveniente introducir la cantidad $f_\infty = L^2/\tilde{L}^2$ (como en [90]). La traza de las ecuaciones de movimiento exige que f_∞ sea la raíz positiva de la siguiente ecuación polinomial

$$0 = 1 - f_\infty + \frac{d-3}{d-1} u_2 f_\infty^2 - \frac{d-5}{d-1} u_3 f_\infty^3 + \frac{d-7}{d-1} u_4 f_\infty^4. \quad (3.22)$$

Luego se introduce la solución en la acción para cambiar L en términos de \tilde{L} y f_∞

$$S[\hat{g}] = \frac{d}{\tilde{L}^2 l_p^{d-1}} [1 - 2u_2 f_\infty + 3u_3 f_\infty^2 - 4u_4 f_\infty^3] \int d^{d+1}x \sqrt{\hat{g}} \{ \hat{1} \} \quad (3.23)$$

En este punto hacemos énfasis de que los términos factorizan dejando sólo la integral de volumen. El factor $\hat{1}$ se relacionará con la Q - curvatura en 6 - dimensiones permitiendo rastrear la anomalía tipo - A. Este proceso en 5 - dimensiones muestra que las anomalías son

$$a = c = \frac{\pi^2 \tilde{L}^3}{l_p^3} [1 - 2u_2 f_\infty + 3u_3 f_\infty^2 - 4u_4 f_\infty^3] \quad (3.24)$$

donde f_∞ es la raíz positiva de la solución a la ecuación

$$0 = 1 - f_\infty + \frac{1}{3}u_2f_\infty^2 + \frac{1}{3}u_3f_\infty^3 - u_4f_\infty^4. \quad (3.25)$$

y para el caso de 7 - dimensiones se encuentra que las anomalías son

$$a = \frac{c_1}{96} = \frac{c_2}{24} = -\frac{c_3}{8} = -\frac{\pi^3 \tilde{L}^5}{48l_p^5} [1 - 2u_2f_\infty + 3u_3f_\infty^2 - 4u_4f_\infty^3] \quad (3.26)$$

y en donde f_∞ es la raíz del polinomio

$$0 = 1 - f_\infty + \frac{3}{5}u_2f_\infty^2 - \frac{1}{5}u_3f_\infty^3 - \frac{1}{5}u_4f_\infty^4. \quad (3.27)$$

En algunas aplicaciones, cuando los coeficientes de las curvaturas altas son paramétricamente pequeños, es suficiente considerar su efecto a orden lineal. Es directo encontrar f_∞ manteniendo sólo los términos lineales en u's, simplemente sustituyendo las potencias más altas de f_∞ por un 1 en la ecuación polinomial

$$f_\infty \simeq 1 + \frac{d-3}{d-1}u_2 - \frac{d-5}{d-1}u_3 + \frac{d-7}{d-1}u_4. \quad (3.28)$$

Los coeficientes de anomalía a nivel linealizado se encontrarán entonces sustituyendo el valor de f_∞ y manteniendo sólo L y los términos lineales en los parámetros u's. En 5 - dimensiones, los coeficientes de las anomalías son

$$a = c \simeq \frac{\pi^2 L^3}{l_p^3} \left[1 - \frac{5}{2}(u_2 - u_3 + u_4) \right]. \quad (3.29)$$

De la misma forma para 7 - dimensiones

$$a = \frac{c_1}{96} = \frac{c_2}{24} = -\frac{c_3}{8} \simeq -\frac{\pi^3 L^5}{48l_p^5} \left[1 - \frac{7}{2}(u_2 - u_3 + u_4) \right]. \quad (3.30)$$

Estos resultados están en total acuerdo con [19] y la anomalía tipo - A es la calculada por [91]. Si bien ésto no presenta nuevos resultados, mostraremos que efectivamente sí se obtiene información de la anomalía tipo - B.

3.3. Potencias altas en curvatura y anomalía tipo B.

En los casos vistos en la sección previa, la densidad lagrangeana era constante haciendo que la acción sea en realidad una integral de volumen del bulk evaluada en la métrica PE/E. En los casos que se revisarán en esta sección haremos un cambio conveniente para poder rastrear las anomalías de tipo - B reescribiendo el tensor de Riemann en términos del tensor de Weyl

$$\hat{Riem} = \hat{W} + \hat{P} \otimes \hat{g} = \hat{W} - \frac{1}{2\tilde{L}^2} \hat{g} \otimes \hat{g}. \quad (3.31)$$

Haremos el análisis desde el invariante local más general, cuadrático en curvatura (de cuartas derivadas) como una desviación al volumen del bulk. En el caso de los invariantes cúbicos hay dos posibles contracciones algebraicas del tensor de Weyl, mientras que hay otros dos términos que involucran derivadas de este tensor. Las cuartas potencias serán estudiadas sólo a nivel algebraico.

Nuevamente el estudio holográfico los haremos en los casos de 5 a 4 dimensiones y luego de 7 a 6 dimensiones.

3.3.1. De 5 a 4 dimensiones

Para empezar veamos el término de curvatura al cuadrado \hat{Riem}^2 que, como comentamos previamente, se escribirá usando el tensor de Weyl. Ésto hace que se divida en dos partes donde una de ellas contribuirá al volumen (por ser constante) mientras que la otra será directamente la potencia del tensor de Weyl al cuadrado, que aportará a la anomalía de tipo - B

$$\Delta S_4 = \int d^5x \sqrt{\hat{g}} \left(\hat{W}^2 \right). \quad (3.32)$$

Ésto es sencillo de evaluar ya que, por la estructura del tensor métrico y por el hecho de que es un invariante conforme de peso 2, pone de manifiesto que está relacionado al cuadrado del tensor de Weyl en el borde $\hat{W}^2 = \tilde{L}^{-4} \frac{x^4}{(1-\lambda x^2)^2} W^2$

$$\Delta S_4 = \tilde{L} \int d^4x \sqrt{g_E} \int_{\epsilon} \frac{dx}{x} W^2 \quad (3.33)$$

Este resultado pone en evidencia que un término de \hat{W}^2 en el bulk contribuye directamente a la anomalía de traza de tipo - B en 4 - dimensiones, aportando así

$$(4\pi^2)\langle T \rangle = -16\pi^2 \tilde{L} W^2. \quad (3.34)$$

El resultado recién mostrado nos da luces de que el cálculo puede resultar más simple en la métrica PE/E al usar la Q - curvatura aunque aún han de examinarse otros términos por si contribuyen a la anomalía.

Ahora podemos, en efecto, analizar las potencias cúbicas del tensor de Weyl ($\hat{I}_1 = \hat{W}^3$ y $\hat{I}_2 = \hat{W}^3$), los que son invariantes conformes de peso 3

$$\Delta S_6 = \int d^5x \hat{g} \left(\hat{W}^3 \right). \quad (3.35)$$

Nuevamente este invariante puede relacionarse (en esta métrica) al respectivo invariante en 4 - dimensiones $\hat{W}^3 = \tilde{L}^{-6} = \frac{x^6}{(1-\lambda x^2)^6} W^3$

$$\Delta S_6 = \frac{1}{\tilde{L}} \int d^4x \sqrt{g_E} \int_{\epsilon} dx \frac{x}{(1-\lambda x^2)^2} W^3. \quad (3.36)$$

Esto no entrega ningún término logarítmico mostrando que esta potencia cúbica no contribuye a la anomalía de traza tipo - B en 4 - dimensiones. Ocurre la misma situación con la otra potencia de Weyl \hat{W}^3 .

Un análisis similar es posible de hacer con los 7 invariantes algebraicos de cuarto orden (8 derivadas) en potencias del tensor de Weyl. Éstos son invariantes conformes de cuarto orden y también, no contribuyen. Tampoco hay aporte de las potencias de orden mayor.

Pongamos atención entonces a los invariantes de Weyl que involucran derivadas, como son $\hat{W}\hat{\nabla}^2\hat{W}$ y $|\hat{\nabla}\hat{W}|^2$. Éstos en realidad están conectados por una derivada total (C_5 según la nomenclatura de [16])

$$|\hat{\nabla}\hat{W}|^2 + \hat{W}\hat{\nabla}^2\hat{W} = \frac{1}{2}\hat{\nabla}^2\hat{W}^2. \quad (3.37)$$

Chequearemos si esta derivada total contribuye a la anomalía:

$$\Delta S_6 = \int d^5x \sqrt{\hat{g}} \left(\hat{\nabla}^2\hat{W}^2 \right). \quad (3.38)$$

Ésto nuevamente puede conectarse a cantidades relacionadas al borde, como en los casos previos:

$$\hat{\nabla}^2 \hat{W}^2 = \frac{x^6}{\tilde{L}^6 (1 - \lambda x^2)^6} \left\{ \nabla^2 + \frac{R}{3} \right\} W^2 \quad (3.39)$$

los que luego de introducirse en (3.38) se verifica que no hay rastros de otro término logarítmico

$$\Delta S_6 = \frac{1}{\tilde{L}} \int d^4 x \sqrt{g_E} \int_\epsilon dx \frac{x}{(1 - \lambda x^2)^2} \left\{ \nabla^2 + \frac{R}{3} \right\} W^2 \quad (3.40)$$

y en consecuencia, no hay aporte a la anomalía de traza en 4 - dimensiones.

3.3.2. De 7 a 6 dimensiones

El cálculo que mostraremos ahora es análogo al hecho en la sección previa salvo el tener presente que ahora hay cuatro coeficientes de anomalía conforme; uno de anomalía tipo - A y tres de anomalía tipo - B. Haremos el estudio para los mismos invariantes y veremos si éstos aportan a alguna de estas tres anomalías (de tipo - B).

Nuestro primer caso a estudiar será nuevamente un término de \hat{W}^2 en el bulk:

$$\Delta S_4 = \int d^7 x \sqrt{\hat{g}} \left(\hat{W}^2 \right). \quad (3.41)$$

En la métrica PE/E este tensor de Weyl se relaciona a la misma cantidad en el borde $\hat{W}^2 = \tilde{L}^{-4} \frac{x^4}{(1 - \lambda x^2)^4} W^2$ haciendo que la integral se convierta en lo siguiente:

$$\Delta S_4 = \tilde{L}^3 \int d^6 x \sqrt{g_E} \int_\epsilon \frac{dx}{x^3} (1 - \lambda x^2)^2 W^2. \quad (3.42)$$

En este punto hay que tener un poco más de cuidado ya que hay que ver si hay contribución al término logarítmico asociado a la anomalía de traza. Al hacer la expansión de $(1 - \lambda x^2)^2 = 1 - 2\lambda x^2 + \lambda^2 x^4$ es evidente que el único término que puede contribuir a la anomalía es $-2\lambda x^2 = -\frac{R}{60} x^2$

$$-2\tilde{L}^3 \int d^6 x \sqrt{g_E} \int_\epsilon \frac{dx}{x} \lambda W^2 = -\frac{\tilde{L}^3}{60} \int d^6 x \sqrt{g_E} \int_\epsilon \frac{dx}{x} R W^2. \quad (3.43)$$

Vemos que ésto, por ahora, no hace contribución directa a la anomalía aunque efectivamente es parte del término logarítmico. Al ahondar en qué contribuye, usando las identidades de Bianchi, es claro ver que el término RW^2 del borde está relacionado a los otros tres invariantes (salvo una derivada total):

$$\frac{1}{5} R W^2 = 4I_1 - I_2 - I_3 \quad (3.44)$$

contribuyendo a la anomalía de traza en la cantidad

$$(4\pi)^3 \langle T \rangle = \frac{16\pi^3 \tilde{L}^3}{3} (4I_1 - I_2 - I_3). \quad (3.45)$$

Veamos la contribución de los invariantes cúbicos $\hat{W}^3 = \hat{I}_2$ y $\hat{W}'^3 = \hat{I}_1$ tomando por ejemplo el invariante \hat{W}'^3

$$\Delta S_6 = \int d^7 x \left\{ \hat{W}'^3 \right\}. \quad (3.46)$$

Al igual que en el caso de 5 a 4 dimensiones, esta cantidad está conectada al tensor W'^3 en 6 dimensiones salvo un reescalamiento conforme $\hat{W}'^3 = \tilde{L}^{-6} \frac{x^6}{(1 - \lambda x^2)^6} W'^3$ que efectivamente produce un término logarítmico

$$\Delta S_6 = \tilde{L} \int d^6 x \sqrt{g_E} \int_\epsilon \frac{dx}{x} \left\{ W'^3 \right\} \quad (3.47)$$

y vemos así que aporta de manera directa a la anomalía de traza el mismo invariante pero construido en una dimensión menos

$$(4\pi)^3 \langle T \rangle = -64\pi^3 \tilde{L} I_1. \quad (3.48)$$

Conclusión similar se obtiene a partir del otro invariante cúbico $\hat{W}^3 = I_2$

$$(4\pi)^3 \langle T \rangle = -64\pi^3 \tilde{L} I_2. \quad (3.49)$$

En el caso de los 7 invariantes cuárticos [68], [28] los analizaremos genéricamente con uno de ellos, que llamaremos \hat{W}^4 :

$$\Delta S_8 = \int d^7 x \sqrt{g} \left\{ \hat{W}^4 \right\}. \quad (3.50)$$

Al ver su relación con las cantidades del borde en la métrica PE/E se encuentra que se relaciona al mismo tensor de Weyl construido en 6 dimensiones $\hat{W}^4 = \tilde{L}^{-8} \frac{x^8}{(1-\lambda x^2)^8} W^4$

$$\Delta S_8 = \tilde{L} \int d^6 x \sqrt{g_E} \int_\epsilon dx \frac{x}{(1-\lambda x^2)^2} W^4, \quad (3.51)$$

término que claramente no contribuye. Este resultado se extiende para las potencias de orden superior del tensor de Weyl. De ésta forma sólo nos queda por aclarar en qué manera las cantidades $|\hat{\nabla} \hat{W}|^2$ y $\hat{W} \hat{\nabla} \hat{W}$ aportan a la anomalía de traza, recordando que están conectadas a su vez por una derivada total

$$|\hat{\nabla} \hat{W}|^2 + \hat{W} \hat{\nabla} \hat{W} = \frac{1}{2} \hat{\nabla}^2 \hat{W}^2. \quad (3.52)$$

Comenzaremos por verificar que esta derivada total no contribuye a la anomalía de traza

$$\Delta S_6 = \int d^7 x \sqrt{\hat{g}} \left\{ \hat{\nabla}^2 \hat{W}^2 \right\}, \quad (3.53)$$

donde ésta está relacionada a un término análogo a lo sucedido en el caso de 5 a 4 dimensiones. En la métrica PE/E se cumplirá para este caso

$$\hat{\nabla}^2 \hat{W}^2 = \frac{x^6}{\tilde{L}^6 (1-\lambda x^2)^6} \left(\nabla^2 - \frac{8+8\lambda^2 x^4}{x^2} \right) W^2, \quad (3.54)$$

término que al ser introducido en (3.53) no entrega ningún término logarítmico, no aportando a la anomalía conforme. Ahora bastará con analizar sólo uno de los dos términos que hay en (3.53) (ya que uno contribuirá, módulo el signo, lo mismo), tomando por ejemplo $|\hat{\nabla} \hat{W}|^2$

$$\Delta_6 = \int d^7 x \left\{ |\hat{\nabla} \hat{W}|^2 \right\}. \quad (3.55)$$

Ésto es un poco más complicado de analizar, sin embargo, usando la identidad \hat{C}_7 en [16] se encuentra que está relacionado a los otros invariantes:

$$\frac{1}{4} |\hat{\nabla} \hat{W}|^2 - \frac{3}{\tilde{L}^2} \hat{W}^2 - \frac{1}{4} \hat{W}^3 + \hat{W}'^3 = \frac{3}{2} \hat{\nabla}^2 \hat{W}^2. \quad (3.56)$$

De esta última ecuación ya es sencillo visualizar cuánto aporta este término a la anomalía ya que el lado derecho de la ecuación no contribuye, mientras que el resto aporta directamente a los invariantes haciendo que cuando este término esté en la acción la anomalía tenga una contribución de

$$(4\pi)^3 \langle T \rangle = 64\pi^3 \tilde{L} (8I_1 - 2I_2 - I_3). \quad (3.57)$$

Hasta este punto hemos mostrado todos los términos que eventualmente pueden contribuir a la anomalía de traza de la CFT en 6 - dimensiones Hemos puesto en evidencia que nuevamente, al evaluar la acción en la métrica PE/E podemos encontrar holográficamente la anomalía ahora en 6 dimensiones, sin embargo, mostraremos otra forma más eficiente al momento de encontrar la anomalía y ésto se realizará en la próxima sección.

3.4. Receta holográfica para la anomalía

Hemos mostrado que toda la información se puede obtener desde un cálculo en una dimensión extra en la métrica PE/E al considerar los aportes que son puramente Ricci y que aportan a la Q - curvatura (para encontrar la anomalía de tipo - A) y lo que sea proporcional sólo a potencias del tensor de Weyl entregarán la información de la anomalía tipo - B. Sin embargo determinadas combinaciones de términos que involucran derivadas del tensor de Weyl se convierten en términos en el borde que no involucran derivadas, y viceversa. Se pondrá en evidencia el caso explícito de 5 a 4 dimensiones y de 7 a 6 dimensiones.

3.4.1. De 5 a 4 dimensiones

La observación clave está en estudiar un tercer invariante de Weyl de peso tres. En este caso elegiremos el invariante encontrado por Fefferman y Graham [61]. En el espacio de Einstein de 5 - dimensiones este invariante es

$$\hat{\Phi}_5 = |\hat{\nabla}\hat{W}|^2 + 16\hat{P}\hat{W}^2 = |\hat{\nabla}\hat{W}|^2 - \frac{8}{L^2}\hat{P}\hat{W}^2 \quad (3.58)$$

y tiene el mismo peso conforme que las dos contracciones cúbicas del tensor de Weyl. Haciendo uso de su invariancia de Weyl junto a la estructura del espacio PE/E se encuentra que puede relacionarse a cantidades de 4 - dimensiones

$$|\hat{\nabla}\hat{W}|^2 - \frac{8}{L^2}\hat{P}\hat{W}^2 = \frac{x^6}{\tilde{L}^2(1-\lambda x^2)^6} \left\{ |\nabla W|^2 + \frac{2}{3}RW^2 \right\}. \quad (3.59)$$

Es notable el hecho de que la cantidad $|\nabla W|^2 + \frac{2}{3}RW^2$ es exactamente el invariante de Fefferman - Graham en el espacio de Einstein del borde

$$\Phi_4 = |\nabla W|^2 + \frac{2}{3}RW^2. \quad (3.60)$$

Ahora veremos cuál es el efecto de tener un invariante $\hat{\Phi}_5$ en el espacio en 5 - dimensiones:

$$\Delta S_6 = \int d^5x \sqrt{\hat{g}} \left\{ \hat{\Phi}_5 \right\}. \quad (3.61)$$

Al introducir explícitamente el determinante \hat{g} se llega a una integral en la cual hay que rastrear el término logarítmico que contribuye a la anomalía

$$\Delta S_6 = \tilde{L} \int d^4x \sqrt{g_E} \int_{\epsilon} dx \frac{x}{(1-\lambda x^2)^2} \Phi_4. \quad (3.62)$$

Al hacer la expansión del denominador es sencillo verificar que no hay aporte a la anomalía. Lo interesante de esta observación es que este invariante de orden tres en 5 - dimensiones se relaciona al mismo invariante construido en una dimensión menos (en esta métrica PE/E).

Sintetizando la información mostrada previamente podemos recetar una forma sencilla de encontrar las anomalías tipo - A y tipo - B holográficamente de 5 a 4 dimensiones:

1. Evaluar la acción en la métrica PE/E con el radio renormalizado de AdS.
2. Escribir la constante cosmológica en términos del radio renormalizado de AdS y recolectar todos los términos que sean puramente Ricci que harán una constante por el volumen (un coeficiente multiplicado por $\hat{1}$).
3. Escribir todos los términos que sean puramente Weyl (desviaciones del volumen) mediante identidades de Bianchi y otros en términos del conjunto de invariantes de Weyl $\hat{W}^2, \hat{W}^3, \hat{W}'^3, \hat{\Phi}_5, \hat{W}^4$.

4. Leer los coeficientes que acompañan a la Q - curvatura (tipo - A) y \hat{W}^2 . Ésto, módulo un factor que multiplica a la acción gravitacional, nos permite resumir en una receta simple el cómo identificar los coeficientes de las anomalías

$$\left\{ \hat{1}, \hat{W}^2, \hat{W}'^3, \hat{W}^3, \hat{\Phi}_5, \hat{W}^4, \dots \right\} \rightarrow \left\{ \frac{1}{16} \mathcal{Q}_4, W^2, 0, 0, 0, 0, \dots \right\}. \quad (3.63)$$

Ahora tabularemos las contribuciones de los distintos términos cuadráticos y cúbicos que pueden estar presente en la acción gravitacional:

- Términos cuadráticos no triviales

3.1: Tabla de términos cuadráticos en 5D

Invariante de curvatura	$\hat{1}/\tilde{L}^4$	\hat{W}^2
\hat{R}^2	400	—
$\hat{R}_{ab}\hat{R}^{ab}$	80	—
$\hat{R}_{abcd}\hat{R}^{abcd}$	40	1

Tabla elaborada por el autor

- Términos cúbicos no triviales

3.2: Tabla de términos cúbicos en 5D

Invariante de curvatura	$\hat{1}/\tilde{L}^6$	\hat{W}^2/\tilde{L}^2	\hat{W}'^3	\hat{W}^3	$\hat{\Phi}_5$
\hat{R}^3	-8000	—	—	—	—
$\hat{R}\hat{R}_{ab}\hat{R}^{ab}$	-1600	—	—	—	—
$\hat{R}\hat{R}_{abcd}\hat{R}^{abcd}$	-800	-20	—	—	—
$\hat{R}_a^b\hat{R}_b^c\hat{R}_c^a$	-320	—	—	—	—
$\hat{R}_{ab}\hat{R}_{cd}\hat{R}^{abcd}$	-320	—	—	—	—
$\hat{R}_{ab}\hat{R}^{acde}\hat{R}_{cde}^b$	-160	-4	—	—	—
$\hat{R}_{ab}^{\quad cd}\hat{R}_{cd}^{\quad ef}\hat{R}_{ef}^{\quad ab}$	-80	-6	—	1	—
$-\hat{R}_{abcd}\hat{R}^{aecf}\hat{R}_{e\quad f}^{\quad b\quad d}$	-60	3/2	-1	—	—
$\hat{\nabla}_a\hat{R}_{bcde}\hat{\nabla}^a\hat{R}^{bcde}$	—	8	—	—	1

Tabla elaborada por el autor

3.4.2. De 7 a 6 dimensiones

Pondremos atención nuevamente al invariante de Fefferman y Graham pero ahora en 7 - dimensiones. En este caso

$$\hat{\Phi}_7 = |\hat{\nabla}\hat{W}|^2 + 16\hat{P}\hat{W}^2 = |\hat{\nabla}\hat{W}|^2 - \frac{8}{\tilde{L}^2}\hat{W}^2 \quad (3.64)$$

y su peso conforme sigue siendo equivalente al de los otros invariantes cúbicos \hat{W}^3 y \hat{W}'^3 . Haciendo uso de la invariancia bajo reescalamientos de Weyl junto a la estructura de la métrica PE/E se encuentra

$$|\hat{\nabla}\hat{W}|^2 - \frac{8}{\tilde{L}^2}\hat{W}^2 = \frac{x^6}{\tilde{L}^6(1-\lambda x^2)^6} \left\{ |\nabla W|^2 + \frac{4}{15}RW^2 \right\}. \quad (3.65)$$

Al igual que el caso de 5 a 4 dimensiones, el término $\{|\nabla W|^2 + \frac{4}{15}RW^2\}$ es exactamente el invariante de Fefferman y Graham en la métrica del borde 6 - dimensional

$$\Phi_6 = \left\{ |\nabla W|^2 + \frac{4}{15}RW^2 \right\}. \quad (3.66)$$

Veamos ahora cuál es el aporte a la anomalía al agregar $\hat{\Phi}_7$ al bulk

$$\Delta S_6 = \int d^7x \sqrt{\hat{g}} \{ \hat{\Phi}_7 \}. \quad (3.67)$$

Nuevamente la contribución a la anomalía se identifica detectando el término logarítmico en la integral de volumen

$$\Delta S_6 = \tilde{L} \int d^6x \sqrt{g_E} \int_{\epsilon} \frac{dx}{x} \Phi_6. \quad (3.68)$$

mostrando así que la contribución a la anomalía de traza en 6 - dimensiones es

$$(4\pi)^3 \langle T \rangle = -64\pi^3 \tilde{L} \Phi_6 \quad (3.69)$$

Estas observaciones se pueden resumir en la siguiente receta para el cálculo de anomalías de traza vía holográfica:

- Evaluar la acción en la métrica PE/E con el radio renormalizado de AdS.
- Escribir la constante cosmológica en términos del radio renormalizado y recolectar todos los términos que sean puramente Ricci factor del volumen ($\hat{1}$).
- Escribir las desviaciones del volumen (términos ligados a las potencias de Weyl) como combinación de los tres invariantes cúbicos \hat{W}'^3, \hat{W}^3 y $\hat{\Phi}_7$.
- Leer los coeficientes de la Q - curvatura (anomalía tipo - A) y de los tres invariantes de Weyl mencionados.

$$\left\{ \hat{1}, \hat{W}'^3, \hat{W}^3, \hat{\Phi}_7, \hat{W}^4, \dots \right\} \rightarrow \left\{ -\frac{1}{384} \mathcal{Q}_6, I_1, I_2, \Phi, 0, \dots \right\} \quad (3.70)$$

Con ésto se obtiene el coeficiente de anomalía tipo - A a junto a tres coeficientes “desplazados” de anomalía tipo - B, $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3$

$$\begin{aligned} (4\pi)^3 \langle T \rangle &= -48a \mathcal{Q}_6 + \tilde{c}_1 I_1 + \tilde{c}_2 I_2 + \tilde{c}_3 \Phi_3 \\ &= -48a \mathcal{Q}_6 + (c_1 + 16c_3 + 32a) I_1 + (c_2 - 4c_3 - 56a) I_2 (3c_3 + 24a) \Phi_6. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Para encontrar los coeficientes reales $\{a, c_1, c_2, c_3\}$ basta con resolver un sistema de ecuaciones simple².

²Esta relación es exacta salvo una derivada total en el espacio Einstein del borde de 6 - dimensiones. En general esta igualdad contiene términos adicionales que involucran al tensor de Cotton, tensor de Bach, tensor de Schouten y la parte sin traza del tensor de Ricci

Se resume en las siguientes tablas el aporte a la anomalía de traza

- Invariantes cuadráticos

3.3: Tabla de invariantes cuadráticos en 7D

Invariante de curvatura	$\hat{1}/\tilde{L}^6$	\hat{W}'^3	\hat{W}^3	$\hat{\Phi}_7$
\hat{R}^2/\tilde{L}^2	1764	—	—	—
$\hat{R}_{ab}\hat{R}^{ab}/\tilde{L}^2$	252	—	—	—
$\hat{R}_{abcd}\hat{R}^{abcd}/\tilde{L}^2$	84	1	-1/4	1/4
$\hat{W}_{abcd}\hat{W}^{abcd}/\tilde{L}^2$	—	1	-1/4	1/4

Tabla elaborada por el autor

- Invariantes cúbicos

3.4: Tabla de invariantes cúbicos en 7D

Invariante de curvatura	$\hat{1}/\tilde{L}^6$	\hat{W}'^3	\hat{W}^3	$\hat{\Phi}_7$
\hat{R}^3	-74088	—	—	—
$\hat{R}\hat{R}_{ab}\hat{R}^{ab}$	-10584	—	—	—
$\hat{R}\hat{R}_{abcd}\hat{R}^{abcd}$	-3528	-42	21/2	-21/2
$\hat{R}_a^b\hat{R}_b^c\hat{R}_c^a$	-1512	—	—	—
$\hat{R}_{ab}\hat{R}_{cd}\hat{R}^{abcd}$	-1512	—	—	—
$\hat{R}_{ab}\hat{R}^{acde}\hat{R}_{cde}^b$	-504	-6	3/2	-3/2
$\hat{R}_{ab}^{cd}\hat{R}_{cd}^{ef}\hat{R}_{ef}^{ab}$	-168	-6	5/2	-3/2
$-\hat{R}_{abcd}\hat{R}^{aecf}\hat{R}_{ef}^b{}^d$	-210	1/2	-3/8	3/8
$\hat{\nabla}_a\hat{R}_{bcde}\hat{\nabla}^a\hat{R}^{bcde}$	—	8	-2	3

Tabla elaborada por el autor

3.5. Comparando resultados

En esta sección mostraremos que la anomalía de traza obtenida por este mecanismo es equivalente a las reportadas previamente.

3.5.1. Gravedad con términos cuadráticos en curvatura

Históricamente fue este el caso en que se evidencia el accidente “ $a = c$ ” para los términos de anomalía de traza en 5 - dimensiones. Consideremos para ésto el caso más general, cuya acción es

$$S[\hat{g}] = -\frac{1}{2l_p^3} \int d^5x \sqrt{\hat{g}} \left\{ \hat{R} - 2\hat{\Lambda} + \alpha L^2 \hat{R}^2 + \beta L^2 \hat{R}_{ic}^2 + \gamma L^2 \hat{R}_{iem}^2 \right\}. \quad (3.72)$$

Siguiendo el procedimiento detallado en la sección anterior evaluaremos esta acción en la métrica PE/E de la que fácilmente se obtiene la siguiente acción

$$S_{PE/E} = \frac{1}{2l_p^3} \int d^5x \sqrt{\hat{g}} \left\{ -\frac{20}{\tilde{L}^2} + \frac{12}{\tilde{L}^2} + \frac{400\alpha L^2}{\tilde{L}^4} + \frac{80\beta L^2}{\tilde{L}^4} + \frac{40\gamma L^2}{\tilde{L}^4} + \gamma L^2 \hat{W}^2 \right\}. \quad (3.73)$$

Desde la traza de la ecuación de movimiento se sigue que la ecuación que debe satisfacer la razón $f_\infty = L^2/\tilde{L}^2$ es

$$0 = 1 - f_\infty + \frac{20\alpha + 4\beta + 2\gamma}{3} f_\infty^2, \quad (3.74)$$

solución que luego de reescribir todas las constantes en términos de f_∞ y al introducirse en la acción

$$S_{PE/E} = \frac{-1}{2l_p^3} \int d^5x \sqrt{\hat{g}} \left\{ -8 \frac{1 - (40\alpha + 8\beta + 4\gamma)f_\infty}{\tilde{L}^2} + \gamma L^2 \hat{W}^2 \right\}. \quad (3.75)$$

Ahora rápidamente se encuentra la traza del tensor de energía - momentum (salvo un factor común $-(4\pi)^2 \tilde{L}^5$)

$$(4\pi)^2 \langle T \rangle = -\frac{4\pi^2 \tilde{L}^3}{l_p^3} [1 - (40\alpha + 8\beta + 4\gamma)f_\infty] \mathcal{Q}_4 + \frac{8\pi^2 \tilde{L}^3}{l_p^3} \gamma f_\infty W^2. \quad (3.76)$$

De esta expresión leemos entonces la anomalía de traza

$$a = \frac{\pi^2 \tilde{L}^3}{l_p^3} [1 - 4(10\alpha + 2\beta + \gamma)f_\infty] \quad (3.77)$$

$$c - a = \frac{8\pi^2 \tilde{L}^3}{l_p} \gamma f_\infty, \quad (3.78)$$

y además vemos que a nivel linealizado a cambiará significativamente mientras que $c - a$ se mantendrá igual debido a que ya se encuentra a orden lineal

$$a = \frac{\pi^2 \tilde{L}^3}{l_p^3} [1 - 5(10\alpha + 2\beta + \gamma)] \quad (3.79)$$

$$c - a = \frac{8\pi^2 \tilde{L}^3}{l_p} \gamma. \quad (3.80)$$

3.5.1.1. Caso particular I: Gauss - Bonnet

Ésta es una combinación específica de términos cuadráticos en curvatura $\hat{R}^2 - 4\hat{R}_{ic}^2 + \hat{R}_{iem}^2$. Para describirla basta con elegir por coeficientes a $\alpha = \gamma = \lambda_{GB}$ y $\beta = -2\lambda_{GB}$ y ésto hace que el radio renormalizado de AdS sea la raíz positiva de la ecuación cuadrática siguiente

$$0 = 1 - f_\infty + \lambda_{GB} f_\infty^2 \quad (3.81)$$

de la que se desprenden los respectivos coeficientes de la anomalía

$$a = \frac{\pi^2 \tilde{L}^3}{l_p^3} [1 - 6\lambda_{GB} f_\infty] \quad (3.82)$$

$$c - a = \frac{4\pi^2 \tilde{L}^3}{l_p^3} \lambda_{GB} f_\infty. \quad (3.83)$$

Siguiendo la prescripción mencionada, los coeficientes a nivel linealizado son

$$a \simeq \frac{\pi^2 \tilde{L}^3}{l_p^3} \left[1 - \frac{15}{2} \lambda_{GB} \right] \quad (3.84)$$

$$c - a \simeq \frac{4\pi^2 \tilde{L}^3}{l_p^3} \lambda_{GB}. \quad (3.85)$$

3.5.1.2. Caso particular II: gravedad crítica.

La acción correspondiente a gravedad crítica en 5 - dimensiones es

$$S[\hat{g}] = -\frac{1}{2l_p^3} \int d^5x \sqrt{\hat{g}} \left\{ \hat{R} - 2\hat{\Lambda} - \frac{L^2}{8} \hat{W}^2 \right\}. \quad (3.86)$$

Dado que el tensor de Weyl es nulo en AdS, no hay corrección a la anomalía de tipo - A y $\tilde{L} = L$ (es decir $f_\infty = 1$). Una segunda observación es que la corrección $c - a$, con $\gamma = -1/8$, es exactamente $-a$ poniendo en evidencia que el coeficiente de anomalía tipo B es nulo

$$a = \frac{\pi^2 L^3}{l_p^3} \quad y \quad c = 0 \quad (3.87)$$

3.5.2. Corrección más general a RG en 5D con términos cuadráticos y cúbicos en curvatura.

Consideremos ahora los términos cúbicos en curvatura

$$S[\hat{g}] = -\frac{1}{2l_p^3} \int d^5x \sqrt{\hat{g}} \left\{ \frac{12}{L^2} + \hat{R} + L^2 \sum_{i=1}^3 u_{2,i} \hat{I}_{2,i} + L^4 \sum_{j=1}^8 u_{3,j} \hat{I}_{3,j} + L^4 u_{3,0} \hat{I}_{3,0} \right\} \quad (3.88)$$

en donde los respectivos $\hat{I}_{i,j}$ están dadas por las siguientes contracciones en curvatura:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{2,1} &= \hat{R}_{iem}^2, & \hat{I}_{2,2} &= \hat{R}_{ic}^2, & \hat{I}_{2,3} &= \hat{R}^2, & \hat{I}_{3,1} &= \hat{R}iem^3, \\ \hat{I}_{3,2} &= \hat{R}_{iem}^3 + \frac{1}{4} \hat{R}_{iem}^3, & \hat{I}_{3,3} &= -\hat{R}_{ic} \hat{R}_{iem}^2, & \hat{I}_{3,4} &= \hat{R} \hat{R}_{iem}^2, & \hat{I}_{3,5} &= \hat{R}_{iem} \hat{R}_{ic}^2, \\ \hat{I}_{3,6} &= \hat{R}_{ic}^3, & \hat{I}_{3,7} &= \hat{R} \hat{R}_{ic}^2, & \hat{I}_{3,8} &= \hat{R}^3, & \hat{I}_{3,0} &= |\hat{\nabla} \hat{R}_{iem}|^2. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Es sencillo ver que el término $I_{3,0}$ contribuye únicamente a la anomalía de tipo - B mientras que los términos que son combinaciones del tensor de Ricci $\hat{I}_{2,2}, \hat{I}_{2,3}, \hat{I}_{3,5}, \hat{I}_{3,6}, \hat{I}_{3,7}$ y $\hat{I}_{3,8}$ sólo contribuyen a la anomalía de tipo - A.

El polinomio de la ecuación para encontrar a f_∞ ahora es

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - f_\infty + \frac{1}{3} (2u_{2,1} + 4u_{2,2} + 20u_{2,3}) f_\infty^2 \\ &+ \frac{1}{3} (4u_{3,1} - 2u_{3,2} - 8u_{3,3} + 40u_{3,4} + 16u_{3,5} + 16u_{3,6} + 80u_{3,7} + 400u_{3,8}) f_\infty^3. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Si llamamos por $u_2 = 2u_{2,1} + 4u_{2,2} + 20u_{2,3}$ y $u_3 = 4u_{3,1} - 2u_{3,2} - 8u_{3,3} + 40u_{3,4} + 16u_{3,5} + 16u_{3,6} + 80u_{3,7} + 400u_{3,8}$ entonces las respectivas anomalías serán encontradas desde las relaciones

$$a = \frac{\pi^2 \tilde{L}^3}{l_p^3} (1 - 2u_2 f_\infty + 3u_3 f_\infty^2) \quad (3.91)$$

$$c - a = \frac{8\pi^2 \tilde{L}^3}{l_p^3} f_\infty (v_2 - v_3 f_\infty) \quad (3.92)$$

donde $v_2 = u_{2,1}$ y $v_3 = 6u_{3,1} + 3u_{3,2} - 4u_{3,3} + 20u_{3,4} - 8u_{3,0}$.

Para obtener el resultado a nivel linealizado basta con expandir el coeficiente f_∞ y el término $f_\infty^{-3/2}$ de \tilde{L}^3 :

$$f_\infty \simeq 1 + \frac{1}{3} u_2 + \frac{1}{3} u_3 \quad (3.93)$$

$$a \simeq \frac{\pi^2 L^3}{l_p^3} \left(1 - \frac{5}{2} u_2 + \frac{5}{2} u_3 \right) \quad (3.94)$$

$$c - a \simeq \frac{8\pi^2 L^3}{l_p^3} (v_2 - v_3) \quad (3.95)$$

Todos estos resultados están acorde a lo reportado en la literatura [20], [105], [97].

3.5.3. Quartic quasi - topological gravity 5D

El último ejemplo a considerar en 5 - dimensiones es una acción gravitacional construida a partir de invariantes algebraicos de cuarto orden en la curvatura (más detalles en [46])

$$S[\hat{g}] = \frac{-1}{2l_p^3} \int d^5x \sqrt{\hat{g}} \left\{ \frac{12}{L^2} + \hat{R} + \frac{\lambda L^2}{2} \hat{\mathcal{L}}_2 + \frac{7\mu L^4}{4} \hat{\mathcal{L}}_3 + \frac{\nu L^6}{21024} \hat{\mathcal{L}}_4 \right\}. \quad (3.96)$$

En ésta $\hat{\mathcal{L}}_2$ es la densidad lagrangeana de Gauss - Bonnet. Los términos $\hat{\mathcal{L}}_3$ y $\hat{\mathcal{L}}_4$ son dados respectivamente por

$$\hat{\mathcal{L}}_3 = -\hat{R}'_{iem} + \frac{3}{8} \hat{R} \hat{R}'_{iem} - \frac{9}{7} \hat{R}_{ic} \hat{R}'_{iem} + \frac{15}{7} \hat{R}_{iem} \hat{R}'_{ic} + \frac{18}{7} \hat{R}'_{ic} - \frac{33}{14} \hat{R} \hat{R}'_{ic} + \frac{15}{56} \hat{R}'^3 \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_4 = & -1404 \hat{R}'_{iem}{}^4 + 1848 \hat{R}'_{ic}{}^2 \hat{R}'_{iem}{}^2 - 25536 \hat{R} \hat{R}'_{ic}{}^3 - 7422 (\hat{R}_{iem})^2 + 24672 \hat{R}'_{ic}{}^4 - 5472 \hat{R} \hat{R}'_{ic} \hat{R}'_{ic} \hat{R}'_{iem} \\ & + 77184 \hat{R}_{ic} \hat{R}'_{ic} \hat{R}'_{ic} \hat{R}'_{iem} - 85824 \hat{R}_{ic} \hat{R}'_{ic} \hat{R}'_{iem} \hat{R}'_{iem} - 41472 \hat{R}'_{ic} \hat{R}'_{ic} \hat{R}'_{iem} \hat{R}'_{iem} - 690 \hat{R}'^4 \\ & + 1788 \hat{R}'^2 \hat{R}'_{iem}{}^2 + 6936 \hat{R}'^2 \hat{R}'_{ic}{}^2 + 7296 \hat{R}'_{ic} \hat{R}'_{iem} \hat{R}'_{iem} \hat{R}'_{iem} + 42480 \hat{R}'_{iem}{}^4. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Ahora tabulamos la contribución de los términos de cuarto orden en curvatura:

3.5: Tabla de términos cuárticos en 5D

Invariante de curvatura	$\hat{1}/\tilde{L}^8$	\hat{W}^2/\tilde{L}^4	\hat{W}'^3/\tilde{L}^2	\hat{W}^3/\tilde{L}^2	$\hat{\Phi}_5/\tilde{L}^2$
$\hat{R}'_{iem}{}^4$	160	24	—	-8	—
$\hat{R}'_{ic}{}^2 \hat{R}'_{iem}{}^2$	3200	80	—	—	—
$\hat{R} \hat{R}'_{ic}{}^3$	6400	—	—	—	—
$(\hat{R}'_{iem}{}^2)^2$	1600	80	—	—	—
$\hat{R}'_{ic}{}^4$	1280	—	—	—	—
$\hat{R} \hat{R}'_{ic} \hat{R}'_{ic} \hat{R}'_{iem}$	6400	—	—	—	—
$\hat{R}'_{ic} \hat{R}'_{ic} \hat{R}'_{ic} \hat{R}'_{iem}$	1280	—	—	—	—
$\hat{R}'_{ic} \hat{R}'_{ic} \hat{R}'_{iem} \hat{R}'_{iem}$	320	8	—	—	—
$\hat{R}'_{ic} \hat{R}'_{ic} \hat{R}'_{iem} \hat{R}'_{iem}$	1280	—	—	—	—
\hat{R}'^4	160000	—	—	—	—
$\hat{R}'^2 \hat{R}'_{iem}{}^2$	16000	400	—	—	—
$\hat{R}'^2 \hat{R}'_{ic}{}^2$	32000	—	—	—	—
$\hat{R}'_{ic} \hat{R}'_{iem} \hat{R}'_{iem} \hat{R}'_{iem}$	320	24	—	-4	—
$\hat{R}'_{iem}{}^4$	280	6	-4	-1	—

Tabla elaborada por el autor

Haciendo uso de la información dada en las tablas 3.1, 3.2 y 3.5 notaremos que el polinomio a resolver para encontrar el radio renormalizado de AdS es

$$0 = 1 - f_\infty + \lambda f_\infty^2 + \mu f_\infty^3 + \nu f_\infty^4. \quad (3.99)$$

Siguiendo la receta descrita con anterioridad dejamos L en términos de \tilde{L} y f_∞ . Las correspondientes anomalías serán

$$a = \frac{\pi^2 \tilde{L}^3}{l_p^3} [1 - 6\lambda f_\infty + 9\mu f_\infty^2 + 4\nu f_\infty^3] \quad (3.100)$$

$$c - a = \frac{4\pi^2 \tilde{L}^3}{l_p^3} [\lambda - 3\mu f_\infty - 2\nu f_\infty^2] f_\infty, \quad (3.101)$$

todo esto en acuerdo con los resultados reportados en [46].

3.5.4. Acción gravitacional más general en 7D que incluye correcciones cuadráticas y cúbicas en curvatura.

La acción que describe a esta teoría es

$$S[\hat{g}] = -\frac{1}{2l_p^5} \int d^7x \sqrt{\hat{g}} \left\{ \frac{30}{L^2} + \hat{R} + L^2 \sum_{i=1}^3 u_{2,i} \hat{I}_{2,i} + L^4 \sum_{j=1}^8 u_{3,j} \hat{I}_{3,j} + L^4 u_{3,0} \hat{I}_{3,0} \right\} \quad (3.102)$$

ya la observación es similar a la vista en el caso 5 - dimensional. El único término que no contribuye a la anomalía de tipo - B es $\hat{I}_{3,0}$ mientras que los términos que aportan a ésta son $\hat{I}_{2,2}, \hat{I}_{2,3}, \hat{I}_{3,5}, \hat{I}_{3,6}, \hat{I}_{3,7}$ y $\hat{I}_{3,8}$.

El polinomio a resolver para el radio renormalizado de AdS estará dado por

$$0 = 1 - f_\infty + \frac{3}{5} u_2 f_\infty^2 - \frac{1}{5} u_3 f_\infty^3 \quad (3.103)$$

en donde $u_2 = 2u_{2,1} + 6u_{2,2} + 42u_{2,3}$ y $u_3 = 4u_{3,1} - 4u_{3,2} - 12u_{3,3} + 84u_{3,4} + 36u_{3,5} + 36u_{3,6} + 252u_{3,7} + 1764u_{3,8}$.

Siguiendo el proceso descrito, reemplazamos L en términos de \tilde{L} y f_∞ y podemos leer claramente el valor de la anomalía tipo - A

$$a = -\frac{\pi^3 \tilde{L}^5}{48l_p^5} [1 - 2u_2 f_\infty + 3u_3 f_\infty^2] \quad (3.104)$$

ya los coeficientes “desplazados” de anomalía tipo - B son

$$\tilde{c}_1 = \frac{32\pi^3 \tilde{L}^5}{l_p^5} f_\infty [u_{2,1} - 6u_{3,1} f_\infty - 2u_{3,2} f_\infty + 6u_{3,3} f_\infty - 42u_{3,4} f_\infty + 8u_{3,0} f_\infty] \quad (3.105)$$

$$\tilde{c}_2 = -\frac{8\pi^3 \tilde{L}^5}{l_p^5} f_\infty [u_{2,1} - 10u_{3,1} f_\infty - 4u_{3,2} f_\infty + 6u_{3,3} f_\infty - 42u_{3,4} f_\infty + 8u_{3,0} f_\infty] \quad (3.106)$$

$$\tilde{c}_3 = \frac{8\pi^3 \tilde{L}^5}{l_p^5} f_\infty [u_{2,1} - 6u_{3,1} f_\infty - 3u_{3,2} f_\infty + 6u_{3,3} f_\infty - 42u_{3,4} f_\infty + 12u_{3,0} f_\infty]. \quad (3.107)$$

A nivel linealizado se expande f_∞ y $f_\infty^{-5/2}$ que se desprende de \tilde{L}^5 :

$$f_\infty \simeq 1 + \frac{3}{5} u_2 - \frac{1}{3} u_3 \quad (3.108)$$

$$a \simeq -\frac{\pi^3 \tilde{L}^5}{48l_p^5} \left[1 - \frac{7}{2} u_2 + \frac{7}{2} u_3 \right] \quad (3.109)$$

$$\tilde{c}_1 \simeq \frac{32\pi^3 \tilde{L}^5}{l_p^5} [u_{2,1} - 6u_{3,1} - 2u_{3,2} + 6u_{3,3} - 42u_{3,4} + 8u_{3,0}] \quad (3.110)$$

$$\tilde{c}_2 \simeq -\frac{8\pi^3 \tilde{L}^5}{l_p^5} [u_{2,1} - 10u_{3,1} - 4u_{3,2} + 6u_{3,3} - 42u_{3,4} + 8u_{3,0}] \quad (3.111)$$

$$\tilde{c}_3 \simeq \frac{8\pi^3 \tilde{L}^5}{l_p^5} [u_{2,1} - 6u_{3,1} - 3u_{3,2} + 6u_{3,3} - 42u_{3,4} + 12u_{3,0}] \quad (3.112)$$

resultados que nuevamente coinciden con los reportados en la literatura [20], [105], [97].

3.5.4.1. Caso particular: gravedad de Lovelock en 7D.

Ésta es descrita por la siguiente acción gravitacional:

$$S[\hat{g}] = \frac{-1}{2l_p^5} \int d^7x \sqrt{\hat{g}} \left\{ \frac{30}{L^2} + \hat{R} + \frac{\lambda L^2}{12} \hat{\chi}_4 - \frac{\mu L^4}{24} \hat{\chi}_6 \right\}. \quad (3.113)$$

en donde $\hat{\chi}_4 = \hat{R}^2 - 4\hat{R}_{ic}^2 + \hat{R}_{iem}^2$ es el término de Gauss - Bonnet y $\hat{\chi}_6$ es el invariante cúbico puramente algebraico correspondiente a la densidad de Euler en 6 - dimensiones

$$\hat{\chi}_6 = 4\hat{R}_{iem}^3 + 8\hat{R}_{iem}'^3 + 3\hat{R}\hat{R}_{iem}^2 - 24\hat{R}_{ic}\hat{R}_{iem}^2 + 24\hat{R}_{iem}\hat{R}_{ic}^2 + 16\hat{R}_{ic}^3 - 12\hat{R}\hat{R}_{ic}^2 + \hat{R}^3. \quad (3.114)$$

Al evaluar en la métrica PE/E 7 - dimensional y usando la tabla 3.4 para mostrar el aporte de cada término cúbico en curvatura muestra la siguiente ecuación para encontrar a f_∞ :

$$0 = 1 - f_\infty + \lambda f_\infty^2 + \mu f_\infty^3. \quad (3.115)$$

Reemplazando la raíz de esta ecuación y dejando a \tilde{L} se obtiene el siguiente integrando:

$$\begin{aligned} & \frac{-12 + 40\lambda f_\infty + 180\mu f_\infty^2}{\tilde{L}} \hat{1} + \frac{\lambda + 5\mu f_\infty}{12} f_\infty \tilde{L}^4 \hat{W}^{3'} \\ & - \frac{\lambda + 17\mu f_\infty}{48} f_\infty \tilde{L}^4 \hat{W}^3 + \frac{\lambda + 9\mu f_\infty}{48} f_\infty \tilde{L}^4 \hat{\Phi}_7. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Ya con ésto se hace sencillo leer las respectivas anomalías de Weyl

$$a = -\frac{\pi^3 \tilde{L}^5}{48l_p^5} \left[1 - \frac{10}{3} \lambda f_\infty - 15\mu f_\infty^2 \right] \quad (3.117)$$

$$\tilde{c}_1 = \frac{8\pi^3 \tilde{L}^5}{3l_p^5} f_\infty [\lambda + 5\mu f_\infty] \quad (3.118)$$

$$\tilde{c}_2 = -\frac{2\pi^3 \tilde{L}^5}{3l_p^5} f_\infty [\lambda + 17\mu f_\infty] \quad (3.119)$$

$$\tilde{c}_3 = \frac{2\pi^3 \tilde{L}^5}{3l_p^5} f_\infty [\lambda + 9\mu f_\infty], \quad (3.120)$$

todo ésto de acuerdo a lo reportado en [91].

3.5.5. Una gravedad cuártica en 7D.

Nuestro último ejemplo de una teoría gravitacional es (según describe [113])

$$S[\hat{g}] = \frac{-1}{2l_p^5} \int d^7x \sqrt{\hat{g}} \left\{ \frac{30}{L^2} + \hat{R} + \frac{\lambda L^2}{12} \hat{\chi}_4 - \frac{\mu L^4}{24} \hat{\chi}_6 + \frac{\nu L^6}{48} \hat{\mathcal{L}}^{(4)} \right\} \quad (3.121)$$

en donde

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}^{(4)} = & 128\hat{L}_1 + 304\hat{L}_2 + 164\hat{L}_4 - 112\hat{L}_6 - \frac{141}{2}\hat{L}_7 + 128\hat{L}_8 - 256\hat{L}_9 + 16\hat{L}_{12} - 192\hat{L}_{14} \\ & + 64\hat{L}_{15} + 128\hat{L}_{16} + \frac{612}{5}\hat{L}_{17} - \frac{61}{5}\hat{L}_{19} + \frac{64}{5}\hat{L}_{22} - \frac{1224}{25}\hat{L}_{23} - \frac{128}{5}\hat{L}_{24} + \frac{484}{25}\hat{L}_{25} - \frac{57}{50}\hat{L}_{26}. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Tabulamos aquí la contribución de los invariantes de cuarto orden en curvatura:

3.6: Tabla de términos cuárticos en 7D

	Invariante de curvatura	$\hat{1}/\tilde{L}^8$	\hat{W}'^3/\tilde{L}^4	\hat{W}^3/\tilde{L}^2	$\hat{\Phi}_7/\tilde{L}^2$
\hat{L}_1	$\hat{R}^{pqbs} \hat{R}_p^a{}^u \hat{R}_b^v{}^w \hat{R}_{uvsw}$	672	10	-1/2	3/2
\hat{L}_2	$\hat{R}^{pqbs} \hat{R}_p^a{}^u \hat{R}_a^v{}^w \hat{R}_{qvsw}$	1344	2	-5/2	3/2
\hat{L}_4	$\hat{R}^{pqbs} \hat{R}_{pq}^{au} \hat{R}_{ba}^{uw} \hat{R}_{suvw}$	168	12	-7	3
\hat{L}_6	$\hat{R}^{pqbs} \hat{R}_{pqb}^a \hat{R}_{suvw}$	1008	24	-6	6
\hat{L}_7	$(\hat{R}^{pqbs} \hat{R}_{pqbs})^2$	7056	168	-42	42
\hat{L}_8	$\hat{R}^{pq} \hat{R}^{bsau} \hat{R}_b^v{}^w \hat{R}_{auvq}$	1260	-3	9/4	-9/4
\hat{L}_9	$\hat{R}^{pq} \hat{R}^{bsau} \hat{R}_{bs}^v{}^w \hat{R}_{auvq}$	1008	36	-15	9
\hat{L}_{12}	$\hat{R} \hat{R}^{pqbs} \hat{R}_{pq}^{au} \hat{R}_{bsau}$	7056	252	-105	63
\hat{L}_{14}	$\hat{R}^{pq} \hat{R}^{bs} \hat{R}_p^a{}^u \hat{R}_{abus}$	9072	-	-	-
\hat{L}_{15}	$\hat{R}^{pq} \hat{R}^{bs} \hat{R}_{pb}^{au} \hat{R}_{auqs}$	3024	36	-9	9
\hat{L}_{16}	$\hat{R}^{pq} \hat{R}_p^b \hat{R}_{saub}$	3024	36	-9	9
\hat{L}_{17}	$\hat{R}^{pq} \hat{R}_{pq} \hat{R}_{bsau} \hat{R}_{bsau}$	21168	252	-63	63
\hat{L}_{19}	$\hat{R}^2 \hat{R}^{pqbs} \hat{R}_{pqbs}$	148176	1764	-441	441
\hat{L}_{22}	$\hat{R}^{pq} \hat{R}_p^b \hat{R}_q^s \hat{R}_{bs}$	9072	-	-	-
\hat{L}_{23}	$(\hat{R}^{pq} \hat{R}_{pq})^2$	63504	-	-	-
\hat{L}_{24}	$\hat{R} \hat{R}^{pq} \hat{R}_p^b \hat{R}_{qb}$	63504	-	-	-
\hat{L}_{25}	$\hat{R}^2 \hat{R}^{pq} \hat{R}_{pq}$	444528	-	-	-
\hat{L}_{26}	\hat{R}^4	3111696	-	-	-

Tabla elaborada por el autor

Al introducir el aporte de cada elemento de las respectivas tablas encontramos la ecuación polinomial para el radio renormalizado de AdS:

$$0 = 1 - f_\infty + \lambda f_\infty^2 + \mu f_\infty^3 + \nu f_\infty^4, \quad (3.123)$$

solución que al ser introducida en la acción y rastrear el término de volumen $\hat{1}$ nos permite leer la anomalía de tipo A

$$a = -\frac{\pi^3 \tilde{L}^5}{48l_p^5} \left[1 - \frac{10}{3} \lambda f_\infty - 15 \mu f_\infty^2 + 20 \nu f_\infty^3 \right] \quad (3.124)$$

y con los respectivos invariantes de Weyl, los términos desplazados de anomalía tipo - B:

$$\tilde{c}_1 = \frac{8\pi^3 \tilde{L}^5}{3l_p^5} f_\infty [\lambda + 5\mu f_\infty - 2\nu f_\infty^2] \quad (3.125)$$

$$\tilde{c}_2 = \frac{2\pi^3 \tilde{L}^5}{3l_p^5} f_\infty [\lambda + 17\mu f_\infty - 50\nu f_\infty^2] \quad (3.126)$$

$$\tilde{c}_3 = \frac{2\pi^3 \tilde{L}^5}{3l_p^5} f_\infty [\lambda + 9\mu f_\infty - 18\nu f_\infty^2] \quad (3.127)$$



Capítulo 4

Anomalía de traza de operadores GJMS

Los operadores conformalmente invariantes han sido motivo continuo de estudio tanto desde la física como en matemática desde el descubrimiento hecho por Cunningham [45] y Bateman [17] de la invariancia conforme de las ecuaciones de Maxwell a comienzos del siglo XX. También se agrega a esta lista el operador de Dirac luego de que Pauli haya mostrado la invariancia conforme de la ecuación de Dirac para campos sin masa en los años '40, [116]. El operador más simple que corresponde al Laplaciano conforme u operador de Yamabe es bien conocido por los matemáticos por su rol en el problema de Yamabe de preescribir el escalar de curvatura en una variedad Riemanniana [135].

En el inicio de la década del '80 fue encontrado por Paneitz [114] otro operador conformalmente invariante pero ahora de cuarto orden e independientemente por Eastwood y Singer [59], en relación con la fijación de gauge de las ecuaciones de Maxwell con respecto a la simetría conforme. Graham, Jenne, Mason y Sparling [76] mostraron que el operador Laplaciano conforme y el operador de Paneitz en realidad pertenecen a una familia de operadores diferenciales covariantes que además son conformes P_{2k} de orden $2k$ cuyo término dominante es la k -ésima potencia del operador laplaciano $-\nabla^2$, siempre y cuando la dimension d de la variedad sea par $d \geq 2k$. Estos *potencias conformes del operador Laplaciano* (desde ahora operadores GJMS) se obtuvieron usando la métrica ambiente de Fefferman - Graham [61], la principal herramienta para la construcción sistemática de invariantes conformes.

El objetivo de este capítulo será el chequear que nuestra receta holográfica para el cálculo de anomalías es extendible a nivel de campos libres usando ahora por herramienta el coeficiente del heat - kernel apropiado dependiendo de la dimensión en la que se estudia éste. De esta forma, encontraremos la anomalía en 4 - dimensiones usando un espacio de Einstein para tener con qué contrastar el resultado obtenido con nuestro método en 5 - dimensiones en la métrica PE/E. Luego repetiremos el mismo procedimiento en un espacio de Einstein 6 - dimensional con su respectivo cálculo holográfico en la métrica PE/E ahora en 7 - dimensiones.

4.1. Anomalía de traza de operadores GJMS desde espacios de Einstein

Como fue mencionado anteriormente, los operadores GJMS son operadores de alto orden en derivadas los que genéricamente pueden escribirse como potencias del operador laplaciano con correcciones haciendo que podamos escribirlos genéricamente por

$$P_{2k} = (-\nabla^2)^k + \text{términos de menor orden.} \quad (4.1)$$

Este hecho hace que estos operadores sean poco tratables en general ya que no existe expansión de heat kernel para operadores de orden arbitrario, sin embargo, éstos pueden factorizarse en espacios de Einstein y escribirse en términos de operadores Laplacianos desplazados

$$P_{2k} = \prod_{i=0}^{k-1} [-\nabla^2 + f_i(d)R] \quad (4.2)$$

de modo que para rastrear el coeficiente del heat kernel bastará con hacer la convolución de los operadores de heat kernel individuales y encontrar así el término que buscamos. El factor $f_i(d)$ dependerá de la dimensión a tratar y R corresponde al escalar de curvatura. Denotaremos así cada factor de la factorización de la forma $-\nabla^2 - E$, en donde E es un endomorfismo, del que se puede calcular directamente cada coeficiente del heat kernel al usar el espacio de Einstein.

4.1.1. GJMS en 4D: dos pájaros y un tiro.

En el caso 4 - dimensional y en un espacio de Einstein genérico, los operadores GJMS podrán factorizarse en el producto de Laplacianos

$$P_{2k} = \prod_{i=0}^{k-1} \left[-\nabla^2 + \frac{(2+i)(1-i)}{12} R \right]. \quad (4.3)$$

Entendemos que para encontrar la anomalía de traza en 4 - dimensiones es necesario rastrear el coeficiente b_4 de la expansión de heat kernel el que puede construirse con la expansión de cada factor que denotaremos por el índice “i”

$$1 + b_2^{(i)}t + b_4^{(i)}t^2 + \dots \quad (4.4)$$

Al considerar $E^{(i)} = -\frac{(2+i)(1-i)}{12} R$ se tiene que el coeficiente $b_4^{(i)}$ del i - ésimo factor que genera al operador P_{2k} es

$$b_4^{(i)} = \left(\frac{i^2(i+1)^2}{288} - \frac{1}{2160} \right) R^2 + \frac{1}{180} W^2 \quad (4.5)$$

y ahora sólo bastará con añadir cada una de las contribuciones para encontrar así el coeficiente b_4 del operador GJMS

$$\mathcal{A}_4[P_{2k}] = \sum_{i=0}^{k-1} b_4^{(i)} = \left(\frac{k^5}{240} - \frac{k^3}{144} \right) \frac{R^2}{6} + \frac{k}{180} W^2. \quad (4.6)$$

De aquí es sencillo visualizar que la anomalía de traza para los operadores GJMS es 4 - dimensiones puede identificarse simplemente observando qué acompaña a los invariantes Q - curvatura $\mathcal{Q}_4 = \frac{R^2}{24}$ y W^2 .

$$(4\pi)^2 \langle T \rangle = -aE_4 + cW^2 \quad (4.7)$$

$$= -4a\mathcal{Q}_4 + (c - a)W^2 \quad (4.8)$$

$$= -a\frac{R^2}{6} + (c - a)W^2 \quad (4.9)$$

así que basta con comparar y visualizar que los coeficientes a y c de la anomalía de Weyl en 4 - dimensiones para los operadores GJMS están dados por

$$a_k = \frac{k^3}{144} - \frac{k^5}{240} \quad (4.10)$$

$$c_k - a_k = \frac{k}{180}. \quad (4.11)$$

En este punto debemos remarcar dos cosas. La primera de ellas es que el coeficiente a_k es de orden cinco en “k” como fue calculado en [53] y corroborado mediante la regularización zeta en [56]. La segunda es que el coeficiente de la anomalía de traza $c_k - a_k$ es lineal en “k” y coincide con lo esperado [102] y [103], resultados obtenidos desde los espacios Ricci - flat.

4.1.2. GJMS en 6D: cuatro pájaros de un tiro

El procedimiento para el caso en 6D es similar al hecho previamente salvo que ahora el coeficiente a rastrear será b_6 . En el espacio de Einstein genérico en 6 - dimensiones la factorización de los operadores GJMS será

$$P_{2k} = \prod_{i=0}^{k-1} \left(-\nabla^2 + \frac{(3+i)(2-i)}{30} R \right). \quad (4.12)$$

El endomorfismo a considerar ahora será $E = -\frac{(3+i)(2-i)}{30} R$ y denotaremos por $c_i = \frac{(3+i)(2-i)}{30}$. El coeficiente de heat kernel que nos será relevante se obtiene de la convolución del heat kernel para el operador Laplaciano usual con el respectivo término asociado a c_i haciendo que el coeficiente para el factor i - ésimo sean

$$b_6^{(i)} = -\frac{c_i^3}{6} R^3 + \frac{c_i^2}{12} R^3 - c_i \left(\frac{1}{180} RRiem^2 - \frac{1}{180} RRic^2 + \frac{1}{72} R^3 \right) + \frac{1}{7!} \left(-3|\nabla Riem|^2 + \frac{44}{9} Riem^3 - \frac{80}{9} Riem^3 - \frac{16}{3} RicRiem^2 \right) \quad (4.13)$$

$$+ \frac{14}{3} RRiem^2 - \frac{8}{3} RiemRic^2 + \frac{8}{9} Ric^3 - \frac{14}{3} RRic^2 + \frac{35}{9} R^3 \Big). \quad (4.14)$$

En los espacios de Einstein hay muchas simplificaciones y el término de anomalía de tipo - A junto a los tres de anomalía tipo - B permanecen independientes. Consideramos entonces a este espacio de Einstein genérico de modo que los términos asociados al tensor de Ricci, Q - curvatura y otros se reduzcan únicamente a múltiplos de R^3 y los respectivos invariantes se reducen a $I_1 = W^3$, $I_2 = W^3$ mientras que el tercero de ellos lo hará a $I_3 = W\nabla^2 W - \frac{8}{15} RW^2$ salvo una derivada total $\frac{3}{2}\nabla^2 W^2$ que será omitida. La base de los invariantes para las anomalías se simplifica tremendamente ya que el tensor de Cotton, tensor de Bach y la parte sin traza del tensor de Ricci se anulan dejando sólo a los cuatro términos ya mencionados.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_6 &= -aE_6 + c_1 I_1 + c_2 I_2 + c_3 I_3 \\ &= -48a\mathcal{Q}_6 + (c_1 - 96a)I_1 + (c_2 - 24a)I_2 + (c_3 + 8a)I_3 \\ &= -16a\frac{R^3}{75} + (c_1 - 96a)I_1 + (c_2 - 24a)I_2 + (c_3 + 8a)I_3 \end{aligned} \quad (4.15)$$

En las siguientes tablas se muestran las contribución de cada término cúbico a los coeficientes de la anomalía:

Luego de introducir el aporte de cada uno de los términos mostrados en la tabla al coeficiente i - ésimo del heat kernel para sumar todos ellos encontramos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 7! \mathcal{A}_6[P_{2k}] &= 7! \sum_{i=0}^{k-1} b_6^{(i)} \quad (4.16) \\ &= -16 \left(\frac{-3k^7 + 21k^5 - 28k^3}{144} \right) \frac{R^3}{75} \\ &\quad + \frac{14(k^3 - k)}{9} (4I_1 - I_2 - I_3) - \frac{k}{9} (24I_1 - 30I_2 - 13I_3) \end{aligned}$$

Tabla 4.1: Tabla de invariantes cúbicos en 6D

	Invariante de curvatura	$\mathcal{Q}_6 = R^3/225$	I_1	I_2	I_3
A_{10}	R^3	225	–	–	–
A_{11}	$RRic^2$	$75/2$	–	–	–
A_{12}	$RRiem^2$	15	20	–5	–5
A_{13}	Ric^3	$25/4$	–	–	–
A_{14}	$Riem Ric^2$	$25/4$	–	–	–
A_{15}	$Ric Riem^2$	$5/2$	$10/3$	$-5/6$	$-5/6$
A_{16}	$Riem^3$	1	4	0	–1
A_{17}	$-Riem'^3$	1	–2	$1/4$	$1/4$
A_5	$ \nabla Riem ^2$	–	$-32/3$	$8/3$	$5/3$

Tabla elaborada por el autor

de donde se puede leer cada coeficiente de la anomalía mediante un sistema de ecuaciones simple

$$7!a_k = -\frac{3k^7 - 21k^5 + 28k^3}{144} \quad (4.17)$$

$$7!(c_{1,k} - 96a_k) = \frac{8}{9}k(7k^2 - 10) \quad (4.18)$$

$$7!(c_{2,k} - 24a_k) = -\frac{2}{9}k(7k^2 - 22) \quad (4.19)$$

$$7!(c_{3,k} + 8a_k) = -\frac{1}{9}k(14k^2 - 27). \quad (4.20)$$

El polinomio a_k corresponde al encontrado en la expresión genérica en [53] y corroborado mediante regularización zeta en [99].

4.2. Anomalía de traza de operadores GJMS mediante método holográfico

Ahora para realizar el cálculo usando nuestro método necesitamos conocer el dual gravitacional de los operadores GJMS, que no son más que campos escalares con masa bien definida en términos del orden del operador en el borde. Así, la relación holográfica entre las respectivas funciones de partición es

$$\frac{Z_{MS}^{(-)}}{Z_{MS}^{(+)}} \Big|_{PE} = Z_{GJMS} \Big|_E \quad (4.21)$$

donde la acción efectiva a 1 - loop estará dada por el determinante del campo escalar con masa $m_k^2 = -\frac{d^2}{4} + k^2$,

$$Z_{MS}^{(+)} \Big|_{PE} = \left[\det\{-\hat{\nabla}^2 + m_k^2\} \right]^{-1/2} \quad (4.22)$$

Ahora simplemente podemos usar la expansión del heat kernel del campo escalar sin masa (ver apéndice A) para recolectar los términos asociados y luego rastrear la contribución de cada uno de ellos a la anomalía de traza.

4.2.1. GJMS en 4D: dos pájaros de un tiro (holográfico)

Nuevamente ponemos énfasis en que lo importante es poder escribir los coeficientes del heat kernel para el campo escalar cuya masa será en este caso $m_k^2 = 1 - k^2$. Sin embargo, lo que sí conocemos bien es esta expansión del campo escalar cuya masa es nula

$$\begin{aligned} \text{Tre}^{\hat{\nabla}^2 t} \Big|_{PE} &= \frac{1}{(4\pi t)^{5/2}} \left\{ 1 - \frac{10}{3}t + \frac{16}{3}t^2 + \frac{1}{180}\hat{W}^2 t^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{16}{3}t^3 - \frac{1}{45}\hat{W}^2 t^2 - \frac{1}{7!} \left(\frac{80}{9}\hat{W}^{\prime 3} - \frac{44}{9}\hat{W}^3 + 3\hat{\Phi}_5 \right) t^3 + \mathcal{O}(t^4) \right\} \\ &= \frac{e^{-4t}}{(4\pi t)^{5/2}} \left\{ 1 + \frac{2}{3}t + \frac{1}{180}\hat{W}^2 t^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{7!} \left(\frac{80}{9}\hat{W}^{\prime 3} - \frac{44}{9}\hat{W}^3 + 3\hat{\Phi}_5 \right) t^3 + \mathcal{O}(t^4) \right\}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Al combinar ésto con el término de masa correspondiente se puede observar que los dos primeros términos corresponden a la expansión WKB exacta en AdS₅ la que para el campo escalar con masa $m_k^2 = k^2 - 4$

$$\text{Tre}^{\{\hat{\nabla}^2 - k^2 + 4\}t} \Big|_{\text{AdS}_5} = \frac{1 + \frac{2}{3}t}{(4\pi t)^{5/2}} e^{-k^2 t} \quad (4.24)$$

y ahora sólo nos resta encontrar la contribución de \hat{W}^2 . Podemos ver además que los términos restantes dependen todos del tensor de Weyl de modo que es necesario reescribir éstos y rastrear aquella contribución que nos interesa. En particular se encuentra que la parte Weyl - dependiente es

$$\hat{b}_4 \sim \frac{1}{180}\hat{W}^2 \quad (4.25)$$

y

$$\begin{aligned} \hat{b}_6 \sim \frac{1}{7!} &\left(-3|\hat{\nabla}\hat{Riem}|^2 + \frac{44}{9}\hat{Riem}^3 - \frac{80}{9}\hat{Riem}^{\prime 3} - \frac{16}{3}\hat{Ric}\hat{Riem}^2 \right. \\ &\left. + \frac{14}{3}\hat{R}\hat{Riem}^2 - \frac{8}{3}\hat{Riem}\hat{Ric}^2 + \frac{8}{9}\hat{Ric}^3 - \frac{14}{3}\hat{R}\hat{Ric}^2 + \frac{35}{9}\hat{R}^3 \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

el que puede reescribirse en términos de \hat{W}^2 y los invariantes cúbicos

$$\hat{b}_6 \sim -\frac{1}{45}\hat{W}^2 - \frac{1}{7!} \left(\frac{80}{9}\hat{W}^{\prime 3} - \frac{44}{9}\hat{W}^3 + 3\hat{\Phi}_5 \right). \quad (4.27)$$

De este último sólo nos interesa la contribución a \hat{W}^2 dado que los términos cúbicos, en el caso de la anomalía de traza 4 - dimensional, no contribuyen. Podemos decir incluso que esta expansión es WKB - exacta, es decir, el término de \hat{W}^2 del coeficiente \hat{b}_6 de la expansión puede absorberse en un único término común con la exponencial e^{-4t} viendo así que la expansión en la métrica PE nos entrega el siguiente lagrangeano efectivo a 1 - loop

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^{5/2}} e^{-k^2 t} \left\{ 1 + \frac{2}{3}t + \frac{1}{180}\hat{W}^2 t^2 + \dots \right\} \quad (4.28)$$

donde como mencionamos previamente, no hay contribución de las potencias más altas del tensor de Weyl al menos en 4D. Luego de integrar en el tiempo propio se obtiene el siguiente lagrangeano efectivo a 1 - loop (salvo un factor de normalización)

$$\mathcal{L}_{1-loop}^{(GJMS)} = \frac{4}{3} \left(\frac{k^5}{5} - \frac{k^3}{3} \right) \cdot \hat{1} + \frac{k}{180} \hat{W}^2 \quad (4.29)$$

y ahora sólo basta usar nuestra prescripción, encontrando que las anomalías de traza para estos operadores en 4D son

$$\mathcal{A}_4[P_{2k}] = - \left(\frac{k^3}{144} - \frac{k^5}{240} \right) \mathcal{Q}_4 + \frac{k}{180} \quad (4.30)$$

lo que está en perfecto acuerdo con lo mostrado en las ecuaciones (4.10) y (4.11).

4.2.2. GJMS en 6D: cuatro pájaros de un tiro (holográfico)

Para encontrar la anomalía de los operadores GJMS en 6 - dimensiones bastará con replicar el cálculo realizado en la sección previa teniendo en consideración algunas variantes: ahora la masa del dual gravitacional de los respectivos operadores es $m_k^2 = k^2 - 9$ y además debemos darle importancia a los invariantes cúbicos y a la respectiva contribución a los términos de anomalía.

El operador de heat - kernel para el campo escalar sin masa en 7D es ahora

$$\begin{aligned} \text{Tre}^{\hat{\nabla}^2 t} \Big|_{PE} &= \frac{1}{(4\pi t)^{7/2}} \left\{ 1 - 7t + \frac{707}{30} t^2 + \frac{1}{180} \hat{W}^2 t^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{501}{30} t^3 - \frac{1}{7!} \left(\frac{1916}{9} \hat{W}'^3 - \frac{503}{9} \hat{W}^3 + 54 \hat{\Phi}_7 \right) t^3 + \mathcal{O}(t^4) \right\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

En este punto separamos un término de \hat{W}^2 proveniente de los términos cúbicos (ver derivadas totales en apéndice A) y dejamos los términos cúbicos resultantes

$$\begin{aligned} \text{Tre}^{\hat{\nabla}^2 t} \Big|_{PE} &= \frac{1}{(4\pi t)^{7/2}} \left\{ 1 - 7t + \frac{707}{30} t^2 + \frac{1}{180} \hat{W}^2 t^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{501}{30} t^3 - \frac{1}{20} \hat{W}^2 + \frac{1}{7!} \left(\frac{352}{9} \hat{W}'^3 - \frac{64}{9} \hat{W}^3 + 9 \hat{\Phi}_7 \right) t^3 + \mathcal{O}(t^4) \right\} \\ &= \frac{e^{-9t}}{(4\pi t)^{7/2}} \left\{ 1 + 2t + \frac{16}{15} t^2 + \frac{1}{180} \hat{W}^2 t^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{7!} \left(\frac{352}{9} \hat{W}'^3 - \frac{64}{9} \hat{W}^3 + \hat{\Phi}_7 \right) t^3 + \mathcal{O}(t^4) \right\}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Podemos ver de esta última ecuación que el factor e^{-9t} absorbe al término $\frac{1}{20} \hat{W}^2$ cuyo origen está en el término \hat{b}_6 de la expansión, haciendo ahora el lagrangeano efectivo a 1 - loop de los operadores GJMS en la métrica PE sea

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t^{9/2}} e^{-k^2 t} \left\{ 1 + 2t + \frac{16}{15} t^2 + \frac{1}{180} \hat{W}^2 t^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{7!} \left(\frac{352}{9} \hat{W}'^3 - \frac{64}{9} \hat{W}^3 + 9 \hat{\Phi}_7 \right) t^3 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde nuevamente hacemos énfasis en que las potencias más altas en curvatura no contribuyen a la anomalía de traza 6D. Luego de la integración en el tiempo propio se encuentra la acción efectiva a 1 - loop

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1-loop}^{(GJMS)} &= \frac{8}{315} (-3k^7 + 21k^5 - 28k^3) \cdot \hat{1} \\ &- \frac{14k^3}{3 \cdot 7!} \cdot (4\hat{W}'^3 - \hat{W}^3 + \hat{\Phi}_7) + \frac{k}{9 \cdot 7!} \cdot (352\hat{W}'^3 - 64\hat{W}^3 + 81\hat{\Phi}_7). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Siguiente nuestra prescripción podemos leer fácilmente cuál es la anomalía de traza para los operadores GJMS

$$\begin{aligned} 7!\mathcal{A}_6[P_{2k}] &= -48 \cdot \frac{-3k^7 + 21k^5 - 28k^3}{144} \mathcal{Q}_6 \\ &- \frac{14}{3}(4I_1 - I_2 + \Phi_6) + \frac{k}{9}(352I_1 - 64I_2 + 71\Phi_6) \end{aligned} \quad (4.35)$$

evidenciando que están en acuerdo con lo calculado en la ecuaciones (4.17),(4.18), (4.19) y (4.20).



Capítulo 5

Anomalía de traza para campos de espín alto en 4D

En esta sección intentaremos hacer el cálculo holográfico de las anomalías de Weyl para los campos de espín alto que poseen simetría conforme, las que son teorías de gauge con un número infinito de tensores simétricos sin traza cuyo rango se extiende desde el 0 al infinito, en cualquier dimensión $d > 2$. El origen de éstas parte de las observaciones de que los lagrangeanos del fermión de espín 1/2 sin masa y del campo vectorial de espín 1 son conformalmente invariantes en $d = 4$. Esta propiedad no es compartida por los campos estándar sin masa de espín 3/2, 5/2 y de orden mayor pero dada la potencial importancia de la condición de invariancia conforme se busca un modelo alternativo para los campos de espín alto que sí la compartan. Al ceder con la unitariedad de la teoría se encuentra que existen campos conformes de derivadas altas como el *gravitón de Weyl* y el *gravitino conforme* [22, 93]. Los campos de espín alto conformes (CHS desde ahora) son generalizaciones de éstos pero con espín mayor $s > 2$ [66].

Las teorías CHS describen campos “puros” de espín alto a través de una acción local con invariancia de gauge maximal las que además, debido a requerimientos de localidad, son de derivadas altas y cuyo término cinético son de la forma $D_s = \partial^{2s} P_s$ en donde P_s es el proyector (transverso y sin traza) de espín s .

La acción efectiva a 1 - loop en general no será invariante de Weyl de modo que habrá anomalía de Weyl no - trivial para éstos, hecho bien conocido para los ejemplos clásicos: fermión sin masa, campo de Maxwell, gravitón de Weyl y gravitino conforme [38, 43, 44, 63, 64, 130].

Por otra parte el requerimiento clave es la preservación de todas las simetrías de gauge, incluyendo la conforme, lo que conlleva a la cancelación de todas las anomalías de Weyl [66].

5.1. Cálculo de anomalías en el borde 4D.

Antes de adentrarnos en el cálculo de las anomalías mediante nuestro método holográfico haremos una re - derivación de éstas en base a la factorización del operador cinético de los CHS en espacios de Einstein [132]. Ésto nos permitirá validar los resultados generales obtenidos para los coeficientes del heat kernel en el Apéndice B.

El coeficiente de heat kernel, en general, no está disponible para el operador cinético de los CHS pero fue obtenido asumiendo que éste factoriza en espacios de Einstein como extensión a lo notado para el gravitón de Weyl. En particular, en espacios Ricci - flat se conoce el siguiente ansatz en términos del laplaciano de Lichnerowicz actuando en tensores totalmente simétricos y sin traza

$$Z_{\text{CHS}} \Big|_{\text{Ricci-flat}} = \left[\frac{(\det_T \{-\nabla_{s-1}^2 - (s-1)(s-2)W\})^{s+1}}{(\det_T \{-\nabla_s^2 - s(s-1)W\})^s} \right]^{1/2} \quad (5.1)$$

La contribución de cada laplaciano de Lichnerowicz al término cuadrático de Weyl en el coeficiente b_4 del heat kernel, cuyo coeficiente numérico denotaremos por β , tiene contribución de tres partes para el campo no restringido

$$\begin{aligned} b_4^{(s)} &\sim \frac{1}{180} \text{tr}_V \{I_s\} W^2 + \frac{1}{12} \text{tr}_V \{\Omega_s^2\} + \frac{1}{2} \text{tr}_V \{E_s^2\} \\ &\sim \beta_s W^2 = \frac{1}{180} \binom{s+3}{3} W^2 - \frac{1}{12} \binom{s+4}{5} W^2 + \frac{3}{2} \binom{s+5}{7} W^2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

en donde se ha usado el resultado general desarrollado en el Apéndice B para las trazas mencionadas. Ahora para obtener la parte de tensores simétricas y sin traza que entra en el ansatz hemos de sustraer la traza

$$\beta_s^T = \beta_s - \beta_{s-2} = \frac{(s+1)^2}{720} (3s^4 + 12s^3 - 2s^2 - 28s + 4) \quad (5.3)$$

y finalmente, el coeficiente que acompaña al término de W^2 estará dado por s contribuciones de espín s sin traza al que se le deben quitar $s+1$ términos de espín $s-1$

$$\begin{aligned} \beta_s^{CHS} &= s \cdot \beta_s^T - (s+1) \cdot \beta_{s-1}^T \\ &= \frac{s(s+1)}{720} (15s^4 + 30s^3 - 30s^2 - 45s + 4). \end{aligned} \quad (5.4)$$

De esta forma, luego de asumir la factorización en espacios de Einstein 4D, la anomalía de tipo - B para los CHS estará dada por la relación

$$c_s - a_s = \frac{\nu_s (15\nu_s^2 - 45\nu_s + 4)}{720} \quad (5.5)$$

en donde $\nu_s = s(s+1)$ corresponde al número de grados de libertad dinámicos de los campos CHS.

5.2. Cálculo de anomalía mediante holografía en 5D.

Nuestro objetivo ahora es calcular la anomalía de traza para los campos conformes de espín alto (CHS) en 4 - dimensiones haciendo uso de nuestra receta holográfica. Estos campos tendrán por dual gravitacional (en 5 - dimensiones) a campos de espín alto con masa (MHS) más conocidos como campos de Fronsdal. En [71] fue considerada por primera vez esta relación considerando los campos de Fronsdal en el bulk AdS_5 mientras que los campos CHS están en el borde S_4

$$\left. \frac{\mathcal{Z}_{MHS}^-}{\mathcal{Z}_{MHS}^+} \right|_{AdS_5} = \mathcal{Z}_{CHS} \Big|_{S^4} \quad (5.6)$$

Dado que nuestro interés es la anomalía conforme, hacemos mención que la anomalía de tipo - A para los campos CHS en 4D fue encontrada correctamente usando métodos holográficos. En AdS el volumen factorizado y la anomalía holográfica están dadas por la anomalía de volumen por la acción efectiva a 1 - loop de los campos MHS, hecho ya conocido en [36], [37]. En términos de la

cantidad de grados de libertad dinámicos de los campos de gauge CHS $\nu_s = s(s+1)$, anomalía de tipo - A puede resumirse en el siguiente polinomio cúbico

$$a_s = \frac{\nu_s^2(14\nu_s + 3)}{720}. \quad (5.7)$$

Este mismo resultado fue logrado en un cálculo vía heat kernel en el borde S^4 [132] explotando la factorización del término cinético de los CHS (de derivadas altas) en producto de laplacianos. El término relevante del heat kernel de cada factor es b_4 y la contribución total es acorde a lo reportado al cálculo holográfico. Más aún, al asumir que el término cinético de los CHS factoriza en espacios Ricci - flat, influenciado por lo conocido para el gravitón de Weyl, se nos permite calcular la anomalía de tipo - B

$$c_s - a_s = \frac{\nu_s(15\nu_s^2 - 45\nu_s + 4)}{720} \quad (5.8)$$

resultado que no tiene una contraparte holográfica. De hecho, la anomalía de tipo - B no se ha llevado a cabo de forma holográfica en todos los trabajos ya mencionados.

Mostraremos explícitamente el cálculo para los campos de espín $s = 1$ y $s = 2$ para posteriormente mostrar que, asumiendo un acople tipo Lichnerowicz para el dual gravitacional, se obtendrán los términos de anomalía ya reportados.

5.2.1. Campo de Maxwell

Comenzaremos mostrando el detalle del cálculo holográfico para el campo de Maxwell correspondiente a $s = 1$. La fórmula holográfica para este campo es

$$\left. \frac{\mathcal{Z}_1^{(-)}}{\mathcal{Z}_1^{(+)}} \right|_{PE} = \mathcal{Z}_{Maxwell}|_E \quad (5.9)$$

en donde la acción efectiva a 1 - loop está dada por la razón de determinantes funcionales del campo físico y los fantasmas correspondientes

$$\mathcal{Z}_1|_{PE} = \left[\frac{\det(-\hat{\nabla}_0^2)}{\det_{\perp}(-\hat{\nabla}_1^2 - 4)} \right]^{1/2}. \quad (5.10)$$

Calculamos así el determinante del logaritmo del operador con la ayuda del heat kernel diagonalizado. Mostraremos la expansión WKB - exacta del heat kernel reportada en [36], [37] para el término de espín 0 y el término de espín 1 en AdS_5

$$s = 0: \quad \text{tr} e^{\{\hat{\nabla}_0^2\}t} \Big|_{AdS_5} = \frac{(1 + \frac{2}{3}t)}{(4\pi t)^{5/2}} e^{-4t} \quad (5.11)$$

$$s = 1: \quad \text{tr}_{\perp} e^{\{\hat{\nabla}_1^2 + 4\}t} \Big|_{AdS_5} = \frac{4(1 + \frac{8}{3}t)}{(4\pi t)^{5/2}} e^{-t} \quad (5.12)$$

Esta información nos permite calcular directamente la anomalía de tipo - A pero, dado que este espacio es conformalmente plano, la información de la anomalía de tipo - B permanece inaccesible debido a que el tensor de Weyl es nulo. Consideramos entonces la métrica PE con tensor de Weyl no nulo. Todos los términos ligados al tensor de Ricci entregarán la misma respuesta que en AdS la que ya conocemos haciendo que la información relevante para la anomalía de tipo - B asociada al tensor de Weyl de este espacio motiva a que hagamos un rastreo del cuadrado del tensor de Weyl.

El coeficiente del heat kernel de espín 0 que involucran términos cuadráticos en el tensor de Weyl es el tercer término $\hat{b}_4^{(0)}$ y está universalmente dado por

$$\hat{b}_4^{(0)} \sim \frac{1}{180} \hat{W}^2. \quad (5.13)$$

El caso de espín 1 requiere más cuidado debido a que los coeficientes estándar de la expansión del heat kernel están dados para campos no restringidos, y para nuestro caso, necesitamos extraer la parte transversa. El coeficiente para los campos no restringidos de espín 1 $b_4^{(1)}$ contiene dos términos que involucran a \hat{W}^2 : un campo escalar por cada grado de libertad (5 en 5 - dimensiones) y una contribución de la curvatura $\hat{\Omega}_1$ de la conexión de espín para el campo vectorial (ver apéndice B).

$$\hat{b}_4^{(1)} \sim tr_V \{I_V\} \frac{1}{180} \hat{W}^2 + \frac{1}{12} tr_V \{\hat{\Omega}_1^2\} = \frac{5}{180} \hat{W}^2 - \frac{1}{12} \hat{W}^2 = -\frac{1}{18} \hat{W}^2. \quad (5.14)$$

Conocido esto calculamos el coeficiente del heat kernel para el campo de espín 1 transverso en 5 - dimensiones quitando el modo longitudinal

$$s = 1 : \quad \hat{b}_4^{(1,\perp)} \sim -\frac{11}{180} \hat{W}^2. \quad (5.15)$$

Se puede chequear que el siguiente coeficiente $\hat{b}_6^{(1)}$ contiene una parte puramente Ricci que es capturada por la expansión de la exponencial e^{-4t} haciendo que la expansión del heat kernel en AdS₅ tenga únicamente dos términos. La misma observación ocurre con el término \hat{W}^2 en la métrica PE; el cuarto término de la expansión $\hat{b}_6^{(1)}$ coincide con la convolución del término $\hat{b}_4^{(1)}$ y la exponencial e^{-4t} . Los otros términos de la expansión contienen otros invariantes de Weyl de orden superior y/o con derivadas de éste, los que según nuestra prescripción, no contribuyen a la anomalía de tipo - B. Al introducir estos ingredientes (heat kernel del campo de $s = 1$ transverso y fantasma) en (5.10) nos permite calcular el lagrangeano efectivo a 1-loop

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^{7/2}} \left\{ e^{-t} \left[4 + \frac{32}{3} t - \frac{11}{180} t^2 \hat{W}^2 + \dots \right] - e^{-4t} \left[1 + \frac{2}{3} t + \frac{1}{180} \hat{W}^2 + \dots \right] \right\} \quad (5.16)$$

el que luego de la integración en el tiempo propio, hecho que introduce funciones $\Gamma(z)$, hace que el lagrangeano efectivo a 1 - loop (salvo un factor común) sea

$$\mathcal{L}_{1-loop}^{(s=1)} = -16 \frac{31}{45} \hat{1} - \frac{13}{180} \hat{W}^2 + \dots \quad (5.17)$$

Siguiendo nuestra prescripción y lo mostrado en la tabla 3.1, esto está directamente relacionado a las anomalías del campo de Maxwell en 4D. El término de volumen se conecta a la Q - curvatura y el término \hat{W}^2 se vincula al tensor W^2 , ambas cantidades en 4 - dimensiones

$$\mathcal{A}_4[\text{Maxwell}] = -4 \cdot \frac{31}{180} \mathcal{Q}_4 - \frac{13}{180} W^2 \quad (5.18)$$

mostrando así que los términos de la anomalía para el campo de Maxwell 4D están dados por

$$a_1 = \frac{31}{180} \quad y \quad c_1 - a_1 = -\frac{13}{180} \quad (5.19)$$

estando acorde con lo reportado en [38] y [33].

5.2.2. Gravitón de Weyl

Ahora pondremos nuestra atención al campo de espín 2 que corresponde al gravitón conforme. Éste, a diferencia del campo de espín 1, cumple que además de ser transverso éste no tiene traza. La fórmula holográfica para el campo de espín 2 es

$$\left. \frac{\mathcal{Z}_2^{(-)}}{\mathcal{Z}_2^{(+)}} \right|_{PE} = \mathcal{Z}_{Weyl}|_E \quad (5.20)$$

en donde la acción efectiva a 1 - loop está ahora dada por la razón entre determinantes del campo físico y su correspondiente fantasma

$$\mathcal{Z}_2|_{PE} = \left[\frac{\det_{\perp} \{-\hat{\nabla}_1^2 + 4\}}{\det_{\perp T} \{-\hat{\nabla}_2^2 - 2 - 2\hat{W}\}} \right]^{1/2} \quad (5.21)$$

La expansión WKB exacta para el heat kernel de espín $s = 2$ está dada por [36,37]

$$s = 1: \quad \text{tr}_{\perp} e^{\{\hat{\nabla}_1^2 - 4\}t} \Big|_{AdS_5} = \frac{4(1 + \frac{8}{3}t)}{(4\pi t)^{5/2}} e^{-9t} \quad (5.22)$$

$$s = 2: \quad \text{tr}_{\perp T} e^{\{\hat{\nabla}_2^2 + 2\}t} \Big|_{AdS_5} = \frac{9(1 + 6t)}{(4\pi t)^{5/2}} e^{-4t}. \quad (5.23)$$

Fue mostrado en la sección anterior que el contenido de \hat{W}^2 del vector transverso ($s = 1$) es

$$s = 1 \quad \hat{b}_4^{(1,\perp)} \sim -\frac{11}{180} \hat{W}^2. \quad (5.24)$$

mientras que el coeficiente $\hat{b}_4^{(2)}$ del heat kernel para el campo de espín 2 no restringido contiene tres contribuciones de \hat{W}^2 : lo mismo que un campo escalar por cada grado de libertad ($5 \times 6/2 = 15$ en 5D), una contribución de la curvatura $\hat{\Omega}_2$ de la conexión de espín del campo tensorial y una contribución del endomorfismo (el acople de Lichnerowicz $\hat{E}_2 = -2\hat{W}$) (ver apéndice B)

$$\begin{aligned} \hat{b}_4^{(2)} &\sim \text{tr}_V \{I_2\} \times \frac{1}{180} \hat{W}^2 + \frac{1}{12} \text{tr} \{\hat{\Omega}_2^2\} + \frac{1}{2} \text{tr}_V \{\hat{E}_2^2\} \\ &= \frac{15}{180} \hat{W}^2 - \frac{7}{12} \hat{W}^2 + \frac{3}{2} \hat{W}^2 = \hat{W}^2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Con ésto ahora sólo debemos quitar la parte transversa (espín 1) y la traza (espín 0)

$$\hat{b}_4^{(2,\perp T)} = \hat{b}_4^{(2)} - \hat{b}_4^{(1)} - \hat{b}_4^{(0)} \sim \hat{W}^2 - \left(-\frac{1}{18} \hat{W}^2 \right) - \frac{1}{180} \hat{W}^2 \quad (5.26)$$

haciendo que el aporte a \hat{W}^2 para la parte transversa y sin traza de espín 2 sea

$$\hat{b}_4^{(2,\perp T)} \sim \frac{21}{20} \hat{W}^2. \quad (5.27)$$

Con estos elementos calculamos el lagrangeano a 1 - loop como el cuociente entre los determinantes del campo físico y su fantasma en la métrica PE

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^{7/2}} \left\{ e^{-4t} \left[9 + 54t + \frac{21}{20} t^2 \hat{W}^2 + \dots \right] - e^{-9t} \left[4 + \frac{32}{3} t - \frac{11}{180} \hat{W}^2 + \dots \right] \right\} \quad (5.28)$$

Nuevamente recordamos que los términos de mayor orden en la curvatura (\hat{W}^3 y superiores) no contribuyen a la anomalía de traza en 4D por lo que luego de integrar con la introducción de las respectivas funciones $\Gamma(z)$ nos permite hallar el lagrangeano efectivo a 1 - loop (salvo un factor común)

$$\mathcal{L}_{1-loop}^{(s=2)} = -16 \cdot \frac{87}{5} \hat{1} + \frac{137}{60} \hat{W}^2 + \dots \quad (5.29)$$

el que luego de seguir la prescripción nos entrega por resultado la anomalía de traza para el gravitón de Weyl en 4D

$$\mathcal{A}_4[Weyl] = -4 \cdot \frac{87}{20} \mathcal{Q}_4 + \frac{137}{60} W^2 \quad (5.30)$$

y correspondientemente los coeficientes de la anomalía en acuerdo a lo mostrado en [63–66]

$$a_2 = \frac{87}{20} \quad y \quad c_2 - a_2 = \frac{137}{60}. \quad (5.31)$$

5.2.3. Generalización

Pongamos atención ahora a los campos de espín alto y su correspondiente dual gravitacional

$$\frac{\mathcal{Z}_{MHS}^{(-)}}{\mathcal{Z}_{MHS}^{(+)}|_{PE}} = \mathcal{Z}_{CHS}|_E \quad (5.32)$$

en donde la acción efectiva a 1 - loop está dada por la razón entre los determinantes del campo físico y su fantasma

$$\mathcal{Z}_{MHS}|_{PE} = \left[\frac{\det_{\perp T} \left\{ -\hat{\nabla}_{s-1}^2 + (s-1)(s+2) - (s-1)(s-2)\hat{W} \right\}}{\det_{\perp T} \left\{ -\hat{\nabla}_s^2 - s + (s-2)(s+2) - s(s-1)\hat{W} \right\}} \right]^{1/2}. \quad (5.33)$$

La expansión WKB exacta del heat kernel en AdS_5 [36], [37] para el campo físico de espín s y su fantasma son, respectivamente

$$\begin{aligned} \text{espín } s-1 : \quad & tr_{\perp T} e^{\{\hat{\nabla}_{s-1}^2 - (s-1)(s+2)\}t} \Big|_{AdS_5} = \frac{s^2(1+\frac{2}{3}s^2t)}{(4\pi t)^{5/2}} e^{-(s+1)^2t} \\ \text{espín } s : \quad & tr_{\perp T} e^{\{\hat{\nabla}_s^2 + s - (s-2)(s+2)\}t} \Big|_{AdS_5} = \frac{(s+1)^2(1+\frac{2}{3}(s+1)^2t)}{(4\pi t)^{5/2}} e^{-s^2t} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Ahora determinaremos la contribución al término cuadrático de Weyl con la ayuda del coeficiente de heat kernel para el campo tensorial totalmente simétrico no restringido de rango s en 5D

$$\hat{b}_4^{(s)} \sim \frac{1}{180} tr_v \{I_s\} \hat{W}^2 + \frac{1}{12} tr_v \{\hat{\Omega}_s^2\} + \frac{1}{2} tr_v \{\hat{E}_s^2\} \quad (5.35)$$

$$\sim \hat{\beta}_s \hat{W}^2 = \frac{1}{180} \binom{s+4}{4} \hat{W}^2 - \frac{1}{12} \binom{s+5}{6} \hat{W}^2 + \frac{3}{2} \binom{s+6}{8} \hat{W}^2$$

Con esta información ahora podemos calcular la componente transversa y sin traza por lo que debemos quitar la parte longitudinal y su traza

$$\hat{b}_4^{(s,\perp T)} \sim \hat{b}_4^{(s)} - \hat{b}_4^{(s-1)} - \hat{b}_4^{(s-2)} + \hat{b}_4^{(s-3)} \quad (5.36)$$

obteniendo así que la parte transversa y sin traza 5D de espín s tiene el mismo factor numérico que la parte transversa de espín s en 4 dimensiones ¹

$$\text{espín } s: \quad \hat{b}_4^{(s,\perp T)} \sim \hat{\beta}_s^{\perp T} \hat{W}^2 = \frac{(s+1)^2}{720} (3s^4 + 12s^3 - 2s^2 - 28s + 4) \hat{W}^2.$$

De esta forma, al asumir que la expansión en la métrica PE es WKB exacta, podemos calcular el lagrangeano efectivo a 1 - loop que corresponde al cuociente entre los determinantes del campo físico y su respectivo fantasma

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^{7/2}} \left\{ e^{-s^2 t} \left[(s+1)^2 + \frac{2}{3}(s+1)^4 t + \hat{\beta}_s^{\perp T} \hat{W}^2 t^2 + \dots \right] - e^{-(s+1)^2 t} \left[s^2 + \frac{2}{3}s^4 t + \hat{\beta}_{s-1}^{\perp T} \hat{W}^2 t^2 + \dots \right] \right\}. \quad (5.37)$$

Luego de la integración en el tiempo propio encontramos el lagrangeano efectivo a 1 - loop

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1\text{-loop}}^{(\text{CHS})} &= -16 \cdot \frac{s^2(s+1)^2(14s^2 + 14s + 3)}{180} \cdot \hat{1} + \left[s \cdot \hat{\beta}_s^{\perp T} - (s+1) \cdot \hat{\beta}_{s-1}^{\perp T} \right] \cdot \hat{W}^2 + \dots \quad (5.38) \\ &= -16 \cdot \frac{s^2(s+1)^2(14s^2 + 14s + 3)}{180} \cdot \hat{1} \\ &\quad + \frac{s(s+1)(15s^4 + 30s^3 - 30s^2 - 45s + 4)}{720} \cdot \hat{W}^2 + \dots \end{aligned}$$

Al usar nuestra prescripción relacionamos con los elementos de la anomalía de traza en 4D

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4[\text{CHS}] &= -4 \cdot \frac{s^2(s+1)^2(14s^2 + 14s + 3)}{720} \cdot \mathcal{Q}_4 \quad (5.39) \\ &\quad + \frac{s(s+1)(15s^4 + 30s^3 - 30s^2 - 45s + 4)}{720} \cdot W^2 \end{aligned}$$

y en donde explícitamente las anomalías de tipo - A y tipo - B estarán dadas por (con $\nu_s = s(s+1)$)

$$a_s = \frac{\nu_s^2(14\nu_s + 3)}{720} \quad \text{and} \quad c_s - a_s = \frac{\nu_s(15\nu_s^2 - 45\nu_s + 4)}{720} \quad (5.40)$$

resultados que están de acuerdo a lo reportado en [131].

¹Más aún y para nuestra sorpresa, notamos que la igualdad entre los coeficientes $\hat{\beta}_s^{\perp T}$ y β_s^T para los campos de espín alto transversos y sin traza en 5D y sin traza en 4D se mantiene para cada uno de los términos del coeficiente de heat kernel de modo independiente: $tr_V\{I\}$, $tr_V\{\Omega^2\}$ y $tr_V\{E^2\}$.

Capítulo 6

Misceláneos

6.1. Entropías de entrelazamiento y entropías de Rényi.

El fenómeno de entrelazamiento cuántico es de particular interés dado que establece correlación entre dos sistemas separados siendo un fenómeno no replicable en física clásica. En el contexto de teoría cuántica de campos, el entrelazamiento cuántico y su correspondiente entropía tiene conexión con la ley de entropías de agujeros negros de Bekenstein y Hawking [21], [83]. En el caso de teorías conformes comenzando por el bosón libre, Srednicki [129] mostró que incluso en el caso de espacio - tiempo planos, la entropía de entrelazamiento sobre una superficie esférica es proporcional a su área pero que el coeficiente no es universal debido a que depende de un cut-off ultravioleta. Este coeficiente es un término genérico para el caso de las CFTs. Nuestro interés está en las contribuciones universales de las entropías de entrelazamiento y Rényi para campos conformes que son libres. En dimensión par d , estos términos universales aparecen en correcciones logarítmicas del cut - off ultravioleta

$$S_{EE} = \frac{g_{d-2}}{\epsilon^{d-2}} + \dots \frac{g_2}{\epsilon^2} + g_0 \log \epsilon + \dots \quad (6.1)$$

y esta corrección parece estar conectada con la anomalía de traza de tipo - A. La primera muestra de este hecho ocurre para CFTs 2 - dimensionales. En este caso, la entropía de entrelazamiento de un intervalo está dada por [87]

$$S_{EE} = -\frac{c}{3} \log \epsilon \quad (6.2)$$

siendo c el coeficiente de la carga central. Esta estructura se mantiene en el caso de superficies de entrelazamiento esféricas al cambiar c por el coeficiente a de la anomalía de traza de tipo - A, habiendo algunos ejemplos [40, 48, 54, 55, 100] para el campo escalar sin masa además de argumentos generales que respaldan esta conexión [122], [108].

Por otra parte, las entropías de Rényi son una generalización de la medida de von Neumann de la entropía y tiene su aparición en el contexto de la teoría cuántica de campos como una herramienta auxiliar para el cálculo de las entropías de entrelazamiento (en el valor límite $q = 1$). El parámetro q entra en los cálculos de Casini y Huerta como la longitud del círculo de temperatura. Solodukhin [128] introduce q como un defecto cónico en el horizonte de un agujero negro y Hung y compañía [89] relacionan q con la temperatura de un agujero topológico en el bulk.

En el caso de CFTs 2 -dimensionales, la entropía de Rényi en un intervalo es [35]

$$S_q = -\frac{c}{6} \left(1 + \frac{1}{q}\right) \log \epsilon. \quad (6.3)$$

donde c nuevamente representa a la carga central. En el caso de campos libres conformes y superficies de entrelazamiento esféricas en dimensiones pares, el término que acompaña al tér-

mino logarítmico es un polinomio con dependencia en q^{-1} que en el límite $q \rightarrow 1$ se reduce al coeficiente de anomalía de tipo - A (por ejemplo [98]).

6.1.1. Entropías de Rényi vía métodos holográficos.

La idea principal en este análisis se relaciona al cálculo de entropías de entrelazamiento de campos escalares sin masa en espacio planos luego de mapear este sistema a otro de escalares conformes libres a temperatura “ 2π ” en la geometría $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^{d-1}$. Ésto fue logrado en [40], más elaborado [41] en y desarrollado en [88, 89, 96] permitiéndonos encontrar las entropías de Rényi usando este mismo mapeo.

Para calcular la entropía de entrelazamiento (o Rényi a su vez) calcularemos el determinante a 1 - loop siguiendo la prescripción ya antes mencionada en esta tesis

$$\frac{\det_- \{-\nabla_x^2 + m^2\}}{\det_- \{-\nabla_x^2 + m^2\}} = \det S_M \quad (6.4)$$

siendo $M = \partial X$. En el caso de los operadores GJMS, la dimensión conforme es $\lambda = d/2 + k$ y su dual gravitacional tiene masa $m_k^2 = -d^2/4 + k^2$. De esta forma y luego de configurar la geometría del bulk, podremos calcular la entropía térmica de los operadores GJMS en su dual gravitacional.

Para calcular la entropía de Rényi S_q basta con calcular la función de partición térmica $Z(\beta = 2\pi q)$ y usarla en la siguiente expresión

$$S_q = \frac{\log Z(2\pi q) - q \log Z(2\pi)}{1 - q}. \quad (6.5)$$

El bulk a considerar será descrito por el elemento de línea $ds_{\mathbb{H}_*^{d+1}}^2 = d\mu^2 + \sinh^2 \mu d\tau^2 + \cosh^2 \mu ds_{\mathbb{H}^{d-1}}^2$ que corresponde a \mathbb{H}^{d+1} con una singularidad cónica en el círculo de temperatura que corresponde a la identificación $\tau \sim \tau + 2\pi q$. Notar que cuando $q \rightarrow 1$ se obtiene el círculo sin singularidad y cuya temperatura es “ 2π ”. Se ve además, que en el infinito conforme $\mu \rightarrow \infty$ la geometría del borde corresponde a $S^1 \times \mathbb{H}^{d-1}$. El determinante del operador puede ser obtenido a través del heat kernel en esta geometría con singularidad cónica usando la fórmula de Sommerfeld [69]

$$\mathcal{K}^*(\mu, \tau - \tau'; t) = \mathcal{K}(\mu, \tau - \tau'; t) - \frac{i}{4\pi q} \int_c dw \cot\left(\frac{w}{2q}\right) \mathcal{K}^*(\mu, \tau - \tau' + w; t) \quad (6.6)$$

en donde el contorno de integración el plano de w consiste en dos líneas verticales $(-\pi + i\infty, -\pi - i\infty)$ y $(\pi - i\infty, \pi + i\infty)$. La integral de volumen está asociada al término logarítmico en la sección hiperbólica \mathbb{H}^{d-1} y el coeficiente universal está dado esencialmente el residuo. Mostraremos al detalle el caso 2 - dimensional y 4 - dimensional para los operadores GJMS.

Caso $d = 2$

En este caso el operador de heat kernel para el campo escalar es

$$\mathcal{K}_3(\sigma; t) = \frac{e^{-t}}{2\pi} \left(-\frac{\partial}{\partial \cosh \sigma} \right) \frac{e^{-\frac{\sigma^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \quad (6.7)$$

el que depende sólo del tiempo propio t y de la distancia geodésica σ entre los puntos imágenes. La versión hiperbólica de la relación entre longitud de arco y distancia geodésica en la 2 - esfera es

$$\sinh \frac{\sigma}{2} = \sin \frac{w}{2} \sinh \mu \quad (6.8)$$

en donde w es la separación angular a lo largo de τ . Recordar que estamos estudiando el dual gravitacional de los operadores GJMS que corresponden a campos escalares con masa $m_k^2 = -d^2/4 + k^2$ afectando al factor exponencial del heat kernel y entregando por resultado

$$\mathcal{K}_3(\sigma; t) = \frac{e^{-k^2 t}}{2\pi} \left(-\frac{\partial}{\partial \cosh \sigma} \right) \frac{e^{-\frac{\sigma^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}. \quad (6.9)$$

La integral de volumen del primer término en (6.6) factoriza el volumen de modo que depende linealmente de q , y en efecto, no contribuye a la entropía de Rényi. La dependencia no trivial en q viene de la integral de contorno de la misma ecuación

$$\text{Tr} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \mathcal{K}_3^*(\sigma; t) = \frac{\text{vol}(\mathbb{H}^1)}{2i} \int_C dw \cot \left(\frac{w}{2q} \right) \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int_0^\infty d\mu \sinh \mu \cosh \mu \mathcal{K}_3(\sigma; t). \quad (6.10)$$

Luego del cambio de variables en la integral de volumen desde μ a σ , la única contribución en la integral de contorno es el factor $1/\sin^2 w/2$. Aparte de los factores numéricos obtenidos de la integral en el tiempo propio (como factores $\Gamma(z)$), la dependencia en la variable q de la entropía de Rényi se obtiene luego de calcular el residuo

$$\text{Res} \left\{ k \frac{\cot \frac{w}{2q}}{\sin^2 \frac{w}{2}}, w=0 \right\} \sim k \left(\frac{1}{q} - q \right). \quad (6.11)$$

Finalmente, el cociente (6.6) lleva al término univesal de las entropías de Rényi para CFTs en 2 - dimensiones

$$g_0^q = -k \frac{1+q}{6q}. \quad (6.12)$$

Luego de considerar el límite $q \rightarrow 1$ se encuentra la entropía de entrelazamiento de los operadores GJMS en $d = 2$

$$S_{EE} = -k \frac{c}{3} \log \epsilon. \quad (6.13)$$

Caso $d = 4$

Ahora el operador de heat kernel para el campo escalar es

$$\mathcal{K}_5(\sigma; t) = \frac{e^{-4t}}{4\pi^2} \left(\frac{\partial}{\partial \cosh \sigma} \right)^2 \frac{e^{-\frac{\sigma^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}. \quad (6.14)$$

Cuando combinamos este operador con el término correspondiente de masa $\exp(k^2 - 4)$, el factor $\exp(-4t)$ del heat kernel desaparece quedando nuevamente un factor exponencial $\exp(-k^2 t)$ que es usado en la integral del tiempo propio. La traza correspondiente ahora es

$$\text{Tr} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \mathcal{K}_5^*(\sigma; t) = \frac{\text{vol}(\mathbb{H}^3)}{2i} \int_C dw \cot \left(\frac{w}{2q} \right) \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int_0^\infty d\mu \sinh \mu \cosh^3 \mu \mathcal{K}_5(\sigma; t). \quad (6.15)$$

Pondremos atención a la integral de volumen en la coordenada μ y para esto escribiremos el heat kernel por

$$\mathcal{K}_5(\sigma; t) = \frac{e^{-k^2 t}}{4\pi^2} \left(\frac{1}{\sinh \sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{\sinh \sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \frac{e^{-\frac{\sigma^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \right) \quad (6.16)$$

y el correspondiente volumen de integración luego de usar (6.8) es

$$d\mu \sinh \mu \cosh^3 \mu = d\sigma \frac{\sinh \sigma}{\sin^2 \frac{w}{2}} \left(1 + \frac{\sinh^2 \frac{\sigma}{2}}{\sin^2 \frac{w}{2}} \right). \quad (6.17)$$

Luego de integrar por partes sobre la distancia geodésica σ se obtiene el integrando para la integral de tiempo propio

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{e^{-k^2 t}}{\sin^2 \frac{w}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{16\pi t^3}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{w}{2}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \right] \quad (6.18)$$

cuyo resultado, salvo normalización, es

$$\frac{1}{\sin^4 \frac{w}{2}} \left[k - \frac{2k^3}{3} \sin^2 \frac{w}{2} \right]. \quad (6.19)$$

Finalmente hacemos la integral de contorno correspondiente al residuo en $w = 0$

$$\text{Res} \left\{ \frac{\cot \frac{w}{2q}}{\sin^4 \frac{w}{2}} \left[k - \frac{2k^3}{3} \sin^2 \frac{w}{2} \right], w = 0 \right\} \sim \frac{k(10k^2 q^4 - 10k^2 q^2 - 11q^4 + 10q^2 + 1)}{q^3} \quad (6.20)$$

término que nos permite encontrar la entropía de los operadores GJMS en $d = 4$

$$g_0^q = -\frac{k}{1440} \frac{(q+1)(10k^2 q^2 - 11q^2 - 1)}{q^3}. \quad (6.21)$$

Si ahora este valor lo evaluamos en $q = 1$ encontramos la anomalía de traza de los operadores GJMS

$$g_0 = -\frac{k}{360} (5k^2 - 6) \quad (6.22)$$

aunque si comparamos con la expresión obtenida en (4.10) vemos que no coinciden. Eso sí, podemos mencionar que al evaluar en $k = 1$ y $k = 2$ los valores entregados por esta expresión sí corresponden a los encontrados en la ecuación citada

$$g_0(k = 1) = \frac{1}{360} \quad (6.23)$$

$$g_0(k = 2) = -\frac{7}{90}. \quad (6.24)$$

Podemos comentar así que los valores de la anomalía entregadas por las entropías de Rényi tiene coincidencias para el operador de Yamabe y el operador de Paneitz en 4D, y la diferencia entre la anomalía de traza “real” con la calculada por este método es

$$\Delta a_k = \frac{1}{240} k(k^2 - 1)(k^2 - 4). \quad (6.25)$$

El caso 6D es similar. La anomalía de traza (de tipo - A) entregada por las entropías de Rényi y entrelazamiento coinciden para los primeros tres operadores GJMS ($k = 1, k = 2, k = 3$) y teniendo diferencia en orden superior en k y la respectiva diferencia será de la forma

$$\Delta a_k \sim k(k^2 - 1)(k^2 - 4)(k^2 - 9). \quad (6.26)$$

Muy posiblemente estas diferencias comentadas se deben a la propia existencia de los operadores GJMS. Éstos existen en espacios arbitrarios sólo hasta el orden correspondiente a la mitad de la dimensión física asegurando la existencia de P_2, P_4 en 4D mientras que en 6D está asegurada la existencia de P_2, P_4 y P_6 . Esta discrepancia es similar a la mostrada para el caso de los campos CHS [132] debido a que éstos también factorizan en espacios de Einstein y las posibles explicaciones a ésta son los modos cero, edge - modes, términos de borde entre otras opciones aunque hasta ahora no hay claridad en cuál es la solución apropiada.

Capítulo 7

Discusión final

Hemos encontrado una forma sencilla de encontrar holográficamente las anomalías de Weyl de teorías que involucran invariantes de curvatura de mayor orden. Es sabido que la anomalía holográfica de tipo - A puede obtenerse de la acción del bulk evaluada en la solución AdS. Ahora nosotros hemos hecho una pequeña desviación al considerar una métrica Poincaré - Einstein/Einstein en el bulk cuyo borde conforme es otro espacio de Einstein. La acción se simplifica tremendamente y al aislar el término de volumen proveniente de los invariantes puramente Ricci en el bulk de las desviaciones puramente Weyl nos permite leer la anomalía de tipo - B de forma holográfica. El punto clave está en expresar los términos relacionados al tensor de Weyl en una base de términos invariantes de Weyl en el bulk. Habiendo hecho eso, la base natural de la anomalía de traza de la CFT es aquella en donde se reescribe la densidad de Euler por la Q - curvatura que involucra sólo términos Ricci - dependientes. El volumen del bulk naturalmente “desciende” a la Q - curvatura y los invariantes de Weyl “descienden” a los respectivos invariantes de la anomalía de tipo - B en el borde. Así hemos asumido que la existencia de una métrica PE/E en cierto sentido asintótico aunque no hemos usado explícitamente las ecuaciones de movimiento. Ésto sin embargo fue suficiente para verificar todos los ejemplos considerados para la anomalía de Weyl holográfica. Notamos además que la consideración implícita de la expansión de Fefferman - Graham puede pensarse que ésta es más bien una situación genérica, sin embargo debe explorarse con más detalles para los casos degenerados como los considerados en [3]. También podemos intentar extender esta receta holográfica para incluir contribuciones distintas de la métrica. De hecho, en el caso del campo escalar considerado en [120] podemos detectar fácilmente que la contribución de términos de Ricci tiene origen en el operadores de Paneitz - Branson con un coeficiente que puede obtenerse de la métrica PE/E.

En este trabajo también logramos obtener y comparar las anomalías de traza para los operadores GJMS, los que fueron los sujetos de prueba de nuestro método para los campos libres verificando que además del cálculo directo del borde, éstas pueden rastarse holográficamente. También estos resultados nos permiten comparar con los obtenidos a través de las entropías de Rényi mostrando así que si bien algunos resultados coinciden (hasta el operador crítico de cada dimensión) ésto puede no ser universal, no olvidando que parte de esa discordancia también puede atribuirse a que éstos existen en general hasta un determinado operador crítico (que es para $k = d/2$). Para el estudio holográfico de las anomalías de Weyl para los campos CHS vemos que los casos estándar como el campo de Maxwell o el gravitón de Weyl fueron bien encontrados por este método que se sigue en estos casos a partir de la acción efectiva a 1 - loop para el campo dual en la métrica PE/E. Hemos aprendido de éstos que la forma se hace correcta parcialmente asumiendo la expansión del heat kernel cuando ésta es WKB exacta, debido a que este resultado fue previamente encontrado asumiendo factorización. La extensión para los campos CHS es realizable pero no de una forma tan contundente como en los casos previos debido al hecho de haber asumido un acople tipo Lichnerowicz con el tensor de Weyl del bulk; muy posiblemente existen interacciones que involucren potencias de mayor orden como el vértice de Fradkin - Vasiliev o interacciones entre los distintos espines.

Bibliografía

- [1] S. Acevedo, R. Aros, F. Bugini and D. E. Díaz, “On the Weyl anomaly of 4D Conformal Higher Spins: a holographic approach,” JHEP **1711**, 082 (2017) doi:10.1007/JHEP11(2017)082 [arXiv:1710.03779 [hep-th]].
- [2] R. L. Agacy, “Generalized Kronecker Delta and permanent deltas, their spinor and tensor equivalents,” [http://dx.doi.org/10.1063/1.532851]
- [3] S. Aksteiner and Y. Korovin, “New modes from higher curvature corrections in holography,” JHEP **1603**, 166 (2016) doi:10.1007/JHEP03(2016)166 [arXiv:1511.08747 [hep-th]].
- [4] P. Albin, “Renormalizing Curvature Integrals on Poincare-Einstein Manifolds,” Adv. Math. **221**, no. 1, 140 (2009) doi:10.1016/j.aim.2008.12.002 [math/0504161 [math.DG]].
- [5] M. Ammon and J. Erdmenger, “Gauge/gravity duality : Foundations and applications,”
- [6] D. Anselmi, “Towards the classification of conformal field theories in arbitrary dimension,” Phys. Lett. B **476**, 182 (2000) doi:10.1016/S0370-2693(00)00135-0 [hep-th/9908014].
- [7] R. Aros and D. E. Diaz, “Determinant and Weyl anomaly of Dirac operator: a holographic derivation,” J. Phys. A **45** (2012) 125401 [arXiv:1111.1463 [math-ph]].
- [8] R. Aros, F. Bugini and D. E. Diaz, “On Rényi entropy for free conformal fields: holographic and q-analog recipes,” J. Phys. A **48**, 105401 (2015) doi:10.1088/1751-8113/48/10/105401 [arXiv:1408.1931 [hep-th]].
- [9] I. G. Avramidi, “Heat kernel and quantum gravity,” Lect. Notes Phys. Monogr. **64**, 1 (2000). doi:10.1007/3-540-46523-5
- [10] I. Avramidi “Heat Kernel Method and its Applications.” doi:10.1007/978-3-319-26266-6
- [11] I. G. Avramidi and S. J. Collopy, “One-Loop quantum gravity in the Einstein universe,” JHEP **1511** (2015) 193 Erratum: [JHEP **1703** (2017) 029] [arXiv:1509.00929 [hep-th]].
- [12] N. Banerjee and S. Dutta, “Shear Viscosity to Entropy Density Ratio in Six Derivative Gravity,” JHEP **0907**, 024 (2009) doi:10.1088/1126-6708/2009/07/024 [arXiv:0903.3925 [hep-th]].
- [13] F. Bastianelli, “The Path integral for a particle in curved spaces and Weyl anomalies,” Nucl. Phys. B **376**, 113 (1992) doi:10.1016/0550-3213(92)90070-R [hep-th/9112035].
- [14] F. Bastianelli and P. van Nieuwenhuizen, “Trace anomalies from quantum mechanics,” Nucl. Phys. B **389**, 53 (1993) doi:10.1016/0550-3213(93)90285-W [hep-th/9208059].
- [15] F. Bastianelli, G. Cuoghi and L. Nocetti, “Consistency conditions and trace anomalies in six-dimensions,” Class. Quant. Grav. **18**, 793 (2001) doi:10.1088/0264-9381/18/5/303 [hep-th/0007222].

- [16] F. Bastianelli, S. Frolov and A. A. Tseytlin, “Conformal anomaly of (2,0) tensor multiplet in six dimensions and AdS/CFT correspondence,” JHEP **0002** (2000) 013 [arXiv:hep-th/0001041].
- [17] H. Bateman, “The Transformation of the Electrodynamical Equations,” doi:10.1112/plms/s2-8.1.223
- [18] M. Beccaria and A. A. Tseytlin, “Higher spins in AdS₅ at one loop: vacuum energy, boundary conformal anomalies and AdS/CFT,” JHEP **1411** (2014) 114 [arXiv:1410.3273 [hep-th]].
- [19] M. Beccaria and A. A. Tseytlin, “Conformal a-anomaly of some non-unitary 6d superconformal theories,” JHEP **1509** (2015) 017 [arXiv:1506.08727 [hep-th]].
- [20] M. Beccaria and A. A. Tseytlin, “Conformal anomaly c-coefficients of superconformal 6d theories,” JHEP **1601** (2016) 001 [arXiv:1510.02685 [hep-th]].
- [21] J. D. Bekenstein, “Black holes and entropy,” Phys. Rev. D **7**, 2333 (1973). doi:10.1103/PhysRevD.7.2333
- [22] E. Bergshoeff, M. de Roo and B. de Wit, “Extended Conformal Supergravity,” Nucl. Phys. B **182**, 173 (1981). doi:10.1016/0550-3213(81)90465-X
- [23] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, “Quantum Fields in Curved Space,” doi:10.1017/CBO9780511622632
- [24] M. Blau, K. S. Narain and E. Gava, “On subleading contributions to the AdS / CFT trace anomaly,” JHEP **9909**, 018 (1999) doi:10.1088/1126-6708/1999/09/018 [hep-th/9904179].
- [25] R. Blumenhagen and E. Plauschinn, “Introduction to conformal field theory : with applications to String theory,” Lect. Notes Phys. **779**, 1 (2009). doi:10.1007/978-3-642-00450-6
- [26] J. de Boer, M. Kulaxizi and A. Parnachev, “AdS(7)/CFT(6), Gauss-Bonnet Gravity, and Viscosity Bound,” JHEP **1003** (2010) 087 [arXiv:0910.5347 [hep-th]].
- [27] J. de Boer, M. Kulaxizi and A. Parnachev, “Holographic Lovelock Gravities and Black Holes,” JHEP **1006**, 008 (2010) doi:10.1007/JHEP06(2010)008 [arXiv:0912.1877 [hep-th]].
- [28] N. Boulanger and J. Erdmenger, “A Classification of local Weyl invariants in D=8,” Class. Quant. Grav. **21** (2004) 4305 [hep-th/0405228].
- [29] T. Branson and B. Ørsted, “Explicit functional determinants in four dimensions,” Proc. Amer. Math. Soc. **113** (1991) 669.
- [30] T. Branson, “The Functional Determinant,” Global Analysis Research Center Lecture Note Series, Number 4, Seoul National University (1993);
- [31] T. Branson, “Sharp inequalities, the functional determinant, and the complementary series,” Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995) 3671.
- [32] T. Branson and A. R. Gover, “Pontrjagin forms and invariant objects related to the Q-curvature,” math/0511311 [math-dg].
- [33] L. S. Brown and J. P. Cassidy, “Stress Tensor Trace Anomaly in a Gravitational Metric: General Theory, Maxwell Field,” Phys. Rev. D **15** (1977) 2810.
- [34] F. Bugini and D. E. Diaz, “Simple recipe for holographic Weyl anomaly,” JHEP **1704**, 122 (2017) doi:10.1007/JHEP04(2017)122 [arXiv:1612.00351 [hep-th]].
- [35] P. Calabrese and J. L. Cardy, “Entanglement entropy and quantum field theory,” J. Stat. Mech. **0406**, P06002 (2004) [hep-th/0405152].

- [36] R. Camporesi and A. Higuchi, “Arbitrary spin effective potentials in anti-de Sitter space-time,” *Phys. Rev. D* **47**, 3339 (1993). doi:10.1103/PhysRevD.47.3339
- [37] R. Camporesi and A. Higuchi, “Spectral functions and zeta functions in hyperbolic spaces,” *J. Math. Phys.* **35** (1994) 4217.
- [38] D. M. Capper, M. J. Duff and L. Halpern, “Photon corrections to the graviton propagator,” *Phys. Rev. D* **10** (1974) 461.
- [39] D. M. Capper and M. J. Duff, “Trace anomalies in dimensional regularization,” *Nuovo Cim. A* **23**, 173 (1974). doi:10.1007/BF02748300
- [40] H. Casini and M. Huerta, “Entanglement entropy for the n-sphere,” *Phys. Lett. B* **694**, 167 (2010) [arXiv:1007.1813 [hep-th]].
- [41] H. Casini, M. Huerta and R. C. Myers, “Towards a derivation of holographic entanglement entropy,” *JHEP* **1105**, 036 (2011) [arXiv:1102.0440 [hep-th]].
- [42] A. Chang, J. Qing and P. Yang, “On the renormalized volumes for conformally compact Einstein manifolds,” math/0512376 [math.DG].
- [43] S. M. Christensen and M. J. Duff, “Axial and Conformal Anomalies for Arbitrary Spin in Gravity and Supergravity,” *Phys. Lett. B* **76**, 571 (1978) [*Phys. Lett.* **76B**, 571 (1978)]. doi:10.1016/0370-2693(78)90857-2
- [44] S. M. Christensen and M. J. Duff, “New Gravitational Index Theorems and Supertheorems,” *Nucl. Phys. B* **154**, 301 (1979). doi:10.1016/0550-3213(79)90516-9
- [45] E. Cunningham, “The Principle of Relativity in Electrodynamics and an Extension Theorem,” doi:10.1112/plms/s2-8.1.77
- [46] M. H. Dehghani and M. H. Vahidinia, “Quartic Quasi-topological Gravity, Black Holes and Holography,” *JHEP* **1310**, 210 (2013) doi:10.1007/JHEP10(2013)210 [arXiv:1307.0330 [hep-th]].
- [47] S. Deser, M. J. Duff and C. J. Isham, “Nonlocal Conformal Anomalies,” *Nucl. Phys. B* **111**, 45 (1976). doi:10.1016/0550-3213(76)90480-6
- [48] S. Deser and A. Schwimmer, “Geometric classification of conformal anomalies in arbitrary dimensions,” *Phys. Lett. B* **309**, 279 (1993) [hep-th/9302047].
- [49] S. Deser, “Conformal anomalies: Recent progress,” *Helv. Phys. Acta* **69** (1996) no.4, 570 [hep-th/9609138].
- [50] A. Dey, P. Roy and T. Sarkar, “On holographic Rényi entropy in some modified theories of gravity,” *JHEP* **1804**, 098 (2018) doi:10.1007/JHEP04(2018)098 [arXiv:1609.02290 [hep-th]].
- [51] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, “Conformal Field Theory,” doi:10.1007/978-1-4612-2256-9
- [52] D. E. Diaz and H. Dorn, “Partition functions and double-trace deformations in AdS/CFT,” *JHEP* **0705** (2007) 046 [hep-th/0702163 [HEP-TH]].
- [53] D. E. Diaz, “Polyakov formulas for GJMS operators from AdS/CFT,” *JHEP* **0807** (2008) 103 [arXiv:0803.0571 [hep-th]].
- [54] J. S. Dowker, “Entanglement entropy for even spheres,” arXiv:1009.3854 [hep-th].
- [55] J. S. Dowker, “Hyperspherical entanglement entropy,” *J. Phys. A* **43**, 445402 (2010) [arXiv:1007.3865 [hep-th]].

- [56] J. S. Dowker, “Determinants and conformal anomalies of GJMS operators on spheres,” *J. Phys. A* **44** (2011) 115402 [arXiv:1010.0566 [hep-th]].
- [57] J. S. Dowker, “Spherical Dirac GJMS operator determinants,” *J. Phys. A* **48** (2015) no.2, 025401 [arXiv:1310.5563 [hep-th]].
- [58] M. J. Duff, “Twenty years of the Weyl anomaly,” *Class. Quant. Grav.* **11** (1994) 1387 [hep-th/9308075].
- [59] M.G. Eastwood and M. Singer, “A conformally invariant Maxwell gauge,” *Phys. Lett. A* **107** (1985) 73.
- [60] L. D. Faddeev and V. N. Popov, “Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field,” *Phys. Lett. B* **25** (1967) 29 [*Phys. Lett.* **25B** (1967) 29]. doi:10.1016/0370-2693(67)90067-6
- [61] C. Fefferman and C. R. Graham, *Conformal invariants*, in *The Mathematical Heritage of Élie Cartan (Lyon, 1984)*, Astérisque, 1985, Numero Hors Serie, 95-116.
- [62] C. Fefferman and C. R. Graham, “ Q -Curvature and Poincaré Metrics,” *Math. Res. Lett.* **9** (2002) 139 [arXiv:math.DG/0110271].
- [63] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, “Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity,” *Nucl. Phys. B* **201** (1982) 469.
- [64] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, “One Loop Beta Function in Conformal Supergravities,” *Nucl. Phys. B* **203** (1982) 157.
- [65] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, “Asymptotic Freedom In Extended Conformal Supergravities,” *Phys. Lett.* **110B** (1982) 117.
- [66] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, “Conformal Supergravity,” *Phys. Rept.* **119** (1985) 233.
- [67] M. Fukuma, S. Matsuura and T. Sakai, “Higher derivative gravity and the AdS / CFT correspondence,” *Prog. Theor. Phys.* **105**, 1017 (2001) doi:10.1143/PTP.105.1017 [hep-th/0103187].
- [68] S. A. Fulling, R. C. King, B. G. Wybourne and C. J. Cummins, “Normal forms for tensor polynomials. 1: The Riemann tensor,” *Class. Quant. Grav.* **9** (1992) 1151.
- [69] D. Fursaev and D. Vassilevich, “Operators, Geometry and Quanta : Methods of spectral geometry in quantum field theory,” doi:10.1007/978-94-007-0205-9
- [70] P. B. Gilkey, “The Spectral geometry of a Riemannian manifold,” *J. Diff. Geom.* **10** (1975) no.4, 601.
- [71] S. Giombi, I. R. Klebanov, S. S. Pufu, B. R. Safdi and G. Tarnopolsky, “AdS Description of Induced Higher-Spin Gauge Theory,” *JHEP* **1310** (2013) 016 [arXiv:1306.5242 [hep-th]].
- [72] S. Giombi, I. R. Klebanov and B. R. Safdi, “Higher Spin AdS_{d+1}/CFT_d at One Loop,” *Phys. Rev. D* **89** (2014) no.8, 084004 [arXiv:1401.0825 [hep-th]].
- [73] P. H. Ginsparg, “Applied Conformal Field Theory,” hep-th/9108028.
- [74] A. R. Gover and L. J. Peterson, *Commun. Math. Phys.* **235**, 339 (2003) doi:10.1007/s00220-002-0790-4 [math-ph/0201030].
- [75] C. R. Graham and J. M. Lee, “Einstein metrics with prescribed conformal infinity on the ball,” *Adv. Math.* **87**, no. 2, 186 (1991). doi:10.1016/0001-8708(91)90071-E
- [76] C. R. Graham, R. Jenne, L. J. Mason and G. Sparling, “Conformally Invariant Powers of the Laplacian, I: Existence,” *J. London Math. Soc.* **46** (1992) 557.

- [77] C. R. Graham, “Volume and area renormalizations for conformally compact Einstein metrics,” math/9909042 [math-dg].
- [78] C. R. Graham and M. Zworski, “Scattering matrix in conformal geometry,” *Invent. Math.* **152** (2003) 89 [arXiv:math-DG/0109089].
- [79] W. Greiner and J. Reinhardt, “Field quantization,” Berlin, Germany: Springer (1996) 440 p
- [80] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from noncritical string theory,” *Phys. Lett. B* **428**, 105 (1998) doi:10.1016/S0370-2693(98)00377-3 [hep-th/9802109].
- [81] S. S. Gubser, “Einstein manifolds and conformal field theories,” *Phys. Rev. D* **59**, 025006 (1999) doi:10.1103/PhysRevD.59.025006 [hep-th/9807164].
- [82] M. Hadamard “Boundary-value problems in the theory of partial differential equations Les problèmes aux limites dans la théorie des équations aux dérivées partielles” *J. Phys. Theor. Appl.* **6** (1) 202-241 (1907) DOI: 10.1051/jphysap:019070060020200
- [83] S. W. Hawking, “Particle Creation by Black Holes,” *Commun. Math. Phys.* **43** (1975) 199 Erratum: [*Commun. Math. Phys.* **46** (1976) 206]. doi:10.1007/BF02345020
- [84] S. W. Hawking, “Zeta Function Regularization of Path Integrals in Curved Space-Time,” *Commun. Math. Phys.* **55** (1977) 133.
- [85] M. Henningson and K. Skenderis, “Holography and the Weyl anomaly,” *Fortsch. Phys.* **48**, 125 (2000) doi:10.1002/(SICI)1521-3978(20001)48:1/3<125::AID-PROP125>3.0.CO;2-B, 10.1002/(SICI)1521-3978(20001)48:1/3<125::AID-PROP125>3.3.CO;2-2 [hep-th/9812032].
- [86] M. Henningson and K. Skenderis, “The holographic Weyl anomaly,” *JHEP* **9807** (1998) 023 [arXiv:hep-th/9806087]; “Holography and the Weyl anomaly,” *Fortsch. Phys.* **48** (2000) 125 [arXiv:hep-th/9812032].
- [87] C. Holzhey, F. Larsen and F. Wilczek, “Geometric and renormalized entropy in conformal field theory,” *Nucl. Phys. B* **424**, 443 (1994) doi:10.1016/0550-3213(94)90402-2 [hep-th/9403108].
- [88] X. Huang, S. J. Rey and Y. Zhou, “Three-dimensional SCFT on conic space as hologram of charged topological black hole,” *JHEP* **1403**, 127 (2014) [arXiv:1401.5421 [hep-th]].
- [89] L.-Y. Hung, R. C. Myers, M. Smolkin and A. Yale, “Holographic Calculations of Rényi Entropy,” *JHEP* **1112**, 047 (2011) [arXiv:1110.1084 [hep-th]].
- [90] L. Y. Hung, R. C. Myers and M. Smolkin, “On Holographic Entanglement Entropy and Higher Curvature Gravity,” *JHEP* **1104** (2011) 025 [arXiv:1101.5813 [hep-th]].
- [91] C. Imbimbo, A. Schwimmer, S. Theisen and S. Yankielowicz, “Diffeomorphisms and holographic anomalies,” *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) 1129 [arXiv:hep-th/9910267].
- [92] E. Joung and K. Mkrtchyan, “A note on higher-derivative actions for free higher-spin fields,” *JHEP* **1211** (2012) 153 [arXiv:1209.4864 [hep-th]].
- [93] M. Kaku, P. K. Townsend and P. van Nieuwenhuizen, “Properties of Conformal Supergravity,” *Phys. Rev. D* **17**, 3179 (1978). doi:10.1103/PhysRevD.17.3179
- [94] H. J. Kim, L. J. Romans and P. van Nieuwenhuizen, “The Mass Spectrum of Chiral N=2 D=10 Supergravity on S⁵,” *Phys. Rev. D* **32**, 389 (1985). doi:10.1103/PhysRevD.32.389

- [95] Kirschner R. “Quantum Field Theory” ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik
- [96] I. R. Klebanov, S. S. Pufu, S. Sachdev and B. R. Safdi, “Rényi Entropies for Free Field Theories,” JHEP **1204**, 074 (2012) [arXiv:1111.6290 [hep-th]].
- [97] M. Kulaxizi and A. Parnachev, “Supersymmetry Constraints in Holographic Gravities,” Phys. Rev. D **82** (2010) 066001 [arXiv:0912.4244 [hep-th]].
- [98] J. Lee, L. McGough and B. R. Safdi, “Rényi Entropy and Geometry,” Phys. Rev. D **89**, 125016 (2014) [arXiv:1403.1580 [hep-th]].
- [99] J. T. Liu and B. McPeak, “The Weyl Anomaly from the 6D Superconformal Index,” arXiv:1804.04155 [hep-th].
- [100] R. Lohmayer, H. Neuberger, A. Schwimmer and S. Theisen, “Numerical determination of entanglement entropy for a sphere,” Phys. Lett. B **685**, 222 (2010) [arXiv:0911.4283 [hep-lat]].
- [101] J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity,” Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999) [Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998)] doi:10.1023/A:1026654312961, 10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a1 [hep-th/9711200].
- [102] P. Mansfield and D. Nolland, “One loop conformal anomalies from AdS / CFT in the Schrodinger representation,” JHEP **9907**, 028 (1999) doi:10.1088/1126-6708/1999/07/028 [hep-th/9906054].
- [103] P. Mansfield, D. Nolland and T. Ueno, “The Boundary Weyl anomaly in the N=4 SYM / type IIB supergravity correspondence,” JHEP **0401** (2004) 013 doi:10.1088/1126-6708/2004/01/013 [hep-th/0311021].
- [104] R. R. Metsaev, “Arbitrary spin conformal fields in (A)dS,” Nucl. Phys. B **885** (2014) 734 [arXiv:1404.3712 [hep-th]].
- [105] R. X. Miao, “A Note on Holographic Weyl Anomaly and Entanglement Entropy,” Class. Quant. Grav. **31** (2014) 065009 [arXiv:1309.0211 [hep-th]].
- [106] R. C. Myers, M. F. Paulos and A. Sinha, “Holographic studies of quasi-topological gravity,” JHEP **1008** (2010) 035 [arXiv:1004.2055 [hep-th]].
- [107] R. C. Myers and B. Robinson, “Black Holes in Quasi-topological Gravity,” JHEP **1008** (2010) 067 [arXiv:1003.5357 [gr-qc]].
- [108] R. C. Myers and A. Sinha, “Holographic c-theorems in arbitrary dimensions,” JHEP **1101** (2011) 125 [arXiv:1011.5819 [hep-th]].
- [109] M. Natsuume, “AdS/CFT Duality User Guide,” Lect. Notes Phys. **903**, pp.1 (2015) doi:10.1007/978-4-431-55441-7 [arXiv:1409.3575 [hep-th]].
- [110] S. Nojiri, S. D. Odintsov and S. Ogushi, “Holographic renormalization group and conformal anomaly for AdS(9) / CFT(8) correspondence,” Phys. Lett. B **500**, 199 (2001) doi:10.1016/S0370-2693(01)00056-9 [hep-th/0011182].
- [111] S. Nojiri and S. D. Odintsov, “On the conformal anomaly from higher derivative gravity in AdS / CFT correspondence,” Int. J. Mod. Phys. A **15**, 413 (2000) doi:10.1142/S0217751X00000197 [hep-th/9903033].
- [112] N. Ohta, R. Percacci and A. D. Pereira, “Gauges and functional measures in quantum gravity II: Higher derivative gravity,” Eur. Phys. J. C **77**, no. 9, 611 (2017) doi:10.1140/epjc/s10052-017-5176-z [arXiv:1610.07991 [hep-th]].

- [113] J. Oliva and S. Ray, “A new cubic theory of gravity in five dimensions: Black hole, Birkhoff’s theorem and C-function,” *Class. Quant. Grav.* **27** (2010) 225002 [arXiv:1003.4773 [gr-qc]].
- [114] S. Paneitz, “A quartic conformally covariant differential operator for arbitrary pseudo-Riemannian manifolds,” MIT preprint, (1983).
- [115] Y. Pang, “One-Loop Divergences in 6D Conformal Gravity,” *Phys. Rev. D* **86** (2012) 084039 [arXiv:1208.0877 [hep-th]].
- [116] W. Pauli, “Über die Invarianz der Dirac’schen Wellengleichungen gegenüber Ähnlichkeits-transformationen des Linienelementes im Fall verschwindender Ruhemasse,” *Helv. Phys. Acta* **13** (1940) 204.
- [117] K. Peeters, “A Field-theory motivated approach to symbolic computer algebra,” *Comput. Phys. Commun.* **176**, 550 (2007) doi:10.1016/j.cpc.2007.01.003 [cs/0608005 [cs.SC]].
- [118] K. Peeters, “Introducing Cadabra: A Symbolic computer algebra system for field theory problems,” hep-th/0701238.
- [119] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory,”
- [120] S. Rajagopal, A. Stergiou and Y. Zhu, “Holographic Trace Anomaly and Local Renormalization Group,” *JHEP* **1511**, 216 (2015) doi:10.1007/JHEP11(2015)216 [arXiv:1508.01210 [hep-th]].
- [121] A. V. Ramallo, “Introduction to the AdS/CFT correspondence,” *Springer Proc. Phys.* **161**, 411 (2015) doi:10.1007/978-3-319-12238-010 [arXiv:1310.4319 [hep-th]].
- [122] S. Ryu and T. Takayanagi, “Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT,” *Phys. Rev. Lett.* **96**, 181602 (2006) doi:10.1103/PhysRevLett.96.181602 [hep-th/0603001].
- [123] S. Ryu and T. Takayanagi, “Aspects of Holographic Entanglement Entropy,” *JHEP* **0608**, 045 (2006) doi:10.1088/1126-6708/2006/08/045 [hep-th/0605073].
- [124] A. Schwimmer and S. Theisen, “Universal features of holographic anomalies,” *JHEP* **0310**, 001 (2003) doi:10.1088/1126-6708/2003/10/001 [hep-th/0309064].
- [125] K. Sen, A. Sinha and N. V. Suryanarayana, “Counterterms, critical gravity and holography,” *Phys. Rev. D* **85**, 124017 (2012) doi:10.1103/PhysRevD.85.124017 [arXiv:1201.1288 [hep-th]].
- [126] K. Sen and A. Sinha, “Holographic stress tensor at finite coupling,” *JHEP* **1407**, 098 (2014) doi:10.1007/JHEP07(2014)098 [arXiv:1405.7862 [hep-th]].
- [127] K. Skenderis and S. N. Solodukhin, “Quantum effective action from the AdS / CFT correspondence,” *Phys. Lett. B* **472**, 316 (2000) doi:10.1016/S0370-2693(99)01467-7 [hep-th/9910023].
- [128] S. N. Solodukhin, “Entanglement entropy of round spheres,” *Phys. Lett. B* **693**, 605 (2010) [arXiv:1008.4314 [hep-th]]. Solodukhin:2010pk,Ryu:2006ef
- [129] M. Srednicki, “Entropy and area,” *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 666 doi:10.1103/PhysRevLett.71.666 [hep-th/9303048].
- [130] A. A. Tseytlin, “Effective Action In De Sitter Space And Conformal Supergravity. (in Russian),” *Yad. Fiz.* **39**, 1606 (1984) [*Sov. J. Nucl. Phys.* **39**, no. 6, 1018 (1984)].
- [131] A. A. Tseytlin, “Weyl anomaly of conformal higher spins on six-sphere,” *Nucl. Phys. B* **877**, 632 (2013) [arXiv:1310.1795 [hep-th]].

- [132] A. A. Tseytlin, “On partition function and Weyl anomaly of conformal higher spin fields,” Nucl. Phys. B **877**, 598 (2013) [arXiv:1309.0785 [hep-th]].
- [133] D. V. Vassilevich, “Heat kernel expansion: User’s manual,” Phys. Rept. **388**, 279 (2003) doi:10.1016/j.physrep.2003.09.002 [hep-th/0306138].
- [134] E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998) doi:10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2 [hep-th/9802150].
- [135] H. Yamabe, “e, On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds,” Osaka J.Math. **12** (1960) 21.



Apéndice A

Expansión del heat kernel para el campo escalar en dimensión arbitraria.

En este apéndice sólo resumiremos algunas cosas mencionadas en [16] ya que en base a su convención definimos nuestros invariantes comenzando por describir la convención correspondiente para la asignación de cada uno de los tensores

$$[\nabla_a, \nabla_b]V^c = R_{ab}{}^c{}_d V^d, \quad R_{ab} = R_{ca}{}^c{}_b, \quad R = R^a{}_a, \quad [\nabla_a \cdot \nabla_b]\phi = F_{ab}\phi. \quad (\text{A.1})$$

Los coeficientes del heat kernel para un operador general tipo Laplace de la forma $\Delta = -\nabla^2 - E$ con conexión de curvatura F_{ab} son vistos en [70]. Por conveniencia, se presentan de una forma que es ventajosa en términos de cómputo. En principio se puede calcular varios términos de la expansión de heat kernel usando métodos estándar de teoría de perturbaciones [13, 14]. Se presentan de aquí naturalmente las partes conectadas y desconectadas de los diagramas de Feynman las que sugieren la siguiente representación del heat kernel

$$\text{Tr} [\sigma(x)e^{-t\Delta}] = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \text{Tr} \left[\sigma(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} t^n \right] = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \text{Tr} \left[\sigma(x) \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n} t^n \right) \right]. \quad (\text{A.2})$$

Los coeficientes estándar del heat kernel, b_{2n} serán entonces

$$b_{2n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} a_{2n}, \quad a_{2n} = \alpha_{2n} + \beta_{2n} \quad (\text{A.3})$$

en donde α_{2n} y β_{2n} indican las partes provenientes de los diagramas conectados y desconectados, respectivamente. En la expresión anterior $\sigma(x)$ es una función arbitraria y $\text{Tr}(\dots) \equiv \int_M d^d x \sqrt{g} \text{tr}_V(\dots)$. Usando la propiedad cíclica de la traza se encuentra

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_4 = \frac{1}{2}\alpha_2^2, \quad \beta_6 = \frac{1}{6}\alpha_2^3 + \alpha_2\alpha_4. \quad (\text{A.4})$$

De esta forma, las expresiones de [70] para b_0, b_2, b_4 y b_6 son

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 1 \\
\alpha_2 &= E + \frac{1}{6}R \\
\alpha_4 &= \frac{1}{6}\nabla^2\left(E + \frac{1}{5}R\right) + \frac{1}{180}(R_{abcd}R^{abcd} - R_{ab}R^{ab}) + \frac{1}{12}F_{ab}^2 \\
\alpha_6 &= \frac{1}{7!}\left[18\nabla^4 R + 17(\nabla_a R)^2 - 2(\nabla_a R_{mn})^2 - 4\nabla_a R_{bm}\nabla^b R^{am} + 9(\nabla_a R_{mni j})^2 - 8R_{ab}\nabla^2 R^{ab} \right. \\
&\quad + 12R_{ab}\nabla^a\nabla^b R + 12R_{abmn}\nabla^2 R^{abmn} + \frac{8}{9}R_a{}^m R_m{}^i R_i{}^a + \frac{8}{3}R_{ab}R_{mn}R^{amnb} - \frac{16}{3}R_{ab}R^a{}_{mnl}R^{bmn l} \\
&\quad + \left.\frac{44}{9}R_{ab}{}^{mn}R_{mn}{}^{ij}R_{ij}{}^{ab} - \frac{80}{9}R_{iabj}R^{amnb}R_m{}^{ij}{}_n\right] \\
&\quad + \frac{2}{6!}\left[8(\nabla_a F_{mn})^2 + 2(\nabla^a F_{am})^2 + 12F_{ab}\nabla^2 F^{ab} - 12F_a{}^m F_m{}^i F_i{}^a + 6R_{abmn}F^{ab}F^{mn} - 4R_{ab}^a F_m{}^b \\
&\quad + 6\nabla^4 E + 30(\nabla_a E)^2 + 4R_{ab}\nabla^a\nabla^b E + 12\nabla_a R\nabla^b E\right].
\end{aligned}$$

En particular nos interesa el cómo se escriben estos coeficientes para un campo escalar libre en espacios de Einstein con un endomorfismo E proporcional al escalar de Ricci donde además no hay término de curvatura, haciendo que sólo algunos de éstos coeficientes son no nulos. Para mostrar cuáles de estos coeficientes deben considerarse en los cálculos posteriores, se muestra cómo se escribe cada uno de éstos en términos del tensor de Weyl W_{abcd} , el escalar de Ricci R y la parte sin traza del tensor de Ricci, $B_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{d}Rg_{ij}$, siguiendo la definición de los de invariantes $\{A_1, \dots, A_{17}\}$ de como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
A_1 &= \nabla^4 R & A_2 &= (\nabla_a R)^2 & A_3 &= (\nabla_a R_{mn})^2 \\
A_4 &= \nabla_a R_{bm}\nabla^n R^{am} & A_5 &= (\nabla_a R_{mni j})^2 & A_6 &= R\nabla^2 R \\
A_7 &= R_{ab}\nabla^2 R^{ab} & A_8 &= R_{ab}\nabla_m\nabla^b R^{am} & A_9 &= R_{abmn}\nabla^2 R^{abmn} \\
A_{10} &= R^3 & A_{11} &= RR_{ab}^2 & A_{12} &= RR_{abcd}^2 \\
A_{13} &= R_a{}^m R_m{}^i R_i{}^a & A_{14} &= R_{ab}R_{mn}R^{ambn} & A_{15} &= R_{ab}R^{amnl}R^b{}_{mnl} \\
A_{16} &= R_{ab}{}^{mn}R_{mn}{}^{ij}R_{ij}{}^{ab} & A_{17} &= R_{ambn}R^{ajib}R^m{}_{ij}.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Los invariantes con los que nos será más útil trabajar son los siguientes:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \nabla^4 R & B_2 &= (\nabla_a R)^2 & B_3 &= (\nabla_a B_{mn})^2 \\
B_4 &= \nabla_a B_{bm}\nabla^n B^{am} & B_5 &= (\nabla_a W_{mni j})^2 & B_6 &= R\nabla^2 R \\
B_7 &= B_{ab}\nabla^2 B^{ab} & B_8 &= B_{ab}\nabla_m\nabla^b B^{am} & B_9 &= W_{abmn}\nabla^2 W^{abmn} \\
B_{10} &= R^3 & B_{11} &= RB_{ab}^2 & B_{12} &= RW_{abcd}^2 \\
B_{13} &= B_a{}^m B_m{}^i B_i{}^a & B_{14} &= B_{ab}B_{mn}W^{ambn} & B_{15} &= B_{ab}W^{amnl}W^b{}_{mnl} \\
B_{16} &= W_{ab}{}^{mn}W_{mn}{}^{ij}W_{ij}{}^{ab} & B_{17} &= W_{ambn}W^{ajib}W^m{}_{ij}.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

y éstos se relacionan con la base $\{A_i\}$ por las identidades siguientes:

$$\begin{aligned}
A_1 &= B_1 \\
A_2 &= B_2 \\
A_3 &= B_3 + \frac{1}{d}B_2 \\
A_4 &= B_4 + \frac{d-1}{d^2}B_2 \\
A_5 &= B_5 + \frac{4}{d-2}B_3 + \frac{2}{d(d-1)}B_2 \\
A_6 &= B_6 \\
A_7 &= B_7 + \frac{1}{d}B_6 \\
A_8 &= \frac{d}{d-2}B_8 + \frac{1}{2d}B_6 + \frac{2}{d-2}B_{14} - \frac{2d}{(d-2)^2}B_{13} - \frac{2}{(d-1)(d-2)}B_{11} \\
A_9 &= B_9 + \frac{4}{d-2}B_7 + \frac{2}{d(d-1)}B_6 \\
A_{10} &= B_{10} \\
A_{11} &= B_{11} + \frac{1}{d}B_{10} \\
A_{12} &= B_{12} + \frac{4}{d-2}B_{11} + \frac{2}{d(d-1)}B_{10} \\
A_{13} &= B_{13} + \frac{3}{d}B_{11} + \frac{1}{d^2}B_{10} \\
A_{14} &= B_{14} - \frac{2}{d-2}B_{13} + \frac{2d-3}{d(d-1)}B_{11} + \frac{1}{d^2}B_{10} \\
A_{15} &= B_{15} + \frac{4}{d-2}B_{14} + \frac{2(d-4)}{(d-2)^2}B_{13} + \frac{1}{d}B_{12} + \frac{4(2d-3)}{d(d-1)(d-2)}B_{11} + \frac{2}{d^2(d-1)}B_{10} \\
A_{16} &= B_{16} + \frac{12}{d-2}B_{15} + \frac{24}{(d-2)^2}B_{14} + \frac{8(d-4)}{(d-2)^3}B_{13} + \frac{6}{d(d-1)}B_{12} + \frac{24}{d(d-1)(d-2)}B_{11} + \frac{4}{d^2(d-1)^2}B_{10} \\
A_{17} &= B_{17} - \frac{3}{d-2}B_{15} + \frac{3(d-4)}{(d-2)^2}B_{14} + \frac{2(8-3d)}{(d-2)^3}B_{13} - \frac{3}{2d(d-1)}B_{12} + \frac{3(d-4)}{d(d-1)(d-2)}B_{11} + \frac{d-2}{d^2(d-1)^2}B_{10}
\end{aligned}$$

Además, cada una de esas combinaciones corresponde a derivadas totales:

$$\begin{aligned}
C_1 &= B_1 \\
C_2 &= B_2 + B_6 \\
C_3 &= B_3 + B_7 \\
C_4 &= B_4 + B_8 \\
C_5 &= B_5 + B_9 \\
C_6 &= \frac{(d-2)^2}{4d^2}B_2 - B_4 - \frac{1}{d-1}B_{11} - \frac{d}{d-2}B_{14} + B_{14} \\
C_7 &= \frac{(d-2)(d-3)}{4d^2(d-1)}B_2 - \frac{d-3}{d-2}(B_3 - B_4) + \frac{1}{4}B_5 + \frac{1}{2d}B_{12} - \frac{1}{4}B_{16} - B_{17}.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

El hecho interesante ocurre al usar un espacio de Einstein de donde gran parte de la base $\{B_i\}$ se anula debido a que el escalar de Ricci, R , es constante y que el tensor de Ricci es proporcional a su escalar $R_{ij} = \frac{R}{d}g_{ij}$ haciendo que la parte sin traza del tensor de Ricci, B_{ij} sea siempre nula. Así, los únicos términos no nulos son

$$\begin{aligned}
B_5 &= (\nabla_a W_{mnij})^2 \\
B_9 &= W_{mnij} \nabla^2 W^{mnij} \\
B_{10} &= R^3 \\
B_{12} &= RW_{mnij}^2 \\
B_{16} &= W_{ab}{}^{mn} W_{mn}{}^{ij} W_{ij}{}^{ab} \\
B_{17} &= W_{ambn} W^{ajib} W^m{}_i{}^n{}_j.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

y los términos de la base $\{A_i\}$ que son no nulos también son

$$\begin{aligned}
A_5 &= B_5 \\
A_9 &= B_9 \\
A_{10} &= B_{10} \\
A_{13} &= \frac{1}{d^2}B_{10} \\
A_{14} &= \frac{1}{d^2}B_{10} \\
A_{15} &= \frac{1}{d}B_{12} + \frac{2}{d^2(d-1)}B_{10} \\
A_{16} &= B_{16} + \frac{6}{d(d-1)}B_{12} + \frac{4}{d^2(d-1)^2}B_{10} \\
A_{17} &= B_{17} - \frac{3}{2d(d-1)}B_{12} + \frac{d-2}{d^2(d-1)^2}B_{10}.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Con estos términos podemos mostrar la expansión del heat kernel para el campo escalar en los dos espacios de Einstein trabajados ($d = 5$ y $d = 7$) cuyo escalar de Ricci es constante y sólo depende de la dimensión $R = -d(d - 1)$:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\mathcal{K}_{d=5} = & \frac{1}{(4\pi t)^{5/2}} \left\{ 1 - \frac{10}{3}t + \frac{16}{3}t^2 + \frac{1}{180}\hat{W}_{abcd}\hat{W}^{abcd} - \frac{16}{3}t^3 - \frac{1}{45}\hat{W}_{abcd}\hat{W}^{abcd} \right. \\ & \left. - \frac{1}{7!} \left(\frac{80}{9}\hat{W}_{ab}{}^{mn}\hat{W}_{mn}{}^{ij}\hat{W}_{ij}{}^{ab} - \frac{44}{9}\hat{W}^3 + 3\hat{\Phi}_5 \right) + \mathcal{O}(t^4) \right\} \end{aligned}$$

siendo término cuadrático aquel que denotamos por $\hat{W}_{abcd}\hat{W}^{abcd} = \hat{W}^2$ y los términos cúbicos en el tensor de Weyl en nuestra convención es $\hat{W}^3 = \hat{W}_{ambn}\hat{W}^{ajib}\hat{W}^m{}_i{}^n{}_j$ y $\hat{W}'^3 = \hat{W}_{ab}{}^{mn}\hat{W}_{mn}{}^{ij}\hat{W}_{ij}{}^{ab}$, $\hat{W}_{abcd}\nabla^2\hat{W}^{abcd} = \hat{W}\nabla^2\hat{W}$. La expansión recién mostrada puede resumirse en una expresión WKB - exacta donde no mostraremos los términos cuárticos asumiendo que éstos están resumidos en los términos ya mostrados y que en consecuencia sólo habrá contribución al término de volumen

$$\text{Tr}\mathcal{K}_{d=5} = \frac{e^{-4t}}{(4\pi t)^{5/2}} \left\{ 1 - \frac{10}{3}t + \frac{16}{3}t^2 + \frac{1}{180}\hat{W}^2t^2 - \frac{1}{7!} \left(\frac{80}{9}\hat{W}'^3 - \frac{44}{9}\hat{W}^3 + 3\hat{\Phi}_5 \right) t^3 + \mathcal{O}(t^4) \right\}.$$

Para el caso $d = 7$ sólo hay que agregar los términos cúbicos correspondientes

$$\begin{aligned} \text{Tr}\mathcal{K}_{d=7} = & \frac{1}{(4\pi t)^{7/2}} \left\{ 1 - 7t + \frac{707}{30}t^2 + \frac{1}{180}\hat{W}_{abcd}\hat{W}^{abcd} - \frac{501}{30}t^3 - \frac{1}{20}\hat{W}_{abcd}\hat{W}^{abcd}t^3 \right. \\ & \left. - \frac{1}{7!} \left(\frac{352}{9}\hat{W}_{ab}{}^{mn}\hat{W}_{mn}{}^{ij}\hat{W}_{ij}{}^{ab} - \frac{64}{9}\hat{W}_{ambn}\hat{W}^{ajib}\hat{W}^m{}_i{}^n{}_j + 9\hat{\Phi}_7 \right) + \mathcal{O}(t^4) \right\}. \end{aligned}$$

Mostraremos ahora que en un espacio de Einstein hay una relación explícita entre $\hat{R}\hat{W}^2$ con los invariantes cúbicos haciendo énfasis en que las derivadas totales no contribuyen al cálculo de la anomalía de traza. En este sentido y usando la derivada total \hat{C}_7 en este espacio de Einstein 7 - dimensional, se encuentra

$$C_7 = 0 = -\frac{1}{4}\hat{W}\nabla^2\hat{W} + \frac{1}{12}\hat{R}\hat{W}^2 - \frac{1}{4}\hat{W}'^3 - \hat{W}^3,$$

término que permite reescribir el término cúbico de la expansión y permitiendo expresar éste de forma WKB - exacta

$$\text{Tr}\mathcal{K}_{d=7} = \frac{e^{-9t}}{(4\pi t)^{7/2}} \left\{ 1 + 2t + \frac{16}{15}t^2 + \frac{1}{180}\hat{W}^2 + \frac{1}{7!} \left(\frac{352}{9}\hat{W}'^3 - \frac{64}{9}\hat{W}^3 + \hat{\Phi}_7 \right) t^3 + \mathcal{O}(t^4) \right\}.$$

Apéndice B

Coeficiente de heat kernel b_4 para campos totalmente simétricos de rango s no restringidos.

Consideremos el laplaciano $-\nabla_s^2$ y un endomorfismo E_s actuando sobre tensores de rango s totalmente simétricos en D dimensiones

$$-\nabla_s^2 - E_s. \quad (\text{B.1})$$

El coeficiente de heat kernel (diagonalizado) b_4 tendrá tres contribuciones al término cuadrático de Weyl al asumir un acople tipo Lichnerowicz con el tensor de Weyl del background $E_s = s(s-1)W$: la misma contribución de un escalar por cada grado de libertad, una contribución de la curvatura Ω_s de la conexión de espín del campo tensorial y una contribución del endomorfismo E_s

$$b_4^{(s)} \sim \frac{1}{180} \text{tr}_V \{I_s\} W^2 + \frac{1}{12} \text{tr}_V \{\Omega_s^2\} + \frac{1}{2} \text{tr}_V \{E_s^2\} \quad (\text{B.2})$$

expresión en la que los coeficientes numéricos son universales [70] y la dimensionalidad jugará un rol en el cálculo de las trazas.

Calcularemos cada término de forma independiente.

Identidad: Esta traza cuenta el número de componentes del campo de espín s totalmente simétrico en D dimensiones (descrita por una tabla de Young de una única columna de s componentes)

$$\text{tr}_V \{I_s\} = \binom{D+s-1}{D-1}. \quad (\text{B.3})$$

Los casos de espín bajo son bien conocidos

$$\text{espín } s=0 \quad \text{tr}_V \{I_0\} = 1 \quad (\text{B.4})$$

$$\text{espín } s=1 \quad \text{tr}_V \{I_1\} = D \quad (\text{B.5})$$

$$\text{espín } s=2 \quad \text{tr}_V \{I_2\} = \frac{D(D+1)}{2} \quad (\text{B.6})$$

Endomorfismo: La estructura indicial del endomorfismo (la parte del acople de Lichnerowicz que contiene al tensor de Weyl) es la siguiente

$$E_s = s(s-1)W \delta_{\nu_1 \nu_2}^{\rho_1 \rho_2} \delta_{\rho_1}^{(\mu_1} \delta_{\rho_2}^{\mu_2} \delta_{\nu_3}^{\mu_3} \dots \delta_{\nu_s}^{\mu_s)} \quad (\text{B.7})$$

Ésto generaliza al caso de espín 2 del que es sabido que el endomorfismo contiene al tensor de Riemann $2R_{ab}^{(c d)}$ (ver [11]) y por ende, contribuye al tensor de Weyl

$$\text{espín 2} \quad E_2 = 2W_{ab}^{\rho_1 \rho_2} \delta_{\rho_1}^{(c} \delta_{\rho_2}^{d)}. \quad (\text{B.8})$$

Al tomar la traza del cuadrado del endomorfismo el producto totalmente simetrizado de deltas de Kronecker puede escribirse de forma compacta y conveniente en términos de la *delta permanente generalizada* (gpd) Π (ver [2])

$$\begin{aligned} \text{tr}_V \{E_s^2\} &= s^2(s-1)^2 W_{\nu_1 \nu_2}^{\rho_1 \rho_2} \delta_{\rho_1}^{(\mu_1} \delta_{\rho_2}^{\mu_2} \delta_{\nu_3}^{\mu_3} \dots \delta_{\nu_s}^{\mu_s)} W_{\mu_1 \mu_2}^{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\lambda_1}^{(\nu_1} \delta_{\lambda_2}^{\nu_2} \delta_{\mu_3}^{\nu_3} \dots \delta_{\mu_s}^{\nu_s)} \quad (\text{B.9}) \\ &= \frac{s^2(s-1)^2}{(s!)^2} W_{\nu_1 \nu_2}^{\rho_1 \rho_2} W_{\mu_1 \mu_2}^{\lambda_1 \lambda_2} \Pi_{\rho_1 \rho_2 \nu_3 \dots \nu_s}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_s} \Pi_{\lambda_1 \lambda_2 \mu_3 \dots \mu_s}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \dots \nu_s} \end{aligned}$$

y las identidades a las que responden las gpd que serán de utilidad para calcular la última traza son las siguientes:

$$\Pi_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} \Pi_{j_{p+1} \dots j_q}^{i_{p+1} \dots i_q} \Pi_{k_{p+1} \dots k_q}^{j_{p+1} \dots j_q} \Pi_{m_1 \dots m_r}^{l_1 \dots l_r} = (q-p)! \Pi_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} \Pi_{k_{p+1} \dots k_q}^{i_{p+1} \dots i_q} \Pi_{m_1 \dots m_r}^{l_1 \dots l_r} \quad (\text{B.10})$$

$$\Pi_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} \Pi_{i_{p+1} \dots i_q}^{j_{p+1} \dots j_q} = \frac{(D+q-1)!}{(D+p-1)!} \Pi_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} \quad (\text{B.11})$$

Haciendo uso de estas identidades se hará la contracción de los correspondientes índices hasta alcanzar los resultados conocidos para el espín $s = 2$ (ver [11])

$$\text{tr}_V \{E_2^2\} = 3W^2. \quad (\text{B.12})$$

Volviendo a la expresión (B.10), al considerar en (B.10) $q = s$ y $p = 2$ y en (B.11) $q = s + 2$ y $p = s + 4$ se encuentra

$$\begin{aligned} \Pi_{\rho_1 \rho_2 \nu_3 \dots \nu_s}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_s} \Pi_{\lambda_1 \lambda_2 \mu_3 \dots \mu_s}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \dots \nu_s} &= (s-2)! \Pi_{\lambda_1 \lambda_2 \rho_1 \rho_2 \mu_3 \dots \mu_s}^{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_s} \quad (\text{B.13}) \\ &= (s-2)! \frac{(D+s+1)!}{(D+3)!} \Pi_{\rho_1 \rho_2 \lambda_1 \lambda_2}^{\mu_1 \mu_2 \nu_1 \nu_2} \end{aligned}$$

de la que se muestra la delta permanente para espín 2 la que produce el factor $3W^2$. De esta forma la traza del endomorfismo es

$$\begin{aligned} \text{tr}_V \{E_s^2\} &= \frac{s^2(s-1)^2(s-2)!(D+s+1)!}{(s!)^2(D+3)!} \cdot 3W^2 \quad (\text{B.14}) \\ &= 3 \binom{D+s+1}{D+3} W^2. \end{aligned}$$

Curvatura: La curvatura de la conexión de espín para el tensor totalmente simétrico de rango s está dada por

$$\Omega_s = \frac{1}{2} R_{\mu\nu}^{ab} \Sigma_{ab} \quad (\text{B.15})$$

en donde Σ_{ab} satisface el álgebra de Lorentz

$$[\Sigma_{ab}, \Sigma_{cd}] = -g_{ac} \Sigma_{bd} + g_{ad} \Sigma_{bc} + g_{bc} \Sigma_{ad} - g_{bd} \Sigma_{ac}. \quad (\text{B.16})$$

Se muestra explícitamente que la estructura indicial de los generadores del álgebra se escribe en términos del tensor métrico y producto de deltas de Kronecker

$$(\Sigma_{ab})_{c_1 \dots c_s}^{d_1 \dots d_s} = 4 \delta_{[a}^{(d_1} g_{b](c_1} \delta_{c_2}^{d_2} \dots \delta_{c_s)}^{d_s)}. \quad (\text{B.17})$$

Ahora nuestro objetivo es calcular la traza del cuadrado de esta curvatura

$$\text{tr}_V \{\Omega_s^2\} = \frac{1}{2} R_{\mu\nu}^{ab} (\Sigma_{ab})_{c_1 \dots c_s}^{d_1 \dots d_s} \frac{1}{2} R^{\mu\nu cd} (\Sigma_{cd})_{d_1 \dots d_s}^{c_1 \dots c_s} \quad (\text{B.18})$$

el que es sencillo de realizar escribiendo ésta en términos de la gpd y haciendo nuevamente la contracción de índices hasta llegar al dato conocido que es el de espín $s = 1$

$$\text{tr}\{\Omega_1^2\} \sim -W^2. \quad (\text{B.19})$$

Para hacer este cálculo, salvo un factor común relacionado a la simetrización y antisimetrización, haremos uso nuevamente de las gdp

$$g_{b\hat{d}} \delta_a^{(d_1} | \delta_{(c_1}^{\hat{d}} \delta_{c_2}^{d_2} \dots \delta_{c_s)}^{d_s)} g_{d\hat{c}} \delta_c^{(c_1} | \delta_{(d_1}^{\hat{c}} \delta_{d_2}^{c_2} \dots \delta_{d_s)}^{c_s)} \quad (\text{B.20})$$

$$= g_{b\hat{d}} \delta_{(c}^{\hat{d}} \delta_{c_2}^{(d_2} \dots \delta_{c_s)}^{d_s)} g_{d\hat{c}} \delta_{(a}^{\hat{c}} \delta_{d_2}^{(c_2} \dots \delta_{d_s)}^{c_s)} \quad (\text{B.21})$$

$$= g_{b\hat{d}} \frac{\prod_{c_2 \dots c_s}^{\hat{d} d_2 \dots d_s}}{(s-1)!} g_{d\hat{c}} \frac{\prod_{a d_2 \dots d_s}^{\hat{c} c_2 \dots c_s}}{(s-1)!} \quad (\text{B.22})$$

$$= g_{b\hat{d}} g_{d\hat{c}} \frac{1}{(s-1)!} \prod_{a c c_2 \dots c_s}^{\hat{d} \hat{c} c_2 \dots c_s} \quad (\text{B.23})$$

$$= g_{b\hat{d}} g_{d\hat{c}} \prod_{ac}^{\hat{d} \hat{c}} \frac{1}{(s-1)!} \frac{(D+s)!}{(D+1)!}. \quad (\text{B.24})$$

Ahora que ya se extrajo la dependencia en la dimensión y el espín basta con invocar el resultado de espín $s = 1$ para encontrar la respuesta. De esta forma la contribución de la curvatura al término cuadrático de Weyl es

$$\text{tr}_V \{\Omega_s^2\} \sim - \binom{D+s}{D+1} W^2. \quad (\text{B.25})$$

Ésto lleva al resultado conocido para espín $s = 2$ sin restricciones

$$\text{espín 2:} \quad \text{tr}_V \{\Omega_2^2\} \sim - (D+2) W^2 \quad (\text{B.26})$$

que corresponde a lo mostrado en [11].

Hemos de comentar que estos resultados resumen diversos resultados reportados en la literatura. Por ejemplo, para el laplaciano de Lichnerowicz actuando sobre tensores transversos y sin traza se debe sustraer la traza y la contribución de la parte longitudinal

$$\begin{aligned}
\beta_s^{\perp T} = & \frac{1}{180} \binom{D+s-1}{D-1} - \frac{1}{12} \binom{D+s}{D+1} + \frac{3}{2} \binom{D+s+1}{D+3} \\
& - \frac{1}{180} \binom{D+s-2}{D-1} + \frac{1}{12} \binom{D+s-1}{D+1} - \frac{3}{2} \binom{D+s}{D+3} \\
& - \frac{1}{180} \binom{D+s-3}{D-1} + \frac{1}{12} \binom{D+s-2}{D+1} - \frac{3}{2} \binom{D+s-1}{D+3} \\
& + \frac{1}{180} \binom{D+s-4}{D-1} - \frac{1}{12} \binom{D+s-3}{D+1} + \frac{3}{2} \binom{D+s-2}{D+3}
\end{aligned} \tag{B.27}$$

A modo de ejemplo, los casos de espín $s = 0, 1$ y 2 son los siguientes

$$\text{espín } s = 0: \quad \beta_0 = \frac{1}{180} \tag{B.28}$$

$$\text{espín } s = 1: \quad \beta_1^\perp = \frac{D-16}{180} \tag{B.29}$$

$$\text{espín } s = 2: \quad \beta_2^{\perp T} = \frac{D^2 - 31D + 508}{360} \tag{B.30}$$

todo esto acorde, por ejemplo, a lo mostrado en [112].